

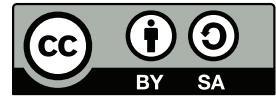
Dispense di *Istituzioni di Relatività*

Dagli appunti presi alle lezioni del professor PierAlberto Marchetti

Corso di Istituzioni di Relatività
per la Laurea Triennale in Fisica
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali, Università di Padova
Anno Accademico 2005-2006

Copyright ©2006 GIOVANNI LANZANI.

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-ShareAlike 3.0 Unported”](#) license.



Indice

I	Il corso	5
	Introduzione	6
I	Note storiche	7
1	L'etere e l'elettromagnetismo di Maxwell	8
1.1	Esperimento sull'aberrazione	9
1.2	L'esperimento di Michelson e Morley	9
2	Principi di relatività	11
II	Relatività Einsteniana	13
1	Glory & Consequences	13
2	Le trasformazioni di Lorentz	14
3	Relativo ed assoluto	17
3.1	Quello che rimane assoluto	17
3.2	Contrazione lunghezze	18
3.3	Dilatazione dei tempi	18
4	Considerazioni	19
5	Composizione delle velocità	20
6	Invarianza dell'intervallo spazio-temporale	21
III	Formulazione geometrica	23
1	Gruppi	23
1.1	Notazioni	24
1.2	Condizione di invarianza	25
1.3	Gruppi di Poincaré e Lorentz	25
1.4	Particolarità del gruppo di Lorentz proprio.	26
2	Calcolo vettoriale	28
2.1	Calcolo vettoriale in meccanica prerelativistica	28
3	E in fisica relativistica...? I tensori.	29
4	Il calcolo tensoriale...	30
5	Algebra tensoriale	31
5.1	Moltiplicazioni tra vettori	32
5.2	Contrazione degli indici	32
6	Campi tensoriali, quadrigradiente e derivate	32
IV	Meccanica relativistica	34
1	Grandezze fondamentali	34
2	La quadriforza	36
3	Sistemi di riferimento	37
4	Processi tra particelle (dinamica relativistica)	38
4.1	Decadimento	38
4.2	Decadimento a due corpi	39
4.3	Distribuzione di probabilità nel decadimento	42
4.4	Urti tra particelle	44

4.5	Le variabili di Mandelstam	45
4.6	Gli urti veri e propri	46
V	Elettromagnetismo	48
1	Il sistema di Gauss	48
2	Il tensore $F^{\mu\nu}$	49
3	$F^{\mu\nu}$ sotto trasformazioni di Lorentz	52
4	La δ di Dirac	54
5	La quadridensità di corrente	55
6	Moti di particelle	57
II	La tesi	60
VII	Il problema dell'etere	61
VIII	Poincaré	63
1	Le trasformazioni di Lorentz	63
2	Le equazioni di Maxwell	65
3	Ulteriori sviluppi	66
VIII	Einstein	68
1	Le trasformazioni di Lorentz	69
2	Composizione delle velocità ed equazioni di Maxwell	70
3	Significato fisico delle trasformazioni di Lorentz	70
IX	Un tentativo di confronto.	72
1	Il punto di partenza	72
2	Il principio di relatività	73
3	Il concetto di tempo	73
4	La relatività dei tempi e delle lunghezze	74
5	Una nuova dinamica	74
6	Etere	75
	Bibliografia	76

Parte I

Il corso

Introduzione

*L'anima mia attende il Signore
Più che le sentinelle l'aurora.*

Questa dispensa è nata come pretesto per affinare le mie capacità con L^AT_EX. Penso di aver raggiunto il mio scopo.

Era mia intenzione distribuirla gratuitamente, e per un periodo di tempo è stato così. Poi cambiai opinione, e decisi di lavoravici per poi venderla al prezzo di due pacchetti di Marlboro.

Voi che leggete non l'avete pagata, quindi ho evidentemente cambiato di nuovo idea. Perché? Be', i motivi sono tanti, il principale dei quali è, probabilmente, la filosofia che sta dietro all'open source, motivo per il quale ora, non solo la dispensa è gratuita, ma è anche disponibile il suo codice sorgente (non azzardatevi a cambiare questa pagina ...)

Ringrazio Alessandro Broggio per l'aiuto datomi nella stesura di questa dispensa, il professor Zampieri e il professor Zilio, che m'hanno accompagnato, chi più, chi meno, nel mondo della matematica e della fisica, alle scuole superiori; inoltre ringrazio il professor Marchetti, che s'è preoccupato di correggermi la dispensa, di fare la tesi con me, e di tenere il corso, nonché di favorire noi studenti di fronte ai professori di laboratorio del C.C.S. di fisica, che cercano sempre di rubare ore alle materie più belle. Il ringraziamento più grande va poi a Giuditta, senza la quale non avrei scritto niente, essendo stata lei a spingermi a continuare quando di voglia non ne avevo.

V'è poi la mia mail lanzani@spiro.fisica.unipd.it,¹ attiva per ricevere suggerimenti che vi vengono alla mente, ed errori che riscontrate, nella lettura di questa dispensa. È anche stata messa sotto cvs, ma la cosa non mi pare abbia riscosso troppo successo, in quanto oltre a me nessuno l'ha mai modificata. In ogni caso la potete trovare, coi sorgenti, su

<http://spiro.fisica.unipd.it/~lanzani/public/rel/>

Una nota per tutti i computer nerd con mille suggerimenti stilistici: cercate di concentrare le vostre energie nel correggere la “sostanza” della dispensa.

Parlando del corso: non preoccupatevi per la notazione tensoriale: sarebbero necessari esercizi semplici per impratichirsi. Il resto è tutto abbastanza facile, e, soprattutto bello. Forse potrà risultare ancora più interessante leggere la mia tesi di laurea, che costituisce la seconda parte della dispensa. Non è molto difficile, e penso che una volta terminato il corso (ma anche prima), sarete perfettamente in grado di apprezzarne il valore.

Il corso si conclude con un'ora di relatività generale, durante la quale, ovviamente, non s'è nemmeno avuto il tempo di farsi una vaga idea di quello che è la relatività generale, e perciò non la riporto.

Giovanni Lanzani

¹Ho una ragazza, studio, sono in Erasmus in Olanda, da dove, spero, non tornerò: quindi non ho tutto il tempo libero che avete voi: pazientate se non vi rispondo subito.

Capitolo I

Note storiche

Indice

1	L'etere e l'elettromagnetismo di Maxwell	8
1.1	Esperimento sull'aberrazione	9
1.2	L'esperimento di Michelson e Morley	9
2	Principi di relatività	11

Come nasce la relatività ristretta, altrimenti detta speciale? Nasce dal tentativo, riuscito, di conciliare meccanica newtoniana ed elettromagnetismo. Einstein stesso scrive a proposito:

La teoria della relatività nasce necessariamente, per la presenza di serie e profonde contraddizioni, dalle quali sembrava non ci fosse uscita. La forza della nuova teoria sta nella consistenza e semplicità con cui risolve queste difficoltà, usando poche, ma convincenti, assunzioni.

Ma dove queste teorie, elettromagnetismo e meccanica, erano in disaccordo? Sostanzialmente sembrava che non si trovasse un gruppo di sistemi di riferimento in cui le leggi dell'elettromagnetismo avessero la stessa forma, ovvero per avere una descrizione dei fenomeni fisica, sembrava fosse necessario modificare le leggi dell'elettromagnetismo a seconda del sistema di riferimento in cui ci si trovava.

Si ipotizzò dunque che fossero le leggi per passare da un sistema di riferimento all'altro ad essere sbagliate, ma a questo punto si rendeva necessario cambiare le leggi della meccanica da un sistema di riferimento all'altro.

Prima di poter procedere è tuttavia necessario dare una definizione precisa di sistema di riferimento, in maniera da evitare errori o imprecisioni:

0.1 Definizione. Un sistema di riferimento è l'insieme di un sistema di coordinate e di orologi, sincronizzati tra loro, in grado d'associare ad ogni evento un punto dello spazio e un istante di tempo. Un sistema di riferimento in cui ogni corpo non soggetto a forze è in quiete o in moto rettilineo, è detto sistema di riferimento inerziale.

La definizione precisa di evento verrà data più avanti, per ora possiamo prendere la nozione euristica che abbiamo di esso. Nei sistemi di riferimento in moto a velocità costante rispetto a quello delle stelle fisse, le leggi della meccanica assumevano la stessa forma tramite le trasformazioni (1.0.1). Quindi la terra poteva considerarsi un ottimo laboratorio, in quanto l'accelerazione che essa aveva, rispetto a tale sistema, poteva dirsi trascurabile. Questo era vero se, come detto, per collegare due sistemi di riferimento si utilizzavano le (1.0.1). Più precisamente, detti S ed S' i due sistemi inerziali, S' in moto con velocità v rispetto ad S (velocità costante in direzione e modulo), si aveva che, se

$$t, \mathbf{x} \text{ coordinate in } S \quad t', \mathbf{x}' \text{ coordinate in } S'$$

allora

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (\dagger) \quad (1.0.1)$$

Si aveva poi l'*invarianza degli intervalli temporali*, ossia:

$$\Delta t = \Delta t' \quad (1.0.2)$$

e degli *intervalli spaziali*

$$l = |\Delta \mathbf{x}| = |\Delta \mathbf{x}'| = l' \quad (1.0.3)$$

Vi era poi il:

0.2 Teorema (di addizione delle velocità).

$$\mathbf{v}' = \frac{d}{dt} \mathbf{x}' = \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}$$

Tale teorema si ottiene derivando (†), ed esso asserisce che non esiste una velocità assoluta. Come anticipato prima, tuttavia, con queste trasformazioni le leggi dell'elettromagnetismo non potevano essere valide in tutti i sistemi di riferimento. Vediamo come.

1 L'etere e l'elettromagnetismo di Maxwell

Prendiamo l'equazione delle onde elettromagnetiche:

$$\left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{al posto di } \mathbf{E} \text{ si può avere } \mathbf{B});$$

nell'800 ritenevano che c fosse la velocità della luce nell'etere luminifero (che porta la luce). Perché si parlava di etere? Come prima accennato, le leggi dell'elettromagnetismo non avevano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento, e quindi l'elegante forma proposta da Maxwell era corretta solo in un particolare di questi sistemi. Si ipotizzò questo sistema uguale al sistema di riferimento delle stelle fisse, e lo si ribattezzò etere, il sistema in cui le leggi di Maxwell erano vere senza bisogno di modifiche. Vedere che in altri sistemi di riferimento queste modifiche erano necessarie, non è di difficile constatazione: si prenda infatti un'onda elettromagnetica (che ha la stessa velocità di propagazione della luce) nel sistema S . Essa ha velocità c , poiché per l'elettromagnetismo la velocità di propagazione di tale onda è

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}; \quad (1.1.1)$$

se S' si muove con velocità v in direzione e verso dell'onda elettromagnetica, esso rileva la luce avere velocità $c' = c - v$, per il teorema appena visto. Ma allora non sarebbe più valida la relazione (derivata dalle normali equazioni di Maxwell)

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

essendo μ_0 e ε_0 costanti e c' la velocità della luce per l'osservatore di S' . Se ne deduce che una, ed una sola, delle seguenti ipotesi dev'essere vera:

Prima ipotesi Le leggi della meccanica sono covarianti per cambiamento di sistema di riferimento inerziale, ma non lo sono le leggi dell'elettromagnetismo; le trasformazioni (1.0.1) sono giuste.

Seconda ipotesi Le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo sono covarianti per cambiamento di sistemi di riferimento inerziale, le trasformazioni (1.0.1) sono giuste, ma il modo in cui sono scritte le leggi dell'elettromagnetismo è sbagliato.

Terza ipotesi Le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo sono covarianti per cambiamento di sistemi di riferimento inerziale, il modo in cui sono scritte le leggi dell'elettromagnetismo è giusto (si lascia dunque spazio ad un'eventuale riscrittura delle leggi della meccanica), ma le trasformazioni (1.0.1) sono sbagliate.

L'ipotesi corretta la avanzò Einstein, e verrà affrontata dopo.

Nelle tre ipotesi abbiamo fatto uso del termine “covarianti”: cosa significa? Una legge fisica è covariante quando ha la stessa forma per tutti i sistemi di riferimento inerziali; ad esempio nel sistema di riferimento S la seconda legge di Newton si scrive

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

cambiando sistema di riferimento, sarà necessario usare delle trasformazioni di coordinate per poter scrivere la legge nel nuovo sistema; ebbene, usando le trasformazioni di Galileo e le leggi della meccanica conosciute, nel nuovo sistema di riferimento la “trasformazione” della seconda legge di Newton è

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}',$$

dove $m = m'$: dunque la legge della meccanica ha la stessa forma in entrambi i sistemi di riferimento, e si può parlare di covarianza.

Assumendo dunque che l'esistenza dell'etere, era possibile trovare il moto della terra rispetto a tale sistema? Vediamo ora due esperimenti che rispondono a tale domanda in maniera inconciliabile.

1.1 Esperimento sull'aberrazione

Consideriamo il telescopio in figura 1.1. Ci proponiamo di andare a verificare l'angolo di inclinazione che esso deve avere per poter osservare la luce proveniente da un corpo celeste. Se la terra si muovesse con una certa velocità rispetto a tale stella, le cose andrebbero come in figura, e il telescopio, senza alcun angolo di inclinazione, sarebbe inservibile. Infatti da quando il raggio della stella entra nel telescopio, a quando raggiunge l'ordinata dell'obbiettivo (consideriamo la stella, qualsiasi essa sia, solidale all'etere), il telescopio si sposta e la luce non colpisce l'obbiettivo. Quindi è necessario inclinare il telescopio. Chiamiamo l'angolo di inclinazione ϑ (è l'angolo formato dalla terra e dal lato più corto dell'obbiettivo). Per valutare approssimativamente la velocità della terra rispetto al sistema delle stelle fisse, consideriamo il sole come una stella fissa; la distanza terra sole vale $R_{TS} = 150 \cdot 10^9 m$. Il periodo di rivoluzione attorno al sole vale $T = 365 gg \Rightarrow v = 3 \cdot 10^4 m/s$. Se il telescopio è lungo l (farsi un disegno per meglio capire), il tempo di percorrenza della luce è $t = l \cos \vartheta / c$. La distanza percorsa dal telescopio in t è $x = vt$. L'angolo ϑ risulta dunque:

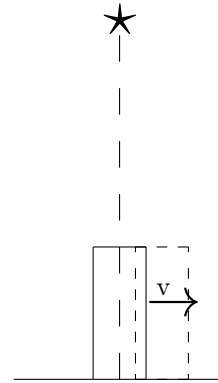


Figura 1.1: Luce stellare incidente sul telescopio

$$\tan \vartheta = \frac{vt}{l \cos \vartheta} = \frac{vt}{ct} \approx 10^{-4}$$

Come si vede quest'angolo è molto piccolo, ma le misure sono in accordo con la teoria, cioè è effettivamente necessario inclinare i telescopi di ϑ per poter osservare i raggi celesti.¹

1.2 L'esperimento di Michelson e Morley

L'esperimento di Michelson e Morley, effettuato per la prima volta nel 1881, era stato ideato per trovare la velocità della luce rispetto all'etere. L'esperimento è schematizzato in figura 1.2 nella pagina seguente. Spieghiamo cosa succede. La terra si muove con velocità v rispetto all'etere (secondo le convinzioni dell'epoca). Dunque i raggi che colpivano lo specchio semirifrangente, e si propagavano in direzione verticale, facevano un percorso, nel sistema di riferimento etere, come quello in figura 1.3 nella pagina successiva (tener ben presente il fatto che una volta raggiunto uno specchio, la luce si propaga come un'onda emisferica). Dal disegno si capisce (è

¹Tuttavia quest'esperimento non fu considerato decisivo, poiché esso utilizzava le approssimazioni di ottica geometrica dell'elettromagnetismo.

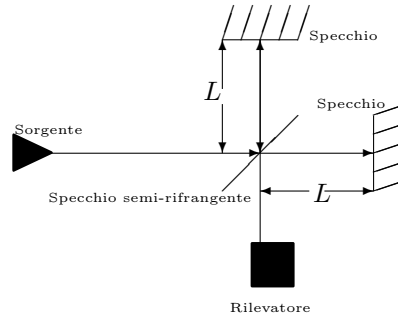


Figura 1.2: Schema dell'esperimento di Michelson e Morley, visto nel sistema di riferimento solidale alla terra

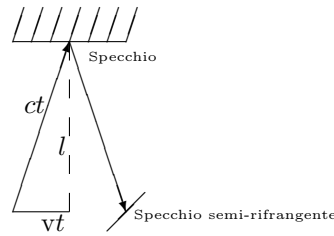


Figura 1.3: Percorso della luce in direzione verticale

sufficiente usare il teorema di Pitagora) che $(ct)^2 = l^2 + (vt)^2$, da cui risulta:

$$t_{\perp} = 2t = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.1.2)$$

L'altro raggio invece fa il percorso, nell'etere, in figura 1.4. Si può facilmente capire che

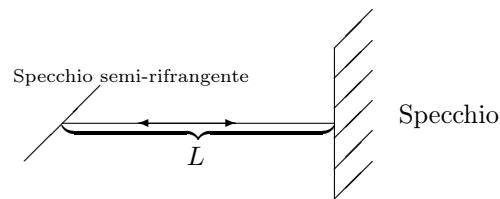


Figura 1.4: Percorso della luce in direzione orizzontale

$t_{\parallel} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{v+c}$, da cui:

$$t_{\parallel} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.1.3)$$

Dal momento che $v \ll c$ possiamo sviluppare in serie di v^2/c^2 la (1.1.2) e la (1.1.3), ottenendo:

$$t_{\perp} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (1.1.4)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (1.1.5)$$

In definitiva $t_{\parallel} - t_{\perp} \simeq \frac{v^2 l}{c^3}$. Sempre facendo riferimento alla figura 1.2 a fronte, si vede che i raggi, dopo esser tornati indietro, interferivano. Con un interferometro (il rivelatore della figura), si poteva misurare quest'interferenza. Lo sfasamento spaziale, in termini di lunghezza d'onda, è:

$$\Delta\lambda = c(t_{\parallel} - t_{\perp}) \simeq \frac{v^2 l}{c^2}$$

Il numero di frange che si doveva dunque rilevare con l'interferometro era:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

L'esperimento del 1887 (quello eseguito con i migliori accorgimenti per diminuire gli errori di misura), aveva $l = 11m$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}m$, $\frac{v}{c} = 10^{-4}$. Da questi dati risulta $\Delta n/n = 0.18 \pm 0.01$. Tuttavia i risultati sperimentali davano $n = 0$: questo fatto rimaneva inspiegabile: l'etere si muoveva con la terra? Come era possibile interpretare tale fenomeno?

Osservazione (Fitzgerald e Lorentz). Una prima risoluzione del problema fu avanzata da Fitzgerald (1889), il quale asseriva che il braccio parallelo alla direzione del moto, si contraeva di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Poi venne Lorentz, che affermò che, nel caso fosse vera la contrazione di Fitzgerald, allora anche i tempi del sistema in moto rispetto all'etere dovevano dilatarsi dello stesso fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. In tal modo egli trova le trasformazioni tra i sistemi di riferimento che portano il suo nome (e che andremo a ricavare dopo).

2 Princìpi di relatività

Successivamente la cosa venne affrontata da un punto di vista matematico: tra il 1902 e il 1905, Poincaré si avvicinò al principio di relatività einsteniano, dicendo:

2.1 Principio (di Relatività di Poincaré). Le leggi della fisica devono essere covarianti (avere cioè la stessa forma) per sistemi inerziali.

Poincaré trovò dunque le trasformazioni di coordinate che resero l'elettrodinamica compatibile con il principio di relatività. Tali trasformazioni sono le trasformazioni di Lorentz, che costituiscono un gruppo; tale gruppo può essere ampliato ulteriormente, mantenendo la sua struttura, dando origine al gruppo di Poincaré.

Venne poi la volta di Einstein (1905), il quale pose alla base della sua teoria due principi:

- ① Principio di relatività
- ② La velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Quale fu la grande innovazione di Einstein rispetto a Poincaré? Il fatto che egli eliminò il concetto di etere.²

Successivamente, dall'invarianza di c , Einstein, con una serie di esperimenti ideali, ricavò tutta una serie di leggi, tra cui le trasformazioni di Lorentz. Cominciamo con lo scrivere gli assiomi alla base della sua teoria.

- ❶ Omogeneità e absolutezza dello spazio e del tempo, e isotropia (non vi sono differenze tra le direzioni) dello spazio.³
- ❷ Si ha l'equivalente del principio di relatività di Poincaré:

²Ad inizio capitolo abbiamo imbrogliato il lettore, dicendo che la relatività ristretta nasce per i contrasti tra elettromagnetismo e meccanica: Einstein, nello sviluppare la sua teoria, venne invece mosso dalla convinzione che non potesse esistere un sistema di riferimento privilegiato, ovvero di un moto assoluto, che portasse delle asimmetrie nell'elettromagnetismo; che questo risolvesse i contrasti di cui abbiamo parlato è un altro discorso, poiché non era possibile risolvere il dilemma di Einstein senza appianare i contrasti tra meccanica ed elettrodinamica.

³In realtà questo primo assioma era implicito nella sua trattazione

2.2 Principio (di Relatività einsteniano). Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

③ La velocità della luce nel vuoto⁴ è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali

2.3 Osservazione. Osserviamo che ❶ era valido anche prima della teoria della relatività di Einstein

2.4 Osservazione. Nella fisica pre-relativistica ❷ era sostituito dal principio di *relatività galileiano*, il quale asseriva:

2.5 Principio (di Relatività di Galileo). Le leggi della meccanica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.⁵

2.6 Osservazione. In fisica pre-relativistica ❸ era sostituita dall'invarianza degli intervalli spaziali (1.0.3) e temporali (1.0.2)

⁴Ossia assenza di materia

⁵Come già notato, ciò era impossibile per l'elettromagnetismo, se si usavano le trasformazioni di Poincaré.

Capitolo II

Relatività Einsteniana

Indice

1	Glory & Consequences	13
2	Le trasformazioni di Lorentz	14
3	Relativo ed assoluto	17
3.1	Quello che rimane assoluto	17
3.2	Contraazione lunghezze	18
3.3	Dilatazione dei tempi	18
4	Considerazioni	19
5	Composizione delle velocità	20
6	Invarianza dell'intervallo spazio-temporale	21

Einstein a questo punto si premura di costruire il suo sistema basato su **1**, **2**, **3**. Come comincia? Prendiamo una sbarra lunga l in un sistema di riferimento inerziale, che chiamiamo S . Per prima cosa Einstein asserisce che assumere che ogni sistema di riferimento inerziale veda la sbarra lunga l non è, a priori, un'ipotesi giustificata. Come si misura la lunghezza in moto? Per concretizzare prendiamo una sbarra \overline{PQ} , solidale con il sistema S , il quale si muove con velocità v rispetto al sistema S' ; l'osservatore della sbarra misura la lunghezza della sbarra con un metro (la sbarra è ferma rispetto a lui); l'osservatore in S' può fotografare la sbarra e misurare la fotografia, di modo che gli estremi P e Q siano osservati allo stesso istante nel suo sistema di riferimento. Si ha che

S' dice che la sbarra misura l'
 S dice che la sbarra misura l

Einstein afferma che nulla, dal punto di vista logico, mi garantisce $l = l'$. Quindi non è affatto detto che le misure di lunghezza rimangano invariate passando da un sistema di riferimento all'altro.

1 Glory & Consequences

Diamo innanzi tutto la definizione di evento:

1.1 Definizione. Gli eventi, dal punto di vista fisico, sono le minime determinazioni spazio-temporali possibili; un evento, nei diagrammi spazio-temporali è rappresentato da una coordinata spaziale (saranno (x^1, x^2, x^3)), ed una coordinata temporale (sarà indicata come x^0).¹

La metrica spazio-temporale per questi eventi sarà

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 \quad (2.1.1)$$

¹Dato che non sono capace di disegnare in 4-D, e d'altronde voi non siete capaci di vedere in 4-D (eccetto Candilera), sopprimiamo dai nostri disegni le altre due coordinate spaziali, con le quali siamo abituati a trattare.

Prendiamo in considerazione un diagramma (vedi figura 2.1) dove come ascisse abbiamo le x , e come ordinate abbiamo ct . I diagrammi che andremo a considerare descriveranno dunque lo spazio tempo, assumendo che esso sia una varietà differenziale a 2 (o a 4) dimensioni². Tali diagrammi, detti diagrammi di Minkowski, rappresentano lo spazio quadridimensionale con la metrica data dalla (2.1.1), e questo spazio fornito di tale metrica è detto spazio di Minkowski. In questo diagramma tutti i raggi di luce che vi vengono rappresentati, sono inclinati di 45° , poiché $c = x/t$. La traiettoria del fascio di luce deve quindi essere la bisettrice tra asse spaziale ed asse ct .³ Consideriamo un corpo A e un corpo B . L'origine sia O . A e B abbiano distanze uguali rispetto ad O . Si faccia riferimento alla figura 2.1

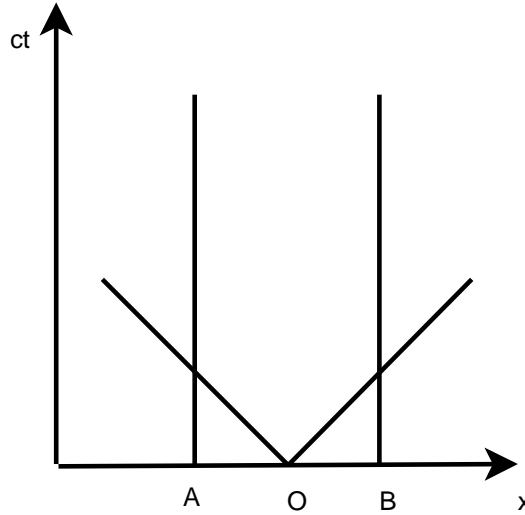


Figura 2.1: Traiettoria di due punti fermi colpiti da un raggio di luce

Se i due corpi sono fermi le loro traiettorie sono rette parallele a ct . Un raggio di luce che parte da O , li colpisce allo stesso istante se $\overline{AO} = \overline{OB}$, come già assunto. Cambiamo ora le cose. Siano i due corpi in moto con velocità v rispetto ad S (siano cioè solidali ad un sistema S').

Facendo riferimento alla figura 2.2 nella pagina successiva, siano A' e B' solidali a S' , immagini di A e B t.c. $\overline{AO} = \overline{OB}$. Per S' la situazione è uguale a quella vista in precedenza, e dunque gli eventi A' e B' sono simultanei in S' ; infatti la luce interseca la linea di universo di A' e di B' (che sono le stesse di A e B , ma ritorneremo su questo nel paragrafo 3.1 a pagina 17) nello stesso t' (usando 2 e 3). In S' , tuttavia i due eventi non sono più simultanei (basta proiettarli sull'asse ct per accorgersene). Allora:

1.2 Osservazione. Eventi contemporanei in un sistema possono non esserlo in un altro sistema.

2 Le trasformazioni di Lorentz

Riprendiamo il discorso del capitolo precedente da un punto di vista algebrico. Come prima sia S' sistema di riferimento inerziale in moto con velocità v rispetto ad S . Tempi e moti con gli apici si riferiscono ad S' ; senz'apici ad S .

Consideriamo la traiettoria di un moto fermo in S' : $x' = x'_0$, indipendentemente da t' . Tale moto in S soddisferà la relazione $x - vt = x_0$, con x_0 indipendente da t . Allora, dacché x_0 e

²Ovvero esso è continuo, differenziabile, con topologia localmente omeomorfa ad \mathbb{R}^2 , o \mathbb{R}^4 , separabile, con base di intorno numerabile (e può perciò essere metrizzabile).

³Come conseguenza del fatto che la velocità della luce è uguale in tutti i sistemi.

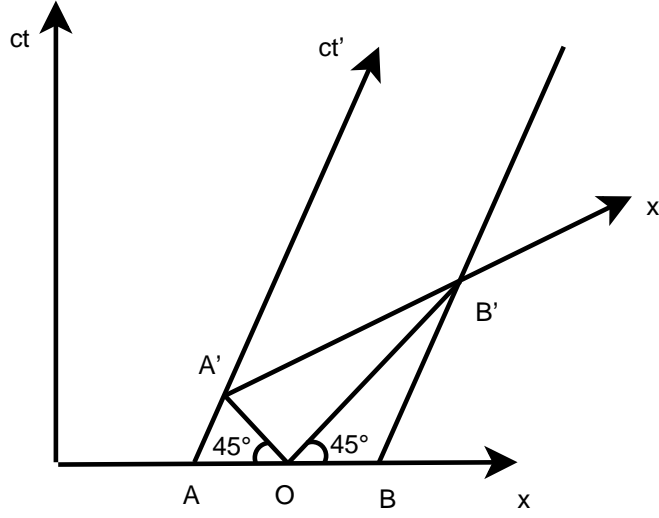


Figura 2.2: Traiettoria di due punti in movimento colpiti da un raggio di luce

x'_0 sono costanti rispetto a t , si può scrivere:

$$\frac{x - vt}{x'} = \alpha \quad \text{costante.} \quad (2.2.1)$$

Da qui ricavo $\alpha x' = x - vt$. Per reciprocità, scambiando S con S' e v con $-v$, ottengo:

$$\frac{x' + vt'}{x} = \alpha \quad (2.2.2)$$

Combinando la (2.2.1) con la (2.2.2), in modo da eliminare x' :

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left(t + \frac{\alpha^2 - 1}{v} x \right) \quad (2.2.3)$$

Se impongo che $t = t'$ ottengo $\alpha = 1$ e $x' = x - vt$. Tuttavia per avere la relatività ristretta non devo imporre $\alpha = 1$, bensì $c = \text{costante}$, cioè $x' = ct'$ e $x = ct$. Sostituendo quest'ultime relazioni dentro (2.2.1) e dentro (2.2.2) ottengo:

$$\alpha ct' = ct - vt$$

$$\alpha ct = ct' + vt'$$

Facendo il prodotto tra le due ottengo

$$\alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dacché per $v = 0$ si ha $\alpha = 1$, alla fin fine:

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Posso dunque ricavare le equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \text{(deriva da (2.2.1))} \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \text{(deriva da (2.2.3))} \end{cases}$$

G.L.

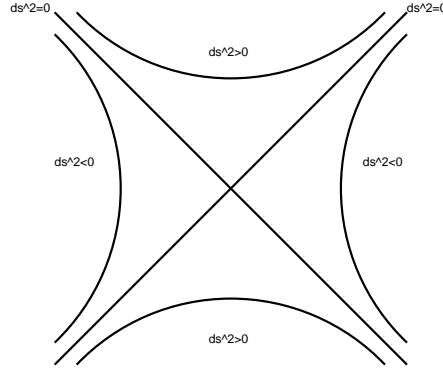


Figura 2.3: Come variano le iperboli al variare della costante

Se introduciamo gli assi x e ct otteniamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \frac{x - \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ ct' = \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

A questo punto possiamo dimostrare che l'intervallo spazio temporale s^2 è invariante

$$\begin{aligned} (x')^2 - (ct')^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[(x - vt)^2 - (ct - \frac{v}{c}x)^2 \right] \\ &= x^2 - (ct)^2 \end{aligned}$$

Perciò se pongo $(c dt)^2 - x^2 = \text{cost}$, ne esce l'equazione di un'iperbole, e cost è la stessa per tutti i sistemi di riferimento inerziali. Una volta trovate le (2.2.4) ci accorgiamo che esse valgono per velocità minori strettamente di c . Infatti guardando il denominatore delle trasformazioni, ci accorgiamo che deve valere la relazione:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0 \quad \implies c^2 - v^2 > 0 \implies c > v$$

Quindi le trasformazioni di Lorentz connettono solo particelle che hanno velocità strettamente minore di c .

Riprendiamo per un attimo la discussione sulla quantità invariante prima trovata. A seconda che la costante sia maggiore, minore, o uguale a 0 si hanno le situazioni in figura 2.3.

Le iperboli sovrastanti gli asintoti, e sottostanti ad esse, sono quelle con $\text{cost} > 0$, e sono le uniche che possono verificarsi (assieme agli asintoti), in quanto solo per esse vale $v < c$. Si giunge così alla rappresentazione del cono di luce di un punto (nel nostro caso, quello della figura 2.4 nella pagina successiva). Cos'è questo cono di luce? Prendiamo due raggi di luce che si propagano da O , nella direzione delle x , con verso opposto. Essi descriveranno la traiettoria che, se unita, darà origine al semicono superiore. Discorso analogo per due raggi di luce che arrivano contemporaneamente in O : essi descriveranno il semicono inferiore. L'unione di questi due semiconi viene detto cono di luce (in quanto formato da raggi di luce.). Spieghiamo più in dettaglio il vantaggio dell'introduzione del cono di luce. Prendiamo gli eventi A e B del diagramma in figura. L'intervallo ds sarà positivo. Poiché tale intervallo è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, qualsiasi altro sistema di riferimento vedrà tale intervallo positivo.

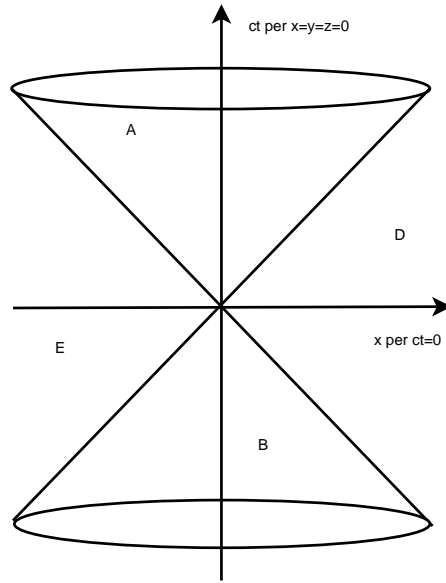


Figura 2.4: Cono di luce

Tali intervalli si dicono di tipo tempo (ogni intervallo puramente temporale è infatti positivo.) Gli eventi all'esterno del cono di luce saranno invece separati da intervalli negativi, chiamati di tipo spazio. Agli eventi sulle bisettrici degli assi saranno invece associati intervalli di tipo luce, pari ovvero a 0. È facile rendersi conto che gli eventi D ed E possono essere contemporanei, in qualche opportuno sistema di riferimento. Gli altri due eventi invece no. Per questo si dice che A e B stanno, rispettivamente, nel cono del futuro e nel cono del passato, in quanto appartengono al futuro e al passato assoluti dell'origine degli assi (a questo punto è facile capire cosa voglia dire passato e futuro assoluti). Quindi, guardando il cono di luce di un punto, è subito possibile capire molte cose sulla “sistemazione” temporale dell'evento, in relazione ad altri eventi.

Si capisce anche che eventi che non appartengono al futuro o passato assoluto, non possono essere congiunti ad O tramite traiettorie. Questo si vede geometricamente considerando la tangente di tale traiettoria, la quale risulterebbe minore di uno, ossia $\frac{cdt}{dx} < 1 \implies v > c$, assurdo.

2.1 Osservazione. Possiamo a questo punto notare che il fatto di poter essere contemporanei implica che non è possibile che un'informazione che parte da uno di questi due eventi, possa raggiungere l'altro evento, in nessun sistema di riferimento, proprio perché dovrebbe compiere una traiettoria con tangente (almeno in taluni punti), minore di uno. Questo rende conto della finitezza della velocità di propagazione dell'informazione.

3 Relativo ed assoluto

Ci proponiamo in questa sezione di analizzare, come si comportano lunghezze e tempi nella teoria della relatività speciale: il punto cruciale risulterà nel trovare, ancora una volta, risultati in netto contrasto con le nostre convinzioni.

3.1 Quello che rimane assoluto

Nel moto di un corpo visto da diversi osservatori rimane assoluta l'immagine del corpo nello spazio tempo (ciò che viene chiamato la sua linea di universo). Immaginiamo infatti di prendere un oggetto fermo nel sistema di riferimento S , di assi x e ct . Sia il corpo lungo un'unità

(ragioniamo adimensionalmente, le cose non cambiano nella sostanza). Se il corpo è lungo un'unità, si ha:

$$\mathbf{x}^2 - (ct)^2 \stackrel{t=0}{=} 1 \implies [x]_{t=0} = 1 \quad (2.3.1)$$

$$\text{per cui } \forall t \quad \mathbf{x}^2 - (ct)^2 = 1 \quad (2.3.2)$$

e, dacché questo è invariante, tutti gli osservatori vedono la sbarra, *nello spazio tempo*, allo stesso modo in cui la vede l'osservatore solidale alla sbarra, benché **il modo in cui sia decomposta in spazio e tempo dipenda dall'osservatore**. Il fatto che tempi e lunghezze siano “distribuite” in maniera diversa, si ripercuote, portando alla contrazione di tempi e lunghezze.

3.2 Contrazione lunghezze

Per quel che riguarda la contrazione delle lunghezze, prendiamo la lunghezza del regolo unitario a riposo in S' , misurata da S' , pari a $\Delta x'$. Sia Δx la lunghezza del regolo unitario a riposo in S , misurata da S . Allora, tramite le trasformazioni di Lorentz (2.2.4):

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se sono interessato alla misura effettuata da S , devo porre $t_A = t_B$, e quindi:

$$\Delta x = \Delta x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta x'$$

3.3 Dilatazione dei tempi

Per vedere come i tempi sono “influenzati” da un cambio di sistema di riferimento (**Attenzione: dobbiamo imporre che lo spazio sia lo stesso se vogliamo andare a misurare i tempi**) prendiamo in considerazione la misura del tempo di S' , fatta da S . Se voglio misurare il tempo in S' , $\Delta x'$ deve essere 0, come sopra ricordato. Dunque:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta x' = 0 &= \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \implies \Delta x &= v \Delta t \\ \implies \Delta t' &= \Delta t \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \implies \Delta t &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t'. \end{aligned}$$

Parlando di tempo, ci tornerà molto utile introdurre il tempo proprio, tramite la seguente

3.1 Definizione. Il tempo proprio τ è il tempo misurato da un orologio in un sistema di riferimento in cui egli è fisso rispetto ad esso.

A noi risulterà comoda una definizione più “operativa”, ovvero si parlerà di intervallo di tempo proprio tra due eventi solidali al moto dell'orologio, come il tempo necessario a quest'ultimo per misurare l'intervallo tra questi due eventi, essendo questi fermi rispetto all'orologio; il quadrato dell'intervallo spazio temporale avrà perciò la forma:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2;$$

in un altro sistema di riferimento invece

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt'^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right),$$

il che implica $d\tau = dt'/\gamma$ e

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt'.$$

4 Considerazioni

4.1 Esempio (Paradosso dei gemelli). A conferma di questo citiamo il famoso paradosso dei gemelli: uno dei due sale su un razzo con velocità prossima alla velocità della luce, l'altro rimane sulla terra. Quando quello che era sul razzo torna indietro risulta più giovane. Perché? Considerando il diagramma spazio tempo, ci accorgiamo che il sistema razzo, quando esso torna verso la terra, cessa per un momento di essere inerziale (e se deve passare da velocità prossime a c in una direzione, a velocità prossime a c nell'altra direzione, dovrà accelerare di molto), quindi non possiamo utilizzare le trasformazioni della relatività ristretta. Tuttavia, detto $\Delta\tau$ il tempo proprio del razzo, possiamo prendere:

$$\Delta\tau = (\Delta t)_T \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (2.4.1)$$

Assumendo che la (2.4.1) sia vera per intervalli infinitesimi, possiamo scrivere:

$$d\tau = (dt')_T \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (2.4.2)$$

e questa è corretta se \mathbf{v} varia nel tempo. Ora, anche se un punto P' non è in moto uniforme rispetto al sistema S , possiamo considerare istante per istante (istanti t , non t'), il sistema di riferimento inerziale $S'(t)$, la cui velocità coincide con quella di P' all'istante t . Se ora consideriamo che il razzo, tornando indietro, passi da velocità \mathbf{v} a velocità $-\mathbf{v}$ istantaneamente, si ha (poiché \mathbf{v} è al quadrato nella formula):

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}.$$

Questo risultato si rivela corretto, ma ci chiediamo: se siamo passati istantaneamente da velocità \mathbf{v} a velocità $-\mathbf{v}$, perché il gemello non vede le cose simmetricamente rispetto al gemello sulla terra? Ovvero perché egli non vede che il gemello sulla terra è invecchiato della stessa quantità di quanto sia invecchiato lui? Il motivo sta nel fatto che egli non può fare questo ragionamento (o meglio, può farlo, ma si sbaglierebbe) poichè nell'inversione di velocità lui cambia sistema di riferimento, e quindi non è possibile applicare le trasformazioni da noi trovate, in quanto esse valgono solo se non cambiamo sistema di riferimento in itinere. Il gemello della terra invece può sempre usarle, in quanto non cambia mai il proprio sistema di riferimento.

4.2 Esempio (Decadimento Π^0). La prova sperimentale della teoria sopra esposta viene dagli acceleratori di particelle. Consideriamo ad esempio la particella neutra Π^0 (pione); quest'ultima nel suo sistema di riferimento (solidale alla particella) ha un tempo di vita medio $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ s; cioè dopo un tempo τ il pione decade e si ha l'emissione di raggi gamma. Π^0 raggiunge una velocità v tale che $\beta \equiv \frac{v}{c} = 0.99995$; quindi:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \tau\gamma \quad \text{dove} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma$$

Si ha che $\gamma \simeq 100$. Di conseguenza il tempo medio di vita che noi osserviamo è circa 100 volte superiore. Calcoliamo ora la distanza percorsa nell'acceleratore da Π^0 ; essa sarà $L = v\tau\gamma \simeq$

600m, mentre, non considerando gli effetti relativistici otteniamo $L = v\tau \simeq 6$ m (fare bene attenzione però: il Π^0 nel sistema di riferimento laboratorio decade dopo 600 m, ma nel suo sistema di riferimento vede lo spazio contratto, e quindi uguale a $600 \text{ m}/\gamma = 6$ m); la differenza fra i due percorsi è bene osservabile. Aumentando la velocità del pione se ne può aumentare il tempo di vita medio; in generale in questo modo sono possibili esperimenti anche su particelle che da ferme decadrebbero istantaneamente.

5 Composizione delle velocità

Consideriamo $S'(x', t')$ in moto rispetto ad $S(x, t)$ con velocità v lungo x . Avremo quindi che:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \frac{v}{c^2} dx} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{v_y}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5.1 Osservazione. Sfruttando le trasformazioni di Lorentz abbiamo ricavato le leggi di composizione delle velocità; dobbiamo però ancora verificare che:

1. se $v \ll c$ cioè $\frac{v}{c} \ll 1$ si ritorni ad avere la legge della composizione delle velocità classica; tuttavia si verifica subito che:

$$v'_x \simeq v_x - v \quad \text{quando} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

$$v'_y \simeq v_y$$

$$v'_z \simeq v_z$$

2. se $|v| = c$ (dove $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$) allora anche $|v'| = c$, dato che la velocità della luce nel vuoto è la stessa per tutti i sistemi di riferimento inerziali. Nel caso in cui $v_x = c$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ cioè che la luce si muova parallelamente a v lungo x si ha che:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

$$v'_y = 0$$

$$v'_z = 0$$

Un'altra possibilità è il caso in cui la luce si muova perpendicolarmente a v cioè: $v_y = c$ e $v_x = v_z = 0$. Si ottiene:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = -v$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v'_z = 0$$

Allora:

$$|v'| = \sqrt{v^2 + c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} = c$$

6 Invarianza dell'intervallo spazio-temporale

Cerchiamo in questa sezione di dare alcune nozioni sulle trasformazioni che lasciano invariato l'intervallo spazio-temporale. È una generalizzazione della struttura vettoriale e dell'invarianza sotto rotazioni e traslazioni della meccanica classica. Diamo ora una definizione importante, ed enunciamo e dimostriamo in seguito un fondamentale teorema.

6.1 Definizione (Intervallo spazio-temporale). Detti $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, definiamo la grandezza s_{AB} tale che:

$$s_{AB}^2 = (x_A^0 - x_B^0)^2 - (x_A^1 - x_B^1)^2 - (x_A^2 - x_B^2)^2 - (x_A^3 - x_B^3)^2$$

Chiaramente se A e B sono lungo una traiettoria di un raggio di luce, $s_{AB} = 0$, mentre se A e B sono lungo una traiettoria di una particella massiva, si ha $|v| < c \implies s_{AB} > 0$.

6.2 Teorema. *L'intervallo spazio-temporale tra due eventi è un invariante per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il tutto per intervalli infinitesimi, e poi estendiamo il nostro ragionamento a intervalli finiti; sia dunque $x_B^\mu = x_A^\mu + dx^\mu$ ⁴, nel sistema di riferimento inerziale S ; dobbiamo mostrare che:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

è invariante⁵. Prendiamo in considerazione un altro sistema di riferimento, sia esso S' ; per passare da un sistema di coordinate all'altro si usi la funzione:

$$x'^\mu = f^\mu(x)$$

dove f è una trasformazione che dipende da (x^0, x^1, x^2, x^3) . Possiamo allora scrivere:

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.6.1)$$

La condizione di omogeneità implica che $\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu}$ sia costante, in quanto l'intervallo dx'^μ non può dipendere dal punto in cui mi trovo, per l'omogeneità dello spazio. Pongo ora:

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} := \Lambda^\mu{}_\nu.$$

Integrando la (2.6.1), ottengo:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

con a costante. Posso dunque scrivere:

$$ds'^2 = (dx'^0)^2 - (dx')^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \left[\Lambda^0{}_\mu \Lambda^0{}_\nu - \sum_{i=1}^3 \Lambda^i{}_\mu \Lambda^i{}_\nu \right] dx^\mu dx^\nu.$$

Definisco ora:

$$g_{\mu\nu} := \Lambda^0{}_\mu \Lambda^0{}_\nu - \sum_{i=1}^3 \Lambda^i{}_\mu \Lambda^i{}_\nu \quad (\text{Osserviamo che è simmetrico})$$

⁴La lettera greca μ è un indice, che può assumere i valori da 0 a 3.

⁵Il modo in cui ds^2 è stato scritto è impreciso: per i successivi sviluppi che faremo, sarebbe più opportuno scrivere $ds^2 = dx^0 \otimes dx^0 - dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^3$, ma consci del fatto che solo gli studenti che hanno seguito il corso di Analisi delle Varietà Differenziali possono apprezzarlo, proseguiremo ignorando la nostra imprecisione.

Allora si ha:

$$ds'^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Considero ora un raggio di luce che si propaga in S lungo x , il che implica $dy = dz = 0$. Allora:

$$0 \stackrel{\text{raggio di luce}}{=} (ds')^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^1dx^0 + g_{11}(dx^1)^2 \quad (2.6.2)$$

$$g_{01} = g_{10} \text{ poich\'e simmetrico;}$$

poi:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 = 0 \implies dx^0 = dx^1.$$

Allora la (2.6.2) d\`a:

$$0 = (ds')^2 = (g_{00} + g_{11} + 2g_{10})(dx^0)^2; \quad (2.6.3)$$

Se il raggio di luce si propaga nella direzione opposta, dx^1 cambia segno e dunque:

$$0 = (ds')^2 = (g_{00} + g_{11} - 2g_{10})(dx^0)^2$$

il che implica $2g_{10} = -2g_{10}$, e tale relazione vale se solo se $g_{10} = 0$. Questo ci permette di scrivere:

$$0 = (g_{00} + g_{11} + 2g_{10}) = g_{00} + g_{11} \implies g_{00} = -g_{11}$$

Per l'isotropia dello spazio, il raggio di luce potevo sceglierlo propagantesi anche lungo y o lungo z , il che permette di concludere:

$$-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33}$$

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{10} = g_{20} = g_{30} = 0$$

Considero adesso un raggio di luce generico:

$$0 = (ds')^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 g_{ij}dx^jdx^i =$$

$$g_{00}(ds)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 g_{ij}dx^jdx^i = 0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 g_{ij}dx^jdx^i \implies g_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Questo comporta:

$$(ds')^2 = g_{00}(ds)^2; \quad (2.6.4)$$

domandiamoci a questo punto quanto possa valere g_{00} . Tale oggetto non pu\`o dipendere da x , per l'omogeneit\`a; potrebbe poi dipendere da $|\mathbf{v}|$, ma non da \mathbf{v} , per l'isotropia $\implies g_{00} = g_{00}(|\mathbf{v}|)$; se scambio il ruolo di S e di S' , avremo che l'unica cosa che cambia \`e \mathbf{v} in $-\mathbf{v}$; allora:

$$ds^2 = g_{00}(|-\mathbf{v}|)ds'^2 = g_{00}(|\mathbf{v}|)ds'^2 \stackrel{(2.6.4)}{=} g_{00}^2(|\mathbf{v}|)ds^2$$

$$\implies 1 = g_{00}^2 \implies g_{00} = \pm 1; \text{ se } \mathbf{v} = 0, g_{00} = 1,$$

allora g_{00} \`e sempre 1, dunque $ds^2 = ds'^2$ e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Capitolo III

Formulazione geometrica

Indice

1	Gruppi	23
1.1	Notazioni	24
1.2	Condizione di invarianza	25
1.3	Gruppi di Poincaré e Lorentz	25
1.4	Particolarità del gruppo di Lorentz proprio.	26
2	Calcolo vettoriale	28
2.1	Calcolo vettoriale in meccanica prerelativistica	28
3	E in fisica relativistica...? I tensori.	29
4	Il calcolo tensoriale...	30
5	Algebra tensoriale	31
5.1	Moltiplicazioni tra vettori	32
5.2	Contrazione degli indici	32
6	Campi tensoriali, quadrigradiente e derivate	32

La formulazione geometrica della relatività, presentata per la prima volta da Minkowski, permette di trattare la relatività ristretta in maniera matematica, e dunque precisa. Questo può essere piacevole, o causare sofferenza, a seconda delle inclinazioni individuali¹.

1 Gruppi

Per procedere con la nostra trattazione dobbiamo innanzi tutto dare la definizione di gruppo, forse già nota al lettore dal corso di metodi.

1.0 Definizione. Un gruppo \mathcal{G} rispetto all'operazione binaria ε è un insieme che gode delle proprietà seguenti:

1. combinando due elementi di \mathcal{G} tramite ε , ottengo un elemento che appartiene ancora a \mathcal{G} ;
2. presi tre elementi qualsiasi di \mathcal{G} , siano essi g, h e k , si ha che vale la seguente uguaglianza:

$$g\varepsilon(h\varepsilon k) = (g\varepsilon h)\varepsilon k; \quad (3.1.1)$$

3. esiste un elemento e , appartenente a \mathcal{G} , detto *elemento neutro*, tale che, $\forall g \in \mathcal{G}$

$$e\varepsilon g = g\varepsilon e = g \quad (3.1.2)$$

4. $\forall g \in \mathcal{G}$ esiste l'*elemento simmetrico* \tilde{g} tale che

$$g\varepsilon \tilde{g} = \tilde{g}\varepsilon g = e \quad (3.1.3)$$

¹Qualche studente di fisica potrebbe rimembrare che tali furono le parole usate dal professor Francesco Fassò nell'introdurre il suo corso di Istituzioni di Fisica Matematica.

1.1 Notazioni

Siamo già entrati in contatto con la notazione con indici, e, assieme ad essa, con x^μ , $g_{\mu\nu}$ e $\Lambda^\mu{}_\nu$. Ora definiamo il modo con cui indichiamo trasposta e inversa di Λ e inversa di $g_{\mu\nu}$, e nella notazione con indici, e nella notazione matriciale, che potrà, talvolta, tornarci utile.

Notazione con indici	→	Notazione Matriciale
x^μ	→	\mathbf{x}
$\Lambda^\mu{}_\nu$	→	Λ
$\Lambda_\mu{}^\nu$	→	$\tilde{\Lambda}$
$\hat{\Lambda}^\nu{}_\mu$	→	Λ^{-1}
$g_{\mu\nu}$	→	G
$g^{\mu\nu}$	→	G^{-1}

Tabella 3.1: Notazioni.

Introduciamo anche la **convenzione di Einstein**, per la quale se in una formula vi sono due indici uguali, uno in alto ed uno in basso, si intendono sommati; per intenderci:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu}dx^\mu \quad (3.1.4)$$

$$\left(\text{ma } g_{\mu\nu}dx^\rho + g_{\rho\mu}dx^\nu \neq \sum_{\mu\nu\rho} (g_{\mu\nu}dx^\rho + g_{\rho\mu}dx^\nu) \right) \quad (3.1.5)$$

D'ora in poi si ha, inoltre, che le lettere greche varieranno da 0 a 3, quelle latine da 1 a 3; così

$$g_{\mu\nu}x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu}x^\mu \quad (3.1.6)$$

$$g_{i\nu}x^i = \sum_{i=1}^3 g_{i\nu}x^i. \quad (3.1.7)$$

Introdotte queste notazioni, risulterà ovvio scrivere ds^2 come

$$dx^\mu g_{\mu\nu}dx^\nu; \quad (3.1.8)$$

nella nostra trattazione ci torneranno inoltre comode le cosiddette coordinate covarianti, definite nel seguente modo:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad (3.1.9)$$

ovvero

$$x_0 = x^0 \quad (3.1.10)$$

$$x_i = -x^i. \quad (3.1.11)$$

Volendo scrivere la (3.1.8) tenendo conto di queste nuove coordinate, otteniamo

$$ds^2 = dx_\nu dx^\nu;$$

come già visto in tabella 1.1, avremo a che fare anche con $g^{\mu\nu}$, definito come l'inverso di $g_{\mu\nu}$, e tale che $g_{\mu\sigma}g^{\mu\rho} = \delta_\sigma{}^\rho$ (delta di Kroenecker).

La nostra definizione sembrerebbe a prima vista del tutto inutile, in quanto $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$; tuttavia ciò non è in generale vero (lo è solo per lo spazio tempo piatto in coordinate cartesiane), dunque la nostra definizione non è ridondante.

Moltiplicando per $g^{\mu\rho}$ ambo i membri della (3.1.9) otteniamo:

$$g^{\mu\rho}x_\mu = g_{\mu\nu}g^{\mu\rho}x^\nu = \delta_\nu{}^\rho x^\nu, \quad (3.1.12)$$

$$x^\rho = g^{\mu\rho}x_\mu \quad (3.1.13)$$

da cui

$$ds^2 = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu. \quad (3.1.14)$$

1.2 Condizione di invarianza

Andiamo ora ad analizzare la **condizione di invarianza dell'intervallo spazio temporale**. Si sa che:

$$dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = dx'^\mu g_{\mu\nu} dx'^\nu; \quad (3.1.15)$$

scrivendo il tutto in forma matriciale:

$$\widetilde{dx} G dx = \widetilde{dx'} G dx' \quad (3.1.16)$$

Le trasformazioni che lasciano invariato l'intervallo avevano la forma:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu; \\ \text{differenziando} \\ dx'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \\ \text{In forma matriciale} \\ dx' &= \Lambda dx; \\ \text{trasponendo:} \\ \widetilde{dx'} &= \widetilde{dx} \widetilde{\Lambda} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Allora la (3.1.16) può risciversi:

$$\widetilde{dx} G dx = \widetilde{dx'} (\widetilde{\Lambda} G \Lambda) dx' \quad (3.1.18)$$

da cui si ricava $G = \widetilde{\Lambda} G \Lambda$, o, con l'altra notazione

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu. \quad (3.1.19)$$

1.3 Gruppi di Poincaré e Lorentz

Ricapitoliamo: le trasformazioni che lasciano l'intervallo spazio-temporale invariato sono della forma, come già dimostrato:

$$x' = \Lambda x + a \quad (a \in \mathbb{R}^4; \Lambda \text{ matrice } 4 \times 4 \text{ a valori reali}) \quad (3.1.20)$$

con Λ tale che $\widetilde{\Lambda} G \Lambda = G$, affinché l'intervallo sia invariante. Queste leggi per le trasformazioni costituiscono un gruppo che ha come elementi $\{\Lambda, a\}$. Le leggi di composizione sono:

$$\{\Lambda_1, a_1\} \cdot \{\Lambda_2, a_2\} = \{\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1\} \quad (3.1.21)$$

Infatti si ha $x' = \Lambda_2 x + a_2$ e $x'' = \Lambda_1 x' + a_1$, e dunque:

$$\begin{aligned} x'' &= \overbrace{\Lambda_1 \Lambda_2 x + \Lambda_1 a_2 + a_1}^{x'' \text{ in funzione di } x} \\ &= (\Lambda_1 \Lambda_2) x + (\Lambda_1 a_2 + a_1) \end{aligned}$$

Componendo la trasformazione Λ_1 con Λ_2 ottengo quindi la (3.1.21). Deve poi valere $\widetilde{\Lambda_1 \Lambda_2} G \Lambda_1 \Lambda_2 = G$. Ma si constata subito che quanto appena scritto è uguale a:

$$\widetilde{\Lambda_2} \widetilde{\Lambda_1} G \Lambda_1 \Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_2} G \Lambda_2 = G \quad (3.1.22)$$

Dunque, effettivamente la (3.1.21) è una legge di composizione. Si dimostra che è associativa e che l'elemento neutro è:

$$e = \{\text{Id}, 0\} \quad (3.1.23)$$

e l'inverso è

$$\{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a\} \quad (3.1.24)$$

è banale verificarlo usando la (3.1.21). Il gruppo così ottenuto con elementi $\{\Lambda, a\}$ è detto **Gruppo di Poincaré** \mathcal{P} .

G.L.

Il gruppo che si ottiene ponendo $a = 0$ è detto **Gruppo di Lorentz** \mathcal{L} e si osserva immediatamente che \mathcal{L} ha quattro componenti connesse; infatti una prima suddivisione è

$$\begin{aligned} \det G &= -1 = \det(\tilde{\Lambda} G \Lambda) \stackrel{\text{Teorema di Binet}}{=} \det(\tilde{\Lambda}) \det(G) \det(\Lambda) \stackrel{\det G = -1}{=} -(\det \Lambda)^2 \\ \Rightarrow \det \Lambda &= \begin{cases} +1 \rightarrow \mathcal{L}_+ \\ -1 \rightarrow \mathcal{L}_- \end{cases} \end{aligned}$$

Per poter passare però da $\det \Lambda = 1$ a $\det \Lambda = -1$, si deve fare un salto discontinuo, benché, come detto prima, si abbia che ogni singola componente sia connessa. Si ha poi:

$$\begin{aligned} 1 = g_{00} &= \Lambda_0^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 \quad (\text{ricordiamo che } g_{00} \Lambda^0_0 = \Lambda_0^0) \\ &= \overbrace{\Lambda_0^0 \Lambda_0^0}^{(\Lambda_0^0)^2} - \sum_{i=1}^3 \Lambda_0^i \Lambda_i^0 \\ \Rightarrow (\Lambda_0^0)^2 &= 1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_0^i \Lambda_i^0 \geq 1 \end{aligned}$$

Ne segue

$$\Lambda_0^0 = \begin{cases} \geq +1 \rightarrow \Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow \\ \leq -1 \rightarrow \Lambda \in \mathcal{L}^\downarrow \end{cases} \quad (3.1.25)$$

Si definisce allora il **Gruppo di Lorentz proprio** come \mathcal{L}_+^\uparrow , cioè tutte le Λ t.c.

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} G \Lambda &= G \\ \det \Lambda &= 1 \\ \Lambda_0^0 &\geq 1 \end{aligned}$$

e il **Gruppo di Poincaré proprio**, ossia $\forall a \in \mathbb{R}^4$:

$$\text{se } \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \Rightarrow \{\Lambda, a\} \in \mathcal{P}_+^\uparrow \quad (3.1.26)$$

1.4 Particolarità del gruppo di Lorentz proprio.

Ci domandiamo ora che forma hanno le $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. Esse sono matrici 4×4 , però, dacché G è simmetrica, le equazioni $\tilde{\Lambda} G \Lambda$ sono solo

$$\frac{1}{2}(\# \text{ fuori diagonale}) + (\# \text{ diagonale}) = \frac{1}{2} 12 + 4 = 10 : \quad (3.1.27)$$

10 equazioni indipendenti, il che implica $16 - 10 = 6$ parametri indipendenti.²

Se abbiamo trasformazioni che agiscono solo su x^1, x^2, x^3 e lasciano invariante l'intervallo spazio-temporale allora devono lasciare invariato l'intervallo spaziale: le trasformazioni che danno questo risultato sono le rotazioni: ci ritroviamo dunque con solo tre parametri (infatti le rotazioni ne hanno "presi" altri tre). Riscriviamo le trasformazioni di Lorentz speciali lungo x^1 (γ e β definite come sopra):

$$\begin{aligned} x'^1 &= (x^1 - \beta x^0) \gamma \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \\ x'^0 &= (x^0 - \beta x^1) \gamma. \end{aligned}$$

Dunque: lungo il primo asse mi ritrovo un parametro, ma per l'isotropia dello spazio, nulla mi vieta di poter fare le medesime trasformazioni anche per gli altri due assi, ritrovandomi

²Le dieci equazioni rappresentano dieci vincoli al sistema

così ad avere gli altri due parametri che mi servivano. In questo modo posso caratterizzare il gruppo proprio di Lorentz, in quanto si è trovato che è fatto da *trasformazioni di Lorentz lungo* x^1 , x^2 , x^3 , e da *rotazioni attorno i tre assi*.

La matrice che corrisponde alle trasformazioni speciali di Lorentz lungo x^1 con velocità v è ($\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.28)$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = 1.$$

Abbiamo perciò visto che i gruppi \mathcal{P} e \mathcal{L} si spezzano nei sottogruppi (evito di riportare quelli di \mathcal{P}):

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \quad \mathcal{L}_-^\uparrow \quad \mathcal{L}_+^\downarrow \quad \mathcal{L}_-^\downarrow$$

Possiamo introdurre ora degli operatori su questi gruppi:

① Operatore di Parità: $P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^0_0 = 1 \Rightarrow P \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$\det P = -1 \Rightarrow P \in \mathcal{L}_-^\uparrow$$

② Analogamente, considerando l'inversione temporale T

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^0_0 = -1 \Rightarrow T \in \mathcal{L}_+^\downarrow$$

$$\det T = -1 \Rightarrow T \in \mathcal{L}_-^\downarrow$$

③ Inoltre si può prendere PT

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PT \in \mathcal{L}_+^\downarrow$$

1.1 Osservazione. Per ora non abbiamo utilizzato il principio di relatività di Einstein, il quale afferma che le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Allora se sono in S' e applico, ad esempio, l'operatore di parità, mi ritrovo in un sistema di riferimento S nel quale devono valere le stesse leggi della fisica del primo. Invece nel '57 si scoperse che nel decadimento β questo principio era violato in quanto l'operatore parità non lascia invariante le leggi della fisica. Si trova invece che le leggi della fisica sono invarianti per \mathcal{P}_+^\uparrow , e quindi per \mathcal{L}_+^\uparrow .

G.L.

1.2 Osservazione (dovuta a Minkowski). La distanza euclidea infinitesima in \mathbb{R}^3 è³:

$$|d\mathbf{x}|^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (3.1.29)$$

L'intervallo spazio temporale ha invece la forma:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - |d\mathbf{x}|^2 \quad (3.1.30)$$

Se definisco⁴ $x^4 = ix^0$

$$\Rightarrow ds^2 = -[(dx^4)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (3.1.31)$$

In questa maniera si trova un modo per trasformare nozioni euclidee nello spazio tempo reale. Infatti l'invarianza di ds^2 (x^1, x^2, x^3, x^4) è quella delle rotazioni 4-dimensionali (opportuna-mente complessificate); prendiamo la rotazione di x^4 e x^1 . Si ha:

$$\begin{aligned} \underbrace{x'^4}_{\text{Imm}} &= \cos \xi \underbrace{x^4}_{\text{Imm}} + \sin \xi \underbrace{x^1}_{\text{Reale}} \\ x'^1 &= -\sin \xi x^4 + \cos \xi x^1 \end{aligned}$$

Se $\xi \in \mathbb{C}$ $\sin \xi \in i\mathbb{R}$ e $\cos \xi \in \mathbb{R}$, (altrimenti le uguaglianze non varrebbero). Perciò $\xi = i\psi$, $\psi \in \mathbb{R}$, e in tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} \cos \xi = \cos(i\psi) &= \cosh \psi \\ \sin \xi = \sin(i\psi) &= -i \sinh \psi \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{cases} (x^1)' = \sinh \psi x^0 + \cosh \psi x^1 \\ (x^0)' = \cosh \psi x^0 - \sinh \psi x^1 \end{cases} \quad (3.1.32)$$

(la seconda non è altro che $(x^4)' = i(x^0)' = \cosh \psi ix^0 + \sinh \psi ix^1$, divisa per i). Consideriamo ora un sistema S' che si muove con velocità v rispetto ad S , con x^1 costantemente uguale a 0; si avrà:

$$(x^1)' = -vt' = -\frac{v}{c}(x^0)' \Rightarrow \frac{(x^1)'}{(x^0)'} = -\frac{v}{c} \quad (\ddagger) \quad (3.1.33)$$

Dalle (3.1.32) risulta:

$$\frac{(x^1)'}{(x^0)'} = \tanh \psi \stackrel{(\ddagger)}{=} -\frac{v}{c} \quad (3.1.34)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sinh \psi = -\beta \gamma \\ \cosh \psi = \gamma \end{cases} \quad (3.1.35)$$

$$(\text{discende da } \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t) \quad (3.1.36)$$

Riscrivendo la (3.1.32) tenendo conto di (3.1.32) e (3.1.35) ritroviamo la matrice di Lorentz, il che implica che in relatività, v'è l'invarianza per rotazioni complesse.

2 Calcolo vettoriale

2.1 Calcolo vettoriale in meccanica prerelativistica

In meccanica pre-relativistica si usa il calcolo vettoriale poiché, grazie ad esso, le leggi della fisica sono covarianti per rotazioni o traslazioni, come conseguenza dell'omogeneità e dell'isotropia dello spazio. La legge di trasformazione in questo caso è (se $x_i = (x_1, x_2, x_3)$):

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 (R_{ij} x_j + a_j) \quad \text{con } R \text{ tale che } \tilde{R} \cdot R = \text{Id} \quad (3.2.1)$$

Gli oggetti tipici del calcolo vettoriale sono⁵

³ da qui l'invarianza per rotazioni

⁴Si chiama rotazione di Wick quando la si applica alla teoria dei campi

⁵L'apice ' indica l'oggetto in questione dopo la trasformazione

- gli scalari: A è uno scalare quando (rispetto alle roto-traslazioni):

$$A' = A \quad (3.2.2)$$

- i vettori: V è un vettore quando:

$$V'_i = R_{ij}V_j \quad (3.2.3)$$

Presa un'equazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (in componenti $F_i = ma_i$), nel nuovo sistema di riferimento S' si ha:

$$F'_j = R_{ij}F_i = R_{ij}ma_i = ma'_j \text{ con } R_{ij}a_i = a'_j : \quad (3.2.4)$$

questo significa che nel nuovo sistema di riferimento, le leggi sono le stesse.

3 E in fisica relativistica...? I tensori.

Tuttavia, in fisica relativistica per compiere queste trasformazioni abbiamo bisogno di uno spazio quadri-dimensionale, e non delle rotazioni, bensì delle trasformazioni di Lorentz. Si introduce dunque la nozione di tensore quadridimensionale. Un tensore I_{ij} (in questo caso si può pensare al momento d'inerzia) è un oggetto che trasforma come il prodotto tra due vettori. Ovvero, se $I_{ij} \sim v_i v_j$, $v \in \mathbb{R}^3$, si ha:

$$I = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

Dacché $I_{ij} \sim v_i v_j$, per rotazioni vive la seguente relazione:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{l=1}^3 R_{il} v_l \sum_{k=1}^3 R_{jk} v_k \\ &= \sum_{l,k=1}^3 R_{il} R_{jk} (v_l v_k) \end{aligned}$$

I_{ij} è a due indici, ma si possono introdurre quanti indici si vogliono. Inoltre si può avere anche $I_{ij} \sim v_i u_j$, e la (3.3.1) cambierà di conseguenza; risulta sempre chiaro che si possono avere tutti gli indici che si vogliono, per esempio⁶ $A_{ijkl} \sim v_i v_j v_k v_l$ (e di conseguenza $A'_{ijkl} = \sum_{m,n,o,p=1}^3 R_{im} R_{jn} R_{ko} R_{lp} A_{mnop}$). Si ha che:

- A_{ijkl} è un tensore di rango 4;
- uno scalare è un tensore di rango 0;
- un vettore è un tensore di rango 1.

3.1 Esempio (Tensore ε).

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ o permutazioni pari} \\ -1 & \text{se } \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \text{ è una permutazione dispari di } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3.2 Esempio (Il simbolo di Kroenecker). δ_{ij} , non è altro che un tensore di rango 2.

⁶ A è in questo caso un tensore di rango 4, mentre I era un tensore di rango 2

4 Il calcolo tensoriale...

Come prima accennato, in relatività si usano i tensori; descriviamo gli oggetti con cui entreremo in contatto (prendiamo, d'ora in poi, $\Lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$):⁷

- un quadriscale A è un oggetto che per trasformazioni \mathcal{P}_+^\uparrow si comporta in maniera tale da aversi:

$$A' = A;$$

- un quadrivettore controvariante⁸ A^μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$, è tale che:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu;$$

- un quadri-tensore covariante di rango 2, $A_{\mu\nu}$ è tale che

$$A'_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A_{\rho\sigma}.$$

4.1 Esempio. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

4.2 Esempio. In 3D possiamo prendere δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- un vettore covariante A_μ è tale che $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ ($A^0 = A_0$ e $A^i = -A_i$). Tale oggetto trasforma così:⁹

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \hat{\Lambda}^\nu_\mu A_\nu \quad \text{dove} \\ \hat{\Lambda}^\nu_\mu &= g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

Prendiamo $A'^\nu = \Lambda^\nu_\rho A^\rho$. Si ha:

$$A'_\mu = g_{\mu\nu} A'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho A^\rho \stackrel{*}{=} \quad (3.4.1)$$

Dacché $A^\rho = g^{\rho\sigma} A_\sigma \implies$

$$\stackrel{*}{=} \overbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}}^{\hat{\Lambda}_\mu^\sigma} A_\sigma \quad (3.4.2)$$

- un quadri-tensore covariante di rango 2 è un oggetto $A_{\mu\nu}$ tale che:

$$A'_{\mu\nu} = \hat{\Lambda}_\mu^\rho \hat{\Lambda}_\nu^\sigma A_{\rho\sigma} \quad (3.4.3)$$

- un quadritensore di rango 1 covariante e di rango 1 controvariante è un oggetto $A_\mu{}^\nu$ che trasforma in questo modo:

$$A'_\mu{}^\nu = \hat{\Lambda}_\mu^\sigma \Lambda^\nu_\rho A_\sigma{}^\rho \quad (3.4.4)$$

- uno pseudo-tensore è di prima specie se dato $\Lambda \in \mathcal{L}$, viene associato nella trasformazione il fattore $\det \Lambda$

⁷Potrà a qualcuno apparire strano di come vengano definiti questi oggetti; infatti non si asserisce nulla di concreto su di essi, se non come essi trasformano sotto $la \in \mathcal{P}_+^\uparrow$; tuttavia tale metodo, essendo il più astratto possibile, ha dei vantaggi, dacché permette di “catalogare” subito gli oggetti con cui si viene a contatto; più avanti (sicuramente nel capitolo dedicato all'elettromagnetismo), si familiarizzerà con questo concetto in maniera più “operativa”.

⁸Per capirsi una volta per tutte, controvarianti sono gli oggetti con l'indice, o gli indici, in alto, covarianti gli oggetti con indice in basso, benché la definizione precisa è data in base al modo in cui trasformano

⁹ $\hat{\Lambda}$ è l'inversa

- uno pseudo-tensore è di seconda specie se, dato $\Lambda \in \mathcal{L}$, viene associato nella trasformazione il fattore $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$
- uno pseudo quadri-vettore covariante di prima specie è tale che, se $\Lambda \in \mathcal{L}$:

$$A'_\mu = (\det \Lambda) \hat{\Lambda}_\mu{}^\nu A_\nu \quad (3.4.5)$$

- uno pseudo quadri-vettore controvariante di seconda specie è tale che:

$$A'^\mu = \text{sgn} \Lambda^0_0 \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

4.3 Definizione. Definiamo poi $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, uno pseudo-tensore di rango 4, detto pseudo-tensore di Levi-Civita, tale che:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \rho \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ o permutazioni pari} \\ -1 & \text{se } \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \text{ è una permutazione dispari di } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Le leggi di trasformazione diventano:

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \stackrel{\pm}{=} \quad (3.4.7)$$

ma

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta = (\det \Lambda) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.4.8)$$

e dunque:

$$\stackrel{\pm}{=} (\det \Lambda)^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \stackrel{(\det \Lambda)^2=1}{=} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.4.9)$$

4.4 Osservazione (Analogie e differenze tra la geometria relativistica, e la geometria non relativistica). Per una più veloce comprensione, usiamo questo utile schema riassuntivo:

Geometria non relativistica	→	Geometria relativistica
$\mathbb{R}^3 \Rightarrow i = 1, 2, 3$	→	$\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mu = 1, 2, 3, 4$
$d\mathbf{x}$ invariante per rotazioni	→	ds invariante per \mathcal{L} e \mathcal{P}
$(d\mathbf{x})^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$	→	$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow g_{00} = -g_{ii}$
$A_i = \delta_{ij} A^j = A^i$	→	$A_i \neq A^i$

5 Algebra tensoriale

In questa sezione ci occuperemo di meglio definire le operazioni da compiere con gli oggetti introdotti sinora.

G.L.

5.1 Moltiplicazioni tra vettori

Prendiamo due vettori, A^μ , controvariante, e B_μ , covariante. Vale la seguente relazione:

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \widehat{\Lambda}^\sigma{}_\mu B_\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu \overbrace{\widehat{\Lambda}^\sigma{}_\mu}^{\delta_\nu{}^\sigma} A^\nu B_\mu. \quad (3.5.1)$$

Infatti, discende dalla definizione:

$$\widehat{\Lambda}^\sigma{}_\mu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\tau g^{\tau\sigma}; \quad (3.5.2)$$

e perciò:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \widehat{\Lambda}^\sigma{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\tau g^{\tau\sigma} = (\widehat{\Lambda} G \Lambda)_{\nu\tau} g^{\tau\sigma} = g_{\nu\tau} g^{\tau\sigma} = (G G^{-1})^\sigma{}_\nu = (1)^\sigma{}_\nu = \delta^\sigma{}_\nu \quad (3.5.3)$$

Si ha poi $A^\mu B_\mu = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A_\nu B^\nu$: allora è uno scalare (per le proprietà degli scalari). Ciò è del tutto analogo al prodotto scalare tra vettori ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_{i,j} A_i \delta_{ij} B_j$). Facciamo poi notare che $A^\mu B_\mu$ ha le proprietà del prodotto scalare, escluso¹⁰ il fatto che non è definito positivo.

5.2 Contrazione degli indici

Il processo di indici sommati viene anche detto contrazione degli indici. Tramite tale processo si può abbassare di un grado il rango d'un tensore; Tramite il prodotto tra tensori, succede la stessa cosa; infatti, se $A_{\mu\nu\rho} B^{\sigma\tau}$ è un tensore 3 covariante e 2 controvariante, si ha che, nel caso $\sigma = \rho$, otteniamo un tensore 2 covariante e 1 controvariante, più precisamente $A_{\mu\nu\rho} B^{\rho\sigma}$; se invece si ha $A_\mu B^\nu$, e $\mu = \nu$, allora, per la convenzione di Einstein, $A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + \dots$, che è uno scalare, ovvero un tensore di rango 0, come si dovrebbe giustamente ottenere dalla contrazione di $A_\mu B^\nu$.

6 Campi tensoriali, quadrigradienle e derivate

6.1 Definizione (Campo scalare). $\varphi(x)$ è un *campo scalare* se, sotto una trasformazione $\{\Lambda, a\} \in \mathcal{P}$, che manda x in $x' = \Lambda x + a$, vale la relazione:

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

Ma come viene trasformato questo campo in funzione di x' ? Si ha che $x = \Lambda^{-1}(x' - a)$: un'altra maniera di dare la legge di trasformazione è dire:

$$\varphi'(x') = \varphi(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

Analogamente si ha:

6.2 Definizione (Campo vettoriale). $A^\mu(x)$ è un campo vettoriale se, sotto $\Lambda \in \mathcal{L}$, vale la relazione:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

Prendiamo ora in considerazione la generalizzazione di ∇ , ovvero il quadrigradienle.

6.3 Definizione (Quadrigradienle). L'operatore quadrigradienle è definito come:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (3.6.1)$$

¹⁰Dato uno spazio vettoriale V , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$, il prodotto scalare tra i due vettori gode delle seguenti proprietà: è bilineare, definito positivo e simmetrico

Dunque il quadrigradiente di un campo scalare φ sarà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right) \quad (3.6.2)$$

Ci chiediamo ora se l'oggetto $\partial_\mu \varphi(x)$ è un vettore covariante. Verifichiamolo.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (3.6.3)$$

è uno scalare, quindi deve ottenersi per contrazione di un quadrivettore covariante con uno controvariante.

6.4 Definizione. Analogamente ∂^μ è un quadrivettore controvariante, ed è definito da:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (3.6.4)$$

Capitolo IV

Meccanica relativistica

Indice

1	Grandezze fondamentali	34
2	La quadriforza	36
3	Sistemi di riferimento	37
4	Processi tra particelle (dinamica relativistica)	38
4.1	Decadimento	38
4.2	Decadimento a due corpi	39
4.3	Distribuzione di probabilità nel decadimento	42
4.4	Urti tra particelle	44
4.5	Le variabili di Mandelstam	45
4.6	Gli urti veri e propri	46

In questo capitolo ci interessiamo alla generalizzazione relativistica di velocità, accelerazione, impulso e forza. Vogliamo che tutti gli oggetti con cui si entri in contatto siano parte dello spazio di Minkowski, sicché trasformino correttamente da un sistema inerziale ad un altro, ossia soddisfino il principio di relatività¹.

Questo significa che vogliamo definire delle grandezze che si comportino in tale modo: sia \mathbf{F} la forza in un sistema S , e \mathbf{p} l'impulso; in un sistema S' la forza sarà \mathbf{F}' , e l'impulso \mathbf{p}' ; si passerà dagli uni agli altri con una trasformazione di Lorentz, ossia:

$$\mathbf{F}' = \Lambda \mathbf{F},$$

$$\mathbf{p}' = \Lambda \mathbf{p},$$

in modo che l'equazione $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ sia la medesima per entrambi i sistemi di riferimento, in accordo con il principio di relatività. In pratica stiamo cercando delle leggi covarianti.

Inoltre, ci preme che per $\beta \ll 1$, si ritrovino le quantità classiche. Non ci cureremo però di dimostrarlo, lasciandolo come facile esercizio a cura del lettore. Ci interessa poi addentrarci nella dinamica dei processi tra particelle, cosa di cui ci occuperemo nell'ultima parte del capitolo.

1 Grandezze fondamentali

1.1 Osservazione. In cinematica non relativistica si ha:

$$\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

$\mathbf{x}(t)$ è un vettore tuttavia: come già detto noi vogliamo un quadrivettore. Allora:²

$$\mathbf{x} \rightarrow x^\mu \tag{4.1.1}$$

¹Questo vuol dire che se in un sistema di riferimento $F = ma$, allora in un altro sistema di riferimento, che si può ottenere mediante una trasformazione di Lorentz, varrà la relazione $F' = m'a'$

² x^μ , non è propriamente un quadrivettore, poiché sotto una trasformazione di Poincaré esso diviene $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, ma si ovvia prendendone il differenziale, ovvero $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$.

$$t \rightarrow \tau \quad \text{tempo proprio.} \quad (4.1.2)$$

Perché vogliamo usare il tempo proprio e non il tempo? La risposta sta nella definizione di tempo proprio ($d\tau = ds/c$): essa permette allo stesso di essere indipendente dal sistema di riferimento, al contrario di t : dunque parametrizzare i moti con il tempo proprio, e non con il tempo, permette di ottenere un parametro che sia indipendente dal sistema di riferimento, e che sia quindi covariante.

La scelta naturale cade tuttavia sulla radice di $ds^2 = dx^\nu g_{\mu\nu} dx^\mu$ (solo nel caso che non si abbia a che fare con particelle con velocità pari a c). Per questo il lettore abbia la cura di mostrare la validità della seguente relazione (che discende da $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$):

$$ds = dt \frac{c}{\gamma} \quad (4.1.3)$$

che ci tornerà molto utile in seguito. Facciamo subito notare che, dacché ds^2 è l'intervallo spazio temporale del moto, la v all'interno di γ è la velocità a cui avviene il moto.

1.2 Definizione (La quadrivelocità). Possiamo a questo punto prendere l'analogo della velocità:

$$\mathbf{v}(t) \rightarrow \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{cdt} \gamma \quad (\text{è un quadrivettore, in quanto rapporto di un quadrivettore con uno scalare}). \quad (4.1.4)$$

Si ottiene:

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \gamma, \quad (4.1.5)$$

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt}; \quad (4.1.6)$$

dunque, in definitiva, si ha:

$$u^\mu = \left(\gamma, \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \right) \quad (4.1.7)$$

Notiamo poi che dalla definizione segue che:

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad (4.1.8)$$

$$(\text{al lettore i calcoli}) \quad (4.1.9)$$

1.3 Definizione (La quadriaccelerazione). Come prima abbiamo introdotto la quadrivelocità come la derivata temporale del vettore posizione, ora introduciamo la quadriaccelerazione come la derivata temporale della quadrivelocità:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \rightarrow w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}.$$

Ricaviamone le componenti (si usa qui il fatto che $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$, relazione che si ottiene derivando appunto γ rispetto al tempo, ricordando che $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$):

$$\begin{aligned} w^0 &= \frac{du^0}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^4}{c^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \\ w^i &= \frac{du^i}{ds} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{d(\gamma v^i)}{dt} = \frac{\gamma^2}{c^2} a^i + \frac{\gamma^4}{c^4} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) v^i; \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

prendiamo ora la (4.1.8), e deriviamola rispetto a s . Ne esce:

$$w \cdot u = 0 \quad (4.1.11)$$

il che implica che quadri-velocità e quadri-accelerazione sono tra loro ortogonali (sempre!).

G.L.

1.4 Definizione (Il quadrimpulso). Si generalizza ora l'idea di impulso:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \rightarrow p^\mu := mcu^\mu \quad (4.1.12)$$

Dunque il quadrimpulso risulta:

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (4.1.13)$$

Viene ora spontaneo interrogarsi su $mc\gamma$, il primo termine del quadrimpulso: esso infatti è $\frac{E}{c}$. Cosa c'è di strano? Prendiamo il caso $\beta \ll 1$. Non è difficile vedere che:

$$cp^0 = mc^2\gamma \stackrel{\beta \ll 1}{\simeq} mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\frac{v^2}{c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.1.14)$$

Ora, se $\frac{1}{2}mv^2$ è chiaramente l'energia cinetica, non si ha un analogo classico per il termine mc^2 , in quanto da ciò che s'è appena scritto, risulta che un corpo in quiete, per il solo fatto di avere massa, ha un'energia pari a mc^2 . Saremmo tentati di definire l'energia come $cp^0 - mc^2$, ma questo oggetto non trasforma come un tensore, e viola il principio di relatività. Osserviamo ora che:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \frac{m^2c^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2} = m^2c^2 \quad (4.1.15)$$

Questa relazione vive anche se un corpo ha velocità della luce (e quindi massa nulla), e si scrive come $E = c|\mathbf{p}|$.

2 La quadriforza

2.1 Osservazione (Particella non soggetta a forze). Se una particella è in moto nello spazio di Minkowski, essa è soggetta alle equazioni

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0 \quad \text{e} \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2, \quad (4.2.1)$$

sempre che si sia in assenza di forze. Nel caso di una particella di massa nulla, non potendo parametrizzare con ds , in quanto esso è sempre pari a 0, parametrizzeremo con un parametro scalare ζ ; più precisamente:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\zeta^2} = 0, \quad \text{con } ds = 0 \quad (4.2.2)$$

2.2 Definizione (La quadriforza). Se una particella è invece soggetta a forze esterne, vive la seguente relazione:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \mathcal{F}^\mu \quad (4.2.3)$$

Equazione covariante di Minkowski

Nel caso si voglia trovare esplicitamente i termini di \mathcal{F} , deriviamo rispetto a s la (4.1.13), ottenendo:

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\frac{\gamma}{c^2} \frac{dE}{dt}, \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (4.2.4)$$

Ma $d\mathbf{p}/dt$ non è altro che la \mathbf{F} della meccanica pre-relativistica, e inoltre, dacché sussiste la legge della potenza, si ha che vive la relazione $\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Questo semplifica un po' le cose, permettendo di scrivere:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{\gamma}{c} \left(\frac{1}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{F} \right). \quad (4.2.5)$$

Analogamente alla (4.1.11) si trova:

$$\mathcal{F}^\mu u_\mu = \mathcal{F}^0 - \frac{\mathcal{F} \cdot \mathbf{v}}{c} = 0 \quad (4.2.6)$$

Da qui è possibile vedere che \mathcal{F}^μ non è indipendente da \mathbf{v} , cosa che prima accadeva.

3 Sistemi di riferimento

Nei fenomeni in cui si ha a che fare con particelle che interagiscono a velocità prossime a quelle della luce, si rende indispensabile la meccanica relativistica, poiché essa descrive in maniera corretta le quantità in gioco. Questo spiega il larghissimo uso che se ne fa in fisica nucleare e sub-nucleare. In questa sezione affronteremo decadimento di particelle e urti tra particelle.

Per quanto riguarda la nostra analisi di urti e decadimento, prenderemo in considerazione due sistemi di riferimento, il sistema di riferimento del centro di massa, \mathcal{H}_{cm} , e il sistema di riferimento del laboratorio, \mathcal{H}_{lab} ³. Facciamo un esempio per impratichirsi un po' con questi due sistemi;

3.1 Esempio. Mettiamoci in \mathcal{H}_{lab} , e consideriamo due particelle, la prima che si muove lungo l'asse x con quantità di moto $\mathbf{p}_1 = p$, e la seconda, ferma, per la quale vale dunque la relazione $\mathbf{p}_2 = 0$. Perciò la sua energia è (sia $c = 1$ in tutti i conti che facciamo in questo esempio) $E_2 = m_2$. Si ha poi:

$$p_1 = (E_1, p, 0, 0) \quad (4.3.1)$$

$$p_2 = (m_2, 0, 0, 0) \quad (4.3.2)$$

$$E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2}. \quad (4.3.3)$$

In \mathcal{H}_{cm} si ha invece che la quantità di moto totale è nulla, e dunque:⁴

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$$

il che porge:

$$|\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*| = p^*$$

Dunque:

$$p_1^* = (E_1^*, p^*, 0, 0)$$

$$p_2^* = (E_2^*, -p^*, 0, 0)$$

Per passare da \mathcal{H}_{lab} a \mathcal{H}_{cm} si effettua una trasformazione di Lorentz lungo x . Prima di farlo introduciamo tuttavia le quantità p_{tot} e p_{tot}^* , così definite:

$$p_{\text{tot}} = p_1 + p_2 = (E_1 + m_2, p, 0, 0)$$

$$p_{\text{tot}}^* = p_1^* + p_2^* = (E_1^* + E_2^*, 0, 0, 0)$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz lungo x otteniamo:

$$(p_{\text{tot}}^*)_x = \gamma_{\text{CM}}[(p_{\text{tot}})_x - \beta_{\text{CM}} p_{\text{tot}}^0] \quad (4.3.4)$$

Ricordando che $c = 1$, si ha che $\beta_{\text{CM}} = v$ (v è la velocità di \mathcal{H}_{cm} rispetto a \mathcal{H}_{lab}), e la (4.3.4) porge:

$$(p_{\text{tot}}^*)_x = 0 = \gamma_{\text{CM}}[p - \beta_{\text{CM}}(E_1 + m_2)],$$

che a sua volta dà:

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{p}{E_1 + m_2}.$$

Dacché $p = m_1 \gamma_{v_1} v_1$, usando la (4.3.3), si trova $E_1 = m_1 \gamma_{v_1}$, dalle quali:

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{m_1 \gamma_{v_1} v_1}{m_1 \gamma_{v_1} + m_2} = v$$

³ Per capirci: in \mathcal{H}_{cm} il centro di massa del sistema è fermo, mentre \mathcal{H}_{lab} è il sistema che non è propriamente quello del laboratorio, ma un altro sistema che risulta a noi comodo per descrivere i fenomeni che studiamo

⁴ Introduciamo ora la seguente notazione: ogni quantità contrassegnata da \star , verrà intesa come calcolata nel centro di massa, indipendentemente dal fatto che \star sia posizionata in alto o in basso (ovvero $p^\star = p_\star$), per questioni di comodità.

Volendo esprimere β_{CM} in un'altra forma, usiamo le trasformazioni di Lorentz lungo z per la particella 2, ottenendo:

$$0 = \gamma_{CM}(-p^* + \beta_{CM}E_2^*)$$

Con qualche semplice passaggio si arriva a:

$$\beta_{CM} = \frac{p^*}{E_2^*} = v_2^*. \quad (4.3.5)$$

Questo risultato era da aspettarsi, in quanto per annullare la velocità della particella ferma in \mathcal{H}_{lab} , velocità che in \mathcal{H}_{cm} vale v_2^* , è necessaria una trasformazione che abbia $\beta_{CM} = v_2^*$.

4 Processi tra particelle (dinamica relativistica)

4.1 Decadimento

Dopo esserci impraticitati⁵ con i nuovi sistemi di riferimento che useremo nelle nostre analisi, affrontiamo più approfonditamente il fenomeno del decadimento. il quale consiste nel processo che, da una particella iniziale con massa M , restituisce n particelle separate $m_1 \dots m_n$, come in figura 4.1.

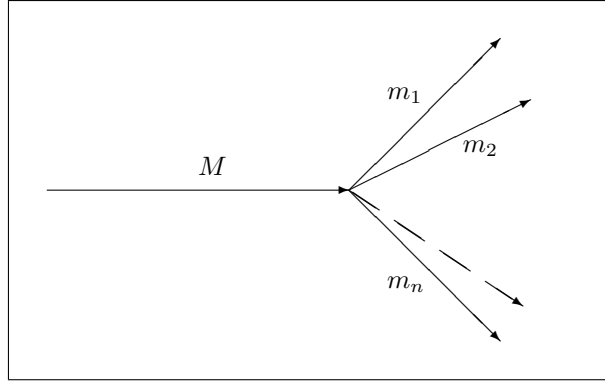


Figura 4.1: Decadimento di una generica particella con massa M

Ci si aspetterebbe, abbastanza intuitivamente, che $m_1 + \dots + m_n = M$; invece ciò non accade, poiché ciò che si conserva è il quadrimpulso, nel caso si sia in assenza di forze esterne. La prima domanda che viene spontaneo chiedersi è, date le masse delle particelle, quali sono le condizioni affinché avvenga il decadimento. Se siamo nel sistema di riferimento del centro di massa, vale la seguente relazione:

$$\frac{E^*}{c} = Mc = \sum_{i=1}^n \frac{E_i^*}{c}.$$

Si vede subito che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{E_i^*}{c} &\geq \sum_{i=1}^n m_i c \\ \Rightarrow \\ M &\geq \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

La (4.4.1) è dunque la condizione per avere il decadimento della particella M in n particelle.

⁵Si spera!

4.2 Decadimento a due corpi

Consideriamo ora il decadimento a due corpi, ovvero $M \rightarrow m_1 + m_2$. In questo caso in \mathcal{H}_{cm} , E_1^* ed E_2^* , sono completamente determinate. Vive la relazione:

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0 \Rightarrow |\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*| = p^* \Rightarrow \mathbf{p}_1^* \cdot \mathbf{p}_2^* = -p_*^2$$

Il fatto che $|\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*|$ comporta che:

$$(p_1^*)^2 = (E_1^*)^2 - m_1^2 c^2 = (E_2^*)^2 - m_2^2 c^2 = (p_2^*)^2 \quad (4.4.2)$$

Per la legge di conservazione dell'energia si ha:

$$E_1^* + E_2^* = M c^2. \quad (4.4.3)$$

Dividendo membro a membro le ultime due equazioni, tramite semplici passaggi si giunge a:

$$E_1^* - E_2^* = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M}. \quad (4.4.4)$$

A questo punto una semplice manipolazione algebrica della (4.4.3) e della (4.4.4) ci porta a:

$$E_1^* = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad (4.4.5)$$

$$E_2^* = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \quad (4.4.6)$$

$$\left(\frac{E_1^*}{c} - m_1 c\right) = p_*^2 = c^2 \frac{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)M^2}{4M^2} \quad (4.4.7)$$

Osserviamo che nel decadimento tra particelle, l'angolo ϑ^* della figura 4.2 non è determinato.

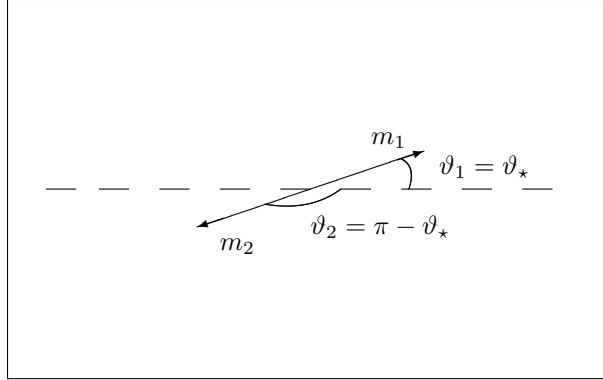


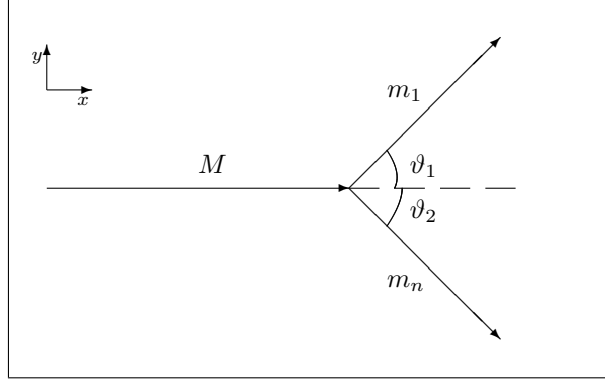
Figura 4.2: Decadimento a due corpi in \mathcal{H}_{cm}

Esaminiamo però il decadimento nel sistema laboratorio, il quale si muove con velocità $-\mathbf{v}$ rispetto alla particella che decade, ovvero rispetto a \mathcal{H}_{cm} . Le cose vanno come in figura 4.3

Possiamo dunque usare le trasformazioni di Lorentz, usando gli assi come in figura 4.3 nella pagina successiva, in particolare con l'asse x posto lungo la traiettoria della particella con massa M , e z orientato coerentemente. Usiamo poi $\alpha = 1, 2$ per indicare la particella 1, o la particella 2. Trasformiamo dunque $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ lungo l'asse x . In \mathcal{H}_{cm} si ha:

$$p_{\alpha x}^* = p^* \cos \vartheta_\alpha^*$$

$$p_{\alpha y}^* = p^* \sin \vartheta_\alpha^*$$

Figura 4.3: Decadimento a due corpi in \mathcal{H}_{lab}

Dacché l'energia si trasforma come il tempo, avremo:

$$E_\alpha = \gamma(E_\alpha^* + v p_{\alpha x}^*) = \gamma(E_\alpha^* + v p_\alpha^* \cos \vartheta_\alpha^*),$$

mentre per \mathbf{p} :

$$p_{\alpha x} = (p_{\alpha x}^* + \frac{\beta}{c} E_\alpha^*) \gamma = (p^* \cos \vartheta_\alpha^* + \frac{\beta}{c} E_\alpha^*) \gamma \quad (4.4.8)$$

$$p_{\alpha y} = p^* \sin \vartheta_\alpha^* \quad (4.4.9)$$

$$p_{\alpha z} = p_{\alpha z}^* = 0 \quad (4.4.10)$$

Questo mostra che tutte le quantità in gioco, eccetto ϑ^* , sono note. Come in figura 4.2, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha^* &\stackrel{\alpha=1}{=} \vartheta^* \\ \vartheta_\alpha^* &\stackrel{\alpha=2}{=} \pi - \vartheta^* \end{aligned}$$

Andiamo a vedere il luogo geometrico di $p_{\alpha x}$ e $p_{\alpha y}$ al variare di ϑ^* . Sommiamo in quadratura la (4.4.8) e la (4.4.9); con semplici passaggi ne esce (per la 4.4.8, prima si divide per γ , poi si porta a primo membro $\frac{\beta}{c} E_\alpha^*$):⁶

$$\left(\frac{p_{\alpha x}}{\gamma} - \frac{\beta}{c} E_\alpha^* \right)^2 + p_{\alpha y}^2 = p_\star^2 \quad (4.4.11)$$

che può essere riscritta come:

$$(1 - \beta^2) \left(p_{\alpha x} - \frac{\beta}{c} E_\alpha^* \gamma \right)^2 + p_{\alpha y}^2 = p_\star^2. \quad (4.4.12)$$

La (4.4.12) è l'equazione di un'ellisse nelle variabili p_x, p_y , con centro in:

$$\left(\frac{\beta}{c} \frac{E_\alpha^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv d, 0 \right)$$

e semiassi:

$$s_x = p_\star \gamma \quad \text{lungo } x$$

$$s_y = p_\star \quad \text{lungo } y$$

Ciò implica i seguenti casi:

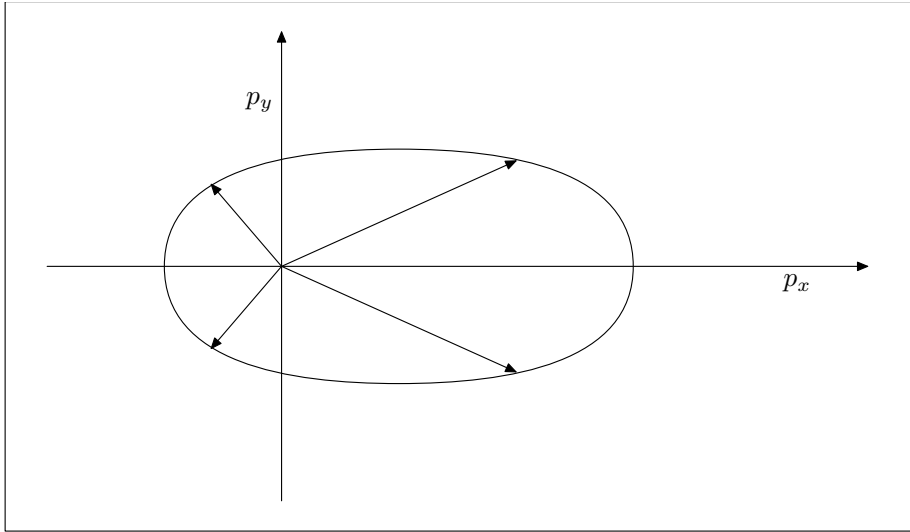


Figura 4.4:

1. se $d < s_x$, l'angolo ϑ_* può assumere tutti i valori, come in figura 4.4
2. se $d > s_x$, l'angolo ϑ_* ha un massimo, ossia le particelle devono essere emesse in avanti, come in figura 4.5, dove, tra l'altro, si vede molto bene che v'è un angolo massimo, indicato lì con ϑ_{\max} , di emissione per la particella.

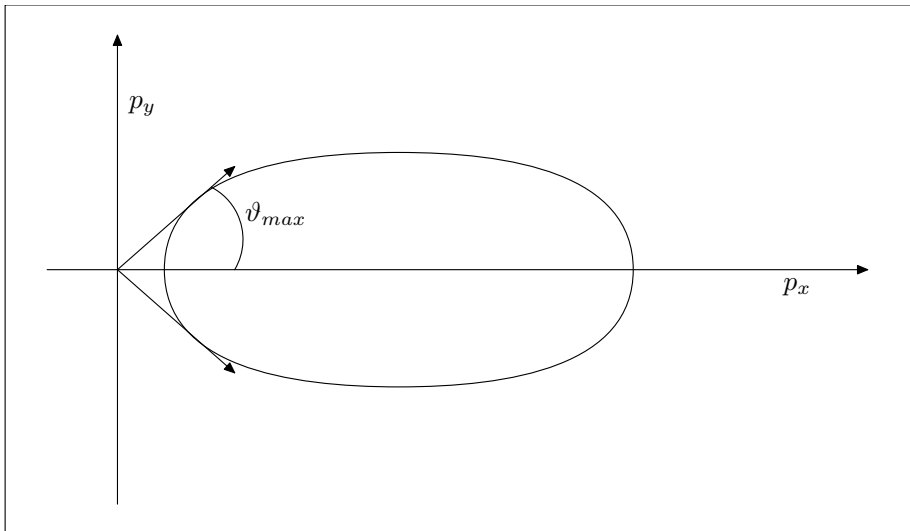


Figura 4.5:

Andando ad analizzare più in profondità la situazione, si constata che se $v_\alpha^* < v$ ⁷, siamo nella prima situazione, altrimenti se $v_\alpha^* = 0$ siamo nella seconda. Per trovare l'angolo massimo nel sistema laboratorio, mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse

⁶ $\beta = \frac{v}{c}$

⁷ si confronti la 4.3.5

con quella di una retta passante per l'origine; il sistema uscente è:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \beta)^2 (p_{\alpha x} - d)^2 + p_{\alpha y}^2 = p_\star^2 \\ p_{\alpha x} = q \cos \vartheta \\ p_{\alpha y} = q \sin \vartheta \end{array} \right\} \text{ la pendenza è } \tan \vartheta$$

Introduciamo delle quantità per semplificare i conti: sia $\varepsilon' = \frac{\beta E_\alpha^\star}{c}$, da cui $d = \varepsilon' \gamma$. Allora:

$$(1 - \beta^2)[q^2 \cos^2 \vartheta - 2q \cos \vartheta \varepsilon' \gamma + (\varepsilon' \gamma)^2] + q^2 \sin^2 \vartheta = p_\star^2$$

Le condizioni di tangenza si hanno quando il discriminante in q è uguale a 0. Ovvero se scriviamo $aq^2 + 2bq + c = 0$, deve valere la relazione $b^2 - ac = 0$, che è la condizione di annullamento del discriminante. Lasciando al lettore questi noiosi, ma facili, conti, scriviamo soltanto i risultati:

$$\cos^2 \vartheta_{\max} = \frac{\varepsilon'^2 - p_\star^2}{\varepsilon'^2 - \beta^2 p_\star^2}$$

da cui

$$\sin^2 \vartheta_{\max} = \frac{p_\star^2 (1 - \beta^2)}{\varepsilon'^2 - \beta^2 p_\star^2}$$

Possiamo infine scrivere, ricordando che $m_\alpha^2 c^2 = \left[\left(\frac{E_\alpha^\star}{c} \right)^2 - p_\star^2 \right]$,

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{p_\star \sqrt{(1 - \beta^2)}}{\beta m_\alpha c}.$$

4.3 Distribuzione di probabilità nel decadimento

Sopra abbiamo analizzato il decadimento di una particella, la quale "decade", generando due nuove particelle. Questo fenomeno avviene per la gran parte delle particelle, quindi è naturale che esso abbia molta importanza nella nostra trattazione; tuttavia il tempo che queste particelle impegnano a decadere non è prevedibile, ed è possibile parlarne solo come tempo medio. Ciò implica che è necessario trattare il decadimento dal punto di vista statistico. Per esempio, se prendo un campione di N particelle X , dove X è una particella che ha tempo di decadimento τ ⁸, dopo una frazione, che a noi non interessa meglio definire, di τ , ci sono particelle già decadute. E dopo un multiplo di τ , ci saranno particelle che dovranno ancora decadere. Quindi per un piccolo insieme di particelle non è vero che il tempo di decadimento è τ : questo non toglie che dopo un tempo τ , *in media*, le particelle di tipo X siano $\frac{N}{e}$ ⁹.

Trattiamo ora l'argomento con maggiore precisione: prendiamo, come prima, N particelle X , e definiamo N_t con il numero di particelle all'istante t . La legge dei decadimenti è:

$$\frac{dN_t}{dt} = -\frac{N_t}{\tau}.$$

La sua soluzione è:

$$N_t = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.4.13)$$

Dalla (4.4.13) si capisce un po' più chiaramente quanto sopra detto.

Ci chiediamo ora quale sia la distribuzione di energia nel decadimento. Supponiamo di avere N particelle che decadono. Una frazione di loro, diciamo dN avrà energia compresa tra E , ed $E + dE$. Poniamo:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= d\chi(E) \\ \rho(E) &= \frac{d\chi(E)}{dE} \quad (\text{È la densità di probabilità}) \end{aligned}$$

⁸ τ è da noi definito come il tempo dopo il quale le particelle X non decadute sono $\frac{N}{e}$, e non più N

⁹ L'ideale sarebbe un insieme di particelle numerabile, ma ciò in pratica non può accadere

Nel sistema di riferimento \mathcal{H}_{cm} , la distribuzione di energia è isotropa; dunque dopo aver ivi trovato le quantità a cui siamo interessati, trasformiamo i risultati; in questa trasformazione entra in gioco l'energia nel sistema \mathcal{H}_{lab} .

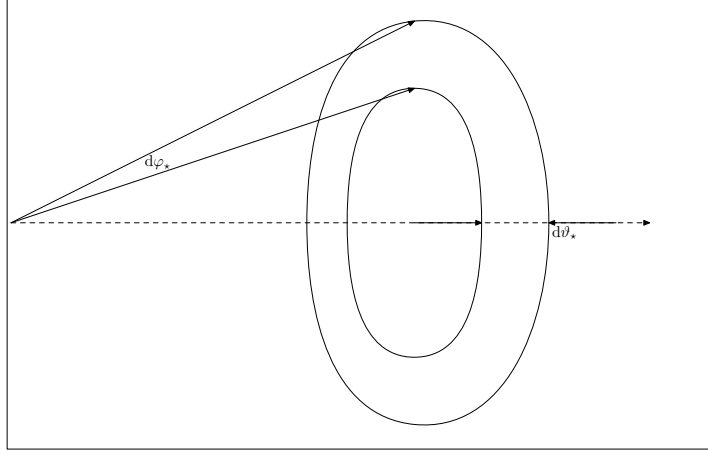


Figura 4.6: Sezione d'angolo solido $d\varphi$ e $d\vartheta$ sono invertiti rispetto alla figura

Con riferimento alla figura 4.6, in \mathcal{H}_{cm} , la probabilità di trovare una particella nell'angolo solido tra $(\varphi^*, \varphi^* + d\varphi^*)$ e $(\vartheta^*, \vartheta^* + d\vartheta^*)$ sono indipendenti da φ^* e da ϑ^*

$$\implies d\chi(\varphi^*, \vartheta^*) = \frac{d\Omega(\varphi^*, \vartheta^*)}{4\pi}.$$

Per l'invarianza per rotazioni attorno all'asse x si ha:

$$d\chi(\vartheta^*) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^* d\cos\vartheta^*}{4\pi} = \frac{1}{2} d(\cos\vartheta^*)$$

È poi cosa nota che:

$$E = (E^* + c\beta p^* \cos\vartheta^*)\gamma \implies \cos\vartheta^* = \frac{E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E^*}{c\beta p^*} \quad (4.4.14)$$

da cui si ricava:

$$d\chi(E) = \frac{1}{2} d\left(\frac{E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E^*}{c\beta p^*}\right) = \frac{dE}{2c\beta p^* \gamma}.$$

Perciò in definitiva:

$$\rho(E) = \frac{d\chi(E)}{dE} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c\beta p^*}$$

Imponiamo in ultima le condizioni di normalizzazione:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \rho(E) dE = 1 : \quad \text{è una condizione plausibile?}$$

Verifichiamolo:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \rho(E) dE = \frac{1}{2c\beta p^* \gamma} (E_{\max} - E_{\min}) \quad (4.4.15)$$

Ma, dalla (4.4.14), si ha:

$$E_{\max} = (E^* + c\beta p^*)\gamma$$

G.L.

ed:

$$E_{\min} = (E^* - c\beta p^*)\gamma$$

da cui si ottiene che la (4.4.15) diviene:

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c\beta p^*} \gamma 2 c \beta p^* = 1,$$

il che ci permette di concludere questa parte.

4.4 Urti tra particelle

¹⁰ Per quanto riguarda i processi d'urto tra particelle, nella nostra analisi, prenderemo in considerazione solo urti elastici, ovvero urti dove le particelle uscenti sono dello stesso tipo di quelle entranti. Per focalizzare come avviene il processo d'urto tra due particelle, possiamo riferirci alla figura 4.7.

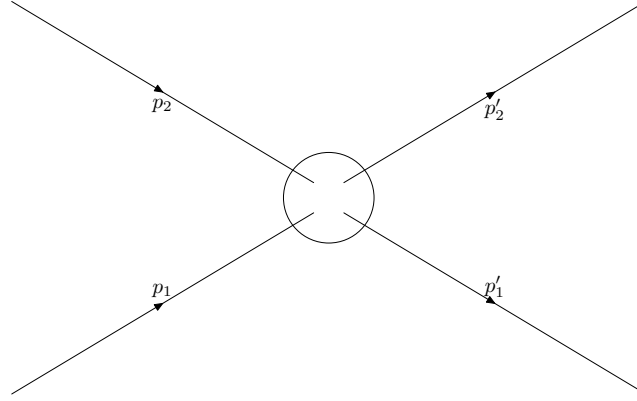


Figura 4.7: Figura d'un urto elastico

Quanti invarianti relativistici possiamo avere con tale processo? Sappiamo che vale la conservazione del quadrimpulso, cioè che:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2,$$

il che implica:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2, \quad \text{un'equazione,}$$

e

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \text{tre equazioni;}$$

Inoltre abbiamo $p_{1,2}^2 = m_{1,2}^2 = (p'_{1,2})^2$, ovvero altre quattro equazioni. Abbiamo dunque 8 condizioni sui sedici parametri che compongono i 4 quadrimpulsi. Quindi si hanno altri 8 parametri liberi, che tuttavia scendono a due poichè possiamo scegliere, mediante una rotazione e una trasformazione di Lorentz, il sistema di riferimento che ci è più congeniale (e tale operazione porta via altri 6 parametri). Vedremo più avanti cosa rappresentano questi 2 parametri liberi.

¹⁰ Usiamo la convenzione $c = 1$

4.5 Le variabili di Mandelstam

¹¹ Nello studio relativistico degli urti tra particelle, sono state introdotte, da Mandelstam, quattro invarianti relativistici, così definiti¹²:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 \\ s + t + u &= 2(m_1^2 + m_2^2). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Non è difficile verificare la (4.4.16); infatti:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p'_1)^2 + (p_1 - p'_2)^2 \\ &= 3p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + p_2'^2 - 2p_1(p'_1 + p'_2 - p_2) \end{aligned}$$

dalla quale, ricordando che $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, e che $p_i^2 = m_i^2$, si ottiene la (4.4.16).

Possiamo ora specificare il dominio fisico di s , che risulta essere $s \in [(m_1 + m_2)^2, \infty]$; lo si verifica non troppo difficilmente:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (p_1^* + p_2^*)^2 \\ &\stackrel{\star}{=} (E_1^* + E_2^*)^2 \\ &= (\sqrt{p_*^2 + m_1^2} + \sqrt{p_*^2 + m_2^2})^2 \\ &\geq (m_1 + m_2)^2 \end{aligned}$$

L'unico passaggio che potrebbe necessitare delucidazioni è \star : chiariamo subito: nel CM valgono le relazioni:

$$\begin{cases} p_1^* = (E_1^*, p^*, 0, 0) \\ p_2^* = (E_2^*, -p^*, 0, 0) \end{cases} \implies |p_1^* + p_2^*| = E_1^* + E_2^* \quad (4.4.17)$$

e questo può essere sufficiente, a mio parere, per la spiegazione.

Scriviamo poi un'altra relazione che ci tornerà utile, tra le altre cose, per la caratterizzazione del dominio fisico di t ; per la conservazione di p si ha (nel caso di due particelle che si urtano):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* &= \mathbf{p}_1'^* + \mathbf{p}_2'^* = \mathbf{0} \\ \implies \\ p_* &= |\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*| \quad \& \quad p'_* = |\mathbf{p}_1'^*| = |\mathbf{p}_2'^*|; \end{aligned}$$

Applicando la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} E_1^* + E_2^* &= E_1'^* + E_2'^* \\ \implies \\ \sqrt{p_*^2 + m_1^2} + \sqrt{p_*^2 + m_2^2} &= \sqrt{p_*'^2 + m_1^2} + \sqrt{p_*'^2 + m_2^2} \end{aligned}$$

Tale relazione vale $\Leftrightarrow p_* = p'_*$. Ciò implica che:

$$|\mathbf{p}_1^*| = |\mathbf{p}_2^*| = |\mathbf{p}_1'^*| = |\mathbf{p}_2'^*| = p_*$$

Possiamo a questo punto caratterizzare t :

$$\begin{aligned} t &= (p'_1 - p_1)^2 = (E_1'^* - E_1^*)^2 - (\mathbf{p}_1'^* - \mathbf{p}_1^*)^2 = \\ &= 0 - 2p_*^2(1 - \cos \vartheta_*) \leq 0 \quad (\text{infatti } E_1'^* = \sqrt{m_1^2 + p_*'^2} = E_1^*, ep'_1 = p_* \cos \vartheta_*) \end{aligned}$$

Da queste due caratterizzazioni e da $s + t + u = 2(m_1^2 + m_2^2)$, ne esce che l'intervallo fisico di u è determinato da m_1 ed m_2 .

¹¹ Usiamo la convenzione $c = 1$

¹² s è anche detto massa invariante, mentre t è anche detto momento invariante.

4.6 Gli urti veri e propri

¹³ Ora che abbiamo introdotto le variabili di Mandelstam, siamo in possesso di invarianti utili alla formalizzazione del processo di urti tra particelle. Prendiamo in considerazione l'urto in figura 4.7 a pagina 44, tra la particella 1, che, prima dell'urto, in \mathcal{H}_{lab} , ha quadrimpulso pari a:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$$

e la particella 2, ferma in \mathcal{H}_{lab} , e che dunque ha quadrimpulso:

$$p_2 = (m_2, \mathbf{0}).$$

Indichiamo con l'apice le quantità dopo l'urto, e senz'apice le quantità prima dell'urto. La conservazione dell'energia in \mathcal{H}_{lab} implica:

$$E_1 + m_2 = E'_1 + E'_2 \longrightarrow E'_1 - E_1 = m_2 - E'_2. \quad (4.4.18)$$

Calcoliamoci gli invarianti relativistici: ¹⁴

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{H}_{\text{lab}}} &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \\ &\stackrel{E_2=m_2, \mathbf{p}_2=\mathbf{0}}{=} m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1 \\ \\ t_{\mathcal{H}_{\text{lab}}} &= (p'_1 - p_1)^2 \\ &= (p'_2 - p_2)^2 \\ &= 2m_2^2 - 2(E'_2 E_2 - \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}_2) \\ &\stackrel{E_2=m_2, \mathbf{p}_2=\mathbf{0}}{=} 2m_2^2 - m_2 E'_2 \\ &= 2m_2(m_2 - E'_2) \\ &\stackrel{(4.4.18)}{=} 2m_2(E'_1 - E_1). \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo il fatto che $s_{\mathcal{H}_{\text{lab}}} = s_{\mathcal{H}_{\text{cm}}}$, ottenendo (ricorda (4.4.17)):

$$\left(\sqrt{p_\star^2 + m_1^2} + \sqrt{p_\star^2 + m_2^2} \right)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1$$

$$p_\star^2 + m_1^2 + p_\star^2 + m_2^2 + 2\sqrt{p_\star^2 + m_1^2}\sqrt{p_\star^2 + m_2^2} = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1$$

Semplificando:

$$\sqrt{p_\star^2 + m_1^2}\sqrt{p_\star^2 + m_2^2} = (m_2 E_1 - p_\star^2)$$

Elevando al quadrato otteniamo:

$$p_\star^4 + p_\star^2(m_1^2 + m_2^2) + m_1^2 m_2^2 = m_2^2 E_1^2 + p_\star^4 - 2p_\star^2 m_2 E_1$$

$$p_\star^2 = \frac{m_2^2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1} :$$

HO TROVATO p_\star IN FUNZIONE DI E_1 .

Vale poi $t_{\mathcal{H}_{\text{lab}}} = t_{\mathcal{H}_{\text{cm}}}$, ovvero:

$$-2p_\star^2(1 - \cos \vartheta^\star) = 2m_2(E'_1 - E_1)$$

\implies

¹³ Usiamo la convenzione $c = 1$

¹⁴ Ricordarsi che $p_i^2 = m_i^2$

$$\begin{aligned}
E'_1 &= -\frac{2p_\star^2}{2m_2}(1 - \cos \vartheta_\star) + E_1 \\
&= -\frac{p_\star^2}{m_2}(1 - \cos \vartheta_\star) + E_1
\end{aligned}$$

Ora anche E'_1 è noto in funzione di E_1 e ϑ_\star . A questo punto $E'_{1_{max}}$ ed $E'_{1_{min}}$ si ricavano facilmente. $E'_{1_{max}} = E'_1(\cos \vartheta_\star = 1)$, e dunque $E'_{1_{max}} = E_1$. Invece:

$$E'_{1_{min}} = \frac{E_1(m_1^2 + m_2^2) + 2m_2m_1^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2}.$$

Osservazione. In fisica relativistica è possibile trasferire energia, anche in quantità molto grande, da una massa $m_1 \ll m_2$, alla massa m_2 , cosa che non era prevista prima. Infatti, nella condizione $m_1 \ll m_2$:

$$\frac{E'_{k \min_1}}{E_{k \min_1}} \xrightarrow{m_1 \ll m_2} \frac{m_2}{m_2 + E_1} \xrightarrow{E_1 \rightarrow \infty} 0.$$

In fisica non relativistica invece $E - m \approx mv^2/2$, $v^2 \ll c^2$ e perciò $E_1m_2 \approx m_1m_2$. Allora:

$$\frac{E'_{k \min_1}}{E_{k \min_1}} \xrightarrow{v/c \ll 1} \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{m_1 \ll m_2} 1,$$

come si voleva mostrare.

Se ora vogliamo stabilire come si dispongono gli impulsi dopo l'urto, si procede analogamente a come proceduto nel decadimento, sapendo il risultato della somma vettoriale $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1$. Ne esce dunque l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{(p'_{y\alpha})^2}{p_\star^2} + \frac{1 - \beta^2}{p_\star^2} \left(p'_{x\alpha} - \frac{\beta E_\alpha^\star}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 = 1.$$

Si lascia al lettore farsi i vari casi, come nel decadimento.

Capitolo V

Elettromagnetismo

Indice

1	Il sistema di Gauss	48
2	Il tensore $F^{\mu\nu}$	49
3	$F^{\mu\nu}$ sotto trasformazioni di Lorentz	52
4	La δ di Dirac	54
5	La quadridensità di corrente	55
6	Moti di particelle	57

In questa dispensa ci siamo occupati, finora, di ridefinire la dinamica e la meccanica classica, e i risultati sono stati dinamica e meccanica relativistica. In questo capitolo ci occuperemo non di ridefinire l'elettromagnetismo, in quanto esso già rispetta il principio di relatività einsteiniano, bensì di darne la sua formulazione covariante. Procedendo, inoltre, andremo incontro ad una nuova unificazione concettuale di campo elettrico e campo magnetico, in quanto saranno due lati diversi di uno stesso oggetto rappresentato dal tensore del campo elettromagnetico.

1 Il sistema di Gauss

Per affrontare la nostra trattazione, introduciamo le equazioni di Maxwell nel sistema di Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.1.1)$$

la quale è omogenea ed esprime che la divergenza del campo magnetico è sempre pari a 0. Abbiamo poi:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^0} = 0. \quad (5.1.2)$$

Tale equazione è omogenea ed esprime l'irrotazionalità del campo elettrico, a meno di una variazione temporale del campo magnetico. Invece

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (5.1.3)$$

non è equazione omogenea invece, ed afferma che la sorgente del campo elettrico è la densità di carica. In ultima:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.1.4)$$

non omogenea; essa afferma che il rotore del campo magnetico è dovuto alla variazione temporale del campo elettrico, ed alla densità di corrente.

Dalla (5.1.1) ne esce:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.1.5)$$

nella quale A è il potenziale generalizzato di B . Usando nella (5.1.2) tale equazione ottengo:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} \right) = 0. \quad (5.1.6)$$

Da questa ricavo l'esistenza di un potenziale scalare φ t.c.:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0}. \quad (5.1.7)$$

2 Il tensore $F^{\mu\nu}$

Ci occupiamo in questa sezione di introdurre il tensore $F^{\mu\nu}$, che racchiude in sè campo elettrico e magnetico. La sua comodità sta nel fatto che, dopo averlo scritto in un sistema di riferimento, è possibile conoscerne la forma in qualsiasi altro sistema, applicandovi le opportune matrici. Per cominciare osserviamo che \mathbf{B} e \mathbf{E} sono invarianti sotto trasformazioni di \mathbf{A} e φ , fatte in tale modo (Λ è una funzione non meglio specificata per ora):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Lambda \\ \varphi &\longrightarrow \varphi' = \varphi + \partial_0\Lambda \end{aligned} \quad , \quad (5.2.1)$$

chiamate trasformazioni di gauge.

Poiché $\partial_0 = \partial^0$, e $-\nabla = \partial^i = g^{i\mu}\partial_\mu$, e dacché ∂^μ è un quadrivettore controvariante, la (5.2.1) suggerisce che $(\varphi, \mathbf{A}) = A^\mu$, siano le quattro componenti di un quadrivettore controvariante che trasforma per gauge; infatti, se nella seguente equazione $\partial^\mu\Lambda$ è un quadrivettore (il che accade se Λ è uno scalare), per consistenza anche A^μ dev'essere un quadrivettore:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\Lambda.$$

A questo punto possiamo dare la:

2.1 Definizione (Quadritensore $F^{\mu\nu}$). Il tensore di rango due controvariante $F^{\mu\nu}$ è definito da

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

2.2 Osservazione. $F^{\mu\nu}$ è anti-simmetrico, e che:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} = E^i.$$

Inoltre:

$$F^{12} = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -(\nabla \times \mathbf{A})_3 = -B_3,$$

ed analogamente:

$$F^{23} = -B_1;$$

a questo punto si intuisce la regola (che il lettore incredulo potrà “sperimentalmente” controllare):

$$F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_k \quad (5.2.2)$$

e dunque:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

Invece $F_{\mu\nu} = g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}$.

Enunciamo e dimostriamo ora delle importanti proposizioni:

2.3 Proposizione. L'equazione $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$ è equivalente alla (5.1.1) e alla (5.1.2).

G.L.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzi tutto che $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$, e poi facciamo vedere la sua equivalenza con le due equazioni di Maxwell in esame. Si ha:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \\ &\stackrel{\text{cambio nomi agli indici}}{=} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\partial^\rho A^\sigma - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^\nu\partial^\rho A^\sigma \\ &\stackrel{\text{per le proprietà di } \varepsilon}{=} 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\partial^\rho A^\sigma \\ &= 0\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza discende dal fatto che la contrazione di indici simmetrici (quelli delle derivate) con indici antisimmetrici (quelli di $F^{\mu\nu}$), dà 0, come si può facilmente verificare. Perciò $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$. Prendiamo $\mu = 0$; allora per la struttura di ε_{ijkl} , $\nu = i$, $\rho = j$, $\sigma = k$, e

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0ijk}\partial^i F^{jk} &= \varepsilon_{0123}\partial^1 F^{23} + \dots \\ &= \frac{\partial(-B_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(-B_2)}{\partial x^2} + \dots \\ &= -2\nabla \cdot \mathbf{B};\end{aligned}$$

Dunque abbiamo dimostrato che $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Passiamo ora alla seconda parte, prendendo in considerazione gli indici spaziali, ovvero sia $\mu = 1, 2, 3$. Allora:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iljk}\partial^l F^{jk} &= \varepsilon_{i0jk}\partial^0 F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}\partial^j F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}\partial^j F^{k0} \\ &= -2\frac{\partial B_i}{\partial x^0} + 2\varepsilon_{ijk0}\partial^j F^{k0} \\ &= -2\frac{\partial B_i}{\partial x^0} + 2\varepsilon_{ijk}\partial^j E_k \\ &= -2\left[\frac{\partial B_i}{\partial x^0} + (\nabla \times \mathbf{E})_i\right],\end{aligned}$$

che è quanto si richiedeva. □

Segue ora un'importante

2.4 Definizione. Il tensore quadricorrente j^ν è quell'oggetto le cui componenti sono $(c\rho, \mathbf{j})$, ove ρ è l'usuale densità di carica, e \mathbf{j} è l'usuale densità di corrente.

Possiamo passare ora a dimostrare un'altra importante

2.5 Proposizione. L'equazione $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu 4\pi/c$ è equivalente alla (5.1.3) e alla (5.1.4).

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo $\nu = 0$: allora $\mu = i$, e si ha:

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E_i = \nabla \cdot \mathbf{E},$$

che è quanto si richiede per la prima parte. Se invece $\nu = j$, μ può essere sia spaziale che temporale. Dunque:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} \\ &\stackrel{(5.2.2)}{=} -\frac{\partial E_j}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1} \varepsilon^{ijk} B_k \\ &= -\frac{\partial E_j}{\partial x^0} + (\nabla \times \mathbf{B})_j,\end{aligned}$$

il che ci permette di concludere. □

Come si sa, dalla (5.1.3), discende l'equazione di continuità e perciò deve valere il seguente

2.6 Corollario. Da $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu 4\pi/c$ discende l'equazione di continuità.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, moltiplicando ambo i membri di $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu 4\pi/c$ per ∂_ν si ha, per contrazione di indici simmetrici con antisimmetrici:

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu 4\pi/c;$$

allora

$$0 = \partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 - \partial_i j^i = \frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j},$$

da cui l'equazione di continuità. \square

2.7 Proposizione. *L'equazione di Lorentz per la carica in campo elettromagnetico:*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

e la legge di potenza per la carica in campo elettromagnetico:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

sono equivalenti a:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{\gamma}{c};$$

dunque dobbiamo innanzi tutto mostrare che:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma}{c} e \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right].$$

Per farlo prendiamo la componente spaziale di $F^{\mu\nu} u_\nu$, ovvero prendiamo $\mu = i$; allora:

$$F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j = \left[E_i + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_i \right] \gamma,$$

e ciò permette di concludere la prima parte. Per la seconda si ha:

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{e}{c} F^{0i} u_i;$$

allora:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

il che è equivalente, ricordando la (4.1.13), a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad \square$$

Ci domandiamo ora se è possibile costruire degli invarianti, o scalari, utili con il tensore doppio $F^{\mu\nu}$. La risposta è nella:

2.8 Proposizione. *Gli scalari $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ed $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ sono invarianti, in quanto scalari (e sono scalari in quanto si ottengono dalla contrazione di indici covarianti con indici controvarianti), e valgono, rispettivamente,*

$$2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$$

$$-8(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}).$$

G.L.

DIMOSTRAZIONE. Si verificano entrambi con un semplice calcolo:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + \dots \\
 &= 2(-E_i^2 + B_i^2) \\
 &= 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2); \\
 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} &= \varepsilon_{0123}F^{01}F^{23} + \dots \\
 &= 8(-E_1B_1 - E_2B_2 - E_3B_3) \\
 &= -8(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}).
 \end{aligned}$$

□

3 $F^{\mu\nu}$ sotto trasformazioni di Lorentz

In questa sezione andiamo ad analizzare come il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ cambia sotto trasformazioni di Lorentz. Essendo un tensore controvariante di rango 2, esso trasformerà, sotto $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ in questo modo:

$$F'^{\mu\nu}(\mathbf{x}') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathbf{x}),$$

dove $\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}$. Se Λ rappresenta una trasformazione propria di Lorentz lungo x , allora:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamoci qualche componente di $F^{\mu\nu}$ per capire cosa e come cambia:

$$\begin{aligned}
 -E'_1 = F'^{01} &= \Lambda^0{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} \\
 &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_\sigma F^{0\sigma} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_\sigma F^{1\sigma} \\
 &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} \\
 &= (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) F^{01} \\
 &= F^{01} = -E_1,
 \end{aligned}$$

mentre, ad esempio, per una componente che non sia lungo l'asse delle x :

$$\begin{aligned}
 -E'_2 = F'^{02} &= \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} \\
 &= \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_2 F^{\rho 2} \\
 &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12} \\
 &= \gamma F^{02} - \beta \gamma F^{12} \\
 &= \gamma(-E_2 + \beta B_3).
 \end{aligned}$$

Risparmiando al lettore (e a me), i calcoli di tutte le altre componenti, riportiamo solo i risultati:

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= E_1 \\
 E'_2 &= (E_2 - \beta B_3)\gamma \\
 E'_3 &= (E_3 + \beta B_2)\gamma \\
 B'_1 &= B_1 \\
 B'_2 &= (B_2 + \beta E_3)\gamma \\
 B'_3 &= (B_3 - \beta E_2)\gamma.
 \end{aligned}$$

Cosa è possibile fare con questo risultato? Prendiamo in considerazione \mathbf{E} e \mathbf{B} costanti. Si hanno quattro possibilità:

1. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, con $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 < 0$;
2. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, con $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$;
3. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, con $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 > 0$;
4. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$.

Con opportune trasformazioni di Lorentz

1. porta a solo \mathbf{E} ;
2. non porta a nessuna situazione interessante;
3. porta a solo \mathbf{B} ;
4. porta a $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$.

Vediamo come. Ricordando Lorentz lungo x , partiamo dalla 1; campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali, e

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} < 1;$$

scelgo gli assi nella maniera più comoda, e precisamente tali che $\mathbf{E} = (0, |\mathbf{E}|, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, |\mathbf{B}|)$. Il risultato che voglio ottenere da 1. è che $\mathbf{B}' = 0$ e ciò comporta:

$$\begin{cases} B'_y = B_y = 0 \\ B'_x = B_x = 0 \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) = 0 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Le prime due sono già soddisfatte, la terza è soddisfatta se $\beta = |B_z|/|E_y|$, e la condizione è possibile poiché, per ipotesi $|B_z|/|E_y| < 1$ (e tale ipotesi deve valere perché $\beta < 1$, ovvero affinché la trasformazione esista.). Si lascia per esercizio il dimostrare che da 3. si può arrivare ad una situazione in cui ci sia solo \mathbf{B} , mentre si passa a far vedere che da 4. si può arrivare a campo magnetico parallelo a campo elettrico. Se effettuo una trasformazione lungo l'asse delle x , posso prendere $E'_x = E_x = 0$, e $B'_x = B_x = 0$. Deve poi valere:

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0,$$

che porta a:

$$E'_y B'_z - E'_z B'_y = 0, \quad (5.3.2)$$

più ad altre due equazioni che sono sempre vere se $E'_x = B'_x = 0$; la (5.3.2) dà:

$$\begin{aligned} \gamma(E_y - \beta B_z)\gamma(B_z - \beta E_y) - \gamma(E_z - \beta B_y)\gamma(B_y - \beta E_z) &= \\ -\beta(\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) + (1 + \beta^2)(E_y B_z - E_z B_y) &= 0 \end{aligned}$$

e questa impone che debba valere

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2} = \frac{\vec{\beta}}{1 + \beta^2}; \quad (5.3.3)$$

il secondo membro di quest'equazione ha come dominio di β l'intervallo $[0, 1]$, e dunque come codominio $[0, 0.5]$. Posso trovarmi esplicitamente β da questa relazione, ma è vero che

$$0 < \frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}{\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2} < \frac{1}{2}?$$

Dacché $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \leq |\mathbf{E}||\mathbf{B}|$, devo mostrare che $2|\mathbf{E}||\mathbf{B}| \leq \mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2$: ma è sempre vero, poiché quanto appena scritto è vero essendo equivalente a:

$$|\mathbf{E}| + |\mathbf{B}| \geq 0,$$

il che ci dà modo di concludere.

G.L.

4 La δ di Dirac

La fisica relativistica, come già accennato in precedenza, si configura come campo di studio molto utile per descrivere le interazioni tra particelle elementari. Tuttavia in relatività non esistono corpi rigidi¹, e quindi è comodo, e produce risultati in accordo con la pratica, trattare ogni particella come puntiforme, in quanto è molto difficoltoso considerare tutti i corpi come elastici. Tuttavia non è rigoroso, dal punto di vista matematico, l'approssimazione puntiforme. Si prenda infatti un elettrone dentro un volumetto dV , la cui posizione sia costantemente associata al vettore \mathbf{x} . Se volessimo avere la funzione densità di carica in dV , necessiteremmo di una funzione $\rho(\mathbf{z})$ identicamente uguale a 0, tranne che per $\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Integrando questa funzione sul volumetto dovremmo trovare $e = -1.6 \times 10^{-19}C$. Ma l'integrale di una funzione quasi ovunque nulla dà 0, per noti risultati dell'analisi matematica. Si dovette quindi introdurre la cosiddetta δ di Dirac, che si può trattare come, rigorosamente, un funzionale², che ad ogni funzione associa il valore della funzione nell'origine. Dunque:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad (5.4.1)$$

se $\varphi \in C_C^\infty$ ³ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(n)} = 0$; si può alternativamente dire che la δ associa a φ la funzione:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (5.4.2)$$

La δ di Dirac gode di alcune proprietà, che andiamo ad elencare:

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad (5.4.3)$$

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (5.4.4)$$

$$\delta(x) = \infty \text{ se } x = 0. \quad (5.4.5)$$

Vi è poi $\delta(x - a)$, che può dirsi il funzionale che opera in tale maniera (la φ soddisfa le ipotesi sopraelencate):

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Passiamo ora ad enunciare la

4.1 Proposizione. *La derivata della δ è quel funzionale che opera in tal modo:*

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \delta(x) \varphi(x) dx &= [\delta(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= -\frac{d}{dx} \varphi(0) \end{aligned}$$

□

¹Si prenda una sfera di raggio R . Se essa fosse rigida, l'informazione di un colpo di un proiettile ad una sua estremità, si propagherebbe istantaneamente all'altra sua estremità, per la rigidità del corpo. Questo tuttavia è impossibile per la finitezza della velocità dell'informazione.

²Più precisamente di una distribuzione con dominio in \mathcal{D}^* .

³ C_C^∞ è lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto

A questo punto si possono estendere le proprietà a spazi n -dimensionali. In particolare la δ 3-dimensionale è quel funzionale t.c.

$$\langle \delta^{(3)}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) dx dy dz = \varphi(\mathbf{a}).$$

Ora è chiaro che la densità di carica dell'elettrone nel volumetto può scriversi:

$$\rho(\mathbf{x}) = e \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}),$$

dove $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \delta(x^1 - z^1) \delta(x^2 - z^2) \delta(x^3 - z^3)$, e $\varphi(x) = \chi_{dV}(x)$ (vale 1 se $x \in dV$, 0 altrimenti). Si estende in maniera naturale agli spazi con più dimensioni.

Osservazione. In realtà non è corretto affermare $\delta(0) = +\infty$, né ha molto senso l'integrale (5.4.2), per i motivi ricordati prima, ovvero che una funzione che sia nulla quasi ovunque non può avere integrale di Lebesgue non nullo: l'unica notazione che ha senso è la (5.4.1), che definisce la δ , come funzionale: la funzione rappresentativa $\delta(x)$ ha senso solo per $x \neq 0$ (ovvero la 5.4.4); inoltre usare la funzione rappresentativa è comodo, come si è potuto constatare nella dimostrazione della proposizione 4.1. Per motivi storici, tuttavia, ho preferito scrivere la (5.4.5), giustificando qui, per correttezza, la mia scelta.

5 La quadridensità di corrente

Abbiamo già definito prima la quadridensità di corrente in termini di $c\rho$ e \mathbf{j} , grandezze che, alla luce dell'introduzione della δ di Dirac possono essere riscritte, se $\mathbf{z}(x^0)$ rappresenta un moto parametrizzato dal tempo, in tale maniera

$$c\rho(\mathbf{x}, x^0) = e c \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\mathbf{x}^0)),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, x^0) = e c \frac{d\mathbf{z}}{dx^0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\mathbf{x}^0)) = \rho(\mathbf{x}, x^0) \mathbf{v};$$

dunque

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{v}\rho) = e c \frac{dz^\mu}{dx^0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\mathbf{x}^0)) = \rho \frac{dz^\mu}{dx^0}$$

se $z^\mu(x^0) = (x^0, \mathbf{z}(x^0))$; a questo punto è anche possibile scrivere

$$j^\mu = e c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - z(s)), \quad (5.5.1)$$

dove s è il parametro per il moto z^μ ; si può subito controllare che la (5.5.1) è consistente con le definizioni date sinora; infatti:

$$j^i = e c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^i}{ds} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(z^0)) \delta(x^0 - z^0),$$

dove $\delta(x^0 - z^0)$ ci fa valutare la nostra espressione in $z^0 = x^0$, che porge:

$$j^i = e c \frac{dz^i}{dx^0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(x^0)),$$

come si voleva; invece

$$j^0 = e c \int_{-\infty}^{+\infty} dz^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(z^0)) \delta(x^0 - z^0) = e c \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(x^0)).$$

Ci vogliamo ora chiedere se j^μ sia un quadrivettore. Ciò è assicurato dalla seguente

5.1 Proposizione. $j^\mu(x)$ è un quadrivettore.

G.L.

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente

5.2 Lemma. $\delta^{(4)}(Mx) = \delta^{(4)}(x)/|\det M|$, dove M è una matrice 4×4 .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamolo nel caso unidimensionale, e poi estendiamo il ragionamento a quattro dimensioni (senza dimostrazione). Sia $c \neq 0$; $\delta(cx) = \int \delta(cx)\varphi(x) dx$: poniamo $cx = y$, in modo tale che l'integrale diviene

$$\int \frac{1}{|c|} \delta(y) \varphi\left(\frac{y}{c}\right) dy = \frac{1}{|c|} \varphi(0) = \frac{1}{|c|} < \delta, \varphi > .$$

□

Tornando alla nostra dimostrazione, se j^μ è un quadrivettore, allora:

$$j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu, \quad x' = \Lambda x \quad \text{con } \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow.$$

Vediamo se è vero.

$$\begin{aligned} j'^\mu &= c e \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz'^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x' - z'(s)) \\ &= c e \int_{-\infty}^{+\infty} ds \Lambda^\mu_\nu \frac{dz^\nu}{ds} \delta^{(4)}(\Lambda(x - z(s))) \\ &= c e \frac{\Lambda^\mu_\nu}{|\det \Lambda|} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\nu}{ds} \delta^{(4)}(x - z(s)) \\ &= \Lambda^\mu_\nu c e \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\nu}{ds} \delta^{(4)}(x - z(s)) \\ &= \Lambda^\mu_\nu j^\nu, \end{aligned}$$

come si richiedeva. □

Viene ora spontaneo chiedersi se anche dalla (5.5.1) esce l'equazione di continuità. La risposta viene dalla seguente

5.3 Proposizione. $\partial_\mu j^\mu = 0$

DIMOSTRAZIONE. Se $\partial_\mu j^\mu = 0$, integrando deve valere:

$$\int d^4x \varphi(x) \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (5.5.2)$$

per ogni φ che posso scegliere tra quelle \mathcal{C}^∞ , e tali che siano a supporto compatto. Devo dunque mostrare che la validità della (5.5.2); integrando per parti ottengo

$$- \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \varphi(x).$$

Sostituendo j^μ

$$\begin{aligned} - \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{dz^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - z(s)) \partial_\mu \varphi(x) &= \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \int d^4x \delta^{(4)}(x - z(s)) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} ds \frac{dz^\mu}{ds} &= \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(s)}{\partial z^\mu} ds \frac{dz^\mu}{ds} &= \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{d\varphi(s)}{ds} &= \\ - [\varphi(z)]_{z=-\infty}^{z=+\infty}; & \end{aligned}$$

l'ultimo termine va a 0 tuttavia, poichè φ è a supporto compatto, e possiamo così concludere. □

6 Moti di particelle

Ci proponiamo in questa sezione, tramite due esempi, di studiare il moto di particelle elementari immerse in campo elettrico e magnetico. Indicheremo con \mathcal{E} l'energia, e con E il campo elettrico.

6.1 Esempio. Consideriamo una particella immersa in un campo magnetico costante, in assenza di campo elettrico, e sia $c = 1$. Le equazioni che regolano il moto della particella sono:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.6.1)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\mathbf{E}=0}{=} 0;$$

dall'ultima vediamo che l'energia si conserva, essendo la sua derivata rispetto al tempo nulla; consideriamo che:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}}; \quad (5.6.2)$$

sostituendo tale equazione nella (5.6.1) otteniamo:

$$\mathcal{E} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad (5.6.3)$$

da questa vedo che $|\mathbf{v}|$ è costante; difatti, moltiplicando membro a membro per \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \mathcal{E} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \text{da cui} \\ \frac{\mathcal{E}}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} &= 0; \end{aligned}$$

scegliamo ora gli assi in modo che il campo magnetico sia parallelo all'asse z . Essendo $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, dalla (5.6.3) discende:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{eB}{\mathcal{E}} v_y, \\ \dot{v}_y &= -\frac{eB}{\mathcal{E}} v_x, \\ \dot{v}_z &= 0; \end{aligned}$$

per risolverlo usiamo il metodo suggerito in [8], capitolo 11, il quale propone, nel caso si abbia il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= a_t x - b_t y + \alpha_t \\ \dot{y} &= b_t x + a_t y + \beta_t, \end{cases}$$

dove a, b, α, β sono funzioni continue su un certo intervallo I , e a valori in \mathbb{R} , e dove il pedice t indica la dipendenza dal parametro $t \in I$, di porre $z = x + iy, c_t = a_t + ib_t, \gamma_t = \alpha_t + i\beta_t$, in maniera tale da ricondursi a

$$\dot{z} = c_t z + \gamma_t;$$

perciò per le nostre equazioni la soluzione è:

$$v = v(0)e^{-i\omega t},$$

dove $v = v_x + i v_y$ e $\omega = eB/\mathcal{E}$; dunque:

$$v = v_0 e^{-i\alpha} e^{-i\omega t},$$

e

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos(\omega t - \alpha),$$

G.L.

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = v_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

Da queste e dall'equazione su $v_z(t)$

$$x - k_1 = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - \alpha), \quad (5.6.4)$$

$$y - k_2 = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.6.5)$$

$$z = z_0 + v_{0z}t,$$

dove k_1, k_2 sono costanti da determinare a seconda delle condizioni iniziali; osserviamo che quadrando e sommando la (5.6.4) e la (5.6.5) si ottiene l'equazione di una circonferenza di raggio v_0/ω e centro (k_1, k_2) , ovvero:

$$(x - k_1)^2 + (y - k_2)^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

6.2 Esempio. Consideriamo una particella immersa in un campo elettrico costante, in assenza di campo magnetico, e sia $c = 1$. Le equazioni che regolano il moto della particella sono:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E},$$

con \mathbf{p} impulso relativistico. Scelgo l'asse delle x in modo che $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, e l'asse delle y in modo che $\mathbf{p}(0)$ ed \mathbf{E} stiano sul piano formato da x e y . Ho dunque:

$$\begin{array}{lll} p_x(0) = p_{0x} & p_y(0) = p_{0y} & p_z(0) = 0, \\ \dot{p}_x = eE & \dot{p}_y = 0 & \dot{p}_z = 0 \\ \implies & & \\ p_x = eEt + p_{0x} & p_y = p_{0y} & p_z = p_{0z} = 0; \end{array}$$

scelgo ora l'origine dei tempi in modo che $p_{0x} = 0$ (posso sempre farlo, basta prendere $t' = t + p_{0x}/(eE)$); in tal modo

$$p_x = eEt;$$

per ottenere la velocità

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}},$$

dove

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} = \sqrt{m^2 + p_{0y}^2 + (eEt)^2} \stackrel{\mathcal{E}_0^2 = m^2 + p_{0y}^2}{=} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2},$$

da cui:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \left(\frac{eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}}, \frac{p_{0y}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}}, 0 \right).$$

Osservo che:

$$\frac{eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}} = \frac{1}{eE} \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2},$$

e questo mi permette di scrivere:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{eE} \frac{d}{dt} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2};$$

allora

$$x - x_0 = \frac{1}{eE} \left(\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2} - \mathcal{E}_0 \right);$$

invece

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_{0y}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (eEt)^2}} = \frac{p_{0y}}{eE} \frac{d}{dt} \sinh^{-1} \left(\frac{eEt}{\mathcal{E}_0} \right),$$

dalla quale

$$y - y_0 = \frac{p_{0y}}{eE} \sinh^{-1} \left(\frac{eEt}{\mathcal{E}_0} \right);$$

facciamo notare che la forza relativistica non è parallela alla velocità, dunque anche lungo y ce n'è.

Per trovare la traiettoria poniamo

$$\alpha = (y - y_0) \frac{eE}{p_{0y}},$$

in modo da poter scrivere

$$\sinh \alpha = \frac{eEt}{\mathcal{E}_0}. \quad (5.6.6)$$

Allora:

$$\begin{aligned} eE(x - x_0) &\stackrel{\cosh \alpha \text{ per (5.6.6)}}{=} \mathcal{E}_0 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{\mathcal{E}_0} \right)^2} \right) \\ &= \mathcal{E}_0 (\cosh \alpha - 1) \\ &= \mathcal{E}_0 \left(\cosh \left(y - y_0 \frac{eE}{p_{0y}} \right) - 1 \right), \end{aligned}$$

e questa è la traiettoria; il limite non relativistico è quello dove la traiettoria è una parabola; infatti per $c \rightarrow \infty$:

$$\alpha \rightarrow 0$$

(dacché al denominatore di α vi è c , se esso è diverso da 1), e

$$\cosh \alpha \rightarrow 1 + \frac{\alpha^2}{2},$$

che porta a

$$eE(x - x_0) \approx \mathcal{E}_0 \frac{1}{2} \left[\frac{(y - y_0)eE}{p_{0y}c} \right]^2;$$

nel limite $c \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}_0 \approx mc^2$, $p_{0y} \approx mv_0$, e

$$(x - x_0) \approx \frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} (y - y_0)^2,$$

che è proprio l'equazione di una parabola.

Parte II

La tesi

Capitolo VI

Il problema dell'etere

Il processo che portò alla relatività ristretta fu lungo e per nulla lineare. Uno dei punti chiave che permise di arrivarvi fu l'abbandono dell'idea dell'etere, il mezzo nel quale le onde (luminose ed elettromagnetiche) dovevano vibrare per potersi propagare. Si ipotizzò l'esistenza di due tipi di etere: quello luminifero, e quello elettromagnetico.

Per una prima svolta si dovette aspettare il 1856, quando Weber e Kohlrausch misurarono la velocità delle onde elettromagnetiche, ossia

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 m/s, \quad (6.0.1)$$

uguale alla velocità della luce nel vuoto: onde elettromagnetiche e luce dovevano esser parte dello stesso fenomeno; da ciò si dedusse l'esistenza di un solo etere, sul quale tuttavia non si sapeva niente se non che esso era soggetto alle equazioni di Maxwell (il quale elaborò una complicata quanto infruttuosa teoria dello stesso per mezzo di modelli meccanici).

Seguirono numerose modellizzazioni, che però non si affermarono mai e per il loro grado di complicazione e perché non avevano capacità di previsione; si dovrà aspettare Heinrich Hertz, il quale abbandonò la pretesa di spiegare l'etere in sé stesso, per dedicarsi al solo studio dei fenomeni ad esso correlati: per quanto riguarda il suo stato, si interessò solo alle due grandezze vettoriali che lo descrivevano: il campo elettrico \mathbf{E} , ed il campo magnetico \mathbf{B} .

Con l'avvento dell'elettromagnetismo di Maxwell tuttavia, non solo era stato dapprima necessario introdurre un nuovo tipo di etere, ma era sorto anche il seguente problema: le sue equazioni non erano covarianti per le trasformazioni di Galileo. Il problema poteva avere principalmente due soluzioni:

1. le equazioni di Maxwell sono valide solo in un particolare sistema di riferimento (e subito si pensò all'etere), mentre hanno forma simile per gli altri sistemi di riferimento.

Tuttavia un esperimento, ad opera di Michelson e Morley, minava alle fondamenta quest'ipotesi, dacché non rilevava alcun moto relativo (fino al secondo ordine di v/c) della terra rispetto all'etere: la velocità della luce (che doveva avere modulo pari a $1/(\mu_0 \varepsilon_0)^{0.5}$ nei sistemi di riferimento dove valevano le equazioni di Maxwell¹) non subiva alcuna influenza dal moto terrestre.

Analizzando le equazioni per i tempi di propagazione coinvolti nell'esperimento, questa risultava avere due spiegazioni:

- (a) l'etere è completamente trascinato dal moto della terra.
- (b) ogni corpo in movimento contrae il proprio lato parallelo alla velocità di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

¹E quindi non sulla terra, ma solo sull'etere; essa risultava un sistema di riferimento diverso in virtù del fenomeno dell'aberrazione della luce.

La prima ipotesi fu avanzata da Stokes, ma si rivelò inaccettabile poiché portava, nei suoi sviluppi formali, a contraddizioni inaccettabili.

La seconda ipotesi fu invece avanzata da FitzGerald [4], un fisico irlandese, nel 1889, e incredibilmente, si rivelò la più fondata, benché fosse solo un primo passo per la soluzione del problema;

2. le equazioni di Maxwell sono covarianti: non per le trasformazioni di Galileo però, ma per altre, trovate da Lorentz, il quale riprese (ignorando il lavoro di FitzGerald) nel 1895 la contrazione delle lunghezze, e propose anche la dilatazione dei tempi (vedi [6]), poiché in questo modo era possibile non solo spiegare il fallimento dell'esperimento ma anche introdurre delle trasformazioni (denominate, da Poincaré, di Lorentz) sotto le quali era assicurata la covarianza delle equazioni di Maxwell.

Le trasformazioni proposte per coordinate spaziali e temporali tra (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , in moto con velocità relativa v sono²

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{cases} \quad (6.0.2)$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.0.3)$$

Osservazione. Facciamo notare che le trasformazioni da noi scritte presentano la costante c , ossia la velocità della luce nel vuoto. Il perché c comparisse era legato al fatto che in tal modo le cose funzionavano: non c'era nessuna assunzione teorica alla base che potesse giustificarlo.

Lorentz, d'altronde, necessitava di quest'assunzione, poiché nel 1892, in [5], aveva affermato che

L'etere è a riposo nello spazio assoluto,

e questo implicava che esso fosse un sistema di riferimento assoluto, in cui valevano le equazioni di Maxwell: da qui la necessità dell'assunzione precedente.

Sorge ora spontanea una domanda: perché se due osservatori in sistemi di riferimento diversi possono affermare di trovarsi entrambi fermi nell'etere (dacché in virtù delle trasformazioni di Lorentz le leggi dell'elettromagnetismo sarebbero state le stesse rispetto al sistema "assoluto"), mentre entrambi si muovono rispetto ad esso, è ancora necessario questo concetto di "etere"?

Probabilmente la risposta è insita nel fatto che non si riusciva ad immaginare come un'onda riuscisse a propagarsi in assenza di un mezzo in cui vibrare: quindi Lorentz, e molti altri con lui, continuò a credere in questo sistema "introvabile" (poiché da nessun esperimento si sarebbe riusciti a capire la propria presenza o meno in esso).

²La forma in cui le riportiamo non è quella proposta da Lorentz, ma da Poincaré nel 1905.

Capitolo VII

Poincaré

Indice

1	Le trasformazioni di Lorentz	63
2	Le equazioni di Maxwell	65
3	Ulteriori sviluppi	66

Nella sua principale memoria sulla relatività [13], che riassume alcune sue considerazioni sull'argomento, Jules Henry Poincaré (1854-1912) viene motivato dall'inconsistenza dei risultati dell'esperimento di Michelson e Morley con la teoria fino ad allora sviluppata. Parte dunque da un risultato fisico, e cerca di darne una spiegazione; nella memoria espone il

0.1 Principio (di Relatività di Poincaré¹). Le leggi dei fenomeni fisici sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento inerziali. Dunque non esiste mezzo alcuno per stabilire se siamo in moto o meno².

Il suo obiettivo, nella prima parte della memoria, quella interessante per i nostri scopi, è dimostrare che tramite le trasformazioni di Lorentz, da lui emendate, le leggi dell'elettromagnetismo rimangono invariate. Egli stesso dice

Queste equazioni [di Maxwell] rimangono invariate se vi si applicano le trasformazioni di Lorentz, e questo spiega perché nessun esperimento è in grado di rilevare il moto della terra rispetto all'etere.

1 Le trasformazioni di Lorentz

Poincaré nel suo lavoro non deriva direttamente le trasformazioni di Lorentz, bensì dice di trovarle (e gli si può credere, visto che le scrive in maniera corretta, al contrario di Lorentz). Mostriamo come, in effetti, dall'assunzione dell'omogeneità ed isotropia dello spazio, assieme al principio di relatività, e alla richiesta, motivata dall'interpretazione fisica, che costituiscano un gruppo, è possibile arrivare alle trasformazioni nel seguente modo.

Considereremo le sole coordinate (x, t) e (x', t') , come in figura 7.1. In questo caso ci

$$\begin{array}{ccc} O' & \longrightarrow & x' \\ O & \longrightarrow & x \end{array} \quad \frac{d\overline{OO'}}{dt} = v$$

Figura 7.1: Il sistema $O'x'$ è in moto relativo rispetto al sistema Ox , con velocità v .

interesserebbe delle trasformazioni $(x, t) \rightarrow (x', t')$, che chiamiamo trasformazioni \mathcal{A} . Girando il sistema $O'x'$ di π , otterremmo la configurazione mostrata in figura 7.2. In questo caso

¹Confronta [12]

²Tuttavia non è la prima volta che Poincaré lo espone. Già in [11] possiamo trovare un intero capitolo dedicato al principio di relatività, sebbene non sia espresso in questa forma.

$$\begin{array}{ccc} x' & \longleftarrow & O' \\ O & \longrightarrow & x \end{array} \quad \frac{d\overline{OO'}}{dt} = -v$$

Figura 7.2: Il sistema $O'x'$ è in moto relativo rispetto al sistema Ox , con velocità $-v$.

prenderemmo in esame le trasformazioni $(x', t') \rightarrow (x, t)$; chiamiamole trasformazioni \mathcal{B} .

L'omogeneità dello spazio e del tempo comporta che \mathcal{A} e \mathcal{B} siano lineari. Poniamo $t = t' = 0$ quando $x = x' = 0$ per entrambe le trasformazioni, che dunque risultano $(A, \dots, D'$ costanti)

$$\mathcal{A} \begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt \end{cases} \quad \mathcal{B} \begin{cases} x = A'x' + B't' \\ t = C'x' + D't' \end{cases}. \quad (7.1.1)$$

Per il principio di relatività, e per la simmetria del problema, si riconosce che deve essere $A = A', \dots, D = D'$. Inoltre se per \mathcal{A} si prende $x' = 0$ si ha, ricordando che $x = vt$, che $Av + B = 0$. Per la seconda delle \mathcal{B} invece prendiamo sempre l'origine di $O'x'$, e dunque, sostituendo $t = Dt'$ nella prima di \mathcal{B} , si ottiene (sempre ricordando che $x' = 0$) $Dv = B$, da cui $A = -D$. Ora queste relazioni devono valere $\forall x', t'$, in quanto A, \dots, D sono costanti. Posso dunque operare una sostituzione nella prima di \mathcal{B} , per ottenere

$$\begin{aligned} x &= Ax' + Bt' \\ &= A(Ax + Bt) + B(Cx + Dt) \\ &= t(AB + BD) + x(A^2 + BC) \\ &= x(D^2 + CDv) \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

$$D^2 + CDv = 1 \implies C = \frac{1 - D^2}{Dv}. \quad (7.1.3)$$

Sostituendo i valori ottenuti per A, B e C nella \mathcal{A} , si ottiene

$$\begin{cases} x' = -Dx + Dvt \\ t' = \frac{1-D^2}{Dv}x + Dt. \end{cases} \quad (7.1.4)$$

A questo punto, per trovare i rimanenti parametri incogniti, basta comporre due trasformazioni; si giunge alle trasformazioni (i sistemi sono posti come in figura 7.1)³

$$\begin{cases} x' = l\gamma(x - vt) \\ y' = ly \\ z' = lz \\ t' = l\gamma(t - vx/c^2), \end{cases} \quad (7.1.5)$$

dove $l = l(\beta)$: per trovarlo imponiamo che le trasformazioni di Lorentz formino un gruppo: prendiamo la trasformazione tra due sistemi come in figura 7.2: essa avrà la forma

$$\begin{cases} x' = l\gamma(x + vt) \\ y' = ly \\ z' = lz \\ t' = l\gamma(t + vx/c^2); \end{cases} \quad (7.1.6)$$

d'altronde, se esse formano un gruppo, dovrà valere l'inversa della (7.1.5), ossia

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt)/l \\ y' = y/l \\ z' = z/l \\ t' = \gamma(t + vx/c^2)/l. \end{cases} \quad (7.1.7)$$

Allora $l = 1/l$, da cui $l = \pm 1$: essendo però $l = 1$ per $v = 0$, si avrà sempre $l = 1$: da ciò le famose trasformazioni.

³Tali trasformazioni presentano il parametro c , imposto pari alla velocità della luce per il fatto che, in tal modo, le cose “funzionavano”.

2 Le equazioni di Maxwell

In questa sezione, volendo riportare il più fedelmente possibile l'articolo [13], useremo la notazione di Gauss razionalizzata, e le unità spaziali e temporali in maniera tale da avere $c = 1$. Inoltre per le trasformazioni di Lorentz useremo un parametro $l = l(\beta)$, che, come abbiamo visto, Poincaré porrà pari a 1 per garantire le proprietà gruppali delle trasformazioni⁴.

Le equazioni che ci interessano sono (\mathbf{u} è la velocità)

$$\partial \mathbf{E} / \partial t + \rho \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (7.2.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \varphi \quad (7.2.2)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (7.2.3)$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (7.2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (7.2.5)$$

$$\partial \varphi / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.2.6)$$

$$\square \varphi = -\rho, \quad \square \mathbf{A} = -\rho \mathbf{u} \quad (7.2.7)$$

dove $\square = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$. Inoltre egli prende in considerazione la forza e la densità di forza elettromagnetica:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.2.8)$$

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.2.9)$$

Cominciamo la nostra trattazione con la legge di trasformazione dei volumi. Prendiamo una sfera che si muove, nel sistema di riferimento (x, y, z, t) con velocità \mathbf{u} . Il suo volume è $4/3\pi r^3$. Nel sistema di riferimento (x', y', z', t') , solidale alla sfera, la sua equazione è (usando le trasformazioni) per $t' = 0$ (e trovato il volume a questo tempo, esso rimane costante)

$$\gamma^2 (x'_1 - \beta u_1 x'_1)^2 + \sum_{j=2}^3 (x_j - \gamma u_j \beta x'_1)^2 = l^2 r^2.$$

Con un'integrazione possiamo trovare il volume, che risulta $V' = V l^3 [\gamma(1 - \beta u_1)]$. Dunque $V'/V = l^3 / [\gamma(1 - \beta u_1)]$, da cui, considerando (come assume Poincaré) che la carica elettrica non cambia se cambiamo il sistema di riferimento, e che perciò $\rho V = \rho' V'$, si ha

$$\rho' = \rho l^{-3} \gamma (1 - \beta u_1). \quad (7.2.10)$$

Enunciamo ora la regola di composizione delle velocità, diretta conseguenza delle trasformazioni di Lorentz

$$u'_1 = (u_1 - \beta) / (1 - \beta u_1), \quad u'_j = u_j / \gamma (1 - \beta u_1) \quad (j = 2, 3). \quad (7.2.11)$$

Questo ci permette di scrivere

$$\rho' u'_1 = \gamma l^{-3} (u_1 - \beta) \rho, \quad \rho' u'_j = l^{-3} \rho u_j, \quad (j = 2, 3).$$

Tali formule ci torneranno utili più tardi. Cerchiamo ora di capire come trasforma \square . Per comodità indichiamo con x^0 il tempo t , e x^i le coordinate x ($i = 1$), y ($i = 2$) e z ($i = 3$). Le corrispondenti quantità con gli apici saranno indicate con le componenti di y^5 . Da ciò

⁴Poincaré prima affronta questa sezione, e poi dimostra che $l = 1$.

⁵Nella (7.1.5) vi sono le y scritte in funzione delle x

$$\begin{aligned}
\Box &= \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^0} \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \\
&\stackrel{\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1}{=} l^2 \left(\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} - \frac{\partial}{\partial y^0} \cdot \frac{\partial}{\partial y^0} \right);
\end{aligned}$$

allora $\Box = l^2 \Box'$, da cui $\Box' = l^{-2} \Box$. Per quanto riguarda φ si ha $\Box' \varphi' = -\rho'$. Usando quanto appena trovato e la (7.2.10) con la (7.2.7) otteniamo

$$\begin{aligned}
l^{-2} \Box \varphi' &= -\gamma l^{-3} (1 - \beta u_1) \rho \implies \\
\Box \varphi' &= \gamma l^{-1} (1 - \beta u_1) \Box \varphi \\
&= \gamma l^{-1} (\Box \varphi - \beta \rho u_1) \\
&= \gamma l^{-1} \Box (\varphi - \beta A_1) \implies \\
\varphi' &= \gamma l^{-1} (\varphi - \beta A_1).
\end{aligned}$$

Per A'_1 si ha $\Box' A'_1 = -\rho' u'_1$; allora

$$\begin{aligned}
\Box A'_1 &= \gamma l^{-1} (\rho u_1 + \beta \rho) \\
&= \gamma l^{-1} (\Box A_1 - \beta \Box \varphi),
\end{aligned}$$

da cui $A'_1 = \gamma l^{-1} (A_1 - \beta \varphi)$. Analogamente si procede per A_2, A_3 , ottenendo

$$A'_j = l^{-1} A_j.$$

Ora che si è capito come procedere, possiamo saltare tutti i passaggi intermedi e riportare i risultati per il campo elettrico e per il campo magnetico

$$\begin{aligned}
E'_1 &= l^{-2} E_1 & B'_1 &= l^{-2} B_1 \\
E'_2 &= \gamma l^{-2} (E_2 - \beta B_3) & B'_2 &= \gamma l^{-2} (B_2 + \beta E_3) \\
E'_3 &= \gamma l^{-2} (E_3 + \beta B_3) & B'_3 &= \gamma l^{-2} (B_3 - \beta E_2).
\end{aligned}$$

Le rimanenti dimostrazioni seguono da queste; infatti la (7.2.6) segue da (7.2.7) e (7.2.4), e le equazioni (7.2.1), (7.2.5) e (7.2.3) seguono da (7.2.7), (7.2.2) e (7.2.6).

Per quanto riguarda la densità di forza egli trova, correttamente

$$f'_x = \gamma (f_x - \beta \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) / l^5, \quad (7.2.12)$$

$$f'_{y,z} = f_{y,z} / l^5, \quad (7.2.13)$$

e in maniera analoga per la forza.

3 Ulteriori sviluppi

Nel suo lavoro, Poincaré non si ferma qua; infatti parlando del principio di minima azione e delle trasformazioni di Lorentz, egli scopre la relazione

$$l^4 [\varepsilon \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 / \mu] = [\varepsilon \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 / \mu] \quad (7.3.1)$$

che, essendo $l = 1$, rappresenta un'invariante dell'elettromagnetismo. Inoltre, parlando delle onde di Langevin, ne trova un altro, e precisamente

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (7.3.2)$$

G.L.

Nella parte dedicata alle trasformazioni di Lorentz e ai gruppi, egli osserva come la forma quadratica

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \quad (7.3.3)$$

sia invariante sotto le trasformazioni di Lorentz (e questo permetterà la definizione di una metrica sullo spazio).

Nella settima sezione, dedicata al moto quasi stazionario, Poincaré poi trova che, per ogni forza, vale

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \text{ con } \mathbf{P} = m_0 v \gamma \quad (7.3.4)$$

ed m_0 = massa a riposo.

Nell'ultima parte, la nona, egli osserva che con la posizione $t \mapsto ti$

le trasformazioni di Lorentz non sono altro che una rotazione dello spazio attorno all'origine, fissa.

Capitolo VIII

Einstein

Indice

1	Le trasformazioni di Lorentz	69
2	Composizione delle velocità ed equazioni di Maxwell	70
3	Significato fisico delle trasformazioni di Lorentz	70

In questa sezione percorreremo una parte dell'articolo [3] sulla relatività, che tanto rese famoso Einstein. Ne analizzeremo solo le parti utili al nostro scopo.

Il punto di partenza di Einstein furono le asimmetrie presenti nella teoria di Maxwell sotto le trasformazioni di Galileo: egli non si capacitava del fatto che le equazioni non valessero più passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Questo, assieme ai risultati negativi dell'esperimento di Michelson e Morley, lo portò ad asserire che era impossibile parlare di un sistema di riferimento assoluto, e quindi di etere. Quindi enunciò il

0.1 Principio (di relatività di Einstein). Le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica sono valide per tutti i sistemi di riferimento per i quali le equazioni della meccanica valgono.

Osservazione. Il principio appena formulato sembrerebbe lasciar intendere che Einstein ritenesse covarianti le sole leggi dell'elettromagnetismo, in quanto nel principio sono menzionate solo le leggi dell'elettromagnetismo e dell'ottica. Tuttavia non è così: egli vuole estendere il proprio principio a tutti i sistemi di riferimento inerziale, e assume implicitamente per buono il principio di relatività galileiano (per il quale le leggi della meccanica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento). Nell'ultima parte del suo articolo infatti fa sempre riferimento alla stessa legge della meccanica ($F = ma$), per entrambi i sistemi di riferimento che considera, cosa che non sarebbe vera se non assumesse che esse hanno la stessa forma. Se ciò non bastasse, il lettore potrà convincersi leggendo la sezione 2.

Successivamente Einstein, nel suo articolo, pose la velocità della luce costante, e trattò il concetto di simultaneità e sincronizzazione: chiariamo cosa intende Einstein con tali termini. Sia dato un orologio nel punto A , ed un orologio nel punto B , non in moto relativo tra loro, e tali da scandire il tempo allo stesso modo. Essi si dicono sincroni se, detto Δt l'offset tra i due orologi, e detto t_A l'istante in cui A rileva l'avvenimento di un certo evento ι , allora B rileva che un evento simultaneo a ι , chiamamolo ι' , ha luogo all'istante $t_A + \Delta t$. Questo deve valere di ogni evento ι .

Ma cosa vuol dire che due eventi sono simultanei? Che essi sono raggiunti da un raggio di luce emesso da una sorgente posta a metà strada tra di loro, al medesimo istante. Tuttavia la definizione non è per niente comoda, e conviene trovarne una più adatta per il concetto di sincronizzazione, e, a detto di molti, Einstein s'*ispira* alla definizione di Poincaré data in [10].

Si prendano due osservatori, in A e in B , solidali ad un certo sistema di riferimento, e in corrispondenza ad essi si pongano due orologi, uguali tra di loro. Si faccia partire da A un raggio di luce, al suo tempo t_A ; tale raggio arrivi in B al suo tempo t_B , e ritorni in A al tempo, di A , t'_A . I due orologi saranno sincroni se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \quad (8.0.1)$$

A questo punto Einstein fa subito notare come orologi sincroni in un sistema di riferimento, non lo siano più in un altro in movimento rispetto al primo, dacché la velocità del raggio luminoso dev'essere la stessa, per quanto da Einstein postulato, in entrambi i sistemi.

Nel seguito egli passa a ricavarsi le trasformazioni di Lorentz in un modo non solo del tutto differente da quello da quello di Lorentz, e da quello che potrebbe aver utilizzato Poincaré¹, ma anche più mirato (Poincaré aveva fissato un parametro, la velocità della luce, per far tornare le cose). Dunque i principi che aveva postulato lo portarono in maniera naturale alle trasformazioni², senza dover aggiungere ipotesi *ad hoc* per aggiustare le cose a posteriori (com'era abituato a fare Lorentz in questo campo). Ripercorriamo dunque la strada da Einstein seguita.

1 Le trasformazioni di Lorentz

Prendiamo due sistemi di riferimento inerziali, S ed S' con coordinate (x, y, z, t) e (ξ, η, ζ, τ) , e con origini, rispettivamente, K e κ . Il sistema S' si muove con velocità v (verso destra, per concretizzare) rispetto al primo, in maniera tale che gli assi delle x e delle ξ rimangano paralleli. Vogliamo determinare le coordinate di S' in funzione di quelle di S .

A questo scopo osserviamo che un punto fisso di S' si può mappare in un punto fisso di S con la posizione $x' = x - vt$. Cominciamo col definire $\tau = \tau(x', y, z, t)$, e prendiamo due orologi sincronizzati in S' , uno in κ , ovvero nell'origine, mappato in 0 tramite $x - vt$, e l'altro tale che sia mappato in x' . La definizione di sincronizzazione ci assicura che $\tau_1 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1$, che, una volta scritta τ come funzione, porge (ricordiamo che la prima coordinata è tutta mappata)

$$\frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}) \right] = \tau(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v}); \quad (8.1.1)$$

a questo punto, se x' è scelto infinitesimo, possiamo scrivere, dopo un paio di passaggi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (8.1.2)$$

o

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \quad (8.1.3)$$

La medesima procedura con un orologio posto in κ ed uno posto sull'asse delle y , porge

$$\frac{1}{2} \left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau(0, 0, 0, t + \frac{2y}{\sqrt{c^2 - v^2}}) \right] = \tau(0, y, 0, t + \frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}}), \quad (8.1.4)$$

da cui $\partial \tau / \partial y = 0$. Analogamente per z . Dalla linearità di τ

$$\tau = a(v) \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right) \quad (8.1.5)$$

dove $a(v)$ è una funzione per ora sconosciuta ma tale che $\tau = 0$ quando $t = 0$.

Sapendo ora che un raggio di luce si propaga con la stessa velocità in tutti i sistemi, possiamo scriverne la legge oraria per la coordinata lungo la quale si propaga. Per concretizzare $\xi = c\tau$, se esso è emesso per $\tau = 0$, ossia

$$\xi = ac \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right). \quad (8.1.6)$$

E per il sistema S tale raggio segue la legge $x = ct = x' + vt$, che porta a

$$t = \frac{x'}{c-v}. \quad (8.1.7)$$

¹Da tale dimostrazione si sospetta fortemente che Einstein avesse capito autonomamente questa nuova teoria, anche perché la dimostrazione è fortemente legata alla costanza della velocità della luce, al principio di relatività, e al concetto di simultaneità.

²Non successe alla maniera di Lorentz, il quale aveva trovato le trasformazioni più per necessità, ossia per spiegare i risultati dell'esperimento di Michelson.

Sostituendo nella (8.1.6), otteniamo

$$\xi = a \frac{c^2}{c^2 - v^2} x'. \quad (8.1.8)$$

In maniera del tutto analoga

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} x'\right); \quad (8.1.9)$$

quando $y/\sqrt{(c^2 - v^2)} = t$ e $x' = 0$ abbiamo

$$\eta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} y \quad (8.1.10)$$

e, senza ripetere tutto

$$\zeta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} z. \quad (8.1.11)$$

Se a questo punto sostituiamo x' con $x - vt$, e poniamo $a(v) = \varphi(v)\sqrt{1 - v^2/c^2}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi(v)\gamma(t - vx/c^2) \\ \xi &= \varphi(v)\gamma(x - vt) \\ \eta &= \varphi(v)y \\ \zeta &= \varphi(v)z \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

dove $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. A questo punto non manca che determinare $\varphi(v)$. Con considerazioni analoghe a quelle di Poincaré, anche Einstein trova che $\varphi(v) = 1$. Non riportiamo la dimostrazione per brevità, e per non annoiare il lettore.

2 Composizione delle velocità ed equazioni di Maxwell

Proseguendo Einstein trova il teorema di composizione delle velocità (la cui forma è uguale a quella dell'equazione (7.2.11)), e dimostra, in maniera differente da quella di Poincaré, ma di scarso interesse per noi, che con queste trasformazioni le equazioni di Maxwell rispettano il principio di relatività³. Ci risparmiando dunque di riportare questa parte di articolo.

3 Significato fisico delle trasformazioni di Lorentz

Tuttavia Einstein, prima del teorema di composizione delle velocità e delle equazioni di Maxwell, scrive un paragrafo sul significato fisico delle trasformazioni appena trovate, per spiegare come influiscono sui corpi e sugli orologi in movimento. In questo paragrafo spiega come, in conseguenza delle trasformazioni di Lorentz, la lunghezza di un corpo rigido si contrae; fa notare che tale fenomeno è reciproco. Per quanto riguarda i tempi, invece, Einstein è meno chiaro, perché non esplicita la reciprocità della dilatazione degli intervalli temporali. Vediamo in dettaglio come procede.

Per prima cosa prendiamo una sfera, rigida⁴, di raggio R , ferma nel sistema S' (i due sistemi sono gli stessi di prima). Il luogo dei suoi punti potrà scriversi come

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2, \quad (8.3.1)$$

ovvero, in S

$$x^2\gamma^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad (8.3.2)$$

³Di scarso interesse perché una volta trovate le trasformazioni, ci sono molti modi, tutti ugualmente corretti e non troppo difficili, di provare la covarianza delle equazioni.

⁴Approssimativamente rigida: non esistono, infatti, in relatività ristretta, corpi rigidi.

dunque in S la sfera di S' è vista come un ellissoide di assi $R/\gamma, R, R$: essa è dunque vista contratta; ma non solo viene vista: essa è contratta a tutti gli effetti per il sistema fermo, e la cosa è reciproca.

Per quanto riguarda i tempi prendiamo un orologio che in S misurerebbe il tempo t , mentre in S' misura il tempo τ , e domandiamoci che relazione intercorre tra i due tempi, una volta che tale orologio è messo in moto assieme al sistema S' .

Dalle trasformazioni di Lorentz

$$\tau = \gamma(t - vx/c^2) \stackrel{x=vt}{=} \gamma t(1 - v^2/c^2) = t/\gamma \quad (8.3.3)$$

e quindi $\tau = t(1 - \gamma^{-1})$: l'orologio perde $(1 - \gamma^{-1})$ secondi ogni secondo di S . Successivamente afferma che se due orologi in A e B , nel medesimo sistema di riferimento, sono sincroni, e l'orologio in A comincia a muoversi verso B , lungo la congiungente, con velocità v , una volta arrivato non ha più la stessa sincronizzazione con l'orologio in B , in quanto è rimasto indietro di un tempo $t(1 - \gamma^{-1})$, se t è il tempo impiegato per il tragitto. Tuttavia se vediamo questo processo secondo il sistema di riferimento dell'orologio inizialmente in A , è l'orologio in B che si avvicina (ma A non è inerziale). Questo è il cosiddetto paradosso dei gemelli; in realtà non possiamo applicare le trasformazioni di Lorentz poiché l'orologio subisce un'accelerazione quando parte, e successivamente, per fermarsi, subisce una decelerazione. Non è quindi per niente chiaro dal testo di Einstein se questo punto fosse stato da lui pienamente compreso.

Capitolo IX

Un tentativo di confronto. . .

Indice

1	Il punto di partenza	72
2	Il principio di relatività	73
3	Il concetto di tempo	73
4	La relatività dei tempi e delle lunghezze	74
5	Una nuova dinamica	74
6	Etere	75

In quest'ultima sezione cercheremo, come anticipato, di confrontare i lavori dei due scienziati. Il loro obiettivo principale fu quello di spiegare il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley e trovare delle trasformazioni di coordinate tramite le quali le equazioni di Maxwell risultassero covarianti; tale obiettivo fu da entrambi raggiunto. Ma i due lavori presentano molte differenze. Vediamo quali.

1 Il punto di partenza e le trasformazioni di Lorentz

Einstein Egli parte dalle asimmetrie dell'elettromagnetismo e postula, grazie anche al fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley, sia il principio di relatività, sia l'invarianza della velocità della luce. Scrive infatti nel suo articolo

È risaputo che l'elettrodinamica di Maxwell, applicata a corpi in movimento, porta ad asimmetrie che sembrano non centrare col fenomeno.

In questo modo riesce a giungere, con pochi passi e senza ulteriori ipotesi, alle trasformazioni di Lorentz.

Poincaré Il francese invece parte dai risultati contrastanti tra il fenomeno dell'aberrazione e l'esperimento di Michelson; infatti leggiamo in [13]:

A prima vista sembra che l'aberrazione della luce indichi che la terra sia in moto assoluto rispetto all'etere. Ma tutti gli esperimenti, compreso quello di Michelson e Morley, sembrano non rilevare tale moto.

Grazie al principio di relatività e all'assunzione (debita) dell'omogeneità e isotropia dello spazio egli giunge, con un procedimento del tutto generale, a delle trasformazioni tra sistemi di coordinate inerziali che gli garantiscono la covarianza delle equazioni di Maxwell.

I due giungono entrambi alle trasformazioni di Lorentz, in maniera totalmente differente; Einstein tuttavia riuscì a trovare quelle corrette senza ipotesi a posteriori, come sola conseguenza della semplice assunzione che $c = \text{cost}$; diversamente per Poincaré: la velocità della luce è presente nelle trasformazioni solamente perché in tal modo il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley era spiegato, e le leggi dell'elettromagnetismo risultavano covarianti.

2 Il principio di relatività

Sulla formulazione del principio di relatività non c'è alcun dubbio: entrambi lo enunciarono in maniera corretta; oltre ai principi, già enunciati, possiamo citare altri due brani dei due; Einstein scrive nel suo articolo

Esempi di questo genere [le asimmetrie dell'elettromagnetismo], e l'impossibilità di trovare il moto della terra rispetto all'etere¹ suggeriscono che i *fenomeni elettrodinamici e meccanici* non possiedono proprietà relative a sistemi di riferimento assoluto.

Poincaré invece in [13] scrive:

Se è possibile imprimere ad un intero sistema una traslazione uniforme, senza modificare altro all'interno di esso, le equazioni dell'elettromagnetismo non risultano modificate tramite alcune trasformazioni, che noi chiameremo *di Lorentz*; dunque due sistemi, uno immobile, uno in traslazione, divengono l'immagine esatta l'uno dell'altro.

3 Il concetto di tempo: simultaneità e sincronizzazione

Poincaré già nel 1898, in [9], aveva affrontato il problema della simultaneità di due eventi, affermando che due eventi sono simultanei se avvengono nello stesso posto e allo stesso tempo. Dire *allo stesso posto* non è affatto cosa semplice, perché la definizione risulta stringente: il francese fa notare, in [11] (riprendendo, tra l'altro, quanto scritto in [9])

Non solo noi non abbiamo alcuna intuizione diretta dell'uguaglianza di due durate, ma non abbiamo neppure quella di simultaneità di due eventi che avvengano in posti diversi.

Se infatti i luoghi sono diversi, due eventi sono simultanei se sono raggiunti contemporaneamente da dei raggi di luce emessi simultaneamente da una sorgente posta a metà strada tra loro. Questo è ciò che si può capire dalla sua seguente affermazione

[...] osservano un fenomeno astronomico [...] e ammettono che tale fenomeno è avvenuto simultaneamente in tutte le parti del mondo [...] con una piccola correzione [dovuta alla sfericità della terra].

Questo modo di procedere si rivela scomodo tuttavia (ma al momento Poincaré non sembra preoccuparsene, dal momento che scrive in una rivista filosofica): sarebbero necessari degli orologi sincroni, che dunque avessero la possibilità di determinare la simultaneità o meno di due eventi. Come? In [10] scrive

Supponiamo che due osservatori posti in luoghi differenti regolino i propri orologi con l'ausilio di segnali luminosi: cercheranno di correggere questi segnali per il tempo di trasmissione, ignorando, tuttavia, il movimento di traslazione, credendo, di conseguenza, che i segnali abbiano, in entrambi i sensi, la stessa velocità. Dunque incroceranno le osservazioni, inviando da A e B un segnale, e un altro da B ad A . Il tempo locale sarà il tempo segnato dagli orologi in questa maniera regolati.

Quest'ultima citazione, raffrontata a quella di Einstein, che scrive

Facciamo partire un raggio di luce, al "tempo di A " t_A , da A verso B . Al "tempo di B " t_B , esso è riflesso in B verso A , dove è recepito al "tempo di A " t'_A ...

non può non far pensare ad una, non citata, ispirazione, anche perché Einstein sembra seguire lo stesso ragionamento di Poincaré: prima definisce simultanei gli eventi che accadono nello stesso tempo e nello stesso luogo, e si dichiara insoddisfatto della definizione nel caso in cui gli eventi non abbiano luogo nel medesimo posto, come si legge in [3]

¹Che egli chiama, in questo contesto, "light medium".

Una tale definizione di tempo sarà soddisfacente solo se il fenomeno avrà luogo ove sono posti gli orologi [...] ma non lo sarà più quando dovremo connettere il tempo di una serie di eventi che han luogo in posti differenti.

e successivamente comincia a definire gli orologi sincroni, come già affrontato nella sezione VIII, e come citato più sopra.

Inoltre Carl Seelig e Maurice Solovine affermarono di aver parlato e discusso sul lavoro di Poincaré [11] assieme con Einstein, all'*Académie des Sciences*, benché Einstein si mostrò sempre reticente nelle sue dichiarazioni in proposito.

4 La relatività dei tempi e delle lunghezze

Einstein Egli osserva come la contrazione delle lunghezze sia reciproca, cosa importantissima per la relatività; infatti leggiamo, a questo proposito, in [3]

È chiaro che gli stessi risultati valgono anche per corpi fermi nel sistema di riferimento “stazionario”, se visti da un sistema in moto uniforme.

Tuttavia non è altrettanto chiaro per gli intervalli di tempo, come già mostrato nella sezione 3 a pag. 71. La sua ambiguità segue dal fatto che non si cura del processo di accelerazione, non chiarendo che cade il principio di relatività (ristretta).

Poincaré Si rende conto di come non si possa decretare che una misura di tempo sia più o meno giusta di un'altra (a differenza dunque di Einstein, che privilegia l'orologio che “sta fermo”). Infatti in [9] Poincaré scrive

[...] non c'è una maniera di misurare il tempo che sia più vera di un'altra; quella generalmente adottata è solamente la più comoda.

Egli invece non parla di misure spaziali esplicitamente, ma avendo dimostrato che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo, possiamo immaginare che avesse capito la reciprocità delle contrazioni.

5 Una nuova dinamica

Poincaré Trova il modo in cui trasformano le forze di origine elettromagnetica (ricordato nelle equazioni (7.2.12)-(7.2.13)), e, sempre in [13] si legge

[...] tutte le forze, di qualsiasi origine siano, trasformano alla stessa maniera rispetto a quelle elettromagnetiche...

Inoltre nella sezione dedicata alla gravitazione trova l'equazione relativistica, corretta, della forza (vedi (7.3.4)).

Einstein Sembra accorgersi solo in parte delle conseguenze che una nuova dinamica può avere: nel §10 del suo lavoro, scrive l'equazione di Newton in maniera non corretta: da un sistema di riferimento all'altro trasforma le coordinate spaziali e le componenti della forza, ma non la massa m dipendente dalla velocità (introdotta nella prima formulazione della teoria della relatività): ottiene quindi dei risultati errati per massa trasversale e longitudinale, come egli stesso ammetterà più avanti.

Questo è dovuto al fatto che scrive l'equazione della dinamica non come Poincaré, bensì

$$m \frac{d\mathbf{x}^2}{dt^2} = \varepsilon \mathbf{F} \text{ in } S, \text{ e } m \frac{d\mathbf{x}'^2}{d\tau^2} = \varepsilon \mathbf{F}' \text{ in } S',$$

con l'errore di mantenere la stessa massa m per le equazioni in sistemi diversi.

6 Etere

Einstein Già nella prima pagina del suo articolo scrive

L'introduzione di un "etere luminifero" è superflua, in quanto il punto di vista che sarà sviluppato in queste pagine non richiederà uno "spazio assoluto e stazionario", dotato di speciali proprietà.

Mette subito in chiaro il suo punto di vista: non è necessario introdurre l'etere per parlare di fisica. Su questo, nell'articolo del '05, è così chiaro che non lascia adito a dubbi.

Poincaré Al contrario ci sono molteplici affermazioni di Poincaré sull'etere; questo può essere spiegato poiché egli era, oltre che uno dei più grandi matematici del secolo, sia fisico sia filosofo (si tenga presente che articoli come [9], sono stati pubblicati in riviste filosofiche, e non fisiche), e ad alcune conclusioni giungeva come filosofo (la non necessità dell'esistenza dell'etere), ad altre come fisico (come si spiegava la vibrazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto?). In [11] egli scrive

Che l'etere esista realmente, è interesse dei metafisici [...] verrà un giorno in cui l'etere sarà considerato come inutile [...] Queste ipotesi non giocano che un ruolo secondario. Le possiamo sacrificare; non lo facciamo perché l'esposizione perderebbe di chiarezza, ma questo è l'unico motivo.

Tuttavia in [13], nel tentativo di riformulare la teoria della gravità, scrive

Se la gravità si propaga con la velocità della luce non è un caso: dev'essere così poiché è una funzione dell'etere; e così diventa necessario comprendere di che natura è questa funzione, e connetterla con le altre funzioni del fluido.

E ancora

[...] per noi è essenziale che le cose vadano come se esistesse [l'etere], e che questa ipotesi [il principio di relatività] è comoda per spiegare i fenomeni.

A prima vista sembrerebbe che Poincaré non abbandonò l'etere; ma questo punto di vista è espresso parlando della gravitazione, della quale Einstein non parla nel suo articolo. Affronta la questione, nell'ambito della teoria della relatività generale in una conferenza del 5 maggio 1920, a Leiden, dicendo

Riassumendo, possiamo dire che per la relatività generale lo spazio è dotato di proprietà fisiche; in questo senso potremmo dire che un etere esiste. In questa teoria uno spazio senza etere è inconcepibile, in quanto non solo la propagazione della luce sarebbe impossibile, ma non ci sarebbe alcuna possibilità d'esistenza per i regoli e gli orologi, e, da ciò, per le distanze spazio-temporali, in senso fisico [...] ma] la nozione di movimento non deve essere ad esso applicata.

Bibliografia

- [1] Vincenzo Barone. *Relatività*. Bollati Boringhieri, Torino, Novembre 2004.
- [2] Alessandro Bettini. *Meccanica e Termodinamica*. Decibel-Zanichelli, 1995.
- [3] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 1905.
- [4] George Francis FitzGerald. The ether and the earth atmosphere. *Science*, 1899.
- [5] Hendrik Antoon Lorentz. La théorie électromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants. *Archives Neerlandaises*, 1892.
- [6] Hendrik Antoon Lorentz. *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in betwogen Körpern*. Brill, Leiden, 1895.
- [7] PierAlberto Marchetti. Lezioni di istituzioni di relatività, Maggio-Giugno 2005.
- [8] Giuseppe De Marco. *Analisi Due*. Decibel-Zanichelli, Padova, Giugno 1999.
- [9] Jules Henry Poincaré. La mesure du temps. *Revue de métaphysique et de morale*, 1898.
- [10] Jules Henry Poincaré. La théorie de Lorentz et le principe de réaction. *Archives Neerlandaises*, 1900b.
- [11] Jules Henry Poincaré. *La Science et l'hypothèse*. Flammarion, 1902.
- [12] Jules Henry Poincaré. L'état actuel e l'avenir de la physique mathématique, Settembre 1904.
- [13] Jules Henry Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1906.