

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE REAZIONI NUCLEARI

GUALTIERO PISENT

Capitolo 1

Introduzione classica

1.1 Il problema dei due corpi

Consideriamo due punti materiali di masse m_1 , m_2 , in interazione fra loro ma per il resto isolati, come in figura 1.1 ($\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$).

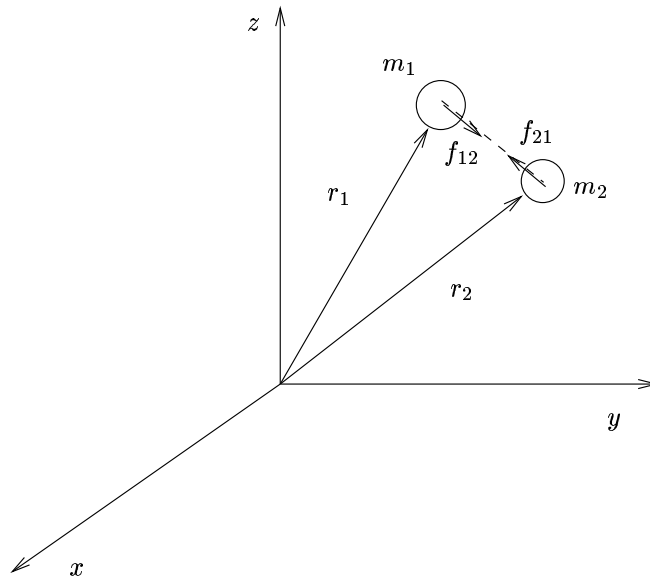


Figura 1.1: Sistema a due corpi generale

Dette \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 le coordinate in un riferimento inerziale, le equazioni del moto si scrivono:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{f}_{12} ; m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_{21}. \quad (1.1)$$

Si noti che le forze dipendono da $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, e quindi quelle coordinate sono scomode. Eseguiamo una trasformazione di coordinate, introducendo la coordinata relativa;

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (1.2)$$

e la coordinata del baricentro:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.3)$$

Invertendo la trasformazione lineare si ottiene:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (1.4)$$

Sostituendo le 1.4 nelle 1.1 si ottengono le equazioni del moto nel nuovo riferimento:

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}} + \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{12}; \quad m_2 \ddot{\mathbf{R}} - \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{21}, \quad (1.5)$$

avendo introdotto la massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.6)$$

Sommando le 1.5 si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0. \quad (1.7)$$

Non essendoci forze esterne il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme.

Tramite differenza delle 1.5 si ottiene invece l'equazione dinamica nel nuovo riferimento:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{12}. \quad (1.8)$$

Scriviamo l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2, \quad (1.9)$$

e sostituiamo le 1.4:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.10)$$

Confrontando quest'equazione con il teorema di Koenig, si ottiene l'energia cinetica nel CM:

$$T_{CM} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (1.11)$$

Conclusioni: il problema a 2 corpi si riduce ad un problema ad 1 corpo equivalente, con le dovute sostituzioni.

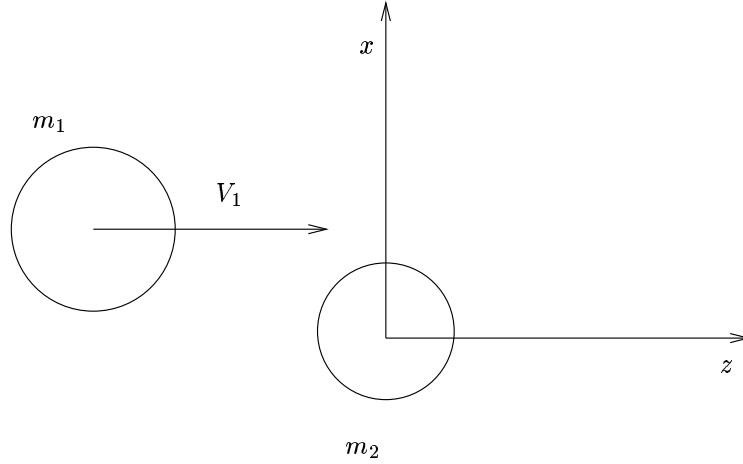


Figura 1.2: Il sistema prima dell'urto

1.2 La collisione

La collisione è un problema a 2 corpi con traiettoria aperta.

Stato iniziale (figura 1.2): m_1 (puntiforme) proviene da infinito con velocità iniziale \mathbf{V}_1 e interagisce con m_2 puntiforme e inizialmente ferma, tramite \mathbf{f}_{12} su cui si fa l'unica ipotesi di annullamento all'infinito.

Poiché la forza è centrale la traiettoria è piana. Fissiamo il riferimento zx nel piano dell'orbita, con z diretto come \mathbf{V}_1 , x ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario ed O nella posizione iniziale di m_2 . Questo riferimento si chiama del laboratorio (LAB)

In questo riferimento abbiamo:

$$V_{1z} = V_1 ; V_{1x} = 0 ; V_2 = 0. \quad (1.12)$$

Stato finale (figura 1.3): ambedue le particelle si muovono con velocità finali:

$$V'_{1z} = V'_1 \cos \Theta_1 ; V'_{1x} = V'_1 \sin \Theta_1, \quad (1.13)$$

$$V'_{2z} = V'_2 \cos \Theta_2 ; V'_{2x} = V'_2 \sin \Theta_2. \quad (1.14)$$

Θ_1 si dice angolo di scattering (nel LAB).

Essendo il sistema isolato si conserva la quantità di moto:

$$\mathbf{Q} = m_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{Q}' = m_1 \mathbf{V}'_1 + m_2 \mathbf{V}'_2. \quad (1.15)$$

Inoltre negli stati iniziale e finale l'energia potenziale è nulla, e quindi si conserva l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = T' = \frac{1}{2} m_1 (V'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V'_2)^2. \quad (1.16)$$

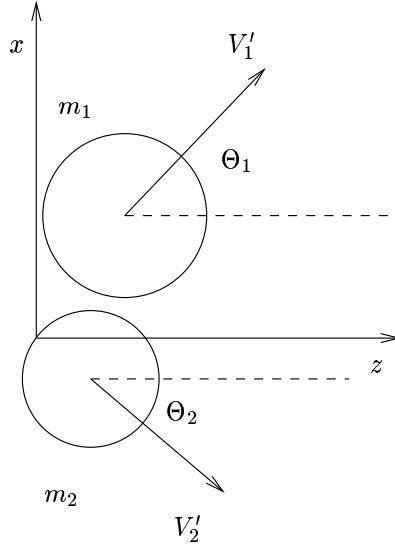


Figura 1.3: Il sistema dopo l'urto

Le ultime 2 equazioni forniscono 3 link fra le 5 variabili V_1 , V_1' , V_2' , Θ_1 , Θ_2 (le masse sono parametri fissi).

Definiamo il riferimento del centro massa (CM), che ha gli assi orientati come il LAB, e l'origine nel baricentro.

Dall'equazione 1.3 si ricava che la velocità del baricentro nel LAB risulta (è sufficiente derivare, tenendo presente che $\dot{\mathbf{r}}_2$):

$$\mathbf{V}_b = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{V}_1. \quad (1.17)$$

Questa \mathbf{V}_b , calcolata nello stato iniziale, si conserva durante tutto il processo (perché il sistema è isolato), quindi il riferimento CM trasla uniformemente rispetto al LAB, ed è ancora inerziale.

La conservazione della quantità di moto nel CM si scrive (indichiamo con lettera minuscola le quantità già definite, nel CM):

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_2 = 0, \quad (1.18)$$

(la quantità di moto totale di un sistema isolato in riferimento baricentrico è nulla). Da qui si ricava:

$$\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2 ; \quad \mathbf{q}'_1 = -\mathbf{q}'_2. \quad (1.19)$$

Conservazione dell'energia:

$$t = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{(q')_1^2}{2m_1} + \frac{(q')_2^2}{2m_2}. \quad (1.20)$$

Sostituendo la 1.20 nella 1.19 si ottiene:

$$q_1 = q_2 = q'_1 = q'_2 \equiv q. \quad (1.21)$$

Un osservatore nel CM vede le particelle avvicinarsi da direzioni opposte, e allontanarsi poi in direzioni (diverse) ancora opposte fra loro. C'è quindi un solo angolo di scattering significativo $\theta_1 \equiv \theta$, poichè $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

Poiché il CM trasla rispetto al LAB, vale la seguente regola di composizione delle velocità:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{V}_b ; \quad \mathbf{V}'_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_b, \quad (1.22)$$

dove può essere $i = 1, 2$.

La 1.22 fornisce tutte le connessioni fra i 2 sistemi.

Per esempio, usando la 1.22 con gli indici 1 e 2 rispettivamente, e tenendo conto delle 1.17 e 1.21, si ottiene:

$$v_1 = v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1, \quad (1.23)$$

$$v_2 = v'_2 = V_b = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1. \quad (1.24)$$

Applicando la regola di corrispondenza fra i 2 riferimenti, viste in 1.1, si ricavano le seguenti relazioni che possono essere facilmente dimostrate:

$$q = m_1 v_1 = m_2 v_2 = \mu V_1, \quad (1.25)$$

$$t = \frac{q^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu V_1^2. \quad (1.26)$$

Consideriamo adesso particelle nucleari geometricamente puntiformi ma fisicamente non semplici. In questo caso l'interazione può essere anelastica (si conserva l'energia totale ma non quella cinetica).

Allora la conservazione dell'energia (valida in ambedue i sistemi) si scrive nella forma seguente:

$$T + Q = T' ; \quad t + Q = t'. \quad (1.27)$$

Q rappresenta l'energia guadagnata durante il processo, ed è la stessa nei 2 riferimenti. La reazione si dice esoergica (endoergica) se è $Q > 0$ ($Q < 0$).

Si dice reazione totalmente anelastica quella in cui il proiettile resta appiccicato al bersaglio dopo l'urto.

Dopo l'urto le 2 particelle (e quindi anche il loro baricentro) hanno la stessa coordinata. Deve essere quindi (nel CM) $q' = t' = 0$ (si noti che essendo l'urto anelastico valgono le 1.19 ma non le 1.21, e quindi è $q \neq 0$). Ne consegue, per la seconda delle 1.27, che:

$$Q = -t = -\frac{q^2}{2\mu} = -\frac{1}{2} \mu V_1^2. \quad (1.28)$$

Il processo è totalmente anelastico perchè in esso va perduta tutta l'energia disponibile nel CM (ma non nel LAB). Questa è la massima energia che può essere sottratta al sistema senza ledere la conservazione del momento.

1.3 La sezione d'urto

Le cinematiche derivano da leggi di conservazione, e quindi forniscono vincoli necessari ma non sufficienti fra le variabili. Non dipendono in alcun modo dalle forze (salvo l'ipotesi di annullamento delle forze all'infinito, senza la quale tutto il quadro va in crisi). Quindi la verifica sperimentale di correlazioni cinematiche non dà alcuna informazione sulle forze.

La grandezza che dà informazioni sperimentali sulle forze è la sezione d'urto.

Dicesi sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ l'area attorno al bersaglio che deve essere colpita dal proiettile affinché lo scattering avvenga in θ, ϕ , entro l'angolo solido elementare $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$.

Dicesi sezione d'urto integrale l'area che deve essere colpita affinché ci sia una deviazione (comunque piccola ma non nulla).

Dalla definizione segue:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi). \quad (1.29)$$

Nel caso di simmetria cilindrica abbiamo:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta). \quad (1.30)$$

Chiariamo la definizione sull'esempio di urto classico fra sfere rigide (figure 1.4 e 1.5).

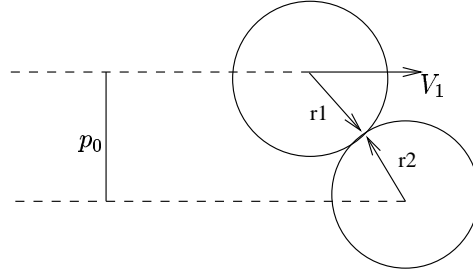


Figura 1.4: Prima dell'urto

Supponiamo che la sfera proiettile di raggio R_1 urti contro una sfera bersaglio di raggio R_2 , con parametro d'urto $p_0 < R_1 + R_2$.

L'ipotesi fisica è che l'angolo di incidenza sia uguale all'angolo di riflessione ($i=r$). In questa ipotesi deve essere $\theta = 2\alpha$, essendo θ l'angolo di scattering ed α l'angolo fra l'asse x e la tangente alle due sfere nel momento del contatto. Il parametro d'urto è allora

$$p_0 = (R_1 + R_2) \cos \alpha. \quad (1.31)$$

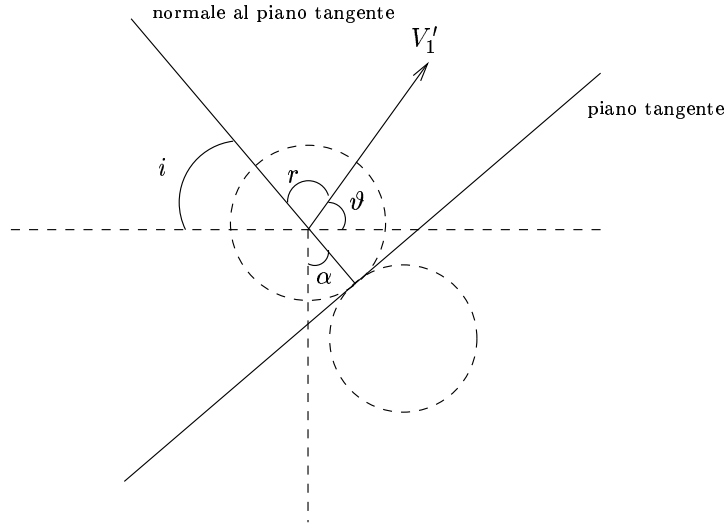


Figura 1.5: Disposizione angoli

L'area $S(\theta) = \pi p_0^2(\theta)$ è tale che se l'impatto avviene al suo interno (se il parametro d'urto è $< p_0$) l'angolo di scattering è $> \theta$.

Quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{dS}{d\Omega}. \quad (1.32)$$

Tenendo conto che siamo in simmetria cilindrica e quindi $d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta$, e che $\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\theta}$, si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}(R_1 + R_2)^2. \quad (1.33)$$

La sezione d'urto fra sfere rigide è isotropa nel CM.

Capitolo 2

Descrizione quantistica

2.1 Premessa

Nell'impresa di esplorazione del microcosmo, un ruolo fondamentale è ricoperto da esperimenti di collisione fra oggetti microscopici. Questi esperimenti sono utili per indagare sull'interazione elettro-debole, ma sono insostituibili nell'indagine sull'interazione forte che come è noto è un'interazione a corto raggio.

Detto in altre parole, gli esperimenti di collisione hanno carattere fondante in fisica nucleare (dove l'interazione forte è dominante), e importanza via via crescente in fisica atomica e molecolare (dove è prevalente l'interazione elettromagnetica). La teoria dello scattering ha quindi significato generale, ma le applicazioni e gli esempi che daremo saranno visti sempre in funzione di quella vasta fenomenologia che va sotto il nome di “teoria delle reazioni nucleari”.

Da questa realtà sperimentale emerge il carattere fondante della teoria quantistica dello scattering come insostituibile mezzo di interpretazione teorica dei fenomeni. Il sostantivo “scattering” si riferisce allo sparpagliamento del fascio dopo l'urto (poiché l'esperimento consiste principalmente nell'analisi delle modalità di questo sparpagliamento), e l'aggettivo “quantistica” è un qualificativo essenziale, poichè trattandosi di microoggetti la meccanica da usare è quella dei quanti. Un'importante conseguenza di quest'ultima considerazione è che i fatti sono sempre visti e interpretati nello spirito della dualità quantistica, cioè come particelle che vengono sparpagliate e onde che vengono diffuse.

2.2 Interazione elastica fra particelle puntiformi

Consideriamo lo scattering elastico non-relativistico fra 2 particelle puntiformi di massa m_1, m_2 .

Particelle puntiformi significa particelle senza struttura interna, quindi interazione elastica.

Riprendiamo la cinematica dal capitolo I. L'energia cinetica nel laboratorio è

$$E_{\text{lab}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + E, \quad (2.1)$$

dove

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.2)$$

è l'energia nel CM. Il momento relativo \mathbf{p} è definito dalla relazione

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} = \frac{\mathbf{p}_2}{m_2} = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (2.3)$$

Quantisticamente bisogna introdurre il numero d'onda \mathbf{k} e la sua rappresentazione operatoriale, secondo la ricetta:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \rightarrow -i\nabla, \quad (2.4)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Quindi all'energia cinetica

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{k^2}{\mu}; \quad \mu = \frac{2m}{\hbar^2}, \quad (2.6)$$

corrisponde l'operatore (hamiltoniano libero)

$$H_0 = -\frac{\nabla^2}{\mu}, \quad (2.7)$$

dove

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.8)$$

è il laplaciano.

L'equazione (stazionaria non relativistica) di S per la particella libera, si può scrivere nelle due forme equivalenti.

$$\begin{aligned} (H_0 - E)\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= 0; \\ (\nabla^2 + k^2)\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

avendo indicato con $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ la funzione d'onda della particella libera, autostato dell'operatore H_0 , relativo all'autovalore E . La soluzione dell'equazione 2.9 è l'onda piana

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta}, \quad (2.10)$$

avendo assunto $\frac{\mathbf{k}}{k} = \text{versore asse } z$.

Le superfici d'onda di $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ sono i piani ortogonali all'asse $z \equiv \text{direzione di } \mathbf{k}$.

Verifica: il Laplaciano in coordinate polari si scrive:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \equiv \nabla_r^2 + \nabla_\theta^2 + \nabla_\phi^2. \quad (2.11)$$

È facile verificare che:

$$\nabla_r^2 \Phi = \left(\frac{2ik \cos \theta}{r} - k^2 \cos^2 \theta \right) \Phi,$$

$$\nabla_\theta^2 \Phi = \left(\frac{2ik \cos \theta}{r} - k^2 \sin^2 \theta \right) \Phi,$$

$$\nabla_\phi^2 \Phi = 0,$$

e quindi

$$\nabla^2 \Phi = k^2 \Phi, \text{ c.v.d.}$$

Gli autostati di momento non sono normalizzabili in senso proprio, ma nel senso delle distribuzioni.

Partiamo dal caso unidimensionale

$$(H_0 - E)\Phi(k, x) = 0; \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \Phi(k, x) = 0, \quad (2.12)$$

che è l'equazione dell'oscillatore armonico (salvo il diverso significato delle variabili).

Consideriamo la soluzione

$$\Phi(k, x) = e^{ikx}. \quad (2.13)$$

Operiamo prima nell'intervallo limitato $-a \leq x \leq a$, e definiamo il prodotto scalare

$$(\Phi(k'), \Phi(k)) = \int_{-a}^a \Phi^*(k', x) \Phi(k, x) dx = \int_{-a}^a e^{i(k-k')x} dx = \frac{2 \sin[a(k-k')]}{k-k'}. \quad (2.14)$$

In particolare la norma è finita, poichè:

$$\|\Phi(k)\|^2 = (\Phi(k), \Phi(k)) = \lim_{k' \rightarrow k} \frac{2 \sin[a(k-k')]}{k-k'} = 2a. \quad (2.15)$$

Vediamo adesso cosa succede al limite per $a \rightarrow \infty$.

Consideriamo $(\Phi(k'), \Phi(k))$ come funzione di $k - k'$:

Questa funzione gode delle seguenti proprietà:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\Phi(k'), \Phi(k)) = \begin{cases} \infty & \text{se } k = k' \\ 0 & \text{se } k \neq k' \end{cases}, \quad (2.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin x a}{x} dx = 2\pi, \quad (2.17)$$

per qualsiasi a , e quindi anche al limite per $a \rightarrow \infty$, e questo ci porta a una delle possibili definizioni della delta di Dirac. Possiamo scrivere quindi:

$$(\Phi(k'), \Phi(k)) = 2\pi\delta(k - k'), \quad (2.18)$$

e ridefinire Φ , normalizzata nel senso delle distribuzioni:

$$\Phi(k, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}. \quad (2.19)$$

In 3 dimensioni la 2.19 è sostituita dalla:

$$\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.20)$$

dove $d\mathbf{r} \equiv r^2 dr \, d\hat{r} \equiv r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, e dove l'integrale si intende esteso a tutto lo spazio. C'è perfetta simmetria fra gli spazi \mathbf{r} e \mathbf{k} , ovvero:

$$\int e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{k}} d\mathbf{k} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.21)$$

Scriviamo allora:

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.22)$$

cui corrisponde la seguente ortonormalità:

$$\int \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r}') d\mathbf{k} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.23)$$

ovvero:

$$\int \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Phi^*(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.24)$$

Passiamo adesso al problema d'urto e quindi all'equazione di Schroedinger completa.

L'hamiltoniano completo $H = H_0 + V$ si ottiene sommando all'hamiltoniano libero, il potenziale nucleare (centrale e a corto raggio). L'equazione completa di Schrödinger (stazionaria, non relativistica), si scrive quindi:

$$(H - E)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0; \quad H = H_0 + V(r). \quad (2.25)$$

Consideriamo le seguenti forme, tutte fra loro equivalenti:

$$(E - H_0)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = V(r)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (2.26)$$

$$[\nabla^2 + k^2 - \mu V(r)]\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.27)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \mu V(r)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (2.28)$$

La Ψ si intende normalizzata come l'onda piana, ovvero:

$$\int \Psi^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{k}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.29)$$

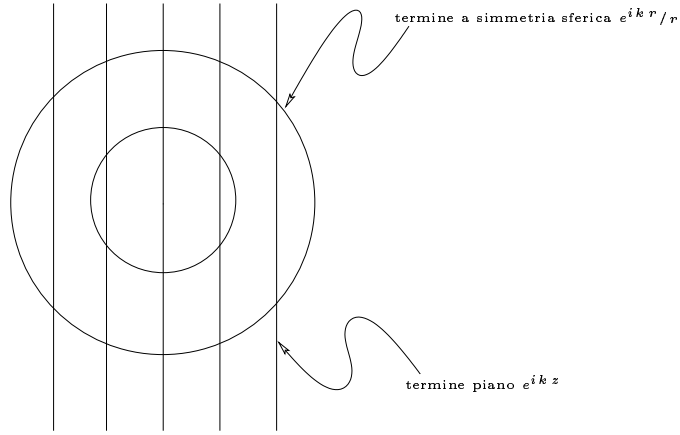


Figura 2.1: Le forme della soluzione

Si osservi che la normalizzazione è indipendente da V che non viene specificato. Il potenziale dà solo contributi al finito che non influenzano la delta.

La forma asintotica per la funzione d'onda fisica di scattering, è la seguente (rappresentata in figura 2.1):

$$\Psi_{\infty}^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\widehat{kr}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.30)$$

Qui $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ è l'onda piana incidente (le superfici d'onda sono piano ortogonali alla direzione della particella incidente \mathbf{k}), $\frac{e^{ikr}}{r}$ è l'onda sferica uscente normalizzata (le superfici d'onda sono sfere con centro in O , ed r a denominatore serve a rendere costante il flusso), f , coefficiente di proporzionalità fra le due è l'ampiezza di scattering, \widehat{kr} è l'angolo (di scattering) fra la direzione delle particelle incidenti \mathbf{k} , e la direzione della particella uscente \mathbf{r} .

Si osservi che, siccome siamo in fase stazionaria (t non compare esplicitamente), scrivere e^{ikr} per le onde sferiche uscenti è convenzionale, ma serve poi da riferimento per tutto il formalismo.

Il rapporto f fra l'onda piana incidente e l'onda sferica uscente è molto importante poiché consente di calcolare la sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f(\theta)|^2. \quad (2.31)$$

Ricordiamo la definizione operativa di sezione d'urto (per il momento nel caso dell'interazione elastica fra particelle puntiformi, $a + b \rightarrow a + b$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{\Phi_a N_b} \frac{dn_a(\theta)}{d\Omega}, \quad (2.32)$$

dove:

$\frac{dn_a(\theta)}{d\Omega}$ è il numero di particelle a uscenti nell'unità di tempo in $d\Omega, \theta$,
 Φ_a è il numero di a incidenti nell'unità di tempo sull'unità di superficie, e
 N_b il numero di centri scatteratori b nel bersaglio investito.

La definizione di sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\Phi(\mathbf{J}_{scat})}{|\mathbf{J}_{inc}|d\Omega}, \quad (2.33)$$

Si noti che dimensionalmente la sezione d'urto è una superficie come deve. La densità di corrente si calcola in base alla formula:

$$\mathbf{J} = Re(\Psi^*, \mathbf{v}\Psi), \quad (2.34)$$

dove \mathbf{v} si ricava dalla:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} = \frac{\hbar \nabla}{mi}. \quad (2.35)$$

Tutte le funzioni d'onda si intendono calcolate al valore asintotico. A parte coefficienti che si elidono fra numeratore e denominatore abbiamo:

$$\Psi_{inc} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikz}, \quad (2.36)$$

$$\nabla \Psi_{inc} = D_z \Psi_{inc} \hat{z} = ik e^{ikz} \hat{z}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}_{inc} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} = \mathbf{v}. \quad (2.38)$$

Questo è un risultato classico. Le particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo sono quelle contenute nel cilindro di base unitaria e altezza v . Per quanto riguarda il denominatore abbiamo:

$$\Psi_{scat} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.39)$$

$$\nabla \Psi_{scat} = D_r \Psi_{scat} \hat{r}, \quad (2.40)$$

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}) = \frac{\hbar}{m} Re(\Psi_{scat}^*, \nabla \Psi_{scat}) r^2 d\Omega = |f(\theta)|^2 \frac{\hbar k}{m} d\Omega, \quad (2.41)$$

avendo approssimato $ikr - 1 \sim ikr$, poichè siamo al limite di $r \rightarrow \infty$. Si trova infine la 2.31.

2.3 Lo sviluppo multipolare

La teoria formale dello scattering fornisce relazioni operatoriali compatte nello spazio tridimensionale. Queste relazioni sono molto generali, ma non ancora direttamente applicabili alla soluzione del problema dinamico.

Il contenuto di questo capitolo è fondamentale per ridurre a livello applicativo la teoria formale dello scattering.

Il punto di partenza è che, se il potenziale è centrale, il momento angolare è una costante del moto, e quindi gli autostati di momento possono essere sviluppati in autostati di momento angolare. Compaiono così le armoniche sferiche e il numero quantico l . In altre parole si attua una separazione fra la variabile radiale r e le variabili angolari θ, ϕ , e il potenziale (centrale e quindi funzione della sola r), entra solo nell'equazione radiale di Schroedinger.

Con l'introduzione delle armoniche sferiche si inizia il discorso (di grande interesse) sulla teoria quantistica del momento angolare, ovvero sul rilievo che hanno per la descrizione dei fenomeni di cui ci stiamo occupando, gli oggetti che godono di particolari proprietà rispetto a rotazioni del riferimento (i tensori sferici irriducibili).

Il laplaciano 2.11 si può scrivere nella forma

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 - \frac{1}{r^2} L^2, \quad (2.42)$$

dove

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{k} = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (2.43)$$

(vedi 2.4), è l'operatore momento angolare. È un operatore hermitiano, che soddisfa alle regole di commutazione $[L_x, L_y] = iL_z$ e cicliche. Come è noto, per un operatore siffatto esiste una rappresentazione standard in cui sono contemporaneamente diagonali \mathbf{L}^2 ed L_z . Le corrispondenti equazioni agli autovalori assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} L^2 Y_l^m(\hat{r}) &= l(l+1) Y_l^m(\hat{r}), \\ L_z Y_l^m(\hat{r}) &= m Y_l^m(\hat{r}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$, e, per ogni l , $m = l, l-1, \dots, -l+1, -l$. Gli autostati contemporanei di \mathbf{L}^2 ed L_z , sono le armoniche sferiche Y_l^m , che (secondo le convenzioni di Condon e Shortly), si definiscono nel modo seguente.

Per $m \geq 0$ si scrive

$$Y_l^m(\hat{r}) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\theta) e^{im\varphi}, \quad (2.45)$$

mentre per $m < 0$ si usa la formula

$$Y_l^{-m}(\hat{r}) = (-1)^m Y_l^{m*}(\hat{r}). \quad (2.46)$$

I polinomi associati di Legendre $P_l^m(\theta)$ si calcolano in base alla

$$P_l^m(\theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\theta), \quad (2.47)$$

e ai polinomi (non associati) di Legendre:

$$P_l(\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (-\sin^2 \theta)^l. \quad (2.48)$$

Le Y così definite formano un set ortonormale completo:

$$\begin{aligned}\int Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) d\hat{r} &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{lm} Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_l^m(\hat{r}') &= \delta(\hat{r} - \hat{r}'),\end{aligned}\quad (2.49)$$

dove si intende che $l = 0, 1, \dots$ e $m = l, l-1, \dots, -l$. Diamo qui di seguito alcune importanti proprietà delle Y che serviranno nel seguito:

- Il subset Y_l^0 è proporzionale ai polinomi di *Legendre*:

$$Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\theta). \quad (2.50)$$

- Le condizioni 2.49 determinano la normalizzazione dei P_l :

$$\int_{-1}^1 P_l(\theta) P_{l'}(\theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (2.51)$$

- In onda S deve essere ovviamente $m = 0$, e la Y è una costante determinata dalla normalizzazione (caso di simmetria sferica)

$$Y_0^m = \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.52)$$

- Teorema di addizione delle armoniche sferiche:

$$\begin{aligned}\sum_m Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) &= \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_l^0(\widehat{kr}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\widehat{kr}),\end{aligned}\quad (2.53)$$

dove \hat{k} ed \hat{r} sono due versori, ovvero due punti sulla sfera unitaria, e \widehat{kr} è l'angolo fra i due versori. Questa è l'operazione di contrazione di due tensori sferici irriducibili, che dà uno scalare invariante per rotazioni del riferimento. Infatti ruotando il riferimento, cambiano separatamente \hat{k} ed \hat{r} , ma resta invariato l'angolo fra essi compreso \widehat{kr} .

Consideriamo adesso l'equazione libera di Schroedinger 2.9.

Come al solito partiamo dal problema imperturbato per costruire gli elementi fondamentali con cui rappresenteremo tutto il resto.

Usando la 2.42 possiamo scrivere

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{L^2}{r^2} + k^2\right) \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.54)$$

Sviluppiamo Φ in armoniche sferiche. Anzi, dacché $\mathbf{k} \equiv$ asse z , e c'è simmetria cilindrica, bastano le Y_l^0 :

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_l \frac{\varphi_l(k, r)}{kr} Y_l^0(\theta). \quad (2.55)$$

Sostituiamo nella 2.54, e ricordiamo la prima delle 2.44 e la 2.11. Isoliamo un termine generico della sommatoria tramite integrazione sugli angoli ed uso dell'ortonormalità 2.49. Usiamo la proprietà

$$\nabla_r^2 \frac{\varphi_l}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi_l}{dr^2}, \quad (2.56)$$

ed otteniamo finalmente l'equazione radiale libera di S :

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi_l = 0. \quad (2.57)$$

Il termine $-\frac{l(l+1)}{r^2}$ accanto a k^2 è un potenziale aggiuntivo dipendente da l , che discrimina fra loro le componenti di momento angolare. Esso prende il nome di potenziale centrifugo. La 2.57 è un'equazione differenziale, lineare, del 2° ordine. Per rappresentare le soluzioni della 2.57, noi faremo riferimento alle funzioni di Bessel–Riccati F , e Riccati–Newmann G :

$$\begin{aligned} F_l(kr) &= \sqrt{\frac{kr\pi}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) = kr j_l(kr), \\ G_l(kr) &= \sqrt{\frac{kr\pi}{2}} (-)^l J_{-l-\frac{1}{2}}(kr) = kr n_l(kr). \end{aligned} \quad (2.58)$$

dove le J_l sono le ordinarie funzioni di Bessel, e j_l sono le funzioni di Bessel sferiche. Le F e G si possono calcolare tramite le seguenti formule ricorrenti:

$$\begin{aligned} F_0 &= \sin kr & G_0 &= \cos kr \\ F_1 &= \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr & G_1 &= \frac{\cos kr}{kr} + \sin kr \\ F_l &= \frac{2l-1}{kr} F_{l-1} - F_{l-2} & G_l &= \frac{2l-1}{kr} G_{l-1} - G_{l-2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le F sono regolari e le G irregolari all'origine:

$$F_l \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^{l+1}}{(2l+1)!!} ; \quad G_l \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(2l-1)!!}{(kr)^l}. \quad (2.60)$$

Il comportamento asintotico delle F e G è quello di \sin e \cos , con uno sfasamento dipendente da l :

$$F_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sin(kr - l\pi/2) ; \quad G_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \cos(kr - l\pi/2). \quad (2.61)$$

In onda $S(l = 0)$ la 2.57 è l'equazione dell'oscillatore armonico, ed F e G sono sin e cos (vedi la prima delle 2.59). È utile avere anche le soluzioni che si comportano come $e^{\pm ikr}$ in onda S : sono le soluzioni che noi chiameremo outgoing (O) e ingoing (I) rispettivamente:

$$\begin{aligned} O_l &= G_l + iF_l = krh_l^- = i\sqrt{\frac{kr\pi}{2}}H_{l+1/2}^{(1)} \\ I_l \equiv O_l^* &= G_l - iF_l = krh_l^+ = -i\sqrt{\frac{kr\pi}{2}}H_{l+1/2}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Queste sono anche dette di Riccati–Hankel. Per queste nuove funzioni è immediato derivare le formule ricorrenti:

$$\begin{aligned} O_0 &= e^{ikr}, \\ O_1 &= \left(\frac{1}{kr}i\right)e^{ikr}, \\ O_l &= \frac{2l-1}{kr}O_{l-1} - O_{l-2}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

e gli andamenti asintotici:

$$O_l \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(2l-1)!!}{(kr)^l} \xrightarrow{r \rightarrow 0} G_l; O_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i(kr-l\pi/2)} \quad (2.64)$$

Per comodità diamo le relazioni inverse delle 2.62:

$$G_l = \frac{O_l + I_l}{2} \quad ; \quad F_l = \frac{O_l - I_l}{2i} \quad (2.65)$$

che sono formalmente simili alle formule di Eulero. Quindi l'equazione 2.54 è soddisfatta se nella 2.55 si pone una generica espressione del tipo

$$\varphi_l = A_l F_l + B_l G_l. \quad (2.66)$$

A causa della 2.55 deve essere $B_l = 0$, perché altrimenti la funzione d'onda divergerebbe all'origine.

Vogliamo determinare A_l in modo che sia rispettata la normalizzazione dell'onda piana 2.23, 2.24. Per far questo introduciamo a primo membro della 2.23 gli sviluppi 2.55, ed a secondo membro l'identità:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\hat{r} - \hat{r}') \frac{\delta(r - r')}{rr'}, \quad (2.67)$$

e la normalizzazione delle F_l :

$$\int F_l(kr)F_l(k'r)dr = \frac{\pi}{2}\delta(k - k') \quad (2.68)$$

Si trova $A_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ a meno di una fase. Affinché sia soddisfatta la time reversal questa fase non può essere 1, ma deve essere presa uguale a $i^l = e^{il\frac{\pi}{2}}$. Si trova

quindi la funzione d'onda normalizzata:

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lm} i^l Y_l^m(\hat{r}) \frac{F_l(kr)}{kr} Y_l^{m*}(\hat{k}), \quad (2.69)$$

che corrisponde ai ben noti sviluppi dell'onda piana:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= \frac{4\pi}{kr} \sum_{lm} i^l F_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}), \\ e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) F_l(kr) P_l(\widehat{kr}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Si tratta adesso di sviluppare e risolvere l'equazione di Schroedinger completa 2.26, la cui componente radiale è:

$$\left[D_r^2 - \frac{l(l+1)}{r} - \mu V(r) + k^2 \right] u_l(k, r) = 0, \quad (2.71)$$

in modo che la componente radiale u_l sia normalizzata come F_l .

Consideriamo la seconda delle 2.70 e l'analogo sviluppo della soluzione completa:

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) u_l(kr) P_l(\widehat{kr}). \quad (2.72)$$

Scriviamo la forma asintotica 2.30 e sostituiamo a primo e secondo membro gli sviluppi testè ricordati. Sviluppiamo anche l'ampiezza di scattering secondo la forma seguente:

$$f(\widehat{kr}) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) f_l P_l(\widehat{kr}). \quad (2.73)$$

sostituiamo le F_l con la loro forma asintotica 2.61 e usiamo la relazione già citata $i^l = e^{il\frac{\pi}{2}}$. Si ottiene:

$$u_{l\infty}(k, r) = \frac{i}{2} \left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - (1 + f_l) e^{i(kr-l\pi/2)} \right]. \quad (2.74)$$

Ricordando le 2.64 e ponendo:

$$f_l = S_l - 1, \quad (2.75)$$

si ottiene l'espressione:

$$u_{l\infty}(k, r) = \frac{i}{2} [I_{l\infty} - S_l O_{l\infty}]. \quad (2.76)$$

La S_l si chiama matrice di scattering, e dà la componente di onda outgoing rispetto alla ingoing. Il suo ruolo è simile a quello della f , che nella 2.30 dà la componente di onda sferica uscente rispetto all'onda piana entrante. Si noti che u ed F si corrispondono, ma u è complesso mentre F è reale. Se Ψ è normalizzato come l'onda piana, u è normalizzato come F , ovvero con una forma del tipo 2.68.

La normalizzazione di u evidentemente impone una normalizzazione ad S , che è la seguente:

$$|S_l|^2 = 1. \quad (2.77)$$

Questa è l'unitarietà della matrice di scattering, che garantisce la conservazione del flusso. Conviene allora introdurre la forma seguente:

$$S_l = e^{2i\delta_l}, \quad (2.78)$$

dove δ si chiama sfasamento asintotico o fase. Sostituendo nella 2.74 e con un po' di algebra si trova:

$$u_{l\infty} = e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \quad (2.79)$$

Commenti:

- Quando $V \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ ed $u \rightarrow F$, diventando reale.
- Il potenziale centrifugo sfasa $F_{l\infty}$ di $\frac{l\pi}{2}$ all'indietro.
- Il potenziale nucleare sfasa $F_{l\infty}$ di δ_l in avanti e introduce il fattore $e^{i\delta_l}$. Tutto l'effetto di V è contenuto nella fase.

In ogni modo la morale è questa: il ricordo di quanto è avvenuto sulle distanze microscopiche dell'interazione sta tutto in δ , sfasamento fra le onde entranti e uscenti. Infatti l'osservabile $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ dipende solo da δ , ovvero da S . La conoscenza della funzione d'onda anche al finito dà un'informazione di maggior dettaglio, ma per calcolare l'osservabile basta conoscere δ (o S), ma non tutti i dettagli della ψ .

Adesso possiamo scrivere la sezione d'urto partendo dalla 2.31 e tenendo conto dei risultati testè ottenuti:

$$k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left| \sum_l (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\theta) \right|^2 = \pi \left| \sum_l \sqrt{2l+1} (e^{2i\delta_l} - 1) Y_l^0(\theta) \right|^2. \quad (2.80)$$

Ricordiamo che $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ rappresenta l'area efficace che deve essere colpita affinché la particella sia deviata di θ , entro $d\Omega$. La sezione d'urto integrale

$$k^2 \sigma = k^2 \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.81)$$

è l'area efficace che deve essere colpita affinché la particella venga deviata comunque.

Per trovare la sezione d'urto integrale, sviluppiamo il terzo membro della 2.80:

$$k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi \sum_{l,l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} (e^{2i\delta_l} - 1)(e^{-2i\delta_{l'}} - 1) Y_l^0(\theta) Y_{l'}^0(\theta), \quad (2.82)$$

ed integriamo:

$$k^2 \sigma = k \sum_l \sigma_l = \pi \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2 = 4\pi \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (2.83)$$

L'interesse dello sviluppo multipolare sta nel fatto che, almeno per forze a corto raggio e bassa energia, la convergenza è molto forte. Ciò si può capire con un ragionamento semiclassico: la quantizzazione del momento della quantità di moto si scrive: $|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \hbar l$. Indicando con b il parametro d'urto si ha: $bp = b\hbar k \sim \hbar l$, ovvero $b k \sim l$. Ciò vuol dire che se b è $>$ del raggio di interazione non c'è contatto, ovvero che per $l \geq kR$ è $S_l \sim 1$, $\delta_l \sim 0$. Per esempio per $n-^{12}\text{C}$ a 1 MeV (nel CM), dall'equazione dei raggi nucleari $R \sim 1.3A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$, ed essendo $m_{\text{nucleone}} c^2 = 938 \text{ MeV}$, $\hbar c = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, si ottiene $l_{\text{max}} \equiv kR \sim 0.66$. L'interazione è spiegata dalle sole onde S e P .

2.4 Interazione inelastica

Supponiamo che il bersaglio non sia puntiforme e si possa eccitare ma non rompere. Restiamo così nell'ambito dell'interazione a 2 corpi con eccitazione del bersaglio. Consideriamo a titolo di esempio lo scattering neutrone- ^{12}C , con possibile eccitazione dei primi 2 livelli del carbonio. per semplicità diamo il formalismo senza i numeri quantici di spin-parità.

Livelli eccitati del carbonio:

$$\epsilon_1 = 0 ; \quad \epsilon_2 = 4.43 \text{ MeV} ; \quad \epsilon_3 = 8.86 \text{ MeV}.$$

Conservazione dell'energia:

$$E = \epsilon_1 + E_1 = \epsilon_2 + E_2 = \epsilon_3 + E_3, \quad (2.84)$$

dove E è l'energia totale e le E_i sono le energie di canale.

Supponiamo che l'energia del neutrone incidente sia $E = E_1 = 8 \text{ MeV}$, nel qual caso 2 canali sono aperti ($E_1 > 0$, $E_2 > 0$) ed uno chiuso ($E_3 < 0$).

I Q-valori sono:

$$Q_2 = E_2 - E_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 = -4.43 \text{ MeV};$$

$$Q_3 = E_3 - E_1 = \epsilon_1 - \epsilon_3 = -8.86 \text{ MeV}.$$

I 2 processi sono evidentemente endotermici.

Generalizzazione dell'ampiezza di scattering 2.30:

$$\Psi_{\alpha\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) = \chi_{\alpha}(\xi) e^{i\mathbf{k}_{\alpha}\mathbf{r}} + \sum_{\beta} f_{\beta\alpha}(\theta) \chi_{\beta}(\xi) \frac{e^{ik_{\beta}r}}{r}. \quad (2.85)$$

Dove:

– α, β sono indici di canale.

– $\Psi_{\alpha\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi)$ è la funzione d'onda completa per un processo che abbia α come canale d'ingresso. In questo caso ci sono onde piane incidenti solo nel canale α e onde sferiche uscenti in tutti i canali (quindi la sommatoria si estende a tutti i β , compreso α).

– $k_\alpha = \sqrt{\mu E_\alpha}$ è il momento di canale, mentre $k = \sqrt{\mu E}$ è il momento totale. In questo senso diciamo che Ψ è funzione di k , mentre a destra compaiono le k_α , k_β , poichè vale la 2.84 e le energie di eccitazione si intendono date.

– Se un certo k_β è chiuso ($E_\beta < 0$), allora $k_\beta = i\sqrt{\mu|E_\beta|}$ è immaginario puro, ed $e^{-\mu|E_\beta|r}$. Se il canale è chiuso le onde uscenti sono smorzate esponenzialmente e non arrivano all'infinito. Quindi nell'espressione asintotica non compaiono, quindi la sommatoria va solo sui canali aperti, che sono direttamente eccitabili.

– χ è autostato dell'hamiltoniano di targhetta. Con ξ indichiamo globalmente le coordinate interne di targhetta. Qui c'è la spettroscopia. Questi stati si suppongono ortonormali:

$$\sum_\alpha \chi_\alpha^*(\xi) \chi_\alpha(\xi') = \delta(\xi - \xi'); \quad \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_\alpha(\xi) d\xi = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (2.86)$$

– $f_{\beta\alpha}(\theta)$ è l'ampiezza di scattering per particelle uscenti in θ nel canale β , in un processo che inizia nel canale α .

Andiamo al calcolo della sezione d'urto.

Per il calcolo del flusso incidente nel canale α , abbiamo:

$$\Psi_{inc}^{(\alpha)} = \chi_\alpha(\xi) e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}}. \quad (2.87)$$

Nel prodotto scalare che compare in 2.34 si deve intendere anche un'integrazione nelle variabili interne di targhetta per cui, grazie all'ortonormalità 2.86 si ottiene un risultato molto simile a 2.38, ovvero:

$$\mathbf{J}_{inc}^{(\alpha)} = \frac{\hbar \mathbf{k}_\alpha}{m} = \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.88)$$

Per quanto riguarda il flusso scatterato abbiamo:

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}^{(\alpha)}) = Re[\sum_{\beta\gamma} \int f_{\beta\alpha}^*(\theta) \chi_\beta^*(\xi) \frac{e^{-ik_\beta r}}{r} \frac{\hbar}{mi} f_{\gamma\alpha}(\theta) \chi_\gamma(\xi) D_r \frac{e^{ik_\gamma r}}{r} d\xi r^2 d\Omega]. \quad (2.89)$$

Grazie all'ortonormalità 2.86, abbiamo:

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}^{(\alpha)}) = \sum_\beta \frac{\hbar k_\beta}{m} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2 d\Omega. \quad (2.90)$$

Otteniamo così la sezione d'urto per onde entranti nel canale α :

$$[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)]_\alpha = \sum_\beta \frac{k_\beta}{k_\alpha} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2. \quad (2.91)$$

Possiamo scrivere anche:

$$[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)]_\alpha = \sum_\beta [\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)]_{(\beta\alpha)}, \quad (2.92)$$

avendo posto

$$[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)]_{(\beta\alpha)} = \frac{k_\beta}{k_\alpha} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2. \quad (2.93)$$

Questa è la sezione d'urto per la transizione dal canale α al canale β , ed è misurabile se si sa discriminare l'energia in uscita, ovvero discriminare i canali. Si osservi che in questo caso i momenti entrante ed uscente non si elidono perchè sono diversi.

La generalizzazione della 2.73 è:

$$f_{\beta,\alpha}(\theta) = \frac{1}{2i\sqrt{k_\alpha k_\beta}} \sum_l (2l+1) [S_{\beta,\alpha}^l - \delta_{\beta,\alpha}] P_l(\theta). \quad (2.94)$$

La funzione di scattering è rimpiazzata dalla matrice di scattering che descrive il trasferimento di flusso tra canali. Si osservi che l'unità deve essere rimpiazzata da $\delta_{\beta,\alpha}$, poichè ci sono onde entranti solo in α .

Sostituendo questa ampiezza nella 2.93 e tenendo conto della 2.50, si ottiene:

$$[\frac{d\sigma}{d\Omega}]_{\beta\alpha}(\theta) = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{l,l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} [S_{\beta,\alpha}^{l*} - \delta_{\beta,\alpha}] Y_l^0(\theta) [S_{\beta,\alpha}^{l'} - \delta_{\beta,\alpha}] Y_{l'}^0(\theta), \quad (2.95)$$

e finalmente, integrando sull'angolo solido, si ottiene la sezione d'urto integrale per la transizione fra i canali α e β :

$$\sigma^{\beta\alpha} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) |S_{\beta,\alpha}^l - \delta_{\beta,\alpha}|^2. \quad (2.96)$$

In particolare la transizione da α ad α ci dà la sezione d'urto elastica:

$$\sigma_{el}^\alpha = \sigma^{\alpha\alpha} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) |S_{\alpha,\alpha}^l - \delta_{\beta,\alpha}|^2, \quad (2.97)$$

mentre ciò che resta dà globalmente la sezione d'urto di reazione:

$$\sigma_{re}^\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \sigma^{\beta\alpha} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_l (2l+1) |S_{\beta,\alpha}^l|^2. \quad (2.98)$$

le analoghe delle 2.72, 2.74, sono le equazioni seguenti:

$$\Psi_{\alpha\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) = \sum_{\beta,l} \frac{i^l (2l+1)}{2k_\alpha r} P_l(\theta) \chi_\beta(\xi) u_{\beta\alpha\infty}^l(k_\beta r), \quad (2.99)$$

$$u_{\beta\alpha\infty}^l(k_\beta r) = \frac{i}{2} [\delta_{\beta\alpha} e^{-i(k_\beta r - \frac{l\pi}{2})} - S_{\beta\alpha}^l e^{i(k_\beta r - \frac{l\pi}{2})}. \quad (2.100)$$

Il canale d'entrata per eccellenza è il canale elastico $\alpha = 1, \epsilon_1 = 0, \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$. Ma le equazioni scritte fin qui sono più generali, nel senso che si può considerare un qualsiasi α come canale di entrata. Una volta fissata l'energia cinetica in un

qualche canale, restano definiti tutti i k_α (compresa l'energia totale k), dalla conservazione dell'energia 2.84. In questo senso si deve intendere la normalizzazione della funzione d'onda

$$\int \Psi_\alpha^*(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}, \xi) \Psi_\beta(\mathbf{k}'_\beta, \mathbf{r}, \xi) d\mathbf{r} d\xi. \quad (2.101)$$

Il primo delta garantisce che sia $\alpha = \beta$, quindi il secondo delta impone che sia $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}'_\alpha$.

L'unità della matrice S che porta a quella normalizzazione, ha la forma seguente:

$$\sum_\beta S_{\alpha\beta}^l S_{\gamma\beta}^{l*} = \sum_\beta S_{\beta\alpha}^l S_{\beta\gamma}^{l*} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (2.102)$$

Le ultime due equazioni si riferiscono al sottospazio dei canali aperti (solo se α è aperto, ci sono in α onde entranti). Definita S come una matrice in questo sottospazio, l'unitarietà si scrive in forma compatta nel modo seguente:

$$\mathbf{S}^l \mathbf{S}^{l\dagger} = \mathbf{S}^{l\dagger} \mathbf{S}^l = \mathbf{1}. \quad (2.103)$$

Ponendo nella 2.102 $\gamma = \alpha$, si trova, come caso particolare dell'unitarietà, la seguente relazione:

$$\sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\beta\alpha}^l|^2 + |S_{\alpha\alpha}^l|^2 = 1, \quad (2.104)$$

che, sostituita nella 2.98 dà:

$$\sigma_{re}^\alpha = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) [1 - |S_{\alpha\alpha}^l|^2]. \quad (2.105)$$

Finalmente possiamo calcolare la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{tot}^\alpha = \sigma_{el}^\alpha + \sigma_{re}^\alpha = \frac{2\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) [1 - \text{Re} S_{\alpha\alpha}^l]. \quad (2.106)$$

Indice

1	Introduzione classica	1
1.1	Il problema dei due corpi	1
1.2	La collisione	3
1.3	La sezione d'urto	6
2	Descrizione quantistica	8
2.1	Premessa	8
2.2	Interazione elastica fra particelle puntiformi	8
2.3	Lo sviluppo multipolare	13
2.4	Interazione inelastica	20