

# 小波变换及其应用<sup>①</sup>

李世雄

(安徽大学数学系, 合肥 230039)

## 摘要

小波变换是近年来发展起来的一门新的数学分支, 它适宜于分析研究信号的局部性质, 对于图象数据压缩、奇性检测、非卷积型算子的化简及取样插值定理等方面都有着重要的应用, 在地震勘探、大气湍流、语音合成、图象处理等许多领域中都有着广泛应用的前景. 本文介绍了小波变换及其正交基的基本概念, 并对它的一些重要应用作了概括的介绍.

**关键词** 小波变换, 正交小波基, 非卷积算子, 取样, 数据压缩.

## 一、引言

小波变换(Wavelet Transform)的理论是近年来发展起来的一个新的数学分支, 目前已成为国际上极为活跃的研究领域, 它已被广泛地应用于图象处理、语音人工合成、地震勘探、大气湍流等方面.

长期以来, 在各种信号数据的处理方面, 特别是在频谱分析和各种滤波方法中最基本的数学工具就是 Fourier 分析. 所谓信号, 在数学上我们常用函数来刻画, 通常总是把时间或空间作为自变量, 而把反映某一信号的物理量作为函数. 对于以时间  $t$  为自变量的信号我们称之为时间信号, 记为  $f(t)$ , 而对于以空间为自变量的信号称为空间信号, 最常见的是平面图象(黑白), 可以用两元函数  $f(x, y)$  来表示, 这里  $(x, y)$  是平面上点的坐标, 而  $f(x, y)$  则表示点  $(x, y)$  图象的灰度. 当然也可以考虑既依赖于时间又依赖于空间的信号  $f(x, y, t)$  (如电视图象)等. 尽管时间信号与空间信号在物理意义上不同, 但在数学上的刻画却是十分相似的, 因此, 可以统一处理. 为了简单起见, 下面我们主要以时间信号  $f(t)$  为例来阐明小波变换的理论与方法, 同时在不致引起混淆时我们对信号与函数这两个概念不加区分.

信号  $f(t)$  的一个重要特征就是它的频率特性(或谱), 在数学上也就是  $f(t)$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

由 Fourier 逆变换公式

<sup>①</sup>本文1992年2月29日收到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

知道由一个信号的谱可以完全确定这个信号(我们在这里不详细讨论保证公式(2)成立的具体条件). 所谓频谱分析、滤波等信号数据处理的方法, 简单地说就是对  $f(\omega)$  的分析、加工的种种技巧. 长期以来这方面已发展了一套内容非常丰富并在许多实际问题中行之有效的方法. 但是, 由于 Fourier 变换  $f(\omega)$  是将函数  $f(t)$  按照函数系  $\{e^{i\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$  的展开, 而  $|e^{i\omega t}| \equiv 1$ , 所以  $\hat{f}(\omega)$  只能刻划在整个时间域  $(-\infty, \infty)$  上的频率特征, 而不能反映出信号在局部时间区域上的频率特征. 但在有些实际问题中我们所关心的恰恰是信号在局部时间范围中的特征. 例如在音乐和语言信号中人们关心的是什么时候演奏什么音符、发出什么样的音节, 对地震信号, 人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波, 对这类问题 Fourier 分析往往不是很有效的.

为了研究信号在局部范围的频率特性, D.Gabor<sup>[1]</sup> 在 1946 年引进了“窗口”Fourier 变换的概念. 他的做法是取定一个函数  $g(t)$ , 称为窗口函数, 它在有限区间外恒等于 0 (支集紧), 或很快趋于 0. (见图 1) 称

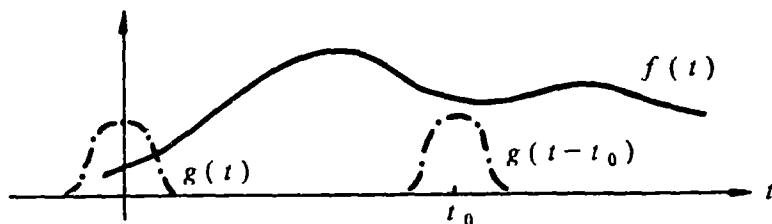


图 1

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

为信号  $f(t)$  关于窗口函数  $g(t)$  的“窗口 Fourier 变换”(window fourier transform)或 Garbor 变换,  $G_f(\omega, \tau)$  反映了信号  $f(t)$  在  $t = \tau$  附近的频谱特征. 可见窗口 Fourier 变换确实能反映出一个信号在局部范围的频率特性, 而且由于有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(t - \tau) G_f(\omega, \tau) d\tau \quad (4)$$

(这里窗口函数  $g(t)$  要求满足一定的标准化条件),  $G_f(\omega, \tau)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ ) 确实包含了  $f(t)$  的全部信息. 虽然 Garbor 变换的窗口位置随参数  $\tau$  而变(平移), 但是其形状与大小则与频率无关而保持不变, 这不符合实际问题中高频信号的分辨率应比低频信号为高, 也就是说变换的窗口大小应随频率而变, 频率愈高窗口应愈小的要求. 此外, 在数值计算中, 必须将连续依赖于参数的变换进行离散化, 大家熟知, 将 Fourier 变换离散化后

即得按正交的三角函数系展开的 Fourier 级数. 但是对于窗口 Fourier 变换可以证明不论如何离散化均不可能使它成为一组正交基. 由于 Garbor 变换的种种缺陷使它未能得到广泛应用与进一步发展.

我们要介绍的小波(Wavelet)变换继承和发展了 Garbor 变换的局部化思想, 它除了窗口大小随频率增高而缩小以外还存在着离散的正交基等优良的性质. 小波的原始概念最早是法国的地质学家 J.Morlet 和 A.Grossman<sup>(2)(3)</sup> 在 70 年代分析处理地质数据时引进的, 以后又经过 Y.Meyer<sup>(4)</sup>, S.Mallat<sup>(5)</sup> 与 I.Daubechies<sup>(6)</sup> 等数学家的一系列工作, 小波变换已经有了比较系统的理论与计算方法, 并已在许多领域中发挥其作用. 美国数学会会刊“Notice of Amer. Math. Soc.”1990 年 10 月刊登了“Renewing of Mathematics in America”一文谈到了美国 90 年代数学发展的主要方向, 共列出 27 项数学发展项目, 其中小波分析是第 4 项, 可见这一理论的重要性.

## 二、小波变换与正交小波基

我们称满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty \quad (5)$$

的平方可积函数  $\psi(t)$  (这里  $\psi(\omega)$  是  $\psi(t)$  的 Fourier 变换) 为一个基本小波或小波母函数. 令

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (6)$$

称为由母函数  $\psi$  生成的依赖于参数  $a, b$  的连续小波. 对于平方可积函数  $f(t)$ , 定义其小波变换为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (7)$$

由上面的定义可见连续小波  $\psi_{a,b}(t)$  之作用与 Garbor 变换中的函数  $g(t-\tau)e^{-i\omega t}$  相类似, 参数  $b$  与参数  $\tau$  都起着平移的作用. 但有本质不同的是参数  $a$  与  $\omega$  中, 后者的变化不改变“窗口”的大小与形状, 而前者的变化不仅改变连续小波的频谱结构, 而且同时也改变其窗口的大小与形状. 由 Fourier 变换的基本关系式: 若  $f_1(t) = f(at)$ , 则  $\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ;

可见, 随着  $|a|$  的减小  $\psi_{a,b}(t)$  的频谱愈集中于高频部分, 而其支集(所谓一个函数的支集  $\text{supp } f$  也就是其函数值不等于零的点的闭包:  $\text{supp } f = \{t | f(t) \neq 0\}$ )则随  $|a|$  的减小而愈狭小(为了讨论方便起见, 我们假定  $\psi(t)$  在有限区间外恒等于 0), 这就满足了信号频率愈高则其时间(或空间)分辨率亦愈高的要求.

对于小波变换我们有以下的逆变换公式

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} \quad (8)$$

这里

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega$$

与 Fourier 变换类似, 连续小波变换主要用于理论分析论证, 在实际问题及数值计算中更重要的是其离散形式, 也就是取定两个正数  $a_0$  与  $b_0$ , 定义

$$\psi_{n,m}(t) = a_0^{\frac{n}{2}} \psi(a_0^n t - mb_0) \quad (9)$$

$$n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (\text{以后简记为 } n, m \in \mathbb{Z})$$

今后我们只讨论  $a_0 = 2, b_0 = 1$  的最简单而重要的特殊情况, 即

$$\psi_{n,m}(t) = 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n t - m) \quad (10)$$

现在重要的问题是: 能否构造适当的母函数  $\psi$  使函数系  $\{\psi_{n,m}(t)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  成为平方可积函数空间  $L^2(-\infty, \infty)$  中的正交基, 亦就是满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,m}(t) \overline{\psi_{n',m'}(t)} dt = \delta_{nn', mm'} = \begin{cases} 1, & n = n', m = m' \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases} \quad (11)$$

如果这样的  $\psi$  存在的话, 那么对  $\forall f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$  就有展开式

$$f(t) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} C_f(n, m) \psi_{n,m}(t) \quad (12)$$

这里  $C_f(n, m) = \langle f, \psi_{n,m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{n,m}(t)} dt$  这样的展开式当然是非常有用的. 在 30

年代数学家 A. Haar 提出的 Haar 系确实满足上述要求, 所谓 Haar 系是由母函数  $h(t) =$

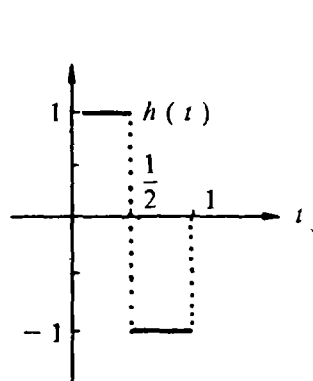


图 2

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{生成的(见图 2), 也就是说,}$$

$$h_{n,m}(t) = 2^{\frac{n}{2}} h(2^n t - m), \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

构成  $L^2(-\infty, \infty)$  上的完备标准正交系. 然而 Haar 系的函数是不连续的, 因此, 用处不大. P. Lemarie 与 Y. Meyer 在 1986 年<sup>[7]</sup>第一次作出了一个由光滑速降函数构成的母函数所生成的正交小波基. 1988 年 S. Mallat<sup>[5]</sup>又提出了构造正交小波基的多分辨率分析方法(Multiresolution Analysis), 这是目前最重要的方法, 利用它可以作出很多具有不同性质的母函数及与之

相应的正交小波基. 但是对一个母函数, 我们除了希望它能生成一组正交基以外, 在应用中我们还希望它具有紧支集、充分光滑、对称、频谱衰减较快等种种性质, 而且这两方面是有矛盾的. 因此, 在有些场合下我们宁可放弃正交性的要求而希望母函数具有紧支集、对称、充分光滑、频谱衰减较快等较好的性质, 甚至更进一步, 可以放弃  $\{\psi_{n,m}(t)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2(-\infty, \infty)$  中一组基的要求而只要求它构成一组标架(Frame)即可. 采用标架的好处除了对母函数  $\psi$  的限制可以较少以外, 当观测所得之分量  $\langle f, \psi_{n,m} \rangle$  不太精确时, 仍可以比较精确地回复到  $f$  本身. 这里所谓标架是指  $L^2(-\infty, \infty)$  空间中的一族函数  $\{\varphi_k, k \in I\}$  ( $I$  为一无限指标集), 对  $\forall f \in L^2(-\infty, \infty)$  存在正数  $A, B$  使

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in I} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (13)$$

有关这方面的工作可以参看[8].

### 三、小波理论的应用

关于小波理论的应用目前方兴未艾, 我们不可能在这里作较全面地介绍, 只能举一些比较成功的例子来说明其作用, 而它的许多潜在功能还有待进一步探索和发展.

#### 3.1 图象数据处理(数据压缩, 去噪, 拼接等)

我们知道对图象进行计算机处理首先需要进行抽样与量化手续, 但是即使是一张静止的黑白图象其信息量也是非常大的. 例如要得到一张较清晰的图象可将一幅平面图象分解为  $512 \times 512 = 2^{18}$  个象原, 而每一象原的灰度分成  $0-255$  级 ( $=2^8$  级), 也就是说每一张黑白图象需用  $2^{18} \times 8 = 2^{21}$  个二进位信号, 而对于活动的图象(如黑白电视)则每秒至少要传送 20 帧以上这样的图象. 要传送处理如此巨大数量的数据是目前的通讯硬件设备和计算机难以承受的. 因此, 很迫切地要求在基本保持图象的清晰程度的前提下大大压缩数据量. 基于 Fourier 变换的一些压缩图象数据方法, 由于缺乏局部性, 其效果不是很理想的, 以人象图片为例, 背景部分灰度变化平缓所含信息量很少, 可以大大压缩而不致影响图象质量, 而在人的面部则信息丰富, 只能作少量压缩, 小波变换可以充分发挥其具有局部性的特点, 在基本上保持图象清晰程度的前提下大大压缩数据, 其压缩比可达数十倍甚至上百倍, 这方面的工作可参看<sup>[5-7]</sup>. 压缩数据的另一种方法叫做奇零点(Zero-Crossing)方法, 它的基本原理是这样的: 设选取小波母函数  $\psi(x) = d^2\theta(x)/dx^2$ , 这里  $\theta_s(x)$  是充分光滑的函数, 令  $\theta_s(x) = \frac{1}{s}\theta(x/s)$ , 因函数  $f(x)$  之小波变换

$$W_s f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi_s(x-u) du = f * \psi_s(x)$$

我们有

$$W_s f(x) = f * \left( S^2 \frac{d^2 \theta_s}{dx^2} \right)(x) = S^2 \frac{d^2}{dx^2} (f * \theta_s)(x) \quad (14)$$

可见,  $W_s f(x)$  与用  $\theta_s$  光滑化后的  $f(x)$  之二阶导数成正比, 因此  $W_s f(x)$  之零点与  $f * \theta_s(x)$

之拐点相对应. 由此可见, 当取  $\theta(x)$  为 Gauss 函数时, 小波变换之零点的检测等价于边缘检测算子<sup>[11]</sup>. 可以证明, 对频谱有限函数, 当它与其 Hilbert 变换没有公共奇零点时, 此函数可由其奇零点唯一确定, 利用这一原理结合小波变换即可达到压缩数据之目的<sup>[10]</sup>.

图象处理中的另一个问题是“去噪”, 例如希望将泛黄的彩照恢复其鲜艳的色彩, 或者希望除去图片上的墨迹污斑这类问题采用小波变换的方法均可得到比较满意的结果.

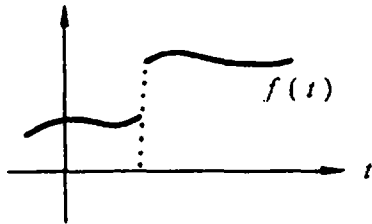


图 3

图象的拼接也是图象处理中的一个重要问题. 例如利用人造卫星拍摄地形图或云图, 通常只能分区拍摄局部照片, 然后拼接成一个整体图象. 为了使拼接后的图象不出现明显的边界, 拼接部分的宽度应与拼接部分图象的频谱相适应, 对于频带较宽的图象这是难以做到的, 但利用小波变换可将图象用正交小波基展开, 然后对不同的频段采用相适应的不同拼接宽度进行拼接, 然后将不同频段拼接后的

的数据合成拼接的图象, 这样做法的效果是令人满意的.

### 3.2 奇性(边缘)检测

奇性或边缘检测的任务是要找出信号突变部分的位置, 这些突变点往往是间断点或尖点等. 设  $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$  在  $t = t_0$  处有突变点, 我们讨论在数学上可用 Lipschitz 指数  $\alpha$  来刻划的突变点为例, 即  $f(t)$  在点  $t_0$  处有 Lipschitz 指数  $\alpha$ , 如

$$|f(t) - f(t_0)| = O(|t - t_0|^\alpha), \quad \text{当 } |t - t_0| < \delta$$

若函数  $f(t)$  在  $t_0$  处有一阶梯形间断(见图 3), 则  $f(t)$  在  $t = t_0$  处有 Lipschitz 指数  $\alpha = 0$ . 小波变换的重要特点之一是它可以把函数的 Lipschitz 指数转移到它的小波变换中去. 对基本小波母函数  $\psi(t)$ , 令

$$\psi_s(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t}{s}\right), \quad \psi_{2^k}(t) = 2^{-k} \psi(2^{-k}t)$$

设  $f(t)$  在点  $t_0$  处有 Lipschitz 指数  $\alpha$ , 且小波母函数  $\psi$  满足

$$\int_{|t| \leq 1} |t|^\alpha \psi(t) dt < +\infty$$

根据定义:  $W_s f(t_0) = f * \psi_s(t_0) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - t_0}{s}\right) dt$ , 则可证明

$|W_s f(t_0)| = O(s^\alpha)$ , 所以由小波变换的数值可以大致看出奇性的程度( $\alpha$  的大小). 令  $a_j = W_{2^j} f(t_0)$ , 利用极小化函数

$$E(\alpha, k) = \sum_j (a_j - k 2^{\alpha j})^2$$

则可具体定出  $k$  与  $\alpha$ . 当然, 在实际问题中, 由于传输和检测系统均具有带通滤波器的特

征, 所以信号的奇性往往被模糊化. 因此, 在采用小波变换检测奇性时还需要作更细致的进一步处理, 这里就不详细介绍了.

### 3.3 非卷积算子及线性变系数微分算子的拟对角化

熟知经典的 Fourier 变换是研究和处理卷积算子与常系数线性微分算子的最有效的工具. 这不是偶然的, 以有限维( $n$  维)线性空间  $X$  中的线性算子  $A$  为例: 若在  $X$  中能取到算子  $A$  的  $n$  个线性无关的特征向量,  $e_k: Ae_k = \lambda_k e_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 在  $X$  中取  $\{e_k\}_{k=1,2,\dots,n}$  为基,  $\forall x \in X$ , 令  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , 则  $y = Ax = A(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$  写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

也就是说取了这组基; 算子  $A$  就表示成一个对角矩阵, 这样在对算子  $A$  进行理论分析及数值计算时均大大简化. Fourier 变换的本质正是将函数按函数系  $\{e^{i\omega t}\}$  展开, 而  $\{e^{i\omega t}\}$  恰是卷积算子或线性常系数微分算子的特征函数. 因此, 通过 Fourier 变换可以将卷积或线性常系数微分运算化为简单的乘法运算(对角化), 再结合快速 Fourier 变换与逆变换, Fourier 分析就成为处理这类问题最有效的方法. 但是对非卷积型算子及变系数线性微分算子 Fourier 变换这一方法就无效了, 而许多实际问题中却经常会遇到这类算子(如非均匀背景场中的波传播及反演等问题). 小波变换为这类问题提供了一个非常有希望的新方法. G.Beylkin 等<sup>[12]</sup> 证明了对相对广泛的一类线性算子(包括经典的 Calderon-Zygmund 奇异积分算子, 拟微分算子等)利用小波变换可以将它们拟对角化(即在算子的矩阵表示中其非对角线元素随其与对角线的距离增加而迅速趋于 0), 再结合相应的快速小波变换算法就构成了高效的快速算法. 这一方面的进一步发展与完善将会给小波理论的应用开辟广阔而有希望的前景.

### 3.4 抽样定理

经典的 Shannon 取样定理一直是数字通讯系统确定取样间隔的依据. 根据这一定理, 当信号  $f(t)$  是  $B$  频谱有限的, 即当  $|\omega| \geq B$  时,  $|\hat{f}(\omega)| = 0$ , 则当取样间隔  $\Delta T \leq \frac{\pi}{B}$  时, 从信号的离散取样值  $f(n\Delta T), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 可以精确地恢复原来的信号  $f(t)$ . 这里对  $f(t)$  频谱有限的要求在通讯系统是很自然而且总是能满足的. 但是在地球物理等其它领域中, 由于所涉及的函数其支集大多是紧的(即在有限区间外恒等于 0). 由 Fourier 分析的理论可知这种函数不可能是频谱有限的, 因而在这种情况下如仍采用 Shannon 取样定理的插值公式必然会带有难以定量估计的误差. 所以非频谱有限的情况下寻求相应的取样插值定理是非常有意义的研究课题. G.G.Walter<sup>[13]</sup> 利用正交小波基的理论建立了一套新的取样插值定理: 对于取定的小波母函数  $\varphi(t)$  及由  $\varphi(t)$  的一切整数平移  $\varphi(t-n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 所生成的基本  $V_0$ , 当满足下列两个条件时

$$(a) \quad \varphi(t) = O(|t|^{-1-\varepsilon}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0$$

$$(b) \quad \hat{\varphi}^*(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) e^{-i\omega n} \neq 0, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (15)$$

则可构造函数  $S(t) \in V_0$ , 这里  $S(t)$  由其 Fourier 变换确定

$$\hat{S}(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}^*(\omega)}$$

由  $S(t)$  即可构成取样插值定理:  $\forall f(t) \in V_0$ , 有

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) S(t - n) \quad (16)$$

由于条件(15)的要求并不太苛刻, 大部分小波母函数均能满足. 因此, 小波理论为寻求新的取样插值定理开创了广阔的前途, 其关键在于根据具体实际问题的特点选取合适的小波母函数  $\varphi(t)$  及相应的基本空间  $V_0$ .

### 参 考 文 献

- (1) Theory of Communication, *J. Inst. Elect. Eng.* (London), 1946, 93(III): 429-457.
- (2) J.Morlet, Seismic Tomorrow: Interferometry and quantum mechanics, Presented at the 45th Annual International SEG Meeting, October 15, in Denver.
- (3) A.Grossman and J.Morlet, Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM, J. Math. Anal.* 1984, 15: 725-736.
- (4) Y.Meyer, Ondelettes et operateurs I, II, III, Hermann ed, Paris, 1990.
- (5) S.Mallat, Multiresolution representation and wavelets, Ph.D.dissertation, Pennsylvania Univ., 1988.
- (6) I.Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 1999, XL I: 909-986.
- (7) P.Lemarie and Y.Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1986, 2: 1-18.
- (8) I.Daubechies, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. on Information Theory*, 1990, 36(5).
- (9) R.DeVore, B.Jawerth and V.Popov, Compression of wavelet decomposition, preprint.
- (10) S.Mallat, Zero-Crossing of wavelet transform, *IEEE Trans. on information theory*, 1991, 37(4).
- (11) D. Marr and E. Hildreth, Theory of edge detection, *Proc. Roy. Soc. Lon.*, 1980, 207: 187-127.
- (12) G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 1991, XL I V: 141-183.
- (13) G. G. Walter, Sampling theorems and wavelets, preprint.



# WAVELET TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS

Li Shixiong

(Department of Mathematics, Anhui Univ., He Fei 230039)

## Abstract

Wavelet Transform is a new mathematical branch and developing rapidly in recent years. It is especially effective to the analysis of local properties of signals and has important applications to image data compression, detection of singularities, simplification of non-convolution operators and sampling theorem. It has good prospects in diverse subjects such as seismic prospecting, atmospheric turbulence, digital image processing and artificial synthesis of human voice. In this paper we introduce the fundamental concepts of wavelet transform and orthogonal bases of wavelets. Some of its important applications are briefly discussed.

**Key Words** Wavelet transform, Orthogonal bases of wavelets, Non-convolution operator, Sampling, Image data compression.

---

## 中国地区 27 天周期电磁响应函数

**【摘要】** 用“Sompi”谱分析方法对中国 14 个地磁台的日均值进行了分析, 求出对应于 27 天周期响应的  $P_1^0$  幅度和位相. 对这一周期求出理想电导替代层的视深度  $h^*$  和电导率  $\sigma$  的等值线图. 结果表明  $\sigma$  和  $h^*$  的横向变化在中国中北部地区不是很大, 平均  $h^*$  为 950 km, 平均  $\sigma$  为 1.5 s/m. 这些结果与 ScHultz 和 Larsen(1987)用中国邻近地区的地磁台 Irkutsk, Memambetsu, Kakioka 和 Kanoya 作出的结果基本一致. 用中国南部地区的观测结果我们得到低  $\sigma$  和高  $h^*$  值. 这种情况的原因究竟是因为中国南部地区受到高电导率的海洋的影响还是因为赤道电流的影响, 或者是因为地磁 Z 分量数据中信噪比很低的影响还不很清楚.

译自: «J. Geomag. Geoelectr», Vol.43, No.12, 1991.

P.F.Chen 等著, 李卫东 译, 徐文耀 校.