EYP1113 - Probabilidad y Estadística

Laboratorio 09

Pilar Tello Hernández
pitello@uc.cl

Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2021

Múltiples Variables Aleatorias

Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Para el par de variables aleatorias X e Y se define la función de distribución de probabilidad acumulada como:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$$

La cual satisface la axiomática fundamental de probabilidades:

- $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$
- $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x)$
- $F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$

Múltiples Variables Aleatorias

Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Si las variables aleatorias X e Y son discretas, la función de distribución de probabilidad conjunta es

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

siendo su función de distribución de probabilidad acumulada igual a

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j),$$

con $(x_i, y_j) \in \Theta_{X,Y}$.

Múltiples Variables Aleatorias

Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Ahora, si las variables aleatorias X e Y son continuas, la función de densidad de probabilidad conjunta se define como:

$$f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$$

Entonces,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du.$$

Si las derivadas parciales existen, entonces

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Para variables aleatorias discretas X e Y, la probabilidad de $(X = x)$ puede depender de los valores que puede tomar Y (viceversa).

Con base a lo visto en probabilidades, se define la función de distribución de probabilidad condicional como:

$$p_{X|Y=y}(x) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0$$

De manera similar, se tiene que

$$p_{Y|X=x}(y) = P(Y = y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}, \quad p_X(X) > 0$$

Múltiples Variables Aleatorias

Distribuciones Marginales y Condicionales

La distribución marginal de una variable aleatoria se puede obtener aplicando el teorema de probabilidades totales.

Para determinar la distribución marginal de X, $p_X(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X|Y=y}(x) \cdot p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X,Y}(x, y) \end{aligned}$$

De la misma forma se tiene que

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{X,Y}(x, y)$$

Múltiples Variables Aleatorias

Ejemplos

Considere un grupo de 20 niños, según su edad y género de acuerdo a la tabla siguiente:

	Edad					
Sexo	9	10	11	12	13	14
0	1	0	4	2	1	1
1	1	3	1	1	3	2

Donde Sexo $=1$ representa a una mujer y Sexo $=0$ representa a un hombre.

1. Suponga que el experimento consiste en seleccionar un niño al azar. Encontrar la función de probabilidad conjunta de (X, Y) donde X es una variable aleatoria que registra el sexo del niño e Y es una variable aleatoria que registra la edad del niño.
2. Sea B el evento definido como: "la edad es un número par y es mujer". Calcule $P(B)$.
3. Encontrar la función de probabilidad de la variable aleatoria X.
4. Encontrar la función de probabilidad de la variable aleatoria Y.
5. Encontrar la función de probabilidad condicional de $Y \mid X$.
6. ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?
7. Supongamos que el precio del uniforme de una niño depende de su género. Si es hombre, el precio del uniforme es $2500 + 120$Edad y si es mujer, el precio es $3000 + 150$Edad. Calcular el costo esperado de un uniforme.

Múltiples Variables Aleatorias

Ejemplos

La cantidad de huevos que pone un insecto tiene distribución Poisson de parámetro λ. La probabilidad que tiene cada huevo de sobrevivir es p. Asuma que la supervivencia de los distintos huevos son independientes.
Sea:
Y : Cantidad de huevos que pone un insecto.
X : Cantidad de huevos que sobrevive del insecto.
Luego:

$$Y \sim Poisson(\lambda)$$

$$X \mid Y = y \sim Binomial(y, p)$$

Obtenga la función de probabilidad conjunta utilizando $p = 0{,}6$ y $\lambda = 15$. Grafique su función.

Múltiples Variables Aleatorias

Ejemplos

Grafique la función de densidad conjunta de la variable aleatoria (X, Y) dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}, \qquad x, y, \alpha, \beta > 0$$

Funciones de Variables Aleatorias

Ejemplos

- Sea $X \sim Normal(\mu, \sigma)$, observe la distribución de $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- Sea $X \sim Log - Normal(\lambda, \zeta)$, observe la distribución de $Y = \ln X$
- Sean $X \sim Gamma(\alpha, \nu)$ e $Y \sim Gamma(\beta, \nu)$, observe la distribución de $Z = X + Y$