Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Γεώργιος Γκοτζιάς
03119047

Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Άσκηση 1

1. Αρχικά, ισχύει $|x_{t+1} - x^*| \leq |y_{t+1} - x^*|, \forall t \in \{0, 1, ..., T-1\}$, (1), γιατί αν $y_{t+1} \in S$, τότε y_{t+1}, x_{t+1} ταυτίζονται, ενώ διαφορετικά επειδή x_{t+1} είναι η προβολή του y_{t+1} στο S, επειδή το $x^* \in S$, τότε τα x^*, y_{t+1} βρίσκονται στα δύο διαφορετικά υπερεπίπεδα που ορίζονται από το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο για το S στο x_{t+1}, οπότε η γωνία μεταξύ των 3 σημείων και κορυφή το x_{t+1} θα είναι αμβλεία, οπότε προκύπτει το παραπάνω.(Για να μην υπάρχει πρόβλημα για τη γενίκευση θεωρούμε ότι y_1, x_1 ταυτίζονται)
Έχουμε, για το σημείο $x^* \in S$, για το οποίο ισχύει $min_{x \in S} \sum_{t=1}^{T} f_t(x)$:
$||y_{t+1} - x^*||^2 = ||x_t - \eta \nabla f_t(x_t) - x^*||^2 = ||x_t - x^*||^2 - 2\eta \nabla f_t(x_t)(x_t - x^*) + \eta^2 ||\nabla f_t(x_t)||^2$
Οπότε, προκύπτει:
$\nabla f_t(x_t)(x_t - x^*) = \frac{1}{2\eta}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2$, (2).
Ακόμη, είναι:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} \nabla f_t(x_t)(x_t - x^*)$, γιατί το S είναι κυρτό.
Μέσω της σχέσης (2) προκύπτει:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{1}{2\eta}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2)$
Όμως, από τη σχέση (1) παίρνουμε ότι:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{1}{2\eta}(||x_t - x^*||^2 - ||x_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2) \leq \frac{||x_1 - x^*||^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} \sum_{t=1}^{T} ||\nabla f_t(x_t)||^2$
Επίσης, έχουμε $||x_1 - x^*||^2 \leq B$, $||\nabla f_t(x_t)||^2 \leq G^2, \forall t \in \{1, 2, ..., T\}$. Άρα, προκύπτει:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \frac{B^2}{2\eta} + \frac{\eta T G^2}{2} = \frac{B^2}{2\frac{B}{G\sqrt{T}}} + \frac{\frac{B}{G\sqrt{T}} T G^2}{2} = BG\sqrt{T}$

2. Εξακολουθεί να ισχύει η σχέση $|x_{t+1} - x^*| \leq |y_{t+1} - x^*|, \forall t \in \{0, 1, ..., T-1\}$, (1), για τους ίδιους λόγους, ενώ η σχέση 2 γίνεται $\nabla f_t(x_t)(x_t - x^*) = \frac{1}{2\eta_t}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2$, (2), αφού δεν χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της σχέσης στο ερώτημα ένα ότι το η ήταν σταθερό.
Τώρα, έχουμε:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} \nabla f_t(x_t)(x_t - x^*)$, γιατί το S είναι κυρτό.
Από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{1}{2\eta_t}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2)$
Θεωρούμε $\eta_t = \frac{B}{G\sqrt{t}}$, και χρησιμοποιούμε ότι $||\nabla f_t(x_t)||^2 \leq G^2, \forall t \in \{1, 2, ..., T\}$, οπότε προκύπτει:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{1}{2\frac{B}{G\sqrt{t}}}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\frac{B}{G\sqrt{t}}}{2} G^2) = \sum_{t=1}^{T} (\frac{G\sqrt{t}}{2B}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{B}{2G\sqrt{t}} G^2)$
Ενώ από τη σχέση (1) και από τη σχέση $\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{t}} \leq 2\sqrt{T}$ παίρνουμε ότι: $\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{G\sqrt{t}}{2B}(||x_t - x^*||^2 - ||x_{t+1} - x^*||^2)) + \frac{2B\sqrt{T}}{2} G$
Όμως, ισχύει $\sum_{t=1}^{T} \frac{G\sqrt{t}}{2B}||y_{t+1} - x^*||^2 \geq \sum_{t=1}^{T} \frac{G\sqrt{t+1}}{2B}||x_{t+1} - x^*||^2$, οπότε:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \sum_{t=1}^{T} (\frac{G\sqrt{t}}{2B}||x_t - x^*||^2 - \frac{G\sqrt{t+1}}{2B}||x_{t+1} - x^*||^2) +$

$BG\sqrt{T} = \frac{G}{2B}||x_1 - x^*||^2 - \frac{G\sqrt{T+1}}{2B}||x_{T+1} - x^*||^2 + BG\sqrt{T}$
Όμως, ισχύουν $||x_t - x^*||^2 \leq B^2$ και $\frac{G\sqrt{T+1}}{2B}||x_{T+1} - x^*||^2 \geq 0$, άρα:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) \leq \frac{G}{2B}B^2 + BG\sqrt{T} = \frac{GB}{2} + BG\sqrt{T} = BG \cdot (\frac{1}{2} + \sqrt{T})$
Που σημαίνει ότι το regret είναι πράγματι $O(BG\sqrt{T})$.

3. Ισχύουν, όπως και προηγουμένως οι σχέσεις $|x_{t+1} - x^*| \leq |y_{t+1} - x^*|, \forall t \in \{0, 1, ..., T-1\}$, (1), και $\nabla f_t(x_t)(x_t - x^*) = \frac{1}{2\eta_t}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2$, (2).
Επιλέγουμε το $\eta_t = \frac{1}{\alpha t}$, οπότε έχουμε:
$\sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(x^*) = \sum_{t=1}^{T}(f_t(x_t) - f_t(x^*))$
$\leq \sum_{t=1}^{T}(\nabla f_t(x_t)(x_t - x^*) - \frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2)$
$= \sum_{t=1}^{T}(\frac{1}{2\eta_t}(||x_t - x^*||^2 - ||y_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2 - \frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2)$
$\leq \sum_{t=1}^{T}(\frac{1}{2\eta_t}(||x_t - x^*||^2 - ||x_{t+1} - x^*||^2) + \frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2 - \frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2)$
$= \sum_{t=1}^{T}(\frac{1}{2\eta_t}||x_t - x^*||^2) - \sum_{t=1}^{T}(\frac{1}{2\eta_t}||x_{t+1} - x^*||^2) + \sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_t}{2}||\nabla f_t(x_t)||^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2$
$= \sum_{t=1}^{T}(\frac{\alpha t}{2}||x_t - x^*||^2) - \sum_{t=1}^{T}(\frac{\alpha t}{2}||x_{t+1} - x^*||^2) + \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2\alpha t}||\nabla f_t(x_t)||^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2$
$\leq \sum_{t=1}^{T}(\frac{\alpha t}{2}||x_t - x^*||^2) - \sum_{t=1}^{T}(\frac{\alpha(t+1)}{2}||x_{t+1} - x^*||^2) + \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2\alpha t}||\nabla f_t(x_t)||^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha}{2}||x_t - x^*||^2$
$\leq \frac{\alpha}{2}||x_1 - x^*||^2 + \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2\alpha t}G^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{\alpha}{2}B^2$
$\leq \frac{\alpha}{2}B^2 + \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2\alpha t}G^2 - \frac{\alpha}{2}B^2$
$\leq \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2\alpha t}G^2$
$\leq \frac{G^2}{2\alpha}(1 + lnT)$
Δηλαδή ισχύει ότι έχουμε regret $O(\frac{G^2 \cdot lnT}{a})$.

Άσκηση 2

(α) Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:
$min(z)$
$z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}x_i \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
$x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$
Το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα λύνει το πρόβλημα, γιατί η μεταβλητή z είναι μεγαλύτερη από κάθε $(A \cdot x)_j$, λόγω του περιορισμού $z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}x_i \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$, ενώ λόγω της συνάρτησης βελτιστοποίησης θα είναι ακριβώς $z = max_{j \in [m]}(A \cdot x)_j$.
(β) Έστω το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:
$max(w)$
$w - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}y_j \leq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$

$y_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, ..., m\}$
Το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα λύνει το πρόβλημα, γιατί η μεταβλητή w είναι μεγαλύτερη από κάθε $(A^T \cdot y)_i$, λόγω του περιορισμού $w - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j \leq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, ενώ λόγω της συνάρτησης βελτιστοποίησης θα είναι ακριβώς $w = min_{i \in [n]}(A^T \cdot y)_i$.
(γ) Θα υπολογίσουμε το δυϊκό του προγράμματος για το ερώτημα: Πολλαπλασιάζουμε κάθε μία ανισότητα $z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ με το αντίστοιχο y_j και εισάγουμε τον περιορισμό $y_j \geq 0$, ώστε να μην αλλάζει η φορά της ανισότητας, οπότε παίρνουμε $zy_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i j_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ και πολλαπλασιάζουμε τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ με w, οπότε παίρνουμε $\sum_{i=1}^{n} x_i w = w$.
Προσθέτοντας τις m ανισότητες κατά μέλη, παίρνουμε $\sum_{j=1}^{m}(z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i) \geq 0$, ενώ προσθέτοντας και την τελευταία ισότητα παίρνουμε:
$\sum_{j=1}^{m}(z - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i) + \sum_{i=1}^{n} w x_i \geq w$, ή
$\sum_{j=1}^{m} y_j z - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i y_j + \sum_{i=1}^{n} w x_i \geq w$, ή
$\sum_{j=1}^{m} y_j z + \sum_{i=1}^{n}(w - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j) x_i \geq w$
Θέλουμε τους περιορισμούς : $w - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j \leq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
Ώστε να έχουμε:
$\sum_{j=1}^{m} y_j z \geq \sum_{j=1}^{m} y_j z + \sum_{i=1}^{n}(w - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j) x_i$
Οπότε θα έχουμε την ανισότητα:
$\sum_{j=1}^{m} y_j z \geq w$
Παίρνουμε και τον περιορισμό:
$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$
Άρα, η ανισότητα μας γίνεται:
$z \geq w$
Οπότε για το βέλτιστο κάτω φράγμα της λύσης, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το w, οπότε το δυϊκό πρόγραμμα είναι το εξής:
$max(w)$
$w - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j \leq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$
$y_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, ..., m\}$
Το οποίο είναι το γραμμικό πρόγραμμα του ερωτήματος (β).
Οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή z φράσσεται κάτω από τα αθροίσματα, τα οποία είναι φραγμένα, οπότε θα υπάρχει ελάχιστο και αντίστοιχα η μεταβλητή w είναι άνω φραγμένη, οπότε και τα 2 γραμμικά προγράμματα είναι επιλύσιμα και ισχύει ότι $P = D$.
(δ) Επειδή $e_j \in \Delta^m, \forall j \in [m]$, όπου e_j το διάνυσμα με την τιμή 1 στη θέση j και 0 στις υπόλοιπες, ισχύει ότι $max_{y \in \Delta^m} y^T \cdot A \cdot x \geq max_{j \in [m]}(Ax)_j$.
Επίσης, ισχύει ότι:
$y^T \cdot A \cdot x = y_1(Ax)_1 + y_2(Ax)_2 + ... + y_j(Ax)_j + ... + y_m(Ax)_m \leq y_1 max_{k \in [m]}(Ax)_1 k + y_2 max_{k \in [m]}(Ax)_1 k + ... + y_j max_{k \in [m]}(Ax)_1 k + ... + y_m max_{k \in [m]}(Ax)_1 k = max_{k \in [m]}(Ax)_1 k$, αφού $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$.
Οπότε, $max_{y \in \Delta^m} y^T \cdot A \cdot x \leq max_{j \in [m]}(Ax)_j$.
Επομένως, ισχύει ότι $max_{y \in \Delta^m} y^T \cdot A \cdot x = max_{j \in [m]}(Ax)_j$.
Ομοίως, αποδεικνύται ότι ισχύει $min_{i \in [n]}(A^T x)_i = min_{x \in \Delta^n} x^T A^T y$.
Από τη δυϊκότητα των 2 προβλημάτων, καθώς και ότι είναι και τα 2 επιλύσιμα

προκύπτει το Minimax Θεώτημα του von Neumann.
(ε) Από τις συνθήκες complementary slackness προκύπτει ότι αν ο αντίστοιχος περιορισμός δεν ικανοποιείται ακριβώς, δηλαδή η αντίστοιχη γραμμή του γινομένου δεν είναι η μέγιστη για τον παίκτη min, τότε ο παίκτης δεν θα παίζει ποτέ αυτή τη γραμμή. Αντίστοιχα, ο παίκτης max θα παίζει μόνο τις κινήσεις που αντιστοιχούν στις ελάχιστες τιμές, ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος, οπότε καταλήγουμε σε ισορροπία Nash.

Άσκηση 4

Έστω $x_i = 1$, αν ο i-οστός πολίτης τάσσεται υπέρ και $x_i = 0$ διαφορετικά. Έχουμε ότι $p^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$, όπου $E[p^*] = p$, αφού είναι $E[x_i] = p$, αφού επιλέγουμε τυχαία και τα x_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Από τα προηγούμενα, ισχύει το Hoeffding bound:
$P[|p^* - p|] \leq \varepsilon p] > 1 - 2e^{-2N\varepsilon^2 p^2}$
Άρα, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει:
$\delta \geq 2e^{-2N\varepsilon^2 p^2}$, ή
$ln(\frac{\delta}{2}) \geq -2N\varepsilon^2 p^2$, ή
$ln(\frac{2}{\delta}) \leq 2N\varepsilon^2 p^2$, ή
$N \geq \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2 p^2}$,
Επομένως, $N_{min} = \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2 p^2}$.
Αν γνωρίζουμε ότι $p \in [0.1, 0.7]$, τότε για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$ έχουμε:
$0.1 \leq p \leq 0.7$, ή
$0.01 \leq p^2 \leq 0.49$, ή
$0.000004 \leq \varepsilon^2 p^2 \leq 0.000196$, ή
$5102.04 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 p^2} \leq 142857.14$, ή
$9410.4 \leq \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2 p^2} \leq 263491.38$, ή
$9410.4 \leq N_{min} \leq 263491.38$
Άρα, για $N = 263492$, μπορούμε ανεξάρτητα του πληθυσμού να πάρουμε εκτίμηση με τη ζητούμενη ακρίβεια.
Αντίστοιχα, από Hoeffding bound παίρνουμε:
$P[|p'^* - p|] \leq \varepsilon] > 1 - 2e^{-2N'\varepsilon^2}$
Οπότε πρέπει να ισχύει:
$\delta \geq 2e^{-2N'\varepsilon^2}$, ή
$N' \geq \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2}$
Άρα $N'_{min} = \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2}$
Για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$ είναι:
$N' = \frac{ln(\frac{2}{\delta})}{2\varepsilon^2} = \frac{ln(40)}{0.0008} = 4611$

Άσκηση 5

(α) Έστω το παρακάτω ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα, όπου ορίζουμε μία μεταβλητή x_v, για κάθε κορυφή $v \in V$ και μία μεταβλητή y_{uv}, για κάθε ακμή $(u, v) \in E$. Όλες αυτές οι μεταβλητές παίρνουν τιμές στο $\{0, 1\}$.
Θεωρούμε τους παρακάτω περιορισμούς:
Για κάθε ακμή (u, v), $x_u + x_v + y_{uv} >= 1$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση κόστους $\beta \sum_{u \in V} x_u + \sum_{(u,v) \in E} y_{uv}$, την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε.
Το παραπάνω ακέραιο πρόγραμμα λύνει το δοθέν πρόγραμμα, γιατί αν θεωρήσουμε ότι αν $x_u = 1$, τότε $u \in C$ και αν $x_u = 0$, τότε $u \notin C$, τότε για κάθε ακμή $(u, v) \in E$, όπου $u \in C$ ή $v \in C$ θα είναι $y_{uv} = 0$, λόγω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους, ενώ διαφορετικά θα είναι $y_{uv} = 1$, λόγω του περιορισμού που ορίσαμε για κάθε ακμή. Άρα, η συνάρτηση κόστους που ορίσαμε παίρνει την τιμή $\beta|C| + |U(C)|$.
Το αντίστοιχο LP relaxation είναι να επιτραπεί σε όλες τις μεταβλητές να παίρνουν τιμές στο διάστημα $[0, 1]$.
Έστω ότι έχουμε τις μεταβλητές z_v, για κάθε κορυφή στο V και τις μεταβλητές w_{uv}, για κάθε ακμή στο E. Όλες οι μεταβλητές παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Πολλαπλασιάζοντας κάθε μεταβλητή με τον αντίστοιχο περιορισμό που αντιστοιχεί στον ίδιο κόμβο ή στην ίδια μεταβλητή παίρνουμε:
Για κάθε κορυφή $v \in V$, $-z_v \cdot x_v \geq -z_v$
Για κάθε ακμή $(u, v) \in E$, $w_{uv}x_u + w_{uv}x_v + w_{uv}y_{uv} \geq w_{uv}$ Αθροίζοντας όλους τους περιορισμούς παίρνουμε:
$\sum_{u \in v}(\sum_{v \in N(u)} w_{uv} - z_u)x_u + \sum_{(u,v)\in E} w_{uv}y_{uv} \geq -\sum_{u \in V} z_u + \sum_{(u,v)\in E} w_{uv}$,
όπου $N(u)$ η γειτονιά του κόμβου u.
Επομένως, το δυϊκό πρόγραμμα έχει τους περιορισμούς:
Για κάθε κορυφή $v \in V$, $\sum_{j \in N(u)} w_{uv} - z_u \leq \beta$
Για κάθε ακμή $(u, v) \in E$, $w_{uv} \leq 1$
Ενώ η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η $\sum_{u \in V}(-z_u) + \sum_{(u,v)\in E} w_{uv}$
Το (ακέραιο) δυϊκό πρόβλημα σε φυσική γλώσσα είναι να επιλέξουμε ένα σύνολο ακμών E', το οποίο είναι υποσύνολο του E και θέλουμε να επιλέξουμε το σύνολο ακμών το οποίο έχει το μέγιστο πληθάριθμο, αφού αφαιρέσουμε για κάθε κόμβο πόσες ακμές του E' πάνω από β προσπίπτουν στον κόμβο (αν σε έναν κόμβο προσπίπτουν λίγοτερες ακμές από β, τότε δεν αφαιρούμε αφού υπάρχει και ο περιορισμός $z_u \geq 0$.
(β) Από τη λύση του LP relaxation θεωρούμε ως C, το σύνολο των κόμβων $u \in V$ για τους οποίους ισχύει ότι $x_u \geq \frac{1}{3}$. Αυτό δίνει έναν 3-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα. Θεωρούμε ότι η βέλτιστη λύση του γραμμικού (relaxed) προγράμματος δίνει στη συνάρτηση κόστους την τιμή $OPT_{LP} = \beta \cdot OPT_{|X|} + OPT_{|Y|}$, όπου $OPT_{|X|}$ είναι το άθροισμα των μετβλητών x_u στη βέλτιστη λύση και $OPT_{|Y|}$ το άθροισμα των μεταβλητών y_{uv}.
Επειδή επιλέγουμε τους κόμβους με $x_u \geq \frac{1}{3}$, ισχύει ότι $|C| \leq 3 \cdot \sum_{u \in V} x_u = 3 \cdot OPT_{|X|}$, αφού για τους κόμβους που επιλέγουμε στο C η τιμή γίνεται το πολύ τριπλάσια, ενώ για τους υπόλοιπους δεν αυξάνεται (αντίθετα μειώνεται εκτός αν

είναι ήδη 0).
Αντίστοιχα, για ακμές που θα ανήκουν στο $U(C)$ ισχύει ότι $y_{uv} \geq 1 - x_u - x_v \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, αφού για να ανήκει η ακμή (u, v) στο $U(C)$ θα ισχύει $x_u \geq \frac{1}{3}$ ή $x_v \geq \frac{1}{3}$. Οπότε θα είναι $|U(C)| \leq 3 \cdot \sum_{(u,v)} y_{uv} = 3 \cdot OPT_{|Y|}$.
Επομένως, έχουμε ότι:
$SOL = \beta|C| + |U(C)| \leq 3\beta OPT_{|X|} + 3OPT_{|Y|} = 3OPT_{LP}$
Όμως, ισχύει ακόμη ότι $OPT_{LP} \leq OPT_{IP}$
Άρα, $\frac{SOL}{OPT_{IP}} \leq 3$

Άσκηση 6

[2,Άσκηση 5.3]
Για κάθε κόμβο, επίλεξε με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ αν θα ανήκει στο U ή όχι.
Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι $\frac{1}{2}$-προσεγγιστικός για το δοθέν πρόβλημα, γιατί αν θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή z_{uv}, για κάθε ακμή $(u, v) \in A$, η οποία παίρνει την τιμή 1, αν η ακμή (u, v) ανήκει στην τομή και την τιμή 0 διαφορετικά, τότε το μέγεθος της τομής δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $Z = \sum_{(u,v)\in A} w_{uv} z_{uv}$.
Για την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής έχουμε ότι:
$E[Z] = E[\sum_{(u,v)\in A} w_{uv} z_{uv}] = \sum_{(u,v)\in A} w_{uv} E[z_{uv}]$
Όμως, ισχύει ότι $E[z_{uv}] = \frac{1}{4}$, αφού η πιθανότητα να ανήκει η (u, v) στην τομή είναι να επιλεγεί ο κόμβος u στο U και να μην επιλεγεί ο v στο U, όμως κάθε ένα από τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και οι επιλογές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Άρα:
$E[Z] = \frac{\sum_{(u,v)\in A} w_{uv}}{4} \geq \frac{OPT}{4}$
Γιατί $\sum_{(u,v)\in A} w_{uv} \geq OPT$, αφού το άθροισμα όλων των βαρών είναι άνω φράγμα για τη μέγιστη τομή.
[2,Άσκηση 5.6]
(α) Το δοθέν πρόγραμμα λύνει το πρόβλημα MAXDICUT, γιατί αν θεωρήσουμε ότι μεταβλητές x_i παίρνουν την τιμή 1, αν ο αντίστοιχος κόμβος ανήκει στο U, ενώ παίρνουν την τιμή 0 διαφορετικά, τότε η μεταβλητή z_{ij} μπορεί να πάρει την τιμή 1, μόνο αν είναι $x_i = 1$ και $x_j = 0$, δηλαδή μόνο αν ανήκει στη τομή, οπότε η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των z_{iJ} μας δίνει τη μέγιστη κατευθυνόμενη τομή.
(β) Έχουμε ότι:
$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} z_{ij} \geq OPT$
Γιατί η λύση του γραμμικού προγράμματος είναι καλύτερη από αυτή του αντίστοιχου ακέραιου.
Για την αναμενόμενη τιμή της λύσης, θεωρώντας την τυχαία μεταβλητή z^*_{ij}, που παίρνει την τιμή 1, αν η ακμή $(i, j) \in A$ ανήκει στην τομή και την τιμή 0 διαφορετικά, έχουμε ότι:
$E[SOL] = E[\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} z^*_i j] = \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} E[z^*_{ij}] = \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} P[z^*_{ij} = 1] = \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} (\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2})(\frac{3}{4} - \frac{x_j}{2}) \geq \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} z_{ij} \geq \frac{1}{2} OPT$
Γιατί έχουμε από τους περιορισμούς ότι:

$z_{ij} \leq x_i$
$z_{ij} \leq 1 - x_j$
Αθροίζοντας τις 2 παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι:
$2z_{ij} \leq 1 + x_i - x_j$, ή
$z_{ij} \leq \frac{1+x_i-x_j}{2}, (1)$
Επισής, ισχύει ότι:
$x_i \geq 0$
$1 - x_j \geq 0$
Πολλαπλασιάζοντας τις 2 παραπάνω, μη αρνητικές, ανισότητες παίρνουμε ότι:
$x_i(1 - x_j) \geq 0$
Οπότε, ισχύει ότι:
$4x_i(1 - x_j) + 1 \geq 0$, ή
$4x_i - 4x_i x_j + 1 \geq 0$, ή
$6x_i - 2x_j - 4x_i x_j + 3 \geq 2x_i - 2x_j + 2$, ή
$2x_i(3 - 2x_j) + 3 - 2x_j \geq 2x_i - 2x_j + 2$, ή
$(2x_i + 1)(3 - 2x_j) \geq 2x_i - 2x_j + 2$, ή
$(\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2})(\frac{3}{4} - \frac{x_j}{2}) \geq \frac{1+x_i-x_j}{2}, (2)$
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι:
$z_{ij} \leq (\frac{1}{4} + \frac{x_i}{2})(\frac{3}{4} - \frac{x_j}{2})$
Η παραπάνω σχέση είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της αρχικής ανισότητας. Επομένως, έχουμε $\frac{1}{2}$- προσεγγιστικό αλγόριθμο.

Άσκηση 7

(α) Για να μεγιστοποιείται η ωφέλεια θα πρέπει ο u_1 να πάρει τα w_1 μεγαλύτερα κομμάτια, ο u_2 τα επόμενα w_2 μεγαλύτερα κομμάτια κ.ο.κ.
Επιλέγουμε για μηχανισμό, να υπολογίζεται για κάθε παίκτη i, η τιμή $v_i^* = \frac{b_i}{\sum_{k=1}^{w_i} a_k}$. Ταξινομούμε τους παίκτες σε φθίνουσα σειρά v^*. Ο παίκτης, έστω i με το μεγαλύτερο v_i^*, θα πάρει τα κομμάτια από a_1 έως a_{w_i}, ο παίκτης, έστω j, με τη δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά v_j^*, θα πάρει τα κομμάτια από a_{w_i+1} έως $a_{w_i+w_k}$, κοκ.
Ο κανόνας είναι μονότονος, άρα από Myerson' s Lemma υπάρχει κανόνας πληρωμής που να οδηγεί στη φιλαλήθεια ως Dominant Strategy. Ο κανόνας πληρωμής είναι ο παίκτης να πληρώνει την τιμή που θα πληρωνόταν αν πωλούνταν τα κομμάτια από το πρώτο που κερδίζει μέχρι το τελευταίο με κόστος ανά γραμμάριο την τιμή v_i^*, όπου i ο παίκτης που θα κέρδιζε το κομμάτι αν δεν συμμετείχε στη δημοπρασία ο παίκτης του οποίου υπολογίζουμε το κόστος πληρωμής μείον το συνολικό ποσό που θα πληρωνόταν για τα κομμάτια μετά το τελευταίο που παίρνει ο παίκτης υπολογίζοντας με τον ίδιο τρόπο το ποσό πληρωμής για τον παίκτη που κερδίζει στην κανονική ανάθεση.
Ο μηχανισμός οδηγεί στον να κάνει ο κάθε παίκτης προσφορά $b_i = v_i \cdot \sum_{k=1}^{w_i} a_k$.
Ο μηχανισμός είναι individually rational, γιατί η τιμή χρέωσης ανά γραμμάριο θα είναι μικρότερη από v_i, ενώ η συνολική ποσότητα που θα πάρει θα είναι το πολύ

$\sum_{k=1}^{w_i} a_k$, αφού ή θα πάρει ακριβώς αυτά οι το ίδιο πλήθος κομματιών, αλλά με λιγότερα γραμμάρια το κάθε κομμάτι.

(β) Δεν υπάρχει τέτοιος μηχανισμός, γιατί το πρόβλημα Knapsack μπορεί να αναχθεί στην εύρεση της ανάθεσης που μεγιστοποιεί την ωφέλεια στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οπότε η ακριβής επίλυση αυτού του προβλήματος δεν μπορεί να γίνει υπολογιστικά αποδοτικά με ακρίβεια, γιατί είναι NP-Hard.

(γ) Σε αυτή την περίπτωση ο μηχανισμός δεν είναι φιλαλήθης, γιατί σε αυτή την περίπτωση ο κάθε παίκτης θα θέλει να κάνει ένα bid, το οποίο θα είναι το μικρότερο που του εξασφαλίζει την επιθυμητή ποσότητα, αφού σε αυτή την περίπτωση μεγαλύτερη προσφορά (πιο κοντά στην πραγματική αξία) δεν θα του εξασφαλίζει μεγαλύτερη ωφέλεια, όπως συνέβαινε στην αρχική περίπτωση λόγω της αύξησης της ποσότητας.

Τώρα κάθε παίκτης θα πρέπει στην προσφορά του να ενημερώνει για την ποσότητα που θέλει και να κάνει μία προσφορά b_i, για φιλαλήθη μηχανισμό θα είναι $b_i = v_i * w_i$. Πάλι θα υπολογίζονται τα $v_i^* = \frac{v_i}{w_i}$ και η ανάθεση θα γίνεται με τον ίδιο τρόπο, ώστε να μεγιστοποιείται η ωφέλεια.

Ο τρόπος πληρωμής που μας εξασφαλίζει φιλαλήθεια είναι ο κάθε παίκτης να πληρώνει για κάθε κομμάτι την ελάχιστη τιμή v_i^* που κερδίζει κάποιο κομμάτι (δηλαδή παίρνει το κομμάτι a_K), εκτός από τον τελευταίο που δεν θα πληρώνει.