Πρόβλημα 1

Γεώργιος Γκοτζιάς
03119047
8ο Εξάμηνο

Έστω κυρτό και συμπαγές σύνολο K και σημείο $P \notin K$. Τότε υπάρχει μοναδική ευθεία L_*, η οποία διέρχεται από το P και

$$d(L_*, K) = d(P, K), \text{ όπου } d(P,K) = \inf\{\|x-P\| \mid x \in K\}$$

<u>Απόδειξη</u>

Η τιμή $d(P,K)$ είναι άνω φράγμα για την απόσταση κάθε ευθείας L που διέρχεται από το P, καθώς $d(L,K) = \inf\{\|x-y\| \mid x \in L, y \in K\}$ και $P \in L$ άρα για $x=P$ έχουμε ένα άνω φράγμα.

Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει σημείο $P_0 \in K$ τέτοιο, ώστε $d(P,P_0) = d(P,K)$. Πράγματι, $d(P,K) = \|x-P\|$. Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, και $P(u,v)$, τότε $f(x,y) = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$, τότε $d(P,K) = \max f(x,y)$.

Όμως, η f είναι συνεχής συνάρτηση στο K, ως σύνθεση συνεχών άρα $\exists P_0 \in K$ τέτοιο, ώστε $f(P_0) = \max f(x,y) = d(P,K)$.

Το P_0 είναι μοναδικό, γιατί θεωρώντας ότι υπάρχει P_0' τέτοιο, ώστε $d(P, P_0) = d(P, P_0')$, $(P_0' \in K, P_0' \neq P_0)$ τότε και το $P_0'' = \frac{P_0+P_0'}{2} \in K$, γιατί K κυρτό. Όμως το P θα άνηκε στη μεσοκάθετο το P_0P_0' άρα το $d(P_0'', P) < d(P,P_0)$ Άτοπο

Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχει ευθεία L_* τέτοια, ώστε $d(L_*,K) = d(P,K)$. Επιλέγουμε την ευθεία L_* η οποία διέρχεται από το P και είναι κάθετη στο PP_0.

Πράγματι, ισχύει $d(L_*,K) = d(P,K)$, γιατί υποθέτοντας πως υπάρχει P_0' τέτοιο, ώστε $d(L_*, P_0') < d(P,K) = d(P,P_0)$ έχουμε: ~~διφέρνουμε από P~~ την απόσταση προς το P_0P_0'.

Έστω P'' η προβολή του P στο P_0P_0'

Περίπτωση 1: $P'' \in P_0P_0'$ τότε $P'' \equiv P_0$ αφού $d(P_0,P) < d(P, P_0P_0')$ αφού $P_0P_0' \subseteq K$

Άρα θα είναι $P_0P_0' \parallel L_*$, οπότε $d(L_*, P_0') = d(P,K)$ Άτοπο

Περίπτωση 2: P'' στην ημιευθεία P_0P_0' (επεκτείνουμε προς P_0) αλλά όχι στο P_0P_0'

Τότε PP'' κοινή πλευρά και $P''\hat{P}P_0' < P''\hat{P}P_0$ άρα $P''P_0' < P''P_0$

οπότε θα είναι $PP_0' < PP_0$ άτοπο, αφού $P_0' \in K$

(Οι συνεπαγωγές προκύπτουν με νόμο ημιτόνων και πυθαγόρειο θεώρημα)

Περίπτωση 3: Η προβολή P'' ανήκει στην ημιευθεία $(P_0'P_0)$ (επεκτείνεται προς P_0, αλλά όχι στο $P_0'P_0$, τότε η ημιευθεία $P_0'P_0$ τέμνει την L_* στο σημείο M. Στα τρίγωνα $P_0\hat{M}P$ και $P_0'\hat{M}P'$ όπου P' η προβολή P_0' στην L^* είναι M κοινή κορυφή και $P_0'\hat{M} = \hat{P_0M}$ και $\hat{MP} = \hat{MP'}$ αφού $P_0P // P_0'P'$ άρα τα τρίγωνα όμοια και επειδή $||P_0M|| < ||P_0'M||$ είναι $||P_0P|| < ||P_0'P'||$ Άτοπο.

Άρα, σε κάθε περίπτωση είναι $d(L_*, k) = d(P, k)$

Έστω ότι υπάρχει ευθεία L', η οποία διέρχεται από το P και ισχύει $d(L', k) = d(P, k)$ και $L' \neq L$

Είναι $d(P_0, L') < d(P_0, P)$, αφού $P \in L'$ και P_0P όχι κάθετο στην L' αφού $L' \neq L$ και υπάρχει μοναδική κάθετος προς ευθεία

και $d(P_0, P) = d(P, k)$ (άρα γνήσια ανισότητα)

και $d(L', k) \leq d(L', P_0)$, αφού $P_0 \in k$

Άρα $d(L', k) < d(P, k)$ Άτοπο.

Άρα, υπάρχει μοναδική ευθεία L_* τέτοια, ώστε $P \in L_*$ και $d(L_*, k) = d(P, k) = \sup\{d(L, k) \mid L \text{ διέρχεται από } P\}$