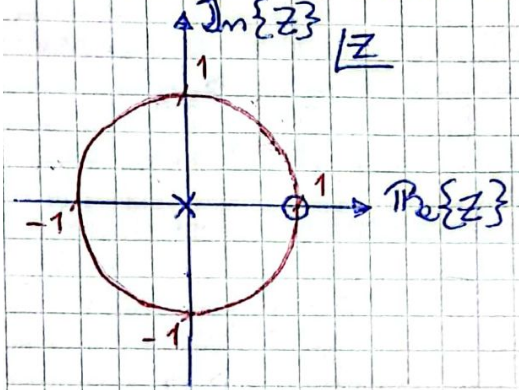
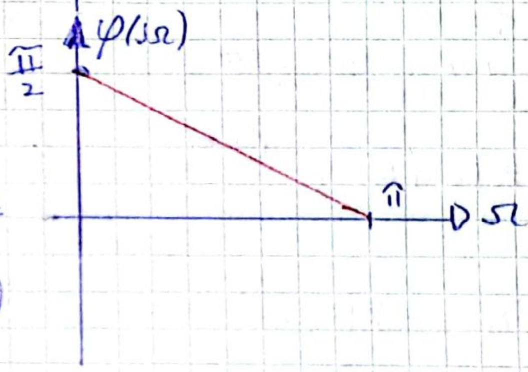
(b) Filtro diferenciador

$$h_1(k) = (1, -1)$$ de primer orden

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

Cero en $z=1$, Polo en $z=0$





$$H_1(j\Omega) = 1 - e^{-j\Omega}$$

$$H_1(j\Omega) = \left[e^{+j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right] e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

$$H_1(j\Omega) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$Y(z) = X(z)\cdot 1 - X(z)\cdot z^{-1}$$

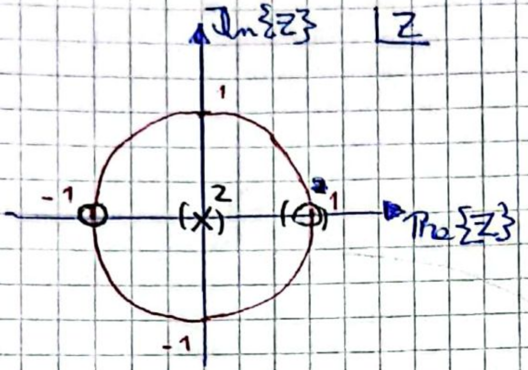
$$\cancel{Y(z)} = y(k) = x(k) - x(k-1)$$

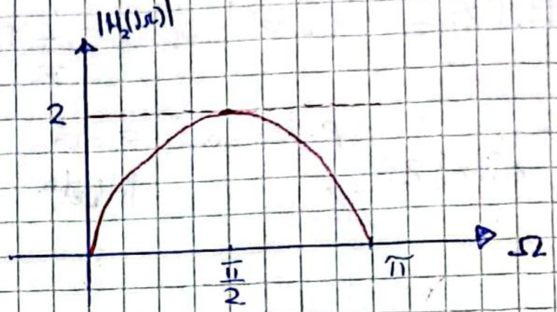
$h_2(k) = (1, 0, -1)$

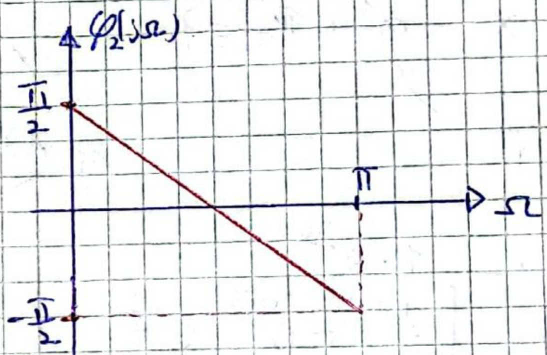
$$H_2(Z) = 1 - Z^{-2} = \frac{Z^2 - 1}{Z^2}$$

Ceros en $Z = 1$ y $Z = -1$

~~Cero doble en Z = 1~~. Polo doble en $Z = 0$







$$H_2(j\Omega) = 1 - e^{-j2\Omega}$$

$$H_2(j\Omega) = \left(e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}\right) e^{-j\Omega}$$

$$H_2(j\Omega) = 2\,\text{sen}(\Omega) \cdot e^{-j\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$Y_2(Z) = X_2(Z) - X_2(Z)\,Z^{-2}$$

$$y_2(k) = x_2(k) - x_2(k-2)$$

1. ¿Qué demora introducen ambos sistemas?

El sistema $H_1(Z)$ presenta una demora de $\frac{1}{2}$. Al no ser un valor entero, no es una demora deseable. Esto ya que no es posible determinar el intervalo bajo el cual el sistema puede presentar un resultado.

Para el caso de $H_2(Z)$, el sistema introduce una demora unitaria.

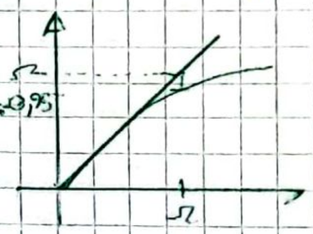
2. Hasta que frecuencias estos sistemas se comportan como un derivador ideal. Considere una tolerancia admisible del 5% respecto a su respuesta ideal $|H(\Omega)| = \Omega$

Para h_1 se tiene

$$|H_1(j\Omega)| = 2\,sen\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad \frac{\partial H_1(j\Omega)}{\partial \Omega} = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \Rightarrow \frac{\partial H_1(0)}{\partial \Omega} = 1$$

→ pendiente unitaria

Funciona bien como diferenciador hasta que



$$\Omega \cdot 0{,}95 = 2\,sen\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

O bien, funciona como derivador ~~diferenciador~~

$$\frac{2\,sen\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\Omega} > 0{,}95$$

Esto se cumple hasta $\Omega \cong 0{,}35\pi$

↳ Teniendo en cuenta que $\pi = \frac{f_s}{2}$ entonces

$$\boxed{f_{max} = \frac{0{,}35}{2} f_s = 0{,}175\, f_s} \;//$$

Para h_2

$$|H_2(j\Omega)| = 2\,sen(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial |H_2(j\Omega)|}{\partial \Omega}\Big|_{\Omega=0} = 2\cos(\Omega)\Big|_{\Omega=0} = 2$$

Para que funcione como derivador se debe atenuar su modulo en 2. De esta manera

$$|H_2(j\Omega)|^* = sen(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial |H_2(j\Omega)|^*}{\partial \Omega}\Big|_{\Omega=0} = 1\cos(\Omega)\Big|_{\Omega=0} = 1$$

→ independiente que $H(j\Omega) = \Omega$

Será derivador ~~diferenciador~~ siempre que

$$\frac{sen(\Omega)}{\Omega} > 0{,}95$$

Esto se cumple hasta $\Omega \cong 0{,}175\pi$ y como $\frac{f_s}{2} = \pi$

$$\boxed{f_{max} = \frac{7}{80} f_s}$$