Bonus 1) Obtener la transferencia usando ω_{Butter}

Se tiene que:

$$|T(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\varepsilon^{-\frac{1}{n}}}\right)^{2n}}$$

Si se renormaliza de manera que la nueva norma de frecuencia sea

$$\omega_{Butter} = \varepsilon^{-\frac{1}{n}}\,\underbrace{\Omega_\omega}_{\to \text{ norma anterior } (2\pi f_e)}$$

Se puede tratar ahora como si fuese una transferencia del tipo butterworth.

Recordar que $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $n = 3$

Se tiene entonces que

$$|T(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2\cdot 3}} = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$$|T(s)|^2 = |T(\omega)|^2\Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^6} = \frac{1}{1-s^6}$$

$$|T(s)|^2 = T(s)\cdot T(-s) = \frac{1}{s^3+as^2+bs+c}\cdot\frac{1}{-s^3+as^2-bs+c}$$

$$-s^6 = s^3\cdot(-s^3) = -s^6$$

$$0s^4 = -bs^4+a^2s^4-bs^4 = -2bs^4+a^2 \Rightarrow 2b = a^2 \quad (1)$$

$$0s^2 = acs^2-b^2s^2+acs^2 = (2ac-b^2)s^2 \Rightarrow 2ac = b^2 \quad (2)$$

$$1 = c^2 + \cancel{\ldots} \Rightarrow c = 1$$

$$\begin{cases} 2a = b^2 \Rightarrow \cancel{4b = b^2 \to b = 4} \Rightarrow \\ 2b = a^2 \Rightarrow \cancel{2(2b)^2 = b^2} \\ \qquad\quad \cancel{8b^2 = b^2} \end{cases}$$

$$\cancel{2\ldots} \qquad a = b = 2$$

$$\boxed{T(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 \cdot 2 + s \cdot 2 + 1}}$$ // Transferencia Butterworth de orden 3

Si implemento el circuito a partir de esta transferencia, cuando desnormalice componentes tendré que hacerlo usando la norma de frecuencia

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} \cdot 2\pi f_p \quad ; \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \quad f_p = 1500Hz$$

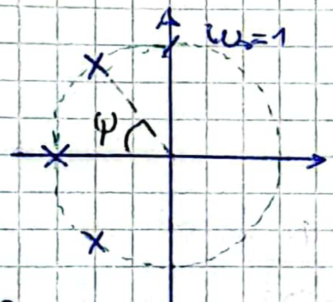
- Diagrama de polos y ceros y respuesta en frecuencia

Con la calculadora obtengo las raíces del denominador de la función de transferencia

$$s_1 = -1$$

$$s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j \Rightarrow |s_{2,3}| = 1$$

Los polos se hallan en una circunferencia de radio unitario

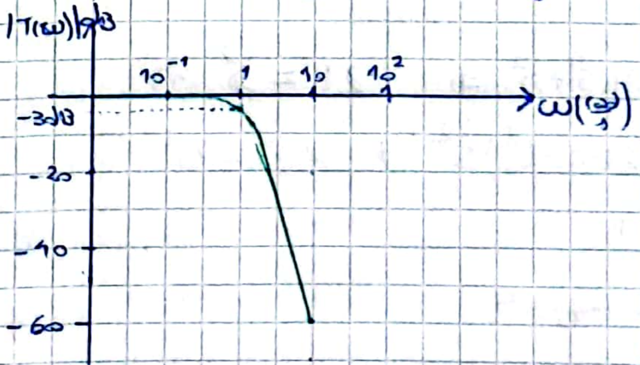


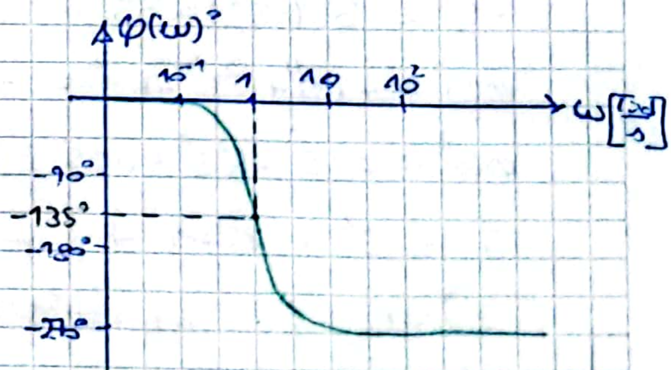
$$\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Q = \frac{1}{2\cos\varphi} = 1$$

La transferencia puede escribirse como:

$$T(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

De manera que mi diagrama de BODE resulta

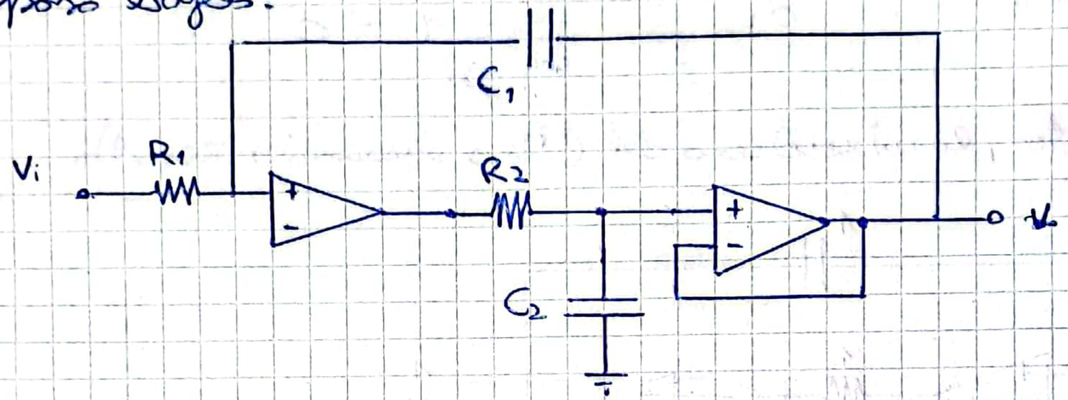




NOTA

Con la finalidad de ejercitar un poco más, se realiza una implementación del filtro obtenido utilizando wButter utilizando una estructura activa de segundo orden, distinto a la anterior en cascada con un pasabajo RC.

Para esto se propone utilizar un filtro activo bicuadrado paso bajos.



Utilizando las ecuaciones de diseño, se tiene que

$$Q = \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = C_2 = C \\ R_1 = R_2 = R \end{array}$$

Y como la norma de impedancia será R, entonces

$R = 1$

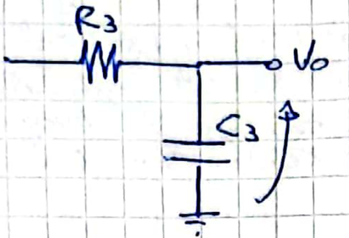
Para obtener el valor de C normalizado,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow$$

$C = 1$ //

$$\boxed{\begin{array}{c} R = 1 \\ C = 1 \end{array}}$$

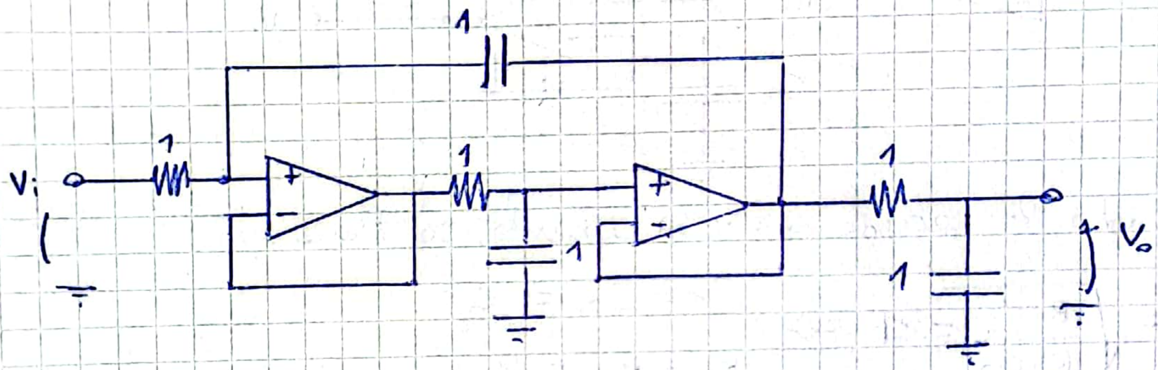
La estructura de primer orden a utilizar es un filtro para bajas RC



$\omega_0 = \frac{1}{R_3 C_3} = 1$; Por conveniencia $R_3 = R = 1$

Entonces $C_3 = 1 = C$

- Con esto, la estructura del filtro diseñado resulta



Desnormalización de componentes

$$\begin{cases} C = \dfrac{C^{\circ}}{\Omega_{\omega}\, \Omega_z} = \dfrac{1}{2\pi f_p \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \cdot R} \\ R = \Omega_z \end{cases}$$