# Lignes de bus, approche Markov

notes GG

July 7, 2021

Soit $x_i$, resp. $y_i$, le nombre de passagers qui montent, resp. descendent, en $i$ $(1 \leq i \leq l)$. On pose le $n_{i,i+1}$ le nombre de passagers qui sont transportées entre $i$ à $i+1$. On cherche $N_{ij}$ avec les bonnes marges.

Posons $p_i^{\text{in}}$ et $p_i^{\text{out}}$ comme :

$$p_i^{\text{in}} := \frac{x_i}{x_\bullet} \tag{1}$$

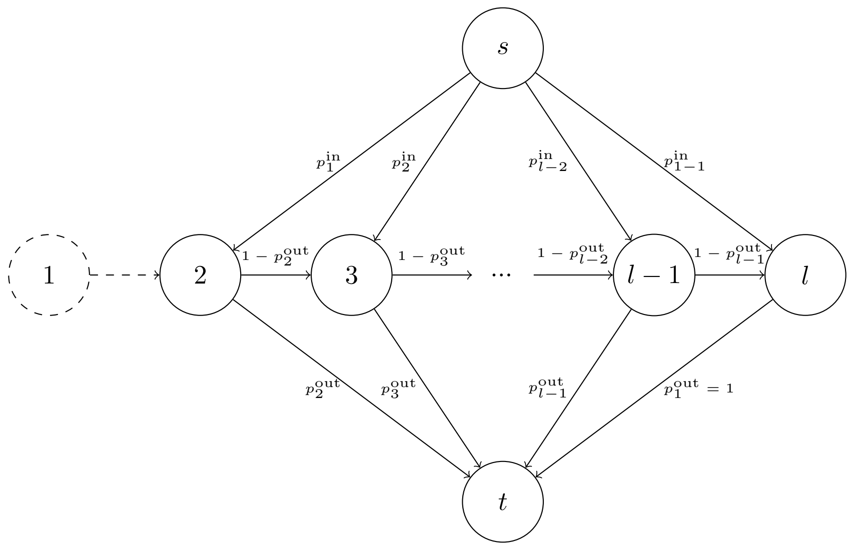
$$p_i^{\text{out}} := \frac{y_i}{n_{i-1,i}} = \frac{y_i}{\sum_{1 \leq k \leq (i-1)} (x_k - y_k)} \tag{2}$$

On peut alors supposer une distribution $f_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{\bullet\bullet}}$ de la forme suivante :

$$f_{ij} = \begin{cases} p_i^{\text{in}}(1 - p_{i+1}^{\text{out}}) \cdots (1 - p_{j-1}^{\text{out}}) p_j^{\text{out}} & \text{si } i < j - 1 \\ p_i^{\text{in}} p_j^{\text{out}} & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

## 1 Chaîne de Markov

La modélisation par une chaîne de Markov se fait de la façon suivante :




qui est donc représentée par la matrice de transition $\mathbf{W}$ suivante :

$$\mathbf{W} = \left(\begin{array}{c|ccccccc|c}
0 & p_1^{\text{in}} & p_2^{\text{in}} & p_3^{\text{in}} & \cdots & p_{l-3}^{\text{in}} & p_{l-2}^{\text{in}} & p_{l-1}^{\text{in}} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1-p_2^{\text{out}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & p_2^{\text{out}} \\
0 & 0 & 0 & 1-p_3^{\text{out}} & \ddots & 0 & 0 & 0 & p_3^{\text{out}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & p_4^{\text{out}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p_{l-2}^{\text{out}} & 0 & p_{l-2}^{\text{out}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p_{l-1}^{\text{out}} & p_{l-1}^{\text{out}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & p_1^{\text{out}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{4}$$

Pour représenter le fait qu'une personne qui monte en $i$ va nécessairement en $i+1$ avant de descendre, la probabilité de monter à l'arrêt $i$, i.e $p_i^{\text{in}}$, est directement connecté au noeud $i+1$. Le noeud représentant l'arrêt 1 n'est donc plus nécessaire.

A partir de cette matrice, on peut calculer la *matrice fondamentale*, $\mathbf{Z}$, de la façon suivante :

$$\mathbf{Z} := \mathbf{I} + \mathbf{W} + \mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^3 + \ldots = (\mathbf{I} - \mathbf{W})^{-1} \tag{5}$$

Comme cette chaîne ne possède pas de boucle, on sait que les composantes de cette matrice $z_{kl}$ contiennent la *probabilité d'atteindre $l$ en partant de $k$* (REF, p.ex. Saerens). On a donc :

$$z_{kl} = \begin{cases} (1-p_k^{\text{out}})\cdots(1-p_{l-1}^{\text{out}}) & \text{si } k < l \\ 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall k, l \neq s, t \tag{6}$$

la probabilité $f_{ij}$ s'obtient donc avec :

$$f_{ij} = p_i^{\text{in}} z_{i+1,j} p_j^{\text{out}} \tag{7}$$

## 1.1 Marges

Les marges de $f_{ij}$ doivent vérifier $f_{i\bullet} = x_i/x_\bullet$ et $f_{\bullet j} = y_j/y_\bullet$. On a :

$$f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{l} p_i^{\text{in}} z_{i+1,j} p_j^{\text{out}} = p_i^{\text{in}} \sum_{j=1}^{l} z_{i+1,j} p_j^{\text{out}} \tag{8}$$

Comme $z_{i+1,j}p_j^{\text{out}}$ représente la probabilité d'avoir une trajectoire partant de $i+1$ et étant absorbé juste après avoir atteint $j$, on a :

$$\sum_{j=1}^{l} z_{i+1,j} p_j^{\text{out}} = 1 \tag{9}$$

$$\Rightarrow f_{i\bullet} = p_i^{\text{in}} = \frac{x_i}{x_\bullet} \tag{10}$$

Pour l'autre marge, on fait par réccurence. Pour j = 2 :

$$\begin{aligned} f_{\bullet 2} &= p_1^{\text{in}} p_2^{\text{out}} = \frac{x_1}{x_\bullet} \frac{y_2}{(x_1 - y_1)} \\ &= \frac{x_1}{x_\bullet} \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_2}{x_\bullet} = \frac{y_2}{y_\bullet} \end{aligned} \tag{11}$$

En supposant que $f_{\bullet j} = y_j/y_\bullet$, calculons $f_{\bullet, j+1}$. Pour commencer, remarquons que :

$$z_{kl} = \begin{cases} z_{k,(l-1)}(1-p_{l-1}^{\text{out}}) & \text{si } k < l \\ 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{12}$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
f_{\bullet,(j+1)} &= \sum_{i=1}^{l} p_i^{\text{in}} z_{(i+1),(j+1)} p_{j+1}^{\text{out}} = \sum_{i=1}^{j-1} p_i^{\text{in}} z_{i+1,j} (1 - p_j^{\text{out}}) p_{j+1}^{\text{out}} + p_j^{\text{in}} p_{j+1}^{\text{out}} \\
&= \frac{f_{\bullet,j}}{p_j^{\text{out}}} (1 - p_j^{\text{out}}) p_{j+1}^{\text{out}} + \frac{x_j}{x_\bullet} p_{j+1}^{\text{out}} = \left( \frac{y_j}{y_\bullet} \left( \frac{1}{p_j^{\text{out}}} - 1 \right) + \frac{x_j}{x_\bullet} \right) p_{j+1}^{\text{out}} \\
&= \left( \frac{n_{j-1,j} - y_j + x_j}{y_\bullet} \right) \frac{y_{j+1}}{n_{j,j+1}} = \frac{y_{j+1}}{y_\bullet} \qquad (13)
\end{aligned}
$$