UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

EMC 5412 – TRANSFERÊNCIA DE CALOR E
MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

PROFESSOR ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

Trabalho 4
Condução Bidimensional

GUILHERME GWADERA

FLORIANÓPOLIS, 27 DE SETEMBRO DE 2018

1 Introdução

O problema proposto considera uma aleta plana de alumínio ($k = 230\,\mathrm{W/m\,°C}$) com perfil retangular, de comprimento L e espessura t. A temperatura na base da aleta é T_b e a extremidade em $x = L$ é admitida como adiabática. Há troca de calor pelas superfícies superior e inferior da aleta com um fluido a T_∞ e coeficiente convectivo de troca de calor h. Neste trabalho, foram escolhidos os valores de $T_b = 100\,°\mathrm{C}$, $T_\infty = 20\,°\mathrm{C}$, $L = 10\,\mathrm{cm}$ e $t = 1\,\mathrm{mm}$. Foi também escolhido o valor de $w = 1\,\mathrm{m}$, sendo w a profundidade da aleta.

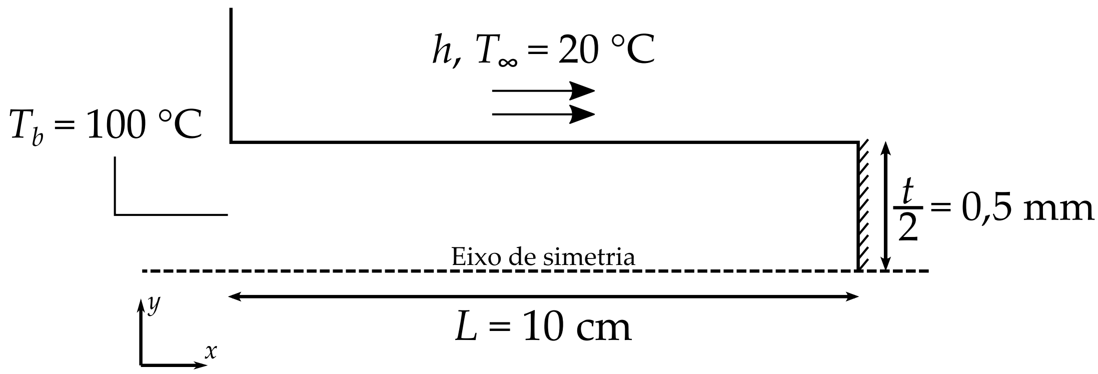


Figura 1: Representação esquemática do problema.

Considerando que a transferência de calor ocorre em estado estacionário, que não há geração de calor, e que as propriedades físicas do material da aleta são constantes, um balanço de energia sobre o sistema fornece a seguinte equação.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

Na qual, são aplicadas as seguintes condições de contorno, levando em conta a simetria do problema:

$$\begin{aligned}
&\text{em } x = 0 \quad T = T_b \\
&\text{em } x = L \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
&\text{em } y = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\
&\text{em } y = t/2 \quad -k\frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty)
\end{aligned}$$

Supondo que não há variação de temperatura na direção transversal da aleta, a distribuição da temperatura ao longo do comprimento e o calor trocado pela superfície da aleta são dados por

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \tag{2}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\,(T_b - T_\infty)\tanh mL \tag{3}$$

onde P é o perímetro da aleta e A_c é a área da seção transversal, dados por

$$P = 2w + 2t = 2 \times 1\,\text{m} + 2 \times 1\,\text{mm} = 2{,}002\,\text{m}$$
$$A_c = wt = 1\,\text{m} \times 1\,\text{mm} = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

e o coeficiente m é dado por

$$m^2 = \frac{hP}{kA_c}$$

Para uma aleta com área da seção transversal uniforme e extremidade adiabática, a eficiência da aleta é dada por

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{\tanh mL}{mL} \tag{4}$$

Para que a aleta do problema possua uma eficiência de 60%, ou seja, $\eta_f = 0{,}6$, deve-se resolver a Equação (4), de forma a encontrar o valor de h que satisfaça essa condição. Dessa maneira, utilizando P e A_c calculados anteriormente, é encontrado um valor de $h = 26{,}2721\,\text{W}/\text{m}^2\,°\text{C}$.

Com o valor de h encontrado, é possível obter a distribuição exata de temperatura ao longo do comprimento da aleta, pela Equação (2), e ilustrado na Figura 2. Pela Equação (3), é encontrado que a aleta troca um calor q_f de 252,46 W pelas superfícies inferior e superior, ou considerando somente a metade superior pela simetria do problema, $q_f = 126{,}23\,\text{W}$. Este último valor será utilizado para comparar o resultado numérico obtido pelo método dos volumes finitos.

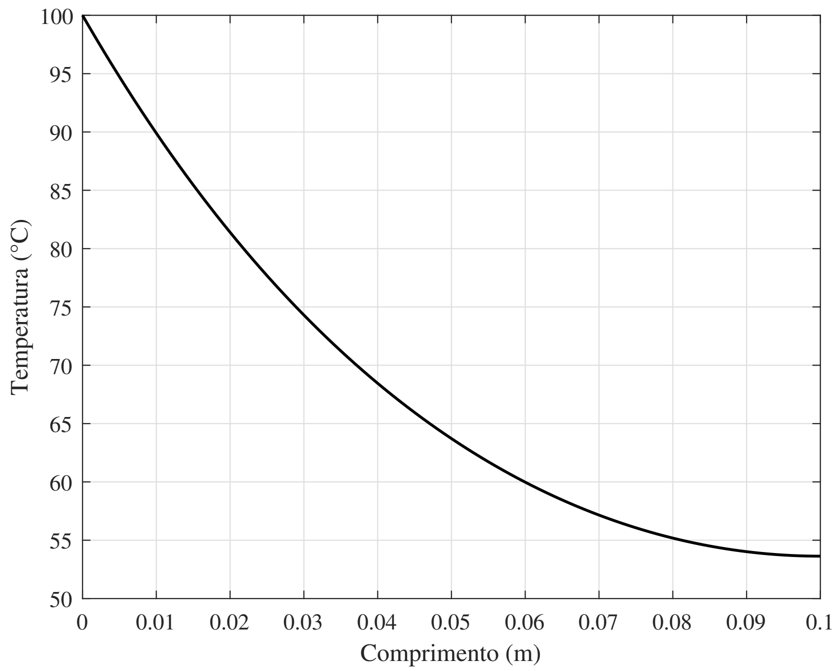


Figura 2: Perfil de temperatura encontrado pela Equação (2).

2 Discretização

Para a resolução numérica, a equação diferencial que rege o problema foi discretizada pelo método dos volumes finitos. Fazendo a integração da Equação (1) sobre um volume de controle de espessura Δx, altura Δy e profundidade unitária, com os pontos da malha localizados exatamente nos centros dos volumes, e admitindo que a temperatura varie linearmente entre os pontos, é obtida a Equação (5).

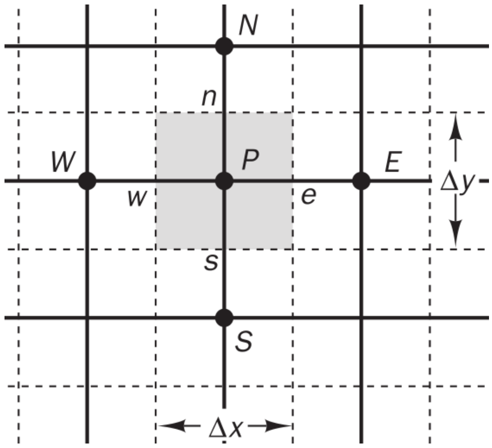


Figura 3: Volumes de controle para a integração.

$$\int_{x_w}^{x_e}\int_{y_s}^{y_n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=0$$

$$\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y+\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x=0$$

$$\frac{k_e(T_E-T_P)}{\delta x_e}\Delta y-\frac{k_w(T_P-T_W)}{\delta x_w}\Delta y+\frac{k_n(T_N-T_P)}{\delta x_n}\Delta x-\frac{k_s(T_P-T_S)}{\delta x_s}\Delta x=0$$

$$\boxed{a_pT_P=a_eT_E+a_wT_W+a_nT_N+a_sT_S} \tag{5}$$

Onde os coeficientes a_e, a_w, a_n, a_s e a_p são dados por

$$a_e=\frac{k_e\Delta y}{\delta x_e} \qquad a_w=\frac{k_w\Delta y}{\delta x_w}$$

$$a_n=\frac{k_n\Delta x}{\delta y_n} \qquad a_s=\frac{k_s\Delta x}{\delta y_s}$$

$$a_p=\sum a_{nb}=a_e+a_w+a_n+a_s$$

Na discretização do domínio de cálculo da aleta, os pontos centrais dos volumes das fronteiras direita, inferior e superior foram posicionados junto à fronteira. O domínio foi dividido em N_x volumes na direção do eixo x, e em N_y volumes na direção do eixo y, conforme mostra a Figura 4. O número total de volumes de controle é dado por $N=N_x\cdot N_y$. Os pontos estão todos igualmente espaçados em $\delta x=\Delta x$ na direção x e em $\delta y = \Delta y$ na direção y, sendo que Δx e Δy são calculados conforme as Equações (6) e (7).

$$\Delta x = \frac{L}{N_x - 0{,}5} \tag{6}$$
$$\Delta y = \frac{L}{N_y - 1} \tag{7}$$

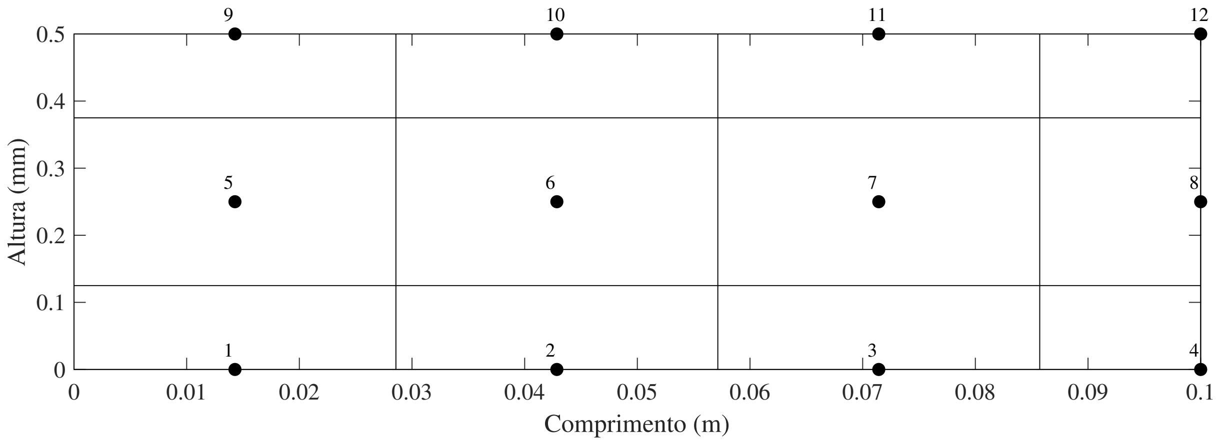


Figura 4: Discretização do domínio em volumes de controle, com $N_x = 4$ e $N_y = 3$.

Na fronteira esquerda (pontos 1, 5 e 9), a condição de contorno prescreve uma temperatura nas faces oeste dos volumes de controle ali posicionados. Fazendo a integração da Equação (1) para este caso, considerando a temperatura na face w como T_b, obtém-se

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{\delta x_e}\Delta y - \frac{k_w(T_P - T_b)}{\Delta x/2}\Delta y + \frac{k_n(T_N - T_P)}{\delta x_n}\Delta x - \frac{k_s(T_P - T_S)}{\delta x_s}\Delta x = 0$$

$$\left[\frac{k_e \Delta y}{\delta x_e} + \frac{k_n \Delta x}{\delta y_n} + \frac{k_s \Delta x}{\delta y_s} + \frac{k_w \Delta y}{\Delta x/2}\right] T_P = \left(\frac{k_e \Delta y}{\delta x_e}\right) T_E + \left(\frac{k_n \Delta x}{\delta y_n}\right) T_N + \left(\frac{k_s \Delta x}{\delta y_s}\right) T_S + \left(\frac{k_w \Delta y}{\Delta x/2}\right) T_b$$

$$\boxed{a_p T_P = a_e T_E + a_n T_N + a_s T_S + b}$$
$$b = \left(\frac{k_w \Delta y}{\Delta x/2}\right) T_b$$
$$a_p = a_e + a_n + a_s + \frac{k_w \Delta y}{\Delta x/2}$$

Tanto na fronteira direita quanto na inferior, a condição de contorno é de fluxo de calor nulo. Para a discretização, isso se traduz pelo cancelamento dos termos a_e nos pontos da fronteira direita (4, 8 e 12), e pelo cancelamento dos termos a_s nos pontos da fronteira inferior (1 a 4).

Na fronteira superior, o fluxo é dado pela condição de contorno convectiva. Realizando novamente a integração da Equação (1), levando em conta que $-k\,\partial T/\partial y = h(T_P - T_\infty)$ na face norte do volume de controle, obtém-se

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{\delta x_e}\Delta y - \frac{k_w(T_P - T_W)}{\delta x_w}\Delta y + h(T_\infty - T_P)\Delta x - \frac{k_s(T_P - T_S)}{\delta x_s}\Delta x = 0$$

$$\left[\frac{k_e\Delta y}{\delta x_e} + \frac{k_w\Delta y}{\delta x_w} + \frac{k_s\Delta x}{\delta y_s} + h\Delta x\right] T_P = \left(\frac{k_e\Delta y}{\delta x_e}\right) T_E + \left(\frac{k_w\Delta y}{\delta x_w}\right) T_N + \left(\frac{k_s\Delta x}{\delta y_s}\right) T_S + hT_\infty\Delta x$$

$$\boxed{a_p T_P = a_e T_E + a_w T_W + a_s T_S + b}$$
$$b = hT_\infty\Delta x$$
$$a_p = a_e + a_w + a_s + h\Delta x$$

Com a equação diferencial e todas as condições de contorno discretizadas, é construído um sistema de equações linear a partir das equações algébricas em cada ponto da malha. A distribuição bidimensional da temperatura na aleta é obtida pela resolução do sistema linear de equações. Com o perfil de temperatura, é então calculado o calor trocado pela aleta, avaliando tanto o calor que entra pela base, quanto o calor trocado por convecção. O calor é calculado pela soma de todos os fluxos de calor em cada face dos volumes de fronteira, conforme a Equação (8) para a fronteira oeste e a Equação (9) para a fronteira norte, nas quais A_w e A_n são as áreas de cada face oeste e norte, respectivamente.

$$q_{\text{entra}} = \sum \frac{k_w A_w}{\Delta x/2}(T_b - T_P) \tag{8}$$
$$q_{\text{sai}} = \sum h A_n (T_P - T_\infty) \tag{9}$$

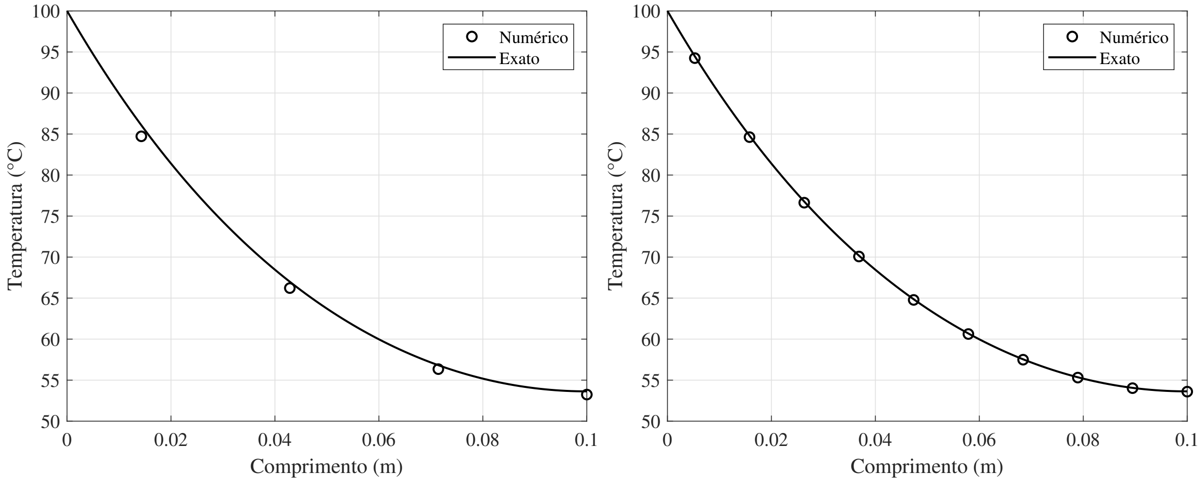
Para a comparação com os valores exatos de temperatura obtidos pela Equação (2), foi tomada a média das temperaturas em cada seção transversal da aleta, ou seja, em cada posição x da malha. Para a comparação com os valores de calor, foi calculado o erro relativo entre o calor que sai da aleta e o valor calculado na seção anterior (q_f), conforme a equação abaixo.

$$\text{Erro} = \frac{|q_{\text{sai}} - q_f|}{q_f} \tag{10}$$

3 Resultados

O problema foi primeiramente resolvido utilizando a malha da Figura 4, e depois refinando o número de volumes para avaliar a influência do mesmo. A Figura 5 mostra os perfis de temperatura em relação ao resultado exato usando dois tamanhos de malha diferentes. Nota-se que no perfil com a malha mais grossa os valores de temperatura estão um pouco abaixo do valor exato, porém com a malha ligeiramente refinada, as temperaturas já coincidem com o resultado analítico.

Nas Figuras 6 e 7 estão ilustradas as curvas de isotermas na aleta. Neste caso, ao utilizar uma malha mais refinada, as posições das isotermas se alteram levemente. Pode-se observar que a variação na direção transversal da aleta é insignificante, visto que as isotermas ao longo do comprimento são retas. Portanto, concluí-se que a hipótese de transferência de calor unidimensional utilizada para a dedução da solução analítica é correta.



(a) $N_x = 4$ e $N_y = 3$

(b) $N_x = N_y = 10$

Figura 5: Comparação dos perfis de temperatura com o resultado analítico.

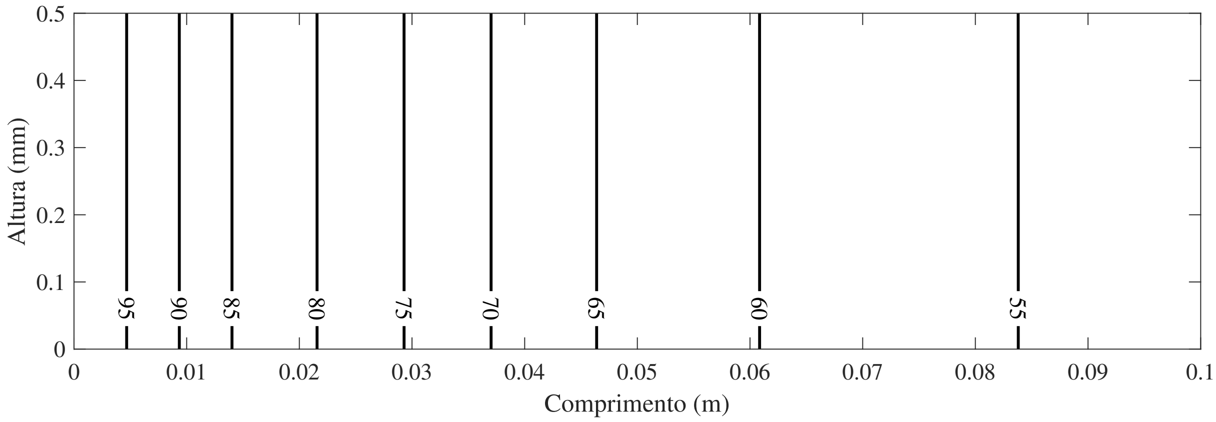


Figura 6: Isotermas (°C) na aleta para $N_x = 4$ e $N_y = 3$.

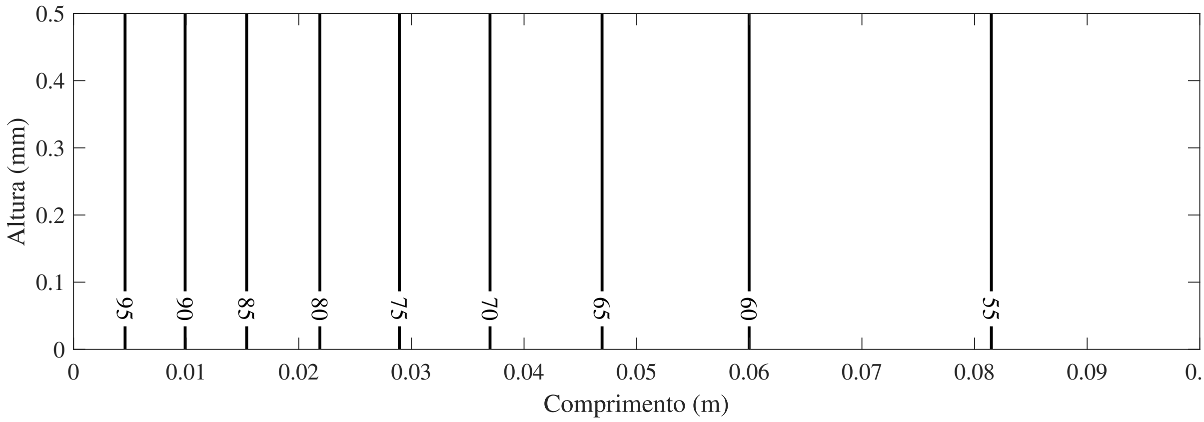


Figura 7: Isotermas (°C) na aleta para $N_x = N_y = 10$.

Calculando a quantidade de calor que entra e sai da aleta, pelas Equações (8) e (9), e fazendo a diferença para encontrar o balanço de energia, o resultado é o que está apresentado na Tabela 1 para vários tamanhos de malha e $N_y = N_x$. A variação do erro com o número de volumes está ilustrado na Figura 8. Os valores de entrada e saída de calor da aleta estão de acordo um com o outro, possuindo uma diferença da ordem de 10^{-7} ou menor, atribuída às aproximações do método numérico. O erro do calor entre o valor calculado pelo método numérico e o valor exato também não possui uma grande diferença, visto que o erro relativo é menor que 1% para malhas relativamente grossas, mostrando que o valor calculado numericamente é bastante próximo do real.

N_x e N_y	q_{entra} (W)	q_{sai} (W)	Balanço (W)	Erro (%)
5	124,2352	124,2352	$-7{,}360 \times 10^{-9}$	1,5818
10	125,7124	125,7124	$-1{,}709 \times 10^{-8}$	0,4116
15	125,9610	125,9610	$-9{,}901 \times 10^{-8}$	0,2147
20	126,0448	126,0448	$1{,}603 \times 10^{-7}$	0,1482
30	126,1033	126,1033	$3{,}792 \times 10^{-8}$	0,1019
40	126,1234	126,1234	$9{,}089 \times 10^{-7}$	0,0860
50	126,1326	126,1326	$5{,}062 \times 10^{-7}$	0,0787

Tabela 1: Calores de entrada e saída e balanço de energia.

Como a solução 1D do problema supõe que não há variação na direção transversal devido a pequena da aleta, o programa implementado para este trabalho foi utilizado para investigar a validade dessa hipótese. Para isso, a espessura da aleta foi variada na faixa de 5 mm a 50 mm, mantendo a eficiência da aleta em 60% e o mesmo comprimento. As diferentes distribuições de temperatura obtidas ao variar a espessura estão apresentadas na Figura 9. É possível observar que para espessuras maiores, a partir dos 10 mm a temperatura começa a ter uma variação no sentido vertical. Esse resultado mostra que a solução 1D é realmente válida para espessuras pequenas.

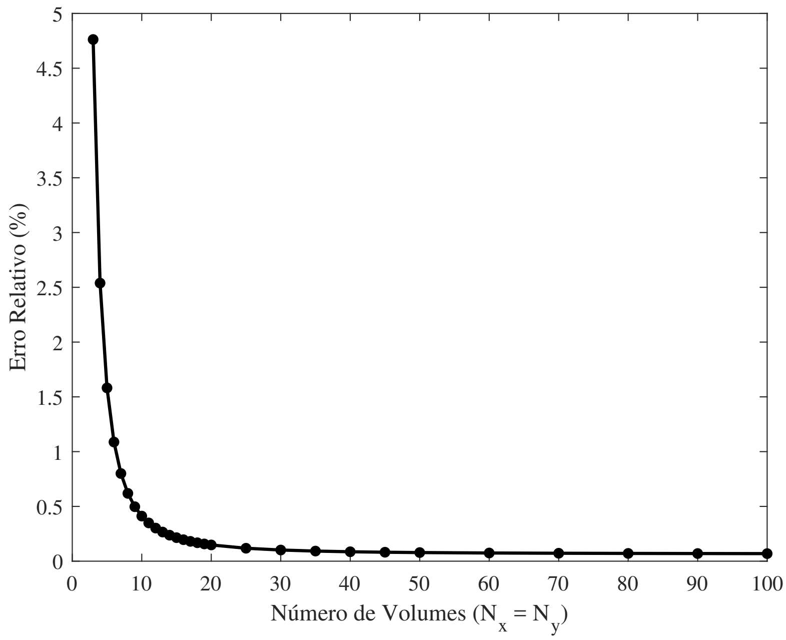
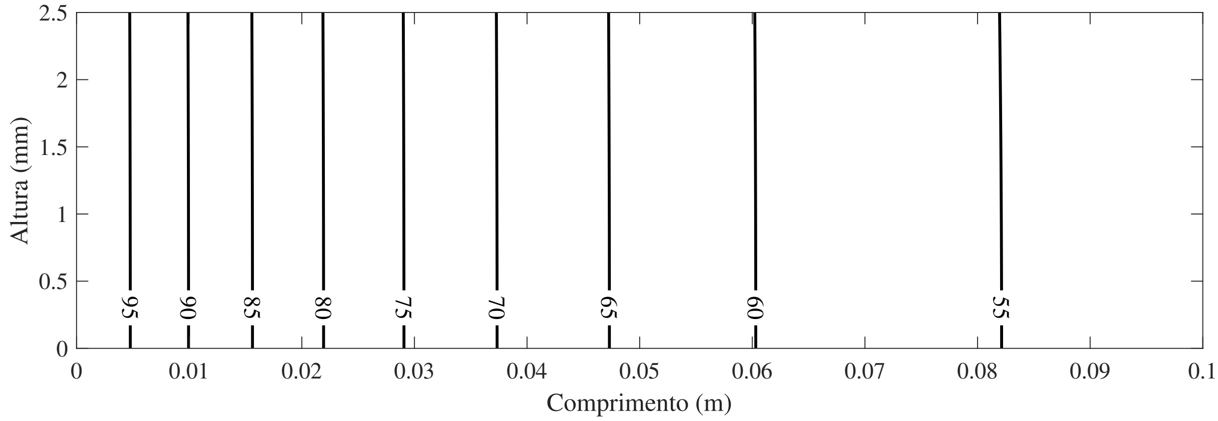


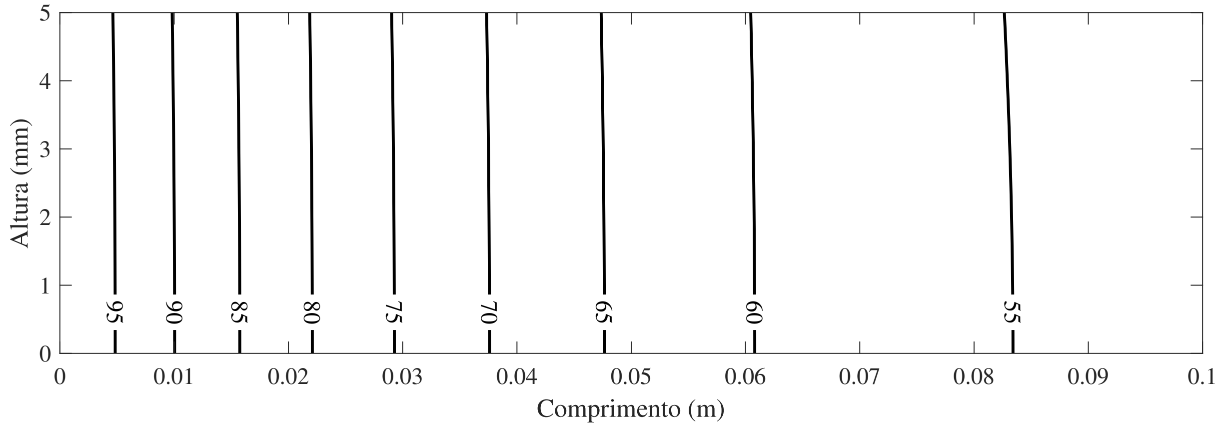
Figura 8: Erro relativo do calor trocado em função do número de volumes.

4 Conclusão

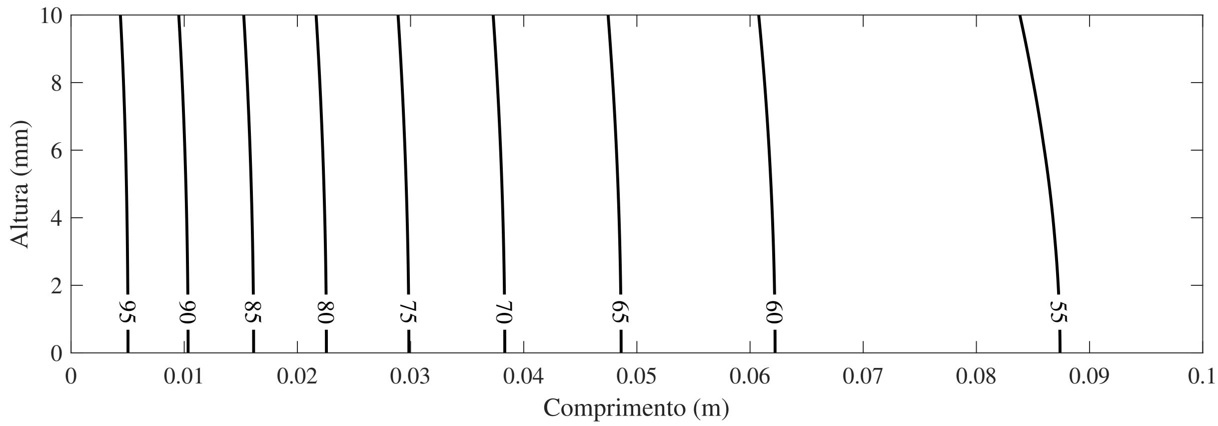
Neste trabalho foi implementado um programa utilizando o método dos volumes finitos para avaliar a condução bidimensional de calor em uma aleta plana retangular. Os resultados da distribuição de temperatura e calor trocado obtidos através do programa estavam de acordo com as soluções analíticas que aproximam para um problema de condução unidimensional. A validade da solução 1D foi comprovada ao analisar a variação de temperatura na direção transversal de aleta e concluindo que tal variação é desprezível para espessuras pequenas. Foi também investigado a validade da solução analítica para espessuras maiores, e foi observado que nas condições deste problema, para espessuras acima de 10 mm a hipótese de condução unidimensional não é mais válida.



(a) $t = 5$ mm

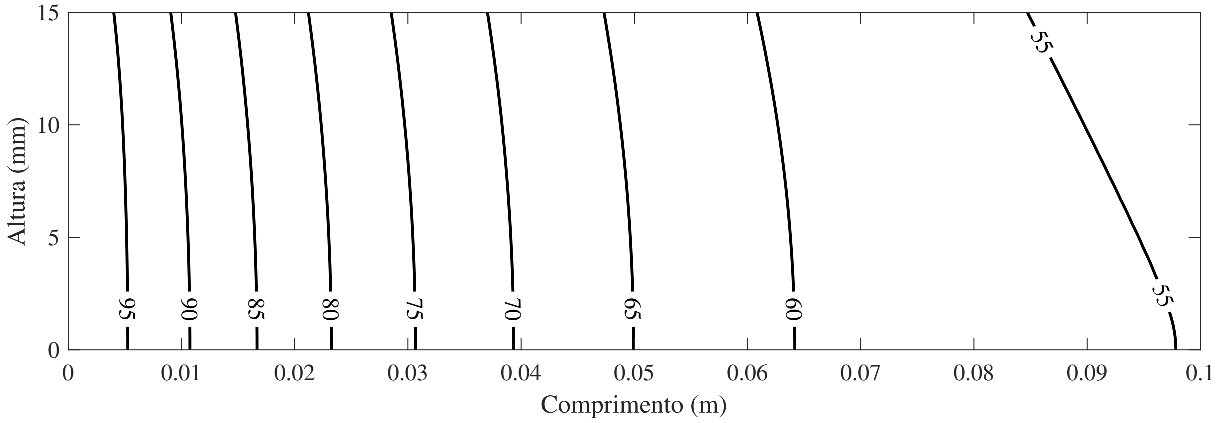


(b) $t = 10$ mm

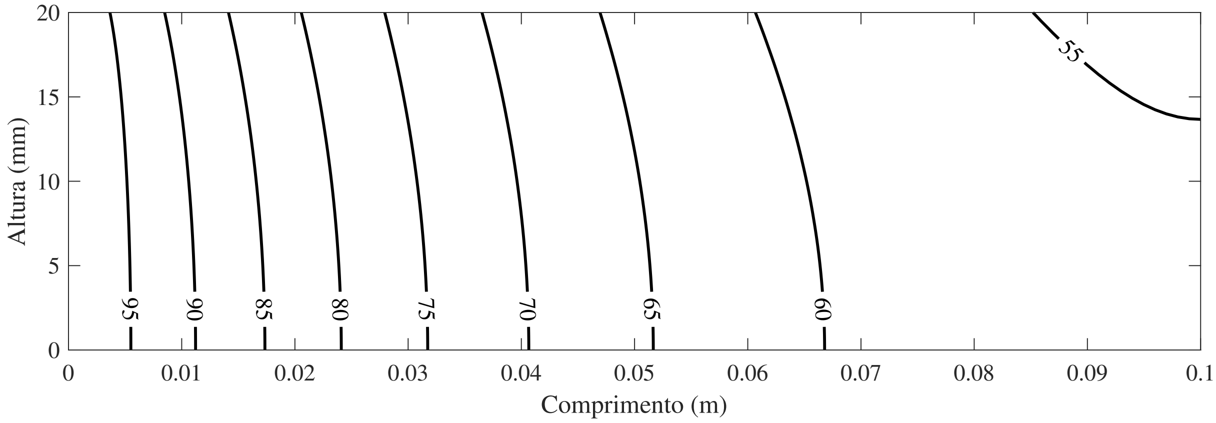


(c) $t = 20$ mm

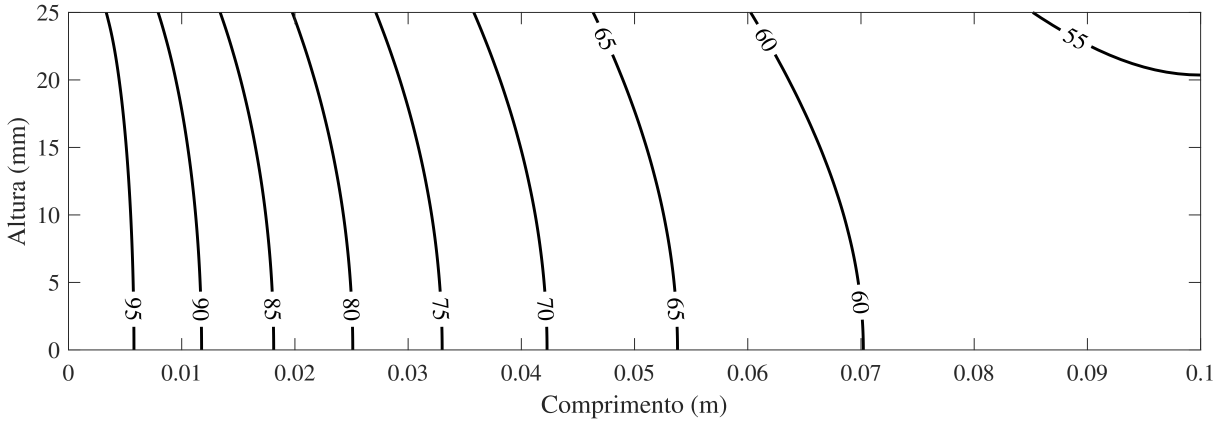
Figura 9: Isotermas para várias espessuras da aleta.



(d) $t = 30$ mm



(e) $t = 40$ mm



(f) $t = 50$ mm

Figura 9: Isotermas para várias espessuras da aleta.

5 Código

```
%% Constantes e Propriedades

k = 230;                          % Condutividade térmica [W/m K]
L.x = 0.10;                       % Comprimento em x [m]
L.y = 0.005 / 2;                  % Altura em y [m]
L.z = 1;                          % Espessura em z [m]
P = 2 * L.z + 2 * 2*L.y;          % Perímetro da aleta [m]
Ac = L.z * 2*L.y;                 % Área da seção transversal [m^2]
T_b = 100;                        % Temperatura da base [°C]
T_inf = 20;                       % Temperatura do fluido [°C]
eta = 0.6;                        % Eficiência da aleta
% Resolver equação para encontrar h
m = @(h) sqrt(h * P / (k * Ac));
h = fzero(@(h) eta - tanh(m(h) .* L.x) ./ (m(h) .* L.x), 100);
m = m(h);
M = sqrt(h * P * k * Ac) * (T_b - T_inf);
q_f = M * tanh(m * L.x)/2;  % Energia teórica [W]

%% Discretização

Nx = 10;                          % Elementos em x
Ny = Nx;                          % Elementos em y
N = Nx * Ny;                      % Total de elementos
grade = reshape(1:N, Nx, Ny)';    % Grade de índices da malha
dx = L.x / (Nx - 0.5);            % Distância dos pontos em x   [m]
dy = L.y / (Ny - 1);              % Distância dos pontos em y   [m]
x = dx/2:dx:L.x;                  % Coordenadas dos pontos em x [m]
y = 0:dy:L.y;                     % Coordenadas dos pontos em y [m]
face.x = [0:dx:L.x-dx/2, L.x];    % Coordenadas das faces em x  [m]
face.y = [0, dy/2:dy:L.y-dy/2, L.y];   % Coordenadas das faces em y  [m]
delta.x = repmat(diff(face.x), 1, Ny); % Espessura dos volumes em x  [m]
delta.y = repelem(diff(face.y), Nx);   % Espessura dos volumes em y  [m]
area.W = delta.y .* L.z;          % Área das faces oeste [m]
area.E = area.W;                  % Área das faces leste [m]
area.N = delta.x .* L.z;          % Área das faces norte [m]
area.S = area.N;                  % Área das faces sul   [m]
fronteira.W = grade(:, 1)';       % Índices da fronteira oeste
fronteira.E = grade(:, Nx)';      % Índices da fronteira leste
fronteira.N = grade(Ny, :);       % Índices da fronteira norte
fronteira.S = grade(1, :);        % Índices da fronteira sul

% Termos fonte (condições de contorno)
S_P = zeros(1, N);
S_P(fronteira.W) = S_P(fronteira.W) + ...
                    -k .* area.W(fronteira.W) ./ (0.5 .* dx);
S_P(fronteira.E) = S_P(fronteira.E) + ...
                    0 .* area.E(fronteira.E);
S_P(fronteira.N) = S_P(fronteira.N) + ...
                    -h .* area.N(fronteira.N);
S_P(fronteira.S) = S_P(fronteira.S) + ...
                    0 .* area.S(fronteira.S);
```

```matlab

S_C = zeros(1, N);
S_C(fronteira.W) = S_C(fronteira.W) + ...
                    k .* area.W(fronteira.W) .* T_b ./ (0.5 .* dx);
S_C(fronteira.E) = S_C(fronteira.E) + ...
                    0 .* area.E(fronteira.E);
S_C(fronteira.N) = S_C(fronteira.N) + ...
                    h .* T_inf .* area.N(fronteira.N);
S_C(fronteira.S) = S_C(fronteira.S) + ...
                    0 .* area.S(fronteira.S);

b = S_C';   % Vetor de termos independentes

% Coeficientes a_e, a_w, a_n e a_s fora das fronteiras
for l = ["W", "E", "N", "S"]
    a.(l) = zeros(1, N);
    i = ~ismember(1:N, fronteira.(l)); % Termos fora da fronteira
    if l == "W" || l == "E"
        a.(l)(i) = k .* area.(l)(i) ./ dx;
    else
        a.(l)(i) = k .* area.(l)(i) ./ dy;
    end
    % Remover zeros do começo e final
    a.(l) = a.(l)(find(a.(l), 1, 'first'):find(a.(l), 1, 'last'));
end

% Matriz de coeficientes (esparsa)
A = diag(-a.E, 1) + diag(-a.W, -1) + diag(-a.N, Nx) + diag(-a.S, -Nx);
a.P = -sum(A) - S_P;
A = sparse(A + diag(a.P));

%% Resolução e cálculo dos fluxos de calor

T = A\b;
q_in = sum(k.*area.W(fronteira.W).*(T_b-T(fronteira.W)') ./ (0.5.*dx));
q_out = sum(h .* (T(fronteira.N)' - T_inf) .* area.N(fronteira.N));
balanco = q_in - q_out;
erro = abs(q_out - q_f) / q_f;

%% Visualização
T = reshape(T, [], Ny)';          % Reorganizar vetor em matriz
Tm = mean(T);                     % Temperaturas médias em cada x

% Perfil de temperatura vs perfil exato
figure('Name', "Perfil de T")
X_an = linspace(0, L.x, 101);
T_an = T_inf + (T_b-T_inf) .* cosh(m.*(L.x-X_an)) ./ cosh(m.*L.x);
plot(x, Tm, 'ko', X_an, T_an, '-k', 'LineWidth', 1.25)
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 12)
legend("Numérico", "Exato")
xlabel("Comprimento (m)")
ylabel("Temperatura (°C)")
box on; grid on;
```

```
% Isotermas
figure('Name', "Isotermas", 'Position', [25 50 1000 300])
[X, Y] = meshgrid([0 x], y .* 1e3);
Tc = [T_b.*ones(Ny, 1) T];
[C, hn] = contour(X, Y, Tc, [50:5:95], ...
                  'LineWidth', 1.5, 'LineColor', 'k');
clabel(C, hn, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 12)
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 12)
xlabel("Comprimento (m)")
ylabel("Altura (mm)")

% Visualização da malha
figure('Name', "Malha", 'Position', [25 450 1000 300])
[Xf,Yf] = ndgrid(face.x, face.y .* 1e3);
plot(X, Y, 'ok', Xf, Yf, '-k', Xf', Yf', '-k', ...
     'MarkerFaceColor', 'k');
X = repmat(x, [1 Ny]);
Y = repelem(y .* 1e3, Nx);
str = {string(1:N)};
text(X-0.001, Y+0.03, str{1}, 'FontName', 'Times New Roman')
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 12)
xlabel("Comprimento (m)")
ylabel("Altura (mm)")
ylim([0, L.y .* 1e3])
box on;
```