UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Mecânica

EMC 5412 – Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional

Professor Antonio Fabio Carvalho da Silva

Trabalho 1
Avaliação da Condutividade na Interface (Revisado)

Guilherme Gwadera

Florianópolis, 30 de Agosto de 2018

1 Introdução

O problema proposto consiste de uma parede composta por dois materiais de condutividades térmicas diferentes, com um fluxo de calor prescrito na fronteira esquerda ($q'' = 6000\,\mathrm{W/m^2}$) e um fluxo da calor convectivo na fronteira direita ($h = 100\,\mathrm{W/m^2\,K}$ e $T_\infty = 40\,°\mathrm{C}$). Para este caso é assumido estado estacionário.

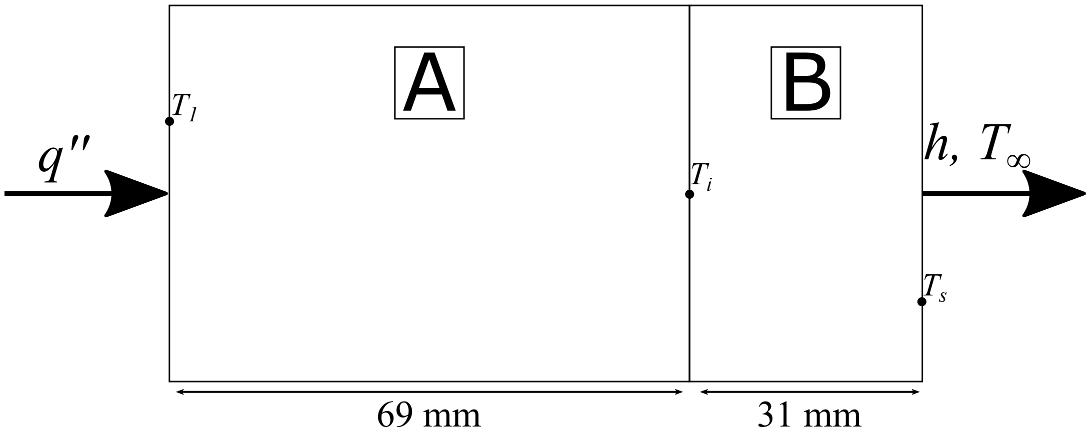

Figura 1: Esquema do problema.

Fazendo um balanço de energia nas fronteiras e na interface de contato, encontra-se facilmente os valores exatos da solução analítica do problema:

$$q'' = \frac{k_A\left(T_1 - T_i\right)}{L_A} = \frac{k_B\left(T_i - T_s\right)}{L_B} = h\left(T_s - T_\infty\right)$$

$$6000\,\mathrm{W/m^2} = \frac{10\left(T_1 - T_i\right)}{0{,}069} = \frac{1\left(T_i - T_s\right)}{0{,}031} = 100\left(T_s - 40\right)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 327{,}4\,°\mathrm{C} \\ T_i &= 286\,°\mathrm{C} \\ T_s &= 100\,°\mathrm{C} \end{aligned}$$

Para a solução numérica do perfil de temperatura, é necessário discretizar a equação diferencial obtida por um balanço de energia (Equação 1), aplicando também as duas condições de contorno (Equações 2 e 3).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{1}$$

$$-k\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = q'' \tag{2}$$

$$-k\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = h\left(T_s - T_\infty\right) \tag{3}$$

Discretizando o domínio em N_A volumes de controle para a parte A e N_B volumes de controle para parte B, utilizando pontos nas fronteiras do domínio, obtém-se uma malha como na figura 2. Os pontos na parte A estão separados por uma distância δx_A e o pontos na parte B estão separados por uma distância δx_B, calculados conforme as equações abaixo:

$$\delta x_A = \frac{L_A}{N_A - 0{,}5} \qquad \delta x_B = \frac{L_B}{N_B - 0{,}5}$$

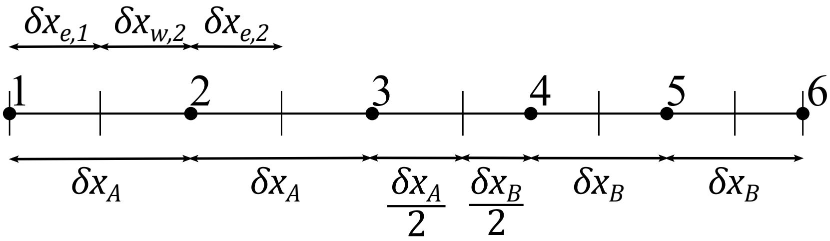

Figura 2: Representação esquemática da malha.

Para os pontos no interior da malha, a discretização pelo método dos volumes finitos para algum ponto P, neste caso denominado de i é dado pelas equações abaixo, sendo o ponto $i+1$ equivalente ao ponto E, e o ponto $i-1$ equivalente ao ponto W:

$$\begin{aligned}
a_p T_P &= a_e T_E + a_w T_W \\
a_i T_i &= a_{i+1} T_{i+1} + a_{i-1} T_{i-1} \\
a_e = a_{i+1} &= \frac{k_e A}{\delta x} = \frac{k_e A}{\delta x_{e,i} + \delta x_{w,i+1}} \\
a_w = a_{i-1} &= \frac{k_w A}{\delta x} = \frac{k_w A}{\delta x_{w,i} + \delta x_{e,i-1}} \\
a_p = a_i &= a_{i+1} + a_{i-1}
\end{aligned}$$

Onde k_e e k_w para o caso de volumes vizinhos com condutividades diferentes são calculados por variação linear ou pela formulação das resistências térmicas:

$$\begin{aligned}
k_{e,\text{linear}} &= f_e k_P + (1 - f_e) k_E = f_e k_i + (1 - f_e) k_{i+1} \\
k_{e,\text{resistências}} &= \left(\frac{1 - f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} = \left(\frac{1 - f_e}{k_i} + \frac{f_e}{k_{i+1}} \right)^{-1} \\
f_e &= \frac{\delta x_{w,E}}{\delta x} = \frac{\delta x_{w,i+1}}{\delta x_{w,i+1} + \delta x_{e,i}} \\
k_{w,\text{linear}} &= f_w k_P + (1 - f_w) k_W = f_w k_i + (1 - f_w) k_{i-1} \\
k_{w,\text{resistências}} &= \left(\frac{1 - f_w}{k_P} + \frac{f_w}{k_W} \right)^{-1} = \left(\frac{1 - f_w}{k_i} + \frac{f_w}{k_{i-1}} \right)^{-1} \\
f_w &= \frac{\delta x_{e,W}}{\delta x} = \frac{\delta x_{e,i-1}}{\delta x_{e,i-1} + \delta x_{w,i}}
\end{aligned}$$

Para a primeira condição de contorno, aplicando a discretização por volumes finitos e integrado a equação diferencial, obtém-se uma equação algébrica da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
a_pT_P &= a_eT_E + b \\
a_1T_1 &= a_2T_2 + b \\
a_p = a_e &= \frac{k_eA}{\delta x} = \frac{k_eA}{\delta x_{e,1} + \delta x_{w,2}} \\
b &= q''A = 6000
\end{aligned}
$$

Para a segunda condição de contorno, a equação discretizada é obtida da mesma forma, encontrando então as equações abaixo, onde N é o último ponto da malha ($N = N_A + N_B$).

$$
\begin{aligned}
a_pT_P &= a_wT_W + b \\
a_NT_N &= a_{N-1}T_{N_1} + b \\
a_w &= \frac{k_wA}{\delta x} = \frac{k_wA}{\delta x_{e,N-1} + \delta x_{w,N}} \\
a_p &= a_w + hA \\
b &= hAT_\infty = 4000
\end{aligned}
$$

Com todas as equações então discretizadas, é construída uma matriz $N \times N$ com os coeficientes lineares a_p, a_e e a_w de cada ponto da malha em cada linha da matriz, gerando assim uma matriz tri-diagonal. A partir das duas condições de contorno, é construída a matriz coluna dos termos independentes do sistema linear, dados pelo fluxo de calor prescrito e o coeficiente convectivo com sua respectiva temperatura do fluido externo. Então, o sistema de equações pode ser resolvido utilizando os algoritmos internos do *MATLAB*, encontrando as temperaturas em cada ponto da malha. Como exemplo, para a malha representada na Figura 2, o sistema de equações é:

$$
\begin{bmatrix}
362{,}3188 & -362{,}3188 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-362{,}3188 & 724{,}6377 & -362{,}3188 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -362{,}3188 & 494{,}2450 & -131{,}9261 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -131{,}9261 & 212{,}5713 & -80{,}6452 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -80{,}6452 & 161{,}2903 & -80{,}6452 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -80{,}6452 & 180{,}6452
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4000 \end{bmatrix}
$$

2 Resultados

Usando a malha da Figura 2, isto é, dividindo o domínio em 6 volumes (3 para cada material), o perfil de temperatura resultante é o que está apresentado na Figura 3. Nota-se que ao avaliar a condutividade na interface pelo método das resistências, os valores de temperaturas obtidos são exatos. Porém, avaliando a condutividade pela variação linear, as temperaturas no material A já são subestimadas. Como a solução exata do problema já possui um comportamento linear, e como o método dos volumes finitos é conservativo, a discretização das equações com a condutividade avaliada pelo método das resistências é equivalente às equações analíticas. Logo, utilizando este método para calcular a condutividade térmica na interface, o resultado será sempre o exato para este caso em específico, e sem ser influenciado pelo tamanho da malha.

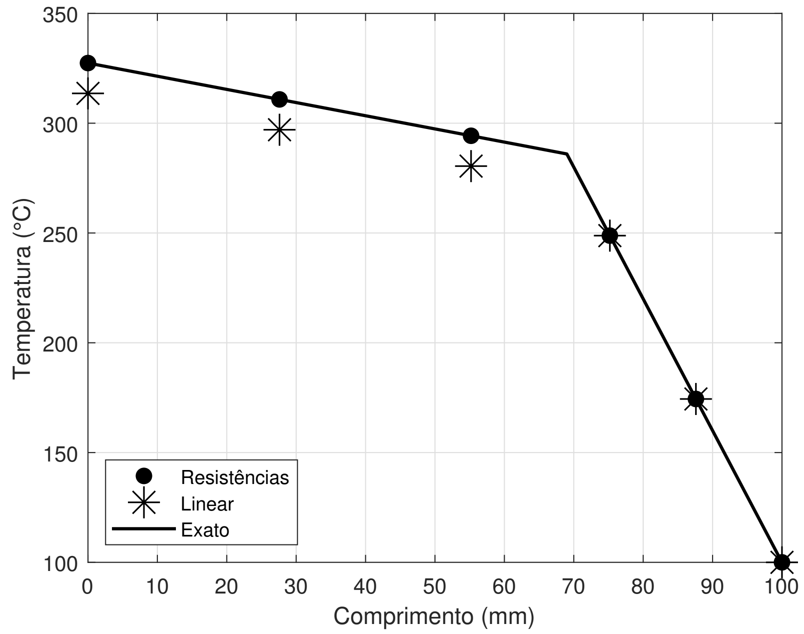

Figura 3: Perfil de temperatura com 6 volumes de controle no total.

Ao aumentar o número de volumes de controle para 20, com 10 volumes em cada material, o perfil de temperatura obtido é o da Figura 4. Pode-se observar que as temperaturas com a avaliação linear da condutividade na interface tendem a se aproximar do resultado exato ao refinar a malha. Esse resultado é lógico, pois ao diminuir a espessura dos volumes de controle, o cálculo da condutividade por variação linear se torna cada vez mais próximo do valor real. Esse comportamento pode ser observado na Figura 5, no qual o erro absoluto da temperatura T_1 tende ao valor nulo, porém, após um N de cerca de 40 volumes, o erro diminui a uma taxa muito menor em relação ao número de volumes.

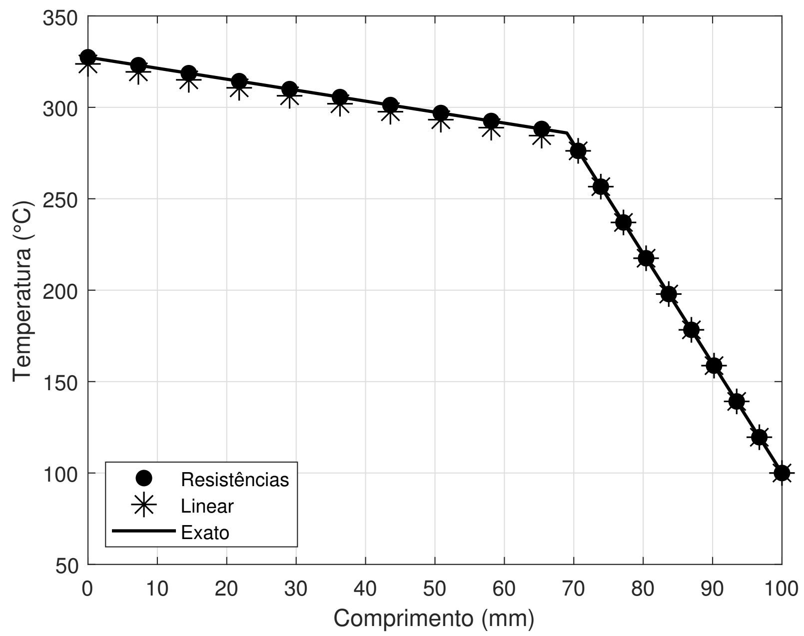

Figura 4: Perfil de temperatura com 20 volumes de controle no total.

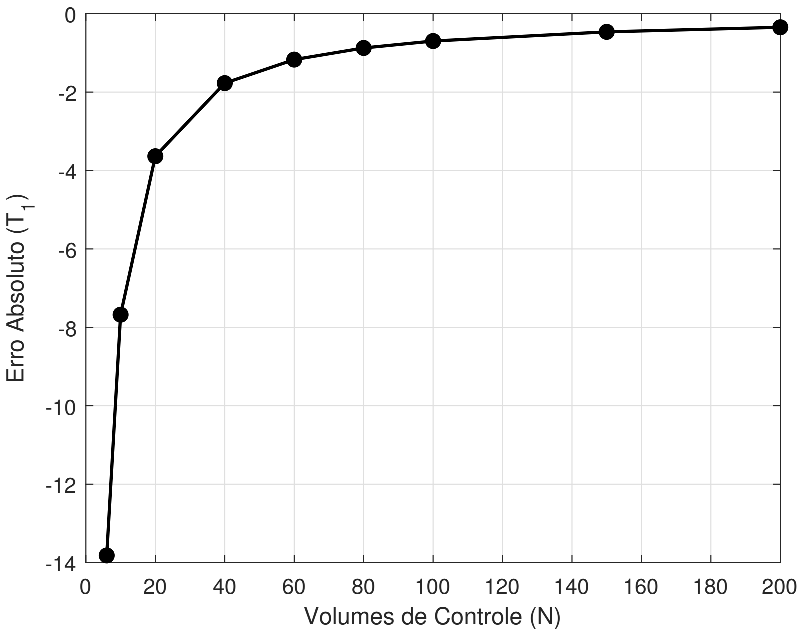

Figura 5: Erro absoluto da temperatura na fronteira esquerda ao variar o número de volumes de controle e utilizando a variação linear da condutividade na interface.

3 Conclusão

Neste trabalho foi implementado um programa para a resolução de um problema de condução de calor no estado estacionário, através da discretização pelo método dos volumes finitos, no qual a condutividade térmica na interface entre os dois materiais foi avaliada pelo método das resistências e por variação linear. Os resultados mostraram que para o método das resistências, o resultado obtido é exato, enquanto que para a variação linear, é necessário refinar muito mais a malha para se obter um perfil de temperatura próximo ao perfil real.

4 Código

```
%% Parâmetros e Constantes

k_A = 10;         k_B = 1;          % Condutividade - W/(m*K)
L_A = 0.069;      L_B = 0.031;      % Comprimento - m
N_A = 3;          N_B = N_A;        % Número de volumes em A e B
h   = 100;                          % Coeficiente convectivo - W/(m^2*K)
T_inf = 40;                         % Temperatura do fluido - °C
q_presc = 6000;                     % Fluxo prescrito - W/m^2
Area = 1;                           % Área da face - m^2
exato = [327.4, 100];               % Solução exata

%% Discretização e Inicialização

dx_A = L_A / (N_A - 0.5);           % Distância entre pontos em A
dx_B = L_B / (N_B - 0.5);           % Distância entre pontos em B
N    = N_A + N_B;                   % Número total de volumes
dx   = [ones(1, N_A) .* dx_A, ones(1, N_B) .* dx_B];
dx_w = [0, ones(1, N_A-1) .* dx_A./2, ...
        ones(1, N_B).*dx_B./2];          % distâncias entre cada P e w
dx_e = [ones(1, N_A) .* dx_A./2, ...
        ones(1, N_B-1).*dx_B./2, 0]; % distâncias entre cada P e e
k = [ones(1, N_A) .* k_A, ones(1, N_B) .* k_B];  % k em cada ponto
A = zeros(N, N);                    % Matriz dos coeficientes
b = zeros(N, 1);                    % Vetor dos termos independentes

%% Resolução

% Construção do sistema de equações
for i = 1:N
    % Condutividade nas interfaces (kw e ke)
    if i == 1
        fe = dx_w(i+1) / (dx_e(i) + dx_w(i+1));
        ke = 1 / ((1 - fe) / k(i) + fe / k(i+1));   % resistências
        %ke = fe * k(i) + (1 - fe) * k(i+1);         % linear
    elseif i == N
        fw = dx_e(i-1) / (dx_w(i) + dx_e(i-1));
        kw = 1 / ((1 - fw) / k(i) + fw / k(i-1));   % resistências
        %kw = fw * k(i) + (1 - fw) * k(i-1);         % linear
    else
        fe = dx_w(i+1) / (dx_e(i) + dx_w(i+1));
        fw = dx_e(i-1) / (dx_w(i) + dx_e(i-1));
        ke = 1 / ((1 - fe) / k(i) + fe / k(i+1));   % resistências
        %ke = fe * k(i) + (1 - fe) * k(i+1);         % linear
        kw = 1 / ((1 - fw) / k(i) + fw / k(i-1));   % resistências
        %kw = fw * k(i) + (1 - fw) * k(i-1);         % linear
    end
```

```
    if i == 1
        % Fronteira com fluxo prescrito
        dx_PE = dx_e(i) + dx_w(i+1);    % distância entre P e E
        ae = ke * Area / dx_PE;
        ap = ae;
        b(i) = q_presc * Area;
        A(i, [i, i+1]) = [ap, -ae];
    elseif i == N
        % Fronteira com fluxo convectivo
        dx_PW = dx_w(i) + dx_e(i-1);    % distância entre P e W
        aw    = kw * Area / dx_PW;
        ap    = aw + h * Area;
        b(i)  = h * Area * T_inf;
        A(i, [i-1, i]) = [-aw, ap];
    else
        % Pontos no interior da malha
        dx_PE = dx_e(i) + dx_w(i+1);
        dx_PW = dx_w(i) + dx_e(i-1);
        ae    = ke * Area / dx_PE;
        aw    = kw * Area / dx_PW;
        ap    = ae + aw;
        A(i, [i-1, i, i+1]) = [-aw, ap, -ae];
    end
end

% Resolução do sistema de equações
T = A \ b;
```