UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Mecânica

EMC 5412 – Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional

Professor Antonio Fabio Carvalho da Silva

Trabalho 2
Formulação Explícita da Condução Transiente

Guilherme Gwadera

Florianópolis, 23 de Agosto de 2018

1 Introdução

Este segundo problema proposto consiste de uma parede com espessura $L = 0{,}2\,\mathrm{m}$ inicialmente a uma temperatura $T_i = 25\,°\mathrm{C}$, sendo aquecida em sua superfície direita por um ambiente a $T_\infty = 200\,°\mathrm{C}$ e coeficiente convectivo h, enquanto a superfície esquerda está isolada termicamente. É pedido o perfil de temperatura ao longo do tempo, e como o mesmo varia com a malha e o passo de tempo utilizado para a resolução numérica. A Figura 1 ilustra o problema, representando esquematicamente como foi feito o posicionamento dos volumes de controle, com N pontos igualmente espaçados em uma distância Δx.

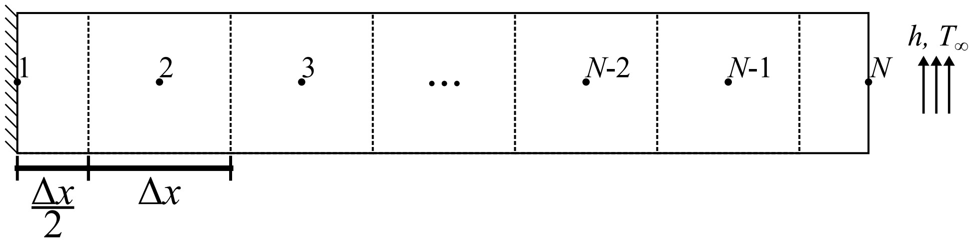

Figura 1: Representação esquemática do problema e dos volumes de controle.

Fazendo um balanço de energia no sistema em questão, encontra-se a Equação 1, sendo a condição inicial dada pela Equação 2, e as condições de contorno dadas pelas Equações 3 e 4.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

$$T\left(x, t = 0\right) = 25\,°\mathrm{C} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(x = 0, t\right) = 0 \tag{3}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\left(x = L, t\right) = h\left(T_\infty - T\right) \tag{4}$$

Onde o coeficiente convectivo h é um valor tal que $\mathrm{Bi} = 1{,}3$. Logo, o valor de h pode ser calculado como:

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k} \quad \therefore \quad h = \frac{1{,}3 \cdot 1}{0{,}2} = 6{,}5\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}$$

Fazendo a discretização da Equação 1 pelo método dos volumes finitos, utilizando a formulação explícita para a discretização no tempo ($f = 0$), a equação algébrica para os pontos nos volumes interiores (de 2 a $N-1$) é dada pelas equações abaixo, onde j é a posição no tempo e i é a posição no espaço.

$$a_p T_P = a_e T_E^0 + a_w T_W^0 + \left(a_p^0 - a_e - a_w\right) T_P^0$$

$$a_p T_i^{j+1} = a_e T_{i+1}^j + a_w T_{i-1}^j + \left(a_p^0 - a_e - a_w\right) T_i^j \tag{5}$$

Nas quais a_p^0, a_p, a_e e a_w são dados pelas equações abaixo, considerando que a condutividade térmica é uniforme e a área da superfície é unitária:

$$a_p^0 = a_p = \frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t}$$
$$a_e = a_w = \frac{k}{\Delta x}$$

Para a superfície esquerda isolada termicamente, a condição de contorno implica em $a_w = 0$, e o volume possui metade da espessura, de forma que a equação algébrica resultante é:

$$\left(\frac{a_p}{2}\right) T_P = a_e T_E^0 + \left(\frac{a_p^0}{2} - a_e\right) T_P^0$$
$$\left(\frac{a_p}{2}\right) T_1^{j+1} = a_e T_2^j + \left(\frac{a_p^0}{2} - a_e\right) T_1^j \tag{6}$$

Para a superfície do lado direito com a condição de contorno convectiva, pode-se assumir um falso coeficiente $a_e = h$, considerando área superficial unitária, associado a temperatura $T_E = T_\infty$, resultando em:

$$\left(\frac{a_p}{2}\right) T_P = a_w T_W^0 + \left(\frac{a_p^0}{2} - a_w - h\right) T_P^0 + hT_\infty$$
$$\left(\frac{a_p}{2}\right) T_N^{j+1} = a_w T_{N-1}^j + \left(\frac{a_p^0}{2} - a_w - h\right) T_N^j + hT_\infty \tag{7}$$

Com a equação diferencial então discretizada (Equações 5, 6 e 7), o processo de cálculo se realiza pela marcha no tempo. Os passos de espaço e tempo necessários para a resolução numérica foram calculados de acordo com as Equações 8 e 9, respectivamente, considerando o intervalo de estabilidade numérica para o passo de tempo. Para padronizar os resultados em diferentes números de volumes e passos de tempo, foi estabelecido um tempo final de 100 horas.

$$\Delta x = \frac{L}{N-1} \tag{8}$$
$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p \Delta x^2}{2k} \tag{9}$$

2 Resultados

Para uma primeira análise, a resolução das equações foram feitas com 10 volumes de controles ($N = 10$), resultando em um $\Delta x = 0{,}0222$ m e $\Delta t = 666{,}67$ s. Os perfis de temperatura nos tempos de 25 h, 50 h, 75 h e 100 h encontrados para esta situação estão apresentados na 2. Os resultados obtidos seguem o comportamento esperado do sistema, no qual a temperatura da superfície direita eleva-se ao longo do tempo devido a temperatura ambiente, fazendo com que exista um fluxo de calor em direção à superfície isolada, onde há o acúmulo de calor.

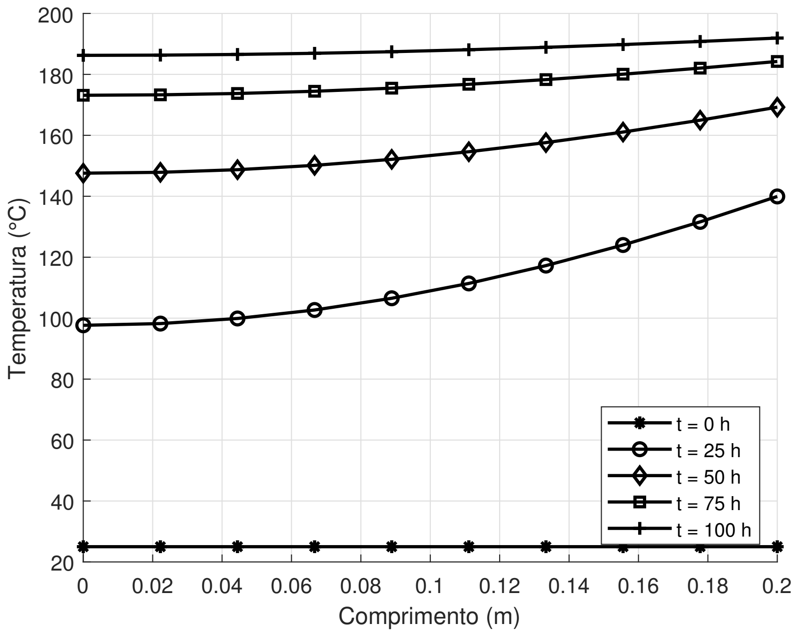

Figura 2: Perfis de temperatura para $N = 10$.

Como o coeficiente convectivo é da ordem de convecção natural, o aquecimento da parede é bastante demorado, visto que para as 100 horas utilizadas como tempo final, o sistema ainda não atinge o estado estacionário. Considerando um tempo final de 200 horas, a temperatura do ponto na superfície esquerda atinge 199,05 °C, o que significa que a solução está ainda se aproximando do estado estacionário. Para um tempo final de 500 horas, a temperatura T_1 é de 199,9997 °C, ou seja, é aproximadamente 200 °C, podendo-se dizer que o estado estacionário já foi atingido.

Para avaliar o efeito do refinamento da malha, o número de volumes de controle foi aumentado, visando comparar os passos de espaço e de tempo necessários, como também os valores finais de T_1 e T_N (primeiro e último pontos). Para isto, o problema foi resolvido utilizando 10, 50, 100, 200 e 500 volumes. Os resultados estão sumarizados na Tabela 1. Nota-se que o número de pontos utilizados na malha não possui tanta influência nos resultados numéricos, já que as diferenças nas temperaturas são ínfimas. No entanto, para um número maior de volumes, o Δx, e consequentemente Δt, começam a ficar muito pequenos, aumentando o requerimento computacional para os cálculos. Logo, para este caso em específico, não há a necessidade do refinamento da malha para obter resultados mais próximos do exato.

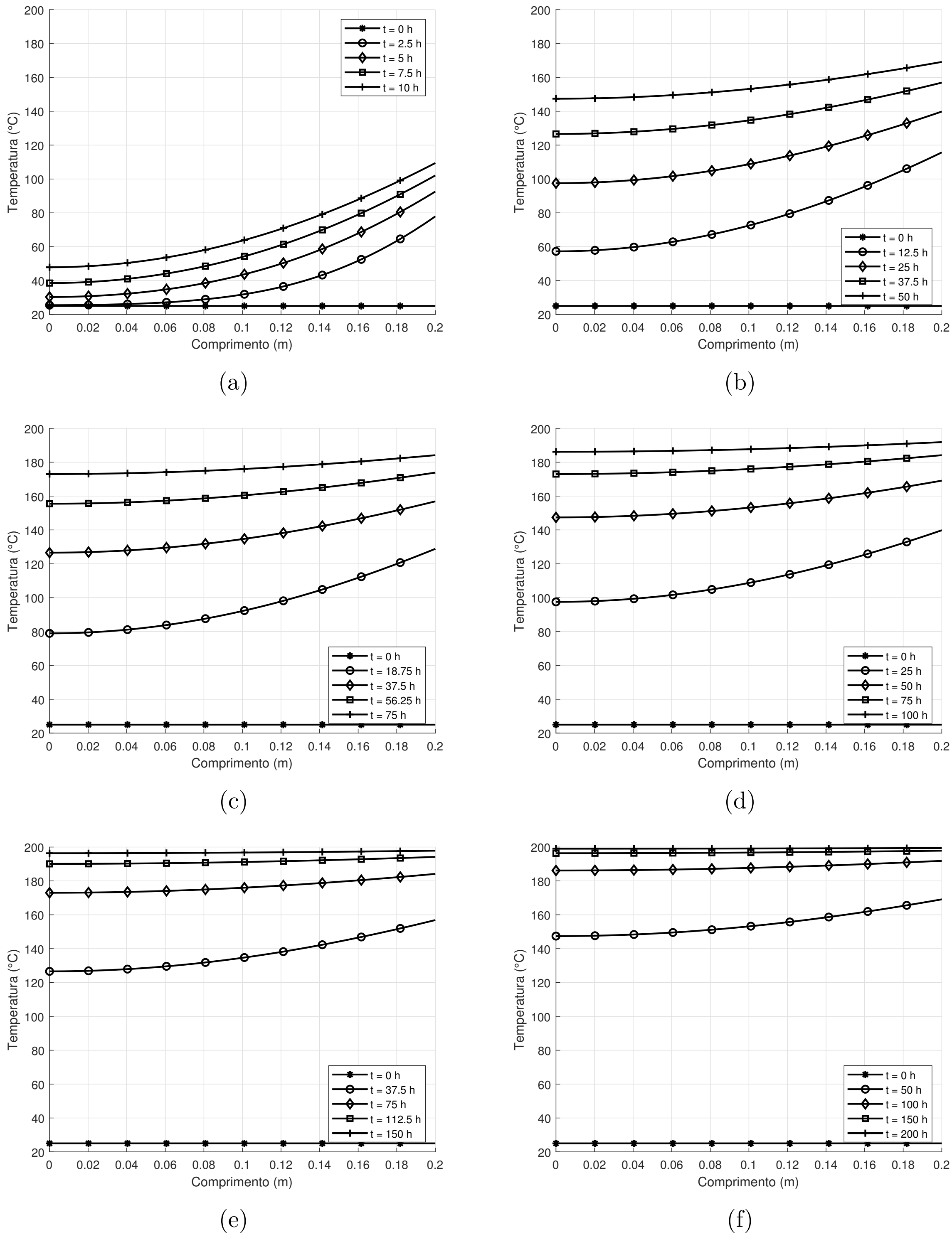

Figura 3: Perfis de temperatura para $N = 100$ e tempos finais de (a) 10 h, (b) 50 h, (c) 75 h, (d) 100 h, (e) 150 h e (f) 200 h.

N	Δx (m)	Δt (s)	T_1 (°C)	T_N (°C)
10	0,02222	666,66667	186,24680	191,93008
50	0,00408	22,49063	186,15188	191,86811
100	0,00202	5,50964	186,15096	191,86740
200	0,00101	1,36360	186,15027	191,86696
500	0,00040	0,21687	186,15018	191,86689

Tabela 1: Resultados do estudo de malha.

Como a solução exata para o problema não foi obtida, uma alternativa que pode ser utilizada é a validação numérica, com algum *software* já testado exaustivamente para verificar se fornece resultados corretos. Para tal, foi utilizado o *software* COMSOL Multiphysics para resolver o mesmo problema e comparar os resultados, utilizando as mesmas condições do problema proposto. A Figura 4 mostra a diferença nos valores da temperatura em 100 horas, usando o código de MATLAB deste trabalho e o *software* COMSOL, e mesmo número de elementos na malha em ambos (N = 100). Pode-se observar que a diferença entre os valores é baixa, estando na segunda casa decimal. Portanto, conclui-se que os resultados obtidos neste trabalho estão próximos do correto.

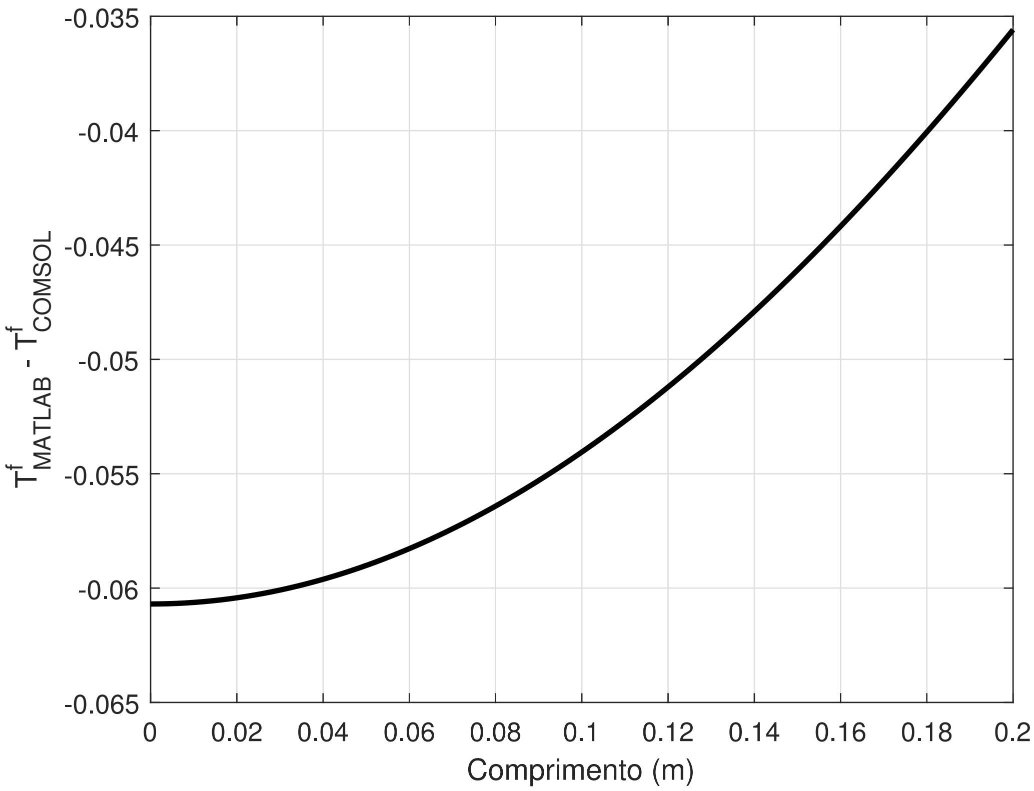

Figura 4: Validação numérica dos resultados.

3 Conclusão

Neste trabalho foi implementado o código para a resolução numérica de um problema de condução transiente, por meio do métodos dos volumes finitos, com a formulação explícita para o tempo. Os perfis de temperatura obtidos estavam de acordo com o esperado, no qual o aquecimento ocorria da superfície em contato com o ambiente aquecido em direção a superfície isolada. Foi observado que o número de volumes utilizados para os cálculos não possui tanta influência nos resultados. O código foi validado numericamente por comparação com outro *software*, onde foi observado coerência entre os resultados de ambos.

4 Código

```
%% Parâmetros e Constantes

k  = 1;                          % Condutividade - W/(m*K)
cp = 1000;                       % Calor específico - J/(kg*K)
rho = 3000;                      % Massa específica - kg/m^3
L  = 0.2;                        % Comprimento - m
Bi = 1.3;                        % Número de Biot
h  = Bi * k / L;                 % Coeficiente convectivo - W/(m^2*K)
T_inf = 200;                     % Temperatura do fluido - °C
Ti = 25;                         % Temperatura inicial - °C
tf = 100 * 3600;                 % Tempo final - s
N  = 20;                         % Número de volumes
dx = L / (N - 1);                % Espessura dos volumes - m
dt = 0.45 * dx^2 * rho * cp / k; % Passo de tempo - s
x  = 0:dx:L;                     % Posições dos pontos
t  = 0:dt:tf;                    % Tempos

%% Resolução

T = ones(length(t), N) .* Ti;    % Matriz de temperaturas
a = k / dx;                      % Coeficientes aw e ae
ap = rho * cp * dx / dt;         % Coeficiente ap e ap_0

% Cálculo do perfil de T pela marcha no tempo
for j = 1:length(t)-1
    % Temperatura na superfície esquerda
    T(j+1, 1) = (a * T(j, 2) + (ap/2 - a) * T(j, 1)) / (ap/2);

    % Temperaturas no interior
    for i = 2:N-1
        T(j+1, i) = (a * (T(j, i-1) + T(j, i+1)) + ...
                     (ap - 2 * a) * T(j,i)) / ap;
    end

    % Temperatura na superfície direita
    T(j+1, N) = (a * T(j, N-1) + (ap/2 - h - a) * ...
                T(j, N) + h * T_inf) / (ap/2);
end
```