UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Mecânica

EMC 5412 – Transferência de Calor e
Mecânica dos Fluidos Computacional

Professor Antonio Fabio Carvalho da Silva

Trabalho 3
Formulação Implícita da Condução Transiente

Guilherme Gwadera

Florianópolis, 14 de Setembro de 2018

1 Introdução

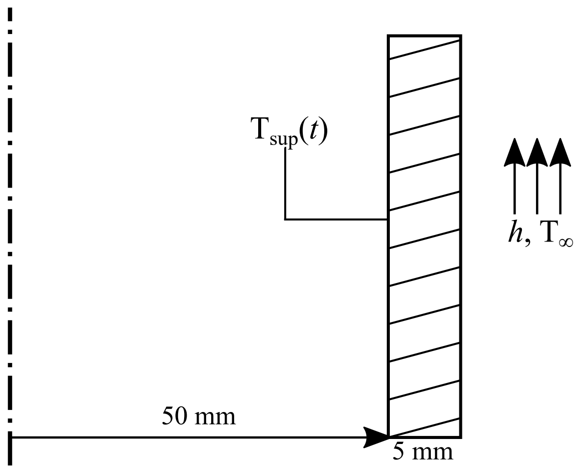


Figura 1: Representação esquemática do problema.

Neste problema há um longo cilindro de alumínio ($\rho = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 900\,\mathrm{J/kg\,°C}$, $k = 230\,\mathrm{W/m\,°C}$) com raio interno de 50 mm e uma parede com espessura de 5 mm, inicialmente a uma temperatura de 80 °C, conforme a Figura 1. No instante $t = 0$, a temperatura da superfície interna passa a variar de acordo com

$$T_{\mathrm{sup}}(t) = 150\,\mathrm{°C} + 50\,\mathrm{°C}\cos(50\pi t)$$

onde o tempo é dado em segundos, enquanto a superfície externa troca calor por convecção com um fluido externo, com $h = 20\,000\,\mathrm{W/m^2\,°C}$ e $T_\infty = 80\,\mathrm{°C}$.

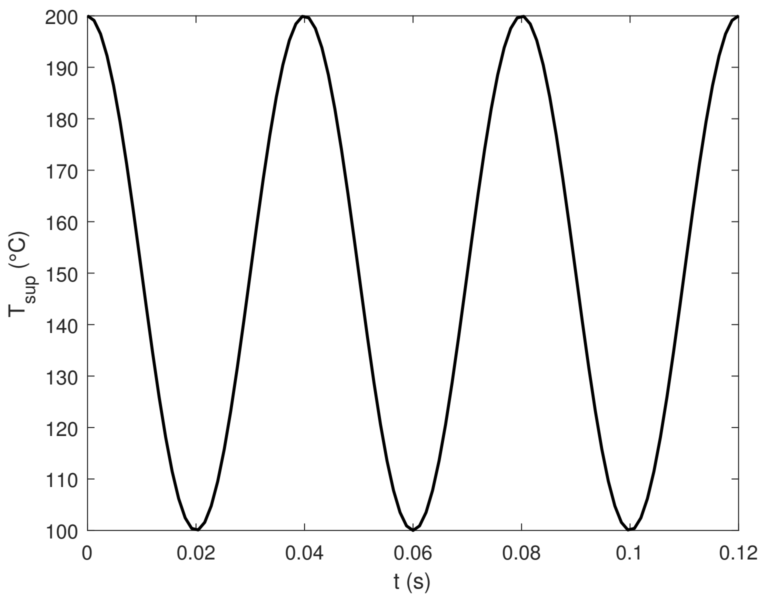


Figura 2: Gráfico de T_{sup} ao longo do tempo.

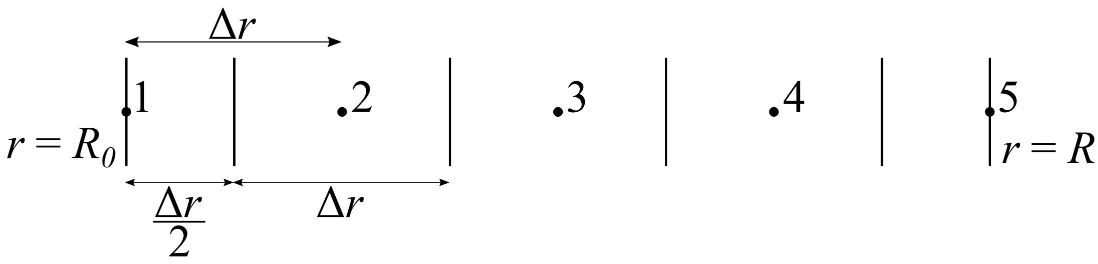


Figura 3: Representação da malha utilizada para a resolução.

Realizando um balanço de energia sobre o sistema, em coordenadas cilíndricas, é encontrada a equação

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

na qual as seguintes condições de contorno e condição inicial são aplicadas

$$T(r = R_0, t) = T_{\text{sup}}(t)$$
$$-k\frac{\partial T}{\partial r}(r = R, t) = h(T - T_\infty)$$
$$T(r, t < 0) = 80\,^\circ\text{C}$$

Para a resolução por meio dos métodos dos volumes finitos, a geometria unidimensional axissimétrica foi discretizada em N volumes de controle, conforme a Figura 3, na qual $R_0 = 50\,\text{mm}$, $R = 55\,\text{mm}$ e $N = 5$. Os pontos das fronteiras estão localizados nas superfícies, enquanto os pontos internos estão localizados nos centros dos volumes de controle.

Neste caso, foi utilizada a formulação totalmente implícita da condução transiente, ou seja, a temperatura de um ponto em um certo intervalo de tempo Δt é igual a temperatura no instante $t + \Delta t$. Os volumes de controle possuem uma espessura Δr, e os pontos estão todos igualmente espaçados, com uma distância Δr, calculado por

$$\Delta r = \frac{R - R_0}{N - 1}$$

Para o primeiro volume de controle, a temperatura é dada pela condição de contorno em função do tempo:

$$T_1 = T_{\text{sup}}(t)$$

Para os volumes de controle internos, a equação discretizada e seus coeficientes é

$$a_p T_P = a_e T_E + a_w T_W + a_p^0 T_P^0$$
$$a_e = \frac{kA_e}{\Delta r} = \frac{k(2\pi r_e H)}{\Delta r}$$
$$a_w = \frac{kA_w}{\Delta r} = \frac{k(2\pi r_w H)}{\Delta r}$$
$$a_p^0 = \frac{M_P c_p}{\Delta t} = \frac{(\rho\pi(r_e^2 - r_w^2)H)c_p}{\Delta t}$$
$$a_p = a_e + a_w + a_p^0$$

onde a área de cada face do volume foi calculada pela equação de superfície de cilindros ($A = 2\pi r H$), na qual a altura H é unitária. A massa do volume de controle é encontrada pela relação $M_P = \rho V_P$, na qual o volume é calculado pela equação de cilindro anular ($V_P = \pi(R^2 - r^2)H$). As coordenadas r_e e r_w são calculadas de acordo com as seguintes equações, onde r_P é a coordenada do ponto P.

$$\begin{aligned} r_e &= r_P - \frac{\Delta r}{2} \\ r_w &= r_P + \frac{\Delta r}{2} \end{aligned}$$

Para o último volume de controle, com a condição de contorno de fluxo convectivo, a equação algébrica e seus coeficientes são:

$$\begin{aligned} a_p T_P &= a_w T_W + a_p^0 T_P^0 + b \\ a_w &= \frac{k A_w}{\Delta r} = \frac{k(2\pi r_w H)}{\Delta r} \\ a_p^0 &= \frac{M_P c_p}{\Delta t} = \frac{(\rho\pi(R^2 - r_w^2)H)c_p}{\Delta t} \\ b &= hAT_\infty = h(2\pi R H)T_\infty \\ a_p &= hA + a_w + a_p^0 \end{aligned}$$

Como a formulação totalmente implícita da condução transiente é estável para qualquer intervalo de tempo utilizado, pois os coeficientes serão sempre positivos, poderia ser escolhido qualquer Δt arbitrário para a resolução deste problema. No entanto, devido a condição de contorno transiente, com um período de 0,04 s como mostrado na Figura 2, o intervalo de tempo utilizado deve ser menor que este período para capturar corretamente o comportamento periódico do sistema. Neste caso, Δt foi obtido dividindo o tempo de um período em intervalos cada vez menores, para avaliar a influência do passo de tempo utilizado na resolução numérica.

Tomando como exemplo a malha da Figura 3, com 5 volumes de controle ($\Delta r = 1{,}25\,\mathrm{mm}$), e passo de tempo $\Delta t = 0{,}002\,\mathrm{s}$, o sistema de equações lineares em forma matricial resultante é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -58528 & 607559 & -59973 & 0 & 0 \\ 0 & -59973 & 622377 & -61418 & 0 \\ 0 & 0 & -61418 & 637195 & -62863 \\ 0 & 0 & 0 & -62863 & 330705 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\mathrm{sup}}(t) \\ 489058\,T_2^0 \\ 500986\,T_3^0 \\ 512914\,T_4^0 \\ 260930\,T_5^0 + 552920 \end{bmatrix}$$

O algoritmo de resolução consiste então em calcular a matriz coluna de termos independentes para cada passo de tempo, a partir das temperaturas do tempo anterior (T^0), e em seguida, resolver o sistema de equações lineares. A solução do sistema de equações foi obtida utilizando o *solver* do MATLAB. O critério escolhido para determinar se o regime transiente periódico havia sido alcançado foi a variação no perfil de temperatura ao longo da parede entre o período atual e o anterior, onde cada período possui 0,04 s. Se a variação de temperatura calculada conforme a equação abaixo fosse menor que uma certa tolerância ($\varepsilon = 10^{-4}$), o programa interrompia o *loop* de cálculo, significando que o regime havia sido alcançado. Senão, o programa continuava a avançar no tempo.

$$|T(r,t) - T(r, t - 0{,}04\,\mathrm{s})| < \varepsilon$$

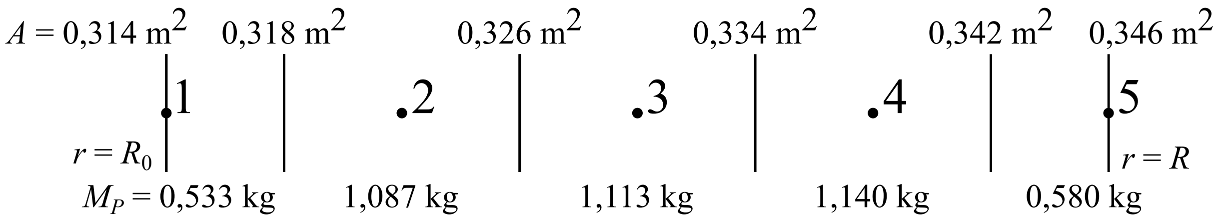
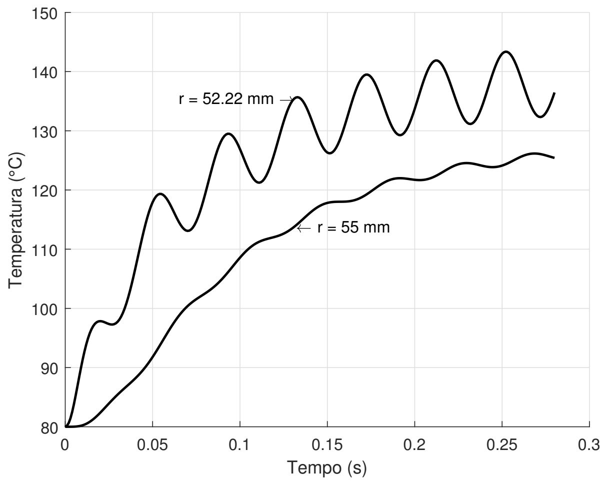


Figura 4: Exemplo da resolução com 5 volumes de controle, com as áreas de cada face e as massas de cada volume.

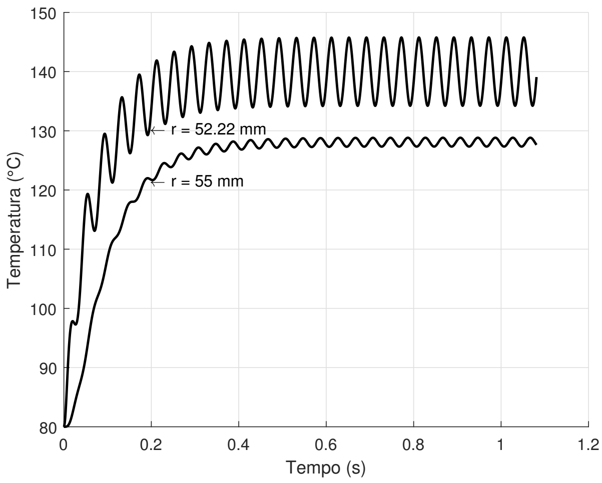
2 Resultados

Utilizando 10 pontos na malha e com $\Delta t = 0{,}02/10 = 0{,}002$ s, os perfis de temperatura ao longo do tempo no volume central da parede e na superfície externa obtidos estão apresentados nas Figuras 5a e 5b. Os perfis de temperatura na parede no início do aquecimento estão mostrados nas Figuras 6a e 6b. Pode-se observar que devido a temperatura prescrita periódica no tempo, a temperatura ao longo da parede sobe de forma intermitente. Após cerca de 1 segundo, a temperatura da superfície externa atinge o regime transiente periódico, significando que o sistema inteiro atingiu tal regime. Isso ocorre porque o fluxo de calor percorre a parede em direção à superfície externa resfriada, a partir da superfície interna aquecida. Variando o número de volumes não se nota uma diferença significativa nas temperaturas, somente uma suavização do perfil devido à melhor precisão obtida com mais pontos na malha de cálculo.

Ao se utilizar um $\Delta t = 0{,}02$ s, ou seja, metade de um período da condição de contorno periódica, o perfil obtido é o da Figura 7a. Nota-se que os perfis possuem um comportamento menos suave, já que neste caso a temperatura da superfície interior varia em pulsos, sendo 100 °C em um instante, e 200 °C em outro. Já com um $\Delta t = 0{,}04$ s ou um múltiplo desse número, a variação periódica de $T_{\text{sup}}(t)$ não é capturada, resultando em um valor constante de temperatura na superfície ($T_{\text{sup}} = 200\,°\text{C}$), e obtendo um perfil conforme a Figura 7b. Neste caso, o perfil alcança um regime totalmente estacionário, e com uma temperatura mais elevada.

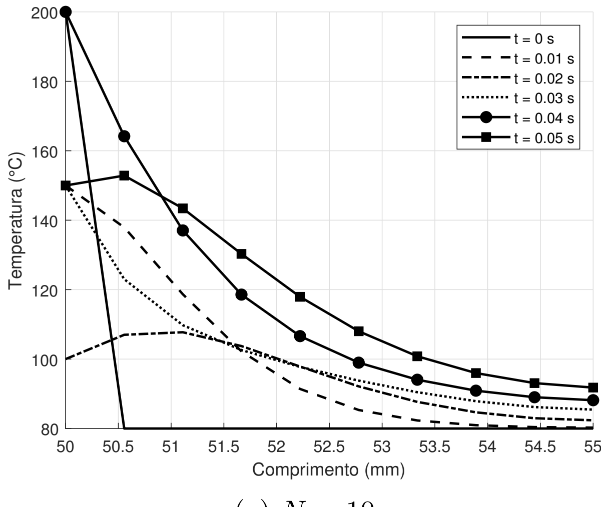


(a) Início

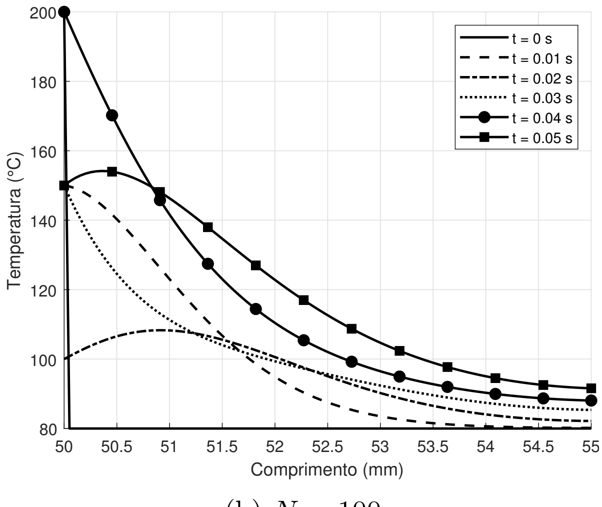


(b) Regime transiente periódico

Figura 5: Perfis de temperatura no volume central da parede e na superfície externa, com $N = 10$ e $\Delta t = 0{,}002$ s.

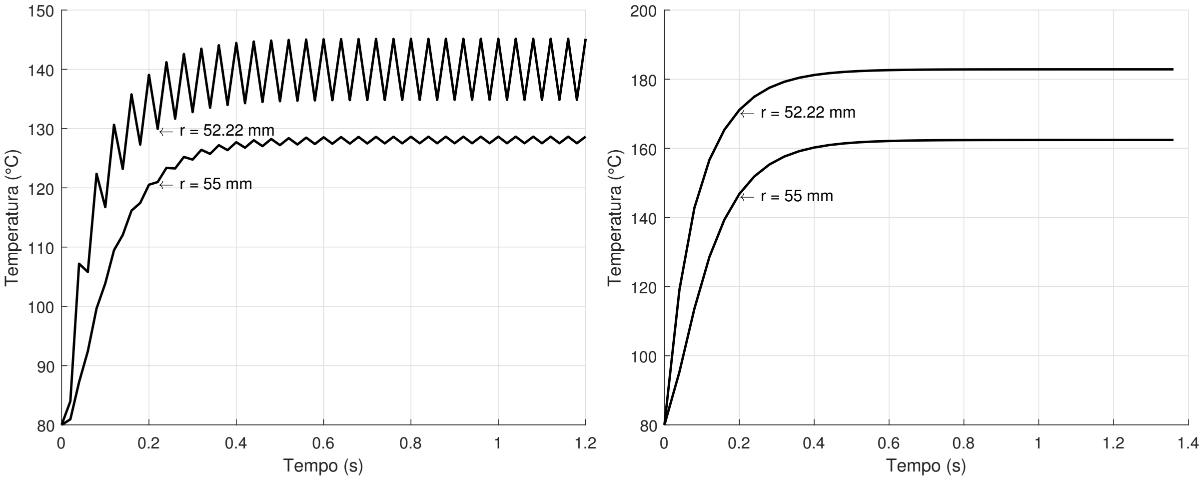


(a) $N = 10$



(b) $N = 100$

Figura 6: Perfis de temperatura na parede nos primeiros 6 passos de tempo $\Delta t = 0{,}002$ s



(a) $\Delta t = 0{,}02$ s (b) $\Delta t = 0{,}04$ s

Figura 7: Perfis de temperatura no volume central e na superfície externa, com $N = 10$.

3 Conclusão

Neste trabalho foi implementado um programa para a resolução de um problema de condução transiente com condição de contorno em função do tempo, por meio do métodos dos volumes finitos, utilizando a formulação totalmente implícita. Foi obtido os perfis de temperatura ao longo do tempo, os quais atingiam um regime transiente periódico após algum tempo, devindo à variação periódica da temperatura da superfície interna. Observou-se que a escolha do tamanho de passo de tempo possuía grande influência nos resultados, podendo até eliminar a periodicidade dos perfis de temperatura. Variando o número de volumes de controle utilizados, não foi observado um grande efeito no valor dos resultados.

4 Código

```
%% Parâmetros e Constantes
k   = 230;              % Condutividade [W/(m*K)]
rho = 2700;             % Massa específica [kg/m^3]
cp  = 900;              % Calor específico [J/kg K]
R0  = 50e-3;            % Raio interno [m]
R   = 55e-3;            % Raio externo [m]
H   = 1;                % Altura do cilindro [m]
N   = 5;                % Número de volumes
Ti  = 80;               % Temperatura inicial [°C]
h   = 20000;            % Coeficiente convectivo [W/m^2 K]
T_inf = 80;             % Temperatura do fluido [°C]
T_sup = @(t) 150 + 50 .* cos(50 .* pi .* t);  % T da superfície [°C]

%% Discretização e Inicialização
dr = (R - R0) / (N - 1);            % Distância entre pontos [m]
r  = R0:dr:R;                       % Coordenadas dos pontos P [m]
r_e = [r(1:N-1) + dr./2, r(N)];     % Coordenadas dos pontos e [m]
r_w = [r(1), r(2:N) - dr./2];       % Coordenadas dos pontos w [m]
Area = [R0, (R0+dr/2):dr:(R-dr/2), R]* 2 * pi * H; % Área das faces
Vol  = (r_e.^2 - r_w.^2) * pi * H;  % Volumes [m^3]
dt = 0.02 / 10;                     % Passo de tempo [s]
per = 0.04 / dt;                    % Número de passos em um período
bn = h * Area(N+1) * T_inf;         % CC fluxo convectivo
tol = 1E-4;                         % Tolerância critério de parada
T(1:N) = Ti;  T(1) = T_sup(0);      % Inicialização com T inicial

%% Resolução
ae = [0, k .* Area(3:N) ./ dr];     % Coeficientes face leste
aw = k .* Area(2:N) ./ dr;          % Coeficientes face oeste
ap0 = rho .* Vol .* cp ./ dt;
ap = [ae, h*Area(N+1)] + [1, aw] + [0, ap0(2:N)];
A = diag(-ae, 1) + diag(ap) + diag(-aw, -1);  % Matriz tridiagonal

for t = dt:dt:10
    T0 = T(end, 1:N);
    % Matriz coluna de termos independentes
    b = [T_sup(t), ap0(2:N-1).*T0(2:N-1), ap0(N).*T0(N) + bn]';
    % Resolução do sistema de equações
    T(end+1, 1:N) = (A \ b)';
    % Critério de parada
    if size(T, 1) > per
        delta = T(end, :) - T(end-per, :);
        if all(abs(delta) < tol)
            break
        end
    end
end
```