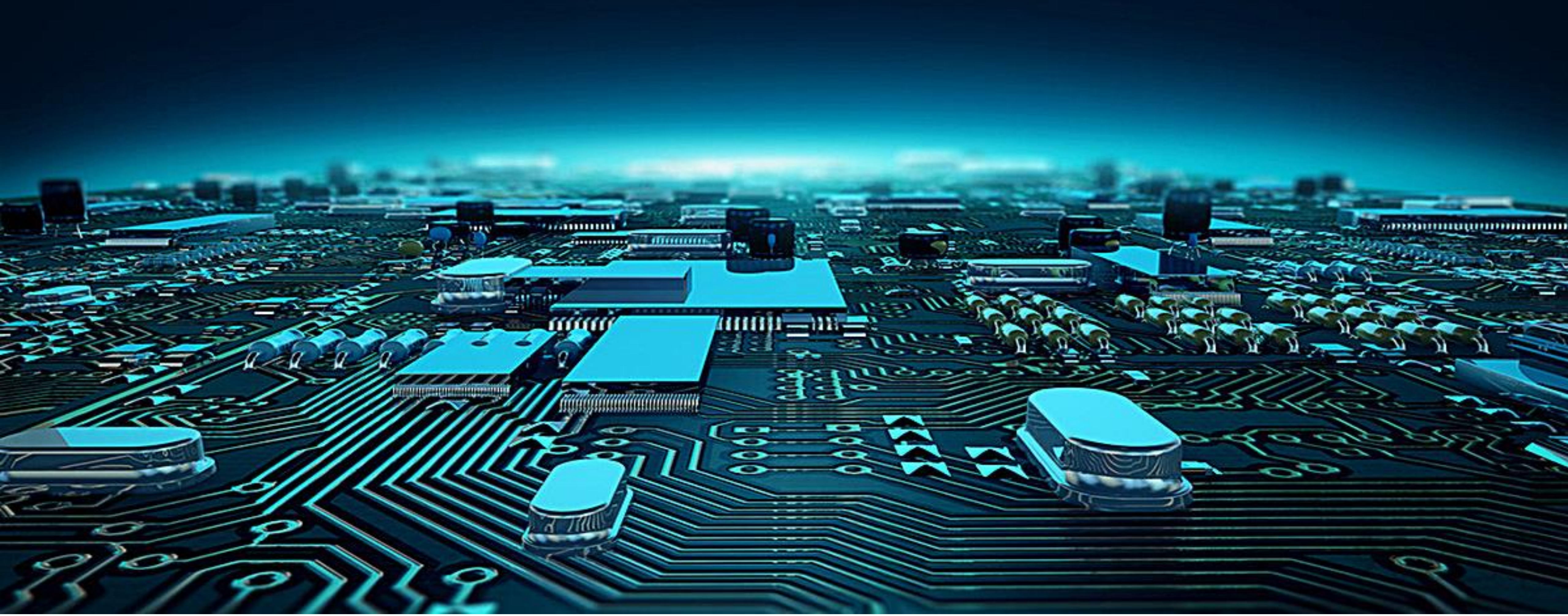
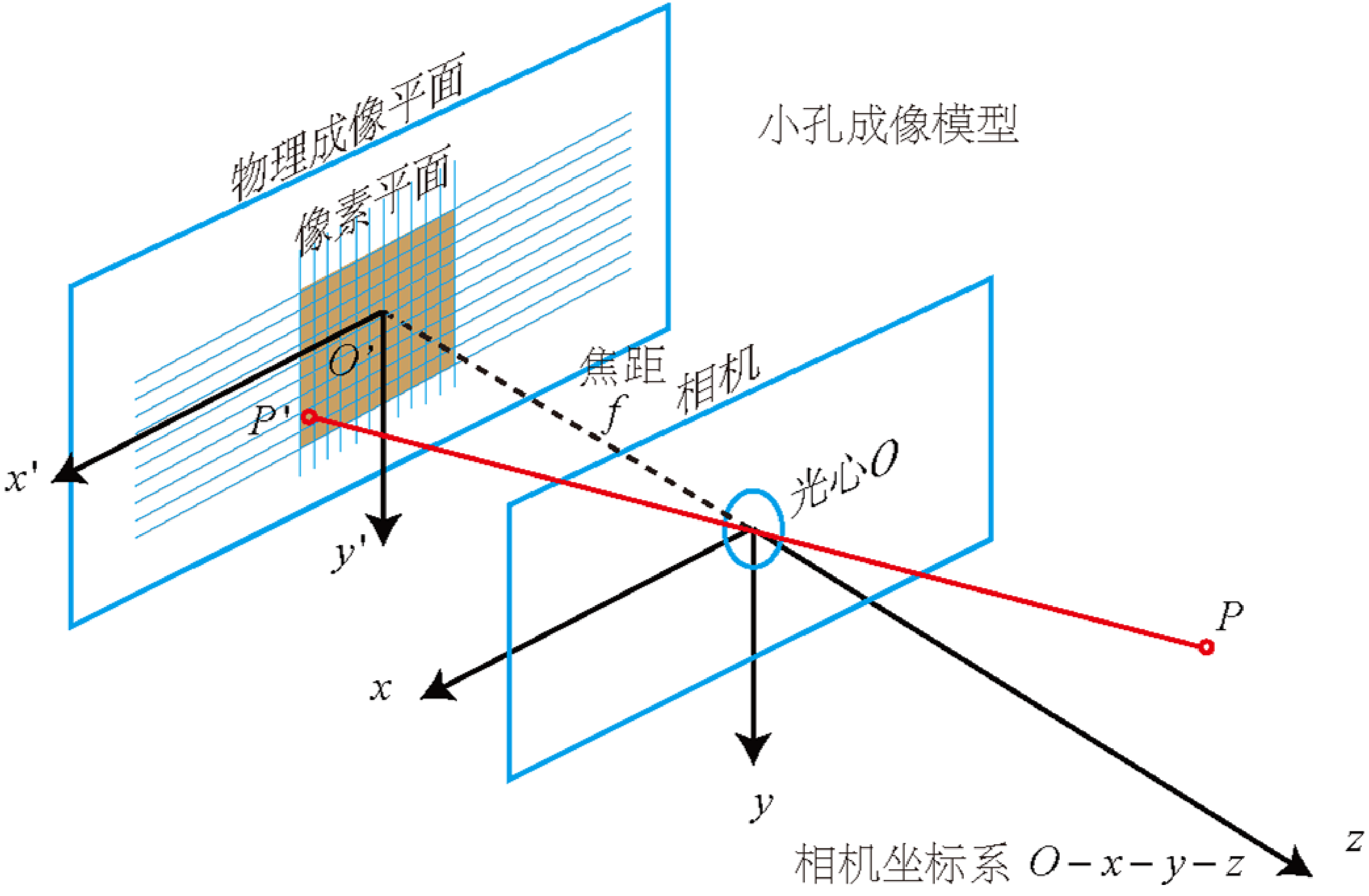


相机模型

@八斗学院--王小天(Michael)

2021/7/11

目 录

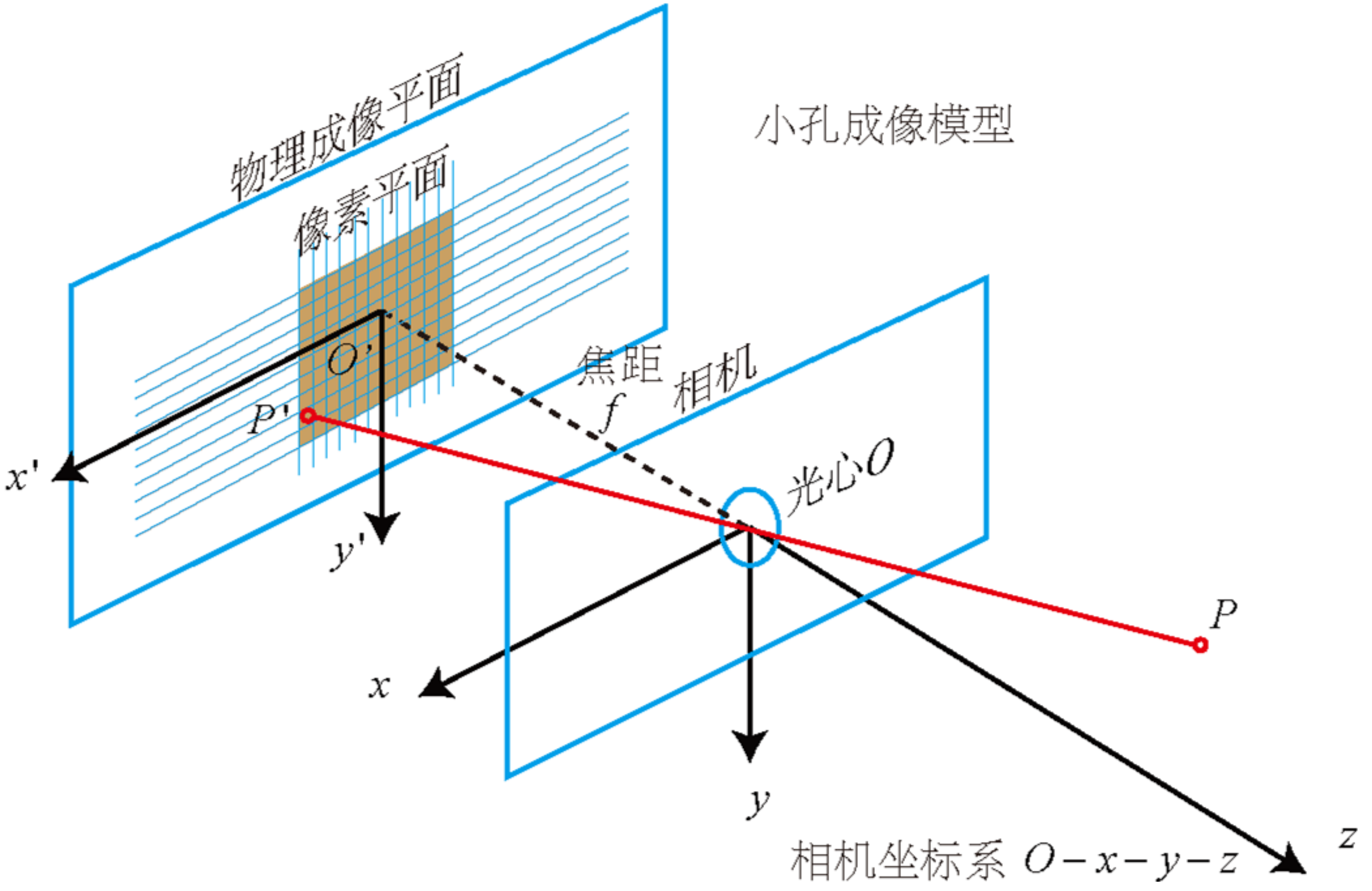

物理成像平面
像素平面
小孔成像模型
O'
焦距
f
相机
P'
x'
y'
光心O
P
x
y
z
相机坐标系 O−x−y−z

坐标系

针孔相机模型存在四个坐标系：世界坐标系、摄像机坐标系、图像物理坐标系和图像像素坐标系。

假设：

- 世界坐标系的坐标为Pw(Xw,Yw,Zw),
- 对应的摄像机坐标系坐标为Po(x,y,z),
- 对应的图像物理坐标系的坐标为P’(x’,y’),
- 对应的图像像素坐标系的坐标为p(u,v)。

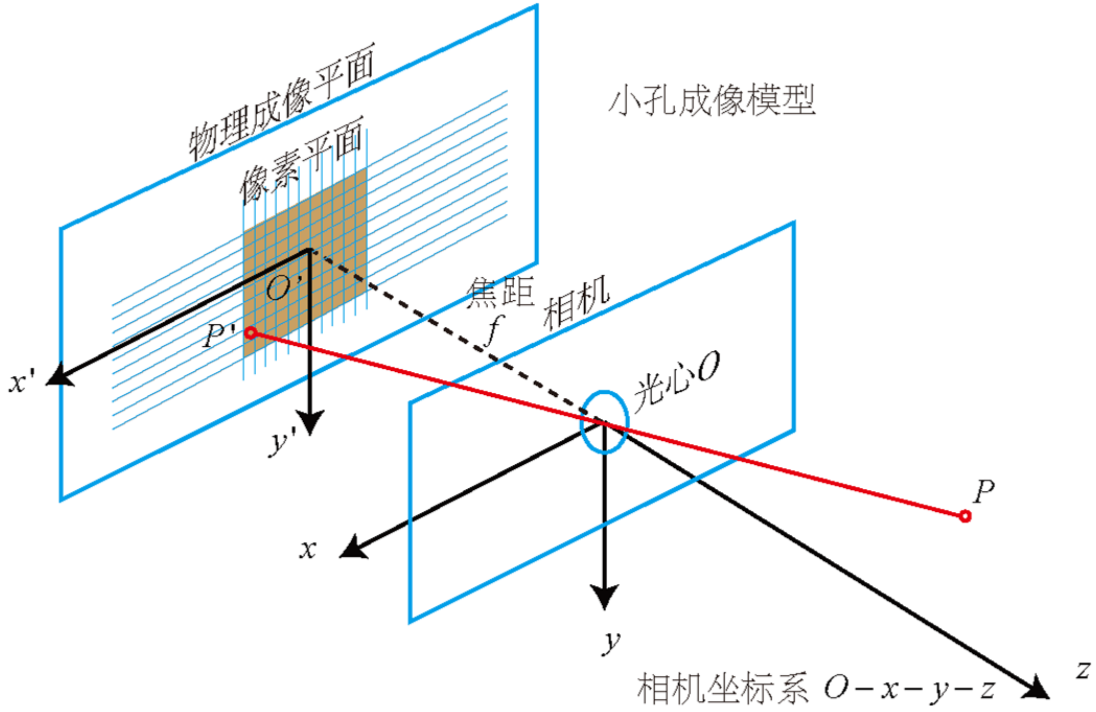


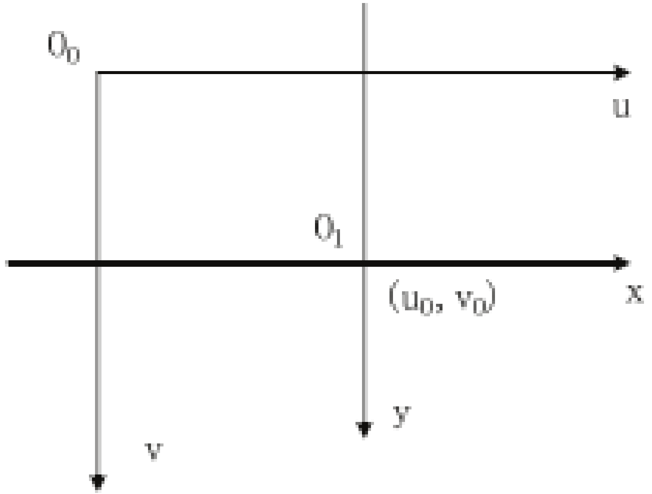
坐标系

世界坐标系：是客观三维世界的绝对坐标系，也称客观坐标系。就是物体在真实世界中的坐标。
世界坐标系是随着物体的大小和位置变化的，单位是长度单位。

相机坐标系：以相机的光心为坐标系的原点，以平行于图像的x和y方向为x轴和y轴，z轴和光轴平行，x，y，z互相垂直，单位是长度单位。

图像物理坐标系：以主光轴和图像平面交点为坐标原点，x'和y'方向如图所示，单位是长度单位。
图像像素坐标系：以图像的顶点为坐标原点，u和v方向平行于x'和y'方向，**单位是以像素计**。

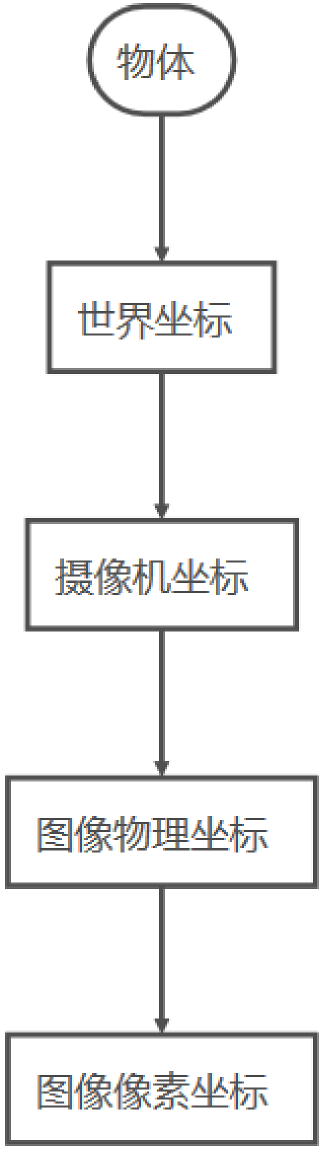




图像坐标系与像素坐标系的关系图

The relationship chat of Image coordinate and pixel coordinate

相机成像



世界坐标系到摄像机坐标系

这两个坐标系之间除了旋转矩阵R，还存在平移矩阵t。其关系可表示为：

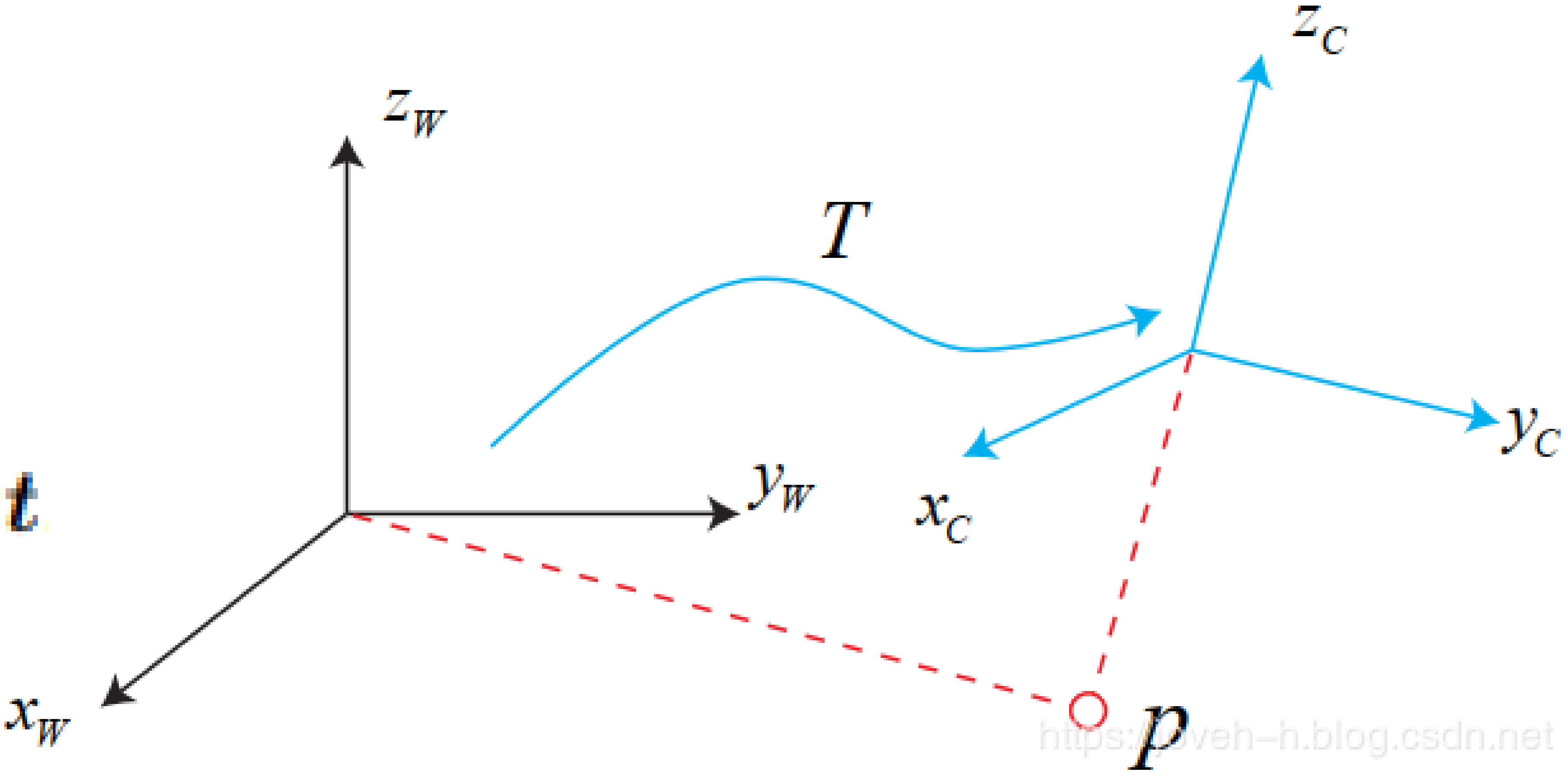
$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = L_W \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

欧氏变换

欧氏变换由两部分组成:

- 旋转
- 平移

$$a' = Ra + t$$



多次连续的旋转和平移的情况下。
假设我们将向量a进行了两次欧氏变换，旋转和平移分别为R1, t1 和 R2， t2， 分别得到：

b = R1*a + t1,　　c = R2*b + t2 　===>> 　c = R2*(R1*a + t1) + t2

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{b} = T_1 \widetilde{a}, \widetilde{c} = T_2 \widetilde{b} \rightarrow \widetilde{c} = T_2 T_1 \widetilde{a}$$

世界坐标系到摄像机坐标系

这两个坐标系之间除了旋转矩阵R，还存在平移矩阵t。其关系可表示为：

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = L_W \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

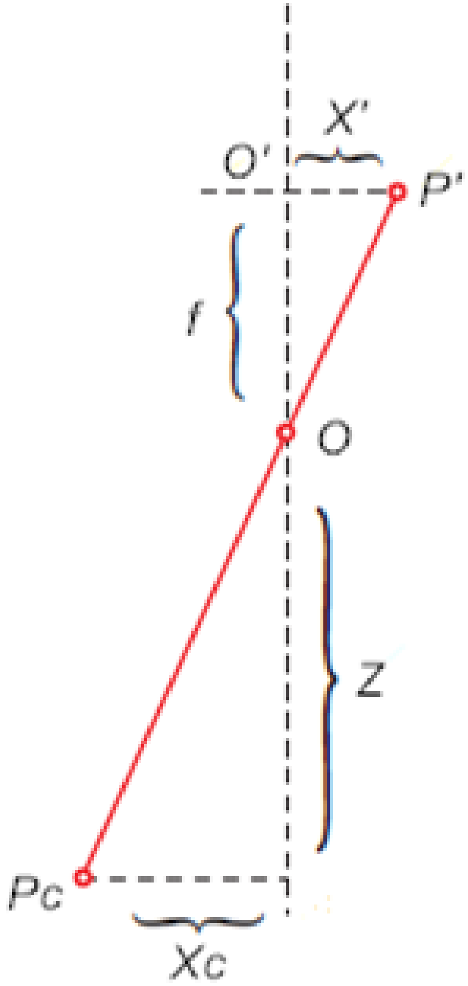
摄像机坐标系到图像物理坐标系

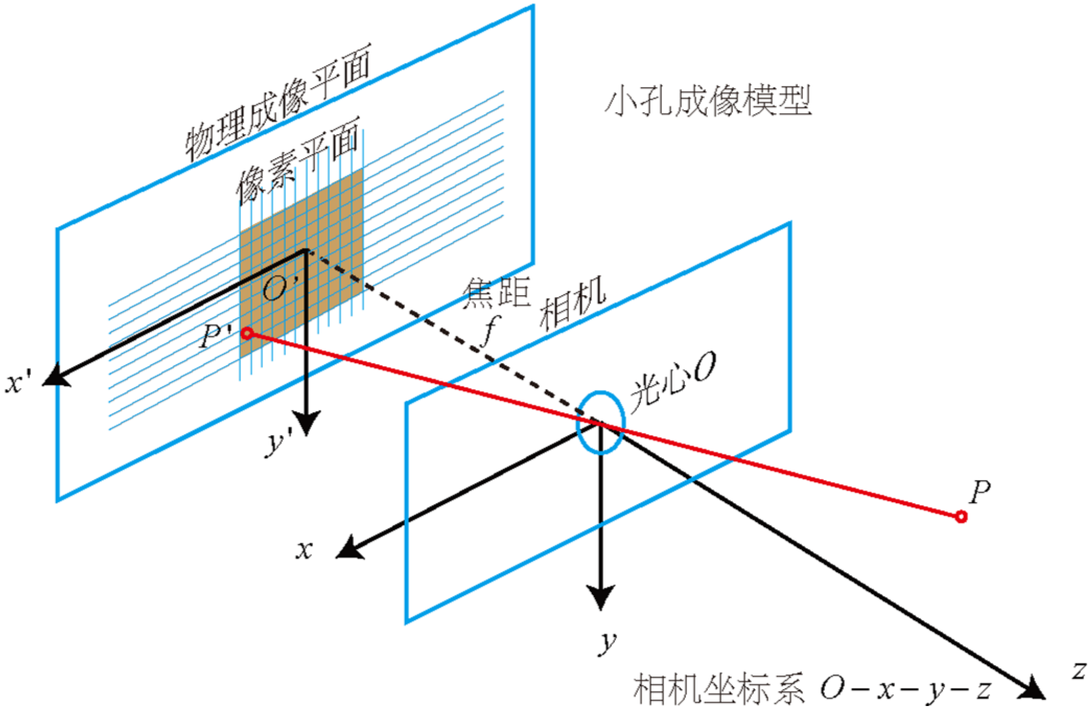
相似三角形:

$$\begin{cases} X' = f\dfrac{Xc}{Zc} \\[2ex] Y' = f\dfrac{Yc}{Zc} \end{cases}$$

矩阵形式为:

$$Zc * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Xc \\ Yc \\ Zc \end{bmatrix}$$





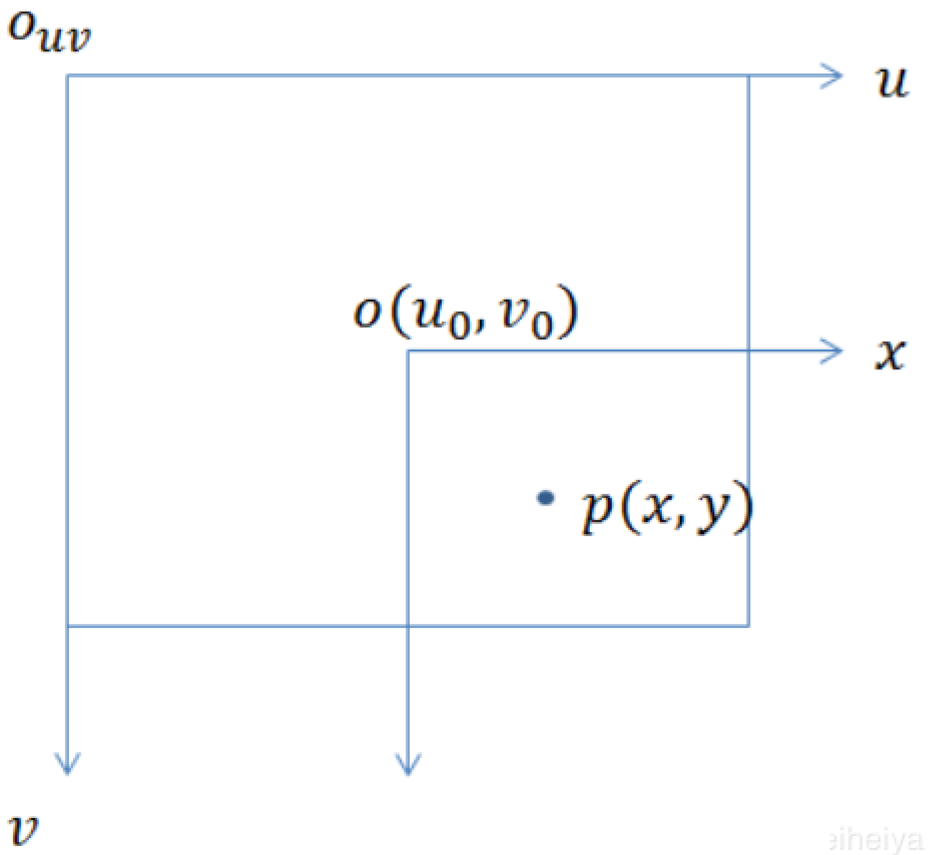
图像物理坐标系到图像像素坐标系

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{dx} + u_0 \\ v = \dfrac{y}{dy} + v_0 \end{cases}$$

dx和dy表示：x方向和y方向的一个像素分别占多少个（**可能是小数**）长度单位。

齐次坐标下：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \dfrac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



摄像机坐标系到图像像素坐标系

$$Zc * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Xc \\ Yc \\ Zc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Zc \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix}$$

世界坐标系到图像像素坐标系

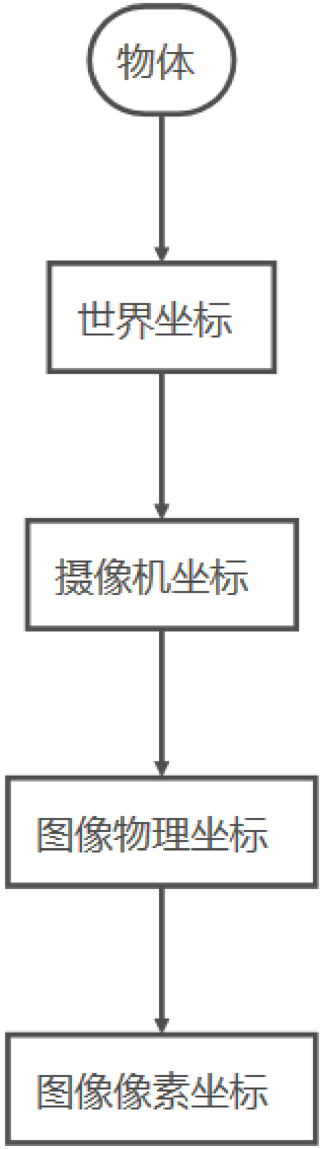
$$\begin{bmatrix} Xc \\ Yc \\ Zc \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} Xw \\ Yw \\ Zw \end{bmatrix} + t$$

$$Zc \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix}$$

$$Zc \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K(RPw + t) = K\left(R \begin{bmatrix} Xw \\ Yw \\ Zw \end{bmatrix} + t \right)$$

$$Z_C\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_C\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{相机与世界}}}_{\text{投影关系}}}_{\text{像素与像平面}}$$

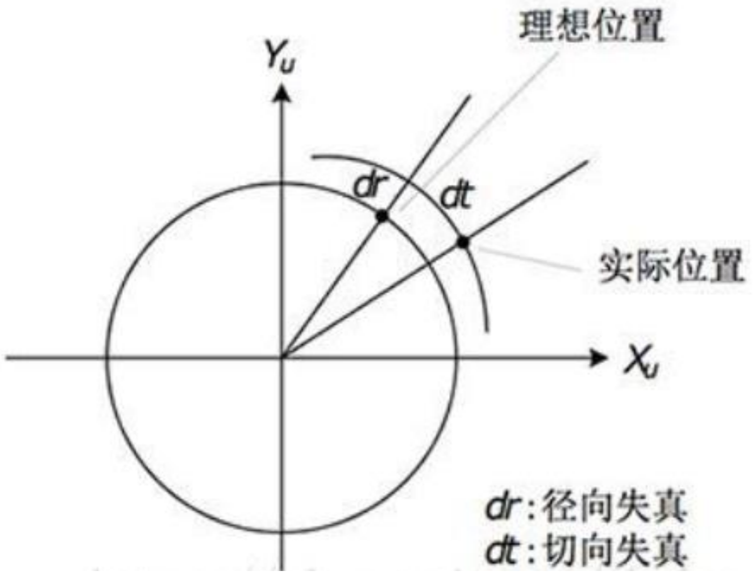

物体
世界坐标
摄像机坐标
图像物理坐标
图像像素坐标

镜头畸变

- 透镜由于制造精度以及组装工艺的偏差会引入畸变，导致原始图像的失真。
- 镜头的畸变分为径向畸变和切向畸变两类。

径向畸变(泰勒级数前几项)

$$x_{distorted} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$
$$y_{distorted} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

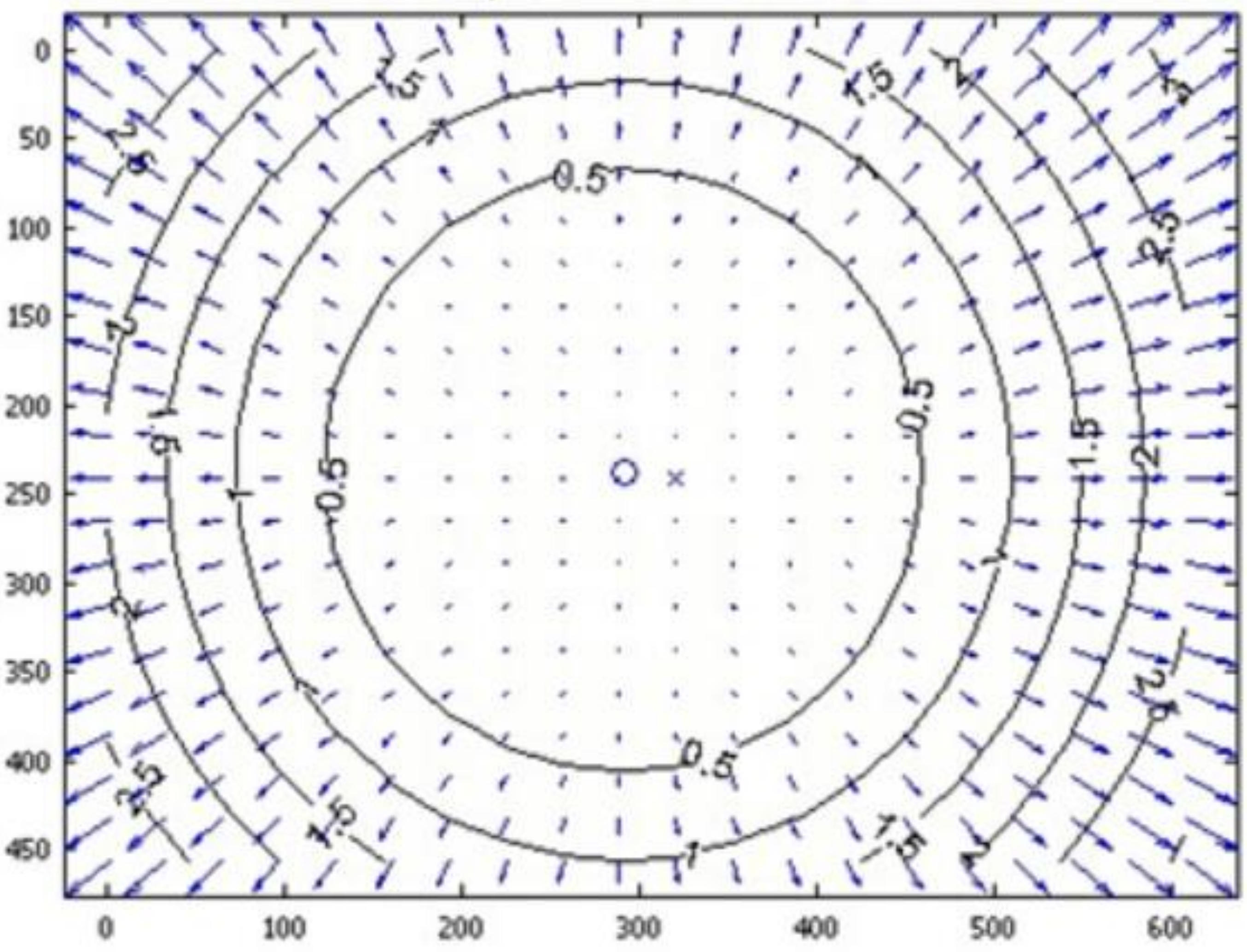


切向畸变

$$x_{distorted} = x + [2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2)]$$
$$y_{distorted} = y + [p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy]$$

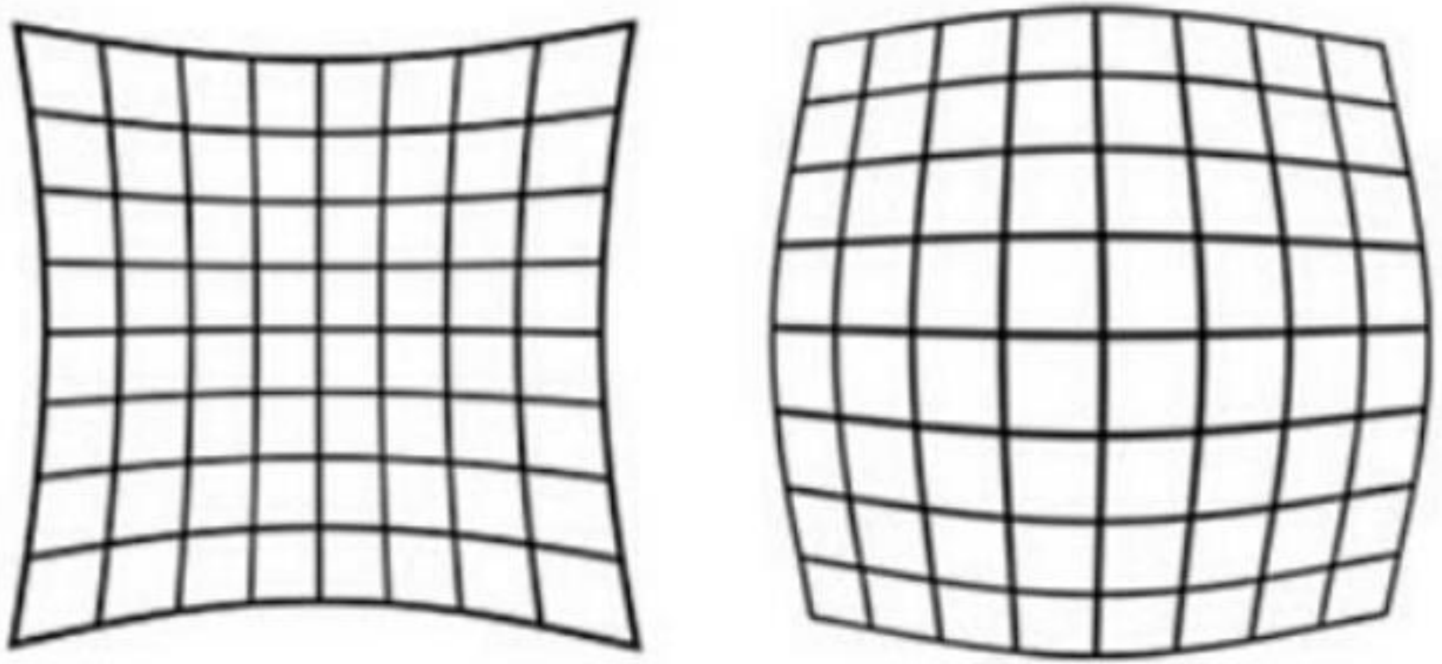
径向畸变

由透镜的形状引起的畸变称为径向畸变，透镜径向畸变后点位的偏移示意图



径向畸变

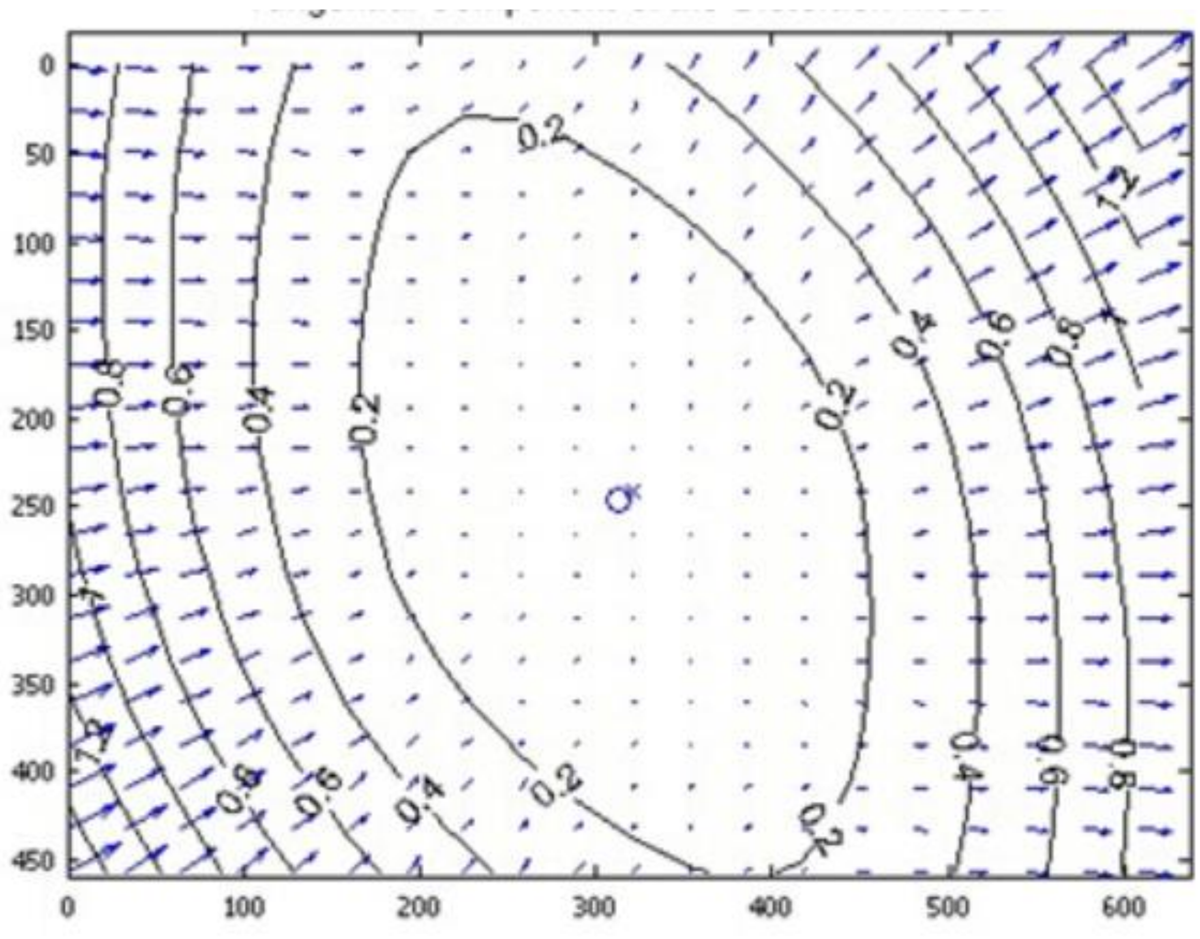
- 枕形畸变
- 桶形畸变



切向畸变

切向畸变是由于透镜本身与相机传感器平面（成像平面）或图像平面不平行而产生的。
这种情况多是由于透镜被粘贴到镜头模组上的安装偏差导致。

切向畸变示意图:



畸变矫正

- 径向畸变和切向畸变模型中一共有5个畸变参数，在Opencv中他们被排列成一个5*1的矩阵，依次包含k1、k2、p1、p2、k3，经常被定义为Mat矩阵的形式，如Mat distCoeffs=Mat（1,5，CV_32FC1，Scalar::all（0））；
- 这5个参数就是相机标定中需要确定的相机的5个畸变系数。
- 求得这5个参数后，就可以校正由于镜头畸变引起的图像的变形失真。

径向畸变(泰勒级数前几项)

$$x_{distorted} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$
$$y_{distorted} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

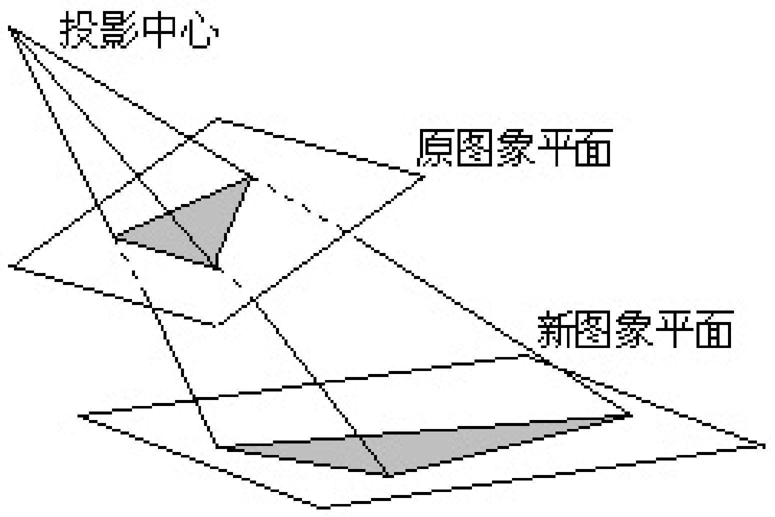
切向畸变

$$x_{distorted} = x + [2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)]$$
$$y_{distorted} = y + [p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy]$$

畸变矫正

透视变换(Perspective Transformation)

透视变换是将图片投影到一个新的视平面(Viewing Plane)，也称作投影映射(Projective Mapping)。
我们常说的仿射变换是透视变换的一个特例。
透视变换的目的就是把现实中为直线的物体，在图片上可能呈现为斜线，通过透视变换转换成直线的变换。
仿射变换（Affine Transformation或 Affine Map），又称为仿射映射，是指在几何中，图像进行从一个向量空间进行一次线性变换和一次平移，变换为到另一个向量空间的过程。



透视变换(Perspective Transformation)

通用的变换公式为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

下式中的X,Y是原始图片坐标（上式的x,y），对应得到变换后的图片坐标（X';Y';Z'）其中Z'=1:

$$\begin{cases} X' = \dfrac{X}{Z} \\ Y' = \dfrac{Y}{Z} \\ Z' = \dfrac{Z}{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} X' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ Y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ Z' = 1 \end{cases}$$

透视变换

$$\begin{cases} X' = \dfrac{X}{Z} \\ Y' = \dfrac{Y}{Z} \\ Z' = \dfrac{Z}{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} X' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ Y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ Z' = 1 \end{cases}$$

一般地，我们令a33=1，展开上面公式，得到一个点的情况：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - a_{31}xX' - a_{32}X'y = X' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - a_{31}xY' - a_{32}yY' = Y' \end{cases}$$

透视变换

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - a_{31}xX' - a_{32}X'y = X' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - a_{31}xY' - a_{32}yY' = Y' \end{cases}$$

源点四个坐标分别为A:　(x0,y0),(x1,y1),(x2,y2),(x3,y3)

目标点四个坐标分别为B:(X'0,Y'0),(X'1,Y'1),(X'2,Y'2),(X'3,Y'3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x0 & y0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x0X'0 & -y0X'0 \\ 0 & 0 & 0 & x0 & y0 & 1 & -x0Y'0 & -y0Y'0 \\ x1 & y1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x1X'1 & -y1X'1 \\ 0 & 0 & 0 & x1 & y1 & 1 & -x1Y'1 & -y1Y'1 \\ x2 & y2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x2X'2 & -y2X'2 \\ 0 & 0 & 0 & x2 & y2 & 1 & -x2Y'2 & -y2Y'2 \\ x3 & y3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x3X'3 & -y3X'3 \\ 0 & 0 & 0 & x3 & y3 & 1 & -x3Y'3 & -y3Y'3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a11 \\ a12 \\ a13 \\ a21 \\ a22 \\ a23 \\ a31 \\ a32 \end{bmatrix}}_{warpMatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} X'0 \\ Y'0 \\ X'1 \\ Y'1 \\ X'2 \\ Y'2 \\ X'3 \\ Y'3 \end{bmatrix}}_{B}$$

谢谢！