一、选择题：每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

第 1 题

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=$

A. $\dfrac{\ln 2}{2}$　　B. 0　　C. $\ln 2$　　D. $-\ln 2$

参考答案：A

第 2 题

设函数 $f(x)=\sqrt{x}+\mathrm{e}$，则 $f'(1)=$

A. 2+e　　B. 1+e　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

参考答案：C

第 3 题

设函数 $f(x)=\cos 2x$，则 $f'(x)=$

A. $2\sin 2x$　　B. $-2\sin 2x$

C. $\sin 2x$　　D. $-\sin 2x$

参考答案：B

第 4 题

下列函数在区间(0，+∞)内单调减少的是

A. $y=x$　　B. $y=\mathrm{e}^x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

参考答案：D

第 5 题

$\int \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x =$

A. $-\frac{1}{3x^3}+C$　　B. $\frac{1}{3x^3}+C$

C. $\frac{3}{x^3}+C$　　D. $-\frac{3}{x^3}+C$

参考答案：A

第 6 题

曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积 $S=$

A. 2　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

参考答案：B

第 7 题

已知 $F(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$

A. $2x\sqrt{1+x^2}$　　B. $\sqrt{1+x^2}+1$

C. $\sqrt{1+x^2}$　　D. $\sqrt{1+x^2}-1$

参考答案：C

第 8 题

设函数 $z=xe^{2y}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=$

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

参考答案：D

第 9 题

设函数 $z=\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

A. $-\dfrac{1}{y^2}$　　B. $\dfrac{1}{y^2}$　　C. $\dfrac{1}{xy^2}$　　D. $\dfrac{1}{xy}$

参考答案：A

第 10 题

袋中有 8 个乒乓球，其中 5 个白色球，3 个黄色球，从中一次任取 2 个乒乓球，则取出的 2 个球均为白色球的概率为

A. $\dfrac{5}{8}$　　B. $\dfrac{5}{14}$　　C. $\dfrac{5}{36}$　　D. $\dfrac{5}{56}$

参考答案：B

二、填空题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分，把答案填写在题中横线上。

第 11 题

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x^2+5}=$______.

参考答案：0

第 12 题

当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\sin 2x$ 是等价无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=$______.

参考答案：1

第 13 题

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的极限存在，则 $a=$______.

参考答案：1

第 14 题

曲线 $y=x^3+3x^2+1$ 的拐点坐标为______.

参考答案：(1，-3)

第 15 题

设函数 $y=\ln(1+x)$，则 $y''=$______.

参考解析：$-\frac{1}{(1+x)^2}$

第 16 题

设曲线 $y=axe^x$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 2，则 $a=$______.

参考答案：2

第 17 题

$\int \frac{1}{e^x}dx=$______.

参考解析：$-e^{-x}+C$

第 18 题

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx=$______

参考答案：e-1

第 19 题

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx=$______.

参考答案：π/2

第 20 题

函数 $z=2(x-y)-x^2-y^2$ 的驻点坐标为______.

参考答案：(1，-1)

三、解答题：共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

第 21 题

计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

第 22 题

设 $y=\dfrac{x^3}{\cos x}$，求 $\mathrm{d}y$.

$$y'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$=\frac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}.$$

所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

第 23 题

计算 $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2$$
$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

第 24 题

计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

设 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2t\,dt$.

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$.

则 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 te^t dt$

$$=2\int_0^1 t\,de^t$$

$$=2te^t\Big|_0^1-2\int_0^1 e^t dt$$

$$=2e-2e^t\Big|_0^1$$

$$=2.$$

第 25 题

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.2	0.1	0.3	a

（1）求常数 a.

（2）求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

（1）因为 $0.2+0.1+0.3+a=1$，　所以 $a=0.4$.

（2）$EX=0\times0.2+1\times0.1+2\times0.3+3\times0.4$

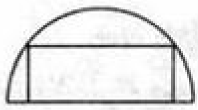
$=1.9.$

$DX=(0-1.9)^2\times0.2+(1-1.9)^2\times0.1+(2-1.9)^2\times0.3+(3-1.9)^2\times0.4$

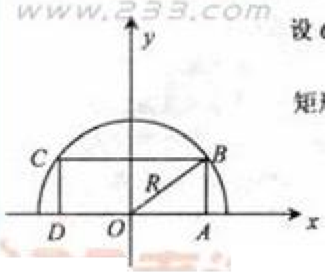
$=1.29.$

第 26 题

在半径为 R 的半圆内作一内接矩形，其中的一边在直径上，另外两个顶点在圆周上（如图所示）．当矩形的长和宽各为多少时矩形面积最大？最大值是多少？



解：如图，设 x 轴通过半圆的直径，y 轴垂直且平分直径.



设 $OA=x$，则 $AB=\sqrt{R^2-x^2}$.

矩形面积 $S=2x\sqrt{R^2-x^2}$.

$$S'=2\sqrt{R^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$=2\frac{R^2-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

令 $S'=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$（舍去负值）.

由于只有唯一驻点，根据实际问题，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 必为所求，

则 $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

所以，当矩形的长为 $\sqrt{2}R$，宽为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 时，

矩形面积最大，且最大值 $S=R^2$. ……

第 27 题

证明：当 $x>1$ 时，$x>1+\ln x$.

证：设 $f(x)=x-1-\ln x$，

则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调上升.

所以 当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$.

即 $x-1-\ln x>0$，

得 $x>1+\ln x$.

第 28 题

求二元函数 $f(x,y)=x^2+y^2+xy$，在条件 $x+2y=4$ 下的极值.

设 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x+2y-4)$

$$=x^2+y^2+xy+\lambda(x+2y-4),$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+y+\lambda=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+x+2\lambda=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x+2y-4=0, & ③\end{cases}$

由①与②消去 λ 得 $x=0$，代入③得 $y=2$.

所以函数 $f(x,y)$ 的极值为 4.