一、选择题(1～10 小题。每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1．

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=$

A．0

B．1

C．2

D．∞

【答案】B

【考情点拨】本题考查了特殊极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2=1.$

2．

设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

【答案】A

【应试指导】
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{1-x-1}$$
$$=-f'(1)=-2.$$

3．

$d(\sin 2x)=$ A. $2\cos 2x\,dx$　　B. $\cos 2x\,dx$　　C. $-2\cos 2x\,dx$　　D. $-\cos 2x\,dx$

【答案】A

【应试指导】设 $y=\sin 2x$，则 $y'=2\cos 2x$，故 $d(\sin 2x)=2\cos 2x\,dx$.

4．

设函数 f(x)在区间[a，b]连续且不恒为零，则下列各式中不恒为常数的是

A. $f(b)-f(a)$　　B. $\int_a^b f(x)dx$　　C. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$　　D. $\int_a^x f(t)dt$

【答案】D

【应试指导】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数为 $F(x)$. A 项，$[f(b)-f(a)]'=0$；B 项，$[\int_a^b f(x)dx]'=[F(b)-F(a)]'=0$；C 项，$[\lim\limits_{x\to a^+}f(x)]'=[f(a)]'=0$；D 项，$[\int_a^x f(t)dt]'=f(x)$. 故 A、B、C 项恒为常数，D 项不恒为常数.

5．

设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^x f(t)dt=x^3+\ln(x+1)$，则 $f(x)=$

A. $3x^2+\frac{1}{x+1}$　　B. $x^3+\frac{1}{x+1}$　　C. $3x^2$　　D. $\frac{1}{x+1}$

【答案】A

【应试指导】 $f(x)=[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]'=[x^3+\ln(x+1)]'=3x^2+\frac{1}{x+1}$.

6

. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，且 $I(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t, a<u<b$，则 $I(u)$

A．恒大于零

B．恒小于零

C．恒等于零

D．可正，可负

【答案】C

【应试指导】因定积分与积分变量所用字母无关，

故 $I(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+\int_u^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

7.

设二元函数 $z=x^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$

A. x^y　　B. $x^y\ln y$　　C. $x^y\ln x$　　D. yx^{y-1}

【答案】C

【应试指导】 因 $z=x^y$，故 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

8.

设函数 f(z)在区间[a，b]连续，则曲线 y=f(x)与直线 x=a，x=b 及 x 轴所围成的平面图形的面积为

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　B. $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　C. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$　　D. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

【答案】C

【应试指导】由定积分的几何意义知，本题选 C.

9.

设二元函数 $z=x\cos y$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

A. $x\sin y$　　B. $-x\sin y$　　C. $\sin y$　　D. $-\sin y$

【答案】D

【应试指导】 $z=x\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin y$.

10.

设事件 A，B 相互独立，A，B 发生的概率分别为 0．6，0．9，则 A，B 都不发生的概率为

A．0．54

B．0．04

C．0．1

D．0．4

【答案】B

【应试指导】 事件 A,B 相互独立，则 $\bar{A},\bar{B}$ 也相互独立，故 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-0.6)\times(1-0.9) = 0.04$.

二、填空题(11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分)

11.

函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 的间断点为 $x =$ ________.

【答案】1

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

12.

设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{3x}-1, & x \geqslant 0, \\ a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ ________.

【答案】0

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a$，因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$，即 $a = f(0) = 0$.

13.

设 $y = \sin(2x+1)$，则 $y'' =$ ________.

【答案】 $-4\sin(2x+1)$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y = \sin(2x+1)$，则 $y' = 2\cos(2x+1)$，则 $y'' = -4\sin(2x+1)$.

14.

函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的单调增区间为 ________.

【答案】 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x + \frac{1}{x}(x \neq 0)$，则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$. 令 $f'(x) > 0$，则 $x < -1$ 或 $x > 1$，即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$.

15.

曲线 $y = e^x + x^2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 ________.

【答案】1

【应试指导】 曲线在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k = y'\Big|_{x=0} = (e^x + 2x)\Big|_{x=0} = 1$.

16.

设 $f'(x)$ 为连续函数，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x =$ ________.

【答案】 $f(x)+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 由不定积分的性质知，$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$.

17.

$\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=$__________.

【答案】2

【应试指导】 $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^3\cos x\mathrm{d}x+2$. 因为函数 $f(x)=x^3\cos x$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$，即 $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+1)\mathrm{d}x=2$.

18.

$\int_{0}^{1}(2x-1)^5\mathrm{d}x=$__________.

【答案】0

【应试指导】 $\int_{0}^{1}(2x-1)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(2x-1)^6\Big|_0^1=0.$

19.

设二元函数 $z=\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【答案】 $-\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}\left(\frac{1}{x+y}\right)'=-\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+y}}$.

20.

设二元函数 $z=x^3y^2$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

【答案】 $6x^2y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=x^3y^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y$.

三、解答题(21～28 题。共 70 分．解答应写出推理、演算步骤)

21.

(本题满分 8 分)

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{x^2}$.

【答案】

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x} \qquad (3\text{ 分})$$
$$=\lim_{x\to 0}(2e^{2x}-e^{x}) \qquad (6\text{ 分})$$
$$=1. \qquad (8\text{ 分})$$

22.
(本题满分 8 分)
已知 $x=-1$ 是函数 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的驻点，且曲线 $y=f(x)$ 过点(1,5)，求 a,b 的
【答案】

$f'(x)=3ax^2+2bx.$

由 $f'(-1)=0$，得 $3a-2b=0.$ ① （3 分）

曲线 $y=f(x)$ 过点(1,5)，故 $a+b=5.$ ②
（6 分）

由 ①，② 得 $a=2,b=3.$

23.
(本题满分 8 分)

计算 $\int\frac{x^3}{x-1}dx.$

【答案】

$$\int\frac{x^3}{x-1}dx=\int\frac{x^3-1+1}{x-1}dx \qquad (2\text{ 分})$$
$$=\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \qquad (6\text{ 分})$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$
（8 分）

24.
(本题满分 8 分)

计算 $\int_1^e \ln x dx.$

【答案】

$$\int_1^e \ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx \qquad (4\text{ 分})$$
$$=e-x\Big|_1^e \qquad (6\text{ 分})$$
$$=1. \qquad (8\text{ 分})$$

25.
(本题满分 8 分)

设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+xy=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

【答案】

方程 $e^y+xy=1$ 两边对 x 求导，得

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0. \qquad (6\text{ 分})$$

于是 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x}.$ （8 分）

26.
(本题满分 10 分)

设曲线 $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$，$x$ 轴及直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形为 D. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内求一点 x_0，使直线 $x = x_0$ 将 D 分为面积相等的两部分.

【答案】

依题意有 $\int_0^{x_0} \sin x \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$，即 (4 分)

$-\cos x \Big|_0^{x_0} = -\cos x \Big|_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}$，

$1 - \cos x_0 = \cos x_0$，

$\cos x_0 = \frac{1}{2}$， (8 分)

得 $x_0 = \frac{\pi}{3}$. (10 分)

27.

(本题满分 10 分)

设 50 件产品中，45 件是正品，5 件是次品. 从中任取 3 件，求其中至少有 1 件是次品的概率.(精确到 0.01)

【答案】

设 A={3 件产品中至少有 1 件次品}，则万={3 件产品都为正品). (2 分)所以 P(A)=1—P(A)(5 分)

$= 1 - \frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}$

≈ 0.28. (10 分)

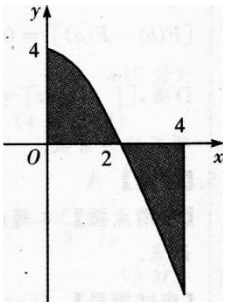
28.

(本题满分 10 分)

设曲线 Y=4 一 x^2(x≥o)与 z 轴，Y 轴及直线 x=4 所围成的平面图形为 D.(如图中阴影部分所示).

(1)求 D 的面积 S.

(2)求图中 x 轴上方的阴影部分绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.



【答案】

(1) 面积 $S = \int_0^2 (4 - x^2) \mathrm{d}x - \int_2^4 (4 - x^2) \mathrm{d}x$ (3 分)

$= (4x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^2 - (4x - \frac{x^3}{3}) \Big|_2^4$

$= 16$. (5 分)

(2) 体积 $V = \pi \int_0^4 x^2 \mathrm{d}y$

$= \pi \int_0^4 (4 - y) \mathrm{d}y$

$= \pi (4y - \frac{1}{2} y^2) \Big|_0^4$

$= 8\pi$. (10 分)