一、选择题(1～10 小题。每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1．

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos(x-2)}{x-2}=$【　　】

A. 1　　B. cos1　　C. 0　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】B

【应试指导】$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos(x-2)}{x-2}=\frac{\cos(3-2)}{3-2}=\cos 1.$

2．

设函数 $y=x^2+1$,则$\frac{dy}{dx}=$【　　】

A. $\frac{1}{3}x^3$　　B. x^2

C. $2x$　　D. $\frac{1}{2}x$

【答案】C

【应试指导】因为 $y=x^2+1$,所以$\frac{dy}{dx}=2x.$

3．

设函数 $f(x)=\cos x$,则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$【　　】

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. 1

【答案】A

【应试指导】因为 $f(x)=\cos x, f'(x)=-\sin x$,所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1.$

4．

下列区间为函数 $f(x)=\sin x$ 的单调增区间的是【　　】

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $(0,2\pi)$

【答案】A

【应试指导】因为 $f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x$,令 $f'(x)>0$ 得,$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$,故只有 A 项符合.

5．

$\int x^2\,dx=$【　　】

A. $3x^3+C$　　B. x^3+C

C. $\frac{x^3}{3}+C$　　D. $\frac{x}{2}+C$

【答案】C

【应试指导】$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C.$

6.

$\int \frac{1}{1+x}dx =$【　】

A. $e^{1+x}+C$　　B. $\frac{1}{1+x}+C$

C. $x+C$　　D. $\ln|1+x|+C$

【答案】D

【应试指导】$\int \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|+C.$

7.

设函数 $z=\ln(x+y)$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} =$【　】

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. ln2　　D. 1

【答案】B

【应试指导】因为 $z=\ln(x+y)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y}$，所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}.$

8.

曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积为【　】

A. 2　　B. 4　　C. 2π　　D. 4π

【答案】C

【应试指导】由题意可知，所求面积 S 的图形为

$x^2+y^2=4$ 的上半圆，故 $S=2\pi$.

9.

设函数 $z=e^x+y^2$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$【　】

A. $2y$　　B. e^x+2y

C. e^x+y^2　　D. e^x

【答案】D

【应试指导】因为 $z=e^x+y^2$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x$.

10.

设事件 A、B 互不相容，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.2$，则 $P(A+B)=$【　】

A. 0. 44

B. 0. 5

C. 0. 1

D. 0. 06

【答案】B

【应试指导】因为，事件 A、B 互不相容，所以，$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.2=0.5$.

第II卷(非选择题，共110分)

二、填空题(11～20小题。每小题4分，共40分)

11.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3} =$ ________.

【答案】一2

【应试指导】 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3} = \dfrac{1 + 1 + 2}{1 - 3} = -2.$

12.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} =$ _______.

【答案】 $\dfrac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos 2x}{3} = \dfrac{2}{3}.$

13.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 0 \\ a + x, \ x \geqslant 0 \end{cases}$,在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ _________.

【答案】1

【应试指导】 因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 0 \\ a + x, \ x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,即 $a = 1$.

14.

曲线 $y = x^3 + 3x$ 的拐点坐标为 _________.

【答案】(0,0)

【应试指导】 因为 $y = x^3 + 3x, y' = 3x^2 + 3, y'' = 6x$,令 $y'' = 0$,得 $x = 0$. 当 $x > 0$ 时,$y'' > 0$,当 $x < 0$ 时,$y'' < 0$,所以曲线 $y = x^3 + 3x$ 的拐点坐标为 $(0,0)$.

15.

设函数 $f(x) = \cos x$,则 $f''(x) =$ __________.

【答案】 $-\cos x$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$,
$f''(x) = -\cos x$.

16.

曲线 $y = \sin(x + 1)$ 在点 $(-1,0)$ 处的切线斜率为_________.

【答案】1

【应试指导】 因为 $y = \sin(x + 1), y' = \cos(x + 1), y'\Big| = 1$,所以曲线 $y = \sin(x + 1)$ 在点(−1, 0)处的切线斜率为 1.

17.

$\int 2x e^{x^2} dx =$ ________.

【答案】$e^{x^2}+C$

【考情点拨】本题考查了第一类换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2=e^{x^2}+C.$

18.

$\int_0^1 \cos x\mathrm{d}x=$________.

【答案】$\sin 1$

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】$\int_0^1 \cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^1=\sin 1.$

19.

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=$________.

【答案】1

【应试指导】$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^a=\lim\limits_{a\to+\infty}(1-e^{-a})=1.$

20.

设函数 $z=x^2e^y$,则全微分 $\mathrm{d}z=$________.

【答案】$2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y$

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】因为,$z=x^2e^y$,$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y$,$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y$,所以 $\mathrm{d}z=2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y.$

三、解答题(21～28 题，共 70 分．解答应写出推理、演算步骤)

21.

(本题满分 8 分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

【答案】

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}$ (6 分)

$=1.$ (8 分)

22.

(本题满分 8 分)

设函数 $y=\ln(x^2+1)$,求 $\mathrm{d}y$.

【答案】

$y'=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'$ (3 分)

$=\frac{2x}{x^2+1}.$ (6 分)

$\mathrm{d}y=\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$ (8 分)

23.

(本题满分 8 分)

计算$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

【答案】

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}(\ln x) \qquad (4分)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C. \qquad (8分)$$

24.

(本题满分 8 分)

计算$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

【答案】

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x) \qquad (3分)$$

$$= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x \qquad (6分)$$

$$= x\sin x + \cos x + C. \qquad (8分)$$

25.

(本题满分 8 分)

已知某篮球运动员每次投篮投中的概率是 0．9，记 x 为他两次独立投篮投中的次数.

(1)求 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

【答案】

(1)X 可能的取值为 0,1,2; (2 分)

$P\{X=0\}=0.1\times0.1=0.01$;

$P\{X=1\}=2\times0.9\times0.1=0.18$;

$P\{X=2\}=0.9\times0.9=0.81$.

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.01	0.18	0.81

(5 分)

(2) 数学期望:

$E(X)=0\times0.01+1\times0.18+2\times0.81=1.80$.

(8 分)

26.

(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=x^3-3x-2$ 的单调区间和极值.

【答案】

函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-3$. (4 分)

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 −4	↗

(8 分)

因此 $f(x)$ 的单调增区间为$(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$;单调减区间为$(-1,1)$.

$f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=0$,极小值为 $f(1)=-4$. (10 分)

27.

(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=-x^2+2x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积 S;

(2) 求(1) 中的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

【答案】

(1) 由 $\begin{cases} y=-x^2+2x, \\ y=0 \end{cases}$ 得交点坐标为$(0,0)$,$(2,0)$. (2 分)

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$ (5 分)

(2) $$V=\int_0^2\pi(f(x))^2\mathrm{d}x=\int_0^2\pi(-x^2+2x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)\mathrm{d}x$$ (8 分)

$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi.$$ (10 分)

28.

(本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2+y^2+2y$ 的极值.

【答案】

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x, \\ f_y'(x,y) = 2y+2. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} f_x'(x,y) = 0, \\ f_y'(x,y) = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(0,-1)$. (3 分)

因为 $f_{xx}''(x,y) = 2, f_{xy}''(x,y) = 0, f_{yy}''(x,y) = 2$,

(6 分)

所以 $A = f_{xx}''(0,-1) = 2, B = f_{xy}''(0,-1) = 0$,

$C = f_{yy}''(0,-1) = 2$. (8 分)

由于 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$,故 $f(x,y)$ 在点 $(0,-1)$ 处取得极小值.

极小值为 $f(0,-1) = -1$. (10 分)