1.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{x}=$

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{2}{\pi}$　　D. $-\frac{2}{\pi}$

【答案】D

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 2x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x}=\frac{\cos\pi}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$.

2.

设函数 $y=e^x-\ln 3$，则$\frac{dy}{dx}=$A. e^x　　B. $e^x+\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $e^x-\frac{1}{3}$

【答案】A

【应试指导】因为 $y=e^x-\ln 3$，

故$\frac{dy}{dx}=y'=(e^x-\ln 3)'=e^x$.

3.

设函数 $f(x)=\ln(3x)$，则 $f'(2)=$ A. 6　　B. ln6　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

【答案】C

【应试指导】因为 $f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot(3x)'=3\cdot\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}$，故 $f'(2)=\frac{1}{2}$.

4.

函数 $f(x)=1-x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$

A. 单调增加

B. 单调减少

C. 先单调增加，后单调减少

D. 先单调减少，后单调增加

【答案】B

【应试指导】因为 $f'(x)=-3x^2\leqslant 0,x\in(-\infty,+\infty)$，故函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调减少.

5.

$\int\frac{1}{x^2}dx=$

A. $\frac{1}{x}+C$　　B. $\ln x^2+C$　　C. $-\frac{1}{x}+C$　　D. $\frac{1}{x^2}+C$

【答案】C

【应试指导】$\int\frac{1}{x^2}dx=\int d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}+C$.

6.

$\frac{d}{dx}\int_0^x(t+1)^2dt=$

A. $(x+1)^2$　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}(x+1)^3$　　D. $2(x+1)$

【答案】A

【应试指导】 因为 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$,

故 $\frac{d}{dx}\int_0^x (t+1)^2 dt = (x+1)^2$.

7.

曲线 $y=|x|$ 与直线 $y=2$ 所围成的平面图形的面积为

A．2

B．4

C．6

D．8

【答案】B

【应试指导】 因所围成的图形关于直线 $x=0$ 对称，故 $S=2\int_0^2(2-x)dx = 2\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 4$.

8.

设函数 $z=\cos(x+y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} =$

A. $\cos 2$　　B. $-\cos 2$　　C. $\sin 2$　　D. $-\sin 2$

【答案】D

【应试指导】 因为 $z=\cos(x+y)$，故 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x+y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = -\sin 2$.

9.

设函数 $z=xe^y$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

A. e^x　　B. e^y　　C. xe^y　　D. ye^x

【答案】B

【应试指导】 因为 $z=xe^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y$.

10.

设 A，B 是两随机事件，则事件 A—B 表示

A．事件 A，B 都发生

B．事件 B 发生而事件 A 不发生

C．事件 A 发生而事件 B 不发生

D．事件 A，B 都不发生

【答案】C

【应试指导】 选项 A 表示事件 $A\cap B$，选项 B 表示事件 $B-A$，选项 D 表示事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$.

二、填空题(11～20 小题。每小题 4 分，共 40 分)

11.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^3-3} =$ ________.

【答案】-1

【应试指导】$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x}{x^3-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}2x}{\lim\limits_{x\to1}(x^3-3)}=\frac{2}{-2}=-1.$

12.

设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ a-x, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$

【答案】1

【应试指导】$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(a-x)=a-1$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\ln1=0$，即 $a-1=0$，故 $a=1$.

13.

曲线 $y=x^3-3x^2+5x-4$ 的拐点坐标为__________.

【答案】(1，一1)

【应试指导】易知 $y''=6x-6=0$，得 $x=1$，此时，$y=-1$. 当 $x>1$ 时，$y'>0$；当 $x<1$ 时，$y'<0$，故曲线的拐点为 $(1,-1)$.

14.

设函数 $y=e^{x+1}$，则 $y''=$__________.

【答案】e^{x+1}

【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】因为 $y=e^{x+1}$，故 $y'=e^{x+1}$，$y''=e^{x+1}$.

15.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=$__________.

【答案】e^3

【应试指导】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^3$
$=e^3$.

16.

设曲线 $y=ax^2+2x$ 在点 $(1,a+2)$ 处的切线与直线 $y=4x$ 平行，则 $a=$__.

【答案】1.

【应试指导】因为该切线与直线 $y=4x$ 平行，故切线的斜率 $k=4$，而曲线斜率 $y'(1)=2a+2$，故 $2a+2=4$，即 $a=1$.

17.

$\int e^{3x}dx=$__________.

【答案】$\frac{1}{3}e^{3x}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\int e^{3x}dx=\int\frac{1}{3}de^{3x}=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

18.

$\int_{-1}^{1}(x^3+3x)dx=$__________.

【答案】0

【应试指导】 因为函数 $f(x)=x^3+3x$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=0$.

19.

$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x=$________.

【答案】1

【应试指导】
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\ &=\lim_{a\to-\infty}(1-\mathrm{e}^a)\\ &=1-\lim_{a\to-\infty}\mathrm{e}^a=1.\end{aligned}$$

20.

设函数 $z=x^2+\ln y$，则 $\mathrm{d}z=$________.

【答案】 $2x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$,

故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y$.

三、解答题(21～28 题，共 70 分．解答应写出推理、演算步骤)

21.

(本题满分 8 分)

计算 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$.

【答案】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2}{2x} && (6\text{ 分})\\ &=\frac{1}{2}. && (8\text{ 分})\end{aligned}$$

22.

(本题满分 8 分)

设函数 $y=\sin x^2+2x$，求 $\mathrm{d}y$.

【答案】

$$\begin{aligned}\text{因为 } y'&=(x^2)'\cos x^2+2 && (3\text{ 分})\\ &=2x\cos x^2+2, && (6\text{ 分})\\ \text{故 } \mathrm{d}y&=(2x\cos x^2+2)\mathrm{d}x. && (8\text{ 分})\end{aligned}$$

23.

(本题满分 8 分)

计算 $\int\frac{1+x\mathrm{e}^{5x}}{x}\mathrm{d}x$.

【答案】

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x\mathrm{e}^{5x}}{x}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{5x}\right)\mathrm{d}x && (2\text{ 分})\\ &=\ln|x|+\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5}+C. && (8\text{ 分})\end{aligned}$$

24.

(本题满分 8 分)

计算$\int_1^e \ln x dx$.

【答案】

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x d(\ln x) \quad (4\text{分})$$
$$= e - x\Big|_1^e \quad (6\text{分})$$
$$= 1. \quad (8\text{分})$$

25.

(本题满分 8 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	10	20	30	40
P	0.2	0.1	0.5	a

(1)求常数 a;

(2)求 x 的数学期望 EX.

【答案】

(1) 因为 $0.2+0.1+0.5+a=1$,所以 $a=0.2$.

(3 分)

(2) $EX = 10\times0.2+20\times0.1+30\times0.5+40\times0.2$
$= 27.$ (8 分)

26.

(本题满分 10 分)

求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=0$,$x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

【答案】

$$V = \int_0^1 \pi(x^2)^2 dx \quad (4\text{分})$$
$$= \pi\int_0^1 x^4 dx$$
$$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 \quad (8\text{分})$$
$$= \frac{\pi}{5}. \quad (10\text{分})$$

27.

(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 的单调区间和极值.

【答案】

函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

(4 分)

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1$,$x_2=3$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 7	↘	极小值 −25	↗

因此 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$；单调减区间是 $(-1,3)$.

$f(x)$ 的极小值为 $f(3)=-25$，

极大值为 $f(-1)=7$. (10 分)

28.

(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $2x+3y=1$ 下的极值.

【答案】作辅助函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(2x+3y-1)$$
$$=x^2+y^2+\lambda(2x+3y-1). \quad (4\text{ 分})$$

令 $\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda=0,\\ F'_y=2y+3\lambda=0,\\ F'_\lambda=2x+3y-1=0,\end{cases}$ (6 分)

得 $x=\frac{2}{13},y=\frac{3}{13},\lambda=-\frac{2}{13}$. (8 分)

因此，$f(x,y)$ 在条件 $2x+3y=1$ 下的极值为

$f\left(\frac{2}{13},\frac{3}{13}\right)=\frac{1}{13}$. (10 分)