۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی هوافضا

پروژه اول درس طراحی آیرودینامیکی توربوماشین‌ها

استاد درس:

استاد شیخ الاسلام

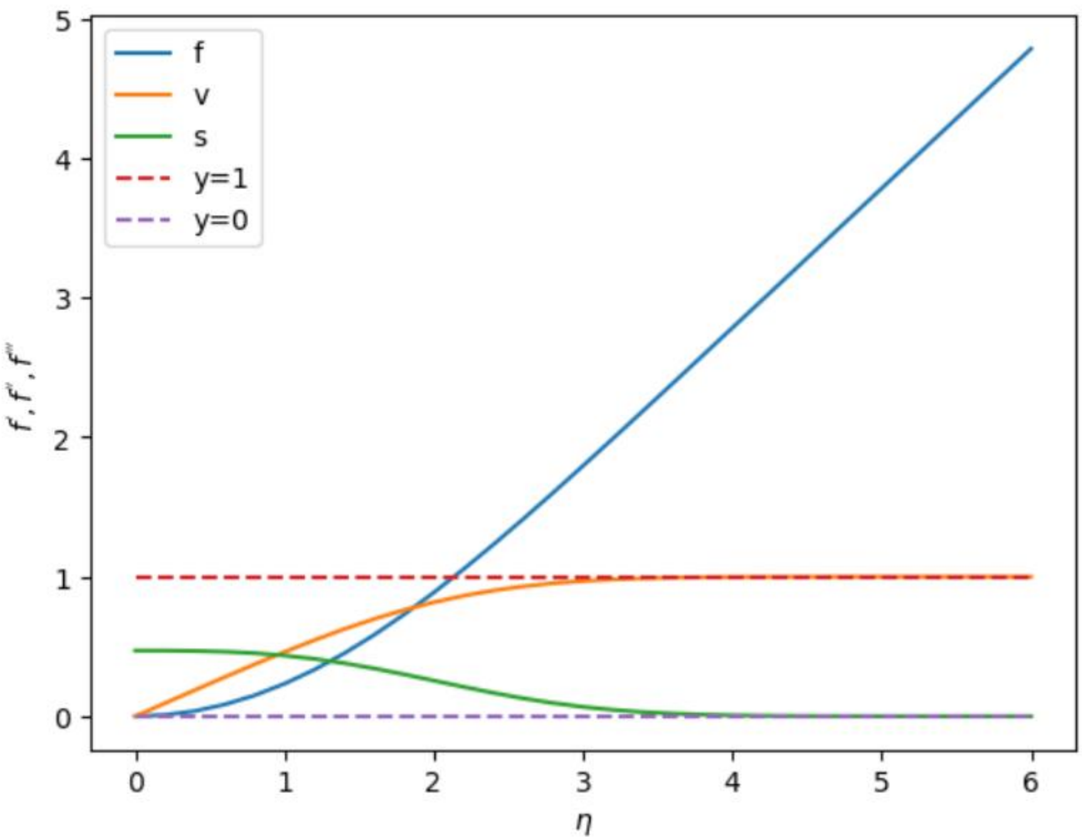
نام و نام خانوادگی دانشجو:

قدیر رحمانی‌نیا

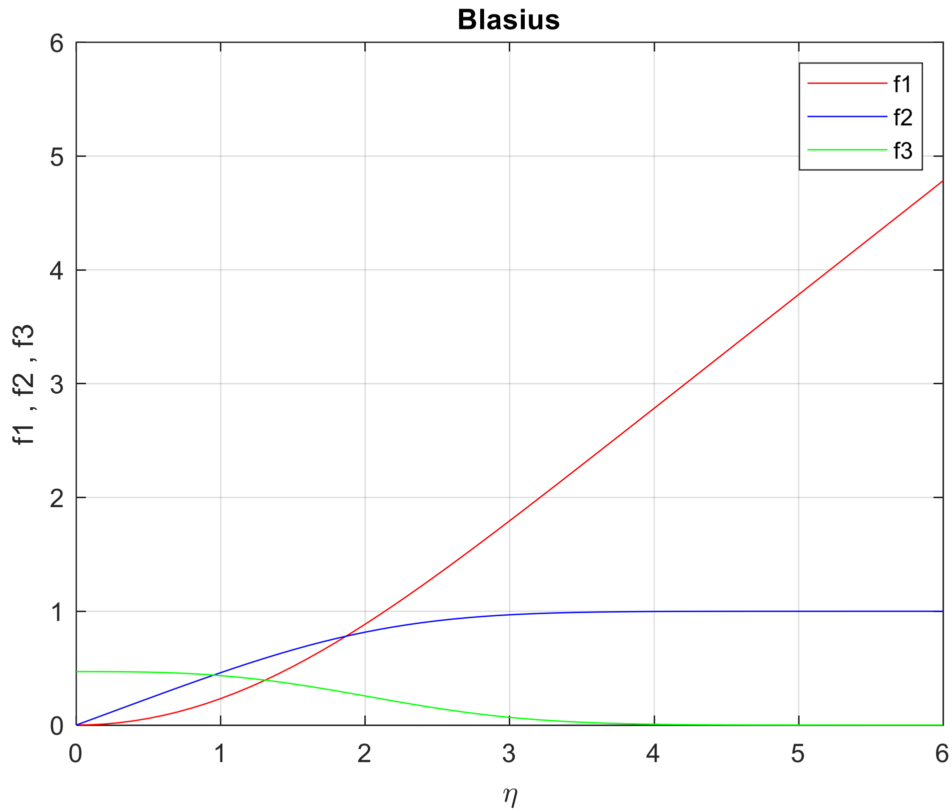
شماره دانشجویی:
40106324

بهمن ماه 1402

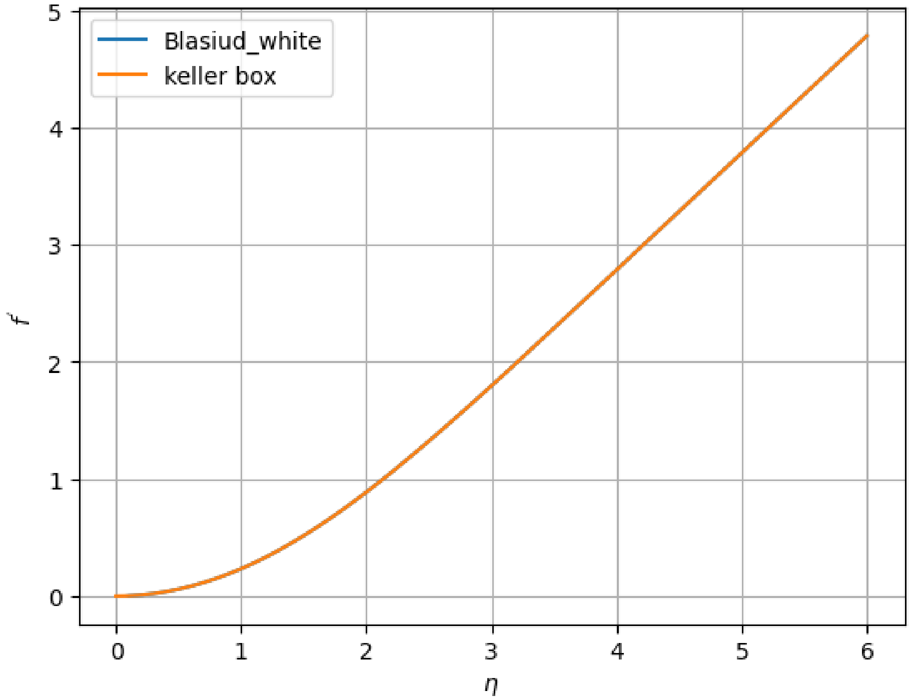
در این پروژه معادله بلازیوس به روش کلر باکس حل شده. که در انتهای گزارش نحوه گسترده کردن توضیح داده شده است، نمودار زیر نتیجه حل معادله بلازیوس به روش کلر باکس می‌باشد. که کد آن در پایتون نوشته شده است:

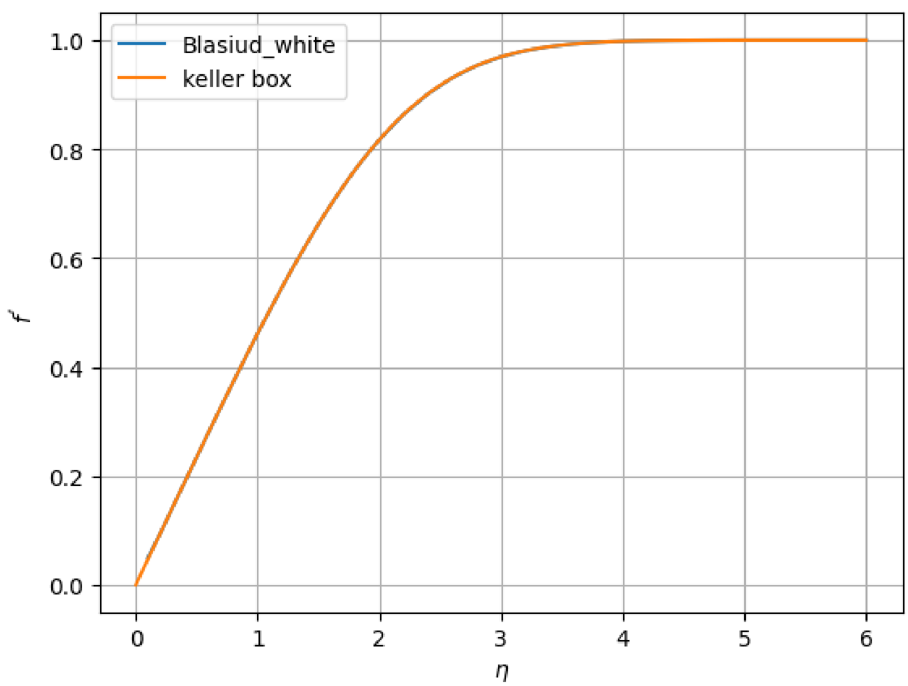


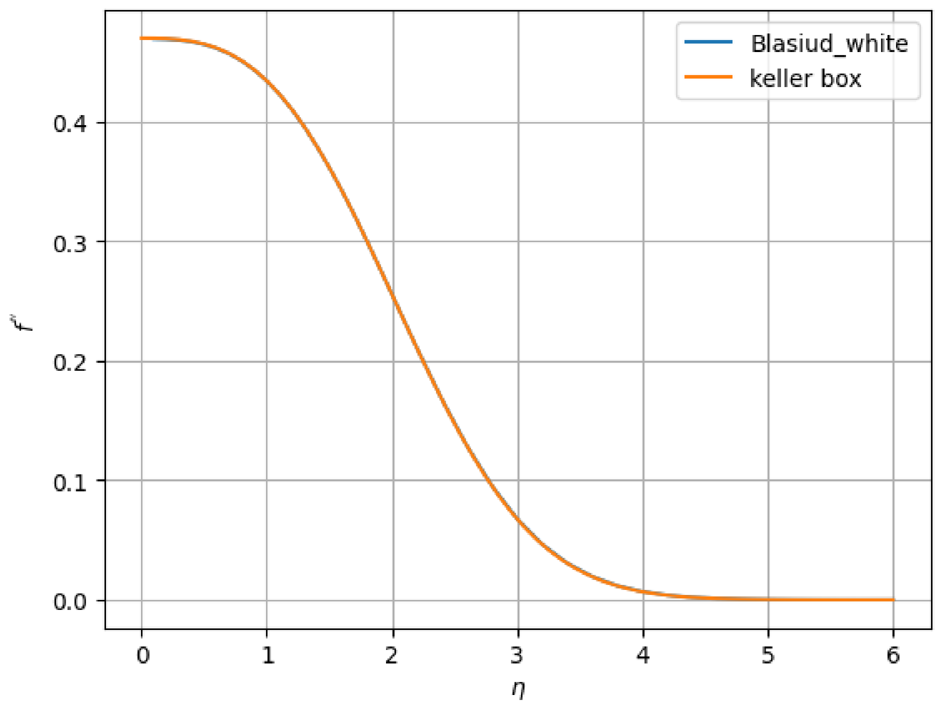
نمودار زیر هم حل معادله بلازیوس با کتابخانه ode متلب می‌باشد:



همچنین در فایل پایتون Comparison.ipynb روش کلر باکس و بلازیوس با هم مقایسه شدن ونمودارهای آن رسم شده است. در ادامه تصاویری از مقایسه مقادیر کتاب وایت با روش کلر باکس را مشاهده می کنید.







همان طور که مشاهده می‌شود نمودارها کاملا بر هم منطبق هستند.

$$\left.\begin{aligned} & f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ & a = f \\ & b = f' \\ & c = f'' \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a' &= b \\ b' &= c \\ c' &= \frac{1}{2} a c \end{aligned}$$

$$① \quad \frac{a_{j+1} - a_j}{h} = \frac{b_{j+1} + b_j}{2}$$

$$② \quad \frac{b_{j+1} - b_j}{h} = \frac{c_{j+1} + c_j}{2}$$

$$③ \quad \frac{c_{j+1} - c_j}{h} = -\frac{1}{2} \, \frac{a_{j+1} + a_j}{2} \, \frac{c_{j+1} + c_j}{2}$$

$$① \quad \frac{1}{h}\left(a_{j+1} + \delta a_{j+1} - a_j - \delta a_j\right) = \frac{1}{2}\left[b_{j+1} + \delta b_{j+1} + b_j + \delta b_j\right]$$

$$\frac{\delta a_{j+1} - \delta a_j}{h} - \frac{\delta b_{j+1} + \delta b_j}{2} = -\left[\frac{a_{j+1} - a_j}{h} - \frac{b_{j+1} + b_j}{2}\right] \quad \mathrm{I}$$

$$② \quad \frac{\delta b_{j+1} - \delta b_j}{h} - \frac{\delta c_{j+1} + \delta c_j}{2} = -\left[\frac{b_{j+1} - b_j}{h} - \frac{c_{j+1} + c_j}{2}\right] \quad \mathrm{II}$$

$$③ \quad \frac{\delta c_{j+1} - \delta c_j}{h} + \frac{1}{8}(a_{j+1} + a_j)(\delta c_{j+1} + \delta c_j) + \frac{1}{8}(\delta a_{j+1} + \delta a_j)(c_{j+1} + c_j) =$$

$$= -\left[\frac{c_{j+1} - c_j}{h} + \frac{1}{8}(a_{j+1} + a_j)(c_{j+1} + c_j)\right] \quad \mathrm{III}$$

$$j=0 \longrightarrow a_0^{n+1} = a_0^n + \delta a_0 \longrightarrow \delta a_0 = -a_0 \qquad (BC1)$$

$$\longrightarrow b_0^{n+1} = b_0^n + \delta b_0 \longrightarrow \delta b_0 = -b_0 \qquad (BC2)$$

$$j=n-1 \longrightarrow b_{n-1}^{n+1} = b_{n-1}^n + \delta b_{n-1} \longrightarrow \delta b_{n-1} = -(b_{n-1}-1) \qquad (BC3)$$

$$\xrightarrow{I,\, j=0} \frac{1}{h}\delta a_1 - \frac{1}{h}\delta a_0 - \frac{1}{r}\delta b_1 - \frac{1}{r}\delta b_0 = -\left[\frac{a_1-a_0}{h} - \frac{b_1+b_0}{r}\right] = R1,\, j=0$$

$$\xrightarrow{II,\, j=0} \frac{1}{h}\delta b_1 - \frac{1}{h}\delta b_0 - \frac{1}{r}\delta c_1 - \frac{1}{r}\delta c_0 = -\left[\frac{b_1-b_0}{h} - \frac{c_1+c_0}{r}\right] = R2,\, j=0$$

$$\xrightarrow{III,\, j=0} \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_1+a_0)\right]\delta c_1 + \left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_1+a_0)\right]\delta c_0 + \frac{1}{\lambda}(c_1+c_0)\,\delta a_1 + \frac{1}{\lambda}(c_1+c_0)\,\delta a_0 =$$

$$= -\left[\frac{c_1-c_0}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_1+a_0)(c_1+c_0)\right] = R3,\, j=0$$

$$\xrightarrow{I,\, j=1} \frac{1}{h}\delta a_r - \frac{1}{h}\delta a_1 - \frac{1}{r}\delta b_r - \frac{1}{r}\delta b_1 = -\left[\frac{a_r-a_1}{h} - \frac{b_r+b_1}{r}\right] = R1,\, j=1$$

$$\xrightarrow{II,\, j=1} \frac{1}{h}\delta b_r - \frac{1}{h}\delta b_1 - \frac{1}{r}\delta c_r - \frac{1}{r}\delta c_1 = -\left[\frac{b_r-b_1}{h} - \frac{c_r+c_1}{r}\right] = R2,\, j=1$$

$$\xrightarrow{III,\, j=1} \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_1)\right]\delta c_r + \left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_1)\right]\delta c_1 + \frac{1}{\lambda}(c_r+c_1)\,\delta a_r + \frac{1}{\lambda}(c_r+c_1)\,\delta a_1 =$$

$$= -\left[\frac{c_r-c_1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_1)(c_r+c_1)\right] = R3,\, j=1$$

$$\xrightarrow{I,\, j=r} \frac{1}{h}\delta a_r - \frac{1}{h}\delta a_r - \frac{1}{r}\delta b_r - \frac{1}{r}\delta b_r = -\left[\frac{a_r-a_r}{h} - \frac{b_r+b_r}{r}\right] = R1,\, j=r$$

$$\xrightarrow{II,\, j=r} \frac{1}{h}\delta b_r - \frac{1}{h}\delta b_r - \frac{1}{r}\delta c_r - \frac{1}{r}\delta c_r = -\left[\frac{b_r-b_r}{h} - \frac{c_r+c_r}{r}\right] = R2,\, j=r$$

$$\xrightarrow{III,\, j=r} \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_r)\right]\delta c_r + \left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_r)\right]\delta c_r + \frac{1}{\lambda}(c_r+c_r)\,\delta a_r + \frac{1}{\lambda}(c_r+c_r)\,\delta a_r =$$

$$= -\left[\frac{c_r-c_r}{h} + \frac{1}{\lambda}(a_r+a_r)(c_r+c_r)\right] = R3,\, j=r$$

$$\mathrm{I},\ j=n-2 \longrightarrow \frac{1}{h}\delta a_{n-1}-\frac{1}{h}\delta a_{n-2}-\frac{1}{2}\delta b_{n-1}-\frac{1}{2}\delta b_{n-2}=-\left[\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{h}-\frac{b_{n-1}+b_{n-2}}{2}\right]=R1,\ j=n-2$$

$$\mathrm{II},\ j=n-2 \longrightarrow \frac{1}{h}\delta b_{n-1}-\frac{1}{h}\delta b_{n-2}-\frac{1}{2}\delta c_{n-1}-\frac{1}{2}\delta c_{n-2}=-\left[\frac{b_{n-1}-b_{n-2}}{h}-\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{2}\right]=R2,\ n-2$$

$$\mathrm{III},\ j=n-2 \longrightarrow \left[\frac{1}{h}+\frac{1}{8}(a_{n-1}+a_{n-2})\right]\delta c_{n-1}+\left[-\frac{1}{h}+\frac{1}{8}(a_{n-1}+a_{n-2})\right]\delta c_{n-2}+\frac{1}{8}(c_{n-1}+c_{n-2})\,\delta a_{n-1}+$$

$$+\frac{1}{8}(c_{n-1}+c_{n-2})\,\delta a_{n-2}=-\left[\frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{h}+\frac{1}{h}(a_{n-1}+a_{n-2})(c_{n-1}+c_{n-2})\right]=R3,\ n-2$$

در روابطی که مشاهده کردید اگر به جای $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ قرار دهیم در واقع باز همان معادله بلازیوس است اما به این شکل :

$$f'''+ff''=0$$

در کدی که نوشته شده به جای $\frac{1}{8}$ یا $\frac{1}{4}$ متغیر m قرار دارد که می توان مقدار آن را به $\frac{1}{4}=0.25$ یا $\frac{1}{8}=0.125$ تغییر داد.

$$j=0 \Longrightarrow B_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{1}{h}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},\quad R_0=\begin{bmatrix}a_0\\b_0\\\frac{a_1-a_0}{8}-\frac{b_1+b_0}{2}\end{bmatrix}$$

$$j>0 \Longrightarrow A_j=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{h}&-\frac{1}{2}\\\frac{c_j+c_{j-1}}{8}&0&\frac{a_j+a_{j-1}}{8}-\frac{1}{h}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$j>0 \text{ and } j<n-1 \Longrightarrow B_j=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{h}&-\frac{1}{2}\\\frac{c_j+c_{j-1}}{8}&0&\frac{a_j+a_{j-1}}{8}+\frac{1}{h}\\-\frac{1}{h}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow R_j=\begin{bmatrix}\frac{b_j-b_{j-1}}{h}-\frac{c_j+c_{j-1}}{2}\\\frac{c_j-c_{j-1}}{h}+\frac{(a_j+a_{j-1})(c_j+c_{j-1})}{8}\\\frac{a_{j+1}-a_j}{h}-\frac{b_{j+1}+b_j}{2}\end{bmatrix}$$

$$j=n-1 \Longrightarrow B_N=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{2} \\ \frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{8} & 0 & \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{8}+\frac{1}{h} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_N=\begin{bmatrix} \frac{b_{n-1}-b_{n-2}}{h}-\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{2} \\ \frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{h}+\frac{(a_{n-1}+a_{n-2})(c_{n-1}+c_{n-2})}{8} \\ b_{n-1}-1 \end{bmatrix}$$

$$0\leq j<n-1 \Longrightarrow C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & C_0 & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & C_{n-2} \\ & & & & A_{n-1} & B_N \end{bmatrix}}_{n\times n}\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{n-2} \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix}}_{n\times 1}=-\underbrace{\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n-2} \\ R_N \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

$$\delta=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f \\ f'' \\ f'' \end{bmatrix}$$

		δa_0	δb_0	δc_0	δa_1	δb_1	δc_1	δa_2	δb_2	δc_2	δa_{n-2}	δb_{n-2}	δc_{n-2}	δa_{n-1}	δb_{n-1}	δc_{n-1}
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	۳n-۶	۳n-۵	۳n-۴	۳n-۳	۳n-۲	۳n-۱
$j=0$	۰	1	0	0	0	0	0									
	۱	0	1	0	0	0	0									
	۲	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0									
$j=1$	۳	0	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0						
	۴	$\frac{c_1+c_0}{8}$	0	$-\frac{1}{h}+\frac{a_1+a_0}{8}$	$\frac{c_1+c_0}{8}$	0	$\frac{1}{h}+\frac{a_1+a_0}{8}$	0	0	0						
	۵	0	0	0	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0						
$j=2$	۶				0	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0			
	۷				$\frac{c_2+c_1}{8}$	0	$-\frac{1}{h}+\frac{a_2+a_1}{8}$	$\frac{c_2+c_1}{8}$	0	$\frac{1}{h}+\frac{a_2+a_1}{8}$	0	0	0			
	۸				0	0	0	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0			
$j=n-2$	۳n-۶													0	0	0
	۳n-۵													0	0	0
	۳n-۴										$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0
$j=n-1$	۳n-۳										0	$-\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{2}$
	۳n-۲										$\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{8}$	0	$-\frac{1}{h}+\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{8}$	$\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{8}$	0	$\frac{1}{h}+\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{8}$
	۳n-۱										0	0	0	0	1	0