Le 15/03/2020

Résumé de cours d'analyse et probabilités MP

A.CHABCHI

Contents

Abstract

Ce résumé est illustré par de nombreux exemples pour faciliter son usage. Les exemples utilisent toutes les notions du programme et peuvent-être laissé à une seconde lecture en cas de difficulté.

Bon courage

I. Espaces vectoriels normés

A. Normes

1. Norme = Toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

   (a) $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

   (b) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

   (c) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)\, a$

2. **Exemples :**

   (a) Dans $\mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$; et $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$; où $x = (x_1, ..., x_n)$.

   (b) Dans $E = C^0([a,b], \mathbb{K})$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$ et $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)|$.

3. **Une classe de norme très importante est celle des normes issues d'un produit scalaire :** Si $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme. En plus de l'inégalité triangulaire, cette norme vérifie aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité ssi (x, y) liée.

   (a) Dans $\mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} = {}^tXX$ est la norme euclidienne usuelle associée à : $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY.$, Cauchy-Schwarz donne :
   $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2}$ avec égalité ssi (x, y) liés.
   et $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi (x, y) positivement liés

   (b) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\|M\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{ij}|^2} = \sqrt{Trace\,({}^tMM)}$; associée à $\langle M, N\rangle = Trace\,({}^tMN)$.

   (c) Dans $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$; associée à $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$
   Cauchy-Schwarz : $\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\, dt}$ avec égalité ssi (f, g) liés.

   (d) Dans $E = L^2_C(I, \mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\, dt}$; associée à $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\, g(t)\, dt.$
   Cauchy-Schwarz : $\left|\int_I f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2\, dt}\sqrt{\int_I |g(t)|^2\, dt}$ avec égalite ssi f et $g.sont$ liés.

   Restent valables pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en remplaçant dans $\langle .,. \rangle$: x par son conjugué $\overline{x}$ dans (a), M par $\overline{M}$ dans (b) et f par $\overline{f}$ dans (c). on obtient alors :
   $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = {}^t\overline{X}Y$ dans $\mathbb{C}^n$; $\langle M, N\rangle = Trace\left({}^t\overline{M}N\right)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et
   $\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, dt$ dans $C^0([a,b], \mathbb{C})$.

4. **Norme de matrice ou d'endomorphisme :** Lorsqu'on travaille dans une algèbre comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}(E)$: il est pratique de choisir des normes d'algèbre (sous-multiplicatives) : $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ ou $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$. Ces normes vérifient $\|A^p\| \leq \|A\|^p$.

B. Norme équivalente

1. $N_1 \leq \alpha N_2 \Longleftrightarrow$ la convergence au sens de N_2 entraîne la convergence au sens de N_1.

2. Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

3. Deux normes équivalentes définissent la même topologie : même suite convergente, même ouverts, même fermé, même ....

4. **Equivalence des normes :** En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : Toutes les notions topologiques sont alors indépendantes de la norme, vous choisissez la norme la mieux adaptée.

   Exemple : Montrer que la série de matrice $\sum_{k\geq 0} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$ est convergente. Vu l'équivalence des normes en dimension finie, on choisit une norme d'algèbre, donc $\left\| \frac{A^{2k}}{(2k)!} \right\| \leq \frac{\|A\|^{2k}}{(2k)!}$, or la série de nombre $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^{2k}}{(2k)!}$ converge selon le ctritère de D'Alembert, donc la série de matrice $\sum_{k\geq 0} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$ converge absolument, donc converge.

C. Majoration dans un evn

1. **Inégalité triangulaire :**
   (a) Pour 2 éléments : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
   (b) Pour un nombre fini : $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$
   (c) Pour une série Absolument Cv : $\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$
2. **Minoration :** $\|x+y\| \geq \|x\| - \|y\|$

D. Voisinage - Ouvert - Fermé

1. $V \in \mathcal{V}(x) \iff \exists\ r > 0,\ B(x,r) \subset V$. Les réunions quelconque et les intersections finies de voisinages sont des voisinages
2. Ouvert = voisinage de tous ses point et Fermé = Complémentaire d'ouvert
3. F fermé $\iff \forall\ (u_n) \in F^{\mathbb{N}}$, avec $\lim u_n = l$, alors $l \in F$. Pour montrer F fermé, prendre une suite convergente d'éléments de F et montrer que sa limite est dans F.

   Exemples:
   (a) $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ xy \geq 0\right\}$ fermé car si $\forall n,\ x_n y_n \geq 0$ alors $\left(\lim\limits_{n} x_n\right)\left(\lim\limits_{n} y_n\right) \geq 0$.
   (b) L'ensemble des matrices diagonales est fermé car la limite d'une suite de matrices diagonales est aussi diagonale.
   (c) L'ensemble des matrices triangulaires sup est fermé car la limite d'une suite de matrices triangulaires sup est aussi triangulaire sup.
4. F fermé (relatif) de $E \iff F = f^{-1}\left(\textit{fermé simple de } E'\right)$, avec $f : E \to E'$ continue sur E.

   Exemples :
   (a) $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ xy \geq 1\right\} = f^{-1}\left([1,+\infty[\right)$, où $f(x,y) = xy$ continue car polynômiale et $[1,+\infty[$ fermé.
   (b) La sphère unité $S(0,1) = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$, où $f(x) = \|x\|$ continue et $\{1\}$ fermé.
   (c) Le groupe orthogonale $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $f(M) = {}^tMM$ continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car à composante polynômiale des coefficients de M.
5. O ouvert (relatif) de $E \iff O = f^{-1}\left(\textit{Ouvert simple de } E'\right)$, avec $f : f : E \to E'$ continue sur E.

   Exemples :
   (a) $GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ \ / \ \det(M) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, det continue car polynômiale et $\mathbb{K}^*$ ouvert.
   (b) $O = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ xy > 1\right\} = f^{-1}\left(]1,+\infty[\right)$, où $f(x,y) = xy$ continue car polynômiale et $]1,+\infty[$ ouvert.

E. Adhérence et intérieur

1. $x \in \bar{A}$ si $\forall\, r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ et $x \in \mathring{A}$ si $\exists\, r > 0,\ B(x,r) \subset A$

2. $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

3. $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$

4. **Théorème :**

   (a) $\bar{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A. C'est aussi le plus petit fermé contenant A et $\bar{A} = A$ ssi A fermé

   (b) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A et $\mathring{A} = A$ ssi A ouvert

F. Densité

1. A est dense dans E si $\bar{A} = E$: Tout élément de E est limite d'une suite d'élément de A ou encore toute boule de rayon non nul contient un point de A.

2. Deux fonctions continues coincidant sur une partie dense sont partout égales.

3. Pour établir une propriété, on pourra commencer par l'établir sur une sous partie dense.

   Exemple : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et comme application par exemple les produits MN et NM ont le même polynôme caractéristique.

G. Valeur d'adhérence

1. l est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ ssi l est la limite d'une suite extraite de (x_n).

2. Une suite convergente admet une seule valeur d'adhérence qui est sa limite. Une suite ayant au moins 2 valeurs d'adhérence est divergente.

3. **Bolzano-Weierstrass :** En dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Et toute suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence est convergente.

H. Compact

1. A compact si toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A.

2. Compact $\Longrightarrow$ fermé-borné

3. En dimension finie : Compact = fermé et borné.

4. Un produit cartésien fini de compact est compact

5. L'image continue d'un compact est un compact.

6. **Théorème des bornes atteintes : Toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.** Pour montrer qu'une fonction est bornée ou atteint ses bornes penser à utiliser ce résultat.

   Exemples :

   (a) $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, alors $\exists\, c \in [a,b]$, $f(c) = \sup\limits_{a \leq t \leq b} f(t)$, car f est continue sur le compact $[a,b]$.

   (b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exists\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\|Y\| = 1$ et $\|AY\| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$, car $X \longmapsto AX$ est continue sur la sphère unité qui est compact.

   (c) La distance à un compact (non vide) est atteinte : Si A compact, $\forall\, x \in E$, $\exists\, a \in A : d(x,A) = \|x - a\|$

I. Continuité des applications

1. Toute application linéaire, n-linéaire en dimension finie est continue.

   Exemples :

   (a) Les applications $A \longmapsto Trace\,(A)$ et $A \longmapsto PAP^{-1}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$ car linéaires en dimension finie

   (b) L'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}\,(\mathbb{K}) \longmapsto AX$ est C^0 car linéaire en dimension finie.

2. Toute application polynômiale ou de composante polynômiale est continue sur E.

3. Toute fonction rationnelle ou de composante rationnelle est continue sur son domaine de définition

   Exemples :

   (a) L' application $A \longmapsto \det(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$ car polynômiale en fonction des (a_{ij}).

   (b) $A \longmapsto A^P$ est continue sur $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$ car de composantes polynômiales.

   (c) $A \longmapsto A^{-1} = \dfrac{{}^t com\,(A)}{\det(A)}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n\,(\mathbb{K})$ car de composantes rationnelles.

4. Toute application Lipschitzienne est uniformément continue.

5. **Heine :** Sur un compact, il y'a équivalence entre continuité et uniforme continuité.

6. **Caractérisation séquentielle de la continuité**

$f \in \mathcal{F}(A, F)$ est continue en $a \in A$ ssi pour toute suite (x_n) d'élément de A convergeant vers a, la suite des images $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

S'utilise souvent pour justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)$.

J. Convergence des suites

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$

2. Si $\|u_n - l\| \leq \alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

3. En dimension finie , une suite converge ssi ses coordonnées dans une base converge vers les coordonnées de la limite

   Exemples :

   (a) $\lim\limits_{p\to+\infty} (x_p, y_p) = \left(\lim\limits_{p\to+\infty} x_p, \lim\limits_{p\to+\infty} y_p\right)$

   (b) Une suite de matrice $A_p = (a_{ij}\,(p))$ converge vers $A = (a_{ij})$ ssi $\forall\ (i,j)$: $\lim\limits_{p\to+\infty} a_{ij}\,(p) = a_{ij}$. Par exemple $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(A + \dfrac{I_n}{p}\right) = A$.

4. **Suites de Cauchy :** $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ p \geq N,\ \forall\ q \geq N,\ \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$.

   - En dimension finie : Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. Ce critère est théorique et ne fournit aucune idée sur la limite , il est a utiliser en dernier lieu.
   - En dimension infinie : Les suites de Cauchy convergent dans les espaces dits **Complets**.
   - Un complet est fermé. En particulier tout s-ev de dimension finie d'un evn est fermé.

K. Connexité par arcs

1. Un connexe par arcs A est formé d'un seul morceau : Deux points de A sont joingnable par un chemin continue dans A : Pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe $\phi : [0, 1] \longrightarrow A$ continue tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$.

2. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

3. Pour montrer que A connexe par arcs, on essaye d'abord de montrer convexe : joindre deux points par un segment ou étoilé : joindre tout point par un segment à un point donné fixé.

   Par exemple l'ensemble des matrices diagonalisables est étoilé en I_n, donc connexe par arcs

4. **Théorème des valeurs intermédiaires :** L'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs : Si une fonction à valeurs réelles prend deux valeurs de signes opposés sur un connexe par arcs A, alors elle s'annule sur A. Par exemple, pour $n \geq 2$, $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ non connexe et det continue, donc $O_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs.

5. Les seuls ouverts-fermés d'un connexe A sont A lui même et $\varnothing$.

6. Lorsque A non connexe par arcs, on s'intéresse aux plus grandes sous-parties connexes : composantes connexes par arcs.

II. Les séries de nombres ou de vecteurs

A. Les connaissanes de base :

1. **Croissance comparée** :

   (a) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$, $\alpha > 0$: Càd $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0$

   (b) $n^\alpha = o(a^n)$, $a > 1$, On rappelle que $a^n = e^{n\ln(a)}$.

   (c) $a^n = o(n!)$.

2. **Divergence grossière :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge **grossièrement.** Par exemple $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{nx}}{n}$ diverge grossièrement pour $x > 0$.

3. **Reste et somme partielle :** $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$.

4. **Série de références**

   (a) **Série géométriques :** $u \in \mathbb{K}$, La série $\sum\limits_{n\geq 0} u^n$ converge ssi $|u| < 1$. dans ce cas :

      i. $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n = \dfrac{1}{1-u}$.

      ii. $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u^k = \dfrac{u^n}{1-u}$. Par exemple pour $x > 0$, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} e^{-kx} = \dfrac{e^{-2x}}{1-e^{-x}}$.

5. **Série alternée : de la forme** $\sum u_n = \sum (-1)^n |u_n|$ ou $\sum u_n = \sum (-1)^{n+1} |u_n|$.

   (a) **CSSA :** Si $(|u_n|)_n$ est décroissante de limite nulle, alors $\sum u_n$ converge et vérifie : $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$: le reste est dominé par la valeur absolue de son premier terme et a le même signe.

   (b) **Exemples :** Les séries $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge selon le CSSA.

6. **Séres de Riemann :** La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

7. **Séries de Bertrand :** La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge ssi $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

B. Les critères de convergence :

1. **Le D'Alembert :** $\forall\, n \geq 0,\ u_n > 0$

   (a) **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\sum u_n$ converge

   (b) **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

   (c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, Cas douteux !!

   Dans un evn il s'applique à la série $\sum \|u_n\|$ pour donner la CvA qui donne la Cv : la série $\sum (-1)^n \dfrac{z^{3n}}{n!}$ CvA pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left|(-1)^{n+1} \dfrac{z^{3(n+1)}}{(n+1)!}\right|}{\left|(-1)^n \dfrac{z^{3n}}{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^3}{n+1} = 0 < 1$.

2. **Comparaison :**

   (a) **Domination :** $|u_n| = O(\alpha_n)$ ou $o(\alpha_n)$ et $\sum \alpha_n$ converge, alors $\sum u_n$ CvA donc Cv.

   Exemples :

   i. La série $\sum n^2 e^{-n}$ converge car $n^2 e^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

   ii. Pour $\alpha > 1$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$converge car $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$, où $\gamma \in \left]1, \alpha\right[$.

   (b) **Equivalence :** $u_n \sim v_n$ avec $\forall\, n,\ v_n \geq 0$, alors $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum v_n$ converge.

   Exemples :

   i. La série $\sum \left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$ converge car $1 - \cos\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ converge à terme ≥ 0.

   ii. La série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ diverge car $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \sim \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{n}}$ converge à terme ≥ 0.

3. **Suite se ramenant à une série :** Il est parfois pratique (lorsque le terme de la suite est une somme, ou un produit) de ramener l'étude d'une suite à celle d'une série par téléscoppage : Soit (u_n) suite, on pose $v_0 = u_0$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, alors la suite (u_n) converge ssi la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge..

   Exemples :

   (a) Montrer que la suite $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$ est convergente : En effet $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$, avec $\sum -\dfrac{1}{2n^2}$ converge et garde un signe constant, donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et donc la suite (u_n) convege vers un réel γ dit la constante d'Euler

   (b) Même question pour $v_n = n! e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$ dans ce cas on se ramène à une somme en considérant $\ln(v_n)$. On cherche un équivalent de $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, on conclut que la série $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge, puis on conclut que les suites $(\ln v_n)$, puis (v_n) convergent.

4. **Comparaison avec une intégrale**

   Théorème : Soit $f \in C^0M\left([a, +\infty[, \mathbb{R}\right)$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge ssi la fonction f est intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$. dans ce cas

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \quad \leq \quad R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$\text{et } S_n \quad \sim \quad \int_a^n f(t)\,dt \ \text{ en cas de divergence}$$

Très utile pour chercher des équivalents de restes, de sommes partielles ou de sommations.

Exemple :

(a) Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est équivalente à $\ln(n)$

(b) Pour $\alpha > 1$, montrer que le reste de Riemann $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est équivalente à $\frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

Cas complexe ou réel quelconque : Soit $f \in C^1([a, +\infty[\,, \mathbb{C})$ une fonction de classe C^1. Si f' est intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ alors la série $\sum \left(f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt \right)$ est absolument convergente et si f est aussi intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ alors la série $\sum f(n)$ est absolument convergente.

En effet : noter l'intégration par partie astucieuse : $\int_{n-1}^{n} f(t)\, dt = \int_{n-1}^{n} (t - (n-1))' f(t)\, dt$
$= f(n) - \int_{n-1}^{n} (t - n + 1) f'(t)\, dt$, donc
$\left| f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt \right| = \left| \int_{n-1}^{n} (t - n + 1) f'(t)\, dt \right| \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\, dt$

5. **Transformation d'Abel** (Hors programme mais classique) Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite réelle décroissante de limite nulle et (u_n) une suite à terme dans un evn de dimension finie E, dont la somme partielle $\left(A_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \right)_n$ est bornée. Alors la série $\sum \varepsilon_n u_n$ est convergente.

   On montre que sa somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$ vérifie le critère de Cauchy, en écrivant $u_n = A_n - A_{n-1}$.

   Exemple : Pour $\alpha \in \,]0, 1]$, les séries $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ ($\theta \neq 0\ [2\pi]$)

6. **Série de matrice ou d'endomorphisme.**

   (a) Si $|||A||| < 1$, alors la série géométrique de matrice $\sum_{k \geq 0} A^k$ CvA et de somme $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$. En particulier la matrice $(I_n - A)$ est inversible.

   (b) $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la série exponentielle $\sum \frac{A^k}{k!}$ CvA et de somme $\exp(A)$.

7. **Produit de Cauchy :**

   (a) $\sum_{n \geq 0} u_n \times \sum_{n \geq 0} v_n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)$.

   (b) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ CvA, alors le produit $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)$ CvA aussi et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)$.

C. Sommation de relation de comparaison

Sommation de relation de comparaison :

1. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, on suppose $\sum \alpha_n$ converge alors :

   (a) Si $u_n = O(\alpha_n)$ alors $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k \right)$.

   (b) Si $u_n = o(\alpha_n)$ alors $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k \right)$..

2. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, on suppose $\sum \alpha_n$ diverge alors :

(a) Si $u_n = O(\alpha_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$.

(b) Si $u_n = o(\alpha_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$..

3. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

   (a) Si $\sum \alpha_n$ est convergente et $u_n \sim \alpha_n$ alors $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \alpha_k$

   (b) Si $\sum \alpha_n$ est divergente et $u_n \sim \alpha_n$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$

Pratique : En général, en cas de convergence la relation de comparaison se transmet aux restes et en cas de divergence elle se transmet aux sommes partielles.

Exemple : $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n} u_n = l$, montrons que la moyenne $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge aussi vers l : On a $u_n - l = o(1)$, avec $\sum 1$ divergent et à terme positif, donc $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - l) = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 1\right) = o(n+1)$. D'où $\dfrac{1}{n+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) - l = o(1)$.

D. Sommabilité

1. **Ensemble dénombrable :** En bijection avec $\mathbb{N}$, donc on peut le ranger en une suite $\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

   - Un produit cartésien **fini** d'ensemble dénombrable est dénombrable
   - Une réunion fini ou dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables ainsi que leurs sous-parties infinies.
   - $\mathbb{R}$ et ses sous-intervalles non réduit à un singleton sont **non dénombrables**

2. **Sommabilité :**

   (a) **Sommabilité :** I dénombrable et $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est dite sommable si la famille à terme positif des modules $(|x_i|)_{i \in I}$ est sommable : les sommes partielles finies $\left(\sum\limits_{i \in J} |x_i|,\ J \subset I,\ J \text{ fini}\right)$ sont majorées. Dans ce cas sa somme ne dépend pas de l'ordre de la sommation.

   (b) **Cas d'une suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Elle est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est **absolument convergente.**

   (c) **Sommation par paquet :** Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geq 0} \left(\sum\limits_{i \in I_n} |x_i|\right)$ est convergente. Dans ce cas
   $$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i\right)$$

   (d) **Sommabilité des suites doubles qui permet d'échanger l'ordre de deux sommations infinies (Fubini)**

Théorème fondamental : Interversion des sommations

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou de complexes, les propriètés suivantes sont équivalentes:

- u est sommable.
- Pour tout $q \in \mathbb{N}$ fixé, la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} u_{p,q}$ *est absolument* **convergente** *et la série* $\sum\limits_{q \in \mathbb{N}} \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ **est convergente**.
- *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$ fixé, *la série* $\sum\limits_{q \in \mathbb{N}} u_{p,q}$ *est absolument* ***convergente*** *et la série* $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ *est* **convergente**.

Dans ce cas, on a :

$$s(u)=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right).$$

Dans la pratique, on commence par la sommation la plus facile (Géométrique, téléscopique,...) : C'est le point fort du théorème !!

Exemple1 : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)=1$, où $\displaystyle\zeta(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$ désigne la fonction Zêta de Riemann.

Réponse : Cela revient à montrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=1$. On considére la suite double $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\geq 2,k\geq 2}$, on fixe $n\geq 2$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\left|\frac{1}{n}\right|^k$ est géométrique de raison $\left|\frac{1}{n}\right|<1$, donc converge et de somme

$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left|\frac{1}{n}\right|^k=\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n(n-1)}$ et aussi $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente, ainsi $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\geq 2,k\geq 2}$ est sommable et par suite :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1)=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$$

Exemple2 : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs entières admettant des espérances, montrer que $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. Si de plus X et Y sont indépendantes, montrer alors que $E(XY)=E(X)E(Y)$

Ecrire $\displaystyle E(X)=\sum_{k\in\mathbb{N}}kP(X=k)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{k'\in\mathbb{N}}kP(X=k)P(Y=k')$ et

$\displaystyle E(Y)=\sum_{k'\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}k'P(Y=k')P(X=k)$. Ces familles étant sommables, on choisit la partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ avec $A_n=\{(k,k')\in\mathbb{N}^2\ /\ k+k'=n\}$, alors

$$E(X)+E(Y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sum_{(k,k')\in A_n}P(X=k)P(Y=k')=\sum_{n\in\mathbb{N}}nP(X+Y=n)=E(X+Y)$$

Pour le produit choisir la partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ avec $A_n=\{(k,k')\in\mathbb{N}^2\ /\ kk'=n\}$

III. Suites et séries de fonctions

A. Suites de fonctions

1. Modes de convergence :

1. **La convergence simple :** La suite de fonctions $(f_n)_n$ CvS sur la partie A vers la fonction f si : $\forall\, x\in A,\ \lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$.

   Exemples :

   (a) La suite de fonctions $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ CvS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle

   (b) La suite de fonctions $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ CvS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f:x\longmapsto e^x$

2. **La convergence uniforme :** La suite de fonctions $(f_n)_n$ CvU sur la partie A vers la fonction f si : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$.

   Pour montrer la convergence uniforme, on peut dominer **uniformément** la différence $|f_n(x)-f(x)|$ par une suite de limite nulle.

   Exemples :

   (a) La suite de fonctions $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx^2}}{n}$ CvS sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle car $\forall\, x\in\mathbb{R},\ |f_n(x)|\leq\frac{1}{n}\to 0$

   (b) La suite de fonctions $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ne Cv pas Uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f:x\longmapsto e^x$ car $|f_n(n)-f(n)|=e^n-2^n\nrightarrow 0$.

2. Propriètés de la limite :

Tout d'abord, **Il est à noter que la convergence simple ne permet pas de transmettre les propriètés des f_n à la limite f.**

1. **Continuité de la limite :** A partie de E, $f_n : A \longrightarrow F$.(E et E evn de dim $< +\infty$)
   Si $\left\{\begin{array}{c} \forall\ n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } A \text{ partie d'un evn de dimension finie} \\ \text{La suite } (f_n)\ CvU \text{ sur tout } \textbf{compact } C \text{ de } A,\ vers\ f \end{array}\right.$,
   alors f est continue sur A.
   Pratique : $\left\{\begin{array}{c} \text{Si } A \subset \mathbb{R}, choisir\ C = [a,b] \ \textbf{segment de } A. \\ \text{Si } A \subset E \text{ evn, choisir } C = B_f(a,r) \ \textbf{boule fermée de } A \end{array}\right.$
2. **Dérivabilité de la limite :** J intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n : J \longrightarrow F$ evn de dim $< +\infty$
   Si $\left\{\begin{array}{c} \forall\ n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \text{La suite } (f_n)\ CvS \text{ sur } J \text{ vers } f \\ \text{La suite } (f'_n)\ CvU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } J \end{array}\right.$
   alors f est C^1 sur J et $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'$.
   Extension C^k : Se généralise aux fonctions de classes C^k sous la CvU de $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ sur les segments et la CvS des autres dérivées.
   Pratique : S'utilise pour les fonctions à plusieurs variables en passant par les dérivées partielles
3. **Théorème de Stone-Weierstrass :** Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynôme : $\|P_n - f\|_\infty^{[a,b]} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
   Application : Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, alors $f = 0$. Commencer par les fonctions polynômes et généraliser par densité

B. Séries de fonctions

1. Modes de convergence :

1. **La convergence simple :** La série de fonctions $\sum f_n$ CvS sur la partie A, si : $\forall\ x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ Cv.
   Exemples :
   (a) La série de fonctions $\sum nxe^{-nx^2}$ CvS sur $\mathbb{R}$, car $nxe^{-nx^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ Cv
   (b) La série de fonctions $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$ CvS sur $\mathbb{C}$
2. **La convergence uniforme :** La suite de fonctions $\sum f_n$ CvU sur la partie A, si sa suite des restes (R_n) CvU vers 0 : Càd $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\right) = 0$. C'est compliqué, mais il y'a deux cas où c'est trés simple :
3. **Cas de la convergence normale :**
   - $\sum f_n$ CvN si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^A$ *converge.*
   - **Majoration uniforme :** Si $\forall\ x \in A$, $|f_n(x)| \le \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ converge, alors la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^A$ *converge*, donc $\sum f_n$ CvN sur A et donc CvU sur A. Attention α_n ne dépend pas de x.

   Exemples :
   (a) $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ CvU sur $\mathbb{R}$ car $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ avec $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ Cv.
   (b) Pour $a > 1$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^x}$ CvU sur $[a,+\infty[$ car $\left|\frac{1}{n^x}\right| \le \frac{1}{n^a}$ avec $\displaystyle\sum \frac{1}{n^a}$ Cv.
   (c) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{A^k}{k!}$ CvN sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Sur toute boule $B(0,r)$, pour une norme d'algèbre $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \frac{r^k}{k!}$ et $\sum \frac{r^k}{k!}$ Cv

4. **Cas des séries alternées :** Si $\forall\ x \in A$, la série $\sum (-1)^n f_n(x)$ est alternée vérifiant le CSSA et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)|\right) = 0$ alors $\sum (-1)^n f_n$ CvU sur A car $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \|f_{n+1}\|_\infty \to 0$.

   Exemples :

   (a) La série $\sum (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ CvU sur $[0,1]$ car $|R_n(x)| \leq \left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$.

   (b) La série $\sum (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ CvU sur $[0,a]$ car $|R_n(x)| \leq \left|\ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)\right| \leq \dfrac{x}{n+1} \leq \dfrac{a}{n+1} \to 0$.

2. Propriètés de la somme :

1. **Continuité de la somme :**

   Si $\begin{cases} \forall\ n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } A \\ \text{La série } \sum f_n\ CvU \text{ sur tout compact de } A \end{cases}$,

   alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

2. **Dérivabilité de la somme :** J intervalle de $\mathbb{R}$

   Si $\begin{cases} \forall\ n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ de classe } C^1 \text{ sur } J \\ \text{La série } \sum f_n\ CvS \text{ sur } J. \\ \text{La série des dérivées } \sum f_n'\ CvU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } J \end{cases}$

   alors f est C^1 sur J et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

   Extension aux fonctions C^k : se généralise aux fonctions C^k sous la CvU locale de $\sum f_n^{(k)}$ sur les segments ou les boules et la CvS des autres séries iintermédiaires.

   Pratique : S'applique aux fonctions à plusieurs variables, en passant par les dérivées partielles

   Exemples : La fonction $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est C^∞ sur $A =]1,+\infty[$ car

   $\begin{cases} \forall\ n\geq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} \text{ est } C^k \text{ sur } I,\ \forall k\geq 0 \\ \forall\ x\in[a,b]\subset I,\ \forall n\geq 1,\ \forall k\geq 0,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{\ln^k(n)}{n^a} \end{cases}$ avec $\sum \dfrac{\ln^k(n)}{n^a}$ Cv puisque $a > 1$

IV. Séries Entières

De la forme $\sum a_n z^n$, comme $\sum z^n$ ou $\sum n z^{2n}$ dite lacunaire

A. Rayon de convergence :

1. **Définition :** $\exists\ !R\geq 0$, ou infini tel que $\begin{cases} |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge} \\ |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge} \end{cases}$, R est dit le rayon de convergence.

2. **Calcul de rayon**

   (a) **Le D'Alembert : Ne s'applique pas au séries lacunaires**

   Si $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, alors $R = \dfrac{1}{l}$.

   Exemples :

   i. $\sum n^\alpha z^n$ de rayon 1 car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|(n+1)^\alpha|}{|n^\alpha|} = 1$, donc $R = \dfrac{1}{1} = 1$

   ii. $\sum e^{-n} z^n$ de rayon e car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|e^{-(n+1)}|}{|e^{-n}|} = 1/e$, donc $R = \dfrac{1}{1/e} = e$

   iii. $\sum \dfrac{z^n}{(2n)!}$ de rayon $+\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|1/(2(n+1))!|}{|1/(2n)!|} = 0$, donc $R = \dfrac{1}{0} = +\infty$

iv. Pour une série lacunaire $\sum 2^n z^{3n}$ appliquer le D'Alembert des séries numériques : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left|2^{n+1}z^{3(n+1)}\right|}{\left|2^n z^{3n}\right|} = 2\left|z\right|^{3n}$, donc

$$\begin{cases} |z| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Longrightarrow 2\left|z\right|^{3n} < 1 \Longrightarrow \sum 2^n z^{3n} \text{ converge} \\ |z| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Longrightarrow 2\left|z\right|^{3n} > 1 \Longrightarrow \sum 2^n z^{3n} \text{ diverge} \end{cases}, \text{ D'où } R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

(b) **Relation de Comparaison :** Soit $\sum a_n z^n$ de rayon R_a et $\sum b_n z^n$ de rayon R_b

i. Si $a_n = o\left(|b_n|\right)$ ou $O\left(|b_n|\right)$ alors $R_a \geq R_b$.

ii. Si $\alpha_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

Exemples : $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) z^n$ admet 1 comme rayon car $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2} z^n$ de rayon 1 selon D'Alembert.

B. Modes de convergences

1. **Cas réel :** Soit $\sum a_n x^n$ de rayon R, alors

$$\begin{cases} \sum a_n x^n \text{ CvA sur } \left]-R,R\right[\\ \sum a_n x^n \text{ CvU sur tout } \left[-r,r\right] \subset \left]-R,R\right[\\ \sum a_n x^n \text{ diverge grossiérement pour } |x| > R \\ \text{En } x = \pm R, \text{ on ne peut rien dire en général} \end{cases}$$

2. **Cas complexe :** Soit $\sum a_n z^n$ de rayon R, alors

$$\begin{cases} \sum a_n z^n \text{ CvA sur } D\left(0,R\right) \\ \sum a_n z^n \text{ CvU sur tout } \overline{D}\left(0,r\right) \subset D\left(0,R\right) \\ \sum a_n z^n \text{ diverge grossiérement pour } |z| > R \\ \text{En } |z| = R, \text{ on ne peut rien dire en général} \end{cases}$$

Erreur à éviter : En général pas de CvU sur $\left]-R,R\right[$ ou sur $D\left(0,R\right)$ tout entier.

3. **Cas favorable sur le bord :** Si $\sum a_n R^n$ CvA, alors $\sum a_n z^n$ CvN sur $\overline{D}\left(0,R\right)$.

4. **Produit de Cauchy :** $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n = \sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ et

si $|z| < \min\left(R_a, R_b\right)$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$

C. Propriètés de la somme :

La dérivation de la somme d'une série entière est très simple : il suffit de se placer dans $D\left(0,R\right)$ ou $\left]-R,R\right[$.

1. **Un seul résultat à retenir :** La somme $S\left(z\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ d'une série entière de rayon R, est de classe C^{∞} sur $D\left(0,R\right)$ (En particulier sur $\left]-R,R\right[$ pour le programme français) et se dérive terme à terme à tout ordre : $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(a_n z^n\right)^{(k)}$.

2. **Unicité d'un DSE :**

(a) Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sur $\left]-\alpha,\alpha\right[$, *avec* $\alpha > 0$; alors $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Exemples :

i. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 - 2x$ sur $\left]-\alpha,\alpha\right[$, *avec* $\alpha > 0$, alors $a_0 = 1,\ a_1 = -2$ et $a_n = 0$ pour les autres.

ii. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$, alors $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 0$

(b) Si $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $\left]-\alpha,\alpha\right[$, *avec* $\alpha > 0$; alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}$: **Tout DSE est donné par la série de Taylor en 0.**

3. **DSE usuels : A connaître absolument**

Fonction	DSE
$\exp(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!};\ R=+\infty$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};\ R=+\infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};\ R=+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};\ R=+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};\ R=+\infty$
$(1+x)^{\alpha}, \alpha \notin \mathbb{N}$	$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n;\ R=1$
$\frac{1}{(1-x)}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n;\ R=1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};\ R=1$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n};\ R=1$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\mathrm{argth}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};\ R=1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n;\ R=1$

V. Intégration :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.On note $L^1(I,\mathbb{K})$ (respectivement $L^2(I,\mathbb{K})$) l'espace vectoriel formé des fonctions C^0M et intégrables (respectivement de carrés intégrables) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note aussi $L_c^1(I,\mathbb{K})$ (respectivement $L_c^2(I,\mathbb{K})$) celui des fonctions de $L^1(I,\mathbb{K})$ (respectivement $L^2(I,\mathbb{K})$) qui sont de plus continues sur I.

Pour étudier l'intégrabilité de $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ sur I, on commencera par chercher les points de I où f n'est pas continue par morceaux, union éventuellement les extrémités infinies de l'intervalle I, puis on étudiera l'intégrabilité de f au voisinage de chacun de ces points en divisant l'intervalle d'intégration en plusieurs sous-intervalles.

A. Intégrale impropre ou généralisée :

On suppose ici $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f \in C^0M([a,b[,\mathbb{K})$, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite convergente si $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ *existe* dans $\mathbb{K}$. dans ce cas $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$.

- Sur un intervalle de type $]a,b]$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, on a $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$
- Sur un intervalle de type $]a,b[$, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ on a $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to a^+ \\ y\to b^-}} \int_x^y f(t)\,dt$

1. **Reste et somme partielle : (Par analogie aux séries)** Pour $I=[a,b[$, $\int_a^x f(t)\,dt$

se comporte alors comme une somme partielle et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ comme un reste. En particulier $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = 0$: le reste tend vers 0 en cas de convergence.

- Définition analogue si $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $f \in C^0M(]a,b],\mathbb{K})$.
- Si $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $f \in C^0M(]a,b[,\mathbb{K})$, on divise l'intégrale par la relation de Charles en deux intégrales

B. Intégrabilité : critères

1. $f \in C^0M(I,\mathbb{K})$ est intégrable sur I lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente.

   Ainsi **l'intégrabilté est la convergence absolue de l'intégrale.**

2. **Utilisation de primitive :** On suppose ici $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $f \in C^0M([a,b[,\mathbb{R}^+)$ **positive** sur $[a,b[$, alors :

   $$f \text{ intégrable sur } [a,b[\text{ ssi } \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \text{ existe}$$
   $$\text{Dans ce cas} \quad : \quad \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$

   L'hypothèse de positivité est nécessaire pour le retour : voir l'exemple classique de $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ sur $[1,+\infty[$.

   Dans le cas non réel positif ou complexe : $f \in C^0M([a,b[,\mathbb{K})$, on a uniquement :

   f intégrable sur $[a,b[\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$ existe. Dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$

3. **Majoration :** $f \in C^0M(I,\mathbb{K})$, $g \in C^0M(I,\mathbb{R}^+)$. Si $|f| \leq g$ alors l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f.

4. **Domination :** $f \in C^0M([a,b[,\mathbb{K})$, $g \in C^0M([a,b[,\mathbb{R}^+)$.

   Si $f =_{b^-} O(g)$ (ou $f =_{b^-} o(g)$) alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ entraîne celle f.

   Exemples :

   (a) $f(t) = t^2 e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue et $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, avec $\dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ car Riemann pour $\alpha = 2 > 1$

   (b) $f(t) = \dfrac{\ln^2 t}{t^2}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ car continue et $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, avec $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ intégrable en $+\infty$ car Riemann pour $\alpha = 3/2 > 1$

5. **Equivalence :** $f, g \in C^0M([a,b[,\mathbb{K})$.

   Si $f \sim_{b^-} g$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ est équivalente à celle f.

   Exemples :

   (a) $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^x}$ est intégrable sur $]0,1]$ ssi $x < 2$, car continue et $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{x-1}}$, avec $\dfrac{1}{t^{x-1}}$ intégrable en 0 ssi $x - 1 < 1$ car Riemann en 0.

   (b) $f(t) = \ln(\sin t)$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, car continue et $f(t) \sim \ln(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, avec $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable en 0 car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ Riemann en 0.

6. **Borne finie :** $f \in C^0M([a,b[,\mathbb{K})$, si la borne b est **fini** et $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

   Exemples :

   (a) $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ intégrable en 0 car admet une limite finie en ce point $= 1$.

   (b) $f(t) = \dfrac{\ln(1-t^2)}{2t^2}$ intégrable en 0 car admet une limite finie en ce point $= -\dfrac{1}{2}$.

   (c) **C'est faut en $\pm\infty$:** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$, **mais** $\dfrac{1}{t}$ **non intégrable en** $+\infty$: Riemann $\alpha = 1$.

7. **Comparaison avec une série :**

   (a) Si $f \in C^0M([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$, positive et décroissante, alors $\sum f(n)$ converge ssi f intégrable en $+\infty$. Dans ce cas
   $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$. et en cas de divergnce $S_n \sim \int_0^n f(t)\,dt$.

   (b) **Exemples :**

      i. Pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$, on a $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ càd
      $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$
      en particulier $R_n \sim \frac{1}{n}$.

      ii. Pour $f(t) = \frac{1}{t}$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$.

      iii. **Chaque fois que vous voulez un équivalent de somme partielle , de somme ou de reste pensez à ce résultat.**

8. **Exemples de références :**

   (a) $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ssi $\alpha > 1$.

   (b) $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de 0^+ ssi $\alpha < 1$

   (c) $t \longmapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable au voisinage de a^+ ssi $\alpha < 1$.

   (d) $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ssi $(\alpha > 1)$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

C. Théorème de la sommation $\mathbf{L}^1$:

1. **Cas général :** On suppose $(f_n)_n \in \left(L^1(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$, si $\boxed{\sum_{n\geq 0}\left(\int_I |f_n|\right)}$ est convergente.

   Alors on a :

$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}.$$

   Exemples :

   (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, On a $\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$ et
   $u_n = \int_0^{+\infty} |te^{-nt}|\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \frac{1}{n^2}\ (IPP)$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc
   $\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$, On a $\frac{\ln(t)}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\ln(t)$
   et
   $u_n = \int_0^1 \left|t^{2n}\ln(t)\right| dt = -\int_0^1 t^{2n}\ln(t)\,dt = \frac{1}{(2n+1)^2}\ (IPP)$, avec $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$
   converge, donc $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n}\ln(t)\,dt \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

2. **Cas d'un segment :** On suppose $(f_n)_n \in \left(C^0[a,b],\mathbb{K}\right)^{\mathbb{N}}$, et $\sum f_n$ CvU sur $[a,b]$.
   Alors on a :

$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}.$$

   Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n-1)!}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{(2n-1)!}dt$ car
   $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{(2n-1)!}$ est une série entière de rayon $+\infty$, donc CvU sur tout segment $[0,x]$.

D. Echange limite et intégrale

1. **Théorème de la convergence dominée :**

On suppose $(f_n)_n \in \left(C^0M(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$, CvS sur I vers f C^0M sur I et qu'il existe $\boxed{\phi \in C^0M(I,\mathbb{R}^+) \text{ **intégrable** sur } I \text{ **indépendante de** } n}$, vérifiant $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I;\ |f_n(t)| \leq \phi(t)}$(**Hypothèse de domination**). Alors f est intégrable sur I et on a :

$$\boxed{\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}.$$

Exemples :

(a) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$: On a $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos(t)$ CvS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f(t) = e^{-t}\cos(t)$ et $|f_n(t)| = \left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos(t)\right| \leq e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t} = \phi(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cos(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$ (2 IPP ou passer aux complexes).

(b) Si f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt = 0$ car $|f(t)e^{-nt}| \leq |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(t)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} 0dt = 0.$

(c) **S'applique sur un segment en dominant par une constante :** $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx = 0$ car $\left|\frac{1+nx}{(1+x)^n}\right| \leq 1$ intégrable sur $[0,1]$.

Extension de la convergence dominée :

On suppose $(f_\lambda)_{\lambda\in J} \in \left(C^0M(I,\mathbb{K})\right)^J$, $a \in \overline{J}$, (*éventuellement* $\pm\infty$), avec $(\forall\, x \in I)$, $\lim_{\lambda\to a} f_\lambda(x) = f(x)$, C^0M sur I et qu'il existe

$\boxed{\phi \in C^0M(I,\mathbb{R}^+) \text{ **intégrable** sur } I \text{ **indépendante de** } \lambda}$, vérifiant

$\boxed{\forall\, \lambda \in J,\ \forall t \in I;\ |f_\lambda(t)| \leq \phi(t)}$(**Hypothèse de domination**). Alors f est intégrable sur I et on a :

$$\boxed{\int_I \lim_{\lambda\to a} f_\lambda(t)\,dt = \lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)\,dt}.$$

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = 0$ car $\left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

E. Intégrale dépendant d'un paramètre :

1. **Théorème de continuité sous l'intégrale :** A partie d'un evn de dim $< \infty$.

On suppose $f : \left\{\begin{array}{rcl} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t)\end{array}\right.$ C^0 $/x$ sur A et C^0M $/t$ sur I et que pour tout **compact** C de A, il existe $\boxed{\phi \in C^0M(I,\mathbb{R}^+) \text{ **intégrable** sur } I \text{ **indépendante de** } x}$, vérifiant

$\boxed{\forall\, x \in C,\ \forall t \in I;\ |f(x,t)| \leq \phi(t)}$(**Hypothèse de domination**). Alors la fonction

$g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur J.

Exemples :

(a) La transformée de fourier $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ d'une fonction C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$ car $(x,t) \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$ et $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leq |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) La transformée de Laplace $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ d'une fonction C^0 et avec $f(t)\, e^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$, est continue sur $]0,+\infty[$ car $(x,t) \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est C^0 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ et $\forall\, x \in [a,b] \subset]0,+\infty[,\ |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|\, e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. **Théorème de dérivabilité sous l'intégrale :** J intervalle de $\mathbb{R}$.
On suppose $f : \left\{ \begin{array}{c} J\times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \end{array} \right.$ C^0 $/x$ sur J et C^0M $/t$ sur I, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe est soit C^0 $/x$ sur J et C^0M $/t$ sur I, pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ intégrable sur I et que pour toute **segment** $[a,b]$ de J , il existe $\phi \in C^0M(I,\mathbb{R}^+)$ **intégrable** sur I **indépendante de** x, vérifiant

$$\forall\, x \quad \in \quad [a,b]\,,\ \forall t \in I;\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t)$$

(**Hypothèse de domination**).

Alors *la* fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\, dt$ est de classe C^1sur J et on a :

$$\boxed{\forall\, x \in J,\quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.}\qquad \textbf{Formule de Leibniz}$$

Exemple : la fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ car $f : (x,t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont C^0 sur $(]0,+\infty[)^2$ et $\forall\, x \in [a,b] \subset]0,+\infty[,\ \forall t > 0;$
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t) = |\ln(t)|\, e^{-t} \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)$ intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\phi(t) =_{0^+} o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}}\right)$ avec $\alpha \in]1-a,1[$ et $\phi(t) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

3. **Cas d'un segment :** Lorsque $I = [a,b]$; et
$g : x \longmapsto \int_{[a,b]} f(x,t)\, dt$. Alors les thérèmes (2) et (3) ci-dessus restent valables sans avoir besoins des dominations, sous la continuité de f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $J \times I$.

4. S'utilise pour une fonction g à plusieurs variable, en passant par les dérivées partielles.

5. Se généralise pour les fonctions de classe C^k, en dominant $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sur les segment de J.

VI. Dérivation et différentiabilité :

A. Dérivation :

1. **Formules de dérivation :**

(a) $(f\circ g)' = g'.f'\circ g$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$

(b) Si f continue alors ses primitives $x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est C^1 et $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x)$.

(c) Si f continue, u et v dérivables, alors $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right) = v'(x) \times f\circ v(x) - u'(x) \times f \circ u(x)$

(d) **Composée par une application bilinéaire :** $B : E \times G \longrightarrow F$ une application **bilinéaire.** Soit $f \in \mathcal{F}(I,E)$ et
$g \in \mathcal{F}(I,G)$, on définit la composée $B(f,g)$ par :
$B(f,g) : \begin{array}{c} I \longrightarrow F \\ t \longmapsto B(f(t), g(t)) \end{array}$, alors, si f et g sont dérivables en a alors la composée $B(f,g)$ l'est aussi et on a

$$(B(f,g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

S'utilise pour dériver :

i. Un produit scalaire : $t \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle$.
ii. Un produit vectoriel : $t \longmapsto f(t) \wedge g(t)$.
iii. Un produit matriciel : $t \longmapsto A(t) B(t)$
iv. Un produit matriciel du type : $t \longmapsto \exp(tA) B(t)$, où A matrice constante et B une matrice ou matrice colonne dérivable.

(e) Un déterminent $\det(V_1(t), ..., V_n(t))$ se dérive colonne par colonne, comme un produit scalaire ou un produit vectoriel.

(f) **Leibniz :** $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$

2. **Formules de Taylor**

(a) **Rolle :** f C^0 sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à **valeurs réelles**, alors $f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$

(b) **ACF :** f C^0 sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à **valeurs réelles**, alors $\exists c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.
Exemples : cos est 1-lipschitziennes : $|\cos(b) - \cos(a)| = |(b-a)\cos'(c)| \leq |b-a|$

(c) **Formules des accroissements finis dans un evn :**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow F$ continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b[$. On suppose $\exists\ M > 0,\ \forall\ t \in]a,b[,\ \|f'(t)\| \leq M$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.
La version réelle $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$ n'est plus valable pour les fonctions vectorielles : $f(t) = e^{it}$.

(d) **Taylor avec reste intégrale :** $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{K})$, alors
$f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$. Pour $b = x$ et $a = 0$, on obtient
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$

(e) **Inégalité de Taylor Lagrange :** $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{K})$, alors
$\left| f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{a \leq t \leq b} \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt.$

(f) **DL :** Si $f \in C^n(]\alpha, \beta[, \mathbb{K})$, alors
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$: DL d'ordre n en 0.

3. **Application constantes :**
f dérivable sur un intervalle I, f constante sur $I \Longleftrightarrow f' = 0$ sur I.

4. **Extemums sur un ouvert**
Si f dérivable sur I et admet un extremum en $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$

B. Différentiabilité

1. **Différentielle en un point**
E et F deux $\mathbb{R} - evn$ de dimensions finies. U un ouvert de E.

(a) **Définition :** $f \in \mathcal{F}(U, F)$ est dite différentiable en $a \in U$ s'il existe une **application linéaire** $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$$

Dans ce cas u est unique et s'appelle la différentielle (ou l'application linéaire tangente) de f au point a et se note $df(a)$ ou df_a ou $Df(a)$.
Ainsi $df_a \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application **linéaire de E sur F.**
Proposition : Toute fonction différentiable en a est en particulier continue. La réciproque est fausse en général.
Cas où $E = \mathbb{R}$: **Lien avec la dérivation :** On suppose ici $E = \mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{F}(I, F)$, alors f est différentiable en $a \in I$ si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F} \\ h \longmapsto h.f'(a) \end{cases}. \text{ En particulier } \boxed{f'(a) = df_a(1)}$$

Ainsi lorsque $E = \mathbb{R}$, la différentielle de f en a est entierement déterminée par $f'(a)$. C'est pourquoi dans $\mathbb{R}$, on ne parle que dérivée et non pas de l'application différentiellle.

(b) **Différentielle d'applications linéaire et bilinéaire**

Proposition :

i. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application **linéaire** sur E, alors u est différentiable en tout point x de E et on a $du_x = u$

ii. Soit $f \in \mathcal{F}(E \times F, G)$ une application **bilinéaire** sur $E \times F$, alors f est différentiable en tout point (x,y) de $E \times F$ et on a

$$\forall\ (h,k) \in E \times F,\ df_{(x,y)}(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$$

2. **Dérivée selon un vecteur (dérivée directionnelle)**

Soit $f \in \mathcal{F}(U,F)$, $a \in U$ et v un vecteur de E.

(a) **Définition :** On dit que f admet en a une dérivée selon le vecteur a si la fonction de variable réelle$\left\{\begin{array}{c}]-\eta,\eta[\longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+tv) \end{array}\right.$ est dérivable en 0. On note dans ce cas

$$D_v f(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

et on l'appelle la dérivée de f au point a selon le vecteur v.

(b) **Proposition :** Si f est différentiable en a, alors f admet en a des dérivées selon tous les vecteurs v de E et on a

$$\forall\ v \in E,\ D_v f(a) = df_a(v).$$

(c) **Dérivées partielles**

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. (En général $E = \mathbb{R}^n$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Définition : Soit $i \in \{1,...,n\}$, on appelle ième dérivée partielle de f au point a que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, la dérivée de f au point a selon le vecteur e_i, Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

Dans la pratique, pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, on fixe toutes les variables et on dérive de manière normale par rapport à la ième variable.

3. **Application de classe C^1** :

(a) **Définition :** f est dite de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et sa différentielle est continue sur U : càd l'application $\left\{\begin{array}{c} U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ x \longmapsto df(x) \end{array}\right.$ est **continue** sur U. On notera $f \in C^1(U,F)$

(b) **Théorème fondamental :** Si f admet des dérivée partiellees $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ **continues** sur U, alors f est différentiable en tout point de U. En outre f est de classe C^1 sur U et on a

$$\forall\ h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E,\ \forall\ a \in U, \quad df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Ce théorème est très pratique car il ramène la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variable f á la dérivation de fonction d'une seule variable grâce aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ qui se calculent facilement en général.

Exemples :

i. Montrer que $f : (x,y) \longmapsto xe^y + y^2 \sin(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle.

ii. Soit $E = \mathbb{R}^n$ euclidien et $f(x) = \dfrac{1}{\|x\|_2}$, Montrer que f est C^1 sur $E \setminus \{0\}$ et donner sa différentielle.

iii. $f(M) = \det(M)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $df_M(H) = tr\left({}^t com(M) H\right)$

4. **Application C^k** : $f : \left\{\begin{array}{c} U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,...,x_n) \longmapsto f(x_1,...,x_n) \end{array}\right.$ est de classe C^k sur U ssi $\forall i_1,...,i_k \in \{1,...,n\}$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}$ est continue sur U.

Exemples :

(a) Toute fonction polynômiale est C^{∞} sur $\mathbb{R}^n$: $f(x,y) = xy - x^2 + xy^3$ C^{∞} sur $\mathbb{R}^2$

(b) Toute fonction rationnelle est C^{∞} sur son domaine de définition :
$f(x_1, ..., x_n) = \dfrac{1}{x_1^2 + ... + x_n^2}$ est C^{∞} sur $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$.

5. **Schwartz :** Si f est C^2 alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

(a) **Vecteur gradient**

On suppose ici que $E = \mathbb{R}^n$ euclidien canonique : muni de $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$

Proposition et définition : Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ appelé le gradient de f au point a et noté $\overrightarrow{grad} f(a)$, vérifaint

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \left\langle \overrightarrow{grad} f(a), x \right\rangle = df_a(x)$$

Expression du gradient dans une BON
Proposition : Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une BON de E, alors

$$\overrightarrow{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, e_i$$

6. **Opérations sur les fonctions différentiables**

(a) Les opérations algébriques : somme, produit, quotient se font commes celles sur les fonctions dérivables

(b) La seule opération qui reste à maîtriser est la **Régle de la chaîne** :
Si $\phi(x) = f(\phi_1(x), ..., \phi_n(x))$, alors

$$\phi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k'(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi_1(x), ..., \phi_n(x))$$

Ceci s'applique aux calculs des dérivées partielles de composée
Exemples :

i. $\phi(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
$\dfrac{\partial \phi}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
et
$\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

ii. Utile pour la résolution EDP.

(c) **Cas général du Composée** : **Théorème** (TRES IMPORTANT) **:** Si f est de classe C^1 sur U et g de classe C^1 sur V, alors la composée $g \circ f$ est de classe C^1 sur U et on a, $\forall\ a \in U$:

$$\boxed{d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)}$$

$$\boxed{\forall i \in [1, n],\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)}$$

7. **Extremum**
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$

(a) **Point critique :** $a \in U$ est dit point critique ou stationnaire de f lorsque $df_a = 0$. (Càd $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$ ou encore $gradf(a) = 0$)

(b) **Défintion :**

- On dit que admet en $a \in U$ un maximum (respectivement un minimum) local ou relatif si

$$\exists\ V \in \mathcal{V}(a);\ \forall\ x \in V \cap U,\ f(x) \leq f(a)\ \text{(respectivement } f(x) \geq f(a))$$

- Dans les deux cas, on dit que f admet en a un extrémum local ou relatif.

- Cet extremum est dit global ou absolu lorsque $V = U$.

(c) **Condition nécessaire :**

Proposition : On suppose $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et soit $a \in \mathring{U} = U$. Si f admet en a un extrémum local alors $df_a = 0$: les extérmums de f dans **l'ouvert** U sont parmis les points critiques.

En général, les extrémums sont parmis :

i. Les points critiques
ii. Les points frontières
iii. Les points où f non différentiable

(d) **Formule de Taylor à l'ordre 2**

Théorème : On suppose f de classe C^2 sur l'ouvert U, soit $a \in U$ et $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ tel que $a + h \in U$. Alors on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a) + o\left(\|h\|^2\right)$$

cette relation est dite la formule de Taylor-Young de f au point a à l'ordre 2.

(e) **Matrice Hessienne de f :** On suppose toujours $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, alors la matrice symétrique $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite la matrice Hessienne de f au point a.

Application à l'étude des extrémums :

Théorème IMPORTANT : On suppose $\begin{cases} f \in C^2(U, \mathbb{R}) \\ a \in \mathring{U} = U \\ df_a = 0 \\ H_a = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le n} \text{ est inversible} \end{cases}$

, alors alors f admet un extrémum en a si et seulement si la matrice Hessienne $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le n}$ de f au point a est **définie positive ou définie négative.**

Dans la suite, on va se limiter au cas où $n = 2$.

Soit $(a, b) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrira dans ce cas particulier, tenant compte du théorème de Schawrz :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o\left(h^2 + k^2\right) \end{aligned}$$

Notation de Monge : On note $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$. Avec ces notation la formule de Taylor-Young devient

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hp + kq + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2skh + tk^2\right) + o\left(h^2 + k^2\right)$$

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathring{U} = U$. On considère les notations de Monge :

$p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.

Théorème : On suppose que (a, b) est un point critique ($p = q = 0$) en lequel $s^2 - rt \neq 0$ (la matrice Hessienne de f en (a, b) est inversible). Alors f admet en (a, b) un extrémum local si et seulement si $s^2 - rt < 0$. Dans ce cas, f possède un maximum local lorsque $r > 0$ et un minimum local lorsque $r < 0$.

(f) **Etude sur la frontière :** Se fait en général de manière manuelle à l'aide d'un paramétrage du bord.

8. **Vecteur tangent à une partie :**

- Si X une partie d'un evn E et $x \in X$, un vecteur v de E est dit tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$, dérivable en 0 tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
- **Cas où** X est une surface (S) définie de manière implicite $f(x, y, z) = 0$: Si $A(a, b, c) \in (S)$ un point non critique : $\overrightarrow{Grad}(f(A)) \neq 0$, alors la normale à (S) en A est portée par le gradient. L'ensemble des vecteurs tangents à (S) en A est alors le plan affine (P) :

$$M \in (P) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{Grad}(f(A)) = 0$$

- Le paramètrage cartésien $z = g(x, y)$ s'y ramène, en posant $f(x, y, z) = z - g(x, y)$.

C. Dérivations des fonctions complexes : holomorphie (CNC)

1. **Conditions de Cauchy-Riemann : Ces conditions font le lien entre la dérivation complexe et la différentiabilité par rapport aux parties réelle et imaginaire**

   On pose : $f(z) = f(x + iy) = \tilde{f}(x, y)$, alors :

   f est $\mathbb{C}-$dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Dans ce cas

$$f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)$$

   f est holomorphe sur U si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable sur U et vérifie sur U, les conditions de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0$.

2. **Fonctions analytiques**

   - Analytique sur U c'est DSE au voisinage de tout point de U. Il s'agit ici de généraliser la notion de fonction développable en série entière pour la variable complexe
   - **Résultat fondamental :** Il y'a équivalence entre analytique et holomorphe.

3. **Zéro isolé :** Les zéros fonction non nulle analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ connexe par arcs sont isolés

4. **Prolongement analytique :** Deux fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ connexe par arcs coïncidant sur partie contenant un point non isolé sont égales sur U.

   Exemple : $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)^2 - \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}+1}{(2n+1)!}\right)^2 = 1$ car analytique sur l'ouvert convexe $\mathbb{C}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$

VII. Equations différentielle

A. Les ABC de la MPSI

Avant toute étude détaillée des équations différentielles, il faut **absolument connaître** les deux cas particuliers suivants

1. **Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants**

   De la forme : $(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, avec a, b et c réels ne dépendent pas de t. Dans ce cas et **uniquement dans ce cas,** on considère l'équation caractéristique

$$(1) : ar^2 + br + c = 0$$

   (a) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors (1) admet 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 : Les solutions réelles de (H) sont $t \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A, B réels.

   (b) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors (1) admet une racine réelle double r : Les solutions réelles de (H) sont $t \longmapsto (At + B)e^{rt}$ avec A, B réels.

   (c) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors (1) admet 2 racines complexes conjugués $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$: Les solutions **réelles** de (H) sont $t \longmapsto (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{\alpha t}$ avec A, B réels.

Exemples :

(a) Les solutions de $y'' + 1 = 0$ sont $t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t)$ avec A, B réels.

(b) Les solutions de $y'' - 1 = 0$ sont $t \longmapsto Ae^{t} + Be^{-t}$ avec A, B réels.

2. **Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :**

De la forme : $\begin{array}{c} (E) : a(t)\, y' + b(t)\, y + c(t) = 0 \\ (H) : a(t)\, y' + b(t)\, y = 0 \end{array}$, où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (scalaire).

Théorème : Losque a **ne s'annule jamais sur** I, alors $S_H(I)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t \longmapsto e^{\int -\frac{b(t)}{a(t)} dt}$

et $S_E(I) = y_p + S_H(I)$ où $y_p \in S_E(I)$ une solution particulière de (E) : Ainsi la solution générale de (E) est

$t \longmapsto y_p(t) + \lambda e^{\int -\frac{b(t)}{a(t)} dt}$; où $\lambda \in \mathbb{K}$ et y_p une solution particulière de (E)

Avec de la forme $y_p(t) = \lambda(t)\, y_H(t)$ obtenue à l'aide de la méthode de variation de la constante; où y_H solution non nulle de (H).

Une fois cela maîtrisé, on peut aborder la suite ....

B. Equation scalaire d'ordre 2 :

1. **Equation scalaire d'ordre 2 :** De la forme :

$\begin{array}{c} (E) : a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y + d(t) = 0 \\ (H) : a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0 \end{array}$, où a, b, c et d sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (scalaire).

Losque a **ne s'annule jamais sur** I, alors $S_H(I)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

et $S_E(I) = y_p + S_H(I)$ où $y_p \in S_E(I)$ une solution particulière de (E)

Remarque : Si a s'annule en $t_0 \in I$, on cherche alors les solutions à droite et à gauche de t_0 et on essaye de recoller (ou raccorder ou prolonger) ces solutions au point t_0.

Variation des constantes : Ici on va se contenter de chercher une solution particulière :

On suppose a **ne s'annule jamais sur** I, soit (y_1, y_2) une base de solutions de (H) (système fondamental de solutions), alors (E) admet une solution particulière sous la forme :

$y(t) = \lambda_1(t)\, y_1(t) + \lambda_2(t)\, y_2(t)$ vérifiant $\lambda_1'(t)\, y_1(t) + \lambda_2'(t)\, y_2(t) = 0$

Dite obtenue par variation des constantes.

2. **Wronskien :** soit (y_1, y_2) de solutions de (H), la fonction $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ dite le wronskien du système (y_1, y_2). La particularité du wronskien est qu'il est partout nul sur I ou bien ne s'annule jamais sur I. Dans ce dernier cas (y_1, y_2) base de solutions de (H).

C. Systèmes différentiels linéaires

1. **Forme générale :**

De la forme $(E) : X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$ et $(H) : X'(t) = A(t)\, X(t)$ systéme homogène.

Avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur l'intervalle I.

2. **Théorème de Cauchy-Lipschitz :** $\forall\ (t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le problème de Cauchy : $(C) \left\{ \begin{array}{c} X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

3. **Structure des solutions :**

- $S_H(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (taille de l'inconnu X)
- $S_E(I) = (\textit{solution particuliere de } (E)) + S_H(I)$, le translaté de $S_H(I)$ par une solution particulière de (E)

4. **Variation des constantes :** Si $(X_1, ..., X_n)$ une base de solution de (H), alors (E) admet toujours une solution particulière de la forme $X(t) = \lambda_1(t) X_1(t) + ... + \lambda_n(t) X_n(t)$

5. **Cas où A est constante :** De la forme : $(E) \quad X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **ne dépendant pas de** t et $B : t \longmapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction continue sur I.

   (a) **Expression exponentielle des solutions :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

   - Les solutions de l'équation différentielle homogène (H) : $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les

     i. $X : t \longmapsto \exp(tA) X_0$, avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque.

   - Les solutions de l'équation complète (E) $X'(t) = AX(t) + B$ sur I sont les

     i. $X : t \longmapsto \exp((t - t_0) A) X(t_0) + \exp(tA) \left(\int_{t_0}^{t} \exp(-Au) B(u) \, du \right)$, où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconques.

   (b) **Pratique :** Dans la pratique, on utilise des outils d'algèbre linéaire, en particulier de réduction, pour le calcul explicite des solutions.

D. Equation différentielle non linéaire (CNC)

1. De la forme :

$$\boxed{(E) \quad y' = f(t, y(t))}$$

   où f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times F$ à valeurs dans F.

2. **Unicité locale :** On suppose f de classe C^1 sur l'ouvert U et $(t_0, y_0) \in U$, alors le problème de Cauchy (C) $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$ admet une unique solution définie sur un voisinage de t_0.

3. **Critère de prolongements (Hors programme):** On suppose f de classe C^1 sur l'ouvert U , soit ϕ une solution de $(E) \quad y' = f(t, y(t))$ sur un intervalle I ayant une extrémité finie a. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \phi(x) = l$ existe et que $(a, l) \in U$, alors ϕ se prolonge au-delà de son extrémité a.

   Remarque : Pour montrer que cette limite existe, on pourra penser au critère de Cauchy pour l'existence d'une limite dans un Banach. (voir le cas f bornée par exemple)

4. **Unicité globale - Théorème de Cauchy-Lipschitz (Hors programme) :** On suppose f de classe C^1 sur l'ouvert U et $(t_0, y_0) \in U$, alors le problème de Cauchy (C) $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$ admet une unique solution **maximale** définie sur un intervalle **ouvert** contenant t_0.

5. Pour montrer que deux fonctions coïncident, on pourra penser à montrer qu'elles sont solutions maximales d'un même problème de Cauchy. utile pour montrer par exemple les symétries des solutions : parité, imparité,....

   (a) **Courbes intégrales :** On suppose f de classe C^1 sur l'ouvert U , soit ϕ une solution de $(E) \quad y' = f(t, y(t))$, les graphes des solutions maximales de (E) sont dites courbes intégrales de (E) : Elles sont **soit confondues soit disjointes, et elles forment une partition de U.**

   (b) **Equation autonome :** De la forme (E) $y' = f(y)$ ou $y'' = f(y, y')$. Les résultats ci-dessus sont valables lorsque f est de classe C^1, Leur seule particularité théorique est **l'invariance des solutions par translation** :

   Si ϕ est solution de (E) sur l'intervalle I et $t_0 \in I$, alors $t \longmapsto \phi(t_0 + t)$ est solution de (E) sur l'intervalle $J = -t_0 + I$

La clé de toute étude est le théorème de Cauchy-Lipschitz : La maîtrise de ce théorème est capitale.

E. Courbe paramétrée

Courbe paramétrée :

Soit (I,f) un **arc paramétré,** ou f un paramétrage et I l'intervalle de ce paramétrage.

- $M=f(t_0)$ régulier si la vitesse $f'(t_0)\neq 0$, birégulier si le couple vitesse-accélération $(f'(t_0),f''(t_0))$ libre.
- **Tangente :** Soit $A=f(t_0)$, et Δ la droite tangente en ce point, alors :

$$M\in\Delta\Longleftrightarrow\overrightarrow{AM}\in vect\left(f^{(p)}(t_0)\right)\quad où\ \ p=\min\left\{n\in\mathbb{N}^*\ \setminus\ f^{(n)}(t_0)\neq 0\right\}$$

- **Tangente dans le cas implicite :** Si $g(x,y)=0$ est une courbe définie implicite, alors la normale à cette courbe en un point $A(x_0,y_0)$ est porté par $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0)$.
- **Abscisse curviligne - Longueur - Repère de Frenet- Courbure**
  - Soit (I,f) un arc régulier (la vitesse ne s'annule jamais), alors

1. • – $\left\{\begin{array}{c} I\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto s(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|f'(u)\|\,du\end{array}\right.$. s s'appelle l'abscisse curviligne sur l'arc (I,f) d'origine t_0 et orienté dans le sens des t croissants. s vérifie pour tout $t\in I,\ s'(t)=\|f'(t)\|$.

- – Le vecteur $\vec{T}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\times\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ est dit le vecteur unitaire tangent à (I,f) au point $M=f(t)$.
  - Le vecteur $\vec{N}$ unitaire et directement orthogonal à $\vec{T}$ s'appelle le vecteur normal à (I,f) au point $M=f(t)$: si $\vec{T}=\cos(\phi)\,\vec{i}+\sin(\phi)\,\vec{j}$, alors $\vec{N}=-\sin(\phi)\,\vec{i}+\cos(\phi)\,\vec{j}$.
  - Le repère $\mathcal{R}\left(M,\vec{T},\vec{N}\right)$ qui est orthonormé direct est dit le repère de Frenet au point M.
  - $c=\phi'(s)$ est dite la courbure algébrique au point $M=f(t)=g(s)$
  - $R=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{\phi'(s)}$ est dit le rayon courbure algébrique au point $M=f(t)=g(s)$.
  - Le point I défini par : $\overrightarrow{MI}=R\vec{N}$ est dit le centre de courbure au point M.
  - **Formule de Frenet :** On a $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\dfrac{1}{R}\vec{N}\text{ et }\dfrac{d\vec{N}}{ds}=-\dfrac{1}{R}\vec{T}}$, qui peuvent servir à déterminer la courbure et le rayon de courbure.

1. **Autres formules de la courbure (Hors programme) :** La courbure au point $M=f(t)$ est

   $C(t)=\dfrac{\det_{B_c}(f'(t),f''(t))}{\|f'(t)\|^3}=\dfrac{x'(t)\,y''(t)-x''(t)\,y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}^3}$. En particulier

   - En cartésien, si $y=f(x)$ alors $C(x)=\dfrac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}$.
   - En polaire, si $f(\theta)=r(\theta)\,\vec{u}(\theta)$ alors $C(\theta)=\dfrac{r^2(\theta)-r(\theta)\,r''(\theta)+2r'^2(\theta)}{(r^2(\theta)+r'^2(\theta))^{3/2}}$.

VIII. Probabilité

A. Espace de probabilité

Un phénomène est dit aléatoire, lorsque en recommençant une expérience dans des conditions identiques, le résultat est différent et échappe à toute prévision absolue.

Généralement, l'expérience répété un grand nombre de fois, permet de constater une certaine régularité, la fréquence d'apparition semble se stabiliser. La théorie des probabilités donne un modèle mathématique qui puisse prédire ce comportement.

1. **Tribu :** Soit Ω un univers : ensemble des issues d'une expérience aléatoire

   - **Définition : Tribu =** Ensemble T de partie de Ω qui vérifie : $\left\{\begin{array}{c} T\text{ contient }\Omega\\ T\text{ stable par réunion dénombrable}\\ T\text{ stable par complémentaire}\end{array}\right.$

- Une tribu contient $\varnothing$, stable par réunion et intersection finie ou dénombrable.
- **Evénement = Elément de la tribu**
- **Opération ensembliste sur les événement :**

Ω	**Evénement certain**
$\varnothing$	**Evénement impossible**
$\overline{A}$	**Evénement contraire de A**
$A \cap B = \varnothing$	**A et B disjoint ou incompatible**
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$	**Tous les A_n *sont* réalisé**
$\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$	**Au moins l'un des A_n réalisé**
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$	**un nombre infini des A_n réalisé**
$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k\geq n} A_k$	**Tous les A_n réalisé sauf un nombre fini**

2. **Exemple de tribu :**
   - Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on choisit toujours $T = P(\Omega)$.
   - Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, on choisit la tribu engendré par tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, dite la tribu Borélienne

3. **Exemple d'événement :** On lance une pièce de monnaie infiniment. Soit A_n l'événement " obtenir au moins un PILE aux n premiers lancers", alors $\cup_{n\geq 1} A_n$ "obtenir au moins un PILE" et $\cap_{n\geq 1}\overline{A_n}$ " Ne jamais avoir de PILE"

4. **Probabilité :** (Ω, T) un couple univers-tribu est dit espace probabilisable.

   (a) **Définition :** Une probabilité sur (Ω, T) est une application $\mathbb{P} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 axiomes :
   $$\begin{cases} Axiome1 \ : \mathbb{P} \text{ est à valeurs positives (en faites à valeurs dans } [0,1]) \\ Axiome2 \ : \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ Axiome3 \ : \text{Pour toute suite } (A_n)_n \text{ d'événement 2 à 2 disjoints : } \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n). \end{cases}$$
   La 3ème axiome est dite la σ-additivité, elle prouve, lorsque les événement sont 2 à 2 disjoints que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ est toujours convergente et de somme ≤ 1.

   (b) **Cas d'un univers discret :** Lorsque Ω est fini ou dénombrable, une probabilité sur $(\Omega, P(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée d'une suite $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de **nombre positifs sommable de somme 1 :** $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1,\ p_\omega \geq 0$. En effet
   $$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega \text{ et } \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$
   Exemples classiques : (on vérifie facilement la somme vaut 1)

   i. **Distribution $B(p)$ de Bernoulli de paramètre** $p : \Omega = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(1) = p$ et $\mathbb{P}(0) = 1-p$, avec $p \in]0,1[$. C'est la probabilité de succés d'une pièce de monnaie truqué de réussite p et d'échec $(1-p)$.

   ii. **Distribution** $U(n)$ **uniforme sur un univers fini :** $\Omega = \{1,...,n\}$, $\mathbb{P}(k) = \dfrac{1}{n}$: Modélise le succés d'un événement parmis n équipropable.

   iii. **Distribution B** (n,p) **binômiale de paramètre** $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$: $\Omega = \{0,1,...,n\}$, $\mathbb{P}(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$: Modélise le nombre de succés d'une suite de n Bernoulli indépendantes. Ou encore, si une urne contient en poucentage p boules blanches et $(1-p)$ boules noires, alors $\mathbb{P}(k)$ est la probabilité de tirer k boules blanches et $(n-k)$ boules noires lors d'un tirage successif de n boules avec remise.

   iv. **Distribution** $G(p)$ **géométrique de paramètre** $p \in]0,1[: \Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(k) = p(1-p)^{k-1}$: Modélise le premier succés d'une suite de k Bernoulli indépendantes.

   v. **Distribution** $P(\lambda)$ **de poisson de paramètre** $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ **:** $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, modélise des événements rares.

   (c) **Continuité monotone :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** d'événement, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. De même pour une suite **décroissante** $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Exemple : On lance une pièce truqué infiniment, quelle la probabilté de A "Avoir au moins deux PILE consécutifs"? Soit A_n l'énénement " Obtenir au moins deux PILE consécutifs aux n premiers lancers", alors les A_n sont croissant, A leur réunion, donc $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$. Voir la suite de ce résumé

(d) **Autres propriètés**

- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Se généralise à l'aide de la formule de Poincarré du crible.
- $\mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ la somme éventuellement infinie. Comme application une réunion au plus dénombrables d'événements négligeables ($\mathbb{P}(A_n) = 0$) est négligeable. De même par passage au complémentaire une intersection d'événement presque-sûr ($\mathbb{P}(A_n) = 1$) est presque-sûr.

(e) **Système complet d'événement :** I au plus dénombrable; le système $(A_i)_{i \in I}$ est dit complet lorsque les A_i sont deux à deux disjoints et $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$. Dans ce $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$ et pour tout $B \in T$: $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.
En particulier le système $\left(A, \overline{A}\right)$ est toujours complet.

B. Probabilité conditionnelle

Une information supplémentaire peut changer l'issue d'un phénomène aléatoire. C'est ce principe que modélise la probabilité conditionnelle.

1. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, on définit la probabilité de B sachant A par $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B\,|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$: la fréquence de réalisation de B lorsque A est réalisé.

2. $\mathbb{P}_A$ est aussi une probabilité sur (Ω, T), elle vérifie les axiomes et les propriétés des probabilités.

3. **Probabilté totale :** Si $(A_i)_{i \in I}$ un système au plus dénombrable complet avec les $\mathbb{P}(A_i) > 0$, alors
$$\forall\, B \in T, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B\,|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$
En particulier $\forall\, B \in T, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\,|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B\,\middle|\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$
Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus, et notons : $\mathbb{P}(PILE) = p, \quad p_n = \mathbb{P}(A_n)$, avec A_n " Obtenir au moins deux PILES consécutifs aux n premiers lancers" $(n \geq 2)$. Le système $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$ est complet, donc $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}\,|A_n)\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\,\middle|\overline{A_n}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, donc
$$p_{n+1} = p_n + (1-p)\,p^2(1 - p_{n-2})$$
(Pour la dernière on a forcément

Pas de réussite avant $(n-2)$	FACE	PILE	PILE

), $(p_n)_n$ est alors croissante majorée, donc converge vers 1.

4. **Probabilité composée :** Si $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$, alors
$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2\,|A_1)\,\mathbb{P}(A_3\,|A_1 \cap A_2)\,...\mathbb{P}(A_n\,|A_1 \cap ...A_{n-1}).$$

5. **Formule de Bayes :** Si $(A_i)_{i \in I}$ un système au plus dénombrable complet avec les $\mathbb{P}(A_i) > 0$, alors
$$\forall\, B \in T,\ \forall\, j \in I; \quad \mathbb{P}(A_j\,|B) = \frac{\mathbb{P}(B\,|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(B\,|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$
En particulier
$$\mathbb{P}(A\,|B) = \frac{\mathbb{P}(B\,|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B\,|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B\,\middle|\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$
Exemple : Un lot de 100 dés contient 25 truqués qui donnent 6 avec un probabilité $\dfrac{1}{2}$. On choisit au hasard un dé. On lance ce dé, on obtient 6, quelle est la probablité qu'il soit truqué? On le relance, on obtient encore 6, quelle est la probabilité qu'il soit truqué?

Soit A " dé truqué " , B "on obtient 6" et C " on obtient un double 6" . On a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{1}{2}$, donc $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{1/2 \times 1/4}{1/2 \times 1/4 + 1/6 \times 3/4} = \dfrac{1}{2}$ et

$\mathbb{P}(A|C) = \dfrac{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{1/4 \times 1/4}{1/4 \times 1/4 + 1/36 \times 3/4} = \dfrac{3}{4}$

C. Indépendance

1. Deux événement sont dits indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas celle de l'autre : A et B indépendant lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (Càd $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$)
2. A et B indépendants $\Longrightarrow$ $(\overline{A}$ et $\overline{B})$, $(\overline{A}$ et $B)$, $(A$ et $\overline{B})$ sont aussi indépendants.

   Attention : Ne pas confondre indépendant et (disjoint ou incompatible)
3. **Indépendance mutuelle :** $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendant si
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (i_1, ..., i_n) \in I^n,\ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) ... \mathbb{P}(A_{i_n})$$
4. L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

D. Variable aléatoire

1. **Définition :** Si $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, une variable aléatoire réelle X est une application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall\, x \subset \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} \subset T$. En réalité une v.a. est une fonction (au sens mathématiques) dont la valeur est aléatoire : dépend de l'expérience aléatoire.

   Notation : $\left\{ \begin{array}{c} X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\} \ \textit{se note}\ (X \in A) \\ X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\} \ \textit{se note}\ (X = x) \\ X^{-1}([x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geq x\} \ \textit{se note}\ (X \geq x) \\ \textit{De même pour}\ (X > x),\ (X \leq x),\ (a \leq X \leq b),\ ... \end{array} \right.$

   La notion de variable aléatoire permet de transférer l'étude probabiliste de l'ensemble (Ω, T) souvent théorique et peu connu à l'ensemble $X(\Omega)$ des réalisations de X mieux connu (souvent une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$).
2. **V.a. discrète ou à densité :**
   - Si $X(\Omega)$ fini ou dénombrable, X est dite variable aléatoire **discrète.**
   - Si $X(\Omega)$ non dénombrable, X est sera dite **parfois** variable aléatoire **continue ou à densité (on donnera une définition précise dans la suite)**
3. **Loi de probabilité d'une v.a. :** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une v.a. réelle. On muni $\mathbb{R}$ de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendré par les intervalle $(]-\infty, x])_{x\in\mathbb{R}}$. On appelle loi de probabilité de X, la fonction $\mathbb{P}_X$: $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$. Ainsi $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

   Cas discret : Lorsque $X(\Omega) = D$ en bijecton avec une partie de $\mathbb{N}$, alors la loi de X est entièrement déterminée par : $\boxed{\mathbb{P}(X = k),\ k \in D}$.
   (a) En particulier le système $(X = k)_{k\in X(\Omega)}$ est complet
   (b) $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$
   (c) $\mathbb{P}(X \in A) = \displaystyle\sum_{k\in A} \mathbb{P}(X = k)$
4. **Couple de variables aléatoire discrète :** (X, Y) est dit couple de v.a.d. réelles
   (a) On note $X(\Omega) = \{x_i \ / \ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j \ / \ j \in J\}$ avec I et J parties de $\mathbb{N}$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$ et $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$.
   (b) **Loi conjointe :** La loi du couple (X, Y) est dite loi conjointe, elle est entèrement déterminée par la connaissance de :
$$\forall (i, j) \in I \times J : \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$
   (c) **Lois marginales :** Se sont les lois des variables X et Y.

(d) La loi conjointe détermine les lois marginales :

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \text{ et } q_j = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

5. **Loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$:** La loi de X sachant $Y = y_j$ est loi de X pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{Y=y_j}$: elle est déterminée par $\forall\ i \in I,\ \mathbb{P}(X = x_i \,|Y = y_j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{q_j}$.

6. **Variable aléatoire indépendante :**
   - X et Y indépendantes si : $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j)$
   - $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i = x_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$: Dans ce cas elles sont 2 à 2 indépendantes. La réciproque est fausse.

7. **Lemme de coalitions :** Si $(X_1, ..., X_n)$ mutuellement indépendantes, et f, g deux fonctions, alors $\forall\, k \in \{2, ..., n-1\}$, les variable aléatoire $f(X_1, ..., X_k)$ et $g(X_{k+1}, ..., X_n)$ sont aussi indépendantes.

E. Espérance : cas discret

L'espérance d'une variable aléatoire généralise la notion de moyenne pondérée (ou de centre de masse en mécanique), et représente le comportement moyen de la variable aléatoire.

1. **Définition :** Si X une v.a. discrète, on dit que X admet une espérance si la suite $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Pratique : On a $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable

- Si $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ fini, alors $E(X)$ existe toujours et $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$ dénombrable, alors $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geq 0} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ converge **absolument.**

Espérance des lois discrète usuelle :

(a) **Uniforme** $U(n) : X(\Omega) = \{1, ..., n\},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$, alors $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) **Bernoulli** $B(p) : X(\Omega) = \{0, 1\},\ \mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, alors $E(X) = p$

(c) **Binômiale** $B(n, p) : X(\Omega) = \{0, ..., n\},\ \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

(d) **Géométrique** $G(p) : X(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\left(\frac{-1}{1-(1-p)}\right)' = \frac{1}{p}$$

(e) **Poisson** $P(\lambda) : X(\Omega) = \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, alors $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda$.

Exercices :

(a) Si X une v.a.d., alors $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge. dans ce cas $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$: Ecrire $\mathbb{P}(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ et utiliser la sommabilité

(b) X une v.a.d., si $\mathbb{P}(X=a)=1$, alors $E(X)=a$. En effet $\mathbb{P}(X\neq a)=0$, donc par définition de $E(X)=a$: En particulier valable pour une variable constante.

(c) Si A un événement, alors $E(\mathbf{1}_A)=\mathbb{P}(A)$.

2. **Linéarité :** Si X et Y sont deux v.a.d. admettant une espérance, alors $aX+bY$ admet aussi une espérance et

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

3. **Croissance :** Si $|X|\leq Y$ et $E(Y)$ existe, alors $E(X)$ existe et $E(X)\leq E(Y)$.

4. **Théorème de transfert :** Soit f une fonction définit sur Ω, X une v.a.d., alors la v.a.d. $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la suite $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable; Dans ce cas

$$E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Si en particulier $X(\Omega)=\mathbb{N}$, alors $E(f(X))=\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(X=k)$.

Exercice (Epreuve zéro mines) Soit X une une v.a.d à valeurs entières, montrer $\phi_X(t)=E\left(e^{itX}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$: En effet selon la formule du transfert $E\left(e^{itX}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\mathbb{P}(X=k)$, or $\left|e^{itk}\mathbb{P}(X=k)\right|=\mathbb{P}(X=k)$ avec $\sum\mathbb{P}(X=k)$ converge car les événement $(X=k)$ sont deux à deux disjoints. donc la série de fonction CvN, CvU sur $\mathbb{R}$, la somme ϕ_X est alors continue.

5. **Produit de variables indépendantes : si** X et Y indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$

6. **Variable centrée :** $E(X)=0$, toujours $Y=X-E(X)$ est centrée.

F. Moment - variance

1. **Moment :** $m\in\mathbb{N}$, $E(X^m)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^m\mathbb{P}(X=x)$ quand elle existe est dit le moment de X d'ordre m.

(a) L'existence d'un moment donne l'existence des moments d'ordre plus petit.

(b) **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** Si X et Y ont des moments d'ordre 2, alors $E(XY)$ existe et

$$E(XY)^2\leq E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$$

Egalité si et seulement si (X,Y) liés presque surement : $\exists\,\alpha,\beta,\mathbb{P}(\alpha X+\beta Y=0)=1$

2. **Variance :** Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une variance

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=E\left(X-E(X)^2\right)$$

(a) La variance est facteur de dispersion, il mesure l'écart de la variable aléatoire autour de son espérance (sa moyenne)

(b) **Ecart type :** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ est dit l'écart type.

(c) $V(aX+b)=a^2V(X)$.

(d) **Variable réduite :** $V(X)=1$: si $V(X)\neq 0$, alors $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée-réduite

3. **Covariance :** $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X-E(X))E(X-E(Y))$

(a) $V(X+Y)=V(X)+2Cov(X,Y)+V(Y)$ (se généralise pour une somme finie comme le carré d'une norme)

(b) Si X et Y indépendantes alors $Cov(X,Y)=0$ et $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

G. Fonction génératrice

1. X à valeurs entières : $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, t^k$ c'est série entière de rayon $R \geq 1$.
2. $E(X)$ existe si et seulement si $G'_X(1)$ existe. Dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$: peut-être pratique pour le calcul de $E(X)$
3. $V(X)$ existe si et seulement si $G''_X(1)$ existe. Dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$: peut-être pratique pour le calcul de $V(X)$
4. X et Y indépendantes $\Longrightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$.

   Exemple

   (a) Bernoulli $B(p) : G_X(t) = 1 - p + pt$, $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$

   (b) Binômiale $B(n,p) : G_X(t) = (1-p+pt)^n$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ (somme de n Bernoulli indépendantes)

   (c) Géométrique $G(p) : G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$, $E(X) = \dfrac{1}{p}$, $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

   (d) Poisson $P(\lambda) : G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $E(X) = V(X) = \lambda$.

H. Approximation et limite

1. **Inégalité de Markov :** $\forall\, \varepsilon > 0, \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(X)}{\varepsilon}$ (Pour $X \geq 0$ et $E(X)$ *existe*)
2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** $\forall\ \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ lorsque $E\left(X^2\right)$ existe
3. **Loi faible des grands nombres :** Soit (X_n) une suite de v.a.d 2 à 2 indépendantes admettant la même espérance μ et la même variance σ, si $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ leur moyenne, alors
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$
   Càd que la moyenne de l'échantillon calculé s'approche de la moyenne de la population : ce théorème est assez utilisé en statistique (sondage, assurance, ...)

I. Variable à densité (CNC)

1. **Fonction de répartition :**

   Soit X une variable aléatoire réelle, la fonction
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\,,\ x \in \mathbb{R}$$
   est dite la fonction de répartition de v.a. X.

   F_X vérifie les propriètés suivantes :

   (a) La fonction de répartition caractérise la loi de X : les intervalles $(]-\infty, x])_{x\in\mathbb{R}}$ engendrent la tribu des boréliens

   (b) F_X est croissante (à valeurs dans $[0,1]$)

   (c) F_X est continue à droite en tout point : $F_X(x^+) = F_X(x)$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

   (e) $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

2. **Variable à densité :** Une v.a.r. X est dite à densité (ou continue ou parfois absolument continue) si sa fonction de répartition F_X est **continue sur** $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de point. Dans ce cas
$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t) \text{ si } F_X \text{ dérivable en } t \\ 0 \text{ si } F_X \text{ non dérivable en } t \end{cases}$$
   s'appelle la densité de probabilité de la v.a. X.

   Pour une v.a. X de densité de probabilité f_X on a :

   (a) f_X est positive, continue sauf en un nombre fini de point et intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$

(b) Intuitivement $f_X(t)\,dt \approx \mathbb{P}(t \leq X \leq t+dt)$ est la probabilité de présence dans l'intervalle infinitésimale $[t, t+dt]$

(c) $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(x < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

(d) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$

(e) $\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt$

(f) $\mathbb{P}(X = x) = 0$

3. **Loi classique à densité**

(a) Loi uniforme sur $[a,b]$: $U([a,b])$: X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si sa densité est

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } a < t < b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

(b) Loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$: $E(\alpha)$: X suit la loi $E(\alpha)$ si sa densité est

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

(c) Loi gamma de paramètre (α, λ), $\alpha, \lambda > 0$: $\Gamma(\alpha, \lambda)$: X suit la loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ si sa densité est

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-t\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Lorsque $\lambda = 1$, on note $\Gamma(\alpha, 1)$ par $\Gamma(\alpha)$;

(d) Loi normale ou loi de Gauss de paramètre (m, σ^2) : $N(m, \sigma^2)$: X suit la loi normale $N(m, \sigma^2)$ si sa densité est

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

4. **Variable indépendante :**

(a) Lorsque $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) ... \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$

(b) Le théorème de l'indépendance héritée est encore valable.

5. **Somme de deux v.a. indépendantes**

(a) Si X_1 et X_2 indépendantes de densité f_{X_1} et f_{X_2}, alors la somme $X = X_1 + X_2$ est une v.a. de densité f_X :

$$f_X(x) = (f_{X_1} * f_{X_2})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\,dt = (f_{X_2} * f_{X_1})(x) \text{ Produit de convolution}$$

Exemples : Déterminer la densité de $X = X_1 + X_2$, lorsque X_1 et X_2 indépandantes et $X_1 \sim \Gamma(\alpha)$ et $X_2 \sim \Gamma(\beta)$. Retrouver la formule des compléments : $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$. où B désigne la fonction bêta.

(b) Si X_1 et X_2 indépendantes discrètes, alors la somme $X = X_1 + X_2$ est une v.a. discrète et on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \underbrace{\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x - x_1)}_{\text{Produit de convolution discret}} = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_2 = x_2)\mathbb{P}(X_1 = x - x_2)$$

Exemples : Déterminer la loi de $X = X_1 + X_2$, lorsque X_1 et X_2 indépendantes et $X_1 \sim P(\lambda)$ et $X_2 \sim P(\mu)$.

6. **Espérance - moment - variance**

   (a) **Espérance :** Si X est une v.a. de densité f_X, alors l'espérance de X quand elle existe est
   $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$$
   alors E vérifie toute les propriètés des vues pour les v.a. discrète : linéarité, positivité, croissance, inégalité de Cauchy-Schwarz, $E(XY)$ lorsque (X, Y) indépendantes,...

   (b) **Formule de transfert :** Si X de densité f_X, alors $E(\phi(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f_X(t)\, dt$

   (c) **Moment d'ordre** k : $m_k(X) = E\left(X^k\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t)\, dt$, lorsque m_k existe alors $m_1, ..., m_{k-1}$ existent aussi

   (d) **Variance :** $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$: elle vérifie les mêmes propriètés du cas discret : $V(aX + b) = a^2 V(X)$, $V(X + Y)$, ...

   (e) **Covariance :** $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X) E(Y)$

   (f) **Variable centrée réduite :** $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$: toujours $\dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est centrée-réduite

7. **Espérance et variance des loi usuelles**

   (a) Si $X \sim U([a, b])$, alors $E(X) = \dfrac{a + b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$

   (b) Si $X \sim E(\lambda)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

   (c) Si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, alors $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

   (d) Si $X \sim N\left(m, \sigma^2\right)$, alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

J. Convergence

1. **Inégalités classiques :** Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebechev sont valables pour les v.a. à densité

2. **Convergence en probabilité :**

   (a) $(X_n)_n$ converge vers X en probabilité si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

   (b) Si (X_n) converge presque sûrement vers X, alors il y'a convergence en probabilité.

   (c) Si $X_n - X \geq 0$ et $\lim E(X_n - X) = 0$, alors il y'a convergence en probabilité (Inégalité de Markov)

   Exemple : La moyenne $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ d'une suite de v.a. indépendantes et de même loi converge en probabilité vers leur espérance commune.

3. **Convergence en loi :**

   (a) $(X_n)_n$ converge vers X en loi si $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, en tout point x de continuité de F_X.

   (b) Lorsque les X_n et X sont discrètes à valeurs entières, la convergence en loi est équivalent à $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

   (c) La convergence en probabilté entraîne la convergence en loi (Réciproque fausse)
   Exemple : Soit X_n de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec n assez grand et p_n assez petit de façon que $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda > 0$, alors la suite (X_n) converge en loi vers une v.a. discrète X suivant la loi $P(\lambda)$. Ce qui justifie le fait que loi de Poisson est associée aux événements rares.

4. **Loi faible des grand nombre :** Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi, soit μ leur espérance et σ^2 leur variance , si $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ leur moyenne, alors (M_n) converge en probabilité vers la consante μ (variable presque sûr)
   $$c\grave{a}d : \forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

5. **Théorème de la limite centrale :** Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi, soit μ leur espérance et σ^2 leur variance, alors la variable centrée-réduite $S_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a. X suivant la lo normale centrée-réduité $N\left(0,1\right).$

   Ce qui justifie le caractère universel de la loi normale