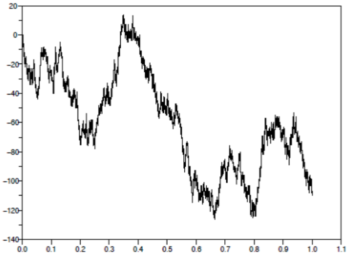
Introduction aux modèles probabilistes



Institut National des Postes et Télécommunications
(INPT)

Rabat, Septembre 2024

On s'intéresse à une expérience aléatoire qui conduit à la réalisation d'un seul résultat parmi un nombre de résultats possibles $\omega_1, \omega 2, \ldots$. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega 2, \ldots\}$ l'ensemble de ces résultats.

- $\hookrightarrow$ Un sous-ensemble A de Ω est un **événement**.
- $\hookrightarrow$ On appelle **événement contraire** de A et on note A^c l'événement $\Omega \setminus A$.
- $\hookrightarrow$ Si $A, B \subset \Omega$, l'événement A et B (réalisé lorsque A et B le sont) est noté $A \cap B$.
- $\hookrightarrow$ L'événement A ou B (réalisé lorsque A ou B le sont) est noté $A \cup B$.
- $\hookrightarrow$ **Probabilité**: mesure qui permet d'évaluer les chances de réalisation des "événements". .
- $\hookrightarrow$ Lorsque Ω est **infini**, parfois, toutes les parties de Ω ne sont pas toujours intéressantes $\rightarrow$ introduction de la notion de **tribu**.

Définition 1.1

- **Tribu** ($\sigma-$algèbre) $\mathcal{F}$ sur Ω: une famille de parties de Ω tel que:
  i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
  2i) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;
  3i) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$.
- **Probabilité** $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$: toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$ telle que :
  i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  2i) pour toute suite d'événements $A_n \in \mathcal{F}$, incompatibles deux à deux, on a:
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

$\hookrightarrow$ Lorsque Ω est **fini**, on prend pratiquement toujours $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- Une intersection de tribus est une tribu.
- La tribu engendrée par une famille d'ensembles $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note $\sigma(\mathcal{A})$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$.
- La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts.
- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, l'événement A est dit négligeable.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, l'événement A est dit presque sûr.
- **Probabilité de l'événement** $A \cup B$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- **Fonction indicatrice** : On appelle fonction indicatrice de l'événement A la fonction $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ définie par:

$$\forall w \in \Omega, \ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Probabilité conditionnelle :**

  La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B, notée $\mathbb{P}(A \mid B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) & \text{si } \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple.

Dans une famille qui comporte deux enfants, l'un est une fille.

1. Chercher la probabilité que l'autre soit un garçon.
2. Supposons que l'aîné des enfants est une fille. Calculer la probabilité pour que l'autre soit un garçon.

Proposition 1.1 – Formule de Bayes

Soit $B_1, \ldots, B_m$ une partition de (i.e. des sous-ensembles disjoints de Ω dont la réunion est Ω) et $A \subset \Omega$ t.q. $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors pour tout $1 \leq i \leq m$, alors

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

- **Indépendance:** $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants si pour **toute partie** J **finie** de I, on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Remarque. L'indépendance de A_1 et A_2 se caractérise aussi par les relations $\mathbb{P}(A_1 \,|\, A_2) = \mathbb{P}(A_1)$, c'-à-d "la connaissance de A_2 n'apporte aucune information pour déterminer la probabilité de A_1.

Attention

- Il ne suffit pas que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ pour que les événements soient indépendants.
- Pour que 3 événements soient indépendants, il ne suffit pas qu'il soient 2 à 2 indépendants.

- **Probabilités totales:** Lorsque $\Omega = \bigcup_n A_n$ avec les A_n disjoints 2 à 2,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A \,|\, A_n)\mathbb{P}(A_n).$$

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables (un espace mesurable est un espace muni d'une tribu). Soit $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$.

Définition 1.2 – Application mesurable

L'application f est dite **$(\Omega, \mathcal{F})$ −mesurable** si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \ \forall A \in \mathcal{B}$,

$$f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \in A\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on dit simplement que f est mesurable.

- $\hookrightarrow$ Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, c'-à-d pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ où

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\} \overset{not}{=} . \{X \in A\}$$

- $\hookrightarrow$ Une constante est une v.a. de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{F}$.
- $\hookrightarrow$ La tribu engendrée par une v.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, notée $\sigma(X)$, est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable (l'ensemble des parties de Ω qui s'écrivent $X^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$).

- **Variable aléatoire discrète X**: si $X(\Omega)$ est `fini` ou `dénombrable`.
  La loi d'une v.a.r discrète est donnée par:

$$\begin{cases} X(\Omega) & = \{x_k,\ k \in I \subset \mathbb{Z}\} \\ p_k & = \mathbb{P}\left(\{X = x_k\}\right) \text{ pour tout } x_k \in X(\Omega) \end{cases}$$

  On a alors $p_k \geq 0$ et $\sum_k p_k = 1$, On obtient ainisi $\mathbb{P}\left(\{X \in A\}\right)$ car $X^{-1}(A) = \bigcup_{x_k \in A} \left(\{X = x_k\}\right)$

- **Lois marginale et conditionnelle**: Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs respectives dans E et F.
  - **Loi marginale**: $\forall x \in E,\ \mathbb{P}\left(X = x\right) = \sum_{y \in F} \mathbb{P}\left(X = x,\ Y = y\right)$.
  - **Loi conditionnnelle** de X sachant $Y = y$:

$$\left(\mathbb{P}(X \,|\, Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}\right)_{x \in E}.$$

  - **Indépendance**:
    $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\quad \mathbb{P}(X = x,\ Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \iff$ la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ ne dépend pas de $y \in F$.

- **Espérance et Variance** : Soit $X : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$
  - Espérance: X est intégrable si $\sum_{x \in E} |x| \, \mathbb{P}(X = x) < +\infty$ et alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x).$$

  - Variance: X est de carré intégrable si $\sum_{x \in E} x^2 \mathbb{P}(X = x) < +\infty$, alors

$$Var\,(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Propriétés 1.1 – Espérance et variance

i) Pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$.

2i) Linéarité: $\mathbb{E}(aX + Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

3i) Croissance: $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1 \implies \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

4i) X et Y sont indépendantes $\implies \mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

5i) $Var\,(aX + b) = a^2\,Var\,(X)$.

6i) $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes $\implies Var\,(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var\,(X_i)$.

- **Espérance de $\varphi(X)$**: Si $\varphi(X)$ est intégrable alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(x_k)\mathbb{P}(X = x_k).$$

  - ∗ Moyenne: $m = \mathbb{E}(\varphi(X))$ avec $\varphi(x) = x$.
  - ∗ Variance: $Var(X) = \mathbb{E}(\varphi(X))$ avec $\varphi(x) = (x - m)^2$.
  - ∗ Fonction caractéristique: $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\varphi(X))$ avec $\varphi(x) = e^{itx}$.
  - ∗ Fonction génératrice: $G_X(s) = \mathbb{E}(\varphi(X))$ avec $\varphi(x) = s^x$ et $s \in [-1, 1]$:
    - Si X et Y indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
    - $\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)$.
    - $Var(X) = G''_X(1^-) + G'_X(1^-) - (G'_X(1^-))^2$.
- **Espérance conditionnelle de $\varphi(X, Y)$ sachant Y**: si $\varphi(X, Y)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X, Y) \mid Y\right) = \psi(Y), \quad \text{avec} \quad \psi(y) = \sum_k \varphi(x_k, y)\mathbb{P}(X = x_k \mid Y = y)$$

- **Lois discrètes usuelles**

Nom	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$	$G_x(s)$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=1)$	p	$p(1-p)$	$1-p+ps$
Binomiale $\mathcal{B}(n,\,p)$	$\forall 0\leq k\leq n$ $\mathbb{P}(X=k)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+ps)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X=n)=exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$e^{\lambda(s-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}eo(p)$	$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{ps}{1-(1-p)s}$

- **Variable aléatoire continue X:** si $X(\Omega)$ est non dénombrable. Soit $F_X : x \longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. F_X est croissante et continue à droite, $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
  - Densité d'une v.a.r continue est donnée par:

$$f_X(x) = F'_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I \text{ où } I \text{ de mesure nulle.}$$

    On a alors f_X est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus I$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.
  - Fonction de répartition est ainsi définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt.$$

- **Densités marginale et conditionnelle :** Soient X et Y deux v.a.r continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ de fonction de répartition

$$F_{X,Y} : (x,y) \mapsto \mathbb{P}\,(X \leq x,\ Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,\ v)\,du\,dv.$$

  - **Densité marginale**: $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X\,(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,(x,\ y)\,dy.$

- **Densités marginale et conditionnelle**:
  - Densité conditionnnelle de X sachant $Y = y$:

$$f_X^{[Y=y]}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

  - Indépendance: si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ $\Leftrightarrow$ la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ ne dépend pas de $y \in \mathbb{R}$.

- **Espérance et Variance** : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$
  - Espérance: X est intégrable si $\int_{\mathbb{R}} |x| \ f(x)\, dx < +\infty$ et alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx.$$

  - Variance: X est de carré intégrable si $\int_{\mathbb{R}} x^2 \, f(x)\, dx < +\infty$, alors

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

  - Covariance: si X et Y sont de carré intégrable

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))\ (Y - \mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Propriétés 1.2 – Espérance et variance

1i) **Linéarité**: $\mathbb{E}(aX+Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

2i) **Croissance**: $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1 \implies \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

3i) X et Y sont **indépendantes** $\implies \mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

- **Espérance de $\varphi(X)$**: Si $\varphi(X)$ est intégrable alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f(x)\, dx.$$

- **Espérance conditionnelle de $\varphi(X,\,Y)$ sachant Y**: si $\varphi(X,\,Y)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X,\,Y) \,|\, Y\right) = \psi(Y), \quad \text{avec} \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,\,y)\, f_X^{[Y=y]}(x)\, dx$$

- **Densités usuelles sur $\mathbb{R}$**

Nom	Densité	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$
Uniforme $\mathcal{U}[a,\ b]$	$\frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,\ b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda exp(-\lambda\, x)\,\mathbb{1}_{[x\geq 0]}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $\mathcal{N}(m,\ \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$	m	σ^2

- **Ensemble négligeable**
  - $\hookrightarrow$ Un ensemble est dit négligeable s'il est de probabilité nulle.
  - $\hookrightarrow$ Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
  - $\hookrightarrow$ Une propriété est vraie presque sûrement (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.
- **Convergence de v.a.**
  - $*$ Convergence presque sûre
    - $\hookrightarrow$ Une suite de v.a. $\{X_n\}$ converge p.s. vers X, notée $X_n \stackrel{p.s}{\rightarrow} X$, si pour presque tout ω,

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

    - $\hookrightarrow$ Convergence dominée de Lebesgue: Si $X_n \stackrel{p.s}{\rightarrow} X$ et s'il existe une variable Y intégrable telle que $|X_n| \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

* **Convergence presque sûre**

Théorème 1.1 – Loi des grands nombres

Si $\{X_k\}_{k\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées d'espérance finie, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1).$$

* **Convergence en probabilité**

↪ Une suite de v.a. $\{X_n\}$ **converge en probabilité** vers X, notée $X_n \xrightarrow{P} X$, si

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \longrightarrow 0 \;\; \text{qd } n \to \infty.$$

↪ La convergence p.s. implique la convergence en probabilité.

↪ La convergence en probabilité implique qu'une sous-suite converge p.s.

* **Convergence en loi**

  - Une suite de v.a. $\{X_n\}$ **converge en loi** vers X, notée $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction ϕ continue bornée,

$$\mathbb{E}(\phi(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(\phi(X)) \;\text{ qd } n \to \infty.$$

  - Si X est une v.a. de fonction de répartition F continue, et si X_n est une suite de v.a. de fonction de répartition F_n telles que $F_n(x)$ converge vers $F(x)$ pour tout x, alors X_n converge en loi vers X et réciproquement.
  - La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Théorème 1.2 – Théorème Central Limite (TCL)

Si $\{X_k\}_{k\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), de variance finie σ^2 , alors

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\, 1).$$

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'-à-d non prévisible avec certitude. Ce type des systèmes dynamiques peut être représenté par une fonction aléatoire:

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, w) &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

1. Pour chaque $t \in T$, X_t est une v.a. de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ qui décrit les *états* possibles:

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ w &\longmapsto X_t(w) = X(t, w). \end{aligned}$$

   $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, appelé "*espace des états*".

2. Pour chaque $w \in \Omega$, l'application $X(., w)$ de T dans E permet de représenter l'évolution du système, c-à-d les états successifs de celui-ci:

$$\begin{aligned} X(., w) : T &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ t &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

   Cette application est appelée une *trajectoire* du processus.

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'-à-d non prévisible avec certitude. Ce type des systèmes dynamiques peut être représenté par une fonction aléatoire:

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, w) &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

1. Pour chaque $t \in T$, X_t est une v.a. de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ qui décrit les *états* possibles:

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ w &\longmapsto X_t(w) = X(t, w). \end{aligned}$$

   $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, appelé "*espace des états*".

2. Pour chaque $w \in \Omega$, l'application $X(., w)$ de T dans E permet de représenter l'évolution du système, c-à-d les états successifs de celui-ci:

$$\begin{aligned} X(., w) : T &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ t &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

   Cette application est appelée une *trajectoire* du processus.

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'-à-d non prévisible avec certitude. Ce type des systèmes dynamiques peut être représenté par une fonction aléatoire:

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, w) &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

1. Pour chaque $t \in T$, X_t est une v.a. de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ qui décrit les *états* possibles:

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ w &\longmapsto X_t(w) = X(t, w). \end{aligned}$$

   $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, appelé "*espace des états*".
2. Pour chaque $w \in \Omega$, l'application $X(., w)$ de T dans E permet de représenter l'évolution du système, c-à-d les états successifs de celui-ci:

$$\begin{aligned} X(., w) : T &\longrightarrow (E, \mathcal{B}) \\ t &\longmapsto X(t, w) = X_t(w). \end{aligned}$$

   Cette application est appelée une *trajectoire* du processus.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réelles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réelles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réelles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réelles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réélles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réèlles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Processus stochastiques

Définitions

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réèlles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

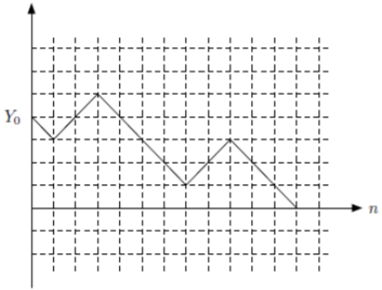
- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réèlles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Définition 1.3

Soit $T \neq \emptyset$. On appelle processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans (E, β), le terme $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T}\right)$ constitué par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs $(E, \mathcal{B})$.

- Espace des temps T
  - si T est dénombrable, le PS est dit à temps discret ,
  - si T n'est pas dénombrable et $T \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à temps continu.
- Espace des états E
  - si E est dénombrable, le PS est dit à valeurs entières ou à espace d'état discret;
  - si E n'est pas dénombrable et $E \subseteq \mathbb{R}$, le PS est dit à valeurs réèlles ou espace d'état continu.
- Famille des v.a. $(X_t)_{t \in T}$
  - Ces v.a. sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.

Un joueur joue un jeu où il peut gagner un montant fixe (ici 1 unité) avec probabilité p et perdre le même montant avec probabilité $1 - p$. Le joueur est ruiné (et donc arrête de jouer) dès que sa fortune est épuisée. On peut également ajouter une condition que le joueur s'arrête de jouer si sa fortune atteint un certain seuil a.



Dans ce jeu, on aimerait connaître l'espérance de gain ou encore la durée moyenne du jeu en fonction de sa fortune initiale, p et a.

Galton et Watson ont introduit un modèle pour étudier la perpétuation des lignées des Lords en Angleterre au 19e siècle : les individus sont des Lords qui transmettent leur titre uniquement à leurs fils. Il s'agit alors d'étudier l'évolution de la population au cours du temps, d'une autre manière, quelle la probabilité que la lignée des Lords s'éteigne?
Ce modèle a donné lieu à des nombreuses généralisations en biologie des populations.

Galton et Watson ont introduit un modèle pour étudier la perpétuation des lignées des Lords en Angleterre au 19e siècle : les individus sont des Lords qui transmettent leur titre uniquement à leurs fils. Il s'agit alors d'étudier l'évolution de la population au cours du temps, d'une autre manière, quelle la probabilité que la lignée des Lords s'éteigne?
Ce modèle a donné lieu à des nombreuses généralisations en biologie des populations.
On part d'un seul individu à l'instant initial: $X_0 = 1$.
A chaque instant n, on a une population de X_n individus. La taille de la population à l'instant suivant est:

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^k$$

où Z_{n+1}^k est une v.a. qui resprésente le nombre de descendances directes de l'individu k juste avant de s'éteindre. Z_{n+1}^k est indépendante des autres Z_{n+1}^j avec $1 \leq j \leq X_n$, et du passé selon une loi de porbabilité dite de reproduction.

Question: Y aura-t'il extinction de la lignée des Lords?.

La prime d'un assuré peut diminuer si aucune réclamation n'est faite durant une période donnée ou augmenter si une ou plusieurs réclamations sont soumises durant une certaine période. Les réclamations font suite à des accidents de la route qui se produisent au hasard dans le temps. L'arrivée d'événements au hasard est décrite par un processus de Poisson.

Supposons que la mise à jour de la classe de l'assuré se fait après chaque année. Cette classe est augmentée du nombre de réclamations durant l'année s'il y en a, mais diminuée de 1 s'il y'en a pas.

La prime d'un assuré peut diminuer si aucune réclamation n'est faite durant une période donnée ou augmenter si une ou plusieurs réclamations sont soumises durant une certaine période. Les réclamations font suite à des accidents de la route qui se produisent au hasard dans le temps. L'arrivée d'événements au hasard est décrite par un processus de Poisson.
Supposons que la mise à jour de la classe de l'assuré se fait après chaque année. Cette classe est augmentée du nombre de réclamations durant l'année s'il y en a, mais diminuée de 1 s'il y'en a pas. Si X_n représente la classe d'un assuré après n années de conduite, alors:

$$P(X_{n+1} = i + k | X_n = i) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \geq 1,\ i \geq 0$$

$$P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = e^{-\lambda} \qquad i \geq 1$$

Questions:

- $P(X_n = j | X_0 = 0)$ converge-t-elle lorsque $n \to \infty$?
- si elle converge, quelle est la limite $\pi_j \geq 0$?

Cette limite π_j,quand elle existe, correspond à la proportion moyenne d'années à long terme qu'un assuré passe dans la classe j.

Les éléments principaux qui différencient les PS généraux sont l'espace des états E, l'espace des temps T et les relations de dépendance entre les X_t.

- **Processus ponctuel**

  Soit $\{T_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ une suite croissante de v.a presque partout deux à deux distinctes,

$$\exists A \subset \Omega,\ P(A) = 1,\ \text{et } w \in A,\ T_n(w) \leq \infty \Longrightarrow T_{n-1}(w) < T_n(w).$$

$\hookrightarrow$ Un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ est la trace sur $\mathbb{R}_+$ des v.a $T_n, n = 1, 2, \cdots$.

- **Processus de comptage**

  Soit $N(t)$, $(t \geq 0)$, une `fonction de comptage` définie comme suit:

$$\begin{aligned} N(t):\quad (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto N(t)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n(w) \leq t\}}, \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si:

i. Pour tout $t \geq 0$, $N(t)$ prend des valeurs entières ou nulles;
2i. $s < t \Longrightarrow N(s) \leq N(t)$;
3i. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nbre d'évts produits dans $]s, t]$.

Les éléments principaux qui différencient les PS généraux sont l'espace des états E, l'espace des temps T et les relations de dépendance entre les X_t.

- **Processus ponctuel**

  Soit $\{T_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ une suite croissante de v.a presque partout deux à deux distinctes,

$$\exists A \subset \Omega,\ P(A) = 1,\ \text{et}\ w \in A,\ T_n(w) \leq \infty \Longrightarrow T_{n-1}(w) < T_n(w).$$

$\hookrightarrow$ Un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ est la trace sur $\mathbb{R}_+$ des v.a $T_n, n = 1, 2, \cdots$.

- **Processus de comptage**

  Soit $N(t)$, $(t \geq 0)$, une `fonction de comptage` définie comme suit:

$$\begin{aligned} N(t) :\quad (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto N(t)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n(w) \leq t\}}, \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si:

i. Pour tout $t \geq 0$, $N(t)$ prend des valeurs entières ou nulles;
2i. $s < t \Longrightarrow N(s) \leq N(t)$;
3i. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nbre d'évts produits dans $]\,s, t]$.

Les éléments principaux qui différencient les PS généraux sont l'espace des états E, l'espace des temps T et les relations de dépendance entre les X_t.

- **Processus ponctuel**

  Soit $\{T_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ une suite croissante de v.a presque partout deux à deux distinctes,

$$\exists A \subset \Omega,\ P(A) = 1,\ \text{et } w \in A,\ T_n(w) \leq \infty \Longrightarrow T_{n-1}(w) < T_n(w).$$

$\hookrightarrow$ Un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ est la trace sur $\mathbb{R}_+$ des v.a $T_n, n = 1, 2, \cdots$.

- **Processus de comptage**

  Soit $N(t)$, $(t \geq 0)$, une `fonction de comptage` définie comme suit:

$$\begin{aligned} N(t) : \quad (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto N(t)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n(w) \leq t\}}, \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si:

i. Pour tout $t \geq 0$, $N(t)$ prend des valeurs entières ou nulles;

2i. $s < t \Longrightarrow N(s) \leq N(t)$;

3i. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nbre d'évts produits dans $]s, t]$.

Les éléments principaux qui différencient les PS généraux sont l'espace des états E, l'espace des temps T et les relations de dépendance entre les X_t.

- **Processus ponctuel**

  Soit $\{T_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ une suite croissante de v.a presque partout deux à deux distinctes,

$$\exists A \subset \Omega,\ P(A) = 1,\ \text{et } w \in A,\ T_n(w) \leq \infty \Longrightarrow T_{n-1}(w) < T_n(w).$$

$\hookrightarrow$ Un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ est la trace sur $\mathbb{R}_+$ des v.a $T_n, n = 1, 2, \cdots$.

- **Processus de comptage**

  Soit $N(t)$, $(t \geq 0)$, une `fonction de comptage` définie comme suit:

$$\begin{aligned} N(t): \quad (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto N(t)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n(w) \leq t\}}, \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de comptage si:

i. Pour tout $t \geq 0$, $N(t)$ prend des valeurs entières ou nulles;
2i. $s < t \Longrightarrow N(s) \leq N(t)$;
3i. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nbre d'évts produits dans $]\ s, t]$.

- **Processus à accroissements indépendants**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est à accroissements indépendants si pour tout $n = 1, 2, \cdots$ et tout indice $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les v.a.

$$X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont deux à deux indépendantes.

∗ **Remarque 1.1:**

Un processus à accroissements indépendants (PAI) est entièrement défini par la loi initiale $P_0(B) = P(X_0 \in B)$ et de la famille de lois

$$P(t, h, B) = P(X_{t+h} - X_t \in B),\ B \in \mathcal{B},\ t \in T,\ t + h \in T.$$

- **Processus à accroissements indépendants**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est à accroissements indépendants si pour tout $n = 1, 2, \cdots$ et tout indice $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les v.a.

$$X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont deux à deux indépendantes.

∗ **Remarque 1.1:**

Un processus à accroissements indépendants (PAI) est entièrement défini par la loi initiale $P_0(B) = P(X_0 \in B)$ et de la famille de lois

$$P(t, h, B) = P(X_{t+h} - X_t \in B),\ B \in \mathcal{B},\ t \in T,\ t + h \in T.$$

- **Processus à accroissements indépendants**

$\hookrightarrow$ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est à accroissements indépendants si pour tout $n = 1, 2, \cdots$ et tout indice $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les v.a.

$$X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont deux à deux indépendantes.

$\ast$ **Remarque 1.1:**

Un processus à accroissements indépendants (PAI) est entièrement défini par la loi initiale $P_0(B) = P(X_0 \in B)$ et de la famille de lois

$$P(t, h, B) = P(X_{t+h} - X_t \in B),\ B \in \mathcal{B},\ t \in T,\ t + h \in T.$$

- **Processus homogène (stationnaire)**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est homogène ou stationnaire si pour tout $n = 1, 2, \cdots n$ et tout $t_0, t_1, \cdots, t_n$ dans T et $h > 0$ tel que $t_i + h \in T$, la loi jointe de $(X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ est indépendante de h.

↪ Si la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ dépend uniquement de la longueur de $[t, t+h[$, on dit que le processus est à accroissements stationnaires.

Exemple:

- Le mouvement Brownien est un PAIS dont la loi des accroissements est une loi Gaussienne. Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$ la densité de $X_{t+h} - X_t$ est v.a normale de paramètres mh et $\sigma^2 h$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}}, \; x \in \mathbb{R},$$

et la loi de l'accroissement est donc

$$P(t, h, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}} dx, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- Lorsque l'accroissement d'un PAI est une v.a discrète de loi de Poisson, le processus s'appelle un processus de Poisson.

- **Processus homogène (stationnaire)**

$\hookrightarrow$ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est homogène ou stationnaire si pour tout $n = 1, 2, \cdots n$ et tout $t_0, t_1, \cdots, t_n$ dans T et $h > 0$ tel que $t_i + h \in T$, la loi jointe de $(X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ est indépendante de h.

$\hookrightarrow$ Si la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ dépend `uniquement de la longueur` de $[t, t+h[$, on dit que le processus est à accroissements stationnaires.

Exemple:

- Le mouvement Brownien est un PAIS dont la loi des accroissements est une loi Gaussienne. Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$ la densité de $X_{t+h} - X_t$ est v.a normale de paramètres mh et $\sigma^2 h$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}}, \; x \in \mathbb{R},$$

et la loi de l'accroissement est donc

$$P(t, h, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}} dx, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- Lorsque l'accroissement d'un PAI est une v.a discrète de loi de Poisson, le processus s'appelle un processus de Poisson.

- **Processus homogène (stationnaire)**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est homogène ou stationnaire si pour tout $n = 1, 2, \cdots n$ et tout $t_0, t_1, \cdots, t_n$ dans T et $h > 0$ tel que $t_i + h \in T$, la loi jointe de $(X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ est indépendante de h.

↪ Si la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ dépend `uniquement de la longueur` de $[t, t+h[$, on dit que le processus est à accroissements stationnaires.

Exemple:

- Le mouvement Brownien est un PAIS dont la loi des accroissements est une loi Gaussienne. Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$ la densité de $X_{t+h} - X_t$ est v.a normale de paramètres mh et $\sigma^2 h$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}}, \; x \in \mathbb{R},$$

et la loi de l'accroissement est donc

$$P(t, h, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}} dx, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- Lorsque l'accroissement d'un PAI est une v.a discrète de loi de Poisson, le processus s'appelle un processus de Poisson.

- **Processus homogène (stationnaire)**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est homogène ou stationnaire si pour tout $n = 1, 2, \cdots n$ et tout $t_0, t_1, \cdots, t_n$ dans T et $h > 0$ tel que $t_i + h \in T$, la loi jointe de $(X_{t_1+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ est indépendante de h.

↪ Si la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ dépend `uniquement de la longueur` de $[t, t+h[$, on dit que le processus est à accroissements stationnaires.

Exemple:

- Le mouvement Brownien est un PAIS dont la loi des accroissements est une loi Gaussienne. Pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$ la densité de $X_{t+h} - X_t$ est v.a normale de paramètres mh et $\sigma^2 h$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}}, \; x \in \mathbb{R},$$

  et la loi de l'accroissement est donc

$$P(t, h, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma^2 h}} dx, \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- Lorsque l'accroissement d'un PAI est une v.a discrète de loi de Poisson, le processus s'appelle un processus de Poisson.

- **Processus Markovien**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est markovien, dit également sans mémoire si pour tout $0 < s < t$, on a

$$P\left(X_t = x_t | X_u = x_u,\ 0 \leq u \leq s\right) = P\left(X_t = x_t | X_s = x_s\right),$$

pour tout $x_t, x_u \in E$, $0 \leq u \leq s$. Autrement dit, l'état présent du système contient toute information sur son évolution (aléatoire) future.

↪ L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé, c'-à-d seul le passé le plus proche est pris en compte pour déterminer les probabilités d'occupation de chaque état!

↪ Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps selon des transitions probabilistes.

- **Processus Markovien**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T})$ est markovien, dit également sans mémoire si pour tout $0 < s < t$, on a

$$P(X_t = x_t | X_u = x_u,\ 0 \leq u \leq s) = P(X_t = x_t | X_s = x_s),$$

pour tout $x_t, x_u \in E$, $0 \leq u \leq s$. Autrement dit, l'état présent du système contient toute information sur son évolution (aléatoire) future.

↪ L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé, c'-à-d seul le passé le plus proche est pris en compte pour déterminer les probabilités d'occupation de chaque état!

↪ Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps selon des transitions probabilistes.

- **Processus Markovien**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T})$ est markovien, dit également sans mémoire si pour tout $0 < s < t$, on a

$$P\left(X_t = x_t | X_u = x_u,\ 0 \leq u \leq s\right) = P\left(X_t = x_t | X_s = x_s\right),$$

pour tout $x_t, x_u \in E$, $0 \leq u \leq s$. Autrement dit, l'état présent du système contient toute information sur son évolution (aléatoire) future.

↪ L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé, c'-à-d seul le passé le plus proche est pris en compte pour déterminer les probabilités d'occupation de chaque état!

↪ Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps selon des transitions probabilistes.

- **Processus Markovien**

↪ $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ est markovien, dit également sans mémoire si pour tout $0 < s < t$, on a

$$P\left(X_t = x_t | X_u = x_u,\ 0 \leq u \leq s\right) = P\left(X_t = x_t | X_s = x_s\right),$$

pour tout $x_t, x_u \in E,\ 0 \leq u \leq s$. Autrement dit, l'état présent du système contient toute information sur son évolution (aléatoire) future.

↪ L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé, c'-à-d seul le passé le plus proche est pris en compte pour déterminer les probabilités d'occupation de chaque état!

↪ Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps selon des transitions probabilistes.