

Cycle d'ingénieur INE1

Filière : Smart-ICT

Cours

Traitement du signal

Mohamed ET-TOLBA

Enseignant chercheur

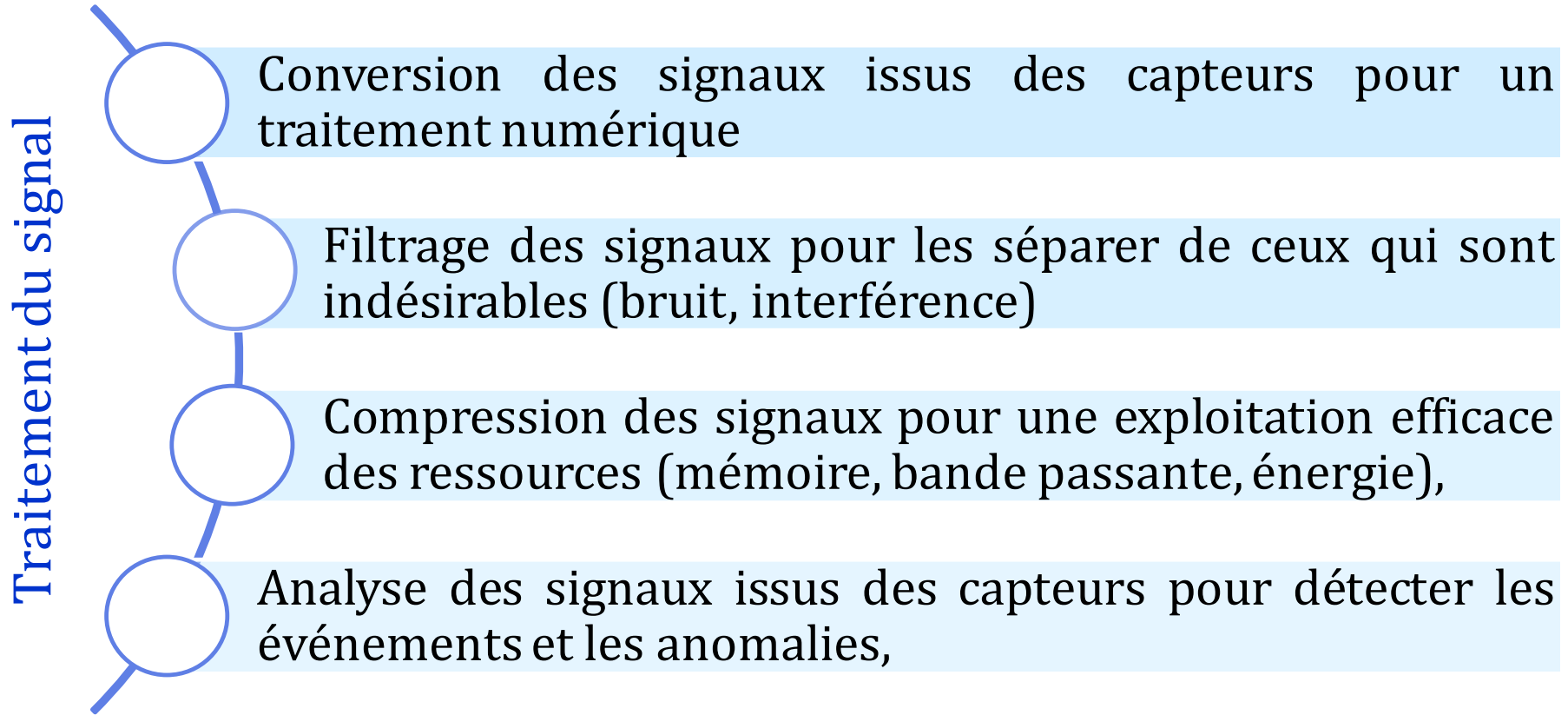
Département Systèmes de Communication, INPT

ettolba@inpt.ac.ma / www.mettolba.net

© ET-TOLBA 2024

Traitement du signal

Quelques aspects



Traitement du signal

Objectif du cours

- A l'issue de ce cours, l'élève ingénieur sera capable de :
 - ◆ Assimiler la notion du signal et celle du bruit
 - ◆ Faire la différence entre la théorie et le traitement du signal
 - ◆ Représenter, caractériser, et classer un signal
 - ◆ Etablir et analyser la représentation spectrale d'un signal déterministe à temps continu
 - ◆ Numériser un signal déterministe continu
 - ◆ Etablir et analyser la représentation spectrale d'un signal déterministe à temps discret
 - ◆ Implémenter des techniques de traitement du signal avec le logiciel MATLAB

Traitement du signal

Contenu du cours

- **Introduction**
- **Chapitre 1 : Classification des signaux**
- **Chapitre 2 : Signaux déterministes à temps continu**
- **Chapitre 3 : Systèmes linéaires à temps continu**
- **Chapitre 4 : Echantillonnage**
- **Chapitre 5 : Signaux déterministes à temps discret**

Traitement du signal

Déroulement et prérequis

■ Activités et charge horaire :

- Cours & TD (16 heures)
- Travaux pratiques (4 heures)

■ Prérequis :

- Mathématiques pour l'ingénieur

■ Evaluation :

- Examen écrit

Traitement du signal

Les interdits en classe

Pour le bon déroulement de ce cours, il est strictement interdit de :

- Utiliser un téléphone portable
- Utiliser un ordinateur portable
- Procéder à tout acte qui sort du contexte du cours



Introduction

- ✓ Notion du signal et celle du bruit
- ✓ Définition de la théorie du signal
- ✓ Définition du traitement du signal
- ✓ Systèmes de traitement du signal
- ✓ Opérations du traitement du signal
- ✓ Quelques applications du traitement du signal

Introduction

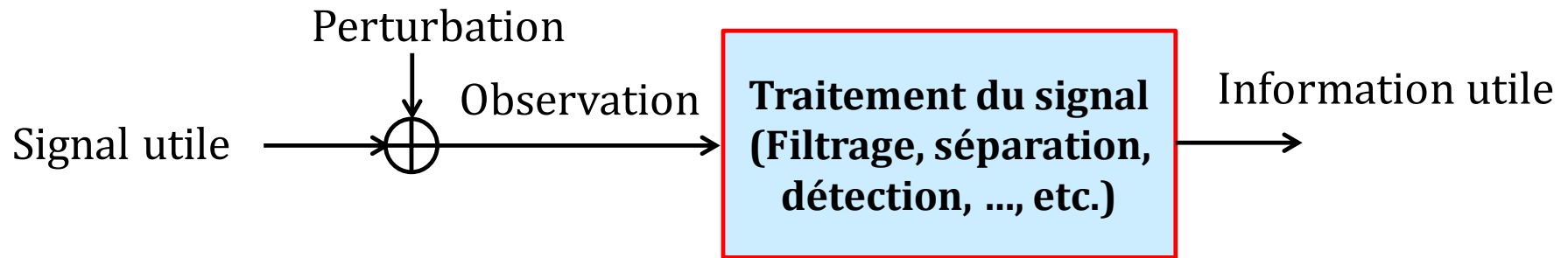
Définitions – Le signal

- Un signal représente l'information issue de la mesure d'un phénomène physique. Il renseigne sur l'évolution d'une grandeur physique mesurable (courant, tension, température, pression, humidité, ..., etc).
- Des signaux de plusieurs formes nous entourent. Certains sont **naturels** et d'autres sont **artificiels**
- On distingue aussi,
 - ◆ Des signaux nécessaires (la parole)
 - ◆ Des signaux plaisants (la musique)
 - ◆ Des signaux non désirables (bruit et interférences)

Introduction

Définitions – Le bruit

- Un bruit est défini comme toute perturbation (un signal non désirable) qui gêne l'interprétation et l'analyse du signal d'intérêt.



- Sources de perturbations
 - ◆ Bruit thermique, appelée aussi bruit de résistance ou bruit de Johnson. Il est causé par l'agitation thermique aux niveau des résistances électriques
 - ◆ Interférences – Se sont des signaux indésirables de même type que le signal utile

Introduction

Définitions – Théorie du signal et Théorie de l'information

- La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permettent de caractériser et décrire les signaux.



A ne pas confondre avec la théorie de l'information

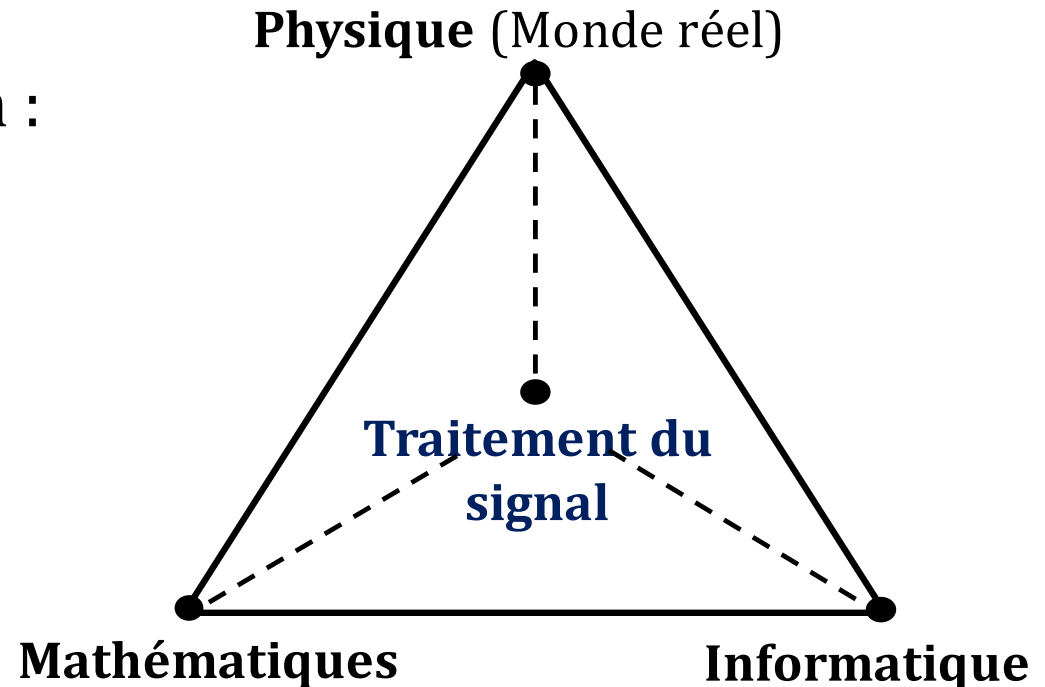
- La théorie de l'information est l'ensemble des outils mathématiques décrivant la transmission d'une information d'une source vers une destination.

Introduction

Définitions – Traitement du signal

- Le traitement du signal est l'ensemble de techniques qui permettent d'analyser et d'interpréter le signal afin d'en extraire le maximum d'information.

- Domaines d'interaction :



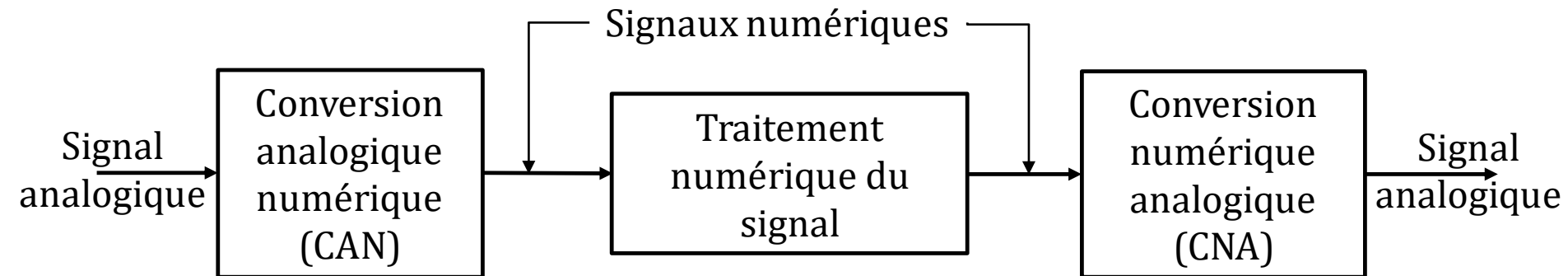
Introduction

Systèmes du traitement du signal

Traitement analogique du signal

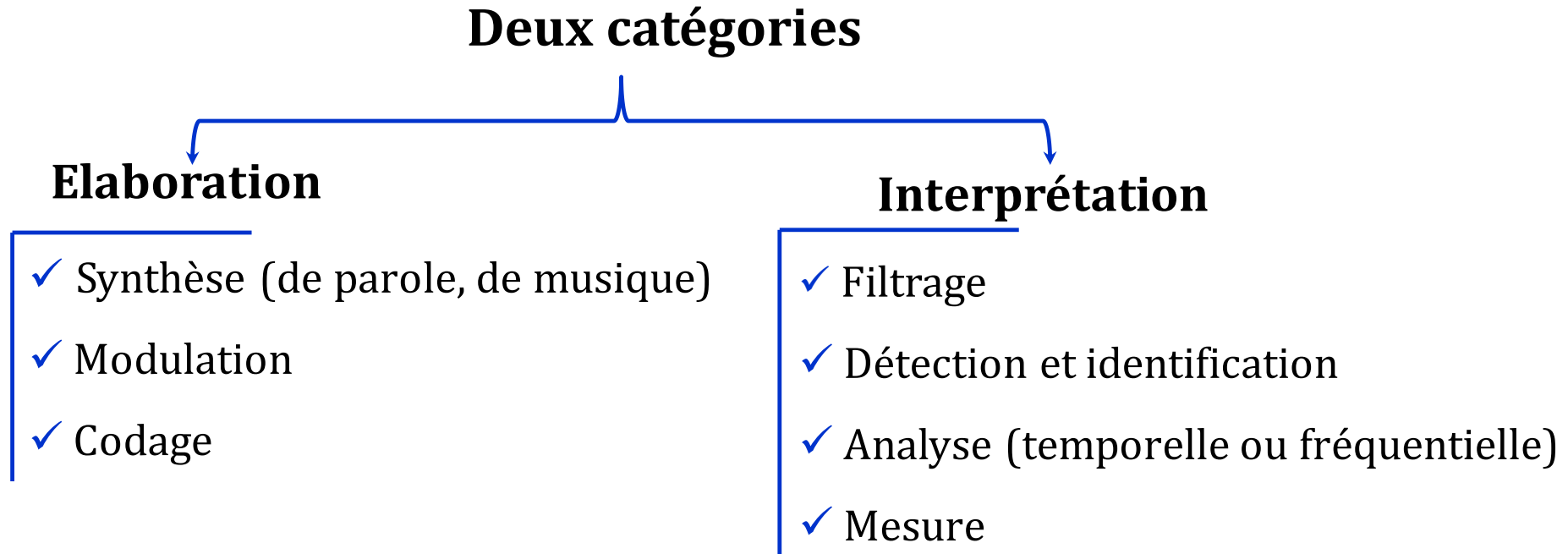


Traitement numérique des signaux analogiques



Introduction

Opérations du traitement du signal



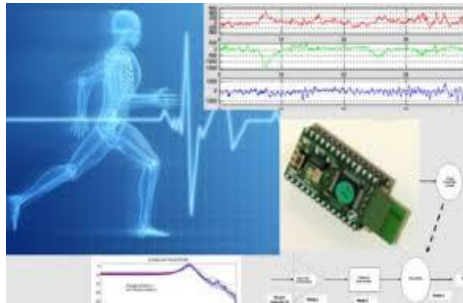
Traitement du signal

Quelques applications



■ Télécommunications

- ◆ Téléphonie
- ◆ Radars
- ◆ Communication par satellite



■ Santé

- ◆ Localisation et caractérisation d'épilepsie
- ◆ Echographie
- ◆ Détection des troubles du rythme cardiaque



■ Finance

- ◆ Prédiction boursière
- ◆ Dé-bruitage de données
- ◆ Optimisation des portefeuilles financiers

Chapitre 1

Classification des signaux

Classification des signaux

- ✓ Classification morphologique
- ✓ Classification phénoménologique
- ✓ Classification selon le support temporel
- ✓ Signaux périodiques
- ✓ Classifications selon l'occupation spectrale
- ✓ Classification énergétique
- ✓ Exemples de signaux usuels

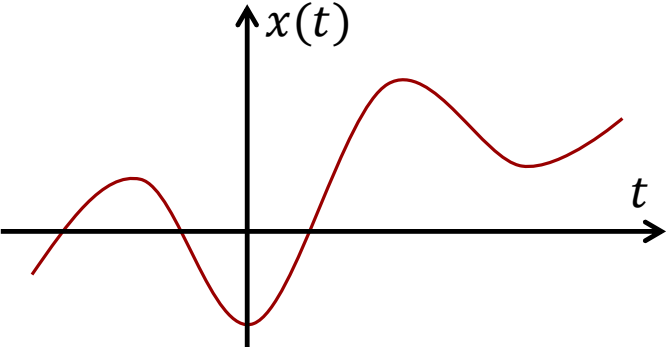
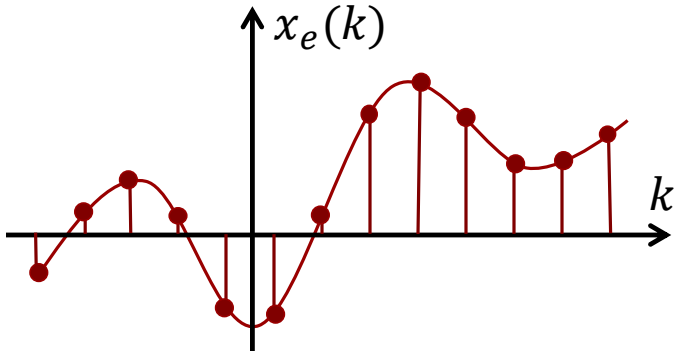
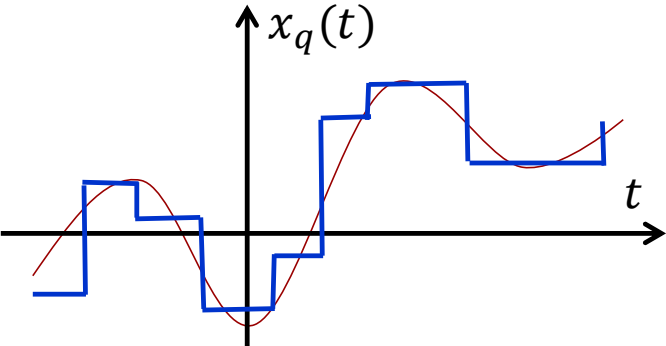
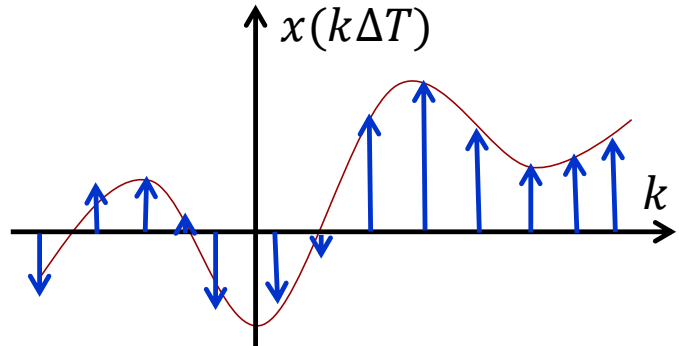
Classification des signaux

Classification morphologique

- La classification morphologique des signaux fait intervenir les deux paramètres **temps** et **amplitude**
 - ◆ ***Signal analogique:***
signal continu en temps et en amplitude
 - ◆ **Signal échantillonné:**
signal discret en temps et continu en amplitude
 - ◆ **Signal quantifié:**
signal à temps continu et amplitude discrète
 - ◆ **Signal numérique:**
signal à temps discret et amplitude discrète

Classification des signaux

Classification morphologique

	Temps continu	Temps discret
Amplitude continue	 <p>Signal analogique</p>	 <p>Signal échantillonné</p>
Amplitude discrète	 <p>Signal quantifié</p>	 <p>Signal numérique</p>

Classification des signaux

Classification phénoménologique

- Selon l'évolution temporelle, on distingue deux catégories de signaux: signaux déterministes et signaux aléatoires

- ◆ **Signaux déterministes :**

- Leur évolution temporelle est parfaitement décrite par un modèle mathématique bien défini
- Correspondent aux phénomènes pour lesquels les résultats futures sont prévisibles

- ◆ **Signaux aléatoires :**

- Leur évolution temporelle est imprévisible



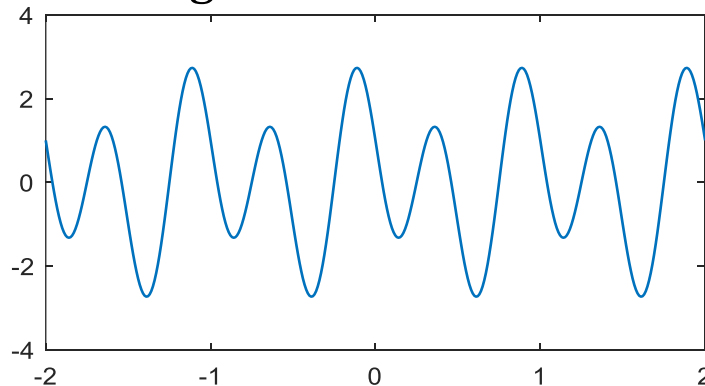
- Signaux porteurs de nouvelles

Classification des signaux

Déterministes – Aléatoires : Modèles, exemples

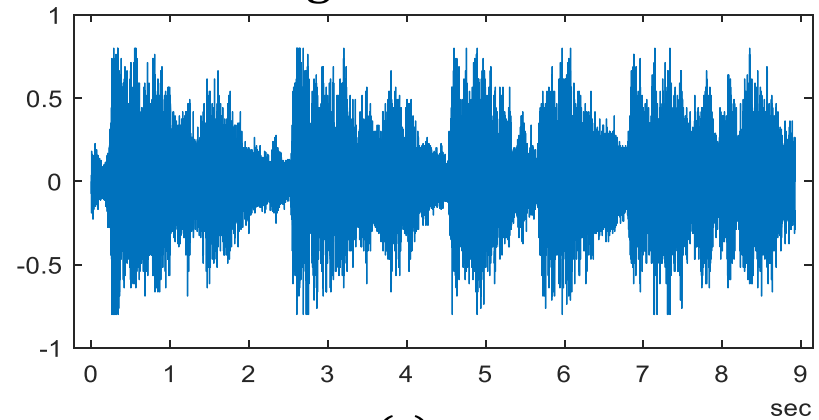
- Un signal déterministe est modélisé par une fonction mathématique ou une distribution
- Un signal aléatoire est modélisé par un processus aléatoire (famille de variables aléatoires)
- Exemples:

Signal déterministe



$$x(t) = \cos(2\pi t) - 2\sin(4\pi t)$$

Signal aléatoire



$$x(t) = \dots\dots$$

Classification des signaux

Classification selon le support – Fini ou infini

- Le support d'un signal est l'intervalle temporel en dehors duquel le signal est toujours nul.

Selon le fait que cet intervalle est fini ou infini, on distingue :

◆ Signaux à support fini

- Exemple :
$$x(t) = \begin{cases} (1 + j)e^{j\pi t/2} & 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

◆ Signaux à support infini

- Exemple :
$$x(t) = \sqrt{2}\cos(20\pi t + \pi/4) \quad -\infty < t < +\infty$$

Classification des signaux

Signaux paires – Signaux impaires

- Un signal $x(t)$ est **paire** s'il coïncide avec sa version retournée $x(-t)$. Ce signal est symétrique par rapport à l'origine des temps (axe des ordonnées)
- Un signal $x(t)$ est **impaire** s'il coïncide avec $-x(-t)$, l'opposé de sa version retournée.
- Décomposition paire-impair : tout signal $x(t)$ peut s'écrire,
$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$
 - ◆ Composante paire $x_p(t)$:
$$x_p(t) = 0.5(x(t) + x(-t))$$
 - ◆ Composante impaire $x_i(t)$:
$$x_i(t) = 0.5(x(t) - x(-t))$$

Classification des signaux

Signaux périodiques

■ Un signal $x(t)$ est dit **périodique** s'il se reproduit identiquement aux multiples d'un intervalle temporel, appelé période, et noté T_0 .

- ◆ Le signal $x(t)$ est défini pour tout t , $-\infty < t < +\infty$
- ◆ Pour tout entier k , la période T_0 (un nombre réel positif) vérifie,

$$x(t + kT_0) = x(t)$$

- ◆ La période de $x(t)$ est la plus petite valeur de $T_0 > 0$ qui rend la périodicité possible
- ◆ Malgré que tout multiple NT_0 , $N > 1$, de T_0 est aussi une période, il ne faut pas le considérer comme la période de $x(t)$.

Classification des signaux

Classification énergétique – Energie et puissance

■ Soit $x(t)$ un signal complexe ou réel, défini sur un support temporel T .

◆ L'énergie de $x(t)$:
$$E_x = \int_{(T)} |x(t)|^2 dt$$

◆ La puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt$$

◆ Si $x(t)$ est périodique de période T_0 , sa puissance moyenne s'exprime :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$$

Classification des signaux

Classification énergétique – Catégories

- Deux catégories de signaux :

- ◆ **Signaux à énergie finie :**

$E_x < +\infty$. Pour ces signaux, la puissance est nulle :

$$P_x = 0 \text{ W.}$$

- Classe de signaux à support temporel **fini**

- ◆ **Signaux à puissance moyenne finie non nulle :**

$0 < P_x < +\infty$. Se sont des signaux à énergie infinie.

- Signaux périodiques

- Signaux aléatoires

Classification des signaux

Classification énergétique – Exercice

Exercice 1 : Classification des signaux

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux définis par :
 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$ où A est une constante.

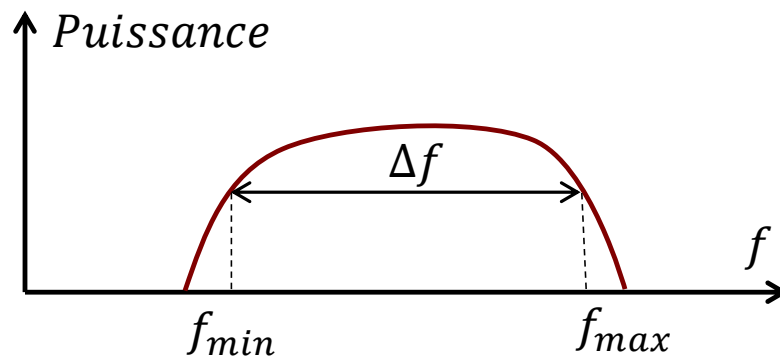
$$y(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \in [0, +\infty[, \alpha > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont déterministes ou aléatoires?
Justifier votre réponse?
- 2) Déterminer la classification énergétique des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$?

Classification des signaux

Classification spectrale

- La classification spectrale d'un signal est déterminée selon la distribution de sa puissance ou de son énergie dans le domaine fréquentiel.
- ◆ La partie, du domaine fréquentiel, occupée par le spectre du signal s'appelle largeur de bande spectrale du signal. Elle est notée Δf .



- ✓ Largeur de bande :
$$\Delta f = f_{max} - f_{min}$$
- ✓ Fréquence moyenne :
$$f_{moy} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

Classification des signaux

Classification spectrale – Catégories

- Signaux à bande étroite : $\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ est faible
- Signaux à bande large : $\frac{\Delta f}{f_{moy}}$ est grand
- Pour les signaux à bandes étroites :

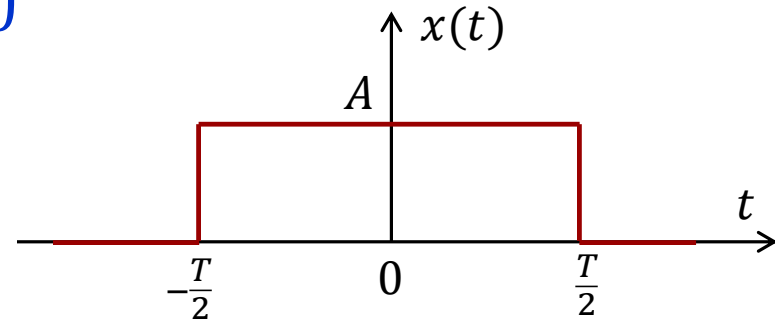
Plage de f_{moy}	Catégorie
$f_{moy} < 250 \text{ KHz}$	Signaux basses fréquences
$250 \text{ KHz} < f_{moy} < 30 \text{ MHz}$	Signaux hautes fréquences
$30 \text{ MHz} < f_{moy} < 300 \text{ MHz}$	Signaux très hautes fréquences
$300 \text{ MHz} < f_{moy} < 3 \text{ GHz}$	Signaux ultra hautes fréquences
$f_{moy} > 3 \text{ GHz}$	Signaux super hautes fréquences

Classification des signaux

Signaux usuels – Signal porte et signal triangulaire

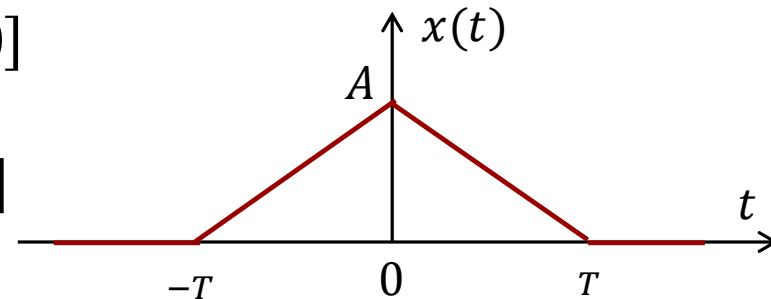
■ Le signal rectangulaire (ou porte)

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



■ Le signal triangulaire

$$x(t) = A \cdot \Lambda_{2T} = \begin{cases} A + \frac{A \cdot t}{T} & \text{si } t \in [-T, 0] \\ A - \frac{A \cdot t}{T} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

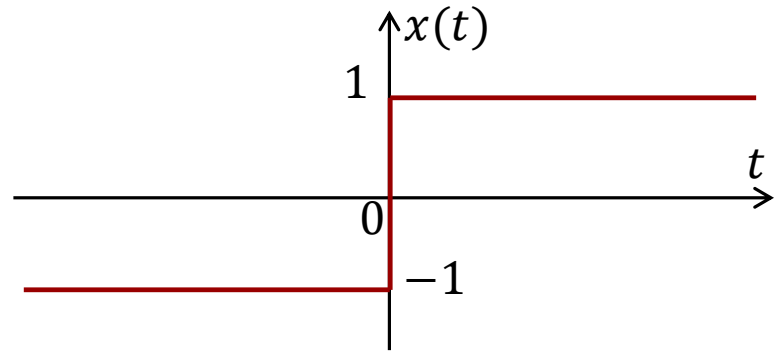


Signaux usuels

Signal signe et signal échelon unité

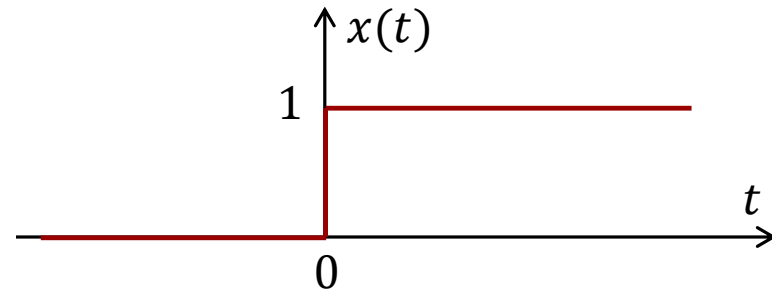
■ Le signal signe

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



■ Le signal échelon unité (signal d'Heaviside)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

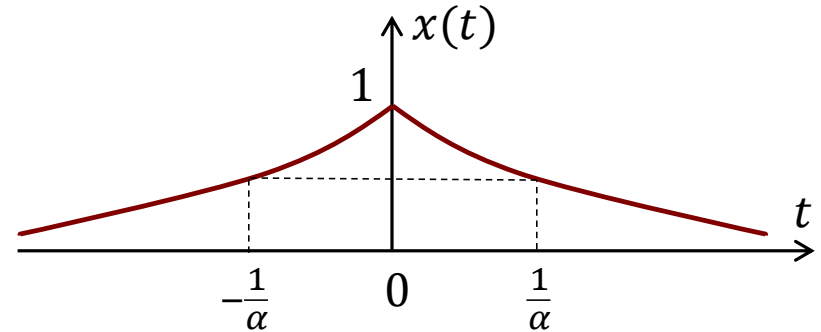


Signaux usuels

Exponentiel symétrique et exponentiel antisymétrique

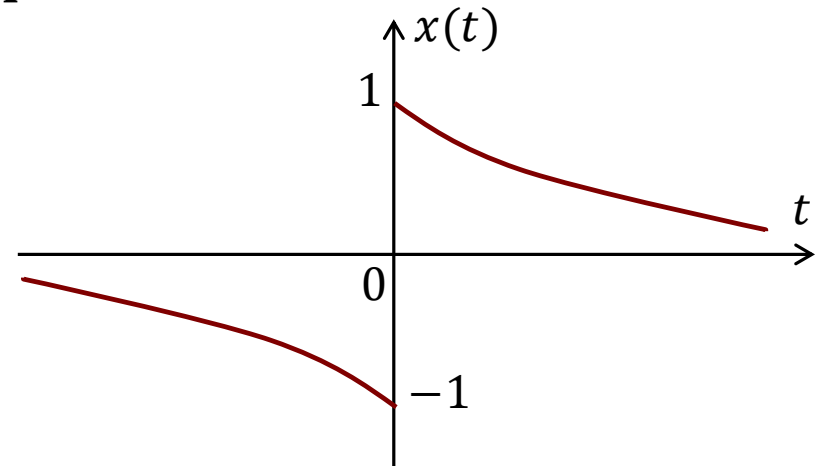
■ Signal exponentiel symétrique

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0 \text{ et } t \in \mathbb{R}$$



■ Signal exponentiel antisymétrique

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases}$$

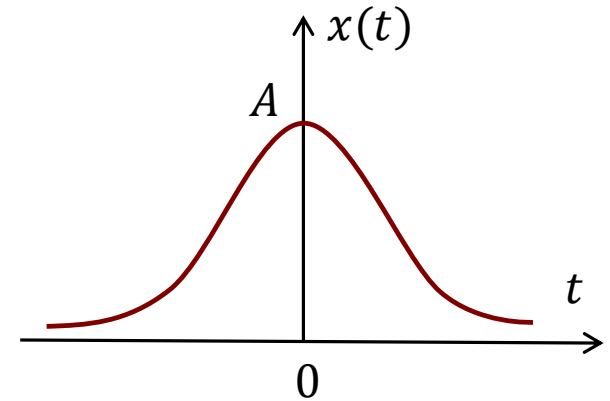


Signaux usuels

Signal gaussien et signal rampe

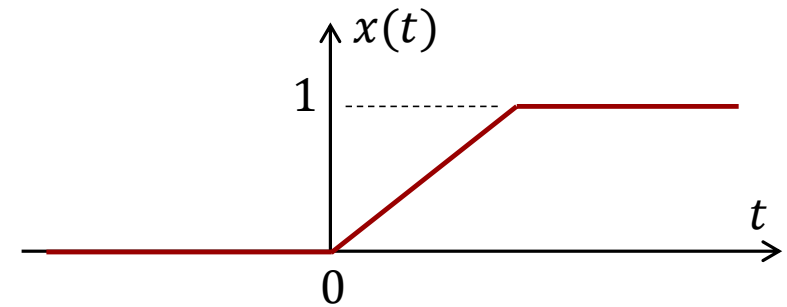
■ Signal gaussien

$$x(t) = Ae^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0, t \in \mathbb{R}$$



■ Signal rampe

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{t_0}, & \text{si } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1, & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

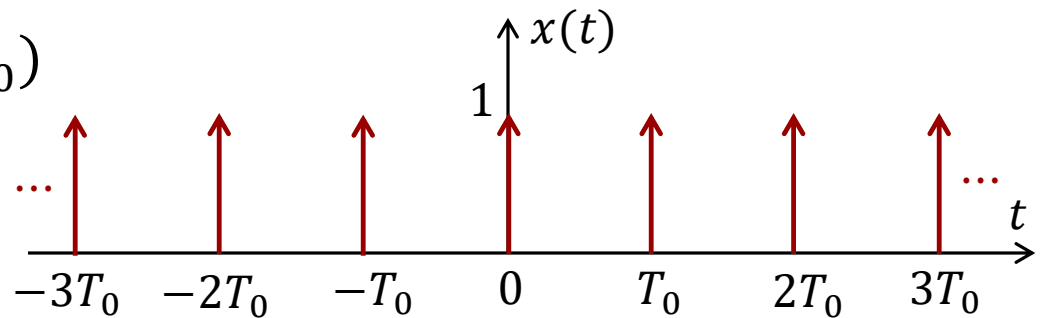


Signaux usuels

Peigne de Dirac et train d'impulsions rectangulaires

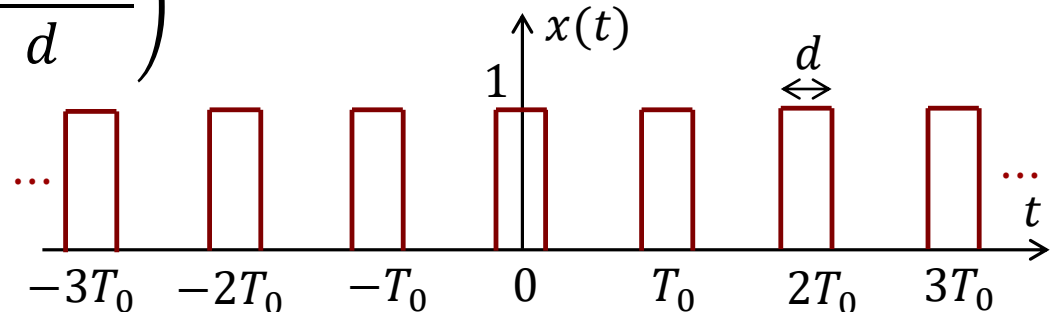
■ Peigne de Dirac

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



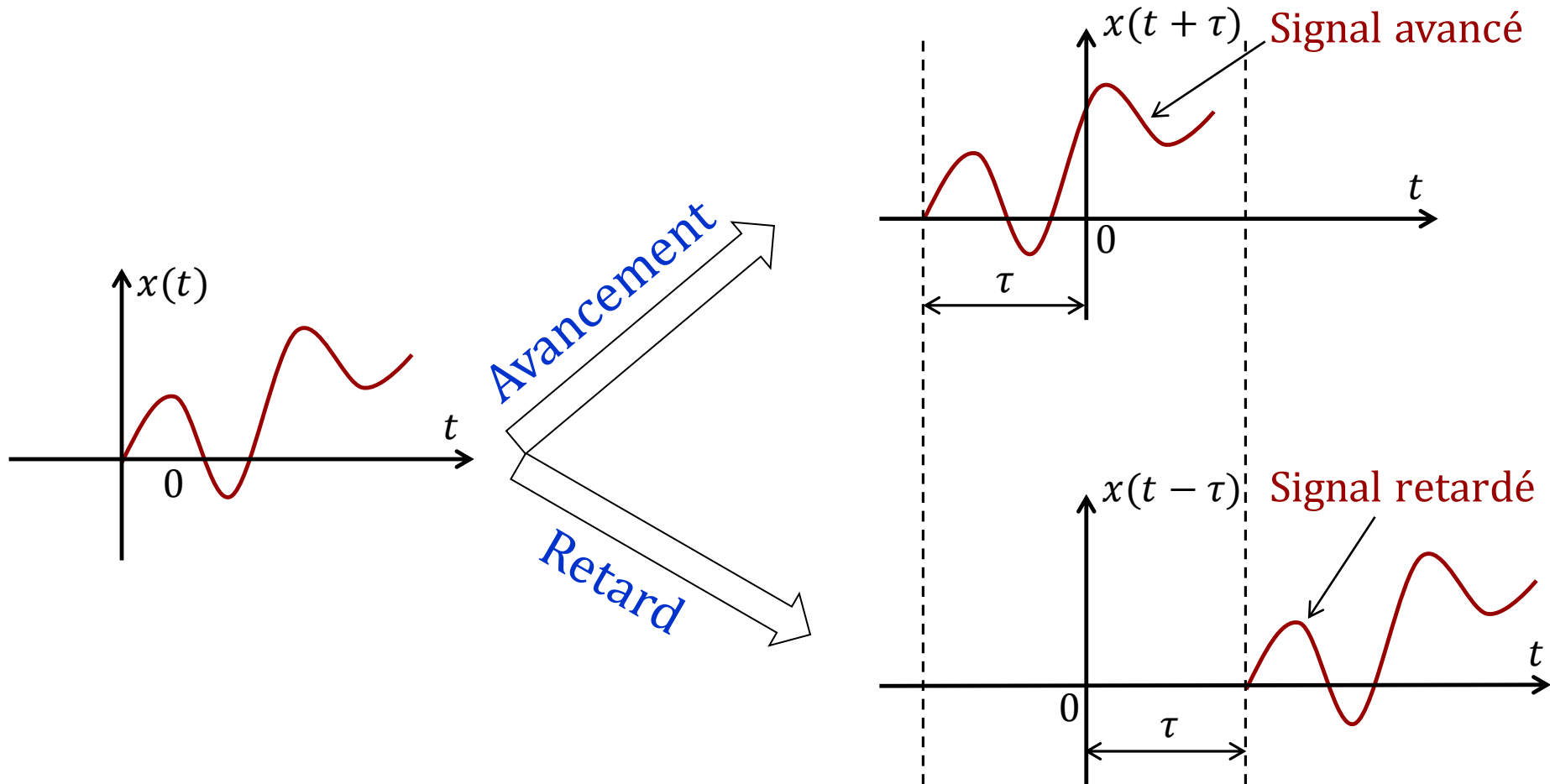
■ Train d'impulsions rectangulaires

$$x(t) = \Pi_{T_0}\left(\frac{t}{d}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_0}{d}\right)$$



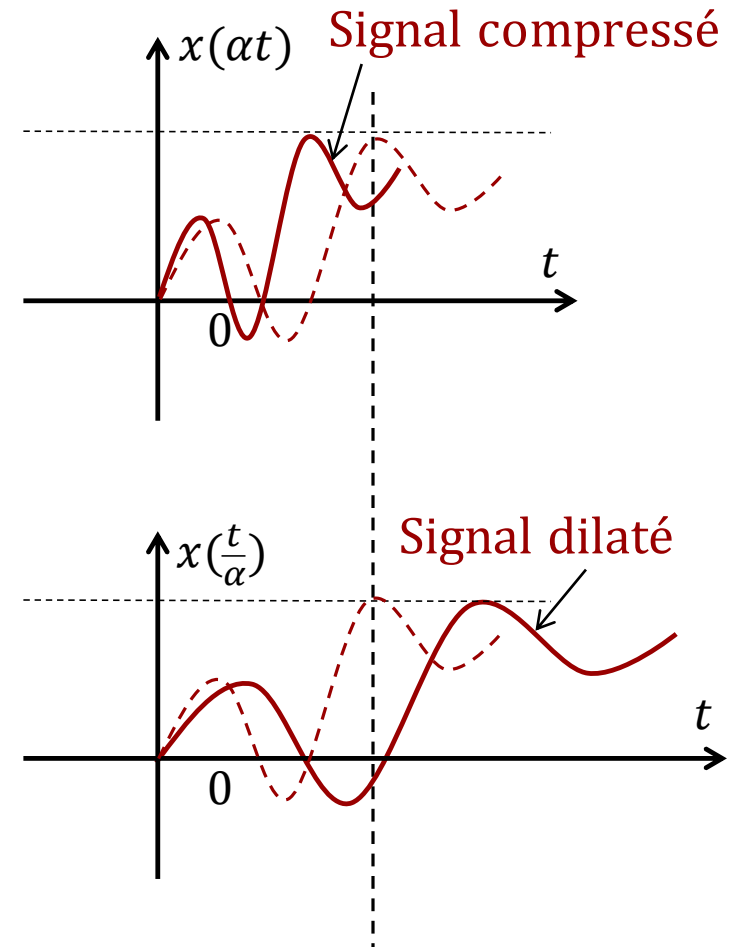
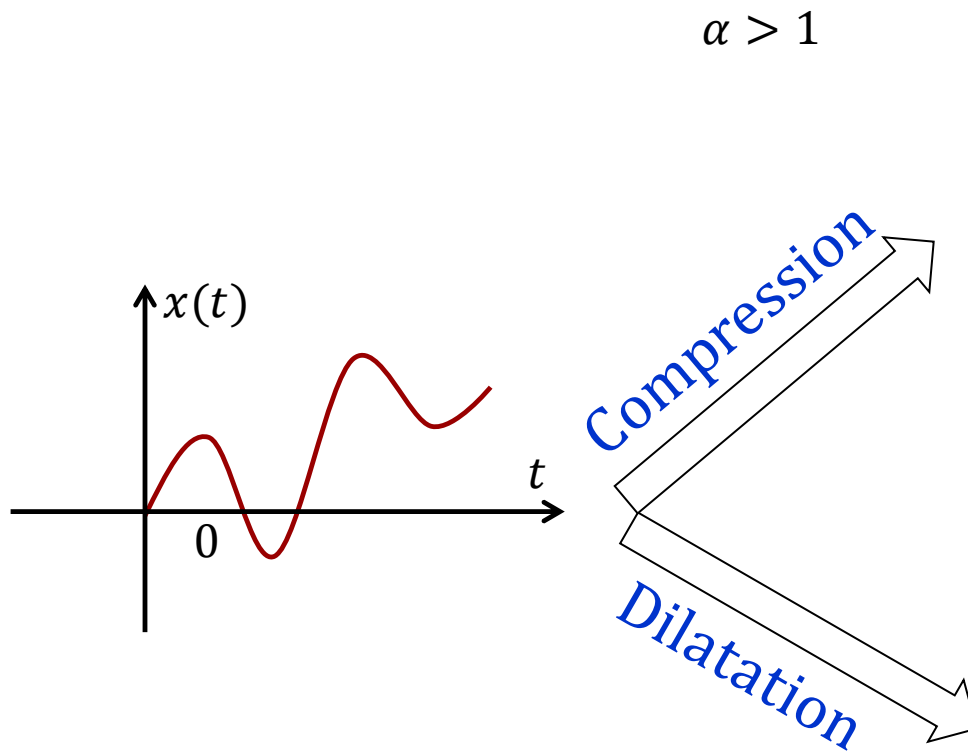
Opérations sur les signaux

Décalage



Opérations sur les signaux

Compression et dilatation



Chapitre 2 :

Signaux déterministes à temps continu

Signaux déterministes à temps continu

- ✓ Représentation fréquentielle et son utilité
- ✓ Développement en séries de Fourier
- ✓ Transformée de Fourier des signaux non périodiques
- ✓ Transformée de Fourier des signaux périodiques
- ✓ Fonctions de corrélation
- ✓ Spectre d'énergie et corrélation
- ✓ Spectre de puissance et corrélation

Représentation fréquentielle

Introduction

■ C'est quoi?

C'est le passage du domaine temporel vers le domaine des fréquences.

Le contenu fréquentiel d'un signal constitue son spectre.

■ Pourquoi?

- Les exponentiels complexes sont des fonctions propres des systèmes linéaires
- Plusieurs opérations sont rendues faciles à implémenter : convolution, corrélation, ...etc.
- Possibilité de faire l'analyse spectrale du signal
- Calcul de la puissance du signal à une fréquence donnée

Représentation fréquentielle

Introduction

■ Comment?

■ Développement en séries de Fourier \Rightarrow Spectre discontinu

- C'est une combinaison linéaire d'exponentiels complexes
- Ne concerne que **les signaux périodiques**

■ Transformée de Fourier \Rightarrow Spectre continu

- C'est une fonction de la variable fréquence f
- Concerne **les signaux périodiques et non périodiques**

Représentation fréquentielle

Développement en série de Fourier

- Soit $x(t)$ un signal périodique de période T_0 . Son développement en séries de Fourier est une combinaison linéaire d'exponentiels complexes, et s'écrit,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{+j2\pi\frac{k}{T_0}t}$$

- ◆ Les X_k sont les coefficients de Fourier de $x(t)$. Ils s'expriment

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} dt$$

- ◆ Généralement, chacun des X_k est un nombre complexe d'amplitude $|X_k|$ et de phase φ_k :

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k}$$

Représentation fréquentielle

Développement en série de Fourier vu autrement

- Le développement en séries de Fourier de $x(t)$ peut s'écrire sous une forme trigonométrique :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(2\pi \frac{k}{T_0} t \right) + b_k \sin \left(2\pi \frac{k}{T_0} t \right) \right)$$

- ◆ Les a_k et b_k ($k = 0, \dots, +\infty$) sont des coefficients réels :

$$a_k = X_k + X_{-k} = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos \left(2\pi \frac{k}{T_0} t \right) dt$$

$$b_k = j(X_k - X_{-k}) = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin \left(2\pi \frac{k}{T_0} t \right) dt$$

Développement en séries de Fourier

Spectre discret

- Le spectre d'un signal périodique est l'ensemble de ses coefficients de Fourier présentés en fonction de la fréquence.
 - ◆ Les coefficients de Fourier sont déterminés à des fréquences discrètes
 - ⇒ **Les signaux périodiques ont un spectre de raies (discret)**
 - ◆ La représentation exponentielle mène à un spectre de raies bilatéral
 - ◆ La représentation sinusoïdale mène à un spectre de raies mono-latéral

Développement en séries de Fourier

Propriétés

- **Linéarité** : soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de même période T_0 . Leurs coefficients de Fourier complexes sont X_k et Y_k ($k = -\infty, \dots, +\infty$) respectivement. Les coefficients de Fourier du signal $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$, où α et β sont des constantes, s'écrivent, $Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$
- **Décalage temporel**: Pour un signal périodique $x(t)$, de période T_0 , les coefficients de Fourier du signal $y(t) = x(t - \tau)$ sont donnés par,
$$Y_k = X_k e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} \tau}$$
- **Echelle temporel**: Si $x(t)$ est périodique de période T_0 , les coefficients de Fourier du signal $y(t) = x(\lambda t)$ sont : $Y_k = X_k$. Les Y_k existent à des fréquences multiples de $f_1 = \frac{\lambda}{T_0}$.

Développement en séries de Fourier

Exemples

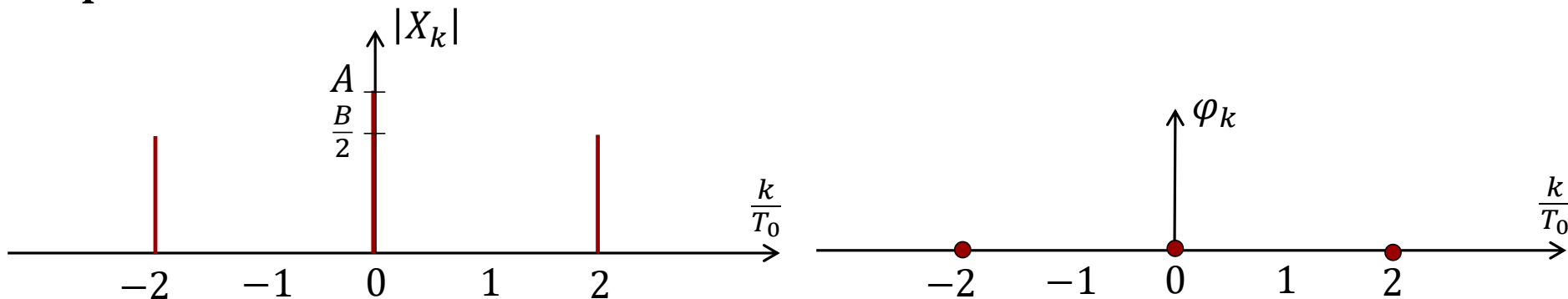
- Exemple 2.1: Le signal $x(t) = A + B.\cos(4\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$, A et B sont deux constantes réelles.

$x(t)$ est périodique de période $T_0 = 0.5$ s.

- Les coefficients de Fourier:

$$X_0 = A, X_{-1} = X_1 = \frac{B}{2}, \text{ et } X_k = 0 \quad \forall k \notin \{-1, 0, 1\}$$

- Spectre de raies:



Développement en séries de Fourier

Exemples

■ Exemple 2.2 : Train d'impulsions rectangulaires décalés de $\frac{d}{2}$

$$x(t) = A\Pi_{T_0}\left(t - \frac{d}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

$x(t)$ est un signal périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$.

■ Les coefficients de Fourier:

$$X_k = \frac{Ad}{T_0} \operatorname{sinc}(\pi k f_0 d) e^{-j\pi k f_0 d}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Développement en séries de Fourier

Formule de Parseval

Formule de Parseval pour les séries de Fourier:

Pour un signal périodique $x(t)$ de période T_0 , la puissance moyenne P_x vérifie :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Ou

$$P_x = X_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2$$

✓ La formule de Parseval traduit la conservation de puissance en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel.

Développement en séries de Fourier

Formule de Parseval - Exemple

■ Exemple 2.3 : Vérifions la formule de Parseval pour le signal de l'exemple 2.1:

■ Puissance moyenne dans le domaine temporel:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (A + B \cdot \cos(4\pi t))^2 dt$$

$$\Rightarrow P_x = A^2 + \frac{B^2}{2}$$

■ Puissance moyenne dans le domaine fréquentiel:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A^2 + \frac{B^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_x = A^2 + \frac{B^2}{2}$$

La formule de Parseval est vérifiée pour $x(t)$

Transformée de Fourier

Signaux non périodiques

- La transformée de Fourier est une extension du développement en séries de Fourier au cas de période infinie.
- Considérons un signal $x(t)$ non périodique à énergie finie.
 - ◆ La transformée de Fourier $X(f)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- ◆ $x(t)$ par transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

Transformée de Fourier

Spectre continu

- L'existence de la transformée de Fourier est assurée par le fait que le signal est d'énergie finie
- La transformée de Fourier \Rightarrow Spectre continue (fonction de la variable f).
- Le spectre $X(f)$ est généralement complexe :

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

- Partie réelle :

$$\text{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt$$

- Partie Imaginaire :

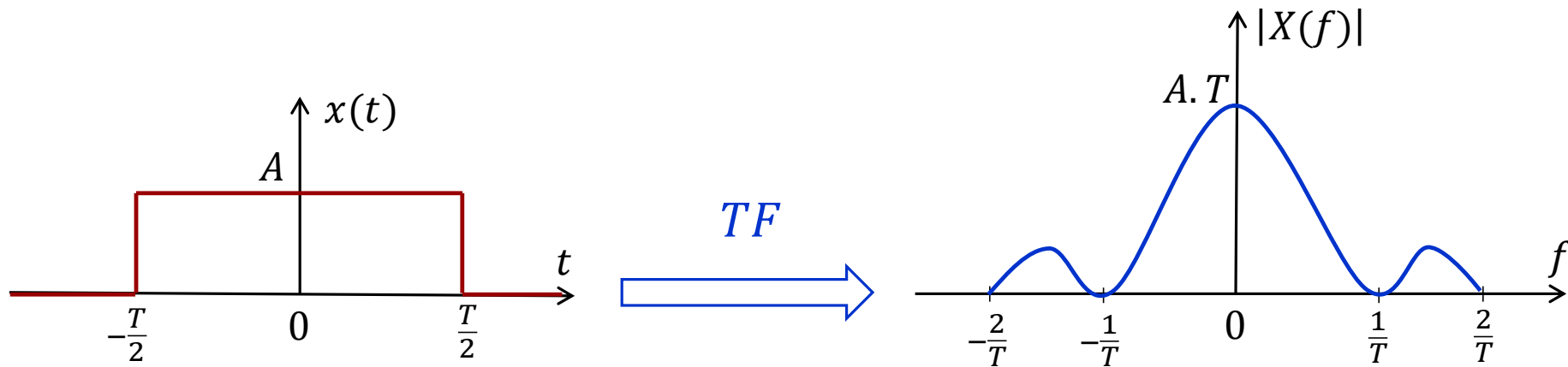
$$\text{Im}(X(f)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

Transformée de Fourier

Exemple

■ Exemple 2.4: TF du signal porte $x(t) = A \cdot \text{rect}_T\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = A \cdot T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$$



Transformée de Fourier

Propriétés de parité

Le signal $x(t)$	Transformée de Fourier $X(f)$
Réel pair	Réelle paire
Réel impair	Imaginaire impaire
réel	Complexe $\left\{ \begin{array}{l} \text{partie réelle paire} \\ \text{partie imaginaire impaire} \end{array} \right.$
Imaginaire pair	Imaginaire paire
Imaginaire impair	Réelle impaire
Imaginaire	Complexe $\left\{ \begin{array}{l} \text{partie réelle impaire} \\ \text{partie imaginaire paire} \end{array} \right.$

Transformée de Fourier

Propriétés: Linéarité, transposition, conjugaison, décalage temporel

■ Considérons les signaux $x(t)$, $x_1(t)$, et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier sont notées $X(f)$, $X_1(f)$, et $X_2(f)$ respectivement.

◆ **Linéarité:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

◆ **Transposition:**

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

◆ **Conjugaison:**

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

◆ **Décalage temporel:**

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Transformée de Fourier

Propriétés : Décalage fréquentiel, changement d'échelle, dualité

■ Décalage fréquentiel :

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

■ Changement d'échelle : pour $a \neq 0$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- ◆ $a > 1$: Compression temporelle \rightarrow Dilation fréquentielle
- ◆ $a < 1$: Dilatation temporelle \rightarrow Compression fréquentielle

■ Dualité :

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Transformée de Fourier

Propriétés : Dérivation, intégration, convolution, multiplication

■ Dérivation :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

■ Intégration :

$$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \leftrightarrow (j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$$

■ Convolution :

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

■ Multiplication :

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

Transformée de Fourier

Transformées de quelques signaux usuels

Signal temporel	Transformée de Fourier
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$\delta(t + t_0)$	$e^{+j2\pi f t_0}$
$e^{-j2\pi f_c t}$	$\delta(f + f_c)$
$e^{+j2\pi f_c t}$	$\delta(f - f_c)$
$e^{j(2\pi f_c t + \phi)}$	$e^{j\phi} \delta(f - f_c)$

Transformée de Fourier

Transformées des signaux $\cos(2\pi f_0 t)$ et $\sin(2\pi f_0 t)$

■ Pour le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Nous avons, $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$. Donc,

$$X(f) = TF(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

■ Pour le signal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

Nous avons, $\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$. Donc,

$$X(f) = TF(\sin(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

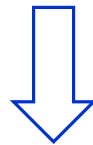
Transformée de Fourier

Formule de Parseval

Formule de Parseval pour la transformée de Fourier:

Pour un signal $x(t)$ d'énergie finie, l'énergie E_x vérifie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$



La formule de Parseval traduit la conservation de l'énergie en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel.

Transformée de Fourier

Formule de Parseval - Exemple

■ Exemple 2.5: le signal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$

◆ L'énergie dans le domaine temporel:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

◆ L'énergie dans le domaine fréquentiel:

On a: $X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \cdot \left[\arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

La formule de Parseval est vérifiée pour $x(t)$

Spectre d'énergie et corrélation

Fonctions de corrélation

■ Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergies finies.

◆ La fonction d'inter-corrélation

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

◆ La fonction d'autocorrélation ($x(t) = y(t)$)

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

■ **Utilité:**

- ◆ Ressemblance de deux signaux
- ◆ Détection des cibles dans les systèmes radar
- ◆ Détection des signaux périodiques dans un bruit

Spectre d'énergie et corrélation

Fonctions de corrélation - Propriétés

■ Symétrie de l'inter-corrélation:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

■ Symétrie hermitienne de l'autocorrélation:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}^*(\tau)$$

■ Maximum à l'origine ($\tau = 0$):

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) = E_x$$

- ✓ La fonction d'autocorrélation est maximale à l'origine.
- ✓ Le maximum correspond à l'énergie du signal.

Spectre d'énergie et corrélation

Spectre d'énergie

Définition 2.1: Densité spectrale d'énergie

La densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ d'un signal $x(t)$, à énergie finie, est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(f) = TF(R_{xx}(\tau)) = |X(f)|^2$$

Définition 2.2: Densité inter-spectrale d'énergie

La densité inter-spectrale d'énergie $S_{xy}(f)$ de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, d'énergies finies, est la transformée de Fourier de leur fonction d'inter-corrélation $R_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(f) = TF(R_{xy}(\tau)) = X(f)Y^*(f)$$

Transformée de Fourier des signaux périodiques

Définition

- Spectre d'un signal périodique par la transformée de Fourier
- Soit $x(t)$ un signal périodique de période T_0 . Si $x_0(t)$ est la tronquée de $x(t)$ sur $[0, T]$, alors,

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0)$$

- Transformée de Fourier:

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0(kf_0) \delta(f - kf_0)$$

- ◆ Les quantités $\frac{1}{T_0}X_0(kf_0)$ sont les coefficients de Fourier de $x(t)$
- ◆ $X(f)$ est un **spectre de raies**

Spectre de puissance et corrélation

Fonctions de corrélation – Inter-corrélation

- **Fonction d'inter-corrélation:** Pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de puissance finie,

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t - \tau) dt$$

- Si $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de même période $T_0 = \frac{1}{f_0}$:

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot Y_k^* \cdot e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

◆ $R_{xy}(\tau)$ est périodique de période T_0

Exercice: Traiter le cas où $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période T_1 et T_2 respectivement?

Spectre de puissance et corrélation

Fonctions de corrélation – Autocorrélation

■ Fonction d'autocorrélation:

Pour un signal $x(t)$ de puissance moyenne finie:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x^*(t - \tau) dt$$

■ Si le signal $x(t)$ est périodique de période T_0 ,

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T_0} \tau}$$

■ La puissance moyenne:

$$P_x = R_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Spectre de puissance et corrélation

Densité spectrale de puissance

Définition 2.3: Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ d'un signal $x(t)$, de puissance finie, est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$. Si $x(t)$ est périodique de période T_0 ,

$$S_{xx}(f) = TF(R_{xx}(\tau)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

■ Relation avec la puissance moyenne:

$$P_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

Chapitre 3

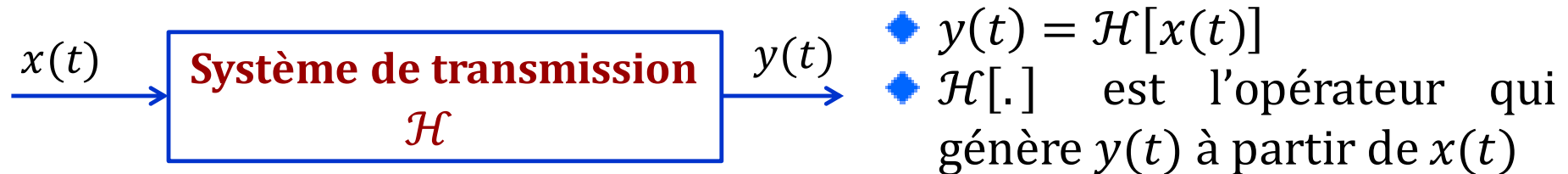
Transmission des signaux déterministes continus à travers un système linéaire

Système de transmission

Définition

Définition 3.1: Système de transmission

- Un système de transmission transforme un signal $x(t)$, à son entrée, en un signal $y(t)$
- Le signal de sortie $y(t)$ dépend du signal d'entrée et du modèle du système de transmission



- La majorité des systèmes de transmission et de filtrage sont modélisés par des systèmes linéaires temporellement invariants (ou stationnaires)

Systèmes linéaires temporellement invariants

Définition

Soit un système qui transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal $y(t) = \mathcal{H}[x(t)]$.

- ◆ Le système est linéaire si, pour deux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] &= \alpha \mathcal{H}[x_1(t)] + \beta \mathcal{H}[x_2(t)] \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes.

- ◆ Le système est temporellement invariant si,

$$\mathcal{H}[x(t - \tau)] = y(t - \tau)$$

Un système vérifiant les deux propriétés précédentes est dit un système linéaire temporellement invariant (LTI)

Systèmes LTI

Réponse impulsionnelle

Définition 3.2: Réponse impulsionnelle d'un système LTI

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système LTI est définie comme étant la réponse du système à une impulsion $\delta(t)$:

$$h(t) = \mathcal{H}[\delta(t)]$$

- Si $h(t)$ est nulle pour $t < 0$, on dit que le système est causal
- La réponse à une combinaison d'impulsions:

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \mathcal{H}\left[\sum_{n=1}^N \alpha_n \delta(t - \tau_n)\right] = \sum_{n=1}^N \alpha_n h(t - \tau_n)$$

Systèmes LTI

Réponse à une entrée quelconque

Réponse d'un système LTI à une entrée quelconque

La réponse $y(t)$ d'un système LTI, de réponse impulsionnelle $h(t)$, à une entrée quelconque $x(t)$ est le produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

- Si le système est causal, $h(t - \lambda) = 0$ pour $t < \lambda$
- Si le signal d'entrée est causal, $x(\lambda) = 0$ pour $\lambda < 0$

Systèmes LTI

Fonction de transfert ou réponse fréquentielle

Définition 3.3: Réponse fréquentielle d'un système LTI

Soit un système LTI, de réponse impulsionnelle $h(t)$, qui transforme un signal $x(t)$, à son entrée, en un signal $y(t)$. La réponse fréquentielle $H(f)$ du système s'écrit:

$$H(f) = TF(h(t)) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

■ Réponse impulsionnelle:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

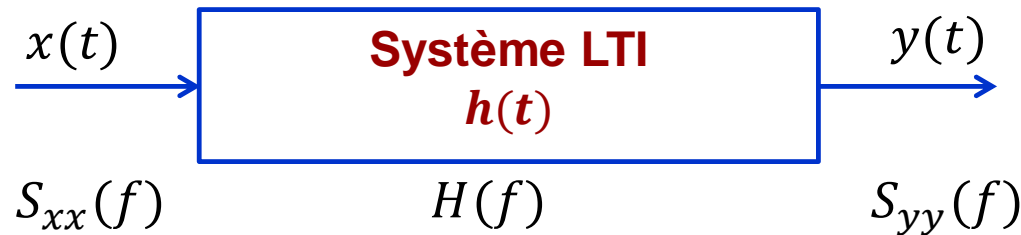
■ Signal de sortie:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) H(f) e^{j2\pi ft} df$$

Systèmes LTI

Relation entrée-sortie des densités spectrales

- Considérons un système LTI de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soit $y(t)$ la réponse du système à un signal d'entrée $x(t)$. Les densités spectrales de $x(t)$ et $y(t)$ sont $S_{xx}(f)$ et $S_{yy}(f)$.



$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{xx}(f)$$

Cette formule est valable pour les densités spectrales d'énergie et de puissance.

- Si $x(t)$ est d'énergie finie, $y(t)$ est d'énergie finie
- Si $x(t)$ est de puissance finie, $y(t)$ est de puissance finie

Systèmes LTI

Réponse à des signaux périodiques

- Pour un signal d'entrée $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, la réponse $y(t)$ du système est :

$$y(t) = H(f_0)Ae^{j2\pi f_0 t}$$

- D'une manière générale, si

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t},$$

Alors,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k H(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t}$$

■ Le système LTI a transformé l'amplitude et la phase du signal $x(t)$

Transmission des signaux dans un système LTI

Transmission sans distorsion

- Une transmission à travers un système LTI est dite sans distorsion si le système introduit la même atténuation et décalage temporelle pour toutes les fréquences du signal d'entrée $x(t)$.
- Un système LTI sans distorsion reproduit la même forme du signal d'entrée à sa sortie

- ◆ Le signal de sortie:

$$y(t) = H_0 x(t - \tau) \text{ où } H_0 \text{ et } \tau \text{ sont des constantes}$$

- ◆ La réponse fréquentielle:

$$H(f) = H_0 e^{-j2\pi f\tau}$$

La réponse fréquentielle d'un système LTI sans distorsion a une amplitude constante et une phase linéaire avec la fréquence.

Filtres

Définition

Définition 3.4: Un filtre

Un filtre est un système linéaire qui permet de limiter le spectre d'un signal à une certaine bande de fréquences.

- La réponse fréquentielle d'un filtre est caractérisée par la présence de deux bandes : la bande passante et la bande de rejection
- Trois types de filtres:
 - ◆ Filtre passe-bas
 - ◆ Filtre passe-haut
 - ◆ Filtre passe-bande

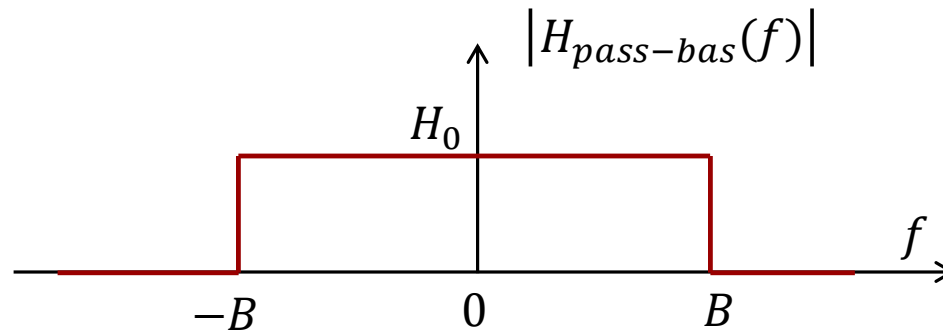
Filtres

Filtre idéal – Filtre passe-bas

■ La réponse fréquentielle d'un filtre idéal est constante sur la bande passante, et nulle pour les autres fréquences

■ Filtre idéal passe-bas:

$$H_{pass-bas}(f) = H_0 \text{rect}_{2B} \left(\frac{f}{2B} \right) e^{-j2\pi f t_0}$$

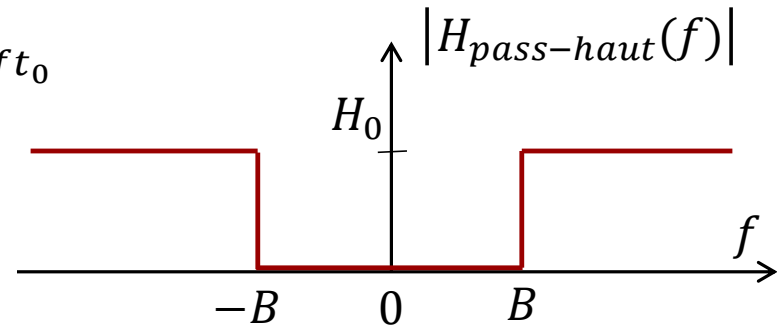


Filtres

Filtre idéal passe-haut, filtre idéal passe-bande

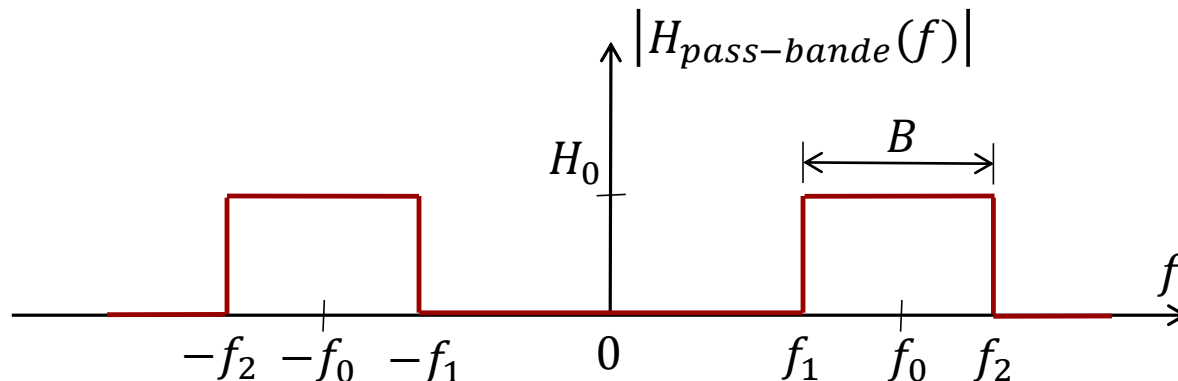
■ Filtre idéal passe-haut:

$$H_{\text{passe-haut}}(f) = H_0 \left[1 - \text{rect}_{2B} \left(\frac{f}{2B} \right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$



■ Filtre idéal passe-bande:

$$H_{\text{passe-bande}}(f) = H_0 \left[\text{rect}_B \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \text{rect}_B \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \right] e^{-j2\pi f t_0}$$



Filtres

Filtre idéal - Bande passante

- Pour un filtre idéal passe-bas, la bande passante B est égale à la fréquence de coupure f_c : $B = f_c$
- La bande passante d'un filtre idéal passe-haut n'est pas définie
- Dans le cas d'un filtre idéal passe-bande, la bande passante s'exprime:

$$B = f_2 - f_1$$

- La fréquence centrale d'un filtre passe bande: $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$
 - ◆ $B \ll f_0 \Rightarrow$ Filtre passe-bande à bande étroite
 - ◆ $B \gg f_0 \Rightarrow$ Filtre passe-bande à bande large (ou large bande)

Filtres

Filtre non idéal

Problème

Un filtre idéal n'est pas causal. Il est donc irréalisable.

Solution

Approximation par un filtre non idéal (ou réalisable)

■ Exemples de filtres réalisables:

- ◆ Filtre de Butterworth
- ◆ Filtre de Chebyshev
- ◆ Filtre de Bessel
- ◆ ...etc.

Filtres

Filtre non idéal – Bande passante

- La bande passante d'un filtre passe-bas réalisable (non idéal) est la fréquence pour laquelle l'amplitude du spectre $H(f)$ vérifie:

$$|H(f)| = \frac{H(0)}{\sqrt{2}}$$

- Pour un filtre passe-bande réalisable, la bande passante est la différence des fréquences Δf pour laquelle l'amplitude du spectre $H(f)$ vérifie:

$$|H(\Delta f)| = \frac{H(f_0)}{\sqrt{2}}$$

Chapitre 4

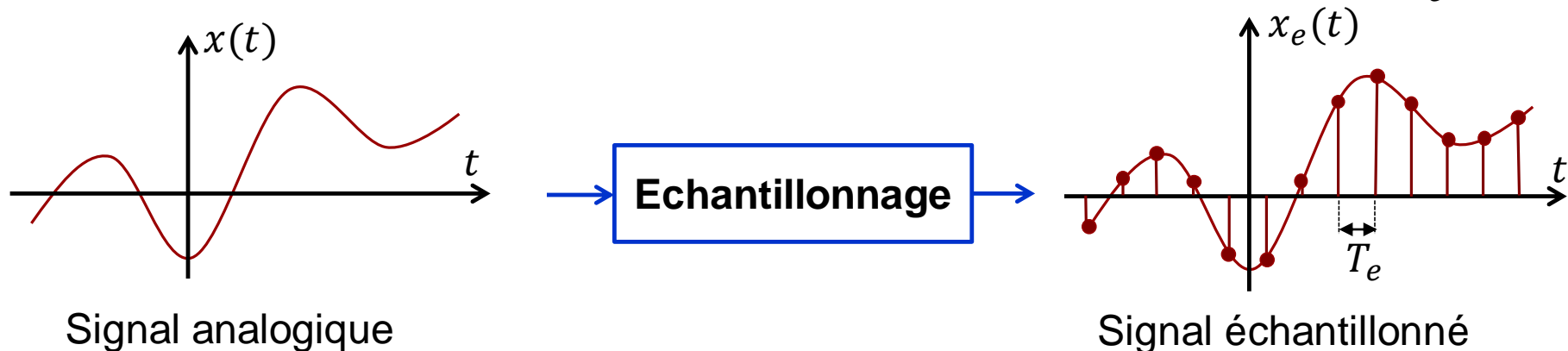
Echantillonnage

Echantillonnage

Définition

L'échantillonnage consiste à prélever des échantillons, d'un signal analogique, à des intervalles de temps réguliers.

- ◆ Le signal qui résulte de l'échantillonnage s'appelle **le signal échantillonné**
- ◆ La période séparant deux échantillons consécutifs s'appelle **la période d'échantillonnage** notée T_e
- ◆ La **fréquence d'échantillonnage** est définie par : $F_e = \frac{1}{T_e}$



Echantillonnage

Utilité, problématique

■ Utilité:

- ◆ Réduction du volume de données
- ◆ Adéquation aux traitements numériques
- ◆ Transmission numérique des signaux analogiques

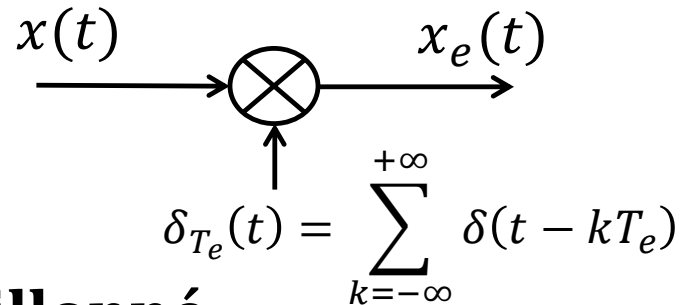
■ Problématique:

- ◆ Quelle est la condition sur le signal analogique $x(t)$ et la fréquence d'échantillonnage pour préserver l'information?
- ◆ Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons?

Echantillonnage

Echantillonnage idéal - Principe

- L'échantillonnage idéal consiste à multiplier le signal analogique $x(t)$ par le signal peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$



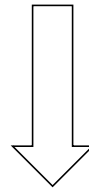
- Le signal échantillonné

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

Echantillonnage

Echantillonnage idéal - Principe

- Il est évident que plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, plus le signal échantillonné $x_e(t)$ devient proche du signal analogique $x(t)$
- Pour une meilleur efficacité d'échantillonnage, il est judicieux d'utiliser une fréquence d'échantillonnage la plus faible possible



Question: Quelle est la **fréquence d'échantillonnage minimale** qui permet d'échantillonner $x(t)$ **sans perte d'information?**

Echantillonnage idéal

Spectre du signal échantillonné

- Transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$:

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = TF(x(t) \cdot \delta_{T_e}(t))$$

En appliquant la propriété de multiplication de la TF, on aura,

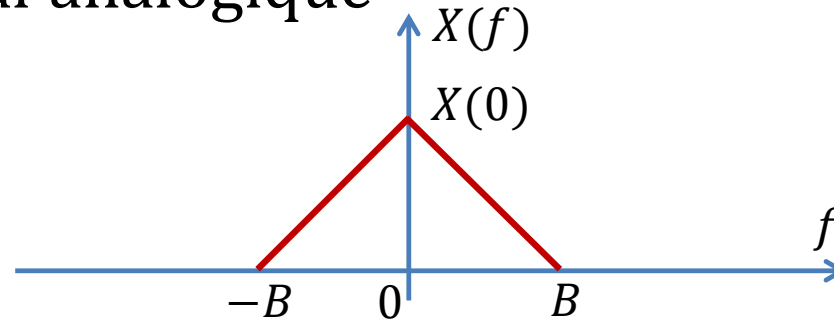
$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) * TF(\delta_{T_e}(t)) \\ &= X(f) * \left[\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \right] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

Le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné est le spectre $X(f)$ du signal analogique pondéré par $\frac{1}{T_e}$ et périodiquement répété aux multiples de F_e .

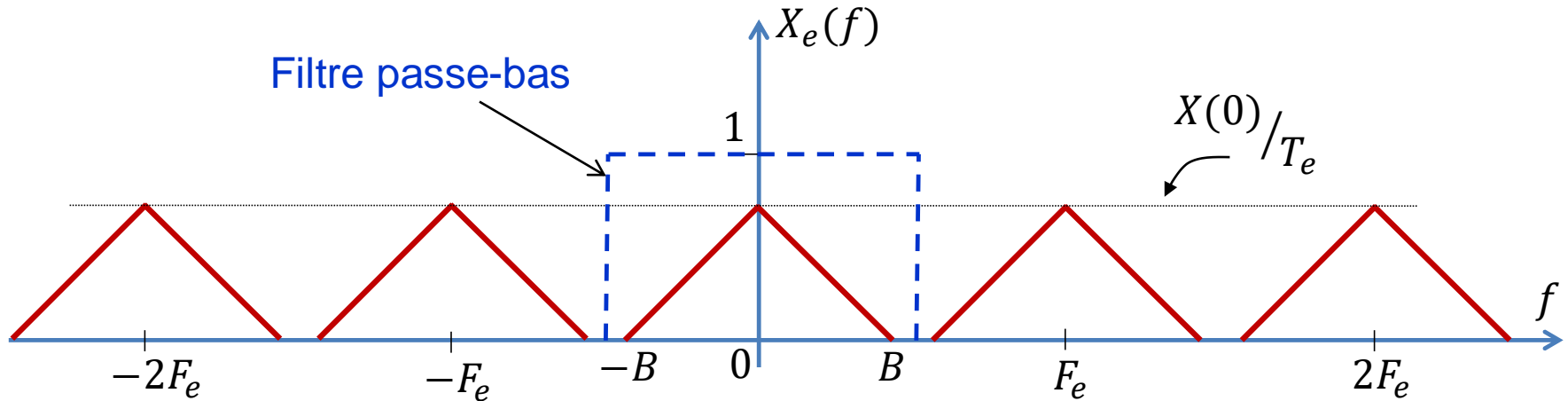
Echantillonnage idéal

Spectre du signal échantillonné - Représentation

■ Spectre du signal analogique



■ Spectre du signal échantillonné



Echantillonnage idéal

Spectre du signal échantillonné - Analyse

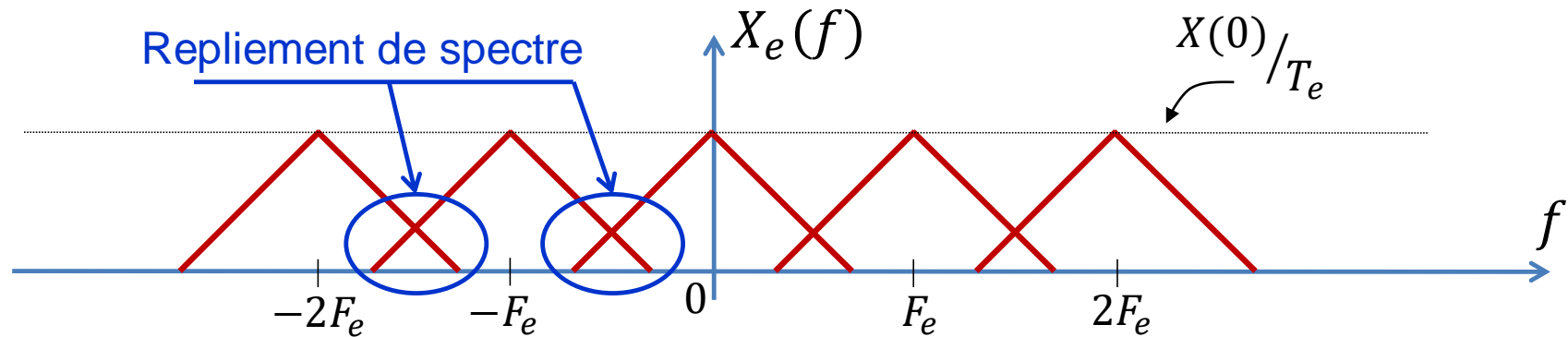
- Pour les fréquences autour de la fréquence zéro, le spectre du signal échantillonné est le même que celui du signal analogique.
- Le signal $x(t)$ peut être retrouvé à partir de $x_e(t)$ par un filtre idéal passe-bas de bande passante B
 - ◆ Condition: F_e doit être suffisamment élevée pour éviter le chevauchement des copies de $X(f)$
- D'après le spectre $X_e(f)$, il est facile de voir que F_e doit vérifier $F_e \geq 2B$ pour éviter le chevauchement de spectre.

La fréquence d'échantillonnage minimale est $2B$

Echantillonnage idéal

Spectre du signal échantillonné - Analyse

- Lorsque $F_e < 2B$, les copies de $X(f)$ se chevauchent. On parle de repliement (ou recouvrement) de spectre (aliasing en anglais)



- Si la fréquence d'échantillonnage $F_e < 2B$, il est impossible de retrouver le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons

Echantillonnage idéal

Théorème de l'échantillonnage

Théorème 4.1: Théorème de l'échantillonnage

Un signal $x(t)$ dont le spectre $X(f)$ est nulle pour $|f| > f_{max}$ est complètement décrit par les échantillons prises à des instants uniformément séparés par $T_e \leq \frac{1}{2 \cdot f_{max}}$.

La fréquence d'échantillonnage minimale $F_N = 2 \cdot f_{max}$ s'appelle **la fréquence de Nyquist**.

- Le signal $x(t)$ peut être reconstruit à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ en utilisant un filtre idéal passe-bas de bande passante W tel que,

$$f_{max} \leq W \leq F_e - f_{max}$$

Echantillonnage idéal

Théorème de l'échantillonnage - Exemple

■ Exemple 4.1: Considérons l'échantillonnage du signal analogique défini par:

$$x(t) = 5 + \cos(500\pi t) - 3\sin^2(700\pi t)$$

◆ Les fréquences contenues dans le signal:

0 Hz, 250 Hz, et 700 Hz

◆ La fréquence maximale : $f_{max} = 700 \text{ Hz}$

◆ La fréquence de Nyquist: $F_N = 2 \cdot f_{max} = 1400 \text{ Hz}$

Echantillonnage idéal

Reconstruction du signal analogique

■ **Objectif** : reconstruire le signal $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(kT_e), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

■ Transformée de Fourier du signal échantillonné

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi k f T_e}$$

■ Pour $-B \leq f \leq B$, $X(f) = \frac{X_e(f)}{F_e}$, D'où

$$X(f) = \frac{1}{F_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi k f T_e}$$

Echantillonnage idéal

Reconstruction du signal analogique

■ Transformée de Fourier inverse de $X(f)$:

$$\begin{aligned} x(t) = TF^{-1}(X(f)) &= \frac{1}{F_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \int_{-B}^B e^{j2\pi f(t-kT_e)} df \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \frac{\sin(2\pi B(t-kT_e))}{\pi F_e(t-kT_e)} \end{aligned}$$

■ Pour $F_e = 2B$

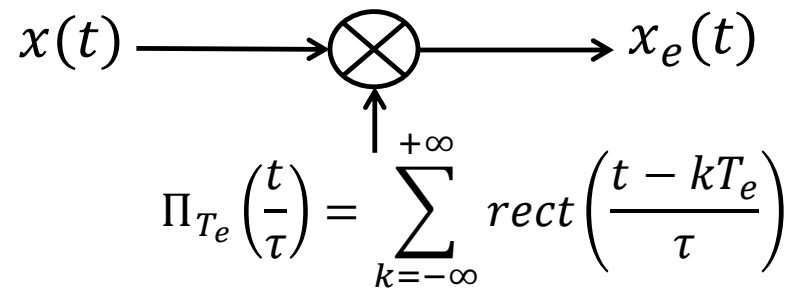
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}(\pi(2Bt - k))$$

C'est la formule d'interpolation

Echantillonnage réel (ou naturel)

Principe

- L'échantillonnage réel consiste à multiplier le signal analogique par le train d'impulsions rectangulaires $\Pi_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right)$


$$x(t) \longrightarrow \bigotimes \longrightarrow x_e(t)$$
$$\Pi_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT_e}{\tau} \right)$$

- Le signal $\Pi_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right)$ est périodique de période T_e ,

$$\Pi_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{j2\pi k F_e t}$$

où D_k sont les coefficients de Fourier $D_k = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\pi k F_e \tau)$

Echantillonnage naturel

Le signal échantillonné et son spectre

■ Le signal échantillonné $x_e(t)$:

$$x_e(t) = x(t) \cdot \Pi_{T_e} \left(\frac{t}{\tau} \right) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT_e}{\tau} \right)$$

■ Le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné:

$$X_e(f) = TF(x_e(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k TF(x(t) \cdot e^{j2\pi k F_e t})$$

$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k X(f - kF_e)$$

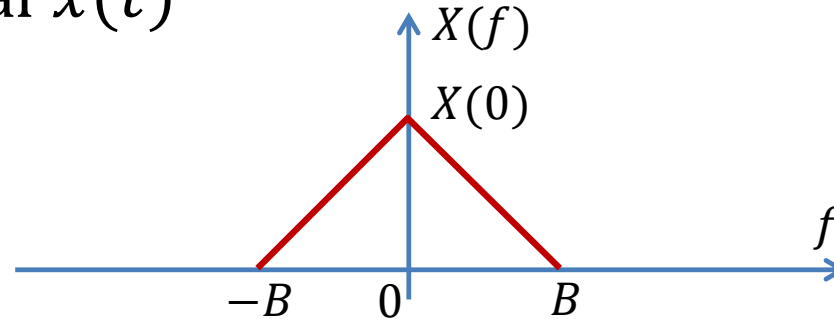
✓ $X_e(f)$ est une périodisation de $X(f)$ aux multiples de F_e

✓ La $k^{\text{ème}}$ copie de $X(f)$, dans $X_e(f)$, est pondérée par D_k

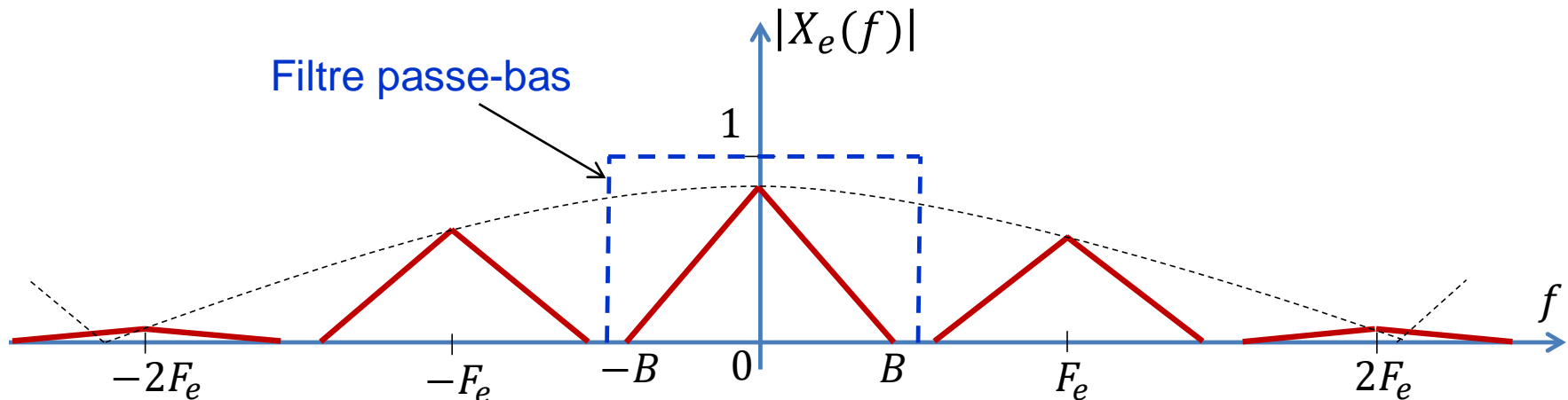
Echantillonnage naturel

Spectre du signal échantillonné - schématiquement

■ Spectre du signal $x(t)$



■ Spectre du signal échantillonné

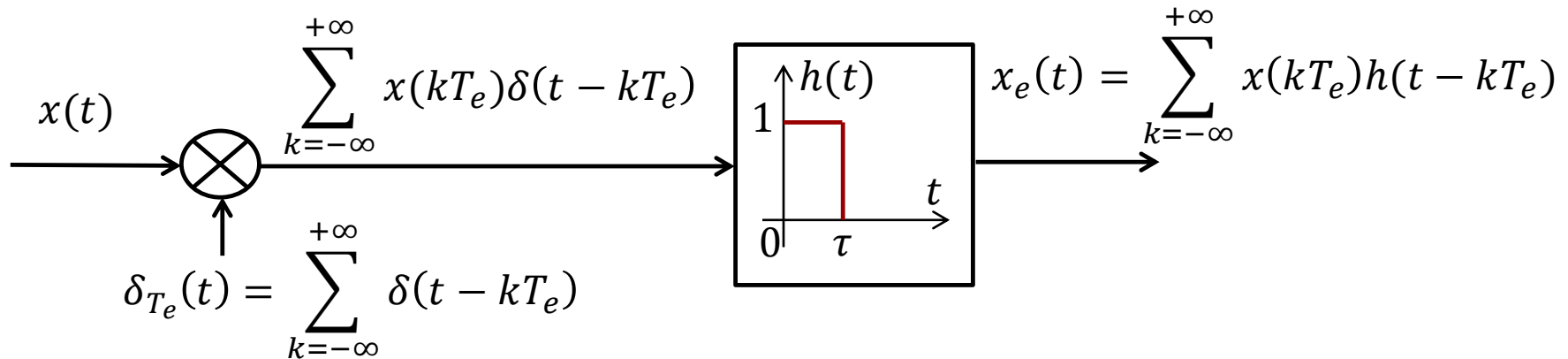


Echantillonnage maintien

Principe

■ Deux opérations sont nécessaires :

- ◆ Echantillonnage instantané du signal analogique $x(t)$ chaque T_e secondes. La fréquence d'échantillonnage doit vérifier la condition de Nyquist
- ◆ Maintien de la valeur de chaque échantillon pendant une durée τ secondes.



Echantillonnage maintien

Spectre du signal échantillonné

■ Transformée de Fourier de $x_e(t)$:

$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF(x_e(t)) = TF[x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)] \cdot TF[h(t)] \\ &= \frac{1}{T_e} H(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

où $H(f) = \tau \cdot \text{sinc}(\pi f \tau) e^{-j\pi f \tau}$

- ◆ C'est le spectre du signal généré par un échantillonnage idéal mis en forme par $H(f)$
- ◆ Présence de distorsion d'amplitude à cause de la forme de $H(f)$

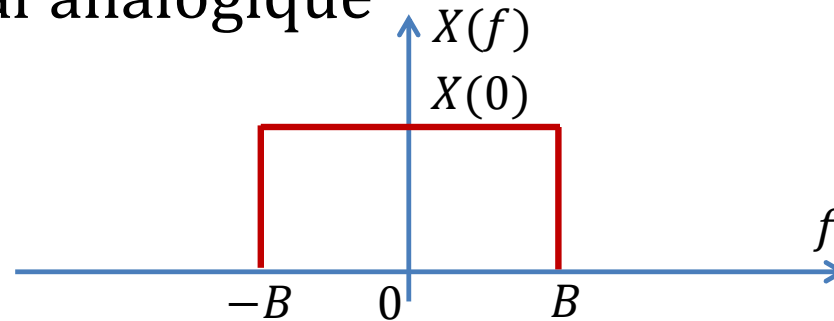


Il est impossible de reconstruire le signal $x(t)$ avec un filtre passe-bas même si la condition de Nyquist est vérifiée.

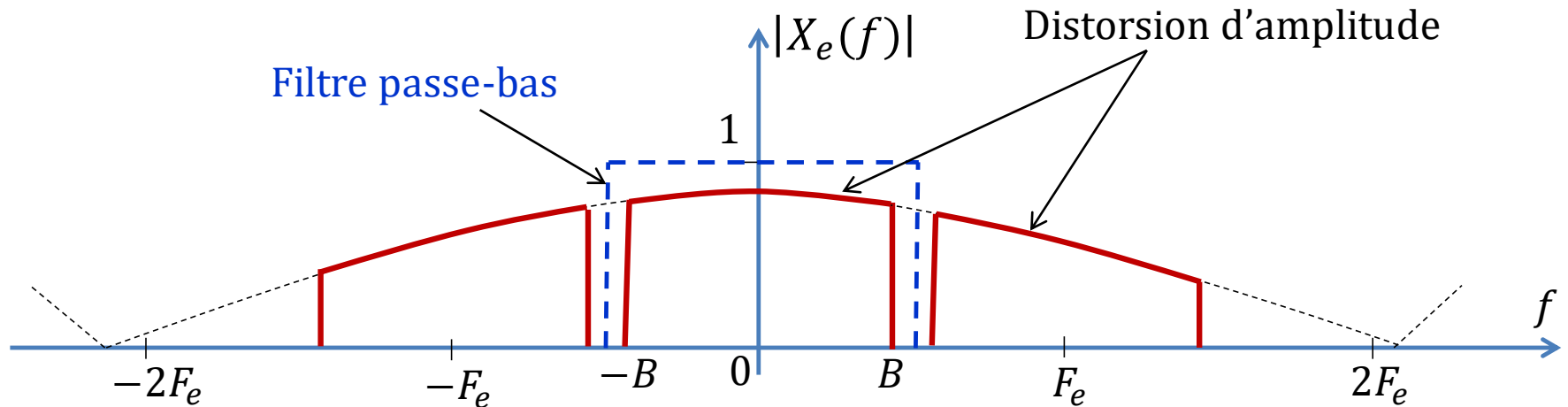
Echantillonnage maintien

Spectre du signal échantillonné - schématiquement

■ Spectre du signal analogique



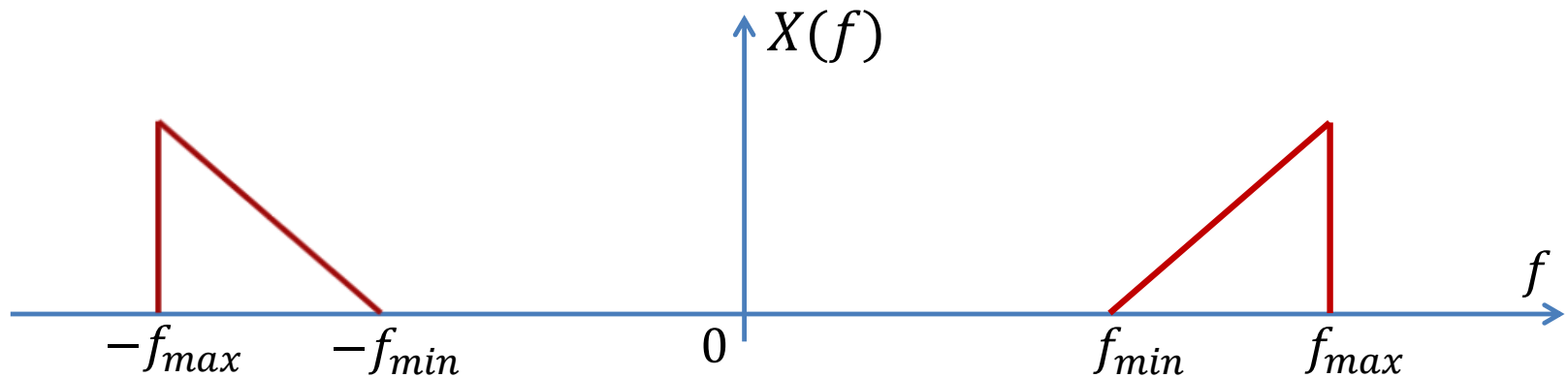
■ Spectre du signal échantillonné



Echantillonnage des signaux passe-bande

Introduction

- Considérons un signal $x(t)$ passe-bande dont la transformée de Fourier $X(f)$ s'annule en dehors de la bande des fréquences $[-f_{max}, -f_{min}] \cup [f_{min}, f_{max}]$

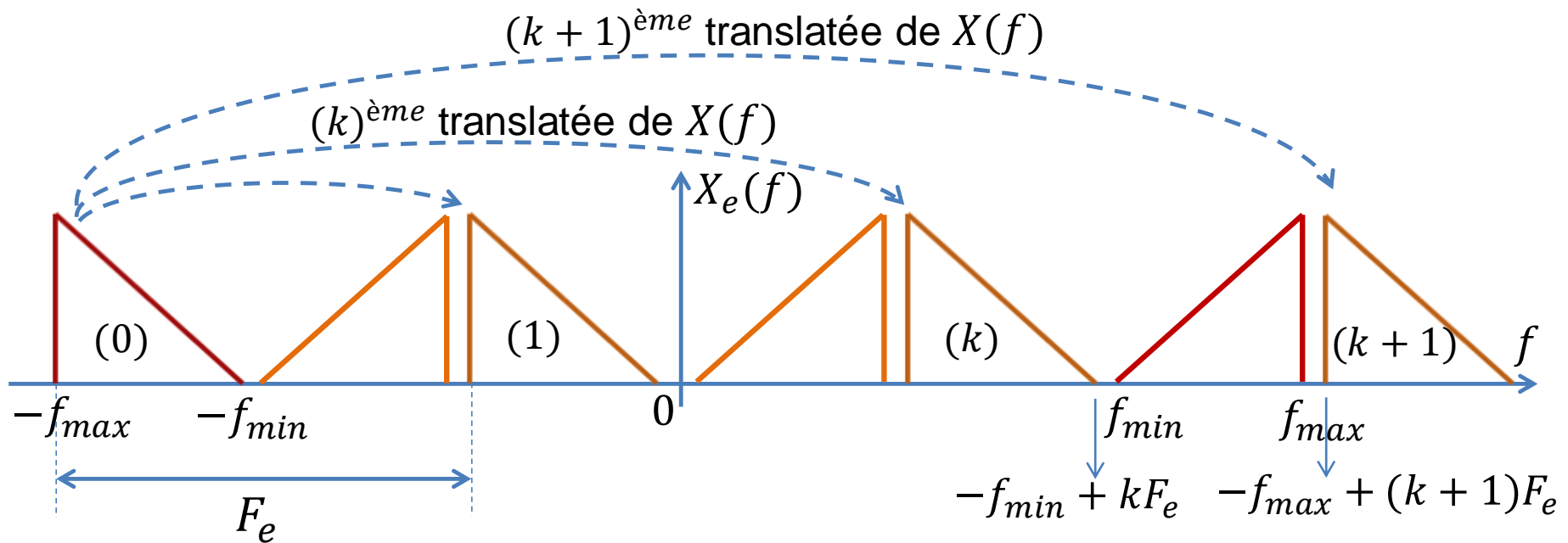


- ✓ L'application du théorème de l'échantillonnage $\Rightarrow F_N = 2 \cdot f_{max}$
- ✓ Il est possible d'échantillonner à des fréquences $F_e < F_N$

Echantillonnage des signaux passe-bande

Spectre du signal échantillonné

■ Périodisation de $X(f)$



- ✓ Pour les signaux **passe-bande à bande large**, $F_e \geq 2 \cdot f_{max}$
- ✓ Les signaux **passe-bande à bande étroite**, peuvent être échantillonnés à des fréquences d'échantillonnage plus faibles que $F_N = 2 \cdot f_{max}$

Echantillonnage des signaux passe-bande

Signaux à bande étroite

■ Condition de non recouvrement :

$$\frac{2f_{max}}{k+1} \leq F_e \leq \frac{2f_{min}}{k}, \quad \text{avec } k \leq \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

■ La fréquence la plus faible pour un échantillonnage de $x(t)$ sans perte d'information:

$$F_{e,min} = \frac{2f_{max}}{k_0 + 1}, \quad \text{où } k_0 = \left\lfloor \frac{f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \right\rfloor$$

[.] désigne la partie entière

Echantillonnage des signaux passe-bande

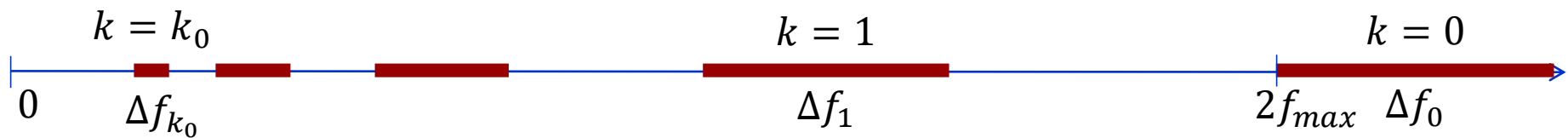
Signaux à bande étroite – Plages de fréquences

- La fréquence d'échantillonnage fait partie dans l'une des plages de fréquences définies par :

$$F_e \in \left[\frac{2f_{max}}{k+1}, \frac{2f_{min}}{k} \right] \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, k_0\}$$

- La $k^{\text{ème}}$ plage de fréquences a une largeur définie par:

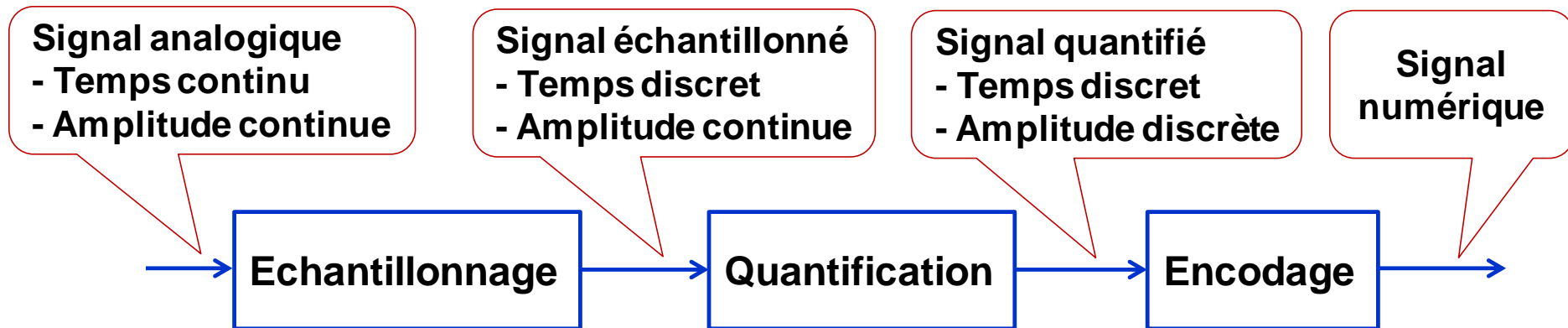
$$\Delta f_k = 2 \frac{f_{min} - k(f_{max} - f_{min})}{k(k+1)}$$



Quantification du signal échantillonné

Introduction

■ Convertisseur analogique-numérique



- ✓ La quantification d'un signal échantillonné consiste à l'approcher par un signal discret dont les échantillons prennent valeurs dans un ensemble fini (de taille plus petite)
- ✓ Dans ce cours nous nous limitons à la quantification uniforme

Quantification du signal échantillonné

Quantification uniforme

Définition 4.1: Quantification uniforme

Dans une quantification uniforme, la dynamique du signal analogique $x(t)$ est découpée en L intervalles de même longueur q définie par:

$$q = \frac{2A}{L}$$

où A est l'amplitude maximale du signal $x(t)$. La longueur q des intervalles est appelée le pas de quantification.

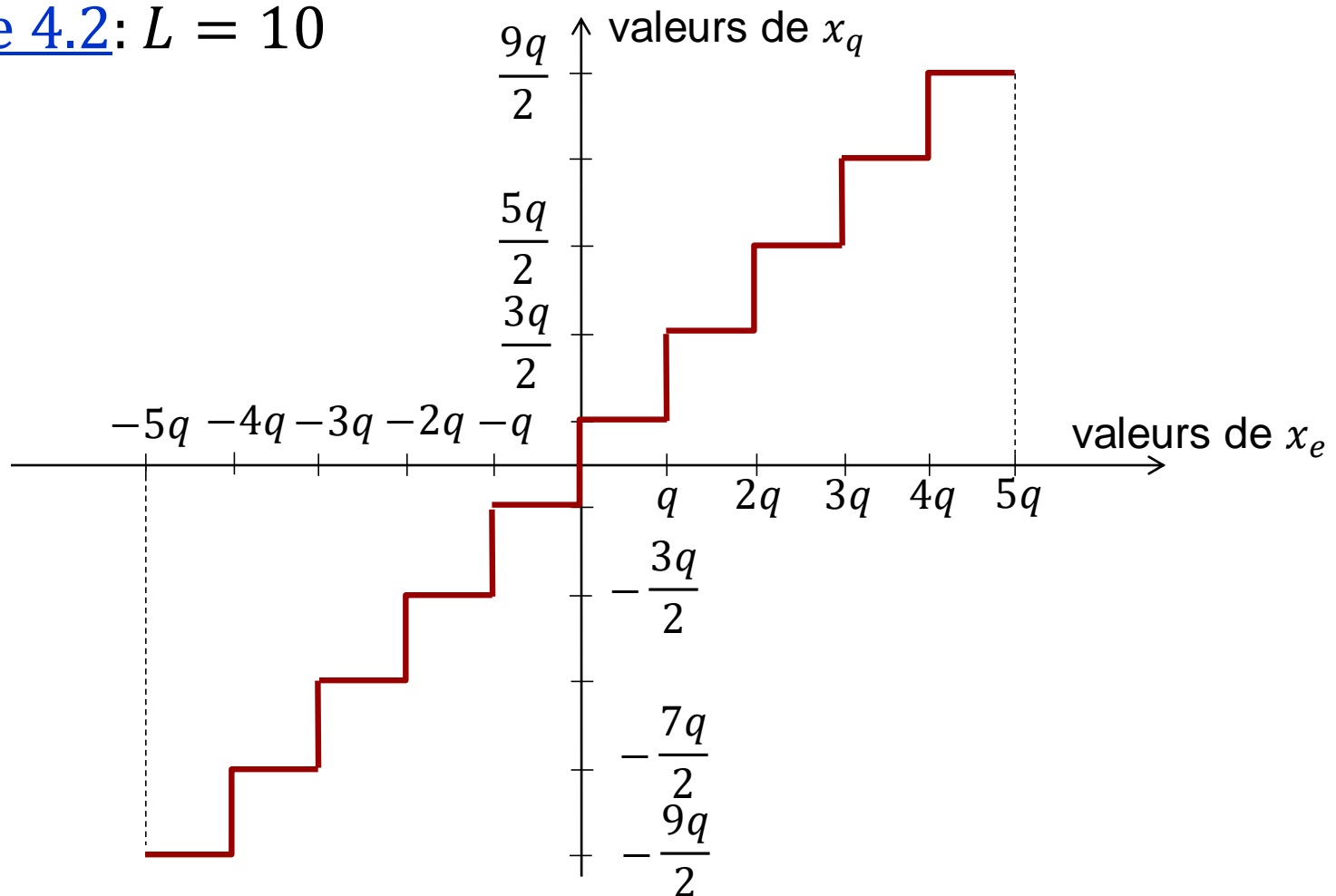
- La valeur quantifiée d'un échantillon $x(kT_e)$ pris dans l'intervalle $[nq, (n+1)q]$:

$$x_q(kT_e) = \frac{(2n+1)}{2} q$$

Quantification uniforme du signal échantillonné

Fonction de transfert entrée-sortie

■ Exemple 4.2: $L = 10$



Chapitre 5 :

Signaux déterministes à temps discret

Signaux déterministes à temps discret

Introduction

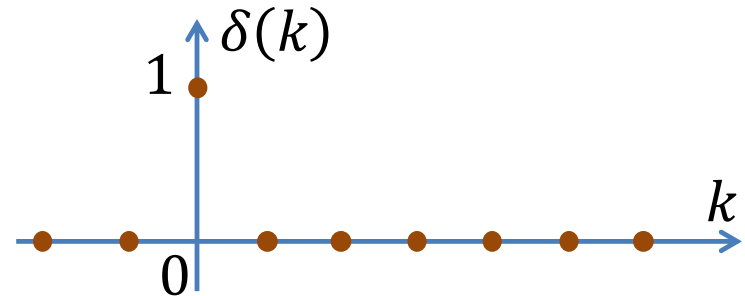
- Un signal à temps discret prend valeurs à des instants distincts. Ces valeurs dépendent d'un entier $k \in \mathbb{Z}$
 - ◆ Le signal à temps discret est noté $x(k)$
- L'amplitude du signal peut être discrète (quantifiée) ou continue (non quantifiée)
- Les signaux à temps discret peuvent se présenter sous deux formes:
 - ◆ Signaux échantillonnés
 - ◆ Signaux numériques

Signaux déterministes à temps discret

Exemples: Signal impulsion unité, signal échelon unité

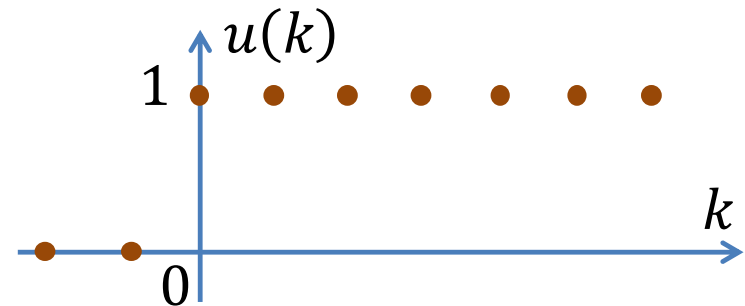
■ Le signal impulsion unité

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$



■ Le signal échelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$

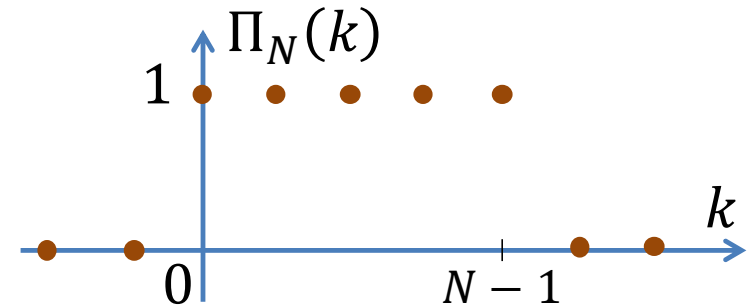


Signaux déterministes à temps discret

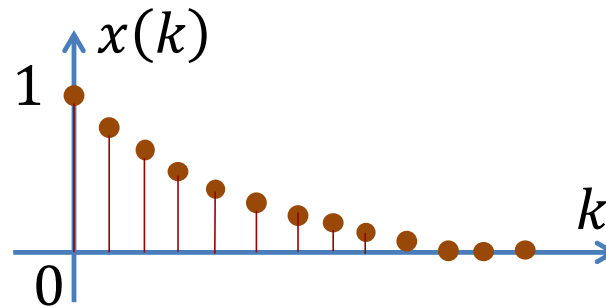
Exemples: Signal Porte, le signal $\alpha^k u(k)$

■ Le signal porte de longueur N

$$\Pi_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



■ Le signal $x(k) = \alpha^k u(k)$, $0 < \alpha < 1$



Signaux déterministes à temps discret

Notions d'énergie et de puissance

Considérons un signal déterministe à temps discret $x(k)$

■ L'énergie du signal:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

■ La puissance moyenne du signal:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |x(k)|^2$$

- ✓ Si $E_x < \infty$, le signal $x(k)$ est d'énergie finie
- ✓ Si $P_x < \infty$, le signal $x(k)$ est de puissance finie

Signaux déterministes à temps discret

Représentations

- Un signal à temps discret ou continu peut avoir plusieurs autres représentations
 - ◆ Une meilleure description du signal
 - ◆ Une facilité de traitement
- Une pluralité de transformées:
 - ◆ Transformée de Laplace à temps discret
 - ◆ Transformée en z (TZ)
 - ◆ Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)
 - ◆ Transformée de Fourier discrète (TFD)

Signaux déterministes à temps discret

Transformée en z - Définition

Définition 5.1: Transformée en z

La transformée en z , notée $X(z)$, d'un signal à temps discret $x(k)$ est la fonction, de variable complexe, définie par:

$$X(z) = TZ(x(k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \quad \text{Pour } R_1 \leq |z| \leq R_2$$

◆ Généralement, le domaine de convergence est une couronne

- Les points du domaine de convergence pour lesquels $X(z) = 0$ s'appellent les zéros de $X(z)$
- Les points en dehors du domaine de convergence pour lesquels $|X(z)| \rightarrow \infty$, s'appellent les pôles de $X(z)$

Transformée en z

Propriétés: Linéarité, symétrie, conjugaison, décalage

Soit $x(k)$, $x_1(k)$, et $x_2(k)$ des signaux dont les TZ sont $X(z)$, $X_1(z)$ et $X_2(z)$ respectivement.

■ Linéarité: Pour deux scalaires α et β dans \mathbb{C}

$$\alpha x_1(k) + \beta x_2(k) \xrightarrow{TZ} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

■ Symétrie :

$$x(k) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$$

■ Conjugaison :

$$x^*(k) \xrightarrow{TZ} X^*(z^*) \quad \text{et} \quad x^*(-k) \xrightarrow{TZ} X^*((z^{-1})^*)$$

■ Décalage temporel :

$$x(k - k_0) \xrightarrow{TZ} z^{-k_0} X(z)$$

Transformée en z

Propriétés: Déphasage, multiplication par a^k

- Déphasage: Soit le signal $y(k) = e^{j2\pi k f_0} x(k)$. Sa transformée en z est définie par:

$$Y(z) = X(e^{-j2\pi f_0} z)$$

- ◆ C'est une rotation d'angle $-2\pi f_0$ dans le plan complexe
- ◆ $Y(z)$ a le même domaine de convergence que $X(z)$

- Multiplication par a^k : Si $y(k) = a^k x(k)$ où le domaine de convergence de $X(z)$ est $R_1 \leq |z| \leq R_2$, $Y(z)$ est définie par:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^k = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

- Le domaine de convergence de $Y(z)$: $|a|R_1 \leq |z| \leq |a|R_2$

Transformée en z inverse

Définition, Méthodes d'inversion

- La transformée en z inverse permet de déterminer un signal à temps discret $x(k)$ à partir de sa transformée en z $X(z)$ définie sur une couronne de convergence $D = \{z, R_1 \leq |z| \leq R_2\}$

- Transformée en z inverse :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{k-1} dz$$

où C est le contour de Cauchy appartenant au domaine de convergence.

- Trois méthodes d'inversion de $X(z)$ pour calculer $x(k)$:
 - ◆ La formule des résidus
 - ◆ Développement en séries
 - ◆ Développement en éléments simples

Transformée en z inverse

Formule des résidus - Définition

Définition 5.2: Résidu

Le résidu d'une fonction $f(z)$ en un pôle $z = a$ d'ordre m est défini par:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}$$

Pour un pôle $z = a$ simple (d'ordre 1),

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} \{(z-a)f(z)\}$$

- La fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D
 $\Rightarrow f(z)$ admet un développement en séries entières
- La fonction $f(z)$ possède un nombre fini de pôles

Transformée en z inverse

Formule des résidus – Calcul du signal discret

On cherche à déterminer le signal $x(k)$ à partir de sa transformée en z $X(z)$ dont le domaine de convergence est $D = \{z, R_1 \leq |z| \leq R_2\}$.

Soit C un contour appartenant à D . Le signal $x(k)$ est calculé de deux manières:

■ Avec les pôles a_i de $X(z)z^{k-1}$ appartenant à C :

$$x(k) = \sum_i \text{Res}[X(z)z^{k-1}, a_i] \quad \forall a_i \in C$$

■ Avec les pôles a_j de $X(z)z^{k-1}$ n'appartenant pas à C :

$$x(k) = - \sum_j \text{Res}[X(z)z^{k-1}, a_j] \quad \forall a_j \notin C$$

Transformée en z inverse

Formule des résidus – Exemple

■ Exemple 5.1: Déterminons le signal dont la TZ est définie par,

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

◆ Domaine de convergence : $D = \{z, |z| > \alpha\}$

L'application de la méthode des résidus aux pôles de la quantité $X(z) \cdot z^{k-1} = \frac{z^k}{z-\alpha}$ mène à,

$$x(k) = \begin{cases} \alpha^k & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$

Transformée en z inverse

Transformée en z est une fraction rationnelle

- La transformée en z peut s'exprimer sous forme d'un quotient de deux polynômes en z ou en z^{-1}

- ◆ $X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \Rightarrow$ Le signal $x(k)$ est nul à gauche (causal)

- ◆ $X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \Rightarrow$ Le signal $x(k)$ est nul à droite (anti-causal)

- Deux méthodes pour inverser $X(z)$

- ◆ Développement en séries

- ◆ Développement en éléments simples

Transformée en z inverse

Développement en séries

- La transformée en z de $x(k)$ est une fraction rationnelle

$$X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Le signal $x(k)$ est déterminé en faisant la division polynômiale de $P(z^{-1})$ par $Q(z^{-1})$
- Les étapes d'inversion de $X(z)$ par développement en séries:
 - ◆ Faire la division polynômiale de $P(z^{-1})$ par $Q(z^{-1})$
 - ◆ Faire l'identification des coefficients du quotient de la division polynomiale avec $x(k)$

Transformée en z inverse

Développement en séries

■ Exemple 5.2: Déterminons le signal $x(k)$ dont la TZ est définie par

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

◆ Division polynômiale :

$$\begin{array}{r}
 1 + 2z^{-1} \\
 -1 + 2z^{-1} - z^{-2} \\
 \hline
 4z^{-1} - z^{-2} \\
 -4z^{-1} + 8z^{-2} - 4z^{-3} \\
 \hline
 7z^{-2} - 4z^{-3} \\
 -7z^{-2} + 14z^{-3} - 7z^{-4} \\
 \hline
 10z^{-3} - 7z^{-4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \\
 \hline
 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + \dots + (3k+1)z^{-k}
 \end{array}$$

◆ Le signal $x(k)$:

$$x(k) = (3k+1)u(k)$$

Transformée en z inverse

Décomposition en éléments simples

- Lorsque $X(z)$ est une fraction rationnelle, le signal $x(k)$ peut être déterminé par le développement en éléments simples de

$$X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Les étapes d'inversion de $X(z)$:
 - ◆ Décomposer $X(z)$ en éléments simples
 - ◆ Prendre la transformée en z inverse de chaque terme de la décomposition obtenue
- ✓ La décomposition en éléments simples fait intervenir le développement en séries entières

Transformée en z inverse

Décomposition en éléments simples - Exemple

- Exemple 5.3: Déterminons le signal $x(k)$ dont la TZ est définie par

$$X(z) = \frac{1}{z(z+1)^2(z-1)} = \frac{z^{-4}}{(1+z^{-1})^2(1-z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Après le développement en éléments simples :

$$X(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2(1+z^{-1})^2} - \frac{7}{4(1+z^{-1})} + \frac{1}{4(1-z^{-1})}$$

- Le signal $x(k)$:

$$x(k) = \delta(k) - \delta(k-1) + \left[\frac{1}{2}(-1)^k(k+1) - \frac{7}{4}(-1)^k + \frac{1}{4} \right] u(k)$$

Transformée en z

Formule de Parseval

- Pour deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de transformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ respectivement, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} X(z)Y^*((z^{-1})^*) \frac{dz}{z}$$

- Dans le cas où $x(k) = y(k)$, on obtient :

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} X(z)X^*((z^{-1})^*) \frac{dz}{z}$$

Transformée en z

Produit de convolution

■ Considérons deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ de transformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ respectivement.

■ Le produit de convolution:

$$x(k) * y(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)y(k-l)$$

■ Effet de la transformée en z sur la convolution:

$$x(k) * y(k) \xrightarrow{TZ} X(z).Y(z)$$

✓ La transformée en z transforme un produit de convolution en un produit simple

Transformée en z

Fonction de corrélation

$x(k)$ et $y(k)$ deux signaux de TZ $X(z)$ et $Y(z)$

■ Fonction d'inter-corrélation :

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k-n) = x(n) * y^*(-n)$$

■ Fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x^*(k-n) = x(n) * x^*(-n)$$

■ Transformée en z :

$$R_{xy}(n) \xrightarrow{TZ} X(z).Y^*((z^{-1})^*) \text{ et } R_{xx}(n) \xrightarrow{TZ} X(z).X^*((z^{-1})^*)$$

Transformée de Fourier à temps discret

Définition

Définition 5.3: Transformée de Fourier à temps discret

La transformée de Fourier, noté $X(f)$, d'un signal à temps discret $x(k)$ est définie par:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi k f}$$

$X(f)$ existe si le cercle unité fait partie du domaine de convergence de $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$.

■ $X(f)$ est périodique de période 1

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi k f} df$$

Transformée de Fourier à temps discret

Exemple

- Exemple 5.4 : Transformée de Fourier du signal rectangulaire de longueur N .

$$x(k) = \Pi_N(k)$$

- Transformée de Fourier à temps discret (TFtd) :

$$\begin{aligned} X(f) = TFtd(x(k)) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{+j2\pi kf} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{+j2\pi kf} = \frac{1 - e^{-j2\pi Nf}}{1 - e^{-j2\pi f}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$X(f) = \frac{\sin(\pi Nf)}{\sin(\pi f)} e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} f}$$

Transformée de Fourier à temps discret

Propriétés

Propriété	Temps discret	Fréquence
Linéarité	$\alpha x(k) + \beta y(k)$	$\alpha X(f) + \beta Y(f)$
Translation en temps	$x(k - k_0)$	$X(f) \cdot e^{-j2\pi k_0 f}$
Translation en fréquence	$x(k) \cdot e^{j2\pi k f_0}$	$X(f - f_0)$
Produit de Convolution	$x(k) * y(k)$	$X(f) \cdot Y(f)$
Produit simple	$x(k) \cdot y(k)$	$X(f) * Y(f)$
Conjugaison	$x^*(k)$	$X^*(-f)$
	Réel	$X(-f) = X^*(f)$
	Réel, pair	Réelle paire

Transformée de Fourier à temps discret

Formule de Parseval

- Le changement de variable $z = e^{j2\pi f}$ dans la formule de Parseval pour la transformée en z permet d'avoir,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)Y^*(f)df$$

- Pour $x(k) = y(k)$,

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

- ✓ La formule de Parseval traduit la conservation de l'énergie entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Transformée de Fourier discrète

Introduction

- La transformée de Fourier des signaux à temps discret ou à temps continu n'est pas appropriée pour un traitement numérique :
 - ◆ Un ordinateur ne traite que des nombres
 - ◆ Un ordinateur a une contrainte de la taille mémoire
- La transformée de Fourier discrète (TFD) est la forme de la TF adaptée aux traitements numériques
 - ◆ Discrétiser la fréquence
 - ◆ Échantillonner le signal analogique et le tronquer dans le temps
- ✓ Un calcul rapide et efficace de la TFD grâce à l'algorithme de la transformée de Fourier rapide *FFT (Fast Fourier Transform)*

Transformée de Fourier discrète

Définition

Définition 5.4: Transformée de Fourier discrète

Soit $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ une séquence de N valeurs d'échantillons prise d'un signal $x(t)$ avec la période d'échantillonnage T_e . La transformée de Fourier discrète associe à cette séquence de valeurs une autre séquence de N valeurs $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}$ espacées de $\frac{F_e}{N}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N-1$$

✓ Les deux suites $x(n)$ et X_k sont périodiques de même période

Transformée de Fourier discrète

Forme matricielle, TFD inverse

■ Forme matricielle de la transformée de Fourier discrète

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & e^{-j2\pi nk/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

■ Transformée de Fourier discrète inverse

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformée de Fourier discrète

Propriétés

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux à temps discret dont les TFDs sont X_k et Y_k .

■ Linéarité :

$$\alpha x(n) + \beta y(n) \xrightarrow{TFD} \alpha X_k + \beta Y_k$$

■ Symétrie et conjugaison :

$$x(-n) \xrightarrow{TFD} X_{-k} \quad x^*(n) \xrightarrow{TFD} X_{-k}^* \quad x^*(-n) \xrightarrow{TFD} X_k^*$$

■ Décalage temporel :

$$x(n - n_0) \xrightarrow{TFD} X_k \cdot e^{-j2\pi n_0 \frac{k}{N}}$$

■ Décalage fréquentiel :

$$x_n \cdot e^{+j2\pi n \frac{k_0}{N}} \xrightarrow{TFD} X_{k-k_0}$$

Transformée de Fourier discrète

Produit de convolution discrète

Définition 5.5: Produit de convolution discrète

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de supports temporels $\{0, 1, \dots, N_x - 1\}$ et $\{0, 1, \dots, N_y - 1\}$ respectivement. Leur produit de convolution discret est le signal à temps discret $z(n)$, défini par:

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{N_y-1} y(k)x(n-k)$$

Le support temporel de $z(n)$ est $\{0, 1, \dots, N_x + N_y - 2\}$

- ✓ Pour réduire le temps de calcul, il est judicieux de faire la sommation dans le support temporel le plus petit.

Transformée de Fourier discrète

Produit de convolution cyclique

Définition 5.7: Produit de convolution cyclique

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de support temporel $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Leur produit de convolution cyclique est le signal à temps discret $z(n)$, ayant le même support temporel, défini par:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k)$$

Les indices sont pris modulo N

■ Propriété de convolution de la TFD

$$x(n) \otimes y(n) \xrightarrow{TFD} X_k Y_k \quad \text{et} \quad x(n) \cdot y(n) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{N} X_k \otimes Y_k$$

Transformée de Fourier discrète

Corrélation discrète

Définition 5.6: La fonction de corrélation discrète

Considérons deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ de supports temporels $\{0, 1, \dots, N_x - 1\}$ et $\{0, 1, \dots, N_y - 1\}$ respectivement. Leur fonction de corrélation discrète $R_{xy}(n)$ est définie par:

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=0}^{N_x-1} x(k)y^*(k-n) \quad \text{pour } n \in \{-(N_y - 1), \dots, N_x - 1\}$$

■ Si $x(n)$ et $y(n)$ ont la même période N

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y^*(k-n) \quad \text{pour } n \in \{0, \dots, N - 1\}$$

Transformée de Fourier discrète

Formule de Parseval

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux à temps discret ayant le support $\{0, 1, \dots, N - 1\}$. Leurs TFDs sont X_k et Y_k

■ Les deux signaux et leurs TFDs vérifient,

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^*$$

■ Pour $x(n) = y(n)$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

Références

- MIT open courses, «*ocw.mit.edu*»
- R. E. Ziemer, W. H. Tranter, «*Principles of Communications : Systems, Modulation, and Noise*», John Wiley & Sons, Inc., USA, 2002
- Jean Pierre Delmas, «*Éléments de théorie du signal*», Paris, 1995
- Hwei Hsu, «*Signaux et communications*», 2^e édition, Dunod, Paris, 2004
- D. Ghorbanzadeh, P. Marry, N. Point, D. Vial, «*Mathématiques du signal*», Paris, 2008