

L'essentiel du cours en

PHYSIQUE

Table des matières

Mécanique

1. Cinématique
2. Principes de la dynamique
3. Énergie d'un point matériel
4. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique
5. Théorèmes du moment cinétique
6. Mouvement dans un champ de force newtonien

Optique géométrique

1. Bases de l'optique géométrique
2. Lentilles minces sphériques

Physique quantique

1. Introduction au monde quantique

Électrocinétique – Électronique

1. Bases de l'électrocinétique
2. Circuits linéaires en régime libre
3. Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé
4. Filtres
5. Amplificateur linéaire intégré en régime linéaire
6. ALI en régime saturé – Montages comparateurs
7. Oscillateurs électriques
8. Électronique numérique

Thermodynamique

1. Bases de la thermodynamique
2. Premier principe
3. Second principe
4. Changement d'état d'un corps pur
5. Machines thermiques
6. Diagrammes d'état des fluides purs réels
7. Thermodynamique industrielle
8. Conduction thermique

Électromagnétisme

1. Champ magnétique
2. Induction
3. Électrostatique
4. Magnétostatique
5. Équations locales de l'électromagnétisme
6. Ondes électromagnétiques

Mécanique des fluides

1. Statique des fluides
2. Fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

Optique ondulatoire

1. Interférences
2. Dispositifs interférentiels

1 Cinématique

L'essentiel du cours

□ Vecteur-position, vecteur-vitesse, vecteur-accélération dans un référentiel

Le mouvement d'un corps dépend du solide de référence (réel ou fictif) dans lequel l'observateur se situe. À ce solide, on associe un référentiel \mathcal{R} tel que

- ($Oxyz$) est un trièdre fixe par rapport au solide (on choisit un trièdre **direct**) ;
- t est une date permettant de repérer les événements dans le temps.

Propriété : en mécanique classique (\neq mécanique relativiste), le temps t est identique dans tous les référentiels (hypothèse du temps absolu).

Dans un référentiel \mathcal{R} d'étude,

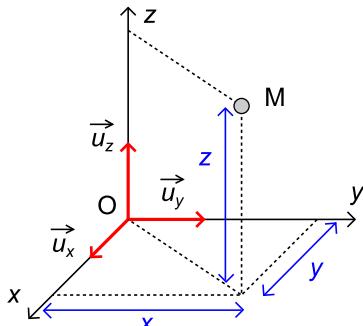
♡ \overrightarrow{OM} vecteur-position $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ vecteur-vitesse $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ vecteur-accélération

□ Repères d'espace

Un **repère d'espace** est la donnée, dans un référentiel ($Oxyz$), d'un système de trois coordonnées (pour repérer la position du point M) et d'une base (directe) de trois vecteurs unitaires et orthogonaux deux à deux.

⚠ Ne pas confondre référentiel et repère : on peut utiliser différents repères dans un même référentiel.

• Repère cartésien



- (x, y, z) coordonnées cartésiennes
- $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ base cartésienne

♡ $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$

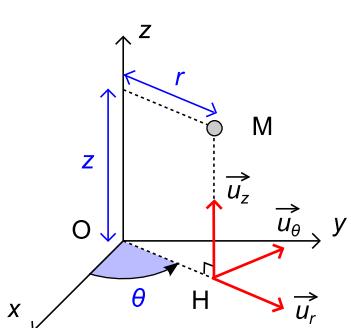
Propriété : base fixe = indépendante de la position $M(t)$:

$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ vecteur-vitesse $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$ vecteur-accélération

Propriété : le vecteur-déplacement élémentaire s'écrit $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

• Repère cylindrique



- $r = OH$ = distance de M à l'axe (Oz), $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$, $z = \overrightarrow{HM}$
- \vec{u}_r selon \overrightarrow{OH} , \vec{u}_θ dans le plan (Oxy), \vec{u}_z dirige (Oz).

NB : z et \vec{u}_z sont les mêmes dans les repères cartésien et cylindrique.

♡ $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r + z(t)\vec{u}_z$

Propriété : base mobile = dépendante de la position $M(t)$:

♡ $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

NB : démonstration basée sur la projection de \vec{u}_r et \vec{u}_θ selon \vec{u}_x et \vec{u}_y .

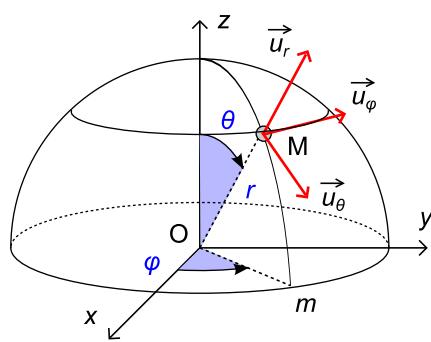
En dérivant le vecteur-position deux fois par rapport au temps, on obtient (**à savoir faire**)

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Propriété : le vecteur-déplacement élémentaire s'écrit $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$

NB : le second terme est un déplacement élémentaire selon un arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$.

• Repère sphérique



- $r = OM, \theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}), \varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$;
NB : sur le globe terrestre, θ est la colatitude (complémentaire de la latitude) et φ est la longitude.

⚠ r du repère sphérique $\neq r$ du repère cylindrique !

⚠ En SI, les coordonnées θ et φ sont inversées !

- \vec{u}_r unitaire selon \overrightarrow{OM} , \vec{u}_θ selon le méridien local (dans le sens de θ), \vec{u}_φ selon le parallèle local.

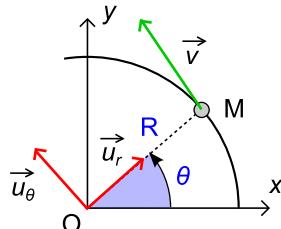
NB : sur le globe terrestre, \vec{u}_r est suivant la verticale, \vec{u}_θ est vers le sud et \vec{u}_φ est vers l'est.

Propriété : le vecteur déplacement élémentaire s'écrit $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

NB : le dernier terme est un déplacement élémentaire le long du parallèle local = cercle de rayon $r \sin \theta$.

□ Cas du mouvement circulaire

💡 Utiliser le **repère polaire** = repère cylindrique restreint à $z = 0$, avec O le centre du cercle.



- $\dot{\theta} = \omega$ vitesse angulaire de rotation (rad.s⁻¹)
- $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ soit en norme $v = R\omega$
- $\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$
 $a_N = -R \dot{\theta}^2$ composante normale et $a_T = R \ddot{\theta}$ composante tangentielle

Cas du mouvement circulaire uniforme :

- $\omega = 2\pi/T$ avec T la période de rotation ;
- $\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ vecteur-accélération centripète = orienté vers le centre de la trajectoire.

Propriétés générales valables quelle que soit la trajectoire plane :

- le vecteur-accélération est toujours orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire ;
- la composante tangentielle s'écrit $a_T = dv/dt$ (avec v la norme de la vitesse).

□ Cinématique du solide

Un solide est un corps matériel **indéformable**. (c'est un modèle)

NB : la distance entre deux points A et B du solide est constante au cours du temps (propriété caractéristique).

• Mouvement de translation

Un solide a un mouvement de translation si **quels que soient les points A et B du solide, le vecteur \overrightarrow{AB} est constant au cours du temps**.

NB : les axes (Ox), (Oy) et (Oz) du trièdre lié au solide gardent donc des directions fixes au cours du temps.

- Translation rectiligne : les points du solide décrivent des droites ;
- translation circulaire : les points du solide décrivent des cercles.

NB : la translation curviligne correspond au cas général où les points du solide décrivent des trajectoires quelconques.

♡ Tous les points d'un solide en translation ont même vecteur-vitesse et même vecteur-accélération à tout instant.

• Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Propriété : tous les points M du solide décrivent des trajectoires circulaires de même vitesse angulaire ω .

Conséquence : $v = r\omega$ vitesse d'un point M situé à la distance r de l'axe de rotation.

2 Principes de la dynamique

L'essentiel du cours

□ Forces – Principe des actions réciproques et principe d'inertie

Forces usuelles :

- **poids** $\vec{P} = m \vec{g}$ appliqué au centre d'inertie G, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ champ (ou accélération) de pesanteur ;
- **résistance de l'air**, exemple de modèle : $\vec{f} = -h \vec{v}$ avec $h = \text{Cte}$ (valable aux faibles vitesses) ;
- **réaction exercée par un support** (plan, tige...), normale au support en l'absence de frottement ;
- **tension** \vec{T} exercée par un fil, colinéaire au fil (inconnue a priori) ;
- **tension élastique exercée par un ressort** $\boxed{\vec{T} = -k \vec{\Delta\ell}}$ avec $\vec{\Delta\ell}$ vecteur allongement, $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ avec ℓ longueur du ressort et ℓ_0 longueur à vide du ressort, et k constante de raideur (N.m^{-1}) ;
- **poussée d'ARCHIMÈDE** $\boxed{\vec{H} = -m_{\text{fluide}} \vec{g}}$ avec m_{fluide} la masse de fluide déplacé par le corps ;

NB : $m_{\text{fluide}} = \rho_{\text{fluide}} \times V$ avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide et V le volume du corps immergé dans le fluide.

♡ **Principe des actions réciproques** : si A et B sont deux points matériels en interaction, les forces d'interaction entre les deux points sont opposées : $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

NB : le principe des actions réciproques est aussi appelé **troisième loi de NEWTON** ou principe de l'action et de la réaction.

♡ **Principe d'inertie** : il existe des référentiels privilégiés, dits galiléens, dans lesquels un point matériel qui est soumis à une résultante de force nulle est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme.

NB : le principe d'inertie est aussi appelé **première loi de NEWTON**.

Référentiels classiques (à connaître) :

- **référentiel terrestre** \mathcal{R}_T = lié à la Terre ;
- **référentiel géocentrique** $\mathcal{R}_{\text{géo}}$: origine le centre de la Terre, axes de directions fixes par rapport à des étoiles lointaines (dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, \mathcal{R}_T est en rotation uniforme autour de l'axe polaire) ;
- **référentiel héliocentrique** (aussi appelé référentiel de KEPLER) \mathcal{R}_K : origine le centre du Soleil, axes de directions fixes par rapport à des étoiles lointaines (dans \mathcal{R}_K , $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ est en translation quasi circulaire).

⚠ Il n'existe pas de référentiel galiléen absolu : un même référentiel peut être considéré comme galiléen ou non, suivant les conditions d'expérience.

□ Loi de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen

Par définition, $\boxed{\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i}$ quantité de mouvement d'un système matériel {masses m_i de vitesses \vec{v}_i }.

NB : pour un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} , $\vec{p} = m \vec{v}$.

- **Loi de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen** :

♡ $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$ \vec{F}_{ext} force extérieure appliquée sur le système

⚠ Les forces **intérieures** au système n'interviennent pas (par exemple, les tensions exercées par les fils ou les ressorts dans un système constitué de plusieurs masses reliées entre elles).

- **Propriété** : $\boxed{\vec{p} = M_{\text{tot}} \vec{v}_G}$ $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ masse totale du système et G centre d'inertie du système

Conséquence : pour un système **fermé** = pas d'échange de matière avec l'extérieur, $M_{\text{tot}} = \text{Cte}$ d'où

$$\boxed{M_{\text{tot}} \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}} = \text{théorème du centre d'inertie (TCI)}$$

- **Cas particulier** : pour un point matériel M de masse m ,

♡ $\boxed{m \vec{a} = \sum \vec{F}} = \text{principe fondamental de la dynamique (PDF)} = \text{seconde loi de NEWTON}$

NB : la distinction force intérieure/force extérieure n'a pas de sens pour un point matériel : toutes les forces sont extérieures.

Méthode : comment utiliser le PFD pour mettre en équation le mouvement d'un point matériel ?

- ① définir le système mécanique (indispensable s'il y a plusieurs points matériels) ;
- ② définir le référentiel d'étude et vérifier (ou supposer) qu'il est considéré comme galiléen ;
- ③ faire le bilan des forces exercées sur le système et **représenter ces forces sur un dessin** ;
- ④ écrire le PFD sous forme vectorielle ;
- ⑤ **choisir un repère d'espace adapté** ; exprimer les composantes du vecteur-accélération dans ce repère (voir leçon de cinématique) et projeter les forces dans la base du repère ;
- ⑥ écrire le PFD en projection selon les vecteurs de la base du repère choisi ;
- ⑦ exploiter la (ou les) équation(s) différentielle(s) obtenue(s).

NB : dans certains cas, on sait résoudre analytiquement ; sinon, on utilise un logiciel de résolution numérique.

- Cas de l'oscillateur harmonique : l'équation différentielle vérifiée par le paramètre $x(t)$ s'écrit

♡ $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$ $\omega_0 = \text{Cte pulsation}$ de l'oscillateur $[\omega_0] = \text{s}^{-1}$

NB : $x(t)$ peut être un signal physique quelconque : un déplacement, un angle, une tension, une intensité...

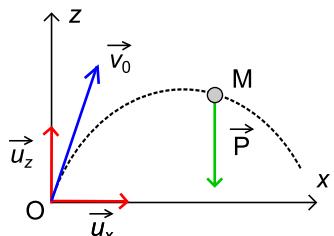
Exemple : système masse-ressort sans frottement.

♡ $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi)$ solution générale de l'équation différentielle

NB : pour déterminer les constantes (A, B) ou (X, φ), on utilise les conditions initiales.

avec $X = \text{amplitude}$, $\varphi = \text{phase}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0 = \text{période}$, $f = 1/T = \text{fréquence (Hz)}$.

□ Application au mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur



Dans le **repère cartésien**, on obtient par projection selon \vec{u}_x et \vec{u}_z :

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

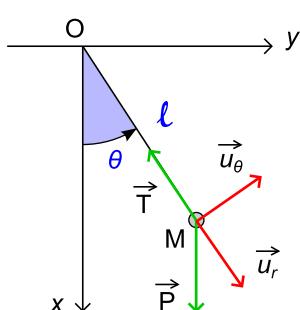
💡 Primitiver ensuite deux fois, en tenant compte des conditions initiales, pour obtenir les **équations horaires** $x(t)$ et $z(t)$.

NB : on suppose le champ de pesanteur uniforme.

Propriétés :

- la trajectoire est une parabole (à savoir démontrer, en combinant $x(t)$ et $z(t)$ de manière à éliminer t) ;
- le mouvement est à vecteur-accélération constant ($m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$).

□ Application au pendule simple



Dans le **repère polaire**, on obtient par projection selon \vec{u}_θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (\text{projection selon } \vec{u}_r \text{ non exploitable car } T \text{ est une inconnue})$$

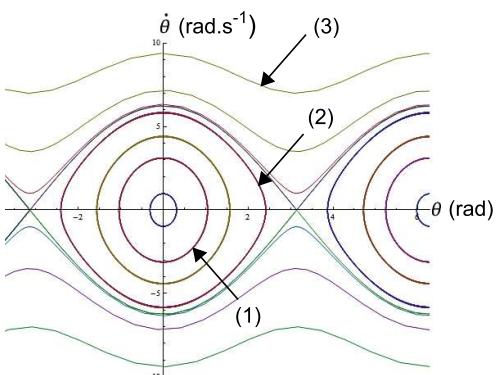
- **Cas des oscillations de faible amplitude** : $\theta \ll 1 \text{ rad}$ donc $\sin \theta \simeq \theta$

$$\text{d'où } \ddot{\theta} + (g/\ell) \theta = 0$$

du type $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ donc le pendule simple se comporte comme un **oscillateur harmonique** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$

NB : la période T_0 des oscillations vérifie $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

- **Portrait de phase**



- (1) : oscillation de faible amplitude ;
- (2) : oscillation de grande amplitude ;
- (3) : révolution autour de O.

Propriété : pour des oscillations de faible amplitude, la trajectoire de phase est une ellipse (à savoir démontrer).

NB : on considère ici un pendule **rigide** : le fil est remplacé par une tige (de masse négligeable par rapport à m).

3 Énergie d'un point matériel

L'essentiel du cours

□ Puissance et travail d'une force

- Par définition, le travail élémentaire d'une force \vec{F} s'écrit

♡ $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ $d\vec{\ell}$ vecteur déplacement élémentaire du point d'application de \vec{F}

NB : en mécanique du point matériel, le point d'application est M donc on note aussi $d\vec{\ell} = d\vec{OM}$.

♡ Le travail d'une force est une énergie. $[\delta W] = J$ (joule)

Cas particuliers :

- $\vec{F} \cdot d\vec{\ell} > 0$: la force \vec{F} est **motrice** (à cet instant) = elle a tendance à accélérer le point M ;
- $\vec{F} \cdot d\vec{\ell} < 0$: la force \vec{F} est **résistante** (à cet instant) = elle a tendance à ralentir le point M.

NB : si $\vec{F} \perp d\vec{\ell}$, $\delta W(\vec{F}) = 0$.

Le travail de la force \vec{F} entre deux positions A et B du point M s'écrit par sommation

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

- Par définition, la puissance est reliée à l'énergie par

♡ puissance = $\frac{\text{énergie échangée}}{\text{durée d'échange}}$ d'où $[1 W = 1 J.s^{-1}]$

⚠ Formule importante car **générale** en physique.

Cas d'une force :

♡ $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (démonstration immédiate : $\mathcal{P} = \delta W(\vec{F})/dt = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$)

⚠ Le travail et la puissance dépendent du référentiel d'étude.

□ Théorèmes énergétiques dans un référentiel galiléen

Par définition,

♡ $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v

- Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

♡ $E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ A et B deux positions du point M

- Théorème de la puissance cinétique (TPC)

♡ $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$

NB : les théorèmes de l'énergie et de la puissance cinétique se démontrent à partir du principe fondamental de la dynamique.

Cas particulier : si $\vec{F} \perp d\vec{\ell}$ ou $\vec{F} \perp \vec{v}$, l'énergie cinétique du point n'est pas modifiée.

□ Forces conservatives, énergie potentielle – Théorème de l'énergie mécanique

Une force est **conservative** si son travail entre deux points A et B est indépendant de la trajectoire suivie de A à B.

NB : si un point est soumis à des forces conservatives, l'énergie mécanique se conserve (voir suite), d'où leur nom.

Une force de frottement est non conservative.

(le travail de la force de frottement entre deux points dépend évidemment de la longueur du trajet parcouru)

Propriété :

♡ \vec{F} est conservative $\Leftrightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$ avec E_p l'**énergie potentielle** associée à \vec{F}

Autres écritures : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\Delta_{A \rightarrow B}(E_p)$ ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

Propriété : une énergie potentielle est définie à une constante près (seule sa variation a un sens physique).

⚠ Attention à l'ordre des points A et B dans la différence d'énergie potentielle.

♡ $E_{pp} = mgz + C^e$ **énergie potentielle de pesanteur** associée au poids (\vec{g} supposé uniforme)

⚠ z est l'altitude sur un axe vertical **ascendant**.

♡ $E_{pe} = (1/2)k\Delta\ell^2 + C^e$ **énergie potentielle élastique** associée à une force de rappel élastique

NB : pour exprimer le travail d'une force conservative, on a tout intérêt à utiliser son énergie potentielle associée.

Par définition,

♡ $E_m = E_c + \sum E_p$ énergie mécanique d'un point matériel

• **Théorème de l'énergie mécanique** dans un référentiel galiléen :

♡ $\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non conservatives}}) \Leftrightarrow \Delta_{A \rightarrow B}(E_m) = \sum W_{A \rightarrow B} W(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$

Cas particuliers de conservation de l'énergie mécanique = mouvement conservatif :

$E_m = C^e$	<ul style="list-style-type: none"> soit si le point M n'est soumis qu'à des forces conservatives ; soit si les forces non conservatives ont un travail ou une puissance nulle.
-------------	--

NB : dans le cas d'un mouvement avec frottement, $\mathcal{P}_{\text{frot}} < 0$ donc $E_m(t)$ décroît au cours du temps.

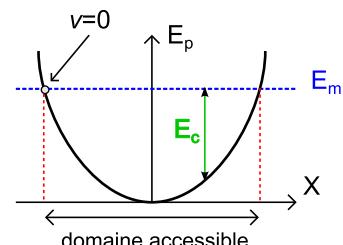
Intérêt : dans ce cas, l'écriture $dE_m/dt = 0$ peut fournir l'équation différentielle du mouvement.

Exemple : mise en équation du mouvement du pendule simple (à savoir faire)

• **Cas d'un mouvement conservatif à une dimension** selon X : $E_p(X) \leq E_m$ (car $E_c \geq 0$)

Intérêt : connaissant $E_m = C^e$, le graphe $E_p(X)$ permet d'obtenir

- le domaine accessible au mouvement = ensemble des valeurs de X qui vérifient l'inégalité (le domaine peut être borné ou non) ;
- la valeur de l'énergie cinétique $E_c = E_m - E_p(X)$;
- les positions de vitesse nulle (telles que $E_m = E_p(X)$).



□ Positions d'équilibre – Stabilité

- Un point M_0 est une **position d'équilibre** si lorsque le point matériel M est en M_0 , la résultante des forces appliquées est nulle ;

NB : autrement dit, si on place le point en M_0 sans vitesse initiale, il reste immobile en M_0 .

- Une position d'équilibre M_0 est **stable** si lorsqu'on écarte légèrement M de cette position, la résultante des forces appliquées tend à faire revenir le point M vers M_0 ; dans le cas contraire, la position d'équilibre est **instable**.

Propriété : dans le cas d'un mouvement conservatif,

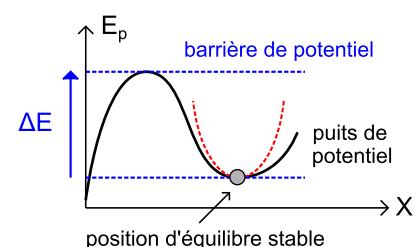
♡

- M_0 est une **position d'équilibre stable** \Leftrightarrow l'énergie potentielle est **minimale** en M_0 ;
- M_0 est une **position d'équilibre instable** \Leftrightarrow l'énergie potentielle est **maximale** en M_0 .

NB : penser à un ballon sur une plaine avec des creux et des bosses : dans un creux, l'énergie potentielle de pesanteur est minimale.

Intérêt : pour un mouvement conservatif à une dimension selon X, le graphe $E_p(X)$ permet d'obtenir

- les positions d'équilibre et leur stabilité ;
- de visualiser les puits de potentiel et les barrières de potentiel ;
- de calculer l'énergie minimale ΔE à fournir pour franchir une barrière de potentiel à partir d'une position d'équilibre stable.



♡ Un point matériel en petit mouvement autour d'une position d'équilibre stable se comporte comme un oscillateur harmonique.

Démonstration : localement, on peut approximer un puits de potentiel par une fonction parabolique.

4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique

L'essentiel du cours

□ Force de Lorentz

Une particule de charge q et de vecteur-vitesse \vec{v} est soumise, en présence d'un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}), à une force électromagnétique appelée force de LORENTZ donnée par

♡
$$\vec{F}_{\text{em}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \vec{F}_e = q\vec{E} \text{ force électrique, } \vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ force magnétique}$$

Unités : $[q] = \text{C}$ (coulomb), $[E] = \text{V.m}^{-1}$ (voir cours d'électromagnétisme), $[B] = \text{T}$ (tesla).

Exemples (ordres de grandeur des valeurs numériques à connaître) :

- électron de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$,
- proton de charge $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

NB : e est appelée la **charge élémentaire**; le neutron porte une charge nulle.

Ordres de grandeur à connaître :

- tube au néon : $E \simeq 10 \text{ V.m}^{-1}$, photocopieur : $E \simeq 10^5 \text{ V.m}^{-1}$, foudre : $E \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$;
- champ magnétique terrestre : $B \simeq 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, aimant permanent $B \simeq 1 \text{ T}$, électroaimant pour l'IRM $B \simeq 10 \text{ T}$.

Propriété : dans des situations « usuelles »,

♡
$$\boxed{\text{Le poids d'une particule chargée est négligeable par rapport à la force électrique et à la force magnétique.}}$$

NB : il suffit de faire les calculs en ordre de grandeur pour le vérifier...

Dans toute la suite, le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} sont supposés

- **uniformes** : même valeur en tout point de la zone de champ ;
- **stationnaires** (= statiques) : même valeur à tout instant.

□ Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

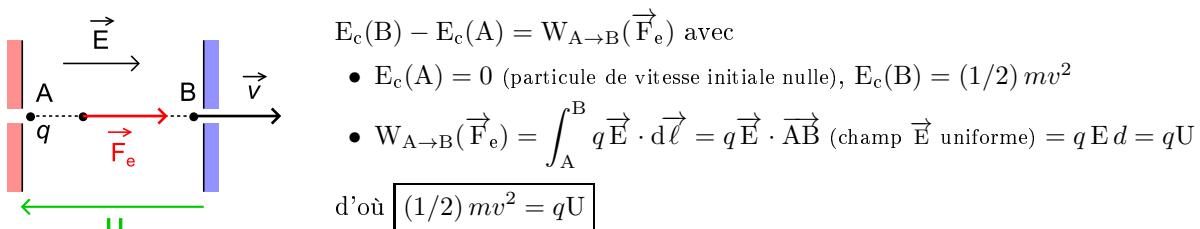
Un champ électrique \vec{E} quasi uniforme peut être obtenu entre les **armatures d'un condensateur plan** (en négligeant les effets de bord), soumises à une tension (= différence de potentiel) U et distantes de d .

♡
$$\boxed{E = U/d}$$
 (formule homogène puisque $[E] = \text{V.m}^{-1}$, voir cours d'électromagnétisme pour la démonstration)

Propriété : le PFD s'écrit $m\vec{a} = q\vec{E}$ (poids négligé) d'où $\boxed{\vec{a} = \text{cte}}$

- **Cas d'un vecteur-vitesse initial colinéaire à \vec{E}** : le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

💡 Pour déterminer la vitesse v acquise par une particule accélérée par une tension U , utiliser le **théorème de l'énergie cinétique** (à savoir faire absolument) :



NB : on peut aussi utiliser l'équation différentielle obtenue par projection du PFD, mais c'est bien plus long !

- **Cas d'un vecteur-vitesse initial non colinéaire à \vec{E}** : la trajectoire est une parabole.

NB : voir cours de cinématique sur les mouvements à accélération constante.

Application : déviation électrostatique d'un faisceau de particules chargées.

□ Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

Un champ magnétique quasi uniforme peut être obtenu à l'intérieur d'un solénoïde (en négligeant les effets de bord)

Propriété : $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ donc $\mathcal{P}(\vec{F}_m) = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$: la force magnétique a une puissance nulle.

Conséquences : d'après le TPC (théorème de la puissance cinétique), $v = C^t$.

♡ L'action d'un champ magnétique est de courber la trajectoire d'une particule, sans modifier sa vitesse

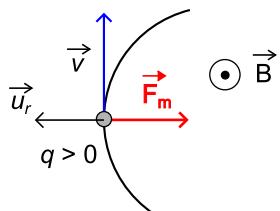
NB : seule la force électrique peut modifier la norme de la vitesse.

- Cas d'un vecteur-vitesse initial perpendiculaire au champ magnétique (seul cas au programme) :

la particule décrit une **trajectoire circulaire** de rayon $R = \frac{mv}{|q|B}$ (à savoir retrouver)

NB : dans le cas d'un vecteur-vitesse initial quelconque, la trajectoire est une hélice (hors-programme).

💡 Pour retrouver le rayon de la trajectoire circulaire, utiliser un PFD en projection dans le repère polaire :



Le PFD s'écrit $m\vec{a} = \vec{F}_m$ avec

- $a_r = -v^2/R$ composante d'accélération selon \vec{u}_r (voir cours de cinématique) ;
- $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = -qvB\vec{u}_r$

En projection selon \vec{u}_r , on obtient $mv^2/R = qvB$ d'où $R = mv/(qB)$

⚠ L'orientation de la force magnétique dépend du signe de la charge q . Pour la déterminer, utiliser la **règle des trois doigts de la main droite** :

$$\begin{matrix} \vec{a} \\ \text{pouce} \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \vec{b} \\ \text{index} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{c} \\ \text{majeur} \end{matrix}$$

Applications : déviation d'un faisceau de particules chargées, séparation isotopique, cyclotron...

□ Limites relativistes

♡ Si la vitesse des particules est proche de la vitesse de la lumière, la mise en équation du mouvement se fait dans le cadre de la **mécanique relativiste**.

⚠ Les résultats précédents ne sont alors plus applicables (seule l'expression de la force de LORENTZ est inchangée).

Dans ce cas (expressions non exigibles = ne pas les apprendre par cœur),

- $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ énergie cinétique relativiste
- $p = \gamma mv$ quantité de mouvement relativiste

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ v vitesse de la particule et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ vitesse de la lumière dans le vide.

NB : si $v \ll c$, on retrouve $E_c = (1/2)mv^2$ (pas immédiat...) et $p = mv$ (immédiat).

5 Théorèmes du moment cinétique

L'essentiel du cours

□ Théorème du moment cinétique vectoriel pour un point matériel

♡ $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ **moment cinétique vectoriel par rapport à O** d'un point matériel M de masse m et de vitesse \vec{v} (grandeur dépendant du référentiel d'étude)

NB : on peut aussi écrire $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$ avec $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du point M.

♡ $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ **moment vectoriel par rapport à O** de la force \vec{F} appliquée en M

NB : dans le cas d'un système matériel quelconque, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$ avec A le point d'application de la force \vec{F} .

Propriétés : $[\mathcal{M}_O] = \text{N.m}$; le moment d'une force est nul si la force est colinéaire au vecteur \vec{OM} .

- Théorème du moment cinétique vectoriel par rapport à un point fixe O :

♡ $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\text{forces}} \vec{M}_O(\vec{F})$ TMC vectoriel

⚠ Il faut impérativement que le point O soit **fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen**.

Intérêt : le TMC vectoriel est une alternative au PFD pour la mise en équation du mouvement d'un point matériel; avantage : les forces dont le moment est nul n'interviennent pas.

Application classique : mise en équation du mouvement du pendule simple (à savoir faire).

□ Théorème du moment cinétique scalaire pour un point matériel

Dans ce qui suit, Δ est une axe orienté par un vecteur unitaire \vec{u}_Δ et passant par O.

♡ $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ **moment cinétique scalaire** par rapport à Δ d'un point matériel M

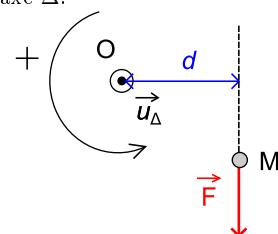
♡ $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$ **moment scalaire par rapport à Δ** de la force \vec{F}

NB : autrement dit, les moments scalaires sont les projections des moments vectoriels selon l'axe Δ .

Propriété : pour une force $\vec{F} \perp \Delta$,

♡ $M_\Delta(\vec{F}) = \pm d \times F$ **d bras de levier** de la force \vec{F}

d = distance entre Δ et le support de \vec{F} = droite passant par le point d'application et dirigée par \vec{F} .



Règle d'algébrisation du moment scalaire d'une force :

- le sens de \vec{u}_Δ définit un sens de rotation positif autour de Δ grâce à la règle du tire-bouchon (ou grâce à la règle de la main droite);
- si la force a tendance à faire tourner le point M dans le sens positif, son moment scalaire est positif; négatif sinon (sur le dessin représenté, le moment est négatif).

💡 $M_\Delta(\vec{F})$ mesure la capacité de la force \vec{F} à mettre en rotation le point M autour de l'axe Δ .

Propriété : $M_\Delta(\vec{F}) = 0$ si le bras de levier est nul ou si la force est parallèle à Δ .

- Théorème du moment cinétique scalaire par rapport à un axe fixe Δ :

♡ $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_{\text{forces}} M_\Delta(\vec{F})$ TMC scalaire

⚠ Il faut impérativement que l'axe Δ soit **fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen**.

Intérêt du TMC vectoriel par rapport au TMC scalaire : on ne manipule que des scalaires; le calcul du moment des forces est facilité par la notion de bras de levier.

⚠ Avant d'appliquer le TMC scalaire, il faut choisir un sens d'orientation de l'axe = choisir un sens pour \vec{u}_Δ .

NB : le TMC scalaire se généralise à un système de points matériels et à un solide.

□ Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

- Δ axe fixe autour duquel le solide est en rotation,
- $\omega(t)$ vitesse angulaire de rotation du solide autour de Δ .

♡ $L_\Delta = J_\Delta \omega$ moment cinétique scalaire du solide par rapport à Δ avec J_Δ le **moment d'inertie** du solide par rapport à Δ .

NB : le moment cinétique scalaire d'un solide est défini comme la somme (intégrale) des moments cinétiques scalaires des masses élémentaires dm constituant le solide.

Propriété : $J_\Delta = \iiint_{M \in \text{solide}} dm(M) \times r^2(M)$ avec $r(M)$ la distance de M à l'axe Δ

NB : les calculs de moment d'inertie sont hors-programme : les expressions de J_Δ seront toujours fournies.

Exemple : $J_\Delta = (1/2)mR^2$ pour un cylindre (homogène) de masse m , de rayon R et d'axe de révolution Δ .

Propriété : le TMC scalaire se réécrit (il suffit de remplacer L_Δ avec $J_\Delta = C^{\text{te}}$)

♡ $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum_{\text{forces}} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$ TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Analogue au PFD pour un point matériel avec les équivalences $J_\Delta \leftrightarrow m$ et $\omega \leftrightarrow v$

- La liaison mécanique entre le solide et l'axe de rotation est appelée **liaison pivot** (\neq liaison pivot glissant : le solide ne peut pas glisser selon la direction de l'axe de rotation). Elle entraîne l'existence d'une action de contact \vec{R}_{axe} exercée par l'axe sur le solide.

♡ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{\text{axe}}) = 0$ si la liaison pivot est parfaite = absence de frottement

NB : avec frottement solide ou fluide, différentes modélisations possibles ; exemple : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = -C\omega$ avec $C = C^{\text{te}}$.

- **Propriétés énergétiques :**

♡ $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$ énergie cinétique d'un solide en rotation autour de l'axe fixe Δ

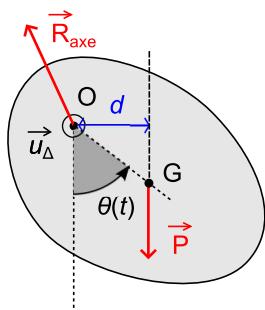
NB : analogie avec l'énergie cinétique d'un point matériel $E_c = (1/2)mv^2$ avec les équivalences $J_\Delta \leftrightarrow m$ et $\omega \leftrightarrow v$.

♡ $\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \times \omega$ puissance de la force \vec{F} exercée sur le solide en rotation

NB : démonstration basée sur la formule $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

- **Application à la mise en équation du mouvement du pendule pesant**

= solide en rotation autour d'un axe fixe Δ horizontal



1^{re} méthode : utilisation du TMC scalaire avec

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -d \times mg = -OG \sin \theta \times mg \quad (\text{utilisation du bras de levier})$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{\text{axe}}) = 0 \quad (\text{liaison pivot supposée parfaite})$$

$$\text{d'où } J_\Delta \ddot{\theta} = -OG \sin \theta \times mg \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{OG mg}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

2^{re} méthode : utilisation du TEM (même énoncé que pour le point matériel)

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\text{non conservatives}} \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \bullet E_m &= E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 - mg OG \cos \theta \quad (z = z_G \text{ dans } E_{pp}) \\ \bullet \mathcal{P}(\vec{R}_{\text{axe}}) &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{\text{axe}}) \times \omega = 0 \quad (\text{liaison pivot supposée parfaite}) \end{aligned}$$

Par dérivation par rapport au temps de $E_m(t)$, on retrouve l'équation du mouvement précédente.

NB : pour des oscillations de faible amplitude, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

- **Couple de force**

On appelle **couple de force** un ensemble de forces de résultante \vec{R}_{couple} telle que

$$\vec{R}_{\text{couple}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{\text{couple}}) \neq 0$$

Exemples : couple moteur (moteur de perceuse sur le mandrin, moteur de voiture sur l'arbre moteur, batteur de cuisine sur les fouets...), couple de freinage, couple de torsion exercé par un fil torsadé...

6 Mouvement dans un champ de force newtonien

L'essentiel du cours

□ Propriétés de la force d'attraction gravitationnelle

♡ $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{G m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$ force exercée par la masse m_A placée en A sur la masse m_B placée en B

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ constante universelle de gravitation et \vec{u}_{AB} vecteur unitaire de A vers B

On note pour la suite A = O de masse M et B = S (comme satellite) de masse m.

Exemples :

- O = le Soleil et S = la Terre ou une planète ;
- O = la Terre et S = un satellite terrestre (la Lune ou un satellite artificiel).

Propriétés :

- La force gravitationnelle est **une force centrale** si O est fixe dans le référentiel d'étude : la force exercée sur S est constamment dirigée vers le point fixe O.
- La force gravitationnelle est un **champ de force newtonien** c'est-à-dire du type $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$ avec $k = -GMm$, $r = OS$ et $\vec{u}_r = \vec{u}_{OS}$ (vecteur de la base sphérique).

NB : la force d'interaction électrostatique est également une force newtonienne.

- Propriétés liées au fait que la force est centrale :

♡ Le moment cinétique du point S par rapport à O se conserve.

⚠ Il faut que le point O soit **fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen** :

- si O = le Soleil, on se place dans le référentiel héliocentrique (supposé galiléen) ;
- si O = la Terre, on se place dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen).

Démonstration (à savoir faire) : application du théorème du moment cinétique (TMC).

Conséquences :

♡ La trajectoire est contenue dans un plan passant par O.

♡ **Loi des aires** : le vecteur-position balaie des aires égales pendant des durées égales.

Autre formulation : $C = r^2 \dot{\theta} = C^{\text{te}}$ (constante des aires)

avec (r, θ) les coordonnées polaires de S dans le repère de centre O.

- Propriétés liées au fait que la force est newtonienne :

♡ $E_p = -\frac{GMm}{r}$ énergie potentielle associée à la force gravitationnelle

NB : de manière générale, pour une force newtonienne en $k/r^2 \vec{u}_r$, l'énergie potentielle s'écrit $E_p = k/r$.

♡ $E_m = C^{\text{te}}$ (à condition qu'il n'y ait pas de force non conservative comme des frottements)

- **Lois de KEPLER** pour les planètes :

- Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers (1^{re} loi) ;
- Les vecteurs-positions balaiennent des aires égales pendant des durées égales (2^e loi = loi des aires) ;
- Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes (3^e loi).

NB : la 3^e loi se formule aussi $T^2/a^3 = C^{\text{te}}$ pour toutes les planètes.

Propriété : lois généralisables aux satellites terrestres (la Terre occupant alors l'un des foyers).

□ Cas particulier du mouvement circulaire

• Propriétés

$$v = C^{\text{te}} \quad \text{mouvement uniforme}$$

Démonstrations (à savoir faire) : utiliser la constante des aires $C = R^2\dot{\theta}$ et l'expression $v = R\dot{\theta}$ ou projeter le PFD dans le repère polaire selon \vec{u}_r ou appliquer le théorème de la puissance cinétique (TPC).

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \text{vitesse de révolution}$$

Démonstration (à savoir faire) : projeter le PFD dans le repère polaire selon \vec{u}_θ sachant que $v = R\dot{\theta}$.

$$E_m = -\frac{GM}{2R} \quad \text{énergie mécanique}$$

Démonstration (à savoir faire) : remplacer v dans E_c , utiliser l'expression de E_p puis simplifier E_m .

Propriété : formule généralisable à une trajectoire elliptique en remplaçant R par a le demi-grand axe.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \text{troisième loi de KEPLER dans le cas d'un mouvement circulaire}$$

Démonstrations (à savoir faire) : utiliser l'expression de v et l'égaler à $v = 2\pi R/T$ ou projeter le PFD dans le repère polaire selon \vec{u}_θ sachant que $\dot{\theta} = 2\pi/T$.

⚠ Dans les applications numériques, T est en **seconde** et R est en **mètre**.

• Cas d'un satellite en orbite basse

Pour une altitude $h \ll R_T = 6400$ km (rayon de la Terre), $v = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$ (ordre de grandeur à connaître)

NB : cette vitesse, correspondant à un satellite en orbite rasante, est appelée *première vitesse cosmique*.

• Cas du satellite géostationnaire = fixe dans le référentiel terrestre = immobile pour un observateur fixe sur la Terre

• Calcul de l'altitude h

💡 Utiliser la 3^e loi de KEPLER avec $T = T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$ période de révolution sidérale de la Terre.

Application numérique : $h \simeq 36000 \text{ km}$ (ordre de grandeur à connaître).

• Orbite circulaire **contenue dans le plan équatorial** car le plan de la trajectoire doit contenir O = centre de la Terre.

NB : conséquence : un satellite géostationnaire est situé sous l'horizon (donc invisible) au-delà d'une certaine latitude.

□ Nature générale des trajectoires

♡ Dans un champ de force newtonien, les trajectoires sont des coniques.

NB : les coniques sont les courbes obtenues par intersection d'un cône et d'un plan.

- $E_m < 0 \Leftrightarrow$ trajectoire elliptique ou circulaire (état lié) ;
- $E_m = 0 \Leftrightarrow$ trajectoire parabolique (état de diffusion limite) ;
- $E_m > 0 \Leftrightarrow$ trajectoire hyperbolique (état de diffusion).

NB : propriétés déduites du tracé de l'énergie potentielle effective $E_{\text{peff}}(r)$ telle que $E_m = E_{\text{peff}}(r) + (1/2)mr^2$

Propriété : O occupe l'un des foyers (ou le foyer) de la trajectoire.

• Vitesse de libération = vitesse minimale à communiquer à un corps situé sur la Terre pour qu'il s'éloigne à l'infini de la Terre (2^e vitesse cosmique)

💡 Utiliser le critère $E_m \geq 0$.

Application numérique : $v_{\text{lib}} = 11,4 \text{ km.s}^{-1}$ (ordre de grandeur à connaître)

1 Bases de l'optique géométrique

L'essentiel du cours

Cadre de l'optique géométrique :

La lumière est composée de **rayons lumineux indépendants entre eux** (= pas d'interférence).

NB : dans la pratique, il est impossible d'isoler un rayon lumineux à cause du phénomène de diffraction.

Principe de retour inverse de la lumière :

♡ Le trajet suivi par un rayon lumineux ne dépend pas du sens de propagation de la lumière.

Autre formulation : si on inverse le sens de propagation de la lumière, les trajets des rayons lumineux restent identiques.

□ Sources de lumière

On distingue deux types de sources :

- **sources primaires** : elles émettent par elles-mêmes la lumière ;
- **sources secondaires** : elles diffusent la lumière émise par une autre source (la Lune, les planètes, la plupart des objets du quotidien...).

Une source lumineuse primaire est caractérisée par son **spectre d'émission**, qui peut être

- **continu** : Soleil, étoiles, lampe à filament (= lampe à incandescence), diode électroluminescente (DEL) ;
- **discontinu ou discret** = constitué de raies : lampes spectrales (à vapeur de sodium, de mercure...) ;
- **quasi monochromatique** = constitué d'une seule raie (de très faible largeur spectrale) : laser.

Modèle de la source lumineuse ponctuelle monochromatique : les dimensions de la source sont très faibles par rapport à l'échelle d'étude ; le spectre est réduit à une raie de fréquence f .

NB : une source lumineuse étendue peut être considérée comme un ensemble de sources ponctuelles.

□ Propagation de la lumière

La vitesse de propagation de la lumière dépend du milieu de propagation.

NB : de manière générale, la vitesse d'une onde, quelle qu'elle soit, dépend (a priori) du milieu de propagation.

♡ $n = c/v$ indice de réfraction d'un milieu transparent

v vitesse de la lumière dans le milieu et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ vitesse de la lumière dans le vide.

NB : la vitesse de la lumière vaut officiellement $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ (valeur exacte arbitraire).

Propriétés : $[n] = 1$, $n \geq 1$; $n(\text{air}) = 1,00$, $n(\text{verre}) \simeq 1,5$, $n(\text{eau}) \simeq 1,3$.

NB : v dépend de la longueur d'onde λ pour une lumière monochromatique donc n est fonction de λ (propriété utilisée pour décomposer la lumière grâce à un prisme).

• Cas d'une onde monochromatique

♡ $\lambda = vT$ λ longueur d'onde (m), v vitesse dans le milieu (m.s^{-1}), T période (s)

💡 Démonstration : pendant une durée égale à T , l'onde se déplace à la vitesse v de la distance λ .

NB : formule à retrouver par analyse dimensionnelle en cas de doute.

Propriété :

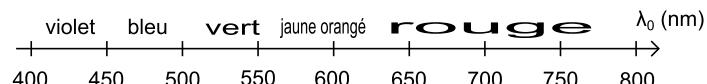
♡ La fréquence (donc la période) d'une onde monochromatique est une caractéristique propre à la source émettrice, indépendante du milieu de propagation.

Conséquence : $\lambda = \lambda_0/n$ λ_0 longueur d'onde dans le vide et λ longueur d'onde dans le milieu d'indice n

NB : démonstration simple à savoir faire : combiner $\lambda_0 = cT$, $\lambda = vT$ et $n = c/v$.

Échelle des couleurs (à connaître) :

⚠ Longueur d'onde λ_0 **dans le vide**!



□ Réflexion et réfraction

Définitions :

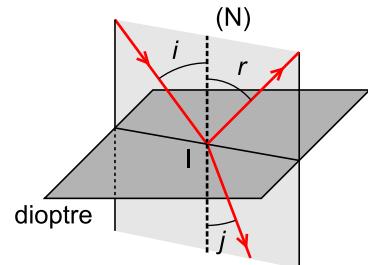
- **dioptre** = surface de séparation (frontière) entre deux milieux d'indices différents ;
- **point d'incidence I** = point d'intersection entre un rayon incident et un dioptre ;
- **plan d'incidence** = plan contenant le rayon incident et la normale (N) en I au dioptre.

• Lois de SNELL-DESCARTES (1637)

- ♡ Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.
- ♡ $i = r$ (loi de la réflexion)
- ♡ $n_1 \sin i = n_2 \sin j$ (loi de la réfraction)

i angle d'incidence, j angle de réfraction, r angle de réflexion, n_1 indice du milieu de départ, n_2 indice du milieu d'arrivée.

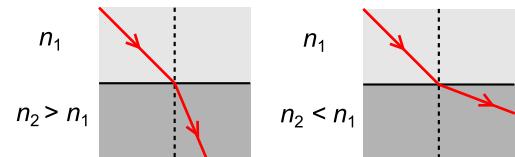
⚠ Tous les angles sont définis **par rapport à la normale**.



NB : les formules restent identiques si on inverse le sens de propagation de la lumière : elles respectent le principe de retour inverse de la lumière.

Propriété : le rayon réfracté se rapproche de la normale si l'indice du milieu d'arrivée est supérieur à l'indice du milieu de départ (et inversement).

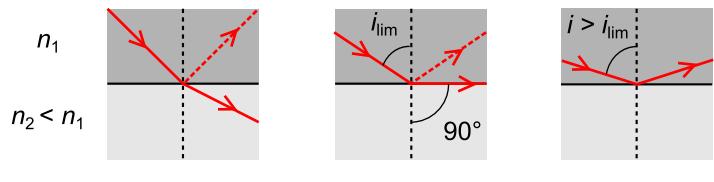
NB : un milieu d'indice supérieur à un autre est dit plus **réfringent**.



• Phénomène de réflexion totale

- ♡ Réflexion totale si $i > i_{\text{lim}}$ correspondant à un angle de réfraction limite égal à 90° .

Dans le cas limite, $n_1 \sin i_{\text{lim}} = n_2 \sin 90^\circ$ d'où
 $i_{\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$ (à savoir retrouver)



Applications : fibre optique à saut d'indice, prisme à réflexion totale.

⚠ La réflexion totale ne peut avoir lieu que si $n_2 < n_1$.

□ Miroir plan

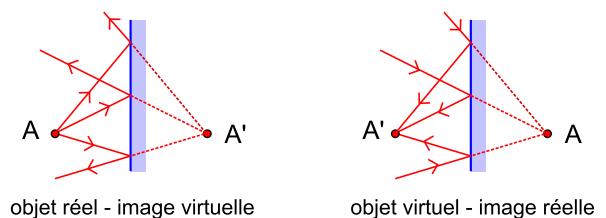
Définitions : un point (objet ou image) est

- **réel** si ce sont des rayons réels qui concourent en ce point ;
- **virtuel** si c'est par prolongement fictif de rayons réels que les rayons concourent en ce point.

NB : un point image réel peut être visualisé par projection sur un écran, un point image virtuel non.

- ♡ L'image d'un objet donné par un miroir plan est le symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir.

Propriété : pour un objet réel, l'image est virtuelle (et inversement).



NB : dans la pratique, c'est l'image donnée par un autre système optique (une lentille par exemple) qui joue le rôle d'objet virtuel pour le miroir.

2 Lentilles minces sphériques

L'essentiel du cours

□ Définitions générales

Une lentille sphérique est un milieu transparent (en verre le plus souvent) délimité par deux dioptrés sphériques ; elle est mince si l'épaisseur de la lentille est faible devant les rayons des dioptrés.

- **axe optique** noté Δ = axe de révolution de la lentille (axe passant par les centres des dioptrés sphériques) ;
- **centre optique** noté O = intersection de la lentille et de l'axe optique.

Convention d'écriture : AB est un couple de point qui modélise un objet orthogonal à l'axe optique, tel que $A \in \Delta$ et $B \notin \Delta$.

Un système optique S est **stigmatique** si les rayons issus d'un point P , appelé **point objet**, concourent, après traversée du système optique, en un unique point P' appelé **point image**.

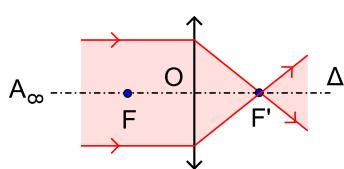
On note alors $P \xrightarrow{S} P'$ et on dit que P et P' sont **conjugués** par S .

NB : un miroir plan est rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace.

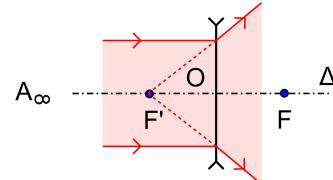
♡ Dans les conditions de GAUSS, une lentille mince sphérique est stigmatique approchée.

Conditions de GAUSS : les rayons doivent être **peu inclinés** et **peu écartés** par rapport à Δ .

♡ F' foyer principal image = conjugué d'un point objet à l'infini sur l'axe soit $A_\infty \xrightarrow{L} F'$



lentille **convergente**
(centre plus épais que le bord)



lentille **divergente**
(bord plus épais que le centre)

NB : F' est réel pour une lentille convergente ; F' est virtuel pour une lentille divergente.

♡ $f' = \overline{OF'}$ distance focale $v = 1/f'$ vergence

⚠ L'axe optique doit être **algébrisé** (arbitrairement).

Propriétés : $|v| = \delta$ (dioptrie) (unité utilisée par les opticiens) ; plus $|v|$ est grande, plus la lentille a un fort pouvoir (convergent ou divergent) ; si l'axe optique est orienté dans le sens de la lumière, $v > 0$ pour une lentille convergente, $v < 0$ pour une lentille divergente.

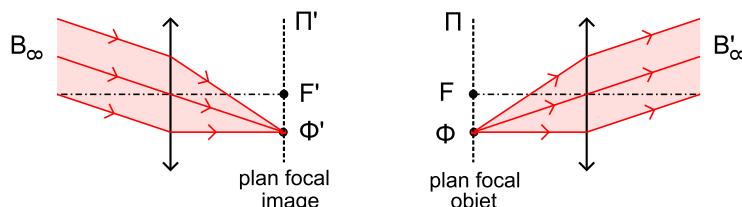
♡ F foyer principal objet = conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe soit $F \xrightarrow{L} A'_\infty$

NB : en inversant le sens de la lumière sur les dessins précédents, F' devient F et A_∞ devient A'_∞ .

Propriété (admise) : F et F' sont symétriques par rapport au centre optique O

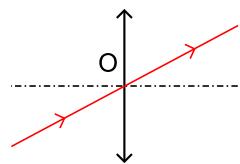
- Φ' foyer secondaire image = conjugué d'un point objet à l'infini en-dehors de l'axe B_∞
- Φ foyer secondaire objet = conjugué d'un point image à l'infini en-dehors de l'axe B'_∞

Propriété : les foyers secondaires image (resp. objets) sont situés dans le **plan focal image** Π' (resp. plan focal objet Π) = plan orthogonal à l'axe optique passant par F' (resp. par F).

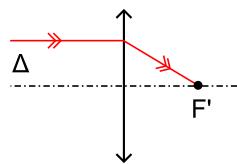


□ Constructions géométriques

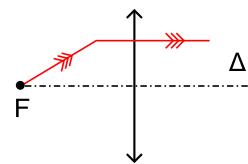
- Rayons remarquables



Tout rayon passant par O
n'est pas dévié



Tout rayon // à Δ
émerge en passant par F'

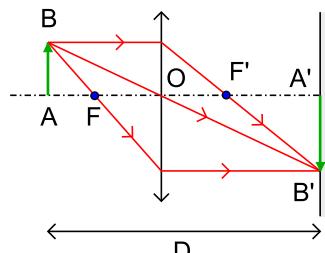


Tout rayon passant par F
émerge // à Δ

Méthode : comment construire l'image d'un objet AB à distance finie ?

- ① construire les trajets d'au moins deux des trois rayons remarquables issus du point B ;
- ② par intersection des rayon émergents, on obtient B' (par stigmatisme) ;
- ③ abaisser la perpendiculaire à Δ passant par B' pour obtenir A'.

Cas particulier : projection de l'image d'un objet réel sur un écran



Projection possible $\Leftrightarrow D \geq 4f'$

Démonstration (à savoir faire) : utiliser la formule de conjugaison de DESCARTES (voir suite).

Cas particulier : si $D = 4f'$, l'image a même taille que l'objet (en étant renversée). On parle d'un montage de projection $4f'$.

Méthode : comment construire l'image d'un objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini ?

- ① le point image A' est confondu avec le foyer principal image F' (par définition de F') ;
- ② tracer le rayon issu de B_∞ qui passe par le centre optique O (qui n'est pas dévié) ;
- ③ l'intersection de ce rayon avec le plan focal image donne B' (puisque l'image est dans le plan focal image).

□ Formules de conjugaison et de grandissement transerval

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{formule de DESCARTES} \quad \overline{F'A'} \times \overline{FA} = \overline{F'O} \times \overline{FO} \quad \text{formule de NEWTON}$$

♡ $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB}$ grandissement transversal ($AB \perp \Delta$)

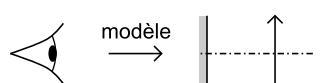
Propriétés : image agrandie si $|\gamma| > 1$ (rétrécie sinon) ; image droite si $\gamma > 0$ (renversée sinon).

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

NB : aucune de ces formules ne doit être apprise par cœur ; les formules de grandissement se retrouvent en utilisant le théorème de THALÈS dans une construction géométrique.

⚠ Toutes ces formules font intervenir des grandeurs **algébriques** (cause fréquente d'erreur !).

□ Modèle optique de l'œil



- cristallin → lentille convergente avec v variable (pouvoir d'accommodation) ;
- rétine → écran fixe.

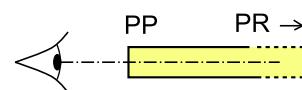
- **limite de résolution angulaire** (ou pouvoir de résolution) : angle apparent minimal ε qui doit séparer deux points objets pour qu'ils puissent être distingués (ou *résolus*) par l'œil.

Ordre de grandeur : $\varepsilon \approx 1'$ d'angle = $(1/60)^\circ$



- **plage d'accommodation** : intervalle de distance dans lequel doit être situé un objet pour qu'il puisse être vu net (en accommodant).

Ordres de grandeur (pour un œil sans défaut) : PP = 25 cm (borne inférieure = *punctum proximum*), PR = $+\infty$ (borne supérieure = *punctum remotum*).



PP → PR →

1 Introduction au monde quantique

L'essentiel du cours

□ Dualité onde-corpuscule pour la lumière

À toute onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ et de fréquence ν , on peut associer une particule appelée **photon**.

Propriétés :

- le photon a une masse nulle, une charge nulle et se déplace dans le vide à la vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-2}$

- **Relations de PLANCK–EINSTEIN :**

♡ $E = h\nu$ énergie du photon $p = \frac{h}{\lambda}$ quantité de mouvement du photon

avec $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ la **constante de PLANCK**.

Grâce à la relation $\lambda = c/\nu$, on peut aussi écrire $E = hc/\lambda$ et $p = h\nu/c$

⚠ La quantité de mouvement du photon ne peut pas se calculer avec la formule $p = mv$ puisque le photon a une masse nulle !

□ Dualité onde-corpuscule pour la matière

À toute particule matérielle de masse m et de vitesse v , on peut associer une onde appelée **onde de matière**.

- **Relation de Louis DE BROGLIE :**

♡ $\lambda = \frac{h}{p}$ longueur d'onde de l'onde de matière

avec $p = mv$ la quantité de mouvement de la particule matérielle.

⚠ La relation $p = h/\lambda \Leftrightarrow \lambda = h/p$ est identique pour la lumière et pour la matière mais **la relation $E = h\nu$ ne peut pas s'appliquer à une particule matérielle** (on ne peut pas associer de fréquence ν à une onde matérielle).

□ Fonction d'onde – Interprétation probabiliste

La probabilité dP de trouver à la date t une particule dans un volume $d\tau = dx dy dz$ autour d'un point $M(x, y, z)$ est donnée par

♡ $dP = |\Psi|^2 d\tau$

avec $\Psi(x, y, z, t)$ la **fonction d'onde** associée à la particule.

Propriété : la probabilité de présence de la particule dans tout l'espace étant égale à 1, $\iiint_{\text{espace}} |\Psi|^2 d\tau = 1$

□ Inégalités de Heisenberg

- **Inégalité position-quantité de mouvement**

Il est impossible de connaître simultanément et avec précision la position et la quantité de mouvement (ou la vitesse) d'une particule.

Dans le cas d'un déplacement unidimensionnel selon (Ox),

♡ $\Delta p_x \times \Delta x \geq \hbar$

avec Δp_x la précision sur la quantité de mouvement p_x , Δx la précision sur la position x et $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de PLANCK réduite.

NB : cette limitation ne provient pas des appareils de mesure : elle est due à la nature quantique des particules.

- **Inégalité durée-énergie**

Il est impossible de connaître simultanément et avec précision la durée d'une onde et son énergie.

♡ $\Delta t \times \Delta E \geq \hbar$

avec Δt la durée de l'onde et ΔE la précision sur l'énergie E.

NB : on peut aussi formuler cette inégalité pour une particule matérielle. Dans ce cas, Δt représente la durée de vie de la particule.

- **Quantification de l'énergie pour une particule confinée spatialement**

Le confinement spatial d'une particule entraîne une quantification de l'énergie de la particule, c'est-à-dire l'existence de niveaux d'énergie discontinus.

Exemple : électron confiné au voisinage d'un atome.

1 Bases de l'électrocinétique

L'essentiel du cours

□ Courant électrique – Charge électrique

- Un **courant électrique** est un mouvement d'ensemble ordonné de porteurs de charge dans un conducteur.
Exemples : circulation d'électrons dans un conducteur métallique ; circulation d'ions dans un électrolyte.
- La **charge électrique** est mesurée en coulomb (C).

La plus petite charge électrique qui existe, appelée **charge élémentaire**, est $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

NB : un électron porte une charge $-e$, un proton porte une charge $+e$, un ion porte une charge $Z \times e$ avec $Z \in \mathbb{Z}^*$.

□ Intensité et tension – Lois des nœuds et loi des mailles

- L'**intensité** i d'un courant électrique à travers une section S, mesurée en ampère (A), est le débit de charge électrique à travers cette section :

♡ $i = \delta q / dt$ δq charge électrique élémentaire traversant S pendant la durée élémentaire dt

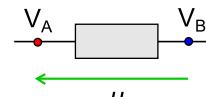
NB : on a donc $1 \text{ A} = 1 \text{ C.s}^{-1}$ (l'ampère fait partie des sept unités de base du Système International).

Ordres de grandeur : DEL $\simeq 10 \text{ mA}$, lampe $\simeq 1 \text{ A}$, radiateur électrique $\simeq 10 \text{ A}$, moteur de TGV $\simeq 10^3 \text{ A}$.

NB : par convention, le sens de la flèche  indique (si $i > 0$) le sens de déplacement des porteurs de charges positives. Les électrons, de charge négative, circulent donc en sens inverse de la flèche i .

- La **tension** u entre deux points A et B d'un circuit électrique, mesurée en volt (V), est la différence de potentiel électrique entre ces deux points :

♡ $u = V_A - V_B$ tension entre les points A et B (représentée par une flèche)



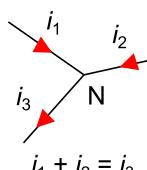
Ordres de grandeur : piles et batteries $\simeq 1 \text{ V}$ à 24 V , tension du secteur 230 V (valeur efficace), ligne de transport à haute tension $\simeq 10^5 \text{ V}$.

On peut fixer (arbitrairement) un point de potentiel nul dans un circuit, appelé **la masse** et notée 

• Loi des nœuds

Un **nœud** N est un point de jonction entre plusieurs fils électriques dans un circuit.

♡ $\sum i_{\text{arrivant vers N}} = \sum i_{\text{partant de N}}$ loi des noeuds



NB : c'est une conséquence directe de la conservation de la charge électrique.

Autre écriture : $\sum \pm i_k = 0$ \pm selon que la flèche i_k arrive ou part de N

⚠ La loi des nœuds n'est vraie que dans l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (ARQS)

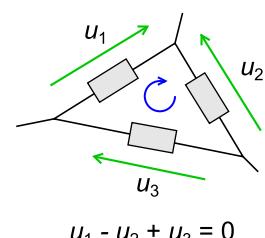
NB : l'ARQS est valable si $d \ll c \times \tau$ avec d la dimension du circuit, c la vitesse des ondes électriques (\simeq vitesse de la lumière dans le vide) et τ une durée caractéristique de variation des grandeurs électriques ($\simeq T$ pour des signaux périodiques).

• Loi des mailles

Une **maille** est un ensemble de branches (portions de circuit entre deux nœuds consécutifs) formant un circuit fermé.

♡ $\sum \pm u_k = 0$ \pm selon le sens de la flèche tension par rapport au sens de la maille

NB : c'est une conséquence directe de la définition d'une tension comme une différence de potentiels.



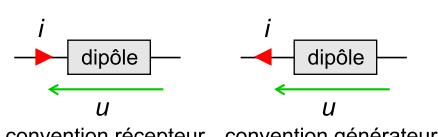
$$u_1 - u_2 + u_3 = 0$$

□ Dipôles électriques passifs = qui ne produisent pas d'énergie électrique

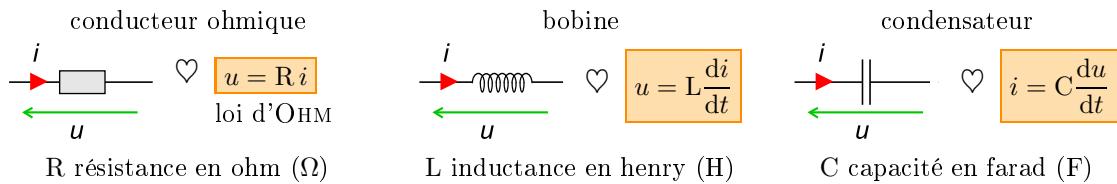
Un **dipôle électrique** est un composant possédant deux bornes.

- **convention récepteur** : flèches u et i de sens opposés ;
- **convention générateur** : flèches u et i de même sens.

NB : le choix de la convention d'étude est arbitraire mais doit être précisé.



• Dipôles usuels :

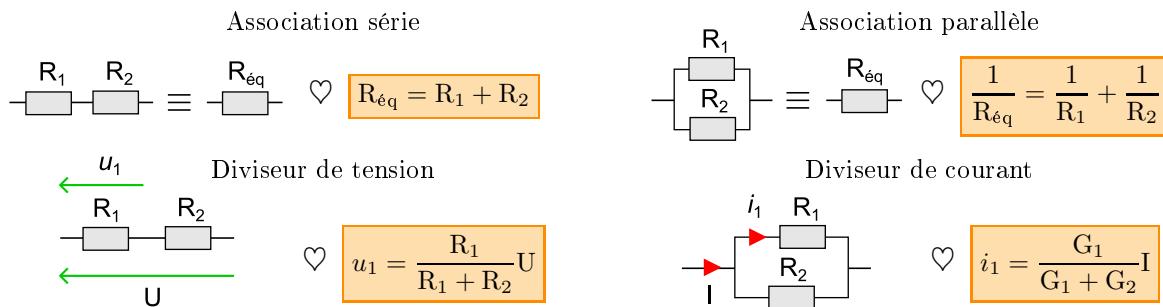


⚠ Relations **en convention récepteur**. En convention générateur, ajouter un $-$ dans l'un des membres.

Ordres de grandeur : $R \simeq 1 \Omega$ à $10^6 \Omega$, $C \simeq 10^{-9} \text{ F}$ à 1 F , $L \simeq 10^{-3} \text{ H}$ à 1 H .

Autre écriture de la loi d'OHM : $i = Gu$ avec $G=1/R$ la conductance en siemens (S).

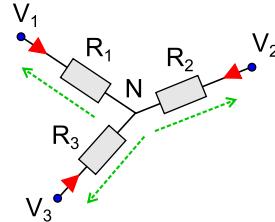
• Lois d'association de deux résistances – Diviseur de tension, diviseur de courant



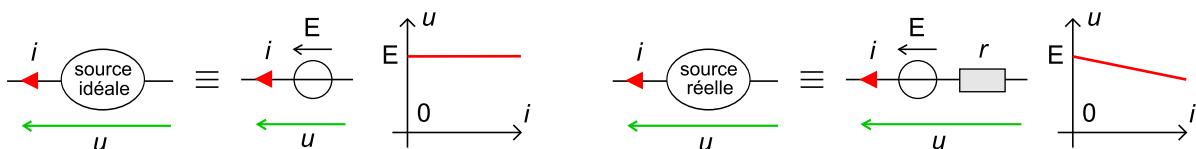
• Loi des nœuds en terme de potentiels (théorème de MILLMAN)

💡 Écrire $\sum i_k = 0$ en un nœud N et utiliser la loi d'OHM sous la forme $i_k = u_k/R_k$ en remplaçant $u_k = V_k - V_N$:

$$\frac{V_1 - V_N}{R_1} + \frac{V_2 - V_N}{R_2} + \frac{V_3 - V_N}{R_3} = 0 \quad (\text{à savoir retrouver})$$



□ Dipôles électriques actifs (sources) = qui produisent de l'énergie électrique



Une source idéale délivre une tension $u = E$ indépendante de l'intensité i débitée ; une source réelle délivre une tension $u = E - ri$ (en convention générateur) avec E la force électromotrice et r la résistance interne.

NB : la modélisation sous la forme d'une source idéale en série avec une résistance est appelée **représentation de THÉVENIN**.

Exemples de sources réelles : GBF générateur basse fréquence ($r = 50 \Omega$), pile ($r \simeq 1 \Omega$)...

□ Puissance électrique – Énergie électrique

♡ $\mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t)$ puissance algébriquement reçue par un dipôle avec (u, i) **en convention récepteur**

- si $\mathcal{P}(t) > 0$, le dipôle reçoit de la puissance (donc de l'énergie) à la date t ;
- si $\mathcal{P}(t) < 0$, le dipôle cède de la puissance (donc de l'énergie) à la date t .

⚠ Si (u, i) est en convention générateur, $u(t) \times i(t)$ est la puissance algébriquement **fournie** par le dipôle.

NB : pour un conducteur ohmique, $\mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t) = Ri^2(t) > 0$ donc le conducteur ohmique reçoit constamment de l'énergie électrique, convertie en chaleur par effet JOULE.

Propriété : puissance = $\frac{\text{énergie élémentaire échangée}}{\text{durée élémentaire}} = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta t} \Leftrightarrow \delta \mathcal{E} = \mathcal{P} dt \Leftrightarrow \mathcal{E}(t) = \int_0^t \mathcal{P} dt$

♡ $\mathcal{E}_C(t) = (1/2) Cu^2(t)$ énergie électrique emmagasinée à la date t dans un condensateur de capacité C

♡ $\mathcal{E}_L(t) = (1/2) Li^2(t)$ énergie électrique emmagasinée à la date t dans une bobine d'inductance L

2 Circuits linéaires en régime libre

L'essentiel du cours

□ Généralités

- Un circuit électrique est **linéaire** s'il est composé de dipôles linéaires = dipôles pour lesquels la relation (u, i) est linéaire (relation linéaire ou équation différentielle linéaire). *Exemples* : résistance, bobine, condensateur...

– Méthode : comment déterminer les grandeurs électriques au début du régime transitoire ?

- ① Utiliser les propriétés de continuité suivantes :
 - la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est une fonction continue de t ;
 - l'intensité $i(t)$ à travers une bobine est une fonction continue de t .

NB : conséquences immédiates des expressions d'énergie $E_C = (1/2) C u^2$ et $E_L = (1/2) L i^2$.

- ② remplacer les condensateurs et les bobines en conséquence (interrupteur fermé si $u = 0$, interrupteur ouvert si $i = 0$) et étudier le circuit simplifié.

Il est indispensable de distinguer les grandeurs à $t = 0^-$ et à $t = 0^+$ ($t = 0$ début du régime transitoire) !

– Méthode : comment déterminer les grandeurs électriques à la fin du régime transitoire ?

- ① Remplacer dans le circuit les condensateurs et les bobines par leur dipôle équivalent en régime permanent = régime continu :
 - un condensateur peut être remplacé par un interrupteur ouvert ;
 - une bobine peut être remplacée par un interrupteur fermé.

NB : conséquences immédiates des relations $i = C du/dt$ et $u = L di/dt$.

- ② étudier le circuit simplifié (il ne reste en général plus que des résistances).

– Méthode : comment déterminer l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique ?

- ① Simplifier si possible le circuit **sans perdre la grandeur électrique recherchée** (utilisation des lois d'associations série ou parallèle notamment) ;
- ② introduire un nombre minimal d'inconnues électriques (tensions et intensités) dans le circuit ;
- 💡 Écrire directement les lois des nœuds et les lois d'OHM sur le circuit.
- ③ écrire autant d'équations électriques qu'il y a d'inconnues : lois des mailles, relations (u, i) aux bornes des condensateurs et des bobines.
- ⚠ En convention générateur, il faut écrire $u = -R i$, $i = -C du/dt$ et $u = -L di/dt$.
- ④ traiter le système d'équations différentielles (couplées souvent) pour se ramener à une équation différentielle à une seule inconnue.

NB : pour un circuit linéaire, l'équation différentielle est nécessairement linéaire !

– Méthode : comment résoudre une équation différentielle linéaire vérifiée par $x(t)$?

- ① résoudre l'équation différentielle sans second membre = équation homogène associée, pour trouver une solution générale $x_{EH}(t)$ faisant intervenir des constantes d'intégration ;

Ce n'est pas la solution de l'équation différentielle complète donc **les conditions initiales ne s'appliquent pas à $x_{EH}(t)$** : pour l'instant, laisser les constantes indéterminées.

- ② déterminer une solution particulière $x_{SP}(t)$ à l'équation différentielle complète ;
- 💡 Chercher une solution **de la même forme mathématique que le second membre** : si le second membre est constant, rechercher $x_{SP} = C^{te}$.
- ③ écrire que la solution générale de l'équation différentielle complète est $x(t) = x_{EH}(t) + x_{SP}(t)$;
- ④ utiliser la (ou les) condition(s) initiale(s) pour déterminer les constantes d'intégration.

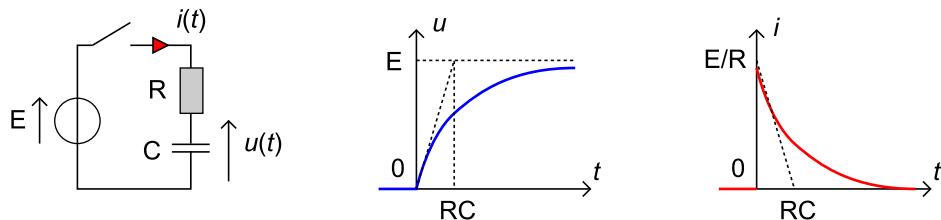
- Le **portrait de phase** d'une grandeur électrique $x(t)$ est la représentation graphique $(\dot{x}(t), x(t))$. Il apporte des informations sur la nature du régime transitoire.

□ Circuits du 1^{er} ordre

Dans un circuit du 1^{er} ordre, l'équation différentielle homogène (= sans second membre) vérifiée par une grandeur électrique $x(t)$ est du 1^{er} ordre et peut se mettre sous la forme

- ♡ $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$ • τ durée caractéristique du régime transitoire (= constante de temps)

Exemple : charge d'un circuit (R, C) série par un échelon de tension (condensateur initialement déchargé).



NB : noter que l'intensité $i(t)$ n'est pas continue à $t = 0$ (elle l'aurait été s'il y avait eu une bobine en série).

La durée caractéristique pour un circuit (R, C) série est $\boxed{\tau = RC}$

Propriété : la constante de temps se lit graphiquement à la date d'intersection entre la tangente à la courbe à $t = 0^+$ et l'asymptote à la courbe en $t = +\infty$.

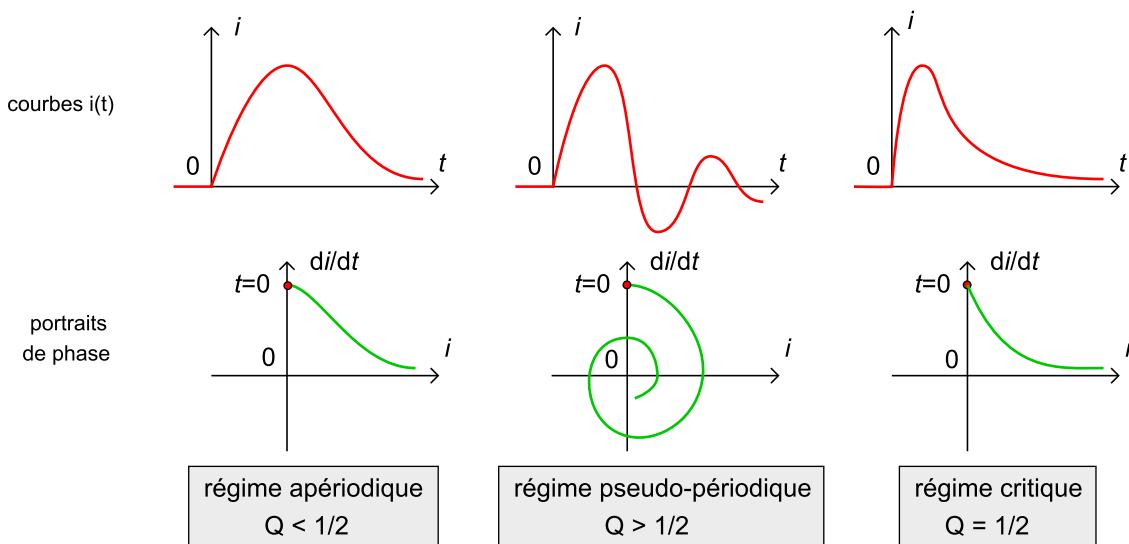
□ Circuits du 2^e ordre

Dans un circuit du 2^e ordre, l'équation différentielle homogène (= sans second membre) vérifiée par une grandeur électrique $x(t)$ est du 2^e ordre et peut se mettre sous la forme

- ♡ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$ • ω_0 pulsation propre ($T_0 = 2\pi/\omega_0$ période propre)
• Q facteur de qualité (sans dimension)

- ♡ La valeur du facteur de qualité indique le type de régime transitoire.

Exemple : circuit (R, L, C) série soumis à un échelon de tension (condensateur initialement déchargé).



Propriétés :

- L'établissement du régime permanent est le plus rapide dans le régime critique;
- en régime pseudo-périodique, on peut définir une pseudo-pulsation ω et une pseudo-période T. La pseudo-période (en général proche de la période propre T_0) et donne l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

- ♡ Un circuit RLC série est analogue à un système mécanique masse-ressort avec frottement.

NB : la résistance électrique est l'analogie des frottements mécaniques ; la bobine (inertie électrique) est l'analogie de la masse (inertie mécanique) ; le condensateur (accumulation de charge sous l'effet d'une tension) est l'analogie du ressort (déplacement sous l'effet d'une force).

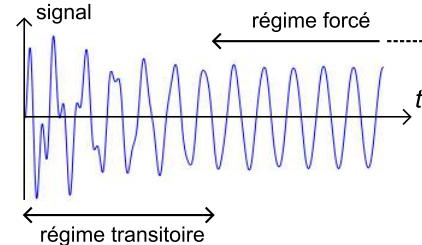
3 Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

L'essentiel du cours

□ Régime sinusoïdal forcé

À la mise en marche d'une source de tension sinusoïdale, à une phase transitoire succède un régime sinusoïdal appelé **régime sinusoïdal forcé**.

NB : la durée du régime transitoire, liée à une constante de temps dépendant des caractéristiques du circuit, est en général très faible à l'échelle humaine.



♡ En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs physiques sont des fonctions sinusoïdales du temps, de pulsation égale à celle imposée par la source.

□ Notation complexe d'un signal sinusoïdal

À tout signal $x(t)$ sinusoïdal de pulsation ω , on associe un signal complexe $\underline{x}(t)$ (fictif) tel que

♡ $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}} \underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X} e^{j\omega t}$ avec $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe du signal

NB : en physique, on préfère noter j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, pour éviter la confusion avec i l'intensité.

Propriétés : $X = |\underline{X}|$ et $\varphi = \arg \underline{X}$ (\underline{X} permet donc de retrouver l'amplitude et la phase à l'origine de $x(t)$)

♡ $\frac{dx}{dt} = j\omega \times \underline{x} \quad \int \underline{x} dt = \frac{\underline{x}}{j\omega}$ (démonstrations immédiates en utilisant les propriétés de la fonction $e^{j\omega t}$)

$x(t) = \Re[\underline{x}(t)]$ donc par linéarité de $\Re()$, les relations linéaires vérifiées par $x(t)$ se généralisent à $\underline{x}(t)$.

Cas particulier de l'électrocinétique :

♡ $\sum \pm i_k = 0$ loi des nœuds $\sum \pm u_k = 0$ loi des mailles

□ Impédance d'un dipôle linéaire

♡ $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i}$ **impédance** complexe d'un dipôle linéaire soumis à $u(t)$ et parcouru par $i(t)$ $[\underline{Z}] = \Omega$

⚠ Définition pour un couple (u, i) en convention récepteur ; en convention générateur, $\underline{Z} = -\underline{u}/\underline{i}$

♡ $\underline{Z}_R = R \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ pour une résistance, une bobine (idéale) et un condensateur

NB : démonstrations immédiates en partant des relations (u, i) pour chaque dipôle et en passant en notation complexe.

$\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ **admittance** du dipôle $[\underline{Y}] = S$ (siemens)

NB : l'admittance d'une résistance est $1/R = G$ sa conductance.

Intérêt : tous les dipôles linéaires vérifient une relation du type loi d'OHM $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$ donc *les lois de l'électrocinétique faisant intervenir des résistances se généralisent en régime sinusoïdal forcé*.

• **Lois d'association** $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_k$ en série $\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_k$ en parallèle

• **Diviseur de tension** $\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$ **Diviseur de courant** $\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}$

• **Loi des nœuds en terme de potentiels** (théorème de MILLMAN) $\sum \frac{\underline{V}_k - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k} = 0$

□ Application au circuit R,L,C série

(les calculs ne sont pas à mémoriser mais il faut savoir les refaire)

Le circuit est alimenté par une source idéale de tension de fém $e(t) = E \cos(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{C}} E e^{j\omega t}$ (donc $\underline{E} = E$)

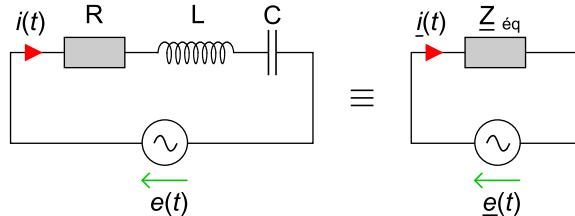
• Résonance en intensité

💡 Associer les dipôles en série puis écrire la loi d'OHM.

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{e} = \underline{Z}_{\text{éq}} \underline{i} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

NB : penser à utiliser l'astuce $1/j = -j$.



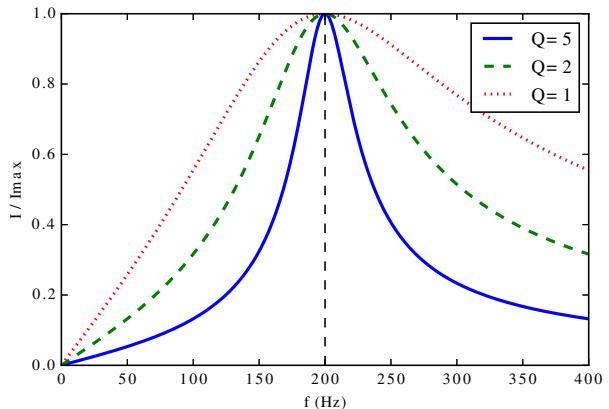
Propriétés :

♡ L'amplitude de l'intensité passe par un maximum à la pulsation de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
= phénomène de **résonance en intensité**.

♡ Le pic de résonance est d'autant plus étroit que le facteur de qualité Q est grand.

$$Q = 1/R \sqrt{L/C}$$
 (expression non exigible)

NB : on dit que la résonance est plus *aigüe*.

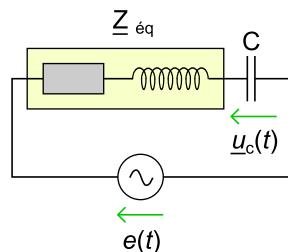


• Surtension aux bornes du condensateur

💡 Utiliser un diviseur de tension après avoir associé R et L.

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{éq}}} \underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

NB : en très basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), $U_C \simeq E$



Propriétés :

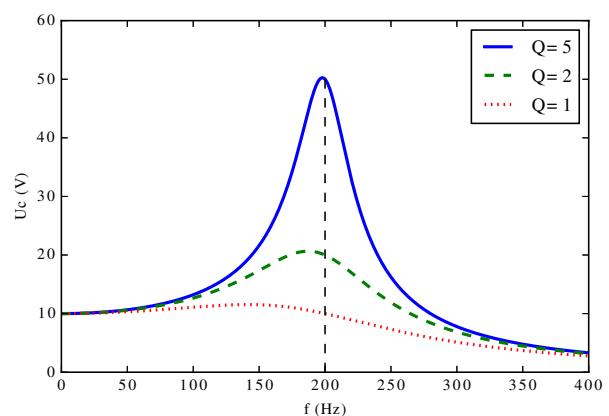
♡ L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur peut devenir supérieure à celle de la source.
= phénomène de **surtension**.

$$\text{La surtension a lieu si } Q > 1/\sqrt{2} \simeq 0,707$$

NB : la surtension a lieu à une fréquence proche de celle de la résonance.

♡ La surtension est d'autant plus marquée que Q est grand.

NB : si Q est suffisamment grand, $U_{C\max} \simeq QE$



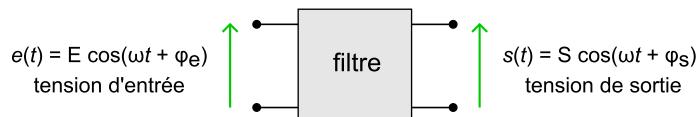
4 Filtres

L'essentiel du cours

□ Types de filtres

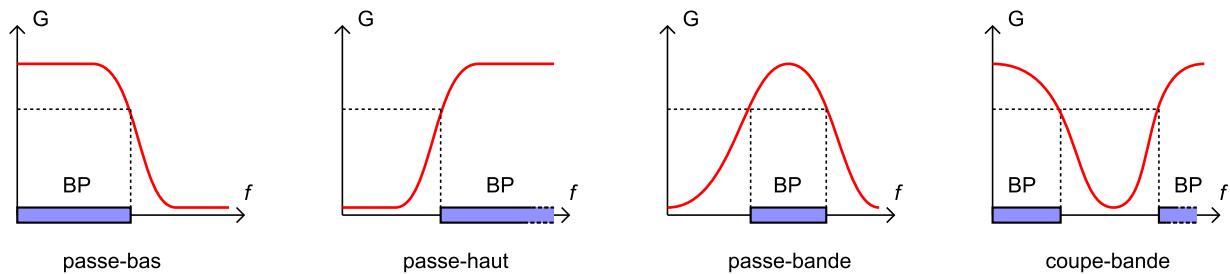
Un **filtre** permet de sélectionner dans un signal électrique les composantes sinusoïdales comprises dans un certain intervalle de fréquence, appelé **bande passante**.

Un filtre se présente sous la forme d'un quadripôle. L'étude théorique se fait en régime sinusoïdal forcé de pulsation $\omega = 2\pi f$.



♡ $G(f) = S/E$ gain du filtre S et E amplitudes des tensions de sortie et d'entrée à la pulsation ω

On distingue 4 types de filtres classiques :



♡ La bande passante BP est l'intervalle de fréquence tel que $G(f) \geq G_{\max}/\sqrt{2}$

NB : en terme de puissance, cela revient à dire qu'au moins la moitié de la puissance en entrée se retrouve en sortie.

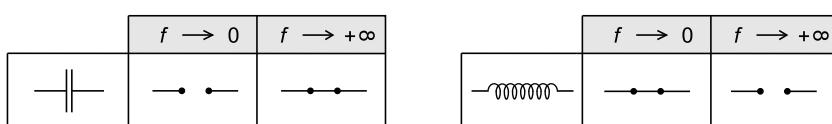
Les bornes de la bande passante sont appelées les **fréquences de coupure** f_c (en excluant les bornes nulles).

Elles vérifient donc la relation $G(f_c) = G_{\max}/\sqrt{2}$ (relation utile pour les déterminer par le calcul)

NB : un filtre passe-bas ou passe-haut possède une fréquence de coupure ; un filtre passe-bande ou coupe-bande en possède deux.

Méthode : comment déterminer la nature d'un filtre d'après son schéma électrique ?

① redessiner le filtre en très basse fréquence ($f \rightarrow 0$) et en très haute fréquence ($f \rightarrow +\infty$) en remplaçant condensateurs et bobines par leurs dipôles équivalents :



NB : on retrouve facilement les dipôles équivalents en utilisant l'impédance du dipôle dans les cas limites.

② dans chacun des deux cas, déterminer $s(t)$ et en déduire $G = S/E$.

⚠ Aux bornes d'un interrupteur ouvert, l'intensité est nulle mais pas nécessairement la tension.

③ en déduire la nature probable du filtre parmi les quatre types de filtres classiques.

□ Fonction de transfert

♡ $H = \underline{s}(t)/\underline{e}(t)$ fonction de transfert du filtre (sans dimension)

Propriétés : $|H| = S/E = G$ et $\arg H = \varphi_s - \varphi_e$

L'**ordre** du filtre est le plus haut degré des deux polynomes en $j\omega$ présents au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert.

Formes canoniques usuelles (non exigibles) :

Passe-bas du 1^{er} ordre

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Passe-haut du 1^{er} ordre

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$$

Passe-bande du 2^e ordre

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

H_0 gain maximal, ω_0 pulsation de coupure (de résonance pour le passe-bande), Q facteur de qualité

♡ Plus le facteur de qualité Q d'un filtre passe-bande est grand, plus sa bande passante est étroite.
= plus il est sélectif (qualité en principe recherchée pour un passe-bande)

Méthode : comment déterminer la fonction de transfert d'un filtre à partir de son schéma électrique ?

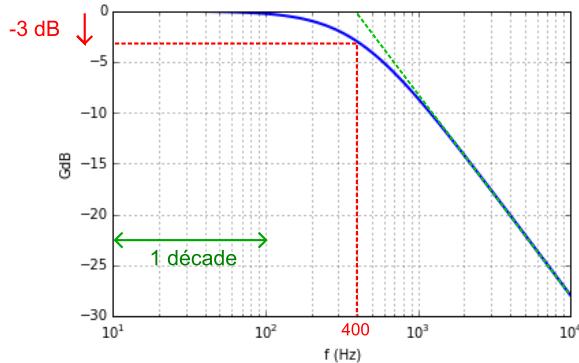
- ① représenter tous les dipôles sous forme d'impédances, en notation complexe;
- ② en présence de deux dipôles en série (ou en s'y ramenant), utiliser un **diviseur de tension** ;
- ③ à défaut, utiliser une ou plusieurs lois des nœuds en terme de potentiels (théorème de MILLMAN).

□ Diagramme de Bode

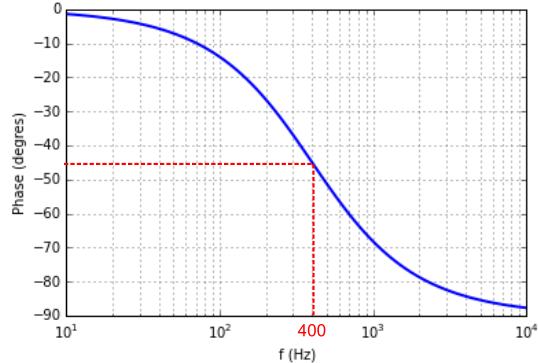
Le **diagramme de BODE** d'un filtre est la représentation graphique, avec pour abscisse la fréquence en échelle logarithmique, de deux courbes :

- $G_{dB} = 20 \log G$ le gain en décibel ;
- $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ le déphasage.

Exemple : filtre passe-bas d'ordre 1



Courbe de réponse en gain



Courbe de réponse en phase

Un intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$ dans un rapport de 10 ($f_2/f_1 = 10$) est appelé une **décade**.

♡ Les fréquences de coupure se situent aux intersections des courbes $G_{dB}(f)$ et $G_{dB_{max}} - 3,0$ dB
(sur la courbe en exemple, $G_{dB_{max}} = 0$ dB et $f_c = 400$ Hz)

Propriétés :

- les pentes des asymptotes obliques pour la courbe $G_{dB}(f)$ dépendent de l'ordre du filtre : pentes de ± 20 dB/décade pour un filtre d'ordre 1, pentes de ± 40 dB/décade pour un filtre d'ordre 2 ;
- **pour un filtre d'ordre 1**, les asymptotes en haute et en basse fréquence se coupent à la fréquence de coupure.

5 Amplificateur Linéaire Intégré en régime linéaire

L'essentiel du cours

□ Propriétés de l'ALI idéal

Deux entrées + (non inverseuse) et - (inverseuse), une sortie S, deux bornes d'alimentation à $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$.

NB : les bornes d'alimentation ne sont pas représentées sur les schémas.

$s = V_S$ tension de sortie, i_s courant de sortie

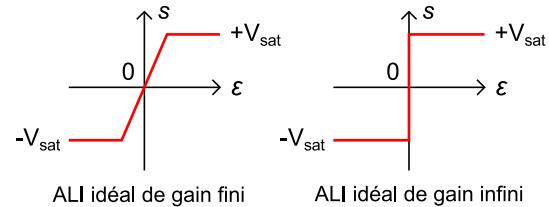
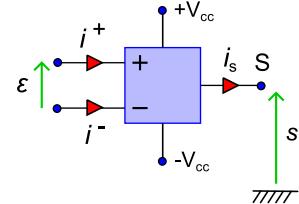
♡ $\varepsilon = V^+ - V^-$ tension différentielle d'entrée (= ddp entre les entrées + et -)

♡ $i^+ = i^- = 0$ pour un ALI idéal = les courants d'entrée sont nuls

♡ $|s| \leq V_{sat}$ V_{sat} tension de saturation de l'ALI

En régime linéaire, $s = \mu_0 \times \varepsilon$ avec $\mu_0 \simeq 10^5$.

Pour un ALI de gain infini (implicite sauf mention contraire), $\mu_0 \rightarrow +\infty$ d'où $\varepsilon = 0$.



♡ Pour un ALI idéal en régime linéaire, $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow V^+ = V^-$

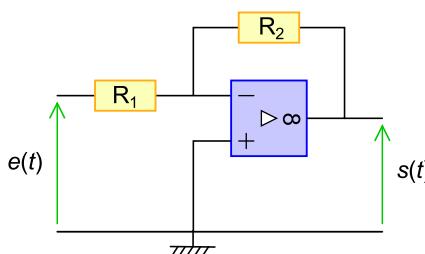
♡ Dans un montage, l'ALI est en régime linéaire s'il existe une branche reliant sa sortie à l'entrée -

NB : cette branche est aussi appelée **boucle de rétroaction positive**.

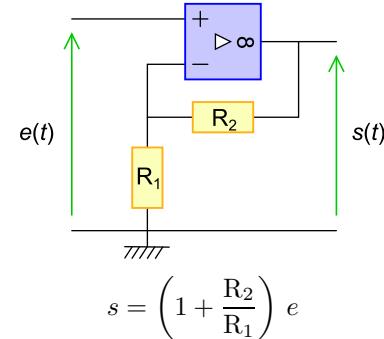
Lorsque $s = \pm V_{sat}$, l'**ALI sature**. Concrètement, cela se traduit par un **écrêtage** de la tension de sortie.

□ Montages classiques utilisant un ALI en régime linéaire

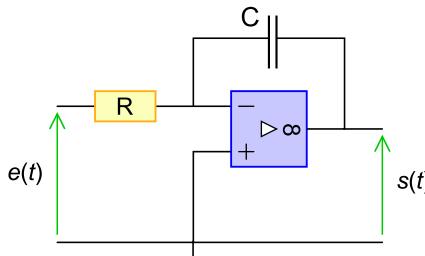
Amplificateur inverseur



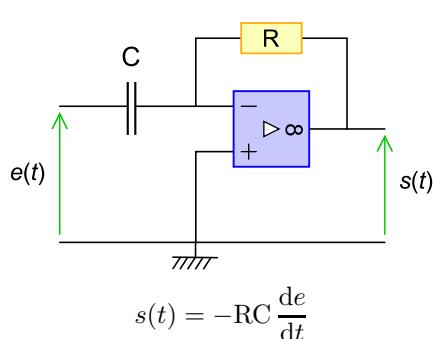
Amplificateur non inverseur



Intégrateur



Dérivateur



NB : il existe aussi des montages sommateur, soustracteur, convertisseur tension-courant ou courant-tension...

Méthode : comment déterminer la fonction réalisée par un montage avec ALI en régime linéaire ?

- ① Vérifier la présence d'une boucle de rétroaction positive pour valider le régime linéaire ;
- ② Exprimer les potentiels V^+ et V^- au niveau des nœuds en entrée
 - soit par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (en utilisant les impédances complexes en présence de bobines ou de condensateurs)
 - soit directement en égalant à 0 si le nœud est relié à la masse par un fil.

NB : l'ALI est supposé idéal donc les intensités dans les branches reliant les nœuds aux entrées + et - sont nulles.

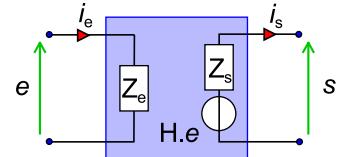
- ③ Écrire que $\varepsilon = 0$ (ALI de gain infini) donc que $V^+ = V^-$, en déduire la relation entre $s(t)$ et $e(t)$.

NB : en notation complexe, revenir en réels sachant que $\times j\omega \equiv d() / dt$ et que $\div j\omega \equiv \int dt$

□ Impédances d'entrée et de sortie d'un montage linéaire à une entrée et une sortie

Tout montage linéaire peut être modélisé par le schéma équivalent ci-contre.

- $\underline{Z}_e = Z_e \times i_e$ définit l'impédance d'entrée \underline{Z}_e (analogue à la loi d'OHM),
- $\underline{s} = H \times e - \underline{Z}_s \times i_s$ définit l'impédance de sortie \underline{Z}_s (H fonction de transfert du montage).



NB : \underline{Z}_s = impédance du générateur de THÉVENIN équivalent au dipôle de sortie du montage.

Cas particuliers intéressants :



- si $\underline{Z}_e = +\infty$, le montage ne prélève pas de courant au montage situé en amont ;
- si $\underline{Z}_s = 0$, la tension de sortie est indépendante du courant de sortie.

NB : dans le 2^e cas, le montage en sortie est une source idéale de tension = tension indépendante du dipôle placé en sortie.

Application aux quatre montages ALI précédents : $\underline{Z}_s = 0$ (immédiat d'après les relations entre s et e) et $\underline{Z}_e = R_1, +\infty, R$ et $1/(jC\omega)$ respectivement.

Méthode : comment déterminer l'impédance d'entrée d'un montage avec ALI ?

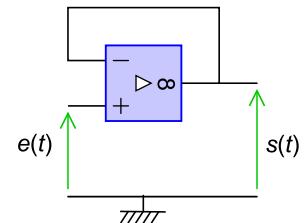
- ① si $i_e = 0$ (cas où le courant d'entrée du montage est égal à un courant d'entrée de l'ALI), $\underline{Z}_e = +\infty$,
- ② sinon, écrire la loi d'OHM généralisée aux bornes du dipôle situé entre l'entrée du montage et le nœud d'entrée de l'ALI.

□ Cas du montage suiveur

♡ Dans un montage suiveur, $s(t) = e(t)$ avec $\underline{Z}_e = +\infty$ et $\underline{Z}_s = 0$

Démonstrations (à connaître) :

- $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow V^+ = V^-$ d'où $s = e$ donc $\underline{Z}_s = 0$
- $i_e = i^+ = 0$ car ALI idéal d'où $\underline{Z}_e = +\infty$



Intérêt : relier deux circuits en cascade sans que le montage en amont ne soit « perturbé » par le montage en aval (*exemple* : filtres).

□ ALI réel

- $|i_s| < I_{sat}$ I_{sat} courant de saturation $\simeq 100$ mA

Conséquences : on utilise des résistances de l'ordre du $k\Omega$ pour éviter la saturation du courant ; l'ALI ne permet pas d'obtenir une grande puissance en sortie ($P = s \times i_s$).

- $|ds/dt| < \sigma$ σ vitesse limite de balayage en sortie $\simeq 1 \text{ V}.\mu\text{s}^{-1} = \text{slew-rate}$ en anglais

Conséquence : en haute fréquence, le signal de sortie peut être déformé lorsque la pente limite est atteinte = **phénomène de triangulation**.

Modélisation de la relation entrée/sortie en régime linéaire variable

Le gain d'un montage avec ALI diminue avec la fréquence car l'ALI possède un caractère passe-bas.

$$\underline{s} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \varepsilon \Leftrightarrow s(t) + \tau \frac{ds}{dt} = \mu_0 \varepsilon(t)$$

- μ_0 gain statique de l'ALI $\simeq 10^5$
- τ temps caractéristique de l'ALI $\simeq 10^{-2}$ s

⚠ Dans cette relation, c'est $\varepsilon(t)$ qui intervient et non la tension de sortie $e(t)$ du montage avec ALI.

NB : en régime statique, $\omega \rightarrow 0$ et on retrouve la relation $s = \mu_0 \times \varepsilon$ du régime linéaire.

6 ALI en régime saturé – Comparateurs

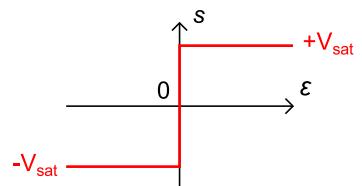
L'essentiel du cours

Dans toute la leçon, on considère le modèle de l'ALI idéal de gain infini.

□ Généralités

Dans un montage avec ALI en régime saturé, la valeur de la tension de sortie dépend du signe de ε :

- ♡ • $s = +V_{sat} \Leftrightarrow \varepsilon > 0$
- $s = -V_{sat} \Leftrightarrow \varepsilon < 0$

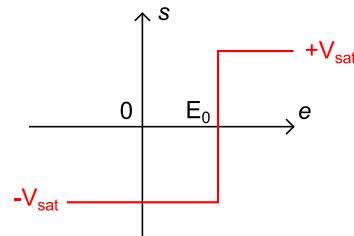
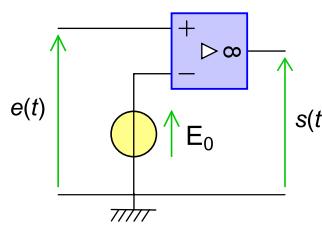


⚠ On ne peut donc jamais écrire $\varepsilon = 0$ dans ce cas.

- ♡ Dans un montage, l'ALI est en régime saturé s'il n'existe pas de boucle de rétroaction positive.

□ Comparateur simple

But : comparer une tension $e(t)$ à une tension seuil E_0 ; le résultat de la comparaison sera donné par le signe de la tension de sortie $s(t)$ de l'ALI.



- $\varepsilon = V^+ - V^- = e(t) - E_0$
- si $e(t) > E_0$, $\varepsilon > 0$ donc $s(t) = +V_{sat}$; si $e(t) < E_0$, $\varepsilon < 0$ donc $s(t) = -V_{sat}$

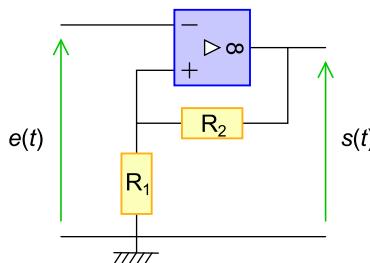
Limitation du comparateur simple : si la tension d'entrée $e(t)$ fluctue autour de la tension seuil E_0 , la tension de sortie bascule constamment entre $\pm V_{sat}$.

NB : comportement préjudiciable lorsqu'on souhaite réaliser un thermostat, un système automatique d'allumage...

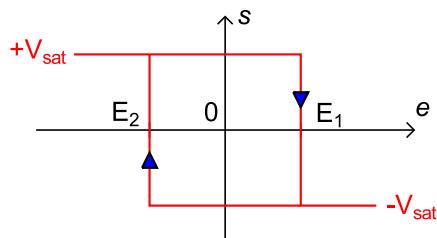
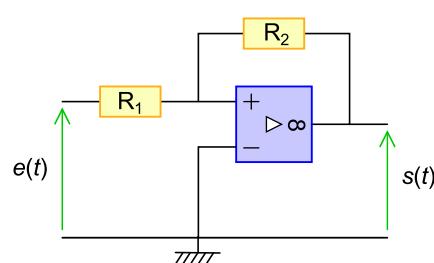
💡 Créer une marge de déclenchement autour de E_0 , ce que réalisent les comparateurs à hystérésis.

□ Comparateurs à hystérésis

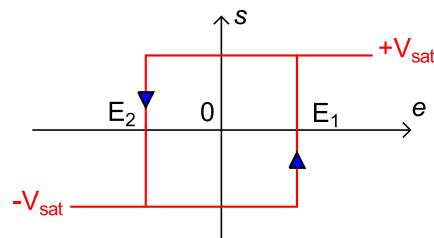
Comparateur à hystérésis inverseur



Comparateur à hystérésis non inverseur



$$E_1 = -E_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$



$$E_1 = -E_2 = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$$

NB : en permutant les entrées + et -, on retrouve les montages amplificateurs avec ALI en régime linéaire.

Propriétés : ces deux comparateurs basculent autour de la tension seuil moyenne $E_0 = 0 \text{ V}$ (on peut facilement faire en sorte que $E_0 \neq 0 \text{ V}$ en modifiant légèrement les montages). Les marges de déclenchement sont ajustables en modifiant les résistances R_1 et R_2 .

Méthode : comment tracer le cycle d'hystérésis d'un comparateur à hystérésis ?

- ① Exprimer les potentiels d'entrée V^+ et V^- de l'ALI (utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels) ;
- ② En déduire l'expression de la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V^+ - V^-$;
- ③ Considérer le cas où $e(t)$ est « très négative », en déduire le signe de ε donc la valeur de s ;
- ④ Augmenter $e(t)$ et déterminer pour quelle valeur seuil de $e(t)$ la tension différentielle ε change de signe : c'est la 1^{re} tension de basculement E_1 ;
- ⑤ Reprendre les deux étapes précédentes en considérant le cas où $e(t)$ est « très positive » et en diminuant $e(t)$ pour déterminer la seconde tension de basculement E_2 ;
- ⑥ Traduire les résultats sous forme graphique.

⚠ Ne pas oublier de flécher les sens de basculement sur le graphe.

NB : pour le comparateur à hystérésis inverseur, on peut trouver V^+ en appliquant un diviseur de tension aux bornes de R_1 .

Étude de la stabilité des montages avec ALI

But : démontrer le fait que la saturation de la tension de sortie $s(t)$ dans un montage avec ALI en régime saturé est liée à la divergence de la solution de l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$, établie en se servant de la relation

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = \mu_0 \varepsilon(t)$$

avec $\mu_0 \simeq 10^5$ gain statique de l'ALI et $\tau \simeq 10^{-2} \text{ s}$ constante de temps de l'ALI.

NB : cette relation traduit le caractère passe-bas d'un ALI (voir leçon sur l'ALI en régime linéaire).

⚠ La relation fait intervenir la tension différentielle d'entrée $\varepsilon(t)$ de l'ALI ≠ tension d'entrée $e(t)$ du montage.

Méthode : comment démontrer la saturation de la tension de sortie d'un montage avec ALI ?

- ① Exprimer la tension différentielle d'entrée $\varepsilon(t)$ en fonction de $e(t)$, $s(t)$ et des composants ;
- ② Remplacer $\varepsilon(t)$ dans l'équation différentielle liant $\varepsilon(t)$ et $s(t)$ pour l'ALI (qui sera rappelée) ;
- ③ Simplifier l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ en tenant compte du fait que $\mu_0 \gg 1$;
- ④ Déterminer la forme de la solution de l'équation différentielle homogène ;
- ⑤ $e(t)$, à placer dans le second membre, ne fait pas partie de l'équation homogène.
- ⑥ Si la solution diverge lorsque $t \rightarrow +\infty$, le régime est instable donc la tension $s(t)$ diverge et sature à $\pm V_{\text{sat}}$.

7 Oscillateurs électriques

L'essentiel du cours

But : réaliser un montage électrique avec des oscillations spontanées et sans amortissement.

Intérêt : générer un signal d'horloge par exemple.

💡 Utiliser un ALI où l'alimentation servira à compenser les pertes d'énergie (par effet JOULE notamment).

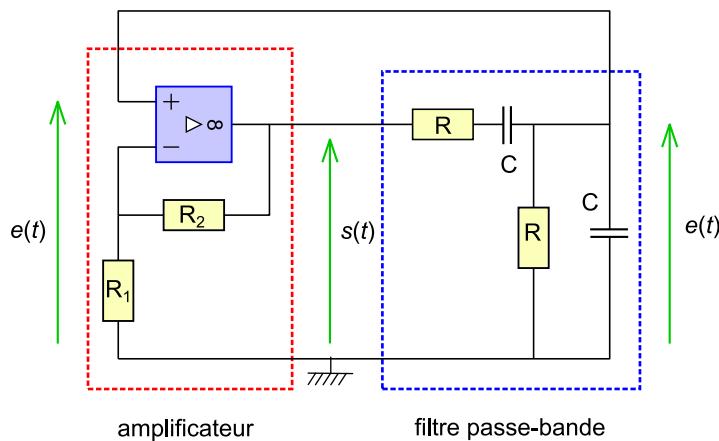
□ Oscillateur quasi sinusoïdal

💡 Coupler un montage amplificateur de tension et un filtre passe-bande :

- l'amplificateur de tension sert à compenser les pertes électriques et l'atténuation due au filtre,
- le filtre sert à sélectionner une fréquence d'oscillation, qui sera sa fréquence de résonance.

NB : plus le filtre sera sélectif, plus grande sera la stabilité en fréquence de l'oscillateur.

Exemple : oscillateur à filtre de WIEN



⚠ Dans ce système bouclé, la tension de sortie $s(t)$ de l'amplificateur est la tension d'entrée du filtre, et la tension d'entrée $e(t)$ de l'amplificateur est la tension de sortie du filtre.

- **Approche fréquentielle** = utilisation de la notation complexe en régime sinusoïdal forcé

En notant \underline{H}_1 et \underline{H}_2 les fonctions de transfert de l'amplificateur et du filtre, le bouclage impose

$$\underline{H}_1 \times \underline{H}_2 = 1$$

Le passage aux modules $|\underline{H}_1| \times |\underline{H}_2| = 1$ et aux arguments $\arg \underline{H}_1 + \arg \underline{H}_2 = 0$ fournit des relations utiles.

- **Approche temporelle** = utilisation des équations différentielles

💡 Utiliser le système des deux équations différentielles vérifiées par $e(t)$ et $s(t)$, dues aux deux montages, pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ ou $e(t)$.

Suivant les cas de figure, la solution peut osciller (*cas intéressant ici*), être amortie ou diverger.

Rappel : pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2, cela dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique ou de la valeur du facteur de qualité Q.

Application de l'approche fréquentielle (à savoir refaire) :

$$\underline{H}_1 = 1 + \frac{R_2}{R_1} = G \quad (\text{amplificateur non inverseur}) \quad \underline{H}_2 = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (\text{forme canonique})$$

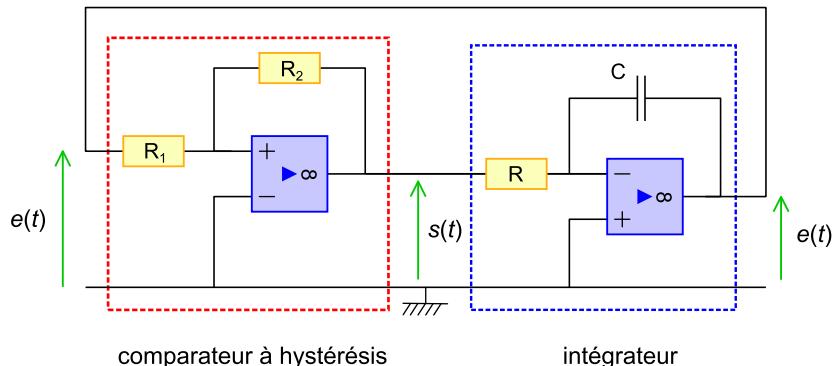
- $\arg \underline{H}_1 = 0$ d'où $\arg \underline{H}_2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$: la fréquence est égale à la fréquence de résonance f_0 du filtre ;
- $|\underline{H}_1| \times |\underline{H}_2| = G \times A_0 = 1$: le gain de l'amplificateur doit compenser l'atténuation $A_0 < 1$ due au filtre.

⚠ Cet oscillateur est quasi sinusoïdal (et non parfaitement sinusoïdal) dans la mesure où l'ALI doit fonctionner à la limite de saturation = effet non linéaire.

□ Oscillateur de relaxation

- 💡 Coupler un montage comparateur à hystérésis et un montage intégrateur :
- le comparateur à hystérésis possède deux états de sortie à $\pm V_{\text{sat}}$ entre lesquels la tension va osciller ;
 - les basculements de la tension de sortie du comparateur seront dues au montage intégrateur.

Exemple :



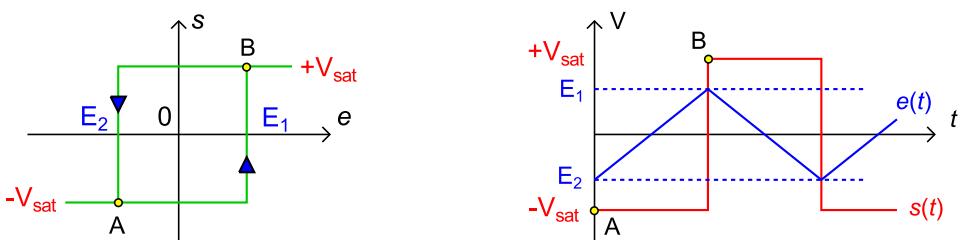
⚠ Dans ce système bouclé, la tension de sortie $s(t)$ du comparateur est la tension d'entrée de l'intégrateur, et la tension d'entrée $e(t)$ du comparateur est la tension de sortie de l'intégrateur.

Méthode : comment analyser le fonctionnement d'un oscillateur de relaxation ?

- ① Représenter le cycle d'hystérésis du comparateur ;
- ② Partir d'un état quelconque du comparateur = d'un point quelconque sur le cycle ;
- ③ En utilisant la fonction réalisée par l'intégrateur, montrer que la tension d'entrée varie et que le comparateur bascule ;
- ④ En repartant de l'état après basculement, montrer de même en utilisant la fonction réalisée par l'intégrateur que la tension d'entrée varie et que le comparateur rebascule en sens inverse ;
- ⑤ Le raisonnement reprend à l'identique donc le système évolue de manière périodique.

Exemple (à savoir refaire) :

- Partant du point A tel que $s = -V_{\text{sat}}$ et $e = E_2$,
- L'intégrateur réalise la fonction $e(t) = -\frac{1}{RC} \int s(t) dt = -\frac{1}{RC} \int -V_{\text{sat}} dt = +\frac{1}{RC} V_{\text{sat}} \times t + C^{\text{te}}$ qui fait que $e(t)$ augmente (linéairement) jusqu'à atteindre E_1 ;
- Après basculement = au point B, $s = +V_{\text{sat}}$ et $e = E_1$;
- L'intégrateur réalise la fonction $e(t) = -\frac{1}{RC} \int s(t) dt = -\frac{1}{RC} \int +V_{\text{sat}} dt = -\frac{1}{RC} V_{\text{sat}} \times t + C^{\text{te}}$ qui fait que $e(t)$ diminue (linéairement) jusqu'à atteindre E_2 ;
- On se retrouve au point A et le raisonnement reprend.



Propriété : la tension $e(t)$, de type triangle, oscille entre $E_2 = -E_1$ et E_1 avec des pentes $\pm \frac{1}{RC} V_{\text{sat}}$.

NB : il est facile à partir de là de trouver l'expression de la période T des oscillations, en écrivant que la pente est

$$\frac{1}{RC} V_{\text{sat}} = \frac{E_1 - E_2}{T/2}$$

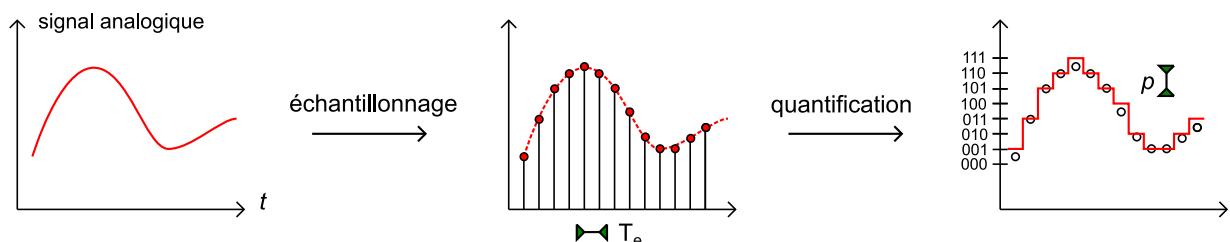
8 Électronique numérique

L'essentiel du cours

□ Passage d'un signal analogique à un signal numérique

- signal **analogique** = continu dans le temps et prenant des valeurs continues (signaux physiques réels) ;
- signal **numérique** = défini à certaines dates et prenant des valeurs discontinues.

La conversion d'un signal analogique en un signal numérique est réalisée dans un **convertisseur analogique numérique** = CAN (carte son d'un ordinateur...). Elle se fait en deux étapes : l'échantillonnage et la quantification.



NB : l'opération inverse (nécessaire par exemple pour écouter de la musique numérisée) est réalisée dans un CNA.

- **Echantillonnage** = discréétisation temporelle avec un pas T_e appelé période d'échantillonnage

Critère de Nyquist-Shannon : pour échantillonner un signal analogique sans perte d'information, la fréquence d'échantillonnage doit au moins être égale au double de la fréquence maximale contenue dans le signal analogique.

♡ $f_e \geq 2f_{\max}$ $f_e = 1/T_e$ fréquence d'échantillonnage, f_{\max} fréquence maximale du signal analogique

Application : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 44\,100$ Hz d'un CD respecte le critère puisque la fréquence sonore maximale audible pour un être humain est $f_{\max} = 20\,000$ Hz.

NB : la fréquence d'échantillonnage se note aussi en Sa/s pour *sample* (échantillon) par seconde.

Propriété : le nombre d'échantillons nécessaires pour échantillonner un signal de durée Δt s'écrit

$$\boxed{\text{nb échantillons} = \frac{\Delta t}{T_e} = \Delta t \times f_e}$$

- **Quantification** = discréétisation des valeurs échantillonnées avec un pas de quantification p

NB : la quantification est dite uniforme si le pas p est le même pour tout l'intervalle des valeurs échantillonnées.

Chaque valeur discréétisée est codée en binaire sur N bits. *Conséquences* :

$$\boxed{2^N \text{ valeurs possibles}} \quad \text{et} \quad \boxed{p = \Delta s / 2^N} \quad \Delta s \text{ amplitude de valeurs du signal analogique}$$

NB : l'erreur de quantification (différence maximale entre la valeur échantillonnée et la valeur quantifiée) est égale à $p/2$.

Propriété : l'espace mémoire occupé en octets par un signal numérique correspondant à un signal analogique de durée Δt s'écrit (à savoir retrouver)

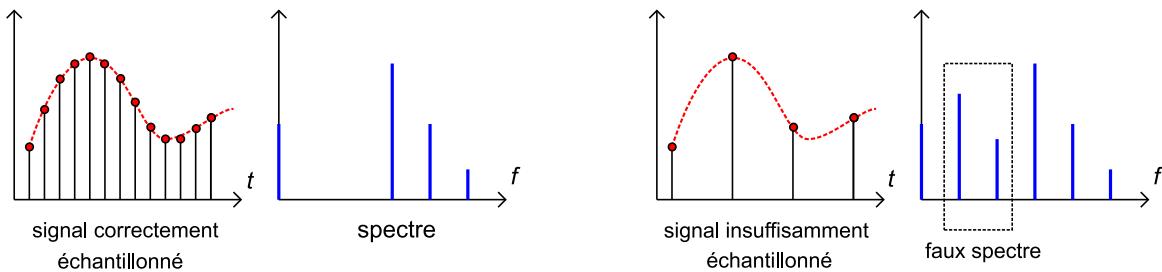
$$\boxed{\text{espace mémoire en octets} = \frac{\text{nb d'échantillons} \times \text{nb de bits par échantillon}}{\text{nb de bits par octet}} = \frac{\Delta t \times f_e \times N}{8}}$$

Exemple : 2 h de musique sur un CD (quantification sur 16 bits) occupe un espace mémoire de
 $2 \times 3\,600 \times 44\,100 \times 16 \div 8 = 605$ Mo (megaoctet)

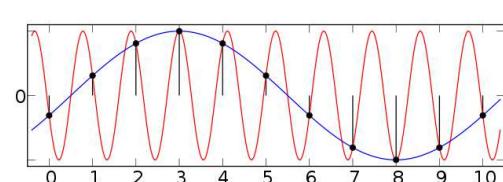
⚠ En informatique, 1 ko = $2^{10} = 1\,024 \simeq 10^3$ octets et 1 Mo = $2^{20} = 1\,048\,576 \simeq 10^6$ octets.

□ Repliement de spectre

Si le critère de NYQUIST–SHANNON n'est pas respecté (= si la fréquence d'échantillonnage est insuffisante), le spectre du signal numérisé fait apparaître de « fausses » fréquences, plus faibles que les fréquences réellement contenues dans le signal analogique = phénomène de repliement de spectre.



Justification expérimentale : dans un expérience de stroboscopie avec un disque en rotation uniforme, si la fréquence des éclairs lumineux n'est pas suffisante, on observe un mouvement apparent du disque à une vitesse plus faible que la vitesse réelle.



NB : on observe le même effet pour les roues de voiture qui semblent ralentir ou tourner à l'envers au cinéma ou à la télévision, où les images sont elles aussi échantillonées (24 images par seconde au cinéma).

💡 Pour éviter le repliement de spectre, une solution consiste à supprimer les hautes fréquences du signal analogique avant numérisation, de manière à respecter le critère de NYQUIST–SHANNON. On parle de filtre (passe-bas) anti-repliement (*antialiasing* en anglais).

• Cas de l'oscilloscope numérique

L'algorithme (le plus utilisé) pour calculer le spectre à partir des tensions numérisées est la FFT = *Fast Fourier Transform* (transformée de FOURIER rapide).

♡ Pour éviter le repliement de spectre sur l'oscilloscope numérique, il faut lire la valeur de la fréquence d'échantillonnage utilisée et vérifier que le critère de NYQUIST–SHANNON est respecté.

⚠ La valeur de la fréquence d'échantillonnage d'un oscilloscope numérique n'est pas fixe, elle dépend de la base de temps choisie.

□ Filtrage passe-bas numérique

But : réaliser le filtrage passe-bas d'ordre 1 d'un signal numérique.

Soit $s[i]$ les valeurs des échantillons, tels que $s[i] = s(t_i = i \times T_e)$ avec $s(t)$ le signal analogique et $i \in \mathbb{N}$.

💡 Utiliser l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie du filtre et approximer la dérivée première temporelle par la pente entre deux échantillons consécutifs.

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \Leftrightarrow \underline{s} + j\omega \underline{s}/\omega_0 = \underline{e} \Leftrightarrow s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = e(t) \Leftrightarrow s[i] + \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_i} = e[i]$$

avec $\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t_i} \simeq \frac{s(t_i + T_e) - s(t_i)}{T_e} = \frac{s[i + 1] - s[i]}{T_e}$

d'où l'on déduit

$$s[i + 1] = s[i] + \omega_0 T_e (e[i] - s[i])$$

Il reste à programmer le calcul successif des valeurs de s avec une boucle **for**.

NB : pour un filtre d'ordre 2, l'algorithme de calcul est plus compliqué car il faut approximer une dérivée temporelle d'ordre 2.

1 Bases de la thermodynamique

L'essentiel du cours

□ Vocabulaire de la thermodynamique

Un **système thermodynamique** est la matière contenue dans une surface fermée réelle (= délimitée par des parois) ou fictive (= surface de contrôle). Tout ce qui n'appartient pas au système est appelé **milieu extérieur**.

NB : un système thermodynamique contient un **très grand nombre de particules** ce qui exclut d'étudier toutes les particules indépendamment. Exemple : 18 g d'eau soit 1 mol d'eau contient $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules d'eau (nombre d'AVOGADRO).

Un système est

- **fermé** s'il n'y a pas d'échange de matière entre le système et le milieu extérieur ;
- **ouvert** s'il y a des échanges de matière (entrée ou sortie) entre le système et le milieu extérieur ;
- **isolé** s'il n'y a pas d'échange d'énergie (mécanique et thermique) entre le système et le milieu extérieur.

Au cours d'une transformation, le système échange avec le milieu extérieur de l'énergie sous deux formes :

- **travail mécanique** W des forces pressantes extérieures appliquées au système ;
- **transfert thermique** Q échangé par conduction, par convection ou par rayonnement.

♡ Une énergie (W ou Q) est comptée positivement si elle est reçue par le système, négativement sinon.

Un système à l'équilibre est caractérisé par des **paramètres d'état** : pression P , température T , volume V , quantité de matière $n\dots$. Une relation mathématique entre les paramètres d'état est appelée **équation d'état**.

Une transformation est

- **isotherme** si la température T du système reste constante ;
- **isobare** si la pression P du système reste constante ;
- **isochore** si le volume V du système reste constant ;
- **quasi statique** si le système passe par une suite continue d'états d'équilibre ;
- **adiabatique** s'il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur.
- **monotherme** si la température extérieure T_{ext} reste constante ;
- **monobare** si la pression extérieure P_{ext} reste constante ;
- **réversible** si la transformation est quasi statique et qu'on peut revenir à l'état initial en repassant par les mêmes états antérieurs ;

⚠ Une transformation adiabatique n'est pas nécessairement isotherme : on peut faire varier la température d'un corps sans aucun transfert thermique, en le comprimant ou en le dilatant (une détente adiabatique d'un gaz le refroidit).

NB : des parois imperméables à la chaleur sont dites **calorifugées** ou **athermanes**. Dans ce cas, la transformation est adiabatique.

Un **thermostat** ou une **source de chaleur** est un système qui peut échanger de la chaleur sans que sa température ne varie (exemple : l'atmosphère, un four...).

□ Travail W des forces pressantes extérieures

Lors d'une transformation entre deux états A et B, le travail mécanique échangé par le système est

♡
$$W_{AB} = - \int_A^B P_{\text{ext}} dV$$
 (démonstration simple en considérant le cas d'un gaz dans un cylindre)

Cas particuliers :

- transformation isochore : $W = 0$
- transformation monobare : $W = -P_{\text{ext}} \Delta V$
- transformation quasistatique : $W = - \int P dV$
- transformation isobare quasi statique : $W = -P \Delta V$

Propriétés :

- $W > 0$ au cours d'une compression, $W < 0$ au cours d'une détente ;

- pour une transformation quasi statique, W est l'aire sous la courbe dans un diagramme $(P, V) =$ diagramme de CLAPEYRON.

□ Transfert thermique Q

- Cas d'une transformation à volume constant :

♡ $Q_v = \int_A^B C_v dT$ C_v capacité thermique du système à volume constant ($J.K^{-1}$)

- Cas d'une transformation à pression constante :

♡ $Q_p = \int_A^B C_p dT$ C_p capacité thermique du système à pression constante ($J.K^{-1}$)

Si les capacités thermiques sont indépendantes de la température (cas usuel),

$$Q_v = C_v \Delta T \quad \text{transfert thermique isochore} \quad Q_p = C_p \Delta T \quad \text{transfert thermique isobare}$$

Propriétés :

- $C_p \approx C_v = C$ capacité thermique pour une phase condensée (= liquide ou solide) ;
- $c = C/m$ est la capacité thermique massique, $c_m = C/n$ est la capacité thermique molaire.

Exemple : $c_{\text{eau}} = 4180 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ (pour éléver de 1°C une masse de 1 kg d'eau, il faut fournir 4180 J).

□ Cas du gaz parfait

- Dans le **modèle du gaz parfait**,

- les particules du gaz n'interagissent pas à distance (les seules interactions sont les chocs),
- les particules n'ont pas de dimension propre (ce sont des points).

- L'équation d'état du gaz parfait est

♡ $PV = nRT$ $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ constante des gaz parfaits (indépendante de la nature du gaz)

⚠ P est en **pascal** ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), T est en **kelvin** ($T(\text{K}) = T(\text{ }^\circ\text{C}) + 273$), V est en **mètre-cube** ($1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$).

Application : le volume molaire d'un gaz parfait, à 20°C et sous 1 bar, est $V_m = 24 \text{ L.mol}^{-1}$

On pose $\gamma = c_p/c_v$ $\gamma = 7/5 = 1,40$ pour un gaz parfait diatomique (cas approché de l'air).

- **Loi de LAPLACE :**

♡ $PV^\gamma = C^{\text{te}}$ pour une transformation adiabatique, quasi statique et pour un gaz parfait

⚠ Bien vérifier (et connaître) les **trois** conditions d'application !

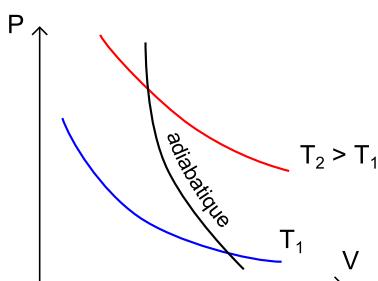
NB : la loi de LAPLACE se démontre à partir du 1^{er} principe.

Propriété : la loi de LAPLACE peut se réécrire $TV^{\gamma-1} = C^{\text{te}}$ ou $P^{1-\gamma}T^\gamma = C^{\text{te}}$ en utilisant l'équation d'état du gaz parfait (à savoir faire).

- **Transformation polytropique** = cas intermédiaire entre isotherme et adiabatique : $PV^k = C^{\text{te}}$

- $k = 1$: $PV = C^{\text{te}}$ donc transformation isotherme,
- $k = \gamma$: $PV^\gamma = C^{\text{te}}$ donc transformation adiabatique quasi statique.

- **Diagramme de CLAPEYRON :**



- Les isothermes sont des branches d'hyperboles ; plus la température est élevée, plus l'isotherme est haute ;
- les adiabatiques sont plus pentues que les isothermes.

⚠ Diagramme valable uniquement dans le domaine gazeux : au-delà d'une certaine pression (qui dépend de la température), le gaz se liquéfie (voir leçon sur les changements d'état).

2 Premier principe

L'essentiel du cours

□ Énergie totale, énergie interne d'un système thermodynamique

♡ $E = U + E_m$ énergie totale d'un système thermodynamique

- **U énergie interne** = somme des énergies cinétiques d'agitation thermique des particules (à l'échelle microscopique) et des énergies potentielles d'interaction entre les particules du système;
- **E_m énergie mécanique** = $E_c + \sum E_p$ somme de l'énergie cinétique du système (à l'échelle macroscopique) et des énergies potentielles liées aux forces extérieures (énergie potentielle de pesanteur notamment).

Rappels : $E_c = (1/2)mv_G^2$ avec m la masse du système et v_G la vitesse du centre d'inertie, $E_{pp} = mgz_G + C^{te}$ énergie potentielle de pesanteur avec z_G l'altitude du centre d'inertie.

Propriétés :

- U est une fonction d'état (donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi);
- U est extensive (proportionnelle à la quantité de matière ou à la masse) et additive (si on réunit deux systèmes, leurs énergies internes s'additionnent).

□ Énoncé du premier principe pour un système fermé

C'est l'écriture en thermodynamique de la conservation de l'énergie : **la variation de l'énergie d'un système = somme des énergies (algébriques) échangées par le système avec l'extérieur** soit

♡ $\Delta E = W + Q + W'$ pour un système fermé

- W travail des forces pressantes appliquées sur le système,
- Q transfert thermique échangé par le système avec l'extérieur,
- W' autres travaux échangés par le système avec l'extérieur (*exemples* : forces de frottement avec les parois si le système est un fluide visqueux, travail échangé avec les parties mobiles...).

⚠ Pour un système **ouvert**, il existe une formulation spécifique (voir cours de 2^e année).

- **Cas d'un système fermé macroscopiquement au repos** ($E_m = C^{te}$) et tel que $W' = 0$:

♡ $\Delta U = W + Q$ (cas essentiellement au programme en 1^{re} année)

⚠ W et W' sont des **termes d'échange** et non des fonctions d'état : leur valeur dépend (a priori) du chemin suivi et n'ont de sens qu'au cours d'une transformation.

□ Fonction enthalpie

♡ $H = U + PV$ fonction **enthalpie** (J)

- H est une fonction d'état (sa variation ne dépend donc pas du chemin suivi) additive (si on réunit deux systèmes, leurs enthalpies s'additionnent).

Propriété fondamentale :

♡ $\Delta H = Q_p$ pour une transformation monobare entre deux états d'équilibre mécanique

Démonstration (à savoir faire) : écrire le premier principe avec $W = -P_{ext}\Delta V = -P_2V_2 + P_1V_1$

Conséquence : pour une transformation isobare quasi statique, $dH = \delta Q_p = C_p dT$ d'où

♡ $C_p = (\partial H / \partial T)_P$

- **Cas d'une phase condensée** (= liquide ou solide) : $H = H(T)$, $U = U(T)$ et $C_v \simeq C_p = C$ d'où

♡ $\Delta U \stackrel{PC}{=} \Delta H \stackrel{PC}{=} C \Delta T$ pour une phase condensée de capacité thermique C indépendante de T

□ Cas du gaz parfait

- Première loi de JOULE :

♡ L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température soit $U \stackrel{GP}{=} U(T)$

Gaz parfait monoatomique : $U = (3/2) nRT$ (résultat issu du calcul de la pression cinétique et de la définition de la température cinétique).

- Seconde loi de JOULE :

♡ L'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température soit $H \stackrel{GP}{=} H(T)$

NB : conséquence directe de la première loi de JOULE sachant que $H = U + PV = U + nRT$ pour un gaz parfait.

Conséquences :

- La variation d'énergie interne d'un gaz parfait s'écrit, **indépendamment de la transformation**,

♡ $\Delta U \stackrel{GP}{=} C_v \Delta T$

- La variation d'enthalpie d'un gaz parfait s'écrit, **indépendamment de la transformation**,

♡ $\Delta H \stackrel{GP}{=} C_p \Delta T$

- Relation de MAYER (déduite par dérivation par rapport à T de $H = U + PV = U + nRT$) :

♡ $C_p - C_v \stackrel{GP}{=} nR$

En utilisant $\gamma = C_p/C_v$, on en déduit

♡ $C_v \stackrel{GP}{=} \frac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p \stackrel{GP}{=} \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$

3 Second principe

L'essentiel du cours

□ Énoncé

Pour tout système thermodynamique fermé subissant une transformation au cours de laquelle il échange des transferts thermiques Q_i avec des sources de chaleur (= thermostats) à des températures T_i , il existe une fonction d'état S appelée entropie, extensive, dont la variation est telle que

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

- $S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ **entropie échangée** avec T_i en kelvin
- $S_{\text{créée}}$ **entropie créée** avec $\begin{cases} S_{\text{créée}} = 0 & \text{si la transformation est réversible} \\ S_{\text{créée}} > 0 & \text{si la transformation est irréversible} \end{cases}$

Interprétation physique : le second principe impose $S_{\text{créée}} \geq 0$ au cours d'une transformation donc il impose un sens d'évolution : **le second principe est un principe d'évolution thermodynamique**.

Conséquences :

- la variation de S est indépendante du chemin suivi puisque S est une fonction d'état ;
- S est définie à une constante près puisque seule ΔS est définie dans le second principe ;
- $[S] = \text{J.K}^{-1}$ car S a même unité que $S_{\text{éch}}$;
- pour un système de masse m et de quantité de matière n , S étant extensive, on peut poser $s = S/m$ l'entropie massique en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ou $s_m = S/n$ l'entropie molaire en $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Cas particuliers :

- $\Delta S \geq 0$ pour un système thermiquement isolé car $S_{\text{éch}} = 0$ dans ce cas ;

NB : c'est par exemple le cas pour le système formé par l'Univers...

- $\Delta S = 0$ pour une transformation adiabatique ($S_{\text{éch}} = 0$) réversible ($S_{\text{créée}} = 0$) :

Une transformation adiabatique réversible est une transformation isentropique

Causes d'irréversibilité :

- les frottements, qui convertissent de l'énergie mécanique en énergie thermique; la transformation inverse ne réalisant pas la conversion inverse, elle est irréversible ;
- des inhomogénéités de température : le phénomène de diffusion thermique est par nature irréversible (diffusion du chaud vers le froid et non l'inverse) ;
- une absence d'équilibre mécanique du système avec l'extérieur ($P \neq P_{\text{ext}}$) au cours d'une transformation « brutale » : la transformation n'étant pas quasi statique, elle ne peut pas être réversible (voir la définition de la réversibilité).

□ Expressions de l'entropie d'un système

NB : L'établissement de ces expressions est hors-programme ; elles seront systématiquement fournies par les énoncés.

- **Cas d'un gaz parfait :**

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln T + nR \ln V + C^{\text{te}} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln T - nR \ln P + C^{\text{te}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln P + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln V + C^{\text{te}}$$

Propriété : pour une transformation adiabatique réversible = isentropique, $\Delta S = 0$ d'où

$$\frac{nR}{\gamma - 1} \ln P + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln V + C^{\text{te}} = C^{\text{te}} \Leftrightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} \ln PV^{\gamma} = C^{\text{te}} \Leftrightarrow PV^{\gamma} = C^{\text{te}} : \text{loi de LAPLACE}$$

- **Cas d'une phase condensée** (= liquide ou solide) de capacité thermique C :

$$S = C \ln T + C^{\text{te}} \quad (\text{T en kelvin})$$

Bilan entropique

Méthode : comment faire un bilan entropique pour une transformation ?

- ① définir clairement le système fermé considéré ;
- ② déterminer ΔS du système en utilisant l'expression de S fournie ;
- ③ déterminer les transferts thermiques Q_i avec les thermostats de températures T_i et en déduire $S_{\text{éch}}$;
- ④ écrire que $S_{\text{crée}} = \Delta S - S_{\text{éch}}$ et vérifier que $S_{\text{crée}} \geq 0$.

Application : on place un solide de température initiale $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ avec un four thermostaté à $\theta_2 = 120^\circ\text{C}$. Le solide a pour capacité thermique $C = 100 \text{ J.K}^{-1}$. Faire le bilan entropique.

1. $S = \{\text{solide}\}$
2. $\Delta S = C \ln T_2 - C \ln T_1 = C \ln(T_2/T_1)$ (la température finale du solide est θ_2) soit $\Delta S = 29,4 \text{ J.K}^{-1}$
- ⚠ Températures à convertir en kelvin.**
3. $S = \text{phase condensée évoluant de manière isobare donc } Q = \Delta H = C \Delta T = 10\,000 \text{ J d'où } S_{\text{éch}} = Q/T_2 = 25,4 \text{ J.K}^{-1}$ (un seul thermostat ici) ;
4. $S_{\text{crée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = 4,0 \text{ J.K}^{-1} > 0$ donc la transformation est irréversible.

Ici, la cause d'irréversibilité est **l'inhomogénéité de température dans le solide au cours de la transformation** (le température n'est uniforme qu'au début et à la fin de la transformation).

4 Changement d'état d'un corps pur

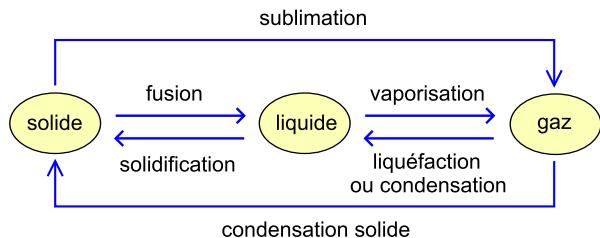
L'essentiel du cours

□ Vocabulaire

Un **corps pur** est un système thermodynamique constitué d'une seule espèce chimique.

NB : l'air n'est pas un corps pur : c'est un mélange de O₂ (20%) et N₂ (80%).

On distingue trois états physiques (ou phases) pour la matière : solide, liquide et gaz (ou vapeur).



⚠ vaporisation ≠ évaporation = passage des particules de la phase liquide à la phase vapeur par un phénomène de diffusion (eau qui s'évapore dans un récipient, linge qui séche...).

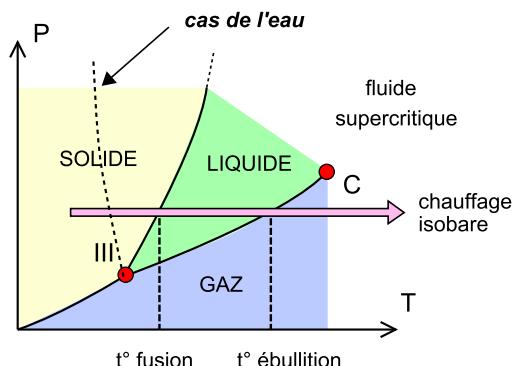
NB : il existe un quatrième état de la matière : le **plasma** = mélange d'ions et d'électrons, qu'on trouve dans les écrans à plasma, les étoiles...

□ Étude descriptive

♡ La température de changement d'état d'un corps pur dépend de la pression.

NB : par exemple, la température d'ébullition de l'eau est supérieure à 100°C dans une cocotte-minute (pression élevée) et inférieure à 100°C en altitude (pression faible). On peut même faire bouillir de l'eau à température ambiante sous une cloche à vide.

- **Diagramme d'équilibre (P, T)**



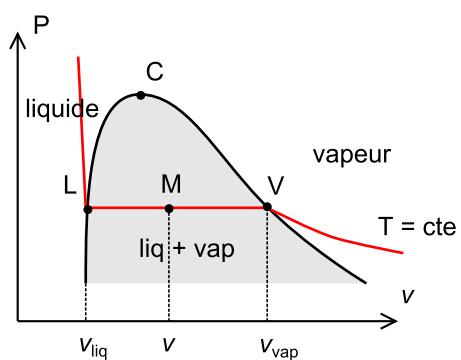
- III = **point triple** : coexistence à l'équilibre des trois états de la matière ;
- C = **point critique** : point au-delà duquel les états liquide et gaz ne sont plus distinguables = fluide supercritique.

Cas particulier de l'eau : la pente de la courbe d'équilibre solide ↔ liquide est négative.

NB : lorsqu'on comprime de la glace de manière isotherme, on fait donc fondre la glace.

NB : par chauffage isobare à une température supérieure à T_{III}, on passe du solide au liquide puis au gaz (moyen mnémotechnique).

- **Diagramme (P, v) pour un équilibre diphasé liquide-vapeur**



Le domaine diphasé liquide-vapeur est situé sous la **courbe de saturation** (sommet = point critique C) :

- la frontière liquide/liq+vap est la **courbe d'ébullition** ;
- la frontière liq+vap/vapeur est la **courbe de rosée**.

Une isotherme est

- quasi verticale dans le domaine liquide (car le liquide est quasi incompressible) ;
- horizontale dans le domaine diphasé liq+vap (car à T = C^{te}, l'équilibre diphasé a lieu à P = C^{te}) ;
- en forme d'hyperbole dans le domaine gazeux si le modèle du gaz parfait s'applique (voir leçon sur les bases de la thermodynamique).

- Théorème des moments :

♡ $x = \frac{v(T) - v_{\text{liq}}(T)}{v_{\text{vap}}(T) - v_{\text{liq}}(T)} = \frac{LM}{LV}$ titre massique en vapeur dans le domaine diphasé liq+vap

avec $x = m_{\text{vap}}/m$ égal par définition au rapport de la masse de vapeur sur la masse totale.

NB : démonstration basée sur l'extensivité du volume : le volume total est égal à la somme du volume de phase liquide et du volume de phase vapeur.

⚠ Les trois volumes massiques doivent être pris à la même température (= sur la même isotherme).

Cas particuliers : $x = 0$ si $M \equiv L$, $x = 1$ si $M \equiv V$ (bon moyen pour retrouver la relation !)

□ Étude thermodynamique

- Enthalpie massique de changement d'état

♡ $\ell_{12}(T) = \Delta h_{12}(T)$ enthalpie massique de changement d'état 1 → 2 à la température T

NB : $\ell_{12}(T)$ est aussi appelée chaleur latente massique de changement d'état.

Propriété : puisque $\Delta h = q$ pour une transformation isobare (voir leçon sur le 1^{er} principe),

$\ell_{12}(T) = q_{12}$ transfert thermique pour le changement d'état 1 → 2 isobare à la température T

⚠ Au cours d'un changement d'état isobare, le système échange de la chaleur **sans variation de température**.

Exemples : sous 1 bar,

- $\ell_{\text{fus}}(0^\circ\text{C}) = 334 \text{ kJ.kg}^{-1}$ enthalpie massique de fusion de l'eau,
- $\ell_{\text{vap}}(100^\circ\text{C}) = 2250 \text{ kJ.kg}^{-1}$ enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

NB : les valeurs des enthalpies de changement d'état dépendent de la température à laquelle on réalise le changement d'état (donc dépendent de la pression).

- Entropie massique de changement d'état

♡ $\Delta s_{12}(T) = \frac{\Delta h_{12}(T)}{T}$ entropie massique de changement d'état 1 → 2 à la température T

NB : démonstration basée sur le second principe $\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}}$ en considérant le cas d'un changement d'état 1 → 2 réversible, isobare et isotherme à la température T (s étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin arbitraire) : $s_{\text{créée}} = 0$ et $s_{\text{éch}} = q_{12}/T$ avec $q_{12} = \Delta h_{12}$ car la transformation est isobare.

Propriété : $\Delta h_{12}(T) = \ell_{12}(T)$ donc on peut aussi écrire $\Delta s_{12}(T) = \frac{\ell_{12}(T)}{T}$

NB : $\ell_{12}(T) > 0$ pour les changements d'état solide → liquide et liquide → vapeur donc $\Delta s_{12} > 0$ aussi : ces changements d'état s'accompagnent d'une augmentation de l'entropie = du désordre du système (interprétation statistique de l'entropie).

– Méthode : comment traiter un problème de calorimétrie avec changement d'état ?

- ① définir comme système thermodynamique le calorimètre et son contenu ;
- ② écrire que $\Delta H = Q$ (transformation isobare) et que $Q = 0$ (calorimètre calorifugé), d'où $\Delta H = 0$;
- ③ dire que par additivité de l'enthalpie, $\Delta H = \sum_i \Delta H_i$ pour tous les constituants i ;

NB : ne pas oublier d'inclure le calorimètre si sa capacité thermique est prise en compte.

- ④ si le constituant i est une phase condensée qui ne change pas d'état, $\Delta H_i = C_i \Delta T_i$;

NB : on peut mettre les températures en °C puisqu'il s'agit d'une différence.

- ⑤ si le constituant i change d'état, utiliser le fait que H étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi : définir des états fictifs intermédiaires et utiliser le fait que $\Delta H_{12}(T) = m_i \ell_{12}(T)$ au cours du changement d'état ;

- ⑥ remplacer les ΔH_i dans $\sum_i \Delta H_i = 0$ et en déduire la grandeur recherchée (une capacité thermique massique ou une température la plupart du temps).

⚠ Il faut dans certains cas faire une hypothèse sur l'état physique final (entiièrement liquide, entièrement solide ou diphasé). Dans ce cas, ne pas oublier de vérifier l'hypothèse à la fin !

5 Machines thermiques

L'essentiel du cours

□ Généralités

Une machine thermique est un dispositif dans lequel **un fluide décrit un cycle** en échangeant

- des transferts thermiques Q_i avec des sources de chaleur (= thermostats) à des températures T_i ,
- un travail mécanique W avec l'extérieur (travail total sur le cycle).

⚠ $\Sigma = \sum Q_i$ le fluide donc les échanges énergétiques (Q_i et W) sont algébrisés par rapport au fluide : positifs s'ils sont reçus par le fluide, négatifs s'ils sont cédés par le fluide.

Propriétés :

- machine **motrice** $\Leftrightarrow W < 0 \Leftrightarrow$ cycle décrit dans le sens horaire dans (P, V)
- machine **réceptrice** $\Leftrightarrow W > 0 \Leftrightarrow$ cycle décrit dans le sens anti-horaire dans (P, V)

NB : moyen mnémotechnique : un moteur qui fonctionne bien « tourne comme une horloge ».

♡ efficacité e ou rendement $r = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie dépensée}} = \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance dépensée}}$

NB : un rendement est toujours < 1 , une efficacité peut être > 1 .

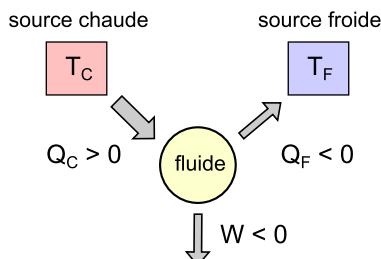
□ Machines thermiques dithermes

Une machine thermique est ditherme si le fluide échange de la chaleur uniquement avec deux sources de chaleur (polytherme = échanges avec plusieurs sources, monotherme = échange avec une seule source).

• Moteur thermique

♡ Un moteur thermique fournit un travail mécanique grâce à la chaleur apportée par la source chaude.

NB : l'apport de chaleur se fait en général grâce à une réaction chimique de combustion exothermique.



$$r_{\text{moteur}} = \frac{-W}{Q_C}$$

Propriété : $r < 1$

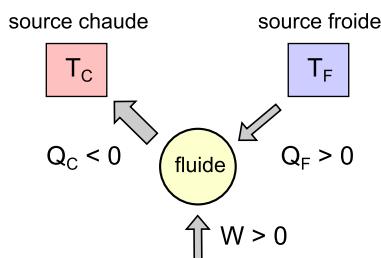
Ordre de grandeur : $r \simeq 50\%$ pour un moteur thermique.

• Machine frigorifique

♡ Une machine frigorifique préleve de la chaleur à la source froide grâce à un travail mécanique.

NB : la source froide est par exemple l'intérieur d'un réfrigérateur ; la source chaude est l'air ambiant. Le travail mécanique est apporté par un compresseur.

Exemples : un réfrigérateur, un congélateur, un climatiseur.



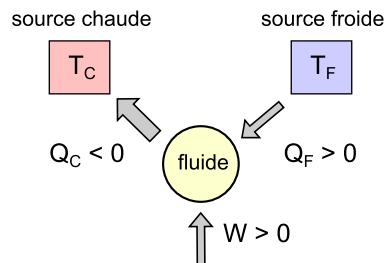
$$e_{\text{frigo}} = \frac{Q_F}{W}$$

NB : une machine frigorifique inverse le sens « naturel » de l'échange thermique qui a lieu spontanément de la source chaude vers la source froide. De l'énergie thermique est cédée à la source chaude : une machine frigorifique réchauffe la source chaude (la pièce par exemple).

• Pompe à chaleur

♡ Une pompe à chaleur (PAC) réchauffe la source chaude en prélevant de la chaleur à la source froide, grâce à un travail mécanique.

NB : la source chaude peut être l'intérieur d'une habitation, la source froide étant alors l'air froid extérieur.



$$e_{\text{PAC}} = \frac{-Q_C}{W}$$

Propriétés :

- schéma de fonctionnement identique à celui d'une machine frigorifique (seul le but change) ;
- $e_{\text{PAC}} > 1$: l'énergie utile est supérieure à l'énergie dépensée.

⚠ Les expressions du rendement ou de l'efficacité d'une machine ne sont pas à connaître par cœur : il faut savoir les expliquer en identifiant le but de la machine = énergie utile et l'énergie qui permet de réaliser le but = énergie dépensée.

□ Application des principes de la thermodynamique

💡 Appliquer les principes **sur un cycle** : les variations des fonctions d'état sur un cycle sont alors nulles.

- **Premier principe appliqué au fluide sur un cycle** : $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_F + Q_C$

NB : le fluide est un système fermé considéré comme étant immobile à l'échelle macroscopique : on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur dans le premier principe.

- **Second principe appliqué au fluide sur un cycle** : $\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} + S_{\text{créée}}$
avec $S_{\text{créée}} \geq 0$ ($= 0$ pour un cycle réversible).

• Théorème de CARNOT

♡ Le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique est maximal lorsque le cycle est réversible.

NB : démonstration liée au fait que $S_{\text{créée}} \geq 0$.

En utilisant les deux principes et en remplaçant dans l'expression de r ou e , on obtient (à savoir faire)

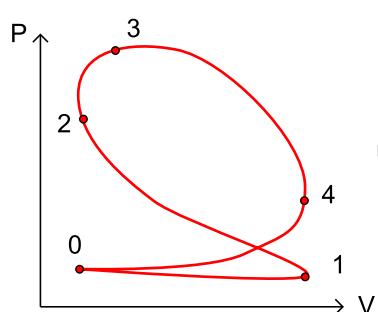
$$r_{\max}(\text{moteur}) = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad e_{\max}(\text{frigo}) = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad e_{\max}(\text{PAC}) = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

⚠ Expressions uniquement valables **pour un cycle réversible**.

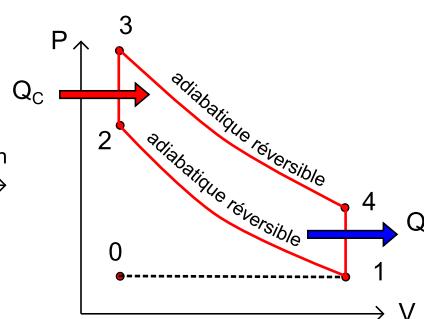
Méthode : comment calculer le rendement ou l'efficacité d'un cycle quelconque ?

- ① identifier le type de machine thermique et en déduire l'expression de son efficacité ;
- ② utiliser le 1^{er} principe pour remplacer $W = -Q_C - Q_F$, ce qui évite d'avoir à calculer W ;
- ③ déterminer Q_F et Q_C en utilisant les caractéristiques des transformations correspondantes ;
- 💡 Penser à la loi de LAPLACE chaque fois que les trois conditions d'application sont réunies.
- ④ remplacer Q_F et Q_C pour calculer l'efficacité ou le rendement.

□ Exemple de modélisation d'un cycle réel : moteur à essence



modélisation →



- $0 \rightarrow 1$: admission,
- $1 \rightarrow 2$: compression,
- $2 \rightarrow 3$: explosion,
- $3 \rightarrow 4$: détente,
- $4 \rightarrow 0$: échappement.

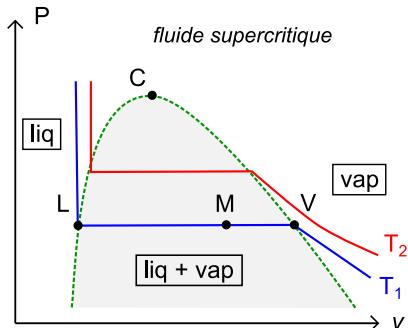
NB : dans le cycle modélisé, on ne tient pas compte des phases d'admission et d'échappement car les travaux mécaniques se compensent lors de ces phases.

Ici, $Q_C = Q_{23} = C_v(T_3 - T_2)$ et $Q_F = Q_{41} = C_v(T_1 - T_4)$ car les transformations sont isochores.

6 Diagrammes d'état d'un fluide pur réel

L'essentiel du cours

□ Diagramme de Clapeyron (P, v)



Les courbes isothermes sont

- quasi verticales dans la partie liquide car un liquide est très peu compressible
- horizontales dans la partie liquide-vapeur car pour un état d'équilibre diphasé, $T = C^{\text{te}}$ implique $P = C^{\text{te}}$
- des branches d'hyperboles dans la partie gazeuse si le gaz est supposé parfait car $P = nRT/V = (RT/M) \times 1/v$

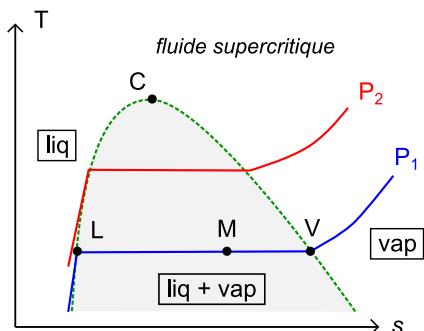
La frontière qui délimite la partie liquide-vapeur est la **courbe de saturation**, dont le sommet est le **point critique**; au-delà de ce point, le fluide est dans un état **supercritique**.

- La portion de la courbe de saturation à gauche de C est la **courbe d'ébullition**; les points sur cette courbe sont dans un état de **liquide saturant**;
- la portion de la courbe de saturation à droite de C est la **courbe de rosée**; les points sur cette courbe sont dans un état de **vapeur saturante**.

La pression d'équilibre liquide-vapeur à la température T est la **pression de vapeur saturante** $P_{\text{sat}}(T)$.

$$\heartsuit \quad x = \frac{LM}{LV} = \frac{v_M - v_{\text{liq}}}{v_{\text{vap}} - v_{\text{liq}}} \quad \text{théorème des moments avec } x = \frac{m_{\text{vap}}}{m} \quad \text{le titre massique en vapeur en M}$$

□ Diagramme entropique (T, s)

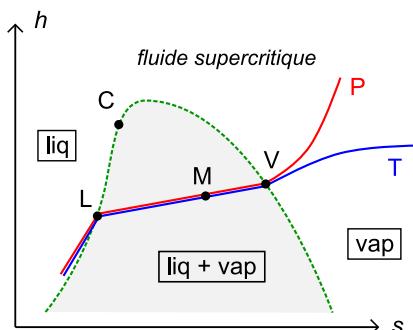


Les courbes isobares sont

- quasi confondues avec la courbe d'ébullition dans la partie liquide (admis)
- horizontales dans la partie liquide-vapeur car pour un état d'équilibre diphasé, $P = C^{\text{te}}$ implique $T = C^{\text{te}}$
- des branches d'exponentielles dans la partie gazeuse si le gaz est supposé parfait. *Démonstration* (à connaître) : utiliser l'identité thermodynamique $dh = T ds + v dP$ avec $dh = c_p dT$ pour un gaz parfait.

$$\heartsuit \quad x = \frac{LM}{LV} = \frac{s_M - s_{\text{liq}}}{s_{\text{vap}} - s_{\text{liq}}} \quad \text{théorème des moments}$$

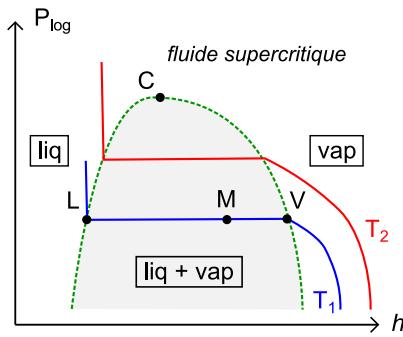
□ Diagramme de Mollier (h, s)



- Dans la partie liquide-vapeur, les **courbes isobares et isothermes sont confondues** car pour un état d'équilibre diphasé, $P = C^{\text{te}}$ implique $T = C^{\text{te}}$ et **forment des portions de droites de pente positive**.
Démonstration : utiliser $dh = T ds + v dP$.
- Les courbes isothermes tendent vers des droites horizontales dans la partie vapeur car pour un gaz parfait, $dh = c_p dT$.

$$\heartsuit \quad x = \frac{LM}{LV} = \frac{s_M - s_{\text{liq}}}{s_{\text{vap}} - s_{\text{liq}}} = \frac{h_M - h_{\text{liq}}}{h_{\text{vap}} - h_{\text{liq}}} \quad \text{théorème des moments}$$

□ Diagramme des frigoristes (P_{\log} , h)



Les courbes isothermes sont

- **horizontales dans la partie liquide-vapeur** car pour un état d'équilibre diphasé, $T = C^{\text{te}}$ implique $P = C^{\text{te}}$
- **tendent vers des droites verticales dans la partie gazeuse à faible pression** car dans ce cas, le modèle du gaz parfait s'applique avec $dh = c_p dT$.

♡
$$x = \frac{LM}{LV} = \frac{h_M - h_{\text{liq}}}{h_{\text{vap}} - h_{\text{liq}}}$$
 théorème des moments

□ Propriétés générales

Soit G une grandeur physique caractéristique du système (paramètre d'état ou fonction d'état), additive et extensive, et g la grandeur massique associée.

Exemples : volume V , enthalpie H , entropie S ...

Méthode : comment démontrer un théorème des moments pour une grandeur massique g ?

- ① utiliser l'additivité de la grandeur G pour écrire $G = G_{\text{liq}} + G_{\text{vap}}$ où G_{liq} et G_{vap} sont les grandeurs G pour la phase liquide et pour la phase vapeur ;
- ② utiliser l'extensivité de la grandeur G pour écrire

$$G = m \times g \quad G_{\text{liq}} = m_{\text{liq}} \times g_{\text{liq}} \quad G_{\text{vap}} = m_{\text{vap}} \times g_{\text{vap}}$$

avec g , g_{liq} et g_{vap} les grandeurs massiques pour le système, la phase liquide et la phase vapeur ;

⚠ Les grandeurs g , g_{liq} et g_{vap} doivent être définies à la même pression et à la même température que celles du système.

- ③ remplacer $m_{\text{vap}} = x \times m$ et $m_{\text{liq}} = (1 - x) \times m$ puis isoler x .

♡
$$g = x g_{\text{vap}} + (1 - x) g_{\text{liq}}$$

Démonstration : voir fiche méthode précédente.

Application : la variation d'enthalpie lors d'un changement isotherme à T (donc isobare) entre deux points A et B appartenant au domaine diphasé liquide-vapeur s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{A \rightarrow B} h &= h_B - h_A = [x_B h_{\text{vap}} + (1 - x_B) h_{\text{liq}}] - [x_A h_{\text{vap}} + (1 - x_A) h_{\text{liq}}] \\ &= (x_B - x_A) [h_{\text{vap}} - h_{\text{liq}}] \\ &= (x_B - x_A) \ell_{\text{vap}}(T) \end{aligned}$$

7 Thermodynamique industrielle

L'essentiel du cours

□ Principes de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire

Dans toute la suite, $\Delta_{e \rightarrow s}$ signifie variation de la grandeur x entre l'entrée et la sortie.

- 1^{er} principe pour un dispositif à 1 entrée et 1 sortie

♡
$$\Delta_{e \rightarrow s} [h + (1/2) c^2 + gz] = w_i + q$$
 (formulation du 1^{er} principe en terme d'énergies massiques)

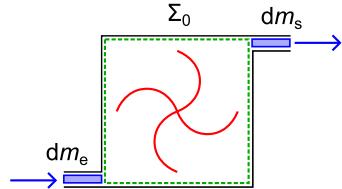
- h enthalpie massique du fluide, c vitesse du fluide, z altitude du fluide,
- w_i travail indiqué massique = travail échangé par le fluide avec les parties mobiles,
- q transfert thermique massique échangé par le fluide avec l'extérieur.

NB : $(1/2) c^2$ est l'énergie cinétique massique, gz est l'énergie potentielle de pesanteur massique.

Démonstration (à connaître absolument) :

💡 Appliquer le 1^{er} principe entre t et $t + dt$ au système fermé Σ tel que

- $\Sigma(t) = \Sigma_0(t) + dm_e$
- $\Sigma(t + dt) = \Sigma_0(t + dt) + dm_s$



NB : le système ouvert Σ_0 est appelé volume ou surface de contrôle.

- 1^{er} principe pour un dispositif à plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties

♡
$$\sum_{\text{sorties}} D_{ms} [h_s + (1/2) c_s^2 + g z_s] - \sum_{\text{entrées}} D_{me} [h_e + (1/2) c_e^2 + g z_e] = P_i + P_{th}$$

P_i puissance indiquée, P_{th} puissance thermique échangée par le fluide avec l'extérieur

Propriété :
$$\sum_{\text{entrées}} D_{me} = \sum_{\text{sorties}} D_{ms}$$
 (équivalent à la loi des noeuds en électrocinétique)

Cas particulier : pour un système à 1 entrée et 1 sortie, $D_{me} = D_{ms} = D_m$ d'où

♡
$$D_m \Delta_{e \rightarrow s} [h + (1/2) c^2 + gz] = P_i + P_{th}$$
 (formulation du 1^{er} principe en terme de puissances)

$$P_i = D_m w_i$$
 et $P_{th} = D_m q$ (démonstrations utilisant la relation puissance = énergie / durée)

- 2^e principe pour un dispositif à 1 entrée et 1 sortie

♡
$$\Delta_{e \rightarrow s} s = \frac{q}{T_{ext}} + s_{\text{créée}}$$

Méthode : comment exprimer la variation d'enthalpie d'un fluide ?

- ① si le fluide est assimilé à un gaz parfait et qu'il reste gazeux, $\Delta h = c_p \Delta T$

NB : $c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{\gamma n R}{m(\gamma - 1)} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$ avec M la masse molaire du gaz.

- ② si le fluide reste liquide, $\Delta h = c \Delta T$ (si c capacité thermique massique du liquide indépendante de T)

- ③ si le fluide subit un changement d'état complet, $\Delta h = \ell$ (enthalpie massique de changement d'état)

- ④ si le fluide subit un changement d'état incomplet, utiliser $h(M) = x h_v + (1 - x) h_\ell$

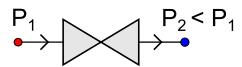
- ⑤ si on dispose d'un diagramme des frigoristes, on peut lire graphiquement Δh

□ Dispositifs ouverts usuels

- **Détendeur calorifugé**

$$\Delta_{e \rightarrow s} c \simeq \Delta_{e \rightarrow s} z \simeq 0, w_i = 0 \text{ (absence de partie mobile) et } q = 0 \text{ (calorifugé)}$$

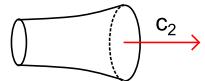
d'où $\boxed{\Delta_{e \rightarrow s} h = 0}$ détente isenthalpe



- **Tuyère calorifugée**

$$\Delta_{e \rightarrow s} z \simeq 0, \Delta_{e \rightarrow s} c = c_2 - c_1 \simeq c_2, w_i = 0 \text{ (absence de partie mobile) et } q = 0 \text{ (calorifugé)}$$

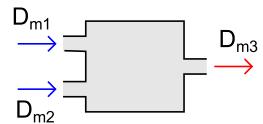
d'où $\boxed{\Delta_{e \rightarrow s} h + (1/2) c_2^2 = 0}$



- **Mélangeur ou séparateur calorifugé**

$$c \simeq C^{te}, z \simeq C^{te}, \mathcal{P}_i = 0 \text{ (absence de partie mobile) et } \mathcal{P}_{th} = 0 \text{ (calorifugé)}$$

d'où $\boxed{D_{m3} h_3 - D_{m2} h_2 - D_{m1} h_1 = 0}$

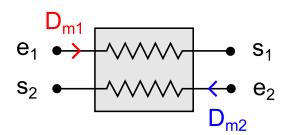


- **Échangeur thermique globalement calorifugé**

$$c \simeq C^{te}, z \simeq C^{te}, \mathcal{P}_i = 0 \text{ (absence de partie mobile) et } \mathcal{P}_{th} = 0 \text{ (calorifugé)}$$

d'où $\boxed{[D_{m1} h_{s1} + D_{m2} h_{s2}] - [D_{m1} h_{e1} + D_{m2} h_{e2}] = 0}$

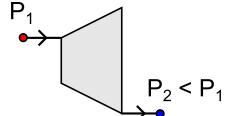
soit $\boxed{D_{m1} \Delta h_{e1 \rightarrow s1} + D_{m2} \Delta h_{e2 \rightarrow s2} = 0}$



- **Turbine calorifugée**

$$\Delta_{e \rightarrow s} c \simeq \Delta_{e \rightarrow s} z \simeq 0, q = 0 \text{ (calorifugé)}$$

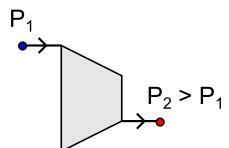
d'où $\boxed{\Delta_{e \rightarrow s} h = w_i < 0}$ (travail cédé par le fluide aux parties mobiles donc négatif)



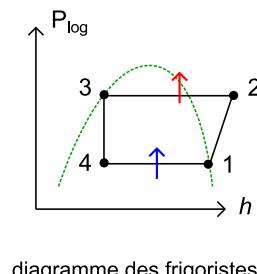
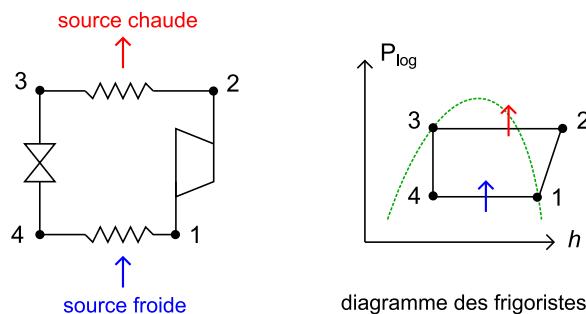
- **Comresseur calorifugé**

$$\Delta_{e \rightarrow s} c \simeq \Delta_{e \rightarrow s} z \simeq 0, q = 0 \text{ (calorifugé)}$$

d'où $\boxed{\Delta_{e \rightarrow s} h = w_i > 0}$ (travail reçu par le fluide de la part des parties mobiles donc positif)



□ Exemple de cycle frigorifique



Description du cycle

- 1 → 2 : passage dans le compresseur, le fluide gazeux s'échauffe ;

NB : si la compression est adiabatique et réversible, elle est isentropique ; et si le gaz est supposé parfait, on peut appliquer les lois de LAPLACE.

- 2 → 3 : passage dans l'échangeur thermique isobare (condenseur) en contact avec la source chaude = l'extérieur du frigo ; le fluide cède de la chaleur et se liquéfie ;

- 3 → 4 : passage dans le détendeur isenthalpe ; la pression diminue et le fluide se refroidit ;

- 4 → 1 : passage dans l'échangeur thermique isobare (évaporateur) en contact avec la source froide = l'intérieur du frigo ; le fluide reçoit de la chaleur et se vaporise.

Expression de l'efficacité

♡ efficacité ou rendement = $\frac{\text{énergie ou puissance utile}}{\text{énergie ou puissance dépensée}}$ = $\frac{q_{41}}{w_{12}}$ pour la machine frigorifique

NB : un rendement est inférieur à 1, une efficacité peut être > 1.

8 Conduction thermique

L'essentiel du cours

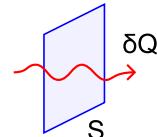
Il existe trois modes de transferts thermiques :

- **conduction** : l'agitation thermique se transmet de proche en proche à cause des chocs à l'échelle atomique, sans déplacement macroscopique du milieu : cas des solides. *Exemples* : mur d'habitation, paroi d'un radiateur.
- **convection** : la chaleur est transportée grâce au mouvement du fluide (naturel ou forcé). *Exemples* : courants thermiques dans l'atmosphère, convection de la chaleur des radiateurs dans une pièce.
- **rayonnement** : la chaleur est transportée par l'onde électromagnétique émise par un corps. *Exemples* : rayonnement solaire, rayonnement infrarouge.

□ Lois de la conduction thermique

♡ $\Phi_S = \frac{\delta Q}{dt}$ flux thermique à travers S $[\Phi_S] = W$

δQ transfert thermique à travers S pendant dt



- Cas où le transfert thermique est uniformément réparti sur la surface S :

♡ $j_Q = \frac{\Phi_S}{S} \Leftrightarrow \Phi_S = j_Q \times S$ densité (surfacique) de flux thermique $[j_Q] = W.m^{-2}$

NB : concrètement, j_Q est la puissance thermique par unité de surface.

- Cas où le transfert thermique n'est pas réparti uniformément sur la surface S :

♡ $\Phi_S = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$ (principe de découpage/sommation : le flux thermique élémentaire à travers dS est $\delta\Phi = j_Q \times dS$)

♡ $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ **Loi de FOURIER** (loi empirique) avec λ la conductivité thermique du milieu

Propriétés :

- le signe $-$ indique que le transfert thermique se fait vers les températures décroissantes ($\vec{\text{grad}} T$ est orienté vers les T croissants) donc « du chaud vers le froid »
 - $\vec{\text{grad}} T = \partial T / \partial x \vec{u}_x$ dans le cas d'une diffusion thermique unidirectionnelle selon (Ox)
 - $[\lambda] = W.K^{-1}.m^{-1}$ (par analyse dimensionnelle de la loi de FOURIER)
- Ordres de grandeur* : $\lambda(\text{air}) \simeq 0,02 \text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$, $\lambda(\text{verre}) \simeq 1 \text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$, $\lambda(\text{cuivre}) \simeq 390 \text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$.

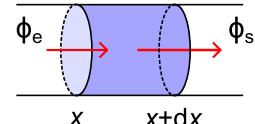
- **Équation de diffusion thermique** dans le cas d'une diffusion selon (Ox) et en l'absence de production de chaleur dans le milieu (à savoir refaire)

💡 Bilan de conservation de l'énergie appliqué à Σ = tranche du milieu de section S comprise entre x et $x+dx$.

$$dH_\Sigma = \sum \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s \quad (\text{1er principe pour une transformation monobare})$$

$$\frac{dH_\Sigma}{dt} = \frac{\delta Q_e}{dt} - \frac{\delta Q_s}{dt} = \Phi_e - \Phi_s = \Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)$$

$$dH_\Sigma = dm c dT \quad (\text{phase condensée}) \text{ avec } dm = \rho dV = \rho S dx$$



En faisant apparaître $\frac{\Phi(x + dx, t) - \Phi(x, t)}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et en utilisant $\Phi = j_Q \times S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

⚠ Dans le cas d'un milieu avec production interne de chaleur (par effet JOULE, à cause de réactions nucléaires...), il faut ajouter dans $\sum \delta Q$ un terme supplémentaire $\delta Q_p > 0$ correspondant à cette chaleur produite.

□ Cas du régime stationnaire

On se place dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle selon (Ox).

• Propriétés

$T(x, t) = T(x)$ donc l'équation de diffusion devient $\frac{d^2T}{dx^2}$ de solution du type $T(x) = ax + b$

♡ En régime stationnaire et dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle sans production de chaleur dans le milieu, la température suit une loi affine dans le milieu.

Le flux thermique se conserve à travers toute section d'un même tube de courant thermique.

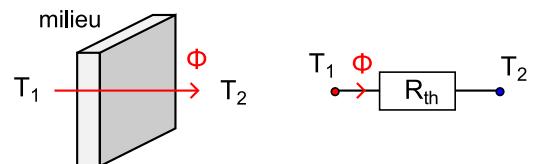
• Résistance thermique

Par analogie avec l'électricité, on pose

♡ $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$

R_{th} résistance thermique du milieu $[R_{th}] = \text{K.W}^{-1}$

NB : le milieu conducteur peut avoir une forme quelconque : couche plane, cylindrique, sphérique...



♡ $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ (dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle et sans production de chaleur dans le milieu)

e épaisseur du milieu, λ conductivité thermique du milieu, S surface du milieu.

NB : de même, la résistance électrique d'un conducteur de longueur e , de section s et de conductivité électrique λ s'écrit $R_{elec} = \frac{e}{\gamma s}$

Intérêt : les résistances thermiques suivent les mêmes lois d'association que les résistances électriques.

Exemple : dans le cas d'un mur constitué de couches formées de différents matériaux, la résistance thermique du mur est la somme des résistances thermiques des couches (loi d'association série car couches traversées par le même flux).

□ Transfert thermique par conducto-convection

La conducto-convection a lieu quand un fluide en mouvement (convection) échange de la chaleur avec un solide (conduction). *Exemples* : l'air qui circule contre les parois d'un radiateur.

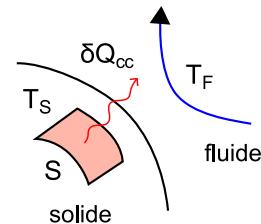
Loi de NEWTON : le flux thermique conducto-convection s'écrit

$$\Phi_{cc} = \frac{\delta Q_{cc}}{dt} = h S (T_S - T_F)$$

h coefficient d'échange conducto-convectif, S surface du solide

T_S température de surface du solide, T_F température du fluide

NB : la valeur de h dépend de la nature du fluide et du solide, et de la vitesse du fluide par rapport au solide (plus la vitesse est grande, meilleur est l'échange thermique donc plus grand est h).



♡ $R_{cc} = \frac{1}{hS}$ résistance thermique conducto-convective $[R_{cc}] = \text{K.W}^{-1}$

(démonstration immédiate en réécrivant la loi de NEWTON sous la forme $T_S - T_F = R_{cc}\Phi_{cc}$.)

1 Champ magnétique

L'essentiel du cours

□ Sources de champ magnétique – Cartes de champ magnétique

♡ Les sources de champ magnétique sont les courants électriques. (expérience d'Ørsted, 1820)

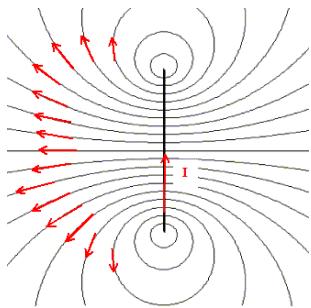
NB : dans un aimant, aucun courant n'existe à l'échelle macroscopique mais des mouvements microscopiques de charges sont à l'origine du champ magnétique.

$B_{\text{terrestre}} \simeq 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ unité : tesla (T) (champ créé par des mouvements de convection du magma)

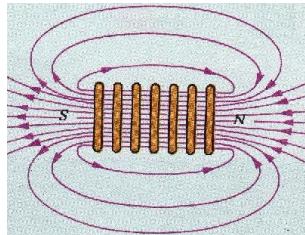
Une **ligne de champ** magnétique est une courbe tangente en tous ses points au champ magnétique local, orientée dans le sens du champ. L'ensemble des lignes de champ constitue la **carte de champ** d'une source de champ magnétique.

NB : on peut visualiser expérimentalement les lignes de champ magnétique avec des boussoles ou avec de la limaille de fer.

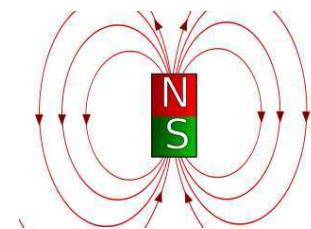
Exemple n° 1 : spire circulaire



Exemple n° 2 : solénoïde



Exemple n° 3 : aimant



♡ Les lignes de champ s'enroulent (= tourbillonnent) autour des courants électriques.

NB : critère qui permet de situer les courants électriques sur une carte de champ.

- Lignes de champ parallèles = zone où le champ magnétique est uniforme;
- lignes de champ qui se resserrent = zone où le champ magnétique augmente.

NB : propriétés démontrées en 2^e année, liées à la conservativité du flux magnétique.

□ Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant

Les expressions (qui seront fournies) font intervenir la constante $\mu_0 = \text{perméabilité magnétique du vide}$
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

• Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

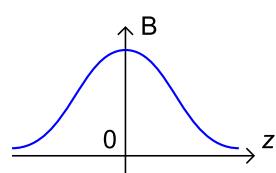
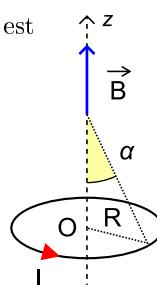
R rayon de la spire et α angle sous lequel est vu le rayon

NB : il est possible d'exprimer B en fonction de z puisque $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$

Le champ est maximal au centre de la spire ($\alpha = \pi/2$) :

$B_{\max} \simeq 10^{-5} \text{ T}$ pour $I \simeq 1 \text{ A}$ et $R \simeq 0,1 \text{ m}$

NB : champ « faible » qu'il est possible d'augmenter en superposant un grand nombre N de spires = en formant une bobine plate.



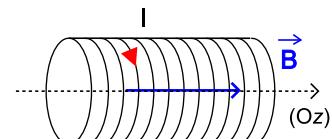
• Champ magnétique créé à l'intérieur d'un long solénoïde (voir cours de 2^e année pour la démonstration)

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

n nombre de spires par unité de longueur = densité linéique de spires

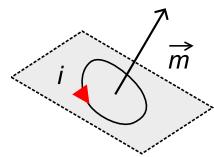
En négligeant les effets de bord (= si on n'est pas trop près des bords), le champ magnétique intérieur est **uniforme**.

$B \simeq 10^{-3} \text{ T}$ pour $n = 1000 \text{ spire/m} = 1 \text{ spire/mm}$ et $I \simeq 1 \text{ A}$



□ Moment magnétique

- ♡ $\vec{m} = i \vec{S}$ moment magnétique associé à une boucle de courant plane de surface S
 $\vec{S} = S \vec{n}$ vecteur-surface de la boucle (normal au plan de la boucle), orienté en fonction du sens de i d'après la règle du tire-bouchon (ou règle de la main droite).



- ♡ A tout aimant on peut associer un moment magnétique.

NB : à l'échelle microscopique, un aimant est modélisable par un ensemble de boucles de courant ordonnées.

□ Actions d'un champ magnétique – Forces de Laplace

- ♡ Tout conducteur électrique parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique extérieur subit une force magnétique \vec{F}_L appelée **force de LAPLACE**.

NB : la force de LAPLACE est due aux forces de LORENTZ exercées à l'échelle microscopique sur les porteurs de charge mobiles du conducteur (voir leçon sur le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique).

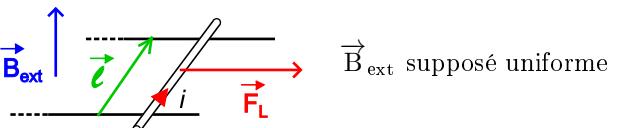
- ♡ $\vec{F}_L = \int_{M \in \text{conducteur}} i d\vec{\ell}(M) \wedge \vec{B}_{\text{ext}}(M)$

NB : ne pas confondre le champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} et le champ magnétique \vec{B} créé par le conducteur (champ propre).

- Barre conductrice en translation rectiligne sur deux rails parallèles (rails de LAPLACE)

$$\vec{F}_L = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

(appliquée au milieu de la barre)



- ⚠ Vecteur longueur $\vec{\ell}$ orienté dans le sens de i .

NB : il y a conversion d'énergie électrique en mouvement : les rails de LAPLACE sont un moteur électrique rudimentaire.

- Cadre conducteur rectangulaire en rotation dans un champ magnétique extérieur uniforme

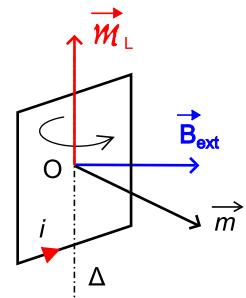
Les forces de LAPLACE exercent sur le cadre un **couple** (résultante nulle) de moment vectoriel par rapport à $O \in \Delta$ axe de rotation

- ♡ $\vec{\mathcal{M}}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$ \vec{m} moment magnétique du cadre

NB : champ $\vec{B}_{\text{ext}} \perp$ à l'axe de rotation, supposé uniforme et stationnaire.

- ⚠ Ne pas confondre le moment vectoriel du couple et le moment magnétique du cadre !

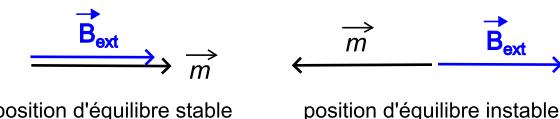
Rappel : le moment scalaire du couple s'écrit $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_L \cdot \vec{u}_\Delta$



- Généralisation : action d'un champ magnétique extérieur sur un moment magnétique

La formule $\vec{\mathcal{M}}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$ se généralise à tout circuit de moment magnétique \vec{m} .

Propriété : le couple est nul (= position d'équilibre) si \vec{m} et \vec{B}_{ext} sont colinéaires.



Conséquence :

- ♡ Un circuit (ou un aimant) libre de tourner tend à aligner son moment magnétique sur la ligne locale de champ magnétique extérieur.

NB : c'est le principe de la boussole !

Application : en réalisant un **champ magnétique tournant** à l'aide de plusieurs bobines (parcourues par des courants périodiques déphasés les uns par rapport aux autres), on peut faire tourner un aimant ou une bobine = principe des moteurs électriques.

NB : le moteur tourne alors à la même vitesse angulaire que celle du champ tournant, d'où le nom de **moteurs synchrones**.

2 Induction

L'essentiel du cours

□ Le phénomène d'induction

♥ L'**induction électromagnétique** est le phénomène qui consiste en l'apparition d'un courant électrique (dit induit) ou d'une tension électrique (dite induite) dans un circuit conducteur sous l'action d'un champ magnétique.

L'induction se produit dans deux cas de figure :

- circuit conducteur fixe dans un champ magnétique variable dans le temps,
- circuit conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps = stationnaire.

NB : une même situation peut correspondre à la fois à ces deux cas de figure, selon le référentiel dans lequel on se place. *Exemple* : un aimant qu'on bouge par rapport à une bobine fixe \equiv une bobine qu'on bouge par rapport à un aimant fixe.

Applications : transformateur, alternateur, haut-parleur, plaque à induction, freinage par induction...

♥ **Loi de modération de LENZ** : les effets (= conséquences) du phénomène d'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

□ Loi de Faraday

⚠ Elle s'applique uniquement pour un circuit conducteur **filiforme et fermé**.

♥ **Loi de FARADAY** : $e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

- e tension induite dans le circuit
- $\Phi_B(t)$ flux du champ magnétique à travers la surface S formée par le circuit : $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

NB : c'est la formulation intégrale de l'équation locale de MAXWELL-FARADAY $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Règles d'orientation : on choisit arbitrairement un sens positif sur le circuit fermé qui détermine

- le sens de la flèche tension pour la fém induite e ,
- le sens du vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$ en suivant la règle du tire-bouchon.

□ Auto-induction – Inductance propre d'un circuit

Un circuit filiforme fermé parcouru par un courant $i(t)$ crée un champ magnétique propre $\vec{B}_p(t)$. Le flux magnétique variable de ce champ à travers le même circuit, appelé flux propre Φ_p , crée une fém induite d'après la loi de FARADAY, dite fém autoinduite.

♥ $\Phi_p = Li$

- Φ_p flux propre à travers le circuit, i intensité à travers le circuit,
- L inductance propre du circuit, $[L] = H$ (henry).

Conséquence : $e = -L \frac{di}{dt}$ aux bornes d'une bobine **en convention générateur**

(démonstration immédiate en remplaçant $\Phi_p = Li$ dans la loi de FARADAY)

La fém induite e s'oppose aux variations du courant : c'est une conséquence de la loi de LENZ.

□ Induction mutuelle – Coefficient d'induction mutuelle

Deux circuits filiformes fermés 1 et 2, parcourus par des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$, créent des champs magnétiques propres $\vec{B}_1(t)$ et $\vec{B}_2(t)$.

- Le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ \vec{B}_1 à travers le circuit 2 crée une fém induite dans le circuit 2,
- Le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ du champ \vec{B}_2 à travers le circuit 1 crée une fém induite dans le circuit 1.

Il y a **induction mutuelle** entre les deux circuits.

♥ $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$

M coefficient de mutuelle inductance entre les deux circuits, $[M] = H$.

NB : il est remarquable que le coefficient soit le même pour exprimer les deux flux : c'est le théorème de NEUMANN.

3 Électrostatique

L'essentiel du cours

□ Généralités

Il existe deux types de charges électriques : positive et négative. Deux charges de même signe se repoussent, deux charges de signes opposés s'attirent. Une charge électrique a pour unité de mesure le coulomb (C). La plus petite charge existante, appelée charge élémentaire, est $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

NB : un électron porte une charge $-e$, un proton porte une charge $+e$ et un neutron est neutre.

Procédés de charge d'un objet : par frottement (friction), par contact ou par influence.

NB : sur un isolant électrique, les charges restent fixes à l'endroit où elles ont été créées.

Applications pratiques : machine de WIMSHURST, électroscope, photocopieuse à toner, pistolet à peinture électrostatique, film alimentaire, haut-parleur électrostatique...

□ Propriétés du champ électrostatique – Calcul intégral

Toute charge ponctuelle q_0 placée en M et en interaction avec une distribution de charge \mathcal{D} est soumise à une force électrostatique donnée par

♡ $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}(M)$ $\vec{E}(M)$ champ électrostatique créé par \mathcal{D} en M $[\vec{E}] = \text{V.m}^{-1}$

♡ $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM^2} \vec{u}_{OM}$ champ électrostatique créé en M par une charge ponctuelle q placée en O
 ϵ_0 permittivité électrique du vide ($= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)

💡 Il est plus intéressant pour les calculs de réécrire $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \vec{OM}$

Propriété : \vec{E} diverge à partir de q si $q > 0$, \vec{E} converge vers q si $q < 0$.

D'après le principe de superposition,

- $\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M^3} \vec{P}_i \vec{M}$ pour $\mathcal{D} = \{q_i \text{ en } P_i\}$
- $\vec{E}(M) = \iint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\sigma(P) dS}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM}$ pour \mathcal{D} surfacique
- $\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda(P) d\ell}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM}$ pour \mathcal{D} linéique
- $\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM}$ pour \mathcal{D} volumique

avec $\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell}$, $\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS}$, $\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau}$ densités de charge linéique, surfacique et volumique.

NB : pour un modèle volumique = qui correspond à la réalité, le champ \vec{E} est continu et défini en tout point de l'espace.

Si Π est un **plan de symétrie pour les charges**,

- ♡
- en deux points symétriques par rapport à Π , les champs \vec{E} sont symétriques par rapport à Π ,
 - en un point appartenant à Π , le champ \vec{E} est contenu dans Π .

Si Π^* est un **plan d'antisymétrie pour les charges**,

- ♡
- en deux points symétriques par rapport à Π^* , les champs \vec{E} sont antisymétriques par rapport à Π^* ,
 - en un point appartenant à Π^* , le champ \vec{E} est orthogonal à Π^* .

Le champ \vec{E} est un vecteur-vrai = il respecte ces propriétés de symétrie.

□ Calcul d'un champ électrostatique par le théorème de Gauss

♡ $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$ Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la charge électrique à l'intérieur de la surface divisée par ϵ_0 .

⚠ Dans le calcul du flux, $d\vec{S}$ doit être orienté vers l'**extérieur** à la surface.

Méthode : comment utiliser le théorème de GAUSS pour déterminer \vec{E} ?

- ① étudier les symétries pour déterminer la direction de \vec{E} et les invariances pour déterminer les variables d'espace dont ne dépendent pas les composantes de \vec{E} ,
- ② définir une surface fermée Σ adaptée à la situation,
- ③ exprimer indépendamment le flux du champ \vec{E} à travers cette surface et la charge électrique intérieure à cette surface,
- ④ écrire la relation entre le flux et la charge intérieure, donnée par le théorème de GAUSS.

Applications classiques (à savoir faire) :

- boule pleine uniformément chargée de centre O : Σ = sphère de centre O
- fil rectiligne infini uniformément chargé : Σ = cylindre de hauteur arbitraire et d'axe le fil
- plan infini uniformément chargé : Σ = cylindre de section arbitraire, symétrique par rapport au plan

• Théorème de GAUSS pour le champ gravitationnel

💡 Utiliser l'analogie $\vec{F}_e = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 AB^2} \vec{u}_{AB}$ (force électrostatique) $\leftrightarrow \vec{F}_g = \frac{-Gm_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$ (force gravitationnelle)
donc $\boxed{\text{charge} \leftrightarrow \text{masse} \quad \text{et} \quad 1/\epsilon_0 \leftrightarrow -4\pi G}$ d'où par transposition $\boxed{\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}}$

□ Potentiel électrostatique

Toute charge ponctuelle q_0 placée en M et en interaction avec une distribution de charge \mathcal{D} possède une énergie potentielle électrostatique donnée par

♡ $E_{pe} = q_0 \times V(M)$ $V(M)$ potentiel électrostatique créé par \mathcal{D} en M $\boxed{[V] = V}$

♡ $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM}$ potentiel électrostatique créé en M par une charge ponctuelle q placée en O

Par additivité des potentiels,

- $V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$ pour $\mathcal{D} = \{q_i \text{ en } P_i\}$
- $V(M) = \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda(P) d\ell}{4\pi\epsilon_0 PM}$ pour \mathcal{D} linéique
- $V(M) = \iint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\sigma(P) dS}{4\pi\epsilon_0 PM}$ pour \mathcal{D} surfacique
- $V(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM}$ pour \mathcal{D} volumique

Méthode : comment calculer un champ électrostatique?

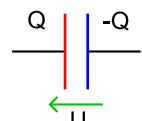
- ① par GAUSS si la distribution de charge présente suffisamment de symétrie et d'invariances,
- ② par la relation locale $\vec{E} = -\nabla V$ en calculant d'abord le potentiel V (par un calcul intégral scalaire),
- ③ par un calcul intégral vectoriel (somme, intégrale simple, double ou triple).

⚠ Dans ce dernier cas, sommer les composantes vectorielles **utiles** = celles selon la direction du champ.

□ Application aux condensateurs

Un condensateur est formé de deux armatures en vis-à-vis, séparées par un isolant électrique, soumises à une tension (différence de potentiel) et portant des charges opposées.

♡ $Q = CU$ définit la capacité C (en farad) du condensateur



NB : la charge Q est celle portée par l'armature vers laquelle pointe la flèche tension U

♡ $C_{\text{plan}} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ capacité d'un condensateur plan de surface S et d'espacement e entre les armatures

Méthode : comment déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur?

- ① exprimer le champ \vec{E} entre les armatures avec le théorème de GAUSS (en négligeant les effets de bords)
- ② exprimer la tension U aux bornes des armatures grâce à la relation locale $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B = U$
- ③ remplacer U dans la définition $C = Q/U$ (la charge Q doit s'éliminer)

NB : vérifier la dimension du résultat, sachant que $[\epsilon_0] = \text{F.m}^{-1}$

4 Magnétostatique

L'essentiel du cours

□ Généralités

♡ Un champ magnétique est créé par un courant électrique.

Exemples : expérience d'ØRSTED (déviation d'une boussole par un courant électrique dans un fil), électroaimant...

NB : dans le cas des aimants permanents (naturels ou artificiels), on admet que le champ magnétique est dû à des micro-courants qui circulent à l'échelle atomique (micro-courants ampériens).

♡ Un champ magnétique \vec{B} se mesure en tesla (T)

Ordres de grandeurs : $B(\text{terrestre}) \simeq 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, $B(\text{aimant puissant}) \simeq 1 \text{ T}$

NB : dans la pratique, on mesure un champ magnétique avec une **sonde à effet HALL**.

□ Propriétés du champ magnétique

- Principe de superposition

♡ Le champ magnétique créé par plusieurs courants est égal à la somme des champs magnétiques créés par chacun des courants.

- Propriétés de symétrie

Si Π est un **plan de symétrie pour les courants**,

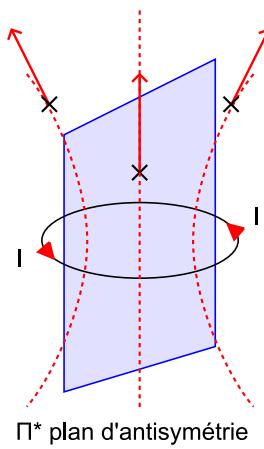
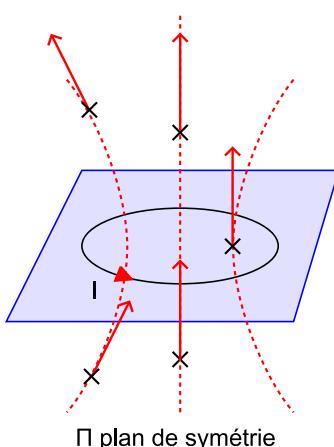
- en deux points symétriques par rapport à Π , les champs \vec{B} sont antisymétriques par rapport à Π ,
- en un point appartenant à Π , le champ \vec{B} est orthogonal à Π .

Si Π^* est un **plan d'antisymétrie pour les courants**,

- en deux points symétriques par rapport à Π^* , les champs \vec{B} sont symétriques par rapport à Π^* ,
- en un point appartenant à Π^* , le champ \vec{B} est contenu dans Π^* .

Le champ \vec{B} est un pseudo-vecteur = il respecte ces propriétés de symétrie.

Cas d'une spire circulaire :



⚠ Pour l'étude des symétries, il faut tenir compte **du sens du courant** = traiter l'intensité comme une flèche vectorielle.

- Conservativité du flux magnétique

♡ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ le champ magnétique est à flux conservatif

Conséquences :

- le flux magnétique se conserve sur toute section d'un même tube de champ magnétique,
- le champ magnétique devient plus intense lorsque les lignes de champ se resserrent

□ Théorème d'Ampère pour le champ magnétostatique

♡
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

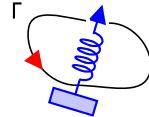
La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé Γ est égale à l'intensité du courant enlacé par le contour multipliée par μ_0 .

μ_0 perméabilité magnétique du vide = $4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹

⚠ Énoncé valable uniquement pour un champ magnétique **statique** = indépendant du temps.

Le contour doit être **orienté** arbitrairement, cette orientation définissant

- l'orientation du vecteur-déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$
- l'algébrisation de l'intensité des courants enlacés d'après la règle du tire-bouchon :



■ **Méthode** : comment utiliser le théorème d'AMPÈRE pour déterminer \vec{B} ?

- ① étudier les symétries pour déterminer la direction de \vec{B} et les invariances pour déterminer les variables d'espace dont ne dépendent pas les composantes de \vec{B} ,

NB : la recherche d'un plan de symétrie pour les courants donne directement la direction de \vec{B} (orthogonal à ce plan).

- ② définir un contour fermé Γ adapté à la situation et l'orienter,

NB : si possible, choisir l'orientation pour que le courant enlacé soit compté positivement.

- ③ exprimer indépendamment la circulation du champ \vec{B} le long de ce contour et l'intensité enlacée,
- ④ écrire la relation entre la circulation et le courant enlacé, donnée par le théorème d'AMPÈRE.

Applications classiques (à savoir faire) :

- Fil rectiligne infini parcouru par un courant linéique permanent

💡 Choisir un contour circulaire d'axe le fil, on trouve $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ dans le repère cylindrique.

NB : expression non valable si $r \rightarrow 0$ car dans ce cas, il faut tenir compte de l'épaisseur du fil.

- Fil cylindrique infini parcouru par un courant volumique uniforme et permanent

💡 Utiliser un contour circulaire d'axe le fil et exprimer l'intensité enlacée à l'intérieur du fil en faisant intervenir la densité surfacique de courant volumique

♡ $j = I/S$ I intensité totale à travers la section S $[j] = \text{A.m}^{-2}$

Cas général d'un courant volumique non uniforme : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ \vec{j} vecteur densité de courant

⚠ Il n'est pas possible de définir \vec{j} pour des courants autres que volumiques (donc linéiques ou surfaciques).

- Solénoïde infini (= on néglige les effets de bords)

♡ $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

- n densité linéique de spires = nombre de spires par unité de longueur
- \vec{u}_z vecteur unitaire selon l'axe du solénoïde

💡 Utiliser un contour rectangulaire à cheval sur le bord du solénoïde, en supposant le champ magnétique extérieur nul.

NB : le champ magnétique est donc **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

5 Équations locales de l'électromagnétisme

L'essentiel du cours

⚠ Dans toute la fiche, on note les champs \vec{E} , \vec{B} , ρ , \vec{j} ... au lieu de $\vec{E}(M, t)$, $\vec{B}(M, t)$, $\rho(M, t)$, $\vec{j}(M, t)$...

□ Équations de Maxwell

♡ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ équation de MAXWELL-GAUSS (MG)

Sens physique : le champ électrique diverge (ou converge) à partir des charges.

(MG) permet de retrouver le théorème de GAUSS (à savoir faire) en utilisant

♡ $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{F} \times d\tau$ théorème de GREEN-OSTROGRADSKI (V volume intérieur à S fermée)

♡ $\text{div } \vec{B} = 0$ équation de MAXWELL-flux (MΦ) ou de MAXWELL-THOMSON (MT)

Sens physique : on ne peut isoler un pôle nord ou un pôle sud magnétique (expérience de l'aimant brisé) = le champ \vec{B} ne peut diverger (ou converger) à partir d'un point de l'espace.

(MΦ) permet de retrouver la conservativité du flux magnétique (avec le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI).

♡ $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ équation de MAXWELL-FARADAY (MF)

Sens physique : il existe une dépendance spatio-temporelle entre \vec{E} et \vec{B} .

(MF) permet de retrouver la loi de FARADAY de l'induction $e = -d\Phi_B/dt$ (à savoir faire) en utilisant

♡ $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ théorème de STOKES (S surface délimitée par Γ fermé)

♡ $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ équation de MAXWELL-AMPÈRE (MA)

Sens physique : en régime statique, le champ magnétique s'enroule = tourbillonne autour des courants.

(MA) permet de retrouver le théorème d'AMPÈRE en régime statique (à savoir faire avec le théorème de STOKES).

$\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ vecteur courant de déplacement (homogène à \vec{j} , assurant la conservation de la charge)

• Cas du régime statique

♡ $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ équation de POISSON $\Delta V = 0$ équation de LAPLACE dans le cas particulier où $\rho = 0$

Démonstration (à savoir faire) : utiliser (MG) avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ sachant que par définition

♡ $\Delta f = \text{div} [\vec{\text{grad}} f]$ laplacien scalaire

• Cas de l'approximation des régimes quasi statiques (ARQS)

♡ Dans l'ARQS, le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ est négligé par rapport à \vec{j}

NB : l'ARQS n'a de sens qu'en présence de courants électriques (sinon $\vec{j} = \vec{0}$) ; notamment, elle n'a pas de sens dans le vide.

Conséquence : le théorème d'AMPÈRE reste applicable dans l'ARQS (puisque (MA) s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$)

• Expression des opérateurs vectoriels dans le repère cartésien

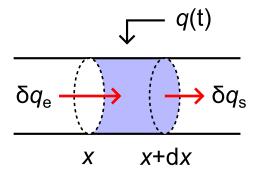
♡ $\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$ $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$

en utilisant l'opérateur symbolique nabla $\vec{\nabla} = \partial/\partial x \vec{u}_x + \partial/\partial y \vec{u}_y + \partial/\partial z \vec{u}_z$

□ Équation de conservation de la charge électrique

♡ $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ équation locale de conservation de la charge électrique

Démonstration dans un cas unidimensionnel (à connaître) : bilan de charge dans une portion de milieu de section S et comprise entre x et $x+dx$, contenant une charge électrique $q(t)$, sous la forme $dq = \delta q_e - \delta q_s$



Propriété : les équations de MAXWELL permettent de retrouver cette équation locale (à savoir faire).

💡 Utiliser (MA) sous la forme $\operatorname{div} [\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}] = \operatorname{div} [\dots]$ avec $\operatorname{div} [\vec{\operatorname{rot}} (\dots)] = 0$ (car $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$)

• Cas d'un conducteur ohmique

♡ $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ loi d'OHM locale γ conductivité du milieu $\simeq 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ pour un métal (unité à savoir retrouver)

NB : dans un conducteur ohmique, le courant circule en suivant les lignes de champ électrique.

Consequences (démonstrations à connaître) :

- un conducteur ohmique suit la loi d'OHM $U = RI$ avec $R = \ell / (\gamma S)$ (S section et ℓ longueur)
- un conducteur ohmique est neutre : $\rho = 0$ (en utilisant (MG), on montre que $\rho(t) = \rho_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau \ll 1 \text{ s}$)
- l'ARQS est vérifiée dans un « bon » conducteur ohmique en régime périodique pour $f \ll 10^{17} \text{ Hz}$ (utiliser le fait que $\|\partial \vec{E} / \partial t\| \stackrel{\text{ODG}}{=} \|\vec{E}\| / T$)

□ Équations liées à l'énergie et à la puissance électromagnétiques

♡ $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$ densités volumiques d'énergie électrique et magnétique $[w_e] = [w_m] = \text{J.m}^{-3}$

Démonstrations dans des cas particuliers (à savoir faire) :

- condensateur plan de section S et d'épaisseur e : $W_e = (1/2) CU^2$ avec $C = \epsilon_0 S/e$ et $U = E \times e$
- bobine de section S et de longueur ℓ : $W_m = (1/2) LI^2$ avec $L = \mu_0 N^2 \ell / S$ et $B = \mu_0 (N/\ell) I$

♡ $\mathcal{P}_{em} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ puissance électromagnétique traversant la surface S = flux de $\vec{\Pi}$ à travers S

♡ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ vecteur de POYNTING $[\Pi] = \text{W.m}^{-2}$

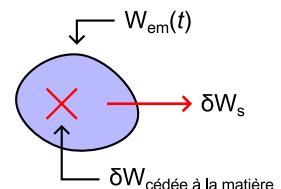
♡ $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$ puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière $[p_v] = \text{W.m}^{-3}$

Démonstration : exprimer la puissance de la force de LORENTZ $\delta \vec{F}_{em} = \delta q_m (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$ exercée sur la charge élémentaire δq_m des porteurs de charge mobiles (électrons dans un métal) sachant que $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$
NB : dans le cas d'un conducteur ohmique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'où $p_v = \gamma E^2 > 0$ convertie en chaleur dans la matière = effet JOULE.

$$\frac{\partial (w_e + w_m)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{équation de POYNTING = conservation de l'énergie électromagnétique}$$

Démonstration (à savoir faire) : bilan macroscopique sur un volume \mathcal{V} contenant une énergie électromagnétique $W_{em}(t)$, écrit sous la forme

$$dW_{em} = -\delta W_s - \delta W_{\text{cédée à la matière}}$$



6 Ondes électromagnétiques

L'essentiel du cours

Dans toute la fiche, on suppose que la direction de propagation de l'onde (lorsqu'elle se propage) est (Ox).

□ Ondes électromagnétiques dans le vide

Dans le vide, $\rho = 0$ (absence de charge) et $\vec{j} = \vec{0}$ (absence de courant)

$\Delta(\cdot) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2}$ équation de d'ALEMBERT vérifiée par \vec{E} et \vec{B} dans le vide avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Démo (à bien connaître) : combiner (MF) et (MA) en utilisant $\vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}}(\cdot)] = \vec{\text{grad}}[\text{div}(\cdot)] - \Delta(\cdot)$

Existence de solutions en **ondes planes progressives harmoniques** (OPPH) de célérité c , du type

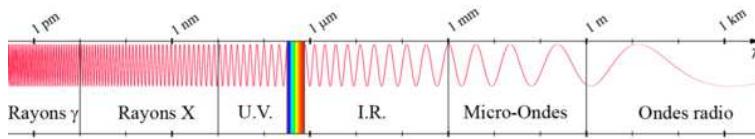
$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad \bullet -kx \text{ si propagation vers les } x \nearrow \quad \bullet +kx \text{ si propagation vers les } x \searrow$$

NB : il existe d'autres types de solutions : ondes stationnaires, sphériques, non harmoniques...

$k = \omega/c$ pour une OPPH dans le vide

Double périodicité temporelle et spatiale : $\omega = 2\pi/T$ et $k = 2\pi/\lambda$ d'où $\lambda = cT = c/f$

Spectre magnétique :



Notation complexe : $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ avec $\underline{E}_0 = E_0 e^{i\varphi}$

$\frac{\partial}{\partial t} \stackrel{\mathbb{C}}{=} i\omega \times \quad \vec{\nabla} \stackrel{\mathbb{C}}{=} -i\vec{k}$ pour une OPPH écrite en convention $\cos(\omega t - kx)$
(en convention $\cos(kx - \omega t)$, il faut inverser les signes dans $\partial/\partial t$ et $\vec{\nabla}$.)

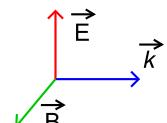
$\vec{k} = k \vec{u}$ vecteur d'onde avec \vec{u} vecteur unitaire orienté selon le sens de propagation

Une OPPH dans le vide est transverse électrique et magnétique $= \vec{E} \perp \vec{u}$ et $\vec{B} \perp \vec{u}$

Démo (à connaître) : écriture de (MG) et (MΦ) en notation complexe puis passage dans \mathbb{R} .

$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ relation de structure pour une OPPH dans le vide

Démo (à connaître) : écriture de (MF) en notation complexe puis passage dans \mathbb{R} .



Consequences :

- $B(M, t) = E(M, t)/c$ (passage aux normes dans la relation de structure)
- $w_e = w_m$ (équipartition des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique)
- $\vec{\Pi} = \epsilon_0 E^2 c \vec{u}$ en utilisant le double produit vectoriel $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$

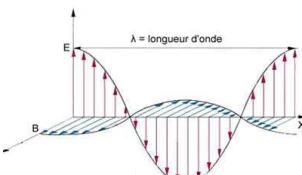
- États de polarisation d'une OPPH : rectiligne, circulaire ou elliptique

La lumière naturelle n'est pas polarisée ; un **polariseur** permet d'obtenir une polarisation rectiligne.

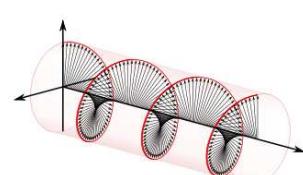
$I = I_0 \cos^2 \alpha$ loi de MALUS

I_0 intensité incidente, I intensité transmise, $\alpha =$ angle entre la direction de polarisation incidente et l'axe du polariseur

Démo (à connaître) : utiliser le fait que $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$



Polarisation rectiligne



Polarisation circulaire

□ Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

♡ Un conducteur est dit parfait si sa conductivité tend vers l'infini : $\gamma \rightarrow +\infty$

Propriété : dans un conducteur parfait, $\vec{E} \simeq \vec{0}$ (car $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ne peut diverger)

Hypothèses : conducteur occupant le demi-espace $x > 0$, onde incidente progressive selon $+\vec{u}_x =$ en incidence normale, onde incidente polarisée rectilignement.

— **Méthode** : comment déterminer l'onde électromagnétique réfléchie ?

① Chercher une onde réfléchie du type $\vec{E}_r(x, t) = E_y \cos(\omega t + kx + \varphi_y) \vec{u}_y + E_z \cos(\omega t + kx + \varphi_z) \vec{u}_z$

⚠ L'onde réfléchie se propage selon $-\vec{u}_x$ d'où le $\cos(\omega t + kx + \dots)$

② Utiliser la relation de passage $\vec{E}(0^+, t) - \vec{E}(0^-, t) = (\sigma/\epsilon_0) \vec{u}_x$ pour identifier E_y , E_z , φ_y et φ_z .

⚠ Dans cette relation, il est question en $x = 0^-$ du champ électrique **total** = incident + réfléchi.

♡ L'onde réfléchie est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.

NB : en optique ondulatoire, cela revient à un ajout de $\lambda_0/2$ au chemin optique.

□ Confinement d'une onde électromagnétique dans une cavité à une dimension

♡ Dans une cavité, les ondes électromagnétiques sont nécessairement de type stationnaire.

Propriétés :

- les fréquences de l'onde sont quantifiées,
- la largeur de la cavité est un multiple entier de la demi-longueur d'onde : $L = n \times \lambda/2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- il existe des nœuds et des ventres pour les champs \vec{E} et \vec{B} .

— **Méthode** : comment étudier l'onde électromagnétique dans une cavité à une dimension ?

① Chercher le champ électrique sous forme stationnaire $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi) \vec{u}_y$

② Montrer que l'équation de D'ALEMBERT impose $k = \pm \omega/c$ (en injectant le champ dans l'équation)

③ Écrire les conditions aux limites sur les deux parois délimitant la cavité, sachant que sur un conducteur parfait, la composante tangentielle de \vec{E} doit s'annuler (d'après la relation de passage).

④ En déduire la quantification de k , donc de $\omega = 2\pi f$.

□ Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique – Effet de peau

♡ Dans un conducteur ohmique en régime sinusoïdal forcé, le courant se répartit en surface sur une épaisseur moyenne δ , appelée épaisseur de peau, qui diminue avec la fréquence.

Conséquences :

- la résistance d'un fil augmente avec la fréquence (car la section **effective** parcourue par le courant diminue),
- dans un four à induction, il faut dimensionner correctement les pièces métalliques à faire fondre,
- on a intérêt à remplacer un fil de grande section par plusieurs fils de petite section (fils de LITZ).

NB : l'effet de peau n'existe qu'en régime variable ; en régime permanent, le courant se répartit uniformément sur la section.

Hypothèses : le conducteur suit la loi d'OHM locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, l'ARQS est vérifiée ($f \ll 10^7$ Hz), le conducteur occupe le demi-espace $x > 0$.

⚠ L'équation de D'ALEMBERT n'est pas vérifiée car **on n'est pas dans le vide**.

— **Méthode** : comment déterminer l'expression de l'épaisseur de peau ?

① Obtenir $\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \partial \vec{j} / \partial t$ en combinant les équations de MAXWELL et la loi d'OHM locale.

NB : utiliser $\vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}}()] = \vec{\text{grad}}[\text{div}()] - \Delta()$ et le fait que $\text{div} \vec{E} = 0$ par neutralité électrique d'un conducteur ohmique.

② Injecter une solution sous forme complexe $\vec{j} = \underline{J}(x) e^{i\omega t} \vec{u}_z$ et résoudre l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\underline{J}(x)$.

💡 Chercher les racines de l'équation caractéristique en utilisant $i = e^{i\pi/2}$ et utiliser la condition à la limite en $x = +\infty$ pour annuler l'une des constantes d'intégration.

③ Faire apparaître une décroissance exponentielle en $e^{-x/\delta}$ et identifier $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma \omega)}$

1 Statique des fluides

L'essentiel du cours

□ Notion de pression

Si $d\vec{F}$ est une force normale appliquée à la surface élémentaire dS , la pression P sur la surface vérifie

$$\heartsuit \quad P = \frac{dF}{dS} \quad \text{ou} \quad d\vec{F} = P d\vec{S} \quad \text{avec } d\vec{S} \text{ le vecteur-surface élémentaire normal à } dS$$

NB : ne pas confondre la pression P avec le poids \vec{P} (la pression n'est pas un vecteur).

- Unité SI : le pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$
- Unité usuelle : le bar, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

NB : dans un fluide (liquide ou gaz), la pression a pour origine, à l'échelle microscopique, les chocs entre les particules de fluide et la paroi (cf cours de 1^{re} année sur la pression cinétique).

Ordre de grandeur : pression atmosphérique $P_0 \simeq 1 \text{ bar}$

Cas particulier : si la force F est répartie uniformément sur la surface S , $P = F/S$

□ Pression dans un fluide au repos dans un référentiel galiléen

NB : le champ de pesanteur est supposé uniforme.

- **Relation fondamentale de la statique des fluides :**

$$\heartsuit \quad \frac{dP}{dz} = -\mu g \quad \text{avec } z \text{ altitude sur un axe vertical ascendant, } \mu \text{ masse volumique locale du fluide.}$$

NB : démonstration à partir d'un PFD appliqué à un élément cylindrique de fluide de hauteur dz (à l'échelle mésoscopique).

⚠ Si l'axe vertical est **descendant**, la relation devient $dP/dz = +\mu g$

Propriété : la pression est continue à l'interface entre deux fluides au repos.

- **Cas d'un fluide incompressible** : $\mu = C^{\text{te}}$

$$\heartsuit \quad \Delta P = -\mu g \Delta z \Leftrightarrow \Delta(P + \mu g z) = 0$$

NB : démonstration immédiate à partir de la relation fondamentale de la statique.

Application : la pression dans un fluide à la profondeur h s'écrit $P = P_0 + \mu gh$ (à savoir retrouver)

Ordre de grandeur : dans l'eau, la pression augmente d'environ 1 bar tous les 10 m.

- **Cas d'un fluide compressible** : $\mu \neq C^{\text{te}}$

Exemple de l'atmosphère isotherme à la température T et assimilée à un gaz parfait (à savoir traiter) :

- l'équation d'état des gaz parfaits donne $\mu(P, T)$,
- par intégration, $P(z)$ décroît exponentiellement, sur une hauteur caractéristique de l'ordre de 8 km.

□ Résultante des forces pressantes exercées par un fluide au repos

Méthode : découpage/sommation

- ① en utilisant la relation fondamentale de la statique des fluides, déterminer la pression P en tout point M de la surface ;
- ② découper la surface en surfaces élémentaires dS en choisissant un repère d'espace adapté (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) ;
- ③ écrire que la force élémentaire exercée sur dS est $d\vec{F} = P(M) d\vec{S}$;
- ④ déterminer la direction Δ de la résultante des forces pressantes ;
- 💡 Utiliser les éventuelles symétries si la surface n'est pas plane.
- ⑤ intégrer sur la surface la composante de $d\vec{F}$ selon cette direction Δ (composante utile).

Exemple : sur un mur de barrage de hauteur H et de largeur L , $F = \mu g L H^2 / 2$ (à savoir refaire)

NB : si le fluide est en mouvement par rapport à la surface, il faut ajouter une composante tangentielle liée aux frottements (cf leçon sur les fluides en écoulement).

2 Fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

L'essentiel du cours

□ Grandeurs caractéristiques

- Le **débit massique** D_m ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) est la masse de fluide qui traverse une section de la conduite par unité de temps ; le **débit volumique** D_v ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) est le volume de fluide qui traverse une section de la conduite par unité de temps.

Propriété :

♡ $D_m = \mu \times D_v$ avec μ la masse volumique locale du fluide.

- Tout fluide en écoulement est caractérisé en tout point M et à toute date t par la donnée de grandeurs locales $x(M, t)$ appelées **champs eulériens** : le champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$, le champ de pression $P(M, t)$, le champ de masse volumique $\mu(M, t)$...

- Une **ligne de courant** est une courbe tangente en tout point aux vecteurs $\vec{v}(M, t)$ à une date t donnée ; un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé donné.

Conséquence : la conduite constitue un tube de courant.

- Il existe deux types d'écoulement caractérisés par un nombre sans dimension appelé **nombre de REYNOLDS** Re :

- **régime laminaire** : les lignes de courant sont régulières et bien définies ($Re < 10^3$)
- **régime turbulent** : les lignes de courant ne sont pas définies, l'écoulement est chaotique au cours du temps ($Re \gg 10^3$).

- **Cas du régime stationnaire** : le régime est dit **stationnaire** si les champs eulériens sont indépendants du temps.

♡ En régime stationnaire, il y a conservation du débit massique à travers toute section d'un même tube de courant.

NB : c'est une traduction de la conservation de la masse pour un système fermé.

Conséquence :

♡ Pour un fluide de masse volumique constante en écoulement stationnaire, il y a conservation du débit volumique à travers toute section d'un même tube de courant.

□ Cas d'un fluide parfait

- Un fluide est dit parfait si on néglige les forces de frottements entre particules de fluide (et donc entre les particules de fluide et les parois).

Propriété caractéristique : dans un fluide parfait, le champ des vitesses est uniforme dans toute section droite d'un tube de courant.

Conséquence : le débit volumique s'écrit

♡ $D_v = v \times S$ avec S la section de la conduite et v la vitesse du fluide sur la section.

Relations de BERNOULLI pour un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire :

♡

- $\Delta_{A \rightarrow B} \left(P + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2 \right) = 0$ en l'absence de pièces mécaniques mobiles dans la conduite ;
- $D_v \Delta_{A \rightarrow B} \left(P + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \mathcal{P}_i$ en présence de pièces mécaniques mobiles dans la conduite.

avec A et B deux points sur la même ligne de courant et \mathcal{P}_i la **puissance indiquée** = puissance échangée par le fluide avec les parties mobiles.

NB : c'est la traduction de la conservation de l'énergie mécanique : $\mu g z$ est le terme d'énergie potentielle de pesanteur, $(1/2)\mu v^2$ est le terme d'énergie cinétique (P est lié au travail des forces pressantes).

⚠ Relations valables **en l'absence d'échange thermique entre le fluide et l'extérieur** (sinon, il faut appliquer le premier principe à un système ouvert, cf cours de thermo).

Propriété : $\mathcal{P}_i > 0$ pour une pompe ou un compresseur ; $\mathcal{P}_i < 0$ pour une turbine.

(signes liés à la convention d'algébrisation des échanges énergétiques : on algébrise du point de vue du fluide).

Applications (à savoir expliquer et retrouver) :

- **effet VENTURI** : la pression diminue lorsque la conduite rétrécit ;

Exemples : effet d'aspiration utilisé dans une trompe à eau, un carburateur de voiture, le tirage des cheminées...

- **formule de TORRICELLI** : $v = \sqrt{2gh}$ est la vitesse de sortie d'un fluide retenu dans un grand réservoir sur une hauteur h .

Exemples : château d'eau, barrage...

□ Cas d'un fluide réel

Dans un fluide réel, on tient compte des forces de frottement internes au fluide.

Propriétés :

- le champ des vitesses n'est pas uniforme sur une section droite de la conduite. Le débit volumique se calcule par découpage/sommation sur la section :

$$D_v = \iint_{M \in \text{section}} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

- le champ des vitesses est nécessairement nul au niveau des parois (fixes) de la conduite.

♡ La prise en compte des frottements dans un fluide réel se traduit par une diminution de pression dans la conduite, appelée **perte de charge**.

On distingue les pertes de charges

- **régulières** : diminution de pression proportionnelle à la longueur de la conduite ;
- **singulières** : diminution de pression brutale due à un coude, un rétrécissement...

NB : les pertes de charge régulières peuvent être mises en évidence et mesurées en plaçant des tubes verticaux le long de la conduite : la hauteur de fluide dans les tubes diminue régulièrement.

Relations de BERNOULLI pour un fluide réel incompressible en écoulement stationnaire :

♡

- $\Delta_{A \rightarrow B} \left(P + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2 \right) = -\Delta P_{\text{perte}}$ en l'absence de parties mobiles dans la conduite ;
- $D_v \Delta_{A \rightarrow B} \left(P + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \mathcal{P}_i - D_v \Delta P_{\text{perte}}$ en présence de parties mobiles dans la conduite.

avec ΔP_{perte} la perte de charge (régulière ou singulière).

• Cas d'un fluide newtonien

Un fluide est dit **newtonien** si les forces de frottements exercées par le fluide sur un objet sont proportionnelles à la vitesse de déplacement de l'objet.

⚠ Il existe des fluides **non newtoniens** : mélange d'eau et de maïzena, boues, moutarde...

Propriété : dans un fluide newtonien, la force de cisaillement (= composante tangentielle de l'action de contact) exercée sur une paroi de surface S s'écrit

♡

$$F_{\text{cis}} = \pm \eta S \frac{dv}{dz}$$

- η **viscosité dynamique** du fluide (Pa.s),
- dv/dz gradient de vitesse selon la direction (Oz) normale à la paroi.

NB : \pm selon le choix d'algébrisation de l'axe (Oz).

Ordres de grandeur : $\eta(\text{air}) \simeq 10^{-5}$ Pa.s, $\eta(\text{eau}) \simeq 10^{-3}$ Pa.s, $\eta(\text{huile}) \simeq 1$ Pa.s.

1 Interférences

L'essentiel du cours

□ Propriétés générales des ondes lumineuses

- **Modèle scalaire de la lumière** : en optique ondulatoire, on restreint l'onde électromagnétique à une composante scalaire électrique $E(M, t)$.

♡ $f = 1/T$ fréquence f (Hz) et période T (s) d'une source lumineuse monochromatique

NB : toute source de lumière, caractérisée par son spectre, peut être vue comme une superposition de sources monochromatiques.

La période T et la fréquence f sont propres à la source, indépendamment du milieu de propagation.

♡ $\lambda = v T$ longueur d'onde (m) dans un milieu où l'onde a pour vitesse v

NB : la longueur d'onde est la distance dont se déplace l'onde pendant une période.

Propriété : $\lambda = v/f$

♡ $\lambda = \lambda_0/n$ longueur d'onde dans un milieu d'indice n , λ_0 la longueur d'onde dans le vide

♡ 400 nm (bleu) $\leq \lambda_0 \leq 800$ nm (rouge) gamme du visible (longueur d'onde dans le vide)

- **Intensité lumineuse**

♡ $I(M) = K \langle E^2(M, t) \rangle$ intensité lumineuse en un point M [I] = W.m⁻² ($K = C^{te} > 0$)

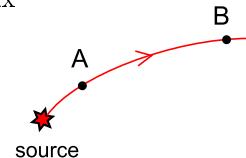
NB : tout récepteur lumineux (réteine, capteur CCD, photodiode) calcule la valeur moyenne sur une durée d'intégration $\tau \gg T$.

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \text{contraste d'une image} \quad [\mathcal{C}] = 1, 0 \leq \mathcal{C} \leq 1$$

- **Déphasages**

♡ $\varphi_B - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$ déphasage entre A et B appartenant au même rayon lumineux

♡ $(AB) = \int_A^B n(M) d\ell(M)$ chemin optique de A à B [(AB)] = m



Propriété : dans un milieu homogène, $(AB) = n \times AB$

♡ Une onde lumineuse subit une discontinuité de phase égale à π lors d'une réflexion sur un miroir ou sur un milieu d'indice supérieur (milieu plus réfringent).

Propriété : du point de vue du chemin optique, cela équivaut à ajouter $\lambda_0/2$ au chemin optique.

Une **surface d'onde relative à une source ponctuelle S** est un ensemble de points qui vibrent en phase.

Propriété : $(SM) = C^{te}$ pour tous les points M sur une même surface d'onde relative à S

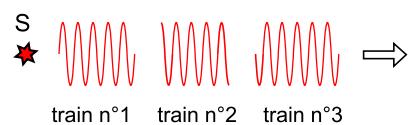
♡ **Théorème de MALUS** : les surfaces d'onde relatives à S et les rayons issus de S sont orthogonales entre eux.

Ondes planes : les surfaces d'onde sont des plans ; **ondes sphériques** : les surfaces d'onde sont des sphères.

Condition de stigmatisme : deux points A et A' sont conjugués par un système optique \Leftrightarrow les chemins optiques de tous les rayons allant de A à A' sont égaux.

- **Modèle d'émission de la lumière**

♡ La lumière est émise sous forme de **trains d'onde** de longueur moyenne L_c appelée **longueur de cohérence** de la source.

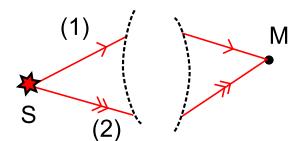


Propriété : $\Delta f \times \Delta t \simeq 1$ avec Δf la largeur spectrale moyenne de la source et Δt la durée moyenne d'émission d'un train d'onde.

□ Interférences à deux ondes

♡ $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi(M)$ **formule de FRESNEL**

avec I_1 et I_2 les intensités en M et $\Delta\varphi(M)$ le déphasage en M .



Conditions d'application = condition de cohérence entre les deux ondes :

- ondes de même fréquence (donc de même pulsation) : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$
- ondes issues de la même source ponctuelle S (monochromatique),
- différence de marche très faible devant la longueur de cohérence de la source : $\delta \ll L_c$

Cas particulier usuel : $I_1 = I_2 = I_0$ donne $I(M) = 2 I_0 [1 + \cos \Delta\varphi(M)]$

NB : dans ce cas, le contraste de la figure d'interférence prend la valeur maximale égale à 1.

♡ $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$ **ordre d'interférence en M** [$p = 1$]

$p(M) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ interférences constructives $p(M) \in \mathbb{Z} + 0,5 \Leftrightarrow$ interférences destructives

♡ $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$ avec $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$ la **différence de marche en M**

Propriété : $p(M) = \delta(M)/\lambda_0$ (déduite des deux relations précédentes)

— **Méthode : comment exprimer une différence de marche ?** —

- ① décomposer chaque rayon en passant par des points remarquables (points d'incidence, de réfraction...);
- ② essayer d'utiliser le théorème de MALUS pour simplifier la différence des chemins optiques, éventuellement en utilisant le principe de retour inverse de la lumière;
- ③ en utilisant des relations géométriques et de trigonométrie, déterminer l'expression de δ .

⚠ En cas de réflexion sur un miroir ou sur un milieu plus réfringent, ne pas oublier d'ajouter $\lambda_0/2$ au chemin optique.

□ Interférences à N ondes – Cas du réseau

Un **réseau** optique plan est formé d'un très grand nombre de fentes fines parallèles équidistantes de $a =$ **pas du réseau**; chaque fente diffracte la lumière.

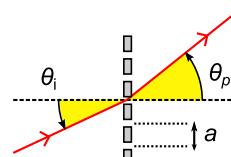
♡ En sortie du réseau, l'intensité lumineuse est non nulle à l'infini uniquement dans les directions correspondant à des interférences totalement constructives entre les rayons.

NB : dans la pratique, on peut observer les interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Cas d'une source monochromatique à l'infini et d'interférences à l'infini :

♡ $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$ **formule des réseaux** (à savoir démontrer)

- θ_i angle d'incidence du faisceau sur le réseau
- θ_p angle de sortie du faisceau pour l'ordre d'interférence $p \in \mathbb{Z}$



NB : λ est la longueur d'onde dans le milieu de propagation $\neq \lambda_0$ longueur d'onde dans le vide.

Intérêt : la déviation dépend de λ donc on peut utiliser un réseau pour faire de la **spectroscopie**.

2 Dispositifs interférentiels

L'essentiel du cours

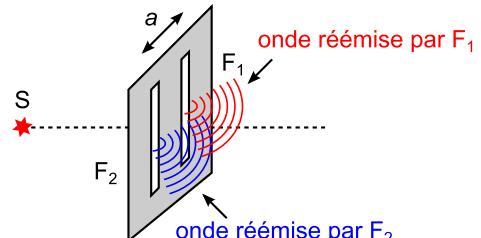
□ Fentes de Young

- **Principe**

Les fentes F_1 et F_2 , distantes de a , diffractent la lumière émise par une source ponctuelle monochromatique.

Les deux ondes diffractées interfèrent.

NB : les deux ondes qui interfèrent sont bien issues de la même source.

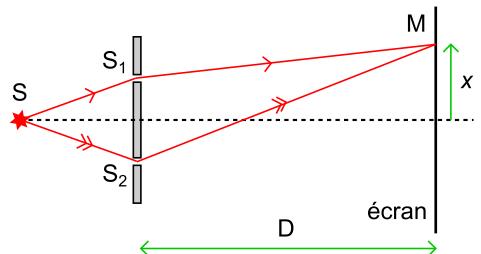


- **Écran placé à distance finie D**

♡ $\delta = \frac{nax}{D}$ avec $D \gg a$ et $D \gg x$

Démonstration (à savoir faire) : développement limité des distances

$$S_1M = D(1 + \dots) \quad \text{et} \quad S_2M = D(1 + \dots)$$

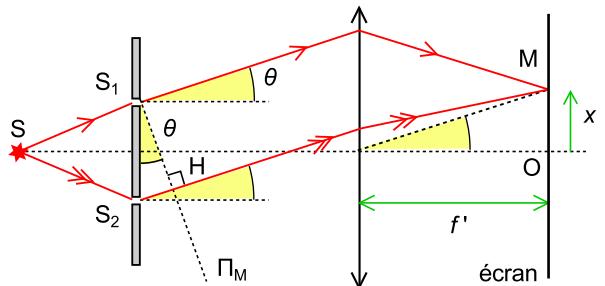


- **Écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale f'**

♡ $\delta = \frac{nax}{f'}$

Démonstration (à savoir faire) : utilisation du plan d'onde Π_M relatif à M par retour inverse de la lumière d'où $\delta = (S_2H)$ puis utilisation de l'angle θ .

⚠ Π_M n'est pas un plan d'onde relatif à S .

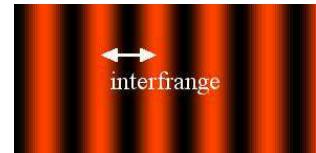


- **Figure d'interférence**

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(x) \right) \right] \quad (\text{formule de FRESNEL})$$

NB : le fait d'avoir $I_1 = I_2 = I_0$ maximise le contraste de la figure d'interférence.

Les franges sont **rectilignes** (à $x = C^{\text{te}}$) et équidistantes de $i = \text{interfrange}$



Méthode : comment exprimer l'interfrange dans le dispositif des fentes de YOUNG ?

- ① mettre le cosinus sous la forme $\cos \left(\frac{2\pi}{i} x + C^{\text{te}} \right)$ et identifier i
- ② écrire que lorsque $\Delta x = i$, l'argument dans le cosinus varie de 2π
- ③ utiliser le fait que l'ordre d'interférence varie d'une unité entre deux franges consécutives de même nature : $p(x+i) = p(x) \pm 1$ avec $p(x) = \delta(x)/\lambda_0$

Application : $i = \lambda D/a$ ou $i = \lambda f'/a$ avec $\lambda = \lambda_0/n$ la longueur d'onde dans le milieu.

- Un **élargissement spatial** (transverse) ou un **élargissement spectral** de la source provoque une perte de contraste.

♡ La figure d'interférence reste bien contrastée si la modification de la source entraîne une variation Δp de l'ordre d'interférence inférieure à $1/2$.

NB : le cas $\Delta p = 1/2$ correspond au cas où une frange brillante devient superposée avec une frange sombre.

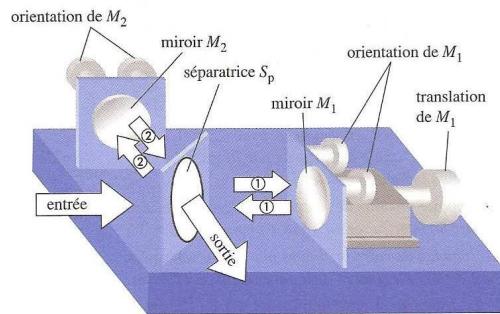
♡ Les fentes de YOUNG sont un dispositif à **division du front d'onde** : les deux rayons qui interfèrent sont issus de deux rayons distincts émis par la source.

□ Interféromètre de Michelson

• Principe

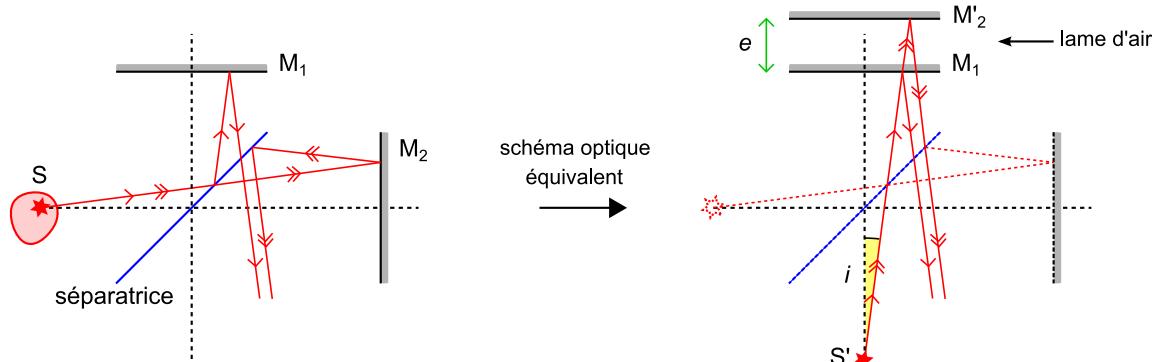
Un faisceau lumineux issu d'une source est séparé en deux par une lame semi-réfléchissante appelée **séparatrice**; chacun des faisceaux est réfléchi par un miroir et les deux faisceaux réfléchis interfèrent en sortie.

L'un des miroirs peut être translaté (on dit charioté) et pivoter.



• Réglage en lame d'air

L'interféromètre est réglé en lame d'air lorsque les deux miroirs sont orthogonaux.



♡ En lame d'air, les interférences sont localisées à l'infini.

NB : on projette souvent la figure d'interférence sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille.

♡ $\delta = 2ne \cos i$ i inclinaison des rayons par rapport à l'axe de sortie (= angle d'incidence sur les miroirs)

Démonstration (à connaître) : utiliser le schéma optique équivalent et un plan d'onde relatif au point d'interférence par principe de retour inverse de la lumière.

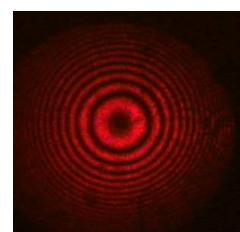
NB : **variante** : utiliser les sources secondaires fictives S_1 et S_2 , symétriques de S' par rapport à M_1 et M'_2 , distantes de e .

♡ En lame d'air, la figure d'interférence est constituée d'anneaux concentriques.

NB : anneaux **d'égale inclinaison** car ils correspondent à des rayons qui interfèrent à $i = C^{\text{te}}$.

⚠ Ces anneaux ne sont pas équidistants (ils sont plus resserrés sur les bords).

Propriété : l'ordre d'interférence est maximal au centre de la figure (car δ maximal pour $i = 0$)



• Réglage en coin d'air

L'interféromètre est en coin d'air lorsque les deux miroirs forment un angle $\pi/2 + \alpha$ (coin d'air d'angle α).

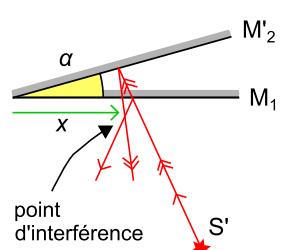
♡ En coin d'air, les interférences sont localisées à proximité des miroirs.

NB : pour les observer, on peut projeter leur image sur un écran grâce à une lentille.

♡ $\delta = 2n\alpha \times x$ (facteur 2 dû à l'aller-retour dans le coin d'air)

♡ En coin d'air, la figure d'interférence est constituée de franges rectilignes équidistantes.

NB : pour déterminer l'interfrange i , on utilise les mêmes méthodes que pour les fentes de YOUNG.



• **Au contact optique**, les miroirs M_1 et M'_2 sont confondus (= lame d'air d'épaisseur nulle = coin d'air d'angle nul) et on observe un disque uniformément lumineux appelé **teinte plate**.

NB : au contact optique, $\delta = 0$ en tout point d'interférence donc les interférences sont totalement constructives partout.

♡ L'interféromètre de MICHELSON est un dispositif **à division d'amplitude** : les deux rayons qui interfèrent sont issus du même rayon émis par la source.