Chaînes de Markov à temps discret

Institut National des Postes et Télécommunications
(INPT)

Rabat, Octobre 2024

Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps (discret ou continu), selon des transitions probabilistes, pour décrire un ensemble de phénomènes aléatoires selon le principe des processus stochastiques.

Soit $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ un PS à temps discret et d'espace d'état dénombrable $(E, \mathcal{B})$.

Définition 1.1

Le PS $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ est une chaîne de Markov à temps discret si pour tout $n = 0, 1, 2, \cdots$ et quelque soient les $n+1$ états $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in E$ tels que $\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j, X_n = i, \cdots, X_0 = i_0\right] > 0$, la propriété de Markov est vérifiée:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j / X_n = i, \cdots, X_0 = i_0\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j / X_n = i\right] = p_{ij}(n)$$

La probabilité $p_{ij}(n)$ s'appelle la probabilité de transition de l'état i vers j à l'instant n.

Définition 1.2

Une chaîne de Markov à temps discret $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ est dite homogène si pour tout $n = 0, 1, \cdots$ et pour tout $i, j \in E$, la probabilité

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j / X_n = i\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+k} = j / X_{n+k-1} = i\right]$$

est indépendante de l'instant n.

Nous introduisons la notation suivante:

$$p_{ij} \overset{not}{=} \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j / X_n = i\right],$$

pour toute paire d'état (i, j), indépendamment de n. p_{ij} s'appelle la probabilité de transition en une étape de l'état i vers l'état j.

Soit $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ une chaîne de Markov, on introduit les notations suivantes:

$$p_{ij}(m,n) = \mathbb{P}\left[(X_m = j) \cap (X_n = i)\right]$$

$$p_{ij}(m;n) = \mathbb{P}\left[(X_m = j) \,/\, (X_n = i)\right].$$

Propriétés des $p_{ij}(m;n)$

a) $\forall m \geq n,\ \forall i, j \in E$

i. $p_{ij}(m;n) \geq 0$;

2i. $\sum_{j\in E} p_{ij}(m;n) = 1$, chaque fois que $P(X_n = i) > 0$;

3i. $p_{ij}(n;n) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$, si $P(X_n = i) > 0$;

b) Equation de Chapman-Kolmogorov

$\forall n \leq l \leq m,\ \forall i, j \in E$, si $\mathbb{P}\left[(X_l = k) \cap (X_n = i)\right] > 0,\ \forall k \in E$, alors:

$$p_{ij}(m;n) = \sum_{k\in E} p_{ik}(l;n).p_{kj}(m;l). \tag{1}$$

Les probabilités de transition en une étape p_{ij} de l'état i vers l'état j forment une matrice stochastique sur E.

Définition 1.3

La matrice $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ est appelée la matrice de transition de la chaîne de Markov. Les éléments p_{ij} satisfont les deux conditions suivantes:

i. $p_{ij} \geq 0, \ \forall i, j \in E$,

2i. $\displaystyle\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \ \forall i \in E$.

Nous introduisons la notation $p_{ij}^{(n)} \overset{not}{=} \mathbb{P}\left[X_n = j / X_0 = i\right]$.

Définition 1.4

On appelle la probabilité de transition en n étapes, $n = 1, 2, \cdots$, de l'état i à l'état j, la probabilité:

$$p_{ij}^{(n)} \overset{not}{=} \mathbb{P}\left[X_n = j / X_0 = i\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+k} = j / X_k = i\right].$$

Pour une matrice de transition en n étapes $\boldsymbol{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in E}$ on a:

i. $p_{ij}^{(n)} \geq 0, \ \forall i,j \in E;$

2i. $\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)} = 1, \ \forall i \in E.$

Théorème 1.1

Soit $\boldsymbol{P}^{(n)}$ la matrice de transition en n étapes d'une chaîne de Markov. Alors pour tout $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ et $i \in E$ et tout $i, j \in E$, on a:

$$\boldsymbol{P}^{(n+m)} = \boldsymbol{P}^{(n)}\boldsymbol{P}^{(m)},$$

ce qui s'écrit sous forme dévelopée:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

Par conséquent,

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{n}.$$

Définition 1.5

On appelle la probabilité d'état de la chaîne de Markov $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ la probabilité

$$p_j^{(n)} = \mathbb{P}\left[X_n = j\right],\ j \in E,\ n = 0, 1, \cdots .$$

La loi $p^{(0)}$ de X_0 s'appelle la loi initiale de la chaîne: $p^{(0)} = \left(p_i^{(0)}\right)_{i \in E}$ avec $p_i^{(0)} = \mathbb{P}\left[X_0 = i\right]$.

Proposition 1.1

Pour tout $n = 1, 2, \cdots$ et tout $j \in E$, les probabilités d'état vérifient:

$$p_j^{(n)} = \sum_{i \in E} p_i^{(n-1)} p_{ij}, \text{ et } p_j^{(n)} = \sum_{i \in E} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$$

Soit en notation matricielle,

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \boldsymbol{P}, \text{ et } p^{(n)} = p^{(0)} \boldsymbol{P}^{(n)}$$

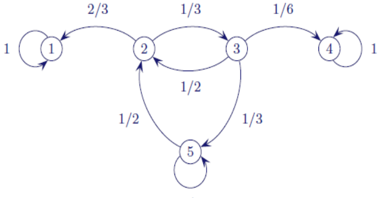
où $p^{(n)} = \left(p_j^{(n)}\right)_{j \in E}$ désigne le vecteur ligne des probabilités d'état à l'instant n, et $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition.

La matrice de transition $\boldsymbol{P}$ d'une chaîne de Markov peut être représentée par un graphe orienté $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dont:

- $\mathcal{E}$: L'ensemble des sommets correspondent aux états de la chaîne;
- $\mathcal{V}$: L'ensemble des arcs correspondant aux sommets associés aux états dont les probabilités de transition sont positives $p_{ij} > 0$.

Le graphe ainsi défini est appelé le graphe représentatif, ou detransition de la CM.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Définition 1.6

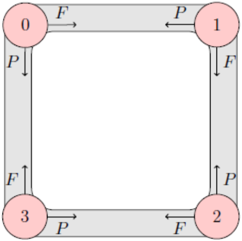
- l'état j est accessible depuis l'état i s'il existe, dans G, au moins un chemin de i à j, c'-à-d $\exists n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. On note alors $i \longrightarrow j$.
- Les états i et j communiquent s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre, c'-à-d $\exists m, n > 0$ tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. On note alors $i \longleftrightarrow j$.

Propriété 1.1

La relation "i et j sont communicants" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des états E.

La relation "i et j communiquent" est une relation d'equivalence dont les classes correspondent aux composantes fortement connexes de G. Ainsi, les états i et j communiquent si et seulement s'ils appartiennent à la même composante fortement connexe de G.
Les classes de la chaîne correspondent aux composantes fortement connexes de G.

Considérons un fort carré pourvu d'un poste de garde à chaque coin. Une seule sentinelle est de garde ce jour-là. Elle a pour rôle de tromper l'ennemi et pour cela elle a l'ordre d'effectuer sa ronde de la manière aléatoire suivante: Elle monte la garde 5 minutes dans un des quatre postes, puis elle tire à pile ou face une pièce équilibrée; si elle tire pile, elle se rend au premier poste sur sa gauche et si elle tire face, elle se rend au premier poste sur sa droite. Elle y monte la garde 5 min et de nouveau elle tire à pile ou face le nouveau poste de garde et ainsi de suite. Le parcours de la sentinelle peut être décrit à l'aide de la figure suivante :

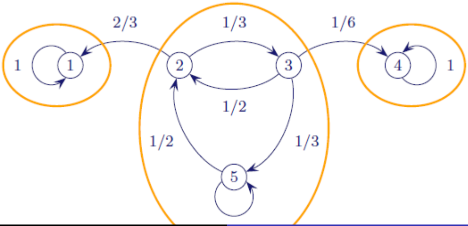


Soient X_0 le numéro du poste au départ, X_n le numéro du poste après n déplacements. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov. Donner la

Les classes d'équivalence de la chaîne correspondent aux composantes fortement connexes de G.
Si $C_1, \cdots, C_r$ dénotent les classes d'une chaîne de Markov, le graphe réduit G_R de la chaîne est obtenu en associant un sommet u à chaque classe C_u et en reliant les sommets u et v par un arc (u, v) s'il existe $i \in C_u$ et $j \in C_v$ avec $p_{ij} > 0$.

Propriété 1.2

Le graphe réduit G_R d'une chaîne de Markov est bien évidemment un graphe sans circuit.



- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \; p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \; p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0, \forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD\left\{n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD\left\{n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0, \ \forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD\left\{n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \; p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD\left\{n \in \mathbb{N}^* : \; p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Un état est dit récurrent si la chaîne démarrant dans cet état y retourne.
- Un état est dit transitoire s'il n'est pas récurrent.
- Un état i est dit absorbant si $p_{ii} = 1$, (on a alors $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$).
- Un état i est dit périodique si $\exists n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0$. Sa période est $d = PGCD \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \ p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$. si $d = 1$, l'état est dit apériodique.
- Une classe est persistante si elle correspond à un sommet sans successeur de G_R. Si tel n'est pas le cas, la classe est transitoire.
- Les états d'une classe persistante sont persistants ou récurrents et ceux d'une classe transitoire sont transitoires.
- Une classe persistante composée d'un seul état est absorbante et un état est absorbant s'il forme, à lui seul, une classe persistante.

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe d'équivalence par rapport à la relation de communication. Dans le cas contraire, elle est réductible.
- Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.
- Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous ses états ont une période égale à 1.

Propriétés 1.3

- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.
- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe d'équivalence par rapport à la relation de communication. Dans le cas contraire, elle est réductible.
- Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.
- Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous ses états ont une période égale à 1.

Propriétés 1.3

- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.
- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe d'équivalence par rapport à la relation de communication. Dans le cas contraire, elle est réductible.
- Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.
- Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous ses états ont une période égale à 1.

Propriétés 1.3

- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.
- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe d'équivalence par rapport à la relation de communication. Dans le cas contraire, elle est réductible.
- Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.
- Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous ses états ont une période égale à 1.

Propriétés 1.3

- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.
- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne compte qu'une seule classe d'équivalence par rapport à la relation de communication. Dans le cas contraire, elle est réductible.
- Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants le sont.
- Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous ses états ont une période égale à 1.

Propriétés 1.3

- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe.
- Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toutes ses paires d'états communiquent.

Définition 1.7

Le temps de premier retour T_i d'un état i est le temps mis par la chaîne partant de cet état i pour y retourner pour la première fois. Si elle n'y revient jamais, on pose $T_i = \infty$.

$$T_i = \inf\left\{n = 1, 2, \cdots : \ p_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$

$$\begin{array}{lcl} i \text{ récurrent} & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}\left[T_i < \infty\right] = 1, \\ i \text{ transitoire} & \Longleftrightarrow & \mathbb{P}\left[T_i = \infty\right] > 0. \end{array}$$

Un état récurrent est dit récurrent positif si l'espérance de son temps de premier retour est finie ($\mathbb{E}(T_i) < \infty$), et récurrent nul dans le cas contraire ($\mathbb{E}(T_i) = \infty$).

Définition 1.8

On définit la probabilité de première transition, $f_{ij}^{(n)}$, de i à j en n étapes,

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left[X_n = j, \ X_k \neq j, \ k = 1, 2, \cdots, n-1 / X_0 = i\right].$$

Le temps moyen de retour μ_i peut s'écrire

$$\mu_i = \mathbb{E}(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

$$i \text{ récurrent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1, \qquad i \text{ transitoire} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1,$$
$$i \text{ récurrent positif} \iff \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < +\infty, \qquad i \text{ récurrent nul} \iff \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

Théorème 1.2

Un état i est transitoire si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$.

Un état i est récurrent si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.

Corollaire 1.1

Si l'état j est transitoire alors, pour tout état $i \in E$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = j\} = 0.$$

Corollaire 1.2

Soit $i, j \in E$ tel que $i \longleftrightarrow j$. Alors si i est récurrent, j est également récurrent.

Proposition 1.2

Soit $\mathcal{C}_R$ une classe d'états récurrents. Si i est un état de $\mathcal{C}_R$ et j un état qui n'est pas dans $\mathcal{C}_R$ alors $p_{ij} = 0$.

Preuve. Supposons que $p_{ij} > 0$. Comme i et j ne sont pas communicants, puisque $j \notin \mathcal{C}_R$, on a

$$p_{ji}^{(n)} = 0, \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \ldots, .$$

Si la chaîne commence dans l'état i, il y a une probabilité strictement positive (au moins p_{ij}) que la chaine ne revienne jamais à l'état i. Cela contredit le fait que l'état i soit récurrent, donc $p_{ij} = 0$. $\square$

Théorème 1.3

Pour une chaîne de Markov à temps discret, homogène et irréductible, une et une seule des assertions suivantes est vérifiée:

1. tous les états de la chaîne sont récurrents positifs,
2. tous les états de la chaîne sont récurrents nuls,
3. tous les états de la chaîne sont transitoires.

L'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov représente, souvent, une question de plus grand intérêt. Cette étude cherche à répondre à des questions aussi diverses que

- la distribution $p^{(n)} = \left(p_j^{(n)}\right)_{j \in E}$ converge-t-elle lorsque $n \to \infty$?
- si la distribution $p^{(n)}$ converge lorsque $n \to \infty$, quelle est la limite π et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $p^{(0)}$?
- si l'état i est persistant, quelle est la proportion du temps passé dans cet état et quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état ?
- si l'état i est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

Si la distribution $p^{(n)}$ d'une CM converge vers une distribution π, alors elle vérifie

$$\pi = \pi \boldsymbol{P}.$$

Définition 1.9

Une distribution $\pi = \left(\pi_j\right)_{j \in E}$ est invariante ou stationnaire pour la chaîne de Markov si:

$$\pi = \pi \boldsymbol{P},$$

c'-à-d, pour tout $j \in E$

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}.$$

Remarques 1.3:

1. Une chaîne de Markov possède toujours au moins une distribution invariante.
2. Une chaîne de Markov possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre 1 de sa matrice de transition. De plus, cette multiplicité est égale au nombre des classes persistantes de la chaîne.
3. Si la loi $p^{(0)} = \left(p_i^{(0)}\right)_{i \in E}$ de la chaîne est stationnaire alors $p^{(n)} = p^{(0)}$ pour tout $n = 1, 2, \cdots$.
4. Une chaîne de Markov dont la loi initiale $p^{(0)}$ est stationnaire pour la chaîne est donc une chaîne stationnaire.

Si une CM admet une distribution invariante π, cette dernière dépend a priori nonseulement de $\boldsymbol{P}$, mais également de $p^{(0)}$.

Théorème 1.4

La distribution $p^{(n)}$ d'une chaîne de Markov converge vers une limite π indépendante de la distribution initiale $p^{(0)}$ si et seulement si la matrice $\boldsymbol{P}^n$ tend vers une limite $\boldsymbol{P}^*$ dont toutes les lignes sont identiques entre elles et, de plus, identiques à π.

Exemples 1.2:

Considérons la chaîne de Markov définie par sa la matrice de transition

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne est irréductible et apériodique $(p_{11} > 0)$. on a

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{P}^{10} \approx \begin{pmatrix} 0.5166 & 0.2471 & 0.2363 \\ 0.4727 & 0.2695 & 0.2578 \\ 0.4941 & 0.2363 & 0.2695 \end{pmatrix},$$

$$P^{20} = \begin{pmatrix} 0.5004 & 0.2501 & 0.2495 \\ 0.4990 & 0.2503 & 0.2507 \\ 0.5002 & 0.2495 & 0.2503 \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{n\to\infty} P^n \approx \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

On a également, quelle que soit la distribution initiale $p^{(0)}$ de la chaîne:

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = (1/2 \;\; 1/4 \;\; 1/4)\,.$$

Considérons maintenant la chaîne irréductible et périodique définie par la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\; P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\; P^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, plus généralement, $P^{3k} = I$, $P^{3k+1} = P$ et $P^{3k+2} = P^2$ pour tout $k \geq 1$.

La suite des puissances de P ne converge donc pas. La chaîne possède cependant une distribution invariante unique : $\pi = (1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3)$.

Considérons une marche aléatoire sur l'ensemble $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ définie par la matrice de transition

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{P}$ sont $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 1/2,\ \lambda_4 = -1/2$. De plus, $\boldsymbol{P}$ est diagonalisable et la limite de ses puissances est

$$\boldsymbol{P}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ ne sont pas toutes égales entre elles et la distribution à long terme de la chaîne n'est pas indépendante de sa distribution initiale. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} p^{(0)} \boldsymbol{P}^n = p^{(0)} \boldsymbol{P}^* \\ &= \left(p_1^{(0)} + \tfrac{2}{3} p_2^{(0)} + \tfrac{1}{3} p_3^{(0)},\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{3} p_2^{(0)} + \tfrac{2}{3} p_3^{(0)} + p_4^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Théorème 1.5 – Chaîne irréductible et apériodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique.

1. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

2. π est la solution du système

$$\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$$

3. π est égal à n'importe quelle ligne de la matrice

$$\boldsymbol{P}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n$$

4. Pour tout $i \in E$, on a

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

où $\mu_i \stackrel{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i: espérance du temps du premier retour.

Théorème 1.5 – Chaîne irréductible et apériodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique.

1. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

2. π est la solution du système

$$\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$$

3. π est égal à n'importe quelle ligne de la matrice

$$\boldsymbol{P}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n$$

4. Pour tout $i \in E$, on a

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

où $\mu_i \stackrel{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i: espérance du temps du premier retour.

Théorème 1.5 – Chaîne irréductible et apériodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique.

1. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

2. π est la solution du système

$$\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$$

3. π est égal à n'importe quelle ligne de la matrice

$$\boldsymbol{P}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n$$

4. Pour tout $i \in E$, on a

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

où $\mu_i \stackrel{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i: espérance du temps du premier retour.

Théorème 1.5 – Chaîne irréductible et apériodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique.

1. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

2. π est la solution du système

$$\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$$

3. π est égal à n'importe quelle ligne de la matrice

$$\boldsymbol{P}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n$$

4. Pour tout $i \in E$, on a

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

où $\mu_i \overset{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i : espérance du temps du premier retour.

Définition 1.10 – Chaîne ergodique

Une chaîne de Markov est ergodique si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. la chaîne possède une seule classe persistante;
2. ses états persistants sont apériodiques.

Remarques.

1. La définition d'une CM ergodique varie sensiblement selon les auteurs. Cependant, la définition d'ergodicité est toujours liée aux propriétés de convergence de la distribution de probabilités des états de la chaine.
2. la définition retenue ici regroupe les processus admettant une distribution asymptotique unique et indépendante de sa distribution initiale.
3. Les chaînes irréductibles et apériodiques sont ergodiques mais ne sont pas les seules.

Théorème 1.6 – Théorème ergodique

Soient $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ une chaîne de Markov ergodique d'espace d'état E et f une fonction définie sur E. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \overset{p.s}{=} \sum_{i\in E} \pi_i^* \, f(i).$$

Théorème 1.7 – Chaîne ergodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique:

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^*$$
et les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π.

2. Pour tout $i \in E$,
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} > 0 & \text{si } i \text{ récurrent} \\ 0 & \text{si } i \text{ transitoire} \end{cases}$$
où $\mu_i \stackrel{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.

3. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,
$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)} \boldsymbol{P}^n = \pi$$

4. π est la solution du système $\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1 \end{cases}$

Théorème 1.7 – Chaîne ergodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique:

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^*$$
et les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π.

2. Pour tout $i \in E$,
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} > 0 & \text{si } i \text{ récurrent} \\ 0 & \text{si } i \text{ transitoire} \end{cases}$$
où $\mu_i \overset{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.

3. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,
$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

4. π est la solution du système $\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$

Théorème 1.7 – Chaîne ergodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique:

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^*$$
et les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π.
2. Pour tout $i \in E$,
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} > 0 & \text{si } i \text{ récurrent} \\ 0 & \text{si } i \text{ transitoire} \end{cases}$$
où $\mu_i \overset{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.
3. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,
$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)} \boldsymbol{P}^n = \pi$$
4. π est la solution du système $\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} &= \pi \\ \pi \mathbb{1} &= 1 \end{cases}$

Théorème 1.7 – Chaîne ergodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique:

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^*$$
et les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π.

2. Pour tout $i \in E$,
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} > 0 & \text{si } i \text{ récurrent} \\ 0 & \text{si } i \text{ transitoire} \end{cases}$$
où $\mu_i \overset{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.

3. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,
$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$

4. π est la solution du système $\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1 \end{cases}$

Théorème 1.7 – Chaîne ergodique

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique:

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^*$$
et les lignes de $\boldsymbol{P}^*$ sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π.
2. Pour tout $i \in E$,
$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} > 0 & \text{si } i \text{ récurrent} \\ 0 & \text{si } i \text{ transitoire} \end{cases}$$
où $\mu_i \overset{not}{=} \mathbb{E}[T_i]$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i.
3. Pour toute distribution initiale $p^{(0)}$,
$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \pi$$
4. π est la solution du système $\begin{cases} \pi\boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi\mathbb{1} & = 1 \end{cases}$

Une machine peut se retrouver dans quatre états d'usure différents numérotés de 1 à 4. L'état 1 correspond à une machine fonctionnant parfaitement et l'état 4 à une machine inutilisable; les états 2 et 3 dénotent, eux, des stades de dégradation croissante des performances de l'installation. Les probabilités que la machine se retrouve dans l'état j un certain matin, sachant qu'elle se trouvait dans l'état i la veille au matin sont résumées dans la matrice de transition

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.80 & 0.20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La probabilité $p_{41} = 1$ correspond au fait que chaque matin où la mchine se retrouve inutilisable, elle subit une révision complète, qui empêche toute production pendant la journée, mais la laisse en parfait état pour le lendemain.

1. Quel est l'intervalle de temps moyen entre deux révisions successives?
2. Si les productions journalières selon l'état de la machine sont données par $r = (900,\ 800,\ 400,\ 0)$, quelle la production journalière moyenne de l'installation?
3. Quel est le nombre moyen de jours avant que la machine ne doive subir une révision?

Une matrice de transition $\boldsymbol{P}$, d'une chaîne de Markov est sous la forme canonique si elle s'écrit comme suit:

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array} \right),$$

où la sous-matrice $\boldsymbol{R}$ représente les probabilités de transiter d'un état non absorbant vers un état absorbant et la sous-matrice Q représente les probabilités de transiter d'un état non absorbant vers un état non absorbant.
La n^{ieme} puissance de $\boldsymbol{P}$ s'écrit:

$$\boldsymbol{P}^n = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{Q}^k \right) \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^n \end{array} \right).$$

Proposition 1.3

Pour une chaîne de Markov absorbante de matrice de transition, sous forme canonique $\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array} \right)$, on a $\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{Q}^n = 0$.

Lemme 1.1

Soit $\boldsymbol{Q}$ une matrice telle que $\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{Q}^n = 0$. alors, $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})$ est inversible et

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n.$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{N}_n = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{Q}^k$, on peut vérifier facilement que:

$$\boldsymbol{N}_{n-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{N}_{n-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n.$$

Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \det\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n) = \det\,(\boldsymbol{I}) = 1,$$

il existe alors un entier m tel que $\det\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n) \neq 0$ pour tout $n \geq m$. Ainsi,

$$\det\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\det\,(\boldsymbol{N}_{n-1}) \neq 0, \quad n \geq m,$$

et par conséquent $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ existe.
En passant maintenant à la limite vers l'infini de $\boldsymbol{N}_{n-1}$ tout en utilisant l'égalité $\boldsymbol{N}_{n-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n)$, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{N}_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}.$$

□

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice de transition, sous forme canonique, d'une chaîne de Markov absorbante, alors

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \lim_{n\to\infty} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{Q}^k\right) \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^n \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{R} & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} & 0 \end{array} \right).$$

La matrice $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ est appelée la matrice fondamentale de la chaîne de Markov.

Théorème 1.8

Le nombre moyen de périodes séjournées dans l'état transitoire j par une chaîne de Markov débutant son évolution dans l'état transitoire i est égal à l'élément n_{ij} de la matrice fondamentale N.

Preuve. Soit $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ une chaîne de Markov absorbante. Soient i et j deux états transitoires tels que $X_0 = i$. Considérons la suite des variables aléatoires $\{Y_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ définie comme suit:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = j \\ 0 & \text{si } X_n \neq j. \end{cases}$$

L'espérance Y_n n'est autre que la probabilité de transition de i à j en n étatpes, i.e. $\mathbb{E}[Y_n] = 1.\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) + 0.\mathbb{P}(X_n \neq j|X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} = q_{ij}^{(n)}$. Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n$ représente le nombre de visites de l'état j à partir de l'état i, alors le nombre moyen de visites de j à partir de i est:

$$n_{ij} = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} = \left((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\right)_{ij}.$$

□

Corollaire 1.3

Partant de l'état transitoire i, le nombre moyen de transitions avant d'atteindre un état absorbant (persistant) est égal à la somme des termes de la $i$ème ligne de la matrice fondamentale N.

Remarque. Le calcul du nombre moyen de visites d'un état transitoire avant absorption prend en compte l'état initial du processus. Ainsi pour tout état transitoire i, nous avons $n_{ii} \geq 1$.

Théorème 1.9

La probabilité d'être absorbé par l'état j partant de l'état transitoire i est donnée par l'élément b_{ij} de la matrice

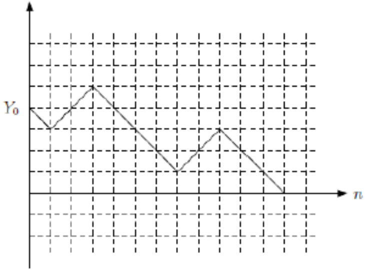
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R}.$$

Preuve. Soit b_{ij} la probabilité d'absorption par l'état absorbant j sachant que le processus débute dans l'état transitoire i:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k \text{ transitoire}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}\right) &= \sum_{k \text{ transitoire}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)}\right) p_{kj} \\ &= \sum_{k \text{ transitoire}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_{ik}^{(n)}\right) r_{kj} &= \left((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\boldsymbol{R}\right)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Un joueur joue un jeu où il peut gagner un montant fixe (ici 1 unité) avec probabilité p et perdre le même montant avec probabilité $1 - p$. Le joueur est ruiné (et donc arrête de jouer) dès que sa fortune est épuisée. On peut également ajouter une condition que le joueur s'arrête de jouer si sa fortune atteint un certain seuil a.



Dans ce jeu, on aimerait connaître l'espérance de gain ou encore la durée moyenne du jeu en fonction de sa fortune initiale, p et a.

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états
   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.
   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi \mathbf{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

Résumé

Etude d'une chaîne de Markov

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états

   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.

   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.

   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.

   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

Résumé

Etude d'une chaîne de Markov

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états

   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.

   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.

   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.

   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi P & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

Résumé

Etude d'une chaîne de Markov

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états

   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.

   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.

   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.

   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi P & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

Résumé

Etude d'une chaîne de Markov

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états

   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.

   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.

   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)

   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.

   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi P & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états
   - A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
   - B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
   - C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)
   - A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.
   - B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états
   A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
   B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
   C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)
   A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.
   B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

L'étude d'une chaîne de Markov se décompose en trois étapes.

1) Classification de la chaîne et de ses états
   - A) Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe représentatif G de la chaîne.
   - B) Construire le graphe réduit G_R et en déduire les classes et les états transitoires, persistants et absorbants.
   - C) Déterminer si la chaîne est irréductible ou non, absorbante ou, encore, ergodique.

2) Etude des classes persistantes

   Pour chaque classe persistante (si la classe est absorbante, les calculs sont triviaux)
   - A) Déterminer sa période en examinant les circuits de G.
   - B) Calculer sa distribution stationnaire en résolvant

$$\begin{cases} \pi \boldsymbol{P} & = \pi \\ \pi \mathbb{1} & = 1. \end{cases}$$

3) **Etude des classes transitoires**
   A) Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante (cette transformation n'est pas nécessaire).
   B) Mettre la matrice de la chaîne sous forme canonique.
   C) Calculer la matrice fondamentale

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$$

   et la matrice des probabilités d'absorption

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$$

3) Etude des classes transitoires
   A) Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante (cette transformation n'est pas nécessaire).
   B) Mettre la matrice de la chaîne sous forme canonique.
   C) Calculer la matrice fondamentale

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$$

et la matrice des probabilités d'absorption

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$$

3) Etude des classes transitoires
   A) Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante (cette transformation n'est pas nécessaire).
   B) Mettre la matrice de la chaîne sous forme canonique.
   C) Calculer la matrice fondamentale

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$$

et la matrice des probabilités d'absorption

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$$

3) Etude des classes transitoires

A) Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante (cette transformation n'est pas nécessaire).

B) Mettre la matrice de la chaîne sous forme canonique.

C) Calculer la matrice fondamentale

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$$

et la matrice des probabilités d'absorption

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$$