

---

# Mathématiques

Résumé de cours – Sup & Spé TSI

---

Christophe Caignaert

Lycée Colbert – 59200 Tourcoing

<http://c.caignaert.free.fr>

Année scolaire 2014 – 2015

## Année Scolaire 2014 – 2015

**L**ES PROGRAMMES de référence sont ceux publiés en 2013 pour la première année et 2014 pour la seconde. Le programme est presque respecté à la lettre.

Ce résumé de cours, ainsi que le cours lui-même, sont disponibles sur mon site personnel :

<http://c.caignaert.free.fr>

Il est composé en LaTeX en utilisant les polices du package *kpfonts*.

Cette version du document est celle du 9 février 2015.

# Sommaire

<b>I Algèbre</b>	<b>6</b>	<b>9. Matrices</b>	<b>20</b>
1. Rudiments de logique	6	9.1. Généralités	20
1.1. Quantificateurs	6	9.2. Rang d'une matrice	20
1.2. Connecteurs logiques	6	9.3. Généralités sur les matrices carrées	20
1.3. Raisonnement par récurrence	6	9.4. Matrice d'une application linéaire	21
1.4. Raisonnement par contraposition	7	9.5. Application linéaire canoniquement associée	21
1.5. Raisonnement par l'absurde	7	9.6. Matrice de Passage	21
1.6. Principe d'analyse/synthèse	7	9.7. Changements de base	22
2. Théorie des ensembles	7	9.8. Trace d'une matrice	22
2.1. Ensembles	7	<b>10. Systèmes linéaires</b>	<b>22</b>
2.2. Sous-ensembles	8	10.1. Matrice d'un système linéaire	22
2.3. Propriétés de $\mathbb{N}$	8	10.2. Systèmes équivalents	22
2.4. Ensemble des parties	8	10.3. Pivot de Gauss-Jordan	22
2.5. Opérations	8	10.4. Résolution	22
2.6. Ensembles finis	9	<b>11. Déterminants</b>	<b>23</b>
2.7. Ensembles dénombrables	9	11.1. Ordre 2 et 3	23
2.8. Ensembles usuels de nombres	9	11.2. Matrice triangulaire	23
3. Fonctions et applications	9	11.3. Ordre quelconque	23
3.1. Applications	9	11.4. Déterminant d'un produit	23
3.2. Injection, surjection, bijection	9	11.5. Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	23
3.3. Image, image réciproque d'une partie	10	<b>12. Réduction des Endomorphismes</b>	<b>24</b>
3.4. Composition des applications	10	12.1. Valeurs propres et vecteurs propres	24
3.5. Ensemble des applications de E vers F	10	12.2. Polynôme caractéristique	24
3.6. Corps usuels	10	12.3. Diagonalisabilité	24
4. Nombres Réels	11	12.4. Diagonalisabilité et diagonalisation	25
4.1. Valeur absolue	11	12.5. Triangularisation (ou trigonalisation)	25
4.2. Inégalités, Bornes	11	12.6. Puissances d'une matrice	25
4.3. Partie entières	11	<b>13. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens</b>	<b>25</b>
4.4. Formule du binôme	11	13.1. Produit scalaire	25
5. Nombres Complexes	12	13.2. Esp. vect. préhilbertiens et euclidiens	26
5.1. Nombres Complexes	12	13.3. Distance de deux vecteurs	26
5.2. Inégalité triangulaire	12	13.4. Identité du parallélogramme	26
5.3. Nombres complexes de module 1	12	13.5. Orthogonalité	26
5.4. Argument d'un nombre complexe	13	13.6. Inégalités	27
5.5. Racines d'un nombre complexe	13	13.7. Procédé de Schmidt	27
6. Polynômes	13	13.8. Matrice symétrique réelle	27
6.1. Ensemble de polynômes	13	13.9. Endomorphismes symétriques	28
6.2. Racines	14	13.10. Projection sur un s-e-v de dimension finie	28
6.3. Division Euclidienne	14	<b>14. Isométries vectorielles</b>	<b>28</b>
6.4. Formules de Leibniz et Taylor	15	14.1. Isométries	28
7. Espaces Vectoriels	15	<b>II Analyse</b>	<b>30</b>
7.1. Structure d'espace vectoriel	15	<b>15. Suites</b>	<b>30</b>
7.2. Sous-espace vectoriel	15	15.1. Suites	30
7.3. Somme de sous-espaces vectoriels	15	15.2. Sous-suites	30
7.4. Esp. vect. de dimension finie : base	16	15.3. Suites réelles	30
7.5. Base adaptée à une somme directe	16	15.4. Suites récurrentes linéaires	31
7.6. Rang d'une famille finie de vecteurs	17	<b>16. Fonctions de <math>\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math></b>	<b>32</b>
7.7. Espaces vectoriels usuels	17	16.1. Ensemble de définition	32
7.8. Droites, plans et hyperplans vectoriels	17	16.2. Monotonie	32
8. Applications Linéaires	18	16.3. Limite et continuité	32
8.1. Applications linéaires	18	16.4. Comparaison et Équivalence	33
8.2. Sous espace vectoriel stable par $f$	18	16.5. Continuité sur un intervalle	33
8.3. Image et noyau	18	16.6. Fn continue par morceaux	33
8.4. Projecteur	19	16.7. Limites usuelles	33
8.5. Symétries	19	16.8. Équivalents	34
8.6. Théorème du rang	19		
8.7. Système linéaire	19		

16.9. Négligeabilité	34	24.2. Convergence	56
17. Dérivabilité	34	24.3. Développement en série entière	57
17.1. Dérivée, classe $\mathcal{C}^1$	34	24.4. Séries entières usuelles	58
17.2. Classe $\mathcal{C}^1$	35	24.5. Série entière solution d'une équ. différentielle	58
17.3. Application de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux	35	25. Séries de Fourier	59
17.4. Somme et produit	36	25.1. Coefficients de Fourier	59
17.5. Dérivée d'une fonction composée	36	25.2. Fonction paire ou impaire	59
17.6. Dérivée de la réciproque	36	25.3. Symétrie de glissement	59
17.7. Dérivée et prolongement par continuité	36	25.4. Convergence	59
17.8. Th. de Rolle, T.A.F., Formules de Taylor	36	25.5. Formule de Parseval	60
17.9. Zéros d'une fonction	37	26. Inversion intégrale-sommation	60
17.10. Développements limités	37	26.1. Série entière	60
17.11. Opérations sur les développements limités	38	26.2. Autres cas	60
18. Fonctions usuelles	38	27. Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$	61
18.1. Exponentielle et Logarithme	38	27.1. Topologie de $\mathbb{R}^p$	61
18.2. Fonctions trigonométriques circulaires	39	27.2. Limite et continuité	61
18.3. Fonctions trigonométriques réciproques	41	27.3. Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$	61
18.4. Autres fonctions usuelles	42	27.4. Extrémums d'une fonction de 2 variables	62
19. Trigonométrie	42	28. Equations et systèmes différentiels	62
19.1. Propriétés élémentaires	42	28.1. Généralités	63
19.2. Symétries	44	28.2. Linéaire du premier ordre	63
19.3. Arc double	44	28.3. Linéaire du second ordre à coeff. constants	63
19.4. Sommes d'arcs	44	28.4. Linéaire du second ordre	64
19.5. Transformation de sommes en produits	45	28.5. Équation aux dérivées partielles	64
19.6. Formule de Moivre et d'Euler	45	28.6. Système différentiel linéaire du premier ordre	65
19.7. Fonctions réciproques	45		
19.8. Pour le calcul intégral	45	III Géométrie	66
20. Recherche de primitives	45	29. Systèmes de coordonnées	66
20.1. Fraction rationnelle en $x$	45	29.1. Coordonnées cartésiennes	66
20.2. Fractions rationnelles diverses	45	29.2. Coordonnées polaires	66
20.3. Primitives usuelles	46	30. Vecteurs du plan et de l'espace	66
21. Intégrale de Riemann	46	30.1. Produit scalaire	66
21.1. Primitive	46	30.2. Produit vectoriel	67
21.2. Interprétation géométrique	46	30.3. Produit mixte	67
21.3. Inégalités	47	30.4. Déterminants	67
21.4. Théorème de l'intégrale nulle	48	31. Droites et Plans affines	67
21.5. Intégrale dépendant des bornes	49	31.1. Droites du plan	67
21.6. Int. par parties et changement de variable	49	31.2. Plans de l'espace affine	68
21.7. Sommes de Riemann	49	31.3. Droites de l'espace affine	68
22. Intégrale généralisée	50	31.4. Angles	69
22.1. Convergence	50	31.5. Distances	69
22.2. Fonctions positives	51	32. Projecteurs et Symétries	69
22.3. Théorème de l'intégrale nulle	51	32.1. Projecteur	69
22.4. Changement de variable pour une intégrale généralisée	52	32.2. Symétrie	69
22.5. Intégration par parties	52	32.3. Projection d'un point sur une droite	70
22.6. Un procédé de convergence	52	32.4. Projection d'un point sur un plan	70
22.7. Ensemble de définition	52	33. Isométries	70
23. Séries numériques réelles ou complexe	53	33.1. Isométries vectorielles	70
23.1. Convergence	53	33.2. Symétries orthogonales	70
23.2. Convergence Absolue	53	33.3. Recherche d'une symétrie orthogonale	70
23.3. Séries géométriques	53	33.4. Isométries Vectorielles	71
23.4. Séries positives	54	34. Applications affines du plan	71
23.5. Comparaison série-intégrale	54	34.1. Translation	71
23.6. Suite et série des différences	54	34.2. Rotation	72
23.7. Calcul exact de sommes de séries	54	34.3. Homothétie	72
23.8. Calcul approché de sommes de séries	55	34.4. Réflexion	72
23.9. Développement décimal d'un nombre réel	55		
24. Séries Entières	56		
24.1. Rayon de convergence	56		

35. Courbes Planes	72	39.3. Espace probabilisé	80
35.1. Courbes d'équation $y = f(x)$	72	39.4. Indépendance d'événements	80
35.2. Tangente	72	39.5. Probabilité conditionnelle	80
35.3. Courbe en coordonnées implicites	73	39.6. Formules des probabilités composées et des probabilités totales : cas fini	81
35.4. Courbes planes en paramétriques	73	39.7. Formules des probabilités composées et des probabilités totales : cas infini	81
36. Surfaces : Généralités	74	39.8. Formule de BAYES	81
36.1. Surfaces, plan tangent	74	40. Variables aléatoires sur un univers $\Omega$	82
36.2. Tangente à une courbe de l'espace	76	40.1. Variable aléatoire	82
37. Cercles et Sphères	76	40.2. Variable aléatoire réelle	82
37.1. Cercles dans le plan et sphères	77	40.3. Espérance d'une variable aléatoire : cas fini	83
37.2. Cocyclicité	77	40.4. Espérance d'une variable aléatoire : cas infini	83
IV Probabilités	78	40.5. Variance et écart-type cas fini	83
38. Univers et événements	78	40.6. Variance et écart type cas infini	84
38.1. Ensembles fini, dénombrable	78	40.7. Lois usuelles sur un univers fini	84
38.2. Univers et événements	78	40.8. Lois usuelles sur un univers infini	85
38.3. Système complet d'événements : cas fini	79	40.9. Espérance et variance des lois usuelles	85
38.4. Système complet d'événements : cas infini	79	41. Couple de variables aléatoires sur un univers fini	85
39. Probabilité sur un univers $\Omega$	79	41.1. Couple de variables aléatoires	85
39.1. Probabilité sur un univers fini	79	41.2. Variables aléatoires indépendantes	86
39.2. Probabilité sur un univers dénombrable	80	41.3. Covariance et coefficient de corrélation linéaire	86

## Figures

1 Procédé de Schmidt	27	10 Intégrale d'une fonction positive	48
2 Projection orthogonale	28	11 Intégrale d'une fonction de signe variable	48
3 App. de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux	35	12 Intégrale généralisée en un point fini	50
4 Fonctions Exponentielle et Logarithme	39	13 Intégrale généralisée à l'infini	51
5 Fonctions Sinus et Cosinus	40	14 Comparaison série-intégrale	55
6 Fonction Tangente	40	15 Convergence d'une série entière	57
7 Fonctions Arcsinus et Arccosinus	41	16 Coordonnées Polaires	66
8 Fonction Arctangente	42	17 Plan tangent	75
9 Cercle Trigonométrique	44	18 Point col	76

## Tableaux

1 Fonctions usuelles	43	3 Séries Entières usuelles	58
2 Primitives usuelles	47		

# Algèbre

## 1. Rudiments de logique

### 1.1. Quantificateurs

**Définition :** On dispose principalement de deux quantificateurs :

- « Quel que soit », noté «  $\forall$  ».  
Par exemple : «  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  », signifie que  $n$  est un entier naturel non nul quelconque, mais qu'on ne connaît pas !
- « Il existe », noté «  $\exists$  ».  
Par exemple : «  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin(x) = 1/3$  », signifie qu'il existe un réel  $x$  dont le sinus est  $1/3$ . C'est vrai mais on ne le connaît pas !

Les quantificateurs ne sont pas des abréviations !

Formulons par exemple une négation d'expressions utilisant des quantificateurs :

- «  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $2^n$  est un multiple de 4 », est faux, sa négation est : «  $\exists n \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $2^n$  n'est pas un multiple de 4 », ce qui est vrai pour  $n = 1$  !
- «  $\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin(x) = 1/3$  » est vraie, sa négation : «  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(x) \neq 1/3$  » est, elle, fausse !

### 1.2. Connecteurs logiques

**Définition :** On dispose principalement de deux connecteurs logiques :

- « implique », noté «  $\Rightarrow$  ».  
Par exemple : «  $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2$  », signifie que, si  $x$  est supérieur ou égal à 1, alors,  $x^2 + 1$  est supérieur ou égal à 2 !  
Ceci est vrai mais la réciproque est fausse, prenez  $x = -2$  par exemple...
- « équivaut à », noté «  $\Leftrightarrow$  ».  
Par exemple : «  $x \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 \geq 2$  », signifie que, si  $x$  est supérieur ou égal à 1, alors,  $x^3 + 1$  est supérieur ou égal à 2, et aussi que, si  $x^3 + 1$  est supérieur ou égal à 2, alors  $x$  est supérieur ou égal à 1 !  
Ceci est vrai, il suffit par exemple d'étudier les variations de  $x \mapsto x^3 + 1$ .

Les quantificateurs ne sont pas des abréviations !

Formulons par exemple une négation d'expressions utilisant des quantificateurs :

- Le contraire de «  $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2$  », est : «  $\exists x \geq 1$  tel que  $x^2 + 1 < 2$  » !
- Le contraire de «  $x \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 \geq 2$  » est : «  $\exists x \geq 1$  tel que  $x^2 + 1 < 2$ , ou bien,  $\exists x < 1$  tel que  $x^2 + 1 \geq 2$  » !

### 1.3. Raisonnement par récurrence

**Théorème :** Si on a une propriété logique  $P_n$  dépendant de  $n \in \mathbb{N}$  telle que :

- La propriété  $P_0$  est vraie ;
- Si la propriété  $P_{n_0}$  est vraie, il en est de même pour  $P_{n_0+1}$

alors : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $P_n$  est vraie.

On peut appliquer le même raisonnement sur  $\mathbb{N}^*$  ou même pour  $n \geq 2$ ...

## 1.4. Raisonnement par contraposition

**Théorème :** «  $P \text{ vraie} \Rightarrow Q \text{ vraie}$  »  $\Leftrightarrow$  «  $Q \text{ fausse} \Rightarrow P \text{ fausse}$  »

Ces deux propriétés sont contraposées l'une de l'autre.

On ne confondra pas la **contraposée** et le **contraire** !

**Exemple :** Pour montrer que «  $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2$  », il suffit de montrer que «  $x^2 + 1 < 2 \Rightarrow x < 1$  », ce qui est ici un peu plus facile.

## 1.5. Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une propriété est vraie, il suffit de supposer qu'elle est fausse et de poursuivre le raisonnement jusqu'au moment où on arrive à une contradiction avec ce que l'on sait vrai.

**Exemple :** Montrons que 0 n'a pas d'inverse.

On suppose que 0 a un inverse, noté  $x_0$ . Le produit d'un nombre par son inverse vaut 1, donc :  $x_0 \times 0 = 1$ .

Mais, on sait que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 0 = 0$ , on en conclut que  $0 = 1$ , ce qui est faux.

Ce qui montre que 0 n'a pas d'inverse !

## 1.6. Principe d'analyse/synthèse

*Analyse*

Ici, on cherche des conditions nécessaires sur les solutions d'un problème donné, ceci permet de réduire l'ensemble des solutions possibles.

*Synthèse*

Quand cet ensemble est très réduit, on cherche parmi ces solutions possibles lesquels sont réellement solutions, ce qui donne les conditions suffisantes...

**Exemple :** On cherche le minimum absolu de  $x \mapsto x^4 + 4x + 1$  pour  $x \in [-2, 2]$ . Ce minimum existe puisque c'est une application continue sur un segment.

En ce minimum,  $x = \pm 2$  ou la dérivée est nulle, donc  $4x^3 + 4 = 0$ , qui entraîne  $x = -1$ .

Ce minimum existe et ne peut être obtenu qu'en  $-1$  ou en  $\pm 2$ , c'est donc  $1 - 4 + 1 = -2$ , ou  $16 + 8 + 1 = 25$  ou  $16 - 8 + 1 = 9$ , c'est donc  $-1$ .

# 2. Théorie des ensembles

## 2.1. Ensembles

Un ensemble peut se définir par

- la liste de ses éléments, comme par exemple :  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  ;
- la propriété que vérifient ses éléments, par ex. :  $E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 1 = 0\}$ .

Quand  $x$  est un élément de  $E$ , c'est à dire qu'il est dans la liste des éléments de  $E$ , ou qu'il vérifie la propriété caractéristique de  $E$ , on dit que  $x$  **appartient** à  $E$ , noté :  $x \in E$ .

**Définition :** Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles, on appelle l'**ensemble produit**, ou **produit cartésien**, de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$ , l'ensemble des couples d'un élément de  $E$  et d'un élément de  $F$ , soit :

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$$

On peut faire le **produit cartésien** d'un nombre quelconque,  $p$ , d'ensembles, on a alors, à la place des couples, des  $p$ -uplets :  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ .

**Remarque :** On prendra souvent 2 fois, ou  $p$  fois le produit du même ensemble, on aura ainsi  $E^2$  et  $E^p$ .

L'ensemble vide se note :  $\emptyset$  ou  $\varnothing$ .

## 2.2. Sous-ensembles

On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$ , noté  $F \subset E$ ,  $F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, x \in E$ .

$F$  est ainsi un sous-ensemble de  $E$ , ou une partie de  $E$ .

On note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ . C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ .

**Définition :** L'**intersection** de 2 ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$  est :  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$

**Définition :** La **réunion** de 2 ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$  est :  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

**Définition :** Si  $A \subset B$ , le **complémentaire** de  $A$  dans  $B$  est :  $\complement_B A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}$ .

On le note aussi  $\overline{A}$ , ou encore  $E \setminus A$ .

## 2.3. Propriétés de $\mathbb{N}$

**Théorème :** Toute partie non vide de  $A \subset \mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

**Théorème :** Toute partie non vide de  $A \subset \mathbb{N}$  et **majorée** admet un plus grand élément.

## 2.4. Ensemble des parties d'un ensemble

**Définition :** L'**ensemble des parties d'un ensemble**  $E$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $E$ . Il est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

**Théorème :** Si  $E$  possède  $n$  éléments,  $\mathcal{P}(E)$  en possède  $2^n$ .

**Exemple :** Si  $E = \{0, 1\}$ , alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$

## 2.5. Opérations

**Définition :** Si  $E$  est un ensemble, une **opération**, notée  $*$ , sur  $E$ , est une application (voir page 9) définie sur  $E \times E$  et à valeur dans  $E$ .

A deux éléments de  $E$ , on associe un troisième élément de  $E$ .

On note une opération plutôt sous la forme :  $z = x * y$ .

**Exemple :**

- L'addition et la multiplication des entiers, des réels, des complexes ;
- L'addition et la multiplication des polynômes ;
- L'addition et la multiplication des matrices ;
- La composée des applications :  $g \circ f \dots$

Les propriétés usuelles d'une opération  $*$  sur  $E$  sont :

**associativité :**  $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$

En un mot, on peut, dans un calcul, regrouper les termes comme on veut, sans changer leur ordre.

Il est pratiquement impossible de travailler avec une loi qui n'est pas associative.

**commutativité :**  $\forall x, y \in E, x * y = y * x$

Pour une loi commutative, dans un calcul, on peut changer l'ordre des termes.

**élément neutre :**  $e$  est élément neutre  $\Leftrightarrow \forall x \in E, x * e = e * x = x$

C'est par exemple 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication.

**élément inversible :**  $x$  est inversible, ou possède un symétrique  $\Leftrightarrow \exists x' \in E$  tel que :  $x * x' = x' * x = e$

Ceci n'a bien sûr de sens que si la loi  $*$  possède déjà un élément neutre  $e$ .



## 2.6. Ensembles finis

**Définition :** Un ensemble est **fini**

- s'il est vide ou
- s'il peut se mettre en bijection (voir page suivante) avec  $\{1, 2, \dots, n\}$ , noté encore  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .  
Son **cardinal**, qui est son nombre d'éléments, est alors  $n$ .  
Le **cardinal** de l'ensemble vide est 0.

**Notation :** L'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  se note aussi  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Théorème :**

- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- Le cardinal de l'ensemble des parties de  $E$  est :  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$
- Le cardinal de l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  (voir page suivante) est :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

- Le cardinal de l'ensemble des parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est :  $\binom{n}{p}$

## 2.7. Ensembles dénombrables

**Définition :** Un ensemble  $E$  est dénombrable si et seulement si il peut être mis en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

Cela revient à pouvoir écrire :  $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

## 2.8. Ensembles usuels de nombres

On utilisera :

- Les entiers naturels  $\mathbb{N}$  et relatifs  $\mathbb{Z}$
- Les nombres décimaux :  $\mathbb{D}$
- Les nombres rationnels, quotients d'entiers :  $\mathbb{Q}$
- Les nombres réels  $\mathbb{R}$  et complexes  $\mathbb{C}$

# 3. Fonctions et applications

## 3.1. Applications

**Définition :** Une **fonction**  $f$  de  $E$  vers – ou dans –  $F$  est une relation telle que :

$$\forall x \in E, \text{ il existe au plus un seul } y \in F, \text{ tel que : } y = f(x).$$

**Définition :** Une **application**  $f$  de  $E$  vers – ou dans –  $F$  est une relation telle que :

$$\forall x \in E, \text{ il existe un et un seul } y \in F, \text{ tel que : } y = f(x).$$

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ , et  $A$  une partie de  $E$ ,

alors :  $f|_A : A \rightarrow F$ , définie par :  $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$  est la **restriction** de  $f$  à  $A$ .

**Définition :** Soit  $g$  une application de  $A$  vers  $F$ , et  $A$  une partie de  $E$ ,

alors, toute application :  $f : E \rightarrow F$ , telle que :  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$  est un **prolongement** de  $g$  sur  $E$ .

## 3.2. Injection, surjection, bijection

**Définition :** Une application est **injective** si et seulement si deux éléments distincts ont des images distinctes.

En pratique, on montre que :  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

On verra, page 19, le cas particulier des applications linéaires.

**Définition :** Une application est **surjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédent, c'est à dire :  $\forall y \in F, \exists x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

**Définition :** Une application est **bijjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent, c'est à dire :  $\forall y \in F, \text{ il existe un et un seul } x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

**Définition :** Si  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ , alors :  $z = f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(z) = t$ , définit bien une application  $f^{-1}$ , de  $F$  sur  $E$ , bijective, appelée **application réciproque** de  $f$ .

### 3.3. Image, image réciproque d'une partie

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ ,

- si  $A$  est une partie de  $E$ , on appelle **image** – ou image directe – de  $A$  par  $f$ , notée  $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$ .  
C'est l'ensemble des images des éléments de  $A$  ;
- si  $B$  est une partie de  $F$ , on appelle **image réciproque** de  $B$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(B) = \{x \in E, \text{ tels que } : f(x) \in B\}$ .  
C'est l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image est dans  $B$ .
- $f(A)$  se note aussi le plus souvent  $f(A)$ , de même,  $f^{-1}(B)$  se note  $f^{-1}(B)$

On peut parler de l'image réciproque d'une partie  $B$ , notée  $f^{-1}(B)$  même quand l'application  $f^{-1}$  n'existe pas...

Dans les problèmes, on note le plus souvent  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$  les images et images réciproques d'une partie. On a ici changé la notation afin de ne pas confondre avec l'image  $f(x)$  d'un élément  $x$  de  $E$  et avec l'image réciproque  $f^{-1}(y)$  d'un élément  $y$  de  $F$  quand  $f$  est bijective.

### 3.4. Composition des applications

**Définition :** Soit :  $f : E \rightarrow F$  et :  $g : F \rightarrow G$ ,  
on définit la **composée** de  $f$  et  $g$ , comme étant l'application :  
 $g \circ f : E \rightarrow G$ , telle que :  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

En général :  $g \circ f \neq f \circ g$  ... Même quand tous les deux sont définis !

**Théorème :** La composition des applications est toujours associative. C'est à dire :  
Si on a :  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$ , et :  $h : G \rightarrow H$ ,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

L'application « identité » :  $Id_E : E \rightarrow E$ , qui à  $x$  associe  $x$  est une bijection, et est élément neutre pour la composition des applications.

**Théorème :** Si  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$ , on a bien sûr :  $f^{-1} \circ f = Id_E$ , l'identité de  $E$  ;  
et on a aussi :  $f \circ f^{-1} = Id_F$ .

### 3.5. Ensemble des applications de $E$ vers $F$

**Définition :** L'ensemble des applications de  $E$  vers  $F$  est noté :  $\mathcal{F}(E, F)$ .

Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis, alors,  $\mathcal{F}(E, F)$  est aussi fini.

### 3.6. Corps usuels

Les corps usuels sont principalement  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , notés  $\mathbb{K}$  quand c'est l'un ou l'autre.

## 4. Nombres Réels

### 4.1. Valeur absolue

**Définition :** Si  $x \in \mathbb{R}$ , alors :  $|x| = \max(x, -x)$ .

**Théorème :** On rappelle l'inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \pm y| \leq |x| + |y|$ .  
Mais on a aussi dans les mêmes conditions :  $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ .

**Définition :** La distance de deux réels  $x$  et  $y$  est :  $d(x, y) = |y - x|$ .

### 4.2. Inégalités, Bornes

**Définition :** Soit  $A$  une partie, non vide, de  $\mathbb{R}$  majorée,

la **borne supérieure** de  $A$  est le plus petit des majorants de  $A$ .

Si  $A$  est une partie, non vide, de  $\mathbb{R}$  minorée,

la **borne inférieure** de  $A$  est le plus grand des minorants de  $A$ .

**Théorème :** Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure, et toute partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Définition :**  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si  $\forall a, b \in I, [a, b] \subset I$ .

**Théorème :** Tout intervalle réel non vide et non réduit à un point contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.

### 4.3. Partie entières

**Définition :** La partie entière d'un nombre réel est le plus grand des entiers qui lui sont plus petits.

On a :  $\text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1$  et  $x - 1 < \text{Ent}(x) \leq x$

Ainsi,  $\text{Ent}(\pi) = 3$ , mais,  $\text{Ent}(-\pi) = -4$ .

**Définition :** La valeur décimale approchée à  $10^{-n}$  près par défaut de  $x$  est :  $\frac{\text{Ent}(x \times 10^n)}{10^n}$ .

La valeur décimale approchée à  $10^{-5}$  près par défaut de  $\pi$  est : 3,14159.

### 4.4. Formule du binôme

a/ Coefficients binomiaux

**Définition :**  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

C'est le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

On ne confondra pas ce nombre avec le nombre de  $k$ -uplets, ou  $k$ -listes, d'éléments distincts d'un ensembles à  $n$  éléments :  $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

**Définition :** Le **nombre de permutations** d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n!$   
C'est son nombre de  $n$ -listes !

**Théorème :**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$   
 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  est la formule du triangle de Pascal

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

On trouve encore parfois la notation  $C_n^k$  qui a été remplacée par la notation :  $\binom{n}{k}$ .

Remarquons l'inversion des positions de  $n$  et  $k$ .

b/ Formule du binôme et autres

**Théorème :**  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

**Théorème :**  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n - b^n = (a-b) \left( \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \right)$

Les deux formules précédentes sont en fait valables dès qu'on a deux lois  $+$  et  $\cdot$  qui sont (entre autres) commutatives, la deuxième étant distributive par rapport à la première.

Quand on n'a pas la commutativité générale du produit, il faut et il suffit que le produit des deux éléments concernés commute.

Ce sera le cas avec les matrices carrées  $M_n(\mathbb{K})$ , voir page 25, et avec l'ensemble des endomorphismes de  $E$ , c'est à dire  $\mathcal{L}(E)$ .

Il faudra toujours argumenter la commutativité du produit pour appliquer la formule du binôme avec des matrices !

**Théorème :**  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

**Théorème :** Pour  $q \neq 1$ , on a :  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

## 5. Nombres Complexes

### 5.1. Nombres Complexes

- $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho \geq 0$  est le **module** de  $z$ ,  $\theta$  son **argument** ;
- $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$ , est le **conjugué** de  $z$  ;
- $\rho = |z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan \theta = \frac{y}{x}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}}, \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad |z|^2 = z \bar{z}$

### 5.2. Inégalité triangulaire

**Théorème :**  $\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Cette inégalité a été, bien sûr, déjà vue lorsque  $x$  et  $y$  sont réels...

### 5.3. Nombres complexes de module 1

**Définition :** L'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1, est l'ensemble des  $e^{i\theta}$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Théorème :**  $e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Les relations d'Euler sont :

$$\bullet \forall \theta \in \mathbb{R} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \text{et donc : } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

La formule de Moivre est :

$$\bullet \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

## 5.4. Argument d'un nombre complexe

**Théorème :** Tout nombre complexe  $z$  peut s'écrire :  $z = \rho e^{i\theta}$ , avec

- $\rho = |z|$ ,
- et  $\theta$ , l'argument de  $z$ .

*Ceci permet de définir les coordonnées polaires !*

On a aussi :

- L'argument d'un produit qui est la somme des arguments,
- et l'argument d'un quotient, qui est leur différence.

## 5.5. Racines d'un nombre complexe

a/ Racines carrées

$$\textbf{Théorème : } z^2 = a + ib \quad \text{avec} \quad z = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(b) \end{cases}$$

Cette technique **est la technique utilisée** en pratique pour trouver les racines carrées de  $a + ib$  lorsque la moitié de l'argument n'est pas un angle usuel.

Cela permet de résoudre les équations du second degré à coefficients complexes en utilisant les formules habituelles, mais pas le signe  $\sqrt{\Delta}$ , réservé au cas où  $\Delta \geq 0$  !

b/ Racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité

**Théorème :**  $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Cet ensemble de racines  $n^{\text{ème}}$  de 1 est noté  $\mathbb{U}_n$ .

c/ Racines  $n^{\text{èmes}}$  d'un nombre complexe

**Théorème :**  $z^n = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

En pratique, on retiendra et utilisera le fait que les racines  $n^{\text{èmes}}$  d'un complexe s'obtiennent en effectuant le produit de l'une d'entre elles par les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité.

d/ Exponentielle complexe

En fait,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , on peut définir :  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ .

On a toujours :  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .

# 6. Polynômes

## 6.1. Ensemble de polynômes

**Définition :**

- L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  se note  $\mathbb{K}[X]$ .

- Le polynôme  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  avec  $a_n \neq 0$  est de degré  $n$ , son **coefficient dominant** est  $a_n$ , si, de plus,  $a_n = 1$ , on dit que le polynôme est **unitaire**, ou **normalisé**.
- Le degré de  $P(X) \times Q(X)$  est la somme des degrés de  $P$  et  $Q$
- Le degré de  $P(X) + Q(X)$  est :
  - le plus grand des degrés, quand ils sont différents,
  - inférieur ou égal au degré commun, quand ils sont égaux.

## 6.2. Racines

Soit le polynôme :  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

**Théorème :** (d'Alembert-Gauss)

Sur  $\mathbb{C}$ ,  $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

**Théorème :** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \dots (x^2 + \alpha_m x + \beta_m)$

avec  $p + 2m = n$  et toutes les expressions du second degré irréductibles, c'est à dire telles que  $\Delta < 0$ .

Quand on a tous les facteurs d'un polynôme, pour retrouver celui-ci, il ne faut pas oublier le coefficient dominant  $a_n$ .

**Définition :** Un polynôme est dit **scindé** si et seulement si il est factorisable en produit d'expressions du premier degré.

Sur  $\mathbb{C}$  un polynôme est donc toujours scindé.

Sur  $\mathbb{R}$ , il faut et il suffit qu'il n'ait pas de racines complexes non réelles.

**Théorème :**  $P(x)$  est divisible par  $(x - \alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$  est racine de  $P$

**Théorème :**  $P(x)$  est divisible par  $(x - \alpha)^k \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$   
 $\Leftrightarrow \alpha$  est racine d'ordre  $k$  au moins de  $P$

**Théorème :** Un polynôme de degré  $n$  qui a au moins  $n + 1$  racines distinctes ou confondues est nul.

En particulier, un polynôme nul sur un intervalle non réduit à un point est nul sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème :** Si  $P$  est scindé,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ,  $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Pour le degré 2,  $x^2 - Sx + P = 0$  est tel que :  $S = x_1 + x_2$ , et  $P = x_1 x_2$   
 $S$  est la somme des racines et  $P$  leur produit.

## 6.3. Division Euclidienne

**Théorème :** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes,  $B \neq 0$ ,

alors il existe un unique couple  $(Q, R)$  tel que 
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{degré}(R) < \text{degré}(B) \end{cases}$$

En pratique, quand on écrit la division de  $A$  par  $B$ , on prendra soin de bien écrire les polynômes par puissances décroissantes.

$B|A \Leftrightarrow$  Le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul

$\Leftrightarrow$  Toutes les racines de  $A$  sont racines de  $B$  avec au moins le même ordre de multiplicité.

On pensera à cette dernière équivalence quand les degrés sont petits...

## 6.4. Formules de Leibniz et Taylor

La formule de Leibniz porte sur la dérivée  $n^{\text{ème}}$  d'un produit de polynômes.

**Théorème :**  $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$

Si le degré de P est petit, il n'y a que quelques termes non nuls !

La formule de Taylor permet de calculer un polynôme en fonction de ses dérivées successives en un point.

**Théorème :** Si P est au plus de degré n, alors :  $P(X) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$

## 7. Espaces Vectoriels

### 7.1. Structure d'espace vectoriel

**Définition :**  $(E, +, \cdot)$  est un **espace vectoriel** sur  $\mathbb{K} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{l'opération } + \text{ est associative, commutative,} \\ \text{il y a un vecteur nul et tout vecteur a un opposé} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \end{array} \right. \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \mu \cdot u \\ 1 \cdot u = u \end{array} \right. \end{array} \right.$

**Définition :** On appelle **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de  $\mathbb{K}$ .

Un espace vectoriel E possède une structure de groupe additif, l'élément neutre pour l'addition est le vecteur nul, noté  $0_E$  ou simplement 0.

On prendra soin de ne pas le confondre avec le scalaire 0 ...

### 7.2. Sous-espace vectoriel

**Théorème :**  $F \subset E$  est un **sous-espace vectoriel** de E  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est non vide} \\ \forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \in F \end{array} \right.$

C'est à dire F est non vide et stable par combinaison linéaire.

Ce théorème sert souvent pour montrer que F est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace connu et identifié...

On peut aussi montrer que F est un sous-espace vectoriel de E en montrant :

- que F est le noyau d'une certaine application linéaire ;
- ou que F est défini comme engendré par une certaine famille de vecteurs ;
- ou que F est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.

### 7.3. Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition :**  $E = E' + E'' \Leftrightarrow$  tout vecteur x de E est somme d'un vecteur  $x'$  de  $E'$  et d'un vecteur  $x''$  de  $E''$

On a la même définition pour la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels.

**Définition :**  $E' + E''$  est **directe**  $\Leftrightarrow E' \cap E'' = \{0\} \Leftrightarrow$  les composantes  $x'$  et  $x''$  de x sont uniques.

La somme directe des deux sous-espaces est alors notée  $E' \oplus E''$ .

**Définition :** On dit que les sous-espaces  $E'$  et  $E''$  sont **supplémentaires** dans E  $\Leftrightarrow E = E' \oplus E''$

**Théorème :**  $E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E = E' + E'' \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$

On a un autre théorème en dimension finie au 7.6.

**Exemple :** Donnons deux exemple, l'un en dimension finie et l'autre en dimension infinie :

- dans l'ensemble des matrices carrées  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{S}$  des matrices symétriques et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des matrices anti-symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- dans l'ensemble des applications  $\mathcal{A}([-a, a], \mathbb{K})$ , l'ensemble  $\mathcal{P}$  des applications paires et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des applications impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

## 7.4. Espaces vectoriels de dimension finie : base

**Définition :**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est **génératrice** de  $E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \end{cases}$

**Définition :**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est **libre** de  $E \Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$

**Définition :** Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Définition :** Une **base** est une famille libre et génératrice.

**Définition :** Un espace vectoriel est de **dimension finie**  $\Leftrightarrow$  il possède une base comptant un nombre fini de vecteurs.

Sa dimension est alors le nombre de vecteurs de cette base.

**Théorème :**

Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs qui est, par définition, la dimension de  $E$ .

**Théorème :** Si  $E$  est de dimension  $n$  :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est une base} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ génératrice}$$

**Théorème :** Toute famille de  $n + 1$  vecteurs ou plus d'un espace vectoriel de dimension  $n$  est liée.

**Théorème :** *Théorème de la base incomplète*

Si  $E$  est de dimension  $n$  et  $p \leq n$  avec  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  une famille libre, alors, il existe  $(x_{p+1}, \dots, x_n)$  tels que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soit une base de  $E$ .

C'est à dire que toute famille libre est le début d'une base.

**Théorème :** *Théorème belge*

Les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  sont :  $(0, 1, 0)$ .

## 7.5. Base adaptée à une somme directe

**Définition :** Si on a  $E$  de dimension finie, avec  $E = F \oplus G$ , alors la réunion d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  est une base de  $E$ , dont on dit qu'elle est adaptée à la somme directe.

On a la réciproque partielle suivante :

**Théorème :** Si  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  est libre, alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$



## 7.6. Rang d'une famille finie de vecteurs

### Définition :

Le **rang** d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

### Théorème :

$$E' \text{ et } E'' \text{ sont supplémentaires de } E \Leftrightarrow E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E', E'' \text{ deux sous-espaces vectoriels de } E \\ \dim(E) = \dim(E') + \dim(E'') \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut remplacer la condition  $E' \cap E'' = \{0\}$  par  $E = E' + E''$

On a un autre théorème en dimension infinie au 7.3..

## 7.7. Espaces vectoriels usuels

- $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension infinie.
- $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{C}_n[X]$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n + 1$ , de base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .
- Toute famille de polynômes de degrés distincts 2 à 2 est libre.
- $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n$ . Les vecteurs de la base canonique ont une composante égale à 1 et les autres composantes nulles.
- $\mathcal{A}(A, E)$  avec  $A$  non vide et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On le note aussi  $E^A$ . Cette notation s'utilise souvent avec  $E = \mathbb{R}$  et  $A = I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- Si  $A \in \mathbb{R}$ , alors :  $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{C})$  avec  $A$  non vide et  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , respectivement.
  - Sur  $A$  symétrique par rapport à l'origine, les applications paires et les applications impaires sont des sous-espaces vectoriels des précédents.
  - Sur un ensemble allant jusqu'à  $+\infty$  ou  $-\infty$ , les applications tendant vers 0 à l'infini forment aussi un sous-espace vectoriel des précédents.
  - Il en est de même des applications bornées sur  $A$ ...
- L'ensemble des suites réelles ou complexes ont une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , respectivement.
  - Les suites réelles ou complexes tendant vers 0 à l'infini forment des sous-espaces vectoriels des précédents.
  - Il en est de même des suites bornées...
- $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de l'espace dans lequel se trouvent les vecteurs :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
On l'appelle l'espace vectoriel engendré par  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
Il est de dimension  $n$  si et seulement si ces vecteurs forment une famille libre.
- $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  les ensembles d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  ou de  $E$  dans  $E$ .
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  les ensembles de matrices  $n$  lignes,  $p$  colonnes ou carrées  $n \times n$ , de dimensions respectives  $np$  et  $n^2$ . Les vecteurs de la base canoniques sont les matrices qui ont un élément égal à 1 et les autres nuls.

## 7.8. Droites, plans et hyperplans vectoriels

Ce sont ici des espaces, ou des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

- Une **droite vectorielle** est un (sous-)espace vectoriel de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** est un (sous-)espace vectoriel de dimension 2.
- Un **hyperplan vectoriel** est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ .

## 8. Applications Linéaires

### 8.1. Applications linéaires

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , avec  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  est **linéaire**, ou est un **morphisme**, ou

encore un **homomorphisme**  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{cases} f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$

$f : E \rightarrow E$ , linéaire est un **endomorphisme**

$f : E \rightarrow F$ , linéaire bijective est un **isomorphisme**

$f : E \rightarrow E$ , linéaire bijective est un **automorphisme**

$f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , linéaire est une **forme linéaire**.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même.

**Théorème :**  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finies  $n$  et  $p$ , la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  est  $n \times p$  et celle de  $\mathcal{L}(E)$  est  $n^2$

### 8.2. Sous espace vectoriel stable par un endomorphisme

**Définition :** Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On dit que  $F$  est stable par  $f \Leftrightarrow \forall u \in F, f(u) \in F$ .

### 8.3. Image et noyau

**Définition :** Le **noyau** de  $f$ , linéaire, est :  $\ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}$ .

**Définition :** L'**image** de  $f$ , linéaire, est :  $\text{Im}(f) = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\}$ .

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \text{L'image d'un s.e.v de } E \\ \text{L'image de } E \end{array} \right\} \text{ par } f : E \rightarrow F, \text{ linéaire, est un sous-espace vectoriel de } F.$

**Théorème :**

L'image réciproque d'un s.e.v de  $F$  par  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème :** Le noyau de  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Théorème :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, est injective  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

En dimension finie, des bases étant choisies,

- on recherche le noyau en résolvant un système linéaire sans second membre, la dimension du noyau est la dimension de l'espace de départ moins le rang du système, c'est aussi le nombre d'inconnues auxiliaires. On obtient une base du noyau en distribuant tour à tour un 1 et des 0 sur les inconnues auxiliaires ;
- on recherche l'image en écrivant que les images des vecteurs de la base forment une famille génératrice de l'image, puis en ôtant les vecteurs inutiles de cette famille. La dimension de l'image est le rang de l'application linéaire, de la matrice.

**Théorème :** L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image de cette application.

## 8.4. Projecteur

**Définition :**  $p : E \rightarrow E$  est un **projecteur**  $\Leftrightarrow p \circ p = p$

**Théorème :**  $p : E \rightarrow E$  est un projecteur  $\Rightarrow E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ ,  
mais ceci n'est pas une équivalence.

$E = E_1 \oplus E_2$  permet de définir  $p$  la projection sur  $E_1$ , parallèlement à  $E_2$  et  $q$  la projection sur  $E_2$ , parallèlement à  $E_1$ .  
On a alors  $p + q = \text{Id}$ .

## 8.5. Symétries

**Définition :**  $s : E \rightarrow E$  est une **symétrie**  $\Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}$

**Théorème :**  $s$  est une symétrie  $\Leftrightarrow p = \frac{s + \text{Id}}{2}$  est un projecteur.

**Théorème :**  $p$  est un projecteur  $\Leftrightarrow s = 2p - \text{Id}$  est une symétrie.

## 8.6. Théorème du rang

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  de dimension finie,  
le **rang de  $f$**  est  $\text{rg}(f) = \dim(f(E)) = \dim(\text{Im}(f))$ .

**Théorème :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  de dimension finie  
 $\Rightarrow \dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$

**Théorème :**  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$   
et  $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$

**Théorème :**

Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , et donc en particulier dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie,

on a :

{	$f$ bijective
	$\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$
	$\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$
	$\Leftrightarrow f$ injective
	$\Leftrightarrow f$ surjective
	$\Leftrightarrow f$ transforme une base de $E$ en une base de $F$
	$\Leftrightarrow f$ transforme toute base de $E$ en une base de $F$

## 8.7. Système linéaire

Pour résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues :

- On rend le système trapézoïdal en appliquant la méthode du pivot de Gauss
- S'il y a des paramètres, on ne discute que lorsqu'on y est obligé pour appliquer le pivot de Gauss, au besoin en changeant l'ordre des lignes ou des colonnes.
  - On connaît à ce moment le rang du système : c'est le nombre d'équations linéaires indépendantes. Si le système est sans second membre, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension le nombre d'inconnues moins le rang.
  - On voit à ce moment si le système est incompatible.
  - S'il est compatible, le rang du système est le nombre d'équations restantes
    - ◊ Si on a, à ce moment, autant d'équations que d'inconnues : le système a une solution unique

- ◇ Si on a, à ce moment, moins d'équations que d'inconnues, on garde autant d'inconnues principales que le rang. Les autres deviennent des inconnues auxiliaires, qui se traitent comme des paramètres.

## 9. Matrices

### 9.1. Généralités

#### a/ Produit de matrices

Si A est une matrice  $n$ -lignes et  $m$ -colonnes, B une matrice  $m$ -lignes et  $p$ -colonnes,

alors :  $C = AB$  est une matrice  $n$ -lignes et  $p$ -colonnes vérifiant :  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ .

$$\text{Ce qui se schématise : } \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{mj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

#### b/ Transposée d'un produit

**Théorème :** On a :  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

### 9.2. Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire associée, c'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes.

C'est aussi le rang de sa transposée, donc la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes.

On ne change pas le rang :

- en supprimant une ligne ou une colonne combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ;
- en supprimant une ligne ou une colonne nulle ;
- en ajoutant à une ligne ou une colonne une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ;
- en multipliant une ligne ou une colonne par un scalaire non nul.

On ne confondra pas les manipulations qui ne changent pas le rang et les manipulations qui ne changent pas la valeur d'un déterminant.

### 9.3. Généralités sur les matrices carrées

#### a/ Matrices symétriques et antisymétriques

**Définition :** Une matrice carrée M est symétrique  $\Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{ji} = a_{ij}$

**Définition :** Une matrice carrée M est anti-symétrique  $\Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{ji} = -a_{ij}$

Les éléments de la diagonale sont donc nuls.

**Théorème :** Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

De plus :  $M_S = \frac{M + {}^tM}{2}$  est toujours symétrique, et  $M_A = \frac{M - {}^tM}{2}$  est antisymétrique.

Elles vérifient :  $M = M_S + M_A$ .

En dimension 3, la matrice symétrique la plus générale est :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

et la matrice antisymétrique la plus générale possible est : 
$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

b/ Inverse d'une matrice

**Théorème :** Si on a  $M$  une matrice carrée telle que :  $MM' = I_n$ , ou telle que :  $M'M = I_n$ , alors  $M$  est inversible et  $M^{-1} = M'$ .

**Théorème :** Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

#### Calcul pratique :

En général, on inverse une matrice carrée en inversant le système linéaire correspondant avec un second membre arbitraire :  $Y = MX \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

c/ Inverse d'un produit

**Théorème :** On a :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

d/ Inversion et Transposition

**Théorème :**  $A$  une matrice carrée inversible, alors :  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$ .

### 9.4. Matrice d'une application linéaire

**Définition :**  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, avec  $E$  et  $F$  de dimensions finies  $n$  et  $p$ , munis de bases  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ , on appelle **matrice de  $f$  dans ces bases**  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}$  la matrice  $p$  lignes et  $n$  colonnes dont l'élément  $a_{i,j}$ ,  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est tel que  $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i$ .

On a en colonnes, les coordonnées des images des vecteurs de la base de  $E$  écrits dans la base de  $F$ .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{matrix}$$

### 9.5. Application linéaire canoniquement associée

Si  $A$  est une matrice d'éléments de  $\mathbb{K}$ , à  $n$ -lignes et  $m$ -colonnes, elle est canoniquement associée à  $\varphi$  linéaire de  $\mathbb{K}^m$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

On utilise bien sûr les bases canoniques de ces espaces vectoriels !

### 9.6. Matrice de Passage

**Définition :** On appelle **matrice de passage** ou  $P_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$  la matrice constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}_2$  écrits dans l'ancienne  $\mathcal{B}_1$ .

On l'appelle aussi **matrice de changement de base**.

C'est donc une matrice inversible.

Toute matrice carrée inversible peut toujours s'interpréter

- comme matrice d'un endomorphisme dans une certaine base,
- ou comme matrice de changement de base.

Passer d'une interprétation à une autre permet parfois de faire avancer le problème.

## 9.7. Changements de base

**Théorème :** Si on appelle  $X$  et  $X'$  les vecteurs colonnes, coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne et la nouvelle base, et  $P$  la matrice de passage, on a  $X = PX'$  ou bien  $X' = P^{-1}X$ .

**Théorème :** Si on appelle  $A$  et  $A'$  les matrices d'un endomorphisme dans l'ancienne et la nouvelle base, et  $P$  la matrice de passage, on a  $A' = P^{-1}AP$  ou bien  $a = PA'P^{-1}$ .

**Définition :**  $A$  et  $A'$  sont semblables  $\Leftrightarrow \exists P$  inversible telle que  $A' = P^{-1}AP$   
 $\Leftrightarrow A$  et  $A'$  sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

## 9.8. Trace d'une matrice

**Définition :** La trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Théorème :** On a :  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

**Théorème :** Si  $A$  et  $A'$  sont semblables, alors, on a :  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$

La réciproque est fausse !

# 10. Systèmes linéaires

## 10.1. Matrice d'un système linéaire

**Définition :** La matrice du système linéaire  $AX = B$  est  $(A|B)$ , la matrice  $A$  du système augmentée du vecteur second membre  $B$ .

## 10.2. Systèmes équivalents

**Théorème :** On obtient un système équivalent en :

- supprimant les lignes vides ;
- multipliant une ligne par un scalaire non nul ;
- échangeant deux lignes ;
- ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

**Notation :** On dit que les matrices correspondantes sont équivalentes en lignes.

## 10.3. Pivot de Gauss-Jordan

**Théorème :** Tout système linéaire  $AX = B$  est équivalent à un système unique  $A'X = B'$

- qui ne contient pas de ligne nulle ;
- dont  $A'$  a tous ses termes nuls, sauf un 1 dans chaque ligne strictement à droite du 1 de la ligne précédente, sauf éventuellement la dernière ligne nulle ;
- dans le cas où la dernière ligne de  $A$  est nulle, le dernier coefficient de  $B$  vaut 1.

Ce système est le système réduit de Gauss-Jordan

## 10.4. Résolution

On effectue d'abord la réduction complète de Gauss-Jordan.

**Théorème :**

- Si la matrice  $A'$  est la matrice carrée identité, on a une solution unique ;
- Si la dernière ligne de  $A'$  est nulle, le système n'a pas de solution ;

- Dans les autres cas, il y a une infinité de solutions.

Dans le cas où il y a une infinité de solutions, il faut déterminer les inconnues principales et les inconnues auxiliaires, qui deviennent en fait des paramètres.

- Il y a autant d'inconnues principales que de lignes dans  $A'$ , c'est à dire le rang du système, mais aussi le rang de  $A$ , c'est aussi le nombre de pivots ;
- On peut choisir comme inconnues principales celles qui correspondent aux colonnes non nulles de  $A'$ , les autres sont auxiliaires.

## 11. Déterminants

### 11.1. Ordre 2 et 3

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{ peut se développer par la règle de Sarrus } \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$$

La règle de Sarrus n'est absolument pas généralisable à des ordres supérieurs !

### 11.2. Matrice triangulaire

**Théorème :** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

### 11.3. Ordre quelconque

La règle des signes est :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \\ & & & + & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ (-1)^{n+1} & & & & + & - \\ & & & & - & + \end{vmatrix}_n$$

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes, on a ainsi une somme de termes du type :  $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ , où  $a_{ij}$  est le coefficient de la matrice et  $\Delta_{ij}$  est le déterminant d'ordre  $n-1$  obtenu en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  correspondante.

**Théorème :**  $\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

### 11.4. Déterminant d'un produit, d'une matrice inversible

**Théorème :** Pour  $A$  d'ordre  $n$ ,

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

**Théorème :**  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , et si  $A$  est inversible,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

### 11.5. Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

**Définition :** Le déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  dans une base  $\mathcal{B}$  est le déterminant de la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Définition :** Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans une base quelconque  $\mathcal{B}$ .

## 12. Réduction des Endomorphismes

### 12.1. Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition :**  $f : E \rightarrow E$  linéaire,

un couple  $(\lambda, u)$  ( $u \neq 0$ ) est un **couple valeur propre, vecteur propre** de  $E \Leftrightarrow f(u) = \lambda.u$

**Définition :** Pour  $\lambda$  une valeur propre de  $E$ , on appelle **sous-espace propre** associé à  $\lambda$ ,

$$E_\lambda = \{u / f(u) = \lambda.u\} = \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Le noyau est donc aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

**Théorème :** Les sous-espaces propres sont toujours en somme directe.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** est libre.

### 12.2. Polynôme caractéristique

**Définition :**  $f$  un endomorphisme de  $E$  de dimension  $n$ ,  $A$  sa matrice dans une base quelconque, le **polynôme caractéristique** de  $f$  est :  $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ .

**Théorème :** Le polynôme caractéristique de  $f$  est indépendant de la base choisie.

Les racines du polynôme caractéristique de  $f$  sont les valeurs propres de  $f$ .

- Sur  $\mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique est toujours scindé. Il y a donc toujours  $n$  valeurs propres distinctes ou confondues.
- Sur  $\mathbb{R}$ , ça n'est pas toujours le cas... Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles.

**Théorème :**  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ comme racine de } P_f$$

**Théorème :** Quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace de l'endomorphisme, ou de la matrice, est égale à la somme de ses valeurs propres.

Cela fournit une « vérification » élémentaire de la recherche des valeurs propres.

### 12.3. Diagonalisabilité

**Définition :** Un endomorphisme est **diagonalisable**  $\Leftrightarrow$  il existe une base de vecteurs propres

**Théorème :**

$$A \text{ (ou } f \dots) \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} P_A(\lambda) \text{ est scindé} \\ \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans } P_A \end{cases}$$

**Théorème :** En particulier, lorsque  $P_A(\lambda)$  est scindé à racines simples,  $A$  (ou  $f \dots$ ) est diagonalisable. C'est une condition suffisante mais non nécessaire.



## 12.4. Diagonalisabilité et diagonalisation

Quand une matrice  $A$  est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base*,  $A$  est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$  ou bien  $D = P^{-1}AP$ .

La confusion provient de ce que  $A$  et  $D$  sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme  $f$  est diagonalisable, et s'il est de matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ , il existe une base  $\mathcal{B}'$  dans laquelle sa matrice est  $D$ , diagonale.

$P$  étant la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ , on a alors :  $A = PDP^{-1}$  et  $D = P^{-1}AP$ .

## 12.5. Triangularisation (ou trigonalisation)

**Théorème :** Si le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base où la matrice est triangulaire.

En particulier, sur  $\mathbb{C}$ , toute matrice est triangularisable, ou trigonalisable.

## 12.6. Puissances d'une matrice

On fera attention, par convention :  $B^0 = I_n$ , la matrice identité.

- Si  $A$  est diagonalisable, et  $D$  diagonale semblable à  $A$ , alors  $A = PDP^{-1}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = PD^kP^{-1}$ .
- Si  $A = M + N$ , avec  $MN = NM$ , ce qu'il faut impérativement vérifier, alors :  $A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} M^k N^{p-k}$   
Ceci est surtout utilisé lorsque  $M^2$  ou  $M^3$  est nulle, car alors la somme se réduit aux 3 ou 4 premiers termes.
- Si  $A^2 = \alpha A + \beta I$  alors  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$  et on peut chercher des relations de récurrence entre les coefficients en écrivant aussi  $A^{n+1}$  de cette façon :  $A^{n+1} = A^n \times A$ .

# 13. Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens

Les termes **forme bilinéaire symétrique** et **forme quadratique** ne sont pas exigibles

## 13.1. Produit scalaire

**Définition :** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,

une **forme bilinéaire symétrique** sur  $E$  est une application de  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

- linéaire par rapport à chacune des variables (l'autre étant fixée) et
- symétrique (on peut inverser l'ordre des variables).

**Définition :** Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , alors :

$q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \varphi(u, u) \end{cases}$  est une forme quadratique, appelée **forme quadratique associée** à  $\varphi$ .

**Théorème :** Par ailleurs, si  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ , alors  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique. C'est l'égalité de **polarisation**.

**Définition :**  $E$  un espace vectoriel réel.

Un **produit scalaire** est une application de  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire, symétrique, définie-positive.

**Notation :** Le produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $y$  se note  $\langle x, y \rangle$ , ou  $(x|y)$ , ou  $x \cdot y$ , ou...

En pratique, on montre :

- $\forall u, v \in E, \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  La forme est symétrique.
- $\left. \begin{array}{l} \forall u_1, u_2, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle$  La forme est donc bilinéaire symétrique.
- $\forall u \in E, \quad \langle u, u \rangle \geq 0$  La forme est positive.
- $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$  La forme est définie-positive

C'est souvent le dernier point qui pose problème.

Quand le produit scalaire est défini par une intégrale, c'est à ce moment qu'on utilise le théorème de l'intégrale nulle, que ce soit une intégrale simple ou une intégrale impropre.

**Théorème :** Dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :  $\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , où les  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées des vecteurs  $U$  et  $V$ .

**Définition :** La **norme** euclidienne est :  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

**Exemple :** Sur les matrices carrées, le produit scalaire usuel est :  $\langle A, B \rangle = \text{Trace}(^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$

### 13.2. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

**Définition :** E un espace vectoriel réel est dit **préhilbertien réel** quand il est muni d'un produit scalaire.

Si, de plus, il est de dimension finie, il est dit **euclidien**.

### 13.3. Distance de deux vecteurs

**Définition :** La **distance** de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est :  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

### 13.4. Identité du parallélogramme

**Théorème : (Identité du parallélogramme)**

$\|\cdot\|$  une norme euclidienne et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, alors,

$$\forall u, v \in E \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

### 13.5. Orthogonalité

**Définition :**

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.  
Deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux si et seulement si tout produit scalaire d'un vecteur de l'un et de l'autre est nul.
- Une famille de vecteurs est orthogonale si et seulement si deux vecteurs quelconques distincts sont orthogonaux.  
Une famille est orthonormale si, de plus, les vecteurs sont normés.

**Théorème :** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls, toute famille orthonormale est libre.

Enfin, on a le théorème de Pythagore :

**Théorème :** Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si :  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

### 13.6. Inégalités

**Théorème :** On a l'inégalité de Schwarz, ou de Cauchy-Schwarz :  $\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ .

**Théorème :** On a l'inégalité triangulaire :  $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

**Théorème :**  $f$  est symétrique  $\Leftrightarrow$  sa matrice **dans une base orthonormale** est symétrique.

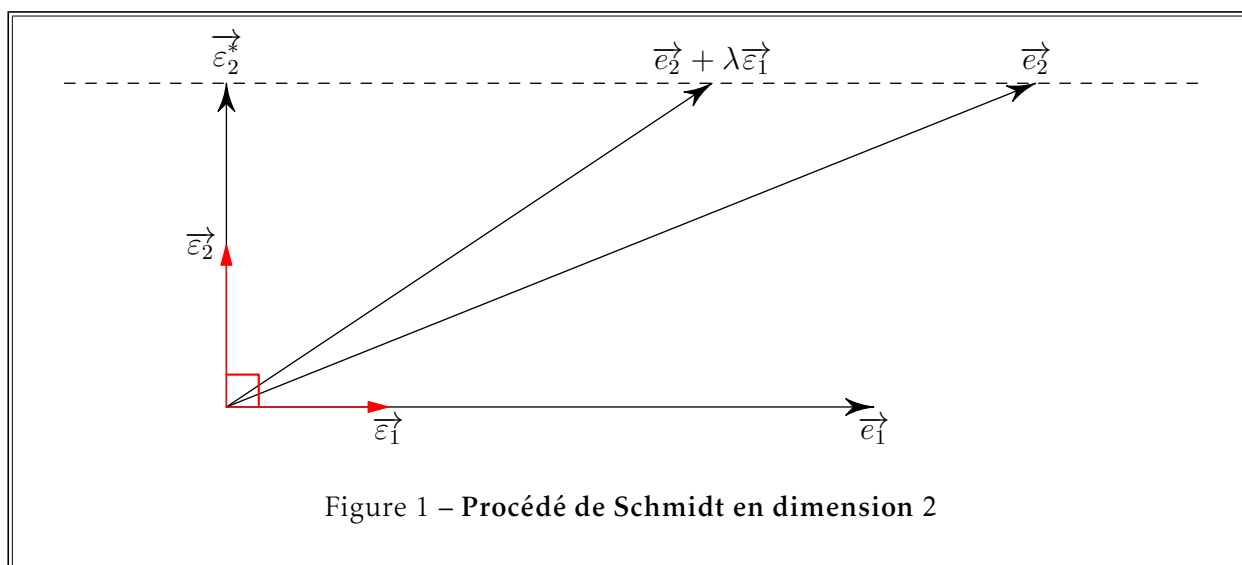
### 13.7. Procédé de Schmidt

**Théorème :** Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.

Le procédé de Schmidt permet de construire effectivement une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

- On part d'une base quelconque  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
- On pose  $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$   
C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose  $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda \cdot \varepsilon_1$   
On cherche  $\lambda$  tel que  $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0$ , ce qui donne  $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$
- On pose  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$   
C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose  $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2$   
On cherche  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$ , d'où  $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$
- On pose  $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$   
C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas qu'à chaque étape, le calcul s'allonge...
- En pratique, on travaille en théorie le plus longtemps possible ! On profite ainsi de nombreuses simplifications a priori.

Ce qu'on peut voir en dimension 2 sur la figure 1, ci-dessous.



### 13.8. Matrice symétrique réelle

**Théorème :** Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est à dire avec **au besoin** une matrice de passage orthogonale, telle que :  $P^{-1} = {}^tP$ .

Les sous-espaces propres ainsi que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux 2 à 2.

### 13.9. Endomorphismes symétriques

**Définition :** Un endomorphisme  $f$  est dit **symétrique**  $\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$

Ce théorème est souvent appelé **théorème spectral**.

### 13.10. Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

**Théorème :**  $E$  un espace vectoriel préhilbertien,  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Alors

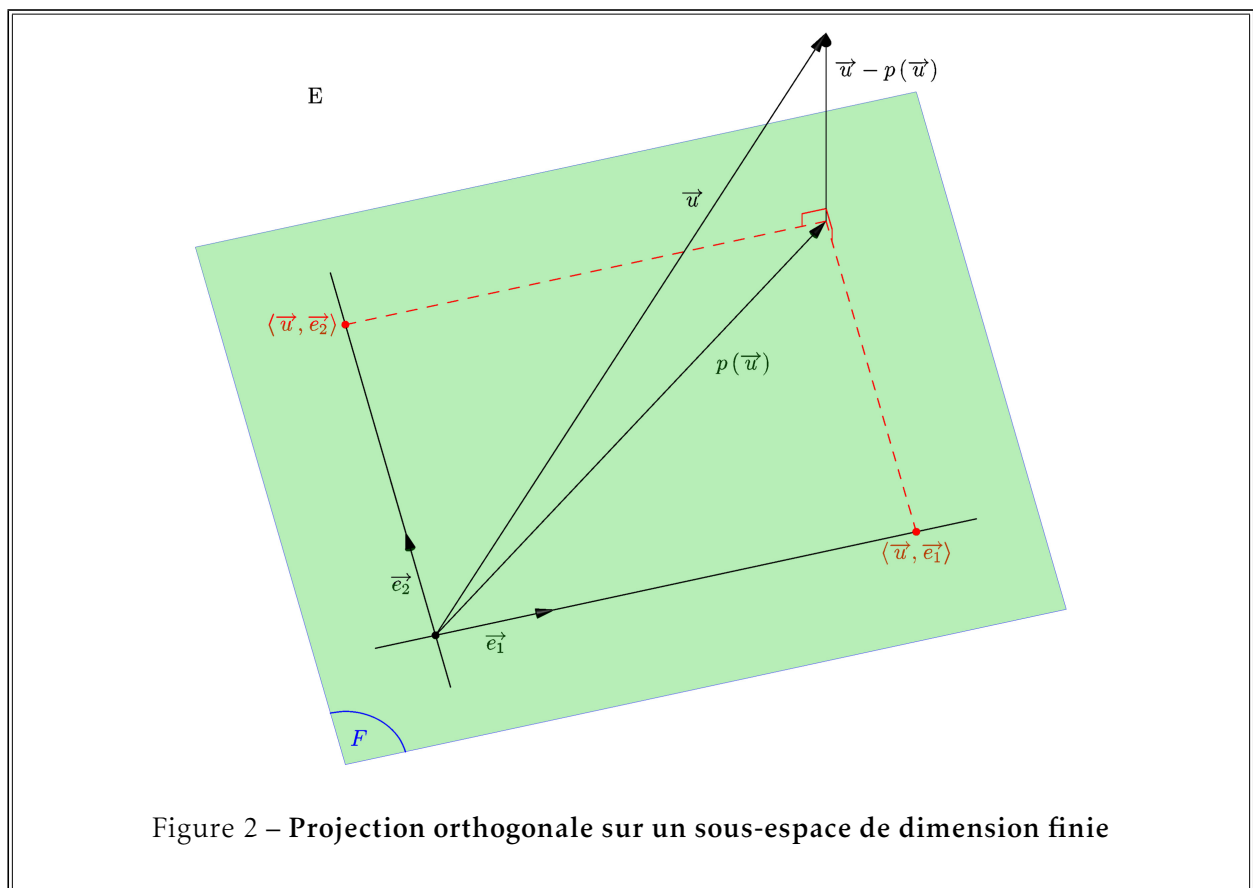
$$p : u \rightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

définit un projecteur.

Et comme  $(u - p(u)) \in F^\perp$ , on dit que  $p$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

Ce qu'on peut voir sur la figure 2, ci-dessous.

**Théorème :** Le projeté orthogonal sur  $F$  de  $x$  est le vecteur  $y$  de  $F$  tel que  $\|x - y\|$  soit minimum. Ce minimum est appelé **distance** de  $x$  à  $F$ .



## 14. Isométries vectorielles

### 14.1. Isométries

**Définition :** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  un espace vectoriel réel, est dit **orthogonal**, ou est une **isométrie vectorielle**

$$\Leftrightarrow f \text{ conserve le produit scalaire}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \quad \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

**Théorème :**  $f$  est orthogonal, ou est une isométrie vectorielle

$$\Leftrightarrow f \text{ conserve la norme}$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

**Définition :** Une matrice  $M$  est **orthogonale**

$\Leftrightarrow M$  est la matrice d'un endomorphisme orthogonal **dans une base orthonormale**.

**Théorème :**  $M$  est orthogonale

$$\Leftrightarrow \text{les vecteurs colonnes de } M \text{ sont normés et orthogonaux 2 à 2}$$

$$\Leftrightarrow \text{les vecteurs lignes de } M \text{ sont normés et orthogonaux 2 à 2}$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} = {}^t M$$

$$\Leftrightarrow M {}^t M = I$$

$$\Leftrightarrow {}^t M M = I$$

**Théorème :** L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $E$ , muni de la loi  $\circ$  de composition des applications est un groupe noté  $O(E)$ , sous groupe de  $GL(E)$ .

Il est appelé le **groupe spécial orthogonal** de  $E$ .

**Notation :** Si  $E = \mathbb{R}^n$ , le groupe spécial orthogonal de  $E$  se note  $O(n)$ .

La loi est alors le produit des matrices.

**Théorème :** Si  $M$  est orthogonale, ou si  $f$  est une isométrie vectorielle, leur déterminant est  $\pm 1$ .  
On parle d'isométrie positive ou directe, et d'isométrie négative, ou indirecte.

En pratique, pour une matrice orthogonale en dimension 3, on regarde si le dernier vecteur est le produit vectoriel des deux premiers ou son opposé.

# Analyse

## 15. Suites

### 15.1. Suites

**Définition :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers  $l$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

**Théorème :** La limite  $l$ , quand elle existe, est unique.

Cette définition est valable pour une suite réelle ou complexe.

Dans le cas d'une suite vectorielle, il suffit de remplacer  $|u_n - l|$  par  $\|u_n - l\|$ .

**Théorème :** L'ensemble des suites muni de la somme de deux suites et de la multiplication par un scalaire a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Il en est de même de l'ensemble des suites convergentes.

### 15.2. Sous-suites

**Définition :**

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **sous-suite** de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$

**Théorème :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \Rightarrow$  toute sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$

Si deux sous-suites ont des limites différentes ou si une sous-suite diverge, la suite diverge.

**Théorème :** Une suite convergente est bornée.

**Théorème :** Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l' \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_n + v_n \rightarrow l + l' \\ u_n v_n \rightarrow l l' \\ \lambda u_n \rightarrow \lambda l \end{array} \right.$$

### 15.3. Suites réelles

**Définition :**

La suite  $(u_n)$  est croissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

De nombreuses suites ne sont ni croissantes ni décroissantes !

**Théorème :** Toute suite croissante majorée converge.

**Théorème :** Toute suite décroissante minorée converge.

**Théorème :** (suites **adjacentes**)

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \nearrow \\ (v_n) \searrow \\ (u_n - v_n) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite}$$

**Définition :** On dit que  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n \geq A$ .

**Théorème :** *d'encadrement*

Si on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ , avec  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergentes vers la même limite  $l$ , alors la suite  $(v_n)$  converge aussi vers cette limite  $l$ .

**Théorème :** Si on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ , avec  $(u_n)$  qui tend vers  $+\infty$ , alors la suite  $(v_n)$  tend aussi vers  $+\infty$ .

**Définition :** Deux suites sont **équivalentes**  $\Leftrightarrow u_n = v_n w_n$  avec  $w_n \rightarrow 1$ .

En pratique, si à partir d'un certain rang  $v_n \neq 0$ , cela revient à :  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ .

$u_n \sim v_n$  équivaut simplement à  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes, et que l'une converge, elles ont la même limite.

**Théorème :** Dans les conditions où les logarithmes sont définis :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$$

On peut prendre le logarithme d'équivalents.

**Théorème :** *croissances comparées*

On a ici  $\alpha$  et  $\beta$  **strictement** positifs.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^\beta} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha e^{-\beta n} = 0$$

**Théorème :** La suite  $(u_n)$  converge  $\Leftrightarrow$  La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge

## 15.4. Suites récurrentes linéaires

Il s'agit, comme dans toute « équation linéaire », d'ajouter une solution particulière du problème avec second membre à la solution générale du problème sans second membre.

a/ Suite récurrente linéaire simple

- $au_{n+1} + bu_n = 0$  La solution est géométrique  $u_n = \alpha \left(\frac{-b}{a}\right)^n$
- $au_{n+1} + bu_n = c$  Chercher une solution particulière sous forme de suite constante

b/ Suite récurrente linéaire double

- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  On calcule les solutions de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ 
  - 2 racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  :  $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
  - 1 racine double  $r$  :  $u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$
  - sur  $\mathbb{R}$ , 2 racines complexes  $r = s e^{\pm i\omega}$  :  $u_n = s^n (\alpha \cos n\omega + \beta \sin n\omega)$
- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$  Chercher une solution particulière
  - constante  $\gamma$
  - ou, en cas d'échec,  $\gamma n$
  - ou, en cas de nouvel échec,  $\gamma n^2$

## 16. Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 16.1. Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de  $f$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  telles qu'on puisse effectivement calculer  $f(x)$ . Pour cela, on regarde les dénominateurs, racines, quotients, logarithmes, tangentes...

Le problème est plus complexe pour une fonction définie par une intégrale  $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$  ou  $\int_a^b f(x, t) dt$ .

De plus, si l'intégrale est généralisée, il faut même chercher les  $x$  tels que l'intégrale converge...

### 16.2. Monotonie

**Définition :**  $f$  est **croissante** sur  $I$  un intervalle  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$

$f$  est **strictement croissante** sur  $I$  un intervalle  $\Leftrightarrow (\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$

**Théorème :**  $f$  est dérivable sur  $I$ , un **intervalle**,

$f$  est **croissante** sur  $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$  sur  $I$

**Théorème :**  $f$  dérivable sur  $I$ , un **intervalle**,

$f'(x) \geq 0$  sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule qu'en des points isolés,  $\Rightarrow f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Cette dernière implication n'est pas une équivalence...

**Théorème :** Une fonction croissante, majorée sur  $[a, b[$ , admet une limite finie en  $b$ .

**Théorème :**  $f$  continue, strictement monotone sur  $I$  un intervalle est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .

De plus,  $f^{-1}$  est alors continue sur  $f(I)$ .

### 16.3. Limite et continuité

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ .

Si, de plus,  $l = f(a)$ , on dit que  $f$  est **continue** en  $a$ .

**Définition :** *Prolongement par continuité*

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , et, si  $f$  n'est pas définie en  $a$ , alors on définit  $\tilde{f}$ , la prolongée par continuité de  $f$  par :

- $\tilde{f}(a) = l$ ;
- $\tilde{f}(x) = f(x)$  quand  $x \neq a$ .

$\tilde{f}$  est bien sûr continue en  $a$  !

On a une autre définition de limite en  $+\infty$ , qu'on peut adapter en  $-\infty$ .

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ .

On a encore une définition quand la limite est infinie, qu'on peut adapter pour une limite  $-\infty$ .

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$ .

Et, enfin, une dernière définition pour une limite infinie à l'infini, qu'on peut...

**Définition :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$ .

**Théorème :** Une fonction admettant une limite **finie** en un point est **bornée** au voisinage de ce point.



**Théorème :** Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues en un point sont continues en ce point.

On parle de limite à droite en  $a$  si on ne considère que les  $x$  tels que  $x > a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .  
On parle de limite à gauche en  $a$  si on ne considère que les  $x$  tels que  $x < a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

**Théorème :** Si  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = L$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$ .

#### 16.4. Comparaison et Équivalence

**Théorème :** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  et si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , alors :  $g$  converge et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ .

**Théorème :** Si  $f(x) \leq g(x)$ , et, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

**Théorème :**

Si  $f$  est croissante et majorée au voisinage de  $a$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en  $a$ .

Si  $f$  est croissante et majorée au voisinage de  $+\infty$ , alors  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

#### 16.5. Continuité sur un intervalle

**Définition :** Si  $f$  est continue en tout point  $a$  d'un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est **continue sur  $I$** .

**Théorème :** Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues sur un intervalle sont continues sur cet intervalle.

**Théorème :**  $f(I)$  l'image d'un **intervalle  $I$**  par  $f$  **continue sur  $I$**  est un intervalle.

Ce théorème peut également s'énoncer comme théorème de la bijection :

**Théorème :**

Une application continue strictement monotone sur un intervalle  $I$  définit une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .

Son application réciproque  $g = f^{-1}$  est continue sur  $J = f(I)$ , de même monotonie que  $f$ .

**Théorème :** L'image d'un segment  $[a, b]$  par  $f$  continue sur  $[a, b]$  est un segment  $[c, d]$ .

Une application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

**Corollaire :** (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est **continue** et change de signe entre  $a$  et  $b$ , alors, il existe  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

#### 16.6. Fonction continue par morceaux

**Définition :** Si  $f$  est définie sur  $I = [a, b]$ , avec  $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  et si  $f$  est continue sur tous les intervalles  $]a_{i-1}, a_i[$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on dit que  $f$  est **continue par morceaux sur  $I$** .

#### 16.7. Limites usuelles

Les limites usuelles permettent de résoudre de nombreuses formes indéterminées.

On se reportera aussi, bien sûr, aux développements limités usuels ... pour des cas plus complexes à étudier.

a/ Limites en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

b/ Limites en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

c/ Croissances comparées

Les limites suivantes sont connues sous le nom de théorème des croissances comparées.

On a ici  $\alpha$  et  $\beta$  **strictement positifs**.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln^\beta x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$$

## 16.8. Équivalents

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$  avec  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$

Ici,  $a$  est fini ou infini.

En pratique, cela revient à ce que le quotient tend vers 1.

Les équivalents ne s'ajoutent pas.

Quand on veut trouver un équivalent, le mieux est de mettre « de force » l'équivalent pressenti en facteur et de montrer que l'autre facteur tend vers 1.

On revient ainsi, sans risque, à la définition.

**Théorème :** Dans les conditions où les logarithmes sont définis :

$$f(t) \underset{t_0}{\sim} g(t) \Rightarrow \ln f(t) \underset{t_0}{\sim} \ln g(t) \quad t_0 \text{ étant fini ou infini.}$$

On peut prendre le logarithme d'équivalents.

## 16.9. Négligeabilité

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = g(t)\varepsilon(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$ .

Ici,  $a$  est fini ou infini.

En pratique, pour une fonction  $g$  qui ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , cela revient à ce que le quotient  $\frac{f(t)}{g(t)}$  tend vers 0 au point considéré.

**Définition :** On dit que :  $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} O(g(t)) \Leftrightarrow f(t) = g(t)h(t)$  avec  $h(t)$  borné au voisinage de  $a$ .

On utilise ceci principalement sous la forme  $o(t^n)$  ou, plus rarement,  $O(t^n)$ , dans les développements limités.

## 17. Dérivabilité

### 17.1. Dérivée, classe $\mathcal{C}^1$ et notations

**Définition :**  $f$  est **dérivable** en  $a \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Notation :** Cette dérivée en  $a$  est notée  $f'(a)$  ou  $Df(a)$  ou encore  $\frac{df}{dx}(a)$ .

**Théorème :**  $f$  dérivable en  $a \Rightarrow f$  est continue en  $a$ . La réciproque est fausse !

**Théorème :** Si  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $f$  admet un développement limité au premier ordre en  $a$  :  
 $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$ .

**Définition :**  $f$  est **dérivable** sur  $I \Leftrightarrow f$  est dérivable en tout point  $a \in I$ .

Si, de plus, la fonction dérivée est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de **Classe  $\mathcal{C}^1$**  sur  $I$ .

**Notation :** Cette fonction dérivée sur  $I$  est notée  $f'$ , ou  $Df$ , ou encore  $\frac{df}{dx}$ .

## 17.2. Classe $\mathcal{C}^n$

**Définition :**

- $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^0$**  sur  $I \Leftrightarrow f$  est continue sur  $I$ ;
- Pour  $n \geq 1$ ,  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^n$**  sur  $I \Leftrightarrow f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ , la dérivée  $n^{\text{ème}}$  étant, de plus, continue sur  $I$ .

**Notation :** Cette fonction dérivée  $n^{\text{ème}}$  sur  $I$  est notée  $f^{(n)}$  ou  $D^n f$  ou encore  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

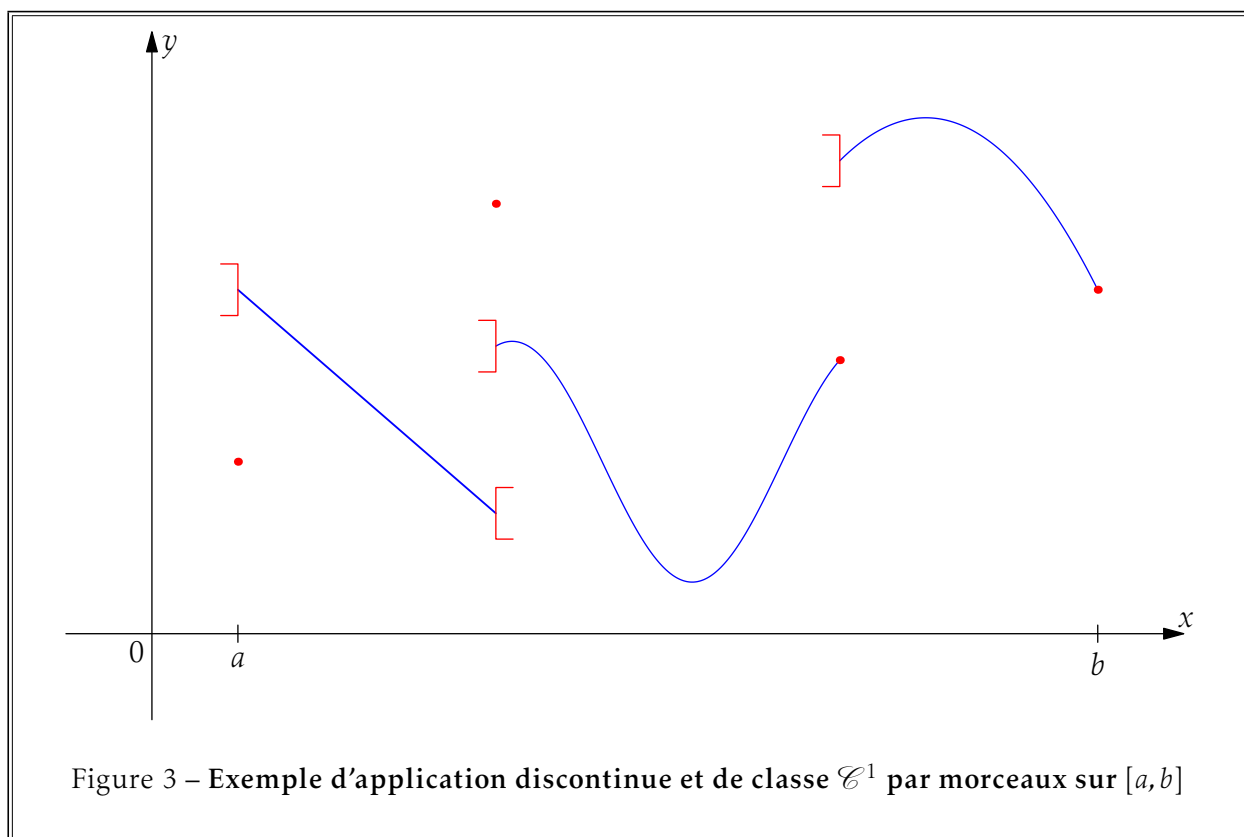
## 17.3. Application de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$

**Définition :**  $f$  définie sur  $[a, b]$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b \text{ et tels que} \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad f \text{ de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } ]a_{i-1}, a_i[ \\ \text{prolongeable par continuité sur } [a_{i-1}, a_i] \text{ avec } f_i = \overline{f|_{]a_{i-1}, a_i[}} \text{ la prolongée de classe } \mathcal{C}^k \end{cases}$$

La figure 3, ci-dessous, représente une fonction discontinue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[a, b]$ .



## 17.4. Sommes et produits de fonctions dérivables

$$\text{Théorème : } f \text{ et } g \text{ dérivables en un point ou sur un intervalle} \Rightarrow \begin{cases} (f+g)' = f' + g' \\ (f \times g)' = f' \times g + f \times g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} \end{cases}$$

En se plaçant pour cette dernière propriété en un point où  $g$  est non nulle.

$$\text{Théorème : Si } f \text{ et } g \text{ sont } n \text{ fois dérivables : } (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Ceci s'utilise surtout avec une des deux fonctions qui est un polynôme, une exponentielle ou une fonction trigonométrique.

## 17.5. Dérivée d'une fonction composée

$$\text{Théorème : } (g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' \quad \text{c'est à dire : } (g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$$

$$\text{Théorème : En un point où } f' \text{ est non nulle : } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$$\text{c'est à dire : } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{avec les notations habituelles } y = f(x).$$

## 17.6. Dérivée de la réciproque

**Théorème :** Si  $f$  est continue strictement monotone de  $I$  sur  $J = f(I)$ , et si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , telle que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $g = f^{-1}$  est dérivable sur  $J = f(I)$ .

$$\text{Dans ce cas, } g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

**Théorème :** Si  $f$  est continue strictement monotone de  $I$  sur  $J = f(I)$ , et si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $g = f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$  si et seulement si  $f'(a) \neq 0$ .

$$\text{Dans ce cas, } g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

## 17.7. Dérivée et prolongement par continuité

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où elle a été prolongée par continuité, on peut

- ou calculer la limite de  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  qui permet d'obtenir la dérivabilité mais ne prouve pas la classe  $\mathcal{C}^1$
- ou bien calculer la limite de  $f'(x)$ 
  - quand cette limite existe et est finie,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,
  - quand cette limite est infinie,  $f$  n'est pas dérivable au point,
  - mais s'il n'y a pas de limite, on ne prouve rien...

## 17.8. Théorème de Rolle et des Accroissements Finis, Formules de Taylor

**Théorème :** (Rolle)

$$f \text{ continue sur } [a, b], \text{ dérivable sur } ]a, b[, \quad f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in ]a, b[, \text{ tel que : } f'(c) = 0$$

**Théorème :** (Egalité des accroissements finis)

$$f \text{ continue sur } [a, b], \text{ dérivable sur } ]a, b[, \Rightarrow \exists c \in ]a, b[, \text{ tel que : } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Théorème :** (Inégalité des accroissements finis)

$$f \text{ continue sur } [a, b], \text{ dérivable sur } ]a, b[, \text{ de dérivée bornée} \Rightarrow \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq \sup_{c \in ]a, b[} |f'(c)|$$

On n'écrira ici que les formules de Taylor en 0 ou sur l'intervalle  $[0, x]$ , sauf pour la formule de Taylor-Young.

On peut se placer en un point  $a$  ou sur  $[a, b]$ , en adaptant les notations.

**Théorème :** (Taylor-Young)

Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

**Théorème :** (Taylor-Young)

Si  $f$  est  $n$ -fois dérivable au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$

**Théorème :** (Taylor avec reste intégral)

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur l'intervalle :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Cette dernière formule de Taylor permet d'obtenir des majorations de :

$$\left| f(x) - \left( f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \right) \right| \text{ en majorant le plus souvent } |f^{(n+1)}(t)|.$$

## 17.9. Zéros d'une fonction

Une fonction continue qui change de signe sur un intervalle s'annule au moins une fois, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On appelle les valeurs de  $x$  telles que  $f(x) = 0$  les **zéros** de la fonction.

Si on ne sait pas calculer les valeurs exactes de ces zéros, on en calcule des valeurs approchées par des méthodes itératives.

Une seule méthode, la dichotomie, est au programme.

**Théorème :** Soit  $f$  continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  telle  $f(a)f(b) < 0$ , c'est à dire  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes différents, alors, il existe un **unique**  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f(c) = 0$ .

Pour trouver une valeur approchée de ce zéro, on calcule le signe de  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

On continue en remplaçant  $[a, b]$  par :

- $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  si  $f(a)$  et  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  sont de signes différents ;
- $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et  $f(b)$  sont de signes différents.

Ainsi,  $c$  est toujours dans l'intervalle considéré et on a une valeur approchée de  $c$  à  $\varepsilon$  près dès que la longueur de l'intervalle est inférieure à  $\varepsilon$ .

Comme la longueur de cet intervalle est divisée par 2 à chaque étape, la convergence est rapide.

## 17.10. Développements limités

On n'écrira ici que des développements limités en 0. on peut se placer en un point  $a$  en adaptant les notations.

**Définition :** On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

$f$  admet un  $dl_0$  en  $0 \Leftrightarrow f$  est continue en  $0$

$f$  admet un  $dl_1$  en  $0 \Leftrightarrow f$  est dérivable en  $0$ . (mais on ne peut pas généraliser à un  $dl_n \dots$ )

**Théorème :**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  en  $0 \Rightarrow f$  admet un  $dl_n$  en  $0$ , qui est le développement de Taylor !

Ceci implique l'unicité du développement limité quand il existe !

**Théorème :**

Si une application est paire, la partie régulière de son développement limité en  $0$  ne contient que des termes de rang pair.

Si une application est impaire, la partie régulière de son développement limité en  $0$  ne contient que des termes de rang impair.

**Théorème :**

En un point, une application est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

**Définition :** On appelle forme normalisé du développement limité de  $f$  :

$$f(a+h) = h^p (a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)) \text{ avec } a_0 \neq 0.$$

### 17.11. Opérations sur les $dl_n$

On agira toujours avec des développements au même ordre.

- Somme : ajouter simplement les parties régulières.
- Produit : faire le produit des parties régulières et tronquer à l'ordre  $n$ .
- Quotient : se ramener à  $k \frac{f(x)}{1+u(x)}$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ , et utiliser  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$
- Composée : pour  $g \circ f$ , vérifier que  $f(0) = 0$ , faire la composée des parties régulières et tronquer à l'ordre  $n$ .
- On obtient un  $dl_{n+1}$  de la primitive de  $f$  en intégrant terme à terme le  $dl_n$  de  $f$ .

Attention aux constantes d'intégration... On ne peut pas faire la même chose pour la dérivée !

**Théorème :** Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , alors  $F$ , la primitive de  $f$  qui s'annule en  $0$  admet un développement limité d'ordre  $n+1$  en  $0$ , dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière du développement de  $f$ , qui s'annule en  $0$ .

## 18. Fonctions usuelles

### 18.1. Exponentielle et Logarithme

- La fonction **exponentielle** :  $x \mapsto \exp(x) = e^x$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , croissante.

On peut aussi la définir sur  $\mathbb{C}$ .

Sa dérivée est elle même :  $x \mapsto \exp(x)$

Elle vérifie la propriété fondamentale :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$ .

Cette propriété est d'ailleurs encore vérifiée sur  $\mathbb{C}$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\exp(x)$		1	$+\infty$

0 ↗ ↘ ↗

- La fonction **logarithme** est la réciproque de la précédente et n'est définie que sur  $\mathbb{R}_+^*$ , croissante.

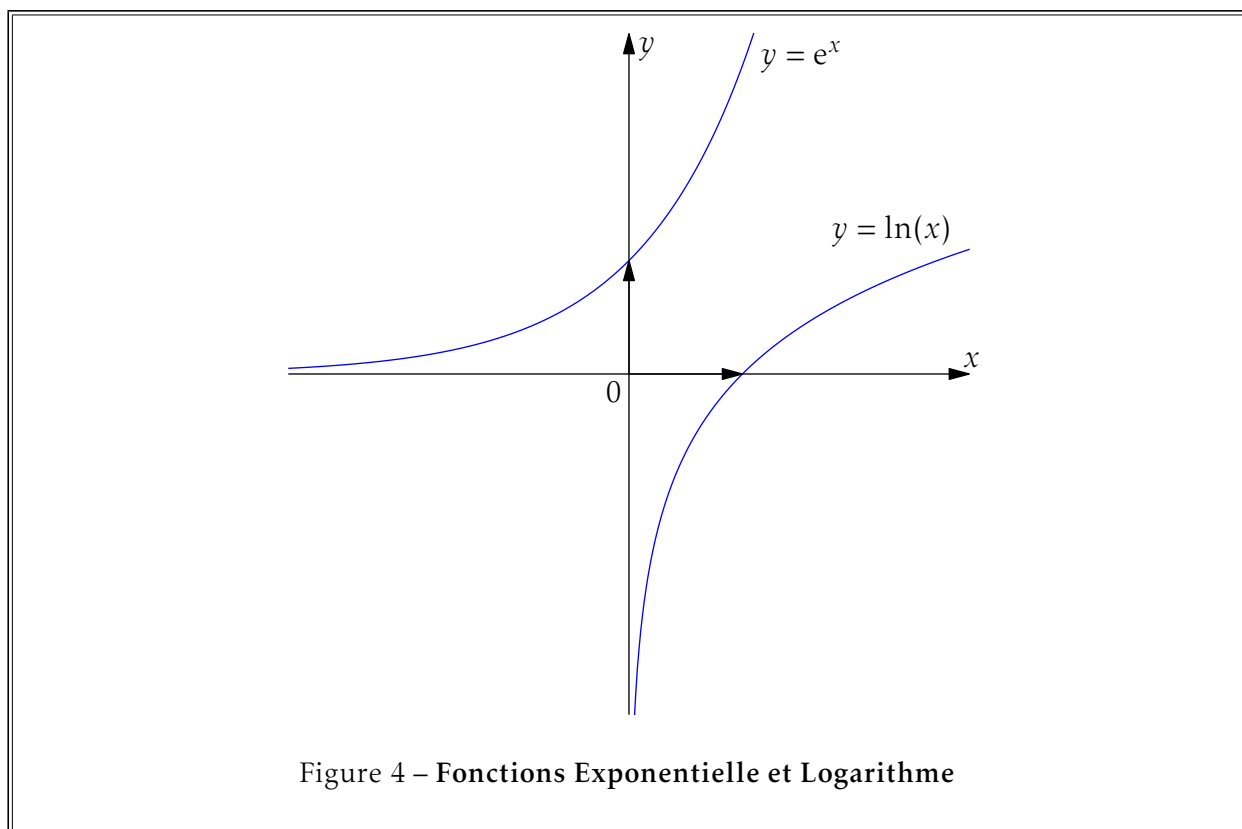
Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{x}$

Elle vérifie la propriété fondamentale :  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ .

Le tableau de variation est :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Ces deux fonctions sont tracées sur la figure 4, ci-dessous.



## 18.2. Fonctions trigonométriques circulaires

- La fonction **sinus**,  $x \mapsto \sin(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique, impaire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \cos(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi$
$\sin(x)$	0	$-1$	0	1	0

- La fonction **cosinus**,  $x \mapsto \cos(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique, paire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto -\sin(x)$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi$
$\cos(x)$	-1	0	1	0	-1

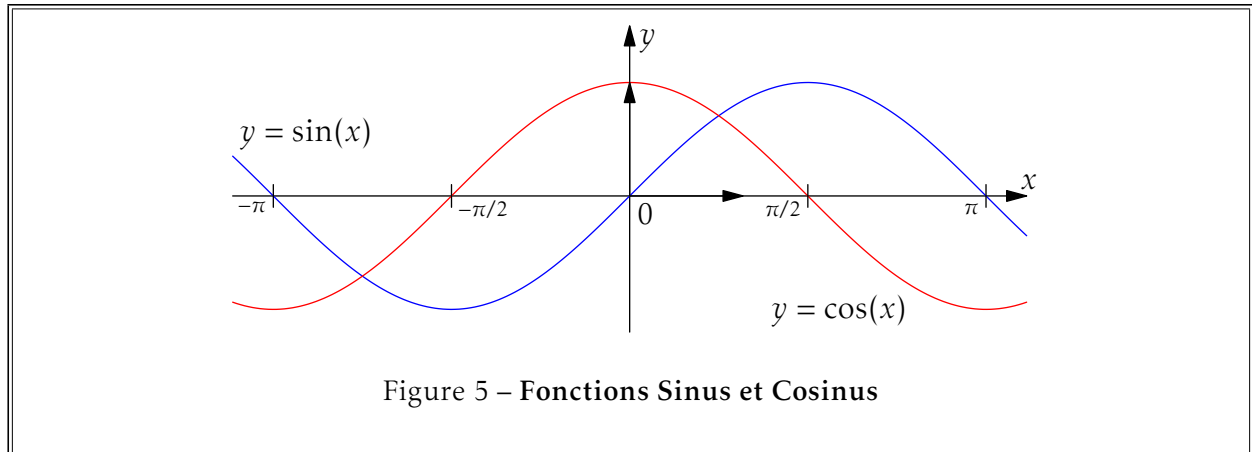
- La fonction **tangente**,  $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\pi$  périodique, impaire ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

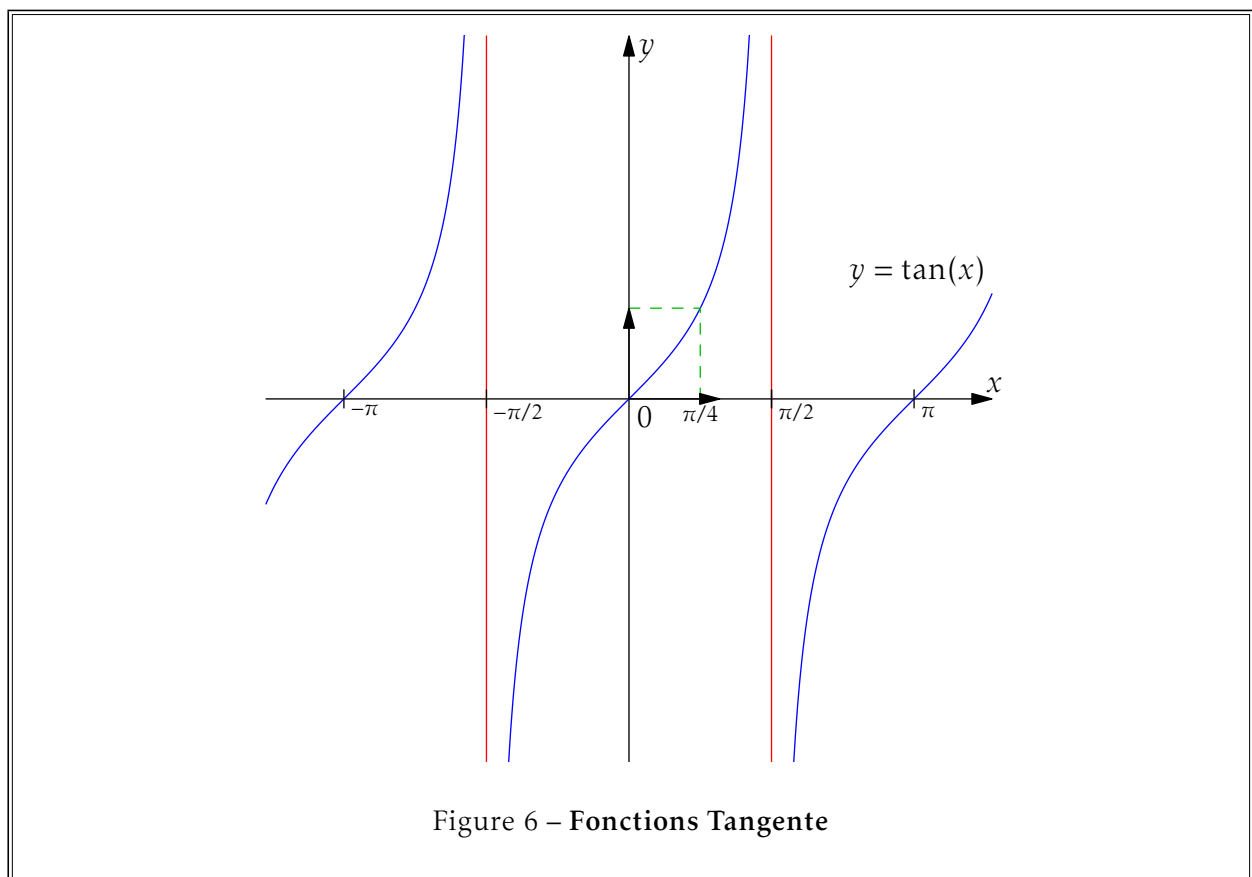
Le tableau de variation est :

$x$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$
$\tan(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

Les fonctions Sinus et Cosinus sont sur la figure 5, ci-dessous.



Les fonctions Tangente sont sur la figure 6, de la présente page.





### 18.3. Fonctions trigonométriques réciproques

- La fonction **arcsinus**,  $x \mapsto \arcsin(x)$ , est définie sur  $[-1, 1]$ , impaire, croissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le tableau de variation est :

$x$	-1	0	1
$\arcsin(x)$		0	$\frac{\pi}{2}$

- La fonction **arccosinus**,  $x \mapsto \arccos(x)$ , est définie sur  $[-1, 1]$ , décroissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le tableau de variation est :

$x$	-1	0	1
$\arccos(x)$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0

- La fonction **arctangente**,  $x \mapsto \arctan(x)$ , est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire, croissante ;

Sa dérivée est :  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

On a illustré les fonctions Arcsinus et Arccosinus dans la figure 7, de la présente page.

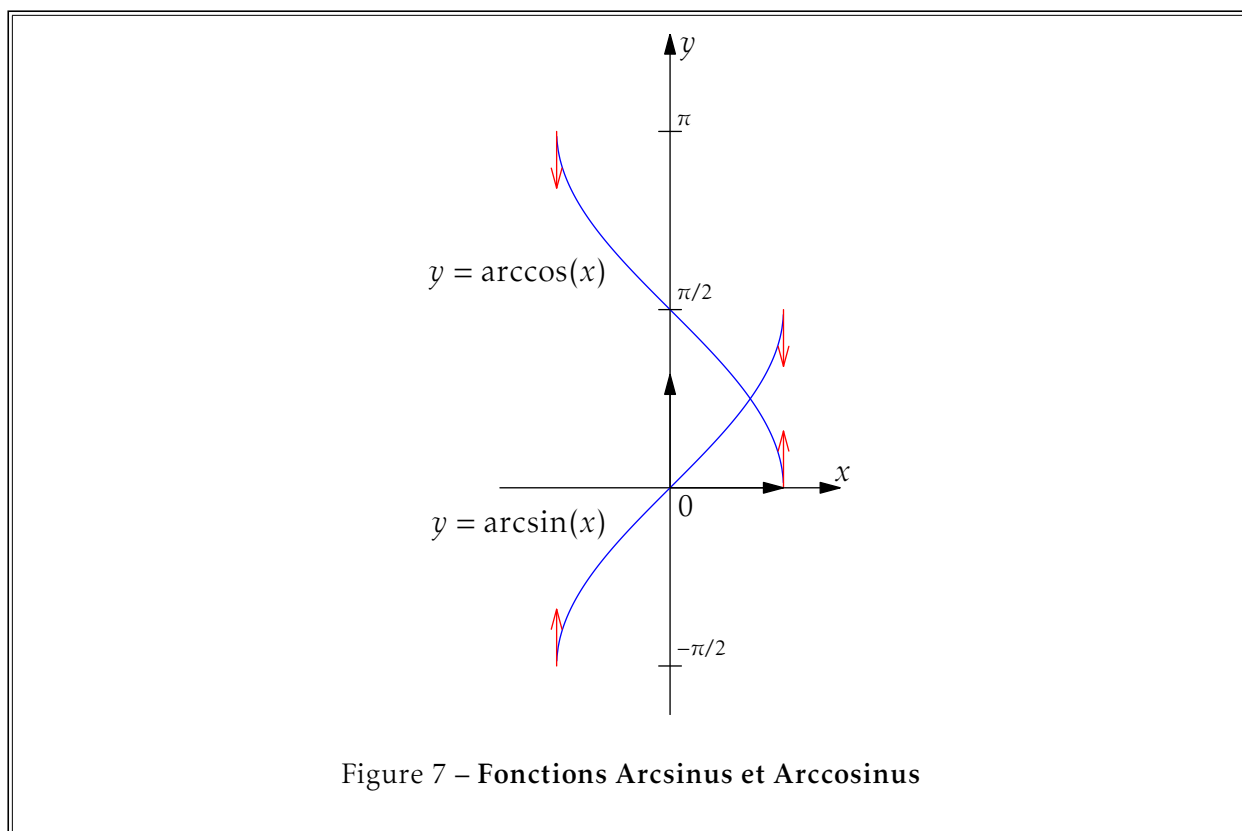


Figure 7 – Fonctions Arcsinus et Arccosinus

On a illustré la fonction Arctangente dans la figure 8, page suivante.

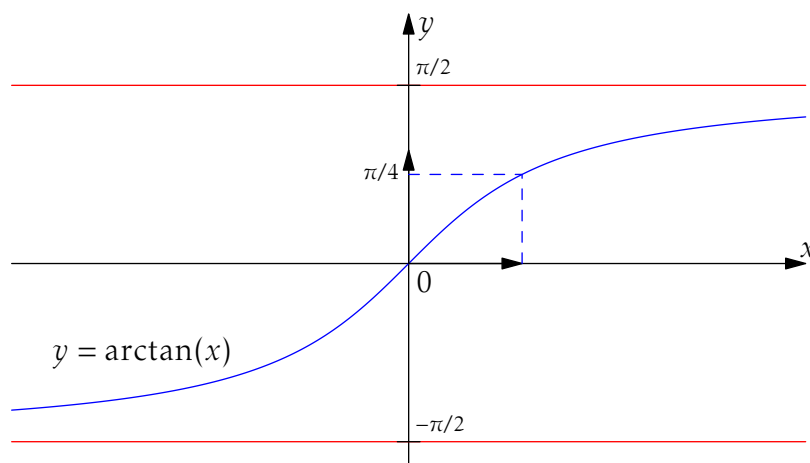


Figure 8 – Fonction Arctangente

Il faut se méfier des touches des calculatrices qui notent par exemple «  $\tan^{-1}$  » l'application **réci**proque de l'application «  $\tan$  », c'est à dire l'application «  $\arctan$  »...

Cela provient de ce que l'application « réciproque » est l'application « inverse » pour la composée des applications...

#### 18.4. Autres fonctions usuelles

Voir le tableau 1, page ci-contre, des dérivées et des développements limités usuels.

On ajoutera la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $\sin x$  qui est :  $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$ , et celle de  $\cos x$  qui est :  $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$ .

On a indiqué l'ensemble de définition de  $f'$  quand il diffèrait de celui de  $f$ .

Pour les deux dernières qui dépendent d'un paramètre  $a$ , on a indiqué les résultat valables pour  $a$  quelconque.

## 19. Trigonométrie

### 19.1. Propriétés élémentaires

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie :  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ .

La figure 9, page 44, représente le cercle trigonométrique.

Les valeurs des lignes trigonométriques à connaître sont :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Tableau 1 – FONCTIONS USUELLES

$f$	$D_f$	$f'$	$dl_n$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+2})$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$		$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, +1[$	$-\frac{1}{1-x}$	$-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$		$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$x^a$	$]0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$a x^{a-1} (a \neq 0)$	
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$a(1+x)^{a-1}$	$1 + \sum_{k=1}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

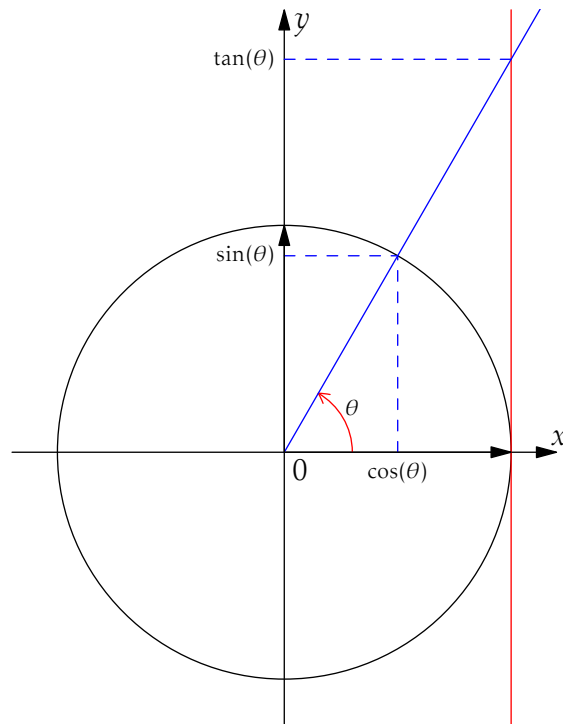


Figure 9 – Cercle Trigonométrique

## 19.2. Symétries

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$$

$$\tan(x + n\pi) = \tan x$$

## 19.3. Arc double

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

## 19.4. Sommes d'arcs

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Notons le cas particulier :  $\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$ .

## 19.5. Transformation de sommes en produits

Ces formules se déduisent des précédentes !

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \tan p + \tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}\end{aligned}$$

## 19.6. Formule de Moivre et d'Euler

D'abord la formule d'Euler :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Puis la formule de Moivre qui en découle :

$$(\cos a + i \sin a)^n = (e^{ia})^n = e^{ina} = \cos na + i \sin na$$

## 19.7. Fonctions réciproques

Le programme n'en parle pas, mais c'est souvent utile et pratique !

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

## 19.8. Pour le calcul intégral

$$\text{Si } t = \tan \frac{\theta}{2}, \text{ alors : } \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

## 20. Recherche de primitives

### 20.1. Fraction rationnelle en $x$

L'énoncé nous guide pour transformer au besoin la fraction rationnelle :

- les termes en  $\frac{P'(x)}{P(x)}$ , s'intègrent en :  $\ln |P(x)|$
- les termes en  $\frac{P'(x)}{P(x)^p}$ , s'intègrent en :  $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{P(x)^{p-1}}$
- les termes en  $\frac{1}{x-a}$ , s'intègrent en :  $\ln |x-a|$
- les termes en  $\frac{1}{(x-a)^p}$ , s'intègrent en :  $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en  $\frac{1}{x^2+a^2}$  s'intègrent en :  $\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

### 20.2. Fractions rationnelles diverses

Dans tous les cas, on indique un changement de variable, du type  $u = \dots$ , qui permet d'obtenir une fraction rationnelle en  $u$ .

L'énoncé doit vous guider et vous donner le bon changement de variable qu'on ne fait que citer ici pour mémoire...

a/ Fraction rationnelle en  $e^x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$

Poser  $u = e^x$ .

b/ Fraction rationnelle en  $x$  et  $\sqrt{ax+b}$

Poser  $u = \sqrt{ax+b}$ .

c/ Fraction rationnelle en  $\sin x$  et  $\cos x$

On pose selon les cas  $u = \cos x$ ,  $u = \sin x$ ,  $u = \tan x$  ou  $u = \tan \frac{x}{2}$ .

### 20.3. Primitives usuelles

Voir le tableau 2, page ci-contre, des primitives usuelles.

Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un **intervalle**. Si on change d'intervalle, il y a au moins la constante qui change, mais pas seulement. En effet  $\ln(x)$  peut devoir être changé en  $\ln(-x)$  quand on travaille sur  $\mathbb{R}_-^*$ ...

C'est pourquoi, dans un premier temps, dans un calcul de primitive, on écrira **toujours** un logarithme avec une valeur absolue.

## 21. Intégrale de Riemann (ou intégrale simple)

### 21.1. Primitive

**Théorème :** (Darboux)

Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Deux primitives diffèrent d'une constante.

**Définition :**  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ , avec  $F$  une primitive de  $f$ .

Dans un repère orthonormal, l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est aussi l'aire **algébrique** délimitée par la courbe et l'axe  $Ot$  de la variable entre  $t = a$  et  $t = b$ .

**Théorème :** (Chasles)

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt, \text{ avec } f \text{ continue sur la réunion des intervalles.}$$

**Théorème :** (Linéarité)

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

### 21.2. Interprétation géométrique

L'intégrale simple sur  $[a, b]$  de  $f$  est l'aire **algébrique** entre le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses.

- Quand la fonction est positive, comme sur la figure 10, page 48, l'aire algébrique se confond avec l'aire géométrique, c'est à dire l'aire hachurée.
- Quand la fonction est de signe variable, comme sur la figure 11, page 48, l'aire algébrique est la différence des aires géométriques au dessus et en dessous de l'axe des abscisses, c'est à dire des aires hachurées.

Tableau 2 – PRIMITIVES USUELLES

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
$x^a$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	Sauf pour $a = -1$ , sur $\mathbb{R}$ , ou $\mathbb{R}^*$ , ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^a}$	$\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$ , sauf pour $a = 1$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a  + C$	Sur un intervalle ne contenant pas $-a$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	Sur un intervalle de $] -1, 1[$ . Ou bien $-\arccos x + C'$
$e^x$	$e^x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	Sur un intervalle de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln \cos x  + C$	Sur un intervalle de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $n \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u  + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ , $u(x) \neq 0$ , $n \neq 1$
$\frac{u'}{a^2 + u^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	Sur un intervalle où $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$

### 21.3. Inégalités

**Théorème :**  $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t) \\ a < b \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

**Théorème :** (Valeur absolue ou module)

$$a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

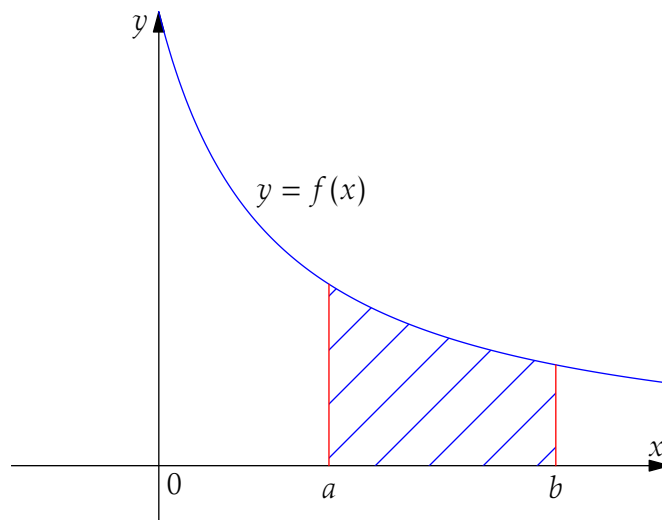


Figure 10 – L'intégrale simple d'une fonction positive est l'aire hachurée

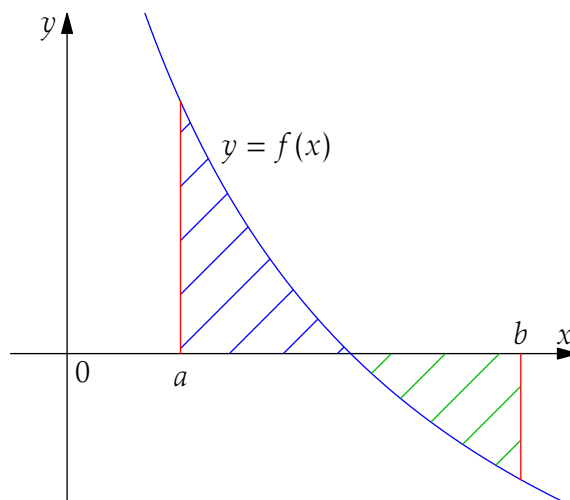


Figure 11 – L'intégrale est la différence des aires hachurées en bleu et vert

**Théorème :** (Moyenne)

$$a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

**Théorème :** (Cauchy-Schwarz, cas réel)

$$a < b \Rightarrow \left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \times \int_a^b g^2(t) dt$$

#### 21.4. Théorème de l'intégrale nulle

**Théorème :** 
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \int_a^b |f(t)| dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b], \quad f(t) = 0$$



On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

### 21.5. Intégrale dépendant des bornes

- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , et  $F'(x) = f(x)$
- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ , avec  $\begin{cases} u([\alpha, \beta]) \subset [a, b] \\ v([\alpha, \beta]) \subset [a, b] \end{cases}$

alors  $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ ,  $F'(x) = f(v(x)) \times v'(x) - f(u(x)) \times u'(x)$

### 21.6. Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale simple

- Intégration par parties :  $u$  et  $v$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

- Changement de variable :  $f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ , avec  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

Le changement de variable est donc  $u = \varphi(t)$  dont on vérifiera qu'il est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle de variation de  $t$ .

### 21.7. Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  en divisant l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales.

Les bornes de ces parties sont donc :  $a + k \frac{b-a}{n}$ , pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Sur chacun de ces intervalles de largeur  $\frac{b-a}{n}$ , qui sont :  $\left[ a + (k-1) \frac{b-a}{n}, a + k \frac{b-a}{n} \right]$ , on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes.

Ce qui donne :

**Théorème :**  $f$  continue sur  $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Si de plus  $f$  est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale.

Enfin, quand  $[a, b] = [0, 1]$ , on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

**Théorème :**  $f$  continue sur  $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

## 22. Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

### 22.1. Convergence

**Définition :**  $f$  est localement intégrable sur  $I \Leftrightarrow f$  est continue par morceaux sur  $I$

**Définition :**  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a, b[$  admet une intégrale généralisée en  $b$

$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ a une limite finie quand } x \rightarrow b^-$$

On a la même définition sur  $[a, +\infty[$ ,  $]a, b]$ , ou  $]-\infty, b]$ . On écrira l'ensemble des théorèmes pour  $[a, b[$

Le lecteur adaptera les énoncés aux autres intervalles.

Cependant le théorème dit du « faux-problème » n'est pas applicable à l'infini.

La figure 12, ci-dessous, représente le cas où  $b$  est fini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

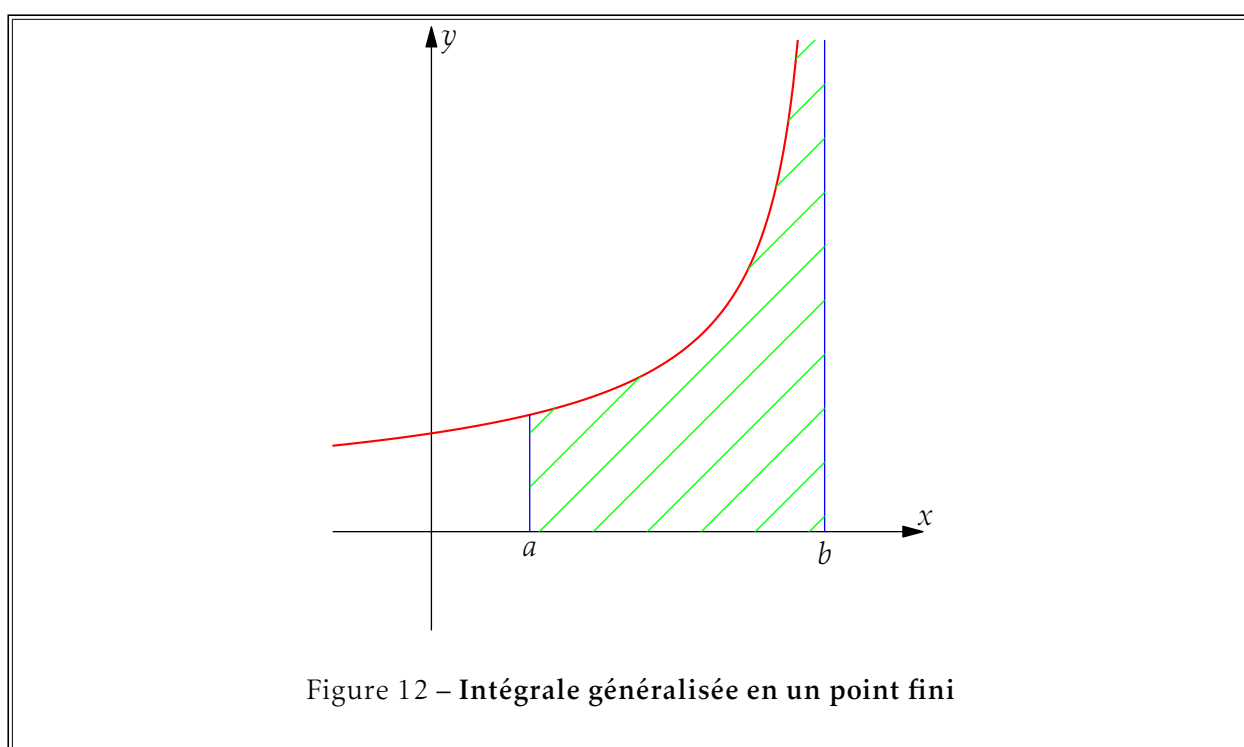


Figure 12 – Intégrale généralisée en un point fini

La figure 13, page ci-contre, représente le cas où on est à l'infini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

**Théorème :** (convergence absolue)

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ converge et : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Théorème :** Si  $f$  est de signe constant sur  $[a, b]$ , alors :  $\int_a^b f(t) dt$ ,  $\int_a^b -f(t) dt$  et  $\int_a^b |f(t)| dt$  sont de même nature.

La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

**Théorème :** (faux problème)

$f$  continue sur  $[a, b]$ , admettant une limite finie en  $b^-$ , c'est à dire qu'elle est prolongeable par continuité (en un point fini  $b$  !), alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge

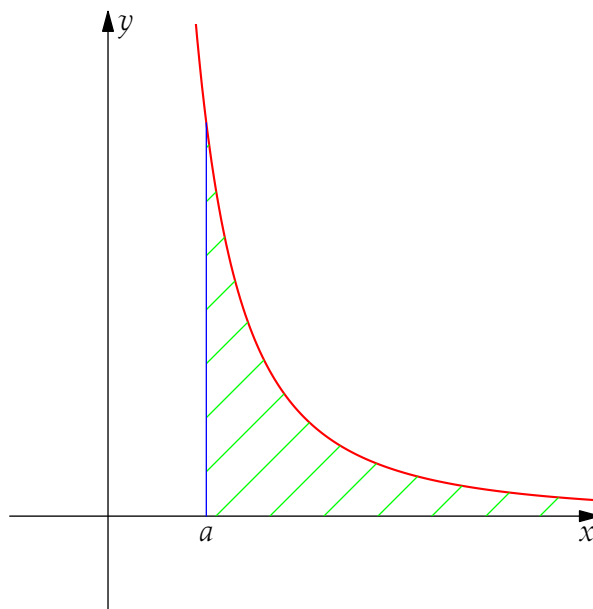


Figure 13 – Intégrale généralisée à l'infini

**Théorème :** (intégrabilité)

$f$  est dite intégrable sur  $I$  un intervalle

si et seulement si  $\int_I |f|$  est simple ou bien  $\int_I |f|$  converge.

Si l'intégrale de  $f$  est généralisée, cela revient à la convergence absolue de l'intégrale.

## 22.2. Fonctions positives

**Théorème :** (Riemann)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{array} \right.$$

**Théorème :** (Comparaison)

$$\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b g(t) dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ converge} \\ \int_a^b f(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ diverge} \end{array} \right.$$

**Théorème :** (Equivalence)

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \sim_{b^-} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont de même nature}$$

## 22.3. Théorème de l'intégrale nulle

Le théorème de l'intégrale nulle est encore applicable pour les intégrales généralisée.

**Théorème :** 
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b[ \\ \int_a^b |f(t)| dt \text{ convergente et : } \int_a^b |f(t)| dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b[, \quad f(t) = 0$$

On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

## 22.4. Changement de variable pour une intégrale généralisée

a/ Changement de variable

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \varphi \text{ monotone de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta[ \\ \varphi([\alpha, \beta[) \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du \text{ sont de même nature}$$

et si elles convergent : 
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

Le changement de variable est donc  $u = \varphi(t)$  dont on vérifiera qu'il est bien monotone de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle de variation de  $t$ .

b/ Travail en primitives

On peut, au besoin, **se passer du théorème** d'intégration par parties et de changement de variable dans les intégrales généralisées en travaillant en **primitives**. On revient alors aussi à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée par limite finie d'une primitive...

## 22.5. Intégration par parties

Il n'y a pas de théorème pour les intégrations par parties dans les intégrales généralisées.

On travaillera donc :

- en primitive, sans bornes, et ensuite on prendra les limites ou valeurs, de cette primitive aux bornes considérées ;
- ou, avec une intégrale simple, par exemple :  $[0, X]$ , puis, on fera tendre  $X$  vers  $+\infty$ , pour une intégrale sur  $[0, +\infty[$ .

## 22.6. Un procédé de convergence

- Si on a  $\alpha < 1$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha} f(t) = 0$ , alors  $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$ ,  
et donc  $\int_0^1 f(t) dt$  converge absolument donc converge.
- Si on a  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha} f(t) = 0$ , alors  $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$ ,  
et donc  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge absolument donc converge.

Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

## 22.7. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction  $F$  de la variable  $x$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles on peut effectivement calculer  $F(x)$ .

Ainsi, si on a :

- $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  ou,
- $F : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$  ou encore,
- $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

L'ensemble de définition de  $F$  est l'ensemble des valeurs de  $x$  telles que :

- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

## 23. Séries numériques réelles ou complexe

### 23.1. Convergence

**Définition :**  $\sum u_n$  converge  $\Leftrightarrow$  la suite des sommes partielles  $(s_n)$  avec  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  converge.

**Théorème :** (Condition nécessaire élémentaire de convergence)

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Cette propriété est surtout utilisée pour montrer qu'une série diverge en montrant que le terme général ne tend pas vers 0.

On parle alors de *divergence grossière*.

Par ailleurs, ceci **n'est pas** une équivalence...

### 23.2. Convergence Absolue

**Théorème :**  $\sum |u_n|$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge.

(règle  $n^\alpha u_n$ )

Si on a  $\alpha > 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = 0$ , alors  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  et donc  $\sum u_n$  converge absolument et donc converge.

Ceci n'est pas un théorème et est donc à réargumenter à chaque fois...

### 23.3. Séries géométriques

**Théorème :** La série de terme général  $x^n$  converge  $\Leftrightarrow |x| < 1$ .

De plus, la somme est :  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

**Définition :** Une suite **géométrique** est une suite vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n$ .  
 $a$  est la **raison** de la suite.

La somme d'une série géométrique convergente est donc :  $\frac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$ .

Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :

$$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$

Quand la série converge, il n'y a pas de termes manquants...

## 23.4. Séries positives

**Théorème :** (Riemann)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1)$$

**Théorème :** (Comparaison)

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

**Corollaire :**  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$

**Théorème :** (Équivalence)

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

**Théorème :** (d'Alembert)

$$\sum u_n \text{ à terme strictement positifs, telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \left\{ \begin{array}{ll} l < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ l > 1, & \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ l = 1, & \text{on ne sait rien} \end{array} \right.$$

On tombe très souvent sur le cas douteux ! Pour ne pas tomber sur le cas douteux, il est souvent nécessaire d'avoir la présence d'une factorielle ou d'un exposant dépendant de  $n$ . Les fonctions de Riemann fournissent toujours le cas douteux !...

Ainsi on utilise le théorème de d'Alembert dans le cadre des séries entières, ou lorsqu'on a, dans l'expression de  $u_n$ , des factorielles, des termes de nature géométrique ( $a^n$ ) ou des exponentielles.

## 23.5. Comparaison d'une série et d'une intégrale

**Théorème :**  $f$  une fonction **positive et décroissante** définie sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et  $\sum f(n)$  sont de même nature.

$$\text{Et si elles convergent : } \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

La figure 14, page suivante, donne les inégalités de base !

Il ne faut pas hésiter à la refaire pour retrouver ces inégalités.

## 23.6. Suite et série des différences

**Théorème :** La suite  $(u_n)$  converge  $\Leftrightarrow$  La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge

Cela sert parfois à montrer la convergence de quelques...suites, en montrant la convergence ou la convergence absolue de la série des différences.

## 23.7. Calcul exact de sommes de séries

On dispose principalement de trois techniques

- Utilisation de séries entières par leur valeur en un point.
- Utilisation de séries de Fourier par leur valeur en un point ou la formule de Parseval.

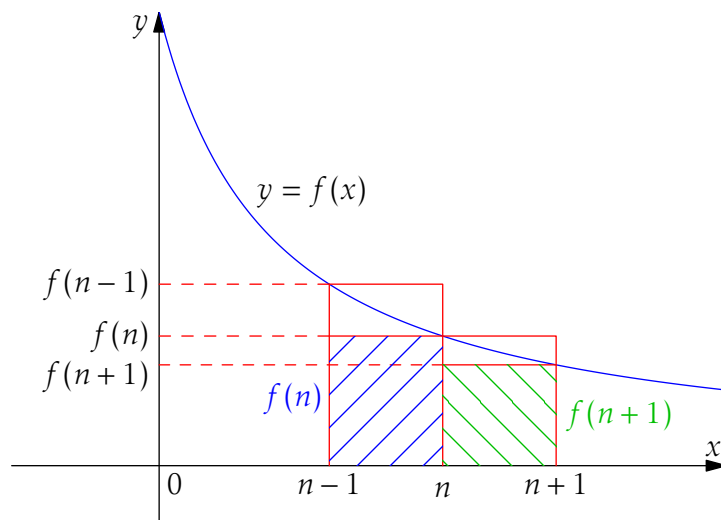


Figure 14 – Comparaison série-intégrale

- Calcul effectif de la limite de la suite des sommes partielles où les termes s'en vont en dominos.

Le cas le plus simple étant :  $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

### 23.8. Calcul approché de sommes de séries

- Dans le cas d'une série alternée répondant au critère spécial, on applique ce critère.
- Dans les autres cas, on s'intéresse à la série des modules.
  - Si elle converge par application du critère de d'Alembert, majorer le reste par une série géométrique
  - Sinon, majorer le reste en utilisant une intégrale ou...

### 23.9. Développement décimal d'un nombre réel

*On écrit d'abord les entiers...*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est sa propre écriture décimale !

Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de  $n$  par 10.

Le reste  $r_1$  est un entier entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des unités de l'écriture décimale de  $n$ .

Le quotient  $q_1$  est lui aussi un entier naturel, s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de  $n$ . Et c'est terminé l'écriture de  $n$  est «  $q_1 r_1$  » !

Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de  $q_1$  par 10.

Le reste  $r_2$  est un entier entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de  $n$ .

Le quotient  $q_2$  est lui aussi un entier naturel, s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des centaines de l'écriture décimale de  $n$ . Et c'est terminé l'écriture de  $n$  est «  $q_2 r_2 r_1$  » !

Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de  $q_2$  par 10...

Et l'histoire continue jusqu'à obtenir l'écriture décimale de  $n$  : la suite des quotients est strictement décroissante, on finit par avoir un quotient entre 0 et 9.

*On écrit maintenant les réels...*

Compte tenu du fait qu'on sait écrire les entiers, il suffira bien de savoir écrire les réels de l'intervalle  $[0, 1[$  pour écrire tous les réels positifs.

Pour un réel négatif, on mettra simplement un signe « - » devant l'écriture de sa valeur absolue !

Soit  $x \in [0, 1[$ , on fabrique deux suites de la façon suivante :

- $x_0$  reçoit la valeur de  $x$

- $u_1$  est la partie entière de  $10 \times x_0$ , c'est un chiffre,
- puis  $x_1$  en est la partie fractionnaire :  $10 \times x_0 = u_1 + x_1$ ,  $x_1$  est aussi un réel de  $[0, 1[$ .
- $u_2$  est la partie entière de  $10 \times x_1$ , c'est un chiffre,
- puis  $x_2$  en est la partie fractionnaire :  $10 \times x_1 = u_2 + x_2$ ,  $x_2$  est aussi un réel de  $[0, 1[$ .
- ...

On s'arrête si, à un moment,  $x_p = 0$ , alors l'écriture de  $x$  est «  $0, u_1 u_2 \dots u_p$  », de toutes façons, à partir de ce moment, tous les  $x_n$  et les  $u_n$  sont nuls !

Sinon on continue indéfiniment et alors, l'écriture de  $x$  est «  $0, u_1 u_2 \dots u_p \dots$  ». C'est une écriture infinie.

**Théorème :** Dans tous les cas, pour  $x \in [0, 1[ : x = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n}$

## 24. Séries Entières

**Définition :** Une **série entière** est une série de la forme  $\sum a_n z^n$  ou  $\sum a_n x^n$ , selon que l'on travaille sur  $\mathbb{C}$  ou sur  $\mathbb{R}$

### 24.1. Rayon de convergence

Pour rechercher le rayon de convergence  $R$ ,

- Cas le plus courant, application du théorème de d'Alembert :
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum |a_n| |z_0|^n$  est le cas douteux de d'Alembert, alors  $R = |z_0|$  ;
  - Si, pour tous les  $z_0$ ,  $\sum a_n z_0^n$  converge, alors  $R = +\infty$  ;

La règle de d'Alembert est, formellement, hors programme, on fixe donc  $x_0 > 0$  et on applique le théorème de d'Alembert des séries numériques pour conclure ensuite sur le rayon de convergence.

C'est vers ce procédé qu'on se tournera à priori.

- Quelques remarques très utiles :
  - $\sum a_n z^n$  et  $\sum |a_n| z^n$  ont le même rayon de convergence ;
  - Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ , alors,  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  ont le même rayon de convergence ;
- On a aussi :
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum a_n z_0^n$  converge, absolument ou pas, alors  $R \geq |z_0|$  ;
  - Si on a un  $z_0$  tel que  $\sum a_n z_0^n$  diverge, absolument ou pas, alors  $R \leq |z_0|$  ;

Une inégalité relative au rayon de convergence est **toujours large**.

- Dans le cas où le principe général précédent ne fournit pas le résultat, on utilise la propriété suivante, qui découle du lemme d'Abel :
  - $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

Ce dernier procédé permet de conclure dans tous les cas. Il est intéressant puisqu'il s'intéresse à la suite  $(a_n r^n)$  et non à la série  $\sum a_n r^n$ , ce qui est plus simple.

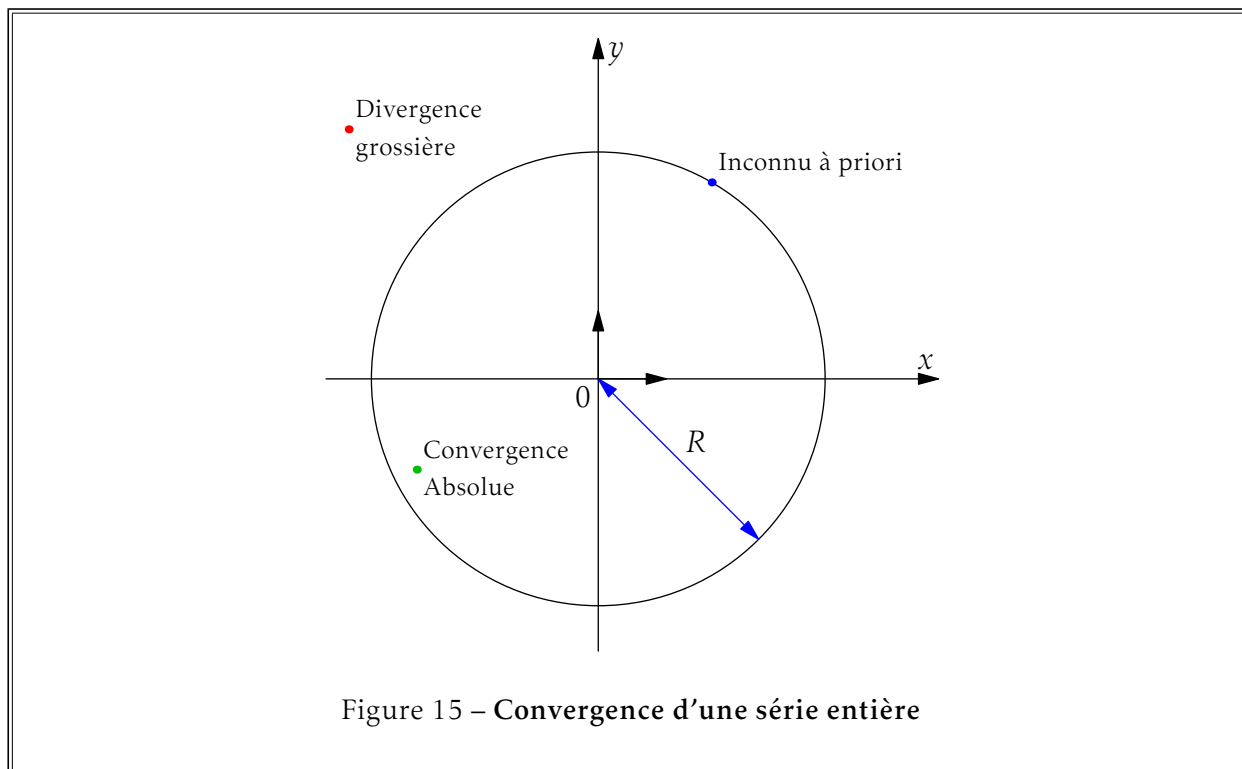
### 24.2. Convergence

**Théorème :** 
$$\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{converge absolument} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{diverge grossièrement} \\ |z| = R & \text{on ne sait rien a priori sur la convergence} \end{cases}$$

La figure 15, page ci-contre, illustre ce théorème.

**Théorème :** La somme d'une série entière est continue sur l'**intervalle ouvert de convergence** :  $] -R, R[$ .





**Théorème :** Quand la variable est réelle, la série entière se dérive et s’intègre terme à terme sur l’ouvert de convergence,  $] -R, R[$ , au moins.

Elle s’intègre même terme à terme sur un **segment** inclus dans l’**intervalle ouvert de convergence**

**Théorème :** La série entière de variable réelle, sa série dérivée et ses séries primitives ont le même rayon de convergence.

**Théorème :** La somme d’une série entière de variable réelle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ .  
De plus la somme d’une série entière se dérive terme à terme.

### 24.3. Développement d’une fonction en série entière

**Définition :** Une fonction  $f$  est **développable en série entière** en 0

$\Leftrightarrow$  il existe une série entière et un intervalle  $I$ , contenant 0, tels que  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

**Théorème :** Si  $f$  est développable en série entière en 0 alors sa série entière est sa série de Taylor, c’est à dire :  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

On a donc **unicité** du développement en série entière quand il existe !

En général  $I$  est l’intersection de l’ensemble de définition de  $f$  et de l’ensemble de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , mais cela n’est pas une obligation...

Pour développer une fonction en série entière, on peut :

- utiliser les séries entières usuelles.

Assez souvent, parfois en dérivant, on fait apparaître une fraction rationnelle. On la décompose alors en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  pour ensuite utiliser des séries géométriques...

- sur indication de l’énoncé, utiliser une équation différentielle.
- ou calculer la série de Taylor.

Dans tous les cas, il faudra avec soin justifier la convergence de la série entière **et son égalité** avec la fonction. Cela peut être délicat dans le cas de la série de Taylor...qu'on n'utilisera donc qu'à la demande de l'énoncé.

## 24.4. Séries entières usuelles

Voir le tableau 3, ci-dessous, des séries entières usuelles.

Tableau 3 – DÉVELOPPEMENTS USUELS EN SÉRIE ENTIÈRE				
f	$D_f$	DSE	R	I
$e^x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, 1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ ( $a \in \mathbb{N}$ )	

La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.

## 24.5. Série entière solution d'une équation différentielle

- On considère au départ une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , solution de l'équation différentielle (E). On pose donc :  $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .
- Tout ce qu'on écrit est valable pour  $x \in ]-R, R[$ . **Il faut dire** qu'on se place sur  $] -R, R[$ ...
- On calcule  $y'$  et au besoin  $y''$ , on reporte dans l'équation.
- On éclate tout en sommes de séries entières.
- On **regroupe ce qui se regroupe naturellement**, les termes en  $x^n$ , ceux en  $x^{n-1}$ ...
- Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
- Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

## 25. Séries de Fourier

### 25.1. Série de Fourier et coefficients de Fourier de $f$

**Définition :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $T$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , on appelle **série de Fourier de  $f$** , la série :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt \end{cases}$$

$a_0$  est la valeur moyenne de  $f$ .

Dans le cas où  $f$  est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période bien choisie. C'est à dire que, le plus souvent, les intégrales sont calculées entre 0 et  $\frac{T}{2}$ .

D'autre part, souvent, on ne dispose d'une formule explicite pour  $f(t)$  que sur un certain intervalle. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

Et on fera aussi attention à ce qui suit :

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour  $f$  que dans un certain intervalle, on veillera donc, comme on l'a déjà dit, à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

Ce qui fait qu'on utilise souvent la parité ou la symétrie de glissement qui suit !

### 25.2. Fonction paire ou impaire

- Si  $f$  est paire :  $a_0 = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) dt$ ,  
et pour  $n \geq 1$ ,  $\begin{cases} a_n = \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = 0 \end{cases}$
- Si  $f$  est impaire : pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 0$ ,  
et pour  $n \geq 1$ ,  $b_n = \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$

### 25.3. Symétrie de glissement

**Théorème :** Soit  $T$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ .

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = b_{2n} = 0$ .

### 25.4. Convergence

**Théorème :** (Dirichlet, cas général)

$f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique

$\Rightarrow$  la série de Fourier de  $f$  converge en tous points, et sa somme est :  $S(f)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$

où  $f(t+0)$  et  $f(t-0)$  sont les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $t$ .

En tous points où  $f$  est continue, on a donc bien :  $S(f)(t) = f(t)$ .

Il n'y a qu'aux points où  $f$  est discontinue qu'il risque d'y avoir un problème. On fera donc un graphe de la fonction **sur un peu plus d'une période** pour repérer les points de discontinuité et vérifier le caractère  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème :** (Dirichlet, cas continu)

$f$  **continue** et de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -périodique

$\Rightarrow$  la série de Fourier de  $f$  converge en tous points, et :  $S(f)(t) = f(t)$ .

On ne confondra pas :

- de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$  ;
- avec **continue**, et de classe  $\mathcal{C}^1$  **par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ .

La première est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , et donc pas nécessairement continue sur  $\mathbb{R}$ ...

## 25.5. Formule de Parseval

**Théorème :** (Formule de Parseval)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $T$ -périodique, **continue par morceaux** sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$26. \quad \int \sum = \sum \int \dots$$

**Problème :** Il s'agit de montrer que :  $\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right)$ .

C'est à dire que l'intégrale d'une série est la série des intégrales.

Le problème n'est jamais évident. Il y a différentes solutions selon les intégrales. Toutes les justifications doivent se faire avec soin.

### 26.1. Série entière

Pour une série entière, on peut intégrer terme à terme sur tout intervalle inclus dans l'ouvert de convergence.

Il suffit donc de rappeler qu'on a une série entière et que  $[a, b] \subset ]-R, R[$

### 26.2. Autres cas

Que l'intégrale soit une intégrale simple ou une intégrale généralisée le traitement sera le même. L'idée est de sortir la somme partielle de la série par linéarité, il reste ensuite à montrer que l'intégrale du reste tend bien vers 0.

#### a/ Série géométrique

Si à  $t$  fixé, la série est géométrique,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$  est aussi une série géométrique qui se calcule facilement.

On calcule alors, ou on majore :  $\int_a^b \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt$

## b/ Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous guider.

Le principe général est de majorer  $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq g_n(t)$  avec  $\int_a^b g_n(t) dt \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et d'appliquer le principe précédent.

Souvent, on vient de faire une telle majoration dans les questions précédentes...

Si l'intégrale est une intégrale généralisée, il ne faut pas oublier de montrer la convergence de **toutes** les intégrales utilisées.

## 27. Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

### 27.1. Topologie de $\mathbb{R}^p$

On a déjà parlé de la norme d'un vecteur et de la distance de deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^p$ .

- La **boule ouverte** de centre  $u_0$  et de rayon  $r$  est formée des vecteurs  $u$  tels de  $\|u - u_0\| < r$ .  
La **boule fermée** de centre  $u_0$  et de rayon  $r$  est formée des vecteurs  $u$  tels de  $\|u - u_0\| \leq r$
- $A$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^p$  si et seulement si pour tout  $u_0 \in A$ , il existe une boule de centre  $u_0$  incluse dans  $A$ .  
 $B$  est un **fermé** de  $\mathbb{R}^p$  si et seulement si  $A = \overline{B}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .
- $u_0 \in A$  est un **point intérieur** de  $A$  si et seulement si il existe une boule de centre  $u_0$  incluse dans  $A$ .  
 $u_0$  est **extérieur** à  $A$  si et seulement si  $u_0$  est intérieur de  $\overline{A}$ .
- La **frontière**, ou le **bord** de  $A$  est formé des points qui ne sont ni dans l'intérieur, ni dans l'extérieur de  $A$ .
- Soit  $u_0 \in \mathbb{R}^p$  tel que :  $\forall r > 0, \exists u \in A, u \neq u_0, d(u, u_0) \leq r$   
On dit que ces points sont **adhérents** à  $A$ , intuitivement, on peut dire que ces points de  $A$  ne sont pas des points « isolés » de  $A$ .  
On ne s'intéressera à la limite de  $f$  qu'en de tels points.

### 27.2. Limite et continuité

- Les fonctions « composantes » comme, par exemple,  $(x, y, z) \rightarrow y$  sont continues.
- Les sommes, produit par un scalaire, produit, quotient (en un point où le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sont continues.
- Les composées de fonctions continues sont continues.

Ceci permet de montrer la plupart des continuités usuelles.

**Théorème :** Une fonction de plusieurs variables, à valeurs réelles, **continue sur un fermé-borné** est **bornée et atteint ses bornes**.

### 27.3. Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

**Définition :**

$f$  est de **classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$  admet  $p$  dérivées partielles continues sur  $\mathcal{U}$

Quand ces dérivées partielles sont aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , on dit que  $f$  est de **classe**  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$

**Notation :** La dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  variable se note :  $D_j f$  ou  $\partial_j f$ , ou le plus souvent  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

Prise au point (vecteur)  $a$ , elle se note donc :  $D_j f(a)$  ou  $\partial_j f(a)$ , ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

En dimension 2 ou 3, on remplace souvent  $x_1, x_2, x_3$  par  $x, y, z$ .

**Notation :** Quand  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , en physique ou sciences de l'ingénieur, on note souvent :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

**Théorème :** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de  $\mathcal{U}$  et on a :

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \|u\| \varepsilon(u)$$

où  $u = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  et  $\lim_{u \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(u) = 0$ .

**Théorème :** (Schwarz)

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathcal{U} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Théorème :** (Fonctions composées)

$$\left. \begin{array}{l} x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } x(I) \times y(I) \\ F(t) = f(x(t), y(t)) \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \text{ et : } F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Si  $x, y$  dépendent de 2 variables  $t$  et  $u$ , on a le même résultat en remplaçant toutes les dérivées  $x'(t)$  et  $y'(t)$  par les dérivées partielles de  $x$  et  $y$  par rapport, selon les cas à  $t$  et  $u$ .

Cela peut donner des écritures *mathématiquement incorrectes* du genre :  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x}$ .

On fera alors très attention à ne pas mélanger les jeux de variables !

## 27.4. Extremums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour chercher ses extremums :

- On cherche les points critiques, c'est à dire les points qui vérifient : 
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Les extrémums sont à chercher parmi ces points critiques.

- En chaque point critique  $(x_0, y_0)$ , on calcule : 
$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$$
  - Si  $s^2 - rt < 0$   $(x_0, y_0)$  est un extremum (minimum pour  $r > 0$ , maximum pour  $r < 0$ )
  - Si  $s^2 - rt > 0$   $(x_0, y_0)$  est un col
  - Si  $s^2 - rt = 0$  on ne peut pas conclure, il faut étudier « à la main » le signe de  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$

## 28. Equations et systèmes différentiels

Notons d'abord qu'on résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle**.

## 28.1. Généralités

### a/ Recollement de solutions

Pour recoller en  $c$  les solutions sur deux intervalles,  $f$  sur  $]a, c[$  et  $g$  sur  $]c, b[$  il faut chercher à évaluer :

- les limites (finies) de  $f$  et  $g$  en  $c$
- les limites (finies) de  $f'$  et  $g'$  en  $c$
- et éventuellement les limites (finies) de  $f''$  et  $g''$  en  $c$  pour une équation différentielle du second ordre.

### b/ Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle **linéaire**

- du **premier ordre** est de la forme :  $a(t)y' + b(t)y = g(t)$
- du **second ordre** est de la forme :  $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t)$

$g(t)$  est appelé le second membre.

Les équation homogènes associées sont respectivement :

- $a(t)y' + b(t)y = 0$
- $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$

Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est toujours la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, appelée aussi équation homogène associée, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

D'où l'importance de connaître une telle solution particulière.

On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a obtenu la solution générale de l'équation (ou du système) **avec** second membre.

Sur un intervalle convenable, la solution générale de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 1 pour une équation différentielle linéaire du premier ordre et 2 pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

## 28.2. Équation Différentielle Linéaire du premier ordre

- Sans second membre  $a(t)y' + b(t)y = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$  sur un intervalle  $I$  où  $a$  et  $b$  sont continues et où  $a$  ne s'annule pas.  $K$  étant un réel arbitraire.
- Avec second membre  $a(t)y' + b(t)y = c(t)$  sur un intervalle  $I$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont continues et où  $a$  ne s'annule pas.

Il ne nous manque qu'une solution particulière : toute solution particulière est bonne à prendre !

- Si l'équation différentielle est à coefficients constants et si le second membre est en  $P(t)e^{kt}$ , on peut appliquer la méthode décrite dans le paragraphe 28.3..
- On peut, faute de mieux, chercher une solution particulière par la variation de la constante :

$$z(t) = K(t)y(t) \quad \text{où} \quad y(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

On reste en calcul formel le plus longtemps possible : les termes en  $K(t)$  disparaissent, cela revient alors au calcul d'une primitive de  $K'(t)$ .

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux ! Elle peut donner des calculs longs et difficiles. On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

## 28.3. Équation Différentielle Linéaire du second ordre à coefficients constants

- Sans second membre  $ay'' + by' + cy = 0$  on résout l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$   
Si on a :
  - Deux racines distinctes, la solution est :  $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

- Une racine double :  $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$
- Deux racines complexes :  $r = \alpha \pm i\beta$  et dans le cas où on cherche les solutions sur  $\mathbb{R}$  :  
 $y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)e^{\alpha t} = (k \cos \beta(t - t_0))e^{\alpha t}$
- Avec second membre  $ay'' + by' + cy = P(t)e^{kt}$ , où  $P$  est un polynôme.  
 On cherche une solution particulière de la forme :
  - $Q(t)e^{kt}$  si  $k$  n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
  - $tQ(t)e^{kt}$  si  $k$  est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $t^2Q(t)e^{kt}$  si  $k$  est racine double de l'équation caractéristique,
 avec  $Q(t)$  un polynôme arbitraire de même degré que  $P$ .  
 Un second membre en  $P(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$  se traite comme la partie réelle de :  $P(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ .

## 28.4. Equation Différentielle Linéaire du second ordre

- Sans second membre  $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$  sur un intervalle  $I$  où  $a, b$  et  $c$  sont continues et où  $a$  ne s'annule pas, il faut se laisser guider par l'énoncé pour trouver une première solution. Si  $a, b, c$  sont des polynômes, on peut chercher une solution polynomiale en cherchant d'abord une condition nécessaire sur le degré.
- Avec ou sans second membre, en ayant une solution  $y(t)$  de l'équation sans second membre, on peut chercher les solutions de la forme  $z(t) = K(t)y(t)$  (Variation de la constante, à réserver au cas où on n'a pas d'autre procédé).  
 On obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $K'(t)$  avec ou sans second membre selon les cas.  
 En pratique, on mène le calcul de façon théorique le plus longtemps possible.
- On ne cherche une solution sous forme de série entière qu'à la demande de l'énoncé.

## 28.5. Équation aux dérivées partielles

Ce sont des équations différentielles qui concernent des fonctions de plusieurs variables. On écrit ici les théorèmes avec simplement trois variables notées  $u, v$  et  $w$ . On note toujours ici  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , et on cherche une fonction  $f$ , respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$ .

Quand une dérivée partielle, par exemple par rapport à  $u$ , est nulle, en intégrant, il apparaît naturellement une constante d'intégration.  
 Mais, ici, cette *constante* est constante quand les autres variables,  $v$  et  $w$ , sont constantes...  
 Cette *constante* est donc alors une *fonction arbitraire* de ces *autres variables* !

### a/ Une dérivée partielle première nulle

Les solutions de :  $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = F(v, w)$   
 avec  $F$  une fonction quelconque de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  – elle est alors considérée comme de 3 variables.

### b/ Une dérivée partielle seconde nulle

Les solutions de :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = uF(v, w) + G(v, w)$   
 avec  $F$  et  $G$  deux fonctions quelconques de classe  $\mathcal{C}^2$  ;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$  sont :  $f(u, v, w) = F(v, w) + G(u, w)$   
 avec  $F$  et  $G$  deux fonctions quelconques de classe  $\mathcal{C}^2$ .



## 28.6. Système Différentiel Linéaire du premier ordre

On ne traite que les systèmes à coefficients constants  $X'(t) = AX(t)$  où  $A$  est une matrice carrée

d'ordre  $n$  et  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

- Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, on note  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres et  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  une base de vecteurs propres associés. Alors

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

- Dans le cas où  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$  sur lequel on cherche les solutions, pour chaque couple de valeurs propres non réelles, on peut directement remplacer
  - $\alpha e^{\lambda t} U + \bar{\alpha} e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}$  par
  - $\beta \operatorname{Re}(e^{\lambda t} U) + \gamma \operatorname{Im}(e^{\lambda t} U)$  avec  $\beta$  et  $\gamma$  réels
- Dans le cas où  $A$  est triangularisable, non diagonalisable, on considère  $P$  de passage telle que  $T = P^{-1}AP$  avec  $T$  triangulaire supérieure.
  - On pose  $X(t) = PY(t)$  on obtient  $X'(t) = PY'(t)$  car  $P$  est constant.
  - On reporte dans le système différentiel et on obtient  $Y'(t) = TY(t)$ .
  - On résout ce système en résolvant la dernière équation et en remontant équation par équation.
  - Enfin,  $X(t) = PY(t)$  fournit le résultat.

# Géométrie

## 29. Systèmes de coordonnées

### 29.1. Coordonnées cartésiennes

Nous n'allons bien entendu pas décrire les coordonnées cartésiennes...

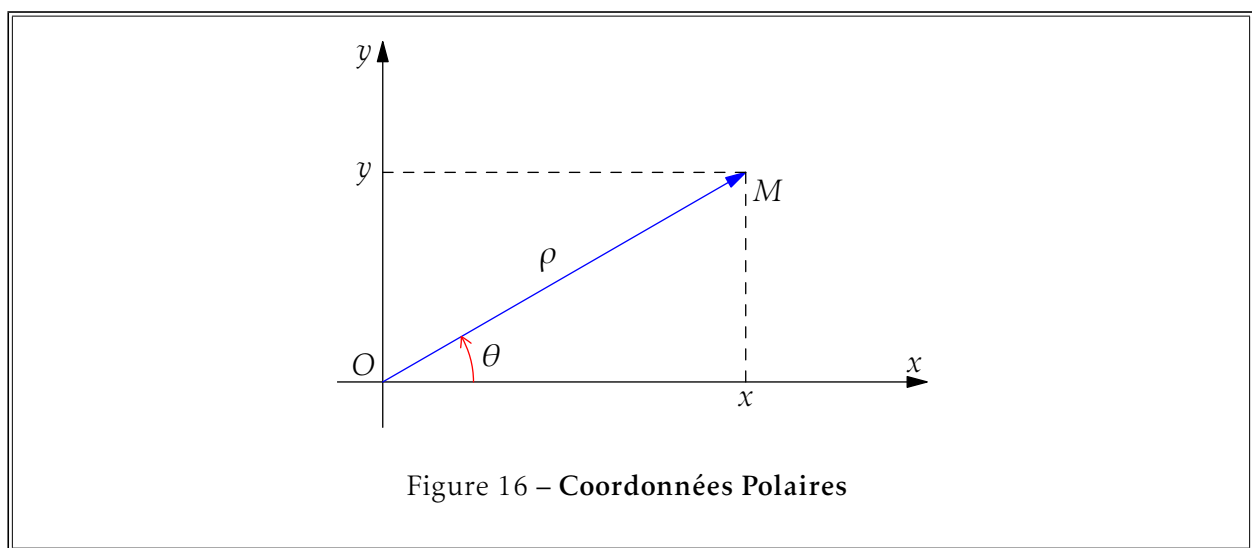
### 29.2. Coordonnées polaires

Elles sont décrites par les formules :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \text{ décrivant un intervalle de longueur } 2\pi.$$

Les formules réciproques sont :  $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \end{cases}$ , avec  $k = 0$  si  $x > 0$  et  $k = 1$  si  $x < 0$ .

Ceci est illustré sur la figure 16, ci-dessous.



## 30. Vecteurs du plan et de l'espace

### 30.1. Produit scalaire

**Définition :** Le **produit scalaire** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

L'étude générale de la notion de produit scalaire est page 25.

Dans un repère orthonormal :

- le produit scalaire dans le plan est défini par :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x x' + y y'$
- le produit scalaire dans l'espace de  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x x' + y y' + z z'$ .

## 30.2. Produit vectoriel

**Définition :** Le **produit vectoriel** des vecteurs de l'espace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ .

On a :  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ,

et : le vecteur  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ , de façon que le trièdre  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit direct.

Dans un repère orthonormal direct :

le produit vectoriel est défini par : 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel n'est défini qu'en dimension 3.

## 30.3. Produit mixte

**Définition :** Le **produit mixte** des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est :  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

**Théorème :** Le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des vecteurs, on dit trilineaire. Échanger deux vecteurs revient à multiplier le produit mixte par  $-1$ .

Le produit mixte est le déterminant en dimension 3 !

## 30.4. Déterminants

**Définition :** Le **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

**Définition :** Le **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est :  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

L'étude générale des déterminants est page 23.

# 31. Droites et Plans affines

On travaille toujours ici dans un repère fixé, même si on ne le précise pas...

De plus, dès qu'il est question d'orthogonalité, de distance ou d'angle, ce repère est supposé **orthonormal**, sans, encore une fois, que cela soit précisé...

## 31.1. Droites du plan

a/ En coordonnées cartésiennes

La droite d'équation :  $ax + by + c = 0$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,

est de vecteur directeur :  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et de vecteur normal :  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

La droite passant par :  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$   $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,

est d'équation :  $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$

b/ En représentation paramétrique

La droite passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

est de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes : éliminer  $\lambda$  entre les deux équations.
- De cartésiennes en paramétriques :  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\lambda \end{cases}$  par exemple pour  $b \neq 0$ .

### 31.2. Plans de l'espace affine

a/ En coordonnées cartésiennes

Le plan d'équation :  $ax + by + cz + d = 0$ , est de vecteur normal :  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Le plan passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

est d'équation :  $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ .

b/ En représentation paramétrique

Le plan passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de plan directeur engendré par  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

est de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$

c/ Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes :
  - éliminer  $\lambda$  et  $\mu$  entre les trois équations
  - ou bien directement l'équation est :  $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$
- De cartésiennes en paramétriques :
  - chercher un point  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  du plan,
  - et chercher un vecteur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  non nul, normal à  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  par exemple  $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$  si  $(a, b) \neq (0, 0)$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs fournit un second vecteur :  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$  qui convient.

### 31.3. Droites de l'espace affine

- Par intersection de 2 plans d'équations :  $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

Un vecteur directeur de la droite intersection de ces 2 plans est :  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

- En paramétriques, la droite passant par  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  ( $\alpha, \beta, \gamma \neq (0,0,0)$ )  
est de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$

### 31.4. Angles

On travaille toujours dans un repère orthonormal direct.

- l'angle de 2 vecteurs ou de 2 droites ou de 2 plans vérifie :  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ ,  
applicable avec les vecteurs directeurs des droites ou les vecteurs normaux des plans selon les cas.
- pour l'angle entre une droite et un plan, il faut appliquer la formule précédente avec un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.  
Éventuellement le résultat est  $\frac{\pi}{2} - \theta$  selon la question exacte posée.

### 31.5. Distances

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

- La distance de  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  à la droite d'équation  $ax + by + c = 0$ , est :  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- La distance de  $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  au plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , est :  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- La distance d'un point M à une droite D :  $(A, \vec{u})$  est donnée par :  $\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

## 32. Projecteurs et Symétries

Dans cette partie, on utilise la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires qui se trouve pages 15 et 17.

### 32.1. Projecteur

**Définition :** Un projecteur  $p$  d'un espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $p \circ p = p$ .

**Théorème :** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ , alors :  $E = \ker p \oplus \text{Im } p$ .

Réciproquement, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , alors, si  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , on peut définir  $p$  par :  $p(x) = x_F$ .  
 $p$  est alors un projecteur de  $E$ . C'est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Définition :** Une projection  $p$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est une application affine de  $\mathcal{E}$  vérifiant :  $p \circ p = p$ .

L'endomorphisme associé à une projection affine est un projecteur vectoriel.

### 32.2. Symétrie

**Définition :** Une symétrie  $s$  d'un espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

**Théorème :** Soit  $s$  une symétrie de  $E$ , alors  $p$  défini par :  $2p = s + \text{Id}_E$  est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à  $E_1$ , l'ensemble des vecteurs invariants, parallèlement à  $E_{-1}$ , le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$ .

Réciproquement, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , alors, si  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , on peut définir  $s$  par :  $s(x) = x_F - x_G$ .  
 $s$  est alors une symétrie de  $E$ . C'est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Définition :** Une symétrie  $s$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$  est une application affine de  $\mathcal{E}$  vérifiant :  $s \circ s = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ .

L'endomorphisme associé à une symétrie affine est une symétrie vectorielle.

### 32.3. Projection d'un point sur une droite

Pour projeter le point  $M_0$  sur la droite  $\Delta$  définie par le point  $A$  et le vecteur  $\vec{u}$ , on résout le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{M_0P} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

### 32.4. Projection d'un point sur un plan

Pour projeter le point  $M_0$  sur le plan  $\Pi$  définie par le point  $A$  et le vecteur normal  $\vec{u}$ , on résout le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0P} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

## 33. Isométries

### 33.1. Isométries vectorielles

**Définition :** Une isométrie vectorielle  $\varphi$  de  $E$  est une application qui conserve la norme, c'est à dire :

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

**Théorème :** Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Les matrices orthogonales sont page 29.

### 33.2. Symétries orthogonales

**Théorème :** Une **isométrie vectorielle** est une symétrie orthogonale

$\Leftrightarrow$  Sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants. On retrouve ces cas dans les paragraphes suivants.

### 33.3. Recherche d'une symétrie orthogonale d'éléments géométriques donnés

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle  $\Delta$  ou à un plan vectoriel  $\Pi$ .

On écrit que

- $\frac{\vec{u} + \vec{u}'}{2} \in \Delta$  ou  $\Pi$ , et,
- $\vec{u}' - \vec{u}$  appartient à l'orthogonal de  $\Delta$  ou  $\Pi$ .

### 33.4. Identification des Isométries Vectorielles

#### a/ symétries orthogonales

Si la matrice d'une isométrie vectorielle dans une base orthonormale est symétrique, l'isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.

C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

#### b/ Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1.

C'est une rotation d'angle  $\theta$ . La matrice est : 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si  $\theta = 0$ , c'est l'identité, et si  $\theta = \pi$ , c'est « moins l'identité », la symétrie centrale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1.

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D_{\frac{\theta}{2}}$  tournée de  $\frac{\theta}{2}$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

La matrice est : 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

#### c/ Isométries vectorielles de l'espace

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers.

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 :  $\vec{e}_1$  et d'angle  $\theta$ .

On trouve  $\theta$ ,

- en cherchant  $\cos \theta$  par la trace qui vaut  $1 + 2 \cos \theta$
- en cherchant le signe de  $\sin \theta$  qui est celui de  $\det(\vec{e}_1, \vec{u}, f(\vec{u}))$ ,  
avec  $\vec{u}$ , un vecteur quelconque, non colinéaire à  $\vec{e}_1$ .

Si  $\theta = 0$ , c'est l'identité, et si  $\theta = \pi$ , c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe. Cette isométrie a, en principe, déjà été identifiée comme symétrie orthogonale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers.

On cherche la trace :

- La trace vaut 1, ce qui revient à ce que 1 soit valeur propre.  
C'est une symétrie orthogonale par rapport au plan propre pour la valeur propre 1.
- La trace ne vaut pas 1, 1 n'est pas valeur propre, elle vaut  $-1 + 2 \cos \theta$ .  
C'est la composée
  - ◊ d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe dirigé par un vecteur propre associé à la valeur propre -1 et
  - ◊ d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Le signe de  $\sin \theta$  se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

## 34. Applications affines du plan

L'image du point M se note toujours M' ici.

Si on utilise les affixes complexes, ce sera  $z$  et  $z'$ .

### 34.1. Translation

**Définition :** Une **translation** de vecteur  $\vec{u}$  est définie par :  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$

On peut l'appliquer en dimension 3 !

### 34.2. Rotation

Le plus simple ici au départ est de travailler avec les affixes complexes.

**Définition :** La rotation de centre  $\Omega$ , d'affixe  $\omega$ , et d'angle  $\theta$  est définie par :  $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ .

### 34.3. Homothétie

Le plus simple ici au départ est encore de travailler avec les affixes complexes.

**Définition :** L'homothétie de centre  $\Omega$ , d'affixe  $\omega$ , et de rapport  $\lambda$  est définie par :  $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ .

### 34.4. Réflexion

**Définition :** Si  $p(M)$  est la projection de  $M$  sur l'axe  $\Delta$ , alors le réfléchi de  $M$  par rapport à cet axe est défini par :  $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$

## 35. Courbes Planes

### 35.1. Étude et Tracé de Courbes d'équation $y = f(x)$

#### a/ Ensemble d'étude

On recherche l'ensemble de définition, les éventuelles parité ou imparité, la périodicité, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

#### b/ Étude des variations

L'étude des variations se fait le plus souvent en étudiant le signe de la dérivée, obtenu en utilisant au besoin une fonction auxiliaire.

Pour le choix d'une fonction auxiliaire, il faut dans celle ci « isoler » les éventuels

- logarithmes,
- et arctangentes

qui se transforment en fraction rationnelle quand on dérive.

#### c/ Limites aux bornes

On cherche les limites à toutes les bornes de l'ensemble d'étude, avec au besoin,

- l'étude du prolongement par continuité en cas de limite finie,
- et l'étude locale de la dérivabilité en ces points, pour placer la tangente.

### 35.2. Tangente

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la tangente à la courbe représentative au point  $(a, f(a))$  est d'équation :  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

Ce qui n'est que le début du développement limité de  $f$  en  $a$  !

On obtient la position de la courbe par rapport à la tangente en poursuivant le développement limité précédent.



#### a/ Points d'inflexions

L'étude des inflexions se fait au moyen de la dérivée seconde :  $f''(x_0) = 0$  caractérisent les points où il peut y avoir une inflexion géométrique.

Cette étude n'est faite qu'à la demande de l'énoncé.

Géométriquement, un point d'inflexion se caractérise par le fait que la courbe traverse sa tangente.

#### b/ Branches infinies

On ne parle pas des asymptotes

- verticales d'équation  $x = a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  ;
- horizontales d'équation  $y = b$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ .

Il nous reste à étudier le cas où :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Dans ce cas, on fait un développement limité en  $\pm\infty$  par rapport à la variable  $\frac{1}{x}$  de  $\frac{f(x)}{x}$ .

On obtient :  $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  ; alors :  $f(x) = ax + b + o(1)$ .

Et donc la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe.

Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il suffit de prolonger le développement limité...

#### c/ Centre de symétrie

- Quand  $f$  est impaire, l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$ .

### 35.3. Courbe en coordonnées implicites

Il s'agit de courbes d'équation  $f(x, y) = 0$ .

La tangente en  $M_0$ , dont on vérifiera bien qu'il s'agit d'un point de la courbe, passe par  $M_0$  et est normale au gradient de  $f$  en  $M_0$ .

Elle est donc d'équation :  $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

### 35.4. Courbes planes en paramétriques

On a : 
$$\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$$

#### a/ Interprétation cinématique

Si on considère que  $t$  est le « temps », on peut considérer qu'on étudie le déplacement d'un « mobile » dans le plan (ou l'espace).

On utilise alors le vocabulaire suivant :

- la courbe est la **trajectoire** du mobile :
- le vecteur dérivé  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  est le **vecteur vitesse** du mobile, sa norme est sa **vitesse**.
- le vecteur dérivé seconde  $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$  est le **vecteur accélération** du mobile, sa norme est son **accélération**.

#### b/ Ensemble d'étude

On recherche les ensembles de définition, les éventuelles parité ou imparité, les périodicités, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour

reconstituer la courbe entière.

#### c/ Variations

On étudie les variations de  $f = x$  et  $g = y$ .

Il faut construire le tableau de variation, qui contient les lignes  $x'(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $y'(t)$  et  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  qui représente la pente de la tangente.

Remarquons que si  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  est une forme indéterminée en un point, on peut la remplacer par sa limite qui représente encore la pente de la tangente.

#### d/ Tangente

La tangente à la courbe représentative en  $(x(a), y(a))$  est donc d'équation :  $\begin{vmatrix} X - x(a) & x'(a) \\ Y - y(a) & y'(a) \end{vmatrix} = 0$

#### e/ Points stationnaires

Les points stationnaires vérifient :  $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$

On appelle alors :

- $p$ , avec  $p \geq 1$ , le premier rang où  $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$  est non nul, ce vecteur est alors tangent à la courbe.
- $q$ , avec  $q > p$ , le premier rang où  $\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$  est non colinéaire à  $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$

La courbe est toujours tangente à  $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$ ,

- la parité de  $p$  donne le signe de la coordonnée lorsque  $t < t_0$ ,
- la parité de  $q$  donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée.

La courbe traverse la tangente si et seulement si  $q$  est impair.

Remarquons que si la tangente est verticale ou horizontale, le calcul de  $q$  est inutile, les variations permettent alors de déterminer directement la nature du point.

#### f/ Branches infinies

Les asymptotes verticales et horizontales s'identifient facilement :

On a ici  $t \rightarrow t_0$  ou  $t \rightarrow \pm\infty$

- Quand  $x(t) \rightarrow a$  et  $y(t) \rightarrow \pm\infty$ , la droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale à la courbe ;
- Quand  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  et  $y(t) \rightarrow b$ , la droite d'équation  $y = b$  est asymptote horizontale à la courbe.

L'étude des branches infinies ne pose donc de problème qu'au cas où  $x(t)$  et  $y(t)$  tendent vers l'infini quand  $t \rightarrow t_0$  ou  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Il n'y a pas de méthode systématique au programme !

Le but est de chercher  $a$  et  $b$  tels que :  $y(t) = ax(t) + b + o(1)$ .

Alors la droite d'équation  $y = ax + b$  sera asymptote à la courbe.

On obtient  $a$  en cherchant la limite de  $\frac{y(t)}{x(t)}$  quand  $t \rightarrow t_0$  ou  $t \rightarrow \pm\infty$ , selon les cas.

Pour trouver  $b$ , l'énoncé doit vous guider...

## 36. Surfaces : Généralités

### 36.1. Surfaces, plan tangent

Une surface est définie par une équation cartésienne :  $F(x, y, z) = 0$

### a/ Plan tangent

Pour le plan tangent à (S) d'équation :  $F(x, y, z) = 0$  en  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ , on se place dans le cas où F est de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins.

Le vecteur  $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$  est normal à la surface (repère orthonormal), si ce vecteur est non nul.

Le plan tangent est donc d'équation :  $(X - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ .

Le plan tangent à une surface est visualisé figure 17, ci-dessous.

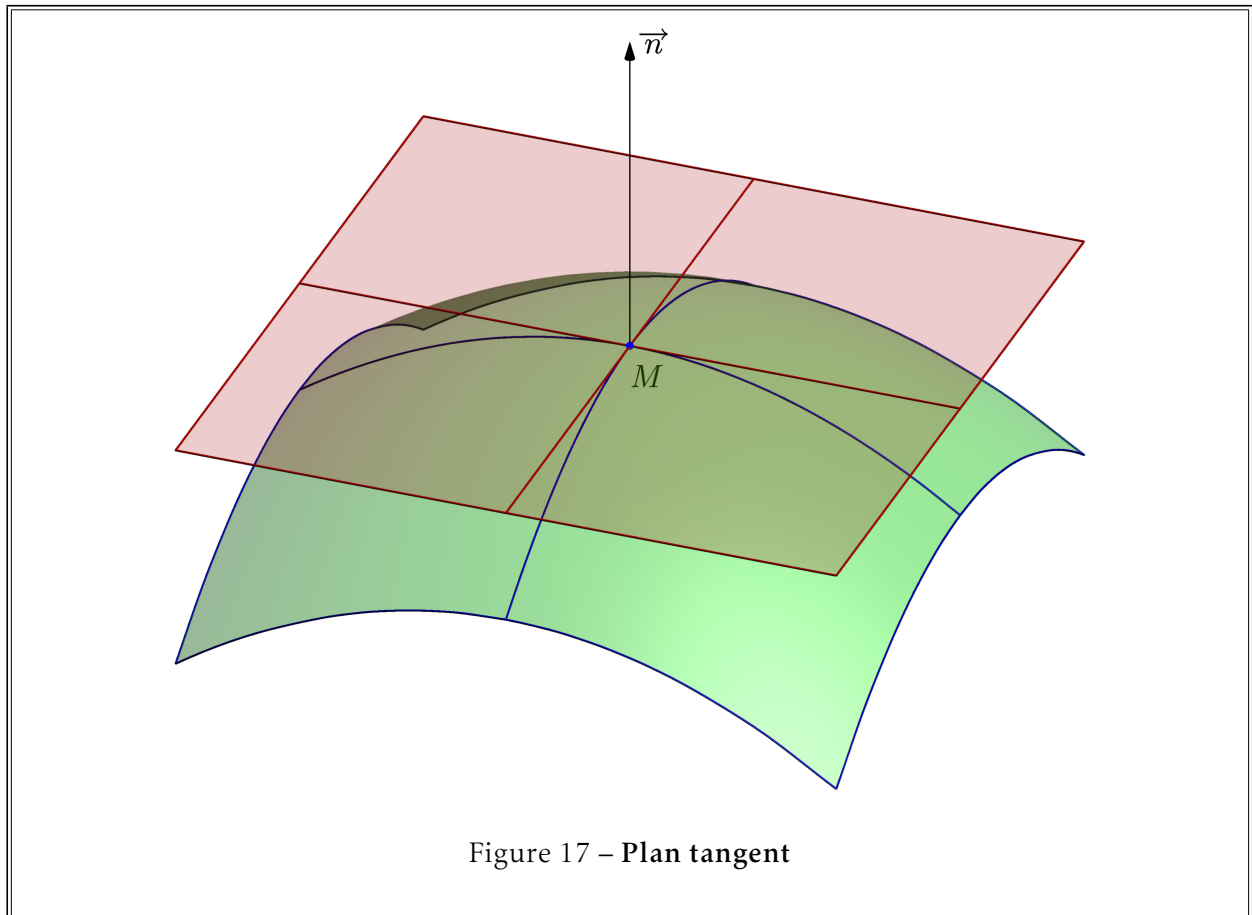


Figure 17 – Plan tangent

### b/ Position par rapport au plan tangent

On considère ici les surfaces d'équation  $z = f(x, y)$ , le plan tangent en  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , est d'équation :

- $z = z_0$  s'il est horizontal,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$  dans le cas contraire.

**Remarque :** On obtient bien sûr l'équation de ce plan tangent en utilisant le gradient de  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ , gradient qui n'est jamais nul ici !

La position de la surface par rapport au plan tangent se trouve en étudiant, au voisinage de  $M_0$ , le signe de :

- $f(x, y) - z_0$ , ou bien,
- $f(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)$ ,

selon le cas.

On a deux cas :

- cette quantité change de signe : la surface traverse le plan tangent, c'est un point « col »,
- cette quantité ne change pas de signe : la surface ne traverse pas le plan tangent, c'est un point « ballon ».

La figure 17, page précédente, montre un point en ballon.

La figure 18, ci-dessous, montre un point col.

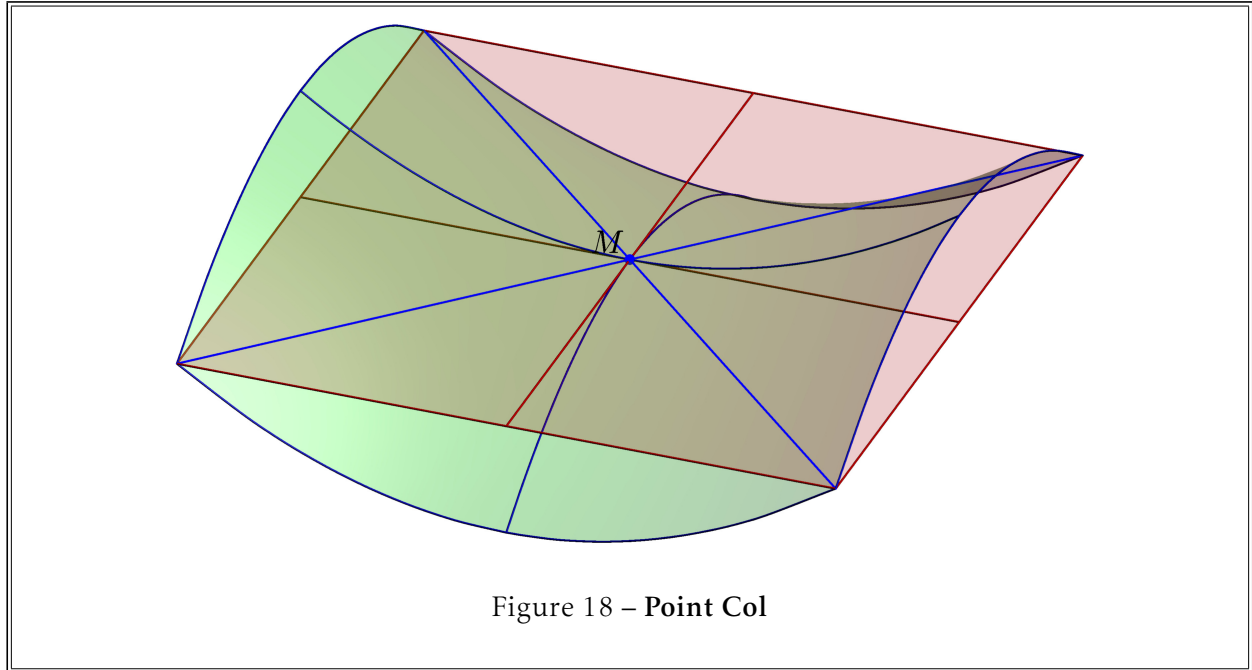


Figure 18 – Point Col

### 36.2. Tangente à une courbe de l'espace

Une courbe de l'espace peut être définie par une intersection de surfaces : 
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ou sous forme de représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = h(u) \end{cases}$$

- Dans le cas d'une intersection de surfaces, l'intersection des plans tangents, si elle est une droite, est la tangente à la courbe au point considéré.

- Dans le cas d'une représentation paramétrique, le vecteur  $\begin{pmatrix} f'(u_0) \\ g'(u_0) \\ h'(u_0) \end{pmatrix}$ , s'il est non nul, dirige la

tangente, qui est donc de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda f'(u_0) \\ Y = y_0 + \lambda g'(u_0) \\ Z = z_0 + \lambda h'(u_0) \end{cases}$$

## 37. Cercles et Sphères

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

## 37.1. Cercles dans le plan et sphères

### a/ Cercles dans le plan

- Le cercle de centre  $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$  est d'équation :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Le cercle de diamètre  $AB$  est d'équation :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

### b/ Sphères dans l'espace

- La sphère de centre  $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$  est d'équation :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- La sphère de diamètre  $AB$  est d'équation :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

### c/ Intersection d'une sphère et d'un plan

**Théorème :** L'intersection d'une sphère et d'un plan est :

- vide, quand le rayon de la sphère  $r$  est plus petit que la distance  $d$  de son centre au plan,
- un point, quand ils sont égaux,
- un cercle quand le rayon de la sphère  $r$  est plus grand que la distance  $d$  de son centre au plan

Dans ce dernier cas, ce cercle a pour centre la projection du centre de la sphère sur le plan.

Il a pour rayon  $r'$ , avec  $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ .

## 37.2. Cocyclicité

**Théorème :** (Angle au centre)

$$A, B \text{ et } C \text{ distincts appartiennent à un même cercle de centre } \Omega \Leftrightarrow \left| \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \right| = 2 \left| \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \right|$$

**Théorème :**  $A, B, C$  et  $D$  distincts sont cocycliques ou alignés  $\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} =_{[\pi]} \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})}$

**Théorème :** Si  $a, b, c, d$  sont les affixes de  $A, B, C, D$  distincts dans le plan complexe,

$$A, B, C \text{ et } D \text{ appartiennent à un même cercle ou sont alignés} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) =_{[\pi]} \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right)$$

# Probabilités

## 38. Univers et événements

### 38.1. Ensembles fini, dénombrable

**Définition :** Un ensemble  $\Omega$  est dit fini si et seulement si il contient  $n$  éléments avec  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple :** Les résultats possible d'un jet de dés forment un ensemble fini à 6 éléments.

**Définition :** Un ensemble  $\Omega$  est dit dénombrable si et seulement si  $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ , bijective.

**Remarque :** Cela revient à :  $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exemple :**  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$ , l'ensemble des entiers naturels pairs, celui des impairs, sont dénombrables !

### 38.2. Univers et événements

La théorie des probabilités permet l'étude de phénomènes ayant un aspect hasardeux, ou bien, dit d'une façon plus savante, aléatoire.

On appelle cela une expérience aléatoire.

Parmi les cas les plus simples et usuels :

Phénomène	Résultats possibles
lancer d'une pièce	{pile, face}
lancer d'un dé à jouer	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
lancer de deux dés	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
lancer une pièce jusqu'à obtenir « pile »	$\mathbb{N}^*$
lancer de deux dés jusqu'à obtenir un double six	$\mathbb{N}^*$

Dans notre programme, certains univers sont finis, d'autres dénombrables.

**Définition :** Les résultats possibles sont appelé les **éventualités**.

L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers**, noté souvent  $\Omega$ .

Un ensemble d'éventualités est un **événement**. *Cet ensemble peut être vide !*

Un événement qui ne contient qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.

Ainsi :  $A$  est un événement  $\Leftrightarrow A \subset \Omega \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

- L'ensemble des événements est l'ensemble des parties de  $\Omega$ , l'univers, noté  $\mathcal{P}(\Omega)$  ;
- L'événement vide est dit **impossible** ;
- L'événement  $\Omega$  est dit **certain** ;
- Le complémentaire d'un événement  $A$  est l'événement **contraire**  $\bar{A}$  ;
- Deux événements disjoints sont dit **incompatibles**.

**Exemple :** Si on lance un dé :

- faire 6 est une éventualité, assimilée à l'événement élémentaire  $\{6\}$  ;
- faire un résultat pair est un événement, noté aussi  $\{2, 4, 6\}$  ;
- $\{2, 4, 6\}$  et faire un as sont deux événements incompatibles.
- $\{2, 4, 6\}$  et  $\{1, 3, 5\}$  sont deux événements contraires, et donc aussi incompatibles.

Les probabilités se font avec des *ensembles*. Cependant, dans la théorie des probabilités, certaines expressions *enssemblistes* sont remplacées par des synonymes *probabilistes*.  
On travaille ici dans  $\Omega$ .

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	Ensemble <i>vide</i>	Événement <i>impossible</i>
$\Omega$		Événement <i>certain</i>
$\omega \in \Omega$	Élément	Événement <i>élémentaire</i> , <i>Éventualité</i>
$A \subset \Omega$	Sous-ensemble	Événement
$A \cup B$	Union de A et B	A ou B
$A \cap B$	Intersection de A et B	A et B
$\complement_{\Omega} A$	Complémentaire de A dans $\Omega$	Événement <i>contraire</i> , $\overline{A}$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont <i>disjoints</i>	A et B sont <i>incompatibles</i>

### 38.3. Système complet d'événements : cas fini

**Définition :**  $(A_1, A_2, A_3)$  forme un **système complet d'événements** si et seulement si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset \end{cases}$$

**Définition :**  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  forme un **système complet d'événements** si et seulement si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, \dots, A_1 \cap A_n = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset, \dots, A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \end{cases}$$

### 38.4. Système complet d'événements : cas infini

L'univers étant infini, on a une infinité d'événements élémentaires, donc une infinité d'événements.

**Définition :**

Si on a  $(A_n)$ , une suite infinie d'événements, on définit :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  par :  $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$

**Définition :**

Si on a  $(A_n)$ , une suite infinie d'événements, on définit :  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  par :  $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$

**Définition :** On dit que  $(A_n)$ , une suite infinie d'événements est un **système complet d'événements** si et seulement si :  $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ , et,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

## 39. Probabilité sur un univers $\Omega$

### 39.1. Probabilité sur un univers fini

**Définition :** Une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  est une application  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$  ;
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  ;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .

La probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est la somme des probabilités de ces événements.

**Définition :** La **probabilité uniforme**, appelée encore **équiprobabilité** est la probabilité définie sur un univers à  $n$  éléments par :  $\forall \omega \in \Omega, P(\omega) = \frac{1}{n}$ .

L'hypothèse d'équiprobabilité est classique dans les jeux de pile ou face, les jeux de dés, les tirages d'une carte d'un paquet, d'une boule d'une urne...

### 39.2. Probabilité sur un univers dénombrable

**Définition :** On appelle **probabilité sur**  $\Omega$ , une application :  $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant, pour toute suite  $(A_n)$  d'événements 2 à 2 incompatibles :  $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ .

De plus, on a :  $P(\Omega) = 1$ .

**Exemple :** On tire avec une pièce non truquée jusqu'à obtenir *pile*.

L'univers est  $\mathbb{N}^*$ , et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a évidemment  $P(n) = \frac{1}{2^n}$ .

### 39.3. Espace probabilisé

**Définition :** Un **espace probabilisé** est un couple « univers – probabilité », ou encore  $(\Omega, P)$ .

**Théorème :** L'événement impossible étant incompatibles avec tous les autres, sa probabilité est nulle :  $P(\emptyset) = 0$ .

$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .

### 39.4. Indépendance d'événements

**Définition :** Deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si et seulement si :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

On ne confondra pas événements indépendants et événements incompatibles !

Avec un dé à jouer, les événements *nombre pair* et *nombre impair* sont incompatibles mais pas indépendants !

**Définition :** Les événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  sont **mutuellement indépendants**

$\Leftrightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ .

**Théorème :** Deux événements d'une famille d'événements mutuellement indépendants sont indépendants.

Dés événements 2 à 2 indépendants ne constituent pas une famille d'événements mutuellement indépendants !

Prenons un double lancer d'une pièce non truquée.

Posons  $A = \{pp, pf\}$ ,  $B = \{pp, fp\}$  et  $C = \{fp, pf\}$ .

Chacun de ces événements est de probabilité  $1/2$ .

On a  $A \cap B = \{pp\}$ ,  $A \cap C = \{pf\}$  et  $B \cap C = \{fp\}$ , qui sont tous de probabilité  $1/4$ , c'est à dire qu'on a l'indépendance 2 à 2 des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Tandis que  $A \cap B \cap C = \emptyset$ , donc de probabilité nulle...

### 39.5. Probabilité conditionnelle

**Définition :** Si  $P(B) > 0$ , on appelle **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$ ,

le réel :  $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

**Théorème :**  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P_B(A) = P(A|B) = P(A)$ .



### 39.6. Formules des probabilités composées et des probabilités totales : cas fini

On a d'abord la formule des probabilités composées, qu'on écrit arbitrairement pour 3 événements.

**Théorème :** Si on a des événements tels que  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) > 0$ , alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Elle se généralise pour  $n$  événements

**Théorème :** Si on a  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une famille d'événements de conjonction non impossible, c'est à dire telle que :  $P\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k\right) \neq 0$ , alors :

$$P\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Et on a aussi la formule des probabilités totales, toujours écrites pour 3, puis pour  $n$ , événements.

**Théorème :**

Si on a  $(A_1, A_2, A_3)$  un système complet d'événements, alors, pour tout événement  $B$ , on a :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

**Théorème :**

Si on a  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements, alors, pour tout événement  $B$ , on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

La formule des probabilités totales s'utilise souvent avec un système complet composé de 2 événements  $A$  et son contraire  $\bar{A}$ .

Cela donne, pour tout événement  $B$  :  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ .

### 39.7. Formules des probabilités composées et des probabilités totales : cas infini

On a la formule des probabilités composées, qu'on avait écrite arbitrairement pour 3 événements.

Elle se généralise pour une suite infinie d'événements :

**Théorème :** Si on a  $(A_n)$  une suite d'événements de conjonction non impossible, c'est à dire telle que :

$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq 0$ , alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P(A_0) \prod_{n=1}^{+\infty} P\left(A_n \left| \bigcap_{1 \leq k \leq n-1} A_k\right.\right)$$

On a aussi la formule des probabilités totales :

**Définition :** Si on a  $(A_n)$  un système complet d'événements de probabilités non nulles,

alors, la série  $\sum P(B \cap A_n)$  converge et :  $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n) P(A_n)$

### 39.8. Formule de BAYES

Les formules précédentes nous donnent facilement la formule de BAYES :

**Théorème :** Si  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$ , alors :  $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

**Démonstration :** Il suffit d'écrire :  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$ . ■

Cette formule se généralise avec un système complet d'événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , c'est toujours la formule de BAYES :

**Théorème :** Soit un système complet d'événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , alors :  $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$ .

**Démonstration :** Dans la formule précédente, il suffit, d'une part de remplacer A par  $A_j$ , et d'autre part, d'écrire :  
 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ . ■

Cette dernière formule s'utilise souvent aussi avec un système complet composé de 2 événements A et son contraire  $\bar{A}$ .

On obtient :  $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$ .

## 40. Variables aléatoires sur un univers $\Omega$

### 40.1. Variable aléatoire

**Définition :** Une **variable aléatoire** est une application :  $\Omega \rightarrow E$ .

**Définition :** La **loi** de la variable aléatoire X est, pour tous les  $x \in X(\Omega)$ , la donnée de  $P(X = x)$

**Théorème :** La loi d'une variable aléatoire X, sur espace probabilisé  $(\Omega, P)$ , permet de définir une probabilité sur  $X(\Omega)$ , en posant :  $P_X(x) = P(X = x)$ .

### 40.2. Variable aléatoire réelle

*C'est le cas le plus courant pour nous !*

**Définition :** Une **variable aléatoire réelle** est une application :  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition :** La **loi** de la variable aléatoire X est, pour tous les  $x \in X(\Omega)$ , la donnée de  $P(X = x)$ .  
 On la note  $P_X$ , ainsi :  $P_X(x) = P(X = x)$ .

**Exemple :** Dans l'exemple du tirage d'une pièce jusqu'à obtenir *pile*, on définit la variable aléatoire X par  $X(n) = n$ .

La loi de cette variable aléatoire est alors bien sûr :  $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition :** La **fonction de répartition** de la variable aléatoire *réelle* X sur l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ , notée  $F_X$ , est une application :  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par :  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

Cette fonction de répartition est bien entendu croissante.

La connaissance de la fonction de répartition permet de retrouver la loi de la variable aléatoire X.  
 Il y a deux cas :

- Cas simple : dans  $X(\Omega)$ , on a un plus grand  $y$  strictement plus petit que  $x$ .  
 Alors  $(X \leq x) = (X = x) \cup (X \leq y)$ , ces deux derniers événements étant incompatibles.  
 Ce qui donne  $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X \leq y) = F_X(x) - F_X(y)$ .  
 C'est le cas dans notre exemple !
- Cas contraire, beaucoup plus complexe : il faut remplacer  $F_X(y)$  par la borne supérieure des  $F_X(y)$  avec  $y < x$ .

**Définition :**  $f$  étant une application définie, entre autres sur  $X(\Omega)$  et à valeurs réelles, on définit la variable aléatoire  $Y = f(X)$  par :  $P(Y = y) = P(f(X) = y)$ .

### 40.3. Espérance d'une variable aléatoire : cas fini

**Définition :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .  
Alors l'espérance de  $X$  est donnée par :  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$ .

L'espérance est la moyenne des valeurs de  $X$  pondérée par leur probabilité.

On a maintenant le petit théorème de transfert :

**Théorème :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .  
 $\Omega$  étant fini, il en est de même pour  $X(\Omega)$ .  
Alors l'espérance de  $X$  vaut :  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$ .

Puis le théorème de transfert :

**Théorème :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .  
 $\Omega$  étant fini, il en est de même pour  $X(\Omega)$ .  
On considère aussi l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Alors l'espérance de  $\varphi(X)$  vaut :  $E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$ .

**Théorème :** L'espérance est une application linéaire ; en particulier,  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .

**Définition :** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  est **centrée** si et seulement si  $E(X) = 0$ .

### 40.4. Espérance d'une variable aléatoire : cas infini

**Définition :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé dénombrable, et prenant les valeurs  $(x_n)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .  
On dit que  $X$  est d'espérance finie si et seulement si la série  $\sum x_n P(X = x_n)$  converge absolument.  
Dans ce cas, l'espérance de  $X$  vaut :  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ .

L'espérance est la moyenne des valeurs de  $X$  pondérée par leur probabilité.

**Théorème :** Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles d'espérance finie et  $\lambda, \mu$ , deux réels, alors :  
 $\lambda X + \mu Y$  est d'espérance finie et, de plus,  $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ .  
Ce qui signifie que l'espérance est linéaire !

L'espérance de la fonction constante 1 étant égale à 1, on a aussi :  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .

On a maintenant le théorème de transfert :

**Théorème :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé dénombrable  $(\Omega, P)$ .  
On considère aussi l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Alors, si  $\varphi(X)$  est d'espérance finie, la série  $\sum \varphi(x_n) P(X = x_n)$  converge absolument.  
Son espérance vaut alors :  $E(\varphi(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x_n) P(X = x_n)$ .

### 40.5. Variance et écart-type cas fini

**Définition :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .  
Alors, la **variance** de  $X$  est :  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ .  
Et l'**écart-type** de  $X$  est :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

La variance est une moyenne des écarts à la moyenne de la variable aléatoire : elle traduit la *dispersion* de ses valeurs.

On obtient facilement, par linéarité, le théorème de KÆNING-HUYGENS :

**Théorème :**  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

**Théorème :** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle,  $a$  et  $b$  deux réels, alors :  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .

Enfin, on obtient aussi l'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV :

**Théorème :** Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle*, sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}^*, P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$ .

#### 40.6. Variance et écart type cas infini

**Théorème :** Si la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie, alors la variable aléatoire  $X$  est aussi d'espérance finie.

**Définition :** Lorsque la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie, on appelle variance de  $X$  le réel :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

**Théorème :** La variance est aussi l'espérance de  $(X - E(X))^2$ .

**Définition :** Lorsque la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie, on appelle écart type de  $X$  le réel :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$ .

La variance est une moyenne des écarts à la moyenne de la variable aléatoire : elle traduit la *dispersion* de ses valeurs.

Enfin, on a encore l'inégalité de BIENAYMÉ-CHEBYCHEV :

**Théorème :**

Soit  $X$ , une variable aléatoire *réelle* d'espérance finie, sur espace probabilisé dénombrable  $(\Omega, P)$ .

Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}, P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$ .

#### 40.7. Lois usuelles sur un univers fini

- Loi certaine :  $X(\Omega)$  ne contient qu'une seule valeur.  
Son espérance est cette valeur et sa variance est nulle.
- Loi uniforme : Toutes les valeurs  $x$  de  $X(\Omega)$  ont la même probabilité.  
En particulier, quand on a équiprobabilité sur  $\Omega$  et la variable aléatoire  $X$  injective, alors la loi de  $X$  est uniforme.  
En effet, dans ce cas :  $P(x = X(\omega)) = P(\{\omega\})$ .
- Loi de BERNOULLI de paramètre  $p \in [0, 1]$ , notée  $\mathcal{B}(p)$ .  
 $X$  ne prend que deux valeurs, 0 et 1, et :  $P(X = 1) = p$ .  
Son espérance est  $p$  et sa variance  $p(1 - p) = pq$ , en notant  $q = 1 - p$ .
- Loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$  notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
 $X$  ne prend que  $n + 1$  valeurs,  $0, 1, 2, \dots, n$  et :  $P(X = k) = p^k (1 - p)^{n-k} \binom{n}{k}$ .  
Son espérance est  $np$  et sa variance est  $np(1 - p) = npq$ , en notant  $q = 1 - p$ .  
La loi binomiale est aussi la loi de la somme de  $n$  variables aléatoires de BERNOULLI de même paramètre  $p$ .

## 40.8. Lois usuelles sur un univers infini

### a/ Loi géométrique

**Définition :** Soit  $p \in ]0, 1[$ , la variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , notée  $\mathcal{G}(p)$ , si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

**Exemple :** Notre exemple de tirage d'une pièce non truquée suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ . Plus généralement, le rang du premier succès dans une répétition infinie d'épreuves de BERNOULLI indépendantes de paramètre  $p$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  aussi.

**Théorème :** Soit  $X$  une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p$ .

$$\text{Alors : } E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

### b/ Loi de POISSON

**Définition :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , la variable aléatoire  $X$  suit la loi de POISSON de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La loi de POISSON est destinée à modéliser tout phénomène de temps d'attente comme :

- le nombre de voyageurs arrivant sur un quai de métro en une minute ;
- le nombre d'atomes radioactifs se désintégrant en une seconde ;
- le nombre d'erreurs de transmission sur une ligne ADSL par heure...

**Théorème :** Soit  $X$  une variable aléatoire de POISSON de paramètre  $\lambda$ .

$$\text{Alors : } E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda.$$

**Théorème :**

Si les variables aléatoires  $X_n$  suivent des lois binomiales de paramètres  $(n, p_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ ,

et si  $X$  suit la loi de POISSON de paramètre  $\lambda$ ,

alors la suite de variables aléatoires  $X_n$  tend vers la variable aléatoire  $X$ .

$$\text{C'est à dire : } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = P(X = k)$$

## 40.9. Espérance et variance des lois usuelles

Nom	Valeurs	Paramètre	Loi	Espérance	Variance
BERNOULLI	$(0, 1)$	$p \in [0, 1]$	$P(X = 1) = p$	$p$	$p(1 - p)$
Binomiale	$(0, 1, \dots, n)$	$n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$
Géométrique	$\mathbb{N}^*$	$p \in [0, 1]$	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
POISSON	$\mathbb{N}$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$

## 41. Couple de variables aléatoires sur un univers fini

### 41.1. Couple de variables aléatoires

**Définition :** Soit  $X, Y$ , deux variables aléatoires sur espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

Le **couple de variables aléatoires**  $(X, Y)$  est l'application :  $\Omega \rightarrow E$  qui, à  $\omega$ , associe le couple  $(X(\omega), Y(\omega))$ .

**Définition :** La **loi du couple**, ou **loi conjointe**, de  $(X, Y)$  est, pour tous les  $x \in X(\Omega)$  et pour tous les  $y \in Y(\Omega)$ , la donnée de  $P(X = x \cap Y = y)$   
Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont les **lois marginales** du couple  $(X, Y)$ .

**Théorème :** Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe

Ce qu'on vient de faire pour les couples de variables aléatoires peut se généraliser aux  $n$ -uplets :  
 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

**Définition :**

La **loi conditionnelle** de  $Y$  sachant  $(X = x)$  est la donnée des  $P(Y = y|X = x) = P_{X=x}(Y = y)$ , pour tous les  $y \in Y(\Omega)$ .

## 41.2. Variables aléatoires indépendantes

**Définition :** On dit que  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires **indépendantes** si et seulement si pour tout les  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$ , on a :  $P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ .

**Théorème :** Si  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires indépendantes, alors, pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , on a :  $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$ .

**Théorème :** Si  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires indépendantes, alors,  $(f(X), g(Y))$  est aussi un couple de variables aléatoires indépendantes.

**Définition :** On dit que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** si et seulement si :  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) : P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$

**Théorème :** Si  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors :  $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

**Théorème :** Si  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, les variables aléatoires  $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont aussi indépendantes.

**Théorème :** Si  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires de BERNOULLI mutuellement indépendantes, de même loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors, la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

## 41.3. Covariance et coefficient de corrélation linéaire

**Définition :**

La **covariance** du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  est :  $\text{Cov}(X, Y) = E\left(\left(X - E(X)\right) \cdot \left(Y - E(Y)\right)\right)$ .

La covariance de  $(X, X)$  est la variance de  $X$  !

**Théorème :**  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

**Théorème :**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires, alors :  $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2ab \text{Cov}(X, Y) + b^2V(Y)$ .

**Définition :**

Le **coefficient de corrélation linéaire** du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  est :  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ .  
C'est le quotient de la covariance par le produit des écart-types.

**Théorème :** On a :  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ , ou encore :  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

Le coefficient de corrélation est le cosinus de l'angle entre les deux variables aléatoires !

**Théorème :**

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\rho(X, Y) = 0$ .

La réciproque est fausse.

**Théorème :** En résumé, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- $\sigma(X, Y) = 0$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

# Index

## Symbols

BAYES (formule de)	79
BIENAYMÉ-CHEBYCHEV	82

## A

accroissements finis (inégalité)	35
aire	44
Alembert	14, 52–54
angles	67
application	8
– bijective	9
– composition	9
– injective	9
– réciproque	9
– surjective	9
application linéaire	18
– bijective	20
– endomorphisme	18
– image d’une	19
– image réciproque	19
– injective	19, 20
– matrice d’une	20
– changement de base	22
– rang	20
– surjective	20
argument	13
associativité	8, 9
automorphisme	18

## B

base	
– d’un espace vectoriel	17, 20
– incomplète	17
bijection	9, 20
binôme (formule du)	12
borne	
– inférieure	11
– supérieure	11
branches infinies	70, 72

## C

cardinal	8
cercles	
– dans le plan	74
– cocyclicité	75
changement de base	22
changement de variable	47, 50
Chasles (relation de)	45
coefficients binomiaux	12
coefficients de Fourier	56
commutativité	8
composition des applications	9
continuité	32, 59
– d’une application	32

– sur un intervalle	32
convergence	54
– d’une intégrale généralisée	48
– d’une série de Fourier	57
– d’une série entière	54
– d’une série numérique	51
coordonnées	
– polaires	64
corps	11
– exemples	11
couple	
– de variables aléatoires	83
– coefficient de corrélation	85
– covariance	84
– loi	84
– lois marginales	84
courbes	
– centre de symétrie	71
– de l’espace	74
– en cartésiennes	70
– en paramétriques	71
critère	
– d’équivalence	50, 52
– de comparaison	49, 52
– série-intégrale	52
– de d’Alembert	52–54
– de Riemann	49, 52
croissances comparées	33

## D

d’Alembert	14, 52–54
dérivée	
– d’un produit	35
– d’une composée	35
dérivabilité	33
déterminant	22, 65
– d’un produit de matrices	23
– d’une matrice inversible	23
– d’une matrice triangulaire	23
– ordre 2 et 3	22
– ordre quelconque	23
développement	
– en série de Fourier	57
– en série entière	55
– limité	36–37
diagonalisabilité	24
– cond. nécessaire et suffisante	24
– condition suffisante	24
dimension	
– d’un sous espace propre	24
dimension finie	17
distances	67
division euclidienne	15
droites	
– de l’espace affine	66
– du plan affine	65

## E

écart	
-------	--

– type	81, 82
élément	
– inversible	8
– neutre	8
endomorphisme	18
– noyau	24
– orthogonal	28
– stabilité	19
– symétrique	27
– trace	22
ensemble	7
– dénombrable	76
– de définition	31, 51, 70
– fini	8, 76
équations différentielles	60–62
– aux dérivées partielles	62
– linéaires	61
– du premier ordre	61
– du second ordre	61, 62
– recollement de solutions	60
équations différentielles	
– solution en série entière	56
équivalent	33
espace	
– probabilisé	78
espace vectoriel	16
– base	17
– de dimension finie	17
– euclidien	26
– exemples	18
– préhilbertien	26
– somme de sev	16
– somme directe de sev	16
– sous-espace	16
– supplémentaires	16, 17, 67
Euler (relation d’)	13
événement	76
– certain	76
– contraire	76
– élémentaire	76
– impossible	76
événements	
– incompatibles	76
– indépendants	78
– mutuellement indépendants	78
– système complet	77
éventualité	76
exponentielle	37
– complexe	14
extremums	
– d’une fn de plus. variables	60

## F

famille	
– génératrice	17
– libre	17
faux problème	49
fonction	8
– continue	32
– par morceaux	32
– définie par une intégrale	



- généralisée	51	- d'une transposée	21	- factorisation	14
- dérivable	33	isométries	68–69	- racines d'un	14
- de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux	34	- vectorielles		- racines d'un –	14
- de classe $\mathcal{C}^n$	34	- de l'espace	69	- scindé	14, 15, 24
- de plusieurs variables	59	- du plan	69	primitives	43–44
- extremums	60	isomorphisme	18	- existence	44
- de répartition	80			- fraction rationnelle	43
- de Riemann	49	<b>L</b>		- en exponentielle	44
- limite d'une	32			- en radicaux	44
- monotone	31			- trigonométrique	44
- trigonométrique	37			- usuelles	45
- réciproque	38	limite		probabilité	
- usuelle	37	- d'une application	32	- conditionnelle	78
- variations d'une	31	- d'une suite	30	- sur un univers dénombrable	78
forme bilinéaire symétrique	25	limites usuelles	32	- sur un univers fini	77
forme linéaire	18	logarithme	37	probabilités	
formes indéterminées	32	loi (d'une variable aléatoire)	80	- totales	79
formule		loi de composition interne	8	produit	
- de BAYES	79			- de matrices	20
formule du binôme	12	<b>M</b>		- scalaire	64
fractions rationnelles	15			- vectoriel	65
		matrice		produit mixte	65
<b>G</b>		- antisymétrique	21	produit scalaire	25
		- d'une application linéaire	22	produit vectoriel	67
groupe	10	- de passage	22	projecteur	19, 27, 67
- morphisme de	10	- inverse	21	projection	
- sous-groupe	10	- orthogonale	28	- orthogonale	27
		- puissance de matrices	25	prolongement par continuité	35
<b>H</b>		- rang	21		
		- symétrique	21, 26	<b>R</b>	
homomorphisme	18	- trace	22		
		module	13	réduction d'un endomorphisme	23
<b>I</b>		Moivre (formule de)	13, 43	rang	17
		morphisme		- théorème du	20
image		- de groupe	10	Rolle (théorème de)	35
- d'une application linéaire	19, 20	moyenne (formule de)	47	rotations	
- d'une partie	9			- vectorielles	
- réciproque		<b>N</b>		- de l'espace	69
- d'une application linéaire	19			- du plan	69
- réciproque d'une partie	9	négligeabilité	33	<b>S</b>	
inégalité		nombres complexes			
- dans les intégrales	46	- racines		Schmidt (procédé de)	26
- de Cauchy-Schwarz	26	- $n^{\text{èmes}}$	14	Schwarz (théorème de)	60
- de Schwarz	26, 47	- carrées	13	semblables	22
- de Taylor-Lagrange	36	norme		séries	
- des accroissements finis	35	- euclidienne	26	- d'intégrales	58
- triangulaire	11, 13, 26	noyau	19, 20, 24	- de Fourier	56–58
indépendance		<b>P</b>		- coefficients	57
- d'événements	78			- convergence	57
injection	9, 19	Parseval (formule de)	58	- entières	54–56, 58
intégrabilité	49	partie entière	11	- développements usuels	55
intégrale		plan tangent	73	- rayon de convergence	54
- calcul approché	47	plans		- géométriques	51
- de Riemann	44–48	- de l'espace affine	66	- numériques	51–53
- généralisée	48–51	point		- numériques positives	52
- impropre	48–51	- d'inflexion	70	- somme de –	52
- simple	44–48	point critique	60	somme de Riemann	47
intégration		point stationnaire	71	somme de sous espaces vectoriels	16
- de séries	58	polynôme		sous-espace propre	23
inverse		- caractéristique	24	sphères	75
- d'un produit de matrices	21	- divisibilité	14	suite	30
- d'une matrice	21	- division euclidienne	15	- équivalentes	30
				- adjacentes	31

– bornée	30	– avec reste intégral	36	valeur propre	23
– convergente	30	théorème		valeurs intermédiaires (th. des)	32
– croissante majorée	30	– de transfert	81	variable aléatoire	80
– et série	30	trace d’une matrice	22	– binomiale	82
– limite d’une –	30	transposée	20	– de BERNOULLI	82
– récurrente		triangle de Pascal	12	– de POISSON	83
– linéaire	31	triangularisation	25	– espérance	81
– sous-suite	30	trigonalisation	25	– géométrique	83
supplémentaires (sev)	16, 17	trigonométrie	42–43	– loi	80
surfaces		– arc double	43	– lois usuelles	82, 83
– plan tangent	73	– fonctions réciproques	43	– variance	81, 82
surjection	9	– formule de Moivre	43	variables aléatoires	
symétrie		– pour le calcul intégral	43	– couple	83
– centrale	69	– sommes d’arcs	43	– couple (coef. de corrélation)	85
– orthogonale	68, 69	– sommes en produits	43	– couple (covariance)	84
symétries	19, 67	– symétries	42	– indépendantes	84
systèmes		trois conditions (th. des)	47, 50	– mutuellement indépendantes	84
– différentiels	62			vecteur accélération	71
– linéaires	20			vecteur propre	23
				vecteur vitesse	71
<b>T</b>		<b>U</b>		<b>Z</b>	
		univers	76		
		<b>V</b>			
Taylor					
– -Lagrange (inégalité)	36				
– -Young	35, 36			zéro d’une fonction	14, 36