Institut National des Postes et
Télécommunications (INPT)
Rabat

Année: 2024 - 2025

TD 2 – Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1.

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?
3. Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Exercice 2.

Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante. Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose. Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatiguant; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

1. Tracer le graphe de cette chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Si Doudou dort la première minute, quelle est la probabilité qu'il dorme la minute suivante? Et celle d'après?
3. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique. En déduire la nature des états.
4. Donner sa mesure stationnaire. Est-elle unique? Interpréter cette mesure.

Exercice 3.

Un fabricant veut fixer le niveau de publicité qu'il fait passer dans un média. Il peut choisir entre une couverture publicitaire élevée (E) et une couverture publicitaire moyenne (M). Les ventes mensuelles sont réparties en trois catégories suivant leur nombre : C_1 (*peu de ventes*), C_2 (*nombre de ventes normal*) et C_3 (*beaucoup de ventes*). On estime que l'évolution de la catégorie des ventes mensuelles au cours du temps peut être représentée par une chaine de Markov, dont la matrice de transition dépend de la couverture publicitaire. Les deux matrices de transition sont respectivement les suivantes:

$$P_E = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad P_M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Un mois de vente de catégorie C_1 (respectivement C_2 et C_3) rapporte environ 9000 euros (respectivement 12000 et 18000 euros). Une forte couverture publicitaire coûte 5000 euros par mois, alors qu'une couverture publicitaire moyenne ne coûte que 1000 euros par mois.

1. Après avoir montré que la CM dans les deux cas est ergodique, calculer la mesure stationnaire pour les deux cas.
2. Calculer alors le bénéfice moyen du fabricant sur une grande période de temps lorsque la couverture publicitaire est élevée, puis lorsqu'elle est moyenne. Quel est le choix le plus rentable?

Exercice 4.

On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = 1/4$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la $n-ième$ journée.

1. On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.

2. Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.

3. Le réparateur, de plus en plus paresseux, met maintenant 2 jours pour réparer une seule machine. Montrer que (X_n) n'est plus une chaîne de Markov, mais que l'on peut construire un espace de 5 états permettant de décrire le processus par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe des transitions. Calculer la probabilité que les 2 machines fonctionnent après n jours ($n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$) si elles fonctionnent initialement.

Exercice 5.

Soit la chaîne de Markov à temps discret définie par la matrice de transition suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Donner le graphe de transition de cette chaîne et la classifier complètement.

2. Partant de l'état initial 3, quelle est la probabilité de visiter un jour l'état 2?

3. Partant de l'état initial 5, combien de fois en moyenne le processus y reviendra-t-il?