

①

18151

[Max. Marks : 85]

[Time : 3:00 Hrs.]

[Min. Marks : 28]

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains Multiple Choice Questions. Each question carries 1 Mark.
इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Q. 01 The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ is -

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ का मान है -

- a) $\log_a e$ b) $\log_e a$
c) $\log_a x$ d) $\log_e x$

Q. 02 If $f(x) = e^{ax}$, then the value of $f^{(n)}(0)$ is -

यदि $f(x) = e^{ax}$, तब $f^{(n)}(0)$ का मान है -

- a) n
c) a^n

Q. 03 The radius of curvature at the point $(2, 2)$ of the curve $xy = 4$ is ..

वक्र $xy = 4$ के बिन्दु $(2, 2)$ पर वक्रता त्रिज्या है :

- a) $2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$
c) 2 d) $1/\sqrt{2}$

Q. 04 If $\text{div } \vec{F} = 0$, then \vec{F} is called -

- a) Irrotational b) Solenoidal
c) Invariant d) Harmonic

यदि $\text{div } \vec{F} = 0$, तब \vec{F} कहलाता है -

- a) आघूर्णनीय b) परिनालिकीय
c) अविनासी d) प्रसंवादी

P.T.O.

Q. 05 If $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, then

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ तथा $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, तब

a) $AB \neq BA$

c) $AB = B$

b) $AB = A$

d) $AB = BA$

[Section - B]

This section contains Short Answer Type Questions. Each question carries 5 Marks
इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Q. 1 Test the continuity of the following function at $x = 0$
निम्न फलन की $x = 0$ पर सातत्य की जाँच कीजिये -

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, f(0) = 1$$

OR

Is the functions $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$

differentiable at $x = 2$

क्या फलन $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$

$x = 2$ पर अवकलनीय है।

Q. 2 If $y = (\tan^{-1} x)^2$ prove that

$$(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2) y_1 = 2$$

यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ सिद्ध कीजिये

$$(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2) y_1 = 2$$

OR

Evaluate मूल्यांकन कीजिये -

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$$

Q. 3 Find the asymptotes of the following curves -

निम्नलिखित वक्र की अनंत स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये -

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

OR

Find the equation of tangent and normal at the point 't' on the curve $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
वक्र $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ के बिंदु 't' पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिये।

Q. 4 If $\vec{a} = x y z \hat{i} + x z^2 \hat{j} - y^3 \hat{k}$ and $\vec{b} = x^3 \hat{i} - x y z \hat{j} + x^2 z \hat{k}$, then calculate the value of $\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} \times \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial x^2}$ at the point (1, 1, 0)

यदि $\vec{a} = x y z \hat{i} + x z^2 \hat{j} - y^3 \hat{k}$ और $\vec{b} = x^3 \hat{i} - x y z \hat{j} + x^2 z \hat{k}$, तब $\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} \times \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial x^2}$ की बिंदु (1, 1, 0) पर गणना कीजिये।

OR

If $\vec{F} = 2 x z^2 \hat{i} - y z \hat{j} + 3 x z^3 \hat{k}$, find the value of $\text{curl curl } \vec{F}$ at (1, 1, 1).
यदि $\vec{F} = 2 x z^2 \hat{i} - y z \hat{j} + 3 x z^3 \hat{k}$, तब $\text{curl curl } \vec{F}$ का (1, 1, 1) पर मान ज्ञात कीजिये।

Q. 5 Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix}$ is a Skew - Hermitian.

दर्शाइये कि आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix}$ विषम हर्मिटिय है।

OR

If A and B are non singular matrices of same order, then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
यदि A तथा B समान कोटि के दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो सिद्ध कीजिये कि $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

[Section - C]

This section contains Essay Type Questions. Each question carries 11 marks.
इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 11 अंकों का है।

Q. 6 Test the continuity of the function $f(x)$ at $x = 0, 1, 2$ where
फलन $f(x)$ की $x = 0, 1, 2$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिये, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 5x - 4, & 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 3x, & 1 < x < 2 \\ 3x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

OR

P.T.O.

Show that the following function $f(x)$ is continuous at $x = 0$, but not differentiable at $x = 0$
 दर्शाइये कि निम्नलिखित फलन $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है, परन्तु $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है

$$f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- Q. 7 If $y = \tan^{-1} x$, then prove that $(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$
 Hence find $(y_n)_0$
 यदि $y = \tan^{-1} x$, तब सिद्ध कीजिये कि $(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$
 $y_n = 0$ अतः $(y_n)_0$ ज्ञात कीजिये।

OR

State and Prove Lagrange's mean value theorem.

लाग्रांज के माध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिये।

- Q. 8 If the straight line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ touches the curve $(x/a)^{n/(n-1)} + (y/b)^{n/(n-1)} = 1$, then show that $(a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n = p^n$
 यदि सरल रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, वक्र $(x/a)^{n/(n-1)} + (y/b)^{n/(n-1)} = 1$, को स्पर्श करती है तो सिद्ध कीजिये कि $(a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n = p^n$

OR

Show that $\int (a^2 + x^2)^{n/2} dx = \frac{x(a^2 + x^2)^{n/2}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (a^2 + x^2)^{(n/2)-1} dx$

Hence evaluate $\int (a^2 + x^2)^{5/2} dx$

दर्शाइये कि $\int (a^2 + x^2)^{n/2} dx = \frac{x(a^2 + x^2)^{n/2}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (a^2 + x^2)^{(n/2)-1} dx$

अतः $\int (a^2 + x^2)^{5/2} dx$ का मूल्यांकन कीजिये।

- Q. 9 Find the directional derivative of $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ at the point $p(1, 1, -1)$ the direction of $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$. Also find the maximum value of directional derivative at p .

$\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का दिक् अवकलज बिन्दु $p(1, 1, -1)$ पर $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ की दिशा ज्ञात कीजिये। p पर दिक् अवकलज का अधिकतम मान भी ज्ञात कीजिये।

OR

Cont

Prove that सिद्ध कीजिये कि -

- i) $\text{div} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl} \vec{B}$
 ii) $\text{curl} (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A},$

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Q. 10 Find the rank and nullity of the following matrix -

निम्नलिखित आव्यूह की जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिये -

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$$

OR

Show that the following equations are consistent and find its solution
 दर्शाइये कि निम्नलिखित समीकरण संगत है तथा उनका हल ज्ञात कीजिये

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$3x + y + 2z = 11$$

$$2x + 3y + z = 11$$

_____o_____