```
assume(wO, Type::Real):
assume(we, Type::Real):
assume(wA, Type::Real):
assume(weA, Type::Real):
assume(wV, Type::Real):
assume(mzk, Type::Real):
assume(mxk, Type::Real):
assume(mxy, Type::Real):
assume(myk, Type::Real):
assume(mkz, Type::Real):
assume(mxz, Type::Real):
assume(uhatx0, Type::Real):
assume(uhaty0, Type::Real):
l1:=wO + sqrt(-1)*weA*mxz^2
```

$$i\,weA\,mxz^2 + wO$$

```
l2:=-wA*mxz^2+sqrt(-1)*we
```

$$-mxz^2\,wA + we\,i$$

```
l3:=wA*mxz^2+sqrt(-1)*we
```

$$wA\,mxz^2 + we\,i$$

```
l4:=-wO + sqrt(-1)*weA*mxz^2
```

$$-wO + mxz^2\,weA\,i$$

```
a1:=uhatx0
```

$$uhatx0$$

```
a2:=sqrt(-1)*wO*mzk*mxy*uhatx0
```

$$mxy\,mzk\,uhatx0\,wO\,i$$

```
a3:=uhatx0*(wV^2+wO^2)
```

$$uhatx0\,(wO^2 + wV^2)$$

```
a4:=sqrt(-1)*wO^3*uhatx0*(mxy*mzk*(1+2*wV^2/wO^2)+wV^2*we/wO^3)
```

$$uhatx0\,wO^3\left(\frac{wV^2\,we}{wO^3} + mxy\,mzk\left(\frac{2\,wV^2}{wO^2} + 1\right)\right)i$$

```
num1:=collect(expand((a4-a3*(l2+l3+l4)+a2*(l2*(l3+l4)+l3*l4)-a1*l3*l4*l2)),
```

$$\begin{aligned}&(uhatx0\,weA\,mxz^6\,wA^2 - mxy\,mzk\,uhatx0\,mxz^4\,wA^2\,wO - uhatx0\,weA\,mxz^2\,wO^2\\&\quad - 2\,mxy\,mzk\,uhatx0\,weA\,mxz^2\,wO\,we - uhatx0\,weA\,mxz^2\,wV^2 + uhatx0\,weA\,mxz^2\,we^2\\&\quad + mxy\,mzk\,uhatx0\,wO^3 - 2\,uhatx0\,wO^2\,we + 2\,mxy\,mzk\,uhatx0\,wO\,wV^2 - mxy\,mzk\,uhatx0\,wO\,we^2\\&\quad - uhatx0\,wV^2\,we)\,i - uhatx0\,mxz^4\,wA^2\,wO + uhatx0\,wO^3 + 2\,mxy\,mzk\,uhatx0\,wO^2\,we\\&\quad + uhatx0\,wO\,wV^2 - uhatx0\,wO\,we^2\end{aligned}$$

```
den1:=collect(expand((l1-l2)*(l1-l3)*(l1-l4)),sqrt(-1))
```

$$(4\,mxz^2\,wO^2\,weA - 4\,wO^2\,we)\,i - 2\,mxz^4\,wA^2\,wO - 2\,mxz^4\,wO\,weA^2 + 4\,mxz^2\,wO\,we\,weA + 2\,wO^3 - 2\,wO\,we^2$$

```
cden1:=collect(conjugate(den1),sqrt(-1))
```

$$(4\,wO^2\,we - 4\,mxz^2\,wO^2\,weA)\,i - 2\,mxz^4\,wA^2\,wO - 2\,mxz^4\,wO\,weA^2 + 4\,mxz^2\,wO\,we\,weA + 2\,wO^3 - 2\,wO\,we^2$$

```
collect(factorout(den1*cden1,wO^6),sqrt(-1))
```

$$wO^6\left(\frac{8\,we^2}{wO^2} + \frac{4\,we^4}{wO^4} - \frac{8\,mxz^4\,wA^2}{wO^2} + \frac{4\,mxz^8\,wA^4}{wO^4} + \frac{8\,mxz^4\,weA^2}{wO^2} + \frac{4\,mxz^8\,weA^4}{wO^4} - \frac{16\,mxz^2\,we^3\,weA}{wO^4} - \frac{16\,mxz^6\,we\,weA^3}{wO^4} + \frac{8\,mxz^4\,wA^2\,we^2}{wO^4} + \frac{8\,mxz^8\,wA^2\,weA^2}{wO^4} + \frac{24\,mxz^4\,we^2\,weA^2}{wO^4} - \frac{16\,mxz^2\,we\,weA}{wO^2} - \frac{16\,mxz^6\,wA^2\,we\,weA}{wO^4} + 4\right)$$

```
collect(factorout(num1*cden1,wO^6),[sqrt(-1),uhatx0])
```

$$\left(wO^6\left(2\,mxy\,mzk-\frac{6\,mxz^2\,weA}{wO}+\frac{2\,wV^2\,we}{wO^3}+\frac{2\,mxz^6\,weA^3}{wO^3}+\frac{2\,wV^2\,we^3}{wO^5}+\frac{8\,mxz^6\,wA^2\,weA}{wO^3}\right.\right.$$
$$-\frac{2\,mxz^{10}\,wA^4\,weA}{wO^5}-\frac{6\,mxz^2\,wV^2\,weA}{wO^3}-\frac{2\,mxz^2\,we^4\,weA}{wO^5}-\frac{2\,mxz^{10}\,wA^2\,weA^3}{wO^5}$$
$$+\frac{2\,mxz^6\,wV^2\,weA^3}{wO^5}+\frac{4\,mxz^4\,we^3\,weA^2}{wO^5}-\frac{2\,mxz^6\,we^2\,weA^3}{wO^5}+\frac{4\,mxy\,mzk\,wV^2}{wO^2}+\frac{4\,mxy\,mzk\,we^2}{wO^2}$$
$$+\frac{2\,mxy\,mzk\,we^4}{wO^4}+\frac{2\,mxz^4\,wA^2\,wV^2\,we}{wO^5}+\frac{2\,mxz^6\,wA^2\,wV^2\,weA}{wO^5}-\frac{4\,mxz^6\,wA^2\,we^2\,weA}{wO^5}$$
$$+\frac{4\,mxz^8\,wA^2\,we\,weA^2}{wO^5}-\frac{2\,mxz^2\,wV^2\,we^2\,weA}{wO^5}-\frac{2\,mxz^4\,wV^2\,we\,weA^2}{wO^5}-\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA^2}{wO^2}$$
$$+\frac{2\,mxy\,mxz^8\,mzk\,wA^4}{wO^4}-\frac{2\,mxy\,mxz^4\,mzk\,weA^2}{wO^2}-\frac{4\,mxy\,mzk\,wV^2\,we^2}{wO^4}$$
$$+\frac{4\,mxy\,mxz^6\,mzk\,we\,weA^3}{wO^4}-\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA^2\,wV^2}{wO^4}+\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA^2\,we^2}{wO^4}$$
$$+\frac{2\,mxy\,mxz^8\,mzk\,wA^2\,weA^2}{wO^4}-\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wV^2\,weA^2}{wO^4}-\frac{6\,mxy\,mxz^4\,mzk\,we^2\,weA^2}{wO^4}$$
$$\left.\left.-\frac{8\,mxy\,mxz^2\,mzk\,we\,weA}{wO^2}+\frac{8\,mxy\,mxz^2\,mzk\,wV^2\,we\,weA}{wO^4}\right)\right)i\,uhatx0$$
$$+\left(wO^6\left(\frac{2\,wV^2}{wO^2}+\frac{4\,we^2}{wO^2}+\frac{2\,we^4}{wO^4}-\frac{4\,mxz^4\,wA^2}{wO^2}+\frac{2\,mxz^8\,wA^4}{wO^4}-\frac{6\,mxz^4\,weA^2}{wO^2}+\frac{2\,wV^2\,we^2}{wO^4}\right.\right.$$
$$-\frac{8\,mxz^2\,we^3\,weA}{wO^4}-\frac{2\,mxz^4\,wA^2\,wV^2}{wO^4}+\frac{4\,mxz^4\,wA^2\,we^2}{wO^4}+\frac{6\,mxz^8\,wA^2\,weA^2}{wO^4}-\frac{6\,mxz^4\,wV^2\,weA^2}{wO^4}$$
$$+\frac{6\,mxz^4\,we^2\,weA^2}{wO^4}+\frac{4\,mxy\,mxz^2\,mzk\,weA}{wO}-\frac{8\,mxy\,mzk\,wV^2\,we}{wO^3}-\frac{8\,mxz^6\,wA^2\,we\,weA}{wO^4}$$
$$+\frac{4\,mxz^2\,wV^2\,we\,weA}{wO^4}-\frac{4\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA^2\,weA}{wO^3}+\frac{8\,mxy\,mxz^2\,mzk\,wV^2\,weA}{wO^3}$$
$$\left.\left.+\frac{12\,mxy\,mxz^2\,mzk\,we^2\,weA}{wO^3}-\frac{12\,mxy\,mxz^4\,mzk\,we\,weA^2}{wO^3}+2\right)\right)uhatx0$$

```
NUM:=uhatx0*wO^6*(2)+sqrt(-1)*uhatx0*wO^6*(2*mxy*mzk-6*mxz^2*weA/wO)
```

$$2\,uhatx0\,wO^6+uhatx0\,wO^6\left(2\,mxy\,mzk-\frac{6\,mxz^2\,weA}{wO}\right)i$$

```
DEN:=4*wO^6
```

$$4\,wO^6$$

```
E1:=factorout(Simplify(NUM/DEN),uhatx0/2)
```

$$\frac{uhatx0}{2}\,\frac{-3\,i\,weA\,mxz^2+wO+mxy\,mzk\,wO\,i}{wO}$$

```
ux:=collect(E1*(cos(wO*t)+sqrt(-1)*sin(wO*t))*exp(-weA*mxz^2*t),sqrt(-1))
```

$$-\left(-\frac{\text{uhatx0}\,\sigma_1\,\sin(t\,\text{wO})\left(3\,\text{mxz}^2\,\text{weA}-\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{wO}\right)}{2\,\text{wO}}\right)+\left(\frac{\text{uhatx0}\,\sigma_1\,\sin(t\,\text{wO})}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{\text{uhatx0}\,\sigma_1\,\cos(t\,\text{wO})\left(3\,\text{mxz}^2\,\text{weA}-\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{wO}\right)}{2\,\text{wO}}\right)\text{i}+\frac{\text{uhatx0}\,\sigma_1\,\cos(t\,\text{wO})}{2}$$

where

$$\sigma_1=\text{e}^{-\text{mxz}^2\,t\,\text{weA}}$$

```
slow wave
Error: Unexpected 'identifier'. [line 1, col 6]
```

```
num2:=collect(expand((a4-a3*(l1+l3+l4)+a2*(l1*(l3+l4)+l3*l4)-a1*l3*l4*l1)),
```

$$(-\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{uhatx0}\,\text{mxz}^4\,\text{wO}\,\text{weA}^2+\text{uhatx0}\,\text{we}\,\text{mxz}^4\,\text{weA}^2-2\,\text{uhatx0}\,\text{mxz}^2\,\text{wO}^2\,\text{weA}$$

$$-2\,\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{uhatx0}\,\text{we}\,\text{mxz}^2\,\text{wO}\,\text{weA}-2\,\text{uhatx0}\,\text{mxz}^2\,\text{wV}^2\,\text{weA}+2\,\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{uhatx0}\,\text{wO}\,\text{wV}^2)\,\text{i}$$

$$+\text{uhatx0}\,\text{wA}\,\text{mxz}^6\,\text{weA}^2-2\,\text{mxy}\,\text{mzk}\,\text{uhatx0}\,\text{wA}\,\text{wO}\,\text{mxz}^4\,\text{weA}-\text{uhatx0}\,\text{wA}\,\text{mxz}^2\,\text{wV}^2$$

```
den2:=collect(expand((l2-l1)*(l2-l3)*(l2-l4)),sqrt(-1))
```

$$(4\,\text{mxz}^4\,\text{wA}^2\,\text{we}-4\,\text{mxz}^6\,\text{wA}^2\,\text{weA})\,\text{i}-2\,\text{mxz}^6\,\text{wA}^3+2\,\text{mxz}^6\,\text{wA}\,\text{weA}^2-4\,\text{mxz}^4\,\text{wA}\,\text{we}\,\text{weA}$$

$$+2\,\text{mxz}^2\,\text{wA}\,\text{wO}^2+2\,\text{mxz}^2\,\text{wA}\,\text{we}^2$$

```
cden2:=collect(conjugate(den2),sqrt(-1))
```

$$(4\,\text{mxz}^6\,\text{wA}^2\,\text{weA}-4\,\text{mxz}^4\,\text{wA}^2\,\text{we})\,\text{i}-2\,\text{mxz}^6\,\text{wA}^3+2\,\text{mxz}^6\,\text{wA}\,\text{weA}^2-4\,\text{mxz}^4\,\text{wA}\,\text{we}\,\text{weA}$$

$$+2\,\text{mxz}^2\,\text{wA}\,\text{wO}^2+2\,\text{mxz}^2\,\text{wA}\,\text{we}^2$$

```
collect(factorout(den2*cden2,wO^6*mxz^4*wA^2/wO^2),sqrt(-1))
```

$$(\text{mxz}^4\,\text{wA}^2\,\text{wO}^4)\left(\frac{8\,\text{we}^2}{\text{wO}^2}+\frac{4\,\text{we}^4}{\text{wO}^4}-\frac{8\,\text{mxz}^4\,\text{wA}^2}{\text{wO}^2}+\frac{4\,\text{mxz}^8\,\text{wA}^4}{\text{wO}^4}+\frac{8\,\text{mxz}^4\,\text{weA}^2}{\text{wO}^2}+\frac{4\,\text{mxz}^8\,\text{weA}^4}{\text{wO}^4}\right.$$

$$-\frac{16\,\text{mxz}^2\,\text{we}^3\,\text{weA}}{\text{wO}^4}-\frac{16\,\text{mxz}^6\,\text{we}\,\text{weA}^3}{\text{wO}^4}+\frac{8\,\text{mxz}^4\,\text{wA}^2\,\text{we}^2}{\text{wO}^4}+\frac{8\,\text{mxz}^8\,\text{wA}^2\,\text{weA}^2}{\text{wO}^4}$$

$$\left.+\frac{24\,\text{mxz}^4\,\text{we}^2\,\text{weA}^2}{\text{wO}^4}-\frac{16\,\text{mxz}^2\,\text{we}\,\text{weA}}{\text{wO}^2}-\frac{16\,\text{mxz}^6\,\text{wA}^2\,\text{we}\,\text{weA}}{\text{wO}^4}+4\right)$$

```
collect(factorout(num2*cden2,wO^6),[sqrt(-1),uhatx0])
```

$$\left(-wO^6\left(\frac{4\,mxz^8\,wA\,weA^3}{wO^4}-\frac{4\,mxz^8\,wA^3\,weA}{wO^4}-\frac{4\,mxz^{12}\,wA^3\,weA^3}{wO^6}+\frac{4\,mxz^4\,wA\,weA}{wO^2}\right.\right.$$
$$-\frac{4\,mxz^6\,wA^3\,wV^2\,we}{wO^6}+\frac{4\,mxz^8\,wA\,wV^2\,weA^3}{wO^6}-\frac{2\,mxz^6\,wA\,we^3\,weA^2}{wO^6}+\frac{4\,mxz^8\,wA\,we^2\,weA^3}{wO^6}$$
$$+\frac{6\,mxz^{10}\,wA^3\,we\,weA^2}{wO^6}+\frac{4\,mxz^4\,wA\,wV^2\,weA}{wO^4}+\frac{4\,mxz^4\,wA\,we^2\,weA}{wO^4}-\frac{10\,mxz^6\,wA\,we\,weA^2}{wO^4}$$
$$-\frac{2\,mxz^{10}\,wA\,we\,weA^4}{wO^6}-\frac{4\,mxy\,mxz^2\,mzk\,wA\,wV^2}{wO^3}+\frac{2\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA\,weA^2}{wO^3}$$
$$+\frac{2\,mxy\,mxz^{10}\,mzk\,wA\,weA^4}{wO^5}+\frac{4\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA^3\,wV^2}{wO^5}+\frac{6\,mxy\,mxz^{10}\,mzk\,wA^3\,weA^2}{wO^5}$$
$$+\frac{4\,mxz^4\,wA\,wV^2\,we^2\,weA}{wO^6}-\frac{8\,mxz^6\,wA\,wV^2\,we\,weA^2}{wO^6}-\frac{4\,mxy\,mxz^2\,mzk\,wA\,wV^2\,we^2}{wO^5}$$
$$-\frac{4\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA\,wV^2\,weA^2}{wO^5}-\frac{6\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA\,we^2\,weA^2}{wO^5}+\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA\,we\,weA}{wO^3}$$
$$+\frac{4\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA\,we^3\,weA}{wO^5}-\frac{12\,mxy\,mxz^8\,mzk\,wA^3\,we\,weA}{wO^5}$$
$$\left.\left.+\frac{8\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA\,wV^2\,we\,weA}{wO^5}\right)\right)\,i\,uhatx0$$
$$+\left(-wO^6\left(\frac{2\,mxz^4\,wA^2\,wV^2}{wO^4}-\frac{2\,mxz^8\,wA^4\,wV^2}{wO^6}-\frac{10\,mxz^8\,wA^2\,weA^2}{wO^4}-\frac{2\,mxz^{12}\,wA^2\,weA^4}{wO^6}\right.\right.$$
$$+\frac{2\,mxz^{12}\,wA^4\,weA^2}{wO^6}+\frac{8\,mxz^{10}\,wA^2\,we\,weA^3}{wO^6}+\frac{2\,mxz^4\,wA^2\,wV^2\,we^2}{wO^6}-\frac{6\,mxz^8\,wA^2\,wV^2\,weA^2}{wO^6}$$
$$-\frac{6\,mxz^8\,wA^2\,we^2\,weA^2}{wO^6}+\frac{8\,mxz^6\,wA^2\,we\,weA}{wO^4}+\frac{4\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA^2\,weA}{wO^3}$$
$$-\frac{4\,mxy\,mxz^{10}\,mzk\,wA^4\,weA}{wO^5}+\frac{4\,mxz^6\,wA^2\,wV^2\,we\,weA}{wO^6}-\frac{8\,mxy\,mxz^4\,mzk\,wA^2\,wV^2\,we}{wO^5}$$
$$+\frac{8\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA^2\,wV^2\,weA}{wO^5}+\frac{12\,mxy\,mxz^6\,mzk\,wA^2\,we^2\,weA}{wO^5}$$
$$\left.\left.-\frac{12\,mxy\,mxz^8\,mzk\,wA^2\,we\,weA^2}{wO^5}\right)\right)\,uhatx0$$

```
NUM:=-uhatx0*wO^6*(4*mxy*mxz^6*mzk*wA^2*weA/wO^3)-sqrt(-1)*wO^6*uhatx0*(4*r
```

$$-4\,mxy\,mzk\,uhatx0\,weA\,mxz^6\,wA^2\,wO^3-4\,i\,uhatx0\,weA\,mxz^4\,wA\,wO^4$$

```
DEN:=mxz^4*wA^2*wO^4*4
```

$$4\,mxz^4\,wA^2\,wO^4$$

```
F1:=factorout(Simplify(NUM/DEN),weA*uhatx0/wA/wO)
```

$$\frac{\text{uhatx0 weA}}{\text{wA wO}}\left(-\text{mxy mzk wA mxz}^2-\text{wO i}\right)$$

```
ux_s:=collect(F1*(cos(wA*mxz^2*t)+sqrt(-1)*sin(wA*mxz^2*t))*exp(-we*t),sqrt
```

$$-\left(-\frac{\text{uhatx0 weA e}^{-t\,\text{we}}\,\sigma_1}{\text{wA}}\right)+\left(-\frac{\text{uhatx0 weA e}^{-t\,\text{we}}\,\sigma_2}{\text{wA}}-\frac{\text{mxy mxz}^2\,\text{mzk uhatx0 weA e}^{-t\,\text{we}}\,\sigma_1}{\text{wO}}\right)\text{i}$$

$$-\frac{\text{mxy mxz}^2\,\text{mzk uhatx0 weA e}^{-t\,\text{we}}\,\sigma_2}{\text{wO}}$$

where

$$\sigma_1=\sin(\text{mxz}^2\,t\,\text{wA})$$

$$\sigma_2=\cos(\text{mxz}^2\,t\,\text{wA})$$

```
weA_2:=eta*Va^2*k^4/4/Omg^2
```

$$\frac{\text{Va}^2\,\text{eta}\,k^4}{4\,\text{Omg}^2}$$

```
wA_2:=Va^2*kz*k/2/Omg
```

$$\frac{\text{Va}^2\,k\,\text{kz}}{2\,\text{Omg}}$$

```
wO_2:=2*Omg*kz/k
```

$$\frac{2\,\text{Omg kz}}{k}$$

```
weA_2/wO_2
```

$$\frac{\text{Va}^2\,\text{eta}\,k^5}{8\,\text{Omg}^3\,\text{kz}}$$

```
weA_2/wA_2
```

$$\frac{\text{eta}\,k^3}{2\,\text{Omg kz}}$$

```
wO_2/wA_2
```

$$\frac{4\,\text{Omg}^2}{\text{Va}^2\,k^2}$$

```
wV_2:=Va*kx
```

$$\text{Va kx}$$

```
wO_2/wV_2
```

$$\frac{2\,\text{Omg kz}}{\text{Va}\,k\,\text{kx}}$$

```
we_2:=eta*k^2
```

$$\text{eta}\,k^2$$

```
we_2*wO_2/wV_2^2
```

$$\frac{2\,\mathrm{Omg}\,\mathrm{eta}\,k\,\mathrm{kz}}{\mathrm{Va}^2\,\mathrm{kx}^2}$$

```
we_2:=eta*k^2
```

$$\mathrm{eta}\,k^2$$

```
wA_2/we_2
```

$$\frac{\mathrm{Va}^2\,\mathrm{kz}}{2\,\mathrm{Omg}\,\mathrm{eta}\,k}$$

```
wV_2*we_2/wA_2/wO_2
```

$$\frac{\mathrm{eta}\,k^2\,\mathrm{kx}}{\mathrm{Va}\,\mathrm{kz}^2}$$

```
we_2*wA_2/wO_2^2
```

$$\frac{\mathrm{Va}^2\,\mathrm{eta}\,k^5}{8\,\mathrm{Omg}^3\,\mathrm{kz}}$$

```
(we_2*wV_2^2/wO_2^3)^(-1)
```

$$\frac{8\,\mathrm{Omg}^3\,\mathrm{kz}^3}{\mathrm{Va}^2\,\mathrm{eta}\,k^5\,\mathrm{kx}^2}$$

```
wO_2^2/wA_2/we_2
```

$$\frac{8\,\mathrm{Omg}^3\,\mathrm{kz}}{\mathrm{Va}^2\,\mathrm{eta}\,k^5}$$