Approximation version 2

```
Préciser les conditions sur n et p pour que l' approximation d'
une loi B (n, p) par une loi normale de paramètre (n p, √(n p(1 - p)) )
ne génère pas d' erreur de probabilité supérieure à 10^-4.
```

```
ClearAll ["Global` *"]
```

Partie Théorique

Notation et définition

Loi binomiale : $\mathcal{B}$(n,p), $\forall$ k $\in [\![0, n]\!]$, P(X = k) $= C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-1}{2} \times \left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$

avec ici: $\mu = n \times p$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration

Nous sommes intéressé par l'étude de l'approximation, dans l'intervalle où la distribution de la loi binomial ne s'approche pas de zéro. Cette intervalle se trouve au voisinage de la moyenne.

En approximant n! on obtient (Formule de Stirling):

$$n! = n^n \times e^{-n} \times \sqrt{2\pi \times n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

De cette approximation on peut obtenir celle de la loi binomial.

$$f(x) = \frac{n^n \times e^{-n} \times \sqrt{2\pi \times n}}{x^x \times e^{-x} \times \sqrt{2\pi \times x} \times (n-x)^{n-x} e^{-(n-x)} \sqrt{2\pi \times (n-x)}} \times p^x q^{n-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \left(\frac{np}{x}\right)^x \times \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \times \sqrt{\frac{n}{2\pi \times x(n-x)}}$$

Pour la suit on définis δ=x-np, on a alors:

x=δ+np et n-x=nq-δ

On a alors:

$$\ln\left(\frac{np}{x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{\delta}{np}\right)$$

$$\ln\left(\frac{np}{n-x}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\delta}{nq}\right)$$

$$\ln(1+x)=x - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)$$

On en déduit alors deux choses:

$$\Longrightarrow \ln\left[\left(\frac{np}{x}\right)^x \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x}\right] = x\ln\left(\frac{np}{x}\right) + (n-x)\ln\left(\frac{nq}{n-x}\right)$$

$$= -(\delta + np)\times\left[\frac{\delta}{np} - \frac{1}{2}\times\frac{\delta^2}{n^2p^2} + O\left(\frac{\delta^3}{n^3}\right)\right] - (nq - \delta)\times\left[\frac{\delta}{nq} - \frac{1}{2}\times\frac{\delta^2}{n^2q^2} + O\left(\frac{\delta^3}{n^3}\right)\right]$$

$$= \frac{-\delta}{2\,npq} + O\left(\frac{\delta^3}{n^3}\right)$$

On passe l'équation à l'exponentielle

$$\Longrightarrow \left(\frac{np}{x}\right)^x \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} = e^{\left(\frac{-\delta}{2\,npq}\right)}\left[1 + O\left(\frac{\delta^3}{n^3}\right)\right]$$

Et

$$\sqrt{\frac{n}{2\,\pi\times x(n-x)}} = \sqrt{\frac{1}{2\,\pi npq}}\left[1 + O\left(\frac{\delta}{n}\right)\right]$$

On obtient alors une approximation tel que:

$$f(x)= \sqrt{\frac{1}{2\,\pi npq}}\,e^{\left(\frac{-\delta}{2\,npq}\right)}\left[1 + O\left(\frac{\delta^3}{n^3}\right)\right]$$

On remarque alors la loi de définition de la loi normale. On peux alors approximé la loi binomial par une loi normal. Il reste à déterminer les conditions sur n et p afin d'obtenir une approximation avec une erreur de 10^{-4}.

Partie Expérimentale

Notation

Dans cette partie expérimentale, nous désignerons par n le nombre de répétition de l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité de succès où p $\epsilon[0,1]$.

Localisation de l'erreur max pour p et n fixés

Après plusieurs essais pour plusieurs valeurs de n et p nous avons remarqué que l'erreur maximale se trouve toujours autour de l'espérance.

Variation de l'erreur en fonction de la probabilité p $\epsilon[0,1]$

```
ec[n_, p_][x_] :=
 Abs[CDF[NormalDistribution[n p, √(n p (1 - p))], x + 0.5] - CDF[BinomialDistribution[n, p], x]]
```

```
"Donne la liste de l'erreur pour n,p fixé et k variant autour de l'esperance "
```

```
liec[n_, p_][larg_] := Table[ec[n, p][k], {k, Floor[n p - larg], Ceiling[n p + larg]}]
```

Cette fonction donne toute les valeurs de l'erreur pour n et p fixés autour de l'espérance pour k variant de deux largeurs (ici larg_).

```
liec[50, .5][80]
```

```
{2.84548 × 10^-112, 1.60093 × 10^-109, 8.31601 × 10^-107, 3.98828 × 10^-104, 1.76598 × 10^-101,
 7.21968 × 10^-99, 2.72511 × 10^-96, 9.49698 × 10^-94, 3.0558 × 10^-91, 9.0783 × 10^-89,
 2.49016 × 10^-86, 6.30658 × 10^-84, 1.47472 × 10^-81, 3.184 × 10^-79, 6.34734 × 10^-77,
 1.16833 × 10^-74, 1.98563 × 10^-72, 3.11597 × 10^-70, 4.51496 × 10^-68, 6.04065 × 10^-66,
 7.46254 × 10^-64, 8.51266 × 10^-62, 8.96655 × 10^-60, 8.72107 × 10^-58, 7.83257 × 10^-56,
 6.4958 × 10^-54, 4.97462 × 10^-52, 3.51796 × 10^-50, 2.29738 × 10^-48, 1.38545 × 10^-46,
 7.7156 × 10^-45, 3.96805 × 10^-43, 1.88461 × 10^-41, 8.26622 × 10^-40, 3.34845 × 10^-38,
 1.25268 × 10^-36, 4.32816 × 10^-35, 1.38116 × 10^-33, 4.07074 × 10^-32, 1.10815 × 10^-30,
 2.78636 × 10^-29, 6.47137 × 10^-28, 1.38832 × 10^-26, 2.75129 × 10^-25, 5.0367 × 10^-24,
 8.51802 × 10^-23, 1.33086 × 10^-21, 1.92107 × 10^-20, 2.56211 × 10^-19, 3.1573 × 10^-18,
 3.5952 × 10^-17, 3.78311 × 10^-16, 3.67892 × 10^-15, 3.30654 × 10^-14, 2.74691 × 10^-13,
 2.10858 × 10^-12, 1.4931 × 10^-11, 9.71747 × 10^-11, 5.78194 × 10^-10, 3.12692 × 10^-9,
 1.52912 × 10^-8, 6.73568 × 10^-8, 2.66615 × 10^-7, 9.47077 × 10^-7, 3.01728 × 10^-6,
 8.61827 × 10^-6, 0.0000220589 , 0.000050544 , 0.000103477 , 0.000188648 , 0.000304561 ,
 0.000431432 , 0.000527858 , 0.000541704 , 0.000437239 , 0.000226518 , 0.0000187571 ,
 0.00019377 , 0.000218897 , 0.0000938717 , 0.0000938717 , 0.000218897 , 0.00019377 ,
 0.0000187571 , 0.000226518 , 0.000437239 , 0.000541704 , 0.000527858 , 0.000431432 ,
 0.000304561 , 0.000188648 , 0.000103477 , 0.000050544 , 0.0000220589 , 8.61827 × 10^-6,
 3.01728 × 10^-6, 9.47077 × 10^-7, 2.66615 × 10^-7, 6.73568 × 10^-8, 1.52912 × 10^-8, 3.12692 × 10^-9,
 5.78194 × 10^-10, 9.71747 × 10^-11, 1.49311 × 10^-11, 2.10854 × 10^-12, 2.74669 × 10^-13,
 3.30846 × 10^-14, 3.66374 × 10^-15, 3.33067 × 10^-16, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.}
```

```
"Donne la position du maximum de la liste li"
```

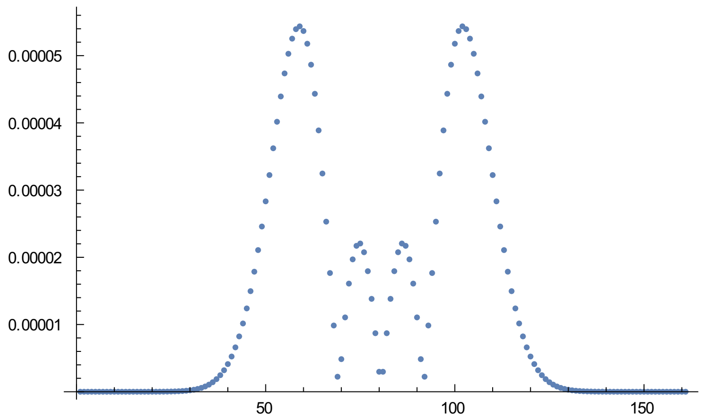
```
posmax[li_] := Position[li, Max[li]]
```

```
"Donne la valeur du maximum "
```

```
N[Max[liec[500, 1/20][90]]]
```

0.0122097

```
ListPlot [N[liec[500, 1/2][80]]]
```



courbe de l'erreur pour les 160 valeurs autour de l'espérance pour n = 500 et p = $\frac{1}{2}$.

```
pliste = Range [0.05 , 0.95 , 0.05]
```

{0.05 , 0.1 , 0.15 , 0.2 , 0.25 , 0.3 , 0.35 , 0.4 ,
0.45 , 0.5 , 0.55 , 0.6 , 0.65 , 0.7 , 0.75 , 0.8 , 0.85 , 0.9 , 0.95}

La liste des valeurs possible de p.

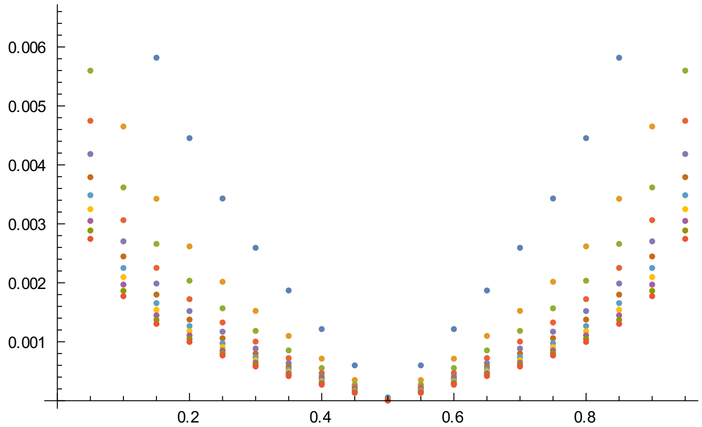
```
listemax [l_] := Table [N[Max[liec [n, p][l]]], {n, 500 , 10 000 , 950}, {p, 0.05 , 0.95 , 0.05}]

dataall [l_] := Table [Transpose @{pliste , listemax [l][[n]]}, {n, 1, Length [listemax [l]]}]

Transpose @{pliste , listemax [80][[1]]}
```

{{0.05 , 0.0122097 }, {0.1 , 0.00790603 }, {0.15 , 0.00581757 }, {0.2 , 0.00445362 },
{0.25 , 0.00342968 }, {0.3 , 0.00259352 }, {0.35 , 0.00186969 }, {0.4 , 0.00121458 },
{0.45 , 0.000599486 }, {0.5 , 0.0000543568 }, {0.55 , 0.000599486 },
{0.6 , 0.00121458 }, {0.65 , 0.00186969 }, {0.7 , 0.00259352 }, {0.75 , 0.00342968 },
{0.8 , 0.00445362 }, {0.85 , 0.00581757 }, {0.9 , 0.00790603 }, {0.95 , 0.0122097 }}

```
Affichagedescourbesdep = ListPlot [dataall [80]]
```



Nous venons de tracer pour {n, 500, 10000,950}, les courbes de l'erreur d'approximation en fonction de la probabilité p où {p, 0.05, 0.95, 0.05}. On remarque que l' erreur est une fonction décroissante de n. De plus, l'erreur est bien symétrique par rapport à p=0.5 et cela est vrai pour chaque n(On le remarque graphique mais aussi avec les valeurs de l'erreur situées au dessus).

Détermination de $\{(n,p) \epsilon N \times [0, 1],\ \text{erreur} < 10^{-4}\}$

Détermination approximative par dichotomie manuelle du couple (n,p)

```
Max[N[liec[20 000 , .552][90]]] < 10^-4
False
```

Cette section nous permet de nous rapprocher de la valeur minimum de p pour n fixé tel que l'erreur d'approximation est respectée.

Détermination des couples (n,p)

```
errverif [l_] := Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 260 , 280 , 1}, {p, 0.05 , 0.99 , 0.01 }]],
   Function [pt , Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

Cette fonction est modifiable au niveau des valeurs de p et de n.
Cette fonction donne l'ensemble des couples tel que l'erreur est inférieure à 10^{-4} avec n et p variant dans des intervalles donnés (ici n varie de 260 à 280 avec un pas de 1 et p varie de 0.05 à 0.99 avec un pas de 0.01.

Détermination de n_0

On appelle $n_0$la valeur minimale de n telle qu'il existe p telle que l'erreur d'approximation est inférieure à 10^{-4}. De plus, on sait que l'erreur d'approximation est minimale pour p=0,5 est cela pour tout n. Ainsi, on doit déterminer le couple (n_0, 0,5).

```
errverif [l_] := Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 260 , 280 , 1}, {p, 0.05 , 0.99 , 0.01 }]],
   Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

Premier point

```
errverif [l_] :=
  Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 260 , 280 , 1}, {p, 0.401 , 0.509 , 0.001 }]],
   Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First [errverif [80]]
```

```
{272 , 0.5}
```

First[errverif[80]] donne le premier élément de errverif[80]. Ainsi, ici il nous permet de déterminer la valeur de n_0.

On trouve n_0=272. Le premier point est donc (n=272,p=0.5) de la courbe de n en fonction de p telle que l'erreur d'approximation est inférieur à 10 $^{-4}$.

```
npfront = {{272 , 0.5}}
```

```
{{272 , 0.5}}
```

On rentre dans npfront les couples de (n,p) que l'on a trouvés telle que l'erreur est respectée.

Détermination d'autres couples (n,p)

Deuxième point et troisième point :

```
errverif [l_] :=
  Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 20 000 , 20 000 , 0}, {p, 0.4 , 0.7 , 0.001 }]],
   Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First [errverif [80]]
```

```
{20 000 , 0.448 }
```

```
Last [errverif [80]]
```

```
{20 000 , 0.552 }
```

Last[errverif[80]] donne le dernier élément de errverif[80].

Le deuxième point est le point (n=20 000, p=0.448) et le point bis (de la frontière du dessus) est (n=20 000 et p=0.552) --> On remarque bien la symétrie par rapport à 0,5. (0,5-0,448)=(0,552-0,5).

```
AppendTo[npfront, {20000, 0.448}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}}

```
AppendTo[npfront, {20000, 0.552}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}, {20000, 0.552}}

Quatrième point et cinquième point :

```
errverif[l_] :=
 Select[Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 80000, 80000, 0}, {p, 0.3, 0.7, 0.001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

{80000, 0.396}

```
Last[errverif[80]]
```

{80000, 0.604}

```
AppendTo[npfront, {80000, 0.396}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}, {20000, 0.552}, {80000, 0.396}}

```
AppendTo[npfront, {80000, 0.604}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}, {20000, 0.552}, {80000, 0.396}, {80000, 0.604}}

Sixième point et septième point :

```
errverif[l_] :=
 Select[Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 200000, 200000, 0}, {p, 0.34, 0.35, 0.001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

{80000, 0.396}

```
AppendTo[npfront, {200000, 0.341}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}, {20000, 0.552}, {80000, 0.396}, {80000, 0.604}, {200000, 0.341}}

```
AppendTo[npfront, {200000, 0.659}]
```

{{272, 0.5}, {20000, 0.448}, {20000, 0.552},
 {80000, 0.396}, {80000, 0.604}, {200000, 0.341}, {200000, 0.659}}

Huitième point et neuvième point :

```
errverif[l_] :=
 Select[Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 350000, 350000, 0}, {p, .29, 0.3, 0.001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif [80]]
```

{350 000 , 0.297 }

```
AppendTo [npfront , {350 000 , 0.297 }]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 },
{80 000 , 0.604 }, {200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }}

```
AppendTo [npfront , {350 000 , 0.703 }]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
{200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }}

Dixième point et onzième point :

```
errverif [l_] :=
 Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 600 000 , 600 000 , 0}, {p, .24 , .25 , 0.001 }]],
  Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif [80]]
```

{600 000 , 0.249 }

```
AppendTo [npfront , {600 000 , 0.249 }]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
{200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }, {600 000 , 0.249 }}

```
AppendTo [npfront , {600 000 , 0.751 }]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 }, {200 000 , 0.341 },
{200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }, {600 000 , 0.249 }, {600 000 , 0.751 }}

Douzième point et treizième point :

```
errverif [l_] :=
 Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 1 000 000 , 1 000 000 , 0}, {p, .19 , .24 , 0.001 }]],
  Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif [80]]
```

{1 000 000 , 0.2}

```
AppendTo [npfront , {1 000 000 , 0.2}]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
{200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 },
{600 000 , 0.249 }, {600 000 , 0.751 }, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}}

```
AppendTo [npfront , {1 000 000 , 0.8}]
```

{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
{200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }, {600 000 , 0.249 },
{600 000 , 0.751 }, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}}

Quatorzième point et Quinzième point :

```
errverif [l_] :=
 Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 1 800 000 , 1 800 000 , 0}, {p, .14 , .15 , 0.001 }]],
  Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First [errverif [80]]
```

```
{1 800 000 , 0.145 }
```

```
AppendTo [npfront , {1 800 000 , 0.145 }]
```

```
{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 }, {200 000 , 0.341 },
 {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }, {600 000 , 0.249 }, {600 000 , 0.751 },
 {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145 }}
```

```
AppendTo [npfront , {1 800 000 , 0.855 }]
```

```
{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
 {200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 },
 {600 000 , 0.249 }, {600 000 , 0.751 }, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8},
 {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145 }, {1 800 000 , 0.855 }}
```

Seizième point Dix-septième point :

```
errverif [l_] :=
 Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 4 000 000 , 4 000 000 , 0}, {p, .08 , .09 , 0.001 }]],
  Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First [errverif [80]]
```

```
{4 000 000 , 0.084 }
```

```
AppendTo [npfront , {4 000 000 , 0.084 }]
```

```
{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
 {200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 },
 {600 000 , 0.249 }, {600 000 , 0.751 }, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2},
 {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145 }, {1 800 000 , 0.855 }, {4 000 000 , 0.084 }}
```

```
AppendTo [npfront , {4 000 000 , 0.916 }]
```

```
{{272 , 0.5}, {20 000 , 0.448 }, {20 000 , 0.552 }, {80 000 , 0.396 }, {80 000 , 0.604 },
 {200 000 , 0.341 }, {200 000 , 0.659 }, {350 000 , 0.297 }, {350 000 , 0.703 }, {600 000 , 0.249 },
 {600 000 , 0.751 }, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8},
 {1 800 000 , 0.145 }, {1 800 000 , 0.855 }, {4 000 000 , 0.084 }, {4 000 000 , 0.916 }}
```

Dix-huitième point et Dix-neuvième point :

```
errverif [l_] :=
 Select [Apply [Join , Table [{n, p}, {n, 20 000 000 , 20 000 000 , 0}, {p, .02 , .03 , 0.001 }]],
  Function [pt , Max [N[liec [pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

```
{20 000 000 , 0.021}
```

```
AppendTo[npfront, {20 000 000 , 0.021}]
```

```
{{272, 0.5}, {20 000 , 0.448}, {20 000 , 0.552}, {80 000 , 0.396}, {80 000 , 0.604}, {200 000 , 0.341},
 {200 000 , 0.659}, {350 000 , 0.297}, {350 000 , 0.703}, {600 000 , 0.249}, {600 000 , 0.751},
 {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145},
 {1 800 000 , 0.855}, {4 000 000 , 0.084}, {4 000 000 , 0.916}, {20 000 000 , 0.021}}
```

```
AppendTo[npfront, {20 000 000 , 0.979}]
```

```
{{272, 0.5}, {20 000 , 0.448}, {20 000 , 0.552}, {80 000 , 0.396}, {80 000 , 0.604},
 {200 000 , 0.341}, {200 000 , 0.659}, {350 000 , 0.297}, {350 000 , 0.703},
 {600 000 , 0.249}, {600 000 , 0.751}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8},
 {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145}, {1 800 000 , 0.855},
 {4 000 000 , 0.084}, {4 000 000 , 0.916}, {20 000 000 , 0.021}, {20 000 000 , 0.979}}
```

Vingtième point et Vingt-et-unième point :

```
errverif[l_] :=
 Select[Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 50 000 000 , 50 000 000 , 0}, {p, .008, 0.009, 0.0001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

```
{50 000 000 , 0.0087}
```

```
AppendTo[npfront, {50 000 000 , 0.0087}]
```

```
{{272, 0.5}, {20 000 , 0.448}, {20 000 , 0.552}, {80 000 , 0.396}, {80 000 , 0.604},
 {200 000 , 0.341}, {200 000 , 0.659}, {350 000 , 0.297}, {350 000 , 0.703},
 {600 000 , 0.249}, {600 000 , 0.751}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2},
 {1 000 000 , 0.8}, {1 800 000 , 0.145}, {1 800 000 , 0.855}, {4 000 000 , 0.084},
 {4 000 000 , 0.916}, {20 000 000 , 0.021}, {20 000 000 , 0.979}, {50 000 000 , 0.0087}}
```

```
AppendTo[npfront, {50 000 000 , 0.9913}]
```

```
{{272, 0.5}, {20 000 , 0.448}, {20 000 , 0.552}, {80 000 , 0.396}, {80 000 , 0.604},
 {200 000 , 0.341}, {200 000 , 0.659}, {350 000 , 0.297}, {350 000 , 0.703}, {600 000 , 0.249},
 {600 000 , 0.751}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8}, {1 000 000 , 0.2}, {1 000 000 , 0.8},
 {1 800 000 , 0.145}, {1 800 000 , 0.855}, {4 000 000 , 0.084}, {4 000 000 , 0.916},
 {20 000 000 , 0.021}, {20 000 000 , 0.979}, {50 000 000 , 0.0087}, {50 000 000 , 0.9913}}
```

Vingt-deuxième point vingt-troisième point:

```
errverif[l_] :=
 Select[Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 200 000 000 , 200 000 000 , 0}, {p, .002, .003, 0.0001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

{200 000 000 , 0.0023}

```
AppendTo[npfront, {200 000 000 , 0.0023}]
```

{{272, 0.5}, {20 000, 0.448}, {20 000, 0.552}, {80 000, 0.396}, {80 000, 0.604}, {200 000, 0.341}, {200 000, 0.659}, {350 000, 0.297}, {350 000, 0.703}, {600 000, 0.249}, {600 000, 0.751}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 800 000, 0.145}, {1 800 000, 0.855}, {4 000 000, 0.084}, {4 000 000, 0.916}, {20 000 000, 0.021}, {20 000 000, 0.979}, {50 000 000, 0.0087}, {50 000 000, 0.9913}, {200 000 000, 0.0023}}

```
AppendTo[npfront, {200 000 000 , 0.9977}]
```

{{272, 0.5}, {20 000, 0.448}, {20 000, 0.552}, {80 000, 0.396}, {80 000, 0.604}, {200 000, 0.341}, {200 000, 0.659}, {350 000, 0.297}, {350 000, 0.703}, {600 000, 0.249}, {600 000, 0.751}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 800 000, 0.145}, {1 800 000, 0.855}, {4 000 000, 0.084}, {4 000 000, 0.916}, {20 000 000, 0.021}, {20 000 000, 0.979}, {50 000 000, 0.0087}, {50 000 000, 0.9913}, {200 000 000, 0.0023}, {200 000 000, 0.9977}}

Vingt quatrième point et Vingt cinquième point :

```
errverif[l_] := Select[
  Apply[Join, Table[{n, p}, {n, 500 000 000 , 500 000 000 , 0}, {p, .0008, .0009, 0.000001}]],
  Function[pt, Max[N[liec[pt⟦1⟧, pt⟦2⟧][l]]] < 10^-4]]
```

```
First[errverif[80]]
```

{500 000 000 , 0.000892}

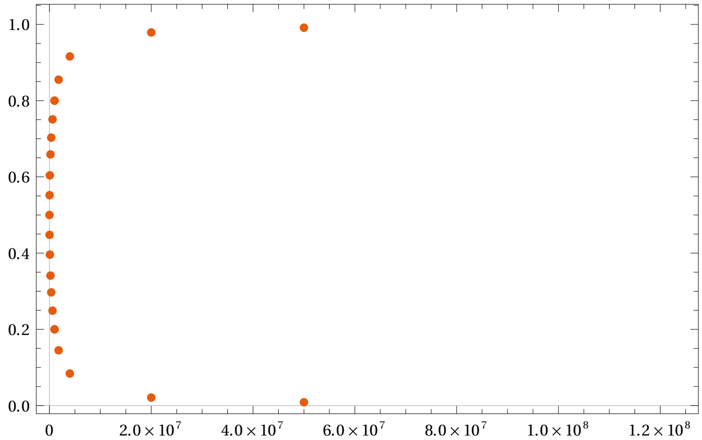
```
AppendTo[npfront, {500 000 000 , 0.0009}]
```

{{272, 0.5}, {20 000, 0.448}, {20 000, 0.552}, {80 000, 0.396}, {80 000, 0.604}, {200 000, 0.341}, {200 000, 0.659}, {350 000, 0.297}, {350 000, 0.703}, {600 000, 0.249}, {600 000, 0.751}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 800 000, 0.145}, {1 800 000, 0.855}, {4 000 000, 0.084}, {4 000 000, 0.916}, {20 000 000, 0.021}, {20 000 000, 0.979}, {50 000 000, 0.0087}, {50 000 000, 0.9913}, {200 000 000, 0.0023}, {200 000 000, 0.9977}, {500 000 000, 0.0009}}

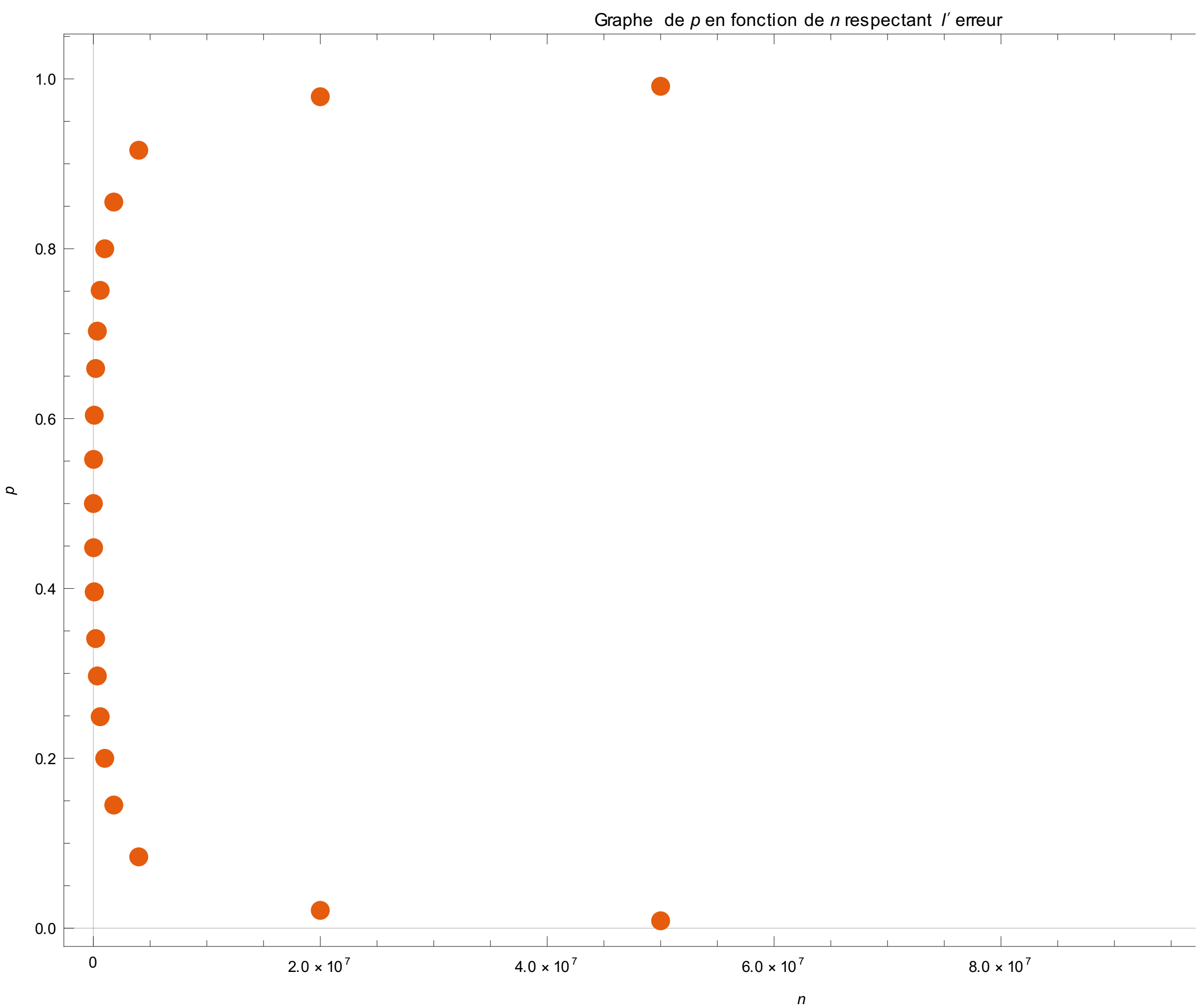
```
AppendTo[npfront, {500 000 000 , 0.9991}]
```

{{272, 0.5}, {20 000, 0.448}, {20 000, 0.552}, {80 000, 0.396}, {80 000, 0.604}, {200 000, 0.341}, {200 000, 0.659}, {350 000, 0.297}, {350 000, 0.703}, {600 000, 0.249}, {600 000, 0.751}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 000 000, 0.2}, {1 000 000, 0.8}, {1 800 000, 0.145}, {1 800 000, 0.855}, {4 000 000, 0.084}, {4 000 000, 0.916}, {20 000 000, 0.021}, {20 000 000, 0.979}, {50 000 000, 0.0087}, {50 000 000, 0.9913}, {200 000 000, 0.0023}, {200 000 000, 0.9977}, {500 000 000, 0.0009}, {500 000 000, 0.9991}}

```
ListPlot [npfront , PlotTheme  "Scientific "]
```




```
Show [%148 , FrameLabel  → {{HoldForm [p], None }, {HoldForm [n], None }},
 PlotLabel  → HoldForm [Graphe  de p en fonction  de n respectant  l′ erreur ],
 LabelStyle  → {GrayLevel [0]}]
```



Voici la courbe de p en fonction n respectant l'erreur de 10^{-4}. Ainsi, à l'intérieur l'erreur d'approximation est inférieur à 10^{-4}.

Détermination des équations de la frontière

Il nous est apparu après plusieurs essai qu'il était plus facile de trouver les équations de la frontière avec les courbes de n en fonction de p respectant l'erreur de 10^{-4}.

```
pnfront = {{0.5` , 272}, {0.448` , 20 000 }, {0.552` , 20 000 },
   {0.396` , 80 000 }, {0.604` , 80 000 }, {0.341` , 200 000 }, {0.659` , 200 000 },
   {0.297` , 350 000 }, {0.703` , 350 000 }, {0.249` , 600 000 }, {0.751` , 600 000 },
   {0.2` , 1 000 000 }, {0.8` , 1 000 000 }, {0.145` , 1 800 000 }, {0.855` , 1 800 000 },
   {0.084` , 4 000 000 }, {0.916` , 4 000 000 }, {0.021` , 20 000 000 }, {0.979` , 20 000 000 },
   {0.0087` , 50 000 000 }, {0.9913` , 50 000 000 }, {0.0023` , 200 000 000 },
   {0.9977` , 200 000 000 }, {0.0009` , 500 000 000 }, {0.9991` , 500 000 000 }};
```

```
pnfront [[{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}]]
```

```
{{0.5 , 272}, {0.552 , 20 000 }, {0.604 , 80 000 }, {0.659 , 200 000 }, {0.703 , 350 000 },
 {0.751 , 600 000 }, {0.8 , 1 000 000 }, {0.855 , 1 800 000 }, {0.916 , 4 000 000 },
 {0.979 , 20 000 000 }, {0.9913 , 50 000 000 }, {0.9977 , 200 000 000 }, {0.9991 , 500 000 000 }}
```

```
Length [pnfront ]
```

25

Détermination de la frontière par des droites

Pour p∈]0.0009, 0.0087[

```
pnfront [[{24 , 20}]]
```

```
{{0.0009 , 500 000 000 }, {0.0087 , 50 000 000 }}
```

```
f1 = Fit[pnfront [[{24 , 20}]], {1, p}, p]
```

$5.51923 \times 10^{8} - 5.76923 \times 10^{10}\, p$

Pour p∈[0.0087, 0.021[

```
pnfront [[{20 , 18}]]
```

```
{{0.0087 , 50 000 000 }, {0.021 , 20 000 000 }}
```

```
f2 = Fit[pnfront [[{20 , 18}]], {1, p}, p]
```

$7.12195 \times 10^{7} - 2.43902 \times 10^{9}\, p$

Pour p∈[0.021, 0.084[

```
pnfront [[{18 , 16}]]
```

{{0.021 , 20 000 000 }, {0.084 , 4 000 000 }}

```
f3 = Fit[pnfront [[{18 , 16}]], {1, p}, p]
```

$2.53333 \times 10^{7} - 2.53968 \times 10^{8}$ p

Pour p∈[0.084, 0.145[

```
pnfront [[{16 , 14}]]
```

{{0.084 , 4 000 000 }, {0.145 , 1 800 000 }}

```
f4 = Fit[pnfront [[{16 , 14}]], {1, p}, p]
```

$7.02951 \times 10^{6} - 3.60656 \times 10^{7}$ p

Pour p∈[0.145, 0.2[

```
pnfront [[{14 , 12}]]
```

{{0.145 , 1 800 000 }, {0.2 , 1 000 000 }}

```
f5 = Fit[pnfront [[{14 , 12}]], {1, p}, p]
```

$3.90909 \times 10^{6} - 1.45455 \times 10^{7}$ p

Pour p∈[0.2, 0.249[

```
pnfront [[{12 , 10}]]
```

{{0.2 , 1 000 000 }, {0.249 , 600 000 }}

```
f6 = Fit[pnfront [[{12 , 10}]], {1, p}, p]
```

$2.63265 \times 10^{6} - 8.16327 \times 10^{6}$ p

Pour p∈[0.249, 0.297[

```
pnfront [[{10 , 8}]]
```

{{0.249 , 600 000 }, {0.297 , 350 000 }}

```
f7 = Fit[pnfront [[{10 , 8}]], {1, p}, p]
```

$1.89687 \times 10^{6} - 5.20833 \times 10^{6}$ p

Pour p∈[0.297, 0.341[

```
pnfront [[{8, 6}]]
```

{{0.297 , 350 000 }, {0.341 , 200 000 }}

```
f8 = Fit[pnfront [[{8, 6}]], {1, p}, p]
```

$1.3625\times10^{6}-3.40909\times10^{6}\,p$

Pour p∈[0.341, 0.396[

```
pnfront [[{6, 4}]]
```

{{0.341 , 200 000 }, {0.396 , 80 000 }}

```
f9 = Fit[pnfront [[{6, 4}]], {1, p}, p]
```

$944\,000.-2.18182\times10^{6}\,p$

Pour p∈[0.396, 0.448[

```
pnfront [[{4, 2}]]
```

{{0.396 , 80 000 }, {0.448 , 20 000 }}

```
f10 = Fit[pnfront [[{3, 5}]], {1, p}, p]
```

$-616\,923.+1.15385\times10^{6}\,p$

Pour p∈[0.448, 0.5[

```
pnfront [[{2, 1}]]
```

{{0.448 , 20 000 }, {0.5 , 272}}

```
f11 = Fit[pnfront [[{2, 1}]], {1, p}, p]
```

$189\,964.-379\,385.\,p$

Pour p∈[.5, 0.552[

```
pnfront [[{1, 3}]]
```

{{0.5 , 272}, {0.552 , 20 000 }}

```
f12 = Fit[pnfront [[{1, 3}]], {1, p}, p]
```

$-189\,420.+379\,385.\,p$

Pour p∈[0.552, 0.604[

```
pnfront [[{3, 5}]]
{{0.552 , 20 000 }, {0.604 , 80 000 }}
```

```
f13 = Fit[pnfront [[{3, 5}]], {1, p}, p]
```

$-616\,923. + 1.15385 \times 10^{6}\, p$

Pour p∈[0.604, 0.659[

```
pnfront [[{5, 7}]]
{{0.604 , 80 000 }, {0.659 , 200 000 }}
```

```
f14 = Fit[pnfront [[{5, 7}]], {1, p}, p]
```

$-1.23782 \times 10^{6} + 2.18182 \times 10^{6}\, p$

Pour p∈[0.659, 0.703[

```
pnfront [[{7, 9}]]
{{0.659 , 200 000 }, {0.703 , 350 000 }}
```

```
f15 = Fit[pnfront [[{7, 9}]], {1, p}, p]
```

$-2.04659 \times 10^{6} + 3.40909 \times 10^{6}\, p$

Pour p∈[0.703, 0.751[

```
pnfront [[{9, 11}]]
{{0.703 , 350 000 }, {0.751 , 600 000 }}
```

```
f16 = Fit[pnfront [[{9, 11}]], {1, p}, p]
```

$-3.31146 \times 10^{6} + 5.20833 \times 10^{6}\, p$

Pour p∈[0.751, 0.8[

```
pnfront [[{11, 13}]]
{{0.751 , 600 000 }, {0.8 , 1 000 000 }}
```

```
f17 = Fit[pnfront [[{11, 13}]], {1, p}, p]
```

$-5.53061 \times 10^{6} + 8.16327 \times 10^{6}\, p$

Pour p∈[0.8, 0.855[

```
pnfront [[{13 , 15}]]
{{0.8 , 1 000 000 }, {0.855 , 1 800 000 }}

f18 = Fit[pnfront [[{13 , 15}]], {1, p}, p]
```

$-1.06364\times 10^{7}+1.45455\times 10^{7}\,p$

Pour p∈[0.855, 0.916[

```
pnfront [[{15 , 17}]]
{{0.855 , 1 800 000 }, {0.916 , 4 000 000 }}

f19 = Fit[pnfront [[{15 , 17}]], {1, p}, p]
```

$-2.90361\times 10^{7}+3.60656\times 10^{7}\,p$

Pour p∈[0.916, 0.979[

```
pnfront [[{17 , 19}]]
{{0.916 , 4 000 000 }, {0.979 , 20 000 000 }}

f20 = Fit[pnfront [[{17 , 19}]], {1, p}, p]
```

$-2.28635\times 10^{8}+2.53968\times 10^{8}\,p$

Pour p∈[0.979, .9913[

```
pnfront [[{19 , 21}]]
{{0.979 , 20 000 000 }, {0.9913 , 50 000 000 }}

f21 = Fit[pnfront [[{19 , 21}]], {1, p}, p]
```

$-2.3678\times 10^{9}+2.43902\times 10^{9}\,p$

Pour p∈[0.9913, 0.9991[

```
pnfront [[{21 , 25}]]
{{0.9913 , 50 000 000 }, {0.9991 , 500 000 000 }}

f22 = Fit[pnfront [[{21 , 25}]], {1, p}, p]
```

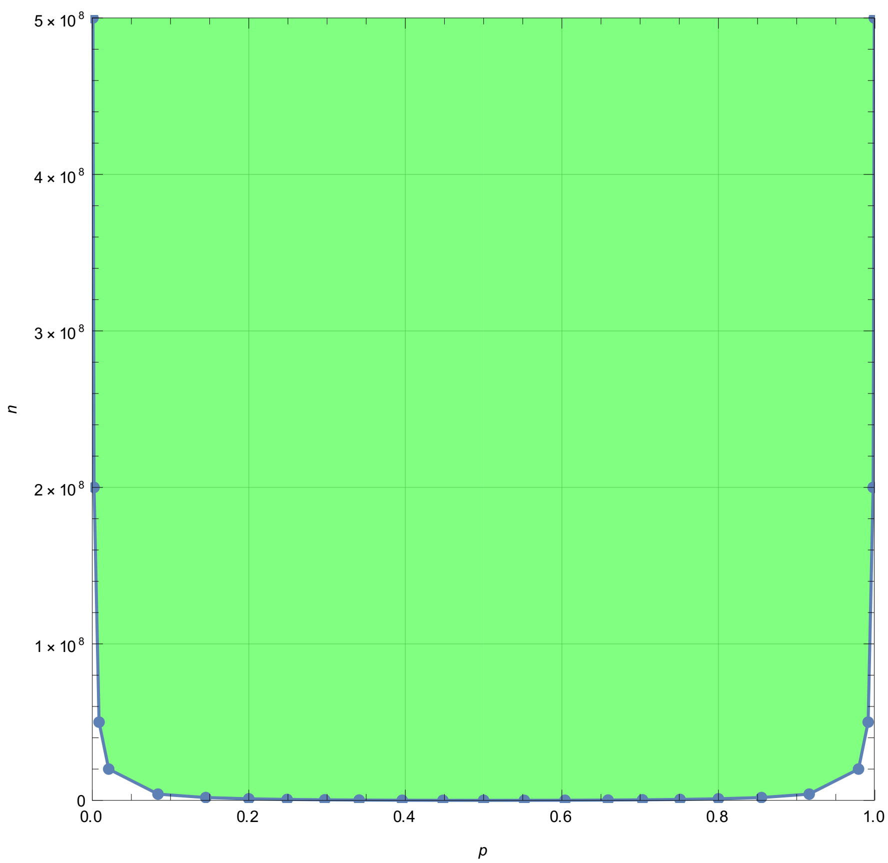
$-5.71404\times 10^{10}+5.76923\times 10^{10}\,p$

Conclusion

```
a0 = ListPlot [pnfront [[{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}]],
    PlotStyle → PointSize [Medium ], AspectRatio → 1, PlotRange → {{0, 1}, {0, 500 000 000 }},
    Frame → True , Joined → True , Filling → Top , FillingStyle → Opacity [0.5 , Green ],
    Mesh → Automatic , GridLines → Automatic , FrameLabel → {p, n}];

b0 = ListPlot [pnfront [[{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24}]],
    PlotStyle → PointSize [Medium ], AspectRatio → 1,
    PlotRange → {{0, 1}, {0, 500 000 000 }}, Frame → True , Joined → True , Filling → Top ,
    FillingStyle → Opacity [0.5 , Green ], Mesh → Automatic , FrameLabel → {p, n}];

Show [a0 , b0 , PlotRange -> All]
```



La zone verte correspond à l'ensemble des points (n,p) permettant d'avoir une erreur d'approximation inférieur à 10^{-4}. On modélise la frontière par un ensemble de portion de droites. La frontière est fonction définie par intervalle par 22 fonctions affines dépendant de p. Ainsi, ∀p∈]0,1[, il faut que $n > f_{i \in [\![1,22]\!]}(p)$ pour que l'erreur soit bien inférieur à 10^{-4}.

Finalement, les conditions sur n et p permettant d'approximer une loi binomiale B(n, p) par une loi normale $N(n\,p, \sqrt{np(1-p)})$ sont :

- $\forall p \in]0,1[$, il faut que $n \geq 272$ pour que l'erreur soit inférieur à 10^{-4}.
- Ensuite, selon la valeur de p comprise dans les intervalles suivant]0, 0.01[, [0.01, 0.02[, [0.02, 0.1[, [0.1, 0.15[, [0.15, 0.2[, [0.2, 0.25[, [0.25, 0.3[, [0.3, 0.35[, [0.35, 0.4[, [0.4, 0.45[, [0.45, 0.5[, [0.5, 0.55[, [0.55, 0.6[, [0.6, 0.65[, [0.65, 0.7[, [0.7, 0.75[, [0.75, 0.8[, [0.8, 0.85[, [0.85, 0.9[, [0.90, 0.98[, [0.98, 0.99[, [0.99, 1[, il faudra que $n > f_{i \in [\![1,22]\!]}(p)$.

Les fonctions affines sont :

```
{f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9, f10, f11,
 f12, f13, f14, f15, f16, f17, f18, f19, f20, f21, f22}
```

$$\{5.51923\times 10^{8}-5.76923\times 10^{10}\,p,\ 7.12195\times 10^{7}-2.43902\times 10^{9}\,p,\ 2.53333\times 10^{7}-2.53968\times 10^{8}\,p,\ 7.02951\times 10^{6}-3.60656\times 10^{7}\,p,\ 3.90909\times 10^{6}-1.45455\times 10^{7}\,p,\ 2.63265\times 10^{6}-8.16327\times 10^{6}\,p,\ 1.89687\times 10^{6}-5.20833\times 10^{6}\,p,\ 1.3625\times 10^{6}-3.40909\times 10^{6}\,p,\ 944000.-2.18182\times 10^{6}\,p,\ -616923.+1.15385\times 10^{6}\,p,\ 189964.-379385.\,p,\ -189420.+379385.\,p,\ -616923.+1.15385\times 10^{6}\,p,\ -1.23782\times 10^{6}+2.18182\times 10^{6}\,p,\ -2.04659\times 10^{6}+3.40909\times 10^{6}\,p,\ -3.31146\times 10^{6}+5.20833\times 10^{6}\,p,\ -5.53061\times 10^{6}+8.16327\times 10^{6}\,p,\ -1.06364\times 10^{7}+1.45455\times 10^{7}\,p,\ -2.90361\times 10^{7}+3.60656\times 10^{7}\,p,\ -2.28635\times 10^{8}+2.53968\times 10^{8}\,p,\ -2.3678\times 10^{9}+2.43902\times 10^{9}\,p,\ -5.71404\times 10^{10}+5.76923\times 10^{10}\,p\}$$

Au dessus, on trouve les différentes fonctions affine qui délimite la frontière.

Pour $n \geq 272$, la fonction nmin(p) permet de déterminer la valeur minimale $n_{\min}$ pour respecter l'approximation.

```
Style["∀p∈]0,1[,il faut que n>nmin(p)", FontColor → Red]
```

∀p∈]0,1[,il faut que n>nmin(p)

```
nmin[p_] := Piecewise [{{5.519230769230769`*^8 - 5.76923076923077`*^10 p, 0 < p <= 0.0087` },
  {7.12195121951219`*^7 - 2.4390243902439003`*^9 p, 0.0087` < p <= 0.021` },
  {2.5333333333333343`*^7 - 2.53968253968254`*^8 p, 0.021` < p <= 0.084` },
  {7.029508196721309`*^6 - 3.6065573770491794`*^7 p, 0.084` < p <= 0.145` },
  {3.909090909090907`*^6 - 1.4545454545454537`*^7 p, 0.145` < p <= 0.2},
  {2.632653061224488`*^6 - 8.163265306122442`*^6 p, 0.2 < p <= 0.249` },
  {1.8968749999999981`*^6 - 5.208333333333327`*^6 p, 0.249` < p <= 0.297` },
  {1.3624999999999995`*^6 - 3.4090909090909073`*^6 p, 0.297` < p <= 0.341` },
  {943999.9999999997` - 2.1818181818181816`*^6 p, 0.341` < p <= 0.396` },
  {-616923.0769230772` + 1.1538461538461542`*^6 p, 0.396` < p <= 0.448` },
  {189964.3076923076` - 379384.61538461526` p, 0.448` < p <= 0.5},
  {-189420.30769230734` + 379384.6153846149` p, 0.5 < p <= 0.552` },
  {-616923.0769230772` + 1.1538461538461542`*^6 p, 0.552` < p <= 0.604` },
  {-1.237818181818179`*^6 + 2.1818181818181775`*^6 p, 0.604` < p <= 0.659` },
  {-2.0465909090909122`*^6 + 3.409090909090914`*^6 p, 0.659` < p <= 0.703` },
  {-3.3114583333333274`*^6 + 5.208333333333326`*^6 p, 0.703` < p <= 0.751` },
  {-5.530612244897939`*^6 + 8.163265306122426`*^6 p, 0.751` < p <= 0.8},
  {-1.0636363636363626`*^7 + 1.4545454545454532`*^7 p, 0.8 < p <= 0.855` },
  {-2.9036065573770307`*^7 + 3.606557377049161`*^7 p, 0.855` < p <= 0.916` },
  {-2.286349206349205`*^8 + 2.539682539682539`*^8 p, 0.916` < p <= 0.979` },
  {-2.367804878048794`*^9 + 2.439024390243916`*^9 p, 0.979` < p <= 0.9913` },
  {-5.714038461538405`*^10 + 5.769230769230712`*^10 p, 0.9913` < p < 1}}]
```

Exemple d’utilisation de la fonction :

```
nmin[0.6]
```

75 384.6