统计力学第一次作业

姓名：杨阳
学号：150*******
专业：流体力学

1. 蒙特卡洛模拟实验，利用计算机模拟投掷硬币。

（1）投掷一枚硬币，统计正面朝上和反面朝上事件出现的频率，并于对应事件的概率相比较。

分析：

规定 1 表示硬币正面朝上的情形，规定 0 表示硬币反面朝上的情形。

通过概率论的方法我们知道：

$$P\{\xi=1\}=\frac{1}{2}，P\{\xi=0\}=\frac{1}{2}$$

这里的ξ为一个离散的随机变量，也就是正面朝上的反面的概率相同并且都等于二分之一。

为了能够在计算机中模拟这两种情形，需要利用均匀分布的随机数产生器，有了均匀分布的随机数（变量），通过均匀分布随机变量的函数分布就可以产生任意其它希望形式的分布，也可以产生投掷硬币对应的随机变量的两点分布，这个过程的数学表述为：

$$\eta \sim Unifom(0,1)$$

$$\xi = F^{-1}(\eta)$$

$$\xi \sim B(0,1)$$

其中

$$F^{-1}(\eta)=\begin{cases}0,\eta<0.5\\1,\eta>0.5\end{cases}$$

计算机模拟的过程中，不可能得到概率，只能得到频率，而频率会随着实验次数的增加而逐渐逼近概率，这个过程可以用下面的数学进行表达：

$$F\{\xi=1\}=\frac{\mathrm{n}\{\xi=1\}}{N}$$

$$F\{\xi=0\}=\frac{\mathrm{n}\{\xi=0\}}{N}$$

$$F\{\xi=1\}\overset{N\to\infty}{\rightarrow}P\{\xi=1\}$$

$$F\{\xi=0\}\overset{N\to\infty}{\rightarrow}P\{\xi=0\}$$

其中的 N 表示实验的次数，而 n 表示事件发生的次数，F 表示频率，P 表示概率。有了上面的这些理论就可以编程，并形象的展现出这个收敛的过程。

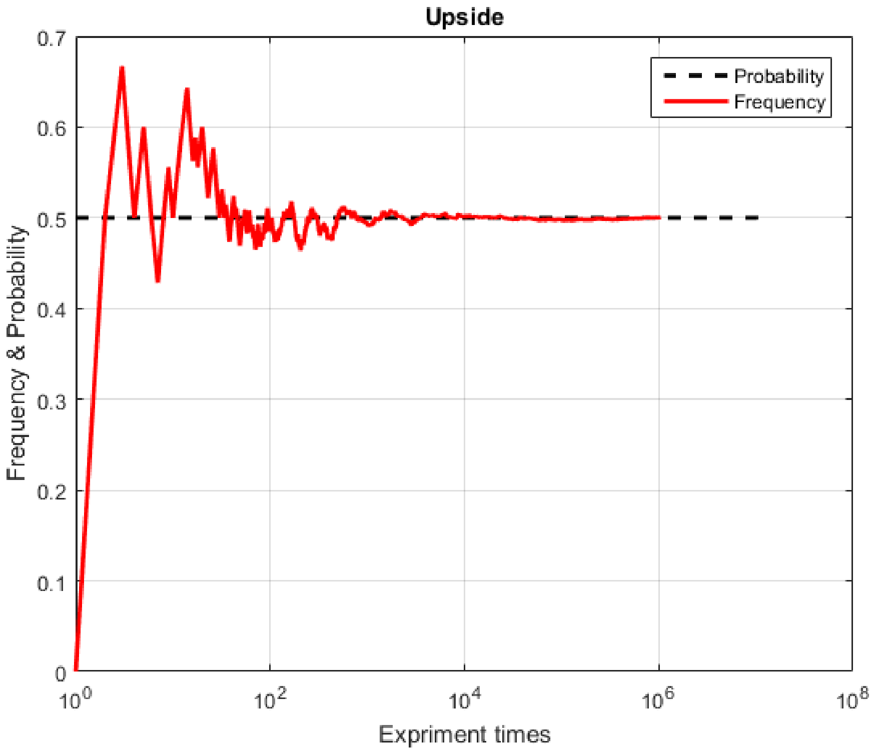

图 1.1 硬币正面朝上

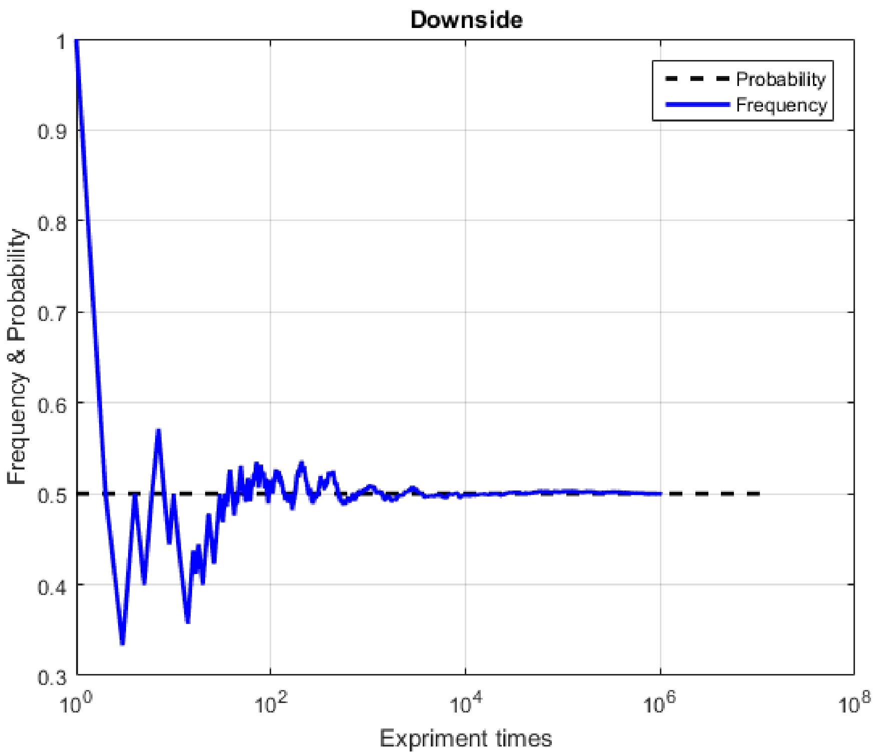

图 1.2 硬币反面朝上

分析：

从图中可以看出第一次实验的时候，显然是反面朝上的。

其次，我们看到随着实验次数的增加，频率确实是收敛到了概率。

至少要到一万次实验才能得到较好的统计结果。

验证了硬币正面朝上的概率和反面朝上的概率确实是相等的而且是二分之一。

问题：

如果硬币不均匀的情况会怎么样？能不能更少的实验次数就呈现出统计规律？

（2）独立的投掷两枚硬币，统计两个正面，一正一反，一反一正，两个反面事件出现的频率，并于对应事件出现的概率相比较。

分析：独立投掷两枚硬币意味着两枚硬币的状态是相互独立的。因而有下面的概率公式成立：

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$$

即 A、B 事件同时发生的概率等于 A 事件发生的概率乘以 B 事件发生的概率，前提是 A、B 两个事件是相互独立的。

我们用一个表格表示投掷两枚硬币可能出现的状态：

2\1	0	1
0	00	10
1	01	11

而对应的概率的数学表达如下：

$$P\left\{\xi_1=0,\xi_2=0\right\}=P\left\{\xi_1=0\right\}P\left\{\xi_2=0\right\}=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\xi_1=0,\xi_2=1\right\}=P\left\{\xi_1=0\right\}P\left\{\xi_2=1\right\}=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\xi_1=1,\xi_2=0\right\}=P\left\{\xi_1=1\right\}P\left\{\xi_2=0\right\}=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\xi_1=1,\xi_2=1\right\}=P\left\{\xi_1=1\right\}P\left\{\xi_2=1\right\}=\frac{1}{4}$$

我们知道两枚硬币是独立的，并且硬币是均匀的，因此两枚硬币构成的系统每种状态出现的概率都是一样的而且都等于四分之一。计算机模拟的方法与(1)中的类似。模拟结果绘制在下图中。

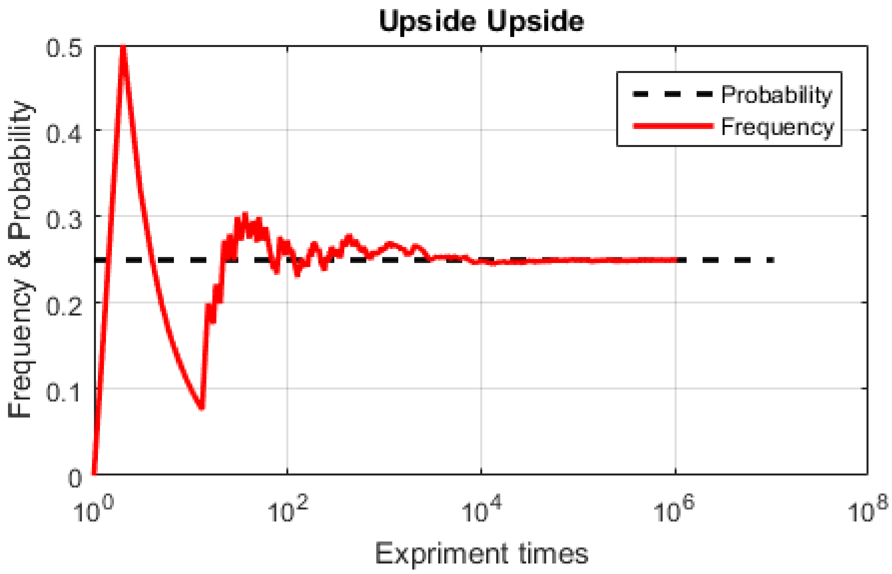

图 1.3 两枚硬币均为正面朝上

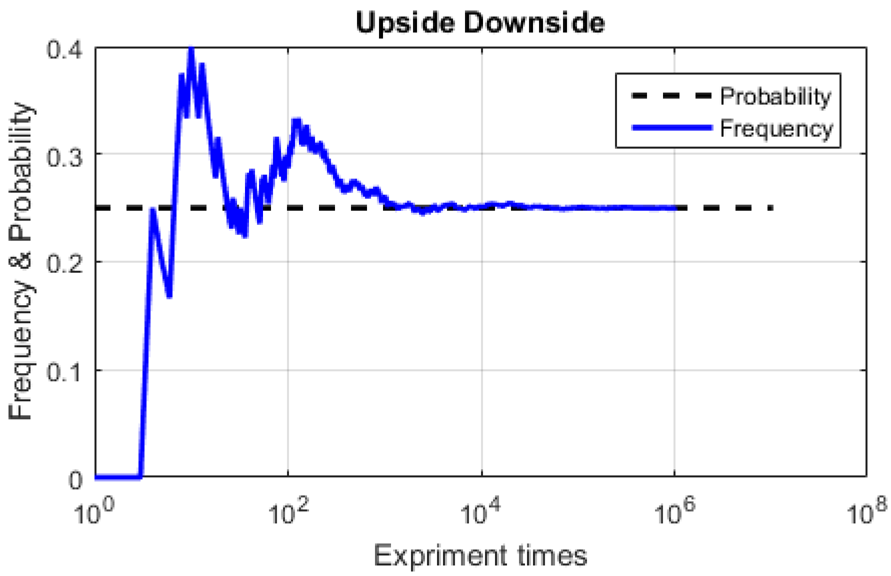

图 1.4 一枚硬币正面朝上，一枚反面朝上

分析：

同样的我们也能得到和（1）中类似的结论，比如第一次投掷的时候是一枚反面朝上一枚正面朝上的情况。其次至少需要一万次实验才能很好地显示出统计规律。另外这个计算机蒙特卡洛实验验证了我们计算出来的概率。

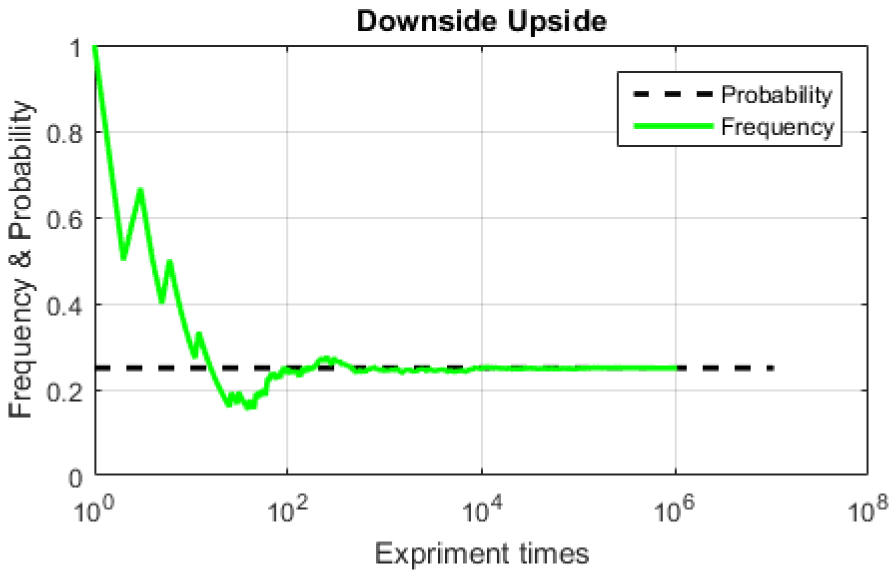

图 1.5 一枚硬币反面朝上，一枚硬币正面朝上

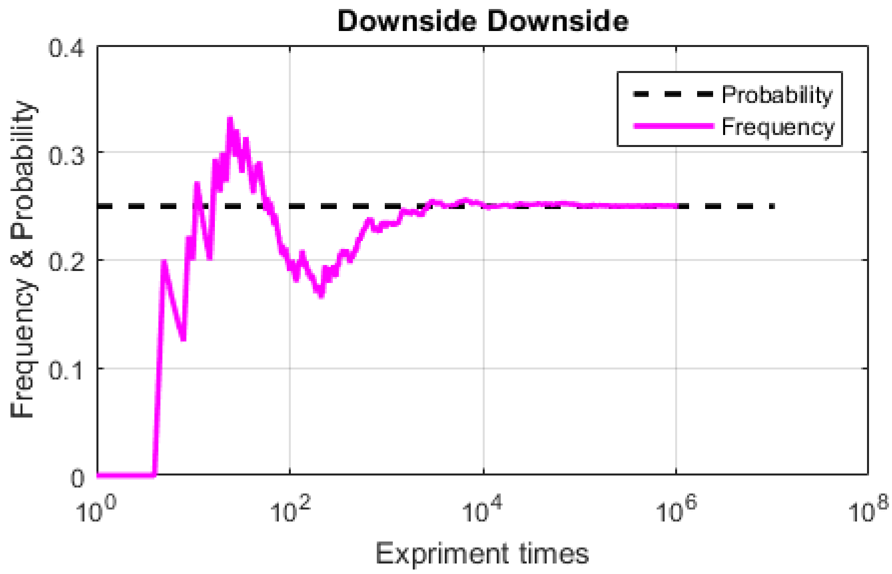

图 1.6 两枚硬币均反面朝上

分析：

同样的我们也能得到和（1）中类似的结论，比如第一次投掷的时候是一枚反面朝上一枚正面朝上的情况。其次至少需要一万次实验才能很好地显示出统计规律。另外这个计算机蒙特卡洛实验验证了我们计算出来的概率。

2. 已知：

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

验证下面的关系：

$$\left\langle \left(\Delta f\right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \left(\Delta f_i\right)^2 \right\rangle$$

根据事件的独立性：

$$\Delta f = f - \overline{f} = \left(f_1 + f_2 + f_3\right) - \left(\overline{f}_1 + \overline{f}_2 + \overline{f}_3\right)$$

因此：

$$\left(\Delta f\right)^2 = \left(f - \overline{f}\right)^2 = f^2 + \overline{f}^2 - 2f\overline{f}$$

$$= \left[\left(f_1 + f_2 + f_3\right) - \left(\overline{f}_1 + \overline{f}_2 + \overline{f}_3\right)\right]^2$$

$$= \left(f_1 + f_2 + f_3\right)^2 + \left(\overline{f}_1 + \overline{f}_2 + \overline{f}_3\right)^2 - 2\left(f_1 + f_2 + f_3\right)\left(\overline{f}_1 + \overline{f}_2 + \overline{f}_3\right)$$

$$= \left(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2f_1f_2 + 2f_1f_3 + 2f_2f_3\right) + \left(\overline{f}_1^{\,2} + \overline{f}_2^{\,2} + \overline{f}_3^{\,2} + 2\overline{f}_1\overline{f}_2 + 2\overline{f}_1\overline{f}_3 + 2\overline{f}_2\overline{f}_3\right)$$

$$-2\left(f_1\overline{f}_1 + f_2\overline{f}_2 + f_3\overline{f}_3 + f_1\overline{f}_2 + f_2\overline{f}_1 + f_1\overline{f}_3 + f_3\overline{f}_1 + f_2\overline{f}_3 + f_3\overline{f}_2\right)$$

对上式进行系综平均，并利用事件独立的性质可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\left\langle (\Delta f)^2 \right\rangle = \left\langle \left(f-\overline{f} \right)^2 \right\rangle = \left\langle f^2+\overline{f}^2-2f\overline{f} \right\rangle \\
&=\left\langle (f_1+f_2+f_3)^2+\left(\overline{f}_1+\overline{f}_2+\overline{f}_3\right)^2-2(f_1+f_2+f_3)\left(\overline{f}_1+\overline{f}_2+\overline{f}_3\right) \right\rangle \\
&=\left\langle \begin{matrix} \left(f_1^2+f_2^2+f_3^2+2f_1f_2+2f_1f_3+2f_2f_3\right)+\left(\overline{f}_1^2+\overline{f}_2^2+\overline{f}_3^2+2\overline{f}_1\overline{f}_2+2\overline{f}_1\overline{f}_3+2\overline{f}_2\overline{f}_3\right) \\ -2\left(f_1\overline{f}_1+f_2\overline{f}_2+f_3\overline{f}_3+f_1\overline{f}_2+f_2\overline{f}_1+f_1\overline{f}_3+f_3\overline{f}_1+f_2\overline{f}_3+f_3\overline{f}_2\right) \end{matrix} \right\rangle \\
&=\overline{f_1^2}+\overline{f_2^2}+\overline{f_3^2}+2\overline{f_1f_2}+2\overline{f_1f_3}+2\overline{f_2f_3}+\overline{\overline{f}_1^2}+\overline{\overline{f}_2^2}+\overline{\overline{f}_3^2}+2\overline{\overline{f}_1\overline{f}_2}+2\overline{\overline{f}_1\overline{f}_3}+2\overline{\overline{f}_2\overline{f}_3} \\
&-2\left(\overline{f_1\overline{f}_1}+\overline{f_2\overline{f}_2}+\overline{f_3\overline{f}_3}+\overline{f_1\overline{f}_2}+\overline{f_2\overline{f}_1}+\overline{f_1\overline{f}_3}+\overline{f_3\overline{f}_1}+\overline{f_2\overline{f}_3}+\overline{f_3\overline{f}_2}\right) \\
&=\overline{f_1^2}+\overline{f_2^2}+\overline{f_3^2}+2\overline{f}_1\overline{f}_2+2\overline{f}_1\overline{f}_3+2\overline{f}_2\overline{f}_3+\overline{f}_1^2+\overline{f}_2^2+\overline{f}_3^2+2\overline{f}_1\overline{f}_2+2\overline{f}_1\overline{f}_3+2\overline{f}_2\overline{f}_3 \\
&-2\left(\overline{f}_1\overline{f}_1+\overline{f}_2\overline{f}_2+\overline{f}_3\overline{f}_3+\overline{f}_1\overline{f}_2+\overline{f}_2\overline{f}_1+\overline{f}_1\overline{f}_3+\overline{f}_3\overline{f}_1+\overline{f}_2\overline{f}_3+\overline{f}_3\overline{f}_2\right) \\
&=\overline{f_1^2}+\overline{f_2^2}+\overline{f_3^2}-\overline{f}_1^2+\overline{f}_2^2+\overline{f}_3^2 \\
&=\left(\overline{f_1^2}-\overline{f}_1^2\right)+\left(\overline{f_2^2}-\overline{f}_2^2\right)+\left(\overline{f_3^2}-\overline{f}_3^2\right)
\end{aligned}
$$

再由：

$$
\left(\Delta f_i\right)^2=\left(f_i-\overline{f_i}\right)^2=f_i^2+\overline{f_i}^2-2f_i\overline{f_i}=\overline{f_i^2}-\overline{f}_i^2
$$

因此验证了表达式：

$$
\left\langle (\Delta f)^2 \right\rangle=\sum_{i=1}^{3}\left\langle \left(\Delta f_i\right)^2 \right\rangle
$$

程序附录：

MonteCarloCoinExp.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% Program name:     MonteCarloCoinExp.m
%%%% Program purpose:  Monte Carlo
Simulation of Coin Experiment
%%%% Program Author:  Yang Yang
%%%% Create Date:       25/2/2015
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Parameters and Variables
N = 2^20;      % Numbers of experiments

%% Srochastic variables generation
% One coin situation
xi = zeros(1,N);                    %
stochastic variables obey uniform
```

```
distribution
parfor i = 1:N
    xi(i) = rand();
end
eta = arrayfun(@Coin_Fun,xi);    %
stochastic variables represent coin state
                                     % '1' for
upside '0' for downside
clear xi

% Two coin situation
xi = zeros(1,N);                    %
stochastic variables obey uniform
distribution
parfor i = 1:N
    xi1(i) = rand();
    xi2(i) = rand();
end
eta1 = arrayfun(@Coin_Fun,xi1);
eta2 = arrayfun(@Coin_Fun,xi2);

clear xi1 xi2
```

```
%% Statistics
% only one coin
counter0 = 0;
counter1 = 0;
Freq_arry0 = zeros(1,N);
Freq_arry1 = zeros(1,N);
for i = 1:N
    if eta(i) == 0
        counter0 = counter0 + 1;
    else
        counter1 = counter1 + 1;
    end

    Freq_arry0(i) = counter0/i;
    Freq_arry1(i) = counter1/i;
end

% two coin situation
counter00 = 0;
counter01 = 0;
counter10 = 0;
counter11 = 0;
```

```
Freq_arry00 = zeros(1,N);
Freq_arry01 = zeros(1,N);
Freq_arry10 = zeros(1,N);
Freq_arry11 = zeros(1,N);
for i = 1:N
    if eta1(i) == 0 && eta2(i) == 0
        counter00 = counter00 + 1;
    elseif eta1(i) == 0 && eta2(i) == 1
        counter01 = counter01 + 1;
    elseif eta1(i) == 1 && eta2(i) == 0
        counter10 = counter10 + 1;
    else
        counter11 = counter11 + 1;
    end

    Freq_arry00(i) = counter00/i;
    Freq_arry01(i) = counter01/i;
    Freq_arry10(i) = counter10/i;
    Freq_arry11(i) = counter11/i;
end


%% plot results
```

```
% one coin
fig1 = figure(1);
set(fig1,'Color',[1 1 1]);
subplot(1,2,1);
semilogx(1/2*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry1,'r','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
title('Upside');
xlabel('Expriment times');
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

subplot(1,2,2)
semilogx(1/2*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry0,'b','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
title('Downside');
xlabel('Expriment times');
```

```
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

% two coin
fig2 = figure(2);
set(fig2,'Color',[1 1 1]);
subplot(2,2,1)
semilogx(1/4*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry11,'r','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
title('Upside Upside');
xlabel('Expriment times');
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

subplot(2,2,2)
semilogx(1/4*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry10,'b','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
```

```
title('Upside Downside');
xlabel('Expriment times');
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

subplot(2,2,3)
semilogx(1/4*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry01,'g','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
title('Downside Upside');
xlabel('Expriment times');
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

subplot(2,2,4)
semilogx(1/4*ones(1,N*10),'k--
','linewidth',2);
grid on; hold on;
semilogx(Freq_arry00,'m','linewidth',2);
legend('Probability','Frequency');
title('Downside Downside');
```

```
xlabel('Expriment times');
ylabel('Frequency & Probability');
hold off;

clear
```

```
Coin_Fun.m
```

```
function eta  = Coin_Fun( xi )
% this function transfer one stochastic variable xi to another stochastic variable eta
% Which means the structure of two side of coin
if xi < 0.5
    eta = 0;
else
    eta = 1;
end

end
```