قدرت بی‌نهایت

چگونه حسابان رازهای گیتی را آشکار می‌کند

استیون استروگاتز

ترجمه‌ی قاسم کیانی مقدم

نام انتشارات

فهرست

مقدمه

بدون حسابان، از تلفن همراه، کامپیوتر، یا فر مایکروویو خبری نمی‌بود. نه رادیو می‌داشتیم، نه تلویزیون. نه دستگاه سونوگرافی برای مادران باردار، و نه دستگاه GPS برای مسافران گم‌شده. نه اتم را می‌شکافتیم، نه از ژنوم انسان پرده برمی‌داشتیم، و نه فضانورد به ماه می‌فرستادیم. شاید حتی «اعلامیه‌ی استقلال» هم نمی‌داشتیم.

این از عجایب تاریخ است که یک رشته‌ی ناآشنای ریاضیات، جهان را برای همیشه تغییر داد. چطور ممکن است نظریه‌ای که در آغاز درباره‌ی شکل‌ها بود، سرانجام بتواند تمدن را شکلی دوباره بدهد؟

عصاره‌ی پاسخ را می‌توان در گفته‌ای طنزآمیز از ریچارد فاینمنِ فیزیک‌دان یافت که خطاب به هرمان ووکِ رمان‌نویس هنگام بحث بر سر پروژه‌ی مَنهَتَن بر زبان راند. ووک داشت برای رمان بزرگی که می‌خواست درباره‌ی جنگ جهانی دوم بنویسد، تحقیق می‌کرد، و به کَلتِک رفته بود تا با فیزیک‌دانانی که بر روی بمب اتمی کار کرده بودند، مصاحبه کند، و فاینمن هم یکی از این افراد بود. بعد از مصاحبه، هنگام خداحافظی، فاینمن از ووک پرسید که آیا حسابان می‌داند. ووک جواب داد که نه، نمی‌داند. فاینمن گفت: «بهتر است یاد بگیرید. حسابان زبانی است که خدا به آن صحبت می‌کند.»

به دلایلی که هیچ‌کس نمی‌فهمد، گیتی عمیقاً بر پایه‌ی ریاضیات است. شاید خدا آن را این‌گونه ساخته است. یا این‌که شاید این تنها جوری است که گیتی‌ای که ما در آن هستیم، می‌توانست باشد، زیرا گیتی‌های غیرریاضی نمی‌توانند چنان حیات هوشمندی داشته باشند که این سؤال را بپرسد. به هر حال، واقعیت اسرارآمیز و شگفت‌انگیز این است که دنیای ما از قوانین طبیعت پیروی می‌کند که از قضا همیشه می‌توان آن‌ها را به زبان حسابان به‌صورت جمله‌هایی که معادلات دیفرانسیل نامیده می‌شوند، بیان کرد. این‌گونه معادلات، تفاوت یک چیز را در این زمان و همان چیز را در یک لحظه‌ی بعد و یا چیزی را در این‌جا و همان چیز را در فاصله‌ای بی‌نهایت‌کوچک از این‌جا توصیف می‌کند. جزئیات بسته به این‌که درباره‌ی چه بخشی از طبیعت صحبت می‌کنیم، متفاوت

است، ولی ساختار قوانین همواره یکسان است. برای این‌که این مطلب عالی را به‌گونه‌ی دیگری بیان کنیم، به نظر می‌رسد که گویا گیتی چیزی مانند یک قانون درونی دارد، نوعی سیستم عامل که همه چیز را از لحظه‌ای به لحظه‌ای و از جایی به جایی به حرکت درمی‌آورد. حسابان به بررسی این نظم می‌پردازد و آن را بیان می‌کند.

آیزاک نیوتن نخستین کسی بود که نگاهی به این راز گیتی افکند. او مشاهده کرد که مدار سیاره‌ها، آهنگ جزر و مد، و مسیر گلوله‌های توپ را همگی می‌توان با مجموعه‌ی کوچکی از معادلات دیفرانسیل بیان کرد، توضیح داد، و پیش‌بینی نمود. امروزه به آن‌ها قوانین حرکت و گرانش نیوتن می‌گوییم. از زمان نیوتن تا کنون، متوجه شده‌ایم که هر گاه بخش جدیدی از گیتی را کشف می‌کنیم، همان الگو را مشاهده می‌کنیم. از عناصر قدیمی خاک، باد، آتش، و آب تا جدیدترین آن‌ها همچون الکترون‌ها، کوارک‌ها، سیاه‌چاله‌ها، و اَبَرریسمان‌ها، هر چیز بی‌جانی در گیتی در مقابل معادلات دیفرانسیل سر خم می‌کند. شک ندارم که منظور فاینمن هم همین بود که گفت حسابان زبانی است که خدا به آن صحبت می‌کند. اگر چیزی باشد که لیاقت آن را داشته باشد که آن را راز گیتی بمانیم، همانا حسابان است.

ولی انسان‌ها، با کشف ناخودآگاه این زبان عجیب، ابتدا در گوشه‌وکنار هندسه و بعد در قانون گیتی، و آن‌گاه با یاد گرفتن تکلمِ روان به این زبان و رمزگشایی از اصطلاحات و معانی پنهان آن، و سرانجام با مهارَ کردن قدرت پیش‌بینی‌کننده‌ی آن، حسابان را برای ساختن دوباره‌ی جهان به کار گرفته‌اند.

این بحث اصلی در این کتاب است.

اگر چنین باشد، بدان معنا است که پاسخ پرسش غایی زندگی، گیتی، و همه چیز، با عذرخواهی از هواداران داگلاس آدامز و *راهنمای کهکشان برای مفت‌سواران*، ۴۲ نیست. ولی «اندیشه‌ی ژرف» [کامپیوتر شطرنج‌باز] حرفش درست بود: راز گیتی حقیقتاً ریاضی است.

حسابان برای همه

شوخی فاینمن درباره‌ی زبان خدا، سؤالات عمیق زیادی را مطرح می‌کند. حسابان چیست؟ انسان‌ها از کجا فهمیدند که خدا به این زبان سخن می‌گوید (یا به بیان دیگر، دنیا بر پایه‌ی آن استوار است)؟ معادلات دیفرانسیل چیست و برای دنیا چه کرده است، نه فقط در زمان نیوتن که در زمان ما نیز؟ سرانجام این‌که چگونه می‌توان این داستان‌ها و ایده‌ها را به شیوه‌ای لذت‌بخش و هوشمندانه به خوانندگان علاقه‌مندی

مانند هرمان ووک ارائه کرد، افرادی که متفکر و کنجکاو و باسوادند، ولی سابقه‌ی چندانی در زمینه‌ی ریاضیات پیشرفته ندارند؟

ووک بعداً در شرح دیدارش با فاینمن نوشت که او تا چهارده سال اصلاً فرصت نکرد به سراغ یاد گرفتن حسابان برود. رمان بزرگش دست آخر به دو رمان بزرگ هزارصفحه‌ای تبدیل شد: *بادهای جنگ* و *جنگ و یادبود*. وقتی که کار رمان‌ها به پایان رسید، سعی کرد با خواندن کتاب‌هایی با عناوینی از قبیل *حسابان به زبان ساده* چیزهایی یاد بگیرد—ولی به جایی نرسید. چند کتاب درسی را تورق کرد، بدان امید که به قول خودش «کتابی پیدا کنم که به درد آدمی مثل من بخورد که از ریاضی بی‌اطلاع هستم و سال‌های دانشکده را در جستجویی کودکانه برای معنای زندگی صرف علوم انسانی—یعنی ادبیات و فلسفه—کرده‌ام، بی‌آنکه بدانم که حسابان، که شنیده بودم درس سخت خسته کننده‌ای است که به جایی نمی‌رسد، زبانی است که خدا به آن سخن می‌گوید.» بعد از آن‌که از خواندن کتاب‌های درسی به جایی نرسید، یک معلم خصوصی اسرائیلی گرفت بدان امید که کمی حسابان بیاموزد و در کنار آن، مکالمه‌ی عبری خود را نیز بهبود بخشد، ولی هر دو امید بی‌ثمر ماند. سرانجام از سر ناامیدی در یک کلاس حسابان دبیرستان نام‌نویسی کرد، ولی از بقیه‌ی شاگردان خیلی عقب افتاد و مجبور شد بعد از یکی دو ماه آن را رها کند. وقتی که کلاس را ترک می‌کرد، شاگردان برایش دست می‌زدند. گفت مثل دست زدن ترحم‌آمیز تماشاچیان برای یک اجرای نمایش رقت‌انگیز بود.

من کتاب *قدرت بی‌نهایت* را بدان هدف نوشته‌ام که ایده‌ها و داستان‌های عالی حسابان را در دسترس همگان قرار دهم. نباید لازم باشد که مثل هرمان ووک به زحمت بیفتید تا درباره‌ی این اختراع بزرگ تاریخ بشر چیزی یاد بگیرید. حسابان یکی از الهام‌بخش‌ترین دستاوردهای جمعی بشریت است. برای این‌که ارزش حسابان را درک کنید، نباید حتماً خودتان راه انجام آن را بلد باشید، درست همان‌طور که برای این‌که از خوردن یک غذای عالی لذت ببرید، حتماً لازم نیست که خودتان طرز درست کردن آن را بلد باشید. من سعی خواهم کرد همه‌ی چیزهایی را که لازم داریم، به‌کمک تصویرها، تمثیلات، و قصه‌هایی بیان کنم. به‌علاوه، برخی از زیباترین معادلات و برهان‌هایی را که تا کنون کشف شده‌اند، به شما نشان خواهم داد، زیرا چطور می‌توانید از یک نگارخانه دیدن کنید، بدون آن‌که شاهکارهای آن را ببینید؟ و اما در مورد هرمان ووک، او الآن در زمان نوشتن این کتاب ۱۰۳ سال سن دارد. نمی‌دانم تا حالا حسابان را یاد گرفته است یا نه، ولی اگر یاد نگرفته است، به او می‌گویم که این کتاب برای شما است، آقای ووک.

جهان از نگاه حسابان

اکنون دیگر باید روشن باشد که من قصد دارم قصه و اهمیت حسابان را از نگاه یک ریاضی‌دان کاربردی بازگو کنم. از زبان کسی که متخصص تاریخ ریاضیات باشد، داستان طور دیگری بازگو می‌شد. یا کسی که ریاضی‌دان محض باشد. آن‌چه برای من، به‌عنوان یک ریاضی‌دان کاربردی جذاب است، کشمکش بین دنیای واقعی پیرامون ما و دنیای ایده‌آل درون ذهن ما است. پرسش‌های ریاضی که می‌پرسیم، بر پایه‌ی پدیده‌های دنیای بیرون است؛ بر عکس، ریاضیاتی که در ذهن به تصور درمی‌آوریم، گاه آن‌چه را در واقعیت رخ می‌دهد، پیش‌گویی می‌کند. در این‌گونه موارد، تأثیر غریبی در پی دارد.

در رشته‌ی ریاضیات کاربردی، باید برون‌نگر و از نظر فکری بی‌قید باشید. برای کسانی که مانند من در این رشته هستند، ریاضی یک دنیای پاک و بی‌آلایش از قضیه‌ها و برهان‌هایی که بر یکدیگر متکی هستند، نیست. ما از تمام رشته‌ها استقبال می‌کنیم: فلسفه، سیاست، علوم، تاریخ، پزشکی، همه چیز. این داستانی است که می‌خواهم تعریف کنم—دنیا از نگاه حسابان.

این دیدگاه از حسابان، بسیار وسیع‌تر از معمول است. این دیدگاه انشعابات مختلف حسابان را، هم در ریاضیات و هم در رشته‌های مرتبط در بر می‌گیرد. از آنجا که چنین دیدگاه وسیعی زیاد متعارف نیست، در ابتدا می‌خواهم مطمئن شوم که موجب سردرگمی نخواهد شد. مثلاً وقتی گفتم که بدون حسابان کامپیوتر یا موبایل و امثال این‌ها نمی‌داشتیم، منظورم این نیست که حسابان به‌تنهایی همه‌ی این چیزها را ایجاد کرده است. به‌هیچ‌وجه. علم و فناوری در این اختراعات نقش داشته‌اند—و شاید بتوان گفت که نقش اصلی بر عهده‌ی آن‌ها بوده است. منظور من تنها این است که حسابان هم در ایجاد جهانی که امروز می‌شناسیم، نقشی قاطع، ولو غالباً نقشی فرعی، داشته است.

مثلاً داستان ارتباطات بی‌سیم را در نظر بگیرید. این داستان در آغاز با کشف قوانین الکتریسیته و مغناطیس به‌وسیله‌ی دانشمندانی همچون مایکل فارادِی و آندره_ ماری آمپِر آغاز شد. بدون مشاهدات و آزمایش‌های آنها، حقایق اساسی درباره‌ی آهن‌رباها، جریان‌های الکتریکی، و میدان‌های نیروی نامرئی آن‌ها ناشناخته باقی می‌ماند، و هرگز امکان ارتباط بی‌سیم به تحقق نمی‌پیوست. بنابراین، روشن است که فیزیک تجربی در این‌جا نقشی ضروری داشته است.

ولی همین مطلب درباره‌ی حسابان هم صادق است. در دهه‌ی ۱۸۶۰، یک فیزیک‌دان ریاضی اسکاتلندی، به نام جِیمز کلارک ماکسوِل قوانین تجربی الکتریسیته و

مغناطیس را به شکل فرمول‌هایی بیان کرد که می‌شد آن‌ها را به خوردِ حسابان داد. پس از مقداری کار بر روی این فرمول‌ها، معادله‌ای به دست آمد که معنی نمی‌داد. به نظر می‌رسید که چیزی در فیزیک از قلم افتاده است. ماکسول حدس زد که مقصر، قانون آمپر است. برای اصلاح آن، جمله‌ی جدیدی را در معادله گنجاند—یک جریان فرضی که تناقض را برطرف می‌کرد—و دوباره محاسبات حسابان را انجام داد. این بار نتیجه‌ی معنی‌داری به دست آمد، یک معادله‌ی ساده و زیبای موج، بسیار شبیه معادله‌ای که انتشار امواج را بر روی یک استخر توصیف می‌کند. ولی نتیجه‌ی ماکسول نوع جدیدی از موج را پیش‌بینی می‌کرد، که در آن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در یک رقص دونفره با هم می‌رقصیدند. تغییر میدان الکتریکی، موجب تغییر میدان مغناطیسی می‌شد، و آن هم به نوبه‌ی خود میدان الکتریکی را دوباره تولید می‌کرد، و الی آخر، به‌طوری که هر میدان دیگری را به پیش می‌بُرد، و با هم به‌صورت موجی از انرژی در حرکت منتشر می‌شدند. و وقتی که ماکسول سرعت این موج را محاسبه کرد، متوجه شد که با سرعت نور حرکت می‌کند—و چه بسا که این یکی از بزرگ‌ترین لحظات غافل‌گیر کننده در تاریخ بوده است. بنابراین، با استفاده از حسابان نه تنها وجود امواج الکترومغناطیسی را پیش‌بینی کرد، بلکه یکی از معماهای قدیمی را نیز حل کرد: این‌که ماهیت نور چیست؟ او فهمید که نور یک موج الکترومغناطیسی است.

بر اساس پیش‌بینی ماکسول از امواج الکترومغناطیسی، هاینریش هِرتز در سال ۱۸۸۷ آزمایشی انجام داد که وجود این امواج را اثبات کرد. یک دهه بعد، نیکُلا تِسلا نخستین سیستم ارتباط رادیویی را ساخت، و پنج سال بعد از آن، گولیِلمو مارکونی نخستین پیام‌های بی‌سیم را بر فراز اقیانوس اطلس ارسال کرد. دیری نپایید که تلویزیون، تلفن همراه، و بقیه‌ی چیزها هم از راه رسید.

روشن است که حسابان به‌تنهایی نمی‌توانست همه‌ی این کارها را انجام دهد. ولی این هم روشن است که *بدون* حسابان، هیچ‌کدام از این‌ها اتفاق نمی‌افتاد. یا به بیان دقیق‌تر، شاید اتفاق می‌افتاد، ولی خیلی دیرتر.

حسابان چیزی بیش از یک زبان است

داستان ماکسول نشان‌دهنده‌ی مضمونی است که مکرر در مکرر شاهد آن خواهیم بود. غالباً گفته می‌شود که ریاضیات زبان علم است. این تا حد زیادی درست است. در مورد امواج الکترومغناطیسی، ماکسول به‌عنوان نخستین گام، توانست قوانینی را که به‌طور تجربی کشف شده بود، به معادلاتی ترجمه کند که به زبان حسابان نوشته شده

بود.

ولی تشبیه به زبان، کامل نیست. حسابان، مانند دیگر شکل‌های ریاضیات، چیزی خیلی بیشتر از یک زبان است؛ بلکه یک سیستم بسیار قدرتمند برای استدلال است. حسابان به ما امکان می‌دهد که یک معادله را با انجام عمل‌های صوری مختلفی که تابع قواعد خاصی است، به معادله‌ی دیگری تبدیل کنیم. این قواعد به‌طور عمیق ریشه در منطق دارند، بنابراین، گرچه به‌ظاهر فقط نمادها را جابه‌جا می‌کنیم، ولی در حقیقت، زنجیره‌ی بلندی از استنتاج منطقی را بنا می‌کنیم. جابه‌جا کردن نمادها نوعی تندنویسی مفید است، روش مناسبی برای بیان استدلال‌هایی که ظریف‌تر از آن است که در مغز ما جای گیرد.

اگر به‌قدر کافی خوش‌اقبال و ماهر باشیم—اگر معادلات را به‌طریق درست تبدیل کنیم—می‌توانیم کاری کنیم که معانی پنهان خود را آشکار سازند. برای یک ریاضی‌دان، این فرایند تقریباً قابل لمس به نظر می‌رسد. مثل آن است که داریم معادلات را ماساژ می‌دهیم، و تلاش می‌کنیم آن‌ها را چنان آسوده سازیم که رازهایشان را برملا کنند. می‌خواهیم زبان باز کنند و با ما حرف بزنند.

این کار نیاز به خلاقیت دارد، چون خیلی از وقت‌ها به آسانی روشن نیست که چه دستکاری‌هایی باید انجام دهیم. در مورد ماکسول، روش‌های بی‌شماری برای تبدیل معادلات او وجود داشت، که همه‌ی آن‌ها از نظر منطقی قابل قبول بود، ولی فقط برخی از آن‌ها از نظر علمی چیزی را آشکار می‌کرد. با توجه به اینکه او حتی نمی‌دانست دارد دنبال چه چیزی می‌گردد، به آسانی ممکن بود هیچ چیزی از معادلات خود به دست نیاورد مگر خزعبلات ناهمساز (و یا معادل نمادین آن). ولی خوش‌بختانه، این معادلات رازی را در درون خود داشتند. با دستکاری‌های صحیح، معادله‌ی موج را به دست ما دادند.

در این زمان، باز کارکرد زبانی حسابان صحنه را در اختیار گرفت. وقتی که ماکسول نمادهای انتزاعی خود را دوباره به واقعیت ترجمه کرد، معادلات‌اش پیش‌بینی کرد که الکتریسیته و مغناطیس می‌توانند با هم به‌صورت یک موج انرژی نامرئی که با سرعت نور حرکت می‌کند، انتشار پیدا کنند. این الهام در طول چند دهه‌ی بعد دنیا را تغییر داد.

کارآمدی نامعقول

عجیب است که حسابان به این خوبی از طبیعت تقلید می‌کند، در حالی که این دو حوزه بسیار با هم متفاوت‌اند. حسابان قلمروی خیالی از نمادها و منطق است، و طبیعت قلمروی واقعی از نیروها و پدیده‌ها است. اما به طریقی، اگر ترجمه از واقعیت به نمادها با هنرمندی صورت پذیرد، منطق حسابان می‌تواند با استفاده از یک حقیقت دنیای واقعی، حقیقت دیگری را پدید آورد. حقیقتی وارد می‌شود و حقیقتی خارج. در ابتدا از چیزی که از نظر تجربی صحیح است و به‌صورت نمادین فرمول‌بندی شده است، شروع کنید (مانند کاری که ماکسول با قوانین الکتریسیته و مغناطیس کرد)، دستکاری منطقی مناسب را روی آن انجام دهید، تا یک حقیقت منطقی دیگر، که چه بسا جدید است، از آن بیرون آید، واقعیتی درباره‌ی گیتی که قبلاً هیچ‌کس نمی‌دانست (مانند وجود امواج الکترومغناطیسی). به این طریق، حسابان به ما امکان می‌دهد که به آینده نظر بیفکنیم و ناشناخته‌ها را پیش‌بینی کنیم. بدین خاطر است که حسابان چنین ابزار قدرتمندی برای علم و فناوری است.

ولی اصلاً چرا باید گیتی تابع هر نوع منطقی باشد، چه رسد به منطقی که ما انسان‌های حقیر توان فهمیدن آن را داریم؟ این چیزی است که اینشتین از آن در شگفت بوده است، آن‌جا که نوشته است: «معمای ابدی جهان، فهم‌پذیری آن است.» و باز این همان چیزی است که یوجین ویگنِر در مقاله‌اش «در باب کارآمدی نامعقول ریاضیات در علوم طبیعی» در نظر داشته است، آن‌جا که می‌نویسد: «معجزه‌ی مناسب بودن زبان ریاضیات برای فرمول‌بندی قوانین فیزیک، موهبتی شگفت‌انگیز است که ما نه آن را می‌فهمیم و نه لیاقت آن را داریم.»

این حس شگفتی از دیرباز در تاریخ ریاضیات وجود داشته است. بر اساس افسانه‌ها، فیثاغورس در حوالی ۵۵۰ ق.م. همین احساس را داشت، زمانی که او و شاگردانش کشف کردند که موسیقی پیرو نسبت‌های اعداد صحیح است. مثلاً فرض کنید زه یک گیتار را به ناخن می‌کشید. زمانی که زه ارتعاش می‌کند، نُت مشخصی را ایجاد می‌کند. حالا انگشتتان را روی پرده‌ای درست در نیمه‌راه زه قرار دهید و دوباره آن را بکشید. حالا طول بخش مرتعش زه نصف قبل است—نسبت ۱ به ۲—و صدای آن دقیقاً یک اُکتاو بالاتر از نت اولیه است (فاصله‌ی موسیقایی از یک *دو* تا *دو* بعدی در مقیاس *دو- رِ- می- فا- سُل- لا- سی- دو*). بر عکس، اگر زه در حال ارتعاش $\frac{۲}{۳}$ طول اولیه باشد، نتی که ایجاد می‌کند، یک پنجم بالاتر است (فاصله از *دو* تا *سل*؛ مثل دو نت اول آهنگ جنگ *ستارگان*). و اگر طول بخش مرتعش $\frac{۳}{۴}$ قبل باشد، نت

یک چهارم بالا می‌رود (فاصله‌ی بین دو نت اول «عروس وارد می‌شود»). موسیقی‌دانان یونان قدیم از مفاهیم آهنگین اکتاو، یک‌چهارم، و یک‌پنجم آگاه بودند، و آن‌ها را زیبا می‌دانستند. این پیوند غیرمنتظره بین موسیقی (هارمونی این دنیا) و اعداد (هارمونی یک دنیای خیالی)، فیثاغوریان را به این باور عرفانی رساند که همه چیز عدد است. گفته می‌شود که آن‌ها بر این باور بودند که حتی سیارات در مدارهای خود موسیقی می‌سازند، موسیقی کُرات.

از آن زمان تا کنون، بسیاری از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و دانشمندان تاریخ به نوعی از این تب فیثاغورسی مبتلا گشته‌اند. ستاره‌شناس یوهانس کپلر به‌سختی به آن دچار بود. و یا پُل دیراکِ فیزیک‌دان. به‌طوری که خواهیم دید، این احساس آن‌ها را بر آن داشت که سرگشته و آرزومند هارمونی‌های گیتی باشند و رؤیای آن را در سر بپرورانند. در پایان، همین منجر به این شد که کشفیاتی را به عمل آورند که دنیا را دگرگون ساخت.

اصل بی‌نهایت

برای این‌که خوب سر در بیاورید که حرف حساب من چیست، اجازه بدهید چند کلمه در این مورد صحبت کنیم که حسابان چیست، (به بیان استعاری) چه می‌خواهد، و چه چیزی آن را از بقیه‌ی ریاضیات متمایز می‌کند. خوش‌بختانه، از اول تا آخر حسابان یک فکر بزرگ و زیبا جریان دارد. وقتی که این ایده را درک کردیم، ساختار حسابان در ذهن ما به‌صورت شکل‌های دگرگون شده‌ای از یک مضمون یکنواخت جا می‌افتد.

افسوس که اکثر دوره‌های آموزشی حسابان این مضمون را زیرِ بهمنی از فرمول‌ها، روال‌ها، و ترفندهای محاسباتی مدفون می‌کنند. فکرش را که می‌کنم، می‌بینم که در هیچ جایی از آن صحبتی نشده است، با آن‌که جزئی از فرهنگ حسابان است و هر متخصصی به‌طور ضمنی آن را می‌داند. بگذارید آن را «اصل بی‌نهایت» بنامیم. همان‌گونه که این ایده، هم از نظر مفهومی و هم از بُعد تاریخی، راهنمای توسعه‌ی حسابان بوده است، ما را نیز در سفرمان رهنمون خواهد شد. دلم می‌خواهد که الآن آن را بیان کنم، ولی در این نقطه از مسیرمان، چیزی جز کلمات نامفهوم نخواهد بود. فهمیدن آن آسان‌تر خواهد بود اگر فعلاً به این بپردازیم که حسابان چه می‌خواهد... و چگونه آن‌چه را می‌خواهد، به دست می‌آورد.

به‌طور خلاصه، حسابان می‌خواهد مسایل سخت را ساده‌تر کند. حسابان واقعاً وسواس سادگی دارد. شاید این برای شما تعجب‌آور باشد، چرا که اصولاً شهرت

حسابان به دشوار بودن آن است. جای انکار هم ندارد، چون خیلی از درس‌نامه‌های آن بیش از هزار صفحه دارند و وزن آن‌ها از آجر هم بیشتر است. ولی بگذارید قضاوت نکنیم. قیافه‌ی ظاهری حسابان دست خودش نیست. حجیم بودن آن قابل اجتناب نیست. حسابان به‌ظاهر پیچیده به نظر می‌رسد، زیرا تلاش می‌کند مسایل پیچیده‌ای را حل کند. در حقیقت، حسابان برخی از دشوارترین و مهم‌ترین مسایلی را که نسل بشر با آن روبه‌رو بوده است، بررسی و حل کرده است.

موفقیت حسابان در این است که مسایل پیچیده را به بخش‌های ساده‌تری تقسیم می‌کند. البته این راهبرد مختص حسابان نیست. تمام کسانی که در حل مسایل تبحر دارند، می‌دانند که مسایل سخت را اگر به قطعات متعدد تقسیم کنیم، ساده‌تر می‌شوند. ویژگی ریشه‌ای و متمایز حسابان از این نظر آن است که این راهبرد «تفرقه بینداز و حکومت کن» را به حد اعلا می‌رساند، *و آن را تا بی‌نهایت امتداد می‌دهد*. به جای این‌که یک مسئله‌ی بزرگ را به چند لقمه‌ی کوچک تقسیم کند، مرتب آن را قطعه‌قطعه می‌کند و این کار را بی‌وقفه ادامه می‌دهد، تا آن‌که مسئله پودر شده و به ریزترین اجزای قابل‌تصور تقسیم می‌شود، به‌طوری که تعداد این قطعات به بی‌نهایت می‌رسد. وقتی که این کار انجام شد، مسئله‌ی اولیه را برای هر کدام از اجزای ریز حل می‌کند، که معمولاً این کار خیلی آسان‌تر از حل مسئله‌ی غول‌آسای اولیه است. چالشی که در این‌جا باقی می‌ماند، این است که جواب‌های ریز را دوباره روی هم سوار کنیم. این کار معمولاً خیلی مشکل‌تر است، ولی لااقل به دشواری مسئله‌ی اولیه نیست.

به این ترتیب، حسابان در دو مرحله عمل می‌کند: تقسیم کردن و ترکیب کردن. به بیان ریاضی، فرایند برش دادن همیشه شامل تفریق‌های بسیار ریز است، که در آن اختلاف بین اجزا تعیین می‌شود. بر این اساس، به این نیمه از این رشته، حساب *دیفرانسیل* [حساب فاضله] گفته می‌شود. فرایند دوباره سر هم کردن همیشه مشتمل بر جمع‌های بی‌نهایت است، که اجزا را دوباره به کل اولیه جمع می‌بندد. به این نیمه از این رشته، حساب *انتگرال* [حساب جامعه] گفته می‌شود.

از این راهبرد می‌توان برای هر چیزی که به‌طور بی‌پایان قابل برش دادن باشد، استفاده کرد. به این‌گونه چیزها که به‌طور نامتناهی قابل تقسیم هستند، *پیوستار* گفته می‌شود، و گفته می‌شود که این‌ها *پیوسته* هستند، که از نظر لغوی به‌معنای متصل به هم است. برخی از نمونه‌های آن عبارت‌اند از دور یک دایره، یک شاه‌تیر فولادی در یک پل معلق، یک کاسه‌ی سوپ که روی میز آشپزخانه در حال سرد شدن است، مسیر سهموی یک نیزه‌ی پرتاب شده، و یا مدت زمانی که شما زندگی کرده‌اید. یک شکل، یک شیء، یک مایع، یک حرکت، یک بازه‌ی زمانی—همه‌ی این‌ها غلاتی برای آسیای حسابان

هستند. همه‌ی آنها پیوسته یا تقریباً پیوسته‌اند.

دقت کنید که تخیل خلاقانه در این کار دخیل است. سوپ و فولاد واقعاً پیوسته نیستند. در مقیاس زندگی روزمره، پیوسته به نظر می‌رسند، ولی در مقیاس اتم‌ها یا اَبَرریسمان‌ها، این‌گونه نیستند. در حسابان از مشکل مربوط به اتم‌ها و دیگر چیزهای غیرقابل تقسیم صرف‌نظر می‌کنیم، نه از آن رو که این‌ها وجود ندارند، بلکه بدان جهت که برای ما مفید است که تظاهر کنیم آن‌ها وجود ندارند. به‌طوری که خواهیم دید، در حسابان معمولاً از فرضیات خیالی مفید استفاده می‌شود.

به بیان عمومی‌تر، نوع موجودیت‌هایی که در حسابان به‌عنوان پیوستار مدل‌سازی می‌شوند، شامل تقریباً همه‌ی چیزهایی است که می‌توانید فکر آن را بکنید. از حسابان برای توصیف پدیده‌های مختلفی استفاده شده است، مانند چگونگی پایین غلتیدن پیوسته‌ی یک توپ از سراشیبی، چگونگی حرکت پیوسته‌ی پرتو خورشید از درون آب، این‌که چگونه جریان پیوسته‌ی هوا در اطراف بال، یک مرغ مگس‌خوار یا هواپیما را در هوا شناور نگه‌می‌دارد، و یا چگونگی پایین افتادن پیوسته‌ی غلظت ذرات ویروس HIV در گردش خون یک بیمار در روزهای بعد از شروع درمان چنددارویی. در هر مورد، از راهبرد یکسانی استفاده می‌شود: یک مسئله‌ی پیچیده، ولی پیوسته، را به بی‌نهایت قطعه‌ی ساده‌تر تقسیم کنید، بعد آن‌ها را جداگانه حل کنید و دوباره روی هم سوار کنید.

حالا دیگر آماده هستیم که آن ایده‌ی بزرگ را بیان کنیم.

اصل بی‌نهایت

برای روشن کردن یک شکل، شیء، حرکت، فرایند، یا پدیده‌ی پیوسته—هر چقدر هم رام‌نشدنی و پیچیده به نظر برسد—آن را به‌عنوان یک رشته‌ی نامتناهی از اجزای ساده‌تر در نظر بگیرید، آن‌ها را تحلیل کنید، و سپس نتایج را دوباره به هم بیفزایید تا معنای کل اولیه معلوم شود.

غولِ بی‌نهایت

مشکل اصلی در تمام این‌ها، مسئله‌ی کنار آمدن با بی‌نهایت است. این کار به حرف آسان‌تر است تا به عمل. با آن‌که استفاده‌ی کنترل شده و دقیق از بی‌نهایت، راز نهانی حسابان و منبع قدرت پیش‌بینی کننده‌ی عظیم آن است، ولی بزرگ‌ترین مایه‌ی دردسر

آن نیز هست. مانند هیولای فرانکِنشتاین یا گولم در ادبیات عامیانه‌ی یهودی، بی‌نهایت معمولاً از کنترل ارباب خود خارج می‌شود. مانند تمام افسانه‌های مربوط به تکبر، این هیولا ناگزیر بر ارباب خود می‌شورد.

خالقان حسابان از این خطر آگاه بودند، ولی وسوسه‌ی بی‌نهایت برایشان مقاومت‌ناپذیر بود. درست است که گهگاه یاغی می‌شد، و تناقض، سردرگمی، و آشوب فلسفی پدید می‌آورد. لیکن پس از هر سرکشی اینچنینی، ریاضی‌دانان همیشه موفق می‌شدند این هیولا را رام کنند، رفتار آن را منطقی سازند، و آن را دوباره به کار بگیرند. در پایان، همیشه همه چیز به‌خوبی و خوشی تمام می‌شد. حسابان جواب‌های درست را به دست می‌داد، ولو در مواردی که سازندگان دلیل‌اش را نمی‌دانستند. میل به رام کردن بی‌نهایت و بهره گرفتن از قدرت آن، داستانی است که تمام تاریخ دو هزار و پانصد ساله‌ی حسابان را در بر می‌گیرد.

شاید این حرف‌ها درباره‌ی آرزو و سردرگمی نابجا به نظر برسد، چرا که ریاضیات معمولاً به‌عنوان رشته‌ای دقیق و کاملاً عقلانی معرفی می‌شود. عقلانی هست، ولی در ابتدا همواره چنین نیست. آفرینش عملی شهودی است؛ عقلانیت بعداً وارد می‌شود. در داستان حسابان، بیشتر از هر جای دیگری از ریاضیات، منطق همیشه از شهود عقب مانده است. این خصوصاً سبب می‌شود که این رشته بسیار انسانی و قابل مطالعه به نظر برسد، و نابغه‌های آن بیشتر شبیه ما مردم عادی هستند.

منحنی‌ها، حرکت، و تغییر

اصل بی‌نهایت، داستان حسابان را حول یک مضمون روش‌شناختی سازمان‌دهی می‌کند. ولی حسابان همان‌قدر که به روش‌شناسی مربوط می‌شود، به معماها هم ربط پیدا می‌کند. توسعه‌ی حسابان بیش از همه متأثر از سه معما بوده است: معمای منحنی‌ها، معمای حرکت، و معمای تغییر.

به بار نشستن این معماها شاهدی بر ارزش کنجکاوی خالص است. معماهای مربوط به منحنی‌ها، حرکت، و تغییر شاید در نگاه اول بی‌اهمیت و چه بسا شدیداً غامض به نظر برسند. ولی از آنجا که به مسایل مفهومی مهمی مربوط می‌شود و ریاضیات هم عمیقاً با بافتار گیتی در هم تنیده شده است، لذا حل این معماها تأثیرات شگرفی بر سیر تمدن و زندگی روزمره‌ی ما داشته است. به‌طوری که در فصل‌های بعدی خواهیم دید، ما زمانی که در گوشی‌هایمان به موسیقی گوش می‌کنیم، به لطف استفاده‌ی فروشگاه‌ها از اسکنر لیزری به‌راحتی صف صندوق را پشت سر می‌گذاریم، و

یا با GPS راه خانه‌مان را پیدا می‌کنیم، در واقع، ثمرات این تحقیقات را می‌چینیم.

همه چیز با معمای منحنی‌ها آغاز شد. در این‌جا من اصطلاح منحنی را با تسامح بسیار به‌معنای هر نوع خط منحنی، سطح منحنی، یا جسم منحنی به کار می‌برم—مثلاً یک کش لاستیکی، یک حلقه‌ی عروسی، یک حباب شناور، حاشیه‌ی یک گلدان، و یا استوانه‌ی صلب یک سالامی. به‌منظور سادگی، هندسه‌دانان قدیمی معمولاً نمونه‌های انتزاعی و ایده‌آل اشیای منحنی را در نظر می‌گرفتند، و از ضخامت، ناهمواری، و قوام آن‌ها صرف‌نظر می‌کردند. مثلاً فرض می‌شد که سطح یک کره‌ی ریاضی یک غشای بی‌نهایت نازک، هموار، و کاملاً گِرد است، و فاقد ضخامت، ناهمواری، و پرمویی یک پوسته‌ی نارگیل است. حتی تحت این فرضیات ایده‌آل، اشیای منحنی دشواری‌های مفهومی گیج‌کننده‌ای را پدید می‌آورد، زیرا از قطعات راست تشکیل نشده بود. کار با مثلث و مربع آسان بود. و همین‌طور مکعب. این‌ها از خطوط راست و صفحات مسطح تشکیل شده بود که با تعداد کمی گوشه به یکدیگر متصل شده بودند. به آسانی می‌شد محیط یا مساحت یا حجم آن‌ها را تعیین کرد. هندسه‌دانان در سراسر جهان—در سرزمین‌های باستانی بابل و مصر، چین و هند، یونان و ژاپن—نحوه‌ی حل این‌گونه مسایل را می‌دانستند. ولی چیزهای گرد دردسرساز بودند. هیچ‌کس نمی‌توانست بگوید مساحت سطحی یک کره یا حجم آن چقدر است. حتی یافتن محیط و مساحت یک دایره در ایام قدیم مسئله‌ای لاینحل بود. هیچ راهی برای حل آن در دست نبود. قطعه‌ی راستی در آن یافت نمی‌شد تا بتوان جواب را از آن به دست آورد. هر چیزی که انحنا داشت، غیرقابل مطالعه بود.

و بدین‌گونه بود که حسابان آغاز شد. حسابان حاصل کنجکاوی و سرخوردگی هندسه‌دانان درباره‌ی چیزهای گرد بود. دایره و کره و دیگر شکل‌های منحنی، کوه‌های هیمالیای آن دوران بود. نه این‌که این‌ها در عمل مشکلاتی را پدید آورده باشد، چون در آغاز این‌گونه نبود. مسئله فقط به عطش ذاتی انسان برای ماجراجویی مربوط می‌شد. هندسه‌دانان، مانند کاشفانی که از کوه اورست بالا می‌رفتند، می‌خواستند منحنی‌ها را، که در پیش رویشان بودند، حل کنند.

کشف بزرگ زمانی آشکار شد که آن‌ها به اصرار گفتند که منحنی‌ها هم در واقع از پاره‌های *راست* تشکیل شده‌اند. این حقیقت نداشت، ولی می‌توانستند وانمود کنند که درست است. تنها مشکل این بود که قطعات باید بی‌نهایت‌کوچک و به تعداد بی‌نهایت زیاد می‌بودند. از این تخیل شکوهمند، حساب انتگرال پدید آمد. این قدیمی‌ترین کاربرد اصل بی‌نهایت بود. داستان پیدایش آن تا چند فصل ما را مشغول خود خواهد داشت، ولی عصاره‌ی آن، نطفه‌وار، در یک فکر ساده‌ی شهودی قابل مشاهده است: اگر

روی یک دایره (یا هر چیز دیگری که خمیده و صاف باشد) به دقت زوم کنیم، قسمتی از آن که زیر میکروسکوپ است، راست و مسطح به نظر می‌رسد. بنابراین، لااقل به‌طور اصولی باید امکان داشته باشد که هر چیز دلخواهی را درباره‌ی یک شکل خمیده با جمع بستن پاره‌خط‌های راست کوچک محاسبه کنیم. این‌که این کار را دقیقاً چگونه می‌توان انجام داد—که البته کار آسانی نیست—چندین قرن ذهن بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان جهان را به خود مشغول کرده بود. ولی با کمک هم، و گاهی هم از روی رقابت سخت، سرانجام توانستند در زمینه‌ی معمای منحنی‌ها پیشرفت کنند. به‌طوری که در فصل ۲ خواهیم دید، این پیشرفت‌ها امروزه نتایج زیادی داشته است، مثلاً محاسبات ریاضی لازم برای ترسیم موها، لباس، و چهره‌ی شخصیت‌ها در فیلم‌های انیمیشن کامپیوتری به‌صورتی که شبیه واقعی به نظر برسد، و یا محاسبات لازم برای این‌که پزشکان بتوانند قبل از عمل جراحی صورت بر روی بیمار، آن عمل را به‌صورت مجازی انجام دهند.

جستجو برای حل معمای منحنی‌ها زمانی که شدت گرفت که معلوم شد که منحنی‌ها فقط یک تفریح هندسی نیستند. بلکه کلیدی برای گشودن رازهای طبیعت‌اند. منحنی‌ها در طبیعت در قوس سهموی یک توپ پرتاب شده، در مدار بیضوی مریخ به دور خورشید، و در شکل محدب عدسی که پرتو نور را منحرف و در یک نقطه متمرکز می‌کرد، قابل مشاهده بود، خصوصاً که این مورد اخیر در توسعه‌ی میکروسکوپ و تلسکوپ در اروپای اواخر دوره‌ی رنسانس بسیار مورد احتیاج بود.

و بدین‌گونه دومین وسواس بزرگ آغاز شد: شیدایی درباره‌ی معمای حرکت بر روی زمین و در منظومه‌ی شمسی. دانشمندان از طریق مشاهده و آزمایش‌های هوشمندانه، الگوهای عددی شگفت‌انگیزی را در ساده‌ترین اشیای در حال حرکت کشف کردند. آن‌ها تاب خوردن یک آونگ را اندازه‌گیری کردند، نزول شتابان یک توپ را که از سطحی شیب‌دار به پایین می‌غلتید، بر حسب زمان سنجیدند، و از حرکت بهنگام سیارات در آسمان نقشه‌برداری کردند. الگوهایی که پیدا کردند، آن‌ها را شیفته‌ی خود ساخت—در واقع، یوهانس کپلر زمانی که قوانین حرکت سیارات را کشف کرد، به گفته‌ی خودش دچار «جنون مقدس» شد—زیرا به نظر می‌رسید که آن الگوها نشانی از کار خدا است. از دیدگاه سکولار نیز این الگوها مؤید این ادعا بود که طبیعت به‌طور عمیقی پایه در ریاضیات دارد، همان‌گونه که فیثاغوریان باور داشته بودند. تنها مشکل این بود که، لااقل با ریاضیات آن زمان، هیچ‌کس نمی‌توانست این الگوهای جدید شگفت‌انگیز را توصیف کند. کاری از حساب و هندسه ساخته نبود، حتی در دستان بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان.

مسئله این بود که حرکت‌ها پایدار نبود. در توپی که از یک سطح شیب‌دار پایین

می‌غلتید، مرتب سرعت تغییر می‌کرد، و در سیاره‌ای که به دور خورشید می‌گردید، مرتب راستای حرکت دگرگون می‌شد. بدتر از همه این‌که وقتی سیاره‌ها به خورشید نزدیک‌تر می‌شدند، حرکتشان تندتر می‌شد، و وقتی که از آن فاصله می‌گرفتند، سرعتشان کندتر می‌گردید. هیچ روش شناخته شده‌ای برای بررسی حرکتی که به‌طور پیوسته تغییر می‌کرد، وجود نداشت. ریاضی‌دانان پیشین، فرمول‌های ریاضی را برای ساده‌ترین نوع حرکت، یعنی حرکت با سرعت ثابت، کشف کرده بودند که در آن مسافت برابر با سرعت ضربدر زمان است. ولی وقتی که سرعت تغییر می‌کرد و پیوسته به تغییر کردن ادامه می‌داد، راهی برای محاسبه‌ی آن نبود. معلوم شد که حرکت هم مانند منحنی‌ها از نظر مفهومی مانند بالا رفتن از کوه اورست است.

به‌طوری که در فصل‌های میانی این کتاب خواهیم دید، بزرگ‌ترین پیشرفت‌های بعدی در حسابان از جستجو برای حل معمای حرکت سرچشمه گرفت. در این‌جا هم مانند منحنی‌ها، اصل بی‌نهایت به نجات ما آمد. این بار، خیال‌پردازی لازم این بود که تصور کنیم که حرکت با سرعت متغیر متشکل از تعداد بی‌نهایتی حرکت بی‌نهایت کوتاه با سرعت *ثابت* است. برای اینکه معنای این را به تصور درآورید، فرض کنید داخل ماشینی هستید که یک راننده‌ی دچار رعشه پشت فرمان آن است. شما با اضطراب به درجه‌ی سرعت، که با هر لرزش بالا و پایین می‌رود، نگاه می‌کنید. ولی در طول یک میلی‌ثانیه، راننده هر چقدر هم رعشه داشته باشد، نمی‌تواند کاری کند که درجه‌ی سرعت تغییر چندانی بکند. و اگر بازه‌ی زمانی از این هم خیلی کوتاه‌تر باشد—یک بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک—آن‌گاه عقربه هرگز حرکت نخواهد کرد. هیچ‌کس نمی‌تواند پدال گاز را با چنان سرعتی فشار دهد.

این ایده‌ها در نیمه‌ی جوان‌تر حسابان، یعنی حساب دیفرانسیل، به هم پیوست. این دقیقاً همان چیزی بود که برای کار با تغییرات بی‌نهایت‌کوچک زمان و مسافت مورد نیاز بود، تغییراتی که در مطالعه‌ی حرکت دایم‌التغییر مشاهده می‌شد، و یا در پاره‌خط‌های بی‌نهایت‌کوچکی که در هندسه‌ی تحلیلی یافت می‌شد، رشته‌ی جدیدی برای مطالعه‌ی منحنی‌های تعریف شده با معادلات جبری که در نیمه‌ی اول سده‌ی ۱۶۰۰ کاملاً مد شده بود. بله، به‌طوری که خواهیم دید، زمانی بود که جبر توی بورس بود. مقبولیت آن به نفع تمام رشته‌های ریاضیات بود، از جمله هندسه، ولی گذشته از آن، جنگل انبوهی از منحنی‌های جدید را نیز برای مطالعه ایجاد می‌کرد. به این ترتیب، معماهای منحنی‌ها و حرکت به یکدیگر می‌رسید. اینک در اواسط سده‌ی ۱۶۰۰، هر دوی آن‌ها در کانون توجه حسابان بودند، و به یکدیگر برخورد می‌کردند و موجب آشفتگی و سردرگمی ریاضی می‌شدند. از این تلاطم، حساب دیفرانسیل پدید آمد، ولی

البته بدون بحث و جدل هم نبود. برخی از ریاضی‌دانان مورد انتقاد قرار گرفتند که با بی‌قیدی با بی‌نهایت بازی می‌کنند. برخی دیگر جبر را به‌عنوان شلم‌شوربایی از نمادها به ریشخند می‌گرفتند. با این همه قیل‌وقال، پیشرفت‌ها به‌صورت کنره‌ای و آهسته صورت می‌گرفت.

تا این‌که روز کریسمس بچه‌ای به دنیا آمد. این مسیحای جوان حسابان، قهرمانی غیرمنتظره بود. او که زودرس و در نبود پدر به دنیا آمد، و مادرش هم در سه‌سالگی رهایش کرد، پسری منزوی با افکار تیره‌وتار بود که بزرگ شد و به مردی پنهان‌کار و بدگمان تبدیل شد. و با این حال، آیزاک نیوتن چنان تأثیری بر جهان گذاشت که از هیچ‌کس قبل یا بعد از او دیده نشده است.

اول این‌که مسئله‌ای را که در حکم جام مقدس حسابان بود، حل کرد: او کشف کرد که چگونه می‌توان قطعات یک منحنی را دوباره سر هم کرد—آن هم به روشی آسان، سریع،و نظام‌مند. او با ترکیب کردن نمادهای جبر با قدرت بی‌نهایت، راهی را پیدا کرد تا هر گونه منحنی را به‌صورت مجموعه‌ای از تعداد زیادی منحنی‌های بسیار ساده‌تر بیان کند که متشکل از توان‌های متغیری مانند x، شامل $x^۲$، $x^۳$، $x^۴$، و غیره، هستند. او فقط با داشتن همین مواد، انگار می‌توانست هر منحنی دلخواهی را بپزد، به این صورت که مثلاً کمی از x اضافه می‌کرد، و مقداری از $x^۲$، و یک قاشق چای‌خوری از $x^۳$. مثل آن بود که یک دستور آشپزی با یک آشپزخانه‌ی پر از ادویه و مغازه‌ی قصابی و باغچه‌ی سبزیجات همه در یک قالب جای گرفته باشند. او با این روش می‌توانست هر مسئله‌ای را که تا آن زمان درباره‌ی شکل‌ها و حرکت مطرح شده بود، حل کند.

آن‌گاه موفق شد رمز گیتی را بشکافد. نیوتن کشف کرد که هر نوع حرکتی به‌صورت گام‌های بی‌نهایت‌کوچک انجام می‌شود، که هدایت آن از یک لحظه به لحظه‌ی بعد بر اساس قوانین ریاضی است که به زبان حسابان نوشته شده است. او فقط با چند معادله‌ی دیفرانسیل (قوانین حرکت و گرانش) می‌توانست همه چیز، از قوس پرتاب توپ گرفته تا مدارهای سیارات، را توضیح دهد. «نظام جهانی» شگفت‌انگیز او آسمان و زمین را به هم پیوست، موجب به راه افتادن روشنگری شد، و فرهنگ غربی را متحول ساخت. تأثیر آن بر فلاسفه و شاعران اروپا بسیار عظیم بود. او حتی بر توماس جفرسون و نگارش «اعلامیه‌ی استقلال» تأثیر گذاشت. در دوران خود ما، ایده‌های نیوتن زیربنای برنامه‌ی فضایی بود و فرمول‌های ریاضی لازم برای طراحی مسیر را فراهم کرد، کاری که به دست ریاضی‌دان آمریکایی آفریقایی‌تبار کاترین جانسون و همکارانش (قهرمانان کتاب و فیلم پرفروش *ارقام پنهان*) انجام شد.

حال که معمای منحنی‌ها و حرکت حل شده بود، حسابان به سراغ سومین وسواس

همیشگی خود رفت: معمای تغییر. این جمله یک کلیشه است، ولی با این حال صحیح است: هیچ چیز ثابت نیست، مگر تغییر. یک روز هوا بارانی است و روز دیگر آفتابی. بازار سهام بالا می‌رود و پایین می‌آید. متخصصان بعدی حسابان که از آموزه‌های نیوتن جرئت یافته بودند، این سؤال را پرسیدند: آیا قوانین تغییر مشابه با قوانین حرکت نیوتن‌اند؟ آیا برای رشد جمعیت، انتشار همه‌گیری‌ها، و جریان خون در یک سرخ‌رگ قوانینی وجود دارد؟ آیا می‌توان از حسابان برای توصیف این‌که سیگنال‌های الکتریکی چگونه در امتداد اعصاب منتشر می‌شوند و یا برای پیش‌بینی جریان ترافیک در یک بزرگراه استفاده کرد؟

حسابان با پیگیری این دستور کار جاه‌طلبانه، و با همکاری همیشگی با دیگر بخش‌های علم و فناوری، به مدرن کردن جهان کمک کرده است. دانشمندان از طریق مشاهده و آزمایش قوانین تغییر را کشف کردند و سپس از حسابان برای انجام پیش‌بینی بهره گرفتند. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۱۷، آلبرت اینشتین با استفاده از حسابان و یک مدل ساده‌ی گذارهای اتمی، اثر شگفت‌انگیزی را به نام گسیل القایی پیش‌بینی کرد (همان پدیده‌ای که در *لیزر* استفاده می‌شود، که مخفف *تقویت نور به روش گسیل القایی* است). او این نظریه را مطرح کرد که تحت شرایط خاصی، نور که از ماده عبور می‌کند می‌تواند موجب القای تولید نور بیشتر با همان طول‌موج و در همان راستا شود، و با به راه انداختن یک واکنش زنجیره‌ای، آبشاری از نور پدید آورد که منجر به یک باریکه‌ی شدید و همدوس می‌شود. چند دهه بعد، معلوم شد که این پیش‌بینی درست است. نخستین لیزرهای قابل استفاده در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ ساخته شد. از آن پس، از لیزر در دستگاه‌های مختلف، از پخش سی‌دی گرفته تا سلاح‌های با هدایت لیزری و بارکدخوان‌های فروشگاه‌ها و لیزرهای پزشکی، استفاده شده است.

قوانین تغییر در پزشکی، بر خلاف فیزیک، به‌خوبی شناخته نشده است. ولی به‌کارگیری حسابان، حتی با مدل‌های بدوی، توانسته است تأثیر نجات‌بخشی داشته باشد. به‌عنوان مثال، در فصل ۸ خواهیم دید که چگونه یک مدل معادله‌ی دیفرانسیل که به‌وسیله‌ی یک ایمنی‌شناس و یک پژوهشگر ایدز ابداع شده بود، نقش مهمی در طراحی درمان ترکیبی سه‌دارویی مدرن برای بیماران آلوده به HIV ایفا کرد. بینش‌های حاصل از این مدل، این دیدگاه متداول را که ویروس در بدن به حالت نهفته باقی می‌ماند، رد کرد؛ در حقیقت، در هر دقیقه از روز، نبردی سهمگین بین دستگاه ایمنی و ویروس در جریان است. با این درک جدید که به‌کمک حسابان به وجود آمد، عفونت HIV که در گذشته حکم مرگ را داشت، تبدیل به یک بیماری مزمن قابل درمان شده است—لااقل برای کسانی که به درمان ترکیبی دسترسی دارند.

باید اذعان کرد که برخی از جنبه‌های دنیای دایم‌التغییر ما فراتر از تقریب‌ها و تفکر آرزومندانه‌ی اصل بی‌نهایت است. مثلاً در قلمرو زیراتمی، فیزیک‌دانان دیگر امروزه نمی‌توانند الکترون را مانند یک ذره‌ی کلاسیک در نظر بگیرند که مانند یک سیاره یا یک گلوله‌ی توپ در مسیری هموار حرکت می‌کند. بر اساس مکانیک کوانتومی، مسیرها در مقیاس میکروسکوپی لرزان، محو، و نامشخص می‌شوند، ازاین‌رو، باید رفتار الکترون‌ها را به‌جای مسیرهای نیوتنی، به‌صورت امواج احتمال توصیف کنیم. اما به محض این‌که این کار را کردیم، باز حسابان فاتحانه برمی‌گردد. حسابان از طریق چیزی به نام معادله‌ی شرودینگرِ، پیشرفت موج احتمال را هدایت می‌کند.

این مطلب شگفت‌انگیز، ولی صحیح است: حتی در قلمرو زیراتمی که فیزیک نیوتنی در هم می‌شکند، حسابان نیوتن هنوز قابل استفاده است. در حقیقت، خیلی خوب هم عمل می‌کند. به‌طوری که در صفحات بعد خواهیم دید، حسابان در ترکیب با مکانیک کوانتومی توانسته است اثرات شگفت‌انگیزی را پیش‌بینی کند که زیربنای روش‌های تصویربرداری پزشکی است، از ام‌آر‌آی گرفته تا سی‌تی‌ـ اسکن و برش‌نگاری گسیل پوزیترون.

اکنون وقت آن رسیده که نگاه نزدیک‌تری به زبان گیتی بیندازیم. طبیعی است که این کار را از بی‌نهایت شروع می‌کنیم.

فصل ۱

بی‌نهایت

سرآغاز ریاضیات ریشه در نگرانی‌های روزمره داشت. چوپانان می‌بایست حساب گله‌هایشان را داشته باشند. کشاورزان می‌بایست غلاتی را که به عمل آورده بودند، وزن کنند. مأموران مالیاتی باید مشخص می‌کردند که هر دهقان چند گاو یا مرغ به پادشاه بدهکار است. به‌خاطر این‌گونه نیازهای عملی بود که اعداد اختراع شد. ابتدا آدم‌ها برای شمارش از انگشت‌های دست و پا استفاده می‌کردند. بعد روی استخوان‌های حیوانات خط می‌کشیدند. به‌تدریج نمایش اعداد از خط کشیدن به استفاده از نمادها تکامل پیدا کرد، و با استفاده از اعداد، کارهای مختلف از مالیات و تجارت گرفته تا حسابداری و سرشماری تسهیل می‌شد. شواهدی از این‌ها را در الواح رسی بین‌النهرین که بیش از پنج هزار سال قبل نوشته شده است، می‌توان دید: در این الواح، نمادهای گوه‌مانند خط میخی سطر پشت سطر ردیف شده است.

غیر از اعداد، شکل‌ها هم اهمیت داشت. در مصر باستان، اندازه‌گیری خطوط و زوایا از اهمیت شگرفی برخوردار بود. هر سال، طغیان‌های تابستانی رود نیل مرز بین مزارع را محو می‌کرد و مساحان می‌بایست حد و مرز زمین‌های کشاورزان را دوباره مشخص کنند. بعداً نام مطالعه‌ی عمومی شکل‌ها (هندسه) نیز از همین کار گرفته شد: *geometry*، از کلمه‌ی یونانی *gē* به‌معنای «زمین» و *metrēs* به‌معنای «اندازه‌گیری کننده».

در ابتدا، هندسه با اضلاع راست و گوشه‌های تند سروکار داشت. گرایش آن به خطوط مستقیم، صفحه‌ها، و زاویه‌ها ریشه در منشأ کاربردی آن داشت: مثلث برای سطوح شیب‌دار مناسب بود، هرم در بناهای یادبود و مقبره‌ها کاربرد داشت، و مستطیل

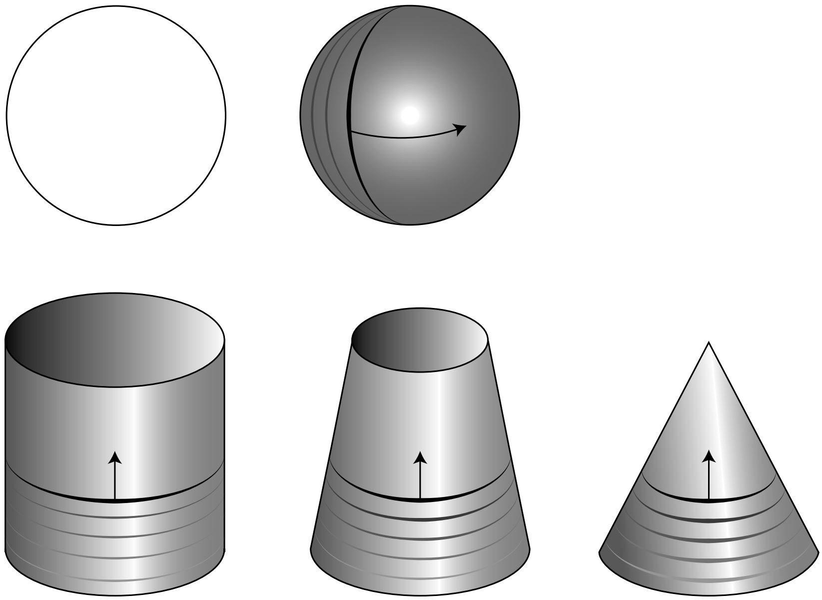
برای صفحه‌ی بالای میز، محراب، و قطعه‌های زمین قابل استفاده بود. بناها و نجارها از زاویه‌های قائمه برای خطوط شاغولی استفاده می‌کردند. ملوانان، معماران، و کشیشان به هندسه‌ی خط راست برای مساحی، دریانوردی، محاسبه‌ی تقویم، پیش‌بینی ماه‌گرفتگی و خورشیدگرفتگی، و بر پا کردن معابد و زیارتگاه‌ها نیاز داشتند.

ولی حتی زمانی که هندسه متمرکز بر خطوط مستقیم بود، یک نوع خط منحنی که بی‌نقص‌ترین خطوط است، یعنی دایره، همیشه در جایگاهی برجسته قرار می‌گرفت. دایره را در حلقه‌های تنه‌ی درختان، در امواج یک دریاچه، و در شکل خورشید و ماه، می‌بینیم. دایره در طبیعت در دور و بر ما دیده می‌شود. وقتی که به یک دایره خیره می‌شویم، دایره هم گویی چشم در چشم ما می‌دوزد. در واقع، دایره را در چشمان عزیزانمان، در حاشیه‌ی مدور مردمک و عنبیه‌ی آن‌ها، می‌بینیم. دایره چیزهای عملی و عاطفی را احاطه می‌کند، مانند چرخ و حلقه‌ی عروسی، و ماهیتی عرفانی نیز دارد. بازگشت ابدی آن نمادی از گردش فصول، تناسخ، زندگی جاوید، و عشق بی‌پایان است. جای شگفتی نیست که از زمانی که انسان به مطالعه‌ی شکل‌ها پرداخته است، دایره همواره در صدر توجه او بوده است.

از نظر ریاضی، دایره مظهر تغییر بدون تغییر است. یک نقطه که بر روی محیط یک دایره حرکت می‌کند، راستای خود را تغییر می‌دهد، بدون آن‌که فاصله‌ی خود را از مرکز تغییر دهد. به یک معنا، کمترین نوع تغییر است، راهی برای این‌که تغییر و خمیدگی در خفیف‌ترین حد ممکن باشد. و البته، دایره متقارن است. اگر دایره‌ای را به دور مرکز آن بچرخانید، بدون تغییر به نظر می‌رسد. شاید به‌علت همین تقارن چرخشی باشد که دایره در همه جا یافت می‌شود. هر گاه جنبه‌ای از طبیعت اهمیتی به جهت خاصی نمی‌دهد، لاجرم دایره پدیدار می‌شود. مثلاً قطره‌ی آبی را که در برکه‌ی آبی فرومی‌افتد، در نظر بگیرید: موج‌های کوچکی از نقطه‌ی برخورد به اطراف منتشر می‌شوند. از آنجا که این امواج با سرعت یکسان در تمام جهات سیر می‌کنند و در ابتدا از نقطه‌ی یکسانی شروع می‌شوند، لذا *باید* به شکل دایره باشند. این لازمه‌ی تقارن است.

دایره شکل‌های منحنی دیگری را نیز می‌تواند ایجاد کند. اگر فرضاً دایره‌ای را روی یکی از قطرهایش به سیخ بکشیم و آن را به دور آن محور در فضای سه‌بعدی بچرخانیم، با این چرخش دایره، یک کُره ایجاد می‌شود، یعنی شکل یک گوی یا توپ. وقتی که یک دایره در بعد سوم به‌صورت عمود بر صفحه‌ی آن در امتداد یک خط راست حرکت داده شود، یک استوانه ایجاد می‌شود، یعنی شکل یک قوطی یا جاکلاهی. اگر حین حرکت عمودی، هم‌زمان اندازه‌ی آن کوچک شود، یک مخروط ایجاد می‌کند؛ و اگر حین حرکت عمودی اندازه‌ی آن بزرگ‌تر شود، یک مخروط قطع شده (شکل یک چراغ

خواب) ایجاد می‌کند.



دایره، کره، استوانه، و مخروط برای هندسه‌دانان متقدم جذابیت زیادی داشت، ولی تجزیه و تحلیل آن‌ها خیلی سخت‌تر از مثلث، مستطیل، مربع، مکعب، و دیگر شکل‌های مستقیم‌الخط بود که از خط‌های راست و صفحه‌های تخت تشکیل می‌شد. آنها درباره‌ی مساحت سطوح خمیده و حجم اجسام منحنی فکر می‌کردند، ولی به‌هیچ‌وجه نمی‌دانستند چگونه می‌توان این‌گونه مسایل را حل کرد. در مقابل شکل‌های گِرد، کاری از دستشان ساخته نبود.

بی‌نهایت به‌عنوان یک پل

حسابان به‌عنوان شعبه‌ای از هندسه شروع شد. حوالی سال ۲۵۰ ق.م. در یونان باستان، رشته‌ی ریاضی کوچک و پرطرفداری بود که به معمای منحنی‌ها اختصاص داشت. نقشه‌ی جاه‌طلبانه‌ی طرفداران این رشته آن بود که از بی‌نهایت به‌عنوان پلی بین اشیای منحنی و مستقیم استفاده کنند. امیدشان آن بود که زمانی که این پیوند برقرار شود، روش‌ها و تکنیک‌های هندسه‌ی خط راست را بتوان از این پل عبور داد و برای معمای منحنی‌ها مورد استفاده قرار داد. با کمک بی‌نهایت، تمام مسایل قدیمی را می‌شد حل

کرد. لااقل ادعایشان این بود.

در آن زمان، احتمالاً این نقشه خیلی دور از دسترس به نظر می‌رسیده است. بی‌نهایت، شهرت مشکوکی داشت. معمولاً آن را ترسناک می‌دانستند، نه مفید. بدتر از همه این‌که ابهام‌برانگیز و سرگردان کننده بود. این بی‌نهایت دقیقاً چیست؟ یک عدد است؟ یک مکان؟ یک مفهوم؟

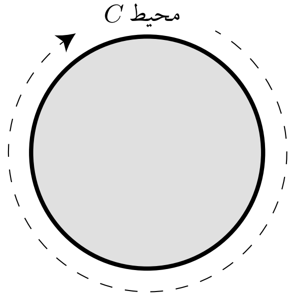
با این وجود، به‌طوری که در فصل‌های آینده خواهیم دید، بی‌نهایت هدیه‌ای خداداد از آب درآمد. با توجه به کشفیات و فناوری‌هایی که در نهایت از حسابان به دست آمد، ایده‌ی استفاده از بی‌نهایت برای حل مشکلات دشوار هندسه را باید یکی از بهترین ایده‌های تمام اعصار تلقی کرد.

البته در سال ۲۵۰ ق.م. هیچ‌کدام از این‌ها را نمی‌شد پیش‌بینی کرد. با این حال، در همان زمان هم بی‌نهایت چند موفقیت باارزش را به پرونده‌ی خود اضافه کرد. یکی از نخستین و زیباترین کامیابی‌های آن، حل یک معمای دیرینه بود: پیدا کردن مساحت دایره.

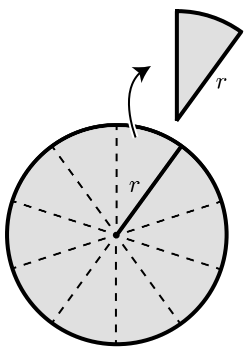
برهان پیتزایی

قبل از این‌که وارد جزئیات شویم، اجازه دهید که بحث را کمی باز کنیم. راهبرد ما آن است که دایره را به‌صورت یک پیتزا در نظر بگیریم. بعد پیتزا را به تعداد بی‌نهایتی قطعه تقسیم می‌کنیم و آن‌ها را به‌طور جادویی به‌گونه‌ای کنار هم قرار می‌دهیم که یک مستطیل تشکیل دهند. به این ترتیب، جوابی را که دنبال آن هستیم، به دست می‌آوریم، زیرا معلوم است که با جابه‌جا کردن قطعه‌ها مساحت آن‌ها از آن‌چه از ابتدا بود، تغییری نمی‌کند، و چگونگی محاسبه‌ی مساحت مستطیل را می‌دانیم: کافی است عرض و ارتفاع آن را در هم ضرب کنیم. نتیجه‌ی آن فرمولی برای مساحت دایره است.

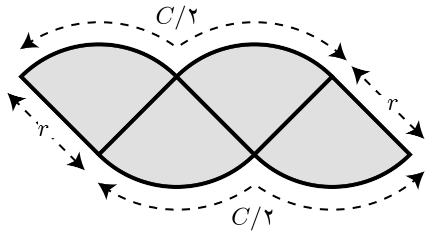
برای منظور این بحث، لازم است که پیتزای مورد نظر یک پیتزای ایده‌آل ریاضی باشد، یعنی کاملاً مسطح و گِرد باشد، و ضخامت آن بی‌نهایت نازک باشد. محیط آن که به‌طور خلاصه با C نشان دهیم، مسافت پیرامون پیتزا است، که با خط کشیدن به دور پیتزا مشخص می‌شود. در واقع، دوستداران پیتزا به‌طور معمول اهمیتی به محیط آن نمی‌دهند، ولی اگر بخواهیم، می‌توانیم C را با یک نوار مدرج اندازه‌گیری کنیم.



یک کمیت مورد علاقه‌ی دیگر، شعاع پیتزا، r، است، که به‌عنوان فاصله‌ی مرکز تا هر کدام از نقاط روی لبه‌ی پیتزا تعریف می‌شود. به‌طور خاص، r طول ضلع مستقیم هر قطعه را نیز مشخص می‌کند، با این فرض که تمام قطعه‌ها مساوی هستند و از مرکز تا لبه‌ی پیتزا بریده شده‌اند.



فرض کنید ابتدا دایره را به چهار رُبع تقسیم کنیم. یک راه این است که آن‌ها را به‌صورت زیر کنار هم قرار دهیم، ولی زیاد مفید به نظر نمی‌رسد.

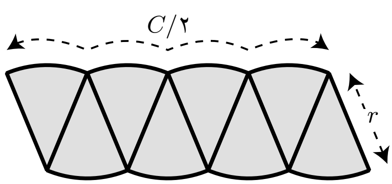


این شکل جدید، قلمبه و عجیب به نظر می‌رسد، و بالا و پایین آن ناهموار است. مسلماً به شکل مستطیل نیست، بنابراین، مساحت آن را نمی‌توان به آسانی حدس زد.

انگار داریم به عقب می‌رویم. ولی مثل هر نمایش دیگری، ابتدا قهرمان دچار دردسر می‌شود و بعد به پیروزی می‌رسد. هیجان مرتب بیشتر می‌شود.

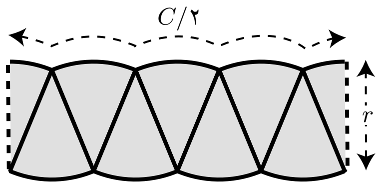
با این حال، گرچه این‌جا به نتیجه‌ای نرسیدیم، ولی به دو نکته باید دقت کنیم، زیرا این دو مطلب در تمام طول اثبات صحیح باقی می‌ماند، و در نهایت، ابعاد مستطیلی را که می‌خواهیم، به ما خواهد داد. مشاهده‌ی اول این است که نیمی از محیط پیرامون دایره تبدیل به قسمت بالای شکل جدید شده است، و نیمه‌ی دیگر آن، قسمت پایین شکل را تشکیل می‌دهد. بنابراین، طول قسمت خمیده‌ی بالا و نیز طول قسمت پایین برابر با نصف محیط، یعنی $C/۲$، است، که این در شکل نیز نشان داده شده است. به‌طوری که خواهیم دید، این طول در نهایت، تبدیل به ضلع بلند مستطیل می‌شود. نکته‌ی دیگر آن است که ضلع‌های کج کناری این شکل پیازی، همان ضلع کناری قطعه‌های پیتزا است، و بنابراین، طول آن برابر با r است. این طول در نهایت تبدیل به ضلع کوتاه مستطیل خواهد شد.

علت این‌که هنوز نشانی از مستطیل مورد نظر ما دیده نمی‌شود، این است که هنوز دایره را به تعداد قطعات زیادی تقسیم نکرده‌ایم. اگر دایره را هشت برش بدهیم و آن‌ها را به این صورت مرتب کنیم، تصویر ما بیشتر شبیه مستطیل به نظر می‌رسد.



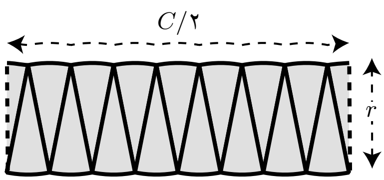
در حقیقت، حالا پیتزا شبیه یک متوازی‌الاضلاع شده است. بدک نیست—لااقل تقریباً اضلاع راست دارد. و ناهمواری‌های بالا و پایین برجستگی کمتری دارند. وقتی که تعداد قطعات بیشتر می‌شود، صاف‌تر می‌شوند. در این‌جا هم مانند قبل، طول بالا و پایین برابر با $C/۲$ و طول ضلع مورب کناری r است.

برای این‌که تصویر را باز هم مرتب‌تر کنیم، فرض کنید که یکی از قطعه‌های مورب کناری را از طول دو تکه می‌کنیم و یک نیمه‌ی آن را در طرف دیگر می‌گذاریم.

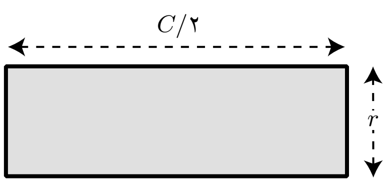


حالا شکل تا حد زیادی شبیه مستطیل به نظر می‌رسد. البته هنوز کامل نیست، که علت آن ناهمواری بالا و پایین آن بر اثر انحنای پیرامون دایره است، ولی لااقل داریم پیشرفت می‌کنیم.

با توجه به اینکه ظاهراً هر چه بیشتر برش دهیم بهتر می‌شود، به این کار ادامه می‌دهیم. با شانزده برش و اصلاح ظاهری قطعه‌ی نهایی، به همان روشی که در بالا انجام دادیم، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:



هر چه قطعات بیشتری ببُریم، برآمدگی‌های حاصل از پیرامون دایره صاف‌تر می‌شود. با این روش، دنباله‌ای از شکل‌ها حاصل می‌شود که به‌طور جادویی به طرف مستطیل خاصی سیر می‌کند. از آنجا که این شکل‌ها مرتب به مستطیل نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شوند، لذا به آن، مستطیلِ *حدی* می‌گوییم.



منظور از تمام این کارها آن است که مساحت این مستطیل حدی را می‌توانیم به آسانی با ضرب کردن عرض و ارتفاع آن به دست آوریم. تنها کاری که باقی می‌ماند، پیدا کردن ارتفاع و عرض بر حسب ابعاد دایره است. خب، از آنجا که برش‌ها عمودی قرار گرفته‌اند، لذا ارتفاع همان شعاع دایره‌ی اولیه، r، است. و عرض نصف محیط

دایره است؛ چرا که نیمی از محیط (پیرامون پیتزا) ضلع بالای مستطیل را ساخته است، و نصف دیگر آن ضلع پایین را، همان‌گونه که در هر کدام از مراحل بینابینی کار کردن با شکل‌های پیازگونه دیده شد. پس عرض نصف محیط است، یعنی $C/۲$. با جمع‌بندی همه‌ی این‌ها، مساحت مستطیل حدی با ضرب کردن ارتفاع و عرض آن به دست می‌آید، یعنی $A = r \times C/۲ = rC/۲$. و از آنجا که با جابه‌جا کردن برش‌های پیتزا مساحت آن‌ها تغییری نمی‌کند، پس این مساحت دایره‌ی اولیه نیز هست!

این فرمول برای مساحت دایره، $A = rC/۲$، نخستین بار به‌وسیله‌ی ریاضی‌دان یونان باستان ارشمیدس (۲۸۷–۲۱۲ ق.م.) در مقاله‌اش با عنوان «اندازه‌گیری دایره» (با استدلالی مشابه ولی بسیار دقیق‌تر) اثبات شد.

نوآورانه‌ترین جنبه‌ی این اثبات، نحوه‌ی به یاری طلبیدن بی‌نهایت است. وقتی که فقط چهار، یا هشت، یا شانزده برش داشتیم، تنها کاری که می‌توانستم بکنیم، این بود که پیتزا را به‌صورت یک شکل ناهموار و ناقص درآوریم. با آنکه شروع کار خیلی موفقیت‌آمیز نبود، ولی هر چه برش‌های بیشتری می‌بریدیم، شکل حاصله به مستطیل نزدیک‌تر می‌شد. ولی تنها در حد تعداد *بی‌نهایت* برش است که واقعاً به شکل مستطیل درمی‌آید. این ایده‌ی اساسی در حسابان است. همه چیز در بی‌نهایت ساده‌تر می‌شود.

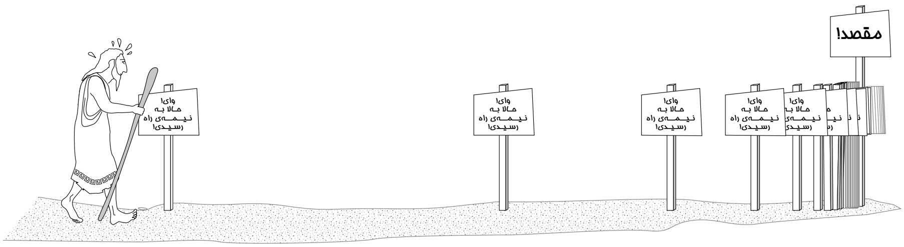
حد و معمای دیوار

حد مانند یک هدفِ دست‌نیافتنی است. می‌توانید هر چه بیشتر به آن نزدیک شوید، ولی هرگز به آن نمی‌رسیَد.

مثلاً در اثبات پیتزایی، توانستیم با بریدن برش‌های کافی و مرتب کردن آن‌ها، شکل‌های ناهموار را هر چه بیشتر به مستطیل نزدیک‌تر کنیم. ولی هرگز نتوانستیم این شکل‌ها را واقعاً مستطیل کنیم. فقط توانستیم به وضعیت کمال نزدیک‌تر شویم. خوش‌بختانه، در حسابان، قابل حصول نبودن حد معمولاً اهمیتی ندارد. غالباً می‌توانیم با ادامه دادن کار و تصور کردن این‌که واقعاً می‌توانیم به حد برسیم و نتایجی که از این وضعیت خیالی حاصل می‌شود، مسایل را حل کنیم. در حقیقت، بسیاری از پیشگامان بزرگ این رشته دقیقاً همین کار را انجام دادند و با این کار به کشفیات بزرگی نایل شدند. درست است که منطقی نیست و تخیلی است، ولی بسیار موفق است.

حد در حسابان مفهومی ظریف ولی بسیار بااهمیت است. از آنجا که این مفهوم در زندگی زیاد متداول نیست، لذا درک آن کمی مشکل است. شاید نزدیک‌ترین تمثیل آن، معمای دیوار باشد. اگر تا نیمه‌راه یک دیوار بروید، بعد نیمه‌ی راه باقی‌مانده را بروید، و

بعد نصف آن را بپیمایید، و همین‌طور الی آخر، آیا به جایی خواهید رسید که با برداشتن قدم بعدی به دیوار برسید؟



روشن است که پاسخ این سؤال منفی است، زیرا معمای دیوار بیان می‌دارد که در هر مرحله، شما نصف راه باقی‌مانده تا دیوار را می‌پیمایید، نه تمام آن را. پس از آن‌که ده قدم یا یک میلیون قدم یا هر تعداد قدم دیگر را پیمودید، همیشه فاصله‌ای بین شما و دیوار خواهد بود. ولی باز این هم روشن است که به هر میزان می‌توانید به دیوار نزدیک شوید. بدان معنا که با برداشتن قدم‌های کافی، می‌توانید به فاصله‌ی یک سانتی‌متر، یک میلی‌متر، یک نانومتر، یا هر فاصله‌ی نزدیک ناصفری از دیوار برسید، ولی هرگز نمی‌توانید کاملاً به آن برسید. در این‌جا، دیوار نقش حد را بازی می‌کند. حدود دو هزار سال طول کشید تا مفهوم حد به‌طور قوی تعریف شود. تا قبل از آن، پیشگامان حسابان صرفاً با استفاده از شهود خود راهشان را پیدا می‌کردند. بنابراین، اگر حد فعلاً برای شما تا حدودی نامفهوم به نظر می‌رسد، نگران نباشید. با مشاهده‌ی عملکرد حدها، آن‌ها را بهتر خواهیم شناخت. از دیدگاه امروزی، اهمیت حد در آن است که همچون بنیادی است که تمام حسابان بر پایه‌ی آن بنا شده است.

اگر داستان دیوار زیادی بی‌مزه و غیرعادی به نظر می‌رسد (آخر چه کسی به طرف یک دیوار می‌رود؟)، این تمثیل را امتحان کنید: هر چیزی که به یک حد نزدیک می‌شود، مانند قهرمانی است که به یک مأموریت بی‌پایان مشغول است. کاری نیست که کاملاً بیهوده باشد، مانند وظیفه‌ی بی‌سرانجام سیزیف، که محکوم شده بود که تخته‌سنگی را به بالای تپه‌ای ببرد، اما بعد سنگ به پایین می‌غلتید، و این کار را تا ابد تکرار می‌کرد. اما یک فرایند ریاضی که به یک حد نزدیک می‌شود (مانند شکل‌های ناهمواری که به طرف مستطیل سیر می‌کرد)، مانند آن است که قهرمان داستان به‌سوی هدفی که می‌داند ناممکن است ولی هم‌چنان به تحقق آن امیدوار است، گام برمی‌دارد، و در تلاش برای رسیدن به ستاره‌ای دور از دسترس، از پیشرفت مداوم خود دلگرم می‌شود.

تمثیل ۰٫۳۳۳ . . .

برای این‌که این دو فکر بزرگ را که همه چیز در بی‌نهایت ساده‌تر می‌شود و این‌که حدها مانند هدف‌های دست‌نیافتنی هستند، بهتر درک کنید، مثال زیر را از حساب در نظر بگیرید. در این مسئله، می‌خواهیم یک کسر—مثلاً $\frac{1}{3}$—را به معادل اعشاری آن تقسیم کنیم (در این مورد، $\frac{1}{3} = $ ۰٫۳۳۳ . . .). درست یادم هست زمانی که معلم کلاس هشتم ما، خانم استَنتون، روش انجام این کار را به ما یاد داد. از آن‌جا یادم مانده که ناگهان شروع به صحبت درباره‌ی بی‌نهایت کرد.

تا آن لحظه، هرگز ندیده بودم که آدم‌بزرگ‌ها درباره‌ی بی‌نهایت حرف بزنند. والدین من که هیچ وقت به آن اشاره نمی‌کردند. انگار رازی بود که فقط بچه‌ها از آن خبر داشتند. در زمین بازی، بچه‌ها موقع جر و بحث و رجزخوانی از آن استفاده می‌کردند.

«تو یه عوضی هستی!»
«خب، تو هم عوضی هستی ضربدر دو!»
«تو عوضی هستی ضربدر بی‌نهایت!»
«تو عوضی هستی ضربدر بی‌نهایت به‌اضافه‌ی یک!»
«این‌که همون بی‌نهایته، ابله!»

آن جلسات آموزنده مرا متقاعد کرده بود که بی‌نهایت قطعاً مثل یک عدد عادی رفتار نمی‌کند. وقتی که به آن یک اضافه می‌کنید، بزرگ‌تر نمی‌شود. حتی اضافه کردن بی‌نهایت به آن هم فایده‌ای ندارد. خواص شکست‌ناپذیر آن سبب می‌شد که برای خاتمه دادن به جر و بحث‌ها در حیاط مدرسه بسیار مناسب باشد. هر کس اول از آن استفاده می‌کرد، پیروز می‌شد.

ولی هیچ‌کدام از معلم‌ها درباره‌ی بی‌نهایت صحبت نکرده بود، تا آن‌که خانم استنتون به آن اشاره کرد. همه‌ی شاگردان کلاس اعداد اعشاری مختوم را می‌شناختند، همان اعداد معمولی که مثلاً با دو رقم اعشار برای بیان مبالغ پول به کار می‌رفت، مانند ۱۰٫۲۸ دلار. ولی اعداد اعشاری بی‌پایان که بعد از ممیز بی‌نهایت رقم دارند، ابتدا عجیب به نظر می‌رسیدند، ولی پس از آن‌که به بحث درباره‌ی کسرها پرداختیم، عادی شدند.

فهمیدیم که کسر $\frac{1}{3}$ را می‌توان به‌صورت ۰٫۳۳۳ . . . نوشت، که در این‌جا سه‌نقطه بدان معنا است که رقم سه به‌طور بی‌پایان تکرار می‌شود. این به نظر من معنی می‌داد،

چون وقتی که سعی می‌کردم $\frac{1}{3}$ را با تقسیم کردن صورت بر مخرج محاسبه کنم، گرفتار یک چرخه‌ی بی‌پایان می‌شدم: یک بر سه قابل‌قسمت نیست، بنابراین، آن را ده می‌گیریم؛ حالا ده تقسیم بر سه می‌شود سه، و یک باقی می‌ماند؛ و به این ترتیب، برمی‌گردیم به همان جای اول، که باز باید یک را بر سه تقسیم کنیم. هیچ راهی برای خارج شدن از این حلقه نیست. بدین خاطر است که سه‌ها در ... ۰٫۳۳۳ مرتب تکرار می‌شوند.

سه‌نقطه در پایان ... ۰٫۳۳۳ دو تفسیر دارد. تفسیر ساده‌لوحانه‌اش این است که واقعاً بی‌نهایت رقم ۳ در طرف راست ممیز وجود دارند. البته نمی‌توانیم همه‌ی آن‌ها را بنویسیم، چون تعداد آن‌ها بی‌نهایت است، ولی با نوشتن سه‌نقطه، نشان می‌دهیم که لااقل در ذهن ما آن‌ها در آن‌جا حضور دارند. من به این تفسیر، تفسیر *بی‌نهایت بالفعل* می‌گویم. مزیت این تفسیر آن است که آسان و متعارف است، به شرط آن‌که حاضر باشیم که زیاد به‌معنای بی‌نهایت فکر نکنیم.

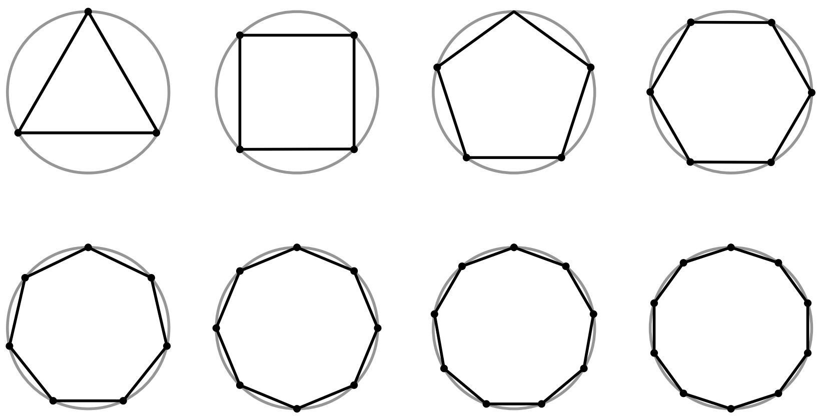
تفسیر پیشرفته‌تر آن این است که ... ۰٫۳۳۳ نشان‌دهنده‌ی یک حد است، درست مانند نقشی که مستطیل حدی در اثبات پیتزایی برای شکل‌های پشته‌پشته دارد یا مانند دیوار برای پیاده‌ی بینوا. جز این‌که در این‌جا ... ۰٫۳۳۳ نشان‌دهنده‌ی حد رقم‌های اعشار پی‌درپی به دست آمده از تقسیم صورت بر مخرج در کسر $\frac{1}{3}$ است. هر چه مراحل تقسیم را یکی پس از دیگری ادامه می‌دهیم، رقم‌های ۳ بیشتری برای بسط اعشاری $\frac{1}{3}$ به دست می‌آید. با ادامه دادن این کار، می‌توانیم تقریبی را به دست آوریم که به میزان دلخواه به $\frac{1}{3}$ نزدیک باشد. اگر از تقریب $\frac{1}{3} \approx ۰٫۳$ راضی نباشیم، می‌توانیم یک مرحله جلوتر برویم تا به $\frac{1}{3} \approx ۰٫۳۳$ برسیم، و الی آخر. من به این تفسیر، تفسیر *بی‌نهایت بالقوه* می‌گویم. منظور از «بالقوه» آن است که تقریب به‌طور بالقوه می‌تواند تا هر جا خواستیم، ادامه پیدا کند. هیچ چیزی مانع از آن نمی‌شود که تقریب را یک میلیون یا یک میلیارد مرحله یا هر چقدر خواستیم، ادامه دهیم. مزیت این تفسیر آن است که هرگز مجبور نیستیم از مفاهیم نامشخصی مانند بی‌نهایت استفاده کنیم. همان اعداد متناهی برایمان کافی است.

برای کار با معادله‌هایی مانند $\frac{1}{3} = $ ... ۰٫۳۳۳، واقعاً فرق نمی‌کند کدام دیدگاه را اتخاذ کنیم. هر دو دیدگاه به یک میزان قابل استفاده است و هر محاسبه‌ای بخواهیم انجام دهیم، نتایج ریاضی یکسانی به دست می‌دهند. ولی موقعیت‌های دیگری در ریاضیات هستند که تفسیر بی‌نهایت بالفعل می‌تواند موجب آشفتگی منطقی شود. منظور من از غول بی‌نهایت که در مقدمه به آن اشاره کردم، همین است. بعضی وقت‌ها نحوه‌ی فکر کردن ما درباره‌ی فرایندی که به یک حد نزدیک می‌شود، واقعاً اهمیت دارد. اگر وانمود کنیم که این فرایند واقعاً خاتمه می‌یابد و به طریقی به نیروانای

بی‌نهایت می‌رسد، ممکن است دچار مشکل شویم.

تمثیل چندضلعی بی‌نهایت

به‌عنوان مثالی عبرت‌آموز، فرض کنید چند نقطه را به فواصل مساوی روی یک دایره قرار می‌دهیم و آن‌ها را با خط‌های راستی به هم وصل می‌کنیم. با سه نقطه، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ با چهار نقطه، یک مربع؛ با پنج نقطه، یک پنج‌ضلعی؛ و الی آخر. به این ترتیب، دنباله‌ای از شکل‌های مستقیم‌الخط به نام چندضلعی‌های منتظم حاصل می‌شود.



دقت کنید که هر چه از تعداد نقطه‌های بیشتری استفاده کنیم، چندضلعی‌ها گِردتر و به دایره نزدیک‌تر می‌شوند. در عین حال، اضلاع آن‌ها کوتاه‌تر و تعداد اضلاع بیشتر می‌شود. هر چه در این دنباله جلوتر برویم، چندضلعی‌ها به دایره به‌عنوان حد نزدیک‌تر می‌شوند.

به این طریق، بی‌نهایت دوباره بین دو جهان پل می‌زند. این بار، ما را از مستقیم‌الخط به سمت گرد می‌برد، از چندضلعی‌های گوشه‌دار به سمت دایره‌های صاف و هموار، در حالی که در اثبات پیتزایی، بی‌نهایت ما را از گرد به سمت مستقیم‌الخط می‌بُرد و دایره را به مستطیل تبدیل می‌کرد.

البته در هر مرحله‌ی متناهی، چندضلعی فقط چندضلعی است. هنوز دایره نیست و هرگز هم نخواهد شد. به دایره نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شود، ولی هرگز واقعاً به آن

نمی‌رسد. در این‌جا با بی‌نهایت بالقوه سروکار داریم، نه بی‌نهایت بالفعل. پس همه چیز از نظر استحکام منطقی، استوار است.

ولی اگر می‌توانستیم واقعاً به بی‌نهایت بالفعل برسیم، چه می‌شد؟ آیا چندضلعی بی‌نهایت به دست آمده با اضلاع بی‌نهایت‌کوچک *واقعاً* یک دایره می‌بود؟ فکر وسوسه‌انگیزی است، چون در آن صورت چندضلعی هموار می‌بود. تمام گوشه‌هایش صاف می‌شد. همه چیز کامل و زیبا می‌شد.

فریبندگی و خطر بی‌نهایت

در این‌جا یک درس کلی داریم: حدها غالباً ساده‌تر از تقریب‌هایی هستند که به سمت آن‌ها میل می‌کنند. دایره از هر کدام از چندضلعی‌های ناهمواری که به آن نزدیک می‌شوند، ساده‌تر و زیباتر است. در مورد اثبات پیتزایی نیز همین‌طور بود و مستطیل زیباتر از شکل‌های ناهموار، با آن برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌های نازیبا، بود. و در مورد کسر $\frac{۱}{۳}$ نیز همین‌طور است. این کسر از هر کدام از کسرهای بدهنجاری که به سمت آن میل می‌کنند، با صورت‌ها و مخرج‌های بزرگ نازیبایی که دارند، مانند $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۳۳}{۱۰۰}$ و $\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$، ساده‌تر و شکیل‌تر است. در تمام این موارد، شکل یا عدد حدی ساده‌تر و متقارن‌تر از تقریب‌های متناهی آن است.

این فریبندگی بی‌نهایت است. همه چیز آن‌جا بهتر می‌شود.

حالا با در نظر گرفتن این درس، برمی‌گردیم به حکایت چندضلعی بی‌نهایت. آیا تسلیم شویم و بگوییم که دایره *حقیقتاً* یک چندضلعی با تعداد بی‌نهایت ضلع بی‌نهایت‌کوچک است؟ نه. نباید این کار را بکنیم، نباید تسلیم این وسوسه شویم. این به‌معنای ارتکاب گناه بی‌نهایت بالفعل است. با این کار، همه‌ی ما محکوم به جهنم منطقی می‌شویم.

برای این‌که علت آن را بفهمید، فرض کنید صرفاً برای یک لحظه این فکر را می‌پذیریم که دایره واقعاً یک چندضلعی بی‌نهایت با اضلاع بی‌نهایت‌کوچک است. طول این اضلاع دقیقاً چقدر است؟ صفر است؟ اگر چنین است، آن‌گاه بی‌نهایت ضربدر صفر—یعنی مجموع طول همه‌ی اضلاع—باید برابر با محیط دایره باشد. ولی حالا دایره‌ای را به طول دو برابر آن در نظر بگیرید. بی‌نهایت ضربدر صفر باید برابر با این محیط بزرگ‌تر نیز باشد. یعنی بی‌نهایت ضربدر صفر هم با محیط برابر است، هم با دو برابر محیط. چه حرف مزخرفی! اصولاً روش معینی برای تعریف بی‌نهایت ضربدر صفر وجود ندارد، و بنابراین، روش معقولی برای این‌که دایره را یک چندضلعی

بی‌نهایت در نظر بگیریم، نیز وجود ندارد.

با این وجود، در این شهود چیزی هست که آدم را جذب می‌کند. مانند گناه اولیه‌ی آدم که در انجیل آمده است، گناه اولیه‌ی حسابان—یعنی این وسوسه که دایره را به‌عنوان یک چندضلعی نامتناهی با اضلاع بی‌نهایت‌کوچک در نظر بگیریم—به همان دلیل، به‌سختی قابل‌مقاومت است. این وسوسه‌ای است که نوید رسیدن به دانش ممنوعه را به ما می‌دهد، رسیدن به فهمی که با روش‌های معمول قابل حصول نیست. هندسه‌دانان هزاران سال در پی فهمیدن محیط دایره بودند. اگر می‌شد دایره را با یک چندضلعی متشکل از تعداد زیادی اضلاع مستقیم‌الخط کوچک جایگزین کرد، کار خیلی راحت‌تر می‌شد.

ریاضی‌دانان با گوش کردن به فش‌فش این مار—البته با کمی عقب نشستن، یعنی با بهره گرفتن از بی‌نهایت بالقوه به‌جای بی‌نهایت بالفعل که وسوسه‌انگیزتر است—نحوه‌ی حل مسئله‌ی محیط و دیگر معماهای مربوط به خطوط منحنی را یاد گرفتند. در فصول بعد، خواهیم دید که چگونه موفق به این کار شدند. ولی اول باید به درک عمیق‌تری برسیم از این‌که بی‌نهایت بالفعل تا چه حد می‌تواند خطرناک باشد. این دروازه‌ای است به خطرات بیشتر، از جمله گناهی که معلمان ما از ابتدا به ما درباره‌ی آن هشدار داده بودند.

گناه تقسیم بر صفر

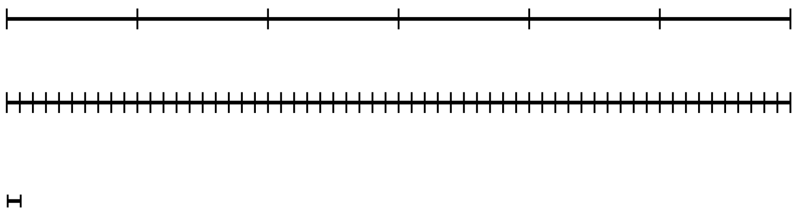
در تمام دنیا، به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود که تقسیم بر صفر ممنوع است. احتمالاً دانش‌آموزان از چنین ممنوعیتی شوکه می‌شوند. انتظار آن است که اعداد، منظم و خوش‌رفتار باشند. کلاس ریاضی جای منطق و استدلال است. و با این حال، می‌توان کار ساده‌ای را از اعداد خواست که قابل انجام نیست و معنی نمی‌دهد. تقسیم بر صفر یکی از این کارها است.

ریشه‌ی این مشکل در بی‌نهایت است. تقسیم بر صفر موجب احضار بی‌نهایت می‌شود، درست مانند احضار روح که بعضی‌ها مدعی آن هستند. کار پرخطری است. به آن نزدیک نشوید.

اگر توان مقاومت در برابر این وسوسه را ندارید و می‌خواهید بفهمید که چرا بی‌نهایت در سایه کمین کرده است، تصور کنید که ۶ را بر عدد کوچکی که به طرف صفر میل می‌کند ولی دقیقاً صفر نیست، مثلاً ۰/۱، تقسیم می‌کنید. این کار ممنوعیتی ندارد. پاسخ ۶ تقسیم بر ۰/۱ می‌شود ۶۰، که عدد نسبتاً بزرگی است. حال اگر ۶ را

بر عددی باز هم کوچک‌تر، مثلاً ۰/۰۱، تقسیم کنید، جواب بزرگ‌تر می‌شود: ۶۰۰. اگر باز هم جلوتر برویم و ۶ را بر عددی که خیلی به صفر نزدیک‌تر است، مثلاً ۰/۰۰۰۰۰۰۱، تقسیم کنیم، جواب خیلی بزرگ‌تر می‌شود؛ یعنی به‌جای ۶۰ یا ۶۰۰، جواب حالا ۶۰,۰۰۰,۰۰۰ است. روند آن روشن است. هر چه مقسوم‌علیه کوچک‌تر می‌شود، جواب بزرگ‌تر می‌شود. در حد که مقسوم‌علیه به طرف صفر میل می‌کند، جواب به طرف بی‌نهایت میل می‌کند. این دلیل واقعی آن است که نمی‌توانیم تقسیم بر صفر کنیم. افراد کم‌جرئت می‌گویند که پاسخ تعریف نشده است، ولی حقیقت آن است که جواب بی‌نهایت است.

این مطالب را به‌صورت زیر می‌توان به تصویر کشید. فرض کنید می‌خواهید یک خط ۶ سانتی‌متری را به قطعاتی به طول ۰/۱ سانتی‌متر تقسیم کنید. از کنار هم قرار گرفتن این ۶۰ قطعه، قطعه‌ی اولیه حاصل می‌شود.



۰/۱

به همین ترتیب (البته این بار شکل را رسم نمی‌کنم)، همان خط را می‌توان به ۶۰۰ قطعه هر کدام به طول ۰/۰۱ سانتی‌متر، و یا به ۶۰,۰۰۰,۰۰۰ قطعه هر کدام به طول ۰/۰۰۰۰۰۰۱ سانتی‌متر تقسیم کرد.

اگر هم‌چنان ادامه دهیم و این برش دیوانه‌وار را به حد برسانیم، به این نتیجه‌ی عجیب می‌رسیم که یک خط ۶ سانتی‌متری متشکل از *بی‌نهایت* قطعه به طول *صفر* است. شاید این قابل توجیه باشد. به هر حال، خط از بی‌نهایت نقطه تشکیل می‌شود، و طول هر نقطه صفر است.

ولی آن‌چه از نظر فلسفی آزار دهنده است، این است که همین استدلال برای خطی با هر طولی صادق است. در واقع، عدد ۶ ویژگی خاصی ندارد. به همان صورت می‌توانستیم ادعا کنیم که خطی به طول ۳ سانتی‌متر، یا ۴۹/۵۷، و یا ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰، متشکل از بی‌نهایت نقطه به طول صفر است. روشن است که با ضرب کردن صفر در بی‌نهایت، هر عددی ممکن است به‌عنوان نتیجه به دست آید: ۶ یا ۳ یا ۴۹/۵۷ و یا ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰. از نظر ریاضی، چنین چیزی وحشتناک است.

گناه بی‌نهایت بالفعل

معصیتی که در آغاز ما را وارد این بلبشو کرد، این بود که وانمود کردیم واقعاً می‌توانیم به حد برسیم، و این‌که می‌توانیم بی‌نهایت را مانند یک عدد قابل حصول در نظر بگیریم. در قرن چهارم ق.م.، ارسطو فیلسوف یونانی هشدار داد که چنین خطایی در رابطه با بی‌نهایت می‌تواند به انواع گرفتاری‌های منطقی منجر شود. او با چیزی که آن را بی‌نهایت بالفعل می‌نامید، مخالفت می‌کرد، و معتقد بود که فقط بی‌نهایت بالقوه معنی می‌دهد.

در رابطه با برش دادن یک خط به قطعات متعدد، بی‌نهایت بالقوه بدان معنا است که خط را می‌توان به قطعات بیشتر و بیشتری تقسیم کرد، تا هر جا که بخواهید، ولی باز هم تعداد قطعه‌ها متناهی خواهد بود، و طول همه‌ی آن‌ها ناصفر خواهد بود. این کاملاً پذیرفتنی است و منجر به هیچ‌گونه مشکل منطقی نمی‌شود.

آن‌چه قدغن است، تصور رسیدن به حالتی است که در آن تعداد بی‌نهایت کاملی از قطعات به طول صفر داشته باشیم. ارسطو معتقد بود که این منجر به چیزی غیرعقلانی می‌شود—مانند همین‌جا که منجر به آن می‌شود که صفر ضربدر بی‌نهایت می‌تواند هر عددی را به‌عنوان جواب داشته باشد. ازاین‌رو، او استفاده از بی‌نهایت بالفعل را در ریاضیات و فلسفه نهی کرد. ریاضی‌دانان طی دو هزار و دویست سال بعد به حکم او پایبند بودند.

جایی در اعماق تاریک ماقبل تاریخ، کسی متوجه شد که اعداد هرگز به پایان نمی‌رسند. و با این فکر، بی‌نهایت متولد شد. بی‌نهایت معادلِ عددیِ چیزی است در ژرفای روان ما، در چاه‌های بی‌ته کابوس‌های ما، و در امید ما به زندگی جاوید. بی‌نهایت در دل بسیاری از رؤیاها و ترس‌ها و پرسش‌های بی‌پاسخ ما نهفته است: اندازه‌ی گیتی چقدر است؟ مدت ابدیت چقدر است؟ قدرت خدا چقدر است؟ در هر رشته از اندیشه‌ی بشر، از دین و فلسفه تا علم و ریاضیات، بی‌نهایت برترین متفکران جهان را هزاران سال به فکر فروبرده است. آن را قدغن، ممنوع، و مطرود دانسته‌اند. بی‌نهایت همیشه ایده‌ی خطرناکی قلمداد شده است. در دوران تفتیش عقاید، راهب شورشی جوردانو برونو را به‌خاطر این‌که گفته بود خدا با قدرت بی‌نهایت خود، جهان‌های بی‌شماری را آفریده است، زنده‌زنده در آتش سوزاندند.

پارادوکس‌های زنون

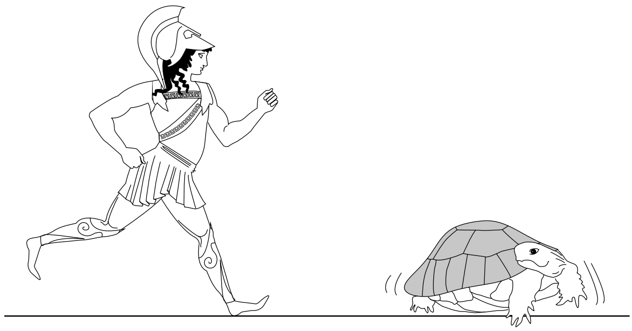
تقریباً دو هزاره قبل از اعدام جوردانو برونو، یک فیلسوف باشهامت دیگر جرئت فکر کردن درباره‌ی بی‌نهایت را به خود داد. زنون ایلئایی (ح. ۴۹۰–۴۳۰ ق.م.) یک رشته پارادوکس را درباره‌ی فضا، زمان، و حرکت مطرح کرد که بی‌نهایت در آن‌ها یک نقش محوری و گیج‌کننده ایفا می‌کرد. این معماها ایده‌هایی را که در دل حسابان است، پیش‌گویی می‌کرد، که هنوز هم امروزه درباره‌ی آن‌ها بحث و جدل وجود دارد. برتراند راسل آن‌ها را بی‌اندازه ظریف و ژرف دانسته است.

به‌درستی نمی‌دانیم زنون با این پارادوکس‌ها چه چیزی را می‌خواسته ثابت کند، چون اگر هم نوشته‌هایی داشته، چیزی از آن‌ها به جا نمانده است. استدلال‌های او از طریق افلاطون و ارسطو به دست ما رسیده، که عمدتاً با هدف نابود کردن آن‌ها، خلاصه‌ای از آن‌ها را بیان کرده‌اند. به گفته‌ی آن‌ها، زنون می‌خواست ثابت کند که تغییر غیرممکن است. حواس ما خلاف این را به ما می‌گویند، ولی حواس، ما را فریب می‌دهند. به گمان زنون، تغییر یک توهم است.

سه تا از پارادوکس‌های زنون بسیار مشهور و قوی هستند. اولی، پارادوکس دوپاره‌سازی، مشابه معمای دیوار است، ولی شدیداً یأس‌آورتر. این پارادوکس بیان می‌کند که شما هرگز نمی‌توانید حرکت کنید، زیرا قبل از آن‌که یک قدم بردارید، باید نصف قدم بردارید. و قبل از انجام این کار، لازم است که ربع قدم بردارید، و الی آخر. بنابراین، نه تنها نمی‌توانید به دیوار برسید، بلکه اصلاً نمی‌توانید شروع به راه رفتن کنید.

پارادوکس درخشانی است. کی فکر می‌کرد یک قدم برداشتن نیازمند انجام بی‌نهایت عمل جزء باشد؟ و بدتر این‌که عمل *اولی* برای انجام دادن وجود ندارد. عمل اول نمی‌تواند برداشتن نصف قدم باشد، چون قبل از آن باید ربع قدم را بردارید، و قبل از آن یک هشتم قدم را، و الی آخر. اگر فکر می‌کنید کارهای زیادی دارید که باید قبل از صبحانه انجام دهید، تصورش را بکنید که فقط برای رفتن به آشپزخانه، لازم باشد که بی‌نهایت عمل را انجام دهید.

پارادوکس دیگر، به نام آشیل و لاک‌پشت، بیان می‌کند که یک دونده‌ی تندرو (آشیل) هرگز نمی‌تواند به یک دونده‌ی کندرو (لاک‌پشت) برسد، اگر که دونده‌ی کندرو در ابتدای مسابقه از او جلوتر باشد.



زیرا زمانی که آشیل به جایی که لاک‌پشت از آن‌جا شروع کرده می‌رسد، لاک‌پشت کمی از آن‌جا جلوتر رفته است. و زمانی که آشیل به‌جای جدید می‌رسد، باز لاک‌پشت اندکی به جلو خزیده است. از آنجا که همه‌ی ما بر این باور هستیم که یک دونده‌ی تندرو *می‌تواند* از دونده‌ی کندرو سبقت بگیرد، پس یا حواس‌مان ما را فریب می‌دهد، یا این‌که مشکلی در نحوه‌ی استدلال ما درباره‌ی حرکت، فضا، و زمان وجود دارد.

در دو پارادوکس اول، به نظر می‌رسد که زنون بر علیه این مطلب سخن می‌گوید که فضا و زمان اساساً پیوسته است، بدان معنا که به‌طور بی‌پایان قابل‌تقسیم است. راهبرد هوشمندانه‌ی داستانی او (که بعضی‌ها می‌گویند او مبدع آن بوده است) اثبات از راه تناقض بود، که حقوق‌دانان و منطق‌دانان به آن *تعلیق به محال* می‌گویند، یعنی فروکاستن تا حد پوچی. در هر دو پارادوکس، زنون پیوستگی فضا و زمان را مفروض دانسته است و بعد تناقضی را از آن فرض نتیجه گرفته است؛ بنابراین، فرض پیوستگی باید نادرست باشد. حسابان بر پایه‌ی همین فرض بنا شده است، و بنابراین، در این دعوا بسیار ذی‌نفع است. حسابان با نشان دادن اشتباه این استدلال، سخن زنون را رد می‌کند.

به‌عنوان مثال، حسابان مسئله‌ی آشیل و لاک‌پشت را بدین‌گونه حل‌وفصل می‌کند. فرض کنید لاک‌پشت در ابتدای مسابقه ۱۰ متر از آشیل جلوتر است، و آشیل با سرعت ۱۰ برابر لاک‌پشت می‌دود، یعنی مثلاً سرعت آشیل ۱۰ متر بر ثانیه است، و سرعت لاک‌پشت ۱ متر بر ثانیه. در این صورت، برای آشیل ۱ ثانیه طول می‌کشد تا به نقطه‌ی شروع لاک‌پشت برسد. در طی این مدت، لاک‌پشت ۱ متر جلوتر خواهد رفت. برای آشیل ۰/۱ ثانیه طول می‌کشد تا این فاصله را بپیماید، که در این مدت، لاک‌پشت ۰/۱ متر جلوتر می‌رود. با ادامه دادن همین استدلال، می‌بینیم که مجموع زمان‌های رسیدن متوالی آشیل به‌صورت دنباله‌ی نامتناهی زیر است:

$$۱ + ۰/۱ + ۰/۰۱ + ۰/۰۰۱ + \cdots = ۱/۱۱۱\ldots \text{ ثانیه.}$$

این مدت زمان، پس از نوشتن به‌صورت کسر معادل آن، برابر با $\frac{۱۰}{۹}$ ثانیه است. این مدتی است که طول می‌کشد که آشیل به لاک‌پشت برسد و از او جلو بزند. و با آن‌که زنون درست می‌گفت که آشیل باید تعداد بی‌نهایتی کار انجام دهد، ولی در این‌جا هیچ تناقضی وجود ندارد. همان‌گونه که ریاضیات نشان می‌دهد، همه‌ی آن‌ها را می‌تواند در یک مدت زمان متناهی انجام دهد.

این نوع استدلال از نظر حسابان صحیح است. ما فقط یک دنباله‌ی نامتناهی را جمع بستیم و یک حد را محاسبه کردیم، همان‌گونه که قبلاً درباره‌ی $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots$ بحث کردیم. هر گاه با اعداد اعشاری بی‌پایان سروکار داریم، در حقیقت، کار حسابان انجام می‌دهیم (ولو آن‌که اکثر افراد آن را به‌عنوان حساب دوران راهنمایی، کوچک می‌انگارند).

اتفاقاً، حسابان تنها راه برای حل این مسئله نیست. می‌توانستیم به‌جای آن از جبر استفاده کنیم. برای این کار، ابتدا باید ببینیم که هر دونده در یک زمان دلخواه t ثانیه پس از شروع مسابقه، در کجای مسیر است. از آنجا که آشیل با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می‌دود و با توجه به اینکه مسافت برابر با سرعت ضربدر زمان است، لذا مسافت او در مسیر برابر است با $۱۰t$. اما در مورد لاک‌پشت، او در ابتدا ۱۰ متر جلوتر بود و سرعت دویدن او ۱ متر بر ثانیه است، بنابراین، مسافت او در مسیر $t + ۱۰$ خواهد بود. برای به دست آوردن زمانی که آشیل از لاک‌پشت سبقت می‌گیرد، باید با دو مسافت را مساوی یکدیگر قرار دهیم، زیرا این از نظر جبری نشان‌دهنده‌ی زمانی است که آشیل و لاک‌پشت هر دو در یک زمان در یک مکان قرار دارند. معادله‌ی حاصله عبارت است از:

$$۱۰t = ۱۰ + t.$$

برای حل این معادله، t را از دو طرف تفریق کنید. به دست می‌آید $۹t = ۱۰$. سپس، دو طرف را بر ۹ تقسیم کنید. نتیجه‌ی به دست آمده، $t = \frac{۱۰}{۹}$، همان چیزی است که با استفاده از عدد اعشاری بی‌پایان به دست آوردیم.

بنابراین، از دیدگاه حسابان، واقعاً هیچ‌گونه تناقضی درباره‌ی آشیل و لاک‌پشت وجود ندارد. اگر فضا و زمان پیوسته باشند، همه چیز خیلی خوب کار می‌کند.

زنون دیجیتال می‌شود

زنون در سومین پارادوکس خود، پارادوکس تیر، علیه یک امکان دیگر صحبت کرده است، و آن این‌که فضا و زمان اساساً گسسته هستند، بدان معنا که متشکل از واحدهای بخش‌ناپذیرِ ریزی هستند، چیزی مثل پیکسل‌های فضا و زمان. پارادوکس از این قرار است. اگر فضا و زمان گسسته هستند، آن‌گاه یک تیر که پرتاب شده است، هرگز نمی‌تواند حرکت کند، زیرا در هر لحظه (در هر پیکسل زمان)، تیر در مکان معینی است (مجموعه‌ی خاصی از پیکسل‌های فضا). لذا در هر لحظه‌ی خاص، تیر در حال حرکت نیست. بین لحظات هم که حرکت نمی‌کند، زیرا بنا به فرض، بین لحظه‌ها زمان *وجود ندارد*. بنابراین، در هیچ زمانی تیر حرکت نمی‌کند.

به نظر من، این ظریف‌ترین و جالب‌ترین پارادوکس زنون است. فلاسفه هنوز درباره‌ی وضعیت آن بحث دارند، ولی من فکر می‌کنم که در دو سوم مطلب، حق با زنون است. در دنیای که فضا و زمان گسسته است، تیر پرتاب شده *می‌بایست* همان‌طور که زنون می‌گوید رفتار کند. هم‌چنان‌که زمان در مراحل گسسته به پیش می‌رود، تیر به‌طرز عجیبی در یک مکان ظاهر می‌شود. در این مورد هم حق با او بود که حواس ما به ما می‌گویند که دنیای واقعی این‌طور نیست، لااقل ما به‌طور معمول آن را این‌گونه احساس نمی‌کنیم.

ولی زنون اشتباه می‌کرد که در چنین دنیایی، حرکت غیرممکن است. همه‌ی ما بر اساس تجربه‌ای که از تماشای فیلم و ویدئو در دستگاه‌های دیجیتال‌مان داریم، این را می‌دانیم. موبایل‌ها، دستگاه‌های پخش دی‌وی‌دی، و نمایشگر کامپیوتر تصاویر را به پیکسل تقسیم می‌کنند، و با این حال، بر خلاف گفته‌ی زنون، حرکت در این چشم‌اندازهای گسسته به‌خوبی اتفاق می‌افتد. مادام که همه چیز به ذرات بسیار ریزی تقسیم شده باشد، ما نمی‌توانیم بین حرکت هموار و بازنمایی دیجیتال آن تفاوتی احساس کنیم. اگر مثلاً یک ویدئوی با وضوح بالا از پرتاب تیر را تماشا کنیم، آن‌چه در واقع می‌بینیم، تصویر پیکسلی تیر است که یکی پس از دیگری به‌طور گسسته در فریم‌ها ظاهر می‌شود. ولی به‌خاطر محدودیت‌های حسی که داریم، مانند یک مسیر پیوسته به نظر می‌رسد. گاه حواس ما واقعاً فریبمان می‌دهند.

البته اگر برش‌ها زیادی زمخت باشد، *واقعاً* می‌توانیم تفاوت بین پیوسته و گسسته را تشخیص دهیم، و معمولاً برایمان ناخوشایند است. مثلاً ببینید که یک ساعت آنالوگ قدیمی نسبت به ساعت‌های بنجل دیجیتال/مکانیکی امروزی چقدر تفاوت دارد. در ساعت آنالوگ، عقربه‌ی ثانیه‌شمار با حرکتی یکنواخت و زیبا دور می‌زند. این

ساعت زمان را به‌صورت یک جریان نشان می‌دهد. اما در ساعت دیجیتال، عقربه‌ی ثانیه‌شمار به‌صورت قدم‌هایی گسسته به جلو می‌پرد، *تلق*، *تلق*، *تلق*. این ساعت زمان را به‌صورت جهشی نشان می‌دهد.

بی‌نهایت می‌تواند بین این دو مفهوم کاملاً متفاوت از زمان، پُل بزند. یک ساعت دیجیتال به تصور درآورید که برای هر ثانیه، به جای یک *تلق* بلند، تریلیون‌ها کلیک کوچک ایجاد می‌کند. دیگر قادر نخواهیم بود تفاوت بین این نوع ساعت دیجیتال و یک ساعت آنالوگ حقیقی را تشخیص دهیم. در مورد فیلم و ویدئو هم همین‌طور است؛ تا وقتی که فریم‌ها با سرعت کافی رد شوند، مثلاً با سرعت سی فریم در ثانیه، به‌صورت یک جریان پیوسته احساس می‌شود. و اگر سرعت پخش *بی‌نهایت* فریم بر ثانیه باشد، جریان واقعاً پیوسته می‌شود.

مثلاً ضبط و پخش موسیقی را در نظر بگیرید. دختر کوچک من اخیراً برای روز تولد پانزده سالگی‌اش یک گرامافون قدیمی ویکترولا هدیه گرفت. حالا می‌تواند آهنگ‌های الا فیتزجرالد را روی صفحه‌ی گرامافون گوش کند. این یک تجربه‌ی اصیل آنالوگ است. تمام نت‌ها و آوازهای الا به همان شفافیت زمانی که آواز را خوانده است، شنیده می‌شود؛ بلندی صدایش مدام کم و زیاد می‌شود و تون صدایش به زیبایی از زیر به بم تغییر می‌کند. ولی وقتی که آهنگ او را به‌صورت دیجیتال پخش می‌کنید، تمام جنبه‌های موسیقی او به قطعات ریز و گسسته‌ای تقطیع می‌شود، و به رشته‌های ۰ و ۱ تبدیل می‌شود. گرچه از نظر مفهومی تفاوت خیلی زیاد است، ولی گوش ما آن را تشخیص نمی‌دهد.

بنابراین، در زندگی روزمره، غالباً می‌توان تفاوت بین گسسته و پیوسته را، لااقل تا تقریب خوبی، ندیده گرفت. برای بسیاری از مقاصد روزمره، گسسته می‌تواند جانشین پیوسته شود، به شرط آن‌که تقطیع را کاملاً ریز انجام داده باشیم. در دنیای ایده‌آل حسابان، می‌توانیم از این هم فراتر برویم. هر چیز پیوسته‌ای را می‌توان *دقیقاً* (و نه تقریباً) به بی‌نهایت قطعه‌ی بی‌نهایت‌کوچک تقسیم کرد. این اصل بی‌نهایت است. با حد و بی‌نهایت، گسسته و پیوسته یکی می‌شود.

زنون به کوانتوم می‌رسد

اصل بی‌نهایت از ما می‌خواهد که وانمود کنیم که همه چیز را می‌توان به‌طور بی‌پایان تکه‌تکه کرد. دیدیم که چنین مفاهیمی تا چه حد سودمند واقع می‌شود. تصور کردن پیتزایی که می‌توان آن را به قطعات نازک دلخواهی برید، به ما امکان داد که مساحت

دایره را به دقت محاسبه کنیم. طبیعتاً این سؤال مطرح می‌شود: آیا این‌گونه چیزهای بی‌نهایت‌کوچک در دنیای واقعی وجود دارند؟

مکانیک کوانتومی در این‌جا حرفی برای گفتن دارد. این شاخه‌ای از فیزیک مدرن است که بیان می‌کند که طبیعت در کوچک‌ترین مقیاس‌ها چگونه رفتار می‌کند. مکانیک کوانتومی دقیق‌ترین نظریه‌ای است که تا کنون در فیزیک ابداع شده است، و به‌خاطر عجیب بودن‌اش شهرت دارد. از نظر اصطلاحات، با باغ‌وحشی از لپتون‌ها، کوارک‌ها، و نوترینوها، شبیه داستان‌های لوئیس کارول به نظر می‌رسد. رفتاری هم که توصیف می‌کند، غالباً عجیب است. در مقیاس اتمی، چیزهایی می‌تواند اتفاق بیفتد که در دنیای ماکروسکوپی هرگز روی نمی‌دهد.

برای نمونه، معمای دیوار را از دیدگاه کوانتومی در نظر بگیرید. اگر عابر مورد نظر یک الکترون می‌بود، احتمال داشت که از درون دیوار عبور کند. به این پدیده، تونل‌زنیِ کوانتومی می‌گویند. این واقعاً رخ می‌دهد. این را بر اساس مفاهیم کلاسیک به‌سختی می‌توان توضیح داد، ولی توضیح کوانتومی آن این است که الکترون‌ها به‌صورت امواج احتمال توصیف می‌شوند. این امواج تابع معادله‌ای هستند که فرمول آن در سال ۱۹۲۵ به‌وسیله‌ی فیزیک‌دان اتریشی اروین شرودینگر کشف شده است. جواب معادله‌ی شرودینگر نشان می‌دهد که بخش کوچکی از موج احتمال الکترون در آن سوی یک مانع غیرقابل نفوذ قرار دارد. بدان معنا که احتمال کم ولی ناصفری وجود دارد که الکترون در آن سوی مانع، آشکارسازی شود، انگار که از درون دیوار تونل زده است. به‌کمک حسابان، می‌توان نرخ وقوع این پدیده‌ی تونل‌زنی را محاسبه کرد، و آزمایش‌ها این پیش‌بینی‌ها را تأیید کرده‌اند. تونل‌زنی واقعیت دارد. ذرات آلفا از هسته‌های اورانیوم با نرخ پیش‌بینی شده تونل می‌زنند و پدیده‌ای را به نام رادیواکتیویته ایجاد می‌نمایند. تونل‌زنی در فرایندهای گداخت هسته‌ای نیز که موجب درخشش خورشید می‌شوند، دخالت دارد، لذا حیات بر روی زمین تا حدودی وابسته به تونل‌زنی است. کاربردهای زیادی نیز در فناوری دارد؛ میکروسکوپ الکترونی تونل‌زنی روبشی، که به دانشمندان امکان می‌دهد که از اتم‌های منفرد عکس‌برداری و آن‌ها را دستکاری کنند، مبتنی بر این مفهوم است.

ما برای رویدادهای مقیاس اتمی، دریافت شهودی نداریم، چرا که مخلوقاتی غول‌آسا با تریلیون‌ها تریلیون اتم هستیم. خوش‌بختانه، حسابان می‌تواند جای شهود را بگیرد. فیزیک‌دانان با بهره‌گیری از حسابان و مکانیک کوانتومی، پنجره‌ای نظری را به دنیای میکروسکوپی گشوده‌اند. ثمره‌ی این کشفیات، لیزر و ترانزیستور، تراشه‌های کامپیوتری، و نمایشگرهای LED در تلویزیون‌های تخت بوده است.

با آن‌که مکانیک کوانتومی در بسیاری جهات از نظر مفهومی، رویکردی رادیکال دارد، ولی در فرمول شرودینگر، این فرض سنتی را که فضا و زمان پیوسته هستند، حفظ کرده است. ماکسول نیز در نظریه‌ی الکتریسیته و مغناطیس خود همین فرض را به عمل آورده است؛ و همین‌طور نیوتن در نظریه‌ی گرانش و اینشتین در نظریه‌ی نسبیت خود از همین فرض استفاده کرده است. تمام حسابان، و لذا تمام فیزیک نظری، مبتنی بر فرض پیوسته بودن فضا و زمان است. این فرض پیوستگی تا کنون مؤکداً موفق بوده است.

ولی به دلایلی می‌توان این باور را مطرح کرد که در مقیاس‌های بسیار بسیار کوچک‌تر گیتی، خیلی پایین‌تر از مقیاس اتمی، شاید سرانجام فضا و زمان ماهیت پیوسته‌ی خود را از دست می‌دهند. با اطمینان نمی‌دانیم آن پایین چه خبر است، ولی می‌توانیم حدس بزنیم. شاید همان‌گونه که زنون در پارادوکس تیر خود تصور کرده است، فضا و زمان حالت پیکسلی مرتبی پیدا می‌کنند، ولی به احتمال زیاد، به‌خاطر عدم قطعیت کوانتومی به آشفته‌بازار نامنظمی فروکاسته می‌شوند. در چنین مقیاس‌های کوچکی، شاید فضا و زمان به‌صورت تصادفی به جوش و خروش درمی‌آیند. شاید همچون کف حباب‌آلودی نوسان می‌کنند.

با آن‌که دانشمندان درباره‌ی چگونگی به تصور درآوردن این مقیاس‌های غایی اتفاق نظری ندارند، ولی بر سر این‌که این مقیاس‌ها احتمالاً چقدر کوچک هستند، توافقی عمومی وجود دارد. این‌ها بر اثر سه ثابت بنیادی طبیعت ایجاد می‌شود. یکی از آن‌ها ثابت گرانشی، G، است. این ثابت نشان‌دهنده‌ی قدرت گرانش در گیتی است. این ثابت نخست در نظریه‌ی گرانش نیوتن و سپس در نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین ذکر شده است. در هر نظریه‌ی دیگری هم که در آینده جایگزین آن‌ها شود، الزاماً وجود خواهد داشت. ثابت دوم، $\hbar$ (که «اچ بار» خوانده می‌شود)، نشان‌دهنده‌ی قدرت اثرات کوانتومی است. مثلاً این ثابت در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و در معادله‌ی موج شرودینگر در مکانیک کوانتوم یافت می‌شود. ثابت سوم سرعت نور، c، است. این حد سرعت در تمام گیتی است. هیچ نوع سیگنالی نمی‌تواند با سرعت بیشتر از c حرکت کند. این ثابت لزوماً باید در هر نظریه‌ی فضا و زمان وارد شود، زیرا از طریق این اصل که مسافت برابر با سرعت ضربدر زمان است، آن دو را به هم پیوند می‌دهد، که در این‌جا c نقش نرخ یا سرعت را ایفا می‌کند.

در سال ۱۸۹۹، پدر نظریه‌ی کوانتوم، یک فیزیک‌دان آلمانی به نام ماکس پلانک، متوجه شد که یک و تنها یک راه وجود دارد که می‌توان این ثابت‌های بنیادی را ترکیب کرد تا یک مقیاس طول به دست آید. او به این نتیجه رسید که این طول یکتا در حکم یک چوب ذرع طبیعی برای گیتی است. این طول اکنون به افتخار او طول پلانک نامیده

می‌شود. این طول از ترکیب جبری زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول پلانک} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^{3}}}.$$

وقتی که مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی G، $\hbar$، و c را در فرمول قرار دهیم، مقدار طول پلانک حدود 10^{-35} متر محاسبه می‌شود، که مسافت شدیداً کوچکی است که تقریباً یک‌صد میلیون تریلیون بار کوچک‌تر از قطر یک پروتون است. متناظر با آن، زمان پلانک مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نور این مسافت را طی کند، که حدود 10^{-43} ثانیه است. پایین‌تر از این مقیاس‌ها، فضا و زمان دیگر معنای نخواهد داشت. این آخر خط است.

این اعداد حدی را تعیین می‌کنند که هرگز کوچک‌تر از آن نمی‌توانیم فضا و زمان را تقطیع کنیم. برای این‌که تصوری به دست آورید از این‌که این‌جا درباره‌ی چه سطح دقتی صحبت می‌کنیم، در نظر بگیرید که برای یکی از افراطی‌ترین مقایسه‌های قابل‌تصور، به چند رقم نیاز داریم. بزرگ‌ترین مسافت ممکن، یعنی قطر برآورد شده‌ی گیتی شناخته شده، را در نظر بگیرید، و آن را بر کوچک‌ترین مسافت ممکن، یعنی طول پلانک، تقسیم کنید. این نسبت مسافت‌ها که به‌طور تصورناپذیری بزرگ است، عددی است که فقط شصت رقم دارد. تأکید می‌کنم—*فقط* شصت رقم. این بزرگ‌ترین عددی است که برای بیان یک مسافت بر حسب یک مسافت دیگر به آن نیاز خواهیم داشت. استفاده کردن از تعداد بیشتر رقم‌ها—مثلاً صد رقم، چه رسد به بی‌نهایت رقم—اسرافی عظیم خواهد بود، *خیلی* بیشتر از چیزی که برای بیان مسافت‌ها در جهان مادی به آن نیاز خواهیم داشت.

و با این حال، در حسابان همواره از بی‌نهایت رقم استفاده می‌کنیم. از همان مدرسه‌ی راهنمایی، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که به اعدادی مانند ... ۰٫۳۳۳ که اعشار آن‌ها تا ابد ادامه دارد، فکر کنند. به این‌ها اعداد حقیقی می‌گوییم، با آن‌که به‌هیچ‌وجه حقیقی به نظر نمی‌رسند. این‌که لازم باشد یک عدد حقیقی را با بی‌نهایت رقم بعد از ممیز بنویسیم، دقیقاً نشان‌دهنده‌ی غیرحقیقی بودن آن عدد است، لااقل بر اساس حقیقتی که از فیزیک امروز درک می‌کنیم.

اما اگر اعداد حقیقی، حقیقی نیستند، پس چرا ریاضی‌دان‌ها این‌قدر آن‌ها را دوست دارند؟ و چرا دانش‌آموزان مجبورند آن‌ها را یاد بگیرند؟ به‌خاطر این‌که حسابان به آن‌ها نیاز دارد. از آغاز، حسابان با کله‌شقی اصرار داشته است که همه چیز—فضا و زمان، ماده و انرژی، و تمام اشیایی که تا کنون بوده‌اند یا خواهند بود—باید پیوسته در نظر

گرفته شوند. بنابراین، همه چیز را می‌توان و باید با اعداد حقیقی اندازه‌گیری کرد. در این دنیای خیالی آرمانی، وانمود می‌کنیم که همه چیز را می‌توان به‌طور بی‌پایان به قطعات ریزتر و ریزتری تقسیم کرد. تمام نظریه‌ی حسابان مبتنی بر این فرض است. بدون آن، نمی‌توانستیم حدها را محاسبه کنیم، و بدون حدها، حسابان از حرکت بازمی‌ماند. اگر فقط می‌خواستیم از اعداد اعشاری با شصت رقم اعشار استفاده کنیم، در آن صورت محور اعداد لکه‌لکه و متخلخل به نظر می‌رسید. حفره‌هایی خالی در محور یافت می‌شد که جای اعدادی مانند عدد پی و جذر دو بود که نیاز به بی‌نهایت رقم اعشار بعد از ممیز دارند. حتی کسر ساده‌ای مانند $\frac{۱}{۳}$ در محور یافت نمی‌شد، زیرا آن هم برای مشخص کردن مکان‌اش روی محور اعداد نیاز به بی‌نهایت رقم اعشار بعد از ممیز دارد (... ۰٫۳۳۳). اگر فرض کنیم که تمام اعداد یک خط پیوسته را تشکیل می‌دهند، آن اعداد باید اعداد حقیقی باشند. شاید این‌ها تقریبی از واقعیت باشند، ولی به‌طور حیرت‌انگیزی خوب عمل می‌کنند. به هر حال، مدل‌سازی واقعیت کار خیلی سختی است. در اعداد اعشاری بی‌پایان نیز، مانند جاهای دیگر حسابان، بی‌نهایت کارها را خیلی ساده‌تر می‌کند.

فصل ۲

مردی که بی‌نهایت را مهار کرد

حدود دویست سال بعد از آن‌که زنون به تفکر درباره‌ی فضا، زمان، حرکت، و بی‌نهایت پرداخت، اندیشمند دیگری نیز پیدا شد که نمی‌توانست در مقابل بی‌نهایت مقاومت کند. نام او ارشمیدس بود. قبلاً در ارتباط با مساحت دایره با او برخورد داشتیم، ولی او به دلایل زیاد دیگری نیز شهرتی افسانه‌ای دارد.

اولاً داستان‌های جالب زیادی درباره‌ی او نقل شده است. در خیلی از این داستان‌ها، او به‌عنوان یک خوره‌ی ریاضی ظاهر می‌شود. مثلاً پلوتارک مورخ می‌گوید که ارشمیدس چنان غرق هندسه می‌شد که «خوردن غذا و تیمار شخصی را از یاد می‌برد». (واقعاً هم صحیح به نظر می‌رسد. خیلی از ما ریاضی‌دان‌ها اولویت زیادی برای غذا و بهداشت شخصی قایل نیستیم.) پلوتارک در ادامه می‌گوید که وقتی ارشمیدس در افکار ریاضی‌اش گم می‌شد، مجبور می‌شدند او را «بلند کنند و به‌زور به حمام ببرند». جالب است که او این‌قدر نسبت به حمام بی‌علاقه بود، در حالی که همه او را به‌خاطر کشفی که در حمام کرد، می‌شناسند. به گفته‌ی معمار رومی ویترویوس، ارشمیدس از کشفی ناگهانی که در حمام کرده بود، چنان به هیجان آمد که برهنه از حمام به خیابان دوید و فریاد برآورد: «اورکا!» («یافتم!»)

داستان‌های دیگر او را به‌عنوان یک شعبده‌باز نظامی، دانشمند جنگاور/جوخه‌ی مرگ یک‌نفره توصیف کرده‌اند. بر اساس این افسانه‌ها، وقتی که شهر زادگاهش سیراکوز در سال ۲۱۲ ق.م. در محاصره‌ی رومیان قرار گرفت، ارشمیدس، که در آن هنگام پیرمردی حدوداً هفتاد ساله بود، به دفاع از شهر خود پرداخت، و با دانشی که درباره‌ی قرقره‌ها و اهرم‌ها داشت، سلاح‌های جالبی ساخت، «ماشین‌هایی جنگی» مانند

قلاب‌ها و جرثقیل‌های غول‌آسایی که می‌توانست کشتی‌های رومی را از دریا بلند کند و ملوان‌ها را از آن بتکاند، مانند گردوخاکی که از کفش تکانده می‌شود. پلوتارک در توصیف این صحنه‌ی وحشت‌آور گفته است: «کشتی را تا ارتفاع بالایی در هوا بلند می‌کردند (که نظاره کردن آن هول‌انگیز بود) و به جلو عقب حرکت می‌دادند و تکان می‌دادند، تا آن‌که همه‌ی دریانوردان بیرون افکنده می‌شدند، و آن‌گاه پس از مدتی آن را به صخره‌ها می‌کوبیدند یا فرومی‌انداختند.»

و اما از شوخی گذشته، همه‌ی دانشجویان رشته‌های علمی و مهندسی ارشمیدس را به‌خاطر اصل شناوری او (یک جسم فروبرده شده در یک مایع با نیرویی برابر با وزن مایع جابه‌جا شده شناور می‌شود) و قانون اهرم‌های او (دو شیء سنگین قرار گرفته در دو طرف یک اهرم در حالت تعادل واقع می‌شوند اگر و تنها اگر وزن آن‌ها نسبت معکوس با فاصله‌ی آن‌ها از تکیه‌گاه داشته باشد) می‌شناسند. هر دوی این ایده‌ها کاربردهای عملی بی‌شماری دارند. اصل شناوری ارشمیدس توضیح می‌دهد که چرا برخی از اشیا شناور می‌شوند و برخی دیگر نه. همین اصل زیربنای معماری دریایی، نظریه‌ی پایداری کشتی، و طراحی سکوهای حفاری نفت در دریا است. و هر زمان از ناخن‌گیر یا دیلم استفاده می‌کنید، خواسته یا ناخواسته از قانون اهرم‌های او استفاده می‌نمایید.

شاید ارشمیدس از سازندگان بزرگ ماشین‌های جنگی بوده باشد، و بی‌تردید دانشمند و مهندس باهوشی نیز بوده است، ولی آن‌چه او را در تالار افتخار جای می‌دهد، کاری است که در زمینه‌ی ریاضیات انجام داده است. او راه را برای حساب انتگرال هموار کرد. عمیق‌ترین ایده‌های آن به‌روشنی در کارهای او قابل مشاهده است، اما پس از او تا دو هزار سال بعد دیده نمی‌شود. این‌که بگوییم از زمان خودش جلوتر بود، حق مطلب را ادا نمی‌کند. آیا تا کنون کسی بیشتر از او از زمان خود جلوتر بوده است؟

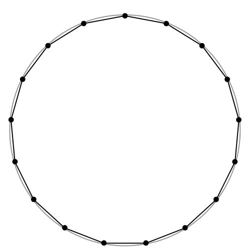
دو راهبرد در کارهای او مکرر در مکرر مشاهده می‌شود. نخست استفاده‌ی اشتیاق‌آمیز او از اصل بی‌نهایت است. او برای کاوش اسرار دایره، کره، و دیگر شکل‌های منحنی، همیشه آن‌ها را با شکل‌های مستقیم‌الخط ساخته شده از تعداد زیادی قطعات راست و مسطح، مانند جواهری چندوجهی، تقریب می‌کرد. او با به تصور درآوردن قطعات هر چه بیشتر و هر چه کوچک‌تر کردن آن‌ها، تقریب را به حقیقت نزدیک‌تر می‌کرد، و به پاسخ دقیق که حد تعداد بی‌نهایت قطعات بود، نزدیک‌تر می‌شد. این راهبرد نیازمند آن بود که او همچون جادوگری در زمینه‌ی مجموع‌ها و معماها تسلط داشته باشد، زیرا در نهایت، می‌بایست تعداد زیادی عدد یا قطعه را با هم جمع کند تا به نتیجه برسد.

دیگر راهبرد ویژه‌ی او آمیختن ریاضیات با فیزیک بود، یعنی درآمیختن ایده‌آل با واقعیت. به‌طور خاص، هندسه، یعنی مطالعه‌ی شکل‌ها، را با مکانیک، یعنی مطالعه‌ی حرکت و نیرو، آمیخته می‌کرد. گاه از هندسه برای روشن کردن مکانیک بهره می‌گرفت؛ و گاه جهت جریان معکوس می‌شد و مباحث مکانیکی موجب درک بهتر شکل خالص می‌گردید. از طریق بهره گرفتن از هر دو راهبرد فوق با مهارت کامل بود که ارشمیدس توانست تا این حد به عمق اسرار منحنی‌ها نفوذ کند.

فشردن عدد پی

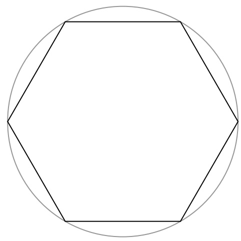
وقتی که پیاده به دفتر کارم می‌روم یا سگم را برای یک پیاده‌روی عصرانه بیرون می‌برم، اپلیکیشن قدم‌سنج گوشی آیفون‌ام حساب می‌کند که چه مسافتی را پیموده‌ام. روش محاسبه ساده است: اپلیکیشن بر اساس قد من، طول قدم‌هایم را تخمین می‌زند و تعداد قدم‌هایی را که برداشته‌ام، حساب می‌کند، بعد این دو عدد را در هم ضرب می‌کند. فاصله‌ی پیموده شده برابر است با طول قدم ضربدر تعداد قدم‌های برداشته شده.

ارشمیدس از روش مشابهی برای محاسبه‌ی محیط دایره و برآورد عدد پی استفاده کرد. فرض کنید دایره یک مسیر پیاده‌روی است. برای پیمودن دورتادور آن باید قدم‌های زیادی بردارید. مسیر شما چیزی شبیه این خواهد بود.



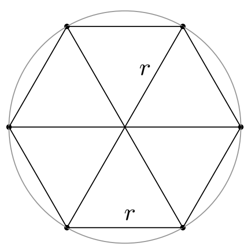
هر قدم با یک خط راست کوچک نشان داده می‌شود. با ضرب کردن تعداد قدم‌ها در طول هر کدام، می‌توانیم طول مسیر را برآورد کنیم. البته این فقط یک برآورد است، زیرا دایره واقعاً از خطوط راست تشکیل نشده است. وقتی که هر قوس را با یک خط راست جایگزین می‌کنیم، یعنی از یک میانبر کوچک عبور می‌کنیم. بنابراین، روشن است که این روش تقریب، طول حقیقی مسیر مدور را *کم برآورد می‌کند*. ولی لااقل از نظر تئوری، می‌توانیم با کوچک‌تر کردن قدم‌ها و زیادتر کردن تعداد آن‌ها، طول مسیر را با هر دقتی که می‌خواهیم، برآورد کنیم.

ارشمیدس یک رشته محاسبه از این قبیل انجام داد، و ابتدا مسیر را به شش گام مستقیم تقسیم کرد.



او از شش‌ضلعی شروع کرد، چون پایگاه راحتی بود که حرکت به‌سوی محاسبات دشوارتر را از آن‌جا شروع کند. مزیت شش‌ضلعی آن بود که به‌آسانی می‌توانست محیط آن، یعنی کل طول پیرامون شش‌ضلعی، را حساب کند. محیط آن شش برابر شعاع دایره است. چرا شش برابر؟ زیرا شش‌ضلعی حاوی شش مثلث متساوی‌الاضلاع است، که هر ضلع آن‌ها برابر با شعاع دایره است.

شش تا از اضلاع مثلث‌ها محیط شش‌ضلعی را تشکیل می‌دهند.



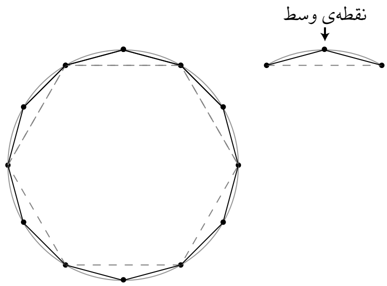
بنابراین، محیط مساوی با شش برابر شعاع است؛ به‌صورت فرمول، $p = ۶r$. پس چون محیط دایره C بزرگ‌تر از محیط شش‌ضلعی p است، باید داشته باشیم $C > ۶r$.

با این استدلال، ارشمیدس توانست یک کران پایین برای چیزی که عدد پی می‌نامیم، به دست آورد. این عدد با حرف یونانی π نمایش داده می‌شود و تعریف آن نسبت محیط به قطر دایره است. از آنجا که قطر d برابر با $۲r$ است، لذا از نامعادله‌ی $C > ۶r$ نتیجه می‌شود:

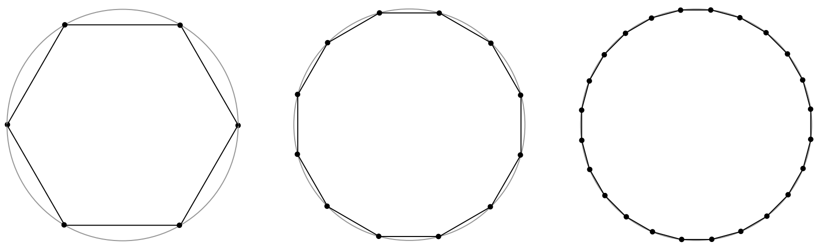
$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{۲r} > \frac{۶r}{۲r} = ۳.$$

به این ترتیب، استدلال مربوط به شش‌ضلعی نشان می‌دهد که $\pi > ۳$.

البته تعداد شش ضلع به طرز مضحکی پایین است، و شش‌ضلعی به دست آمده مشخصاً تنها کاریکاتوری تقریبی از دایره است، ولی این تازه شروع کار ارشمیدس بود. وقتی که فهمید شش‌ضلعی چه چیزی را نشان می‌دهد، قدم‌ها را کوتاه‌تر و تعداد آن‌ها را دو برابر کرد. برای این کار به نقطه‌ی وسط هر قوس رفت، یعنی به‌جای یک قدم بزرگ در هر قوس، دو قدم کوچک‌تر برداشت.



سپس ادامه داد و این کار را بارها و بارها تکرار کرد. به شیوه‌ای وسواس‌گونه، از شش قدم به دوازده قدم رسید، بعد به بیست و چهار، چهل و هشت، و نهایتاً به نود و شش قدم. در هر مورد، طول ضلع را که هر بار کوچک‌تر می‌شد، با دقتی سرگیجه‌آور محاسبه کرد.



متأسفانه، محاسبه‌ی طول قدم در هر مرحله دشوارتر می‌شد، زیرا باید برای به دست آوردن آن از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کرد. برای این منظور، لازم بود که جذر اعداد را محاسبه کند، که محاسبه‌ی آن با دست کار پرزحمتی است. به‌علاوه، برای اطمینان از این‌که همیشه محیط دایره را کوچک‌تر از آن‌چه هست، برآورد می‌کرد، باید مطمئن می‌شد که کسرهای تقریبی او وقتی که لازم است برآورد پایین باشند، کران پایین جذر پرزحمت مورد نظر باشند، و وقتی که لازم است برآورد بالا باشند، کران بالای آن را تشکیل دهند.

منظورم از این حرف‌ها آن است که تلاش او برای محاسبه‌ی π، چه از نظر منطقی و چه از نظر حسابی، کاری قهرمانانه بود. او نهایتاً با استفاده از یک ۹۶ـ ضلعی در داخل دایره و یک ۹۶ـ ضلعی در خارج دایره ثابت کرد که π بزرگ‌تر از $۳ + \frac{۱۰}{۷۱}$ و کوچک‌تر از $۳ + \frac{۱۰}{۷۰}$ است.

یک لحظه ریاضیات را فراموش کنید و فقط این نتیجه را در سطح بصری تماشا کنید:

$$۳ + \frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳ + \frac{۱۰}{۷۰}.$$

مقدار نامعلوم π، که برای همیشه هم نامعلوم خواهد بود، در یک گیره‌ی عددی گیر کرده است، بین دو عدد که تقریباً یکسان به نظر می‌رسند، جز این‌که در اولی مخرج کسر ۷۱ است و در دومی ۷۰. این عدد آخری به $\frac{۲۲}{۷}$ ساده می‌شود، همان تقریب مشهور π که امروز هم دانش‌آموزان یاد می‌گیرند و بعضی‌ها متأسفانه آن را با خود π اشتباه می‌گیرند.

تکنیک فشردن که ارشمیدس (بر پایه‌ی کارهای قبلی ریاضی‌دان یونانی اودوکسوس) از آن استفاده کرد، امروزه روش افنا نامیده می‌شود، زیرا عدد نامعلوم π را بین دو عدد معلوم گیر می‌اندازد. با هر بار دو برابر شدن، کران‌ها تنگ‌تر می‌شود، به‌طوری که فضا برای عدد پی تنگ‌تر می‌شود، و ازاین‌رو، به آن روش افنا می‌گویند.

دایره ساده‌ترین شکل در هندسه است. ولی شگفت آن است که اندازه‌گیری دایره—تعیین خواص آن به‌صورت عددی—از توان هندسه خارج است. مثلاً در کتاب *اصول* اقلیدس، که یکی دو نسل قبل از ارشمیدس نوشته شده است، هیچ اشاره‌ای به π نشده است. در آن‌جا به روش افنا ثابت شده است که نسبت مساحت دایره به مربع شعاع آن برای همه‌ی دایره‌ها یکسان است، ولی هیچ اشاره‌ای نشده که این نسبت جهانی نزدیک به ۳٫۱۴ است. حذف اقلیدس نشانه‌ای بود از این‌که درک عمیق‌تری مورد نیاز است. سر درآوردن از مقدار عددی π نیازمند نوع جدیدی از ریاضیات بود، نوعی که بتواند با شکل‌های منحنی کنار بیاید. نحوه‌ی اندازه‌گیری طول یک خط منحنی یا مساحت یک سطح خمیده و یا حجم یک جسم خمیده—این‌ها پرسش‌های پیشرفته‌ای بود که ذهن ارشمیدس را به خود مشغول کرده بود و منجر به آن شد که او نخستین قدم‌ها را به‌سوی چیزی که امروزه حساب انتگرال می‌گوییم، بردارد. عدد پی نخستین پیروزی آن بود.

شرح حال عدد پی

شاید امروزه برای افراد عجیب باشد که در فرمول ارشمیدس برای مساحت دایره، $A = \frac{rC}{۲}$، عدد پی وجود ندارد، و این‌که او هرگز فرمولی مانند $C = \pi d$ ننوشته که در آن بین محیط دایره و قطر آن رابطه‌ای برقرار شود. او بدان خاطر از این کار اجتناب کرد که پی برای او یک عدد نبود. بلکه صرفاً نسبت دو طول بود، نسبت بین محیط دایره و قطر آن. یک بزرگی بود، نه یک عدد.

امروزه ما دیگر بین بزرگی و عدد تمایز قایل نمی‌شویم، ولی این تمایز در ریاضیات یونان باستان مهم بود. به نظر می‌رسد این تمایز از تنش بین چیزهای گسسته (که با اعداد صحیح بازنمایی می‌شوند) و چیزهای پیوسته (که با شکل‌ها بازنمایی می‌شوند) سرچشمه گرفته باشد. جزئیات تاریخی آن در هاله‌ای از ابهام قرار دارد، ولی به نظر می‌رسد زمانی مابین فیثاغورس و اودوکسوس، بین قرن ششم و چهارم ق.م.، کسی ثابت کرده است که قطر یک مربع با ضلع آن سنجش‌ناپذیر است، بدان معنا که نسبت این دو طول را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد صحیح بیان کرد. به زبان امروزی، کسی وجود اعداد گُنگ را کشف کرد. گمان بر آن است که این کشف موجب شوک و ناامیدی یونانیان شد، زیرا با آموزه‌ی فیثاغورس تناقض داشت. اگر اعداد صحیح و نسبت‌های آن‌ها نمی‌تواند حتی یک چیز اساسی مانند قطر یک مربع کامل را اندازه‌گیری کند، پس همه چیز عدد نیست. شاید به‌خاطر همین ناامیدی اسفبار بوده باشد که ریاضی‌دانان متأخر یونانی همیشه هندسه را بر حساب برتری می‌دادند. دیگر نمی‌توانستند به اعداد اعتماد کنند. اعداد لیاقت آن را نداشتند که بنیانی برای ریاضیات باشند.

ریاضی‌دانان یونان باستان متوجه شدند که برای توصیف کمیت‌های پیوسته و استدلال درباره‌ی آن‌ها، باید چیزی را که قوی‌تر از اعداد صحیح باشد، اختراع کنند. ازاین‌رو، سیستمی را بر پایه‌ی شکل‌ها و نسبت‌های آن‌ها ایجاد کردند. این سیستم متکی بر اندازه‌ی اشیای هندسی بود: طول خط، مساحت مربع، و حجم مکعب. به این‌ها بزرگی می‌گفتند. این‌ها را جدای از اعداد و برتر از آن‌ها می‌دانستند.

به نظر من، به این خاطر بود که ارشمیدس زیاد به پی نزدیک نمی‌شد. نمی‌دانست با آن چه کند. مخلوقی عجیب و متعالی بود، غریب‌تر از هر عدد دیگری.

امروزه پی را به‌عنوان یک عدد می‌پذیریم، یک عدد حقیقی، یک عدد اعشاری بی‌پایان، که البته عدد جالبی نیز هست. بچه‌های من واقعاً شیفته‌ی آن بودند. آن‌ها به یک تابلوی بشقابی در آشپزخانه‌ی خانه‌مان خیره می‌شدند که روی آن ارقام عدد پی

نوشته شده بود که از حاشیه شروع می‌شد و به‌صورت مارپیچی به طرف مرکز می‌رفت، انگار به درون گردابی فرو می‌رفت. شیفتگی آنها احتمالاً به‌خاطر تصادفی بودن این دنباله‌ی ارقام بود، بدون تکرار، بدون نشان دادن هر گونه الگویی، برای همیشه، بی‌نهایت بر روی یک بشقاب. چند رقم اول بسط اعشاری بی‌نهایت عدد پی عبارت‌اند از:

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹
۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰۹۷۴۹ . . .

ما هرگز تمام رقم‌های عدد پی را نخواهیم دانست. ولی آن ارقام هستند و منتظرند کسی آن‌ها را کشف کند. تا زمان نوشتن این کتاب، بیست و دو تریلیون رقم به‌وسیله‌ی سریع‌ترین کامپیوترهای جهان محاسبه شده‌اند. با این حال، بیست و دو تریلیون در مقابل بی‌نهایت رقم که عدد پی واقعی را تشکیل می‌دهند، هیچ نیست. فکرش را بکنید که این از نظر فلسفی چقدر آزار دهنده است. گفتم ارقام عدد پی هستند، ولی دقیقاً کجایند؟ در دنیای مادی وجود ندارند. در نوعی قلمرو افلاطونی هستند، به‌همراه مفاهیم مجردی مانند حقیقت و عدالت.

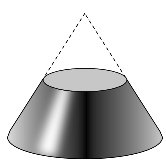
درباره‌ی عدد پی، یک ویژگی بسیار متناقض وجود دارد. از یک سو نشان‌دهنده‌ی نظم است، نظمی که در شکل دایره متجسم شده است که از دیرباز نماد کمال و ابدیت بوده است. از سوی دیگر، عدد پی از نظر ظاهری بسیار سرکش و شلخته است، ارقام آن تابع هیچ قاعده‌ی مشهودی نیستند، یا لااقل قاعده‌ای که برای ما قابل ادراک باشد. عدد پی عددی است گریزان و اسرارآمیز، که برای همیشه دور از دسترس ما است. اختلاط نظم و بی‌نظمی در آن عاملی است که آن را این‌قدر سحرآمیز می‌کند.

عدد پی اساساً فرزند حسابان است. این عدد به‌عنوان حد غیرقابل حصول یک فرایند بی‌پایان تعریف شده است. ولی بر خلاف دنباله‌ی چندضلعی‌ها که مدام به یک دایره نزدیک می‌شوند یا عابر بینوایی که هر بار نیمه‌راه یک دیوار را می‌پیماید، در مورد عدد پی، پایانی برای این راه متصور نیست، حدی برای آن نمی‌شناسیم. و با این حال، عدد پی وجود دارد. این عدد با وضوح هر چه تمام‌تر به‌عنوان نسبت دو طول که درست در مقابل چشمانمان می‌بینیم، یعنی محیط دایره و قطر آن، تعریف شده است. این نسبت عدد پی را تعریف می‌کند و آن را به‌روشنی مشخص می‌نماید، و لیکن خود عدد از بین انگشتانمان می‌لغزد و دستمان به آن نمی‌رسد.

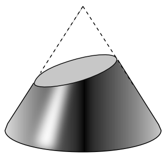
عدد پی با طبیعت دوگانه‌اش مانند مینیاتوری از تمام حسابان است. عدد پی همچون دروازه‌ای است میان گرد و راست، یک عدد است ولی بی‌نهایت پیچیده، تعادلی است بین نظم و آشوب. حسابان نیز به نوبه‌ی خود از بی‌نهایت برای مطالعه‌ی چیزهای متناهی استفاده می‌کند، از نامحدود برای مطالعه‌ی محدود، و از مستقیم برای مطالعه‌ی منحنی. اصل بی‌نهایت کلید اسرار منحنی‌ها است، و در این‌جا برای اولین بار در معمای عدد پی ظاهر گردید.

کوبیسم به دیدار حسابان می‌آید

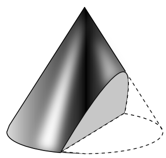
ارشمیدس در رساله‌ی *تربیع سهمی* خود، این بار هم با هدایت اصل بی‌نهایت، بیشتر به ژرفای اسرار منحنی‌ها فرورفته است. سهمی توصیف کننده‌ی قوس آشنایی است که مثلاً در یک پرتاب سه‌امتیازی بسکتبال یا آبی که از شیر آب‌سردکن فواره می‌زند، مشاهده می‌شود. در حقیقت، این قوس‌ها در دنیای واقعی فقط به‌طور تقریبی سهموی هستند. سهمی واقعی، برای ارشمیدس، به‌معنای منحنی‌ای بود که با برش دادن یک مخروط به‌وسیله‌ی یک صفحه به دست می‌آمد. مثلاً تصویر کنید که با یک ساطور، یک کلاه مخروطی یا فنجان کاغذی مخروطی را برش دهید؛ بسته به زاویه‌ی برش نسبت به مخروط، منحنی‌های مختلفی ایجاد می‌شود. در صورتی که برش به موازات قاعده‌ی مخروط باشد، یک دایره حاصل می‌شود.


دایره

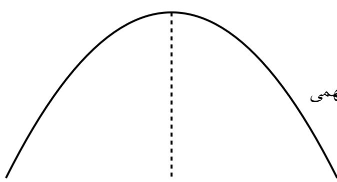
اگر شیب کمی تندتر باشد، یک بیضی حاصل می‌شود.



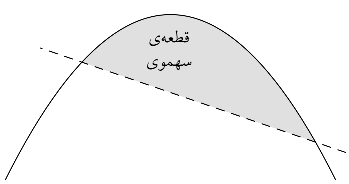
برشی که شیب خود مخروط را داشته باشد، یک سهمی ایجاد می‌کند.



در صفحه‌ی برش، سهمی به‌صورت منحنی متقارن زیبایی ظاهر می‌شود که خط تقارن آن در وسط قرار دارد. به این خط محور سهمی می‌گویند.

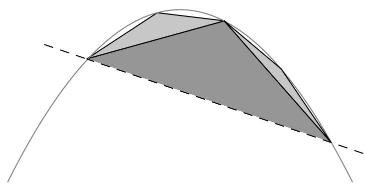


ارشمیدس در رساله‌اش تلاش کرده است روشی برای تربیع یک قطعه‌ی سهموی بیابد. به زبان امروزی‌تر، قطعه‌ی سهموی به‌معنای ناحیه‌ی منحنی واقع بین سهمی و خطی است که به‌طور مایل آن را قطع می‌کند.



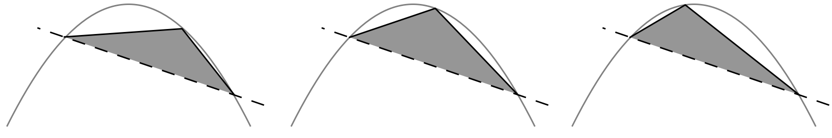
پیدا کردن تربیع این قطعه به‌معنای بیان کردن مساحت نامعلوم آن بر حسب مساحت معلوم یک شکل ساده‌تر، مانند یک مربع، مستطیل، مثلث، و یا شکل مستقیم‌الخط دیگر است.

راهبردی که ارشمیدس به کار گرفت، حیرت‌انگیز بود. او قطعه‌ی سهموی را به‌صورت بی‌نهایت قطعه‌ی مثلثی در نظر گرفت که مانند تکه‌های سفال شکسته به هم چسبانده شده است.



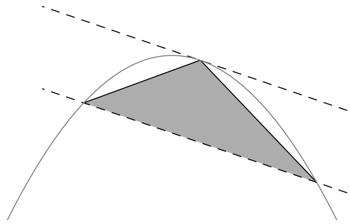
پاره‌ها از نظر اندازه به‌صورت سلسله‌مراتب بی‌پایانی بودند: یک مثلث بزرگ، دو مثلث کوچک‌تر، چهار مثلث باز هم کوچک‌تر، و الی آخر. نقشه‌ی او این بود که مساحت آن‌ها را حساب کند و بعد دوباره آن‌ها را با هم جمع کند تا مساحت ناحیه‌ی خمیده‌ی مورد نظر خود را به دست آورد. تخیل هنری او می‌بایست مثل یک شهر فرنگ بوده باشد تا قطعه‌ی سهموی را که انحنای هموار و ملایمی داشت، به‌صورت موزاییکی از شکل‌های گوشه‌دار در نظر بگیرد. ارشمیدس اگر یک نقاش می‌بود، اولین نقاش سبک کوبیسم می‌بود.

برای اجرای این نقشه، ارشمیدس ابتدا می‌بایست مساحت همه‌ی پاره‌ها را به دست آورد. ولی آن پاره‌ها را دقیقاً چگونه باید تعریف می‌کرد؟ چرا که راه‌های بی‌شماری وجود دارد که مثلث‌ها را در کنار هم قرار دهیم تا یک قطعه‌ی سهموی ایجاد کنند، همان‌گونه که راه‌های بی‌شماری برای شکستن یک بشقاب به قطعات گوشه‌دار وجود دارد. مثلث بزرگ‌تر می‌توانست شبیه این، یا این، و یا هم این باشد:



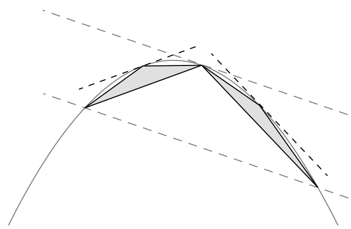
فکر درخشانی به ذهنش رسید—درخشان از آن جهت که یک قاعده ایجاد می‌کرد، الگویی که از یک سطح سلسله‌مراتب تا سطح بعدی برقرار بود. او تصور کرد که خط

مایل قاعده‌ی قطعه‌ی سهموی را به موازات خودش به طرف بالا می‌لغزاند تا آن‌که فقط در یک نقطه نزدیک بالا با سهمی تماس داشته باشد.



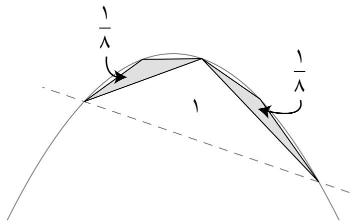
به این نقطه‌ی خاص که کمترین تماس وجود دارد، نقطه‌ی مماس‌شدگی گفته می‌شود (که از ریشه‌ی عربی *تماس* گرفته شده است). این نقطه گوشه‌ی سوم مثلث بزرگ را مشخص می‌کند، و دو گوشه‌ی دیگر آن نقطه‌هایی هستند که خط مایل سهمی را قطع می‌کند.

ارشمیدس از همین قاعده برای تعریف مثلث‌ها در هر مرحله از سلسله‌مراتب استفاده کرد. مثلاً در مرحله‌ی دوم، مثلث‌ها به شکل زیر بود.



دقت کنید که اضلاع مثلث بزرگ اکنون نقش خط مایل مرحله‌ی قبل را ایفا می‌کنند.

سپس از حقایق هندسی شناخته شده درباره‌ی سهمی و مثلث استفاده کرد و رابطه‌ی هر سطح سلسله‌مراتب را با سطح بعدی مشخص کرد. او ثابت کرد که مساحت هر مثلث تازه‌ساخت، یک هشتم مساحت مثلث والد آن است. بنابراین، اگر اولین مثلث بزرگ مساحت ۱ واحد را اشغال کرده باشد—یعنی آن مثلث به‌عنوان معیار مساحت ما باشد—آن‌گاه دو مثلث دختر آن بر روی هم مساحت $\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۴}$ را اشغال خواهند کرد.



در هر کدام از مراحل بعد نیز همین قاعده جاری است: مجموع مساحت مثلث‌های دختر همیشه ربع مساحت مثلث والد آن‌ها است. بنابراین، کل مساحت قطعه‌ی سهموی، با جمع بستن تمام پاره‌ها که تعداد آن‌ها بی‌نهایت است، باید به‌صورت زیر باشد:

$$\textit{مساحت} = ۱ + \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۱۶} + \tfrac{۱}{۶۴} + \cdots ,$$

که یک سری بی‌نهایت است که در آن هر جمله یک چهارم جمله‌ی قبل از آن است.

برای جمع بستن این نوع سری‌های بی‌نهایت، که در این رشته به آن سری هندسی گفته می‌شود، یک راه میانبر وجود دارد. ترفند آن این است که با ضرب کردن هر دو طرف معادله‌ی *مساحت* در ۴ و تفریق کردن مجموع اولیه از آن، می‌توان همه‌ی بی‌نهایت جمله‌ی آن، غیر از یکی، را حذف کرد. تماشا کنید: با ضرب کردن هر جمله در ۴ در سری بی‌نهایت فوق داریم:

$$\begin{aligned} ۴ \times \textit{مساحت} &= ۴(۱ + \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۱۶} + \tfrac{۱}{۶۴} + \cdots) \\ &= ۴ + \tfrac{۴}{۴} + \tfrac{۴}{۱۶} + \tfrac{۴}{۶۴} + \cdots \\ &= ۴ + ۱ + \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۱۶} + \cdots \\ &= ۴ + \textit{مساحت}. \end{aligned}$$

جادو در سطر ماقبل آخر و سطر آخر در بالا اتفاق می‌افتد. سمت راست سطر آخر برابر با *مساحت* + ۴ است، زیرا مجموع اولیه، $۱ + \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۱۶} + \cdots = \textit{مساحت}$، در جملات بعد از ۴ در سطر ماقبل آخر مانند ققنوس دوباره زاده شده است. بنابراین:

$$۴ \times \textit{مساحت} = ۴ + \textit{مساحت}.$$

با تفریق کردن یک *مساحت* از دو طرف، داریم: ۴ = *مساحت* × ۳. در نتیجه:

$$\text{مساحت} = \tfrac{۴}{۳}.$$

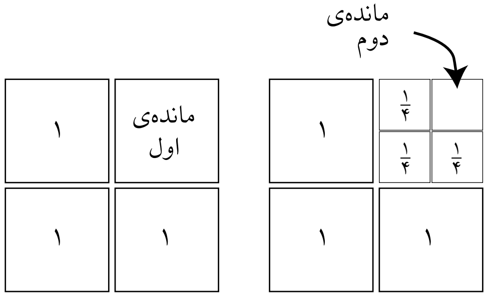
به عبارت دیگر، مساحت قطعه‌ی سهموی $\frac{۴}{۳}$ مساحت مثلث بزرگ است.

یک استدلال پنیری

ارشمیدس اگر می‌بود، زرنگی‌های بالا را نمی‌پذیرفت. او از راه دیگری به همان نتیجه رسید. او به سبک استدلال دیگری متوسل شد که غالباً *تعلیق به محال* مضاعف نامیده می‌شود، و نوعی برهان خُلف مضاعف است. او ثابت کرد که مساحت قطعه‌ی سهموی نمی‌تواند کوچک‌تر از $\frac{۴}{۳}$ یا بزرگ‌تر از $\frac{۴}{۳}$ باشد، بنابراین، باید برابر با $\frac{۴}{۳}$ باشد. به قول شرلوک هلمز که بعدها گفت: «وقتی که غیرممکن‌ها را حذف کردید، هر آن‌چه باقی می‌ماند، *هر چقدر هم غیرمحتمل باشد*، حقیقت خواهد بود.»

آن‌چه از نظر مفهومی در این‌جا اهمیت اساسی دارد، آن است که ارشمیدس غیرممکن‌ها را با بحث‌هایی مبتنی بر تعداد *متناهی* پاره‌ها حذف کرد. او نشان داد که صرفاً با زیاد کردن تعداد پاره‌ها، می‌توانیم کاری کنیم که مجموع مساحت پاره‌ها تا هر جا که می‌خواهیم به $\frac{۴}{۳}$ نزدیک باشد، نزدیک‌تر از هر حدی که تعیین شده باشد. هرگز لازم نبود به بی‌نهایت متوسل شود. بنابراین، همه چیز در اثبات او کاملاً مستدل و مستحکم است. این اثبات هنوز هم با بالاترین معیارهای استدلال ریاضی انطباق دارد.

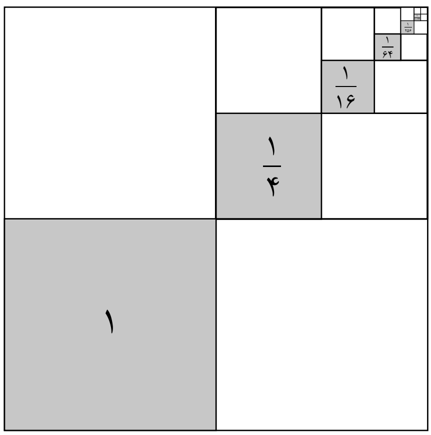
کُنهِ استدلال او را با زبان امروزی به آسانی می‌توان فهمید. فرض کنید سه نفر می‌خواهند چهار قطعه‌ی مساوی پنیر را بین خودشان تقسیم کنند.



راه‌حل متعارف آن است که به هر نفر یک قطعه داده شود و قطعه‌ی باقی‌مانده هم

به سه ثلث تقسیم شود و به آن‌ها داده شود. این منصفانه است. در کل، هر نفر $۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$ قطعه دریافت می‌کند.

ولی فرض کنید که اتفاقاً این سه نفر ریاضی‌دان هستند که می‌خواهند وقتشان را تا شروع همایش دور میز غذا بگذرانند و چشمشان به این چهار قطعه‌ی پنیر است. زرنگ‌ترین این سه نفر، که از قضا اسمش ارشمیدس است، ممکن است راه‌حل زیر را پیشنهاد کند: «من یک قطعه برمی‌دارم، و شما هم هر کدام یک قطعه بردارید. یک قطعه باقی می‌ماند که باید بین خودمان تقسیم کنیم. اقلیدس، آن قطعه‌ی باقی‌مانده را به چهار ربع تقسیم کن، نه به سه ثلث، و هر کدام یک ربع از قطعه‌ی باقی‌مانده را بردارید. همان کار را مرتب تکرار می‌کنیم، و همیشه باقی‌مانده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، تا آن‌که تکه‌ی باقی‌مانده به‌قدری کوچک باشد که به درد هیچ‌کس نخورد. قبول؟ اودوکسوس، این‌قدر بهانه نگیر.»



اگر قرار بود این کار هم‌چنان ادامه یابد، هر کدام از آن‌ها جمعاً چند قطعه پنیر می‌خوردند؟ یک راه برای نگاه کردن به این سؤال آن است که ببینیم به هر نفر چند قطعه پنیر می‌رسد. پس از دور اول، هر نفر یک قطعه دریافت می‌کند. پس از دور دوم، بعد از آن‌که ربع‌های قطعه بین همه تقسیم شد، هر نفر $۱ + \frac{۱}{۴}$ قطعه دریافت می‌کند. پس از دور دوم که باز ربع‌ها به قطعات یک شانزدهمی تقسیم می‌شوند، جمع کل مربوط به هر نفر $۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶}$ قطعه است. و الی آخر. به بیان ساده، اگر تقسیم کردن تا ابد ادامه پیدا کند، هر نفر $۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots$ قطعه خواهد خورد. و چون این مقدار باید نشان‌دهنده‌ی یک سوم چهار قطعه‌ی اولیه باشد، لذا باید $۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots$ برابر با یک سومِ ۴، یعنی $\frac{۴}{۳}$ باشد.

ارشمیدس در رساله‌ی *تربیع سهمی*، استدلالی مشابه با این ارائه کرده و نموداری نیز با مربع‌هایی به اندازه‌های مختلف ترسیم کرده است، ولی هیچ‌گاه متوسل به بی‌نهایت نشده و از چیزی مانند سه‌نقطه [$\cdots$] برای نشان دادن این‌که مجموع به‌طور بی‌پایان ادامه دارد، استفاده نکرده است. بلکه او استدلال خود را بر اساس جمله‌های متناهی ارائه کرده است تا این‌که منطق آن به‌طور خدشه‌ناپذیری مستحکم باشد. مشاهده‌ی کلیدی او این بود که می‌توان با افزایش دادن تعداد متناهی دورها، کاری کرد که مربع کوچک گوشه‌ی بالای راست—یعنی مانده‌ی کنونی که هنوز باید تقسیم شود—از هر مقدار معینی کوچک‌تر باشد. و با استدلالی مشابه، می‌توان با افزایش دادن n به میزان کافی، کاری کرد که مجموع متناهی $۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{۴^n}$ (مقدار کل پنیری که هر نفر دریافت می‌کند) تا حد مطلوب به $\frac{۴}{۳}$ نزدیک باشد. بنابراین، تنها پاسخ ممکن $\frac{۴}{۳}$ است.

روش ارشمیدس

در این‌جا است که واقعاً از ارشمیدس خوشم می‌آید، چون در یکی از مقالات‌اش کاری می‌کند که در میان نوابغ دیگر، کمتر سابقه دارد: او ما را به داخل دعوت می‌کند و نحوه‌ی فکر کردن‌اش را آشکار می‌کند. (در این‌جا از زمان حال استفاده می‌کنم، چون مقاله به‌قدری صمیمانه است که گویی همین امروز با ما سخن می‌گوید.) او مکاشفه‌ی خصوصی خود را که شخصی و آسیب‌پذیر است، با ما در میان می‌گذارد، و می‌گوید امیدوار است ریاضی‌دانان آینده از آن برای حل مسئله‌هایی که او موفق به حل آن‌ها نشده، بهره بگیرند. این راز امروزه «روش» نامیده می‌شود. من در کلاس حسابان چیزی از آن نشنیده‌ام. امروزه دیگر تدریس نمی‌شود. ولی به نظر من،، داستان آن و ایده‌ی مرکزی آن جذاب و شگفت‌انگیز است.

او این مطالب را در نامه‌ای به دوستش اراتوستن می‌نویسد، که در اسکندریه کتابدار بود، و تنها ریاضی‌دان هم‌عصر او بود که می‌توانست حرف‌های او را درک کند. ارشمیدس اعتراف می‌کند که با آن‌که «روش» او «یک نمایش واقعی از نتایج مورد نظر ارائه نمی‌کند»، ولی به او کمک می‌کند بفهمد چه چیزی حقیقت دارد. به او شهود می‌دهد. به قول خودش: «وقتی که با استفاده از روش، ابتدا اطلاعاتی درباره‌ی سؤال مورد نظر به دست آوریم، ارائه‌ی برهان آسان‌تر است، تا اینکه بخواهیم آن را بدون هر گونه دانش قبلی پیدا کنیم.» به عبارت دیگر، او با کنکاش درباره‌ی مسئله و بازی کردن با روش، سعی می‌کند منطقه را شناسایی کند. و این او را به‌سوی برهان خدشه‌ناپذیر

هدایت می‌کند.

این شرح بسیار صادقانه‌ای از نحوه‌ی اشتغال به ریاضیات خلاقانه است. ریاضی‌دانان ابتدا برهان‌ها را پیدا نمی‌کنند. در ابتدا شهود وارد می‌شود. اثبات محکم بعداً از راه می‌رسد. این نقش اساسی که بر عهده‌ی شهود و تخیل است، اغلب در دوره‌های هندسه‌ی دبیرستان مورد غفلت قرار می‌گیرد، در حالی که برای تمام کارهای خلاقانه در ریاضیات ضرورت دارد.

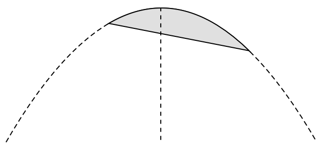
ارشمیدس با این امید سخن را به پایان می‌برد که «در میان نسل حاضر و نسل‌های آینده کسانی باشند که به‌وسیله‌ی روشی که در این‌جا شرح داده شده است، بتوانند قضیه‌های دیگری بیابند که هنوز به ذهن ما نرسیده است.» از این حرف، نزدیک است اشک از چشمانم سرازیر شود. این نابغه‌ی بی‌همتا، که محدود بودن زندگی را در مقابل بی‌کرانگی ریاضیات می‌بیند، متوجه است که هنوز کارهای زیادی برای انجام دادن مانده است، و قضیه‌های دیگری هست که «هنوز به ذهن ما نرسیده است». ما همه همین احساس را داریم، همه‌ی ما ریاضی‌دان‌ها. رشته‌ی ما بی‌انتها است. حتی ارشمیدس هم در مقابل آن احساس فروتنی می‌کند.

نخستین اشاره به روش در آغاز رساله‌ی مربوط به تربیع سهمی صورت گرفته است، قبل از اثبات کوبیسمی با پاره‌های مثلثی. ارشمیدس اعتراف می‌کند که ابتدا با استفاده از روش به این اثبات و به عدد $\frac{4}{3}$ هدایت شده است.

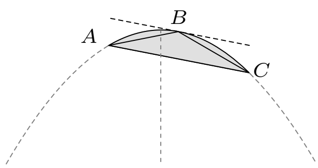
حالا این روش چیست و از چه رو شخصی، هوشمندانه، و خلاف‌کارانه شمرده می‌شود؟ روش ارشمیدس، ماهیتی *مکانیکی* دارد؛ ارشمیدس مساحت قطعه‌ی سهموی را با *وزن کردن* آن در ذهن‌اش به دست می‌آورد. او ناحیه‌ی خمیده‌ی سهموی را مثل یک شیء مادی در نظر می‌گیرد—من خودم آن را به‌صورت یک ورقه‌ی نازک فلزی تصور می‌کنم که به‌دقت به شکل سهموی مورد نظر درآورده شده است—و سپس آن را در یک انتهای یک ترازوی خیالی قرار می‌دهد. یا این‌که می‌توانید آن را در یک انتهای یک الاکلنگ خیالی در نظر بگیرید. سپس فکر می‌کند ببیند چگونه می‌تواند با شکل دیگری که وزن آن را می‌داند، یعنی مثلث، آن را متعادل کند. از این‌جا، مساحت قطعه‌ی سهموی اولیه را استنباط می‌کند.

این رویکرد حتی از تکنیک کوبیسمی/هندسی/پاره‌مثلثی که قبلاً گفتیم، خیال‌پردازانه‌تر است، زیرا در این مورد، باید به‌عنوان بخشی از محاسبه، الاکلنگی خیالی بسازد و آن را به‌گونه‌ای طراحی کند که با ابعاد سهمی هماهنگی داشته باشد. بر روی هم، این‌ها جوابی را که به دنبال آن است، به او می‌دهند.

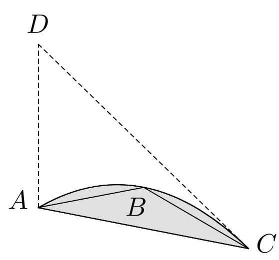
او ابتدا قطعه‌ی سهموی را کج می‌کند تا محور تقارن سهمی عمودی باشد.



سپس الاکلنگ را حول آن می‌سازد. در دفترچه‌ی راهنما نوشته شده است: *مثلث بزرگ را داخل قطعه‌ی سهموی، مانند قبل، بکشید، و آن را* ABC *نام‌گذاری کنید.* همانند اثبات کوبیسمی، در این‌جا نیز این مثلث به‌عنوان معیار مساحت در نظر گرفته خواهد شد. قطعه‌ی سهموی را با آن مقایسه خواهیم کرد و خواهیم دید که مساحت قطعه‌ی سهموی چهار سوم مساحت آن است.

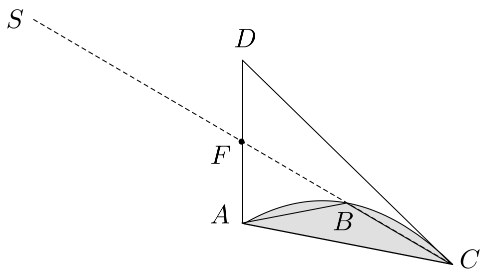


سپس قطعه‌ی سهموی را در مثلث خیلی بزرگ‌تری، ACD، محصور کنید.

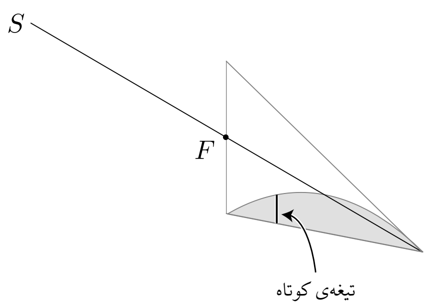


ضلع بالای این مثلث، خط مماس بر سهمی در نقطه‌ی C انتخاب می‌شود. قاعده‌ی آن خط AC است. و ضلع چپ آن یک خط عمودی است که از A به طرف بالا امتداد می‌یابد تا آن‌که ضلع بالا را در نقطه‌ی D قطع کند. با استفاده از هندسه‌ی استاندارد اقلیدسی، ارشمیدس ثابت می‌کند که مساحت این مثلث عظیم بیرونی ACD چهار برابر مساحت مثلث درونی ABC است. (این واقعیت بعداً اهمیت پیدا خواهد کرد. فعلاً آن را کنار بگذارید.)

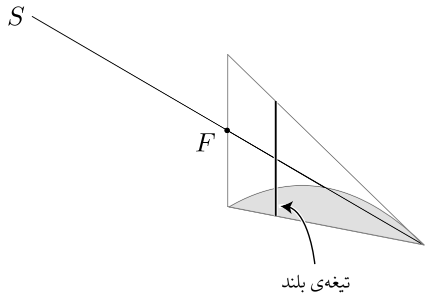
در مرحله‌ی بعد، باید بقیه‌ی الاکلنگ را بسازیم: اهرم، دو صندلی، و تکیه‌گاه. اهرم خطی است که دو صندلی را به هم وصل می‌کند. این خط از C شروع می‌شود، از B عبور می‌کند، و از مثلث بزرگ بیرونی در F (تکیه‌گاه) خارج می‌شود، و به طرف چپ ادامه پیدا می‌کند تا آن‌که به یک نقطه‌ی S (صندلی) می‌رسد. شرطی که محل S را تعریف می‌کند، این است که فاصله‌ی آن از F به اندازه‌ی فاصله‌ی C از آن است. به عبارت دیگر، F نقطه‌ی وسط خط SC است.



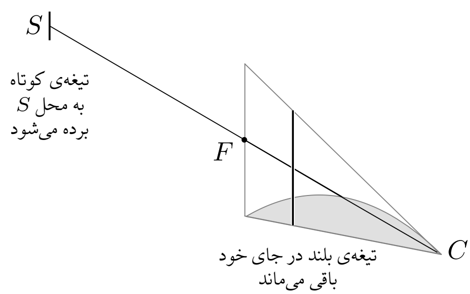
در این‌جا به بینش حیرت‌انگیزی که زیربنای تمام این مفهوم است، می‌رسیم. ارشمیدس با استفاده از حقایق شناخته شده درباره‌ی سهمی و مثلث، ثابت می‌کند که می‌توان مثلث بزرگ بیرونی و قطعه‌ی سهموی را به تعادل رساند، به این صورت که آن‌ها را *متشکل از خط‌های عمودی* در نظر می‌گیریم. او هر کدام از این‌ها را تشکیل شده از بی‌نهایت خط موازی در نظر می‌گیرد. این خطوط مانند تیرک‌ها یا تیغه‌هایی با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک هستند. مثلاً یک جفت از آن‌ها را در این‌جا می‌بینیم که به‌صورت یک خط عمودی که از هر دو شکل می‌گذرد، تعریف شده‌اند. روی این خط، یک تیغه‌ی کوتاه قاعده را به سهمی وصل می‌کند



و یک تیغه‌ی بلند قاعده را به ضلع بالای مثلث بزرگ بیرونی وصل می‌نماید.



بینش شگفت‌انگیز ارشمیدس آن است که این تیغه‌ها کاملاً با هم به تعادل می‌رسند، مانند بچه‌هایی که روی الاکلنگ بازی می‌کنند، به شرط این‌که در محل مناسب قرار گرفته باشند. او ثابت می‌کند که اگر تیغه‌ی کوتاه را به محل S ببرد و تیغه‌ی بلند را در همان‌جا نگه‌دارد، تعادل برقرار می‌شود.



این مطلب برای هر برش عمودی صادق است. هر کدام از برش‌های عمودی را در نظر بگیرید، در صورتی که تیغه‌ی کوتاه را به S ببرید و تیغه‌ی بلند را در محل خود باقی بگذارید، تیغه‌ی کوتاه و تیغه‌ی بلند همواره به تعادل می‌رسند.

بنابراین، دو شکل تیغه به تیغه با هم به تعادل می‌رسند. تمام تیغه‌های سهمی در S قرار می‌گیرند. بر روی هم، به تمام تیغه‌های مثلث بزرگ بیرونی ACD تعادل برقرار می‌کنند. و از آن‌جا که این تیغه‌ها جابه‌جا نشده‌اند، بدان معنا است که اگر جرم سهموی به S برده شود، با مثلث بزرگ در همان جایی که هست، به تعادل می‌رسد.

سپس ارشمیدس تعداد بی‌نهایت تیغه‌ی مثلث بزرگ را با یک نقطه‌ی معادل آن، به نام گرانیگاه مثلث، جایگزین می‌کند. این نقطه به‌عنوان جانشین عمل می‌کند. تا جایی که به الاکلنگ مربوط می‌شود، مثلث بزرگ به‌گونه‌ای عمل می‌کند که گویی تمام جرم آن در نقطه‌ی گرانیگاه متمرکز شده است. ارشمیدس قبلاً در کارهای خود نشان داده

است که این مکان روی خط FC در نقطه‌ای درست سه برابر نزدیک‌تر از S به تکیه‌گاه F قرار گرفته است.

بنابراین، از آنجا که کل جرم مثلث سه برابر به نقطه‌ی محور نزدیک‌تر است، لذا وزن قطعه‌ی سهموی باید یک‌سوم آن باشد تا با هم به تعادل برسند؛ این قانون اهرم‌ها است. ازاین‌رو، مساحت قطعه‌ی سهموی باید یک سوم مساحت مثلث بزرگ بیرونی ACD باشد. و از آنجا که مساحت مثلث بیرونی چهار برابر مساحت مثلث درونی ABC است (همان مطلبی که قبلاً کنار گذاشتیم)، لذا ارشمیدس نتیجه‌گیری می‌کند که مساحت قطعه‌ی سهموی باید $\frac{۴}{۳}$ مساحت ABC درون آن باشد... درست همان نتیجه‌ای که قبلاً با جمع بستن سری بی‌نهایت پاره‌های مثلثی به دست آوردیم!

امیدوارم توانسته باشم نشان دهم که این استدلال چقدر نشئه‌آور است. ارشمیدس در این‌جا به‌جای سفالگری که پاره‌ها را سر هم می‌کند، بیشتر مانند یک قصاب است. او بافت ناحیه‌ی سهموی را به‌صورت نوارهایی عمودی یکایک از هم می‌گسلد، و همه‌ی این نوارهای گوشتی با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک را در S از قلاب آویزان می‌کند. وزن کل این گوشت نسبت به موقعی که یک قطعه‌ی سهموی دست‌نخورده بود، تغییری نمی‌کند. او فقط شکل اولیه را به تعداد زیادی نوار باریک عمودی بریده است و همه‌ی آن‌ها را از یک قلاب گوشت آویزان کرده است. (تصویر خیلی عجیبی است. شاید بهتر باشد که از همان مثال الاکلنگ استفاده کنیم.)

چرا من این استدلال را خلاف‌کارانه نامیدم؟ زیرا از بی‌نهایت بالفعل استفاده می‌کند. در یک جا، ارشمیدس آشکارا می‌گوید که مثلث بیرونی «از همه‌ی خطوط موازی» در درون خودش تشکیل شده است. البته چنین بیانی در ریاضیات یونانی تابو است؛ بی‌نهایت پیوسته‌ای از این خطوط موازی، تیغه‌های عمودی، وجود دارد. او آشکارا مثلث را متشکل از بی‌نهایت بالفعلی از تیغه‌ها دانسته است. با این کار، غول را آزاد کرده است.

به همین ترتیب، بیان می‌کند که قطعه‌ی سهموی «متشکل از همه‌ی خط‌های موازی رسم شده در درون منحنی است». به‌علت سروکار داشتن با بی‌نهایت بالفعل، جایگاه این استدلال، از دیدگاه او، به حد یک بهگزینی تنزل می‌کند—راهی برای یافتن جواب، نه اثباتی برای درستی آن. او در نامه‌اش به اراتوستن، «روش» را کوچک شمرده، می‌گوید که چیزی بیش از «نوعی نشانه» از درست بودن نتیجه‌گیری نیست.

صرف‌نظر از جایگاه منطقی آن، روش ارشمیدس دارای کیفیت *e pluribus unum* است. این عبارت لاتین، که شعار ایالات متحده‌ی آمریکا است، یعنی «از بسیار، یکی». از بی‌نهایت خط راست که سهمی را تشکیل می‌دهند، یک ناحیه

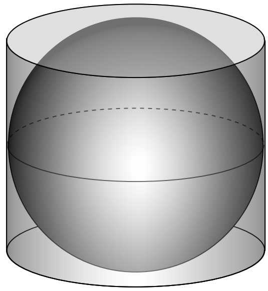
پدیدار می‌شود. ارشمیدس این ناحیه را به‌عنوان جرم در نظر می‌گیرد و آن را خط به خط به صندلی طرف چپ الاکلنگ می‌برد. به این ترتیب، تعداد بی‌نهایت خطوط به‌صورت یک جرم واحد در یک نقطه‌ی منفرد نمایش داده می‌شود. یک، جایگزین و معرف بسیار می‌شود و آن را به‌طور کامل و دقیق بازنمایی می‌کند.

همین مطلب برای به تعادل درآوردن مثلث بیرونی در طرف راست الاکلنگ نیز مصداق دارد. از میان پیوستار خطوط عمودی، یک نقطه—گرانیگاه آن—انتخاب می‌شود. این نقطه هم جایگزین کل آن می‌شود. بی‌نهایت در واحد مستتر می‌شود؛ *e pluribus unum*. ولی این نه شعر است و نه سیاست. این سرآغاز حساب انتگرال است. مثلث و ناحیه‌ی سهموی به‌وضوح و به‌طور اسرارآمیز، به معنایی که ارشمیدس کاملاً نتوانست آن را به‌طور مستحکم مستدل کند، معادل با بی‌نهایت خط عمودی هستند.

با آن‌که به نظر می‌رسد که ارشمیدس از سر و کله زدن با بی‌نهایت خجالت‌زده است، ولی آن‌قدر شهامت دارد که مسئولیت آن را بر عهده بگیرد. هر کس بخواهد یک شکل منحنی را اندازه‌گیری کند—طول پیرامون یا مساحت یا حجم درون آن را پیدا کند—باید با حد یک مجموع بی‌نهایت قطعات بی‌نهایت‌کوچک سر و کله بزند. شاید برخی افراد دقیق تلاش کنند این ضرورت را دور بزنند، و با نکته‌بینی از روش افنا بهره بگیرند. ولی در نهایت، گریزی از آن نیست. کنار آمدن با شکل‌های منحنی، خواه‌ناخواه به‌معنای کنار آمدن با بی‌نهایت است. ارشمیدس در این مورد تعارف ندارد. وقتی که لازم است، می‌تواند به برهان‌هایش جامه‌ی محترمانه‌ای بپوشاند، و از مجموع‌های متناهی و روش افنا استفاده کند. ولی در پنهان، او هم کثیف است. او اعتراف می‌کند که در ذهن‌اش شکل‌ها را وزن می‌کند، اهرم و گرانیگاه را به تخیل درمی‌آورد، ناحیه‌ها و اجسام را خط‌به‌خط به‌صورت قطعه‌هایی بی‌نهایت‌کوچک وزن می‌کند.

ارشمیدس در ادامه از روش خود برای بسیار مسایل دیگر در ارتباط با شکل‌های منحنی استفاده کرد. مثلاً از آن برای به دست آوردن گرانیگاه یک نیم‌کره‌ی صلب، یک سهمی‌وار، و قطعه‌های بیضی‌وار و هذلولی‌وار استفاده کرد. نتیجه‌ی مورد علاقه‌اش، که به‌قدری آن را دوست داشت که خواسته بود آن را روی سنگ قبرش حک کنند، مربوط به مساحت و حجم کره بود.

کره‌ای را در نظر بگیرید که تنگاتنگ در یک جاکلاهی استوانه‌ای جای گرفته است.



ارشمیدس، با استفاده از روش خود، کشف کرد که حجم کره $\frac{۲}{۳}$ حجم جاکلاهی احاطه کننده‌ی آن است، و مساحت آن هم $\frac{۲}{۳}$ مساحت آن است (به فرض آن‌که درپوش‌های بالا و پایین هم جزو مساحت جاکلاهی به شمار آید). دقت کنید که او بر خلافِ کاری که ما امروز می‌کنیم، *فرمولی* برای حجم یا مساحت کره ارائه نکرده است. بلکه او نتایج خود را به‌صورت نسبت بیان کرده است. این شیوه‌ی کلاسیک ریاضی‌دانان یونان است. همه چیز را به‌صورت نسبت بیان می‌کردند. یک مساحت را با مساحت دیگری مقایسه می‌کردند، و یک حجم را با حجمی دیگر. و وقتی که این نسبت با اعداد صحیح کوچک بیان می‌شد، مثلاً مانند این‌جا با ۳ و ۲، و یا در مورد تربیع سهمی با ۴ و ۳، احتمالاً موجب لذت بی‌پایانی برای آن‌ها می‌شد. هر چه باشد، همین نسبت‌ها، ۲ : ۳ و ۳ : ۴، به‌خاطر نقش مهمی که در نظریه‌ی هارمونی موسیقی فیثاغورسی دارند، اهمیت خاصی داشتند. به‌خاطر آورید که وقتی که دو زه یکسان را که نسبت طول آن‌ها ۲ : ۳ است، بکشیم، به طرز زیبایی با یکدیگر هماهنگ می‌شوند، به‌طوری که زیروبمیِ آن‌ها با فاصله‌ای که یک‌پنجم نامیده می‌شود، از هم جدا می‌شود. به همین ترتیب، زه‌هایی با نسبت ۳ : ۴، صدایی با فاصله‌ی یک چهارم ایجاد می‌کنند. این تقارن‌های عددی بین هارمونی و هندسه لابد ارشمیدس را به وجد می‌آورده است.

کلمات او در رساله‌ی «در باب کره و استوانه» نشان می‌دهد که واقعاً چقدر به وجد آمده بود: «البته این خاصیت‌ها همواره در ذات شکل‌ها وجود داشته است، اما تا قبل از دوران من برای کسانی که به مطالعه‌ی هندسه می‌پرداختند، ناشناخته مانده بود.» بگذریم از این‌که حرف‌هایش چقدر غرورآمیز به نظر می‌رسد، به این ادعای او توجه می‌کنیم که خاصیت‌هایی که کشف کرده است «همواره در ذات شکل‌ها وجود داشته است، اما... ناشناخته مانده بود.» در این‌جا او فلسفه‌ی خاصی از ریاضیات را بیان می‌کند که همه‌ی ما ریاضی‌دانان فعال برای آن ارزش زیادی قایل هستیم. ما احساس می‌کنیم که داریم ریاضیات را *کشف* می‌کنیم. نتایج وجود دارند و منتظرند که ما به

سراغ آن‌ها برویم. این‌ها همیشه در ذات شکل‌ها وجود داشته‌اند. ما آن‌ها را اختراع نمی‌کنیم. بر خلاف باب دیلان و تونی موریسون، ما خالق موسیقی یا رمان‌هایی نیستیم که قبلاً وجود نداشته‌اند؛ ما فقط حقایقی را که از قبل وجود دارند و در ذات اشیای مورد مطالعه‌ی ما هستند، کشف می‌کنیم. گرچه آزادی خلاقانه داریم که خود این اشیا را اختراع کنیم—چیزهای ایده‌آلی مانند کره و دایره و استوانه‌ی کامل خلق کنیم—ولی وقتی که این کار را کردیم، آن‌ها خودشان به زندگی خود ادامه می‌دهند.

وقتی که مطالب ارشمیدس را درباره‌ی لذت‌اش از آشکار کردن مساحت و حجم کره می‌خوانم، حس می‌کنم که من هم همان احساس او را دارم. یا این‌که *او* همان چیزهایی را حس می‌کرد که من و همه‌ی همکارانم هنگام انجام کارهای ریاضی حس می‌کنیم. گرچه می‌گویند گذشته یک کشور خارجی است، ولی شاید از هر جهت هم بیگانه نباشد. افرادی که در هومر و انجیل درباره‌ی آن‌ها می‌خوانیم، خیلی شبیه ما به نظر می‌رسند. و درباره‌ی ریاضی‌دانان باستان هم، یا لااقل ارشمیدس، یعنی تنها کسی که ما را به درون دلش راه داده است، همین‌طور به نظر می‌رسد.

بیست و دو قرن پیش، ارشمیدس نامه‌ای به دوستش اراتوستن، کتابدار اسکندریه، نوشت، که در واقع مانند یک پیام ریاضی در درون بطری بود که تقریباً هیچ‌کس ارزش آن را درک نمی‌کرد، ولی امیدوار بود که زمانی با گذشتن از دریای زمان به سلامت به مقصد خواهد رسید. او مکاشفه‌ی خصوصی و «روش» خود را در آن بیان کرده بود، بدان امید که نسل‌های آینده‌ی ریاضی‌دانان را قادر سازد که «بتوانند قضیه‌های دیگری بیابند که هنوز به ذهن ما نرسیده است.» شانس زیادی نداشت. مثل همیشه، تاراج زمان بی‌رحمانه بود. پادشاهی‌ها سقوط کردند و کتاب‌خانه‌ها به آتش کشیده شدند. نسخه‌های خطی پوسیدند. کسی نمی‌دانست که حتی یک نسخه از «روش» هم از قرون وسطی جان به در برده باشد. با آن‌که لئوناردو داوینچی، گالیله، نیوتن، و دیگر نوابغ رنسانس و انقلاب علمی تمام رساله‌های به‌جامانده از ارشمیدس را زیر و رو کردند، هرگز موفق به خواندن روش نشدند، و تصور بر این بود که برای همیشه از دست رفته است.

و بعد، به‌طور معجزه‌آسا، پیدا شد.

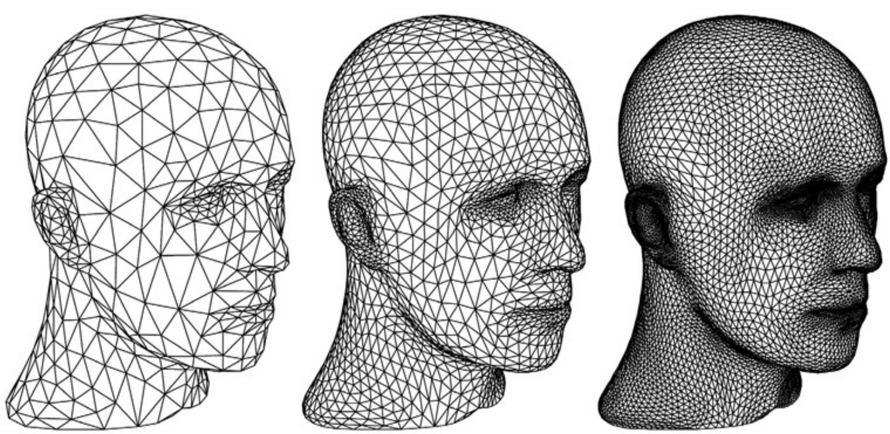
در اکتبر ۱۹۹۸، یک کتاب دعای کهنه‌ی قرون وسطایی در حراجی کریستی به حراج گذاشته شد و به قیمت ۲٫۲ میلیون دلار به یک کلکسیونر خصوصی فروخته شد. در زیر دعاهای لاتین، نمودارهای هندسی و متنی ریاضی به‌زحمت قابل مشاهده بود که به یونانی قرن دهم نوشته شده بود. این کتاب یک نسخه‌ی خطی پاک شده (palimpsest) است؛ در قرن سیزدهم، ورق‌های پوستی آن شسته شده و متن یونانی

اصلی آن پاک شده بود و متن مذهبی لاتین بر روی آن‌ها نوشته شده بود. خوش‌بختانه، متن یونانی به‌طور کامل محو نشده بود. این متن حاوی تنها نسخه‌ی به‌جامانده از روش ارشمیدس است.

این نسخه که امروزه نسخه‌ی خطی پاک شده‌ی ارشمیدس نامیده می‌شود، نخستین بار در سال ۱۸۹۹ در یک کتابخانه‌ی ارتدوکس یونانی در قسطنطنیه مورد توجه قرار گرفت. این کتاب در دوران رنسانس و انقلاب علمی در یک کتاب دعا در صومعه‌ی ساباس قدیس در بیت‌اللحم از نظرها دور مانده بود. هم‌اکنون این نسخه در موزه‌ی هنری والترز در بالتیمور است، و به دقت زیاد مورد مرمت قرار گرفته و با آخرین فناوری‌های تصویربرداری، مطالعه شده است.

ارشمیدس در دوران ما:
از پویانمایی کامپیوتری تا جراحی صورت

میراث ارشمیدس امروز هم‌چنان زنده است. مثلاً فیلم‌های پویانمایی کامپیوتری را که بچه‌ها با علاقه نگاه می‌کنند، در نظر بگیرید. شخصیت‌های فیلم‌هایی مانند *شرِک*، *در جستجوی نِمو*، و *داستان اسباب‌بازی*، بسیار زنده و واقعی به نظر می‌رسند، که بخشی از این مسئله به خاطر استفاده از بینش‌های ارشمیدسی است: هر سطح صافی را می‌توان با تقریب متقاعد کننده‌ای با استفاده از مثلث‌ها ساخت. مثلاً در این‌جا مثلث‌سازی تقریبی سر یک مانکن را می‌بینید.



هر چه از تعداد بیشتری مثلث استفاده کنیم و اندازه‌ی آن‌ها را کوچک‌تر کنیم، تقریب بهتر می‌شود.

آن‌چه برای مانکن‌ها صحیح است، برای غول‌ها، دلقک‌ماهی‌ها، و گاوچران‌های اسباب‌بازی نیز مصداق دارد. درست همان‌گونه که ارشمیدس از موزاییکی از بی‌نهایت پاره‌ی مثلثی برای بازنمایی قطعه‌ای از یک سهمی با انحنای هموار استفاده کرد، سازندگان امروزی پویانمایی نیز در استودیوی دریم‌وُرکس شکم گِردِ شرِک و گوش‌های بانمک شیپورمانند او را با ده‌ها هزار چندضلعی درست کردند. برای یک صحنه‌ی مسابقه که در آن شرک با قلدران محلی نبرد می‌کرد، تعداد حتی بیشتری لازم بود؛ هر کدام از فریم‌های این صحنه با بیش از چهل و پنج میلیون چندضلعی ساخته شد. با این حال، در شکل تمام شده‌ی فیلم، هیچ اثری از آن‌ها نبود. همان‌گونه که اصل بی‌نهایت به ما می‌آموزد، چیزهای مستقیم و ناهموار می‌توانند خود را به‌جای چیزهای منحنی و هموار جا بزنند.

وقتی که تقریباً یک دهه‌ی بعد، در سال ۲۰۰۹، فیلم *آواتار* عرضه شد، سطح جزئیات مبتنی بر چندضلعی بسیار گسترده‌تر شد. به اصرار جیمز کامرون، کارگردان فیلم، سازندگان پویانمایی برای ترسیم کردن هر کدام از گیاهان در دنیای خیالی پاندورا از حدود یک میلیون چندضلعی استفاده کردند. از آنجا که فیلم در یک جنگل مجازی انبوه اتفاق می‌افتاد، تعداد گیاهان خیلی زیاد بود... و تعداد چندضلعی‌ها هم همین‌طور. تعجبی ندارد که تولید *آواتار* سی‌صد میلیون دلار هزینه برداشت. این نخستین فیلمی بود که از میلیاردها چندضلعی استفاده می‌کرد.

در فیلم‌های اولیه که به‌کمک کامپیوتر ساخته می‌شد، از تعداد خیلی کمتری چندضلعی استفاده می‌شد. با این وجود، محاسبات لازم در آن زمان سرسام‌آور بود. مثلاً *داستان اسباب‌بازی* را که در سال ۱۹۹۵ عرضه شد، در نظر بگیرید. در آن زمان، سینک کردن یک شات هشت ثانیه‌ای برای یک انیماتور یک هفته وقت می‌بُرد. تکمیل کردن کل فیلم چهار سال طول کشید و نیاز به هشت‌صد هزار ساعت وقت کامپیوتر داشت. استیو جابز، که از بنیان‌گذاران کمپانی پیکسار بود، در گفتگو با مجله‌ی *وایرد* گفت: «تعداد افراد دارای مدرک دکترا که روی این فیلم کار می‌کنند، بیشتر از هر فیلم دیگری در تاریخ سینما است.»

مدت کوتاهی بعد از *داستان اسباب‌بازی*، فیلم *بازی جرِی* عرضه شد، که نخستین فیلم پویانمایی کامپیوتری است که شخصیت اصلی آن یک انسان است. این قصه‌ی خنده‌دار/غم‌انگیز درباره‌ی پیرمرد تنهایی که در پارک با خودش شطرنج بازی می‌کند، در سال ۱۹۹۸ برنده‌ی جایزه‌ی اسکار برای بهترین فیلم کوتاه پویانمایی شد.

جری هم مانند دیگر شخصیت‌های ایجاد شده به‌وسیله‌ی کامپیوتر، از شکل‌های گوشه‌دار ساخته شده بود. در ابتدای این قسمت، یک گرافیک کامپیوتری را نشان دادم که چهره‌ای را نشان می‌داد که از مثلث‌های بیشتر و بیشتری ساخته شده بود. تقریباً به همان روش، انیماتورهای شرکت پیکسار، سرِ جری را از یک چندوجهی مرکب ساختند، یک شکل جواهر مانند سه‌بعدی که حدوداً متشکل از چهار هزار و پانصد گوشه بود که با وجه‌های مسطحی به هم وصل می‌شدند. انیماتورها این وجوه را مکرراً به وجوه کوچک‌تری تقسیم می‌کردند تا نمایشی با جزئیات هر چه بیشتر حاصل شود. این فرایند تقسیم نسبت به روش‌های کامپیوتری قبلی حافظه‌ی خیلی کمتری مصرف می‌کرد ، امکان ساخت بسیار سریع‌تر پویانمایی را فراهم می‌کرد. این در آن زمان پیشرفتی انقلابی در پویانمایی کامپیوتری به شمار می‌آمد. ولی اساساً برگرفته از کارهای ارشمیدس بود. به یاد آورید که ارشمیدس برای برآورد عدد پی، از یک شش‌ضلعی شروع کرد، بعد هر کدام از اضلاع آن را به دو قسمت تقسیم کرد و نقطه‌ی وسط آن را به طرف دایره برد، تا یک ۱۲ـ ضلعی حاصل شود. پس از یک تقسیم دیگر، ۱۲ـ ضلعی تبدیل به یک ۲۴ـ ضلعی شد، و سپس یک ۴۸ـ ضلعی، و نهایتاً یک ۹۶ـ ضلعی، که هر کدام از آن‌ها دقیق‌تر بر روی هدف خود، که دایره‌ی حدی بود، چنبره می‌انداخت. به همین ترتیب، سازندگان پویانمایی جری نیز پیشانی پرچین‌وچروک، بینی برآمده، و چین‌های پوست گردن او را با تقسیم مکرر یک چندوجهی تقریب کردند. با تکرار این فرایند به دفعات کافی، توانستند کاری کنند که

جری همان‌طور که می‌خواستند به نظر برسد، یعنی یک کاراکتر عروسک‌مانند که دامنه‌ی وسیعی از احساسات انسانی را القا می‌کرد.

چند سال بعد، شرکت دریم‌ورکس، یکی از رقبای پیکسار، قدم بعدی را برای واقع‌نمایی و بیانگری عاطفی در یک غول بوگندوی نق‌نقوی قهرمان به نام شرک، برداشتند.

با آن‌که شرک هرگز بیرون از کامپیوتر وجود نداشته است، ولی عملاً مثل آدم‌ها به نظر می‌رسید. یک دلیل آن این بود که انیماتورها تلاش زیادی کرده بودند که کالبدشناسی انسان را بازسازی کنند. زیر پوست مجازی او، ماهیچه، چربی، استخوان، و مفاصل را به‌طور مجازی ساختند. چنان دقیق درست شده بود که وقتی شرک دهانش را باز می‌کرد تا حرف بزند، پوست زیر گردنش باد به غبغب می‌انداخت.

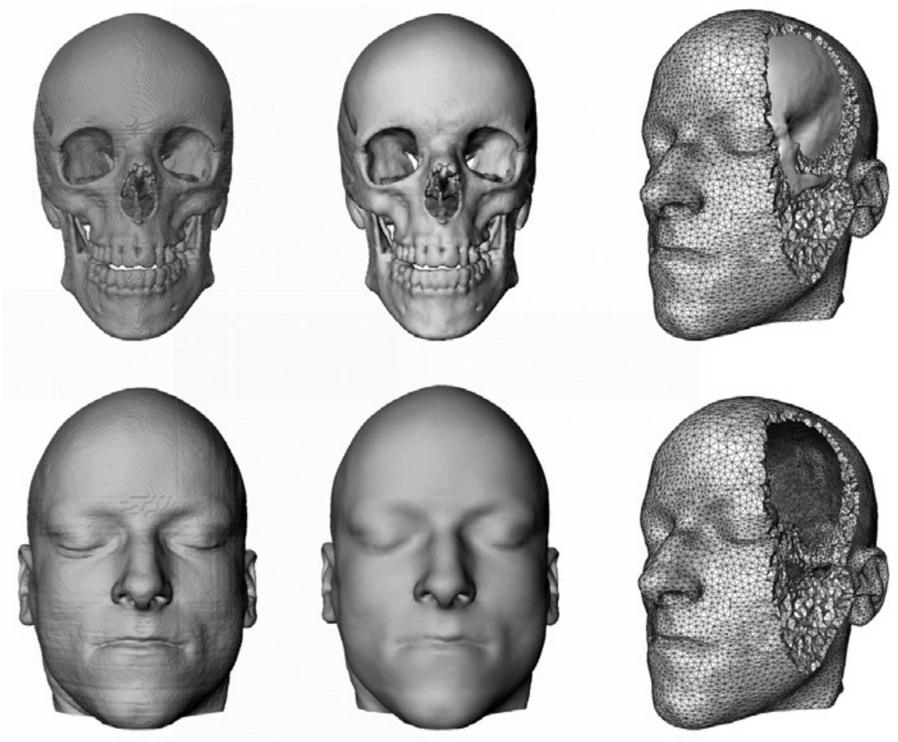
این‌جا است که به رشته‌ی دیگری می‌رسیم که در آن ایده‌ی تقریب چندضلعی ارشمیدس مفید واقع شده است: جراحی صورت برای بیماران دچار اُورِبایت شدید [جلوآمدگی دندان‌های بالا]، ناهم‌ردیفی فک‌ها، و دیگر ناهنجاری‌های مادرزادی. در سال ۲۰۰۶، ریاضی‌دانان کاربردی آلمانی پیتر دویفلهارد، مارتین وایزِر، و استفان زاخوف نتایج تحقیقات خود در زمینه‌ی استفاده از حساب و مدل‌سازی کامپیوتری برای پیش‌بینی پیامدهای جراحی پیچیده‌ی صورت گزارش کردند.

نخستین گام این تیم، ساختن نقشه‌ی دقیقی از ساختار استخوان‌های صورت بیمار بود. برای این منظور، بیماران را با برش‌نگاری کامپیوتری (سی‌تی‌ـ‌اسکن)

و تصویربرداری تشدید مغناطیسی (ام‌آرآی) اسکن کردند. بر اساس این تصاویر، اطلاعاتی درباره‌ی ساختمان سه‌بعدی استخوان‌های صورت در جمجمه به دست آورد که بر اساس آن، محققان یک مدل کامپیوتری از صورت بیمار ایجاد کردند. این مدل نه تنها از نظر هندسی درست بود، بلکه از نظر بیومکانیکی نیز دقیق بود. در این مدل، برآوردهای واقع‌گرایانه‌ای از خواص مواد پوست و بافت‌های نرم، از قبیل چربی، ماهیچه، وترها، رباط‌ها، و رگ‌های خونی گنجانده شده بود. سپس جراحان به‌کمک مدل کامپیوتری، عمل‌های جراحی را روی بیماران مجازی انجام دادند، مانند خلبانان جنگنده که مهارت‌های خود را در شبیه‌ساز پرواز پرورش می‌دهند. جراحان می‌توانستند استخوان‌های مجازی را در صورت، فک، و جمجمه ببرند، جابه‌جا کنند، تقویت کنند، یا این‌که به‌طور کامل بردارند. کامپیوتر محاسبه می‌کرد که بافت نرم مجازی پشت چهره در پاسخ به تنش‌های ناشی از ساختمان استخوانی جدید صورت چگونه حرکت خواهد کرد و تغییر شکل پیدا خواهد کرد.

نتایج این‌گونه شبیه‌سازی‌ها از جهات متعدد سودمند بود. یکی این‌که اثرات نامطلوب احتمالی عمل‌های جراحی را بر روی ساختمان‌های آسیب‌پذیر مانند اعصاب، رگ‌های خونی، و ریشه‌ی دندان‌ها، به جراحان نشان می‌داد. هم‌چنین، مشخص می‌کرد که چهره‌ی بیمار پس از عمل چه شکلی خواهد داشت، زیرا مدل پیش‌بینی می‌کرد که بافت‌های نرم پس از التیام بیمار در چه وضعیتی واقع خواهد شد. یک مزیت دیگر این کار آن بود جراحان بر اساس نتایج شبیه‌سازی، بهتر می‌توانستند برای عمل واقعی آماده شوند. بیماران هم بهتر می‌توانستند در مورد انجام دادن یا ندادن عمل تصمیم‌گیری کنند.

ارشمیدس زمانی وارد کار می‌شد که پژوهشگران سطح هموار دوبعدی جمجمه را با تعداد زیادی مثلث مدل‌سازی می‌کردند. بافت نرم نیز چالش‌های هندسی خاص خود را داشت. بر خلاف جمجمه، بافت نرم یک حجم کاملاً سه‌بعدی را تشکیل می‌دهد. این بافت فضای پیچیده‌ی جلوی جمجمه و پشت پوست صورت را پر می‌کند. تیم محققان، آن را با صدها هزار چهاروجهی نمایش دادند که همتای سه‌بعدی مثلث است. در تصویر زیر، سطح جمجمه تقریباً با ۲۵۰,۰۰۰ مثلث ساخته شده است (مثلث‌ها به‌قدری کوچک هستند که دیده نمی‌شوند)، و حجم بافت نرم متشکل از ۶۵۰,۰۰۰ چهاروجهی است.



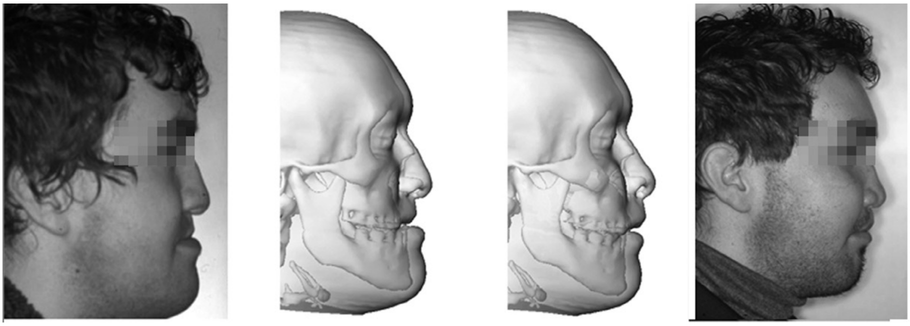
پژوهشگران به‌کمک این آرایه‌ی چهاروجهی‌ها می‌توانستند پیش‌بینی کنند که بافت‌های نرم بیمار پس از جراحی چگونه تغییر شکل خواهد یافت. تقریباً می‌توان گفت که بافت نرم ماده‌ای است تغییرشکل‌پذیر ولی فنری، تا حدودی مانند لاستیک یا اسپَندکس. اگر گونه‌تان را نیشگون بگیرید، تغییر شکل می‌دهد؛ ولی وقتی که رها کنید، به حالت طبیعی بازمی‌گردد. از سده‌ی ۱۸۰۰، ریاضی‌دانان و مهندسان با استفاده از حسابان تلاش کرده‌اند که کش آمدن، خم شدن، و تاب خوردن مواد مختلف را در زمانی که به طرق مختلف فشرده یا کشیده یا به دو طرف حرکت داده می‌شوند، مدل‌سازی کنند. این نظریه در بخش‌های سنّتی‌تر مهندسی بیشتر توسعه پیدا کرده است، و از آن برای تحلیل تنش‌ها و کُرنش‌ها در پل‌ها، ساختمان‌ها، بال هواپیماها، و بسیاری سازه‌های دیگر ساخته شده از فولاد، بتون، آلومینیوم، و دیگر مواد سخت استفاده می‌شود. پژوهشگران آلمانی این رویکرد سنتی را برای بافت‌های نرم سازگار کردند و مشاهده کردند که عملکرد آن به‌قدری است که می‌تواند برای جراحان و نیز بیماران سودمند باشد.

ایده‌ی اساسی آن‌ها این بود. بافت نرم را مانند تورینه‌ای از چهاروجهی‌ها در نظر

بگیرید که به یکدیگر متصل شده‌اند، مانند مهره‌هایی که با نخ کشسان به یکدیگر وصل شده باشند. هر مهره نشان‌دهنده‌ی بخش کوچکی از بافت است. این‌ها با کش به هم وصل شده‌اند، زیرا در واقعیت، اتم‌ها و مولکول‌های بافت با پیوندهای شیمیایی به یکدیگر متصل می‌شوند. این پیوندها در مقابل کش آمدن و فشرده شدن مقاومت می‌کنند، و همین موجب کشسانی آن‌ها می‌شود. در جراحی مجازی، جراح بخش‌هایی از استخوان‌ها را در صورتِ مجازی می‌بُرد و برخی از قطعات استخوان را جابه‌جا می‌کند. وقتی که یک قطعه‌ی استخوان به محل جدیدی برده می‌شود، بافت‌هایی را که به آن متصل است، می‌کشد، و آن‌ها هم به نوبه‌ی خود بافت‌های مجاور را می‌کشند. تورینه به‌خاطر تأثیر نیروهای آبشاری، تغییر شکل پیدا می‌کند. وقتی که قطعات بافت حرکت می‌کنند، از طریق کشیدن یا فشردن پیوندها با قطعات مجاور، نیروهایی را که بر آن‌ها وارد می‌کنند، تغییر می‌دهند. آن بافت‌های مجاور هم دوباره خود را تنظیم می‌کنند، و الی آخر. تعیین تمام نیروها و جابه‌جایی‌های حاصله، محاسبه‌ی عظیمی می‌طلبد که فقط از عهده‌ی کامپیوتر ساخته است. الگوریتم مرحله به مرحله هزاران نیرو و جابه‌جایی را در میان چهاروجهی‌ها محاسبه می‌کند. در نهایت، تمام بافت‌ها متوازن می‌شوند و بافت به حالت تعادل جدید خود می‌رسد. این شکل جدید چهره‌ی بیمار است که مدل آن را پیش‌بینی می‌کند.

در سال ۲۰۰۶، دویفلهارد، وایزر، و زاخوف پیش‌بینی‌های مدل خود را بر روی پیامدهای بالینی حدود سی مورد جراحی آزمایش کردند. آن‌ها مشاهده کردند که مدل خیلی خوب عمل می‌کند. یکی از نشانه‌های موفقیت آن این بود که توانست—با دقت یک میلی‌متر—موقعیت ۷۰ درصد پوست صورت بیمار را پیش‌بینی کند. تنها ۵ تا ۱۰ درصد سطح پوست بیشتر از سه میلی‌متر با محل پیش‌بینی شده‌ی بعد از عمل آن فاصله داشت. به عبارت دیگر، می‌شد به این مدل اعتماد کرد. و قطعاً عملکرد آن از حدس و گمان بهتر بود.

در این‌جا، نمونه‌ی یک بیمار را قبل و بعد از جراحی می‌بینید. چهار تصویر از چپ به راست به ترتیب نیمرخ بیمار قبل از عمل، مدل کامپیوتری صورت در آن زمان، پیامد پیش‌بینی شده‌ی جراحی، و پیامد واقعی را نشان می‌دهند. به جایگاه فک او قبل و بعد از عمل توجه کنید. نتایج کاملاً گویا است.



پیش به‌سوی معمای حرکت

این مطالب را روز بعد از یک کولاک شدید می‌نویسم. دیروز ۱۴ مارس، روز عدد پی، بود، و بیش از ۳۰ سانتی‌متر برف بارید. امروز صبح، در حالی که داشتم برای چهارمین بار برف‌های جلوی خانه را پارو می‌کردم، با حسرت تماشا کردم که یک تراکتور کوچک، که یک برف‌جمع‌کن در جلوی آن نصب شده بود، در آن طرف خیابان به آسانی در پیاده‌روی حرکت می‌کرد. این دستگاه یک تیغه‌ی پیچی چرخان داشت که برف را به درون ماشین می‌کشید و سپس آن را به دور حیاط خانه‌ی همسایه خالی می‌کرد.

استفاده از پیچ چرخان برای پیش‌راندن چیزی، لااقل بر اساس افسانه‌ها، به دوران ارشمیدس برمی‌گردد. امروزه آن را به افتخار او پیچ ارشمیدس می‌نامیم. می‌گویند او در سفر به مصر این پیچ را اختراع کرد (گرچه ممکن است پیش از آن نیز آشوریان از آن استفاده کرده باشند)؛ از این پیچ برای بالا بردن آب از یک محل پایین‌تر به جوی آب استفاده می‌شد. امروزه، دستگاه‌های کمکی قلب از پمپ‌های مبتنی بر پیچ ارشمیدس برای حمایت از گردش خون در مواردی که عملکرد بطن چپ قلب مختل شده است، استفاده می‌کنند.

ولی ظاهراً ارشمیدس دلش نمی‌خواست که ما او را به‌خاطر این پیچ‌ها یا ماشین‌های جنگی‌اش و یا هیچ‌کدام از اختراعات عملی دیگرش به خاطر داشته باشیم؛ هیچ‌گونه نوشته‌ای درباره‌ی آن‌ها از او به ما نرسیده است. او بیشتر از همه به اختراعاتش در ریاضیات مباهات می‌کرد. و فکر می‌کنم خیلی هم مناسبت دارد که در روز عدد پی به میراث او فکر کنیم. در طول دو هزار و دویست سال که از زمان به دام انداختن پی به دست ارشمیدس می‌گذرد، تقریب‌های عددی به دست آمده برای عدد پی چندین برابر بهبود یافته است، ولی همه‌ی آن‌ها با استفاده از تکنیک‌ها ریاضی معرفی شده به‌وسیله‌ی خود ارشمیدس حاصل شده است: تقریب با استفاده از چندضلعی‌ها و یا با سری‌های

بی‌نهایت. به بیان وسیع‌تر، میراث او نخستین استفاده‌ی اصولی از فرایندهای بی‌نهایت برای اندازه‌گیری هندسه‌ی شکل‌های خمیده بود. در این زمینه، او بی‌رقیب بود، و تا به امروز نیز بی‌رقیب مانده است.

ولی هندسه‌ی شکل‌های خمیده فقط ما را تا همین جا می‌رساند. ما نیاز داریم که چگونگی حرکت چیزها در این دنیا را نیز بفهمیم—این‌که بافت انسان بعد از جراحی چگونه جابه‌جا می‌شود، خون چگونه در سرخ‌رگ جریان می‌یابد، یک توپ چگونه در هوا حرکت می‌کند. در این زمینه، ارشمیدس ساکت بود. او علم ایستایی را به ما داد، علم اجسامی که روی اهرم‌ها به حالت تعادل می‌رسند و در آب به‌صورت پایدار شناور می‌شوند. او استاد تعادل بود. قلمرو بعدی به معماهای حرکت مربوط می‌شد.

فصل ۳

کشف قوانین حرکت

وقتی که ارشمیدس مُرد، مطالعه‌ی ریاضی طبیعت هم تقریباً با او مرد. هزار و هشت‌صد سال گذشت تا آن‌که ارشمیدس جدیدی ظاهر شد. در ایتالیای دوران رنسانس، ریاضی‌دان جوانی به نام گالیلئو گالیله ادامه‌ی راه ارشمیدس را در پیش گرفت. او حرکت اشیا را در هوا یا در حال سقوط مورد مشاهده قرار داد، و سعی کرد قوانین عددی حرکت آن‌ها را پیدا کند. آزمایش‌های دقیقی انجام داد و تحلیل‌های هوشمندانه‌ای به عمل آورد. مدت نوسان‌های آونگ‌ها و غلتیدن توپ‌ها بر روی سطوح شیب‌دار را اندازه‌گیری کرد و در هر دو مورد نظم شگفت‌انگیزی را مشاهده کرد. در همین اثنا، یک ریاضی‌دان جوان آلمانی به نام یوهانِس کِپلِر درباره‌ی چگونگی حرکت سیاره‌ها در آسمان مطالعه می‌کرد. هر دو نفر شیفته‌ی الگوهایی شدند که در داده‌های خود مشاهده می‌کردند و حضور چیزی بسیار عمیق‌تر را حس کردند. آنها می‌دانستند که راز مهمی در برابر آنها قرار دارد، ولی نمی‌توانستند دقیقاً معنای آن را دریابند. قوانینی که برای حرکت کشف می‌کردند، به زبان بیگانه‌ای نوشته شده بود. آن زبان، که هنوز ناشناخته بود، حساب دیفرانسیل بود. این نخستین نشانه‌های آن برای انسان‌ها بود.

تا قبل از کارهای گالیله و کپلر، به‌ندرت از روش‌های ریاضی برای فهمیدن پدیده‌های طبیعی استفاده می‌شد. ارشمیدس با قوانین اهرم و تعادل هیدرواستاتیک خود، اصول ریاضی موازنه و شناوری را آشکار کرده بود، ولی آن قوانین محدود به موقعیت‌های ایستا و بدون حرکت بود. گالیله و کپلر به فراتر از دنیای ارشمیدس قدم گذاشتند و به بررسی چگونگی حرکت چیزها پرداختند. تلاش‌های آنها برای فهمیدن چیزهایی که می‌دیدند، منجر به اختراع نوع جدیدی از ریاضیات شد که می‌توانست

حرکت با نرخ متغیر را بیان کند. این ریاضیات جدید به بررسی نوعی از تغییر می‌پرداخت که همچنان تغییر می‌کند، مانند توپی که هنگام پایین غلتیدن از یک سطح شیب‌دار سرعت می‌گیرد، یا سیاره‌ها که زمانی که به خورشید نزدیک‌تر می‌شوند، سرعتشان افزوده می‌شود و هنگامی که از آن دور می‌شوند، از سرعتشان کاسته می‌شود.

در سال ۱۶۲۳، گالیله گیتی را به‌صورت «کتاب بزرگی... که همواره در مقابل چشمان ما باز است»، توصیف کرد، ولی هشدار داد که «این کتاب را نمی‌توان فهمید، مگر آن که ابتدا زبان آن را بفهمیم و یاد بگیریم که حروفی را که با آن‌ها نوشته شده است، بخوانیم. این کتاب به زبان ریاضیات نوشته شده است و حروف آن مثلث‌ها، دوایر، و دیگر اشکال هندسی هستند که بدون آنها حتی یک کلمه از آن را نیز نمی‌توان فهمید؛ بدون اینها در دهلیزی تاریک سرگردان می‌شویم.» کپلر برای هندسه احترام حتی بیشتری قایل بود. او هندسه را «جاودان با ذهن الهی» می‌دانست و بر این باور بود که هندسه «الگوهایی را برای آفرینش جهان به خدا می‌دهد».

چالشی که گالیله، کپلر، و دیگر ریاضی‌دانان هم‌فکرشان در اوایل قرن هفدهم با آن روبه‌رو بودند، این بود که هندسه‌ی محبوبشان را که برای جهان ساکن مناسب بود، توسعه دهند تا برای جهان در حرکت قابل استفاده باشد. مسایلی که پیش روی آنها بود، فقط مشکلات ریاضی نبود، بلکه می‌بایست بر مقاومت‌های فلسفی، علمی، و مذهبی نیز فایق شوند.

جهان از دیدگاه ارسطو

تا قبل از قرن هفدهم، حرکت و تغییر به‌خوبی فهمیده نشده بود. نه تنها مطالعه‌ی آنها دشوار بود، بلکه اصولاً آنها را ناخوشایند می‌دانستند. در تعلیمات افلاطون آمده بود که هدف هندسه به دست آوردن «دانش درباره‌ی چیزی است که تا ابد وجود دارد، نه چیزهایی که یک لحظه به وجود می‌آید و مدتی بعد نابود می‌شود». تنفر فلسفی او از چیزهای گذرا در مقیاسی بزرگ‌تر در کیهان‌شناسی هوشمندترین شاگردش، ارسطو، نمایان شد.

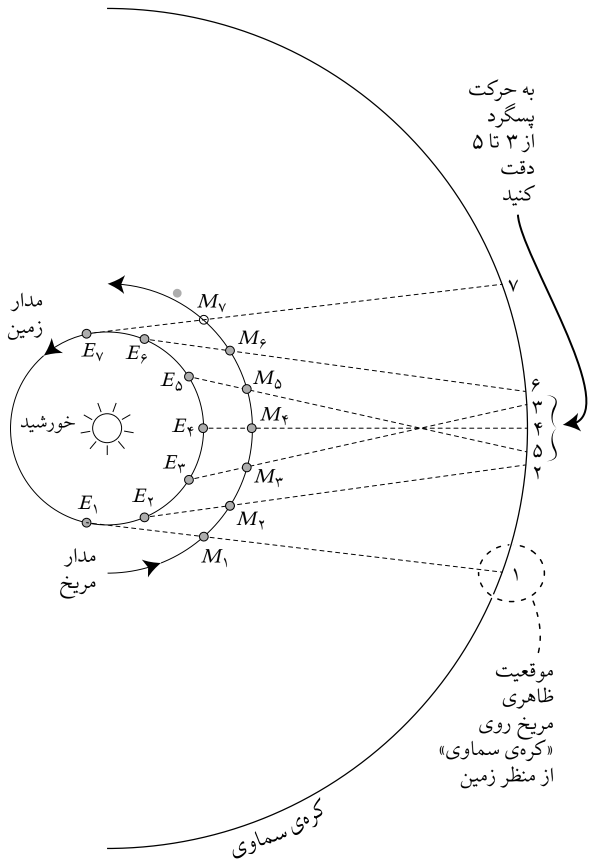
بر اساس آموزه‌های ارسطو که تقریباً تا دو هزاره بر تفکر غربی غالب بود (و کلیسای کاتولیک نیز پس از آنکه توماس آکویناس بخش‌های بت‌پرستانه را از آن پالود، آن را پذیرفت)، آسمان‌ها ابدی، بدون تغییر، و کامل هستند. زمین بی‌حرکت در مرکز آفرینش خدا قرار دارد، در حالی که خورشید، ماه، و ستارگان و سیارات در دایره‌های کامل به دور آن می‌چرخند، و چرخش افلاک سماوی آنها را جابه‌جا می‌کند. بر اساس

این کیهان‌شناسی، همه چیز در قلمرو زمینی در زیر ماه، فاسد و محکوم به فساد، مرگ، و زوال است. چیزهای گذرای زندگی، درست مانند ریختن برگ‌ها، بنا به ماهیت خود گذرا، خطاپذیر، و نامنظم هستند.

با آنکه کیهان‌شناسی زمین‌محور اطمینان‌بخش و مبتنی بر عقل سلیم به نظر می‌رسید، ولی حرکت سیاره‌ها مشکل آزار دهنده‌ای را پدید می‌آورد. کلمه‌ی *سیاره* (*planet*) به معنای دوره‌گرد است. در دوران باستان سیاره‌ها را به‌عنوان ستاره‌های دوره‌گرد می‌شناختند. بر خلاف ستارگان ثابت در کمربند شکارچی و یا ملاقه‌ی بنات‌النعش که هرگز نسبت به یکدیگر حرکت نمی‌کردند، به نظر می‌رسید سیاره‌ها مکان خود را در آسمان حفظ نمی‌کنند و در میان آسمان‌ها جابه‌جا می‌شوند. آن‌ها در طول هفته‌ها و ماه‌ها از یک صورت فلکی به دیگری می‌رفتند. اکثر اوقات نسبت به ستارگان به طرف شرق می‌رفتند، ولی گاهی از اوقات به نظر می‌رسید که سرعت آنها کند می‌شود، توقف می‌کنند، و حتی بر عکس به طرف غرب حرکت می‌کنند، که اخترشناسان به آن حرکت پسگرد می‌گفتند.

به‌عنوان مثال، به نظر می‌رسید که مریخ در طول مدار تقریباً دوساله‌اش به دور آسمان، مدت حدود یازده هفته به طرف عقب حرکت می‌کند. امروز می‌توانیم این حرکت معکوس را به روش عکاسی نشان دهیم. در سال ۲۰۰۵، تونچ تِزِل عکاس نجومی مجموعه‌ای از سی و پنج عکس از مریخ را به فواصل یک‌هفته‌ای گرفت و تصاویر را با ستارگان در پس‌زمینه روی هم انداخت. در ترکیب حاصله، یازده نقطه‌ی میانی مریخ را در حال حرکت پسگرد نشان می‌دهند.

امروزه می‌دانیم که حرکت پسگرد یک توهم است. این تصور به‌خاطر نقطه‌ی نظرگاه ما بر روی زمین هنگام عبور از کنار مریخ که حرکت آهسته‌تری دارد، ایجاد می‌شود.



مثل زمانی است که در بزرگراه از کنار یک ماشین عبور می‌کنید. فرض کنید در بزرگراه طویلی در بیابان رانندگی می‌کنید و کوه‌ها در فاصله‌ی دور دیده می‌شوند. در حالی که از پشت سر به یک ماشین که سرعت کمتری دارد، نزدیک می‌شوید، اگر در مقابل کوه‌های دور به آن نگاه کنید، به نظر می‌رسد که به طرف جلو حرکت می‌کند. ولی وقتی که به کنار آن می‌رسید و از پهلوی آن عبور می‌کنید، در یک لحظه گویی ماشین کندروتر نسبت به کوه‌ها *به طرف عقب* حرکت می‌کند. بعد وقتی که به‌قدر کافی از آن جلوتر رفتید، دوباره به نظر می‌رسد که به طرف جلو حرکت می‌کند.

این نوع مشاهده سبب شد که آریستارخوس اخترشناس یونان باستان تقریباً دو هزار سال قبل از کوپرنیک، خورشیدمرکزی گیتی را پیشنهاد کند. این به‌خوبی معمای حرکت پسگرد را حل می‌کرد. اما گیتی خورشیدمرکز خود سؤالات دیگری را مطرح می‌کرد. اگر زمین حرکت می‌کند، پس چرا ما نمی‌افتیم؟ و چرا به نظر می‌رسد که ستاره‌ها ثابت هستند؟ نباید این‌طور باشد. در حالی که زمین به دور خورشید می‌گردد، باید مشاهده شود که موقعیت ستاره‌های دوردست اندکی تغییر می‌کند. تجربه نشان می‌دهد که اگر از فاصله‌ی دور به چیزی نگاه کنید و بعد حرکت کنید و دوباره نگاه کنید، به نظر می‌رسد که موقعیت آن شیء دور دست در مقابل پس‌زمینه‌ی دوردست جابه‌جا می‌شود. این تأثیر اختلاف منظر نامیده می‌شود. برای اینکه خودتان آن را تجربه کنید، انگشتتان را با فاصله در مقابل صورت خود قرار دهید. ابتدا یک چشم را ببندید و بعد چشم دیگر را. با عوض کردن چشم، به نظر می‌رسد که انگشت شما در مقابل زمینه جابه‌جا می‌شود. به همین ترتیب، در حالی که زمین در مدار خود به دور خورشید می‌گردد، باید موقعیت ظاهری ستاره‌ها در مقابل زمینه‌ی ستاره‌هایی که در فاصله‌ی دورتر واقع شده‌اند، جابه‌جا شود. تنها راه برای خارج شدن از این تناقض (که خود ارشمیدس در پاسخ به کیهان‌شناسی خورشیدمرکز آریستارخوس متوجه آن شده بود)، در صورتی است که *همه‌ی* ستاره‌ها در فاصله‌ی *بسیار دور* قرار گرفته باشند، به‌طوری که عملاً فاصله‌ی آن‌ها از زمین بی‌نهایت باشد. آن‌گاه حرکت سیاره هیچ‌گونه جابه‌جایی مشهودی ایجاد نخواهد کرد، زیرا اختلاف منظر کوچک‌تر از آن خواهد بود که قابل اندازه‌گیری باشد. در آن زمان، پذیرفتن این نتیجه‌گیری بسیار سخت بود. هیچ‌کس نمی‌توانست تصور کند که گیتی تا بدان حد عظمت دارد و ستاره‌ها تا این حد دوردست هستند، بسیار دورتر از سیاره‌ها. امروزه می‌دانیم که دقیقاً همین‌طور است، ولی در آن زمان این قابل‌تصور نبود.

بنابراین، کیهان‌شناسی زمین‌مرکز، با همه‌ی ایراداتی که داشت، تصویر موجه‌تری به نظر می‌رسید. این نظریه که منجم یونان باستان بطلمیوس اصلاحاتی را در آن انجام داد و مفاهیم فلک تدویر، معدل‌المسار، و ضرایب اضافی دیگر به آن افزود، می‌تواند حرکت سیارات را تقریباً به‌خوبی توضیح دهد و هماهنگی تقویم را با چرخه‌های فصلی حفظ کند. نظام بطلمیوسی پرزحمت و پیچیده بود، ولی به‌قدری خوب جواب می‌داد که تا اواخر قرون وسطی دوام پیدا کرد.

دو کتاب در سال ۱۵۴۳ منتشر شد که نشان‌دهنده‌ی یک نقطه‌ی عطف و سرآغاز انقلاب علمی بود. در آن سال، پزشک فلاندری آندرِئاس وِزالیوس نتایج تشریح بدن انسان را که در سده‌های قبل از آن ممنوع بود، منتشر کرد. یافته‌های او با تعلیماتی که

در طول چهارده قرن درباره‌ی کالبدشناسی انسان ارائه شده بود، تناقض داشت. در همان سال، نیکلاس کوپرنیک ستاره‌شناس لهستانی سرانجام اجازه داد که نظریه‌ی ریشه‌ای‌اش درباره‌ی حرکت زمین به دور خورشید منتشر شود. او تا نزدیکی زمان مرگش صبر کرده بود (و درست در اثنای انتشار کتاب نیز فوت کرد)، زیرا می‌ترسید که کلیسای کاتولیک از این‌که زمین در مرکز آفرینش خدا نباشد، خشمگین شود. حق هم داشت که بترسد. پس از آن‌که جوردانو برونو، علاوه بر کفرگویی‌های دیگر، پیشنهاد کرد که وسعت گیتی بی‌نهایت است و مشتمل بر بی‌نهایت جهان است، او را در دادگاه تفتیش عقاید محاکمه کردند و در سال ۱۶۰۰ در رُم او را در آتش سوزاندند.

گالیله وارد می‌شود

در چنین شرایطی که ظهور افکار خطرناک اقتدار و جزم‌اندیشی را به چالش می‌کشید، گالیلئو گالیله در روز ۱۵ فوریه‌ی ۱۵۶۴ در شهر پیزای ایتالیا متولد شد. گالیله بزرگ‌ترین پسر خانواده بود، خانواده‌ای اشرافی که اکنون ستاره‌ی اقبالش رو به افول نهاده بود. پدر گالیله او را وادار کرد که به تحصیل پزشکی بپردازد که شغل پردرآمدتری نسبت به رشته‌ی خودش در زمینه‌ی نظریه‌ی موسیقی بود. ولی گالیله خیلی زود متوجه شد که علاقه‌اش به ریاضیات است. او اقلیدس و ارشمیدس را خواند و بر هر دو تسلط یافت. گرچه مدرک نگرفت (چون خانواده‌اش توان پرداخت شهریه را نداشتند)، ولی هم‌چنان به مطالعه‌ی ریاضی و علوم ادامه داد، و از اقبال بلندش به‌عنوان معلم موقتی در پیزا استخدام شد و به‌تدریج پله‌های ترقی را در محیط دانشگاهی درنوردید و استاد ریاضی در دانشگاه پادوا شد. او مدرس ماهری بود و روشن و طنزآمیز با هزلی گزنده تدریس می‌کرد. دانشجویان فوج‌فوج به کلاس‌های او می‌آمدند تا درس‌های او را بشنوند.

او با زنی پرطراوت و بسیار جوان‌تر به نام مارینا گامبا آشنا شد و با او رابطه‌ای غیرقانونی ولی دیرپا و عاشقانه برقرار کرد. آن‌ها با هم صاحب دو دختر و یک پسر شدند، ولی ازدواج نکردند؛ با توجه به جوانی و مرتبه‌ی اجتماعی پایین‌تر مارینا، برای گالیله زشت می‌دانستند که با او ازدواج کند. گالیله به‌علت فشار ناشی از پایین بودن حقوق‌اش به‌عنوان معلم ریاضی، هزینه‌ی بزرگ کردن سه بچه، و مضاف بر آن مسئولیت تأمین هزینه‌ی خواهر ازدواج نکرده‌اش، مجبور شد که دخترانش را به یک صومعه بسپارد، که این موجب دل‌شکستگی او شد. دختر بزرگ‌ترش، ویرجینیا، را بیشتر دوست داشت و محبوب دلش بود. بعدها در توصیف او گفت: «زنی با ذهن سرشار،

خوش‌قلبی ویژه، و وابستگی بسیار صمیمانه به من». دخترش در زمان ادای سوگند راهبه‌ای، به افتخار مریم باکره و شیدایی پدرش نسبت به ستاره‌شناسی، نام مذهبی خواهر ماریا چِلِسته را برای خود برگزید.

امروزه گالیله را بیشتر به‌خاطر کارش با تلسکوپ و به‌عنوان قهرمان نظریه‌ی کوپرنیکی گردش زمین به دور خورشید می‌شناسند، که با نظرات ارسطو و کلیسای کاتولیک در تناقض بود. با آن‌که گالیله مخترع تلسکوپ نبود، ولی آن را بهبود داد و نخستین کسی بود که کشفیات علمی بزرگی با آن به عمل آورد. بین سال‌های ۱۶۱۰ و ۱۶۱۱، او مشاهده کرد که ماه کوه دارد، خورشید لکه‌هایی دارد، و مشتری چهار قمر دارد (از آن زمان تا کنون، قمرهای دیگری نیز برای آن کشف شده‌اند).

تمام این مشاهدات بر خلاف جزم‌اندیشی متداول آن زمان بود. وجود کوه بر روی ماه بدان معنا بود که ماه، بر خلاف تعلیمات ارسطو، یک کره‌ی کامل و براق نیست. به همین ترتیب، وجود لکه‌های روی خورشید نیز نشان می‌داد که آن هم یک جسم سماوی بی‌نقص نیست؛ چهره‌اش لکه‌دار است. و با توجه به اینکه مشتری و قمرهایش به‌خودی‌خود مانند یک منظومه‌ی سیاره‌ای بودند و چهار قمر کوچک آن به دور یک سیاره‌ی بزرگ‌تر مرکزی می‌گردیدند، معلوم بود که همه‌ی اجرام آسمانی صرفاً به دور زمین نمی‌گردند. به‌علاوه، آن قمرها و مشتری در حالی که در آسمان سیر می‌کردند، به طریقی با هم باقی می‌ماندند. در آن زمان، یکی از استدلال‌های معمول بر علیه خورشیدمرکزی این بود که اگر زمین به دور خورشید می‌گردید، باید ماه را پشت سر می‌گذاشت، ولی اکنون مشتری و قمرهایش نشان می‌دادند که این استدلال باید نادرست باشد.

معنای این مطالب آن نیست که گالیله خداناباور یا غیرمذهبی بود. او مسیحی معتقدی بود و باور داشت که با شناخت کارهای خدا به همان صورتی که هست، نه با اتکا بر آموزه‌های ارسطو و مفسران مکتبی بعدی او، قدرت و عظمت خدا را آشکار می‌کند. ولی کلیسای کاتولیک دیدگاه متفاوتی داشت. نوشته‌های گالیله به‌عنوان ارتداد محکوم شد. او در سال ۱۶۳۳ در دادگاه تفتیش عقاید محاکمه شد و محکوم شد که گفته‌های خود را انکار کند، و او هم چنین کرد. به حبس ابد نیز محکوم شد، ولی این مجازات بلافاصله به حبس خانگی دایمی در ویلایش در آرچِتری در تپه‌های فلورانس تبدیل گردید. او منتظر دیدن دختر محبوبش ماریا چلسته بود، ولی پس از بازگشت گالیله، دخترش مریض شد و در حالی که سی و سه سال بیشتر نداشت، فوت کرد. گالیله داغ‌دیده شد و برای مدتی هر گونه علاقه به کار و زندگی را از دست داد.

او سال‌های باقی‌مانده‌ی عمرش را در حصر خانگی گذراند، در حالی که پیر بود و

بینایی‌اش رو به افول نهاده بود و وقت زیادی نداشت. به طریقی، طی دو سال پس از مرگ دخترش، این توانایی را در خود یافت که تحقیقات منتشر نشده‌اش درباره‌ی حرکت در دهه‌های قبل را خلاصه کند. حاصل آن کتابی شد با عنوان *گفتارها و نمایش‌های ریاضی درباره‌ی دو علم جدید*، که دستاورد زحمات تمام عمر او بود و نخستین شاهکار علم مدرن به شمار می‌رود. او این کتاب را به ایتالیایی نوشت نه به لاتین، تا تمام مردم بتوانند آن را بخوانند، و ترتیبی داد که قاچاقی به هلند برده شود، و در آن‌جا در سال ۱۶۳۸ منتشر شد. بینش‌های ریشه‌ای این کتاب به راه‌اندازی انقلاب علمی و رساندن بشریت به کشف راز گیتی کمک کرد: این‌که کتاب بزرگ طبیعت به زبان حسابان نوشته شده است.

افتادن، غلتیدن، و قانون اعداد فرد

گالیله نخستین کسی بود که روش علمی را مبنای کار خود قرار داد. به‌جای این‌که از بزرگان نقل‌قول کند یا از روی صندلی به فلسفه‌بافی بپردازد، با مشاهدات دقیق، آزمایش‌های هوشمندانه، و مدل‌های ریاضی زیبا، پاسخ را از خود طبیعت جویا شد. رویکرد او کشفیات بزرگی را در پی داشت. یکی از ساده‌ترین و تعجب‌انگیزترین آن‌ها این است: اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، و غیره در نحوه‌ی افتادن اشیا مستتر هستند.

قبل از گالیله، ارسطو پیشنهاد کرده بود که اشیای سنگین از آن رو می‌افتند که در پی جایگاه طبیعی خود در مرکز گیتی هستند. گالیله احساس کرد که این حرف بی‌معنایی است. او به‌جای این‌که به حدس و گمان در این مورد بپردازد که *چرا* اشیا می‌افتند، می‌خواست اندازه‌گیری کند که *چگونه* می‌افتند. برای این منظور، باید راهی پیدا می‌کرد تا سقوط اشیا را اندازه‌گیری کند و لحظه به لحظه مکان آن‌ها را رهگیری نماید.

کار آسانی نبود. هر کسی که سنگی را از بالای پلی پایین انداخته باشد، می‌داند که سنگ تند می‌افتد. برای این‌که سنگ در حال سقوط را در هر لحظه از مسیر افتادن سریع آن رهگیری کنیم، نیاز به ساعت بسیار دقیقی داریم که در روزگار گالیله وجود نداشت، و نیز چندین دوربین ویدئویی بسیار خوب، که در اوایل قرن هفدهم هنوز موجود نبود.

گالیله راه‌حل درخشانی پیدا کرد: او حرکت را کُندتر کرد. به‌جای انداختن یک سنگ از روی پل، توپی را به آهستگی از یک سراشیبی به پایین غلتاند. به اصطلاح فیزیکی، به این نوع سراشیبی، سطح شیب‌دار می‌گویند، گرچه در آزمایش‌های اصلی گالیله، بیشتر به‌صورت یک قالب چوبی نازک و بلند بود که در امتداد طول آن شیاری برای حرکت کردن توپ داشت. او با کاهش دادن شیب این سطح، تا زمانی که تقریباً

افقی می‌شد، می‌توانست نزول توپ را تا هر جا می‌خواست، کندتر کند، تا بتواند محل توپ را در هر لحظه، حتی با ابزارهای موجود در آن زمان، اندازه‌گیری کند.

او برای اندازه‌گیری زمان سقوط توپ از یک ساعت آبی استفاده می‌کرد. این ساعت مثل یک کرونومتر کار می‌کرد. برای به کار انداختن آن، شیر آب را باز می‌کرد. آب به‌طور پیوسته، با نرخ ثابت، جریان می‌یافت، و از طریق یک لوله‌ی نازک وارد یک ظرف می‌شد. برای متوقف کردن ساعت، شیر آب را می‌بست. گالیله با وزن کردن آبی که در مدت نزول توپ جمع شده بود، می‌توانست مدت زمان سپری شده را با دقتی در حد «یک دهم یک ضربان نبض» اندازه‌گیری کند.

او آزمایش را به دفعات زیاد تکرار کرد، گاهی از اوقات شیب سطح را تغییر می‌داد، و گاه مسافت غلتیدن توپ را کم و زیاد می‌کرد. آن‌چه به دست آورد، به زبان خودش، این بود: «مسافت‌های طی شده به‌وسیله‌ی یک جسم در حال سقوط از موقعیت ساکن در فاصله‌های زمانی مساوی، به نسبتِ یکدیگر مانند نسبت اعداد فرد با شروع از یک است.»

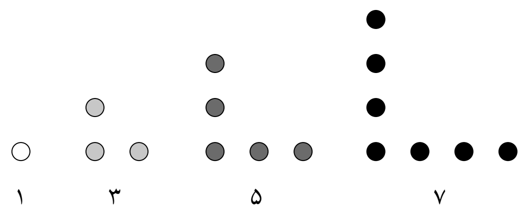
برای این‌که این قانون اعداد فرد را روشن‌تر بیان کنیم، فرض می‌کنیم که توپ در اولین واحد زمان مسافت معینی را طی می‌کند. بعد، در واحد زمان بعدی، *سه برابر* آن مسافت را خواهد پیمود. و باز در واحد زمانی بعد از آن، *پنج برابر* مسافت اولیه را طی خواهد کرد. حیرت‌انگیز است؛ اعداد فرد ۱، ۳، ۵، و الی آخر به طریقی در غلتیدن اشیا به طرف پایین سراشیبی دخالت دارند. و اگر افتادن صرفاً حالت حدی غلتیدن باشد در زمانی که شیب به حالت عمودی نزدیک می‌شود، پس باید همین قاعده برای افتادن هم برقرار باشد.

به‌راحتی می‌توان تصور کرد که گالیله وقتی این قاعده را کشف کرد، چقدر خوش‌حال بوده است. ولی دقت کنید که آن را چگونه بیان کرده است—با کلمات و اعداد و نسبت‌ها، و نه با حروف و فرمول‌ها و معادلات. در آن زمان، روش امروزی ما که جبر را بر بیان گفتاری ترجیح می‌دهیم، شاید روشی بسیار پیشرفته و طرز فکری آوانگارد و نویافته تلقی می‌شد. طرز بیان معمول در زمان گالیله به این صورت نبود و اگر هم به آن صورت بیان می‌کرد، خوانندگانش منظور او را نمی‌فهمیدند.

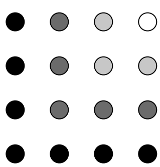
برای این‌که مهم‌ترین پیامد قاعده‌ی گالیله را ببینیم، نگاه می‌کنیم که وقتی اعداد فرد متوالی را جمع بزنیم، چه اتفاقی می‌افتد. پس از یک واحد زمان، توپ یک واحد مسافت را طی می‌کند. پس از واحد زمان بعد، توپ سه واحد مسافت دیگر را طی می‌کند که مجموع آن $۴ = ۳ + ۱$ واحد مسافت از زمان شروع حرکت می‌شود. پس از واحد زمان سوم، مجموع مسافت $۹ = ۵ + ۳ + ۱$ واحد می‌شود. به الگوی آن

دقت کنید: اعداد ۱، ۴، و ۹ مربع اعداد صحیح متوالی هستند: $۱ = ۱^{۲}$، $۴ = ۲^{۲}$، $۹ = ۳^{۲}$. بنابراین، به نظر می‌رسد که معنای قاعده‌ی اعداد فرد گالیله این است که کل مسافت سقوط متناسب با مربع زمان سپری شده است.

این رابطه‌ی زیبا بین اعداد فرد و مربع‌ها را می‌توان به‌صورت بصری ثابت کرد. هر عدد فرد را به‌صورت آرایه‌ی L_شکلی از نقطه‌ها در نظر بگیرید:



بعد آن‌ها را بغل هم قرار دهید تا یک مربع تشکیل دهند. به‌عنوان مثال، $۴ \times ۴ = ۱۶ = ۷ + ۵ + ۳ + ۱$، زیرا می‌توانیم چهار عدد فرد را کنار هم قرار دهیم تا یک مربع ۴ در ۴ تشکیل دهند.



گالیله علاوه بر قانون مربوط به مسافت طی شده‌ی شیء در حال سقوط، قانونی را نیز برای سرعت آن کشف کرد. به بیان خودش، سرعت متناسب با زمان سقوط افزایش می‌یابد. نکته‌ی جالب آن است که او در این‌جا به سرعت جسم در یک لحظه اشاره دارد، که ظاهراً مفهومی متناقض است. او در *دو علم جدید* تلاش زیادی کرد تا توضیح دهد که زمانی که یک جسم از حالت سکون شروع به افتادن می‌کند، بر خلاف تصور معاصران او، ناگهان از سرعت صفر به یک سرعت بالاتر جهش نمی‌کند. بلکه به‌طور هموار در یک مدت زمان متناهی از هر سرعت بینابینی—از بی‌نهایت سرعت—عبور می‌کند، به‌طوری که سرعت آن از صفر شروع می‌شود و هم‌چنان‌که می‌افتد، به‌صورت پیوسته افزایش می‌یابد.

بنابراین، در این قانون سقوط اشیا، گالیله به‌طور غریزی درباره‌ی *سرعت لحظه‌ای* صحبت می‌کند، که یک مفهوم حساب دیفرانسیل است که در فصل ۶ به بررسی آن

خواهیم پرداخت. در آن زمان، او نمی‌توانست آن را به دقت بیان کند، ولی مقصود مورد نظرش را به‌صورت شهودی می‌دانست.

هنر کمینه‌گرایی علمی

قبل از آن‌که آزمایش سطح شیب‌دار گالیله را پشت سر بگذاریم، بد نیست دقیق‌تر به هنری که در آن نهفته است، نگاهی بیفکنیم. او با پرسیدن سؤالی زیبا، پاسخی زیبا را از طبیعت به دست آورد. مانند یک نقاش اکسپرسیونیست انتزاعی، چیزی را که مورد علاقه‌اش بود، برجسته کرد، و بقیه را کنار گذاشت.

مثلاً در توصیف دستگاه‌اش گفته است که او «شیار را بسیار راست، هموار، و صیقلی» کرده است، و «یک گوی برنزی سخت، هموار، و بسیار گِرد را در آن غلتانده» است. چرا این‌قدر به همواری، راستی، سختی، و گردی اهمیت داده است؟ چون می‌خواسته که گوی تحت ساده‌ترین و ایده‌آل‌ترین شرایطی که قابل حصول است، به پایین بغلتد. او همه‌ی کارهای ممکن را کرد تا مشکلات احتمالی را کاهش دهد، مثلاً بر اثر اصطکاک یا برخورد گوی با دیواره‌های کناری شیار (که اگر شیار راست نمی‌بود، ممکن بود اتفاق بیفتد)، یا بر اثر نرمیِ گوی (که می‌توانست باعث تغییر شکل قابل‌توجه گوی و از دست دادن انرژی آن شود)، و یا بر اثر هر چیز دیگری که موجب انحراف از حالت ایده‌آل شود. این‌ها از نظر زیباشناسانه تصمیمات درستی بود. ساده. زیبا. و کمینه.

در مقایسه، ارسطو را در نظر بگیرید، که به‌علت این‌که عوارض جنبی ذهن او را مشغول کرده بود، قانون سقوط اشیا را اشتباه فهمیده بود. او مدعی بود که اجسام سنگین تندتر از اجسام سبک می‌افتند، و سرعت سقوط متناسب با وزن آن‌ها است. این برای ذرات ریزی که در درون محیط غلیظ و چسبناک مانند ملاس یا عسل سقوط می‌کنند، صحیح است، ولی برای گلوله‌ی توپ یا ساچمه که در هوا سقوط می‌کنند، صحت ندارد. به نظر می‌رسد ارسطو چنان درگیر نیروی پَسای ناشی از مقاومت هوا شده (که البته تأثیر مهمی در افتادن اشیایی مانند پر، دانه‌های برف، و دیگری اشیای سبکی دارد که مساحت آن‌ها در تماس با هوا نسبتاً بزرگ است) که یادش رفته نظریه‌اش را روی اشیای معمولی دیگری مانند سنگ و آجر و کفش که فشرده و سنگین هستند، آزمایش کند. به عبارت دیگر، بیشتر بر روی نوفه (مقاومت هوا) تمرکز کرده تا بر روی سیگنال (ماند و گرانش).

گالیله اجازه نداد ذهن‌اش منحرف شود. او می‌دانست که مقاومت هوا و اصطکاک

در دنیای واقعی گریزناپذیر است، ولی این‌ها موضوع اصلی آزمایش او نبود. او که پیش‌بینی می‌کرد انتقاداتی در زمینه‌ی عدم توجه او به این عوامل مطرح شود، اذعان کرد که یک ساچمه‌ی کوچک دقیقاً به‌سرعت یک گلوله‌ی توپ سقوط نمی‌کند، ولی خطای حاصله خیلی خیلی کمتر از چیزی است که در نظریه‌ی ارسطو پیش‌بینی می‌شود. در گفتگوی کتاب *دو علم جدید*، جانشین گالیله به سؤال کننده‌ی ساده‌لوح که پیرو دیدگاه ارسطویی است، می‌گوید: «بحث را از مقصود اصلی آن منحرف نکن. چنان نباشد که به جمله‌ای از من که به اندازه‌ی ضخامت یک مو نادرستی دارد، استناد کنی، و زیر آن مو، خطای دیگری را که به کلفتی ریسمان کشتی است، پنهان نمایی.»

نکته همین است. در علم، خطا به اندازه‌ی ضخامت یک مو قابل قبول است. ولی اشتباه به ضخامت ریسمان کشتی پذیرفتنی نیست.

گالیله در ادامه به مطالعه‌ی حرکت پرتابه‌ای پرداخت، مانند پرتاب یک ساچمه یا گلوله‌ی توپ. این‌ها چه نوع قوسی را دنبال می‌کنند؟ فکر گالیله این بود که حرکت یک پرتابه ترکیبی از دو تأثیر متفاوت است که می‌توان آن‌ها را جداگانه در نظر گرفت: حرکت جانبی، به موازات زمین، که جاذبه در آن نقشی ندارد، و حرکت عمودی به بالا یا پایین، که جاذبه بر آن مؤثر بود و قانون سقوط اجسام او برای آن قابل اعمال بود. او با روی هم قرار دادن این دو نوع حرکت، کشف کرد که پرتابه‌ها در مسیر سهموی سیر می‌کنند. هر وقت توپی را پرتاب می‌کنید یا از آب‌سردکن آب می‌خورید، این نوع مسیرها را می‌بینید.

این ارتباط شگفت‌انگیز دیگری بین طبیعت و ریاضی بود و سرنخ دیگری از این‌که کتاب طبیعت به زبان ریاضیات نوشته شده است. گالیله بسی سرخوش شد که کشف کرد که سهمی، نوعی منحنی انتزاعی که قهرمان او ارشمیدس آن را مطالعه کرده بود، در جهان واقعی وجود دارد. طبیعت از هندسه استفاده می‌کند.

اما برای رسیدن به این درک نیز لازم بود که گالیله بداند از چه چیزهایی چشم‌پوشی کند. مانند قبل، باید از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کرد—یعنی تأثیر پسا بر روی پرتابه که در هوا سیر می‌کند. این اثر اصطکاکی موجب کند شدن پرتابه می‌شود. در برخی انواع پرتابه‌ها (مانند پرتاب یک سنگ)، اصطکاک در مقایسه با جاذبه قابل چشم‌پوشی است؛ در مورد برخی اشیای دیگر (مانند توپ بادی یا توپ پینگ‌پونگ) این‌طور نیست. تمام اشکال اصطکاک، از جمله پسای ناشی از مقاومت هوا، در حد ظریفی است و مطالعه‌ی آن دشوار است. امروزه هنوز هم اصطکاک اسرارآمیز است و پژوهش‌های فعالی بر روی آن در دست انجام است.

گالیله برای این‌که به یک سهمی ساده برسد، لازم بود فرض کند که حرکت افقی

برای همیشه ادامه خواهد داشت و هرگز کُند نخواهد شد. این نمونه‌ای از قانون ماند او است، که بیان می‌کند که جسمی که در حرکت است، با همان سرعت و در همان راستا به حرکت خود ادامه می‌دهد، مگر آن‌که نیرویی خارجی بر آن اثر کند. برای یک پرتابه‌ی واقعی، مقاومت هوا نقش همان نیروی خارجی را دارد. ولی از نظر گالیله، بهتر بود در ابتدا از آن صرف‌نظر کنیم، تا بخش اعظم حقیقت حرکت اشیا—و زیبایی آن—را دریابیم.

از تاب خوردن چلچراغ تا سیستم مکان‌یابی جهانی

می‌گویند گالیله اولین کشف علمی‌اش را زمانی انجام داد که یک دانشجوی پزشکی نوجوان بود. یک روز که برای مراسم مذهبی به کلیسای جامع پیزا رفته بود، متوجه شد که چلچراغ بزرگ بالای سرش تکان می‌خورد و مانند آونگی نوسان می‌کند. جریان هوا آن را تکان می‌داد، و گالیله متوجه شد که نوسان آن همیشه مدت یکسانی طول می‌کشد، صرف نظر از این‌که قوسی که طی می‌کند بلند باشد یا کوتاه. این موجب تعجب او شد. چگونه ممکن است نوسان بزرگ و نوسان کوچک زمان یکسانی طول بکشد؟ ولی هر چه بیشتر درباره‌ی آن فکر کرد، بیشتر منطقی به نظر می‌رسید. وقتی که چلچراغ نوسان بزرگی را طی می‌کرد، مسافت بیشتری را می‌پیمود، ولی سرعت آن هم بیشتر بود. شاید این دو عامل با یکدیگر در تعادل بود. گالیله برای آزمودن این فکر، مدت نوسان چلچراغ را با نبض خود اندازه‌گیری کرد. و واقعاً هم هر نوسان، تعداد ضربان نبض یکسانی طول می‌کشید.

این داستان جالبی است و دوست دارم آن را باور کنم، ولی بسیاری از مورخان تردید دارند اتفاق افتاده باشد. روایت آن از نخستین و وفادارترین زندگی‌نامه‌نویس گالیله، وینچنزو ویویانی، به ما رسیده است. او در جوانی، در اواخر عمر گالیله، زمانی که کاملاً کور شده بود و در حصر خانگی بود، دستیار و شاگرد او بود. با توجه به این‌که ویویانی برای استاد پیرش حرمت زیادی قایل بود، می‌گویند گاه و بیگاه قصه‌هایی را به زندگی‌نامه‌ی گالیله که چندین سال پس از مرگ او نوشته است، افزوده است.

ولی حتی اگر هم این قصه جعلی باشد (که شاید هم نباشد!)، ولی با اطمینان می‌دانیم که گالیله حتی از حوالی سال ۱۶۰۲ آزمایش‌های دقیقی را بر روی آونگ‌ها انجام داده است و در کتاب *دو علم جدید* در سال ۱۶۳۸ درباره‌ی آن‌ها مطالبی نوشته است. در آن کتاب که ساختار آن به‌صورت یک گفتگوی سقراطی است، یکی از

شخصیت‌ها چنان حرف می‌زنند گویی درست آن‌جا در کنار دانشجوی جوان خیال‌پرداز در کلیسای جامع بوده است: «من هزاران بار نوسان‌ها را مشاهده کرده‌ام، خصوصاً در کلیساها که چراغ‌هایی که با طناب بلندی آویزان شده‌اند، گاه به‌طور اتفاقی حرکت داده می‌شوند.» بقیه‌ی گفتگو در توضیح این مدعا است که آونگ هر قوسی با هر اندازه‌ای را در مدت زمان یکسانی می‌پیماید. پس می‌دانیم که گالیله کاملاً با پدیده‌ی ذکر شده در داستان ویویانی آشنا بوده است؛ ولی معلوم نیست که واقعاً خودش در دوران نوجوانی آن را کشف کرده باشد.

به هر حال، اظهار نظر گالیله که نوسان آونگ همیشه مدت زمان یکسانی طول می‌کشد، دقیقاً درست نیست؛ نوسان‌های بزرگ‌تر مدت کمی بیشتری طول می‌کشند. ولی اگر قوس به‌قدر کافی کوچک باشد—مثلاً کمتر از ۲۰ درجه—با تقریب بسیار زیادی درست است. تغییرناپذیری ضرباهنگ برای نوسان‌های کوچک امروزه *برابرزمانی* آونگ نامیده می‌شود (*isochronism*، از کلمه‌ی یونانی به‌معنای «زمان مساوی»). این مبنای نظری ساخت مترونوم و ساعت‌های پاندولی است، از ساعت‌های ایستاده‌ی معمولی گرفته تا ساعت برجی نصب شده در بیگ‌بِن لندن. خود گالیله نخستین ساعت پاندولی جهان را در آخرین سال عمرش طراحی کرد، ولی قبل از ساخته شدن آن از دنیا رفت. نخستین ساعت پاندولی فعال جهان پانزده سال بعد ارائه شد، که مخترع آن ریاضی‌دان و فیزیک‌دان هلندی کریستیان هویگنس بود.

گالیله خصوصاً شیفته—و سرخورده‌ی—یکی از کشفیات جالب‌اش درباره‌ی آونگ‌ها شده بود، و آن رابطه‌ی زیبایی است که بین طول و دوره‌ی تناوب آن وجود دارد (دوره‌ی تناوب مدت زمان یک نوسان کامل آونگ است). خودش در توضیح آن می‌گوید: «اگر بخواهید زمان ارتعاش آونگی دو برابر آونگ دیگری باشد، باید آن را با طول چهار برابر دیگری آویزان کنید.» او قاعده‌ی کلی را بر اساس نسبت بیان کرده است. او می‌نویسد: «برای اجسامی که با نخ‌هایی به طول متفاوت آویزان شده‌اند، نسبت طول‌ها به یکدیگر برابر با نسبت مربع زمان‌ها به یکدیگر است.» متأسفانه گالیله هرگز موفق نشد این رابطه را از راه ریاضی دست آورد. این یک الگوی تجربی بود که سخت نیازمند توضیح نظری بود. گالیله چندین سال روی آن کار کرد، ولی موفق به حل آن نشد. حالا که نگاه می‌کنیم، نمی‌توانست هم موفق شود. توضیح آن به نوع جدیدی از ریاضیات نیاز داشت که او یا معاصران او از آن آگاه نبودند. به دست آوردن فرمول آن نیازمند آمدن آیزاک نیوتن و کشف زبانی بود که خدا به آن سخن می‌گوید، زبان معادلات دیفرانسیل.

گالیله معترف بود که مطالعه‌ی آونگ‌ها «ممکن است برای خیلی‌ها خشک به

نظر برسد»، در حالی که مطالعات بعدی نشان داد که به‌هیچ‌وجه این‌گونه نیست. در ریاضیات، آونگ‌ها با معماهایی که پدید می‌آوردند، محرک پیدایش حسابان شدند. در فیزیک و مهندسی، آونگ‌ها مظهر نوسان بودند. مانند بیتی از شعر ویلیام بلِیک که از دیدن دنیا در یک سنگ‌ریزه سخن می‌گوید، فیزیک‌دانان و مهندسان یاد گرفتند که دنیا را در نوسان یک آونگ ببینند. هر جا نوسانی در کار بود، همان فرمول‌های ریاضی به کار می‌آمد. حرکات نگران کننده‌ی یک پل عابر پیاده، حرکت بازگشتی خودرو با کمک‌فنرهای نرم، تلق‌تلق خوردن ماشین لباس‌شویی با لباس‌های نامتوازن، لرزش کرکره‌ها در یک نسیم ملایم، تکان‌های زمین در پس‌لرزه‌های زلزله، وزوز شصت‌هرتزی لامپ‌های مهتابی—امروزه هر رشته‌ای از علم و فناوری با نوع خاصی از حرکت نوسانی و بازگشت ریتمیک در ارتباط است. آونگ بابابزرگ همه‌ی اینها است. الگوهای آن جهان‌شمول است. خشک صفت مناسبی برای آن‌ها نیست.

در برخی موارد، رابطه‌ی بین آونگ‌ها و پدیده‌های دیگر به‌قدری دقیق است که معادلات یکسانی را می‌توان بدون هر گونه تغییر در آن‌ها مورد استفاده قرار داد. تنها لازم است که برای نمادها، تفسیر دیگری ارائه شود؛ فرمول آن‌ها یکسان است. انگار که طبیعت مکرر در مکرر به الگوهای تکراری یکسانی بازمی‌گردد، تکرار آونگ‌وار یک مضمون آونگی. به‌عنوان مثال، فرمول‌های نوسان یک آونگ بدون تغییر برای چرخش ژنراتورها نیز که جریان برق متناوب را تولید می‌کنند و به خانه‌ها و ادارات ما می‌فرستند، قابل استفاده است. بدین خاطر است که مهندسان برق به معادلات ژنراتور برق، معادلات نوسانی می‌گویند.

همان معادلات به شیوه‌ای آفتاب‌پرست‌مانند دوباره در نوسان‌های کوانتومی یک دستگاه پیشرفته ظاهر می‌شوند که میلیاردها بار سریع‌تر و میلیون‌ها بار کوچک‌تر از هر گونه ژنراتور برق یا ساعت ایستاده است. در سال ۱۹۶۲، برایان جوزفسون، که در آن زمان یک دانشجوی تخصصی بیست و دو ساله در دانشگاه کمبریج بود، پیش‌بینی کرد که در دماهای نزدیک به صفر مطلق، زوج‌های الکترون ابررسانا می‌توانند از یک مانع غیرقابل نفوذ مکرراً عبور کنند، که بر اساس فیزیک کلاسیک، مطلب مُهمَلی بود. لیکن حسابان و مکانیک کوانتوم این نوسان‌های آونگ‌مانند را به عالم هستی احضار می‌کرد—یا به بیان غیرشاعرانه، احتمال بروز آن‌ها را نشان می‌داد. دو سال بعد از آن‌که جوزفسون این نوسانات شبح‌مانند را پیش‌بینی کرد، شرایط لازم برای وقوع آن‌ها در آزمایشگاه برقرار شد، و واقعاً هم مشاهده شدند. دستگاه حاصله امروزه پیوندگر جوزفسون نامیده می‌شود. کاربردهای عملی آن بی‌شمار است. این دستگاه می‌تواند میدان‌های مغناطیسی را که یک‌صد میلیارد برابر ضعیف‌تر از میدان مغناطیسی

زمین است، آشکار کند، و زمین‌فیزیک‌دانان از این قابلیت برای جستجوی نفت در اعماق زیرِ زمین استفاده می‌کنند. جراحان اعصاب از آرایه‌هایی متشکل از صدها پیوندگر جوزفسون برای تعیین محل تومورهای مغزی و شناسایی محل ضایعات ایجاد کننده‌ی تشنج در بیماران مبتلا به صرع استفاده می‌کنند. این روش، بر خلاف جراحی کاوشی، یک روش کاملاً غیرتهاجمی است. این روش بر پایه‌ی تغییرات ظریف میدان مغناطیسی بر اثر مسیرهای الکتریکی غیرطبیعی در مغز کار می‌کند. پیوندگرهای جوزفسون ممکن است برای ساخت تراشه‌های فوق‌سریع در نسل آینده‌ی کامپیوترها نیز مورد استفاده قرار گیرد، و حتی ممکن است در رایانش کوانتومی نیز نقش داشته باشد، که در صورتی که به تحقق بپیوندد، انقلابی را در علوم کامپیوتر به بار خواهد آورد.

یکی دیگر از فواید آونگ‌ها برای بشریت، فراهم کردن راهی برای سنجش دقیق زمان بود. تا قبل از ساخت ساعت‌های آونگی، بهترین ساعت‌ها هم عملکرد نامطلوبی داشتند. حتی در شرایط ایده‌آل، روزی پانزده دقیقه جلو یا عقب می‌رفتند. ساعت‌های آونگی می‌توانستند صد برابر دقیق‌تر از آن باشند. این ساعت‌ها برای اولین بار امیدی واقعی برای حل یکی از بزرگ‌ترین چالش‌های فناوری در زمان گالیله فراهم آوردند: پیدا کردن راهی برای تعیین طول جغرافیایی در دریا. بر خلاف عرض جغرافیایی که می‌توان آن را با نگاه کردن به خورشید و ستاره‌ها تعیین کرد، طول جغرافیایی هیچ‌گونه همتایی در محیط فیزیکی ندارد. در واقع، یک سازه‌ی مصنوعی و دلبخواه است. ولی اندازه‌گیری آن یک مشکل واقعی بود. در عصر اکتشافات دریایی، دریانوردان برای جنگ یا تجارت به دریا می‌زدند، ولی خیلی از اوقات راهشان را گم می‌کردند یا به خشکی می‌رسیدند، چون نمی‌دانستند کجا هستند. دولت‌های پرتغال، اسپانیا، انگلستان، و هلند پاداش‌های بزرگی را برای کسی که بتواند مسئله‌ی طول جغرافیایی را حل کند، ارائه کرده بودند. چالشی بسیار نگران کننده بود.

وقتی که گالیله در سال آخر عمرش برای طراحی ساعت پاندولی تلاش می‌کرد، مسئله‌ی طول جغرافیایی را نیز کاملاً در ذهن داشت. او می‌دانست، کما این‌که دانشمندان از قرن شانزدهم می‌دانستند، که اگر ساعت بسیار دقیقی داشته باشید، می‌توانید مسئله‌ی طول جغرافیایی را حل کنید. دریانورد می‌توانست ساعت را در بندر خروجی خود تنظیم کند و آن را با وقت موطن خود به دریا ببرد. سپس دریانورد، در حالی که به شرق یا غرب سفر می‌کند، برای تعیین طول جغرافیایی کشتی، می‌تواند درست در لحظه‌ی ظهر محلی که خورشید در بالاترین نقطه‌ی خود در آسمان است، به ساعت نگاه کند. از آنجا که زمین در هر بیست و چهار ساعت شبانه‌روز، ۳۶۰ درجه‌ی طول جغرافیایی گردش می‌کند، لذا هر ساعت اختلاف بین زمان محلی و زمان وطن

معادل با ۱۵ درجه‌ی طول جغرافیایی است. از نظر مسافت، ۱۵ درجه در استوا به‌معنای مسافت عظیم یک هزار مایل است. بنابراین، برای این‌که این روش بتواند در هدایت کشتی به سمت مقصد مورد نظر با حداکثر چند مایل خطا، مفید واقع شود، لازم بود که ساعت دقیق باشد و خطای آن از چند ثانیه در روز بیشتر نباشد. و می‌بایست این دقت را در دریای خروشان و افت‌وخیزهای شدید فشار هوا، دما، شوری، و رطوبت حفظ کند، چرا که این عوامل می‌تواند باعث زنگ زدن چرخ‌دنده‌های ساعت، کشیده شدن فنرهای آن، و یا غلیظ شدن روغن‌های آن شود، و موجب شود که ساعت تند یا کُند کار کند یا بایستد.

گالیله قبل از آن‌که بتواند ساعت خود را بسازد و از آن برای حل مسئله‌ی طول جغرافیایی استفاده کند، فوت کرد. کریستیان هویگنس ساعت‌های پاندولی خود را به‌عنوان یک راه‌حل ممکن به انجمن سلطنتی لندن ارائه داد، ولی انجمن آن‌ها را تأیید نکرد، زیرا نسبت به آشفتگی‌های محیط زیادی حساس بودند. هویگنس بعداً یک کرونومتر دریایی اختراع کرد که نوسان‌های تیک‌تاک آن به‌جای آونگ با یک چرخ‌دنده‌ی تعادل و یک فنر مارپیچی تنظیم می‌شد، طرحی مبتکرانه که راه را برای ساخت ساعت‌های جیبی و ساعت‌های مچی مدرن هموار کرد. اما در پایان، مسئله‌ی طول جغرافیایی با نوع جدیدی از ساعت حل شد که در اواسط قرن هجدهم به دست یک انگلیسی بدون تحصیلات رسمی به نام جان هَریسون ساخته شد. کرونومتر H4 او که در دهه‌ی ۱۷۶۰ آزمایش شد، توانست طول جغرافیایی را با دقت ده مایل تعیین کند، که برای بردن جایزه‌ی بیست هزار پوندی پارلمان بریتانیا (معادل چند میلیون دلار امروز) کافی بود.

در دوران خود ما، چالش مسیریابی در نقاط مختلف زمین هنوز وابسته به اندازه‌گیری دقیق زمان است. مثلاً سیستم مکان‌یابی جهانی را در نظر بگیرید. همان‌گونه که ساعت‌های مکانیکی کلید حل مسئله‌ی طول جغرافیایی بودند، ساعت‌های اتمی نیز کلید تعیین دقیق مکان هر چیزی بر روی زمین با دقت چند متر هستند. ساعت اتمی، نسخه‌ی امروزی ساعت آونگی گالیله است. این ساعت هم مانند سلف خود، زمان را با شمردن نوسان‌ها می‌سنجد، ولی به‌جای نوسان‌های یک آونگ که جلو و عقب می‌رود، ساعت اتمی نوسان‌های اتم‌های سزیم را که بین دو حالت انرژی خود رفت‌وآمد می‌کنند، می‌شمارد، کاری که ۹,۱۹۲,۶۳۱,۷۷۰ بار در ثانیه انجام می‌شود. با آن‌که سازوکار متفاوت است، ولی اساس کار یکی است. از حرکت تکراری و آمدوشد می‌توان برای سنجش زمان استفاده کرد.

و از زمان هم به نوبه‌ی خود می‌توان برای تعیین مکان شما استفاده کرد. وقتی که

از GPS موبایل یا خودروی خود استفاده می‌کنید، دستگاه شما سیگنال‌های بی‌سیم را از لااقل چهار تا از بیست و چهار ماهواره‌ی سیستم مکان‌یابی جهانی که در مدار زمین در ارتفاع دوازده هزار مایل قرار دارند، دریافت می‌کند. هر ماهواره دارای چهار ساعت اتمی است که تا دقت یک میلیاردم ثانیه با یکدیگر همگام شده‌اند. ماهواره‌های مختلفی که در معرض دید گیرنده‌ی شما هستند، جریان پیوسته‌ای از سیگنال‌ها را برای آن می‌فرستند، که هر کدام از این سیگنال‌ها دارای مهر زمانی با دقت نانوثانیه است. این‌جا است که ساعت‌های اتمی به کار می‌آیند. دقت زمانی فوق‌العاده‌ی آن‌ها سبب می‌شود که بتوانیم دقت فضایی فوق‌العاده‌ای در تعیین مکان با GPS داشته باشیم.

محاسبه بر پایه‌ی مثلث‌سازی انجام می‌شود، یک تکنیک مکان‌یابی باستانی که مبتنی بر هندسه است. در مورد GPS، طرز کار آن به این صورت است: وقتی که سیگنال از چهار ماهواره به گیرنده‌ی شما رسید، دستگاه شما زمان دریافت سیگنال‌ها را با زمان ارسال آن‌ها مقایسه می‌کند. این چهار زمان هر کدام اندکی متفاوت است، زیرا ماهواره‌ها در چهار فاصله‌ی متفاوت از شما قرار دارند. دستگاه GPS شما این چهار اختلاف زمانی اندک را در سرعت نور ضرب می‌کند تا فاصله‌ی شما را با چهار ماهواره‌ی بالای سرتان حساب کند. از آنجا که موقعیت ماهواره‌ها معلوم است و با دقت زیادی کنترل می‌شود، لذا دستگاه GPS شما می‌تواند آن چهار فاصله را مثلث‌سازی کند، تا محل شما را روی سطح زمین مشخص کند. حتی می‌تواند ارتفاع و سرعت را نیز محاسبه کند. اساساً، GPS اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق زمان را به اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق مسافت تبدیل می‌کند، و بر این اساس، امکان اندازه‌گیری بسیار دقیق مکان و حرکت را فراهم می‌کند.

سیستم مکان‌یابی جهانی را ارتش آمریکا در دوران جنگ سرد ایجاد کرد. هدف اولیه این بود که زیردریایی‌های آمریکایی حامل موشک‌های هسته‌ای رهگیری شوند و برآورد دقیقی از موقعیت کنونی‌شان به آن‌ها داده شود، به‌طوری که اگر بخواهند حمله‌ی اتمی انجام دهند، بتوانند موشک‌های بالیستیک بین‌قاره‌ای خود را با دقت زیادی هدف‌گیری نمایند. GPS امروزه کاربردهای صلح‌آمیز زیادی نیز دارد، مانند کشاورزی دقیق، فرود آمدن بدون دید هواپیماها در مه غلیظ، تقویت سیستم‌های امداد ۹۱۱ که به‌صورت اتوماتیک سریع‌ترین مسیر را برای آمبولانس‌ها و ماشین‌های آتش‌نشانی تعیین می‌کنند.

ولی GPS چیزی بیش از یک سیستم مکان‌یابی و هدایت مسیر است. این سیستم امکان همگام‌سازی زمان را تا دقت یک‌صد نانوثانیه فراهم می‌کند، که برای هماهنگ‌سازی نقل‌وانتقالات بانکی و دیگر تراکنش‌های مالی مفید است. هم‌چنین،

امکان همگام‌سازی شبکه‌های داده‌ای و تلفن بی‌سیم را فراهم می‌کند، تا بتوانند به‌صورت کارآمدتری از بسامدهای مشترک در طیف الکترومغناطیسی استفاده کنند.

علت اینکه تا این حد وارد جزئیات می‌شوم، این است که GPS نمونه‌ی برجسته‌ای از سودمندیِ پنهان حسابان است. مانند اغلب موارد، در این‌جا نیز حسابان بی‌سروصدا در پشت پرده‌ی زندگی روزمره‌ی ما، کار خود را انجام می‌دهد. در مورد GPS، تقریباً تمام جنبه‌های عملکرد این سیستم وابسته به حسابان است. مثلاً ارتباط بی‌سیم بین ماهواره و گیرنده را در نظر بگیرید؛ حسابان از طریق کارهای ماکسول که قبلاً درباره‌ی آنها بحث کردیم، امواج الکترومغناطیسی را که امکان ارتباط بی‌سیم را فراهم می‌کنند، پیش‌بینی کرد. بدون حسابان، نه از بی‌سیم خبری می‌بود و نه از GPS. به همین ترتیب، ساعت‌های اتمی موجود بر روی ماهواره‌های GPS از ارتعاشات مکانیک کوانتومی اتم‌های سزیم استفاده می‌کنند. معادلات مکانیک کوانتومی و روش‌های حل آنها بر مبنای حسابان است. بدون حسابان، از ساعت‌های اتمی خبری نمی‌بود. این لیست را می‌توانیم هم‌چنان ادامه دهیم—حسابان زیربنای روش‌های ریاضی برای محاسبه‌ی مسیر ماهواره‌ها و کنترل کردن محل آن‌ها و نیز برای به کار گرفتن تصحیح‌های مبتنی بر نسبیت اینشتین برای زمان اندازه‌گیری شده‌ی ساعت‌های اتمی در حرکت با سرعت بالا و در میدان‌های گرانشی ضعیف است—ولی امیدوارم که نکته‌ی اصلی روشن شده باشد. حسابان امکان ایجاد اکثر چیزهایی را که در سیستم مکان‌یابی جهانی دخالت دارد، فراهم کرده است. البته حسابان همه‌ی این کارها را به‌تنهایی انجام نداده است. حسابان یک بازیگر نقش فرعی بوده است، ولی یک بازیگر مهم. حسابان به‌همراه مهندسی برق، فیزیک کوانتوم، مهندسی هوافضا، و رشته‌های دیگر، یکی از اجزای جایگزین‌ناپذیر در این تیم بوده است.

پس برمی‌گردیم به سراغ گالیله‌ی جوان که در کلیسای جامع پیزا نشسته بود و به تاب خوردن چلچراغ فکر می‌کرد. حالا می‌توانیم ببینیم که افکار فراغت او درباره‌ی آونگ‌ها و زمان مساوی نوسان آن‌ها، تأثیری بی‌اندازه بر سیر تمدن، نه فقط در دوران او بلکه حتی در دوران ما، داشته است.

کپلر و معمای حرکت سیارات

کاری که گالیله برای حرکت اشیا روی زمین کرد، یوهانس کپلر برای حرکت سیارات در آسمان انجام داد. او معمای باستانی حرکت سیارات را حل کرد و رؤیای فیثاغورس را تحقق بخشید و نشان داد که نوعی هماهنگی آسمانی بر منظومه‌ی شمسی حاکم

است. مانند فیثاغورس با زه‌های موسیقی و گالیله با آونگ‌ها، پرتابه‌ها، و اجسام در حال سقوط، کپلر هم کشف کرد که حرکت سیارات تابع الگوهای ریاضی است. و مانند گالیله، از الگوهایی که می‌دید، بسیار مشعوف شده بود، ولی سرخورده بود که نمی‌تواند آن‌ها را توضیح دهد.

باز مانند گالیله، کپلر هم در خانواده‌ای متولد شده بود که رو به افول بود. ولی شرایط او بدتر بود. پدرش یک سرباز مزدور دایم‌الخمر بود که به گفته‌ی کپلر «گرایش‌های مجرمانه» داشت، و مادرش (که شاید حق هم داشته) «بدخُلق» بود. مضاف بر این، کپلر در کودکی دچار آبله شد و نزدیک بود از آن بمیرد. دست‌ها و بینایی‌اش به‌طور دایمی آسیب دید، یعنی در بزرگسالی هرگز نمی‌توانست کارهای فیزیکی سنگین انجام دهد.

خوش‌بختانه، بسیار باهوش بود. در نوجوانی، ریاضیات و ستاره‌شناسی کوپرنیکی را در توبینگِن آموخت. معلمانش درباره‌ی او می‌گفتند که «چنان هوش و ذکاوت سرشاری دارد که حتماً به جایی خواهد رسید». کپلر پس از گرفتن درجه‌ی کارشناسی ارشد در سال ۱۵۹۱، در توبینگن الهیات خواند و قصد داشت یک کشیش لوترِی شود. ولی از قضا یک معلم ریاضی در مدرسه‌ی لوتری در گراتس مُرد و مسئولان کلیسا به‌عنوان جانشین او، کپلر را برگزیدند، و او با بی‌میلی فکر روحانی شدن را کنار گذاشت.

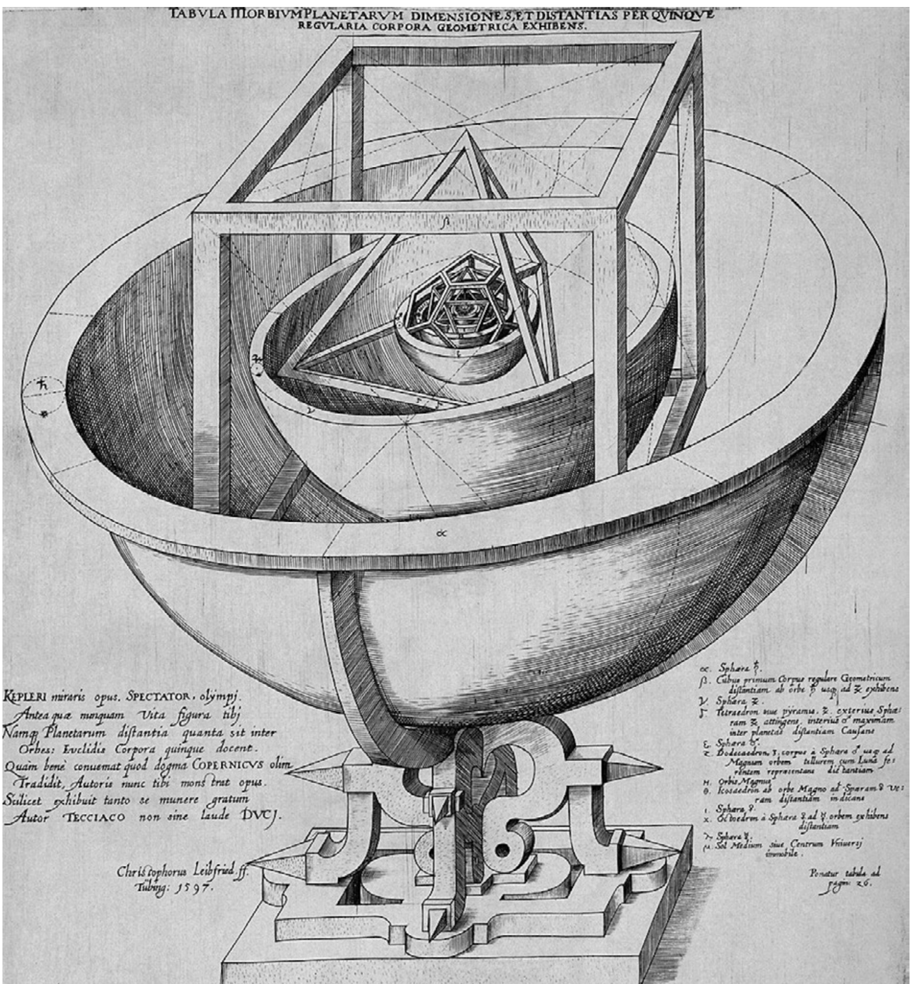
امروزه تمام دانشجویان فیزیک و اخترشناسی، سه قانون کپلر برای حرکت سیارات را یاد می‌گیرند. ولی چیزی که غالباً گفته نمی‌شود، تلاش جان‌فرسا و تقریباً متعصبانه‌ی او برای کشف آن قوانین است. او ده‌ها سال زحمت کشید و به دنبال نظم و ترتیب می‌گشت، و بر اساس معنویت و ایمانی که داشت، معتقد بود که باید نوعی نظم الهی در موقعیت شبانه‌ی عطارد، زهره، مریخ، مشتری، و زحل وجود داشته باشد.

یک سال پس از ورودش به گراتس، به اعتقاد خودش، یکی از رازهای کیهان بر او گشوده شد. یک روز هنگام تدریس در کلاس، ناگهان فکری درباره‌ی چگونگی آرایش سیارات به دور خورشید به ذهن‌اش افتاد. این فکر آن بود که سیاره‌ها به‌وسیله‌ی کره‌های آسمانی حمل می‌شوند که مثل عروسک‌های روسی تو در توی یکدیگر قرار گرفته‌اند، به‌طوری که فواصل بین آن‌ها تابع پنج جسم افلاطونی است: مکعب، چهاروجهی، هشت‌وجهی، بیست‌وجهی، و دوازده‌وجهی. افلاطون می‌دانست و اقلیدس ثابت کرده بود که هیچ شکل سه‌بعدی دیگری نمی‌توان از چندضلعی‌های منتظم یکسان ساخت. از نظر کپلر، یکتایی و تقارن آن‌ها برای ابدیت مناسب به نظر می‌رسید.

او محاسباتش را با شدت و اشتیاق انجام داد. «روز و شب غرق محاسبه بودم، تا

ببینم این فکر با مدارهای کوپرنیکی مطابقت خواهد داشت، یا این‌که خوش‌حالی من بر باد خواهد رفت. طی چند روز، کار به نتیجه رسید، و دیدم که این اجسام یکی پس از دیگری دقیقاً با جایگاه سیاره‌ها منطبق شد.»

او یک هشت‌ضلعی را حول کره‌ی سماوی عطارد محیط کرد و کره‌ی زهره را روی گوشه‌های آن قرار داد. بعد یک بیست‌وجهی را حول کره‌ی زهره محیط کرد، و کره‌ی آسمانی زمین را در گوشه‌های آن قرار داد، و همین‌طور الی آخر برای سیاره‌های دیگر نیز کره‌های آسمانی و اجسام افلاطونی را یک در میان مانند جورچینی سه‌بعدی جای داد. او تصویری از سیستم حاصله را در کتاب *معمای کیهانی* خود در سال ۱۵۹۶ ارائه کرده است.



فکر ناگهانی او خیلی چیزها را توضیح می‌داد. درست همان‌گونه که فقط پنج جسم افلاطونی داشتیم، سیاره‌ها هم (با احتساب زمین) فقط شش تا بودند و لذا فقط پنج فاصله بین خود داشتند. همه چیز معنی می‌داد. هندسه بر کیهان حاکم بود. او دوست داشته بود در رشته‌ی الهیات درس بخواند، و حالا می‌توانست با رضایت به یکی از استادانش بنویسد: «بنگر که چگونه با تلاش‌های من، عظمت خدا در ستاره‌شناسی پدیدار شده است.»

در حقیقت، این نظریه با داده‌ها دقیقاً جور درنمی‌آمد، خصوصاً در رابطه با جایگاه عطارد و مشتری. آن عدم انطباق بدان معنا بود که مشکلی وجود دارد، ولی مشکل کجا بود—در نظریه، در داده‌ها، یا در هر دو؟ کپلر مشکوک بود که شاید داده‌ها اشتباه باشد، ولی اصراری بر درستی نظریه‌اش هم نداشت (که حالا که فکر می‌کنیم، دیدگاه عاقلانه‌ای بود، چون این نظریه هیچ شانسی برای موفقیت نداشت؛ همان‌طور که می‌دانیم، تعداد سیاره‌ها از شش تا بیشتر است).

با این حال، او ناامید نشد. هم‌چنان به تفکر درباره‌ی سیارات ادامه داد، و خیلی زود فرجی حاصل شد و تیکو براهه از او خواست که دستیارش شود. تیکو (که غالباً مورخان او را به این نام می‌خوانند) بهترین منجم رصدی دنیا بود. داده‌های او ده برابر دقیق‌تر از داده‌هایی بود که دیگران قبلاً به دست آورده بودند. در دوران قبل از اختراع تلسکوپ، او ابزارهای ویژه‌ای تعبیه کرده بود که به‌کمک آن‌ها می‌توانست موقعیت زاویه‌ای سیاره‌ها را، با چشم غیرمسلح، تا دقت دو دقیقه‌ی قوسی تعیین کند. یعنی تا یک سی‌اُم درجه.

برای این‌که بفهمید این زاویه چقدر کوچک است، فرض کنید در یک شب روشن به قرص کامل ماه نگاه می‌کنید و انگشت کوچکتان را در مقابل صورت خود گرفته‌اید. انگشت کوچک شما تقریباً شصت دقیقه‌ی قوسی پهنا خواهد داشت، و ماه تقریباً نصف آن خواهد بود. بنابراین، وقتی می‌گوییم تیکو می‌توانست دو دقیقه‌ی قوسی را تشخیص دهد، بدان معنا است که اگر سی نقطه به فاصله‌ی مساوی در عرض انگشت کوچک خود ترسیم کنید (یا پانزده نقطه در عرض ماه)، تیکو می‌توانست فاصله‌ی بین یک نقطه و نقطه‌ی بعدی را افتراق دهد.

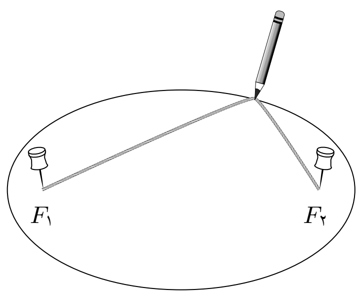
بعد از مرگ تیکو در سال ۱۶۰۱، گنجینه‌ی داده‌های او درباره‌ی مریخ و سیاره‌های دیگر به کپلر رسید. او برای توضیح حرکت آن‌ها نظریه‌های مختلفی را آزمایش کرد، و فرض کرد که سیاره‌ها روی فلک تدویر حرکت می‌کنند، یا روی مدارهای تخم‌مرغی‌شکل، و یا روی دوایر خارج از مرکز که خورشید کمی بیرون از مرکز دایره قرار گرفته است. ولی همه‌ی آن‌ها اختلافاتی با داده‌های تیکو داشت که قابل اغماض

نبود. بعد از یکی از این محاسبات، شکوه کرده است: «خواننده‌ی عزیز، اگر شما از این روند پرزحمت خسته شده‌اید، فکر من را بکنید که لااقل ۷۰ بار آن را انجام داده‌ام.»

قانون اول کپلر: مدارهای بیضوی

کپلر در تلاش برای توضیح دادن حرکت سیارات، نهایتاً منحنی مشهوری به نام بیضی را مورد آزمایش قرار داد. بیضی هم، مانند سهمی‌های گالیله، در دوران باستان مورد مطالعه قرار گرفته بود. همان‌گونه که در فصل ۲ دیدیم، یونانیان باستان بیضی را به‌عنوان یک منحنی بیضوی تعریف می‌کردند که از برش مخروط با صفحه‌ای که شیب اندکی داشت، به‌طوری که شیب آن از شیب خود سطح مخروطی کمتر بود، حاصل می‌شد. اگر شیب صفحه‌ی برش کم باشد، بیضی حاصله تقریباً شبیه دایره خواهد بود. در انتهای دیگر، اگر شیب صفحه فقط اندکی کمتر از شیب سطح مخروطی باشد، بیضی بسیار دراز و باریک خواهد بود، شبیه شکل یک سیگار برگ. با تنظیم شیب صفحه، می‌توانید بیضی را از شکل بسیار مدور به شکل بسیار دراز و یا چیزی در بینابین این دو درآورید.

بیضی را به روش دیگری نیز می‌توان به زبان عامیانه و به‌کمک چند وسیله‌ی خانگی تعریف کرد.



یک مداد، یک زیردستی، یک برگ کاغذ، دو پونز، و یک تکه نخ بردارید. کاغذ را روی زیردستی قرار دهید. دو سر نخ را با پونز به کاغذ سنجاق کنید، به‌طوری که نخ کمی شل باشد. بعد نخ را محکم با مداد بکشید و منحنی را ترسیم کنید. دقت کنید که نخ همیشه کشیده باشد. پس از آن‌که مداد دورتادور هر دو سنجاق را طی کرد، منحنی بسته‌ی به دست آمده یک بیضی است.

محل سنجاق‌ها در این‌جا نقش مهمی ایفا می‌کند. کپلر آن‌ها را *کانون‌ها* یا نقطه‌های کانونی بیضی نامید. اهمیت آن‌ها برای بیضی مانند مرکز برای دایره است. دایره به‌عنوان مجموعه‌ی نقاطی تعریف می‌شود که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه‌ی داده شده (مرکز دایره) ثابت است. به همین ترتیب، بیضی مجموعه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی ترکیبی آن‌ها از *دو* نقطه‌ی داده شده (کانون‌های بیضی) ثابت است. در روش ترسیم با نخ و سنجاق، فاصله‌ی ترکیبی ثابت دقیقاً طول نخ شل بین دو سنجاق است.

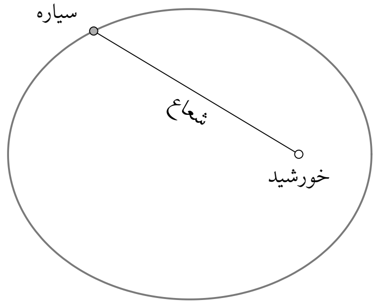
نخستین کشف بزرگ کپلر—که این بار واقعاً درست از آب درآمد و لازم نبود که در افکارش تجدید نظر کند—آن است که تمام سیارات در مدارهای بیضوی سیر می‌کنند. نه دایره و نه مدار دایره‌ای با فلک‌های تدویر، آن‌گونه که ارسطو، بطلمیوس، کوپرنیک، و حتی گالیله تصور کرده بودند. نه. بیضی. به‌علاوه، او دریافت که در مورد هر سیاره، خورشید در یکی از کانون‌های مدار بیضوی سیاره قرار گرفته است.

حیرت‌انگیز بود، درست همان نوع سرنخ مقدسی که کپلر امید یافتن آن را داشت. سیارات مطابق با هندسه حرکت می‌کردند. البته بر خلاف حدس اولیه‌ی او، بر مبنای هندسه‌ی پنج جسم افلاطونی نبود، ولی با این وجود، حس غریزی او درست بود. واقعاً هندسه بر آسمان‌ها حاکم بود.

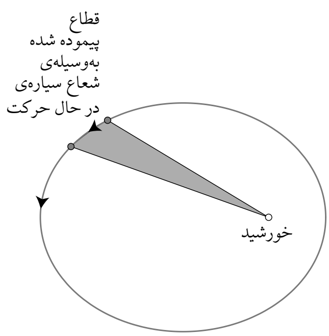
قانون دوم کپلر: مساحت‌های برابر در زمان‌های برابر

کپلر نظم دیگری را نیز در داده‌ها پیدا کرد. یافته‌ی اول او درباره‌ی مسیر سیارات بود، ولی این یکی درباره‌ی سرعت آن‌ها بود. این یافته که امروزه به نام قانون دوم کپلر شناخته می‌شود، بیان می‌کند که یک خط فرضی که از سیاره به خورشید کشیده شود، در حین گردش سیاره در مدار آن، در بازه‌های زمانی برابر، مساحت برابری را روبش می‌کند.

برای این‌که منظور از این سخن روشن‌تر شود، فرض کنید به محل کنونی مریخ در مدار بیضوی آن نگاه می‌کنیم. آن نقطه را با یک خط راست به خورشید وصل کنید.



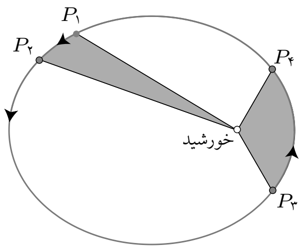
حالا فرض کنید این خط تیغه‌ی یک برف‌پاک‌کن است که خورشید در نقطه‌ی محور آن قرار گرفته است و مریخ در نوک برف‌پاک‌کن قرار دارد (البته فرق این برف‌پاک‌کن با یک برف‌پاک‌کن واقعی در آن است که جلو و عقب نمی‌رود، بلکه همیشه فقط به طرف جلو می‌رود و حرکت آن هم بسیار بسیار آهسته است). در حالی که مریخ در مدار خود در شب‌های متوالی جلوتر می‌رود، برف‌پاک‌کن به‌همراه آن جلو می‌رود و لذا ناحیه‌ای را در داخل بیضی جارو می‌کند. اگر مدتی بعد، مثلاً پس از سه هفته، دوباره به مریخ نگاه کنیم، برف‌پاک‌کن که به آهستگی حرکت می‌کند، شکلی را جارو می‌کند که یک قطاع نامیده می‌شود.



چیزی که کپلر کشف کرد، این است که مساحت یک قطاع سه‌هفته‌ای همیشه یکسان می‌ماند، صرف‌نظر از اینکه مریخ در کجای مسیر خود به دور خورشید باشد. البته این اختصاصی به سه هفته ندارد. اگر به مریخ در دو نقطه به فاصله‌ی زمانی یکسان نگاه کنیم، قطاع‌های حاصله همیشه مساحت یکسانی خواهد داشت، بدون توجه به این‌که در کجای مدار آن باشد.

به‌طور خلاصه، قانون دوم می‌گوید که سیاره‌ها با سرعت ثابتی حرکت نمی‌کنند.

بلکه هر چه به خورشید نزدیک‌تر می‌شوند، سریع‌تر حرکت می‌کنند. گزاره‌ی مربوط به مساحت یکسان در زمان یکسان، روشی برای بیان دقیق‌تر این مطلب است.



اگر زمان$(P_۳ \to P_۴)$ = زمان$(P_۱ \to P_۲)$،
آن‌گاه مساحت قطاع‌های آن‌ها برابر است.

اما کپلر چگونه مساحت یک قطاع بیضی را، که مرز آن به‌صورت منحنی است، اندازه‌گیری گرفت؟ او از روشی استفاده کرد که اگر ارشمیدس می‌بود، استفاده می‌کرد. او قطاع را به تعداد زیادی باریکه تقسیم کرد و آن‌ها را به‌صورت تقریبی به‌عنوان مثلث در نظر گرفت. بعد مساحت مثلث‌ها را محاسبه کرد (که کار آسانی است، چون اضلاع آن‌ها مستقیم است) و آنها را با هم جمع کرد، و با جمع بستن آن‌ها، برآوردی از مساحت قطاع اولیه را به دست آورد. در حقیقت، از نوع ارشمیدسیِ حساب انتگرال استفاده کرد و آن را بر روی داده‌های واقعی به کار گرفت.

قانون سوم کپلر و جنون مقدس

قوانینی که تا کنون درباره‌ی آن‌ها بحث کردیم—این‌که هر سیاره در یک بیضی حرکت می‌کند که خورشید در کانون آن قرار دارد، و هر سیاره در زمان مساوی، مساحتی مساوی را روبش می‌کند—درباره‌ی هر کدام از سیارات است. کپلر این هر دو قانون را در سال ۱۶۰۹ کشف کرد. بر عکس، ده سال طول کشید تا قانون سوم‌اش را که درباره‌ی همه‌ی سیارات به‌صورت جمعی است، کشف کند. این قانون تمام منظومه‌ی شمسی را با یک الگوی عددی واحد به هم پیوند می‌دهد.

این فکر پس از ماه‌ها محاسبه‌ی مجدد و بیش از بیست سال پس از اشتباه دردناک‌اش درباره‌ی اجسام افلاطونی به ذهن‌اش رسید. در پیش‌گفتار *هماهنگی‌های جهان* (۱۶۱۹)، او با شعف از این‌که سرانجام توانسته این الگو را در آفرینش خدا ببیند، می‌نویسد: «اکنون از سحرگاه هشت ماه قبل، از آفتاب سه ماه قبل، و از همین چند روز

پیش، که روشنی آفتاب بر گمان‌های شگفت‌انگیز من تابید، دیگر هیچ چیز جلودار من نیست. آزادانه تسلیم جنون مقدس می‌شوم.»

الگوی عددی که کپلر را به وجد آورده بود، این بود که مربع دوره‌ی گردش یک سیاره متناسب با مکعب فاصله‌ی متوسط آن از خورشید است. به بیان هم‌ارز، عدد $T^۲/a^۳$ برای همه‌ی سیاره‌ها یکسان است. در این‌جا، T مدت زمان یک دور گردش سیاره به دور خورشید را نشان می‌دهد (برای زمین یک سال، برای مریخ ۱٫۹ سال، برای مشتری ۱۱٫۹ سال، و الی آخر)، و a فاصله‌ی سیاره از خورشید را نشان می‌دهد. البته تعریف آن به‌سادگی میسر نیست، چون فاصله‌ی واقعی در طی گردش سیاره در مدار بیضوی آن از هفته‌ای به هفته‌ی دیگر متغیر است؛ گاهی به خورشید نزدیک‌تر است، و گاه دورتر. برای جبران این اثر، کپلر a را به‌عنوان متوسط نزدیک‌ترین و دورترین فاصله از خورشید تعریف کرد.

عصاره‌ی قانون سوم، مطلب ساده‌ای است: هر چه سیاره از خورشید دورتر باشد، آهسته‌تر حرکت می‌کند، و پیمودن مدار آن مدت بیشتری طول می‌کشد. ولی نکته‌ی جالب و ظریف این قانون آن است که دوره‌ی گردش مداری به‌سادگی متناسب با فاصله‌ی مداری نیست. مثلاً نزدیک‌ترین همسایه‌ی ما، زهره، دوره‌ی گردشی معادل ۶۱٫۵ درصد سال ما دارد، ولی متوسط فاصله‌ی آن از خورشید ۷۲٫۳ درصد ما است (نه این‌که آن هم به‌سادگی ۶۱٫۵ درصد ما باشد). علت آن است که مربع دوره‌ی گردش با مکعب (نه مربع) فاصله متناسب است، و بنابراین، رابطه‌ی بین دوره‌ی گردش و فاصله پیچیده‌تر از یک تناسب مستقیم است.

اگر T و a به‌صورت درصد نسبت به سال زمین و فاصله‌ی زمین بیان شود، آنگاه قانون سوم کپلر به $T^۲ = a^۳$ ساده می‌شود. به‌جای این‌که صرفاً یک رابطه‌ی نسبت باشد، تبدیل به یک معادله می‌شود. برای این‌که ببینیم چقدر خوب کار می‌کند، اعداد مربوط به زهره را در آن قرار می‌دهیم: $T^۲ = (۰٫۶۱۵)^۲ \approx ۰٫۳۷۸$، در حالی که $a^۳ = (۰٫۷۲۳)^۳ \approx ۰٫۳۷۸$. بنابراین، قانون تا سه رقم معنی‌دار برقرار است. این چیزی است که کپلر را به هیجان آورد. وقتی که برای سیاره‌های دیگر نیز محاسبه کنیم، نتایج آن به همین اندازه جالب توجه است.

کپلر و گالیله، شباهت‌ها و تفاوت‌ها

کپلر و گالیله هیچ‌گاه با یکدیگر دیدار نکردند، ولی درباره‌ی دیدگاه‌های کوپرنیکی خود و کشفیاتی که در زمینه‌ی ستاره‌شناسی داشتند، با یکدیگر مکاتبه می‌کردند. یک بار که

گروهی از افراد حاضر نشدند از درون تلسکوپ گالیله نگاه کنند، چون می‌ترسیدند که این وسیله ابزار کار شیطان باشد، گالیله با لحنی آکنده از عجز و آمیخته با شگفتی به کپلر نوشت: «کپلر عزیزم، کاش می‌توانستیم با هم به حماقت خارق‌العاده‌ی این جماعت بخندیم. چه می‌گویی درباره‌ی بزرگ‌ترین فلاسفه‌ی این دانشگاه که با لجاجت یک مار عروسکی، و علیرغم هزاران بار تلاش و دعوت من، امتناع کردند از این‌که به سیاره‌ها، یا به ماه، و یا به تلسکوپ من نگاه کنند؟»

از برخی جهات، کپلر و گالیله به یکدیگر شباهت داشتند. هر دوی آن‌ها شیفته‌ی حرکت بودند. هر دو بر روی حساب انتگرال کار می‌کردند، کپلر بر روی حجم شکل‌های منحنی، مانند بشکه‌ی شراب، و گالیله بر روی مرکز ثقل سهمی‌وارها. از این جهت، روحیه‌ی ارشمیدس را داشتند، و اشیای صلب را در ذهنشان به ورقه‌های نازک خیالی، مانند برش‌های متعدد کالباس، می‌بریدند.

ولی از برخی جهات دیگر، مکمل یکدیگر بودند. بدیهی‌تر از همه، در زمینه‌ی بزرگ‌ترین دستاوردهای علمی خود مکمل یکدیگر بودند، گالیله با قوانین حرکت روی زمین، و کپلر با قوانین حرکت در منظومه‌ی شمسی. ولی مکمل بودن آن‌ها از این نیز عمیق‌تر است و به سبک و سرشت علمی آن‌ها مربوط می‌شود. گالیله عقلانی بود و کپلر عرفانی.

گالیله فرزند فکری ارشمیدس، و شیفته‌ی مکانیک بود. او در نخستین اثر منتشر شده‌ی خود، نخستین توضیح قابل توجیه را درباره‌ی افسانه‌ی «اورکا!» ارائه داد و نشان داد که ارشمیدس با استفاده از ترازو و وان حمام توانسته است مشخص کند که تاج شاه هیرو از طلای خالص ساخته نشده است و نیز توانسته مقدار دقیق نقره‌ای را که طلاساز دزد با طلا مخلوط کرده است، محاسبه کند. گالیله بعداً نیز در سرتاسر زندگی حرفه‌ای خود به تشریح و توسعه‌ی کارهای ارشمیدس ادامه داد و غالباً مکانیک او را از تعادل به حرکت بسط می‌داد.

اما کپلر بیشتر میراث‌دار فیثاغورس بود. او که بسیار خیال‌پرداز بود و ذهنیتی عددشناسانه داشت، همه جا الگوهایی را می‌دید. او نخستین توضیح را در این زمینه در اختیار ما گذاشت که چرا دانه‌های برف به شکل شش‌ضلعی هستند. او درباره‌ی کارآمدترین راه برای انبار کردن گلوله‌های توپ فکر کرد، و (به‌درستی) حدس زد که آرایش بهینه‌ی قرار دادن آن‌ها به همان صورتی است که طبیعت دانه‌های انار را می‌چیند و به همان شیوه‌ای که بقال‌ها پرتقال‌ها را روی هم تلنبار می‌کنند. وسواس کپلر در زمینه‌ی هندسه، هم در قلمرو قدسی و هم دنیوی، به مرز غیرعقلانی می‌رسید. ولی همین شور و شوق او را به جایی که بود، رسانده بود. همان‌گونه که آرتور کوستلِر،

نویسنده، موشکافانه گفته است: «یوهانس کپلر دل‌باخته‌ی رؤیای فیثاغورسی شد، و بر مبنای این تخیل، با روش‌های استدلالی به همان اندازه غیرعقلانی، بنای مستحکم ستاره‌شناسی مدرن را بر پا کرد. این یکی از حیرت‌انگیزترین دوره‌ها در تاریخ اندیشه است، و پادزهری است برای این باور پرهیزگارانه که پیشرفت علم تحت حاکمیت منطق است.»

برآمدن ابرهای طوفانی

مانند همه‌ی کشف‌های بزرگ، قوانین کپلر برای حرکت سیارات در آسمان و قوانین گالیله برای سقوط اشیا بر روی زمین بیشتر از پرسش‌هایی که پاسخ می‌دادند، پرسش‌های دیگری را مطرح می‌کردند. از جهت علمی، طبیعی بود که درباره‌ی علل غایی پرسش شود. این قوانین از کجا آمده است؟ آیا حقیقتی ژرف‌تر در زیر آن‌ها قرار دارد؟ مثلاً نمی‌شد این را اتفاقی دانست که خورشید در تمام مدارهای بیضوی سیارات، جایگاهی ویژه را اشغال کرده و همواره در یکی از کانون‌های آن‌ها قرار گرفته است. آیا معنای این مطلب آن بود که خورشید به طریقی بر سیارات تأثیر می‌گذارد؟ آیا از طریق نوعی نیروی پنهان بر آن‌ها اثر می‌کند؟ کپلر این‌گونه می‌اندیشید. او با خود فکر می‌کرد که شاید پرتوهای مغناطیسی، که اخیراً به‌وسیله‌ی ویلیام گیلبرت در انگلستان کشف شده بود، سیاره‌ها را می‌کِشد. هر چه بود، به نظر می‌رسید نیرویی ناشناخته و ناپیدا از فاصله‌های دور در خلأ فضا عمل می‌کند.

کارهای گالیله و کپلر سؤالاتی را نیز برای ریاضیات پدید آورد. به‌خصوص این‌که منحنی‌ها دوباره در مرکز توجه واقع شدند. گالیله نشان داده بود که قوس یک پرتابه یک سهمی است، و دایره‌های ارسطو اکنون جای خود را به بیضی‌های کپلر داده بودند. دیگر پیشرفت‌های علمی و فناوری در سده‌ی ۱۶۰۰ نیز علاقه به منحنی‌ها را دوچندان کردند. در اُپتیک، شکل یک عدسی خمیده مشخص می‌کرد که تصویر تا چه حد بزرگ یا معوج یا تار می‌شود. این‌ها مسایل مهمی در طراحی تلسکوپ‌ها و میکروسکوپ‌ها بود، ابزارهای جدید و پرطرفداری که انقلابی را به ترتیب در ستاره‌شناسی و زیست‌شناسی به راه انداخته بودند. دانشمند فرانسوی رنه دکارت می‌پرسید: آیا می‌توان عدسی‌ای طراحی کرد که از هر گونه تار شدن برکنار باشد؟ این در نهایت، به سؤالی درباره‌ی منحنی‌ها منتهی می‌شد: عدسی باید شکل چه نوع منحنی‌ای داشته باشد تا تمام پرتوهای نور ساطع شده از یک نقطه یا پرتوهایی که به موازات یکدیگر هستند، پس از عبور از عدسی به‌طور تضمینی در یک نقطه‌ی یکتا هم‌گرا شوند؟

منحنی‌ها نیز، به نوبه‌ی خود، سؤالاتی را درباره‌ی حرکت مطرح می‌کردند. قانون دوم کپلر به‌طور ضمنی بیان می‌کرد که سیاره‌ها در مدار بیضوی خود با سرعت غیریکنواخت حرکت می‌کنند و گاه سرعتشان کند می‌شود و گاه تند. پرتابه‌های گالیله نیز روی قوس‌های سهموی خود با سرعت دایم‌التغییری سیر می‌کردند. در حالی که بالا می‌رفتند، سرعتشان کم می‌شد، به بالا که می‌رسیدند، متوقف می‌شدند، بعد در حالی که به طرف زمین سقوط می‌کردند، سرعتشان افزوده می‌شد. در مورد آونگ‌ها نیز همین مطلب صحت داشت. در حالی که تا انتهای قوس خود بالا می‌رفتند، سرعتشان کند می‌شد، بعد برمی‌گشتند و تا پایین بر سرعتشان افزوده می‌شد، آنگاه دوباره تا انتهای دیگر سرعتشان کند می‌گردید. چگونه می‌شد حرکتی را که سرعت آن لحظه به لحظه تغییر می‌کند، اندازه‌گیری کرد؟

در میان این توفان سؤالات، افکار وارده از ریاضیات اسلامی و هندی راه جدیدی را برای حرکت به پیش به ریاضی‌دانان اروپایی نشان می‌داد، راهی برای فراتر رفتن از ارشمیدس و گشودن مرزهای نو. افکار وارده از شرق منجر به روش‌های تازه‌ای برای اندیشیدن درباره‌ی حرکت و منحنی‌ها و آنگاه در یک غرش برق‌آسا رسیدن به حساب دیفرانسیل شد.

فصل ۴

سرآغاز حساب دیفرانسیل

از دیدگاه مدرن، حسابان دو رو دارد. حساب دیفرانسیل مسایل پیچیده را به بی‌نهایت قطعه‌ی ساده‌تر تقسیم می‌کند. حساب انتگرال قطعات را دوباره سرهم می‌کند تا مسئله‌ی اولیه را حل کند.

با توجه به اینکه بریدن به‌طور طبیعی قبل از بازسازی واقع می‌شود، معقول به نظر می‌رسد که یک نوآموز ابتدا حساب دیفرانسیل را یاد بگیرد. و واقعاً هم تمام دوره‌های حسابان امروزه به این صورت شروع می‌شود. ابتدا از مشتق شروع می‌کنند—تکنیک‌های نسبتاً آسان برای بریدن و تکه‌تکه کردن—و بعد سراغ انتگرال می‌روند، تکنیک‌های بسیار سخت‌تری که برای سر هم کردن مجدد قطعات به‌صورت یک کل یکپارچه استفاده می‌شود. یاد گرفتن با این ترتیب برای دانشجویان خیلی راحت‌تر است، زیرا ابتدا مطالب آسان‌تر ارائه می‌شود. معلم‌ها هم از این ترتیب راضی‌اند، چون منطقی‌تر به نظر می‌رسد.

ولی جالب است که این‌ها در تاریخ به ترتیب معکوس ظاهر شده است. انتگرال در حدود ۲۵۰ ق.م. در یونان باستان در کارهای ارشمیدس کاملاً مورد استفاده بود، در حالی که از مشتق تا سده‌ی ۱۶۰۰ هیچ خبری نبود. چرا حساب دیفرانسیل—که نیمه‌ی آسان‌تر این رشته است—خیلی دیرتر از حساب انتگرال ظاهر شده است؟ علت آن است که حساب دیفرانسیل از جبر به وجود آمد، و قرن‌ها طول کشید تا جبر به بلوغ برسد، مهاجرت کند، و تغییر شکل بدهد. جبر در شکل اولیه‌اش در چین، هندوستان، و دنیای اسلام، کاملاً گفتاری بود. مجهولات مثل امروز با x و y نمایش داده نمی‌شد. معادلات با جملات بیان می‌شد، و مسئله‌ها در قالب بندها ارائه می‌گردید. ولی مدت

کوتاهی پس از آن‌که جبر، در حوالی سال ۱۲۰۰، به اروپا آمد، به‌صورت هنر کاربرد نمادها تکامل پیدا کرد. این سبب شد که جبر انتزاعی‌تر... و قدرتمندتر شود. سپس این جبر جدید نمادین با هندسه ترکیب شد، و یک دورگه‌ی حتی نیرومندتر را به نام هندسه‌ی تحلیلی پدید آورد، که به نوبه‌ی خود باغ وحشی از منحنی‌های جدید را ایجاد کرد، که مطالعه‌ی آن‌ها به حساب دیفرانسیل منتهی شد. در این فصل، چگونگی این رویداد را بررسی می‌کنیم.

ظهور جبر در مشرق‌زمین

ذکر نام چین، هندوستان، و دنیای اسلام برای آن است که فکر نکنید پیدایش حسابان متمرکز بر اروپا بوده است. با آن‌که حسابان در اروپا به اوج رسید، ولی ریشه‌های آن در جای دیگری است. به‌طور خاص، جبر از آسیا و خاورمیانه آمد. نام آن از کلمه‌ی عربی *الجبر* به‌معنای «جبران» و «به هم چسباندن تکه‌های شکسته» گرفته شده است. این‌ها نوع عمل‌هایی است که برای موازنه‌ی معادلات و حل آن‌ها لازم است؛ مثلاً با تفریق کردن عددی از یک طرف معادله و اضافه کردن آن به طرف دیگر، مانند آن است که قسمت شکسته را ترمیم می‌کنیم. هندسه نیز، همان‌طور که دیدیم، در مصر باستان متولد شد؛ گفته می‌شود که پدر بنیان‌گذار هندسه‌ی یونان، تالِس، هندسه را در آن‌جا آموخت. و بزرگ‌ترین قضیه‌ی هندسه، قضیه‌ی فیثاغورس، نیز از خود فیثاغورس سرچشمه نگرفته است؛ مردم بابِل لااقل هزار سال قبل آن را می‌دانستند، که شاهد آن مثال‌های نوشته شده بر لوح‌های رسی بین‌النهرین از حدود سال ۱۸۰۰ ق.م. است.

این را نیز باید در نظر داشته باشیم که وقتی که از یونان باستان صحبت می‌کنیم، به سرزمین بزرگی اشاره می‌کنیم که بسی وسیع‌تر از آتن و اسپارت بود. در بزرگ‌ترین زمان آن، از مصر در جنوب، تا ایتالیا و سیسیل در غرب، و در شرق از کرانه‌های مدیترانه تا ترکیه، خاورمیانه، آسیای میانه، و بخش‌هایی از پاکستان و هندوستان امتداد داشت. خود فیثاغورس اهل ساموس، جزیره‌ای در ساحل غربی آسیای صغیر (ترکیه‌ی امروز)، بود. ارشمیدس در سیراکوز، در ساحل جنوب شرقی سیسیل، زندگی می‌کرد. اقلیدس در اسکندریه می‌زیست، که یک بندر بزرگ و قطب فرهنگی در دهانه‌ی رود نیل در مصر بود.

پس از آن‌که رومیان بر یونانیان پیروز شدند، و خصوصاً پس از آن‌که کتاب‌خانه‌ی اسکندریه به آتش کشیده شد و امپراتوری روم غربی سقوط کرد، مرکز ریاضیات دوباره به شرق منتقل شد. نوشته‌های ارشمیدس و اقلیدس، و هم‌چنین، آثار بطلمیوس،

ارسطو، و افلاطون، به عربی ترجمه شد. فرهیختگان و کاتبان در قسطنطنیه و بغداد تعالیم قدیمی را زنده نگه‌داشتند و افکار خودشان را نیز به آن‌ها افزودند.

ظهور جبر و افول هندسه

در طی قرونی که جبر در حال شکل‌گیری بود، آهنگ پیشرفت هندسه کُند شد. وقتی که ارشمیدس در سال ۲۱۲ ق.م. مرد، به نظر می‌رسید هیچ‌کس نخواهد توانست او را در بازی خودش شکست دهد. البته، تقریباً هیچ‌کس. حوالی سال ۲۵۰ م.، هندسه‌دان چینی، لیو هوئی، روش ارشمیدس برای محاسبه‌ی عدد پی را بهبود داد. دو قرن بعد، زو چونگ‌ژی روش لیو هوئی را بر روی یک چندضلعی با ۲۴,۵۷۶ ضلع اجرا کرد. این کار از نظر محاسباتی بسیار عظیم بود، و گیره را بر روی عدد پی تا هشت رقم تنگ کرد:

$$۳/۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۷.$$

قدم بعدی به طرف جلو پنج قرن بعد، از سوی دانشمندی به نام حسن ابن هیثم، برداشته شد. او که در بصره، عراق، در حوالی سال ۹۶۵ م. متولد شده بود، در عصر طلایی اسلام در قاهره بر روی موضوعات مختلفی از الهیات و فلسفه گرفته تا ستاره‌شناسی و پزشکی کار می‌کرد. ابن هیثم در کارهایش در زمینه‌ی هندسه، حجم اجسام صلبی را که ارشمیدس به آن‌ها توجه نکرده بود، محاسبه کرد. اما این پیشرفت‌ها هر چقدر هم چشم‌گیر بود، ولی نشانه‌های نادری از ادامه‌ی حیات هندسه بود، و بروز آن دوازده قرن طول کشیده بود.

طی همین دوره‌ی طولانی، پیشرفت‌های سریع و قابل ملاحظه‌ای در زمینه‌ی جبر و حساب در حال رخ دادن بود. ریاضی‌دانان هندی مفهوم صفر و سیستم عددنویسی ارزش مکانی دهدهی را ابداع کردند. تکنیک‌های جبری برای حل معادلات در مصر، عراق، ایران، و چین ظاهر شد. اکثر این‌ها در جهت حل مسایل عملی مربوط به قانون ارث، برآورد مالیات، تجارت، حسابداری، محاسبه‌ی بهره، و مباحث دیگری بود که با استفاده از اعداد و معادلات قابل‌حل است. در آن ایام که مسایل جبر عمدتاً با استفاده از کلمات بیان می‌شد، راه‌حل‌ها به‌صورت نسخه و مسیر مرحله به مرحله برای رسیدن به جواب ارائه می‌گردید، که این روش در کتاب مشهور محمد ابن موسی خوارزمی (ح. ۷۸۰–۸۵۰ م.) به‌خوبی توضیح داده شده است. شایان توجه است که کلمه‌ی الگوریتم که به روال‌های مرحله به مرحله اطلاق می‌شود، از نام خوارزمی گرفته شده

است. نهایتاً، تجار، بازرگانان، و کاشفان این شکل گفتاری جبر و اعداد دهدهی هندی‌ـ عربی را به غرب و اروپا آوردند. برخی افراد نیز شروع به ترجمه‌ی متون عربی به لاتین کردند.

مطالعه‌ی جبر به‌صورت مستقل، به‌عنوان یک سیستم نمادی جدای از کاربردهای آن، در اروپای دوران رنسانس رو به شکوفایی نهاد. جبر در سده‌ی ۱۵۰۰ به نقطه‌ی اوج خود رسید و تقریباً به شکل امروزی آن درآمد، به‌طوری که از حروف برای نمایش اعداد استفاده می‌شد. در فرانسه در سال ۱۵۹۱، فرانسوا ویِت از حروف صدادار، مانند A و E، برای نمایش کمیت‌های مجهول، و از حروف بی‌صدا، مانند B و G، برای نمایش مقادیر ثابت استفاده کرد. (کاربرد امروزی، که از x، y، z برای مجهول‌ها و از a، b، c برای ثابت‌ها استفاده می‌شود، برگرفته از کارهای رنه دکارت در حدود پنجاه سال بعد از آن است.) جایگزین کردن حروف و نمادها به‌جای کلمات، کار با معادلات و یافتن جواب را بسیار آسان‌تر کرد.

یک پیشرفت بزرگ دیگر در قلمرو حساب زمانی بود که سیمون استِوین در هلند چگونگی تعمیم اعداد هندی‌ـ عربی به کسرهای اعشاری را کشف کرد. او با این کار، تمایزی را که پیروان مکتب ارسطویی از قدیم بین اعداد (یعنی تعداد صحیح واحدهای غیرقابل تقسیم) و بزرگی‌ها (کمیت‌های پیوسته که قابل تقسیم به بی‌نهایت بخش کوچک‌تر هستند) قایل بودند، از بین برد. تا قبل از استوین، اعداد دهدهی فقط برای بخش صحیح یک کمیت مورد استفاده قرار می‌گرفت، و اجزای کوچک‌تر از واحد به‌صورت کسر بیان می‌شد. در رویکرد جدید استوین، حتی یک واحد را می‌شد به چندین قطعه تقسیم کرد و با نوشتن ارقام بعد از ممیز، آن را با نماد دهدهی نمایش داد. این کار حالا برای ما خیلی ساده به نظر می‌رسد، ولی در آن زمان ایده‌ای انقلابی بود که حسابان را امکان‌پذیر کرد. وقتی که واحد دیگر مقدس و تقسیم‌ناپذیر نبود، تمام کمیت‌ها—صحیح، کسری، یا گُنگ—به‌صورت خانواده‌ی بزرگی از اعداد، همگی با اهمیت یکسان، با هم ادغام شدند. به این ترتیب، حسابان به اعداد حقیقی با دقت بی‌نهایت که برای توصیف پیوستگی فضا، زمان، حرکت، و تغییر به آن نیازمند بود، دست یافت.

درست قبل از آن‌که هندسه با جبر متحد شود، یک موفقیت نهایی دیگر برای روش‌های هندسی قدیمی ارشمیدس حاصل شد. در آغاز قرن هفدهم، کپلر حجم شکل‌های منحنی مانند بشکه‌های شراب و اجسام به شکل دونات را با تقسیم کردن آن‌ها به بی‌نهایت دیسک با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک محاسبه کرد، و به همین ترتیب، گالیله و دانشجویانش اوانجلیستا توریچلی و بوناوِنتورا کاوالیِری مساحت،

حجم، و مرکز ثقل شکل‌های مختلف را با در نظر گرفتن آن‌ها به‌عنوان پشته‌های بی‌نهایتی از خط‌ها و سطح‌ها محاسبه کردند. از آنجا که این افراد در مقابل بی‌نهایت و بی‌نهایت‌کوچک‌ها رویکرد بی‌مبالاتی داشتند، لذا تکنیک‌های آن‌ها از نظر استدلالی مستحکم نبود، ولی قوی و شهودی بود. این روش‌ها آسان‌تر و سریع‌تر از روش افنا جواب می‌داد، ازاین‌رو، پیشرفت مهیجی به نظر می‌رسید (گرچه امروز می‌دانیم که ارشمیدس زودتر از آن‌ها این کار را انجام داده بود؛ همین فکر در رساله‌ی او درباره‌ی روش ارشمیدس نهفته است، که در آن زمان، در کتاب دعایی در یک صومعه از نظرها مخفی مانده بود، و تا سال ۱۸۹۹ هم‌چنان مخفی بود).

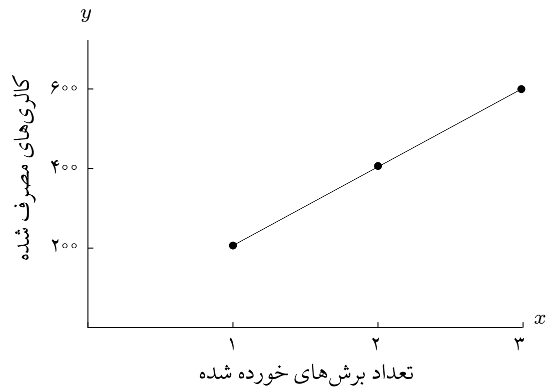
به هر حال، با آن‌که پیشرفت‌های حاصل شده به دست نوارشمیدسیان در آن زمان نویدبخش به نظر می‌رسید، ولی تقدیر نبود که ادامه‌ی رویکرد قدیمی برای آینده سودمند باشد. حالا همه‌ی توجهات به‌سوی جبر نمادین معطوف شده بود. و به‌زودی بذرهای قوی‌ترین شاخه‌های آن—هندسه‌ی تحلیلی و حساب دیفرانسیل—افشانده می‌شد.

جبر به هندسه می‌پیوندد

اولین پیشرفت بزرگ حوالی سالی ۱۶۳۰ روی داد، زمانی که دو ریاضی‌دان فرانسوی (که به‌زودی رقیب یکدیگر می‌شدند)، پیر دو فرما و رنه دکارت، به‌طور مستقل بین جبر و هندسه پیوند برقرار کردند. کار آن‌ها نوع جدیدی از ریاضیات را، به نام هندسه‌ی تحلیلی، پدید آورد که عرصه‌ی اصلی فعالیت آن صفحه‌ی xy بود، صحنه‌ای که معادلات در آن زنده می‌شدند و شکل می‌گرفتند.

امروزه از صفحه‌ی xy برای رسم نمودار بین متغیرها استفاده می‌کنیم. مثلاً ببینید که با عادت‌های غذا خوردن ناهنجاری که من دارم، چقدر کالری وارد بدنم می‌شود. من بعضی وقت‌ها برای صبحانه دو قطعه نان کشمشی دارچینی میل می‌کنم. روی بسته‌بندی آن نوشته شده است که هر برش بالغ بر ۲۰۰ کالری دارد. (اگر می‌خواستم غذای سالم‌تری بخورم، می‌توانستم نان هفت‌غله‌ای را که همسرم می‌خرد و هر برش آن ۱۳۰ کالری دارد، بخورم، ولی برای این مثال نان کشمشی دارچینی را ترجیح می‌دهم، چون ۲۰۰، اگر نه از نظر تغذیه، ولی از نظر ریاضی از ۱۳۰ دوست‌داشتنی‌تر است.)

در این‌جا نموداری می‌بینید که نشان می‌دهد که وقتی یک، دو، یا سه برش نان بخورم، چند کالری مصرف می‌کنم.



از آنجا که هر برش معادل ۲۰۰ کالری است، لذا دو برش ۴۰۰ کالری، و سه برش ۶۰۰ کالری می‌شود. وقتی که این‌ها به‌صورت نقطه‌های داده‌ها روی نمودار ترسیم شوند، هر سه نقطه روی یک خط راست واقع می‌شوند. به این معنا، بین کالری مصرف شده و تعداد برش‌های خورده شده، رابطه‌ی *خطی* وجود دارد. اگر تعداد برش‌های خورده شده را با x و تعداد کالری‌های شوم مصرف شده را با y نمایش دهیم، این رابطه‌ی خطی را می‌توان به‌صورت $y = 200x$ خلاصه کرد. این رابطه بین نقاط داده‌ای نیز برقرار است. مثلاً یک و نیم برش معادل ۳۰۰ کالری است، و نقطه‌ی داده‌ای مربوط به آن‌ها روی خط واقع می‌شود. پس معنی می‌دهد که نقطه‌های نمودار را به‌صورت فوق به هم وصل کنیم.

معلوم است که این مطالب شاید بدیهی به نظر برسد، ولی منظور من همین است. این‌ها همیشه بدیهی نبود. در گذشته بدیهی نبود—لازم بود که این فکر به ذهن کسی برسد که رابطه‌ها را روی یک نمودار انتزاعی نمایش دهد—و حتی امروزه هم برای همه بدیهی نیست، لااقل برای کودکانی که هنوز این‌گونه نمودارها را یاد نگرفته‌اند.

در این‌جا، چندین جهش تخیلی دخالت دارد. این نیازمند انعطاف‌پذیری ذهنی است. در تصویر، اثری از خود کالری‌ها نیست. یعنی در این نمودار، تصویر کشمش‌ها و رگه‌های دارچین روی کلوچه‌ها نمایش داده نشده است. این نمودار یک انتزاع است. این امکان آن را فراهم می‌کند که حوزه‌های مختلف ریاضی با یکدیگر تعامل و همکاری کنند: حوزه‌ی اعداد مانند تعداد کالری‌ها یا برش‌های نان مصرف شده؛ حوزه‌ی روابط نمادین، مانند $y = 200x$؛ و حوزه‌ی شکل‌ها، مانند نقطه‌های روی یک خط راست روی نموداری با دو محور متعامد. این نمودار ساده، از طریق مجموع این ایده‌ها، اعداد، روابط، و شکل‌ها را در هم می‌آمیزد، و لذا حساب و جبر با هندسه ادغام می‌شوند. این

موضوع اصلی در این‌جا است. جویبارهای مختلف ریاضیات، پس از آن‌که قرن‌ها جدا از هم جریان داشته‌اند، به هم پیوسته‌اند. (به خاطر آورید که یونانیان باستان هندسه را بر حساب و جبر برتری می‌دادند و اغلب اجازه‌ی اختلاط آن‌ها را نمی‌دادند.)

یک ترکیب دیگر در این‌جا، محورهای افقی و عمودی است. این‌ها غالباً محور x و y نامیده می‌شوند، به نام متغیرهایی که به‌عنوان برچسب آنها استفاده می‌شوند. این‌ها محورهای اعداد هستند. به این اصطلاح دقت کنید: *محور (خط) اعداد*. *اعداد* به‌صورت *نقطه‌هایی* روی یک خط نمایش داده می‌شوند. حساب با هندسه همراه شده است. یعنی حتی قبل از آن‌که نمودار داده‌ها را ترسیم کنیم، آن‌ها با یکدیگر درآمیخته هستند!

یونانیان باستان اگر بودند، از این نقض پروتکل جیغشان به هوا می‌رفت. از نظر آن‌ها، اعداد فقط کمیت‌های گسسته بودند، مانند اعداد صحیح و کسرها. بر عکس، کمیت‌های پیوسته، مانند اندازه‌ی طول یک خط، به‌عنوان بزرگی در نظر گرفته می‌شدند، که از نظر مفهومی، دسته‌ای متمایز از اعداد بود. بنابراین، به مدت حدود دو هزار سال از زمان ارشمیدس تا آغاز قرن هفدهم، اعداد به‌هیچ‌وجه معادل با پیوستار نقطه‌های روی یک خط دانسته *نمی‌شدند*. از این نظر، ایده‌ی محور اعداد اساساً خلاف‌کارانه بود. امروزه در این مورد حتی فکر هم نمی‌کنیم. انتظار داریم که بچه‌های مدرسه‌ی ابتدایی هم بدانند که اعداد را می‌توان از نظر بصری به این صورت نمایش داد.

کفرگوییِ دیگر در این‌جا، از دیدگاه یونانیان باستان، عدم توجه به مقایسه‌ی مثل به مثل در نمودار است، مثلاً سیب با سیب یا کالری با کالری. بلکه نمودار کالری‌ها را روی یک محور نمایش داده است و برش‌ها را روی محور دیگر. این‌ها مستقیماً قابل مقایسه نیستند. اما ما امروزه هنگام ترسیم نمودارهایی از این دست، در انجام این‌گونه مقایسه‌ها هیچ تردیدی به خودمان راه نمی‌دهیم. صرفاً کالری‌ها و برش‌ها را به عدد تبدیل می‌کنیم، یعنی اعداد حقیقی، اعداد اعشاری بی‌پایان، که ارز جهانی در ریاضیات پیوسته هستند. یونانیان تمایز مشخصی را بین طول‌ها، مساحت‌ها، و حجم‌ها قایل بودند، در حالی که این‌ها برای ما فقط عدد هستند.

معادله به‌عنوان منحنی

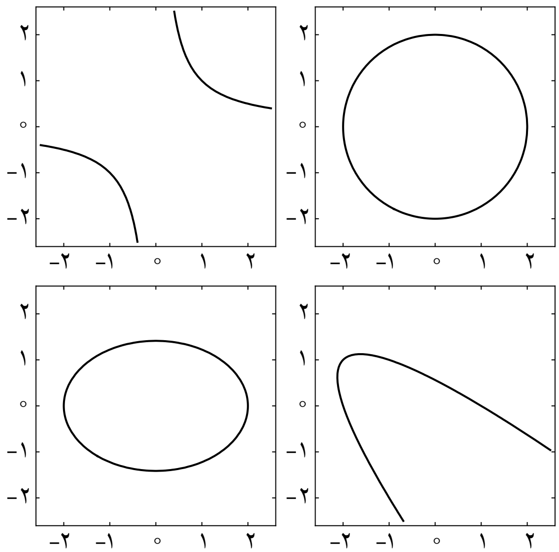
البته فرما و دکارت هرگز از صفحه‌ی xy برای مطالعه‌ی چیزهای ملموس، مانند نان کشمشی دارچینی، استفاده نکردند. برای آنها، صفحه‌ی xy ابزاری برای مطالعه‌ی هندسه‌ی خالص بود.

آن‌ها که جدا از هم کار می‌کردند، هر کدام متوجه شدند که هر معادله‌ی خطی (یعنی معادله‌ای که در آن x و y فقط با توان یک ظاهر می‌شوند) روی صفحه‌ی xy یک خط راست ایجاد می‌کند. این ارتباط بین معادلات خطی و خطوط، نشان‌دهنده‌ی احتمال یک پیوند عمیق‌تر بود، پیوندی بین معادلات *غیرخطی* و *منحنی‌ها*. در یک معادله‌ی خطی، مانند $y = ۲۰۰x$، متغیرهای x و y به‌صورت تنها و بدون تغییر ظاهر می‌شوند، و به توان دو یا سه یا بالاتر نمی‌رسند. فرما و دکارت متوجه شدند که همین بازی را با توان‌ها و معادلات دیگر نیز می‌توانند انجام دهند. آن‌ها می‌توانستند هر معادله‌ای که می‌خواهند بنویسند، و هر کاری می‌خواهند با x و y بکنند—یکی از آن‌ها را مربع کنند، دیگر را مکعب کنند، آن‌ها را در هم ضرب کنند، با هم جمع کنند، هر کاری—و بعد نتیجه را به‌صورت یک منحنی تفسیر نمایند. اگر شانس می‌آوردند، ممکن بود منحنی جالبی پیدا کنند، منحنی‌ای که هیچ‌کس قبلاً به تصور درنیاورده بود، منحنی‌ای که ارشمیدس قبلاً مطالعه نکرده بود. هر معادله‌ای با استفاده از x و y، یک ماجراجویی جدید بود. در عین حال، نوعی تغییر دیدگاه نیز بود. به‌جای این‌که اول از یک منحنی شروع کنید، اول با یک معادله شروع می‌کردید، بعد می‌دیدید چه نوع منحنی‌ای از آن حاصل می‌شود. گویی که فرمان را به دست جبر می‌دهید و هندسه در صندلی عقب نشسته است.

فرما و دکارت ابتدا به بررسی معادله‌های درجه‌ی دوم پرداختند. این‌ها معادلاتی هستند که در آن‌ها، غیر از اعداد ثابت معمولی (مانند ۲۰۰) و جمله‌های خطی (مانند x و y)، متغیرها به‌صورت مربع و ضرب شده در یکدیگر نیز ظاهر می‌شوند، مثلاً به‌صورت $x^۲$، $y^۲$، و xy. (در لاتین، *quadratus* یعنی «مربع»). مربع کمیت‌ها به‌طور سنتی به‌عنوان مساحت نواحی مربعی تفسیر می‌شد. به این ترتیب، $x^۲$ به‌معنای مساحت یک مربع x در x است. در روزگاران قدیم، مساحت کمیتی اساساً متفاوت از طول یا حجم تلقی می‌شد. ولی برای فرما و دکارت، $x^۲$ صرفاً یک عدد حقیقی بود، بدان معنا که می‌شد نمودار آن را روی محور اعداد، درست مانند x یا $x^۳$ یا هر توان دیگر x، ترسیم کرد.

امروزه، دانش‌آموزان دبیرستانی به‌طور معمول در درس جبر خود باید بتوانند نمودار معادله‌هایی مانند $y = x^۲$ را، که اتفاقاً منحنی آن یک سهمی است، رسم کنند. جالب است که تمام معادلات دیگر که مشتمل بر جمله‌های درجه‌ی دوم از x و y هستند، ولی هیچ‌گونه توان بالاتری ندارند، تنها چهار نوع منحنی ایجاد می‌کنند: سهمی، بیضی، هذلولی، یا دایره. همین. (جز این‌که برخی حالت‌های تبهگن ایجاد خط یا نقطه می‌کنند، یا این‌که هیچ نوع نموداری ندارند، ولی این‌ها موارد نادری

هستند که بدون مشکل می‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد.) مثلاً معادله‌ی درجه‌ی دوم $xy = ۱$ یک هذلولی ایجاد می‌کند، در حالی که $x^۲ + y^۲ = ۴$ یک دایره است، و $x^۲ + ۲y^۲ = ۴$ یک بیضی است. حتی معادله‌ی درجه‌ی دوم پیچیده‌ای مانند $x^۲ + ۲xy + y^۲ + x + ۳y = ۲$ باید یکی از چهار حالت ممکن فوق باشد. این اتفاقاً یک سهمی است.



فرما و دکارت نخستین کسانی بودند که این تقارن شگفت‌انگیز را کشف کردند: معادلات درجه‌ی دوم بر حسب x و y، همتاهای جبری مقاطع مخروطی یونانیان هستند، یعنی چهار نوع منحنی که با برش دادن مخروط با زاویه‌های مختلف ایجاد می‌شوند. در این‌جا، در عرصه‌ی جدید فرما و دکارت، منحنی‌های کلاسیک مانند شبح‌هایی از میان مه پدیدار می‌شدند.

با هم بودن بهتر است

پیوندهای نویافته بین جبر و هندسه، مزیتی برای هر دو رشته بود. هر کدام از آن‌ها به رفع نقایص رشته‌ی دیگر کمک می‌کرد. هندسه برای طرف راست مغز جذابیت داشت. شهودی و بصری بود، و درستی گزاره‌های آن غالباً با یک نگاه آشکار می‌شد. ولی نیاز به

نوع خاصی از هوشمندی داشت. در مورد هندسه، غالباً هیچ سرنخی وجود نداشت که اثبات را از کجا باید شروع کرد. شروع کردن استدلال نیاز به رگه‌هایی از نبوغ داشت.

اما جبر، نظام‌مند بود. معادلات را می‌شد تقریباً بدون فکر کردن و به‌راحتی ورز داد؛ می‌توانستید جمله‌ی یکسانی را به هر دو طرف معادله اضافه کنید، جمله‌های مشترک را خط بزنید، معادله را برای یک کمیت مجهول حل کنید، یا ده‌ها عمل و الگوریتم دیگر را بر اساس نسخه‌های استاندارد انجام دهید. فرایند جبر با نوعی تکرار آرامش‌بخش همراه بود، مانند لذتی که بر بافتن مترتب است. ولی جبر از تهی بودن رنج می‌برد. نمادهای آن درون‌تهی بودند. تا معنایی به آنها داده نمی‌شد، معنای خاصی نداشتند. نمی‌شد آن‌ها را به تصویر کشید. جبر کاری مکانیکی و مبتنی بر مغز چپ بود.

ولی در کنار هم، هیچ چیز جلودار جبر و هندسه نبود. جبر به هندسه نظام می‌داد. حالا دیگر هندسه به‌جای نبوغ، به سماجت نیاز داشت. سؤالات دشواری را که مستلزم درک عمیق بود، به محاسبات ساده، ولو پرزحمت، تبدیل می‌کرد. استفاده از نمادها ذهن را رها می‌کرد و موجب صرفه‌جویی وقت و انرژی می‌شد.

هندسه هم، به نوبه‌ی خود، به جبر معنا می‌داد. معادلات دیگر سترون نبودند؛ حالا تجسمی از شکل‌های پیچیده‌ی هندسی بودند. همین که معادلات به‌صورت هندسی در نظر گرفته شدند، پهنه‌ی کامل جدیدی از منحنی‌ها و سطوح گشوده شد. جنگل‌های انبوهی از پوشش گیاهی و جانوری هندسه می‌بایست کشف و دسته‌بندی و طبقه‌بندی و تشریح می‌شد.

فرما در مقابل دکارت

هر کس مقدار زیادی ریاضی و فیزیک خوانده باشد، به نام فرما و دکارت برخورد کرده است. ولی هیچ‌کدام از معلمان یا کتاب‌های ما چیزی درباره‌ی رقابت آن‌ها و کارهای شرورانه‌ی دکارت نگفتند. برای این‌که ببینید دعواهای آن‌ها بر سر چی بود، باید درباره‌ی زندگی و شخصیت آن‌ها و اهدافی که در سر داشتند، بیشتر بدانید.

رنه دکارت (۱۵۹۶–۱۶۵۰) یکی از جاه‌طلب‌ترین متفکران تمام دوران‌ها بود. پرجرئت، از نظر فکری بی‌پروا، و گریزان از سلطه بود، و منیت او دست کمی از نبوغ‌اش نداشت. مثلاً درباره‌ی رویکرد یونانیان به هندسه، که دو هزار سال تمام ریاضی‌دانان برای آن احترام زیادی قایل بودند، این‌گونه کوچک‌انگارانه می‌نویسد: «آن‌چه باستانیان به ما آموخته‌اند، چنان اندک و در اکثر موارد چنان فاقد اعتبار است که نمی‌توانم امید رسیدن به حقیقت را داشته باشم، مگر با طرد کردن همه‌ی مسیرهایی که آن‌ها دنبال

کرده‌اند.» از نظر شخصی، گاه بدبین و نازک‌نارنجی بود. مشهورترین عکسی که از چهره‌ی او داریم، او را به‌صورت مردی با صورت استخوانی، چشمان متکبر، و سبیلی کوچک و شرورانه نشان می‌دهد. مثل یک شخصیت منفی کارتونی به نظر می‌رسد.

دکارت مصمم بود که دانش بشری را از نو بر پایه‌ای از عقل، علم، و شکاکیت بنا کند. او بیشتر به‌خاطر کارهایش در زمینه‌ی فلسفه مشهور شده است، که در جمله‌ی معروف او متجلی است: *Cogito, ergo sum* («می‌اندیشم، پس هستم»). به عبارت دیگر، وقتی که در همه چیز شک داریم، لااقل از یک چیز مطمئن هستیم: این‌که ذهن شکاک وجود دارد. رویکرد تحلیلی او که ظاهراً با الهام از منطق مستحکم ریاضیات پدید آمده است، امروزه عمدتاً به‌عنوان سرآغاز فلسفه‌ی مدرن تلقی می‌شود. دکارت در کتاب مشهورش، *گفتاری درباره‌ی روش*، سبک اندیشه‌ی کاملاً جدیدی را درباره‌ی مسایل فلسفی ارائه کرد، با این حال، سه ضمیمه نیز در آن گنجانده است که آن‌ها هم به نوبه‌ی خود جالب توجه هستند: یکی در باب هندسه، که در آن رویکردش را به هندسه‌ی تحلیلی بیان کرده است؛ دیگری در باب اپتیک، که در آن روزگار که تلسکوپ، میکروسکوپ، و عدسی‌ها آخرین فناوری به شمار می‌آمدند، اهمیت فراوانی داشت؛ و سومی در خصوص آب‌وهوا، که عمدتاً فراموش شده است، مگر از حیث توضیح درستی که برای رنگین‌کمان ارائه کرده است. علایق او گستره‌ی وسیعی را در بر می‌گرفت. او بدن انسان را مانند سامانه‌ای از دستگاه‌های مکانیکی می‌دید و محل روح را در غده‌ی صنوبری مغز می‌دانست. او نظام بزرگی برای جهان پیشنهاد کرد (البته نادرست) که بر اساس آن، توفان‌هایی نامرئی در تمام فضا در جریان بود، و سیاره‌ها مانند برگ‌هایی در گردباد حرکت می‌کردند.

دکارت که در خانواده‌ای مرفه به دنیا آمده بود، در کودکی رنجور بود، و به او اجازه می‌دادند تا هر جا که دلش می‌خواهد، در بستر بماند و کتاب بخواند و فکر کند، که همین عادت را در تمام عمرش حفظ کرد و هرگز پیش از ظهر از رختخواب بلند نمی‌شد. مادرش وقتی که او فقط یک سال داشت، درگذشت، ولی خوش‌بختانه، ارث هنگفتی برای او گذاشت که به او امکان داد که بعدها زندگی را به فراغت و ماجراجویی بگذراند و به سفرهای زیادی برود. او داوطلبانه به ارتش هلند پیوست، ولی هرگز در نبردی شرکت نکرد، و وقت زیادی برای پرداختن به فلسفه داشت. او قسمت عمده‌ی زندگی بزرگسالی خود را در هلند گذراند، روی ایده‌هایش کار می‌کرد، و با اندیشمندان بزرگ دیگر مکاتبه و مجادله می‌کرد. در سال ۱۶۵۰، با بی‌میلی مقامی را در سوئد (که آن را به‌عنوان «کشور خرس‌ها در میان سنگ و یخ» ریشخند می‌کرد) به‌عنوان معلم خصوصی فلسفه برای ملکه کریستینا قبول کرد. از بخت بد دکارت، ملکه‌ی جوان

پرانرژی فردی سحرخیز بود. او اصرار داشت که کلاس‌ها ساعت پنج صبح برگزار شود، که برای هر کسی ساعت نامناسبی است، اما مخصوصاً برای دکارت که تمام عمر عادت داشت ظهر از خواب بیدار شود. زمستان آن سال در استکهلم یکی از سردترین زمستان‌ها در چند دهه‌ی گذشته بود. پس از چند هفته، دکارت مبتلا به ذات‌الریه شد و فوت کرد.

پیر دو فرما (۱۶۰۱–۱۶۶۵)، که پنج سال کوچک‌تر از دکارت بود، زندگی آرام و نسبتاً کم‌حادثه‌ای داشت و از طبقه‌ی متوسط به بالای جامعه بود. او روزها یک وکیل و قاضی محلی در تولوز بود، و دور از هیاهوی پاریس زندگی می‌کرد. شب‌ها یک شوهر بود و یک پدر. از سر کار که به خانه می‌آمد، با همسر و پنج فرزندش شام می‌خورد، و بعد چند ساعتی را با چیزی که علاقه‌ی واقعی‌اش بود، می‌گذراند: ریاضیات. در حالی که دکارت متفکری بزرگ با جاه‌طلبی‌های سترگ بود، فرما مردی کم‌رو، آرام، با خُلق ملایم، و ساده‌لوح بود. در مقایسه با دکارت، اهداف پایین‌تری داشت. او خودش را فیلسوف یا دانشمند نمی‌دانست. ریاضیات برایش کافی بود. ریاضی را به‌عنوان یک آماتور و با عشق دنبال می‌کرد. نیازی به انتشار کتاب نمی‌دید و چیزی منتشر نمی‌کرد. در کتاب‌هایی که می‌خواند، مانند آثار یونانی کلاسیک از دیوفانت و ارشمیدس، یادداشت‌های کوتاهی می‌نوشت، و گهگاه هم ایده‌هایش را برای فرهیختگانی که فکر می‌کرد قدر او را خواهند دانست، ارسال می‌کرد. او هرگز به جایی دور از تولوز سفر نکرد، و با ریاضی‌دانان بزرگ روزگار خود دیدار نکرد، گرچه به واسطه‌ی مارن مرسن که یک کشیش فرانسیسکویی، ریاضی‌دان، و رابط اجتماعی بود، با آنها مکاتبه می‌کرد.

از طریق مرسن بود که فرما و دکارت شاخ‌به‌شاخ شدند. در پاریس، هر وقت ریاضی‌دان‌ها کاری داشتند، پیش مرسن می‌رفتند. در آن دوران که خبری از فیس‌بوک نبود، او همگان را با هم ارتباط می‌داد، یک فضول‌باشی واقعی که تا حدودی فاقد سلیقه و مصلحت‌اندیشی بود. او عادت داشت دردسر به پا کند؛ مثلاً نامه‌های شخصی که دریافت می‌کرد، به دیگران نشان می‌داد، و دست‌نویس کتاب‌ها را که محرمانه به او می‌سپردند، قبل از انتشار فاش می‌کرد. حلقه‌ای از ریاضی‌دانان برتر دوروبر او بودند که البته در حد فرما و دکارت نبودند، ولی به هر حال، ریاضی‌دانان بزرگی بودند، و ظاهراً دلشان از دکارت پر بود. آن‌ها همیشه از او و خودبزرگ‌بینی‌اش در کتاب *گفتاری درباره‌ی روش* بدگویی می‌کردند.

ازاین‌رو، وقتی که دکارت از طریق مرسن شنید که آدم یک‌لاقبایی از تولوز، شخصی آماتور به نام فرما، ادعا کرده که یک دهه قبل از او هندسه‌ی تحلیلی را ایجاد کرده

است، و تازه همین آماتور (*این دیگر چه جور آدمی است؟*) درباره‌ی نظریه‌ی اپتیک او، شک و تردیدهایی را مطرح کرده است، با خود فکر کرد که او هم یکی از کسانی است که به جایگاه او طمع کرده است. در طول سال‌های بعد، او شدیداً علیه فرما فعالیت می‌کرد و سعی داشت شهرت او را نابود کند. هر چه باشد، منافع دکارت خیلی به خطر افتاده بود. او در کتاب *گفتار* مدعی شده بود که روش تحلیلی او تنها راه مطمئن برای رسیدن به دانش است. اگر فرما می‌توانست حتی بدون استفاده از روش او این کار را انجام دهد، کل پروژه‌ی او به خطر می‌افتاد.

دکارت بی‌رحمانه از فرما بدگویی می‌کرد و تا حدودی موفق به کوچک کردن او شد. کارهای فرما تا سال ۱۶۷۹ هرگز به‌درستی منتشر نشد. یافته‌های او به‌صورت دهان به دهان و یا با استنساخ نامه‌هایش به گوش دیگران می‌رسید، ولی منزلت واقعی او تا مدت‌ها پس از مرگش شناخته نشد. ولی دکارت حسابی کامیاب شد. کتاب *گفتار* او مشهور شد. نسل بعدی، هندسه‌ی تحلیلی را از آن آموختند. حتی امروزه نیز دانش‌آموزان دستگاه مختصات را کارتِزیَن [یعنی مربوط به دکارت] می‌نامند، ولو آن‌که فرما اول آن را ابداع کرد.

جستجو برای تحلیل، روش گم‌شده‌ی کشف

مشاجرات بین دکارت و فرما در اوایل قرن هفدهم اتفاق افتاد، زمانی که ریاضی‌دانان در رؤیای یافتن روشی تحلیلی برای هندسه بودند. در این‌جا، *تحلیل*، که در عبارت هندسه‌ی تحلیلی به کار می‌رود، باید به‌معنای باستانی این کلمه فهمیده شود—به‌معنای روشی برای کشف نتایج به جای ثابت کردن آن‌ها. در آن زمان، خیلی‌ها معتقد بودند که مردمان باستان یک چنین روش کشفی در اختیار داشته‌اند، ولی عمداً آن را مخفی کرده‌اند. مثلاً دکارت مدعی بود که یونانیان باستان «نوع خاصی از ریاضیات را بلد بودند که با آن‌چه در زمان ما متداول است، بسیار متفاوت بوده است... ولی عقیده‌ی من آن است که این نویسندگان با نوعی ناقلایی پست و حقیقتاً رقت‌انگیز، از انتقال این دانش جلوگیری کرده‌اند.»

به نظر می‌رسید جبر نمادین همین روش گم‌شده‌ی کشف باشد. ولی در محافل محافظه‌کارتر، جبر با انتقاداتی ارتجاعی مواجه شد. یک نسل بعد، زمانی که آیزاک نیوتن گفت: «جبر روش تحلیل پخمه‌ها در ریاضیات است»، قصدش اهانتی کمابیش آشکار به دکارت بود، که نمونه‌ی واقعی «پخمه»هایی است که از جبر به‌عنوان عصایی برای حل مسئله‌ها در جهت معکوس استفاده می‌کرد.

نیوتن در انجام این حمله متکی بر تمایز سنتی بین تحلیل و ترکیب بود. در تحلیل، مسئله را با شروع از آخر آن، حل می‌کنید، گویی که جواب از قبل داده شده است، و بعد به عقب برمی‌گردید، بدان امید که مسیری به‌سوی فرضیات داده شده بیابید. این روشی است که بچه‌ها در مدرسه به کار می‌برند، تا با داشتن جواب، روش حل مسئله را بیابند.

ترکیب در جهت مخالف عمل می‌کند. از مفروضات شروع می‌کنید، و با زدن تیری در تاریکی و آزمایش و خطا، باید سعی کنید به طریقی بر اساس مراحل منطقی جلو بروید، تا در نهایت، به جواب مورد نظر برسید. ترکیب عموماً خیلی سخت‌تر از تحلیل است، چون تا وقتی که به جواب نرسیده‌اید، نمی‌دانید چگونه به جواب خواهید رسید.

یونانیان باستان ترکیب را از نظر منطقی ارزشمندتر و از نظر قدرت اثبات قوی‌تر از تحلیل می‌دانستند. ترکیب تنها راه معتبر برای *ثابت کردن* یک نتیجه تلقی می‌شد؛ تحلیل روشی عملی برای *پیدا کردن* نتیجه بود. اگر خواهان یک نمایش قوی بودید، می‌بایست ترکیب انجام دهید. بدین خاطر است که ارشمیدس ابتدا از روش تحلیلی متوازن کردن شکل‌ها روی الاکلنگ برای پیدا کردن قضیه‌های خود استفاده کرد، ولی بعد برای اثبات آن‌ها به سراغ روش افنا رفت که یک روش ترکیبی است.

با این حال، با آنکه نیوتن تحلیل جبری را به دیده‌ی تحقیر می‌نگرد، ولی در فصل ۷ خواهیم دید که خودش هم از آن استفاده کرد، و به نتایج شگرفی رسید. ولی او نخستین استاد آن نبود. فرما بود. سبک تفکر فرما جالب است، زیرا زیبا و قابل‌فهم، و در عین حال، بیگانه و حیرت‌انگیز است. روش‌های او برای مطالعه‌ی منحنی‌ها امروزه دیگر مورد استفاده نیست، زیرا امروزه روش‌های پیشرفته‌تری در کتاب‌ها جایگزین آن شده است.

بهینه‌سازی محفظه‌ی ساک بالای سر

نسخه‌ی اولیه‌ای که فرما از حساب دیفرانسیل ارائه کرد، برخاسته از کاربرد جبر برای مسئله‌های بهینه‌سازی بود. بهینه‌سازی، مطالعه‌ی این است که چگونه کارها را به بهترین وجه ممکن انجام دهیم. بسته به موقعیت، *بهترین* ممکن است به‌معنای سریع‌ترین، ارزان‌ترین، بزرگ‌ترین، سودآورترین، کارآمدترین، و یا مفهومی دیگری از بهینگی باشد. فرما برای این‌که ایده‌هایش را به ساده‌ترین شکل ممکن نمایش دهد، چند مسئله ارائه کرد که شبیه تمرین‌هایی است که ما معلمان ریاضیات امروزه هم به دانشجویانمان می‌دهیم. می‌توان او را مسئول این کار دانست.

یکی از آن مسئله‌ها، به زبان روزگار ما، به قرار زیر است. فرض کنید که می‌خواهید

یک جعبه‌ی مستطیلی طراحی کنید که حتی‌الامکان اشیای بیشتری در آن جا شود، مشروط به دو شرط. اول این‌که مقطع این جعبه به‌صورت مربع، به عرض x اینچ و عمق x اینچ باشد. دوم این‌که باید در محفظه‌ی ساک بالای سر هواپیماهای یک شرکت هواپیمایی خاص جا بگیرد. بر اساس مقررات شرکت برای ساک دم‌دستی مسافران، عرض به‌اضافه‌ی عمق به‌اضافه‌ی ارتفاع جعبه نباید از ۴۵ اینچ تجاوز کند. چه مقداری از x، جعبه‌ای با حجم بیشینه ایجاد می‌کند؟

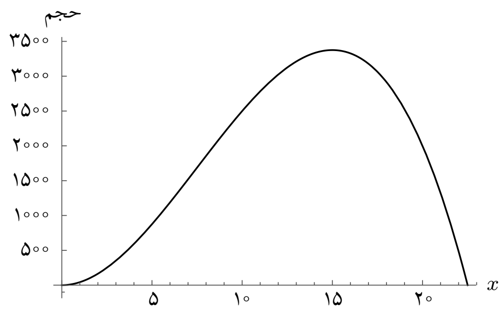
یک راه برای حل این مسئله از طریق فکر کردن بر مبنای عقل سلیم است. چند حالت را امتحان کنید. فرض کنید عرض و عمق هر کدام ۱۰ اینچ است. به این ترتیب، ارتفاع جعبه می‌تواند ۲۵ اینچ باشد، زیرا $۴۵ = ۲۵ + ۱۰ + ۱۰$. حجم جعبه‌ای با این ابعاد، $۲۵ \times ۱۰ \times ۱۰$ است، که برابر است با $۲,۵۰۰$ اینچ مکعب. آیا یک جعبه‌ی مکعبی بهتر از این خواهد بود؟از آنجا که ارتفاع، عرض، و عمق یک مکعب با هم برابر است، لذا ابعاد این جعبه $۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵$ خواهد بود، که حاصل‌ضرب آن $۳,۳۷۵$ اینچ مکعب می‌شود، که خیلی جادارتر است. اگر چند حالت ممکن دیگر را نیز بررسی کنیم، به این نتیجه خواهیم رسید که احتمالاً مکعب شکل بهینه برای جعبه‌ی مورد نظر است. و واقعاً هم همین‌طور است.

پس این به‌خودی‌خود مسئله‌ی خیلی سختی نیست. هدف از این مسئله این است که ببینید فرما برای این‌گونه مسایل چگونه استدلال می‌کرد، زیرا رویکرد او منجر به چیزهای خیلی بزرگ‌تری می‌شد.

مانند اکثر مسایل جبری دیگر، نخستین قدم آن است که تمام اطلاعات داده شده را به نماد تبدیل کنیم. از آنجا که عرض و عمق جعبه هر دو برابر با x است، مجموع آن‌ها $۲x$ می‌شود. و از آنجا که ارتفاع به‌اضافه‌ی عرض و به‌اضافه‌ی عمق نباید از ۴۵ بیشتر باشد لذا ارتفاع برابر با $۴۵ - ۲x$ خواهد بود. لذا حجم برابر با x ضربدر x ضربدر $(۴۵ - ۲x)$ خواهد بود. با ضرب کردن آن‌ها داریم $۴۵x^۲ - ۲x^۳$. این حجم جعبه‌ی ما است. آن را $V(x)$ می‌نامیم. به این ترتیب، داریم:

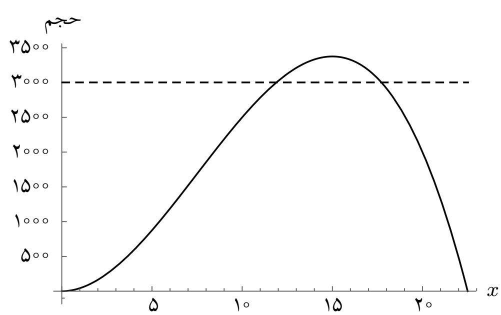
$$V(x) = ۴۵x^۲ - ۲x^۳.$$

اگر فعلاً یک لحظه تقلب کنیم و با استفاده از کامپیوتر یا یک ماشین‌حساب گرافیکی، نمودار x را در محور افقی و V را در محور عمودی رسم کنیم، می‌بینیم که منحنی بالا می‌رود و وقتی که x برابر با ۱۵ اینچ است، همان‌گونه که انتظار داشتیم، به بیشینه می‌رسد، و بعد به صفر نزول می‌کند.

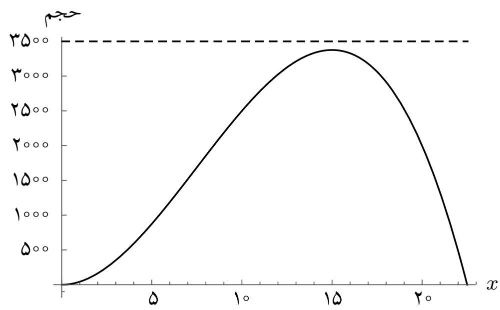


یا این‌که برای به دست آوردن بیشینه از طریق حساب دیفرانسیل به طریقی که امروزه عمل می‌کنیم،دانشجویان ما به‌طور رفلکسی مشتق V را می‌گیرند و آن را برابر با صفر قرار می‌دهند. علت آن است که در بالای منحنی، شیب صفر است. منحنی در آن‌جا نه صعودی است و نه نزولی. بنابراین، از آنجا که مشتق شیب را اندازه‌گیری می‌کند (به‌طوری که در فصل ۶ خواهیم دید)، مشتق باید در بیشینه صفر باشد. پس از مختصری کارهای جبری و استفاده از فرمول‌های حفظ شده‌ی مختلف برای مشتق، از این روش استدلال برای بیشینه مقدار $x = ۱۵$ به دست می‌آید.

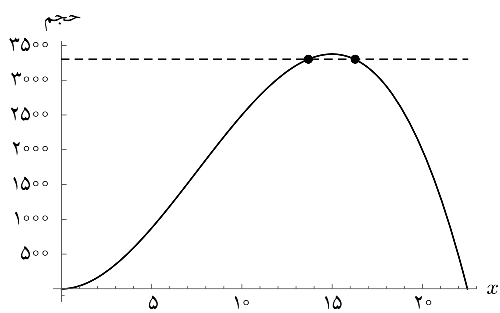
ولی زمان فرما از ماشین‌حساب گرافیکی یا کامپیوتر خبری نبود، و البته او از مفهوم مشتق نیز اطلاعی نداشت؛ بر عکس، او خودش ایده‌هایی را اختراع کرد که منجر به ابداع مشتق شد! پس او چگونه مسئله را حل می‌کرد؟ او از یک خاصیت ویژه‌ی بیشینه استفاده می‌کرد: این‌که خط‌های افقی در زیر بیشینه، منحنی را در دو نقطه قطع می‌کنند، که نمونه‌ی آن در زیر نشان داده شده است:



در حالی که خطوط افقی بالای بیشینه اصلاً منحنی را قطع نمی‌کنند.



بر این اساس، راهبردی شهودی برای حل مسئله به دست می‌آید. فرض کنید یک خط افقی را که زیر بیشینه است، به آهستگی بالا می‌برید. در حالی که خط به‌تدریج بالا می‌رود، دو نقطه‌ی تقاطع آن مانند مهره‌های روی یک گردن‌بند، در امتداد منحنی به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند.



در بیشینه،این دو نقطه به هم می‌رسند. فرما با جستجو کردن این نقطه‌ی برخورد، بیشینه را تعیین می‌کرد. او شرطی را برای ادغام شدن این دو نقطه در یک نقطه به دست آورد که به آن *تقاطع دوگانه* می‌گویند. با فهمیدن این نکته، بقیه‌ی کار فقط کار جبری و دستکاری نمادها است. روش کار به‌صورت زیر است.

فرض کنید دو نقطه‌ی تقاطع در $x = a$ و $x = b$ هستند. آنگاه، از آنجا که (بنا به فرض) روی خط افقی یکسانی قرار دارند، باید داشته باشیم $V(a) = V(b)$. ازاین‌رو،

$$۴۵a^{۲} - ۲a^{۳} = ۴۵b^{۲} - ۲b^{۳}.$$

برای این‌که کار را آسان‌تر کنیم، می‌توانیم معادله را بازنویسی کنیم. اگر مربع‌ها را در یک طرف و مکعب‌ها را در طرف دیگر قرار دهیم، داریم:

$$۴۵a^۲ - ۴۵b^۲ = ۲a^۳ - ۲b^۳.$$

با کمی مهارت در زمینه‌ی جبر دبیرستانی، می‌توانیم دو طرف را تجزیه کنیم و خواهیم داشت:

$$۴۵(a-b)(a+b) = ۲(a-b)(a^۲ + ab + b^۲).$$

سپس، دو طرف را بر عامل مشترک $a - b$ تقسیم می‌کنیم. این کار قانونی است، زیرا فرض بر این است که a و b مساوی نیستند. (اگر مساوی بودند، تقسیم کردن دو طرف بر $a - b$ به‌معنای تقسیم بر صفر بود، که به‌طوری که در فصل ۱ گفته شد، ممنوع است.) پس از حذف کردن، معادله‌ی حاصله عبارت است از:

$$۴۵(a+b) = ۲(a^۲ + ab + b^۲).$$

آماده باشید که داریم به محل گیج‌کننده‌ی استدلال می‌رسیم. فرما در این‌جا فرض کرده بود که a و b برابر نیستند. ولی در ادامه تصور می‌کند که معادله‌ای که به دست آمده است، وقتی هم که a و b در بیشینه با هم ادغام می‌شوند و برابر با هم هستند، برقرار خواهد بود. او سعی می‌کند این موضوع را با استفاده از مفهوم مشکوک *برابری تقریبی* توجیه کند. این مفهوم بیان می‌کند که a و b در بیشینه تقریباً با هم برابرند ولی واقعاً برابر نیستند (امروزه این را با استفاده از مفهوم حد یا تقاطع دوگانه بیان می‌کنیم). به هر حال، او قرار می‌دهد $a \approx b$، که در این‌جا علامت مساوی مواج به‌معنای تقریباً مساوی است، و بعد دلیرانه در معادله‌ی فوق، a را به‌جای b می‌نشاند و به دست می‌آورد:

$$۴۵(۲a) = ۲(a^۲ + a^۲ + a^۲).$$

این ساده می‌شود به $۹۰a = ۶a^۲$، که جواب‌های آن $a = ۰$ و $a = ۱۵$ هستند. جواب اول، $a = ۰$، جعبه‌ای با حجم کمینه به ما می‌دهد؛ عرض و عمق آن صفر است، و لذا حجم آن هم صفر خواهد بود. این فایده‌ای ندارد. جواب دوم، $a = ۱۵$، جعبه‌ای با حجم بیشینه به ما می‌دهد. این همان جوابی است که انتظار آن را داشتیم: عرض و عمق بهینه، ۱۵ اینچ است.

از دیدگاه امروزی، استدلال فرما عجیب به نظر می‌رسد. او بدون استفاده از مشتق،

بیشینه را به دست آمده است. امروزه، ما مشتق را قبل از بهینه‌سازی آموزش می‌دهیم؛ فرما بر عکس عمل کرده است. ولی فرق نمی‌کند. ایده‌های او معادل با افکار خود ما است.

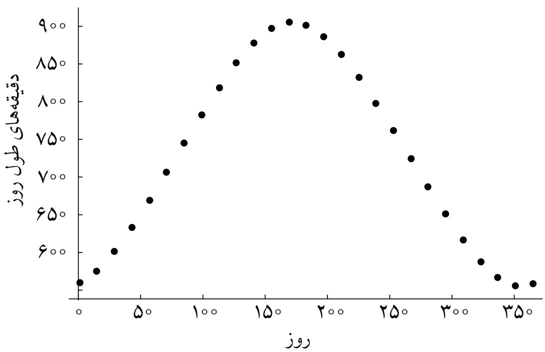
چگونه فرما به اف‌بی‌آی کمک کرد

نتایج کارهای اولیه‌ی فرما در زمینه‌ی بهینه‌سازی در همه جا یافت می‌شود. زندگی ما امروزه وابسته به الگوریتم‌هایی است که مسایل بهینه‌سازی را با استفاده از مفهوم تقاطع دوگانه و شروط معادل آن بر پایه‌ی مشتق حل می‌کنند. البته مسایل امروز پیچیده‌تر از زمان فرما است، ولی اصول آن‌ها یکی است.

یک کاربرد مهم آن در زمینه‌ی دادگان‌های بزرگ است، که در آن غالباً بهتر است که داده‌ها هر چه فشرده‌تر کدگذاری شوند. مثلاً اف‌بی‌آی میلیون‌ها رکورد اثر انگشت دارد. این سازمان برای ذخیره‌سازی، جستجو، و بازیابی کارآمد این داده‌ها به منظور بررسی سوابق افراد، از روش‌های فشرده‌سازی داده‌ها بر مبنای حسابان استفاده می‌کند. الگوریتم‌هایی هوشمندانه اندازه‌ی فایل‌های دیجیتالی اثر انگشت را کاهش می‌دهد، بدون آنکه جزئیات مهم آن را قربانی کند. همین مطلب برای ذخیره‌سازی موسیقی و تصاویر بر روی گوشی شما نیز صادق است. الگوریتم‌های فشرده‌سازی به نام MP3 و JPEG، به‌جای این‌که تمام نُت‌ها و پیکسل‌ها را نگه‌دارند، با تقطیر کردن اطلاعات به شکل بسیار کارآمدتر، در فضا صرفه‌جویی می‌کنند. به‌علاوه، به ما امکان می‌دهند که آهنگ‌ها و عکس‌ها را سریع دانلود کنیم، و وقتی که آن‌ها را برای عزیزانمان می‌فرستیم، فضای صندوق ورودی آن‌ها کمتر گرفته می‌شود.

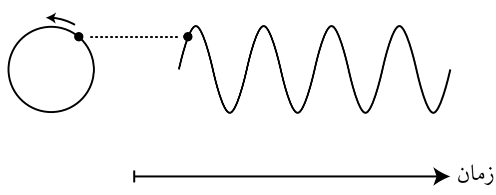
برای این‌که ببینید حسابان و بهینه‌سازی چه ارتباطی با فشرده‌سازی داده‌ها دارند، به یک مسئله‌ی آماری مرتبط با آن، یعنی برازش یک منحنی با داده‌ها، نگاه می‌کنیم، که در رشته‌های مختلف، از علم آب‌وهوا گرفته تا پیش‌بینی بازرگانی، مورد استفاده قرار گیرد. دادگانی که بررسی خواهیم کرد، تغییر طول روز را در فصول مختلف نشان می‌دهد. همه می‌دانیم که روزها در تابستان بلندتر است و در زمستان کوتاه‌تر، ولی الگوی کلی آن به چه صورت است؟ نمودار زیر داده‌های مربوط به شهر نیویورک را برای سال ۲۰۱۸ نشان می‌دهد، که در آن زمان در محور افقی از ۱ ژانویه در طرف چپ تا ۳۱ دسامبر در طرف راست امتداد دارد. محور عمودی تعداد دقیقه‌های بین طلوع و غروب خورشید را در زمان‌های مختلف سال نشان می‌دهد. برای این‌که تصویر شلوغ نشود، فقط داده‌های بیست و هفت روز نشان داده شده است، و نمونه‌گیری در هر دو

هفته از روز ۱ ژانویه انجام شده است.



نمودار طبق انتظار نشان می‌دهد که طول روز در طی سال افزایش و سپس کاهش می‌یابد. طول روز در حوالی انقلاب تابستانی (۲۱ ژوئن [۳۱ خرداد]، مطابق با اوج نشان داده شده در روز ۱۷۲ در وسط نمودار) به حداکثر می‌رسد، و در انقلاب زمستانی، نیم سال بعد از آن، به حداقل می‌رسد. روی‌هم‌رفته، به نظر می‌رسد که داده‌ها روی یک منحنی موجی هموار قرار گرفته است.

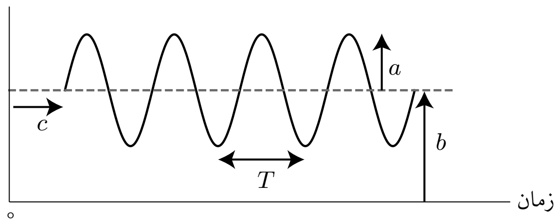
در کلاس‌های مثلثات دبیرستان، دبیران درباره‌ی نوع خاصی از موج، به نام موج سینوسی، صحبت می‌کنند. بعداً در این کتاب، درباره‌ی امواج سینوسی و اهمیت آن‌ها از دیدگاه حسابان بیشتر صحبت خواهم کرد. فعلاً، نکته‌ی اصلی که باید بدانیم، این است که امواج سینوسی با حرکت دورانی در ارتباط هستند. برای این‌که ارتباط آن‌ها را دریابید، فرض کنید که یک نقطه به دور یک دایره با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر موقعیت بالا و پایین آن را به‌عنوان تابعی از زمان در نظر بگیریم، نقطه یک موج سینوسی را طی می‌کند.



چون دایره ارتباط تنگاتنگی به چرخه دارد، لذا هر گاه پدیده‌های چرخه‌ای رخ می‌دهند، از چرخه‌ی فصول گرفته تا ارتعاشات یک دیاپازون و وزوز شصت‌هرتزی

لامپ‌های مهتابی و خطوط فشار قوی، به امواج سینوسی برمی‌خوریم. آن وزوز آزار دهنده صدای امواج سینوسی است که شصت بار در ثانیه بالا و پایین می‌روند. این نشانه‌ی بارز جریان متناوب است که به‌وسیله‌ی مولدهای نیروگاه برق تولید می‌شود که دستگاه آن با همان بسامد چرخش می‌کند. هر جا حرکت دورانی داریم، امواج سینوسی هم وجود دارند.

هر موج سینوسی به‌طور کامل با چهار مشخصه تعریف می‌شود: دوره‌ی تناوب، متوسط، دامنه، و فاز آن.



این چهار پارامتر تفسیرهای ساده‌ای دارند. دوره‌ی تناوب T نشان می‌دهد که یک چرخه‌ی کامل موج چقدر طول می‌کشد. برای داده‌های طول روز که در این‌جا در نظر گرفته‌ایم، T برابر با حدود یک سال، یا به بیان دقیق‌تر، ۳۶۵/۲۵ روز است. (به‌خاطر همین ربع روز اضافه است که باید هر چهار سال، یک سال را کبیسه بگیریم، تا هماهنگی تقویم با چرخه‌های طبیعی حفظ شود.) متوسط موج سینوسی، مقدار پایه‌ی آن است، یعنی b. برای داده‌های ما، این مقدار عبارت است از تعداد معمول دقیقه‌های طول روز در شهر نیویورک که در تمام روزهای سال ۲۰۱۸ متوسط‌گیری شده است. دامنه‌ی موج a به ما می‌گوید که طول روشنایی روز در بلندترین روز سال در مقایسه با روز متوسط چند دقیقه بیشتر است. فاز موج c نشان‌دهنده‌ی روزی است که موج در آن از مقدار متوسط به طرف بالا عبور می‌کند، که در حوالی اعتدال بهاری است.

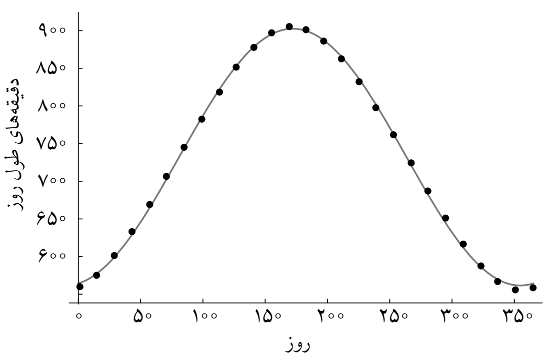
می‌توانیم این چهار پارامتر—a، b، c، T—را مانند چهار پیچ تنظیم در نظر بگیریم که می‌توانیم آن‌ها را بچرخانیم تا ویژگی‌های مختلف شکل و محل موج سینوسی را تنظیم کنیم. پیچ تنظیم b موج سینوسی را بالا یا پایین می‌برد. پیچ تنظیم c آن را به طرف چپ یا راست جابه‌جا می‌کند. پیچ تنظیم T سرعت نوسان آن را مشخص می‌کند. و پیچ تنظیم a میزان برجسته بودن نوسانات را تعیین می‌نماید.

اگر به طریقی می‌توانستیم پیچ‌های تنظیم را بچرخانیم، به‌طوری که موج سینوسی از همه‌ی نقاط داده‌ای که نمودار آن را قبلاً ترسیم کردیم، عبور کند، امکان فشرده‌سازی

قابل‌توجه اطلاعات را فراهم می‌کرد. معنایش این می‌بود که می‌توانستیم بیست و هفت نقطه‌ی داده‌ای را فقط با پارامترهای موج سینوسی بیان کنیم، و با این کار، داده‌ها را با ضریب $\frac{۲۷}{۴}$ یعنی ۶٫۷۵ فشرده کنیم. در واقع، چون می‌دانیم که یکی از پارامتر یک سال است، لذا فقط سه تا از پارامترها را می‌توانیم تغییر دهیم، و لذا ضریب فشرده‌سازی $\frac{۲۷}{۳}$ یعنی ۹ می‌شود. این میزان کاهش اندازه قابل درک است، زیرا داده‌ها تصادفی نیستند. بلکه تابع یک الگو هستند. موج سینوسی معرف آن الگو است و کار را برای ما انجام می‌دهد.

تنها مشکل آن است که هیچ‌گونه موج سینوسی وجود ندارد که دقیقاً از روی داده‌ها عبور کند. وقتی که یک مدل ایده‌آل را با دنیای واقعی برازش می‌کنیم، باید انتظار چنین وضعیتی را داشته باشیم؛ حتماً اختلافاتی خواهد بود. امید آن است که اختلافات قابل چشم‌پوشی باشد. برای این‌که اختلافات را به حداقل برسانیم، باید یک موج سینوسی پیدا کنیم که نقاط داده‌ها را هر چه تنگ‌تر در بر بگیرد. این‌جا است که حسابان وارد ماجرا می‌شود.

شکل زیر برازنده‌ترین موج سینوسی را، بر اساس الگوریتم بهینه‌سازی که بعداً توضیح می‌دهم، نشان می‌دهد.



ولی ابتدا دقت کنید که برازش حاصله، کامل نیست. برای نمونه، موج در دسامبر به‌قدر کافی نزول نمی‌کند. در این زمان، روزها بسیار کوتاه است و داده‌ها از منحنی پایین‌تر می‌افتد. با این وجود، یک موج سینوسی ساده مطمئناً عصاره‌ی ماجرا را نشان می‌دهد. بسته به اهدافی که داریم، برازشی با این کیفیت ممکن است برایمان کافی باشد.

حالا حسابان در این وسط چکاره است؟ حسابان به ما کمک می‌کند که چهار پارامتر را به‌صورت بهینه انتخاب کنیم. تصور کنید که چهار پیچ تنظیم را می‌چرخانید تا به بهترین برازش ممکن دست پیدا کنید، مانند زمانی که پیچ رادیو را می‌چرخانید

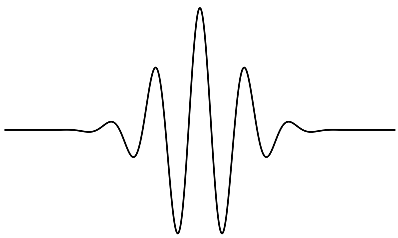
تا بهترین سیگنال ممکن را دریافت کنید. این اساساً همان کاری است که فرما در مسئله‌ی محفظه‌ی بالاسری برای پیدا کردن جادارترین ابعاد جعبه انجام داد. در آن مورد، او فقط یک پارامتر x را که طول ضلع جعبه بود، تغییر می‌داد، و به دنبال تقاطع دوگانه می‌گشت که نشان‌دهنده‌ی بیشینه بودن حجم جعبه بود. در این‌جا، ما چهار پارامتر را باید تنظیم کنیم. ولی ایده‌ی اساسی همان است. به دنبال تقاطع دوگانه می‌گردیم تا مقدار بهینه‌ی چهار پارامتر را به دست آوریم.

طرز کار آن، با تفصیل اندکی بیشتر، از این قرار است. برای هر انتخاب از مقادیر چهار پارامتر، میزان اختلاف (یا به عبارت دیگر، خطا) بین برازش موج سینوسی و داده‌های واقعی را در هر کدام از بیست و هفت نقطه‌ی داده‌ها که در طول سال ثبت شده است، محاسبه می‌کنیم. یک معیار طبیعی برای انتخاب بهترین برازش، آن است که خطای کل، که بر روی همه‌ی بیست و هفت نقطه‌ی داده‌ها جمع بسته می‌شود، تا حد امکان کوچک باشد. ولی خطای کل مفهوم مناسب و دقیقی نیست، زیرا نباید به‌گونه‌ای باشد که خطاهای منفی، خطاهای مثبت را خنثی کند، به‌طوری که خطای برازش کمتر از آن‌چه هست، وانمود شود. به این خاطر، ریاضی‌دانان مربع خطا را در هر نقطه حساب می‌کنند، تا مقادیر منفی، مثبت شوند. به این طریق، امکان خنثی شدن کاذب آنها وجود ندارد. (این یکی از جاهایی است که این واقعیت که حاصل منفی در منفی، مثبت است، مفید واقع می‌شود. این سبب می‌شود که مربع خطای منفی به‌عنوان یک اختلاف مثبت منظور شود، که درست هم هست.) بنابراین، ایده‌ی اساسی آن است که چهار پارامتر موج سینوسی را چنان انتخاب کنیم که مربع خطای کل برازش با داده‌ها کمینه شود. بر این اساس، به این روش، روش کمترین مربعات می‌گویند. این روش زمانی بهتر عمل می‌کند که داده‌ها، مانند این‌جا، تابع یک الگو باشد.

تمام این حرف‌ها، یک نکته‌ی کلی بسیار مهم را مطرح می‌کند: همین الگوها هستند که امکان فشرده‌سازی را فراهم می‌کنند. تنها داده‌های دارای الگو را می‌توان فشرده کرد. داده‌های تصادفی را نمی‌توان. خوش‌بختانه، خیلی از چیزهایی که برای افراد مهم هستند، مانند آهنگ‌ها، چهره‌ها، و اثرانگشت‌ها، بسیار ساختار یافته و دارای الگو هستند. درست همان‌گونه که طول روز تابع یک الگوی موجی ساده است، عکس چهره هم حاوی ابروها، خال‌ها، گونه‌ها، و الگوهای مشخص دیگر است. آهنگ‌ها دارای ملودی و هارمونی، ریتم، و پویایی هستند. آثار انگشت حاوی برجستگی‌ها، حلقه‌ها، و پیچ‌خوردگی‌ها هستند. ما انسان‌ها این الگوها را فوراً تشخیص می‌دهیم. کامپیوترها را هم می‌توان آموزش داد که آن‌ها را تشخیص دهند. راهش این است که روش ریاضی مناسبی برای کدگذاری الگوهای خاص پیدا کنیم. امواج سینوسی برای

نمایش دادن الگوهای دوره‌ای ایده‌آل است، ولی برای نمایش دادن ویژگی‌های کاملاً محلی، مانند حاشیه‌ی بینی یا خال زیبایی خیلی مناسب نیست.

برای این منظور، پژوهشگران در چندین رشته‌ی مختلف تعمیمی از امواج سینوسی را به نام موجک ابداع کرده‌اند. این موج‌های کوچک، محلی‌تر از امواج سینوسی هستند. به جای این‌که به‌صورت متناوب از هر دو سو تا بی‌نهایت امتداد داشته باشند، تمرکز شدیدی از نظر زمانی یا مکانی دارند.



موجک‌ها ناگهان روشن می‌شوند، مدتی نوسان می‌کنند، و بعد خاموش می‌شوند. تقریباً شبیه سیگنال‌های روی مانیتور قلبی یا فعالیت‌های ناگهانی ثبت شده روی لرزه‌نگار در حین یک زمین‌لرزه هستند. این‌ها برای نمایش یک قله‌ی ناگهانی در ثبت امواج مغزی، یک ضربه‌ی قلم‌مو در یک تابلوی ون‌گوگ، و یا یک چین روی چهره مناسب هستند.

اف‌بی‌آی از موجک‌ها برای مدرنیزه کردن فایل‌های اثر انگشت خود استفاده کرد. از زمانی که استفاده از اثر انگشت، از اوایل قرن بیستم، متداول شد، آثار انگشت به‌صورت اثر جوهر بر روی کارت‌های کاغذی ذخیره می‌شد. جستجوی سریع در فایل‌ها دشوار بود. در اواسط دهه‌ی ۱۹۹۰، این مجموعه تقریباً به دویست میلیون کارت اثر انگشت رسیده بود، و تقریباً یک جریب فضای اداری را اشغال می‌کرد. وقتی که مسئولان اف‌بی‌آی تصمیم به دیجیتالیزه کردن این پرونده‌ها گرفتند، آن‌ها را به‌صورت تصاویر سیاه‌وسفید با ۲۵۶ سطح رنگ خاکستری با تفکیک‌پذیری ۵۰۰ نقطه در اینچ اسکن کردند، که این برای نشان دادن تمام پیچ‌خوردگی‌های ظریف، حلقه‌ها، برآمدگی‌ها، انشعاب‌ها، و دیگر ظرایف شاخص آثار انگشت کفایت می‌کرد.

اما مشکل در آن زمان این بود که هر کارت دیجیتالی شده حاوی حدود ۱۰ مگابایت اطلاعات بود. بر این اساس، برای اف‌بی‌آی بسیار دشوار بود که فایل‌های دیجیتال را به‌سرعت برای پلیس محلی ارسال کند. دقت کنید که این در اواسط دهه‌ی ۱۹۹۰ بود که مودم‌های تلفنی و دستگاه‌های فاکس، جدیدترین فناوری محسوب می‌شد و ارسال

یک فایل ۱۰ مگابایتی چندین ساعت طول می‌کشید. تازه دیسک‌های معمول آن زمان، فلاپی‌دیسک‌های ۱٫۵ مگابایتی بود که مبادله‌ی فایل‌های بزرگ با آن‌ها کار سختی بود. هر روز سی هزار کارت جدید اثر انگشت به سیستم اضافه می‌شد و لازم بود که هر چه سریع‌تر مورد پردازش قرار گیرد، و تقاضاهای فوری نیز برای بررسی سوابق افراد وجود داشت، ازاین‌رو، نیاز شدیدی برای مدرنیزه کردن این سیستم احساس می‌شد. اف‌بی‌آی می‌بایست راهی پیدا کند که فایل‌ها را بدون خراب کردن آن‌ها، فشرده کند.

موجک‌ها برای این کار ایده‌آل بود. ریاضی‌دانان آزمایشگاه ملی لُس‌آلاموس به همکاری با اف‌بی‌آی پرداختند و با نمایش دادن اثر انگشت با تعداد زیادی موجک و تنظیم کردن بهینه‌ی آن‌ها با استفاده از حسابان، توانستند اندازه‌ی فایل‌ها را با ضریب بیش از بیست برابر کوچک‌تر کنند. این انقلابی در علوم قانونی بود. به لطف ایده‌های فرما در شکل امروزی آن (به همراه نقش بزرگ‌تری از تحلیل موجک، علوم کامپیوتر، و پردازش سیگنال)، یک فایل ۱۰ مگابایتی را توانستند فقط در ۵۰۰ کیلوبایت ذخیره کنند، که فرستادن آن بر روی خط تلفن بسیار راحت‌تر بود. و لطمه‌ای نیز به کیفیت داده‌ها وارد نمی‌شد. کارشناسان اثر انگشت انسانی این روش را تأیید کردند. کامپیوترها هم همین‌طور؛ فایل‌های فشرده در سیستم شناسایی خودکار اف‌بی‌آی از آزمون سربلند بیرون آمد. این خبر خوبی برای حسابان و خبر بدی برای مجرمان بود.

اصل کمترین زمان

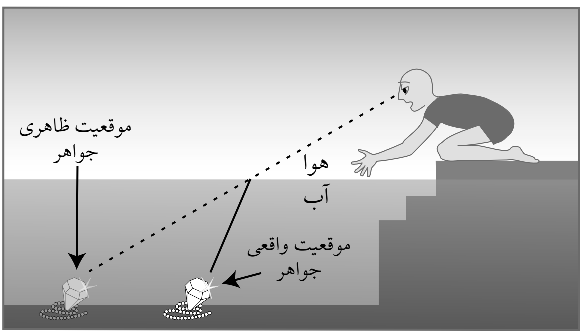
نمی‌دانم فرما اگر می‌دانست، درباره‌ی این کاربرد ایده‌هایش چه فکر می‌کرد. او خودش علاقه‌ی خاصی به کاربرد ریاضیات در دنیای واقعی نداشت. او ریاضی را برای خود آن دوست داشت و به همین قانع بود. ولی خدمت بزرگی هم به ریاضیات کاربردی کرد که اهمیت آن هم‌چنان باقی است: او نخستین کسی بود که یکی از قوانین طبیعت را با به‌کارگیری حسابان به‌عنوان موتور منطقی از یک قانون عمیق‌تر استنتاج کرد. درست مانند ماکسول که دو قرن بعد این کار را برای الکتریسیته و مغناطیس انجام داد، فرما یک قانون فرضی طبیعت را به زبان حسابان ترجمه کرد، موتور آن را به کار انداخت، قانون را وارد آن کرد، تا قانون دیگری که نتیجه‌ی قانون اول بود، از آن خارج شود. فرما، به‌عنوان یک دانشمند اتفاقی، با این کار شیوه‌ی استدلالی را بنیان نهاد که از آن زمان تا کنون بر علوم نظری حاکم بوده است.

داستان در سال ۱۶۳۷ آغاز شد که گروهی از ریاضی‌دانان پاریس، نظر فرما را درباره‌ی رساله‌ی اخیر دکارت در باب اپتیک جویا شدند. دکارت نظریه‌ای ارائه کرده

بود درباره‌ی این‌که نور هنگام عبور از هوا به درون آب یا از هوا بهینه شیشه، منحرف می‌شود، اثری که شکست نور نامیده می‌شود.

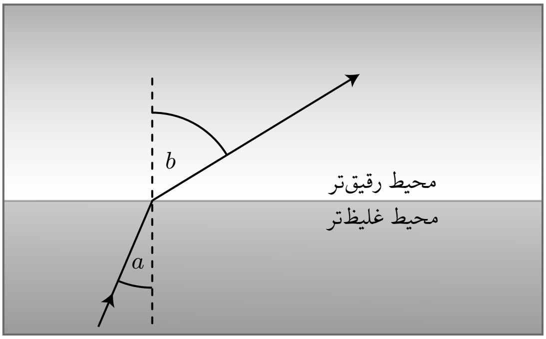
هر کس که تا کنون با عدسی بازی کرده باشد، می‌داند که نور را می‌توان منحرف و متمرکز کرد. من وقتی بچه بود، توی کوچه با عدسی برگ‌ها را آتش می‌زدم. عدسی را بالا و پایین می‌بردم، تا آن‌که نور خورشید در یک نقطه با شدت زیاد متمرکز شود، به‌طوری که برگ داغ می‌شد و نهایتاً آتش می‌گرفت. از شکست نور به‌طور عادی در عینک هم استفاده می‌شود. عدسی‌های عینک، پرتوهای نور را منحرف و متمرکز می‌کنند تا بر روی شبکیه در محل صحیح قرار گیرند و عیب بینایی اصلاح شود.

یک خطای بصری نیز که وقتی در یک روز آفتابی از کنار یک استخر عبور می‌کنید، روی می‌دهد، با استفاده از شکست نور قابل توضیح است. فرض کنید شیء درخشانی مانند یک جواهر از بخت بد، در ته استخری افتاده است.



وقتی که به درون آب به شیء براق نگاه می‌کنید، دقیقاً در جایی که هست، دیده نمی‌شود، زیرا پرتوهای نور که از آن باز تابیده می‌شوند، هنگام عبور از آب به داخل هوا در مسیر برگشت از استخر، منحرف می‌شوند. به همین دلیل، کسی که با نیزه ماهی‌گیری می‌کند، باید زیر موقعیت ظاهری ماهی را هدف بگیرد، تا نیزه‌ی او به هدف اصابت کند.

این‌گونه پدیده‌های شکست نور از قاعده‌ی ساده‌ای پیروی می‌کنند. وقتی که یک پرتو نور از یک محیط رقیق‌تر مانند هوا وارد یک محیط غلیظ‌تر مانند آب یا شیشه می‌شود، پرتو به *طرف* خط عمود بر حد واسط بین دو محیط منحرف می‌شود. وقتی که از یک محیط غلیظ‌تر وارد یک محیط رقیق‌تر می‌شود، به *طرف دور* از خط عمود منحرف می‌شود، که این در این‌جا نشان داده شده است.



در سال ۱۶۲۱، دانشمندان هلندی ویلبرورد اسنل این قاعده را دقیق‌تر کرد و با انجام یک آزمایش هوشمندانه، آن را به‌صورت کمّی بیان کرد. او به‌طور نظام‌مند زاویه‌ی پرتو ورودی a را تغییر داد و تغییر زاویه‌ی پرتو خروجی b را در پاسخ به آن بررسی کرد، و کشف کرد که نسبت $\sin a/\sin b$ برای یک جفت محیط یکسان، همیشه یکسان باقی می‌ماند. (در این‌جا $\sin$ نشان‌دهنده‌ی تابع مثلثاتی سینوس است، همان تابع سینوس که در تحلیل طول روز از نمودار موجی‌شکل آن استفاده کردیم.)

با این حال، اسنل مشاهده کرد که مقدار $\sin a/\sin b$ بستگی به جنس دو محیط دارد. هوا و آب یک نسبت ثابت ایجاد می‌کنند، در حالی که هوا و شیشه نسبت دیگری دارند. او به‌هیچ‌وجه نمی‌دانست که چرا قانون سینوس کار می‌کند، فقط می‌دانست که کار می‌کند. این حقیقتی غریزی درباره‌ی نور بود.

دکارت قانون سینوس‌های اسنل را دوباره کشف کرد و آن را در رساله‌اش با عنوان *فیزیک نور* در سال ۱۶۳۷ منتشر کرد، بی‌آنکه بداند که این قانون را دست‌کم سه نفر دیگر پیش از او پیدا کرده بودند: اسنل در سال ۱۶۲۱، ستاره‌شناس انگلیسی توماس هاریوت در سال ۱۶۰۲، و ریاضی‌دان ایرانی ابوسعد العلاء ابن سهل مدت‌ها پیش از آن در سال ۹۸۴.

دکارت برای قانون سینوس‌ها توضیحی مکانیکی ارائه کرد که در آن (به‌اشتباه) فرض کرد که نور در محیط غلیظ‌تر *سریع‌تر* حرکت می‌کند. برای فرما، این وارونه و خلاف عقل سلیم به نظر می‌رسید. فرما که می‌خواست مفید باشد، و آدم ساده و معصومی بود، مطالبی را که از دیدگاه خودش چند انتقاد ملایم از نظریه‌ی دکارت بود، برای ریاضی‌دان پاریسی که نظر او را پرسیده بود، فرستاد.

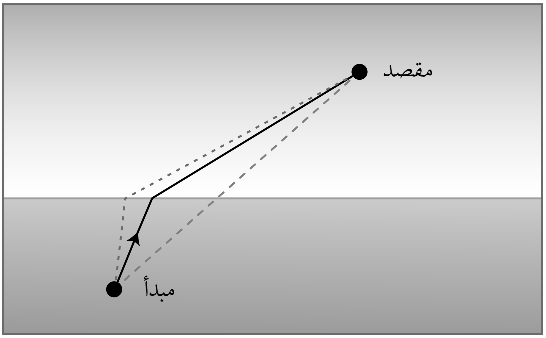
آن‌چه فرما نمی‌دانست، این بود که آن ریاضی‌دان‌ها، دشمنان سرسخت دکارت بودند. آن‌ها قصد بهره گرفتن از فرما را برای مقاصد شوم خودشان داشتند. و البته هر بچه‌ای هم می‌تواند پیش‌بینی کند که وقتی خبر نظرات فرما به دکارت رسید، احساس

کرد که مورد حمله قرار گرفته است. او هرگز نام این وکیل اهل تولوز را نشنیده بود. برای او، فرما تنها یک آماتور ناشناس از یک منطقه‌ی روستایی بود، مثل پشه‌ی مزاحمی که دور سرش وزوز می‌کرد و ارزش فکر کردن نداشت. در طول چند سال بعد، دکارت با تحقیر با فرما رفتار می‌کرد و ادعا می‌کرد که او به‌صورت اتفاقی به یافته‌های خود رسیده است.

می‌رویم به بیست سال بعد. در سال ۱۶۵۷، پس از مرگ دکارت، یکی از همکاران فرما به نام مارن کورو دو لا شامبر، از او خواست که بحث مربوط به شکست نور را دوباره بررسی کند. این درخواست کورو سبب شد که فرما، با در نظر گرفتن چیزهایی که درباره‌ی بهینه‌سازی می‌دانست، دوباره مسئله را بررسی کند.

فرما حدس می‌زد که نور بهینه‌سازی می‌کند. به بیان دقیق‌تر، حدس او این بود که نور همیشه مسیر دارای کمترین مقاومت را بین دو نقطه طی می‌کند، که بر اساس برداشت او، بدان معنا بود که نور سریع‌ترین مسیر ممکن را طی می‌کند. او می‌توانست ببیند که *اصل کمترین زمان* می‌تواند این را توضیح دهد که چرا نور در یک محیط یکنواخت روی خط راست حرکت می‌کند، و چرا، وقتی که از روی یک آینه بازتابیده می‌شود، زاویه‌ی فرود آن برابر با زاویه‌ی بازتابش آن است. ولی آیا اصل کمترین زمان این را نیز می‌توانست توضیح دهد که چرا نور هنگام عبور از یک محیط به محیط دیگر، منحرف می‌شود؟ آیا می‌توانست قانون سینوسی شکست نور را توضیح دهد؟

فرما در این مورد مطمئن نبود. محاسبات آن آسان نبود. بی‌نهایت مسیر مستقیم‌الخط برای رسیدن نور از نقطه‌ی مبدأ در یک محیط به نقطه‌ی مقصد در محیط دیگر، هر کدام با زاویه‌ی انحراف متفاوتی در حد فاصل دو محیط، وجود داشت.



محاسبه‌ی کمینه‌ی زمان عبور از تمام این مسیرها کار دشواری بود، خصوصاً در آن زمان که حساب دیفرانسیل هنوز در مراحل اولیه‌ی خود بود. ابزاری در دسترس او

نبود، مگر همان روش قدیمی تقاطع دوگانه. به‌علاوه، می‌ترسید که به جواب متفاوتی برسد. خودش در پاسخ به کورو نوشته است: «ترس این‌که پس از محاسبات طولانی و دشوار، یک نسبت نامنظم و خیالی را به‌عنوان جواب به دست آورم، و تمایل ذاتی من به تنبلی، مسئله را در این حالت نگه‌داشته است.»

پنج سال گذشت و فرما مشغول کار بر روی مسایل دیگر بود. ولی نهایتاً، کنجکاوی‌اش بر او چیره شد. در سال ۱۶۶۲، خودش را مجبور کرد که این محاسبات را انجام دهد. کار پرزحمت و ناخوشایندی بود. ولی در حالی که با انبوه نمادها کار می‌کرد، کم‌کم چیزی در مقابلش پدیدار شد. جمله‌ها با یکدیگر خط می‌خورد. جبر داشت کار خودش را می‌کرد. و سرانجام، به نتیجه رسید: قانون سینوس‌ها. فرما، در نامه‌ای به کورو، این محاسبات را «خارق‌العاده‌ترین، غیرمنتظره‌ترین، و شادمانه‌ترین» محاسباتی دانست که تا آن زمان انجام داده است. «به‌قدری از چنین رویداد غیرمنتظره‌ای حیرت‌زده شدم که هنوز نتوانسته‌ام از حیرت دربیایم.»

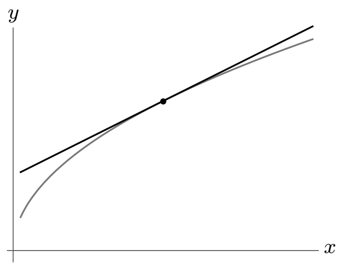
فرما حساب دیفرانسیل خودش را که در مرحله‌ی جنینی بود، برای فیزیک به کار گرفته بود. هیچ‌کس قبلاً این کار را نکرده بود. و با این کار، نشان داد که نور در مسیری که کاراتر است، حرکت می‌کند—نه در مسیر مستقیم، بلکه در سریع‌ترین مسیر. از میان همه‌ی مسیرهایی که نور می‌توانست از آن‌ها عبور کند، به طریقی می‌داند، یا به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که گویی می‌داند، که چگونه در سریع‌ترین زمان از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر برسد. این یک سرنخ اولیه و مهم بود درباره‌ی این‌که حسابان به طریقی در درون سیستم عامل گیتی جای گرفته است.

اصل کمترین زمان بعداً به‌صورت اصل کمترین عمل تعمیم داده شد، که در این‌جا عمل معنایی فنی دارد که نیازی نیست به آن بپردازیم. مشاهده شد که این اصل بهینه‌سازی—این‌که طبیعت، به یک معنای دقیق خاص، به اقتصادی‌ترین شکل ممکن رفتار می‌کند—قوانین مکانیک را به‌درستی پیش‌بینی می‌کند. در قرن بیستم، اصل کمترین عمل به نسبیت عام و مکانیک کوانتومی و بخش‌های دیگر فیزیک مدرن نیز توسعه داده شد. حتی در قرن هفدهم، بر فلسفه نیز تأثیر گذاشت، به‌طوری که گوتفرید ویلهلم لایبنیتس معتقد بود که همه چیز در بهترین جهان‌های ممکن، به بهترین وجه ممکن است، دیدگاه خوش‌بینانه‌ای که ولتر آن را در *کاندید* به هجو گرفته است. ایده‌ی استفاده از اصل بهینگی برای توضیح دادن پدیده‌های فیزیکی و استنباط پیامدهای آن با حسابان، با همین محاسبه‌ی فرما آغاز شد.

کشمکش بر سر مماس

تکنیک‌های بهینه‌سازی فرما به امکان می‌داد که خطوط مماس بر منحنی را نیز پیدا کند. این مسئله‌ای بود که واقعاً خون دکارت را به جوش می‌آورد.

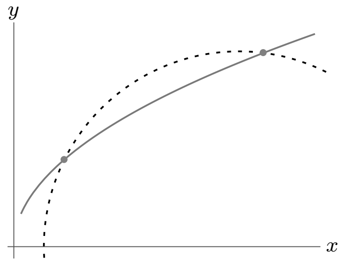
کلمه‌ی *مماس* (*tangent*) از ریشه‌ی لاتینی به‌معنای «تماس دارنده» گرفته شده است. این اصطلاح مناسبی است، زیرا خط مماس به‌جای این‌که منحنی را در دو نقطه قطع کند، فقط در یک نقطه با آن تماس برقرار می‌کند و از کنار آن عبور می‌کند.



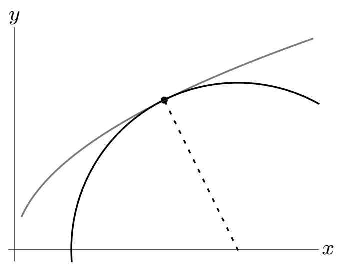
شرط مماس بودن، مانند شرط مربوط به کمینه یا بیشینه است. اگر خطی را در نظر بگیریم که منحنی را قطع می‌کند و سپس به‌طور پیوسته آن را به بالا یا پایین بلغزانیم، وقتی که دو نقطه‌ی تماس با یکدیگر ادغام می‌شوند، خط مماس می‌شود.

در حوالی دهه‌ی ۱۶۲۰، فرما قادر بود اساساً برای هر نوع منحنی جبری (یعنی منحنی‌ای که به‌صورت توان‌های صحیح x و y، بدون لگاریتم، توابع سینوس، و یا دیگر توابع به‌اصطلاح متعالی، قابل‌بیان باشد)، خط مماس را بیابد. او با استفاده از ایده‌ی بزرگ تقاطع دوگانه‌ی خود، می‌توانست همه چیزهایی را که امروزه با مشتق محاسبه می‌کنیم، با روش‌های خود محاسبه کند.

دکارت نیز روش دیگری برای یافتن خط‌های مماس داشت. او در سال ۱۶۳۷ در کتاب خود با عنوان *هندسه*، با افتخار روش خود را به دنیا اعلام کرد. دکارت که خبر نداشت که فرما قبلاً مسئله را حل کرده است، به‌طور مستقل به ایده‌ی تقاطع دوگانه رسید، ولی برای قطع کردن منحنی مورد نظر، به‌جای خط از دایره استفاده کرد. در نزدیک نقطه‌ی تماس، یک دایره معمولاً منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند، یا هم این‌که در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.



دکارت با تنظیم محل و شعاع دایره، می‌توانست کاری کند که دو نقطه‌ی تقاطع با هم ادغام شوند. این‌جا بود که دایره، در این نقطه‌ی تقاطع دوگانه، منحنی را به‌صورت مماس قطع می‌کرد.



این به دکارت امکان می‌داد که مماس منحنی را پیدا کند. در ضمن، خط قائم بر منحنی نیز که بر خط مماس عمود است، در امتداد شعاع دایره به دست می‌آمد.

روش او درست ولی پرزحمت بود. فرمول‌های جبری زیادی لازم داشت، که خیلی بیشتر از روش فرما بود. ولی دکارت هنوز حتی اسم فرما را هم نشنیده بود، ازاین‌رو، با اخلاق متکبرانه‌اش، فکر می‌کرد از همه بهتر عمل کرده است. او در *هندسه* بانگ می‌زند: «من روشی عمومی برای رسم خط راست عمود بر منحنی در هر نقطه‌ی دلخواه روی آن ارائه کرده‌ام. با جرئت می‌گویم که این نه تنها مفیدترین و عمومی‌ترین مسئله‌ی هندسه‌ای است که می‌دانم، بلکه حتی مفیدترین و عمومی‌ترین مسئله‌ای است که تا کنون خواسته‌ام بدانم.»

بعدها در سال ۱۶۳۷، که دکارت بر اساس مکاتباتش در پاریس دریافت که فرما حدود ده سال قبل از او مسئله‌ی مماس را حل کرده است، ولی هرگز در پی انتشار آن برنیامده است، بسیار ناراحت شد. در سال ۱۶۳۸، روش فرما را مطالعه کرد و سعی کرد خللی در آن پیدا کند. و چه ایرادات زیادی هم در آن پیدا کرد! او از طریق یک

واسطه نوشت: «حتی نمی‌خواهم اسم او را ببرم، تا از خطاهایی که پیدا کرده‌ام، کمتر احساس شرم کند.» او منطق فرما را، که انصافاً هم رقیق و بدون توضیحات کافی بود، به چالش کشید. ولی سرانجام، پس از چندین بار نامه‌پراکنی که در آن فرما با آرامش سعی کرد ایده‌هایش را توضیح دهد، دکارت مجبور شد صحت استدلال او را بپذیرد.

ولی قبل از پذیرش شکست، سعی کرد فرما را با طرح یک مسئله به زانو درآورد و از او خواست که خط مماس بر منحنی تعریف شده با معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ + y^۳ = ۳axy$ را، که در آن a یک عدد ثابت است، بیابد. دکارت می‌دانست که خودش با روش دایره‌ای پرزحمت‌اش نمی‌توانست خط مماس بر آن را پیدا کند، چون محاسبات جبری آن بسیار دشوار بود، ازاین‌رو، مطمئن بود که فرما هم با روش خطی‌اش نخواهد توانست آن را پیدا کند. ولی فرما ریاضی‌دان قوی‌تری بود و روش بهتری در چنته داشت. از بخت بد دکارت، او منحنی را بدون هر گونه زحمتی حل کرد.

در چند قدمی سرزمین موعود

فرما راه را برای حسابان به شکل امروزی آن هموار کرد. اصل کمترین زمان او نشان داد که بهینه‌سازی در تار و پود طبیعت ریشه دوانده است. کارهای او در زمینه‌ی هندسه‌ی تحلیلی و خطوط مماس راهی را به‌سوی حساب دیفرانسیل گشود که دیگران خیلی زود آن را دنبال کردند. و مهارت‌اش در زمینه‌ی جبر به او امکان داد که مساحت زیر برخی از منحنی‌ها را که حتی نام‌آورترین پیشینیان از محاسبه‌ی آن عاجز مانده بودند، محاسبه کند. به‌طور خاص، او مساحت زیر منحنی $y = x^n$ را برای هر عدد صحیح مثبت n، تقریباً با دست خالی، محاسبه کرد. (دیگران این مسئله را برای نُه حالت اول، $n = ۱, ۲, \ldots, ۹$ حل کرده بودند، ولی نتوانسته بودند راهبردی برای تمام مقادیر n بیابند.) پیشرفت‌های فرما گام بزرگی به‌سوی جلو در حساب انتگرال بود و زمینه را برای پیشرفت‌های بزرگ بعدی مهیا کرد.

اما با تمام این احوال، مطالعات او نتوانست به رازی دست پیدا کند که نیوتن و لایبنیتس خیلی زود موفق به کشف آن شدند، رازی که حسابان را متحول و دو نیمه‌ی آن را با هم متحد کرد. خیلی حیف شد که فرما موفق به کشف آن نشد، چون خیلی به آن نزدیک شده بود. حلقه‌ی گم‌شده به چیزی مربوط می‌شد که خودش آن را ایجاد کرد، ولی هرگز متوجه اهمیت قاطع آن نشد، چیزی که به‌طور ضمنی در روش او برای بیشینه و مماس مستتر است. بعداً بر آن نام مشتق نهاده شد. کاربرد آن بسی فراتر از منحنی و مماس بود و تمام انواع تغییر را در بر می‌گرفت.

فصل ۵

چهارراه

اکنون در داستانمان به یک چهارراه رسیده‌ایم. این‌جا جایی است که حسابان، مدرن می‌شود و از معمای منحنی‌ها تبدیل به اسرار حرکت و تغییر می‌شود. این‌جا است که حسابان کم‌کم به فکر ریتم‌های گیتی می‌افتد، فراز و نشیب‌های آن، الگوهای غیرقابل بیان آن در طول زمان. حسابان که دیگر به دنیای ایستای هندسه قانع نیست، شیفته‌ی پویایی می‌شود. می‌پرسد: قواعد حرکت و تغییر چیست؟ درباره‌ی آینده چه چیزی را می‌توانیم با اطمینان پیش‌بینی کنیم؟

در چهار سده‌ای که از زمان رسیدن حسابان به این چهارراه می‌گذرد، این علم از جبر و هندسه منشعب شده و به رشته‌های مختلف گسترش یافته است، از فیزیک و ستاره‌شناسی گرفته تا زیست‌شناسی و پزشکی، مهندسی و فناوری، و هر رشته‌ی دیگری که در آن همه چیز در جریان است و تغییر هرگز متوقف نمی‌شود. حسابان زمان را به قالب ریاضیات درآورده است. و این امید را به ما بخشیده است که دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، با همه‌ی بی‌عدالتی و بدبختی و آشوبی که در آن هست، ممکن است در ژرفای دلش، بر پایه‌ی منطق و پیرو قوانین ریاضی باشد. گاهی می‌توانیم این قوانین را از طریق علوم تجربی به دست آوریم. گاهی هم می‌توانیم آن‌ها را از طریق حسابان بفهمیم. و گاه می‌توانیم از آن‌ها برای بهبود زندگی خودمان، کمک به جامعه، و تغییر دادن مسیر تاریخ به‌سوی آینده‌ای بهتر بهره بگیریم.

نقطه‌ی عطف در داستان حسابان در میانه‌ی قرن هفدهم روی داد، زمانی که معمای منحنی‌ها، حرکت، و تغییر در یک شبکه‌ی دوبعدی، صفحه‌ی xy فرما و دکارت، با یکدیگر تلاقی کرد. در آن زمان، فرما و دکارت به‌هیچ‌وجه نمی‌دانستند که چه ابزار

سودمندی ابداع کرده‌اند. آن‌ها صفحه‌ی xy را به‌عنوان ابزاری برای ریاضیات محض ایجاد کردند. ولی این هم از همان ابتدا مانند نوعی چهارراه بود که در آن معادله‌ها به منحنی‌ها می‌پیوستند، جبر و هندسه به هم می‌رسیدند، و ریاضیات مشرق‌زمین با ریاضیات غرب تلاقی می‌کرد. و بعد، در نسل بعدی، آیزاک نیوتن بر مبنای کارهای آن‌ها و نیز کارهای گالیله و کپلر، هندسه و فیزیک را در ترکیبی عالی با هم پیوند داد. کارهای نیوتن مانند جرقه‌ای بود که آتش عصر روشنگری را شعله‌ور کرد و موجب انقلابی در علم و ریاضیات غرب شد.

ولی برای بازگو کردن آن داستان، باید از آوردگاهی شروع کنیم که تمام این‌ها در آن‌جا اتفاق افتاد، یعنی صفحه‌ی xy. وقتی که امروزه دانش‌پژوهان نخستین دوره‌ی حسابان را می‌گذرانند، تمام سال را در آن صفحه سپری می‌کنند. اصطلاح رسمی برای این درس، *حسابان توابع یک‌متغیری* است. بحث ما درباره‌ی آن، چند فصل آینده را در بر خواهد گرفت. این‌جا از توابع شروع می‌کنیم.

در این چند قرن که منحنی‌ها با حرکت و تغییر به هم پیوسته‌اند، صفحه‌ی xy تبدیل به پایگاه بسیار حیاتی‌تری شده است. امروزه در تمام رشته‌های محاسباتی از آن برای رسم نمودار داده‌ها و پدیدار کردن روابط پنهان استفاده می‌شود. می‌توانیم از آن برای نشان دادن رابطه‌ی یک متغیر با متغیر دیگر استفاده کنیم، یعنی وقتی همه‌ی چیزهای دیگر ثابت نگه‌داشته شود، x با y چه رابطه‌ای دارد. این‌گونه روابط با توابع یک‌متغیری مدل‌سازی می‌شود. این توابع با فرمولی به‌صورت $y = f(x)$ بیان می‌شود، که خوانده می‌شود: «ایگرِک برابر است با افِ ایکس». در این‌جا، f نشان‌دهنده‌ی تابعی است که چگونگی وابستگیِ متغیر y (که به آن متغیر *وابسته* گفته می‌شود) به متغیر x (متغیر *مستقل*) را، به فرض آن‌که همه‌ی چیزهای دیگر ثابت گرفته شود، نشان می‌دهد. این‌گونه توابع، نحوه‌ی رفتار جهان را در تمیزترین شکل آن نشان می‌دهند. یک علت، یک معلول قابل پیش‌بینی را ایجاد می‌کند. دوز مشخصی از یک دارو، پاسخی قابل پیش‌بینی را پدید می‌آورد. به‌طور رسمی‌تر، یک تابع f قاعده‌ای است که به هر مقدار x، یک مقدار یکتای y اختصاص می‌دهد. مانند یک ماشین ورودی_خروجی است: وقتی که x را به آن بخورانید، y را به شما می‌دهد، و این کار به‌صورت قابل اعتماد و قابل پیش‌بینی انجام می‌شود.

چند دهه قبل از فرما و دکارت، گالیله قدرت این ساده‌سازی عمدی واقعیت را فهمیده بود. او در آزمایش‌هایش با دقت همه چیز را ثابت نگه‌می‌داشت و هر بار فقط یک چیز را تغییر می‌داد. او گویی را از یک سطح شیب‌دار به پایین می‌غلتاند و اندازه‌گیری می‌کرد که در یک مدت زمان معین، چه مسافتی را طی می‌کند. خیلی زیبا و

ساده: مسافت به‌عنوان تابعی از زمان. به همین ترتیب، کپلر مطالعه کرد که گردش یک سیاره در مدار خود به دور خورشید چقدر طول می‌کشد، و رابطه‌ی این دوره‌ی گردش را با فاصله‌ی متوسط سیاره از خورشید محاسبه کرد. یک متغیر بر حسب دیگری، دوره‌ی گردش بر حسب فاصله. این راه درست برای پیشرفت بود. این راه درست برای خواندن کتاب بزرگ طبیعت بود.

نمونه‌هایی از توابع را در فصل‌های قبل دیدیم. در مثال نان کشمشی دارچینی، x تعداد برش‌های خورده‌شده بود و y تعداد کالری مصرف شده. رابطه در آن مورد به‌صورت $y = ۲۰۰x$ بود، که در صفحه‌ی xy، یک نمودار خط راست ایجاد می‌کرد. نمونه‌ی دیگر آن زمانی بود که تغییرات طول روز را در فصول مختلف در شهر نیویورک در سال ۲۰۱۸ بررسی کردیم. در این موقعیت، x نشان‌دهنده‌ی روزِ سال است، و y نشان‌دهنده‌ی طول روشنایی یک روز بر حسب دقیقه است، که به‌عنوان مدت زمان از طلوع تا غروب خورشید تعریف می‌شود. مشاهده کردیم که نمودار در این حالت مانند یک موج سینوسی نوسان می‌کند، به‌طوری که بلندترین روز در تابستان است و کوتاه‌ترین روز در زمستان.

کارکرد توابع

بعضی توابع به‌قدری مهم‌اند که در ماشین‌حساب‌های علمی برای آن‌ها دکمه‌ی جداگانه‌ای اختصاص داده شده است. این‌ها توابع مشهور ریاضی، از قبیل $x^۲$، $\log x$، و ۱۰^x، هستند. البته باید اذعان کرد که اکثر افراد سر و کاری با این‌ها ندارند. مثلاً برای تغییر دادن یا تصمیم گرفتن در مورد این‌که چقدر انعام بدهید، نیازی به آن‌ها ندارید. در زندگی روزمره، معمولاً اعداد کافی هستند. بدین خاطر است که وقتی که برنامه‌ی ماشین حساب را در گوشی‌تان اجرا می‌کنید، به‌طور پیش‌فرض یک ماشین حساب پایه را نمایش می‌دهد که ارقام ۰ تا ۹ را به‌همراه چهار عمل اصلی—جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم—و نیز دکمه‌ای را برای درصد نمایش می‌دهد. این همه‌ی چیزی است که برای زندگی روزمره به آن نیاز داریم.

ولی برای افرادی که در کارهای فنی هستند، اعداد تنها شروع کار هستند. دانشمندان، مهندسان، تحلیلگران مالی، و پژوهشگران پزشکی با *روابط* بین اعداد سروکار دارند که نشان می‌دهند که چگونه یک چیز بر چیز دیگر تأثیر می‌گذارد. برای توصیف این‌گونه روابط، استفاده از تابع ضرورت دارد. تابع ابزاری را در اختیار ما قرار می‌دهد که حرکت و تغییر را مدل‌سازی کنیم.

به بیان کلی، هر چیزی می‌تواند به یکی از سه روش تغییر کند: می‌تواند بالا برود، می‌تواند پایین بیاید، یا این‌که می‌تواند بالا برود و پایین بیاید. به عبارت دیگر، یا زیاد می‌شود، یا کم، و یا هم این‌که نوسان می‌کند. توابع مختلف برای موقعیت‌های متفاوتی مناسب هستند. از آنجا که در صفحات پیش رو به توابع مختلفی برخورد خواهیم کرد، بد نیست برخی از مفیدترین توابع را در این‌جا یادآوری کنیم.

تابع توان

برای اندازه‌گیری رشد در تدریجی‌ترین شکل آن، غالباً از *توابع توان*، مانند $x^۲$ یا $x^۳$، استفاده می‌کنیم، که در آن متغیر x به توان رسانده می‌شود.

ساده‌ترین این‌ها یک تابع خطی است، که در آن متغیر وابسته y به نسبت مستقیم با x افزایش می‌یابد. مثلاً اگر y تعداد کالری‌های مصرف شده با خوردن ۱، ۲، یا ۳ برش نان کشمشی دارچینی باشد، آنگاه y بر اساس معادله‌ی $y = ۲۰۰x$ تغییر می‌کند، که در این‌جا x تعداد برش‌ها است، و ۲۰۰ تعداد کالری‌ها در هر برش است. با این حال، نیازی نیست که در ماشین حساب دکمه‌ی جداگانه‌ای برای x داشته باشیم، زیرا ضرب همان کار را انجام می‌دهد؛ در این‌جا، ۲۰۰ کالری ضربدر تعداد برش‌های نان برابر است با تعداد کالری‌های مصرف شده.

ولی برای نوع بعدی در این سلسله‌مراتب رشد، یعنی رشد درجه‌ی دوم، بسیار مفید است که یک دکمه‌ی $x^۲$ در ماشین حساب داشته باشیم. رشد درجه‌ی دوم به اندازه‌ی رشد خطی شهودی نیست. این‌جا مسئله فقط ضرب کردن نیست. مثلاً اگر x را از ۱ به ۲ و بعد به ۳ تغییر دهیم، و بپرسیم که مقادیر متناظر $y = x^۲$ چگونه تغییر می‌کنند، می‌بینیم که از $۱ = ۱^۲$ به $۴ = ۲^۲$ و بعد به $۹ = ۳^۲$ تغییر می‌کند. یعنی مقادیر y به‌صورت فزاینده رشد می‌کند، ابتدا به میزان $\Delta y = ۴ - ۱ = ۳$ و سپس به میزان $\Delta y = ۹ - ۴ = ۵$. اگر این را ادامه دهیم، میزان افزایش بعدی ۷، ۹، ۱۱، و غیره خواهد بود، که الگوی اعداد فرد را دنبال می‌کند. لذا برای رشد درجه‌ی دوم، خود میزان تغییر هم با افزایش x بیشتر می‌شود. هر چه جلوتر می‌رود، رشد سریع‌تر می‌شود.

همین الگوی جالب اعداد فرد را قبلاً نیز در آزمایش‌های سطح شیب‌دار گالیله دیدیم، که در آن زمان پایین غلتیدن گوی‌ها از یک سطح شیب‌دار را اندازه‌گیری می‌کرد. او مشاهده کرد که وقتی که یک توپ از حالت سکون رها می‌شود، هر چه زمان می‌گذرد، تندتر حرکت می‌کند، و در هر واحد زمانی بعدی، مسافت بیشتر و بیشتری را طی می‌کند، به‌طوری که مسافت‌های پیاپی متناسب با اعداد فرد متوالی ۱، ۳، ۵، و غیره

افزایش می‌یابد. گالیله فهمید که این قاعده‌ی مرموز چه معنایی دارد. معنایش این بود که کل مسافتی که توپ طی می‌کند، متناسب با زمان نیست؛ بلکه متناسب با *مربع* زمان است. ازاین‌رو، در مطالعه‌ی حرکت، تابع مربع x^2 به‌صورت کاملاً طبیعی مشاهده می‌شود.

تابع نمایی

بر خلاف تابع توانی معمولی مانند x یا x^2، یک تابع نمایی مانند 2^x یا 10^x رشد بسیار انفجاری‌تری را توصیف می‌کند، رشدی که مانند گلوله‌ی برفی عمل می‌کند و هر چه بیشتر افزایش می‌یابد. به‌جای این‌که مانند رشد خطی، در هر مرحله مقدار ثابتی *اضافه* شود، در رشد نمایی یک ضریب ثابت در آن *ضرب* می‌شود.

به‌عنوان مثال، یک جمعیت باکتریایی که روی یک پتری دیش رشد می‌کند، هر ۲۰ دقیقه دو برابر می‌شود. اگر در ابتدا ۱۰۰۰ سلول باکتری داشته باشیم، بعد از ۲۰ دقیقه، تعداد آن‌ها ۲۰۰۰ سلول خواهد بود. پس از ۲۰ دقیقه‌ی دیگر، ۴۰۰۰ سلول خواهد بود، ۲۰ دقیقه بعد از آن، ۸۰۰۰ سلول، و بعد ۱۶,۰۰۰، ۳۲,۰۰۰، و الی آخر. در این مثال، تابع نمایی 2^x وارد بازی می‌شود. به‌طور خاص، اگر زمان را بر حسب واحد ۲۰ دقیقه اندازه‌گیری کنیم، تعداد باکتری‌ها بعد از x واحد زمان، 1000×2^x سلول خواهد بود. رشد نمایی در تمام فرایندهای شبیه گلوله‌ی برفی مشاهده می‌شود، از تکثیر ویروس‌های واقعی گرفته تا گسترش ویروس‌وار اطلاعات در یک شبکه‌ی اجتماعی.

رشد نمایی با زیاد شدن پول هم ارتباط پیدا می‌کند. فرض کنید یک حساب بانکی مبلغ ۱۰۰ دلار موجودی دارد، و هر سال با نرخ بهره‌ی ثابت ۱ درصد به مبلغ آن اضافه می‌شود. بعد از یک سال، مبلغ موجودی حساب ۱۰۱ دلار خواهد بود. پس از دو سال، موجودی آن ۱۰۱ دلار ضربدر ۱٫۰۱ خواهد شد، که برابر با ۱۰۲٫۰۱ دلار است. پس از x سال، مبلغ پول موجود در حساب بانکی $100 \times (1.01)^x$ خواهد بود.

در توابع نمایی مانند 2^x و $(1.01)^x$، اعداد ۲ و ۱٫۰۱ پایه‌ی تابع نامیده می‌شوند. متداول‌ترین پایه‌ای که در ریاضیات ماقبل حسابان استفاده می‌شود، ۱۰ است. از نظر ریاضی، دلیلی برای ترجیح دادن ۱۰ بر هر پایه‌ی دیگری وجود ندارد. فقط یک قرارداد سنتی است، که علت آن یک اتفاق در تکامل زیست‌شناختی ما است: این‌که ما بر حسب اتفاق دارای ده انگشت هستیم. بر این اساس است که سیستم حساب ما، یعنی دستگاه دهدهی، بر پایه‌ی توان‌های ده ایجاد شده است.

به همین دلیل، تابع نمایی که اکثر دانش‌پژوهان در ابتدا، معمولاً در دبیرستان، با

آن برخورد می‌کنند، 10^x است. در این‌جا، به عدد x نما می‌گویند. وقتی که x برابر با ۱، ۲، ۳، یا هر عدد صحیح مثبت دیگر باشد، مقدار x نشان‌دهنده‌ی آن است که چه تعداد عامل ۱۰ برای محاسبه‌ی 10^x در هم ضرب می‌شوند. ولی وقتی که x صفر، منفی، و یا مابین دو عدد صحیح باشد، معنای 10^x به دقت بیشتری نیاز دارد که در این‌جا خواهیم دید.

توان‌های ده

موقعیت‌های زیادی در دنیای علم هستند که در آن از توان‌های ده برای تسهیل محاسبات استفاده می‌کنیم. به‌طور خاص، وقتی که اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک هستند، بازنویسی آن‌ها با نماد علمی کارها را آسان‌تر می‌کند. نماد علمی با استفاده از توان‌های ده، اعداد را هر چه جمع‌وجورتر نمایش می‌دهد.

مثلاً عدد بیست و یک تریلیون را در نظر بگیرید، که به‌عنوان مبلغ بدهی ملی ایالات متحده، امروزه زیاد درباره‌ی آن صحبت می‌شود. بیست و یک تریلیون را می‌توان با نمایش دهدهی به‌صورت $21,000,000,000,000$ و یا به‌طور جمع‌وجورتر با نماد علمی به‌صورت $21 \times 10^{12} = 2/1 \times 10^{13}$ نوشت. اگر به دلایلی لازم باشد که این عدد بزرگ را مثلاً در یک میلیارد ضرب کنیم، نوشتن آن به‌صورت $(2/1 \times 10^{13}) \times 10^{9} = 2/1 \times 10^{22}$ آسان‌تر از نوشتن آن همه صفر در نمایش دهدهی است.

سه توان اول ده اعدادی هستند که هر روز با آن‌ها سروکار داریم:

$$
\begin{array}{ll}
1 & 10^1 = 10 \\
2 & 10^2 = 100 \\
3 & 10^3 = 1000
\end{array}
$$

به روند آن دقت کنید: ستون چپ (x) به‌صورت جمعی افزایش می‌یابد، در حالی که ستون راست (10^x) به‌صورت *ضربی* افزایش پیدا می‌کند، که همان چیزی است که از رشد نمایی انتظار داریم. بنابراین، در ستون چپ، در هر مرحله که جلو می‌رویم، مقدار ۱ به عدد قبلی افزوده می‌شود، در حالی که در ستون راست، عدد قبلی ضربدر ۱۰ می‌شود. این تناظر جالب بین جمع و ضرب، شاه‌علامت توابع نمایی به‌طور

عام و توان‌های ده به‌طور خاص است.

به‌خاطر این تناظر بین دو ستون، اگر دو عدد از ستون سمت چپ را با هم جمع کنیم، این معادل با *ضرب* کردن اعداد متناظر آن‌ها در ستون سمت راست است. به‌عنوان مثال، $۳ = ۲ + ۱$ در طرف چپ ترجمه می‌شود به $۱۰۰۰ = ۱۰۰ \times ۱۰$ در طرف راست. ترجمه از جمع به ضرب بی‌دلیل نیست، زیرا

$$۱۰^{۱+۲} = ۱۰^{۳} = ۱۰^{۱} \times ۱۰^{۲}.$$

بنابراین، وقتی که توان‌های ده را در هم ضرب می‌کنیم، نماهای آن‌ها با هم جمع می‌شوند، مانند ۱ و ۲ در این‌جا. قاعده‌ی کلی عبارت است از:

$$۱۰^{a} \times ۱۰^{b} = ۱۰^{a+b}.$$

در همین ارتباط، روند دیگر آن است که *تفریق* در ستون چپ متناظر با *تقسیم* در ستون راست است. مثلاً $۱ = ۲ - ۳$ متناظر است با $۱۰ = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰}$.

این الگوهای قشنگ راهی را به ما نشان می‌دهد که بتوانیم این دو ستون را به طرف اعداد کوچک‌تر هم ادامه دهیم. اصل نهفته در این الگوها آن است که هر وقت از عدد ستون چپ، مقدار ۱ را تفریق می‌کنیم، باید عدد ستون راست را بر ۱۰ تقسیم کنیم. حالا دوباره به سطر بالایی نگاه کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱ & ۱۰^{۱} = ۱۰ \\ ۲ & ۱۰^{۲} = ۱۰۰ \\ ۳ & ۱۰^{۳} = ۱۰۰۰ \end{array}$$

از آنجا که تفریق کردن ۱ از طرف چپ متناظر با تقسیم کردن طرف راست بر ۱۰ است، لذا این تناظر با یک سطر دیگر در بالا ادامه داده می‌شود که در آن $۰ = ۱ - ۱$ در طرف چپ و $۱ = ۱۰/۱۰$ در طرف راست قرار می‌گیرد:

$$
\begin{array}{cc}
۰ & ۱۰^{۰} = ۱ \\
۱ & ۱۰^{۱} = ۱۰ \\
۲ & ۱۰^{۲} = ۱۰۰ \\
۳ & ۱۰^{۳} = ۱۰۰۰
\end{array}
$$

بر اساس این استدلال، مشخص می‌شود که چرا $۱۰^{۰}$ به‌صورت ۱ تعریف شده است (و باید به این صورت تعریف شود)، در حالی که این تعریف برای خیلی از افراد گیج‌کننده است. اگر هر مقدار دیگری انتخاب می‌شد، الگوی فوق شکسته می‌شد. این تنها تعریفی است که الگوی موجود در سطرهای بعدی را ادامه می‌دهد.

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم تناظر را باز هم ادامه دهیم، تا در ستون چپ به اعداد منفی برسیم. در این صورت، اعداد ستون راست کسری می‌شوند و شامل توان‌های $\frac{۱}{۱۰}$ خواهند بود:

$$
\begin{array}{cc}
-۲ & \frac{۱}{۱۰۰} \\
-۱ & \frac{۱}{۱۰} \\
۰ & ۱ \\
۱ & ۱۰ \\
۲ & ۱۰۰ \\
۳ & ۱۰۰۰
\end{array}
$$

دقت کنید که اعداد ستون سمت راست همیشه مثبت هستند، حتی زمانی که اعداد ستون سمت چپ صفر یا منفی باشند.

از نظر شناختی، یکی از عیب‌هایی که ممکن است توان‌های ده داشته باشند، این است که سبب می‌شوند که اعدادی که بسیار با یکدیگر تفاوت دارند، شبیه‌تر از آن‌چه هست، به نظر برسند. برای این‌که در این دام نیفتید، بهتر است وانمود کنید که توان‌های مختلف ده از نظر مفهومی در دسته‌های متمایزی هستند. گاه در زبان‌های انسانی هم همین کار انجام شده و به توان‌های مختلف ده، نام‌های متمایزی داده شده است، گویی که هیچ ارتباطی با هم ندارند. در زبان، نام اعداد ۱۰، ۱۰۰، و ۱۰۰۰ ارتباطی با

هم ندارد: *ده*، *صد*، و *هزار*. این خوب است. چون نشان می‌دهد که این اعداد از نظر کیفی با هم تفاوت دارد، ولو آن‌که توان‌های متوالی ده باشند. هر کس تفاوت حقوق [سالیانه‌ی] پنج‌رقمی و شش‌رقمی [بر حسب دلار] را فهمیده باشد، می‌داند که یک صفر اضافه چقدر تفاوت ایجاد می‌کند.

در برخی موارد که نام توان‌های ده خیلی شبیه یکدیگر است، ممکن است به اشتباه بیفتیم. مثلاً در طی مبارزات انتخاباتی سال ۲۰۱۶، سناتور برنی سندرز مرتب از تخفیف‌های مالیاتی هنگفتی که به «میلیونرها و میلیاردرها» داده شده بود، انتقاد می‌کرد. صرف‌نظر از اینکه از نظر سیاسی با او موافق باشید یا نه، متأسفانه او این سخنان را به‌گونه‌ای بیان می‌کرد که انگار میلیونرها و میلیاردرها، از نظر ثروت، با یکدیگر قابل‌مقایسه‌اند. اما در واقع، میلیاردرها خیلی خیلی ثروتمندتر از میلیونرها هستند. برای این‌که فرق میلیون و میلیارد را بهتر بفهمید، به این صورت درباره‌ی آن فکر کنید: یک میلیون ثانیه حدوداً دو هفته است، ولی یک میلیارد ثانیه حدود سی و دو سال می‌شود. اولی مدت یک تعطیلات است؛ دومی بخش قابل‌توجهی از عمر یک فرد است.

درسی که از این‌جا می‌گیریم، این است که از توان‌های ده باید با دقت استفاده کنیم. این توان‌ها قدرت خطرناکی برای فشرده کردن دارند، به‌طوری که می‌توانند اعداد بسیار بزرگ را چنان کوچک کنند که امکان درک آن‌ها برای ما به سهولت میسر باشد. به همین خاطر است که دانشمندان از آن‌ها زیاد استفاده می‌کنند. در جاهایی که یک کمیت تا چندین برابر کم و زیاد می‌شود، غالباً از توان‌های ده برای تعریف مقیاس اندازه‌گیری مناسب استفاده می‌شود. نمونه‌ی آن مقیاس pH برای اسیدها و بازها، مقیاس ریشتر برای بزرگی زلزله، و معیار دسی‌بل برای اندازه‌گیری بلندی صدا است. مثلاً اگر pH محلولی از ۷ (خنثی، مانند آب خالص) به ۲ (اسیدی، مانند آبلیمو) تغییر کند، غلظت یون‌های هیدروژن پنج درجه‌ی بزرگی افزایش می‌یابد، یعنی $۱۰^{۵}$ یا صد هزار برابر می‌شود. سقوط pH از ۷ به ۲ به‌گونه‌ای به نظر می‌رسد که گویی پنج واحد ناچیز تغییر کرده است و میزان تغییر چندان زیاد نیست، در حالی که در واقع، نشان‌دهنده‌ی صد هزار برابر تغییر در غلظت یون هیدروژن است.

لگاریتم

در مثال‌هایی که تا این‌جا دیدیم، اعداد ستون سمت راست، مانند ۱۰۰ و ۱۰۰۰، همیشه اعداد رند بودند. از آنجا که توان‌های ده این‌قدر کار را راحت می‌کنند، خیلی خوب

می‌شد اگر می‌توانستیم اعداد غیررُند را هم به همان صورت بیان کنیم. مثلاً ۹۰ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه ۹۰ اندکی کوچک‌تر از ۱۰۰ است، و ۱۰۰ برابر با $۱۰^{۲}$ است، لذا به نظر می‌رسد که ۹۰ باید برابر با ۱۰ به توان عددی باشد که اندکی از ۲ کوچک‌تر است. ولی دقیقاً به توان چه عددی؟

لگاریتم برای پاسخ دادن به این‌گونه سؤالات اختراع شده است. روی ماشین حساب اگر عدد ۹۰ را وارد کنید و دکمه‌ی لگاریتم را فشار دهید، حاصل می‌شود

$$\log ۹۰ = ۱/۹۵۴۲\ldots.$$

پس پاسخ ما این است: $۹۰ = ۱۰^{۱/۹۵۴۲\ldots}$.

به این طریق، لگاریتم به ما امکان می‌دهد که هر عدد مثبت را به‌صورت یک توان ده بنویسیم. این کار انجام بسیاری از محاسبات را آسان‌تر می‌کند و پیوندهای جالبی را بین اعداد آشکار می‌کند. ببینید که اگر ۹۰ را در عدد ۱۰ یا ۱۰۰ ضرب کنیم و دوباره لگاریتم آن را بگیریم، چه اتفاقی می‌افتد:

$$\log ۹۰۰ \approx ۲/۹۵۴۲\ldots$$

و

$$\log ۹۰۰۰ = ۳/۹۵۴۲\ldots.$$

در این‌جا، به دو نکته‌ی مهم دقت کنید:

۱. قسمت اعشاری تمام لگاریتم‌ها در این‌جا یکسان است: $۰/۹۵۴۲\ldots$.

۲. با ضرب کردن عدد اولیه یعنی ۹۰ در ۱۰، به لگاریتم آن ۱ اضافه می‌شود. با ضرب کردن آن در ۱۰۰، به لگاریتم آن ۲ اضافه می‌شود، و الی آخر.

هر دو واقعیت فوق را می‌توان با استفاده از یکی از قاعده‌ی لگاریتم‌ها توضیح داد: *لگاریتم حاصل‌ضرب دو عدد، مجموع لگاریتم‌های آن‌ها است.* در این‌جا داریم:

$$\begin{aligned}\log ۹۰ &= \log(۹ \times ۱۰)\\ &= \log ۹ + \log ۱۰\\ &= ۰/۹۵۴۲\cdots + ۱\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\log ۹۰۰ &= \log(۹ \times ۱۰۰)\\ &= \log ۹ + \log ۱۰۰\\ &= ۰/۹۵۴۲\ldots + ۲\end{aligned}$$

و الی آخر. بدین خاطر است که لگاریتم‌های ۹۰ و ۹۰۰ و ۹۰۰۰ همگی قسمت اعشاری یکسانی دارند: ...۰/۹۵۴۲. این قسمت اعشاری، لگاریتم ۹ است، و ۹ عاملی است که در همه‌ی این اعداد وجود دارد. توان‌های مختلف ده به‌صورت جزء عدد صحیح در لگاریتم ظاهر می‌شود (در این مورد، عددهای ۱، ۲، یا ۳ در جلوی جزء اعشاری). بر این اساس، اگر به لگاریتم اعداد دیگر علاقه‌مند باشیم، فقط کافی است که لگاریتم اعداد ۱ تا ۱۰ را داشته باشیم. این جزء اعشاری را تعیین می‌کند. آنگاه لگاریتم هر عدد مثبت را می‌توان صرفاً بر اساس آن لگاریتم‌ها بیان کرد. توان‌های ده کار دیگری انجام می‌دهند؛ آن‌ها جزء عدد صحیح را تعیین می‌کنند.

قاعده‌ی کلی به‌صورت فرمول از این قرار است:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

به عبارت دیگر، وقتی که دو عدد را در هم ضرب می‌کنید و سپس لگاریتم آن را می‌گیرید، حاصل آن مجموع لگاریتم‌های آن‌ها است (نه حاصل‌ضرب لگاریتم‌های آن‌ها!). از این نظر، لگاریتم مسئله‌ی ضرب را با یک مسئله‌ی جمع جایگزین می‌کند، که *بسیار* آسان‌تر است. این دلیل ابداع لگاریتم بوده است. لگاریتم محاسبات را به‌طور قابل ملاحظه‌ای سرعت می‌بخشید. به‌جای این‌که با مسئله‌های عظیم ضرب، محاسبه‌ی ریشه‌ی دوم، ریشه‌ی سوم، و امثال آن سروکار داشته باشید، می‌توانستید این‌گونه محاسبات را تبدیل به مسئله‌ی جمع کنید و آنگاه آن را با استفاده از یک جدول لگاریتم حل کنید. ایده‌ی لگاریتم در اوایل قرن هفدهم مطرح بود، ولی بیشترین سهم را در متداول کردن آن، ریاضی‌دان اسکاتلندی جان نپر داشت، که در سال ۱۶۱۴ کتاب خود را با عنوان *شرح قاعده‌ی شگفت‌انگیز لگاریتم‌ها* منتشر کرد. یک دهه بعد، یوهانس کپلر هنگام تهیه‌ی جدول‌های نجومی درباره‌ی موقعیت سیاره‌ها و دیگر اجرام سماوی، با اشتیاق از این ابزار محاسباتی جدید بهره گرفت. لگاریتم برای آن دوران مانند ابررایانه بود.

خیلی از افراد درباره‌ی لگاریتم احساس سردرگمی می‌کنند، ولی اگر درست درباره‌ی آن فکر کنید، خواهید دید که کاملاً معنی می‌دهد. می‌توانیم این را با تمثیلی از نجاری روشن کنیم. لگاریتم و توابع دیگر مانند ابزارها هستند. هر ابزاری مقصود متفاوتی دارد. چکش برای کوبیدن میخ در چوب است؛ مته برای سوراخ کردن است؛ و اره برای بریدن. به همین ترتیب، تابع نمایی برای مدل‌سازی رشدی است که مرتب بر سرعت آن افزوده می‌شود، و تابع توان برای مدل‌سازی حالت‌های ضعیف‌تر رشد است. کار لگاریتم مانند میخ‌کش است: کار ابزار دیگری را معکوس می‌کند. به‌طور خاص، لگاریتم کار تابع نمایی را معکوس می‌کند، و بر عکس.

تابع نمایی 10^x را در نظر بگیرید و آن را مثلاً بر روی عدد ۳ اعمال کنید. حاصل آن ۱۰۰۰ است. برای معکوس کردن این عمل، دکمه‌ی $\log x$ را بزنید.با اعمال آن بر روی ۱۰۰۰، عدد اولیه برگردانده می‌شود: ۳. تابع لگاریتم مبنای ۱۰، $\log x$، عمل تابع 10^x را معکوس می‌کند. این‌ها به این معنا توابع وارون یکدیگر هستند.

لگاریتم، جدای از نقش آن به‌عنوان تابع وارون، بسیاری از پدیده‌های طبیعی را نیز توصیف می‌کند. مثلاً ادراک ما از زیروبمی صدا تقریباً لگاریتمی است. وقتی که زیروبمی موسیقی یک اکتاو بالاتر می‌رود، مثلاً از یک *دو* به بعدی می‌رود، این افزایش متناظر با دو برابر شدن بسامد امواج صوتی مربوط به آن است. ولی با آن‌که به ازای هر اکتاو افزایش، نوسان امواج دو برابر سریع‌تر می‌شود، لیکن ما این دو برابر شدن را—که یک تغییر *ضربی* در بسامد است—به‌عنوان گام‌هایی مساوی در زیروبمی احساس می‌کنیم، که به‌معنای گام‌های جمعی مساوی است. حیرت‌انگیز است. ذهن ما گولمان می‌زند که فکر کنیم فاصله‌ی ۱ از ۲ مانند فاصله‌ی ۲ از ۴، یا فاصله‌ی ۴ از ۸، و الی آخر است. به یک معنا می‌توان گفت که ما بسامد را به‌صورت لگاریتمی ادراک می‌کنیم.

لگاریتم طبیعی و تابع نمایی آن

لگاریتم مبنای ۱۰ که در آن دوران بسیار مفید بود، در حسابان مدرن به‌ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌جای آن مبنای دیگری قرار گرفته است که با آن‌که عجیب به نظر می‌رسد، ولی از قضا خیلی طبیعی‌تر از مبنای ۱۰ است. این مبنای طبیعی، e نامیده می‌شود. این عدد تقریباً ۲٫۷۱۸ است (به‌زودی توضیح می‌دهم که این مقدار از کجا آمده است)، ولی مقدار عددی آن خیلی مهم نیست. نکته‌ی مهم درباره‌ی e آن است که یک تابع نمایی با این مبنا، دقیقاً با نرخی برابر با خود تابع، رشد می‌کند.

این مطلب را دوباره بیان می‌کنم.
نرخ رشد e^x، خود e^x است.

این خاصیت شگفت‌انگیز، محاسبات مربوط به توابع نمایی را، وقتی که در مبنای e بیان شده باشند، ساده می‌کند. هیچ مبنای دیگری از این سادگی برخوردار نیست. صرف‌نظر از این‌که با مشتق، انتگرال، معادلات دیفرانسیل،و یا هر ابزار دیگر حسابان سروکار داشته باشیم، توابع نمایی بیان شده در مبنای e همیشه تمیزترین، خوش‌فرم‌ترین، و زیباترین توابع هستند.

مبنای e، جدای از نقش ساده کننده‌ی آن در حسابان، در امور مالی و بانکداری نیز به‌صورت طبیعی ظاهر می‌شود. مثال زیر نشان می‌دهد که عدد e از کجا می‌آید و چگونه تعریف می‌شود.

فرض کنید ۱۰۰ دلار را در بانکی سپرده‌گذاری می‌کنید که نرخ بهره‌ی سالیانه‌ی غیرقابل توجیه ولی وسوسه‌انگیز ۱۰۰ درصد دارد. معنای این مطلب آن است که بعد از یک سال، ۱۰۰ دلار شما ۲۰۰ دلار می‌شود. حالا برمی‌گردیم و سناریوی باز هم بهتری را در نظر می‌گیریم. فرض کنید بتوانید بانک را راضی کنید که سود شما را دو بار در سال واریز کند، به‌طوری که به سود آن هم سود تعلق بگیرد. در این حالت، چقدر عاید شما خواهد شد؟ از آنجا که در این حالت سود دو بار در سال واریز می‌شود، طبیعی است که باید نرخ بهره را برای هر شش ماه، نصف حالت سالیانه در نظر بگیریم، یعنی ۵۰ درصد. لذا بعد از شش ماه، $۱/۵۰ \times ۱۰۰$ دلار خواهید داشت، که برابر با ۱۵۰ دلار است. شش ماه بعد، در پایان سال، به مبلغ شما ۵۰ درصد دیگر اضافه می‌شود: $۱/۵۰ \times ۱۵۰$ دلار، که برابر است با ۲۲۵ دلار. این بیشتر از مبلغ ۲۰۰ دلار موجودی شما در حالت سود سالیانه است، زیرا در این‌جا به سود شما نیز سود تعلق گرفته است.

سؤال بعدی این است که اگر بانک قبول کند که سود را به دفعات بیشتر و بیشتری، با نرخ بهره‌ی پایین‌تر متناسب با دوره‌ی ربح مرکب، واریز کند، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا به ثروتی افسانه‌ای دست خواهید یافت؟ متأسفانه نه. اگر بهره‌ی مرکب سه‌ماهه باشد، موجودی شما $۱۰۰ \times (۱/۲۵)^۴ \approx ۲۴۴/۱۴$ دلار خواهد بود، که خیلی بیشتر از ۲۲۵ دلار نیست. حالا اگر ربح مرکب به‌صورت روزشمار برای تمام ۳۶۵ روز سال محاسبه شود، موجودی شما در پایان سال فقط

$$۱۰۰ \times \left(۱ + \frac{۱}{۳۶۵}\right)^{۳۶۵} \approx ۲۷۱/۴۶ \text{ دلار}$$

خواهد بود. در این‌جا، ۳۶۵ در مخرج و در نما نشان‌دهنده‌ی تعداد دوره‌های محاسبه‌ی

بهره‌ی مرکب در سال است، و ۱ در صورت $\frac{۱}{۳۶۵}$ نشان‌دهنده‌ی نرخ بهره‌ی ۱۰۰ درصد است که به‌صورت عدد بیان شده است.

و سرانجام، فرض کنید که این بازی بهره‌ی مرکب را به حد اعلا برسانیم. در صورتی که بانک بهره‌ی مرکب پول شما را n بار در سال محاسبه کند، که در این‌جا n یک عدد بسیار بسیار بزرگ است، و نرخ بهره را برای هر دوره که از یک نانوثانیه هم کوتاه‌تر است، به‌طور متناسب کوچک در نظر بگیرد، آنگاه بر اساس تشابه با نتیجه‌ی مربوط به ۳۶۵ دوره‌ی روزشمار، در پایان سال، مبلغ

$$۱۰۰ \times \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$$

دلار در حساب خود خواهید داشت. وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، این مقدار به ۱۰۰ برابر حد $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ در زمانی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، نزدیک می‌شود. این حد به‌عنوان عدد e تعریف می‌شود. مقدار این حد کاملاً واضح نیست، ولی از قضا حدود ... ۲٫۷۱۸۲۸ است.

در دنیای بانکداری، به این روش، *بهره‌ی مرکب پیوسته* گفته می‌شود. نتایج ما نشان می‌دهد که این خیلی آش دهن‌سوزی نیست. در مسئله‌ی فوق، این روش منجر به موجودی یک‌ساله‌ی زیر می‌شود:

$$۱۰۰ \times e \approx ۲۷۱٫۸۳ \text{ دلار}.$$

این بهترین نوع قرارداد است، ولی با این حال، فقط ۳۷ سِنت بیشتر از حالت سود روزشمار است.

از این همه حلقه پریدیم تا e را تعریف کنیم. در نهایت، معلوم شد که e حد یک عبارت پیچیده است. بی‌نهایت در درون آن عجین شده است، درست مانند آن‌چه برای عدد π در رابطه با دایره دیدیم. به‌خاطر آورید که برای محاسبه‌ی عدد π، باید محیط یک چندضلعی محاط شده در داخل دایره را به دست می‌آوردیم. وقتی که تعداد ضلع‌ها، n، به سمت بی‌نهایت و طول ضلع چندضلعی به سمت صفر میل می‌کند، چندضلعی به دایره نزدیک می‌شود. عدد e نیز تقریباً به‌صورت مشابهی به‌عنوان یک حد تعریف می‌شود، جز این‌که این عدد در موقعیت بهره‌ی مرکب پیوسته مشاهده می‌شود.

تابع نمایی مربوط به e به‌صورت e^x نوشته می‌شود، درست همان‌گونه که تابع نمایی برای پایه‌ی ۱۰ به‌صورت ۱۰^x نوشته می‌شود. شاید عجیب به نظر برسد، ولی در سطح

ساختاری درست مانند پایه‌ی ۱۰ است. همه‌ی اصول و الگوها یکسان هستند. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم یک x را پیدا کنیم که e^x آن یک عدد داده شده، مثلاً ۹۰، باشد، باز می‌توانیم مانند قبل از لگاریتم استفاده کنیم، جز این‌که این بار از لگاریتم مبنای e استفاده می‌کنیم، که به *لگاریتم طبیعی* مشهور است، و به‌صورت $\ln x$ نمایش داده می‌شود. برای پیدا کردن مقدار x به‌گونه‌ای که $e^x = ۹۰$، یک ماشین حساب علمی را روشن کنید، عدد ۹۰ را وارد کنید، و دکمه‌ی $\ln x$ را بزنید، تا جواب را به دست آورید:

$$\ln ۹۰ \approx ۴/۴۴۹۸.$$

برای این‌که درستی آن را امتحان کنید، عدد را روی صفحه‌ی نمایش نگه‌دارید و دکمه‌ی e^x را بزنید. باید ۹۰ حاصل شود. در این‌جا هم مانند قبل، لگاریتم و تابع نمایی بر عکس یکدیگر عمل می‌کنند، مانند چکش و میخ‌کش.

این‌ها هر چقدر هم غامض به نظر برسد، ولی لگاریتم طبیعی فواید عملی بسیار زیادی دارد، که البته خیلی از اوقات ممکن است چندان مشهود نباشد. مثلاً در میان سرمایه‌گذاران و بانکداران، یک قاعده‌ی سرانگشتی به نام قاعده‌ی ۷۲ وجود دارد، که زیربنای آن لگاریتم طبیعی است. برای این‌که ببینید با یک نرخ بازده سالیانه‌ی مشخص، چقدر طول می‌کشد تا پولتان دو برابر شود، ۷۲ را بر نرخ بازده تقسیم کنید. مثلاً اگر نرخ سالیانه ۶ درصد باشد، پول بعد از $۷۲ \div ۶ = ۱۲$ سال دو برابر می‌شود. این قاعده‌ی سرانگشتی تابع قوانین لگاریتم طبیعی و رشد نمایی است و اگر نرخ بهره به‌قدر کافی پایین باشد، خوب عمل می‌کند. در تاریخ‌گذاری کربنی درخت‌های باستانی و مشاجرات مربوط به اصالت آثار هنری نیز لگاریتم طبیعی در پشت صحنه دخالت دارد. یک پرونده‌ی مشهور در رابطه با نقاشی‌هایی بود که ادعا می‌شد از آثار فِرمیر است و معلوم شد که تقلبی است؛ این موضوع از طریق تحلیل واپاشی رادیواکتیو ایزوتوپ‌های سرب و رادیم موجود در رنگ آشکار شد. به‌طوری که این مثال‌ها نشان می‌دهند، لگاریتم طبیعی اکنون در تمام رشته‌هایی که افزایش و کاهش نمایی در آن مطرح می‌شود، نفوذ کرده است.

سازوکار افزایش و کاهش نمایی

به‌عنوان تکرار نکته‌ی اصلی باید گفت که آن‌چه به e ویژگی خاص می‌بخشد، این است که نرخ تغییر e^x، خود e^x است. لذا وقتی که نمودار تابع نمایی بالاتر و بالاتر می‌رود،

شیب آن مطابق با ارتفاع کنونی آن افزایش می‌یابد. هر چه ارتفاع بالاتر می‌رود، شیب بیشتر می‌شود. به زبان حسابان، e^x مشتق خودش است. هیچ تابع دیگری این خاصیت را ندارد. تا جایی که به حسابان مربوط می‌شود، تابع نمایی منصف‌ترین توابع است.

گرچه مبنای e ویژگی یکتایی دارد، ولی توابع نمایی دیگر نیز در رشد پیرو اصل مشابهی هستند. تنها تفاوت آن‌ها در این است که نرخ رشد نمایی *متناسب* با سطح کنونی تابع است، نه دقیقاً *مساوی* با آن. با این حال، این تناسب برای ایجاد رشد انفجاری نمایی کفایت می‌کند.

توضیح این متناسب بودن از نظر شهودی روشن است. مثلاً در رشد باکتری‌ها، هر چه جمعیت بیشتر باشد، سرعت رشد آن هم بیشتر خواهد بود، زیرا تعداد سلول بیشتری برای تقسیم شدن و ایجاد باکتری‌های جدید موجود خواهد بود. درباره‌ی افزایش پول در یک حساب بانکی با بهره‌ی مرکب به نرخ ثابت نیز همین مطلب صادق است. پول بیشتر به معنای سود بیشتر از آن پول و لذا نرخ رشد سریع‌تر برای کل حساب است.

همین تأثیر در سوت کشیدن میکروفن هم، در زمانی که صدای خود بلندگو در آن می‌پیچد، دخالت دارد. بلندگو دارای یک تقویت کننده است که صدا را بلندتر می‌کند. یعنی بلندگو بلندی صدا را در یک ضریب ثابت ضرب می‌کند. اگر این صدای بلندتر دوباره وارد میکروفن شود و مجدداً از تقویت کننده عبور داده شود، بلندی آن مکرراً در یک حلقه‌ی بازخورد مثبت تقویت خواهد شد. این موجب افزایش نمایی ناگهانی بلندی صدا خواهد شد، که با نرخی متناسب با بلندی کنونی صدا افزایش می‌یابد و منجر به صدای جیغ‌مانند ترسناکی می‌شود.

واکنش‌های زنجیره‌ای هسته‌ای نیز به همین دلیل تابع افزایش نمایی هستند. وقتی که یک اتم اورانیوم شکسته می‌شود، نوترون‌هایی گسیل می‌کند که ممکن است به اتم‌های دیگر برخورد کنند و سبب شکسته شدن آن‌ها شوند، که باز موجب گسیل نوترون‌های بیشتر می‌شود، و الی آخر. افزایش نمایی تعداد نوترون‌ها، در صورتی که کنترل نشود، ممکن است منجر به انفجار هسته‌ای شود.

غیر از افزایش، کاهش را نیز می‌توان با توابع نمایی توصیف کرد. کاهش نمایی زمانی رخ می‌دهد که چیزی با نرخی متناسب با سطح کنونی آن کاهش می‌یابد یا مصرف می‌شود. مثلاً در یک توده‌ی جدای اورانیوم، نیمی از اتم‌ها همیشه در مدت زمان یکسانی دچار واپاشی رادیواکتیو می‌شوند، صرف‌نظر از این‌که تعداد اتم‌های اولیه‌ی موجود در توده چقدر باشد. این زمان واپاشی، نیمه‌عمر نامیده می‌شود. این مفهوم در عرصه‌های دیگر نیز کاربرد دارد. در فصل ۸ خواهیم دید که پزشکان درباره‌ی ایدز کشف کردند که وقتی که یک داروی معجزه‌گر به نام مهار کننده‌ی پروتئاز به

بیماران داده می‌شود، تعداد ذرات ویروس در گردش خون بیمار مبتلا به عفونت HIV به‌صورت نمایی، با نیمه‌عمرِ فقط دو روز، کاهش می‌یابد.

این مثال‌های متنوع، از پویایی واکنش‌های زنجیره‌ای و سوت بازخورد میکروفن گرفته تا زیاد شدن پول در حساب بانکی، نشان‌دهنده‌ی این امر هستند که ظاهراً توابع نمایی و لگاریتم آن‌ها ریشه‌هایی عمیق در آن بخش از حسابان دارند که به تغییرات در طول زمان مربوط می‌شود. و این هم درست است که افزایش و کاهش نمایی مباحث برجسته‌ای در سمتِ مدرن تقاطع حسابان هستند. ولی لگاریتم نخستین بار در سمت دیگر مشاهده شد، زمانی که حسابان هنوز متمرکز بر هندسه‌ی منحنی‌ها بود. در واقع، لگاریتم طبیعی در همان اوایل در مطالعه‌ی مساحت زیر هذلولی $y = ۱/x$ ظاهر شد. در دهه‌ی ۱۶۴۰ داستان مهیج‌تر شد و کشف به عمل آمد که مساحت زیر هذلولی تابعی را تعریف می‌کند که مشخصاً مانند لگاریتم رفتار می‌کند. و واقعاً هم لگاریتم بود. این تابع از قواعد ساختاری مشابهی پیروی می‌کرد و مسئله‌های ضرب را، مانند هر لگاریتم دیگری، به مسئله‌های جمع تبدیل می‌کرد، ولی مبنای آن ناشناخته بود.

هنوز درباره‌ی مساحت زیر منحنی چیزهای زیادی برای یاد گرفتن مانده بود. این یکی از دو چالش بزرگ فراروی حسابان بود. دیگری آن بود که روش نظام‌مندتری برای یافتن خط مماس و شیب منحنی ایجاد شود. راه‌حل این دو مسئله و کشف ارتباط شگفت‌انگیز بین آن‌ها خیلی زود سبب شد که حسابان، و تمام جهان، به‌طور قاطع قدم به دنیای مدرن بگذارند.

فصل ۶

واژگان تغییر

از نظرگاه قرن بیست و یکم، حسابان غالباً به‌عنوان ریاضیاتِ تغییر نگریسته می‌شود. حسابان تغییر را با استفاده از دو مفهوم بزرگ اندازه‌گیری می‌کند: مشتق و انتگرال. مشتق نرخ تغییر را مدل‌سازی می‌کند و موضوع اصلی این فصل است. انتگرال انباشت تغییر را مدل‌سازی می‌کند و در فصل‌های ۷ و ۸ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

مشتق به سؤالاتی مانند «با چه سرعتی؟»، «با چه شیبی؟»، و «با چه میزان حساسیتی؟» پاسخ می‌دهد. این‌ها همه سؤالاتی درباره‌ی *نرخ تغییر* از هر نوع هستند. نرخ تغییر یعنی میزان تغییر متغیر وابسته تقسیم بر میزان تغییر متغیر مستقل. به‌صورت فرمول، نرخ تغییر همیشه به شکل $\Delta y/\Delta x$ است، یعنی میزان تغییر y تقسیم بر میزان تغییر x. گاه از حروف دیگری استفاده می‌شود، ولی ساختار همین است. مثلاً وقتی که زمان متغیر مستقل است، معمول‌تر و روشن‌تر است که نرخ تغییر را به‌صورت $\Delta y/\Delta t$ بنویسیم، که در این‌جا t نشان‌دهنده‌ی زمان است.

آشناترین نمونه‌ی نرخ، سرعت است. وقتی می‌گوییم یک ماشین با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت می‌رود، این عدد یک نرخ تغییر به شمار می‌رود، زیرا سرعت را به‌عنوان $\Delta y/\Delta t$ تعریف می‌کند، که مسافتی (کیلومتر $\Delta y = ۱۰۰$) را که ماشین در یک مدت زمان معین (ساعت $\Delta t = ۱$) می‌پیماید، نشان می‌دهد.

به همین ترتیب، *شتاب* نیز یک نرخ است. شتاب به‌عنوان نرخ تغییر سرعت تعریف می‌شود، و معمولاً به‌صورت $\Delta v/\Delta t$ نوشته می‌شود، که در این‌جا v نشان‌دهنده‌ی سرعت است. وقتی که شرکت خودروساز آمریکایی شورلت ادعا می‌کند که یکی از خودروهای پرقدرت این شرکت، ۸_V کامارو SS، می‌تواند در ۴ ثانیه از ۰

به ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت برسد، در واقع، شتاب را به‌عنوان یک نرخ بیان می‌کند: تغییر سرعت (از ۰ به ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت) تقسیم بر تغییر زمان (۴ ثانیه).

شیب یک سطح شیب‌دار، سومین نمونه از نرخ تغییر است. شیب سطح شیب‌دار به‌صورت خیز عمودی آن Δy تقسیم بر گام افقی آن Δx تعریف می‌شود. سطح شیب‌داری که خیلی سربالا باشد، شیب زیادی دارد. بر اساس قوانین آمریکا، سطح شیب‌دار قابل استفاده برای صندلی چرخدار، باید شیب کمتر از $\frac{۱}{۱۲}$ داشته باشد. زمین صاف شیب صفر دارد.

از میان تمام انواع نرخ تغییر که وجود دارند، شیب منحنی در صفحه‌ی xy مهم‌ترین و مفیدترین آن‌ها است، زیرا می‌تواند نشان‌دهنده‌ی تمام انواع دیگر باشد. بسته به این‌که x و y نماینده‌ی چه چیزی باشند، شیب منحنی می‌تواند نشان‌دهنده‌ی سرعت، شتاب، نرخ پرداختی، نرخ مبادله، بازده حاشیه‌ای سرمایه‌گذاری، و یا هر نوع دیگر نرخ باشد. مثلاً وقتی که نمودار تعداد کالری، y، موجود در x برش نان کشمشی دارچینی را رسم کردیم، نمودار به‌صورت یک خط با شیب ۲۰۰ کالری بر برش بود. این شیب که یک ویژگی هندسی است، نرخ دریافت کالری از نان را، که یک ویژگی تغذیه‌ای است، به ما می‌گوید. به‌طور مشابه، در نمودار مسافت بر حسب زمان برای یک خودرو در حال حرکت، شیب نشان‌دهنده‌ی سرعت خودرو است. لذا شیب نوعی نرخ عمومی است. از آنجا که برای هر تابع یک‌متغیری می‌توان روی صفحه‌ی xy نمودار رسم کرد، لذا می‌توانیم با تعیین شیب نمودار، نرخ تغییر آن را پیدا کنیم.

مشکل این است که نرخ تغییر در دنیای واقعی یا در ریاضیات به‌ندرت ثابت است. بر این اساس، تعریف کردن نرخ دردسرساز می‌شود. اولین مشکل بزرگ در حساب دیفرانسیل این است که منظورمان از نرخ را در زمانی که نرخ تغییر دایماً در حال تغییر است، مشخص کنیم. سرعت‌سنج و دستگاه GPS این مشکل را حل کرده است. این دستگاه‌ها همیشه می‌توانند سرعت را گزارش کنند، ولو آن‌که خودرو در حال سرعت گرفتن یا ترمز کردن باشد. این دستگاه‌ها چطور این کار را انجام می‌دهند؟ چه محاسباتی انجام می‌دهند؟ این را با حسابان می‌توانیم روشن کنیم.

درست همان‌گونه که لازم نیست سرعت ثابت باشد، شیب هم لازم نیست که ثابت باشد. روی یک منحنی، مانند یک دایره یا سهمی یا هر مسیر هموار دیگر (البته به شرطی که کاملاً خط راست نباشد)، قطعاً شیب در بعضی جاها تندتر و در بعضی جاها کندتر است. این در دنیای واقعی نیز درست است. راه‌های کوهستانی در بعضی قسمت‌ها، سربالایی‌ها و سرازیری‌های صعب‌العبوری دارد و در بعضی قسمت‌ها هموار و راحت است. بنابراین، سؤال هم‌چنان پابرجا است: وقتی که شیب مرتب تغییر

می‌کند، چگونه باید آن را تعریف کنیم؟

اولین چیزی که باید دقت کنیم، این است که باید منظورمان از مفهوم نرخ تغییر را بسط دهیم. در مسایل جبر که به فاصله مساوی است با نرخ ضربدر زمان مربوط می‌شود، نرخ همیشه ثابت است. در حسابان این‌گونه نیست. از آنجا که سرعت، شیب، و نرخ‌های دیگر با تغییر متغیر مستقل x یا t، تغییر می‌کنند، لذا خود آن‌ها را نیز باید به‌عنوان تابع در نظر گرفت. نرخ تغییر دیگر نمی‌تواند صرفاً یک عدد باشد. باید آن را به‌عنوان تابع در نظر گرفت.

این کاری است که مفهوم مشتق برای ما انجام می‌دهد. مشتق نرخ تغییر را به‌عنوان یک تابع تعریف می‌کند. برای هر نقطه یا زمان داده شده یک نرخ مشخص می‌کند، ولو آن‌که این نرخ متغیر باشد. در این فصل، خواهیم دید که مشتق چگونه تعریف می‌شود، چه معنایی دارد، و چرا اهمیت دارد.

لُبّ مطلب این‌که اهمیت مشتق در آن است که همه جا یافت می‌شود. قوانین طبیعت، در عمیق‌ترین سطح خود، بر اساس مشتق بیان شده‌اند. انگار قبل از آن‌که ما از نرخ تغییر سر در بیاوریم، طبیعت از آن آگاه بوده است. در زندگی روزمره، هر گاه می‌خواهیم ببینیم که تغییر در یک چیز چه رابطه‌ای با تغییر در یک چیز دیگر دارد، مشتق ظاهر می‌شود. بالا بردن قیمت یک اپلیکیشن چه تأثیری بر تقاضای مصرف کننده برای آن دارد؟ افزایش دادن دوزِ یک داروی استاتین چقدر توانایی آن برای پایین آوردن کلسترول بیمار را تقویت می‌کند یا این‌که خطر بروز عوارض جانبی مانند آسیب کبدی را افزایش می‌دهد؟ هر گاه درباره‌ی رابطه‌ای از هر نوع تحقیق می‌کنیم، می‌خواهیم بدانیم: اگر یک متغیر تغییر کند، یک متغیر مرتبط با آن چقدر تغییر خواهد کرد؟ و این تغییر در چه جهتی خواهد بود، بالا یا پایین؟ این‌ها سؤالاتی درباره‌ی مشتق است. شتاب یک فضاپیما، نرخ رشد جمعیت، بازده حاشیه‌ای سرمایه‌گذاری، گرادیان دما در یک کاسه‌ی سوپ: این‌ها همه و همه مشتق است.

در حسابان، علامت مشتق $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ است. این علامت به‌گونه‌ای است که یادآور یک نرخ تغییر معمولی $\Delta y/\Delta x$ است، جز این‌که دو تغییر $\mathrm{d}y$ و $\mathrm{d}x$ در این‌جا بی‌نهایت کوچک تلقی می‌شوند. این ایده‌ی عجیب جدیدی است که آن را کم‌کم توضیح خواهیم داد، هر چند که خیلی هم نباید تعجب‌آور باشد. بر اساس اصل بی‌نهایت، می‌دانیم که برای حل مسئله‌های پیچیده، باید آن‌ها را به قطعات ریز تقسیم کنیم، قطعات مسئله را تحلیل کنیم، و سپس قطعات کوچک را دوباره کنار هم قرار دهیم تا جواب به دست آید. تغییرات کوچک $\mathrm{d}x$ و $\mathrm{d}y$ در حساب دیفرانسیل، همان قطعات کوچک مسئله هستند. کنار هم قرار دادن مجدد آن‌ها، کار حساب انتگرال است.

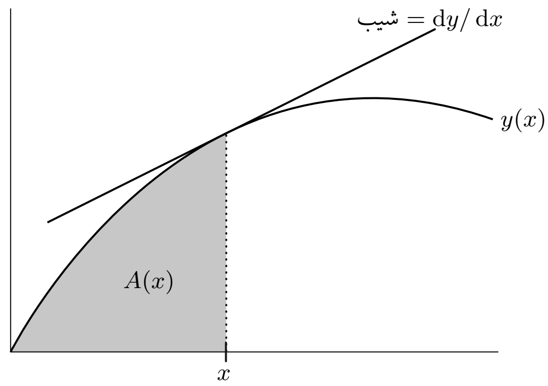
سه مسئله‌ی مرکزی حسابان

برای این‌که آماده‌ی بحث‌های بعدی شویم، لازم است که از همین ابتدا تصویر کلان را در ذهن داشته باشیم. سه مسئله‌ی مرکزی در حسابان وجود دارند. این‌ها به‌صورت شماتیک در نمودار زیر نشان داده شده‌اند:

۱. *مسئله‌ی مستقیم*: با داشتن یک منحنی، شیب آن را در هر جا به دست آورید.

۲. *مسئله‌ی معکوس*: با داشتن شیب منحنی در هر جا، خود منحنی را به دست آورید.

۳. *مسئله‌ی مساحت*: با داشتن یک منحنی، مساحت زیرِ آن را به دست آورید.



این شکل نمودار یک تابع عمومی $y(x)$ را نشان می‌دهد. در این‌جا مشخص نشده است که x و y نشان‌دهنده‌ی چه چیزی هستند، چون اهمیتی ندارد. این تصویر کاملاً عمومی است. یک منحنی را در صفحه نشان می‌دهد. این منحنی می‌تواند نشان‌دهنده‌ی هر تابع یک‌متغیری باشد، و لذا در هر شاخه‌ی ریاضیات یا علوم دیگر که این توابع در آن‌جا کاربرد دارد، یعنی اساساً در همه جا، مورد استفاده قرار گیرد. اهمیت شیب و مساحت آن بعداً توضیح داده خواهد شد. فعلاً آن‌ها را صرفاً به‌عنوان همان چیزی که هستند، یعنی شیب و مساحت، در نظر بگیرید. چیزهایی که برای هندسه‌دانان اهمیت زیادی دارد.

به دو روش می‌توانیم به این منحنی نگاه کنیم، روش قدیمی و روش جدید. در اوایل قرن هفدهم، تا قبل از ظهور حسابان، این‌گونه منحنی‌ها به‌عنوان اشیای هندسی در

نظر گرفته می‌شدند. این‌ها جذابیت خودشان را داشتند. ریاضی‌دانان در پی تعیین خواص هندسی آن‌ها بودند. با داشتن یک منحنی، می‌خواستند بتوانند شیب خط مماس بر آن در هر نقطه، طول قوس منحنی، مساحت زیر منحنی، و غیره را تعیین کنند. در قرن بیست و یکم، ما بیشتر به تابعی که منحنی را ایجاد کرده است، علاقه‌مندیم، زیرا این تابع مدلی از یک پدیده‌ی طبیعی یا فرایند فنی است که خود را به‌صورت منحنی مورد نظر نشان داده است. منحنی در حکم داده‌ها است، ولی چیزی ژرف‌تر در پس آن است. امروزه منحنی را مانند ردپایی در شن در نظر می‌گیریم، سرنخی به فرایندی که آن را ایجاد کرده است. ما به خود آن فرایند—که به‌وسیله‌ی تابع مدل‌سازی می‌شود—علاقه‌مند هستیم، نه به ردپایی که از آن به جا مانده است.

به خاطر تفاوت این دو دیدگاه است که معمای منحنی‌ها با معماهای حرکت و تغییر تصادم پیدا کرد. بدین‌گونه است که هندسه‌ی باستان با علم مدرن تلاقی کرد. با آن‌که ما اکنون در دوران مدرن هستیم، ولی من ترجیح دادم که تصویر را بر اساس دیدگاه قدیمی ترسیم کنم، زیرا صفحه‌ی xy کاملاً آشنا است. این صفحه روشن‌ترین راه برای درک سه مسئله‌ی مرکزی حسابان است، زیرا هر سه مسئله را اگر به‌صورت هندسی بیان کنیم، به آسانی می‌توان در این صفحه نمایش داد. (همین ایده را بر اساس حرکت و تغییر نیز می‌توان با استفاده از مفاهیم پویایی مانند سرعت و مسافت به‌جای منحنی و شیب فرمول‌بندی کرد، ولی این کار را بعداً، پس از آن‌که درک بهتری از هندسه به دست آوردیم، انجام خواهیم داد.)

این سؤالات را باید به‌معنای تابع تفسیر کرد. به عبارت دیگر، وقتی که درباره‌ی شیب منحنی صحبت می‌کنم، منظورم فقط در یک نقطه‌ی خاص نیست. منظور در یک نقطه‌ی دلخواه x است. وقتی که در امتداد منحنی حرکت می‌کنیم، شیب تغییر می‌کند. هدف ما این است که بفهمیم که به‌عنوان تابعی از x، چگونه تغییر می‌کند. به‌طور مشابه، مساحت زیر منحنی هم بستگی به x دارد. این قسمت در شکل با رنگ خاکستری مشخص شده، و در درون آن $A(x)$ نوشته شده است. این مساحت را نیز باید به‌عنوان تابعی از x در نظر گرفت. وقتی که x را افزایش می‌دهیم، خط مقطّع عمودی به‌طرف راست جابه‌جا می‌شود، و مساحت افزایش می‌یابد. ازاین‌رو، مساحت بستگی به مقدار x دارد که انتخاب می‌کنیم.

پس این‌ها سه مسئله‌ی مرکزی هستند. چگونه می‌توانیم شیب متغیر منحنی را تعیین کنیم؟ چگونه می‌توانیم منحنی را از شیب آن بازسازی کنیم؟ و چگونه می‌توانیم مساحت متغیر زیر منحنی را تعیین نماییم؟

این سؤالات، وقتی که در ارتباط با هندسه بیان می‌شود، شاید کسل کننده به نظر

برسد. ولی وقتی که آن‌ها را در دنیای واقعی از نظرگاه قرن بیست و یکم به‌عنوان مسئله‌های حرکت و تغییر تفسیر می‌کنیم، تبدیل به مباحثی بسیار گسترده و قوی می‌شوند. شیب، نرخ تغییر را اندازه‌گیری می‌کند، و مساحت، انباشت تغییر را. بر این اساس، شیب و مساحت در هر رشته‌ای دیده می‌شوند—فیزیک، مهندسی، دانش مالی، پزشکی، و غیره، هر چیزی که در آن تغییر اهمیت دارد. فهمیدن این مسئله‌ها و راه‌حل آن‌ها، دنیایی از تفکر کمّی مدرن را، دست‌کم درباره‌ی توابع یک‌متغیری، به روی ما می‌گشاید. به منظور شفافیت هر چه بیشتر، لازم است اشاره کنم که حسابان چیزهای دیگری نیز دارد؛ توابع چندمتغیری، معادلات دیفرانسیل، و امثال این‌ها نیز هستند. آسیا به نوبت. بعداً به آن‌ها خواهیم رسید.

در این فصل به توابع یک‌متغیری و مشتق آن‌ها (نرخ تغییر آن‌ها) می‌پردازیم، و ابتدا از توابعی که نرخ ثابت دارند، شروع می‌کنیم، تا به مسئله‌ی غامض‌تر توابعی برسیم که با نرخ متغیر تغییر می‌کنند. در این‌جا است که قدرت واقعی حساب دیفرانسیل پدیدار می‌شود—در توضیح دادن تغییر با نرخ متغیر.

وقتی که نرخ تغییر را به‌خوبی بررسی کردیم، به سراغ انباشت تغییر خواهیم رفت، که موضوع دشوارتری است و در فصل بعد بررسی می‌شود. در آن‌جا خواهیم دید که مسئله‌ی مستقیم و مسئله‌ی معکوس، هر چقدر هم متفاوت به نظر برسند، در حقیقت، دو روی یک سکه‌اند، واقعیت شگفت‌انگیزی که قضیه‌ی بنیادی حسابان نامیده می‌شود. این قضیه نشان داده است که نرخ تغییر و انباشت تغییر بیشتر از آن‌چه تصور می‌شود، با هم ارتباط دارند، و این کشف دو نیمه‌ی حسابان را با هم متحد می‌کند.

ولی ابتدا اجازه بدهید از اول شروع کنیم و به سراغ نرخ‌ها برویم.

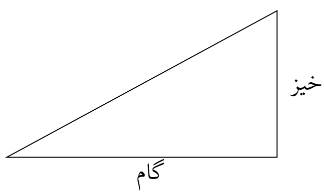
توابع خطی و نرخ ثابت آن‌ها

خیلی از موقعیت‌ها در زندگی روزمره با روابطی خطی توصیف می‌شوند که در آن یک متغیر با متغیر دیگری متناسب است. به‌عنوان مثال:

۱. تابستان سال گذشته، دختر بزرگ‌ترم، لیا، به‌عنوان اولین شغل‌اش در یک مغازه‌ی لباس‌فروشی در مرکز خرید مشغول کار شد. حقوق‌اش ساعتی ۱۰ دلار بود، یعنی وقتی که دو ساعت کار می‌کرد، ۲۰ دلار می‌گرفت. کلاً اگر t ساعت کار می‌کرد، y دلار دریافت می‌کرد، که در این‌جا $y = ۱۰t$.

۲. خودرویی با سرعت ۶۰ مایل بر ساعت در بزرگراه در حرکت است. بنابراین، بعد از یک ساعت، ۶۰ مایل مسافت را طی می‌کند. بعد از ۲ ساعت، ۱۲۰ مایل را می‌پیماید. بعد از t ساعت، مسافت $۶۰t$ مایل را طی می‌کند. رابطه در این‌جا $y = ۶۰t$ است، که در آن y تعداد مایل‌های پیموده شده در t ساعت است.

۳. بر اساس قانون معلولان آمریکا، یک رمپ قابل استفاده برای معلولان به ازای هر ۱۲ اینچ گام افقی، نباید بیشتر از ۱ اینچ خیز داشته باشد. برای رمپی که حداکثر شیب مجاز را داشته باشد، رابطه‌ی بین خیز و گام $y = x/۱۲$ است، که در این‌جا y خیز است و x گام.



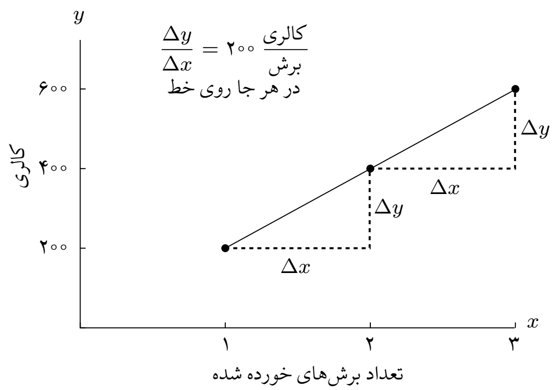
$$\text{شیب} = \frac{\text{خیز}}{\text{گام}}$$

در هر کدام از این روابط خطی، متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل با نرخ ثابت تغییر می‌کند. نرخ حقوق دختر من، مقدار ثابت ۱۰ دلار بر ساعت بود. سرعت خودرو، مقدار ثابت ۶۰ مایل بر ساعت است. و شیب رمپ قابل استفاده برای صندلی چرخ‌دار، که به‌عنوان خیز روی گام تعریف می‌شود، مقدار ثابتی دارد، که برابر با ۱/۱۲ است. همین مطلب برای نان کشمشی دارچینی هم که من خیلی به آن علاقه دارم، درست است؛ این نان با نرخ ۲۰۰ کالری بر برش به بدن کالری می‌دهد.

به زبان فنی حسابان، نرخ همیشه نسبت دو تغییر است: تغییر y تقسیم بر تغییر x، که به‌صورت $\Delta y\Delta x$ نوشته می‌شود. مثلاً اگر من دو برش دیگر نان بخورم، ۴۰۰ کالری دیگر وارد بدنم می‌شوند. بنابراین، نرخ مربوطه عبارت است از:

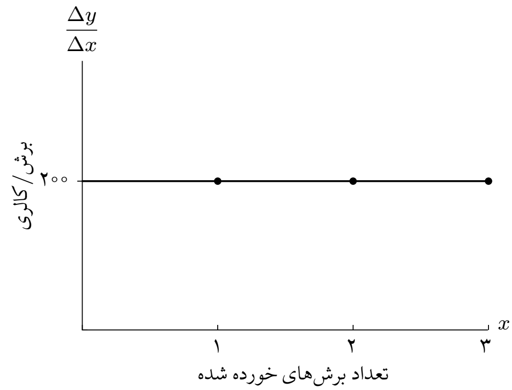
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{۴۰۰ کالری}}{\text{۲ برش}}$$

که به ۲۰۰ کالری بر برش ساده می‌شود. تا این‌جا جای تعجب نیست. ولی نکته‌ی جالب آن است که این نرخ ثابت است. هر چند تا برش هم که قبلاً خورده باشم، باز هم این نرخ ثابت است.



وقتی که یک نرخ ثابت است، وسوسه می‌شویم که آن را صرفاً به‌عنوان یک *عدد* در نظر بگیریم، مانند ۲۰۰ کالری بر برش یا ۱۰ دلار در ساعت یا شیب $\frac{۱}{۱۲}$. این کار در این‌جا مشکلی ایجاد نمی‌کند، ولی بعداً ما را به دردسر خواهد انداخت. در موقعیت‌های پیچیده‌تر، نرخ ثابت نخواهد بود. مثلاً فرض کنید در جاده‌ی پرپیچ‌وخمی پیاده‌روی می‌کنید که در بعضی قسمت‌ها سربالایی یا سرازیری دارد و در بعضی قسمت‌ها هموار است. در این راه ناهموار، شیب تابعی از موقعیت است. اشتباه است که آن را فقط یک عدد در نظر بگیریم. به همین ترتیب، وقتی که یک خودرو گاز می‌دهد یا یک سیاره به دور خورشید می‌گردد، سرعت آن بی‌وقفه تغییر می‌کند. بنابراین، بسیار مهم است که سرعت را به‌عنوان تابعی از زمان در نظر بگیریم. پس از همین الآن بهتر است عادت کنیم. نباید نرخ تغییر را به‌عنوان عدد در نظر بگیریم. *نرخ‌ها تابع هستند.*

چیزی که ممکن است باعث اشتباه شود، این است که توابع نرخ برای رابطه‌های خطی که تا این‌جا در نظر گرفتیم، ثابت هستند. بدین خاطر است که در شرایط خطی اشکال ندارد که آن‌ها را به‌عنوان عدد در نظر بگیریم. وقتی که متغیر مستقل را تغییر می‌دهیم، نرخ تغییر نمی‌کند. نرخ پرداختی دختر من، صرف‌نظر از این‌که چقدر کار کند، ساعتی ۱۰ دلار است، و شیب رمپ در هر جایی از طول آن $\frac{۱}{۱۲}$ است. ولی این نباید باعث فریب شما شود. نرخ باز هم یک تابع است. فقط در این‌جا اتفاقاً یک تابع ثابت است. نمودار تابع ثابت یک خط مسطح است، که در این‌جا برای نان کشمشی دارچینی نشان داده شده است که میزان انرژی آن ۲۰۰ کالری بر برش است.

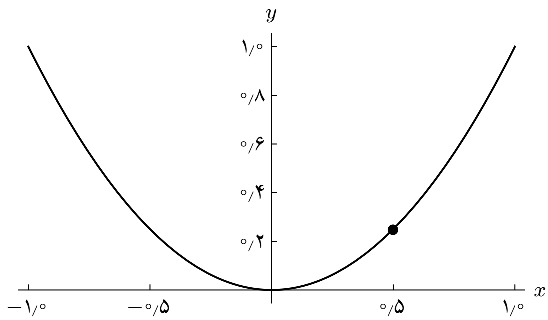


وقتی که در قسمت بعد به سراغ یک رابطه‌ی غیرخطی رفتیم، خواهیم دید که منحنی آن، وقتی که در صفحه‌ی xy ترسیم شود، یک خط مستقیم نیست. به هر حال، خط یا منحنی همیشه چیزهای زیادی را درباره‌ی رابطه‌ای که موجب ایجاد آن شده است، آشکار می‌کند. مانند عکس یا امضای رابطه است. سرنخی است که مشخص می‌کند چه چیزی آن را به وجود آورده است.

به تمایز بین تابع و نمودار تابع دقت کنید. تابع یک قاعده‌ی مجرد است که x را به آن می‌دهید و y را به شما می‌دهد، و این کار را به‌صورت یکتا انجام می‌دهد، یک y برای هر x. به این معنا، تابع تجسم ندارد. وقتی که به یک تابع نگاه می‌کنید، چیزی برای دیدن وجود ندارد. یک موجودیت شبح‌وار است، یک قاعده‌ی انتزاعی. مثلاً این قاعده ممکن است به‌صورت زیر باشد: «عددی را به من بدهید و من همیشه ۱۰ برابر آن عدد را به شما برخواهم گرداند.» بر عکس، نمودار تابع یک چیز قابل مشاهده و تقریباً ملموس است، شکلی که می‌توانید آن را ببینید. به‌طور خاص، نمودار تابعی که در بالا توصیف کردم، خط راستی است با شیب ۱۰ که از مبدأ می‌گذرد، و با معادله‌ی $y = ۱۰x$ تعریف می‌شود. ولی خود تابع، این خط نیست. تابع قاعده‌ای است که خط را ایجاد می‌کند. برای این‌که تابع خودش را نشان بدهد، باید به آن یک x بدهید، y را از آن بگیرید، و این کار را برای همه‌ی xها تکرار کنید، و نتایج را به‌صورت نمودار رسم کنید. وقتی که این کار را کردید، خود تابع نامرئی می‌شود. آن‌چه می‌بینید، نمودار تابع است.

یک تابع غیرخطی و نرخ متغیر آن

وقتی که یک تابع، خطی نیست، نرخ تغییر $\Delta y/\Delta x$ آن ثابت نیست. به بیان هندسی، معنای این مطلب آن است که نمودار تابع منحنی‌ای است که شیب آن از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال، سهمی نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید.



این منحنی $y = x^2$ است، که متناظر با ساده‌ترین دکمه‌ی غیرخطی روی ماشین حساب، یعنی تابع مربعی x^2، است. این مثال مثالی است از مشتق به‌عنوان شیب خط مماس و نیز روشن می‌کند که چرا حد وارد این تعریف می‌شود.

با بررسی سهمی می‌بینیم که بعضی از بخش‌های آن شیب‌دار هستند و برخی بخش‌ها نسبتاً مسطح‌اند. مسطح‌ترین بخش آن در پایین سهمی است، در نقطه‌ای که $x = 0$. در آن‌جا، بدون هر گونه کاری، می‌توانیم ببینیم که مشتق باید صفر باشد. بدان علت باید صفر باشد که خط مماس در پایین مشخصاً محور x است. اگر این خط را به‌عنوان یک سطح شیب‌دار در نظر بگیریم، مشخص است که هیچ‌گونه خیزی ندارد و همه‌ی آن گام است و بنابراین، شیب آن صفر است.

ولی در نقاط دیگر روی سهمی، به‌سادگی معلوم نمی‌شود که شیب خط مماس چقدر است. در واقع، اصلاً بدیهی نیست. برای مشخص کردن آن، یک آزمایش فکری به سبک اینشتین می‌کنیم. می‌خواهیم مانند بزرگ کردن یک عکس، در یک نقطه‌ی دلخواه (x, y) روی منحنی زوم کنیم و همیشه آن نقطه را در مرکز میدان دید نگه‌داریم، و ببینیم که با این کار شاهد چه چیزی خواهیم بود. مانند آن است که گویی زیر میکروسکوپ به قطعه‌ای از منحنی نگاه می‌کنیم و مرتب بزرگ‌نمایی را بیشتر می‌کنیم. هم‌چنان‌که زوم را بیشتر و بیشتر می‌کنیم، قطعه‌ی سهمی راست‌تر

و راست‌تر به نظر می‌رسد. در حد بزرگ‌نمایی *بی‌نهایت* (یعنی زوم کردن روی یک قطعه‌ی *بی‌نهایت‌کوچک* منحنی در اطراف نقطه‌ی مورد نظر)، قطعه‌ی بزرگ شده قاعدتاً به یک خط راست نزدیک می‌شود. در صورتی که این اتفاق بیفتد، این خط راست حدی به‌عنوان *خط مماس* در آن نقطه بر منحنی تعریف می‌شود، و شیب آن به‌عنوان مشتق در آن‌جا تعریف می‌گردد.

دقت کنید که در این‌جا داریم از «اصل بی‌نهایت» استفاده می‌کنیم—سعی می‌کنیم یک منحنی پیچیده را با تقسیم کردن آن قطعات راست بی‌نهایت‌کوچک، ساده‌تر کنیم. این کاری است که همیشه در حسابان انجام می‌دهیم. کار با شکل‌های خمیده دشوار است؛ اما کار کردن با شکل‌های راست آسان است، ولو آنکه تعداد آن‌ها بی‌نهایت باشد و حتی اگر بی‌نهایت‌کوچک باشند. محاسبه‌ی مشتق به این روش، یک روش اساسی در حسابان است و یکی از کاربردهای بنیادین اصل بی‌نهایت به شمار می‌رود.

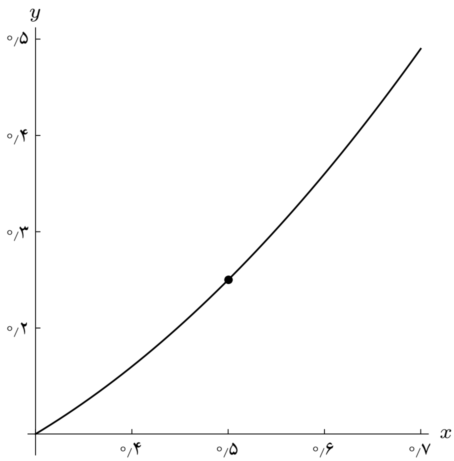
برای انجام آزمایش فکری، باید نقطه‌ای را روی منحنی برای زوم کردن انتخاب کنیم. هر نقطه‌ای را می‌توان انتخاب کرد، ولی از نظر سهولت محاسباتی، یک نقطه‌ی مناسب نقطه‌ای از سهمی است که بالای $x = \frac{۱}{۲}$ قرار دارد. در نمودار فوق، آن نقطه را با یک دایره مشخص کرده‌ام. در صفحه‌ی xy، این نقطه در

$$(x, y) = \left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$$

یا، با نماد اعشاری، در $(x, y) = (۰/۵, ۰/۲۵)$ قرار دارد. علت این‌که در این نقطه y برابر با $\frac{۱}{۴}$ است، این است که برای این‌که نقطه روی سهمی باشد، باید تابع رابطه‌ی $y = x^۲$ باشد، چرا که تمام نقاط روی سهمی از این رابطه پیروی می‌کنند؛ در واقع، همین رابطه است که یک نقطه را به‌عنوان عضوی از منحنی سهموی تعریف می‌کند. لذا در $x = \frac{۱}{۲}$، مقدار y باید به‌صورت زیر باشد:

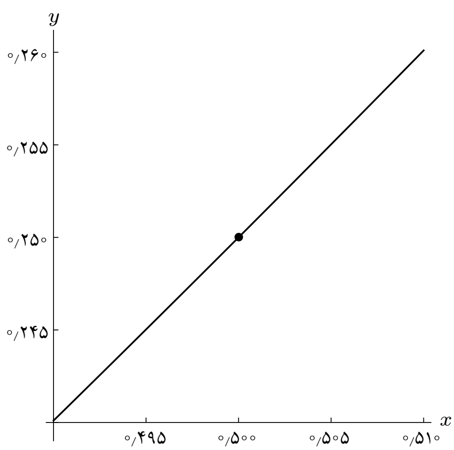
$$y = x^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}.$$

حالا آماده‌ایم که به روی نقطه‌ی مورد نظر زوم کنیم. نقطه‌ی $(x, y) = ۰/۵, ۰/۲۵$ را در مرکز میکروسکوپ قرار دهید. به‌کمک گرافیک کامپیوتری، روی قطعه‌ی کوچکی از منحنی در اطراف آن نقطه زوم کنید. اولین بزرگ‌نمایی در این‌جا نشان داده شده است.



شکل کلی سهمی در این نمای بزرگ شده دیگر مشاهده نمی‌شود. در عوض، تنها قوسی با انحنای اندک می‌بینیم. این قطعه‌ی کوچک سهمی، که بین $x = ۰/۳$ و $x = ۰/۷$ واقع است، نسبت به کل سهمی خیلی کمتر خمیده به نظر می‌رسد.

باز هم این قطعه را بزرگ می‌کنیم و روی ناحیه‌ی بین $x = ۰/۴۹$ و $x = ۰/۵۱$ زوم می‌کنیم. این بزرگ‌نمایی جدید خیلی مستقیم‌تر از قبیل به نظر می‌رسد، گرچه حقیقتاً یک خط راست نیست، چون به هر حال، بخشی از یک سهمی است.



روند، مشخص است. هر چه بیشتر زوم می‌کنیم، قطعات راست‌تر به نظر می‌رسند. با اندازه‌گیری خیز روی گام، $\Delta y/\Delta x$، برای این قطعه‌ی تقریباً مستقیم، و زوم کردن

بیشتر و بیشتر، عملاً داریم حد شیب قطعه یعنی $\Delta y/\Delta x$ را، زمانی که Δx به سمت صفر میل می‌کند، می‌گیریم. گرافیک کامپیوتری به‌روشنی نشان می‌دهد که شیب این خط تقریباً مستقیم مرتب به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، که متناظر با خطی با زاویه‌ی ۴۵ درجه است.

با کمی کارهای جبری، می‌توانیم ثابت کنیم که شیب حدی *دقیقاً* ۱ است. (در فصل ۸ نحوه‌ی انجام این محاسبه را خواهیم دید). به‌علاوه، با انجام همین محاسبه در هر x دیگر، غیر از $x = \frac{۱}{۲}$، معلوم می‌شود که شیب حدی—و لذا شیب خط مماس—در هر نقطه‌ی (x, y) روی سهمی برابر با $۲x$ است. و یا به زبان حسابان:

مشتق $x^۲$، $۲x$ است.

گرچه شاید وسوسه شویم که قانون مشتق را در همین جا اثبات کنیم، ولی فعلاً بهتر است آن را بپذیریم و ببینیم معنای آن چیست. اولاً نشان می‌دهد که در نقطه‌ای که در آن $x = \frac{۱}{۲}$ است، شیب باید برابر با $۲x = ۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$ باشد، که درست همان چیزی است که با گرافیک کامپیوتری دیدیم. از طرف دیگر، این فرمول پیش‌بینی می‌کند که در پایین سهمی در نقطه‌ی $x = ۰$، شیب باید ۲×۰ یعنی صفر باشد، و قبلاً دیدیم که همین‌طور است. و سرانجام، فرمول $۲x$ پیش‌بینی می‌کند که به تدریج که در طرف راست منحنی بالاتر می‌رود، شیب هم افزایش پیدا می‌کند؛ هر چه x بزرگ‌تر شود، شیب ($= ۲x$) نیز باید بزرگ‌تر شود، یعنی منحنی شیب‌دارتر شود، و همین‌طور هم هست.

آزمایش ما بر روی سهمی به ما کمک می‌کند که دو نکته را درباره‌ی مشتق درک کنیم. مشتق فقط در صورتی تعریف شده است که وقتی روی منحنی زوم می‌کنیم، به یک خط مستقیم حدی نزدیک شود. در بعضی منحنی‌های ناهنجار این حالت رخ نمی‌دهد. مثلاً اگر منحنی به شکل V باشد و در یک نقطه گوشه‌ی تندی داشته باشد، وقتی روی آن نقطه زوم می‌کنیم، هم‌چنان مانند یک گوشه به نظر خواهد رسید. هر چقدر هم منحنی را بزرگ کنیم، گوشه هرگز از بین نمی‌رود. منحنی در آن‌جا هرگز راست به نظر نخواهد رسید. بر این اساس، یک منحنی V_شکل در محل گوشه خط مماس یا شیب تعریف شده ندارد، و لذا در آن‌جا مشتق ندارد.

با این حال، وقتی که یک منحنی هر چه روی آن در هر نقطه زوم می‌کنیم، مستقیم‌تر به نظر می‌رسد، گفته می‌شود که منحنی *هموار* است. در تمام این کتاب، فرض من بر این است که منحنی‌ها و فرایندهای حسابان هموار هستند، کما این‌که پیشگامان این رشته نیز همین فرض را در نظر می‌گرفتند. اما در حسابان مدرن، شیوه‌هایی برای

کار با منحنی‌هایی که هموار نیستند، ابداع شده است. دشواری‌ها و ناهنجاری‌های ناشی از منحنی‌های ناهموار گاه در کاربردهای مختلف به‌علت جهش ناگهانی یا هر گونه قطع‌شدگی رفتار یک سیستم فیزیکی رخ می‌دهد. مثلاً وقتی که در یک مدار الکتریکی، کلید را می‌زنیم، جریان که تا آن زمان قطع بوده، ناگهان با شدت قابل‌توجهی برقرار می‌شود. در نمودار جریان بر حسب زمان، افزایش ناگهانی و تقریباً عمودی با روشن شدن جریان صورت می‌گیرد که به‌صورت یک جهش گسسته ظاهر می‌شود. گاه راحت‌تر این است که این گذار ناگهانی را به‌عنوان یک جهش واقعاً گسسته مدل‌سازی کنیم، که در این صورت تابع جریان بر حسب زمان در لحظه‌ای که کلید روشن می‌شود، مشتق نخواهد داشت.

قسمت زیادی از نخستین دوره‌ی حسابان در دبیرستان یا دانشگاه به قواعد محاسبه‌ی مشتق مانند آن‌چه در بالا برای $x^۲$ گفتیم، اختصاص داده می‌شود، البته برای دیگر دکمه‌های روی ماشین حساب، مثلاً این‌که «مشتق $\sin x$ برابر است با $\cos x$» یا «مشتق $\ln x$ برابر است با $۱/x$». اما چیزی که برای ما اهمیت بیشتری دارد، فهمیدن معنای مشتق و استفاده از این تعریف انتزاعی در عمل است. برای این منظور، به سراغ دنیای واقعی می‌رویم.

مشتق به‌عنوان نرخ تغییر طول روز

در فصل ۴، داده‌های مربوط به تغییرات فصلی طول روز را بررسی کردیم. گرچه هدف ما در آن‌جا نشان دادن ایده‌هایی در خصوص امواج سینوسی، برازش منحنی، و فشرده‌سازی داده‌ها بود، ولی اکنون می‌توانیم از آن داده‌ها برای روشن کردن نرخ متغیر تغییر و توضیح دادن مشتق در یک موقعیت دیگر استفاده کنیم.

داده‌های قبلی مربوط به تعداد دقایق طول روز—مدت زمان بین طلوع و غروب خورشید—در شهر نیویورک در هر کدام از روزهای سال ۲۰۱۸ بود. مشتق در این موقعیت به‌معنای نرخ بلند یا کوتاه شدن طول روز از روزی به روز بعد است. مثلاً در روز ۱ ژانویه، مدت زمان بین طلوع و غروب خورشید ۹ ساعت و ۱۹ دقیقه و ۲۳ ثانیه است. در روز ۲ ژانویه، اندکی بلندتر می‌شود: ۹ ساعت و ۲۰ دقیقه و ۵ ثانیه. این ۴۲ ثانیه‌ی اضافی طول روز (معادل با ۰٫۷ دقیقه) نشان می‌دهد که در آن روز خاص سال، روز با چه سرعتی بلندتر می‌شود. در آن زمان، روز با سرعت حدود ۰٫۷ دقیقه در روز بلندتر می‌شود.

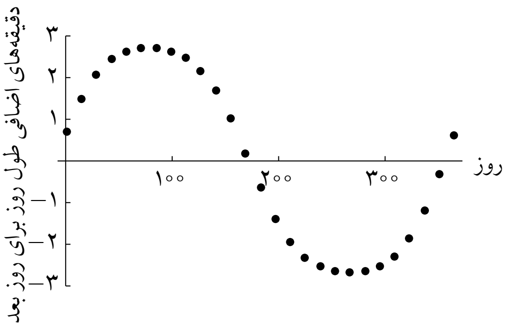
برای مقایسه، نرخ تغییر دو هفته بعد را در روز ۱۵ ژانویه در نظر بگیرید. بین آن

روز و روز بعد، مدت طول روز ۹۰ ثانیه افزایش می‌یابد، که به‌معنای نرخ بلند شدن ۱٫۵ دقیقه در روز است، که بیش از دو برابر نرخ ۰٫۷ دقیقه در روز متعلق به دو هفته قبل از آن است. لذا در ماه ژانویه، نه تنها روزها بلندتر می‌شود، بلکه سرعت بلند شدن آن‌ها نیز هر روز بیشتر می‌شود.

این روند خوشایند تا چند هفته‌ی بعد ادامه پیدا می‌کند. با آمدن بهار، روزها هم‌چنان بلندتر می‌شود—و سرعت بلندتر شدن آن هم بیشتر می‌شود. در روز اعتدال بهاری، ۲۰ مارس [۲۹ اسفند]، نرخ افزایش طول روز به حداکثر می‌شود که برابر با ۲٫۷۲ دقیقه در روز است. این روز را می‌توانید در نمودار قبلی در فصل ۴ پیدا کنید. این روز، روز ۷۹ است، تقریباً در ربع مسیر از سمت چپ، که در آن موج طول روز با بیشترین شیب در حال افزایش است. این قابل درک است: در جایی که نمودار بیشترین شیب را دارد، با بیشترین سرعت صعود می‌کند، بدان معنا که در آن‌جا مشتق بیشترین مقدار را دارد و روزها با بیشترین سرعت در حال بلندتر شدن است. تمام این‌ها در نخستین روز بهار اتفاق می‌افتد.

به‌عنوان حالت متضاد آن، کوتاه‌ترین روزهای سال را در نظر بگیرید. این روزها بدبیاری مضاعف است. در آن روزهای سرد و تاریک زمستان، نه تنها طول روز به‌طور افسرده کننده‌ای کوتاه است؛ بلکه از روزی به روز دیگر چندان تغییری هم نمی‌کند، که این بر جمود آن می‌افزاید. ولی البته معقول است. کوتاه‌ترین روزها در قعر موج طول روز اتفاق می‌افتد، و در آن پایین، موج مسطح است (در غیر این صورت، در پایین نمی‌بود، یا در حال بهتر شدن بود یا بدتر شدن). به‌علت مسطح بودن پایین، مشتق در آن‌جا صفر است، بدان معنا که نرخ تغییر، لااقل به‌طور لحظه‌ای، متوقف می‌شود. در آن روزها، ممکن است این احساس به آدم دست بدهد که هرگز قرار نیست بهار از راه برسد.

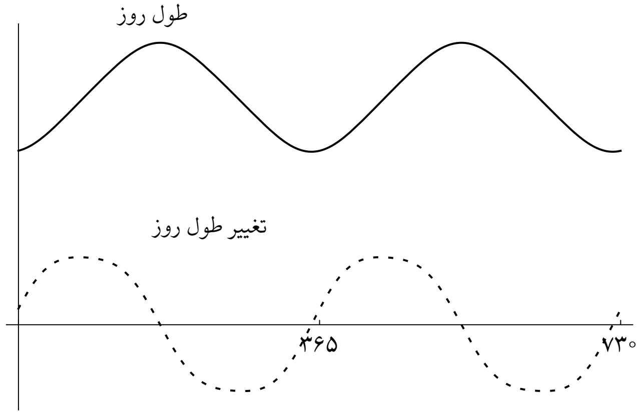
تا این‌جا دو زمان از سال را که برای بسیاری از ما معنای عاطفی دارند، در نظر گرفتیم: حوالی اعتدال بهاری و انقلاب زمستانی، ولی اگر تمام سال را به‌عنوان یک کل در نظر بگیریم، می‌تواند آموزنده‌تر باشد. به منظور بررسی تغییرات فصلی در نرخ تغییر طول روز، من آن را در فواصل متناوب در طول سال اندازه‌گیری کردم. این اندازه‌گیری را از روز ۱ ژانویه شروع کردم و پس از آن هر دو هفته یک بار ادامه دادم. نتایج در نمودار زیر نشان داده شده است.



محور عمودی نرخ تغییر روزانه را نشان می‌دهد، یعنی تعداد دقیقه‌های اضافی طول روز از یک روز به روز بعد. محور افقی شماره‌ی روز را از ۱ (۱ ژانویه) تا ۳۶۵ (۳۱ دسامبر) نشان می‌دهد.

نرخ تغییر مانند یک موج، بالا و پایین می‌رود. این نرخ در اواخر زمستان و اوایل بهار، که روزها بلندتر می‌شوند، از مقادیر مثبت شروع می‌کند، و حوالی روز ۷۹ (اعتدال بهاری، ۲۰ مارس [۲۹ اسفند]) به اوج می‌رسد. همان‌طور که قبلاً دیدیم، در این زمان است که روزها با بیشترین سرعت، در حدود ۲٫۷۲ دقیقه در روز، بلندتر می‌شود. ولی بعد از آن، روند نزولی آغاز می‌شود. نرخ شروع به سقوط می‌کند و پس از انقلاب تابستانی در روز ۱۷۲ (۲۱ ژوئن [۳۱ خرداد]) منفی می‌شود. علت منفی شدن نرخ آن است که روزها در این زمان کوتاه‌تر می‌شوند؛ طول هر روز از روز قبل اندکی کوتاه‌تر است. این نرخ در حوالی ۲۲ سپتامبر [۳۱ شهریور] به حداقل می‌رسد و روزها با بیشترین سرعت کوتاه‌تر می‌شوند. نرخ هم‌چنان منفی می‌ماند (البته نه در حد قبل)، تا این‌که در زمان انقلاب زمستانی در روز ۳۵۵ (۲۱ دسامبر [۳۰ آذر]) روزها دوباره شروع به بلندتر شدن، البته به‌صورت تقریباً نامحسوس، می‌کنند.

جالب است که این موج را با موجی که قبلاً در فصل ۴ دیدیم، مقایسه کنیم. وقتی که هر دو را در یک منحنی ترسیم کنیم و مقیاس آن‌ها را به‌گونه‌ای تغییر دهیم که هر دو دامنه‌ی یکسانی داشته باشند، به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند.



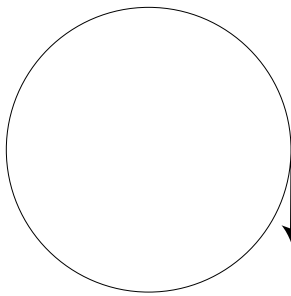
(در این‌جا داده‌ها را برای دو سال نشان داده‌ام تا تکراری بودن موج‌ها مشخص شود. هم‌چنین، برای این مقایسه‌ی بین آن‌ها آسان‌تر شود، نقطه‌ها را به هم وصل کرده و اعداد را از محور عمودی حذف کرده‌ام، تا بتوانید بیشتر به شکل و زمان‌بندی موج‌ها توجه کنید.)

اولین چیزی که متوجه می‌شویم، این است که موج‌ها همگام نیستند. اوج آن‌ها هم‌زمان نیست. موج طول روز تقریباً در وسط سال به اوج می‌رسد، در حالی که نرخ تغییر آن حدود سه ماه بعد اوج می‌گیرد. با توجه به اینکه کامل شدن حرکت بالا و پایین هر موج دوازده ماه طول می‌کشد، این اختلاف معادل ربع چرخه است.

نکته‌ی دیگری که دقت می‌کنیم، این است که هر دو موج، با تفاوتی اندک، شبیه یکدیگر هستند. با آن‌که روشن است که روابط نزدیکی با یکدیگر دارند، ولی موج مقطع کمتر از موج توپر متقارن است و اوج‌ها و حضیض‌های آن مسطح‌تر است.

علت این‌که تا این حد وارد جزئیات می‌شوم، این است که این امواج دنیای واقعی تصویری، گویی از پشت عینک دودی، از یک خاصیت مهمی امواج سینوسی را نشان می‌دهند، و آن این‌که وقتی که یک متغیر تابع یک الگوی کامل موج سینوسی است، نرخ تغییر آن نیز یک موج سینوسی کامل است، جز این‌که از نظر زمان یک ربع چرخه جلوتر است. این خاصیت خودزایی، مخصوص امواج سینوسی است. هیچ نوع موج دیگری چنین خاصیتی ندارد. حتی این را می‌توان به‌عنوان تعریف امواج سینوسی در نظر گرفت. از این نظر، داده‌های ما نشان‌دهنده‌ی پدیده‌ی شگفت‌آور نوزایی هستند که در ذات امواج سینوسی کامل است. (بعداً در رابطه با تحلیل فوریه، که یکی از شعبه‌های حسابان است که امروزه منجر به کاربردهای بسیار هیجان‌انگیزی شده است، دوباره به این موضوع بر خواهیم خورد و توضیحات بیشتری درباره‌ی آن ارائه خواهیم کرد.)

حالا سعی می‌کنم برایتان توضیح دهم که اختلاف ربع چرخه‌ای از کجا حاصل می‌شود. به‌خاطر همین مفهوم است که وقتی که نرخ تغییر امواج سینوسی را محاسبه می‌کنیم، باز هم به امواج سینوسی می‌رسیم. کلید موضوع آن است که امواج سینوسی در ارتباط با حرکت یکنواخت دایره‌ای هستند. به‌خاطر آورید که وقتی که یک نقطه روی یک دایره با سرعت ثابت حرکت می‌کند، حرکت بالا و پایین آن یک موج سینوسی را رسم می‌کند. (البته حرکت راست و چپ آن نیز همین‌طور است.) با در نظر گرفتن این موضوع، به نمودار زیر توجه کنید.



این نمودار نقطه‌ای را نشان می‌دهد که دور یک دایره در جهت گردش عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. البته این نقطه نشان‌دهنده‌ی یک شیء فیزیکی یا نجومی نیست. به‌معنای گردش زمین به دور خورشید نیست، و هیچ ربطی هم به فصول ندارد. فقط یک نقطه‌ی انتزاعی است که دور یک دایره می‌چرخد. جابه‌جایی آن به طرف شرق (یا به اختصار، «شرقیت» آن) مانند یک موج سینوسی افزایش و کاهش می‌یابد. وقتی که نقطه به بیشینه‌ی شرقیت خود می‌رسد، به‌طوری که در نمودار نشان داده شده است، مشابه بیشینه‌ی یک موج سینوسی یا بلندترین روز سال است. سؤال این است: وقتی که نقطه در بیشینه‌ی شرق است و موج سینوسی در اوج شرقیت است، بعد چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طوری که نمودار نشان می‌دهد، در شرقی‌ترین محل آن، نقطه رهسپار جنوب می‌شود، که این با پیکان به طرف پایین نشان داده شده است. ولی جنوب، روی قطب‌نما، ۹۰ درجه بعد از شرق است، و ۹۰ درجه ربع یک چرخه است. آها! اختلاف ربع چرخه‌ای از این‌جا می‌آید. به‌خاطر شکل هندسی دایره، همیشه بین هر موج سینوسی و موج حاصل از مشتق آن، یعنی نرخ تغییر آن، یک ربع چرخه اختلاف وجود دارد. در این تمثیل، جهت حرکت نقطه مانند نرخ تغییر آن است. یعنی مشخص

می‌کند که نقطه بعداً کجا خواهد رفت، و لذا محل آن چه تغییری خواهد کرد. به‌علاوه، خود این راستای قطب‌نمایی پیکان نیز ضمن گردش نقطه به دور دایره، با سرعت ثابت به‌صورت دایره‌ای چرخش می‌کند، بنابراین، جهت قطب‌نمایی پیکان نیز بر حسب زمان تابع یک الگوی موج سینوسی است. و از آنجا که جهت قطب‌نمایی مانند نرخ تغییر است، پس معلوم می‌شود که نرخ تغییر هم تابع یک الگوی موج سینوسی است. این همان خاصیت خودزایی است که سعی در فهمیدن آن داشتیم. امواج سینوسی، موج سینوسی با جابه‌جایی ۹۰ درجه تولید می‌کنند. (افراد متبحر متوجه خواهند بود که من دارم سعی می‌کنم بدون فرمول توضیح دهم که چرا مشتق تابع سینوس، تابع کسینوس است، که درست همان تابع سینوس است که به اندازه‌ی ربع دور جابه‌جا شده است.)

در سیستم‌های نوسانی دیگر هم اختلاف فاز ۹۰ درجه‌ای مشابهی دیده می‌شود. وقتی که یک آونگ به دو طرف تاب می‌خورد، سرعت آن وقتی که از قسمت پایین عبور می‌کند، بیشینه است، در حالی که زاویه‌ی آن یک ربع دور بعد از آن، وقتی که در آخرین قسمت راست است، بیشینه است. نمودار زاویه بر حسب زمان و سرعت بر حسب زمان دو موج سینوسی تقریبی را نشان می‌دهد، که با اختلاف فاز ۹۰ درجه نوسان می‌کنند.

نمونه‌ی دیگر آن، مدل ساده شده‌ای از تعاملات صیاد و صید در زیست‌شناسی است. جمعیتی از کوسه‌ها را در نظر بگیرید که جمعیتی از ماهی‌ها را شکار می‌کنند. وقتی که ماهی‌ها در سطح بیشینه‌ی جمعیت خود هستند، جمعیت کوسه‌ها با بیشترین نرخ افزایش می‌یابد، زیرا ماهی‌های زیادی برای خوردن وجود دارند. جمعیت کوسه‌ها به افزایش خود ادامه می‌دهد و یک ربع چرخه بعد از آن به سطح بیشینه می‌رسد، که در این زمان، جمعیت ماهی‌ها سقوط کرده است، زیرا یک ربع چرخه قبل از آن شکار با شدت جریان داشته است. تحلیل این مدل نشان می‌دهد که دو جمعیت با اختلاف فاز ۹۰ درجه نوسان می‌کنند. نوسان‌های مشابه صیاد ـ صید در جاهای دیگر طبیعت نیز دیده می‌شوند، مثلاً در افت‌وخیزهای سالیانه‌ی جمعیت خرگوش‌های صحرایی و سیاه‌گوش‌های کانادایی که شرکت‌های تولید کننده‌ی خز در قرن نوزدهم ثبت کرده‌اند (هر چند که توضیح واقعی این نوسانات بی‌شک مثل بقیه‌ی پدیده‌های زیست‌شناسی، پیچیده‌تر از این است).

با مراجعه‌ی مجدد به داده‌های طول روز، می‌بینیم که متأسفانه این‌ها یک موج سینوسی دقیق نیستند. این‌ها نیز مجموعه‌ی ذاتاً گسسته‌ای از نقاط هستند، یک نقطه به ازای هر روز، و هیچ‌گونه داده‌ای بین آن‌ها وجود ندارد. بر این اساس، بر خلاف آن‌چه در حسابان مورد نیاز است، یک پیوستار از نقطه‌ها را در اختیار ما قرار نمی‌دهد. بنابراین، به‌عنوان آخرین مثال برای مشتق، به سراغ موردی می‌رویم که در آن می‌توانیم با

هر تفکیک‌پذیری که خواستیم، حتی تا حد میلی‌ثانیه، داده‌ها را جمع‌آوری کنیم.

مشتق به‌عنوان سرعت لحظه‌ای

شامگاه ۱۶ اوت ۲۰۰۸ در پکن، هوا ساکن بود. ساعت ده و سه دقیقه، هشت مرد که سریع‌ترین مردان جهان بودند، برای مسابقه‌ی فینال المپیک در رشته‌ی دو ۱۰۰ متر به صف شدند. یکی از آن‌ها، یک دونده‌ی بیست و یک ساله‌ی جامایکایی به نام اوسین بولت در این مسابقات نسبتاً تازه‌وارد بود. او که بیشتر برای دو ۲۰۰ متر شهرت داشت، به مربی‌اش التماس کرده بود اجازه دهد که در دوِ کوتاه‌تر شرکت کند، و در طول سال گذشته در آن مهارت زیادی پیدا کرده بود.

او شبیه دوندگان دیگر نبود. مردی هیکلی با قد ۶ فوت و ۵ اینچ (۱/۹۶ متر)، با قدم‌هایی بلند و سریع بود. در کودکی بیشتر بر روی فوتبال و کریکت تمرکز کرده بود، تا آن‌که مربی کریکت‌اش متوجه سرعت بالای او شد و پیشنهاد کرد که ورزش دو را امتحان کند. در سال‌های نوجوانی، مرتب در دو پیشرفت می‌کرد، ولی هیچ‌گاه ورزش یا خودش را خیلی جدی نمی‌گرفت. پسری غیرمعمول و شیطان بود و علاقه به سر به سر دیگران گذاشتن داشت.

آن شب در پکن، بعد از آن‌که همه‌ی ورزشکاران معرفی شدند و دوربین‌های تلویزیونی از آن‌ها عکس گرفتند، ورزشگاه ساکت شد. دوندگان در جایگاه شروع قرار گرفتند و آماده‌ی دویدن شدند. یکی از مسئولان فریاد زد: «آماده. حرکت!» و تپانچه‌اش را شلیک کرد.

بولت از جایگاه شروع بیرون پرید، ولی جهش او به اندازه‌ی دیگر دوندگان المپیک انفجاری نبود. واکنش کندتر او سبب شد که در ابتدای مسابقه از میان هشت نفر، نفر هفتم باشد. او به‌تدریج سرعت گرفت و پس از سی متر تقریباً به وسط دسته رسید. بعد، در حالی که هنوز هم مانند قطاری سریع‌السیر شتاب می‌گرفت، از بقیه‌ی دوندگان به‌سرعت جلو افتاد.

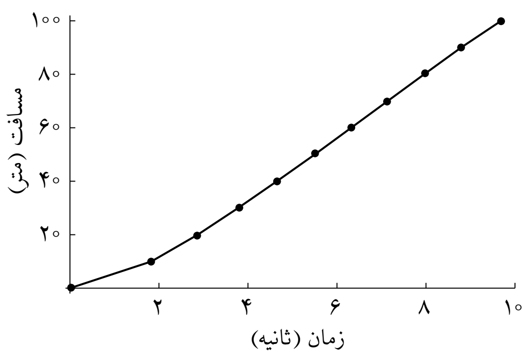
وقتی به هشتاد متر رسید، نگاهی به طرف راست خود انداخت تا ببیند رقبای اصلی‌اش کجا هستند. وقتی که متوجه شد که چقدر از آن‌ها جلو زده است، به‌طور مشهودی سرعتش را کم کرد، دست‌هایش را پایین انداخت، و در حالی که از خط پایان عبور می‌کرد، با دست به روی قفسه‌ی سینه‌اش زد. بعضی از مفسران این حرکت را نوعی فخرفروشی دانستند، و برخی دیگر آن را خوش‌حالی و شعف پیروزی قلمداد کردند، ولی به هر حال، مشخص بود که بولت در پایان نیازی نمی‌دید که خیلی تند بدود، به‌طوری که افراد مختلف به گمانه‌زنی پرداختند که او واقعاً چقدر می‌توانست سریع باشد. از قضا، با وجود ابراز شادمانی (و بند کفش باز شده‌اش) توانست رکورد جهانی جدید ۹٫۶۹ ثانیه را بر جای بگذارد. یکی از مقامات مسئول او را به‌خاطر رفتار غیرورزشی مورد انتقاد قرار داد، ولی او قصد هیچ‌گونه بی‌احترامی نداشت. او بعداً به خبرنگاران گفت: «این اصلاً اخلاق من است. من دوست دارم خوش بگذرانم، همیشه ریلکس باشم.»

سرعت او چقدر بود؟ خب، ۱۰۰ متر در ۹٫۶۹ ثانیه یعنی ۱۰٫۳۲ = ۱۰۰/۹٫۶۹ متر بر ثانیه. با واحدهای آشناتر، این حدود ۳۷ کیلومتر بر ساعت، یا ۲۳ مایل بر ساعت است. ولی این سرعت *متوسط* او در تمام مدت مسابقه بود. در ابتدا و انتهای مسابقه سرعتش از این کمتر و در وسط آن، سرعتش از این بیشتر بود.

اطلاعات مفصل‌تر از زمان‌های کرونومتر ثبت شده در هر ۱۰ متر مسیر در دسترس است. او ۱۰ متر اول را در ۱٫۸۳ ثانیه دوید، که معادل با سرعت متوسط ۵٫۴۶ متر بر

ثانیه است. بالاترین سرعت مقطعی او بین ۵۰ به ۶۰ متر، ۶۰ به ۷۰ متر، و ۷۰ به ۸۰ متر بود. او هر کدام از این مقاطع ۱۰ متری را در ۰٫۸۲ ثانیه دوید، که معادل با سرعت متوسط ۱۲٫۲ متر بر ثانیه است. در ۱۰ متر آخر، که سرعتش را کم کرد و از فرم خارج شد، سرعت متوسط او به ۱۱٫۱ متر بر ثانیه سقوط کرد.

ما انسان‌ها به‌گونه‌ای تکامل یافته‌ایم که الگوها را زود تشخیص می‌دهیم، بنابراین، معمولاً خیلی آموزنده‌تر است که به جای این‌که مانند بالا عددها را بررسی کنیم، به بررسی نمودار آن‌ها بپردازیم. نمودار زیر زمان‌های سپری شده را برای عبور بولت از خط ۱۰ متر، ۲۰ متر، ۳۰ متر، و الی آخر نشان می‌دهد، تا زمانی که بعد از ۹٫۶۹ ثانیه از خط پایان در نشانه‌ی ۱۰۰ متر عبور کرد:



من نقطه‌ها را با خط راست به هم وصل کرده‌ام تا از نظر بصری مفید باشد، ولی در نظر داشته باشید که فقط نقطه‌ها داده‌های واقعی هستند. نقطه‌ها و پاره‌خط‌های بین آن‌ها بر روی هم یک منحنی چندضلعی تشکیل می‌دهند. شیب پاره‌خط‌ها در سمت چپ از همه کمتر است، که متناظر با سرعت پایین‌تر بولت در شروع مسابقه است. هر چه به طرف راست می‌رود، منحنی بیشتر به بالا کشیده می‌شود، بدان معنا که او در حال شتاب گرفتن است. سپس با هم یک خط تقریباً مستقیم تشکیل می‌دهند، که نشان‌دهنده‌ی سرعت بالا و پایداری است که در اکثر مدت مسابقه آن را حفظ کرده است.

به‌طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که او در چه زمانی بیشترین سرعت مطلق را داشته است، و این سرعت در کدام قسمت از مسیر مسابقه اتفاق افتاده است. می‌دانیم که سریع‌ترین سرعت *متوسط* او، در یک مقطع ۱۰ متری، جایی بین ۵۰ و ۸۰ متر رخ داده است، ولی سرعت متوسط در مقاطع ۱۰ متری دقیقاً آن چیزی نیست که دنبال آن هستیم؛ ما به دانستن سرعت *اوج* او علاقه‌مندیم. فرض کنید اوسین بولت یک

سرعت‌سنج می‌داشت. دقیقاً در چه لحظه‌ای با سریع‌ترین سرعت می‌دوید؟ و این سرعت دقیقاً چقدر بود؟

چیزی که در این‌جا به دنبال آن هستیم، روشی برای اندازه‌گیری سرعت لحظه‌ای است. این مفهوم متناقض به نظر می‌رسد. در هر لحظه، اوسین بولت دقیقاً در یک محل بود. مانند یک عکس لحظه‌ای، در آن‌جا ساکن بود. پس صحبت کردن از سرعت او در آن لحظه چه معنی می‌دهد؟ سرعت فقط در یک بازه‌ی زمانی معنی می‌دهد، نه در یک لحظه.

معمای سرعت لحظه‌ای در تاریخ ریاضیات و فلسفه به زمان‌های دور بازمی‌گردد، به حوالی سال ۴۵۰ ق.م. با زنون و پارادوکس‌های تردیدبرانگیز او. به خاطر آورید که زنون در پارادوکس آشیل و لاک‌پشت، ادعا کرد که دونده‌ی تندرو هرگز نمی‌تواند از دونده‌ی کندرو سبقت بگیرد، در حالی که اوسین بولت خلاف این مطلب را آن شب در پکن اثبات کرد. و در پارادوکس پیکان، زنون اظهار داشت که یک پیکان پرتاب شده هرگز نمی‌تواند حرکت کند. ریاضی‌دانان هنوز هم به‌درستی نمی‌دانند او با این پارادوکس‌ها چه چیزی را می‌خواست بیان کند، ولی حدس من آن است که ظرایف نهفته در مفهوم سرعت در یک لحظه، ذهن زنون، ارسطو، و دیگر فیلسوفان یونانی را به خود مشغول داشته است. شاید به‌خاطر همین سردرگمی بوده است که ریاضیات یونانی هیچ‌گاه مطلب زیادی درباره‌ی حرکت و تغییر نمی‌گوید. گویا این مباحث ناخوشایند هم، مانند بی‌نهایت، در گفتگوهای مؤدبانه‌ی آن‌ها قدغن بوده است.

دو هزار سال پس از زنون، پایه‌گذاران حساب دیفرانسیل معمای سرعت لحظه‌ای را حل کردند. راه‌حل شهودی آن‌ها این بود که سرعت لحظه‌ای را به‌عنوان یک حد تعریف کردند—به‌طور خاص، حد سرعت متوسط که روی بازه‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تری گرفته می‌شود.

مانند کاری است که با زوم کردن روی سهمی انجام دادیم. در آن‌جا، با گذاشتن خط راست به‌جای قطعه‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر یک منحنی هموار، تقریبی از آن ایجاد کردیم. بعد پرسیدیم که در حالت حدی بزرگ‌نمایی بی‌نهایت، چه اتفاقی می‌افتد؟ با مطالعه‌ی مقدار حدی شیب خط، توانستیم مشتق را در یک نقطه‌ی خاص روی سهمی با انحنای هموار تعریف کنیم.

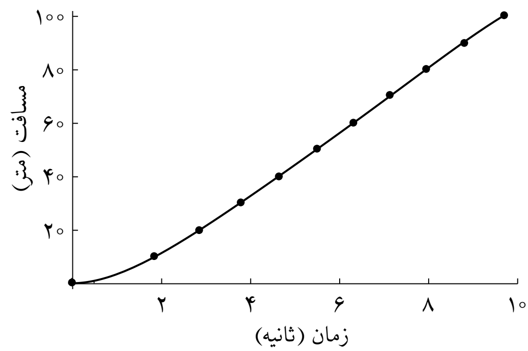
به‌طور مشابه در این‌جا، می‌خواهیم با تغییر دادن هموار در زمان، تقریبی از یک چیز ایجاد کنیم، و آن عبارت است از مسافت پیموده شده‌ی اوسین بولت در مسیر مسابقه. هدف آن است که نمودار مسافت بر حسب زمان او را با یک منحنی چندضلعی جایگزین کنیم که با سرعت متوسط ثابت در بازه‌های زمانی کوتاه تغییر می‌کند. اگر با

کوتاه‌تر و کوتاه‌تر شدن بازه‌ها، سرعت متوسط در هر بازه به یک حد نزدیک شود، آن مقدار حدی چیزی است که از آن به‌سرعت لحظه‌ای در زمان داده شده تعبیر می‌کنیم. مانند شیب در یک نقطه، سرعت در یک لحظه هم یک مشتق است.

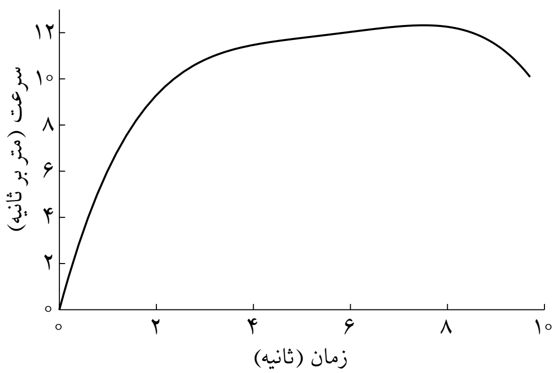
برای این‌که این کار موفقیت‌آمیز باشد، لازم است که فرض کنیم که مسافت او در مسیر مسابقه به‌صورت هموار تغییر کرده است. در غیر این صورت، حدی که به دنبال آن هستیم، وجود نخواهد داشت، و به همین ترتیب، مشتق هم وجود نخواهد داشت. با کوتاه‌تر شدن بازه‌ها، نتیجه به چیز معقولی نزدیک نخواهد شد. ولی آیا واقعاً مسافت او به‌عنوان تابعی از زمان به‌صورت هموار تغییر می‌کرد؟ با اطمینان نمی‌دانیم. تنها داده‌هایی که داریم، نمونه‌هایی گسسته از زمان سپری شده در هر علامت ده‌متری در مسیر مسابقه هستند. برای برآورد سرعت لحظه‌ای او، لازم است که از این داده‌ها فراتر برویم و حدس بزنیم که در زمان‌های بین این نقاط، او در چه مسافتی بوده است.

یک روش سیستماتیک برای این نوع برآورد، درون‌یابی نامیده می‌شود. در این روش، سعی می‌کنیم بین داده‌های موجود، یک منحنی هموار بکشیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم به‌جای این‌که مانند قبل نقطه‌ها را با خط راست به هم وصل کنیم، آن‌ها را با قابل‌توجیه‌ترین منحنی هموارى که از روی نقطه‌ها یا لااقل از نزدیکی آن‌ها عبور می‌کند، به هم متصل نماییم. قیودی که برای این منحنی در نظر می‌گیریم، این است که باید کاملاً کشیده باشد و بیش از حد تموج نداشته باشد؛ باید حتی‌الامکان از نزدیک نقطه‌ها عبور کند؛ و باید نشان دهد که سرعت اولیه‌ی بولت صفر بوده است، زیرا می‌دانیم که وقتی برای دو آماده می‌شده است، بی‌حرکت ایستاده بوده است. منحنی‌های مختلف زیادی این معیارها را تأمین می‌کنند. متخصصان آمار روش‌های مختلفی برای برازش منحنی‌های هموار با داده‌ها ابداع کرده‌اند. همه‌ی این روش‌ها به نتایج مشابهی منجر می‌شوند، و چون همه‌ی آن‌ها به هر حال، مشتمل بر مقداری حدس و گمان هستند، پس بهتر است زیاد اهمیت ندهیم که از کدام‌یک از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

در این‌جا نمونه‌ای از منحنی هموار را می‌بینید که تمام شروط فوق را تأمین می‌کند.



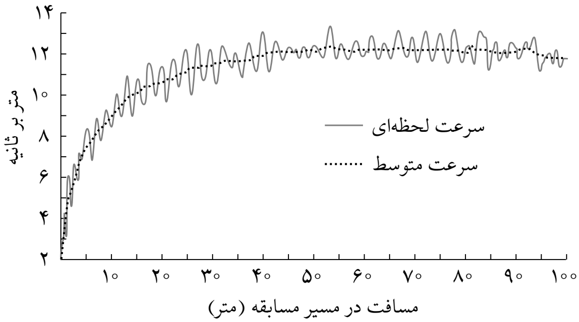
از آنجا که این منحنی بر اساس طراحی آن، هموار است، لذا در هر نقطه می‌توانیم مشتق آن را محاسبه کنیم. نمودار حاصله برآوردی را از سرعت اوسین بولت در هر لحظه از این مسابقه‌ی رکوردشکن در آن شب در پکن به دست می‌دهد.



این نشان می‌دهد که بولت در حوالی نقطه‌ی سه‌چهارم مسابقه به‌سرعت حداکثر ۱۲٫۳ متر بر ثانیه رسیده است. تا آن زمان، او شتاب می‌گرفت و در هر لحظه بر سرعتش افزوده می‌شد. بعد از آن، شروع به کم کردن سرعت خود کرد، به‌طوری که زمانی که از خط پایان عبور کرد، سرعت ۱۰٫۱ متر بر ثانیه داشت. این نمودار چیزی را که همه با چشمان خود دیدند، تأیید می‌کند: بولت در حوالی پایان مسابقه به‌طور قابل ملاحظه‌ای سرعت خود را کمتر کرد، خصوصاً در بیست متر آخر که ریلکس شد و به جشن گرفتن پرداخت.

سال بعد، در مسابقات قهرمانی جهان ۲۰۰۹ در برلین، بولت به حدس‌وگمان‌ها درباره‌ی این‌که چقدر می‌تواند تند بدود، پایان داد. این بار دیگر فخرفروشی در کار

نبود. او تا خط پایان با تمام قوا دوید و رکورد جهانی ۹/۶۹ ثانیه‌ی خود در پکن را با رکورد باز هم حیرت‌انگیزتر ۹/۵۸ ثانیه در هم شکست. به‌خاطر هیجان زیادی که درباره‌ی این رویداد وجود داشت، پژوهشگران بیومدیکال با دوربین‌های لیزری، مانند دوربین‌های سرعت که پلیس برای شناسایی سرعت غیرمجاز رانندگان استفاده می‌کند، دست به کار شدند. این ابزارهای پیشرفته به پژوهشگران امکان می‌داد که موقعیت دوندگان را صد بار در ثانیه اندازه‌گیری کنند. وقتی که آن‌ها سرعت لحظه‌ای بولت را محاسبه کردند، این چیزی است که به دست آوردند:



لرزش‌های کوچکی که در تمام مسیر مشاهده می‌شود، مربوط به بالا و پایین رفتن سرعت است که ناگزیر در هر قدم روی می‌دهد. در حقیقت، دویدن سلسله‌ای از پریدن‌ها و فرود آمدن‌ها است. هر بار که بولت پا را به زمین می‌گذاشت و به‌طور لحظه‌ای توقف می‌کرد، و سپس خود را به بالا می‌کشید و دوباره به هوا بلند می‌شد، سرعت او تغییر می‌کرد.

این لرزش‌های کوچک، هر چقدر هم جالب باشد، در کار تحلیل داده‌ها مزاحمت و اذیت ایجاد می‌کند. آن‌چه ما واقعاً می‌خواستیم ببینیم، روند بود، نه این لرزش‌ها، و برای این منظور، روش قبلی برازش یک منحنی هموار با داده‌ها خیلی خوب و حتی بهتر بود. پس از جمع‌آوری همه‌ی این داده‌ها با تفکیک‌پذیری بالا و مشاهده‌ی لرزش‌ها، پژوهشگران باز هم مجبور شدند داده‌ها را پاک‌سازی کنند. آن‌ها داده‌ها را فیلتر کردند تا روند معنادارتر را آشکار کنند.

از نظر من، این داده‌ها درس بزرگ‌تری در خود دارد. من آن‌ها را در حکم یک تمثیل می‌بینم، نوعی داستان آموزنده درباره‌ی طبیعت مدل‌سازی پدیده‌های واقعی با حسابان. اگر سعی کنیم تفکیک‌پذیری اندازه‌گیری‌هایمان را زیادی بالا ببریم، و اگر به هر پدیده‌ای با جزئیات خیلی ظریف از نظر زمان یا فضا نگاه کنیم، شاهد

در هم شکسته شدن همواری آن خواهیم بود. در داده‌های سرعت اوسین بولت، لرزش‌ها سبب می‌شود که روند هموار مانند یک پیپ‌پاک‌کن، مواج به نظر برسد. در هر نوع حرکت دیگر هم، اگر آن را در مقیاس مولکولی اندازه‌گیری کنیم، همین اتفاق می‌افتد. در آن سطح، حرکت لرزشی می‌شود و به‌هیچ‌وجه صاف و هموار نیست. حسابان دیگر، لااقل به‌طور مستقیم، حرف زیادی برای گفتن نخواهد داشت. ولی اگر آن‌چه برایمان مهم است، روند کلی باشد، هموار کردن لرزش‌ها ممکن است کافی باشد. درک عمیقی که حسابان درباره‌ی طبیعت حرکت و تغییر در این جهان به ما داده است، شاهدی بر قدرت هموارسازی است، هر چقدر هم که تقریبی باشد.

یک درس دیگر هم در این‌جا هست. در مدل‌سازی ریاضی، مانند همه‌ی علوم، همیشه مجبوریم تصمیم بگیریم بر چه چیزهایی تأکید کنیم و از چه چیزهایی چشم‌پوشی کنیم. هنر انتزاع در این است که بفهمیم چه چیزی ضروری است و چه چیزی فرعی، چه چیزی سیگنال است و چه چیزی نوفه، چه چیزی روند است و چه چیزی لرزش. این یک هنر است، زیرا تصمیمات همیشه با خطر همراه است؛ همواره خطر تفکر خیال‌پردازانه و عدم‌صداقت فکری وجود دارد. دانشمندان بزرگ، مانند گالیله و کپلر، به طریقی توانستند بر لبه‌ی این پرتگاه حرکت کنند.

پیکاسو گفته است: «هنر دروغی است که سبب می‌شود حقیقت را دریابیم.» درباره‌ی حسابان هم، به‌عنوان مدلی برای طبیعت، همین را می‌توان گفت. در نیمه‌ی اول قرن هفدهم، استفاده از حسابان به‌عنوان یک انتزاع قدرتمند از حرکت و تغییر آغاز شد. در نیمه‌ی دوم آن قرن، همین نوع تصمیمات هنرمندانه—یعنی دروغ‌هایی که حقیقت را آشکار می‌کند—راه را برای یک انقلاب هموار کرد.

فصل ۷

سرچشمه‌ی پنهان

در نیمه‌ی دوم قرن هفدهم، آیزاک نیوتن در انگلستان و گوتفرید ویلهلم لایبنیتس در آلمان مسیر ریاضیات را برای همیشه تغییر دادند. آن‌ها یک رشته افکار متفرق را درباره‌ی حرکت و منحنی‌ها توسعه دادند و از آن، یک حساب پدید آوردند.

به نشانه‌ی نکره دقت کنید. زمانی که لایبنیتس کلمه‌ی *حسابان* (*calculus*) را در این زمینه در سال ۱۶۷۳ معرفی کرد، از آن با عنوان «یک حساب» نام می‌برد و گاه با محبت بیشتر آن را «حساب من» می‌نامید. او این کلمه را به‌معنای عمومی آن به کار می‌برد، یعنی سیستمی از قواعد و الگوریتم‌ها برای انجام محاسبات. بعداً، پس از آن‌که سیستم او کاملاً صیقل یافت، این کلمه از نکره به معرفه تبدیل شد و به این رشته، *حسابان* گفتند. البته امروزه متأسفانه این کلمه [در زبان انگلیسی] هر گونه حرف تعریف خود را از دست داده است. تنها چیزی که باقی مانده است، calculus است، خشک و خالی.

گذشته از حرف تعریف، خود کلمه‌ی *calculus* هم داستانی دارد. این کلمه از ریشه‌ی یونانی *calx* به‌معنای سنگ‌ریزه گرفته شده است، که یادآور دورانی است که مردم برای شمارش و محاسبه از شن و سنگ‌ریزه استفاده می‌کردند. کلمه‌هایی مانند *calcium* (*کلسیم*)، *chalk* (*گچ*)، و *caulk* (*ماده‌ی درزگیری*) هم از همین ریشه گرفته شده‌اند. دندان‌پزشکان از کلمه‌ی *calculus* برای اشاره به جرم روی دندان‌ها استفاده می‌کنند، پلاک‌هایی که مانند سنگ روی دندان‌ها تشکیل می‌شوند و دندان‌پزشک با تمیز کردن آن‌ها، دندان‌ها را سفید می‌کند. پزشکان از همین کلمه برای اشاره به سنگ کیسه‌ی صفرا، سنگ کلیه، و سنگ مثانه استفاده می‌کنند. جالب است

که نیوتن و لایبنیتس، پیشگامان حسابان، هر دو با درد جانکاه ناشی از سنگ از دنیا رفتند—نیوتن از سنگ مثانه و لایبنیتس از سنگ کلیه.

مساحت، انتگرال، و قضیه‌ی بنیادی

با آنکه حساب زمانی به شمردن با سنگ‌ریزه‌ها مربوط می‌شد، ولی در زمان نیوتن و لایبنیتس، اختصاص به منحنی‌ها و روش جدید تحلیل آنها از طریق جبر داشت. سی سال قبل، فرما و دکارت نحوه‌ی استفاده از جبر برای یافتن بیشینه، کمینه، و خط مماس بر منحنی‌ها را کشف کرده بودند. آن‌چه هنوز مشخص نشده بود، چگونگی به دست آوردن *مساحت* منحنی یا به بیان دقیق‌تر، مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی بود.

مسئله‌ی مساحت، که به‌طور کلاسیک آن را تربیع منحنی می‌نامیدند، دو هزار سال ریاضی‌دان‌ها را به خود مشغول کرده بود و به سرخوردگی آنها منجر شده بود. ترفندهای هوشمندانه‌ی زیادی برای حل موارد خاص تعبیه شده بود، از کارهای ارشمیدس درباره‌ی مساحت دایره و تربیع سهمی گرفته تا راه‌حل فرما برای مساحت زیر منحنی $y = x^n$. ولی آن‌چه کم بود، سیستمی برای حل این مسئله بود. در واقع، مسئله‌های مربوط به مساحت به‌صورت مورد به مورد حل می‌شد، به‌گونه‌ای که انگار ریاضی‌دان‌ها هر بار از اول شروع می‌کردند.

همین دشواری در رابطه با مسئله‌های مربوط به حجم اجسام خمیده و طول قوس‌های خمیده نیز وجود داشت. در حقیقت، دکارت تصور می‌کرد که تعیین طول قوس کاری فراتر از درک بشر است. او در کتاب خود درباره‌ی هندسه نوشته است: «نسبتی که بین خط راست و خط منحنی برقرار است، معلوم نشده است، و به باور من، حتی امکان شناخت آن برای انسان وجود ندارد.» تمام این مسئله‌ها—مساحت، طول قوس، و حجم—نیازمند مجموعه‌ی بی‌نهایتی از قطعه‌های بی‌نهایت‌کوچک بود. به بیان مدرن، همه‌ی آنها مشتمل بر *انتگرال* بود. هیچ‌کس سیستم مطمئنی برای هیچ‌کدام از این مسئله‌ها در دست نداشت.

این چیزی است که بعد از نیوتن و لایبنیتس تغییر کرد. آنها یک قضیه‌ی بنیادی را هر کدام به‌طور مستقل کشف و اثبات کردند که این مسئله‌ها را تبدیل به مسئله‌هایی روزمره کرد. این قضیه بین مساحت و شیب ارتباط برقرار کرد و لذا انتگرال را با مشتق پیوند داد. بسیار حیرت‌انگیز بود. مانند ماجراهای داستان‌های دیکنز، دو کاراکتر ظاهراً دور از هم، نزدیک‌ترین خویشاوند از آب درآمدند. انتگرال و مشتق خویشاوندان خونی یکدیگر بودند.

تأثیر این قضیه‌ی بنیادی شگفت‌انگیز بود. تقریباً یک‌شبه، مساحت قابل‌حل شد. پرسش‌هایی که پیش از آن دانشمندان بزرگ برای حل آن تقلا می‌کردند، اکنون ظرف چند دقیقه حل‌پذیر بود. همان‌گونه که نیوتن به یکی از دوستانش نوشته است: «هیچ‌گونه خط منحنی‌ای که با معادله بیان شده باشد، وجود ندارد... جز اینکه من در نیمی از ربع ساعت می‌توانم بگویم که آیا می‌توان آن را تربیع کرد.» او که خود متوجه بود که چنین ادعایی برای هم‌عصران او چقدر ممکن است باورنکردنی به نظر برسد، در ادامه می‌گوید: «شاید این ادعای بزرگی به نظر برسد، ... ولی برای من، با چشمه‌ای که از آن برمی‌گیرم، روشن است، گرچه قصد ندارم آن را به دیگران اثبات نمایم.»

چشمه‌ی پنهانی نیوتن، قضیه‌ی بنیادی حسابان بود. گرچه او و لایبنیتس نخستین کسانی نبودند که این قضیه را دریافته بودند، ولی این قضیه به‌نام آنها ثبت شده است، زیرا آنها نخستین کسانی بودند که آن را در حالت کلی اثبات کردند، و متوجه فایده و اهمیت فراگیر آن شدند، و سیستمی الگوریتمی را بر مبنای آن پدید آوردند. روش‌هایی که آن‌ها ایجاد کردند، اکنون کاملاً متداول هستند. انتگرال اکنون رام شده و در زمره‌ی تمرینات روزمره برای نوجوانان به شمار می‌رود.

هم‌اکنون میلیون‌ها دانش‌آموز و دانشجو به حل مسئله‌های حسابان می‌پردازند، و انتگرال‌ها را یکی پس از دیگری به‌کمک قضیه‌ی بنیادی حل می‌کنند. با این حال، بسیاری از آنها متوجه نیستند که چه موهبت بزرگی به آنها داده شده است. شاید حق هم داشته باشند—مانند آن جوک قدیمی است که در آن، یک ماهی از دوستش می‌پرسد: «آیا به‌خاطر آب سپاس‌گزار نیستی؟» ماهی دیگر در پاسخ می‌گوید: «آب دیگر چیست؟» دانشجویان حسابان تمام اوقات در قضیه‌ی بنیادی غوطه‌ورند، ازاین‌رو، به‌طور طبیعی آن را بدیهی می‌گیرند.

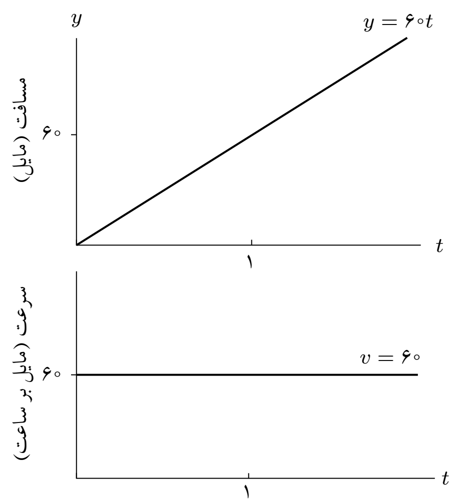
نمایش قضیه‌ی بنیادی با حرکت

برای این‌که قضیه‌ی بنیادی را به‌صورت شهودی بفهمیم، می‌توانیم مسافت طی شده به‌وسیله‌ی یک جسم در حال حرکت مانند یک دونده یا خودرو را در نظر بگیریم. وقتی که با این طرز فکر آشنا شویم، خواهیم فهمید که قضیه‌ی بنیادی چه می‌گوید، چرا این قضیه درست است، و اهمیت آن در چیست. مسئله فقط ترفندی برای به دست آوردن مساحت نیست. بلکه این قضیه کلیدی است برای پیش‌بینی کردن آینده‌ی چیزهایی که برایمان مهم است (در مواردی که امکان آن وجود دارد) و برای برملا کردن راز حرکت و تغییر در جهان.

قضیه‌ی بنیادی برای نیوتن زمانی آشکار شد که به‌صورت پویا به بررسی مسئله‌ی مساحت پرداخت. طوفان فکری او این بود که زمان و حرکت را وارد تصویر کرد. گفت بگذاریم مساحت جریان پیدا کند، بگذاریم که پیوسته گسترش یابد.

به‌عنوان ساده‌ترین مثال از طرز فکر او، به همان مسئله‌ی آشنای خودروی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، بازمی‌گردیم، که برای آن، مسافت برابر با نرخ ضربدر زمان است. با آنکه این مسایل بسیار مقدماتی به نظر می‌رسد، ولی عصاره‌ی قضیه‌ی بنیادی را به‌خوبی نشان می‌دهد. بنابراین، جای خوبی برای شروع است.

فرض کنید خودروی با سرعت ۶۰ مایل بر ساعت در بزرگراه در حال حرکت است. اگر منحنی مسافت بر حسب زمان، و در پس آن سرعت بر حسب زمان، را رسم کنیم، نمودارهای مسافت و سرعت مانند شکل زیر به دست می‌آید.

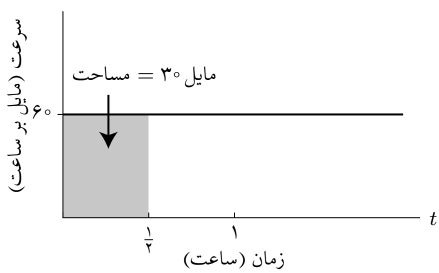


ابتدا به مسافت بر حسب زمان توجه کنید. بعد از یک ساعت، خودرو مسافت ۶۰ مایل پیموده است، و پس از دو ساعت، ۱۲۰ مایل، و الی آخر. به‌طور کلی، رابطه‌ی بین مسافت و زمان $y = ۶۰t$ است، که در این‌جا، y نشان‌دهنده‌ی مسافتی است که خودرو در زمان t طی کرده است. ما به $y(t) = ۶۰t$، *تابع مسافت* می‌گوییم. همان‌گونه که در نمودار بالایی نشان داده شده است، نمودار تابع مسافت یک خط راست با شیب ۶۰ مایل بر ساعت است. این شیب سرعت خودرو را در هر لحظه به ما می‌گوید، که البته از قبل هم می‌دانستیم. در یک مسئله‌ی دشوارتر، سرعت ممکن است کم و زیاد شود، ولی در این‌جا یک تابع ساده‌ی ثابت ساده است، $v(t) = ۶۰$ برای هر t، که

نمودار آن به‌صورت یک خط افقی در نیمه‌ی پایینی شکل نشان داده شده است. (در این‌جا، v نشان‌دهنده‌ی سرعت است.)

حال که دیدیم که سرعت در نمودار مسافت (به‌عنوان شیب خط) ظاهر می‌شود، سؤال را معکوس می‌کنیم، و می‌پرسیم: مسافت در نمودار سرعت چگونه ظاهر می‌شود؟ به عبارت دیگر، آیا یک ویژگی بصری یا هندسی در نمودار سرعت وجود دارد که به ما امکان بدهد که مشخص کنیم که خودرو تا هر زمان داده شده‌ی t، چه مسافتی را طی کرده است؟ بله. *مسافت طی شده، مساحت انباشته شده در زیر منحنی سرعت (خط افقی) تا زمان t است.*

برای اینکه علت این مطلب را دریابید، فرض کنید که خودرو مدت زمان مشخصی، مثلاً نیم ساعت، حرکت می‌کند. در این حالت، مسافت طی شده ۳۰ مایل خواهد بود، زیرا مسافت برابر است با نرخ ضربدر زمان، و $۶۰ \times \frac{۱}{۲} = ۳۰$. نکته‌ی جالب و مقصود از همه‌ی این حرف‌ها، آن است که می‌توانیم مسافت را به‌عنوان مساحت ناحیه‌ی مستطیلی خاکستری زیر خط افقی بین زمان $t = ۰$ و $t = \frac{۱}{۲}$ اندازه‌گیری کنیم.



ارتفاع مستطیل (۶۰ مایل بر ساعت) ضربدر قاعده‌ی آن ($\frac{۱}{۲}$ ساعت)، مساحت مستطیل (۳۰ مایل) را به دست می‌دهد، که همان‌گونه که گفته شد، برابر با مسافت طی شده است.

این استدلال برای هر زمان t دیگر نیز صادق است. زیرا در این حالت قاعده‌ی مستطیل t خواهد بود و ارتفاع آن باز هم ۶۰ است. بنابراین، مساحت آن $۶۰t$ می‌شود، که واقعاً برابر با مسافت طی شده‌ی مطلوب است، $y = ۶۰t$.

بنابراین، لااقل در این مثال که در آن سرعت کاملاً ثابت بود و منحنی سرعت صرفاً یک خط افقی بود، کلید به دست آوردن مسافت از سرعت، محاسبه‌ی مساحت زیر منحنی سرعت بود. کشف نیوتن این بود که این تساوی بین مساحت و مسافت همیشه برقرار است، ولو آن‌که سرعت ثابت نباشد. یک شیء هر چقدر هم *نامنظم*

حرکت کند، مساحت انباشته شده در زیر منحنی سرعت آن تا زمان t *همیشه برابر با کل مسافت طی شده تا آن زمان خواهد بود.* این یک نسخه از بیان قضیه‌ی بنیادی است. با آن‌که آسان‌تر از آن به نظر می‌رسد که درست باشد، ولی *واقعاً* درست است.

چیزی که نیوتن را به این قضیه رهنمون شد، این بود که او مساحت را به‌عنوان یک کمیت متحرک و در جریان در نظر گرفت، نه آن‌گونه که در هندسه‌ی آن زمان مرسوم بود، به‌عنوان یک اندازه‌ی ثابت. او زمان را وارد هندسه کرد و مانند فیزیک به آن نگاه کرد. اگر امروز زنده می‌بود، شاید تصویر بالا را مانند یک پویانمایی تجسم می‌کرد، مانند یک کتابچه‌ی پویانما نه یک عکس فوری. برای این منظور، یک بار دیگر به تصویر بالا نگاه کنید، و این بار تصور کنید که این تصویر تنها یک فریم از یک فیلم و یا یک صفحه از یک کتابچه‌ی ورقه‌های پویانما است. در حالی که انیمیشن در ذهن ما اجرا می‌شود، مستطیل خاکستری چه وضعیتی پیدا می‌کند؟ خواهیم دید که مستطیل گسترش می‌یابد، چرا؟ زیرا طول قاعده‌ی آن t است که با گذشت زمان بلندتر می‌شود. اگر می‌توانستیم برای هر مدت زمان یک فریم بسازیم و آن‌ها را پشت سر هم نمایش دهیم، مانند ورق زدن اوراق یک کتابچه‌ی پویانما، نسخه‌ی انیمیشنی مستطیل خاکستری به‌گونه‌ای به نظر می‌رسید که گویی به طرف راست امتداد پیدا می‌کند. شبیه یک پیستون در حال انبساط و یا سرنگی می‌بود که به پهلو خوابانده شده است و مایع خاکستری را به درون خود می‌کشد.

این مایع خاکستری نشان‌دهنده‌ی مساحت در حال گسترش مستطیل است. ما مساحت را به‌عنوان «انباشت» در زیر منحنی سرعت $v(t)$ در نظر می‌گیریم. در این حالت، مساحت انباشته شده تا زمان t عبارت است از $A(t) = ۶۰t$، و این برابر با مسافت طی شده به‌وسیله‌ی خودرو $y(t) = ۶t$ است. ازاین‌رو، مساحت انباشته شده در زیر منحنی سرعت، مسافت را به‌عنوان تابعی از زمان به ما می‌دهد. این بیانی از قضیه‌ی بنیادی بر اساس حرکت است.

شتاب ثابت

در ادامه به برداشت هندسی عمومی نیوتن از قضیه‌ی بنیادی می‌رسیم که بر اساس منحنی انتزاعی $y(x)$ و مساحت $A(x)$ انباشته شده در زیر آن بیان می‌شود. ایده‌ی انباشت مساحت، کلید توضیح دادن این قضیه است، ولی طبیعی است که عادت کردن به این طرز فکر کمی طول می‌کشد، لذا قبل از آن‌که به حالت هندسی انتزاعی بپردازیم، آن را برای یک مسئله‌ی ملموس‌تر به کار می‌گیریم.

شیئی را در نظر بگیرید که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. یعنی مرتب تندتر و تندتر حرکت می‌کند، و سرعت آن با نرخ ثابت افزایش می‌یابد. تقریباً مانند حالتی است که پدال گاز خودرو را فشار می‌دهید و خودرو شما از حالت سکون به حرکت درمی‌آید. پس از یک ثانیه، سرعت خودرو شما شاید ۱۰ مایل بر ساعت باشد؛ بعد از دو ثانیه، ۲۰ مایل بر ساعت؛ پس از سه ثانیه، ۳۰ مایل بر ساعت، و الی آخر. در این مثال فرضی، همیشه در هر ثانیه ۱۰ مایل بر ساعت به سرعت خودرو افزوده می‌شود. نرخ تغییر سرعت، ۱۰ مایل بر ساعت بر ثانیه، به‌عنوان *شتاب* خودرو تعریف می‌شود. (برای سادگی، از این واقعیت صرف‌نظر می‌کنیم که یک خودرو واقعی سرعت بیشینه‌ای دارد که نمی‌تواند از آن بالاتر برود، و وقتی که پدال گاز را فشار می‌دهید، شتاب خودرو ممکن است دقیقاً ثابت نباشد.)

در این مثال ایده‌آل، سرعت خودرو در هر لحظه با تابع خطی $v(t) = 10t$ داده می‌شود. در این‌جا، عدد ۱۰ نشان‌دهنده‌ی شتاب خودرو است. اگر شتاب مقدار ثابت دیگری، مثلاً a، می‌بود، فرمول به‌صورت زیر تعمیم پیدا می‌کرد:

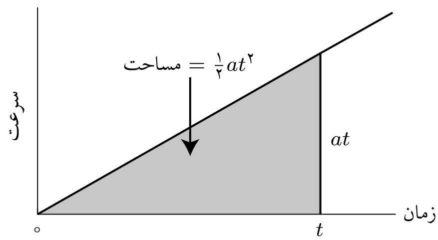
$$v(t) = at.$$

آن‌چه می‌خواهیم بدانیم، این است که خودرویی که به این صورت حرکت می‌کند، بین زمان ۰ و زمان t چه مسافتی را طی می‌کند. به عبارت دیگر، مسافت آن از نقطه‌ی شروع چگونه به‌عنوان تابعی از زمان افزایش می‌یابد؟ اشتباه وحشتناکی خواهد بود که از فرمول مدرسه‌ای مسافت مساوی است با نرخ ضربدر زمان برای این منظور استفاده کنیم، زیرا این فرمول فقط زمانی معتبر است که نرخ—یعنی سرعت خودرو—ثابت باشد، که در این‌جا مطمئناً این‌گونه نیست. بر عکس، در این مسئله، سرعت خودرو در هر لحظه افزایش می‌یابد. دیگر در دنیای کسالت‌بار سرعت ثابت نیستیم. این‌جا دنیای پرهیجان شتاب ثابت است.

جواب این سؤال را حتی محققان قرون وسطی هم می‌دانستند. ویلیام هِیتسبری، فیلسوف و منطق‌دان در کالج مرتون آکسفورد، این مسئله را در حوالی سال ۱۳۳۵ م. حل کرد، و نیکول اورسم، روحانی و ریاضی‌دان فرانسوی، در حوالی سال ۱۳۵۰ آن را بیشتر توضیح داد و به‌طور مصور تحلیل کرد. متأسفانه کارهای آنها زیاد بررسی نشد و خیلی زود به فراموشی سپرده شد. حدود دویست و پنجاه سال بعد، گالیله به‌صورت تجربی نشان داد که شتاب ثابت صرفاً یک فرض آکادمیک نیست. واقعاً اشیای سنگینی مانند گوی‌های آهنی در سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین و یا هنگام

پایین غلتیدن از یک سطح شیب‌دار با شیب ملایم با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. در هر دو حالت، سرعت گوی v همان‌گونه که برای حرکت با شتاب ثابت انتظار می‌رود، متناسب با زمان افزایش می‌یابد، $v = at$.

حال که می‌دانیم که سرعت به‌طور خطی با فرمول $v = at$ افزایش می‌یابد، پس *مسافت* چگونه تغییر می‌کند؟ قضیه‌ی بنیادی می‌گوید که مسافت طی شده برابر با مساحت انباشته شده در زیر منحنی سرعت تا زمان t است. و از آنجا که در این‌جا منحنی سرعت، خط شیب‌دار $v = at$ است، لذا مساحت مورد نظر را به‌آسانی می‌توان محاسبه کرد. این مقدار از مساحت مثلث زیر به دست می‌آید.



مانند مستطیل خاکستری در مسئله‌ی قبلی، مثلث خاکستری در این‌جا نیز با گذشت زمان بزرگ‌تر می‌شود. تفاوت در این است که مستطیل فقط به‌طور افقی گسترش می‌یافت، در حالی که مثلث در هر دو جهت توسعه پیدا می‌کند. برای محاسبه‌ی این‌که مساحت آن با چه سرعتی گسترش می‌یابد، دقت کنید که در هر زمانِ t، قاعده‌ی مثلث t است، و ارتفاع آن سرعت کنونی جسم، $v = at$، است. از آنجا که مساحت مثلث نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع است، لذا مساحت انباشته شده عبارت است از $\frac{۱}{۲} \times t \times at = (\frac{۱}{۲})at^۲$. بنا به قضیه‌ی بنیادی، مساحت زیر منحنی سرعت، مسافتی را که جسم طی کرده است، به ما می‌دهد:

$$y(t) = \frac{۱}{۲}at^۲.$$

ازاین‌رو، برای جسمی که از حالت سکون به حرکت درمی‌آید و به‌طور یکنواخت شتاب می‌گیرد، مسافت طی شده متناسب با مربع زمان سپری شده افزایش می‌یابد. این دقیقاً چیزی است که گالیله به‌طور تجربی کشف کرد، و همان‌گونه که در فصل ۳ دیدیم، آن را به‌گونه‌ای زیبا با قانون اعداد فرد خود بیان کرد.

ولی آن‌چه در قرون وسطی، یا حتی در زمان گالیله، شناخته نشده بود، این بود که

اگر شتاب ثابت *نباشد*، سرعت چگونه رفتاری خواهد داشت؟ به عبارت دیگر، اگر جسمی با شتاب دلخواه $a(t)$ حرکت کند، درباره‌ی سرعت آن $v(t)$ چه می‌توان گفت؟

این مانند مسئله‌ی معکوس است که در فصل قبل به آن اشاره کردم. سؤال گول زننده‌ای است. برای این‌که آن را درست بفهمیم، بسیار مهم است که به‌درستی متوجه باشیم که چه چیزهایی را می‌دانیم و چه چیزهایی را نمی‌دانیم.

شتاب به‌عنوان نرخ تغییر سرعت تعریف می‌شود. بنابراین، اگر سرعت $v(t)$ به ما داده شده بود، پیدا کردن شتاب متناظر با آن $a(t)$ کار آسانی می‌بود. به این، *حل کردن مسئله‌ی مستقیم* می‌گویند. می‌توانستیم آن را با محاسبه‌ی نرخ تغییر تابع سرعت داده شده محاسبه کنیم، اساساً به همان روشی که در فصل قبل شیب سهمی را با قرار دادن آن در زیر میکروسکوپ به دست آوردیم. به دست آوردن نرخ تغییر یک تابع داده شده به‌سادگی با در نظر گرفتن تعریف مشتق و به‌کارگیری قواعد مختلف مشتق‌گیری از توابع مختلف انجام‌پذیر است.

ولی چیزی که مسئله‌ی معکوس را دشوار می‌کند، آن است که تابع سرعت به ما داده *نشده* است. بر عکس، از ما خواسته شده است که تابع سرعت را *پیدا کنیم*. فرض بر این است که نرخ تغییر آن—یعنی شتاب—را به‌عنوان تابعی از زمان داریم، و می‌خواهیم ببینیم چه تابع سرعتی است که آن تابع شتاب، نرخ تغییر آن است. چگونه می‌توانیم به‌صورت معکوس حرکت کنیم و سرعت مجهول را از نرخ تغییر معلوم آن استنباط کنیم؟ مانند یک بازی بچه‌ها است: «من یک تابع سرعت در نظر گرفته‌ام که نرخ تغییر آن فلان است. تابع سرعتی که در نظر گرفته‌ام، چیست؟»

همین معمای استدلال معکوس در استنباط کردن مسافت از سرعت هم پیش می‌آید. درست همان‌گونه که شتاب نرخ تغییر سرعت است، سرعت هم نرخ تغییر مسافت است. استدلال مستقیم آسان است؛ اگر مسافت یک جسم در حرکت را به‌عنوان تابعی از زمان داشته باشیم، مانند مثال مسابقه‌ی دوِ اوسین بولت در پکن، به آسانی می‌توانیم سرعت جسم را در هر لحظه محاسبه کنیم. این محاسبه را در فصل قبل انجام دادیم. ولی استدلال معکوس دشوار است. اگر به شما می‌گفتم که اوسین بولت در هر لحظه‌ی مسابقه چقدر سرعت داشته است، آیا می‌توانستید استنباط کنید که در هر لحظه در کجای مسیر مسابقه بوده است؟ به بیان عمومی‌تر، با داشتن تابع سرعت دلخواه $v(t)$، آیا می‌توانید تابع مسافت $y(t)$ متناظر با آن را به دست آورید؟

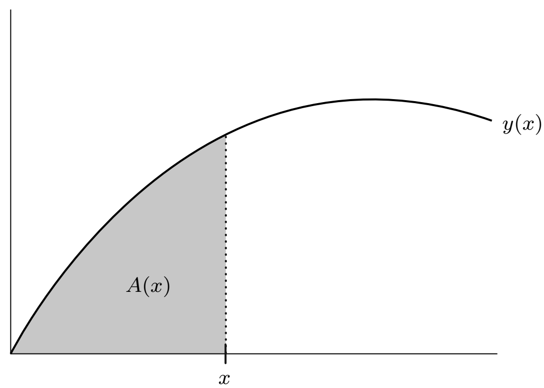
قضیه‌ی بنیادی نیوتن همین مسئله‌ی معکوس دشوار را در زمینه‌ی استنباط کردن یک تابع مجهول از نرخ تغییر داده شده‌ی آن توضیح می‌داد، و در بسیاری از موارد آن را حل می‌کرد. کلید این کار این بود که مسئله را به‌عنوان مساحتی در نظر بگیریم که

جریان پیدا می‌کند و گسترش می‌یابد.

اثبات قضیه‌ی بنیادی با غلتک رنگ

قضیه‌ی بنیادی حسابان نقطه‌ی اوج هجده قرن تفکر ریاضی بود. این قضیه با روشی پویا به یک پرسش هندسی ایستا پاسخ داد که می‌توانست به‌وسیله‌ی ارشمیدس در یونان باستان در سال ۲۵۰ ق.م. پرسیده شده باشد، یا می‌توانست به ذهن لیو هویی در چین در سال ۲۵۰ م. یا ابن هیثم در قاهره در سال ۱۰۰۰ م. و یا کپلر در پراگ در سال ۱۶۰۰ رسیده باشد.

شکلی را مانند ناحیه‌ی خاکستری در تصویر زیر در نظر بگیرید.



آیا راهی برای محاسبه‌ی مساحت دقیق یک شکل دلخواه از این قبیل وجود دارد، در حالی که منحنی بالای آن تقریباً هر چیزی می‌تواند باشد؟ به‌طور خاص، لازم نیست که این منحنی یک منحنی کلاسیک باشد. می‌تواند منحنی غیرمعمول جدیدی باشد که با یک معادله در صفحه‌ی xy تعریف شده است، همان جنگلی که فرما و دکارت آن را باز کردند. یا این‌که یک منحنی باشد که با یک پدیده‌ی فیزیک تعریف شده است، مانند مسیر یک ذره‌ی در حال حرکت یا مسیر یک پرتو نور—آیا راهی برای به دست آوردن مساحت زیر یک چنین منحنی دلخواهی به‌صورت سیستماتیک وجود دارد؟ این *مسئله‌ی مساحت* بود، سومین مسئله‌ی مرکزی حسابان که قبلاً به آن اشاره کردم، و بزرگ‌ترین چالش ریاضیات در اواسط قرن هفدهم به شمار می‌رفت. این آخرین معمای باقی‌مانده از اسرار منحنی‌ها بود. آیزاک نیوتن از جهتی جدید، با استفاده از افکار الهام گرفته از معماهای حرکت و تغییر، به بررسی این مسئله پرداخت.

از نظر تاریخی، تنها راه برای حل این‌گونه مسایل، زرنگی کردن بود. باید با ناقلایی راهی پیدا می‌کردید که ناحیه‌ی خمیده را به نوارها یا برش‌هایی تقسیم کنید و سپس این قطعات را در ذهنتان دوباره سر هم کنید یا مانند ارشمیدس آن‌ها را در الاکلنگی خیالی وزن کنید. ولی در حوالی سال ۱۶۶۵، نیوتن نخستین پیشرفت بزرگ را در مسئله‌ی مساحت در طول تقریباً دو هزار سال به بار آورد. او کشفیات جبر اسلامی و هندسه‌ی تحلیلی فرانسوی را به خدمت گرفت، ولی از این‌ها خیلی جلوتر رفت.

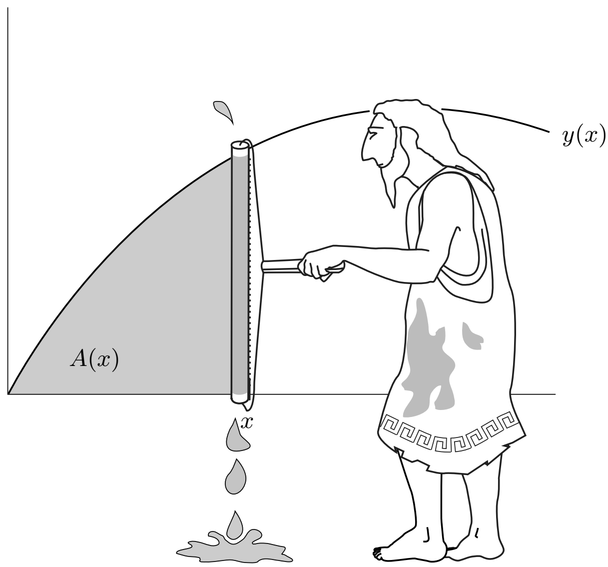
در سیستم او، نخستین قدم این بود که ناحیه‌ی مورد نظر را در صفحه‌ی xy ترسیم کنید و معادله‌ای را برای خط منحنی بالای آن تعیین کنید. برای این منظور، باید ببینید که منحنی چقدر در بالای محور x است، و این کار را باید برای هر یک از برش‌های عمودی پشت سر هم انجام دهید (همان‌گونه که با خط عمودی مقطع در نمودار نشان داده شده است)، تا مقدار y متناظر به دست آید. این محاسبه منحنی را تبدیل به یک معادله می‌کند که رابطه‌ی y با x را مشخص می‌کند. به این ترتیب، می‌توان از ابزارهای جبری بر روی آن استفاده کرد. سی سال قبل، فرما و دکارت هم تا این‌جا را فهمیده بودند و از این تکنیک‌ها برای یافتن خط مماس بر منحنی استفاده کرده بود، که به نوبه‌ی خود پیشرفت بزرگی بود.

ولی چیزی که از نظر آن‌ها دور مانده بود، این بود که خط مماس فی‌نفسه خیلی اهمیت ندارد. مهم‌تر آن این بود که این خط‌ها، شیب منحنی بودند، زیرا شیب بود که منجر به مفهوم مشتق شد. همان‌گونه که در فصل قبل دیدیم، مشتق به‌صورت بسیار طبیعی در هندسه به‌عنوان شیب منحنی مطرح می‌شود. در فیزیک نیز مشتق به‌عنوان نرخ‌های تغییر دیگر، مانند سرعت، مشاهده می‌شود. به این ترتیب، مشتق نشان دهنده‌ی ارتباطی بین شیب و سرعت، و به بیان وسیع‌تر، بین هندسه و حرکت است. وقتی که ایده‌ی مشتق در ذهن نیوتن مستقر شد، قدرت آن برای پیوند برقرار کردن بین هندسه و حرکت، پیشرفت بزرگ نهایی را امکان‌پذیر ساخت. از طریق مشتق بود که نهایتاً مسئله‌ی مساحت نیز حل شد.

پیوندهای عمیقاً پنهان در میان همه‌ی این مفاهیم—شیب و نرخ، منحنی و تابع، نرخ و مشتق—زمانی از تاریکی پدیدار شد که نیوتن به‌صورت پویا به مسئله‌ی مساحت نگاه کرد. به پیروی از کاری که قبلاً در دو قسمت پیشین انجام دادیم، نمودار بالا را در نظر بگیرید و تصور کنید که x را با سرعت ثابت به طرف راست جابه‌جا می‌کنید. حتی می‌توانید x را به‌عنوان زمان در نظر بگیرید؛ نیوتن غالباً این کار را می‌کرد. آنگاه با حرکت کردن x، مساحت ناحیه‌ی خاکستری به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. به‌خاطر این‌که این مساحت وابسته به x است، آن را باید به‌عنوان تابعی از x در نظر بگیریم، ازاین‌رو،

آن را به‌صورت $A(x)$ می‌نویسیم. وقتی که می‌خواهیم تأکید کنیم که این مساحت تابعی از x است (نه یک عدد ثابت)، آن را *تابع انباشت مساحت*، و یا گاه به‌سادگی *تابع مساحت*، می‌نامیم.

دبیر حسابان ما در دبیرستان، آقای جافری، برای این سناریوی سیال که در آن x جا به جا می‌شود و مساحت تغییر می‌کند، از یک مثال به‌یادماندنی استفاده می‌کرد. او از ما می‌خواست که یک غلتک رنگ‌آمیزی جادویی را در نظر بگیریم که به‌طرف کنار حرکت می‌کند. وقتی که این غلتک به‌طور پیوسته به طرف راست حرکت می‌کند، ناحیه‌ی زیر منحنی را به رنگ خاکستری رنگ‌آمیزی می‌کند.



خط مقطع در x نشان دهنده‌ی موقعیت کنونی غلتک در حین حرکت به طرف راست است. در ضمن، برای این‌که ناحیه‌ی مورد نظر درست رنگ‌آمیزی شود، غلتک به‌طور لحظه‌ای در راستای عمودی بلندتر یا کوتاه‌تر می‌شود، به‌طوری که دقیقاً در بالا به منحنی و در پایین به محور x برسد، بدون این‌که هیچ‌گاه از این مرزها عبور کند. جادویی بودن آن از این جهت است که همیشه حین حرکت، طول آن با $y(x)$ هماهنگ است، به‌طوری که ناحیه‌ی مورد نظر را بدون هر گونه اختلافی رنگ‌آمیزی می‌کند.

حال که چنین سناریوی دور از ذهنی را آماده کرده‌ایم، این سؤال را مطرح می‌کنیم: وقتی که x به طرف راست حرکت می‌کند، مساحت ناحیه‌ی خاکستری با چه نرخی افزایش می‌یابد؟ یا به بیان دیگر، وقتی که غلتک در x است، رنگ با چه نرخی مالیده

می‌شود؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، فکر کنید ببینید در بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک بعدی چه اتفاقی می‌افتد. غلتک یک مسافت بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}x$ به طرف راست جابه‌جا می‌شود. در عین حال، در اثنای این مسافت اندک، طول y در جهت عمودی تقریباً کاملاً ثابت می‌ماند، زیرا در این فاصله‌ی بی‌نهایت‌کوچک، تقریباً وقتی برای تغییر طول آن نیست (نکته‌ی ظریفی که در فصل بعد درباره‌ی آن بحث خواهیم کرد). در طی این بازه‌ی کوتاه، غلتک ناحیه‌ای را رنگ می‌کند که اساساً یک مستطیل باریک بلند به ارتفاع y، عرض بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}x$، و مساحت بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ است. با تقسیم کردن طرفین این معادله بر $\mathrm{d}x$، نرخ انباشت مساحت مشخص می‌شود. این نرخ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = y.$$

این فرمول ساده نشان می‌دهد که کل ناحیه‌ی رنگ شده‌ی زیر منحنی با نرخی افزایش می‌یابد که برابر با طول کنونی غلتک y است. و معنی هم می‌دهد؛ چون هر چه غلتک در زمان حاضر بلندتر باشد، در لحظه‌ی بعد رنگ بیشتری را می‌مالد، و لذا مساحت با سرعت بیشتری انباشته می‌شود.

با کمی تلاش بیشتر، می‌توانیم نشان دهیم که این بیان هندسی قضیه با بیان آن بر مبنای حرکت که قبلاً از آن استفاده کردیم و بیان می‌کرد که مساحت انباشته شده زیر یک منحنی سرعت برابر با مسافت طی شده به‌وسیله‌ی یک جسم در حال حرکت است، هم‌ارز است. ولی فعلاً کارهای مهم‌تری در پیش داریم. باید بفهمیم که معنای این قضیه چیست، اهمیت آن در چیست، و این‌که این قضیه چگونه سرانجام دنیا را تغییر داد.

معنای قضیه‌ی بنیادی

نمودار زیر آن‌چه را تا این‌جا یاد گرفتیم، به‌اختصار نشان می‌دهد:

$$A(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} y(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

مساحت زیر منحنی	منحنی	شیب منحنی

این، سه تابع مورد نظر ما و روابط بین آن‌ها را نشان می‌دهد. خود منحنی در وسط است، شیب مجهول آن در سمت راست، و مساحت مجهول آن در طرف چپ است. به‌طوری که در فصل ۶ دیدیم، این‌ها توابعی هستند که در سه مسئله‌ی مرکزی حسابان ذکر می‌شوند. با داشتن منحنی y، می‌خواهیم شیب و مساحت آن را به دست آوریم.

امیدوارم با این نمودار اکنون روشن شده باشد که چرا شیب را «مسئله‌ی مستقیم» دانسته‌ایم. برای به دست آوردن شیب از منحنی، صرفاً با حرکت مستقیم در امتداد فلش به طرف راست می‌رویم. برای به دست آوردن شیب، مشتق y را محاسبه می‌کنیم. این مسئله‌ی مستقیم (۱) است که در فصل قبل درباره‌ی آن بحث کردیم.

آن‌چه قبلاً نمی‌دانستیم و الآن از قضیه‌ی بنیادی یاد گرفتیم، این است که *مساحت A و منحنی y نیز* به‌وسیله‌ی مشتق با یکدیگر ارتباط دارند—قضیه‌ی بنیادی نشان داده است که مشتق A، y است. این نکته‌ی شگفت‌انگیزی است. به ما امکان می‌دهد که مساحت زیر منحنی‌های دلخواه را تعیین کنیم، معمایی که قریب دو هزار سال ذهن بزرگ‌ترین دانشمندان را به خود مشغول کرده بود. اکنون این تصویر راهی را به‌سوی پاسخ نشان می‌دهد. ولی قبل از آن‌که جشن بگیریم، باید توجه داشته باشیم که قضیه‌ی بنیادی دقیقاً آن چیزی را که می‌خواهیم، به ما نمی‌دهد. مساحت را مستقیماً به ما نمی‌دهد. بلکه نحوه‌ی به دست آوردن آن را به ما می‌گوید.

جام مقدس حساب انتگرال

همان‌گونه که سعی کردم توضیح بدهم، قضیه‌ی بنیادی مسئله‌ی مساحت را کاملاً حل نمی‌کند. این قضیه اطلاعاتی را درباره‌ی نرخ تغییر مساحت به ما می‌دهد، ولی باز هم مسئله‌ی استنباط خود مساحت باقی می‌ماند.

از نظر نمادهایی که استفاده می‌کنیم، قضیه‌ی بنیادی به ما می‌گوید که $\mathrm{d}A/\,\mathrm{d}x = y$، که در این‌جا $y(x)$ تابع داده شده است. هنوز هم زحمت پیدا کردن یک تابع $A(x)$ که در این معادله صدق کند، باقی می‌ماند. یک لحظه صبر کنید—معنای این مطلب آن است که ما ناگهان دوباره با *مسئله‌ی معکوس* روبه‌رو شده‌ایم! رخداد جالبی است. ما سعی داشتیم مسئله‌ی مساحت، یعنی مسئله‌ی مرکزی شماره‌ی ۳ در لیست ارائه شده در فصل ۶، را حل کنیم، و ناگهان با مسئله‌ی معکوس، یعنی مسئله‌ی مرکزی شماره‌ی ۲ در آن لیست، مواجه شده‌ایم. بدان علت به آن مسئله‌ی معکوس می‌گویم که، همان‌گونه که نمودار بالا نشان می‌دهد، پیدا کردن A با داشتن y به‌معنای رفتن در خلاف جهت فلش است، یعنی حرکت در جهت معکوس مشتق. در

این موقعیت، بازی بچه‌ها می‌تواند به‌صورت زیر باشد: «من یک تابع مساحت $A(x)$ در نظر گرفته‌ام که مشتق آن $\sin x - x^{۱۰} + ۱۲x$ است. چه تابعی را در نظر گرفته‌ام؟»

ایجاد روش‌هایی برای حل مسئله‌ی معکوس، نه فقط برای $\sin x - x^{۱۰} + ۱۲x$ بلکه برای هر منحنی $y(x)$، تبدیل به قبله‌ی آمال حسابان شد. به بیان دقیق‌تر، قبله‌ی آمال حساب *انتگرال* شد. حل مسئله‌ی معکوس امکان آن را فراهم می‌کرد که مسئله‌ی مساحت یک بار برای همیشه حل شود. با داشتن هر منحنی $y(x)$، خواهیم توانست مساحت زیر آن $A(x)$ را به دست آوریم. با حل کردن مسئله‌ی معکوس، مسئله‌ی مساحت نیز حل خواهد شد. بدین خاطر است که می‌گویم که این دو مسئله مانند دوقلوهایی که در زمان تولد از هم جدا شده‌اند، و یا مانند دو روی یک سکه هستند.

حل مسئله‌ی معکوس به یک دلیل دیگر هم اثرات بزرگی در پی خواهد داشت: یک مساحت، از دیدگاه ارشمیدسی، مجموع بی‌نهایتی از نوارهای مستطیلی بی‌نهایت‌کوچک است. بر این اساس، مساحت یک *انتگرال* است. مجموعه‌ی تلفیق شده‌ای از همه‌ی قطعات است که دوباره کنار هم قرار داده شده است، انباشتی از تغییرات بی‌نهایت‌کوچک. و همان‌طور که مشتق از شیب مهم‌تر است، انتگرال هم از مساحت مهم‌تر است. مساحت در هندسه نقش قاطعی دارد؛ انتگرال، همان‌گونه که در فصل‌های آینده خواهیم دید، در همه چیز نقش قاطعی دارد.

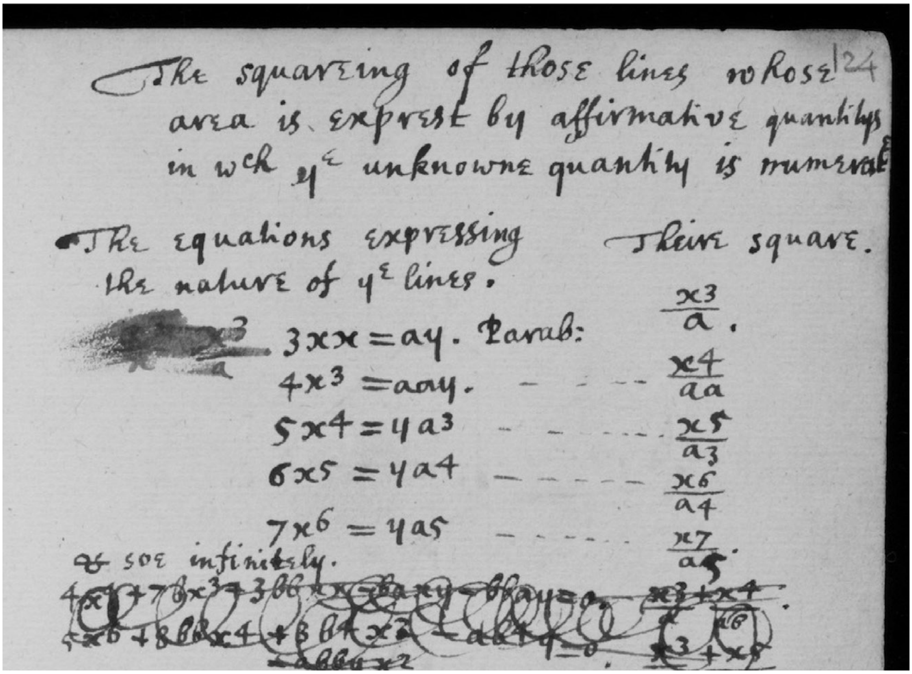
یک راه در برخورد با دشواری مسئله‌ی معکوس این است که از آن صرف‌نظر کنیم. آن را به کنار برانیم. مسئله‌ی مستقیم را که آسان‌تر است (با داشتن A، نرخ تغییر آن $\mathrm{d}A/\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید؛ بر اساس قضیه‌ی بنیادی، می‌دانیم که این باید برابر با y مطلوب باشد). این مسئله‌ی مستقیم خیلی آسان‌تر است، زیرا می‌دانیم از کجا شروع کنیم. می‌توانیم با یک تابع مساحت معلوم $A(x)$ شروع کنیم و با به‌کارگیری فرمول‌های استاندارد مشتق‌گیری، نرخ تغییر آن را به دست آوریم. بعد این نرخ تغییر $\mathrm{d}A/\,\mathrm{d}x$ باید نقش تابع همکار y را بازی کند؛ این چیزی است که قضیه‌ی بنیادی با اطمینان به ما می‌گوید: $\mathrm{d}A/\,\mathrm{d}x = y$. وقتی که همه‌ی این کارها را کردیم، دو تابع همکار، $A(x)$ و $y(x)$، داریم، که نشان دهنده‌ی تابع مساحت و منحنی مربوط به آن هستند. امید آن است که اگر شانس بیاوریم و به مسئله‌ای برخورد کنیم که در آن بخواهیم مساحت زیر این منحنی خاص $y(x)$ را محاسبه کنیم، تابع مساحت متناظر با آن، تابع همکار آن $A(x)$ خواهد بود. این روش نظام‌مندی نیست و فقط در صورتی که اتفاقاً شانس بیاوریم، مؤثر واقع می‌شود، ولی لااقل یک شروع است و روش آسانی هم هست. برای این‌که شانس موفقیت‌مان را افزایش دهیم، می‌توانیم جدول بزرگی درست کنیم و صدها تابع مساحت و منحنی متناظر آن را به‌صورت زوج‌های $(A(x), y(x))$ در آن بنویسیم.

آنگاه، گستردگی اندازه و تنوع این جدول شانس این را که برای حل یک مسئله‌ی واقعی مورد نظر خودمان، زوج تابع مناسب را داشته باشیم، افزایش خواهد یافت. وقتی که زوج مورد نیاز را پیدا کردیم، دیگر لازم نیست کار دیگری انجام دهیم. جواب مورد نیاز از طریق جدول در اختیارمان قرار خواهد گرفت.

مثلاً در فصل بعد خواهیم دید که مشتق $x^۳$، $۳x^۲$ است. این نتیجه را با حل کردن مسئله‌ی مستقیم، یعنی به‌سادگی با گرفتن مشتق، به دست می‌آوریم. اما نکته‌ی جالب این است که این نتیجه به ما می‌گوید که $x^۳$ می‌تواند نقش $A(x)$ را بازی کند، و $۳x^۲$ نقش $y(x)$ را ایفا می‌نماید. بدون این‌که زحمتی بکشیم، مسئله‌ی مساحت را برای $۳x^۲$ حل کرده‌ایم (اگر احیاناً زمانی به آن نیاز داشته باشیم). اگر به همین منوال ادامه دهیم، می‌توانیم جدول را با توان‌های دیگر x پر کنیم. با محاسبات مشابه، خواهیم دید که مشتق $x^۴$ عبارت است از $۴x^۳$ و مشتق $x^۵$ عبارت است از $۵x^۴$، به‌طور کلی، مشتق x^n عبارت است از $nx^{n-۱}$. این‌ها همگی جواب‌های آسانی برای مسئله‌ی مستقیم در مورد توابع توان هستند. لذا ستون‌های جدول به‌صورت زیر خواهد بود:

منحنی $y(x)$	تابع مساحت آن $A(x)$
$۳x^۲$	$x^۳$
$۴x^۳$	$x^۴$
$۵x^۴$	$x^۵$
$۶x^۵$	$x^۶$
$۷x^۶$	$x^۷$

آیزاک نیوتن، زمانی که بیست و دو ساله بود، در دفترچه‌ی دانشگاه‌اش جدول‌های مشابهی را برای خودش درست کرده بود.


The squareing of those lines whose 24
area is exprest by affirmative quantitys
in wch ye unknowne quantity is numerate

The equations expressing the nature of ye lines.	Theire square.
$3xx = ay$. Parab:	$\frac{x^3}{a}$.
$4x^3 = aay$.	$\frac{x^4}{aa}$
$5x^4 = ya^3$	$\frac{x^5}{a^3}$
$6x^5 = ya^4$	$\frac{x^6}{a^4}$
$7x^6 = ya^5$	$\frac{x^7}{a^5}$.

& soe infinitely.

دقت کنید که زبان آن روزگار با امروز تفاوت داشته است. در ستون چپ برای منحنی‌ها نوشته است «معادلاتی که ماهیت خطوط را بیان می‌کنند». به‌جای توابع مساحت، «مربعات آن‌ها» نوشته شده است (زیرا او مسئله‌ی مساحت را به‌عنوان «تربیع منحنی» در نظر گرفته است). هم‌چنین، او لازم دانسته است که توان‌های مختلف a، یک واحد دلخواه طول، را نیز وارد کند، تا مطمئن شود که همه‌ی کمیت‌ها تعداد بُعدهای درستی دارند. به‌عنوان مثال، تابع $A(x)$ در قسمت پایین راست، سطر پنجم از بالای لیست، عبارت است از $x^۷/a^۵$ (به‌جای $x^۷$)، زیرا در ذهن او، این نشان دهنده‌ی یک مساحت است، و لذا باید واحد طول آن مربع شود. تمام این‌ها چند صفحه بعد از مطلبی است با عنوان «روشی برای تربیع خطوط خمیده که قابل تربیع هستند»، که در حکم گواهی ولادت قضیه‌ی بنیادی حسابان است. نیوتن پس از آن‌که به این قضیه مسلح شد، چندین صفحه‌ی دیگر را هم با لیست این «خطوط خمیده» و «مربع»های آن‌ها پر کرد. ماشین حسابان در دستان نیوتن به کار افتاده بود.

کار بعدی، که در واقع یک خیال بود، پیدا کردن روشی بود برای این‌که بتوان هرگونه منحنی، نه فقط توابع توان، را تربیع کرد. شاید این خیالات خیلی هم هیجان‌انگیز به نظر نرسد. ولی این به‌خاطر آن است که خیلی عمومی است. بگذارید آن را به‌صورت زیر بیان کنم: این مسئله حاوی عصاره‌ی خالص چیزی است که سبب

می‌شود که حساب انتگرال این‌قدر چالش‌انگیز باشد. اگر امکان حل این مسئله فراهم می‌شد، مانند به راه انداختن یک واکنش زنجیره‌ای بود. مثل فروریختن قطعات دومینو است: مسئله‌ها یکی پس از دیگری در هم شکسته خواهد شد. اگر حل این مسئله میسر می‌گردید، می‌شد از آن برای پاسخ دادن به سؤالی که دکارت فکر می‌کرد فراتر از فهم بشر است، یعنی پیدا کردن طول یک قوس دلخواه، استفاده کرد. می‌شد مساحت هر ناحیه‌ی توده‌وار در درون صفحه استفاده کرد. می‌شد مساحت، حجم، و گرانیگاه کره، سهموی، کوزه، بشکه، و تمام سطوح دیگری را که از چرخش یک منحنی به دور یک محور حاصل می‌شوند، مانند یک گلدان روی چرخ سفالگری، استفاده کرد. مسایل کلاسیک مربوط به شکل‌های منحنی که ارشمیدس درباره‌ی آن‌ها تفکر می‌کرد و دیگر ریاضی‌دانان برجسته نیز در طول هجده قرن برای حل آن‌ها تقلا می‌کردند، بلافاصله با یک حرکت قابل‌حل می‌شد.

نه فقط این، که برخی از مسئله‌های مربوط به پیش‌بینی نیز حل خواهد شد. پیش‌بینی موقعیت یک شیء در حال حرکت در آینده—مثلاً این‌که یک سیاره در نقطه‌ی خاصی از مدار خود در کجا خواهد بود، حتی سیاره‌ای که غیر از جهان مربوط به آن، تحت تأثیر قوه‌ی جاذبه‌ی دیگری نیز قرار دارد—با حل همین یک مسئله، امکان‌پذیر می‌شد. بدین خاطر است که من آن را جام مقدس حساب انتگرال نامیده‌ام. خیلی خیلی مسئله‌های دیگر نیز هستند که در نهایت، منتهی به حل همین مسئله می‌شوند. اگر این حل شود، آن‌ها هم حل می‌شوند.

بدین خاطر است که توانایی به دست آوردن مساحت زیر یک منحنی دلخواه تا این حد اهمیت دارد. مسئله‌ی مساحت، به‌خاطر ارتباط تنگاتنگی که با مسئله‌ی معکوس دارد، تنها درباره‌ی مساحت نیست. مسئله فقط درباره‌ی شکل یا رابطه‌ی بین مسافت و سرعت یا چیز دیگری به این وسعت کم نیست. یک موضوع کاملاً عمومی است. از دیدگاه مدرن، مسئله‌ی مساحت به پیش‌بینی رابطه‌ی بین تغییرات در یک نرخ متغیر و چگونگی انباشته شدن آن در طول زمان مربوط می‌شود. مثلاً تغییرات میزان مبلغ ورودی به یک حساب بانکی و میزان موجودی پول انباشته شده در آن. یا نرخ رشد جمعیت کره‌ی زمین و تعداد افرادی که در آن زندگی می‌کنند. یا تغییرات غلظت یک داروی شیمی‌درمانی در خون بیمار و میزان مواجهه‌ی انباشته با دارو در طول زمان. سطح کارایی داروی شیمی‌درمانی و نیز میزان سمیت آن بستگی به میزان کل مواجهه دارد. اهمیت مساحت به اندازه‌ی اهمیتی است که آینده برای ما دارد.

ریاضیات جدید نیوتن برای یک دنیای سیال کاملاً مناسب بود. بر این اساس، اصطلاح *شارش* (*fluxion*) را وضع کرد. او درباره‌ی کمیت‌های شاره (که امروزه

آن‌ها را توابع زمان می‌نامیم) و شارش آن‌ها (مشتق آن‌ها یا نرخ تغییر آن‌ها بر حسب زمان) سخن گفت. او دو مسئله‌ی مرکزی را شناسایی کرد:

۱. با داشتن یک شاره، چگونه می‌توان شارش آن را به دست آورد؟ (این معادل مسئله‌ی مستقیم است که قبلاً به آن اشاره کردیم، مسئله‌ی آسانِ پیدا کردن شیب یک منحنی داده شده و یا به بیان کلی‌تر، پیدا کردن نرخ تغییر یا مشتق یک تابع معلوم، فرایندی که امروزه *مشتق‌گیری* نامیده می‌شود.)

۲. با داشتن شارش، چگونه می‌توان شاره را به دست آورد؟ (این معادل مسئله‌ی معکوس است و کلید حل مسئله‌ی مساحت به شمار می‌رود؛ این عبارت است از مسئله‌ی دشوارِ استنباط کردن یک منحنی از شیب آن یا به بیان کلی‌تر، استنباط کردن یک تابع مجهول از نرخ تغییر آن، که امروزه به این فرایند، *انتگرال‌گیری* می‌گوییم.)

مسئله‌ی ۲ بسیار سخت‌تر از مسئله‌ی ۱ است. از طرف دیگر، برای پیش‌بینی و سر در آوردن از رمز گیتی اهمیت بیشتری دارد. قبل از این‌که ببینیم نیوتن در این راه تا کجا جلو رفته است، اجازه بدهید که توضیح بدهم که چرا این مسئله این‌قدر سخت است.

محلی یا سراسری

علت این‌که انتگرال‌گیری تا این حد از مشتق‌گیری سخت‌تر است، به تمایز بین محلی و سراسری مربوط می‌شود. مسئله‌های محلی آسان‌اند. مسئله‌های سراسری دشوار.

مشتق‌گیری یک عمل محلی است. همان‌گونه که دیدیم، وقتی که یک مشتق را محاسبه می‌کنیم، مانند آن است که زیر میکروسکوپ نگاه می‌کنیم. روی منحنی یا تابع زوم می‌کنیم و مکرراً بزرگ‌نمایی میدان دید را بیشتر می‌کنیم. در حالی که روی این قطعه‌ی محلی کوچک زوم می‌کنیم، به نظر می‌رسد که انحنای منحنی کمتر و کمتر می‌شود. تصویر بزرگ‌شده‌ای از منحنی را می‌بینیم، یک سطح شیب‌دار کوچک، تقریباً مانند خط راست، با خیز Δy و گام Δx. در حد بزرگ‌نمایی بی‌نهایت، منحنی به یک خط راست مشخص نزدیک می‌شود، که خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی موجود در مرکز میدان میکروسکوپی است. شیب این خط حدی، مشتق را در آن‌جا به ما می‌دهد. نقش میکروسکوپ آن است که به ما امکان می‌دهد که روی بخشی از منحنی

که می‌خواهیم، تمرکز کنیم. از بقیه‌ی چیزها صرف‌نظر می‌کنیم. از این رو است که می‌گوییم گرفتن مشتق یک عمل محلی است. مشتق همه‌ی جزئیات خارج از منطقه‌ی بی‌نهایت‌کوچک یک نقطه را که تنها نقطه‌ی مورد علاقه است، کنار می‌گذارد.

انتگرال‌گیری یک عمل سراسری است. به‌جای میکروسکوپ، حالا از تلسکوپ استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم فاصله‌ی خیلی دورتر را ببینیم—یا این‌که آینده‌های خیلی دور را، گرچه برای این کار نیاز به گوی بلورین داریم. طبیعی است که این قبیل مسئله‌ها خیلی دشوارترند. تمام رویدادهای مرتبط اهمیت دارند و نمی‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد. یا این‌که به‌ظاهر این‌گونه به نظر می‌رسد.

در این‌جا تشبیهی ارائه می‌کنم تا تمایز بین محلی و سراسری، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، روشن شود، و مشخص شود که چرا انتگرال‌گیری تا این حد سخت است و چرا از نظر علمی اهمیت دارد. برای این تشبیه، دوباره به پکن و مسابقه‌ی رکوردشکن اوسین بولت برمی‌گردیم. اگر یادتان باشد، برای به دست آوردن سرعت او در هر لحظه، یک منحنی هموار را با داده‌ها که نشان دهنده‌ی موقعیت او در مسیر مسابقه به‌عنوان تابعی از زمان بود، برازش کردیم. سپس، برای این‌که سرعت او را در نقطه‌ی خاصی، مثلاً ۷/۲ ثانیه پس از شروع مسابقه، پیدا کنیم، موقعیت او را با استفاده از منحنی برازش شده در زمانی اندکی پس از آن، مثلاً در ۷/۲۵ ثانیه، پیدا کردیم، و با تقسیم کردن تغییر مسافت بر تغییر زمان، سرعت متوسط او را در آن لحظه به دست آوردیم. همه‌ی این‌ها محاسبات محلی بود. تنها اطلاعاتی که استفاده می‌شد، چگونگی دویدن او در چند صدم ثانیه در اطراف زمان داده شده بود. وضعیت او در بقیه‌ی مسابقه، قبل و بعد از آن، ربطی به این محاسبه نداشت. منظور من از محلی این است.

بر عکس، فکر کنید که چقدر زحمت می‌داشت اگر صفحه‌گسترده‌ای با طول بی‌نهایت به ما می‌دادند که در آن سرعت او در هر لحظه از مسابقه نشان داده شده بود و می‌خواستیم موقعیت او را ۷/۲ ثانیه پس از شروع مسابقه به دست آوریم. وقتی که او از جایگاه شروع مسابقه خارج می‌شود، می‌توانیم با استفاده از سرعت اولیه‌ی او برآورد کنیم که او مثلاً یک صدم ثانیه بعد در چه موقعیتی خواهد بود؛ برای این کار، از فرمول مسافت مساوی است با نرخ ضربدر زمان استفاده می‌کنیم تا پیشرفت او را در طول مسیر مسابقه به دست آوریم. بر اساس موقعیت جدید و مدت زمان سپری شده، باز می‌توانیم پیشرفت او در مسیر مسابقه را در یک صدم ثانیه‌ی بعد بر اساس سرعت متناظر او به دست آوریم. به همین ترتیب، جلو می‌رویم و اطلاعات را برای هر یک صدم ثانیه بررسی می‌کنیم، و موقعیت او را در سرتاسر مسابقه محاسبه می‌نماییم. کار بسیار پرزحمتی خواهد بود. منظورم از نظر محاسباتی است. بدین خاطر است که

محاسبه‌ی سراسری کار دشواری است. باید هر مرحله را محاسبه کنیم تا به جواب مورد نظر در آینده، در این مورد ۷/۲ ثانیه پس از شلیک تفنگ شروع مسابقه، برسیم.

ولی فرض کنید که به طریقی می‌توانستیم به‌سرعت جلو برویم و درست به سروقت لحظه‌ی مورد نظر برویم—چنین چیزی واقعاً می‌توانست مفید باشد. و این دقیقاً چیزی است که با حل مسئله‌ی معکوس انتگرال‌گیری عاید ما می‌شود. حل این مسئله یک راه میانبر در اختیار ما می‌گذارد، کرم‌چاله‌ای از درون زمان. این سبب می‌شود که مسئله‌ی سراسری به یک مسئله‌ی محلی تبدیل شود. بدین خاطر است که حل مسئله‌ی معکوس مانند یافتن جام مقدس حسابان است.

این مسئله را نخستین بار، مثل خیلی چیزهای دیگر، یک دانشجو حل کرد.

پسرک تنها

آیزاک نیوتن در روز کریسمس سال ۱۶۴۲ در یک خانه‌ی کشاورزی سنگی به دنیا آمد. تولد او، غیر از روز آن، نکته‌ی برجسته‌ی خاصی نداشت. او زودرس به دنیا آمد، و می‌گویند به‌قدری کوچک بود که توی یک ظرف یک‌لیتری جا می‌شد. پدر هم نداشت. آیزاک نیوتن پدر، که یک کشاورز زمین‌دار بود، سه ماه قبل مرده بود، و مقداری محصول جو، لوازم خانه، و چند گوسفند از او به جا مانده بود.

وقتی که آیزاک کوچولو سه‌ساله بود، مادرش، هانا، دوباره ازدواج کرد و مراقبت او را بر عهده‌ی پدربزرگ و مادربزرگ مادری‌اش گذاشت. (شوهر جدید مادرش، جناب کشیش بارناباس اسمیت، بر این موضوع اصرار داشت؛ او مرد ثروتمندی بود که سن‌اش دو برابر سن هانا بود و یک زن جوان می‌خواست، اما نه یک پسر جوان.) طبیعی است که آیزاک از ناپدری‌اش دل خوشی نداشت و احساس می‌کرد مادرش او را رها کرده است. بعدها در لیست گناهانی که تا قبل از نوزده سالگی مرتکب شده بود، مورد زیر را نیز درج کرد: «۱۳. تهدید کردن پدر و مادرم اسمیت به اینکه آنها را با خانه‌شان به آتش خواهم کشید.» مورد بعدی از این هم شوم‌تر بود: «۱۴. نفرین کردن و آرزوی مرگ داشتن برای برخی از افراد.» و بعد هم این: «۱۵. ضرب‌وشتم خیلی‌ها. ۱۶. داشتن افکار ناپاک از نظر گفتار و کردار و تخیلات.»

او پسرک مشکل‌دار و تنهایی بود که هیچ دوستی نداشت و وقت فراغت زیادی داشت. برای خودش تحقیقات علمی می‌کرد، در مزرعه ساعت آفتابی می‌ساخت، و افتادن نور و سایه را بر دیوارها اندازه‌گیری می‌کرد. وقتی که ده‌ساله بود، مادرش که دوباره بیوه شده بود، بازگشت، و سه بچه‌ی دیگرش، دو دختر و یک پسر، را هم با خود

آورد. او آیزاک را به مدرسه‌ای در گرانتهَم فرستاد که تا آنجا هشت مایل فاصله داشت، طوری که پیاده پیمودن آن در هر روز عملی نبود. آیزاک با آقای ویلیام کلارک به آن‌جا رفت که عطار و داروفروش بود، و از او علاج بیماری‌ها، نحوه‌ی جوشاندن و مخلوط کردن و چگونگی کوبیدن با هاون را فراگرفت. مدیر مدرسه، آقای هنری استوکس، به او لاتین، مقداری الهیات، یونانی، عبری، و مقداری ریاضیات عملی برای کشاورزان در خصوص مساحی و اندازه‌گیری زمین، و نیز برخی چیزهای عمیق‌تر، مانند روش ارشمیدس برای برآورد عدد پی، را آموزش داد. با آنکه در گزارش‌های مدرسه آمده بود که او کودکی تنبل و کم‌توجه است، ولی آیزاک وقتی که شب‌ها در اتاقش تنها بود، روی دیوار شکل‌هایی می‌کشید، نمودارهای ارشمیدسی از دایره و چندضلعی.

وقتی که شانزده‌ساله شد، مادرش او را از مدرسه بیرون آورد و وادارش کرد که به اداره‌ی مزرعه‌ی خانواده بپردازد. او از زراعت متنفر بود. خوک‌ها را رها می‌کرد که وارد مزارع همسایه شوند و نرده‌های مزرعه‌اش غالباً شکسته بود، و طبیعتاً دادگاه دهقانی هم او را جریمه می‌کرد. اغلب با مادر و ناخواهری‌هایش بگومگو می‌کرد. خیلی از اوقات تنها در مزرعه دراز می‌کشید و کتاب می‌خواند. در جوی آب، چرخ‌های آبی می‌ساخت و تلاطم‌هایی را که در جریان آب پدید می‌آورد، مطالعه می‌کرد.

سرانجام مادرش کار درست را انجام داد. به توصیه‌ی برادرش و مدیر مدرسه، استوکس، به آیزاک اجازه داد که به مدرسه بازگردد. عملکرد درسی او به‌قدری خوب بود که در سال ۱۶۶۱ توانست به‌عنوان محصل با کمک‌هزینه وارد ترینیتی کالج کمبریج شود. کمک‌هزینه‌ی او به این صورت بود که می‌بایست برای به دست آوردن مخارج تحصیل‌اش، سر میز غذا گارسونی کند و خدمتکار دانشجویان ثروتمندتر باشد. بعضی وقت‌ها هم مانده‌ی غذای آن‌ها را می‌خورد. (مادرش می‌توانست خرج او را بدهد، ولی نمی‌داد.) در کالج دوستان زیادی پیدا نکرد، و البته در مراحل بعدی عمرش نیز به همین صورت بود. او هرگز ازدواج نکرد، و تا جایی که ما خبر داریم، هیچ‌گاه رابطه‌ی عاشقانه‌ای نداشت. او به‌ندرت می‌خندید.

دو سال اول تحصیل‌اش در کالج تماماً صرف فراگیری تعالیم ارسطویی شد، که در آن زمان هنوز متداول بود. ولی بعد ذهن او به جنبش درآمد. بعد از خواندن کتابی در زمینه‌ی اختربینی، کنجکاوِ خواندن ریاضیات شد. متوجه شد که تا مثلثات نداند، قادر به فهمیدن آن نخواهد بود، و تا مقداری هندسه نداند، مثلثات را درک نخواهد کرد، از این رو، نگاهی به کتاب *اصول* اقلیدس انداخت. در ابتدا، همه چیز برایش بدیهی به نظر می‌رسید، اما وقتی که به قضیه‌ی فیثاغورس رسید، نظرش عوض شد.

در سال ۱۶۶۴، بورسیه‌ی تحصیلی به او داده شد، و با اشتیاق به تحصیل ریاضیات

پرداخت. شش کتاب مرسوم آن زمان را مطالعه کرد، و مبانی حساب اعشاری، جبر نمادین، سه‌گانه‌های فیثاغورسی، جایگشت‌ها، معادلات درجه‌ی سوم، مقاطع مخروطی، و بی‌نهایت‌کوچک‌ها را فراگرفت. دو مؤلف خصوصاً نظر او را جلب کرده بودند: دکارت، در باب هندسه‌ی تحلیلی و خطوط مماس، و جان والیس، در باب بی‌نهایت و تربیع.

بازی با سری‌های توان

زمانی که نیوتن در زمستان ۶۵–۱۶۶۴ مشغول غور و تفحص در کتاب *حساب بی‌نهایت‌کوچک‌های* والیس بود، به‌طور اتفاقی به موضوعی جادویی برخورد. روش جدیدی بود برای به دست آوردن مساحت زیر منحنی، روشی که هم آسان بود و هم نظام‌مند.

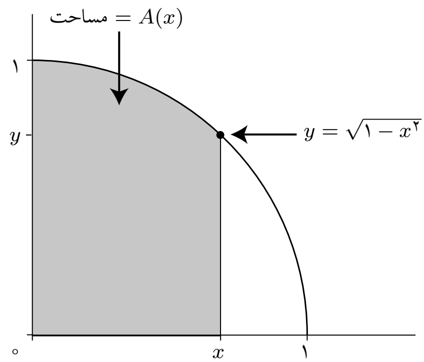
اساساً او اصل بی‌نهایت را تبدیل به یک الگوریتم کرد. اصل بی‌نهایت متعارف می‌گوید که برای محاسبه‌ی یک مساحت پیچیده، آن را به‌صورت یک سری بی‌نهایت از نواحی ساده‌تر در نظر بگیرید. نیوتن از این روش پیروی کرد، ولی به‌عنوان بلوک‌های سازنده، به‌جای شکل‌ها از نمادها بهره گرفت. به‌جای برش‌ها یا نوارها یا چندضلعی‌های معمول، از توان‌های یک نماد x، مانند $x^۲$ و $x^۳$، استفاده کرد. امروزه به این راهبرد، *روش سری توانی* می‌گوییم.

نیوتن سری توانی را به‌عنوان تعمیم طبیعی عددهای اعشاری بی‌نهایت می‌دانست. در واقع، یک عدد اعشاری بی‌پایان چیزی جز یک سری بی‌نهایت از توان‌های ۱۰ و $\frac{۱}{۱۰}$ نیست. رقم‌های موجود در عدد به ما می‌گویند که چه مقدار از هر توان ۱۰ یا $\frac{۱}{۱۰}$ در آن وجود دارد. مثلاً عدد پی (... ۳/۱۴) متناظر با آمیزه‌ی زیر است:

$$۳/۱۴\ldots = ۳ \times ۱۰^۰ + ۱ \times \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۱ + ۴ \times \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۲ + \cdots .$$

البته برای این‌که عددی را به این صورت بنویسیم، لازم است که از *بی‌نهایت* رقم استفاده کنیم، که منظور از عدد اعشاری بی‌پایان هم همین است. بر اساس تشابه، نیوتن فکر می‌کرد که شاید بتواند هر منحنی یا تابعی را با بی‌نهایت توان x بیان کند. ترفند آن این بود که ببیند که چقدر از هر توان x را در آن قرار دهد. در طی مطالعات‌اش چندین روش برای پیدا کردن ترکیب مناسب ابداع کرد.

وقتی داشت درباره‌ی مساحت دایره فکر می‌کرد، روش خود را پیدا کرد. وقتی که این مسئله‌ی قدیمی را عمومی‌تر کرد، ساختمانی را شناسایی کرد که پیش از او هیچ‌کس متوجه آن نشده بود. به‌جای این‌که توجه خود را محدود به یک شکل استاندارد، مانند یک دایره‌ی کامل یا یک ربع دایره، کند، به بررسی مساحت شکل عجیبی پرداخت، یک «قطعه‌ی دایره‌ای» به عرض x، که در آن x می‌توانست هر عددی بین ۰ و ۱ باشد، و ۱ شعاع دایره بود.



این نخستین حرکت خلاقانه‌ی او بود. مزیت استفاده از متغیر x این بود که به نیوتن امکان می‌داد که شکل ناحیه را به‌طور پیوسته، گویی با چرخاندن یک درجه، تنظیم کند. اگر مقدار x کوچک و نزدیک صفر باشد، یک قطعه‌ی قائم نازک از دایره حاصل می‌شود که روی لبه‌ی آن ایستاده است. افزایش دادن x قطعه را چاق‌تر می‌کند، مانند یک ناحیه‌ی بلوک‌مانند. اگر x تا آخر افزایش یابد و مقدار آن به ۱ برسد، شکل آشنای ربع دایره حاصل می‌شود. با کم و زیاد کردن مقدار x، هر ناحیه‌ی دلخواه در این بینابین حاصل می‌شود.

نیوتن با یک فرایند آزادگردی شامل آزمایش کردن، تشخیص الگو، و حدس‌های عالمانه (شیوه‌ای از تفکر که آن را از کتاب والیس گرفته بود)، کشف کرد که مساحت قطعه‌ای دایره‌ای را می‌توان با سری توان زیر بیان کرد:

$$A(x) = x - \frac{۱}{۶}x^۳ - \frac{۱}{۴۰}x^۵ - \frac{۱}{۱۱۲}x^۷ - \frac{۵}{۱۱۵۲}x^۹ - \cdots .$$

این‌که آن کسرهای خاص از کجا آمده و چرا توان‌های x همه اعداد فرد هستند، خب، این‌ها همه جزئی از سُسِ سرّی نیوتن بود. روش پخت آن‌ها به‌طور خلاصه

به‌صورت زیر بود. (اگر علاقه‌ی خاصی به این بحث ندارید، می‌توانید از بقیه‌ی این پاراگراف عبور کنید. اما اگر علاقه‌مند به خواندن جزئیات بیشتر آن هستید، برای اطلاع از منابع مربوطه به یادداشت‌ها مراجعه کنید.) نیوتن کار خود را بر روی قطعه‌ی دایره‌ای با استفاده از هندسه‌ی تحلیلی شروع کرد. او دایره را به‌صورت $x^۲ + y^۲ = ۱$ بیان کرد و سپس آن را برای y حل کرد و به دست آورد $y = \sqrt{۱ - x^۲}$. سپس استدلال کرد که ریشه‌ی دوم معادل است با توان نیم، و لذا $y = (۱ - x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$؛ به توان $\frac{۱}{۲}$ در سمت راست پرانتز توجه کنید. سپس از آنجا که نه او و نه هیچ‌کس دیگر نمی‌دانست مساحت قطعه‌ی توان نیم را چگونه به دست آورد، مسئله را دور زد—که این دومین حرکت خلاقانه‌ی او بود—و آن را فقط برای توان‌های صحیح حل کرد. به دست آوردن مساحت برای توان‌های صحیح کار آسانی بود؛ روش آن را با خواند کتاب والیس یاد گرفته بود. بنابراین، نیوتن مساحت قطعه‌ها را برای $y = (۱ - x^۲)^۱$ و $y = (۱ - x^۲)^۲$ و $y = (۱ - x^۲)^۳$ و غیره به دست آورد، که همه‌ی آن‌ها در خارج از پرانتز توان‌های صحیح، مانند ۱، ۲، و ۳، داشتند. او عبارت‌ها را با قضیه‌ی دوجمله‌ای بسط داد و مشاهده کرد که تبدیل به مجموع توابع توان ساده شدند، که تابع مساحت آن‌ها را قبلاً در جدولی درج کرده بود، همان‌طور که آن را در صفحه‌ای از دفترچه‌ی دست‌نویس او دیدیم. بعد سعی کرد در مساحت قطعه‌ها به‌عنوان تابعی از x، الگویی پیدا کند. بر اساس آن‌چه برای اعداد صحیح دید، جواب را برای توان نیم هم حدس زد—که این سومین اقدام خلاقانه‌ی او بود—و سپس درستی آن را به طرق مختلف وارسی کرد. بر اساس پاسخی که برای توان $\frac{۱}{۲}$ به دست آورد، به فرمولی برای $A(x)$ رسید، همان سری توان شگفت‌انگیز با کسرهای خاصی که در بالا نشان داده شد.

آنگاه بر اساس مشتق سری توانی برای قطعه‌ی دایره‌ای، سری دیگری برای خود دایره به دست آورد که آن هم همان‌قدر شگفت‌انگیز است:

$$y = \sqrt{۱ - x^۲} = ۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۸}x^۴ - \frac{۱}{۱۶}x^۶ - \frac{۵}{۱۲۸}x^۸ - \cdots.$$

هنوز پیشرفت‌های زیاد دیگری نیز در راه بود، ولی خود همین هم قابل‌توجه بود. او یک دایره را از بی‌نهایت قطعه‌ی کوچک‌تر و ساده‌تر ساخته بود—ساده‌تر از دیدگاه مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری. تمام اجزای آن توابع توان به‌صورت x^n بود، که در آن n یک عدد صحیح است. هر کدام از توابع توان، مشتق و انتگرال (تابع مساحت) آسانی داشت. به‌علاوه، مقادیر عددی x^n را می‌شد با روش‌های ساده‌ی حساب، با انجام ضرب‌های مکرر، محاسبه کرد، و سپس آن‌ها را به‌صورت یک سری ترکیب کرد، که

باز هم به چیزی جز جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم نیاز نداشت. نیازی نبود که نگران جذر گرفتن یا توابع دردسرساز دیگر باشد. اگر می‌توانست چنین سری‌های توانی را برای منحنی‌های دیگر غیر از دایره نیز پیدا کند، مشتق‌گیری آن‌ها نیز راحت می‌شد.

نیوتن که در آن زمان بیست و دو سال بیشتر نداشت، راهی را برای رسیدن به جام مقدس پیدا کرده بود. با تبدیل کردن منحنی‌ها به سری‌های توانی، می‌توانست مساحت آن‌ها را به‌طور نظام‌مند پیدا کند. حل مسئله‌ی معکوس با توابع توانی، با توجه به توابعی که جدول آن‌ها را درست کرده بود، مانند آب خوردن بود. بنابراین، هر منحنی دیگری هم که می‌توانست آن را به‌صورت توابع توان بیان کند، به همان آسانی قابل‌حل بود. این الگوریتم او بود، و بسیار هم قدرتمند بود.

بعد منحنی دیگری، هذلولی $y = ۱/(۱ + x)$، را در نظر گرفت، و مشاهده کرد که آن را هم می‌تواند به‌صورت یک سری توانی بنویسد:

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^۲ - x^۳ + x^۴ - x^۵ + \cdots .$$

این سری به نوبه‌ی خود منجر به یک سری توان برای مساحت قطعه‌ی زیر هذلولی از ۰ تا x می‌شود، مانند همان قطعه‌ی دایره‌ای که قبلاً مطالعه کرده بود. این مساحت تابعی را تعریف می‌کند که به آن لگاریتم هذلولوی می‌گفت، و امروزه به آن لگاریتم طبیعی می‌گوییم:

$$\ln(۱+x) = x - \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۵}x^۵ - \frac{۱}{۶}x^۶ + \cdots .$$

لگاریتم به دو دلیل نیوتن را به هیجان می‌آورد. اولاً سرعت محاسبات را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌داد، و ثانیاً با یک مسئله‌ی بحث‌برانگیز در موسیقی که مشغول کار بر روی آن بود، ارتباط داشت: چگونه یک اکتاو را به پرده‌های موسیقایی کاملاً مساوی تقسیم کنیم، بدون آن‌که هارمونی‌های خوشایند گام سنتی را فدا کنیم. (با اصطلاحات نظریه‌ی موسیقی، نیوتن سعی داشت با استفاده از لگاریتم تعیین کند که چگونه می‌توان یک تقسیم‌بندی با اعتدال از اکتاو ایجاد کرد که به‌طور تقریبی مانند کوک سنتی آهنگ باشد.)

به لطف اینترنت و تاریخ‌دانانی که در پروژه‌ی نیوتن کار می‌کنند، همین الآن می‌توانید به سال ۱۶۶۵ بازگردید و ماجراهای نیوتن جوان را مرور کنید. (دفترچه‌ی دست‌نویس دانشگاهی او در

نشانی http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/ به رایگان در دسترس است.) اگر به صفحه‌ی ۲۲۳ (صفحه‌ی 105v در اصل) نگاه کنید، خواهید دید که در آن‌جا تصاعدهای هندسی و موسیقایی را با هم مقایسه می‌کند. روی پایین صفحه زوم کنید تا ببینید که چگونه این محاسبات را با لگاریتم ارتباط داده است. بعد به صفحه‌ی ۴۳ (صفحه‌ی 20r در اصل) بروید و او را در حال «تربیع هذلولی» تماشا کنید و ببینید که با استفاده از سوی توانی، لگاریتم طبیعی ۱/۱ را تا پنجاه رقم اعشار محاسبه کرده است.

آخر چه کسی لگاریتم را به‌صورت دستی تا پنجاه رقم حساب می‌کند؟ ظاهراً او از قدرت جدیدی که سری‌های توانی به او می‌داده، خیلی خوش‌حال بوده است. بعدها وقتی که به زیاده‌روی‌اش در این محاسبات فکر کرد، کمی خجالت‌زده به نظر می‌رسید: «شرم دارم بگویم این محاسبات را تا چند رقم ادامه دادم، چون کار دیگری نداشتم و از این ابداعات، بیش از حد کیف می‌کردم.»

ولی البته باید گفت که هیچ‌کس کامل نیست. نیوتن وقتی که نخستین بار این محاسبات را انجام می‌داد، اشتباه محاسباتی کوچکی را مرتکب شد. محاسبات او فقط تا بیست و هشت رقم درست بود. بعداً خودش این اشتباه را پیدا کرد و اصلاح کرد.

نیوتن بعد از گردشی که در وادی لگاریتم طبیعی داشت، با سری‌های توانی خود به سراغ توابع مثلثاتی رفت، که در هر جا با دایره یا چرخه یا مثلث سروکار داشته باشیم، ظاهر می‌شوند، مانند ستاره‌شناسی، مساحی، و مسیریابی. اما در این‌جا نیوتن اولین نفر نبود. بیش از دو قرن قبل، ریاضی‌دانان در کرالا، هندوستان، سری‌های توانی را برای توابع سینوس، کسینوس، و آرک‌تانژانت کشف کرده بودند. در اوایل قرن شانزدهم میلادی، جیِستادِوا و نیلاکانتا سومایاجی این فرمول‌ها را به ماداوای سانگاماگرامایی (ح. ۱۳۵۰–ح. ۱۴۲۵ م.)، بنیان‌گذار مدرسه‌ی ریاضیات و نجوم کرالا، نسبت دادند، که تقریباً دویست و پنجاه سال قبل از نیوتن آن‌ها را به دست آورده بود و در قالب شعر بیان کرده بود. از یک جهت، قابل‌درک است که سری‌های توانی در هندوستان شناخته شده باشند. اعداد اعشاری نیز در هندوستان ابداع شدند، همان‌گونه که دیدیم، نیوتن نیز کارهایی را که برای منحنی‌ها انجام می‌داد، شبیه نقش اعداد اعشاری در حساب می‌دانست.

منظور از همه‌ی این مطالب آن است که سری‌های توانی نیوتن نوعی ابزار همه‌کاره برای حسابان در اختیار او می‌گذاشت. او با استفاده از این سری‌ها می‌توانست انتگرال بگیرد، ریشه‌ی معادلات جبری را به دست آورد، و مقدار توابع غیرجبری، مانند سینوس، کسینوس، و لگاریتم، را پیدا کند. به قول خودش: «تقریباً می‌توان گفت که

آنالیز به کمک آن‌ها به همه‌ی مسئله‌ها تسری پیدا می‌کند.»

نیوتن به‌عنوان هنرمند تلفیقی

نمی‌دانم نیوتن خودش از این موضوع آگاه بود یا نه، ولی او در کارهایی که بر روی سری‌های توانی انجام می‌داد، مانند یک هنرمند تلفیقی عمل می‌کرد. او برای حل مسئله‌ی مساحت در هندسه از اصل بی‌نهایت استفاده کرد، که برگرفته از یونانیان باستان بود، و آن را با اعداد اعشاری هندیان، جبر مسلمانان، و هندسه‌ی تحلیلی فرانسویان تلفیق کرد.

برخی از وام‌های ریاضی او در معماری معادلات‌اش آشکار است. مثلاً سری بی‌نهایت *اعداد* را که ارشمیدس در تربیع سهمی از آن استفاده می‌کرد،

$$\frac{۴}{۳} = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \cdots ,$$

با سری بی‌نهایت *نمادها* که نیوتن از آن در تربیع هذلولی استفاده کرد،

$$\frac{۱}{۱ + x} = ۱ - x + x^{۲} - x^{۳} + x^{۴} - x^{۵} + \cdots ,$$

مقایسه کنید. اگر در سری نیوتن قرار دهیم $x = -\frac{۱}{۴}$، تبدیل به سری ارشمیدس می‌شود. از این نظر، سری ارشمیدس یکی از حالت‌های خاص سری نیوتن است.

علاوه بر این، شباهت کار آن‌ها به مسایل هندسی هم که در نظر می‌گرفتند، کشیده می‌شد. هر دوی آن‌ها به قطعه‌ها خیلی علاقه داشتند؛ ارشمیدس سری عددی خود را برای تربیع (یعنی یافتن مساحت) قطعه‌ی سهموی به کار می‌برد، در حالی که نیوتن سری توانی اختراعی خود،

$$A_{\text{دایره‌ای}}(x) = x - \frac{۱}{۶}x^{۳} - \frac{۱}{۴۰}x^{۵} - \frac{۱}{۱۱۲}x^{۷} - \frac{۵}{۱۱۵۲}x^{۹} - \cdots ,$$

را برای تربیع یک قطعه‌ای دایره‌ای، و یک سری توانی دیگر،

$$A_{\text{هذلولوی}}(x) = x - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۵}x^{۵} - \frac{۱}{۶}x^{۶} + \cdots ,$$

را برای تربیع یک قطعه‌ی هذلولوی مورد استفاده قرار داد.

در واقع، سری نیوتن بی‌نهایت قدرتمندتر از ارشمیدس بود، چون به او امکان می‌داد که نه فقط مساحت یک قطعه‌ی دایره‌ای یا هذلولی، بلکه بی‌نهایت قطعه از این نوع را محاسبه کند. این به‌علت استفاده از نماد انتزاعی x است. این به او امکان می‌داد که مسئله‌هایش را پیوسته و بدون زحمت تغییر دهد. می‌توانست با جابه‌جا کردن x به طرف چپ یا راست، شکل قطعه را تنظیم کند، به‌طوری که آن‌چه به‌ظاهر یک سری بی‌نهایت واحد به نظر می‌رسید، در حقیقت، خانواده‌ای بی‌نهایت از سری‌های بی‌نهایت بود، یک مورد به ازای هر مقدار x. این قدرت سری‌های توانی بود. این سری‌ها به نیوتن امکان می‌دادند که تنها با یک حرکت، بی‌نهایت مسئله را حل کنند.

ولی خب، هیچ‌کدام از این کارها را جز با ایستادن بر شانه‌ی غول‌ها نمی‌توانست انجام دهد. او افکار پیشینیان بزرگ خود را تلفیق و ترکیب کرد و تعمیم داد: اصل بی‌نهایت از ارشمیدس به او رسید. خطوط مماس را از فرما یاد گرفت. اعداد اعشاری از هندوستان آمده بود. متغیرها را از علم جبر دنیای اسلام یاد گرفته بود. نمایش منحنی‌ها به‌عنوان معادله‌هایی در صفحه‌ی xy از خواندن آثار دکارت حاصل شده بود. ماجراهای آزادگردی او با بی‌نهایت، روحیه‌ی آزمایش‌گری‌اش، و پذیرا بودن‌اش برای حدسیات و استقرا از خواندن آثار والیس حاصل شده بود. همه‌ی این‌ها را با هم تلفیق کرد، و چیز جدیدی پدید آورد، چیزی که هنوز هم امروز برای حل مسایل حسابان از آن استفاده می‌کنیم: روش متنوع سری‌های توانی.

حسابان خصوصی

در حالی که نیوتن در طول زمستان ۶۵–۱۶۶۴ مشغول کار بر روی سری‌های توانی بود، مرض وحشتناکی در منطقه‌ی شمال اروپا شایع شده بود که همچون موج حرکت می‌کرد و از منطقه‌ی مدیترانه به‌سوی هلند گسترش می‌یافت. وقتی که طاعون خیارکی به لندن رسید، صدها نفر را در یک هفته به کام مرگ فرستاد، و سپس شمار تلفات به هزاران نفر رسید. در تابستان ۱۶۶۵، دانشگاه کمبریج به‌خاطر این بیماری به‌طور موقتی تعطیل شد. نیوتن به مزرعه‌ی خانوادگی‌اش در لینکلن‌شر رفت.

در طول دو سال بعد، او بهترین ریاضی‌دان دنیا شد. ولی اختراع حسابان مدرن برای مشغول نگه‌داشتن ذهن او کافی نبود. قانون مربع معکوس جاذبه را هم کشف کرد و آن را برای ماه به کار گرفت، تلسکوپ بازتابی را اختراع کرد، و به‌صورت تجربی نشان داد که نور سفید متشکل از تمام رنگ‌های رنگین‌کمان است. هنوز حتی بیست و

پنج سالش نبود. خودش بعدها نوشته است: «در آن زمان در بهترین دوران عمرم برای اختراع بودم و بیش از هر زمان دیگری پس از آن، ذهنم برای ریاضیات و فلسفه آمادگی داشت.»

در سال ۱۶۶۷، پس از آن‌که طاعون فروکش کرد، نیوتن به کمبریج بازگشت، و مطالعات انفرادی‌اش را ادامه داد. تا سال ۱۶۷۱، موفق شد بخش‌های مختلف حسابان را به‌عنوان یک واحد یکپارچه با هم متحد کند. روش سری‌های توانی را توسعه داد، که با بهره‌گیری از ایده‌های مربوط به حرکت، بهبود قابل‌توجهی نسبت به نظریه‌های موجود خطوط مماس داشت، و قضیه‌ی بنیادی را اثبات کرد که منجر به حل مسئله‌ی مساحت شد، جداول منحنی‌ها و توابع مساحت آن‌ها را تدوین کرد، و همه‌ی این‌ها را به‌صورت یک ماشین محاسباتی نظام‌مند و کوک‌شده با هم تلفیق کرد.

ولی فراتر از حصارهای ترینیتی کالج، کسی او را نمی‌شناخت. خودش این‌طور می‌خواست. سرچشمه‌ی پنهان‌اش را برای خود نگه‌می‌داشت. او که منزوی و بدگمان بود، نسبت به انتقادات شدیداً حساس بود و دوست نداشت با کسی جر و بحث کند، خصوصاً کسانی که حرف او را نمی‌فهمیدند. به‌طوری که خودش بعدها نوشته است، «خوشم نمی‌آمد که وراج‌هایی که چیز زیادی از ریاضیات نمی‌فهمیدند، سر به سرم بگذارند.»

یک دلیل دیگر هم برای محتاط بودن داشت. می‌دانست که به دلایل منطقی به کارهای او حمله خواهند کرد. او به‌جای هندسه، از جبر بهره گرفته بود، و بی‌نهایت را بی‌پروا به بازی گرفته بود، که این گناه کبیره‌ی حسابان بود. جان والیس، که کتاب‌اش در سال‌های دانشجویی تأثیر زیادی بر نیوتن بر جای گذاشته بود، برای همین تخلفات به‌طور بی‌رحمانه آماج انتقاد قرار گرفته بود. توماس هابز، یک فیلسوف سیاسی و ریاضی‌دان درجه دو، کتاب *حساب بی‌نهایت‌کوچک‌های* والیس را به‌خاطر اتکا بر جبر به‌عنوان «دلمه‌ای از نمادها» و به‌خاطر استفاده از بی‌نهایت به‌عنوان «کتابی بی‌مایه» توصیف کرده بود. و نیوتن لاجرم اذعان داشت که کتاب‌اش فقط تحلیل است و نه ترکیب. فقط برای یافتن کشفیات خوب بود، نه برای اثبات آن‌ها. او با کوچک دانستن روش‌های بی‌نهایت خود، آن‌ها را «لایقِ گفتن برای عموم» نمی‌دانست، و چندین سال بعد گفت: «این جبر ظاهری ما به درد یاد گرفتن می‌خورد، اما برای نگاشتن و سپردن به آیندگان به‌هیچ‌وجه مناسب نیست.»

به این دلیل و به‌خاطر دلایل دیگر، نیوتن کارش را مخفی نگه‌می‌داشت. ولی ته دلش می‌خواست که به اسم خودش ثبت شود. خیلی ناراحت شد وقتی که نیکلاس مرکاتور در سال ۱۶۶۸ کتاب کوچکی درباره‌ی لگاریتم چاپ کرد که حاوی

همان سری بی‌نهایتی بود که نیوتن سه سال قبل برای لگاریتم طبیعی کشف کرده بود. شوک و ناامیدی ناشی از عقب افتادن، نیوتن را بر آن داشت که در سال ۱۶۶۹ کتابچه‌ی کوچکی درباره‌ی سری‌های توانی بنویسد و آن را به‌طور خصوصی بین چند نفر از همکاران مورد اعتماد خود توزیع نماید. این کتابچه از لگاریتم بسی فراتر می‌رفت. این کتاب *در باب تحلیل* نام دارد و ترجمه‌ی عنوان کامل آن این است: *در باب تحلیل معادلات با تعداد جملات نامحدود*. در سال ۱۶۷۱، آن را بزرگ‌تر کرد و رساله‌ی اصلی‌اش را در زمینه‌ی حسابان نوشت، با عنوان *رساله‌ای در باب روش‌های سری‌ها و شارش‌ها*، یا به اختصار *در باب روش‌ها*، ولی این رساله در طول عمر او منتشر نشد؛ از آن به‌دقت محافظت می‌کرد و آن را برای استفاده‌ی خصوصی خود نگه‌می‌داشت. *در باب تحلیل* تازه در سال ۱۷۱۱ منتشر شد؛ و *در باب روش‌ها* پس از مرگ او در سال ۱۷۳۶ منتشر گردید. ماترک نیوتن شامل پنج هزار صفحه مطالب ریاضی منتشر نشده بود.

بنابراین، مدتی طول کشید که دنیا آیزاک نیوتن را کشف کند. اما در درون دیوارها کمبریج، او به‌عنوان یک نابغه شناخته می‌شد. در سال ۱۶۶۹، آیزاک بارو، نخستین استاد کرسی ریاضیات لوکاسی، که می‌توان او را معلم نیوتن دانست، از این کرسی استعفا داد و سفارش کرد که نیوتن به‌عنوان استاد کرسی ریاضیات لوکاسی منصوب شود.

این مقام ایده‌آلی برای نیوتن بود. برای نخستین بار در زندگی‌اش، از نظر مالی تأمین بود. این پست نیازی به تدریس زیادی نداشت. هیچ‌گونه دانشجوی تخصصی نداشت، و در جلسات تدریس‌اش برای دانشجویان کارشناسی، افراد کمی شرکت می‌کردند، که خیلی هم خوب بود. به هر حال، دانشجویان سخنان او را درک نمی‌کردند. نمی‌دانستند این مرد عجیب، لاغر، و راهب‌وار با ردای سرخ، چهره‌ی عبوس، و موهای بلندش چه می‌گوید.

پس از آن‌که نیوتن کارش را بر روی کتاب *در باب روش‌ها* به پایان رساند، ذهن‌اش مثل همیشه در تکاپو بود، ولی دیگر علاقه‌ی اصلی‌اش حسابان نبود. او اکنون سخت غرق مطالعه‌ی تاریخ عهد قدیم و پیش‌گویی‌های انجیل، اپتیک و کیمیاگری، تجزیه کردن نور به رنگ‌ها با استفاده از منشور، آزمایش کردن با جیوه، بو کردن مواد شیمیایی خود و گاه آزمایش کردن آن‌ها، و برافروختن آتش در کوره‌ی ذوب بود، و شب و روز در این تلاش بود که سرب را به طلا تبدیل کند. او هم، مانند ارشمیدس، نسبت به غذا خوردن و خوابیدن بی‌اعتنا شده بود. در پی یافتن اسرار گیتی بود، و دوست نداشت هیچ چیز تمرکز او را بر هم زند.

یکی از چیزهایی که تمرکز او را بر هم زد، نامه‌ای بود که در یکی از روزهای سال ۱۶۷۶ از پاریس به دست او رسید. نامه از فردی به نام لایبنیتس بود. او سؤالاتی درباره‌ی سری‌های توانی داشت.

فصل ۸

ساخته‌های ذهن

خبر کارهای منتشر نشده‌ی نیوتن از کجا به لایبنیتس رسیده بود؟ زیاد هم مشکل نبود. سال‌ها بود که خبر کشفیات نیوتن به بیرون درز می‌کرد. در سال ۱۶۶۹، آیزاک بارو، به منظور تقویت نورچشمی جوان خود، یک نسخه‌ی بدون نام از رساله‌ی *در باب تحلیل* را برای مردی به نام جان کالینز فرستاد، که آماتور و مبلّغ ریاضیات بود. کالینز شبکه‌ای مکاتبه‌ای از ریاضی‌دانان بریتانیایی و اروپایی به راه انداخته بود که خودش در مرکز آن قرار داشت. او از نتایج مندرج در رساله‌ی *در باب تحلیل* شگفت‌زده شد و نام مؤلف آن را از بارو پرسید. بارو، با اجازه‌ی نیوتن، نام او را فاش کرد: «خرسندم دوستان که این مقاله این‌قدر شما را راضی کرده است. نام او آقای نیوتن است؛ از اعضای کالج ما، و بسی جوان... ولی با نبوغ خارق‌العاده و تبحر در این‌گونه چیزها.»

کالینز کسی نبود که رازی را پیش خودش نگه‌دارد. بخش‌هایی از رساله‌ی *در باب تحلیل* را برای مخاطبان خود فرستاد و بدون آن‌که منبع مطالب را توضیح دهد، آن‌ها را از نتایج نیوتن شگفت‌زده کرد. در سال ۱۶۷۵، سری توانی نیوتن برای توابع سینوس و معکوس سینوس را برای یک ریاضی‌دان دانمارکی به نام گئورگ بور فرستاد، و او هم آن‌ها را به لایبنیتس خبر داد. لایبنیتس درخواستی برای دبیر انجمن سلطنتی لندن نوشت، یک سخنور آلمانی‌تبار و مروج علم به نام هنری اولدنبرگ: «نظر به این‌که او [بور] این مطالعات را برای ما آورده است که به نظر من، بسیار هوشمندانه است، خصوصاً سری اخیر که از زیبایی خاصی برخوردار است، ازاین‌رو، بسیار سپاس‌گزار خواهم شد، حضرت آقا، که اثبات را برایم بفرستید.»

اولدنبرگ درخواست را به نیوتن اطلاع داد، و نیوتن از این موضوع مکدر شد.

اثبات را بفرستم؟ ها! در عوض، از طریق اولدنبرگ جوابی برای لایبنیتس فرستاد که مشتمل بر چندین و چند صفحه فرمول‌های پیچیده و رعب‌انگیز بود، مجموعه‌ی کاملی از زرادخانه‌ی رساله‌ی *در باب تحلیل*. خارج از حلقه‌ی داخلی نیوتن، هیچ‌کس تا آن زمان چنین ریاضیاتی ندیده بود. و محض محکم‌کاری، نیوتن تأکید کرد که این مطالب کهنه و پیش‌پاافتاده است: «من مطالب را نسبتاً خلاصه می‌نویسم، چون این نظریه‌ها مدت‌ها است که برای من بی‌مزه شده است، به‌حدی که اکنون تقریباً پنج سال است که به آن‌ها نپرداخته‌ام.»

لایبنیتس ناامید نشد و دوباره به نیوتن نامه نوشت، بدان امید که پاسخ بیشتری از او بگیرد. او در این کارها تازه‌کار بود. به‌عنوان یک دیپلمات، منطق‌دان، زبان‌شناس، و فیلسوف، تازه در این اواخر به ریاضیات پیشرفته علاقه‌مند شده بود. مدتی را با کریستیان هویگنس، بزرگ‌ترین مغز ریاضی در اروپا، گذرانده بود، تا با آخرین تحولات آشنا شود. تنها پس از سه سال مطالعه، لایبنیتس در اروپا از همه جلو زد. تنها چیزی که حالا لازم داشت، این بود که بفهمد نیوتن چه چیزهایی بلد است... و چه چیزهایی را دارد مخفی می‌کند.

لایبنیتس برای این‌که از نیوتن حرف بکشد، ترفند دیگری را به کار بست. اشتباه کرد و سعی کرد او را تحت تأثیر قرار دهد. بعضی از یافته‌های خودش را گردآوری کرد—به‌خصوص، یک سری بی‌نهایت که به آن مباهات می‌کرد—و آن به نیوتن ارائه کرد، به‌ظاهر به‌عنوان پیشکش، ولی در حقیقت، برای این‌که نشان دهد که لیاقت شنیدن راز او را دارد.

نیوتن دو ماه بعد، در تاریخ ۲۴ اکتبر ۱۶۷۶، با واسطه‌ی اولدنبرگ به او جواب داد. ابتدا کمی تملق کرد و لایبنیتس را فردی «بسیار برجسته» خواند، و سری بی‌نهایت او را ستود، و گفت که این «ما را بر آن می‌دارد که امید کارهای بسیار بزرگی از او داشته باشیم». ولی آیا این تعارفات را جدی می‌گفت؟ ظاهراً نه، چون سطر بعدی نامه سرشار از ریشخندی گزنده بود: «تنوع راه‌هایی که می‌توان به یک هدف واحد رسید، مرا خرسندتر ساخته است، زیرا من از قبل سه راه برای رسیدن به این نوع سری می‌دانستم، به‌طوری که کمتر انتظار داشتم که راه جدیدی به ما اطلاع داده شود.» به عبارت دیگر، *ممنونم که چیزی را که خودم هم به سه روش بلد بودم، به من نشان دادی.*

در بقیه‌ی نامه، نیوتن لایبنیتس را به بازی گرفت. بعضی از روش‌های خودش را برای سری‌های بی‌نهایت فاش کرد، و آن‌ها را به زبان ساده‌ای که برای درس دادن به بچه‌مدرسه‌ای‌ها مناسب بود، شرح داد. از بخت خوش آیندگان، این قسمت‌های نامه به‌قدری روشن است که می‌توانیم دقیقاً بفهمیم که در ذهن نیوتن چه می‌گذشته است.

ولی وقتی که به ارزشمندترین یافته‌هایش رسید (تکنیک‌های انقلابی دومین رساله‌اش درباره‌ی حسابان، رساله‌ی *در باب روش‌ها*، از جمله قضیه‌ی بنیادی، که هنوز به بیرون درز نکرده بود)، روش ارائه‌ی ساده‌فهم نیوتن به پایان رسید: «بنیان این کارها، در حقیقت، بسی مبرهن است؛ ولی از آنجا که اکنون نمی‌توانم به توضیح آن بپردازم، ترجیح می‌دهم آن را بدین‌گونه مخفی سازم: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx. بر پایه‌ی همین بنیان، سعی کرده‌ام نظریه‌های مربوط به تربیع منحنی‌ها را نیز ساده کنم، و به برخی قضیه‌های عمومی نیز رسیده‌ام.»

و با این نوشتار رمزی، نیوتن راز محبوب خود را در مقابل لایبنیتس به نمایش گذاشت، انگار که به او می‌گفت: *من چیزی می‌دانم که تو نمی‌دانی، و اگر هم تو آن را بعداً کشف کنی، این رمزنگاشت ثابت خواهد کرد که من اول آن را می‌دانستم.*

چیزی که نیوتن نمی‌دانست، این بود که لایبنیتس هم از قبل رازی را برای خود کشف کرده بود.

در یک چشم بر هم زدن

بین سال‌های ۱۶۷۲ و ۱۶۷۶، لایبنیتس نسخه‌ی دیگری از حسابان را برای خود ایجاد کرده بود. او هم مانند نیوتن، قضیه‌ی بنیادی را کشف و اثبات کرد، اهمیت آن را تشخیص داد، و بر مبنای آن، یک سیستم الگوریتمی ایجاد کرد. او نوشته است که به یاری آن، توانسته است «در یک چشم بر هم زدن» تقریباً همه‌ی قضیه‌های مربوط به تربیع و خطوط مماس را که در آن زمان شناخته شده بود—به‌جز آنهایی که نیوتن هنوز از جهان مخفی می‌کرد—به دست آورد.

وقتی که لایبنیتس در سال ۱۶۷۶ دو نامه‌اش را به نیوتن نوشت و مثل آدم‌های فضول، اثبات‌ها را درخواست کرد، می‌دانست که زیادی مزاحم می‌شود، ولی دست خودش نبود. خودش یک بار به یکی از دوستانش گفت: «من احساس می‌کنم در یکی از خصوصیاتی که در این دنیا خیلی اهمیت دارد، نقص دارم، و آن این است که تا حدی فاقد آداب ارتباط با دیگران هستم، و ازاین‌رو، تصویر ناخوشایندی از خودم در ذهن دیگران ایجاد می‌کنم.»

لایبنیتس که لاغر و خمیده و رنگ‌پریده بود، شاید قیافه‌ی چندانی نداشت، ولی ذهن‌اش زیبا بود. او جامع‌ترینِ نوابغ بود، در قرنی که نوابغ زیادی، همچون دکارت، گالیله، نیوتن، و باخ، در آن می‌زیستند.

با آن‌که لایبنیتس یک دهه بعد از نیوتن به کشف حسابان ویژه‌ی خود نایل شد، ولی به دلایل متعدد، او را به‌همراه نیوتن مخترع حسابان می‌دانند. او اول آن را منتشر کرد، به شکلی مطبوع و قابل‌درک، و نمادهای زیبایی را برای آن طراحی کرد که هنوز هم مورد استفاده است. به‌علاوه، شاگردانی را پرورش داد که با شور و اشتیاق فراوان به ترویج آن پرداختند. آن‌ها کتاب‌های تأثیرگذاری نوشتند و این مبحث را با جزئیات وافر توسعه دادند. مدت‌ها بعد که لایبنیتس متهم به دزدیدن حسابان از نیوتن شد، شاگردانش با قدرت به دفاع از او برآمدند، و با همان حرارت به نیوتن حمله کردند.

رویکرد لایبنیتس به حسابان در مقایسه نیوتن مقدماتی‌تر—و از بعضی جهات، شهودی‌تر—است. به‌علاوه، مشخص می‌کند که چرا به مطالعه‌ی مشتق، حساب *دیفرانسیل* گفته می‌شود، و عمل گرفتن مشتق را *دیفرانسیل‌گیری* نیز می‌نامند—علت آن است که در رویکرد لایبنیتس، مفاهیمی مانند دیفرانسیل، هسته‌ی واقعی حسابان هستند؛ مشتق یک مفهوم ثانویه است که بعداً از آن حاصل می‌شود.

امروزه معمولاً یادمان می‌رود که دیفرانسیل تا چه حد اهمیت دارد. درس‌نامه‌های امروزی معمولاً اهمیت زیادی به آن نمی‌دهند، آن را دوباره تعریف می‌کنند، یا این‌که آن را ماست‌مالی می‌کنند، چرا که دیفرانسیل‌ها بی‌نهایت‌کوچک هستند (پناه بر خدا!). بر این اساس، دیفرانسیل را مفهومی تناقض‌آمیز، خلاف‌کارانه، و ترسناک می‌پندارند، لذا خیلی از کتاب‌ها بی‌نهایت‌کوچک‌ها را، مانند مادر نورمَن بِیتس در فیلم *روانی*، در گنجه مخفی می‌کنند. ولی دیفرانسیل چیزی نیست که از آن بترسیم. باور کنید.

پس به دیدار «مادر» می‌رویم.

بی‌نهایت‌کوچک‌ها

بی‌نهایت‌کوچک چیز مبهمی است. فرض بر این است که بی‌نهایت‌کوچک کوچک‌ترین عددی است که می‌توانید تصور کنید، ولی واقعاً صفر نیست. به‌طور خلاصه‌تر، بی‌نهایت‌کوچک از هر چیزی کوچک‌تر است، ولی از هیچ بزرگ‌تر است.

حتی متناقض‌تر اینکه بی‌نهایت‌کوچک‌ها اندازه‌های متفاوت دارند. یک بخش بی‌نهایت‌کوچک از یک بی‌نهایت‌کوچک، به نسبت از آن هم کوچک‌تر است. می‌توانیم به آن یک بی‌نهایت‌کوچک مرتبه‌ی دوم بگوییم.

درست همان‌طور که اعداد بی‌نهایت‌کوچک داریم، طول بی‌نهایت‌کوچک و زمان بی‌نهایت‌کوچک نیز داریم. یک طول بی‌نهایت‌کوچک، یک نقطه نیست—از آن بزرگ‌تر است—ولی از هر طولی که تصور کنید، کوچک‌تر است. به همین ترتیب، یک بازه‌ی

زمانی بی‌نهایت‌کوچک، یک لحظه نیست، یک نقطه‌ی واحد در زمان نیست، ولی از هر مدت زمان قابل‌تصوری کوتاه‌تر است.

مفهوم بی‌نهایت‌کوچک‌ها به‌عنوان روشی برای سخن گفتن درباره‌ی حد ابداع شده است. برای نمونه، مثال فصل ۱ را به خاطر آورید که در آن دنباله‌ای از چندضلعی‌های منتظم را در نظر گرفتیم که از مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع شروع می‌شد و به پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی و دیگر چندضلعی‌های منتظم با تعداد اضلاع بیشتر و بیشتر می‌رسید. متوجه شدیم که هر چه تعداد اضلاع بیشتر و طول آن‌ها کوتاه‌تر می‌شود، چندضلعی شباهت بیشتری به دایره پیدا می‌کند. وسوسه می‌شدیم که بگوییم دایره یک چندضلعی بی‌نهایت است که اضلاع بی‌نهایت‌کوچک دارد، ولی جلوی خودمان را گرفتیم، زیرا این مفهوم ظاهراً به چیز بی‌معنایی می‌رسید.

این را نیز دیدیم که اگر هر نقطه‌ای را روی محیط یک دایره انتخاب کنیم و زیر میکروسکوپ به آن نگاه کنیم، هر قوس کوچک مشتمل بر آن نقطه با افزایش بزرگ‌نمایی، مرتب هر چه مستقیم‌تر به نظر می‌رسد. در حد بزرگ‌نمایی بی‌نهایت، این قوس کوچک کاملاً راست به نظر می‌رسد. از این دیدگاه، به نظر می‌رسد واقعاً مفید است که دایره را به‌عنوان مجموعه‌ی بی‌نهایتی از قطعه‌های راست در نظر بگیریم، و بنابراین، آن را یک چندضلعی بی‌نهایت با اضلاع بی‌نهایت‌کوچک بدانیم.

نیوتن و لایبنیتس هر دو از بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده می‌کردند، ولی نیوتن بعداً آن‌ها را کنار گذاشت و از شارش‌ها استفاده کرد (که نسبت بی‌نهایت‌کوچک‌های مرتبه‌ی اول هستند، و لذا متناهی و قابل‌ارائه‌اند، درست مانند مشتق)، در حالی که لایبنیتس دیدگاه عمل‌گرایانه‌تری را اتخاذ کرد. او اهمیتی نمی‌داد که بی‌نهایت‌کوچک‌ها واقعاً وجود دارند یا نه. از نظر او، این‌ها بیان خلاصه‌ی مفیدی بودند، روش مؤثری برای بیان مطالب درباره‌ی حدها. به‌علاوه، روش‌های مفیدی برای نوشتن مفاهیم بودند، به‌طوری که ذهن را آزاد می‌کردند که به کارهای خلاقانه‌تر بپردازد. خودش در توضیح به یکی از همکاران گفت: «از نظر فلسفی، من همان‌قدر به کمیت‌های بی‌نهایت کوچک اعتقاد دارم که به کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ، یعنی بی‌نهایت‌کوچک‌ها و بی‌نهایت‌بزرگ‌ها. از نظر من، هر دوی این‌ها ساخته‌های ذهن برای بیان خلاصه‌تر هستند که برای حسابان سودمند است.»

و اما ریاضی‌دانان امروزی چه فکر می‌کنند؟ آیا بی‌نهایت‌کوچک‌ها واقعاً وجود دارند؟ بستگی دارد منظورتان از کلمه‌ی *واقعاً* چه باشد. فیزیک‌دانان به ما می‌گویند که بی‌نهایت‌کوچک‌ها در دنیای واقعاً وجود ندارند (ولی البته بقیه‌ی ریاضیات هم همین‌طور است). در درون دنیای ایده‌آل ریاضیات، بی‌نهایت‌کوچک‌ها در دستگاه اعداد

حقیقی وجود ندارند، ولی در بعضی دستگاه‌های اعداد غیراستاندارد که اعداد حقیقی را تعمیم می‌دهند، وجود دارند. برای لایبنیتس و پیروانش، آن‌ها ساخته‌های ذهن بودند که به درد می‌خوردند. ما هم در مورد آن‌ها همین‌طور فکر خواهیم کرد.

مکعب اعداد نزدیک ۲

برای این‌که ببینید بی‌نهایت‌کوچک‌ها چقدر می‌توانند مطالب را روشن‌تر کنند، با مثالی بسیار ملموس شروع می‌کنیم. این مسئله‌ی حساب را در نظر بگیرید: مکعب ۲ (یعنی $۲ \times ۲ \times ۲$) چقدر است؟ بدیهی است که پاسخ ۸ است. ولی در مورد $۲/۰۰۱ \times ۲/۰۰۱ \times ۲/۰۰۱$ چه می‌توان گفت؟ طبیعتاً کمی از ۸ بیشتر است، ولی چقدر؟

آن‌چه در این‌جا در پی آن هستیم، یک روش تفکر است، نه یک جواب عددی. سؤال عمومی این است که وقتی ورودی یک مسئله را تغییر می‌دهیم (مثلاً در این‌جا ۲ را به ۲/۰۰۱ تبدیل می‌کنیم)، خروجی چقدر تغییر می‌کند؟ (در این‌جا از ۸ تبدیل می‌شود به ۸ به‌اضافه‌ی چیزی که می‌خواهیم ساختمان آن را بفهمیم.)

از آن‌جا که آدم نمی‌تواند جلوی کنجکاوی خود را بگیرد، بهتر است نگاهی بیندازیم ببینیم ماشین‌حساب چه می‌گوید. عدد ۲/۰۰۱ را وارد می‌کنیم و با زدن دکمه‌ی $x^۳$، داریم:

$$(۲/۰۰۱)^۳ = ۸/۰۱۲۰۰۶۰۰۱.$$

ساختمانی که باید به آن توجه کنیم، این است که مقدار اضافه‌ی بعد از ممیز، در حقیقت، متشکل از سه مقدار اضافه با اندازه‌های بسیار متفاوت است:

$$۰/۰۱۲۰۰۶۰۰۱ = ۰/۰۱۲ + ۰/۰۰۰۰۰۶ + ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱.$$

این را می‌توان کوچک به‌اضافه‌ی فوق‌کوچک به‌اضافه‌ی فوق‌فوق‌کوچک دانست.

برای فهمیدن این ساختمان که می‌بینیم، می‌توانیم از جبر استفاده کنیم. فرض کنید یک کمیت x (که در این‌جا نقش آن را عدد ۲ ایفا می‌کند) به میزان اندکی تغییر می‌کند و به $x + \Delta x$ می‌رسد (در این مورد، $\Delta x = ۰/۰۰۱$). در این صورت، وقتی مقدار $(۲/۰۰۱)^۳$ را می‌پرسیم، در واقع، می‌خواهیم $(x + \Delta x)^۳$ را به دست آوریم. با ضرب

کردن این عبارت (یا استفاده از مثلث پاسکال یا قضیه‌ی دوجمله‌ای)، خواهیم داشت:

$$(x+\Delta x)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲}\Delta x + ۳x(\Delta x)^{۲} + (\Delta x)^{۳}.$$

برای مسئله‌ی ما که در آن $x = ۲$، این معادله تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned}(۲+\Delta x)^{۳} &= ۲^{۳} + ۳(۲)^{۲}(\Delta x) + ۳(۲)(\Delta x)^{۲} + (\Delta x)^{۳}\\ &= ۸ + ۱۲\Delta x + ۶(\Delta x)^{۲} + (\Delta x)^{۳}.\end{aligned}$$

حالا می‌بینیم که چرا مقدار اضافه‌ی بعد از ۸ متشکل از سه قطعه با اندازه‌های متفاوت است. قطعه‌ی کوچک، ولی بزرگ‌تر، عبارت است از $۰/۰۱۲ = (۰/۰۰۱)۱۲ = ۱۲\Delta x$. قطعه‌های باقی‌مانده‌ی $۶(\Delta x)^{۲}$ و $(\Delta x)^{۳}$ مسئول مقدار فوق‌کوچک ۰/۰۰۰۰۰۶ و مقدار فوق‌فوق‌کوچک ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ هستند. هر چه ضریب‌های بیشتری از Δx در یک قطعه باشند، مقدار آن کوچک‌تر است. بدین خاطر است که اندازه‌ی آن‌ها در مدارج مختلف قرار می‌گیرد. با هر بار ضرب در عامل ریز Δx، قطعه باز هم کوچک‌تر می‌شود.

مطلب کلیدی حساب دیفرانسیل در همین مثال ساده به‌خوبی نمایان است. در بسیاری از مسایل مربوط به علت و معلول، دوز و پاسخ، ورودی و خروجی، یا هر نوع رابطه‌ی دیگر بین متغیر x و یک متغیر دیگر y که به آن وابسته است، تغییر کوچکی در ورودی، Δx، موجب تغییر کوچکی در خروجی، Δy، می‌شود. این تغییر کوچک معمولاً دارای ساختمانی است که می‌توانیم از آن بهره بگیریم—بدان معنا که میزان تغییر در خروجی به‌صورت سلسله‌مراتبی از قطعات است. اندازه‌ی این قطعات در درجات کوچک و فوق‌کوچک و باز هم کوچک‌تر واقع می‌شود. این درجه‌بندی به ما امکان می‌دهد که روی تغییر کوچک ولی غالب تمرکز کنیم، و از بقیه، یعنی قطعات فوق‌کوچک و باز هم کوچک‌تر، صرف‌نظر نماییم. این مطلب کلیدی است. گرچه تغییر کوچک، کوچک است، ولی نسبت به بقیه غول‌آسا است (درست همان‌طور که ۰/۱۲ در مقایسه با ۰/۰۰۰۰۰۶ و ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ غول‌آسا است).

دیفرانسیل

این نوع تفکر، که در آن سهم اصلی در پاسخ را در نظر می‌گیریم، ولی از بقیه‌ی موارد صرف نظر می‌کنیم، ممکن است تقریبی به نظر برسد. و همین‌طور هم هست—در صورتی که تغییرات ورودی، مانند ۰/۰۰۱ که در بالا به ۲ اضافه کردیم، تغییراتی *متناهی* باشند. ولی اگر تغییرات *بی‌نهایت‌کوچک* را در ورودی در نظر بگیریم، آنگاه این تفکر دقیق می‌شود. دیگر هیچ‌گونه خطایی نخواهیم داشت. سهم اصلی تبدیل به همه چیز می‌شود. و همان‌گونه که در تمام این کتاب دیده‌ایم، تغییرات بی‌نهایت‌کوچک دقیقاً همان چیزی هستند که برای سر در آوردن از شیب، سرعت لحظه‌ای، و مساحت شکل‌های خمیده به آن نیاز داریم.

برای این‌که این را در مقام عمل ببینیم، به مثال بالا برمی‌گردیم، که در آن می‌خواستیم مکعب عددی اندکی از ۲ را محاسبه کنیم. ولی این بار ۲ را به $۲ + \mathrm{d}x$ تغییر می‌دهیم، که در این‌جا $\mathrm{d}x$ نشان دهنده‌ی یک تفاوت بی‌نهایت‌کوچک Δx است. این مفهوم ذاتاً بی‌معنا است، لذا خیلی درباره‌ی آن فکر نکنید. مقصود آن است که یاد گرفتن نحوه‌ی کار با آن سبب می‌شود که فراگیری حسابان آسان‌تر شود.

به‌طور خاص، محاسبه‌ی قبلی $(۲ + \Delta x)^۳$ به‌صورت $۸ + ۱۲\Delta x + ۶(\Delta x)^۲ + (\Delta x)^۳$ حالا به چیزی بسیار ساده‌تر تبدیل می‌شود:

$$(۲ + \mathrm{d}x)^۳ = ۸ + ۱۲\,\mathrm{d}x.$$

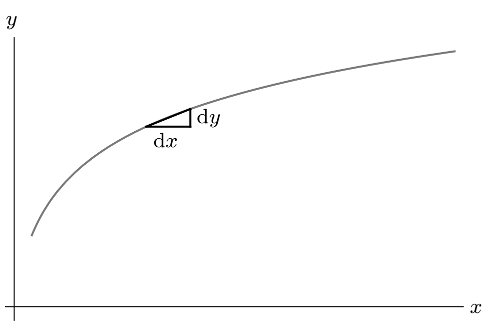
جملات دیگر مانند $۶(\mathrm{d}x)^۲ + (\mathrm{d}x)^۳$ کجا رفته است؟ آن‌ها را کنار گذاشته‌ایم. آن‌ها قابل‌چشم‌پوشی هستند. آن‌ها بی‌نهایت‌کوچک‌های فوق‌کوچک و فوق‌فوق‌کوچک هستند، و در مقایسه با $۱۲\,\mathrm{d}x$ واقعاً بی‌اهمیت‌اند. وی پس چرا خود $۱۲\,\mathrm{d}x$ را نگه‌می‌داریم؟ آیا این هم در مقایسه با ۸ به همان اندازه قابل‌چشم‌پوشی نیست؟ درست است، ولی اگر آن را هم کنار بگذاریم، دیگر هیچ‌گونه تغییری را در نظر نگرفته‌ایم. جواب روی ۸ ثابت می‌ماند. بنابراین، روش کار به این صورت است: برای مطالعه‌ی تغییر بی‌نهایت‌کوچک، جمله‌هایی را که حاوی $\mathrm{d}x$ با توان یک است، نگه‌دارید، و بقیه را دور بریزید.

این روش تفکر را، با استفاده از بی‌نهایت‌کوچک‌ها مانند $\mathrm{d}x$، می‌توان بر اساس حد بیان کرد، به‌طوری که کاملاً قانونی و استوار باشد. درس‌نامه‌های مدرن به این صورت آن را بیان می‌کنند. ولی اگر از بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده کنیم، آسان‌تر و سریع‌تر است. اصطلاح فنی آن در این سیاق، *دیفرانسیل* است. نام این اصطلاح از کلمه‌ی *تفاوت*

(*difference*) گرفته شده است، زیرا فرض بر این است که این‌ها همان تفاوت‌های Δx و Δy هستند، در حالت حدی که آن تفاوت‌ها به صفر میل می‌کنند. مانند حالتی است که به یک سهمی در زیر میکروسکوپ نگاه می‌کردیم، و هر چه بیشتر زوم می‌کردیم، منحنی راست‌تر و راست‌تر می‌شد.

مشتق از طریق دیفرانسیل

حالا می‌بینید که برخی مفاهیم وقتی که با دیفرانسیل بیان شوند، چقدر آسان‌تر می‌شوند. به‌عنوان مثال، شیب یک منحنی، به‌عنوان یک نمودار در صفحه‌ی xy، چقدر است؟ به‌طوری که از بررسی سهمی در فصل ۶ دیدیم، شیب مشتق y است، که به‌صورت حد $\Delta y/\Delta x$ زمانی که Δx به سمت صفر میل می‌کند، تعریف می‌شود. ولی تعریف این کمیت بر حسب دیفرانسیل چگونه است؟ به‌سادگی، $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ است. انگار که منحنی از قطعات راست کوچک تشکیل می‌شود:



اگر $\mathrm{d}y$ را به‌عنوان یک خیز بی‌نهایت‌کوچک و $\mathrm{d}x$ را به‌عنوان یک گام بی‌نهایت‌کوچک در نظر بگیریم، شیب را می‌توانیم مثل همیشه به‌صورت خیز روی گام، یعنی $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تعریف کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم از این رویکرد برای یک منحنی خاص استفاده کنیم (مثلاً برای $y = x^۳$، که برای مکعب کردن اعداد اندکی بزرگ‌تر از ۲ در نظر گرفتیم). $\mathrm{d}y$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$y + \mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^۳.$$

مانند قبل، طرف راست را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$(x+\mathrm{d}x)^۳ = x^۳ + ۳x^۲\,\mathrm{d}x + ۳x(\mathrm{d}x)^۲ + (\mathrm{d}x)^۳.$$

ولی این بار، مطابق دستورالعمل پیش‌گفته، جمله‌های $(\mathrm{d}x)^۲$ و $(\mathrm{d}x)^۳$ را کنار می‌گذاریم، چون این‌ها جزئی از سهم اصلی نیستند. به این ترتیب،

$$y+\mathrm{d}y = (x+\mathrm{d}x)^۳ = x^۳ + ۳x^۲\,\mathrm{d}x.$$

و از آنجا که $y = x^۳$، لذا می‌توانیم معادله را به‌صورت زیر ساده کنیم:

$$\mathrm{d}y = ۳x^۲\,\mathrm{d}x.$$

با تقسیم کردن دو طرف بر $\mathrm{d}x$، شیب مورد نظر به دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ۳x^۲.$$

در $x = ۲$، این فرمول مقدار شیب را $۳(۲)^۲ = ۱۲$ به دست می‌دهد. این همان عددی است که قبلاً به دست آوردیم. بدین خاطر است که با تغییر دادن ۲ به ۲٫۰۰۱، داریم $(۲٫۰۰۱)^۳ \approx ۸٫۰۱۲$. معنای این مطلب آن است که یک تغییر بی‌نهایت‌کوچک x در حوالی ۲ (که به آن $\mathrm{d}x$ می‌گوییم) موجب تغییری بی‌نهایت‌کوچک در y در حوالی ۸ (با نماد $\mathrm{d}y$) می‌شود که ۱۲ برابر بزرگ‌تر از آن است $\mathrm{d}y = ۱۲\,\mathrm{d}x$.

اتفاقاً، با استدلال مشابهی معلوم می‌شود که برای هر عدد صحیح مثبت n، مشتق $y = x^n$ عبارت است از $\mathrm{d}y \,/\, \mathrm{d}x = nx^{n-۱}$، که قبلاً هم به این نتیجه اشاره کردیم. با کمی کار بیشتر، می‌توانستیم این نتیجه را به مقادیر منفی، کسری، و گنگ n هم بسط دهیم.

مزیت بزرگ بی‌نهایت‌کوچک‌ها به‌طور عام و دیفرانسیل‌ها به‌طور خاص آن است که محاسبات را آسان‌تر می‌کنند. برای ما یک راه میانبر ایجاد می‌کنند. ذهن را آزاد می‌کنند که با تخیل بیشتر به فکر بپردازد، همان کاری که جبر در گذشته برای هندسه کرد. بدین خاطر است که لایبنیتس علاقه‌ی زیادی به دیفرانسیل داشت. همان‌طور که به معلم‌اش هویگنس نوشته است: «حساب من، تقریباً بدون تأمل، بخش بزرگی از کشفیات انجام شده درباره‌ی این موضوع را به من داد. زیرا آن‌چه بیشتر از همه درباره‌ی حسابم دوست

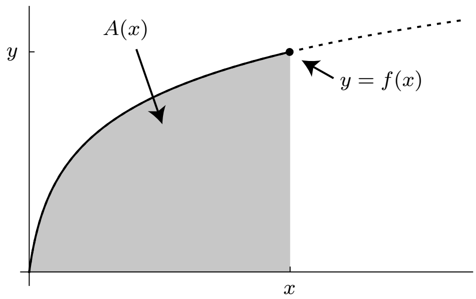
دارم این است که همان مزیتی را در زمینه‌ی هندسه‌ی ارشمیدس نسبت به افراد باستان به ما می‌دهد که ویِت و دکارت در زمینه‌ی هندسه‌ی اقلیدس یا آپولونیوس به ما داده‌اند و ذهن ما را از کار کردن با تخیلات آزاد کرده‌اند.»

تنها مشکل در رابطه با بی‌نهایت‌کوچک‌ها این است که لااقل در دستگاه اعداد حقیقی، وجود ندارند. تازه یک چیز دیگر—متناقض هم هستند. اگر هم وجود می‌داشتند، معنی نمی‌دادند. یوهان برنولی، یکی از شاگردان لایبنیتس، متوجه شد که این‌ها باید در معادلات بی‌معنایی مانند $x + \mathrm{d}x = x$ صدق کنند، ولو آن‌که $\mathrm{d}x$ صفر نیست. خب، به هر حال، آدم نمی‌تواند همه چیز را داشته باشد. بی‌نهایت‌کوچک‌ها، وقتی که طرز کار با آن‌ها را یاد بگیریم، واقعاً جواب درست را به ما می‌دهند، و فوایدی که بر آن‌ها مترتب است، هر گونه ناراحتی فکری را که ممکن است بر اثر آن‌ها ایجاد شود، به‌خوبی جبران می‌کند. مانند دروغ پیکاسو هستند که به ما کمک می‌کند حقیقت را دریابیم.

به‌عنوان نمایش دیگری از قدرت بی‌نهایت‌کوچک‌ها، لایبنیتس با استفاده از آن‌ها قانون سینوس‌های اسنل برای شکست نور را به دست آورد. به‌طوری که در فصل ۴ گفته شد، وقتی که نور از محیطی به محیط دیگر می‌رود—مثلاً از هوا وارد آب می‌شود—مطابق با یک قانون ریاضی که چندین بار در طول اعصار کشف شده است، شکسته می‌شود. فرما آن را با اصل کمترین زمان خود توضیح داد، ولی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی منتج از این اصل تقلای زیادی کرد. لایبنیتس با دیفرانسیل‌های حسابان جدید خود، قانون سینوس‌ها را به سهولت استنباط کرد، و با غروری آشکار اظهار داشت که «مردان بسیار فرهیخته‌ی دیگری به طرق مختلف سعی در محاسبه‌ی چیزی کرده‌اند که کسی که در این حسابان ورزیده باشد، با چند سطر آن را گویی به‌صورت جادویی انجام می‌دهد.»

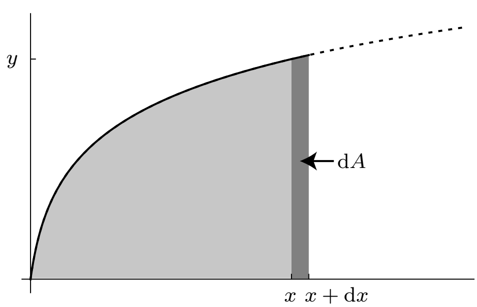
قضیه‌ی بنیادی از طریق دیفرانسیل

یکی دیگر از دستاوردهای دیفرانسیل‌های لایبنیتس این است که قضیه‌ی بنیادی را شفاف کردند. همان‌طور که گفتیم، قضیه‌ی بنیادی به تابع انباشت مساحت $A(x)$ مربوط می‌شود، که مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ را در بازه‌ی ۰ تا x به دست می‌دهد. این قضیه می‌گوید که وقتی که ما x را به طرف راست جابه‌جا می‌کنیم، مساحت زیر منحنی با نرخی برابر با خود $f(x)$ افزایش می‌یابد. یعنی $f(x)$ مشتق $A(x)$ است.



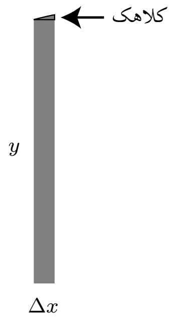
برای این‌که ببینید این نتیجه از کجا آمده است، فرض کنید x را به یک میزان بی‌نهایت‌کوچک به $x + \mathrm{d}x$ تغییر می‌دهیم. مساحت $A(x)$ چقدر تغییر می‌کند؟ بنا به تعریف، به میزان $\mathrm{d}A$ تغییر می‌کند. لذا مساحت جدید برابر است با مساحت قبلی به اضافه‌ی میزان تغییر در مساحت، و بنابراین، برابر است با $A + \mathrm{d}A$.

همین که $\mathrm{d}A$ را به‌صورت تصویری مشخص کنیم، قضیه‌ی بنیادی خود را نمایان می‌سازد. به‌طوری که از تصویر زیر برمی‌آید، مساحت به میزان بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}A$ تغییر می‌کند، که معادل با مساحت نوار عمودی با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک بین x و $x + \mathrm{d}x$ است:



این نوار مستطیلی است به ارتفاع y و قاعده‌ی $\mathrm{d}x$. بنابراین، مساحت آن عبارت است از ارتفاع آن ضربدر قاعده‌ی آن، که می‌شود $y\,\mathrm{d}x$، یا به بیان دیگر، $f(x)\,\mathrm{d}x$.

در حقیقت، این نوار فقط در صورتی که به‌عنوان بی‌نهایت‌کوچک به آن نگاه کنیم، یک مستطیل است. در واقعیت، برای نواری با هر عرض متناهی Δx، میزان تغییر مساحت ΔA دو جزء دارد. جزء غالب که مستطیلی به مساحت $y\Delta x$ است. یک جزء بسیار کوچک‌تر، مساحت کلاهک ریز خمیده‌ی مثلث‌مانندی است که در بالای مستطیل قرار دارد.



در این‌جا، مثال دیگری ارائه می‌کنیم که در آن دنیای بی‌نهایت‌کوچک از دنیای واقعی قشنگ‌تر است. در دنیای واقعی، مجبوریم مساحت کلاهک را هم در نظر بگیریم، که برآورد آن کار آسانی نیست، زیرا بستگی به جزئیات مربوط به منحنی بالای آن دارد. ولی زمانی که پهنای مستطیل به صفر میل می‌کند و $\mathrm{d}x$ «می‌شود»، مساحت کلاهک در مقایسه با مساحت مستطیل قابل‌چشم‌پوشی می‌شود. مقدار آن در مقایسه با کوچک، فوق‌کوچک است.

نتیجه آن است که $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$. و این همان قضیه‌ی بنیادی حسابان است. و یا به بیان مؤدبانه‌تر امروزی (به‌علت این‌که امروزه با بی‌سلیقگی، دیفرانسیل را به‌نفع مشتق کنار گذاشته‌اند):

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = y = f(x).$$

این دقیقاً همان چیزی است که در فصل ۷ در مثال غلتک رنگ به آن رسیدیم.

یک نکته‌ی دیگر: وقتی که مساحت زیر منحنی را به‌عنوان مجموع بی‌نهایت نوار مستطیلی بی‌نهایت‌کوچک در نظر می‌گیریم، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A(x) = \int_{\circ}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

این نماد دراز که شبیه گردن قو است، در حقیقت، یک حرف S کشیده‌شده است. این حرف S نشان دهنده‌ی عمل جمع بستن (summation) است. البته نوع خاصی از جمع بستن، مختص حساب انتگرال است، که شامل مجموع بی‌نهایت نوار بی‌نهایت‌کوچک است، که همه‌ی آنها به‌صورت یک مساحت واحد و همبسته با هم

تلفیق می‌شود. به‌عنوان نماد انتگرال‌گیری، به آن علامت انتگرال می‌گویند. لایبنیتس این نماد را در دست‌نویس کتابی در سال ۱۶۷۷ ابداع کرد، و آن را در سال ۱۶۸۶ منتشر نمود. این قابل‌تشخیص‌ترین نماد حسابان است. صفر در پایین و x در بالای آن نشان دهنده‌ی نقاط پایانی بازه‌ای از محور x هستند که مستطیل‌ها روی آن واقع می‌شوند. این نقاط پایانی را حدهای انتگرال‌گیری می‌نامند.

چه چیزی لایبنیتس را به دیفرانسیل و قضیه‌ی بنیادی رهنمون شد؟

نیوتن و لایبنیتس از دو مسیر جداگانه به قضیه‌ی بنیادی رسیدند. نیوتن با فکر کردن درباره‌ی حرکت و جریان، یعنی سمت پیوسته‌ی ریاضی، به آن رسید. لایبنیتس از سمت دیگر به آن نایل شد. او با آن‌که از نظر تحصیلات ریاضی‌دان نبود، در مراحل قبلی زندگی‌اش مدتی را به فکر کردن درباره‌ی ریاضیات گسسته گذرانده بود—اعداد صحیح و شمارش، ترکیبیات و جایگشت‌ها، و کسرها و انواع خاص مجموع‌ها.

او پس از آن‌که با کریستیان هویگنس ملاقات کرد، کم‌کم به اعماق بیشتر ریاضیات پا گذاشت. در آن زمان، لایبنیتس عضوی از هیئت دیپلماتیک در پاریس بود، ولی شیفته‌ی مطالبی شده بود که هویگنس درباره‌ی آخرین تحولات ریاضیات به او می‌گفت، و دوست داشت بیشتر بداند. هویگنس با نبوغ شگفت‌انگیزی که در زمینه‌ی تعلیم داشت (یا شاید هم از روی شانس؟)، مسئله‌ای را برای شاگردش مطرح کرد که او را به قضیه‌ی بنیادی رهنمون شد.

مسئله‌ای که به او داد، محاسبه‌ی مجموع بی‌نهایت زیر بود:

$$\frac{۱}{۱\cdot ۲}+\frac{۱}{۲\cdot ۳}+\frac{۱}{۳\cdot ۴}+\cdots+\frac{۱}{n\cdot(n+۱)}+\cdots=?$$

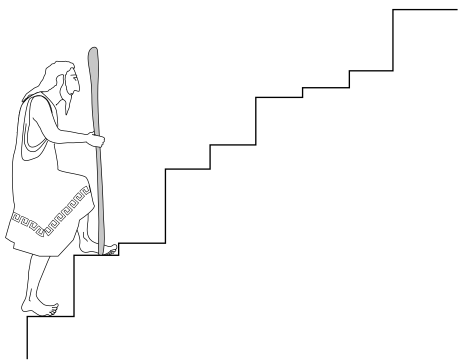
(نقطه در مخرج کسرها به‌معنای ضرب است.) برای این‌که مسئله بهتر فهمیده شود، اول از یک نمونه‌ی ساده‌تر شروع می‌کنیم. فرض کنید این مجموع، به‌جای بی‌نهایت جمله، فقط ۹۹ جمله دارد. در این صورت، باید عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$S=\frac{۱}{۱\cdot ۲}+\frac{۱}{۲\cdot ۳}+\frac{۱}{۳\cdot ۴}+\cdots+\frac{۱}{n\cdot(n+۱)}+\cdots+\frac{۱}{۹۹\cdot ۱۰۰}.$$

اگر ترفند این کار را متوجه نشوید، باید محاسبه‌ای پرزحمت، ولی به‌سادگی قابل‌فهم، را انجام دهید. با شکیبایی کافی (یا با استفاده از کامپیوتر)، می‌توانیم این ۹۹ کسر را به هر زحمتی هست، با هم جمع کنیم. ولی مطلب مورد نظر این نیست. هدف آن است که راه‌حل *زیبایی* بیابیم. راه‌حل‌های زیبا در ریاضیات نه فقط به‌خاطر قشنگ بودنشان اهمیت دارند، بلکه نیز از این جهت که بسیار قدرتمندند. با بینشی که از آن‌ها حاصل می‌شود، می‌توان مسایل *دیگری* را نیز فهمید. در این مورد، راه‌حل زیبایی که لایبنیتس کشف کرد، خیلی زود او را به قضیه‌ی بنیادی رساند.

او مسئله‌ی هویگنس را با ترفندی هوشمندانه حل کرد. اولین بار که من آن را دیدم، احساس کردم دارم یک شعبده‌باز را تماشا می‌کنم که خرگوشی را از یک کلاه بیرون می‌آورد. اگر می‌خواهید شما هم آن احساس را تجربه کنید، می‌توانید از تمثیلی که ارائه خواهم کرد، عبور کنید. ولی اگر ترجیح می‌دهید بفهمید چه چیزی در پس از شعبده‌بازی است، نحوه‌ی کار آن را برایتان توضیح می‌دهم.

تصور کنید کسی می‌خواهد از یک پلکان دراز و نامنظم بالا برود.



فرض کنید این فرد می‌خواهد کل ارتفاع عمودی از پایین تا بالای پلکان را اندازه‌گیری کند. چطور می‌تواند این کار را بکند؟ خب، یک راه این است که ارتفاع هر کدام از پله‌ها را با هم جمع کند. این راهبرد که خالی از هر گونه ابتکار است، مانند آن است که در مجموع S فوق، همه‌ی ۹۹ جمله را با هم جمع کنیم. این کار قابل‌انجام است، ولی کار مطبوعی نیست، چون پلکان خیلی نامنظم است. و اگر این پلکان میلیون‌ها پله داشته باشد، جمع بستن ارتفاع همه‌ی آن‌ها کار تقریباً غیرممکنی خواهد بود. باید راه بهتری وجود داشته باشد.

راه بهتر آن است که از یک *ارتفاع‌سنج* استفاده کنیم. ارتفاع‌سنج دستگاهی است

که ارتفاع را اندازه‌گیری می‌کند. اگر زنون در این تصویر یک ارتفاع‌سنج می‌داشت، می‌توانست با اندازه‌گیری ارتفاع در پایین و بالای پله‌ها مشکل خود را حل کند. همه‌اش همین است: ارتفاع کل برابر است با اختلاف ارتفاع در این دو نقطه. تفاوت بین آن‌ها باید برابر با ارتفاع تمام پله‌های بین آن‌ها باشد. پلکان هر چقدر هم نامنظم باشد، این ترفند همیشه مؤثر واقع می‌شود.

موفقیت این ترفند برخاسته از این واقعیت است که ارتفاع خوانده شده در ارتفاع‌سنج بستگی به ارتفاع پله‌ها دارد—ارتفاع هر پله برابر با تفاوت دو سنجش متوالی ارتفاع‌سنج است. به عبارت دیگر، ارتفاع هر پله برابر است با ارتفاع در بالای آن منهای ارتفاع در پایین آن.

حالا دیگر احتمالاً می‌پرسید: *ارتفاع‌سنج چه ربطی به مسئله‌ی ریاضی جمع زدن لیست بلندی از اعداد پیچیده و نامنظم دارد؟* خب، اگر برای این مجموع پیچیده و نامنظم هم بتوانیم چیزی شبیه ارتفاع‌سنج پیدا کنیم، کارمان آسان می‌شود. در این صورت، کافی است تفاوت بین اندازه‌گیری ارتفاع‌سنج در بالا و پایین را حساب کنیم. این اساساً کاری است که لایبنیتس انجام داد. او برای مجموع S، یک ارتفاع‌سنج پیدا کرد. این به او امکان داد که هر جمله‌ی مجموع را به‌صورت تفاوت دو اندازه‌گیری متوالی ارتفاع‌سنج بنویسد، و بر این اساس توانست با استفاده از ایده‌ی فوق محاسبه‌ی مجموع مورد نظر را انجام دهد. سپس این ارتفاع‌سنج را به مسایل دیگر نیز تعمیم داد. این روش نهایتاً منجر به قضیه‌ی بنیادی حسابان شد.

با در نظر داشتن این تمثیل، S را دوباره بررسی می‌کنیم:

$$S = \frac{۱}{۱ \cdot ۲} + \frac{۱}{۲ \cdot ۳} + \frac{۱}{۳ \cdot ۴} + \cdots + \frac{۱}{n \cdot (n+۱)} + \cdots + \frac{۱}{۹۹ \cdot ۱۰۰}.$$

می‌خواهیم هر جمله را به‌صورت تفاوت دو اندازه‌گیری بنویسیم. مثل آن است که بگوییم که ارتفاع هر پله برابر با تفاوت اندازه‌گیری ارتفاع‌سنج در بالا و پایین آن است. برای پله‌ی اول، بازنویسی به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۱ \cdot ۲} = \frac{۲ - ۱}{۱ \cdot ۲} = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}.$$

البته قبول دارم که هنوز معلوم نیست که این به کجا می‌رود، ولی فعلاً صبر کنید. به‌زودی خواهیم دید که چقدر مفید است که کسر $\frac{۱}{۱ \cdot ۲}$ را به‌صورت دو کسر واحد متوالی $\frac{۱}{۱}$ و $\frac{۱}{۲}$ بنویسیم. (کسر *واحد* یعنی کسری که صورت آن ۱ است. این کسرهای

واحد متوالی نقش اندازه‌گیری‌های متوالی ارتفاع‌سنج را ایفا می‌کنند.) هم‌چنین، اگر تساوی فوق مبهم به نظر می‌رسد، می‌توانید از راست به چپ آن را محاسبه و ساده کنید. در سمت راست، یک کسر واحد ($\frac{۱}{۲}$) منهای یک کسر واحد دیگر ($\frac{۱}{۱}$) داریم؛ در وسط، از آن‌ها مخرج مشترک گرفته‌ایم؛ و در سمت چپ، صورت را ساده می‌کنیم.

به‌طور مشابه، هر کدام از جمله‌های دیگر S را می‌توانیم به‌صورت تفاوت دو کسر واحد متوالی بنویسیم:

$$\frac{۱}{۲\cdot۳}=\frac{۳-۲}{۲\cdot۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳},$$
$$\frac{۱}{۳\cdot۴}=\frac{۴-۳}{۳\cdot۴}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴},$$

و الی آخر. وقتی که همه‌ی این تفاوت‌های کسر واحد را با هم جمع کنیم، S به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$S=(\tfrac{۱}{۱}-\tfrac{۱}{۲})+(\tfrac{۱}{۲}-\tfrac{۱}{۳})+(\tfrac{۱}{۳}-\tfrac{۱}{۴})+\cdots+(\tfrac{۱}{۹۸}-\tfrac{۱}{۹۹})+(\tfrac{۱}{۹۹}-\tfrac{۱}{۱۰۰}).$$

حالا می‌توانیم روش را به تفصیل ببینیم. به‌دقت به ساختار این مجموع نگاه کنید. تقریباً تمام کسرهای واحد دو بار ظاهر شده‌اند، یک بار با علامت منفی و یک بار با علامت مثبت. مثلاً $\frac{۱}{۲}$ تفریق شده و بعد دوباره جمع شده است. نتیجه‌ی خالص آن این است که جمله‌های $\frac{۱}{۲}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند. همین مطلب در مورد $\frac{۱}{۳}$ هم صادق است. این کسر هم دو بار ظاهر می‌شود و خط می‌خورد. تقریباً برای تمام کسرهای واحد دیگر، تا خود $\frac{۱}{۹۹}$ همین اتفاق می‌افتد. تنها استثنای این امر، کسرهای واحد اول و آخر، $\frac{۱}{۱}$ و $\frac{۱}{۱۰۰}$، هستند. چون این کسرها در دو انتهای سطر در S واقع شده‌اند، کسر مشابهی ندارند که با آن خط بخورند. بعد از آنکه غبارها فرونشست، این‌ها تنها کسرهای واحدی هستند که هم‌چنان بر پا ایستاده‌اند. بنابراین، نتیجه عبارت است از:

$$S=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۱۰۰}.$$

این مشابه همان تمثیل پلکان است. بدان معنا که ارتفاع تمام پله‌ها برابر است با ارتفاع در بالای پلکان منهای ارتفاع در پایین آن.

از قضا، S به $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ ساده می‌شود. این پاسخ معمای ما با ۹۹ جمله است. لایبنیتس متوجه شد که هر تعداد جمله را با همین روش می‌توان با هم جمع کرد. اگر این

مجموع به‌جای ۹۹ جمله، N جمله می‌داشت، نتیجه به‌صورت زیر می‌بود:

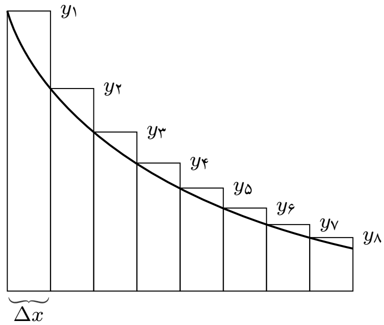
$$S = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{N + ۱}.$$

بنابراین، پاسخ سؤال اولیه‌ی هویگنس درباره‌ی مجموع بی‌نهایت روشن می‌شود: وقتی که N به طرف بی‌نهایت میل می‌کند، جمله‌ی $\frac{۱}{N+۱}$ به صفر نزدیک می‌شود، و لذا S به ۱ نزدیک می‌شود. مقدار حدی ۱، پاسخ معمای هویگنس است.

مهم‌ترین عاملی که به لایبنیتس امکان داد که مجموع را پیدا کند، ساختار بسیار ویژه‌ی آن بود: یعنی این‌که می‌شد آن را به‌صورت مجموع تفاضل‌های متوالی (در این مورد، اختلاف کسرهای واحد متوالی) نوشت. این ساختار تفاضلی موجب خط خوردن بسیاری از جمله‌ها می‌شود که در بالا دیدیم. مجموع‌هایی که دارای این خاصیت هستند، امروزه *جمع‌های تلسکوپی* نامیده می‌شوند، زیرا شبیه تلسکوپ‌های جمع شونده‌ی قدیمی هستند که در فیلم‌های راهزنان دریایی می‌بینید، از آن دوربین‌های جاسوسی که باز و بسته می‌شوند. شباهت موضوع در آن است که مجموع اولیه حالت باز شده‌ی تلسکوپ است، ولی به‌علت ساختار تفاضلی آن، می‌توان مانند تلسکوپ آن را جمع کرد و نتیجه‌ی بسیار جمع‌وجور دیگری را به دست آورد. تنها جملاتی که از این جمع شدن جان به در می‌برند، جملاتی هستند که جمله‌ی مشابهی برای خط خوردن ندارند، یعنی جملاتی که در دو انتهای تلسکوپ قرار دارند.

طبیعتاً لایبنیتس به این فکر افتاد که شاید بتوان از این ترفند تلسکوپی برای مسئله‌های دیگر نیز استفاده کرد. فکری بود که ارزش دنبال کردن را داشت، چرا که قدرت بسیار زیادی در آن نهفته بود. وقتی می‌خواست لیست بلندی از اعداد را جمع ببندد، اگر می‌توانست هر عدد را به‌صورت تفاضل اعداد متوالی (که باید تعیین شود) بنویسد، آنگاه این ترفند تلسکوپی قابل استفاده بود.

این‌جا بود که لایبنیتس به فکر مساحت افتاد، چرا که مساحت زیر منحنی در صفحه‌ی xy نیز معادل جمع بستن لیست بلندی از اعداد، یعنی مساحت تعداد زیادی از نوارهای مستطیلی عمودی نازک، است.



فکری که در سر داشت، در شکل بالا نشان داده شده است. در این شکل فقط هشت ناحیه‌ی مستطیلی را می‌بینید، ولی باید در ذهنتان تصویر مشابهی را با میلیون‌ها یا میلیاردها مستطیل بسیار نازک‌تر، و یا چه بهتر بی‌نهایت مستطیل با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک، به تصور درآورید. متأسفانه کشیدن یا مصور کردن چنین چیزی، کار دشواری است. به این خاطر است که فعلاً فقط از هشت مستطیل استفاده کرده‌ایم.

به‌منظور سادگی، فرض کنید که عرض مستطیل‌ها یکسان است. آن را Δx می‌نامیم. ارتفاع مستطیل‌ها عبارت است از $y_{۱}, y_{۲}, \ldots y_{۸}$. به این ترتیب، مساحت کل مستطیل‌های تقریبی عبارت است از:

$$y_{۱}\Delta x + y_{۲}\Delta x + \cdots + y_{۸}\Delta x.$$

این مجموع هشت عدد را می‌توان به‌راحتی به‌صورت تلسکوپی در آورد، اگر بتوانیم به‌طریقی اعداد جادویی $A_{۰}, A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_{۸}$ را پیدا کنیم که تفاضل آنها مساحت مستطیل‌ها باشد:

$$y_{۱}\Delta x = A_{۱} - A_{۰}$$
$$y_{۲}\Delta x = A_{۲} - A_{۱}$$
$$y_{۳}\Delta x = A_{۳} - A_{۲}$$

و الی آخر، تا $y_{۸}\Delta x = A_{۸} - A_{۷}$. آن‌گاه مساحت کل مستطیل‌ها به روش تلسکوپی

به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y_۱\Delta x + y_۲\Delta x + \cdots + y_۸\Delta x = (A_۱ - A_۰) + (A_۲ - A_۱) + \cdots + (A_۸ - A_۷)$$
$$= A_۸ - A_۰$$

حالا درباره‌ی مساحت نوارهای با ضخامت بی‌نهایت‌کوچک فکر کنید. عرض این نوارها Δx تبدیل به دیفرانسیل $\mathrm{d}x$ می‌شود. ارتفاع متغیر آنها $y_۱, y_۲, \ \ldots, y_۸$ تبدیل به $y(x)$ می‌شود، تابعی که ارتفاع قائم مستطیل را در بالای نقطه‌ی مشخص شده با متغیر x به دست می‌دهد. مجموع مساحت تعداد بی‌نهایت مستطیل‌ها، مقدار انتگرال $\int y(x)\,\mathrm{d}x$ خواهد بود. و اما در مورد روش تلسکوپی فوق، مجموعی که قبلاً $A_۸ - A_۰$ بود، حالا $A(b) - A(a)$ می‌شود، که در این‌جا a و b مقادیر x در طرف چپ و راست ناحیه‌ی مورد نظر هستند. به این ترتیب، روش تلسکوپی در نوع بی‌نهایت‌کوچک خود *دقیقاً* مساحت زیر منحنی را به دست می‌دهد:

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = A(b) - A(a).$$

و اما چگونه می‌توانیم تابع جادویی $A(x)$ را که امکان این کار را فراهم می‌کند، پیدا کنیم؟ خب، به معادلات قبلی، از قبیل $y_۱\Delta x = A_۱ - A_۰$ نگاه کنید. زمانی که عرض مستطیل‌ها بی‌نهایت‌کوچک می‌شود، این معادله‌ها تبدیل می‌شوند به

$$y(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}A.$$

برای اینکه همین نتیجه را به‌جای دیفرانسیل بر حسب مشتق بیان کنیم، دو طرف معادله‌ی فوق را بر $\mathrm{d}x$ تقسیم می‌کنیم، که به دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = y(x).$$

به این طریق، جانشین اعداد جادویی $A_۰, A_۱, A_۲, \ \ldots, A_۸$ را پیدا می‌کنیم که امکان حالت تلسکوپی را ایجاد می‌کنند. در حالت حدی که ضخامت نوارها بی‌نهایت‌کوچک می‌شود، این‌ها از تابع مجهول $A(x)$ به دست می‌آیند که مشتق آن منحنی معلوم $y(x)$ است.

این نحوه‌ی بیان لایبنیتس از مسئله‌ی معکوس و قضیه‌ی بنیادی حسابان بود. به

نوشته‌ی خودش: «پیدا کردن مساحت شکل‌ها به این کار تقلیل پیدا می‌کند که با داشتن یک سری، مجموع‌هایی را پیدا کنید، یا (به بیان روشن‌تر) با داشتن یک سری، سری دیگری را پیدا کنید که تفاضل‌های آن برابر با جملات سری داده شده باشد.» به این طریق، تفاضل‌ها و جمع‌های تلسکوپی، لایبنیتس را به دیفرانسیل و انتگرال، و از آنجا به قضیه‌ی بنیادی رهنمون شد. درست همان‌گونه که شارش‌ها و مساحت‌های در حال گسترش، نیوتن را به همان سرچشمه‌ی پنهان هدایت کرد.

مبارزه با ایدز به یاری حسابان

با آن که دیفرانسیل‌ها ساخته‌های ذهن هستند، ولی از زمانی که لایبنیتس آنها را اختراع کرد، تأثیر شگرفی بر دنیای ما و جامعه و زندگی ما بر جای گذاشته‌اند. به‌عنوان نمونه‌ای از آن در زمان خود ما، می‌توان به نقش کمکی دیفرانسیل در شناسایی و درمان عفونت ویروس کمبود ایمنی اکتسابی انسانی، HIV اشاره کرد.

در دهه‌ی ۱۹۸۰، بیماری مرموزی شایع شد که هر سال در ایالات متحده، ده‌ها هزار نفر، و در سرتاسر جهان، صدها هزار نفر را به کام مرگ می‌فرستاد. هیچ‌کس نمی‌دانست این بیماری چیست، از کجا آمده است، یا چه عاملی باعث بروز آن می‌شود، ولی اثرات آن روشن بود—این بیماری موجب ضعف دستگاه ایمنی بیماران می‌شد، به‌حدی که در مقابل سرطان‌های نادر، ذات‌الریه، و عفونت‌های فرصت‌طلب آسیب‌پذیر می‌شدند. مرگ ناشی از این بیماری، مرگی آهسته، دردناک، و همراه با تخریب اعضای بدن بود. پزشکان نام آن را سندروم کمبود ایمنی اکتسابی یا «ایدز» نهادند. بیماران و پزشکان همه درمانده بودند. هیچ‌گونه علاج قطعی برای این بیماری در دست نبود.

پژوهش‌های پایه نشان داد که عامل این بیماری یک رتروویروس است. سازوکار آن تدریجی و موذیانه بود. ویروس به گروهی از گلبول‌های سفید خون به نام سلول‌های T کمک کننده، که از اجزای کلیدی دستگاه ایمنی هستند، حمله می‌کند، و آنها را آلوده می‌سازد. وقتی که ویروس به داخل سلول رسید، ماشین‌آلات ژنتیکی سلول را در اختیار گرفته، از آن برای ساختن ویروس‌های بیشتر استفاده می‌کند. این ذرات ویروسی جدید از سلول خارج شده، وارد گردش خون و مایعات دیگر بدن می‌شوند، و دیگر سلول‌های T را آلوده می‌سازند. در پاسخ به این تهاجم، دستگاه ایمنی بدن تلاش می‌کند که ذرات ویروسی را از خون بیرون براند و سلول‌های T آلوده را بکشد. در نتیجه‌ی این کار، دستگاه ایمنی در حقیقت بخش مهمی از خودش را نابود می‌سازد.

اولین داروی ضد ویروسی که برای درمان HIV مورد تأیید قرار گرفت، در سال

۱۹۸۷ ظاهر شد. با آنکه این دارو از طریق مختل کردن فرایند در اختیار گرفتن امکانات سلول، رشد HIV را کاهش می‌داد، ولی به اندازه‌ای که امید می‌رفت، مؤثر نبود، و غالباً ویروس نسبت به آن مقاوم می‌شد. دسته‌ی دیگری از داروها، به نام مهارکننده‌های پروتئاز، در سال ۱۹۹۴ عرضه شدند. این داروها از طریق تداخل با ذرات ویروسی تازه تشکیل شده و ممانعت از بالغ شدن آنها و تبدیل کردن آنها به ذراتی که قابلیت آلوده کردن ندارند، با ویروس مقابله می‌کردند. مهارکننده‌های پروتئاز، گرچه یک درمان قطعی نبودند، ولی به‌عنوان نعمت بزرگی شناخته می‌شدند.

مدت کوتاهی پس از کشف مهارکننده‌های پروتئاز، تیمی از پژوهشگران به رهبری دکتر دیوید هو (که سابقاً مدرک کارشناسی فیزیک را از مؤسسه‌ی فناوری کالیفرنیا [کلتک] گرفته بود و علی‌القاعده از حسابان به‌خوبی سر در می‌آورد) و یک متخصص ایمنی‌شناس ریاضی به نام آلن پرلسون با همکاری یکدیگر مطالعه‌ای انجام دادند که طرز فکر پزشکان درباره‌ی HIV را تغییر داد و تحولی در شیوه‌ی درمان این بیماری پدید آورد. تا قبل از کارهای هو و پرلسون، این موضوع روشن شده بود که عفونت HIV در صورت عدم درمان معمولاً از سه مرحله عبور می‌کند: مرحله‌ی حاد اولیه که چند هفته طول می‌کشد، مرحله‌ی مزمن بیماری که به‌طور متناقض مرحله‌ای بدون علامت است و بالغ بر ده سال طول می‌کشد، و مرحله‌ی پایانی ایدز.

در مرحله‌ی اول، مدت کوتاهی پس از آنکه فرد آلوده به HIV شد، علایمی شبیه انفلوآنزا به‌صورت تب، بثورات جلدی، و سردرد ظاهر می‌شود، و تعداد سلول‌های T کمک کننده که به آنها سلول‌های CD4 نیز می‌گویند، در گردش خون کاهش می‌یابد. تعداد نرمال سلول‌های T حدود ۱۰۰۰ سلول در میلی‌متر مکعب است؛ پس از عفونت اولیه‌ی HIV، تعداد سلول‌های T به چند صد سلول در میلی‌متر مکعب کاهش می‌یابد. از آنجا که سلول‌های T در مبارزه با عفونت‌ها فعالیت دارند، کاهش یافتن آنها باعث ضعف شدید دستگاه ایمنی می‌شود، و در همین حال، تعداد ذرات ویروس در خون، که به آن بار ویروسی گفته می‌شود، شدیداً افزایش می‌یابد، و سپس، زمانی که دستگاه ایمنی شروع به مبارزه با عفونت HIV کرد، سقوط می‌کند. علایم شبه انفلوآنزا برطرف می‌شود و حال بیمار بهتر می‌شود.

در پایان مرحله‌ی اول، بار ویروسی در سطح معینی تثبیت می‌شود، که این سطح ممکن است به‌صورت حیرت‌انگیزی تا سال‌ها برقرار بماند. پزشکان به این سطح، نقطه‌ی تنظیم می‌گویند. بیماری که درمان نشود، ممکن است یک دهه بدون هر گونه علایم مربوط به HIV یا یافته‌های آزمایشگاهی به زندگی خود ادامه دهد، جز اینکه بار ویروسی ادامه می‌یابد و تعداد سلول‌های T پایین است و به‌آهستگی کمتر هم می‌شود.

اما نهایتاً مرحله‌ی بی‌علامت تمام می‌شود و بیماری ایدز شروع می‌شود، که با کاهش بیشتر در تعداد سلول‌های T و افزایش شدید بار ویروسی همراه است. زمانی که بیمارِ بدون درمان، دچار ایدز تمام‌عیار شد، عفونت‌های فرصت‌طلب، سرطان‌ها و عوارض دیگر معمولاً ظرف دو تا سه سال به مرگ بیمار منجر می‌شوند.

کلید معما در مرحله‌ی بی‌علامت بود که یک دهه طول می‌کشید. در این مرحله چه اتفاقی می‌افتاد؟ آیا HIV در بدن به‌صورت خفته باقی می‌ماند؟ البته ویروس‌های دیگری شناخته شده بودند که این نوع زمستان‌خوابی داشتند. مثلاً ویروس تبخال تناسلی برای فرار از دستگاه ایمنی در عقده‌های عصبی پنهان می‌شود. ویروس آبله‌مرغان هم همین کار را می‌کند و تا سال‌ها در سلول‌های عصبی مخفی می‌شود، و گاه بعد از سال‌ها دوباره بیدار می‌شود و بیماری زونا را پدید می‌آورد. در مورد HIV، علت این نهفتگی ناشناخته بود، ولی پس از کارهای هو و پرلسون، معلوم شد.

آن‌ها در مطالعه‌ای در سال ۱۹۹۵ به بیماران یک مهار کننده‌ی پروتئاز دادند، البته نه به‌عنوان درمان، بلکه به‌عنوان ابزاری برای کاوش. این سبب می‌شد که بدن بیمار از نقطه‌ی تنظیم منحرف شود، به‌طوری که هو و پرلسون—برای نخستین بار—می‌توانستند پویایی دستگاه ایمنی را حین مبارزه با HIV ردیابی کنند. آن‌ها مشاهده کردند که پس از آن‌که بیمار مهار کننده‌ی پروتئاز را مصرف کرد، تعداد ذرات ویروس در گردش خون او با سرعت نمایی کاهش می‌یابد. نرخ کاهش باورنکردنی بود؛ هر *دو روز*، نیمی از ذرات ویروس در گردش خون به‌وسیله‌ی دستگاه ایمنی نابود می‌شد.

پرلسون و هو توانستند با استفاده از حساب دیفرانسیل این کاهش نمایی را مدل‌سازی کنند و نتایج شگفت‌انگیز حاصل از آن را استخراج کنند. ابتدا آن‌ها غلظت متغیر ویروس در گردش خون را به‌عنوان یک تابع مجهول، $V(t)$، نشان دادند، که در آن t نشان دهنده‌ی زمان سپری شده از زمان تجویز مهار کننده‌ی پروتئاز است. بعد به بررسی این موضوع پرداختند که در یک بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک ($\mathrm{d}t$)، غلظت ویروس چقدر تغییر خواهد کرد ($\mathrm{d}V$). داده‌های آن‌ها نشان می‌داد که هر روز کسر ثابتی از ویروس از خون پاک‌سازی می‌شود، بنابراین، شاید اگر این میزان برای یک بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}t$ نیز برون‌یابی شود، به همان صورت نسبت ثابتی داشته باشد. از آنجا که $\frac{\mathrm{d}V}{V}$ تغییر کسری غلظت ویروس است، لذا مدل آن‌ها را می‌توان به‌صورت معادله‌ی زیر نمایش داد:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -c\,\mathrm{d}t.$$

در این‌جا، ضریب ثابت c نرخ پاک‌سازی است، که نشان می‌دهد بدن با چه سرعتی ویروس را نابود می‌کند.

معادله‌ی بالا نمونه‌ای از یک *معادله‌ی دیفرانسیل* است. در این معادله، رابطه‌ی دیفرانسیل $\mathrm{d}V$ با خود V و دیفرانسیل زمان سپری شده $\mathrm{d}t$ بیان شده است. با استفاده از قضیه‌ی بنیادی و انتگرال‌گیری از دو طرف معادله، پرلسون و هو معادله را برای $V(t)$ حل کردند و دیدند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\ln[V(t)/V_\circ] = -ct,$$

که در این‌جا $V_\circ$ بار ویروسی اولیه است، و $\ln$ نشان دهنده‌ی لگاریتم طبیعی است (همان تابع لگاریتمی که نیوتن و مرکاپتور در دهه‌ی ۱۶۶۰ بر روی آن مطالعه کردند). سپس، با استفاده از معکوس این تابع، داریم:

$$V(t) = V_\circ e^{-ct},$$

که در این‌جا e پایه‌ی لگاریتم طبیعی است، و بنابراین، نشان می‌دهد که بار ویروسی واقعاً در این مدل با سرعت نمایی کاهش می‌یابد. و سرانجام، هو و پرلسون با برازش یک منحنی کاهش نمایی با داده‌های تجربی خود، مقدار نرخ پاک‌سازی c را که قبلاً نامعلوم بود، برآورد کردند.

برای کسانی که مشتق را بر دیفرانسیل ترجیح می‌دهند، معادله‌ی مدل را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -cV.$$

در این‌جا، $\mathrm{d}V \,/\, \mathrm{d}t$ مشتق V است. این مشتق نشان می‌دهد که غلظت ویروس با چه سرعتی افزایش یا کاهش می‌یابد. مقادیر مثبت مشتق به‌معنای افزایش است، و مقادیر منفی به‌معنای کاهش. از آنجا که غلظت V مثبت است، لذا $-cV$ منفی خواهد بود، لذا مشتق نیز باید منفی باشد، بدان معنا که غلظت ویروس در حال کاهش است، که البته این را از داده‌های تجربی نیز می‌دانیم. علاوه بر این، متناسب بودن $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}t$ و V بدان معنا است که هر چه V به صفر نزدیک‌تر می‌شود، سرعت کاهش آن کمتر می‌شود. از نظر شهودی، این کمتر شدن سرعت کاهش مانند زمانی است که سینک آشپزخانه را از آب پر می‌کنید و بعد اجازه می‌دهید که آب آن خالی شود. هر چه آب کمتری در سینک مانده باشد، سرعت جریان آن کمتر می‌شود، چون فشار کمتری آب را

به پایین می‌راند. در این تشبیه، میزان ویروس مانند مقدار آب است، و تخلیه‌ی آب مانند پاک‌سازی شدن ویروس به‌وسیله‌ی دستگاه ایمنی است.

پرلسون و هو، پس از مدل‌سازی اثر مهار کننده‌ی پروتئاز، معادله‌ی خود را به‌گونه‌ای تغییر دادند که نشان دهنده‌ی شرایط *قبل از* تجویز دارو باشد. آن‌ها فرض کردند که معادله به‌صورت زیر بوده است:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = P - cV.$$

در این معادله، P نشان دهنده‌ی نرخ مهار نشده‌ی تولید ذرات ویروسی جدید است، که در آن زمان یک عامل مهم نامعلوم دیگر بود. پرلسون و هو در ذهن خود تصور کردند که قبل از تجویز مهار کننده‌ی پروتئاز، سلول‌های آلوده شده در هر لحظه ذرات ویروسی آلوده‌کننده‌ی جدید آزاد می‌کنند، و باز این ذرات سلول‌های دیگری را آلوده می‌کنند، و الی آخر. به‌خاطر همین قابلیت آتش‌گونه است که عفونت HIV این‌قدر مخرب است.

اما در مرحله‌ی بی‌علامت، مشخص است که بین تولید ویروس و پاک‌سازی آن به‌وسیله‌ی دستگاه ایمنی، تعادل برقرار است. در این نقطه‌ی تنظیم، سرعت تولید ویروس با سرعت پاک‌سازی آن برابر است. این نشان می‌داد که چرا بار ویروسی تا سال‌ها یکسان باقی می‌ماند. در تشبیه آب داخل سینک، مانند آن است که شیر را باز کنید و چاهک سینک را هم هم‌زمان باز کنید. در این حالت، آب به یک حالت پایدار می‌رسد که در آن خروجی برابر با ورودی است.

در نقطه‌ی تنظیم، غلظت ویروس تغییری نمی‌کند، بنابراین، مشتق آن باید صفر باشد: $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}t = ۰$. لذا، بار ویروسی حالت پایدار، $V_۰$، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$P = cV_۰.$$

پرلسون و هو با استفاده از این معادله‌ی ساده، $P = cV_۰$، یک عدد مهم و حیاتی را برآورد کردند که تا قبل از آن هیچ‌کس نتوانسته بود آن را اندازه‌گیری کند: تعداد ذرات ویروسی که هر روز به‌وسیله‌ی دستگاه ایمنی پاک‌سازی می‌شود. معلوم شد که این رقم یک *میلیارد* ذره‌ی ویروسی در روز است.

این عدد غیرمنتظره و واقعاً حیرت‌انگیز بود. این رقم نشان می‌داد که در طول ده سال مرحله‌ی بی‌علامت بیماری که به‌ظاهر آرام به نظر می‌رسید، مبارزه‌ای عظیم در بدن

بیمار جریان دارد. هر روز، دستگاه ایمنی یک میلیارد ذره‌ی ویروسی را پاک‌سازی می‌کند و سلول‌های آلوده یک میلیارد ذره‌ی جدید را آزاد می‌کنند. دستگاه ایمنی مشغول جنگ تمام‌عیار با ویروس است و تقریباً توانسته است آن را به حالت سکون بکشاند.

هو، پرلسون، و همکارانشان در سال ۱۹۹۶ یک مطالعه‌ی پیگیری انجام دادند تا درک بهتری از چیزی پیدا کنند که در سال ۱۹۹۵ دیده بودند، ولی نتوانسته بودند آن را حل‌وفصل کنند. این بار داده‌های بار ویروسی را پس از تجویز مهار کننده‌ی پروتئاز در فواصل زمانی کوتاه‌تر اندازه‌گیری کردند، زیرا می‌خواستند درباره‌ی وقفه‌ی اولیه‌ای که در جذب، توزیع، و نفوذ دارو در سلول‌های هدف دیده بودند، اطلاعات بیشتری به دست آورند. بعد از تجویز دارو، این تیم بار ویروسی بیماران را تا ساعت ششم، هر دو ساعت، و بعد تا روز دو هر شش ساعت، و از آن پس تا روز هفت، روزی یک بار اندازه‌گیری کردند. از حیث محاسبات ریاضی، پرلسون مدل معادله‌ی دیفرانسیل را توسعه داد تا وقفه در آن در نظر گرفته شود و پویایی یک متغیر مهم دیگر، یعنی تعداد متغیر سلول‌های T آلوده نیز در آن لحاظ شود.

وقتی که پژوهشگران آزمایش را دوباره انجام دادند، داده‌ها را با پیش‌بینی‌های مدل برازش کردند، و دوباره پارامترهای آن را برآورد نمودند، نتایجی حتی حیرت‌انگیزتر از قبل به دست آوردند: نتایج نشان می‌داد که هر روز *ده میلیارد* ذره‌ی ویروسی تولید می‌شوند و سپس از گردش خون پاک‌سازی می‌شوند. به‌علاوه، مشاهده کردند که سلول‌های T آلوده طول عمری تنها در حد دو روز دارند. این طول عمر که به‌طور تعجب‌آوری کوتاه بود، قطعه‌ی دیگری را به این پازل اضافه می‌کرد، چرا که کاهش سلول‌های T از نشانه‌های اصلی عفونت HIV و ایدز است.

این کشف که تکثیر HIV با چنان سرعت حیرت‌انگیزی انجام می‌پذیرد، نحوه‌ی درمان بیماران HIV ـ مثبت را تغییر داد. تا قبل از تحقیقات هو و پرلسون، پزشکان منتظر می‌شدند تا ویروس از این به‌اصطلاح زمستان‌خوابی خود بیدار شود، و سپس برای بیمار داروی ضدویروسی تجویز می‌کردند. هدف این بود که تا زمانی که دستگاه ایمنی بیمار واقعاً به کمک نیاز داشته باشد، نیروها حفظ شود، زیرا خیلی از اوقات ویروس نسبت به دارو مقاوم می‌شد، که در این صورت دیگر راهی برای درمان وجود نداشت. بنابراین، عموماً به نظر می‌رسید که عاقلانه‌تر این است که فعلاً صبر کنند تا بیمار به مراحل بعدی بیماری برسد.

کارهای هو و پرلسون این تصویر را وارونه کرد. هیچ‌گونه زمستان‌خوابی در کار نبود. ویروس و بدن در هر ثانیه‌ی هر روز مشغول نبردی سهمگین بودند، و دستگاه ایمنی احتیاج مبرمی به کمک داشت، و این کمک می‌بایست در اسرع وقت در روزهای

بحرانی اولیه‌ی عفونت ارائه شود. حالا معلوم می‌شد که چرا هیچ‌کدام از داروهای قبلی مؤثر واقع نمی‌شد. ویروس با چنان سرعتی تکثیر می‌شد و چنان به‌سرعت جهش پیدا می‌کرد، که می‌توانست تقریباً برای فرار از هر دارویی راهی پیدا کند.

محاسبات ریاضی پرلسون یک برآورد کمّی ارائه کرد از این‌که چند دارو باید به‌صورت ترکیبی مورد استفاده قرار گیرد تا بتواند HIV را سرکوب کند و سطح آن را پایین نگه‌دارد. او با در نظر گرفتن نرخ اندازه‌گیری شده‌ی جهش HIV، اندازه‌ی ژنوم آن، و میزان جدیداً برآورد شده‌ی تولید ذرات ویروسی جدید در روز، از نظر ریاضی نشان داد که در هر روز، در تک‌تک بازهای ژنوم HIV، هر جهش‌های ممکن چندین بار صورت می‌گیرد. از آنجا که حتی یک جهش واحد ممکن است منجر به مقاومت دارویی شود، لذا امید چندانی به موفقیت درمان تک‌دارویی وجود نداشت. با دادن دو دارو به‌صورت هم‌زمان، شانس موفقیت بیشتر می‌شد، ولی محاسبات پرلسون نشان داد که کسر قابل‌توجهی از جهش‌های دوگانه‌ی ممکن نیز در هر روز صورت می‌گیرد. اما در صورتی که سه دارو به‌صورت ترکیبی تجویز می‌شد، ویروس HIV به‌سختی می‌توانست بر آن غلبه کند. محاسبات ریاضی نشان می‌داد که احتمال این‌که ویروس HIV سه جهش هم‌زمان مناسب پیدا کند تا بتواند از درمان ترکیبی سه‌دارویی جان به در ببرد، چیزی در حدود یک در ده میلیون است.

وقتی که هو و همکارانش یک کوکتل سه‌دارویی را در مطالعات بالینی بر روی بیماران آلوده به HIV آزمایش کردند، نتایج آن قابل‌توجه بود. سطح ویروس در خون طی دو هفته حدود صد برابر کاهش یافت. در طول ماه بعد، سطح ویروس غیرقابل آشکارسازی بود.

منظور آن نیست که HIV ریشه‌کن شده بود. مطالعات بعدی خیلی زود نشان داد که اگر درمان بیماران قطع شود، ممکن است ویروس به‌صورت تهاجمی بازگشت کند. مسئله آن است که HIV می‌تواند در مناطق مختلفی از بدن پنهان شود. ممکن است در محل‌های امنی از بدن که دارو به‌راحتی به آن‌جا نفوذ نمی‌کند، مخفی شود، یا این‌که در سلول‌های آلوده‌ی نهفته کمین کند، بدون آن‌که تکثیر حاصل نماید، که این نوعی روش دزدکی برای فرار از درمان است. این سلول‌های خفته ممکن است در هر زمانی بیدار شوند و شروع به ساختن ویروس‌های جدید کنند. بدین خاطر است که بیماران HIV ـ مثبت باید حتماً داروهایشان را مصرف کنند، حتی اگر بار ویروس به حد پایین یا غیرقابل آشکارسازی رسیده باشد.

به هر حال، درمان سه‌دارویی با آن‌که علاج قطعی HIV نبود، ولی آن را تبدیل به وضعیتی مزمن می‌کرد که قابل مدیریت بود، دست‌کم برای کسانی که به درمان دسترسی

داشتند. این درمان امیدبخش بود، در حالی که قبلاً هیچ امیدی وجود نداشت.

در سال ۱۹۹۶، دکتر دیوید هو به‌عنوان مرد سال مجله‌ی *تایم* انتخاب شد. در سال ۲۰۱۷، آلن پرلسون به‌خاطر «خدمات گسترده‌اش به ایمنی‌شناسی نظری، که موجب درک بهتر این علم و نجات جان افراد شده است»، جایزه‌ی بزرگی را دریافت کرد. او هنوز هم از حسابان و معادلات دیفرانسیل برای تحلیل دینامیک ویروس‌ها استفاده می‌کند. جدیدترین تحقیقات او در مورد هپاتیت C است، ویروسی که ۱۷۰ میلیون نفر در سراسر جهان را تحت تأثیر قرار می‌دهد، و سالیانه به مرگ ۳۵۰,۰۰۰ نفر منجر می‌شود. این ویروس مهم‌ترین عامل سیروز و سرطان کبد است. در سال ۲۰۱۴، به کمک روش‌های ریاضی پرلسون، درمان‌های جدیدی برای بیماری هپاتیت C توسعه داده شد که هم بی‌خطر است و هم مصرف آن آسان و به‌صورت یک قرص در روز است.جالب است که این درمان تقریباً در تمام بیماران منجر به علاج قطعی عفونت می‌شود.

فصل ۹

جهان منطقی

حسابان در نیمه‌ی دوم قرن هفدهم متحمل دگردیسی شد. به‌قدری نظام‌مند، نافذ، و قدرتمند شد که بسیاری از مورخان می‌گویند حسابان در این زمان «اختراع» شد. بر اساس این دیدگاه، تا پیش از نیوتن و لایبنیتس، پیش‌حسابان داشتیم، و پس از آن‌ها، حسابان. من خودم این دیدگاه را قبول ندارم. به نظر من، تمام این‌ها، از همان زمانی که ارشمیدس بی‌نهایت را رام کرد، حسابان بوده است.

نام آن را هر چه بگذاریم، حسابان بین سال‌های ۱۶۶۴ و ۱۶۷۶ تحولات شگرفی را متحمل شد و دنیا را نیز با خود تغییر داد. در دنیای علم، به بشریت امکان داد که شروع به خواندن کتاب طبیعت کند، کتابی که گالیله رؤیای آن را در سر داشت. در دنیای فناوری، موجب شروع انقلاب صنعتی و عصر اطلاعات شد. در فلسفه و سیاست، بر مفاهیم مدرن حقوق بشر، جامعه، و قانون تأثیر گذاشت.

من بر این باور نیستم که حسابان در اواخر قرن هفدهم اختراع شد؛ بلکه آن‌چه را اتفاق افتاد، به‌عنوان یک پیشرفت بزرگ تکاملی، مشابه با یک رویداد محوری در تکامل زیست‌شناختی، توصیف می‌کنم. در دوران اولیه‌ی حیات، ارگانیسم‌ها نسبتاً ساده بودند. موجوداتی تک‌سلولی بودند، تا حدودی شبیه باکتری‌های امروزی. این دوران حیات تک‌سلولی حدود سه و نیم میلیارد سال ادامه پیدا کرد، به‌طوری که قسمت عمده‌ی تاریخ زمین را به خود اختصاص داد. ولی در حوالی نیم میلیارد سال قبل، تنوع حیرت‌انگیزی از حیات چندسلولی به وجود آمد که زیست‌شناسان به آن انفجار کامبریَن می‌گویند. ظرف تنها چند ده میلیون سال—که از نظر تکامل، مانند کسری از ثانیه است—بسیاری از شاخه‌های عمده‌ی جانوران به‌ناگاه ظاهر شدند. به‌طور مشابه،

حسابان در حکم انفجار کامبرین برای ریاضیات بود. وقتی که حسابان از راه رسید، رشته‌های مختلف ریاضی با تنوعی حیرت‌انگیزی شروع به تکامل کردند. تنوع آن‌ها به‌خوبی در نام‌های برگرفته از حسابان و استفاده از صفت‌هایی مانند *دیفرانسیل* و *انتگرال* و *تحلیلی* نمایان است، از قبیل هندسه‌ی تحلیلی، معادلات انتگرالی، و نظریه‌ی تحلیلی اعداد. این شاخه‌های پیشرفته‌ی ریاضیات مانند شاخه‌ها و گونه‌های مختلف حیات چندسلولی هستند. در این تشبیه، تک‌یاخته‌های دنیای ریاضیات، مباحث اولیه‌ی آن هستند: اعداد، شکل‌ها، و مسئله‌هایی که با کلمات بیان می‌شد. آن‌ها نیز، مانند ارگانیسم‌های تک‌سلولی، در بخش عمده‌ی تاریخ ریاضیات، بازیگران اصلی صحنه‌ی آن بودند. ولی پس از انفجار کامبرینِ حسابان در سی‌صد و پنجاه سال قبل، شکل‌های حیات جدید ریاضی شروع به تکثیر و پرورش کردند و چشم‌انداز اطراف خود را تغییر دادند.

قسمت زیادی از تاریخ حیات، داستان پیشرفت به‌سوی پیشرفتگی و پیچیدگی بیشتر بر مبنای پیش‌سازهای قبلی است. این مطلب در مورد حسابان نیز درست است. ولی این قصه به کجا پیش می‌رود؟ آیا تکامل حسابان جهت مشخصی دارد، یا آن‌گونه که برخی از افراد در مورد تکامل زیست‌شناختی می‌گویند، بدون جهت و تصادفی است؟

در حوزه‌ی ریاضیات محض، تکامل حسابان به‌صورت آمیزش متقاطع و فواید حاصل از آن بوده است. بخش‌های دیگری از ریاضیات پس از برخورد با حسابان، قدرت بیشتری پیدا کردند. به‌عنوان مثال، قصه‌ی باستانی اعداد و الگوهای آن‌ها با تزریق ابزارهای مبتنی بر حسابان مانند انتگرال، مجموع‌های بی‌نهایت، و سری‌های توانی، حیاتی دوباره یافت. رشته‌ی دورگه‌ای که پدید آمد، نظریه‌ی تحلیلی اعداد نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، در هندسه‌ی دیفرانسیل از حسابان برای روشن کردن ساختمان سطوح هموار استفاده شده است و مشخص شده است که این‌ها پسرعموهایی دارند که از وجود آن‌ها هم آگاه نبودند، شکل‌های خمیده‌ی غیرقابل‌تصوری در چهار بُعد و فراتر از آن. به این طریق، انفجار کامبرینِ حسابان سبب شده است که ریاضی انتزاعی‌تر و نیرومندتر شود، و آن را بیشتر به یک خانواده شبیه کرده است. حسابان شبکه‌ای از روابط پنهان را آشکار کرده است که تمام بخش‌های ریاضیات را با یکدیگر پیوند می‌دهد.

در حوزه‌ی ریاضیات کاربردی، تکامل حسابان به‌صورت توسعه‌ی درک ما از تغییر بوده است. به‌طوری که دیدیم، حسابان در ابتدا با مطالعه‌ی منحنی‌ها شروع شد که در آن تغییرات به‌صورت تغییر در جهت بود، و در ادامه به مطالعه‌ی حرکت پرداخت که در آن تغییر به‌صورت تغییر در مکان است. به دنبال انفجار کامبرین در این عرصه و

خصوصاً با ظهور معادلات دیفرانسیل، حسابان به مطالعه‌ی تغییر به‌صورت بسیار عمومی‌تر پرداخت. امروزه معادلات دیفرانسیل به ما کمک می‌کنند که چگونگی گسترش همه‌گیری‌ها را پیش‌بینی کنیم، مشخص کنیم که یک گردباد کجا به زمین اصابت خواهد کرد، و این‌که برای اختیار خرید یک سهام در آینده چقدر پول بپردازیم. در هر کدام از رشته‌های تلاش‌های علمی بشر، معادلات دیفرانسیل به‌عنوان چارچوب مشترکی برای توصیف چگونگی تغییر کردن چیزها در اطراف ما و در درون ما ظاهر شده‌اند، از حوزه‌ی زیراتمی گرفته تا دورترین نقاط کیهان.

منطق طبیعت

نخستین فتوحات معادلات دیفرانسیل، سیر فرهنگ غربی را دگرگون کرد. در سال ۱۶۸۷، آیزاک نیوتن نظامی را برای جهان پیشنهاد کرد که نشان‌دهنده‌ی قدرت تعقل بود و شروع دوران روشنگری را در پی داشت. او مجموعه‌ی کوچکی از معادلات—شامل قوانین حرکت و گرانش—را کشف کرد که می‌توانست الگوهای اسرارآمیزی را که گالیله و کپلر در سقوط اجسام بر روی زمین و در مدارهای سیاره‌ها در منظومه‌ی شمسی مشاهده کرده بودند، توضیح دهد. با انجام این کار، او تمایز بین قلمرو زمینی و آسمانی را از بین برد. پس از نیوتن دیگر فقط یک دنیا داشتیم که قوانین یکسانی در همه جای آن و همیشه قابل‌اعمال بود.

نیوتن در شاهکار بزرگ سه‌جلدی خود، *اصول ریاضی فلسفه‌ی طبیعت* (که غالباً به آن *پرینکیپیا* می‌گویند)، نظریه‌های خود را برای خیلی چیزهای دیگر نیز به کار برد: شکل کره‌ی زمین، که در ناحیه‌ی استوا به‌علت نیروی گریز از مرکز ناشی از گردش زمین برجسته‌تر است؛ ریتم جزر و مدها؛ مدار خارج از مرکز ستاره‌های دنباله‌دار؛ و حرکت کره‌ی ماه، مسئله‌ای که به‌قدری دشوار بود که نیوتن به دوستش ادموند هالی شکایت کرد که موجب شده که «سردرد بگیرد، و به‌قدری شب‌ها بیدار مانده که دیگر حاضر نیست درباره‌ی آن فکر کند».

امروزه وقتی دانشجویان در دانشگاه به مطالعه‌ی فیزیک می‌پردازند، ابتدا مکانیک کلاسیک—یعنی مکانیک نیوتن و اخلاف او—به آن‌ها آموزش داده می‌شود، ولی بعد به آن‌ها گفته می‌شود که نظریه‌ی نسبیت اینشتین و نظریه‌ی کوانتومی پلانک، اینشتین، شرودینگر، هایزنبرگ، و دیراک جایگزین آن شده است. البته این موضوع تا حدودی درست است. نظریه‌های جدید مفاهیم نیوتنیِ فضا و زمان، جرم و انرژی، و حتی خود جبرگرایی را کنار زده‌اند، و در مورد نظریه‌ی کوانتومی، آن را با توصیفی از

طبیعت که بیشتر مبتنی بر احتمالات و آمار است، جایگزین کرده‌اند.

ولی آن‌چه تغییر نکرده است، نقش حسابان است. در نسبیت عام، و نیز در مکانیک کوانتومی، قوانین طبیعت هنوز هم به زبان حسابان نوشته شده است، که معادلات دیفرانسیل جملات آن را تشکیل می‌دهند. به نظر من، این بزرگ‌ترین میراث نیوتن است. او نشان داد که طبیعت منطقی است. علت و معلول در جهان طبیعی درست مانند برهان در هندسه عمل می‌کند، به‌طوری که یک حقیقت بر اساس منطق از حقیقتی دیگر نتیجه می‌شود، جز این‌که چیزی که در پی چیز دیگر می‌آید، رویدادی است در پی رویدادی دیگر در جهان، نه فکری در پی فکر دیگر در ذهن ما.

این ارتباط شگفت بین طبیعت و ریاضیات پژواکی از رؤیای فیثاغورس است. پیوند بین هارمونی موسیقی و اعداد که به‌وسیله‌ی فیثاغوریان کشف شد، آن‌ها را بر آن داشت که ادعا کنند که همه چیز از اعداد است. و حرفشان هم پُر بی‌جا نبود. اعداد در کارکرد گیتی اهمیت زیادی دارند. شکل‌ها نیز مهم هستند؛ در کتاب طبیعت، که گالیله رؤیای آن را در سر داشت، کلمات شکل‌های هندسی بودند. ولی با همه‌ی اهمیتی که اعداد و شکل‌ها دارند، این‌ها نیروهای اصلی این نمایش نیستند. در نمایش گیتی، شکل‌ها و اعداد مانند هنرپیشگان هستند؛ پشت پرده، یک نیروی نامرئی آن‌ها را کارگردانی می‌کند که همانا منطق معادلات دیفرانسیل است.

نیوتن نخستین کسی بود که به منطق گیتی راه یافت و سیستمی بر پایه‌ی آن بنا نهاد. تا قبل از او، امکان این کار وجود نداشت، زیرا مفاهیم ضروری هنوز زاده نشده بود. ارشمیدس از معادلات دیفرانسیل آگاه نبود. گالیله، کپلر، دکارت، یا فرما نیز از آن‌ها خبر نداشتند. لایبنیتس آن‌ها را می‌دانست، ولی به‌اندازه‌ی نیوتن متمایل به علم نبود و از نظر مهارت ریاضی نیز به پای او نمی‌رسید. منطق پنهان گیتی تنها به نیوتن سپرده شده بود.

مهم‌ترین بخش نظریه‌ی او، معادله‌ی دیفرانسیل حرکت است:

$$F = ma.$$

این یکی از تأثیرگذارترین معادلات در تاریخ است. این معادله می‌گوید که نیروی وارد شده بر یک جسم در حال حرکت، F، برابر است با جرم جسم، m، ضربدر شتاب آن جسم، a. این یک معادله‌ی دیفرانسیل است، زیرا شتاب مشتق است (نرخ تغییر

سرعت جسم)، و یا به بیان لایبنیتسی، نسبت دو دیفرانسیل است:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

در این‌جا، $\mathrm{d}v$ تغییر بی‌نهایت‌کوچک در سرعت جسم v در طول یک فاصله‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}t$ است. بنابراین، اگر نیروی F وارد شده بر جسم را بدانیم، و اگر جرم جسم m نیز معلوم باشد، می‌توانیم از فرمول $F = ma$ برای پیدا کردن شتاب آن به‌صورت $a = F/m$ استفاده کنیم. شتاب به نوبه‌ی خود چگونگی حرکت جسم را مشخص می‌کند. شتاب به ما می‌گوید که سرعت جسم در لحظه‌ی بعد چگونه تغییر خواهد کرد، و سرعت آن به ما می‌گوید که موقعیت آن چگونه تغییر خواهد کرد. به این طریق، $F = ma$ مانند یک سروش غیبی است، که رفتار آینده‌ی جسم را در هر لحظه به‌صورت یک گام کوچک در زمان پیش‌بینی می‌کند.

ساده‌ترین و بی‌پیرایه‌ترین موقعیت ممکن را تصور کنید: یک جسمِ تنها در یک جهان خالی. این جسم چگونه حرکت خواهد کرد؟ چون هیچ چیزی در اطراف آن نیست که آن را هل بدهد یا بکشد، نیروی وارد شده بر جسم صفر است: $F = 0$. بنابراین، از آن‌جا که m صفر نیست (به فرض این‌که جسم دارای جرم باشد)، لذا قانون نیوتن نشان می‌دهد که $F/m = a = 0$، که بدان معنا است که هم‌چنین، $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$. ولی $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ به این معنا است که سرعت این جسمِ تنها در طی فاصله‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک $\mathrm{d}t$ تغییر نمی‌کند، و در بازه‌ی بعدی و بازه‌ی بعد از آن نیز تغییر نخواهد کرد. نتیجه آن است که وقتی $F = 0$، جسم سرعت خود را برای همیشه حفظ می‌کند. این اصلِ ماندِ گالیله است: در غیاب یک نیروی بیرونی، جسمی که ساکن است، در حالت سکون باقی می‌ماند، و جسمی که در حرکت است، در حالت حرکت باقی می‌ماند و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. سرعت و جهت حرکت آن هرگز تغییر نخواهد کرد. به این ترتیب، ما قانون ماند را به‌عنوان یک نتیجه‌ی منطقی قانون حرکت نیوتن، $F = ma$، که قانونی عمیق‌تر است، استنباط کردیم.

به نظر می‌رسد که نیوتن در همان اوایل که هنوز دانشجوی دانشگاه بود، متوجه شده بود که شتاب با نیرو متناسب است. او از مطالعه‌ی کارهای گالیله فهمیده بود که اگر هیچ نیرویی بر جسم وارد نشود، جسم یا ساکن باقی می‌ماند و یا در خط راست با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. او متوجه شد که نیرو برای ایجاد حرکت لازم نیست، بلکه برای ایجاد تغییر در حرکت لازم است. این نیرو است که مسئول سرعت گرفتن، کند شدن سرعت، و یا خارج شدن اجسام از مسیر مستقیم است.

این درک، پیشرفت بزرگی نسبت به تفکر ارسطویی قبلی بود. ارسطو توجهی به ماند نداشت. او تصور می‌کرد که جسم صرفاً برای این‌که به حرکت خود ادامه دهد، نیاز به نیرو دارد. و البته حق هم داشت، زیرا در موقعیت‌هایی که اصطکاک وجود دارد، وضعیت به همین صورت است. اگر بخواهید میزی را روی زمین سُر بدهید، باید مرتب آن را هُل بدهید. اگر دست از هل دادن بردارید، میز سر جای خود متوقف می‌شود. ولی برای سیاره‌هایی که در فضا حرکت می‌کنند یا سیبی که به زمین می‌افتد، اصطکاک تأثیر بسیار کمتری دارد. در این موارد، نیروی اصطکاک قابل‌چشم‌پوشی است. بدون آنکه عصاره‌ی اصلی پدیده از دست برود، می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

در تصویر نیوتن از گیتی، نیروی غالب گرانش است، نه اصطکاک. که همین‌گونه هم باید باشد، کما این‌که در ذهن عامه، نیوتن و گرانش پیوند نزدیکی با یکدیگر دارند. اکثر افراد وقتی که درباره‌ی نیوتن فکر می‌کنند، بلافاصله به یاد این می‌افتند که در کودکی یاد گرفته‌اند که نیوتن زمانی که سیبی روی سرش افتاد، جاذبه را کشف کرد. محض اطلاع شما، این واقعیت ندارد. نیوتن جاذبه را کشف نکرد؛ افراد از قبل هم می‌دانستند که چیزهای سنگین می‌افتند. ولی کسی نمی‌دانست که گرانش تا کجا اثر می‌کند. آیا در آسمان تمام می‌شود؟

نیوتن حدس می‌زد که شاید دامنه‌ی گرانش تا ماه و فراتر از آن ادامه داشته باشد. فکرش این بود که مدار ماه در حقیقت نوعی سقوط بی‌پایان به‌سوی زمین است. ولی بر خلاف سیبی که سقوط می‌کند، ماهِ در حال سقوط به زمین برخورد نمی‌کند، زیرا به‌علت مانْد هم‌زمان به‌طرف کنار نیز حرکت می‌کند. مانند یکی از توپ‌های گالیله است که هم‌زمان هم به‌طرف جانبی حرکت می‌کند و هم سقوط می‌کند، و در نتیجه، مسیری منحنی را طی می‌کند، با این تفاوت که سرعت حرکت جانبی ماه به‌قدری زیاد است که هرگز به سطح کره‌ی زمین که در زیر آن حرکت می‌کند، نمی‌رسد. ماه، در حالی که مدار آن از خط راست فاصله می‌گیرد، شتاب می‌گیرد—نه بدان معنا که سرعت آن تغییر می‌کند، بلکه بدان معنا که جهت حرکت آن تغییر می‌کند. آن‌چه ماه را از حرکت در مسیر مستقیم منحرف می‌کند، کشش بی‌وقفه‌ی جاذبه‌ی زمین است. این نوع شتابِ پدید آمده را شتاب جذب به مرکز می‌گویند، یعنی تمایل به کشیده شدن به‌طرف مرکز—که در این حالت مرکز زمین است.

نیوتن بر اساس قانون سوم کپلر استنباط کرد که نیروی گرانش با افزایش فاصله ضعیف‌تر می‌شود، و به این خاطر بود که سیاره‌های دورتر در مدت زمان بیشتری به دور خورشید گردش می‌کردند. محاسبات او نشان می‌داد که اگر خورشید با همان نیرویی که سیب را به‌طرف زمین می‌کشد و ماه را در مدار خود نگه‌می‌دارد، سیاره‌ها را به طرف

خود می‌کشاند، آن نیرو می‌بایست متناسب با معکوس مربع فاصله تغییر کند. بنابراین، اگر به‌طریقی می‌شد فاصله‌ی بین زمین و ماه را دو برابر کرد، نیروی گرانشی بین آن‌ها چهار برابر (دو به توان دو) ضعیف‌تر خواهد شد، نه دو برابر. اگر این فاصله سه برابر شود، نیرو نُه برابر کمتر می‌شود، نه سه برابر. البته باید پذیرفت که نیوتن برخی فرضیات مشکوک را نیز در محاسبات خود به کار برده بود، مخصوصاً این فرض که گرانش در فاصله‌ی دور به‌صورت لحظه‌ای عمل می‌کند، گویی که وسعت فضا هیچ اهمیتی ندارد. او نمی‌دانست که چنین چیزی چگونه می‌تواند امکان‌پذیر باشد، ولی به هر حال قانون مربع معکوس برایش جالب بود.

او برای این‌که این فرضیه را به‌صورت کمّی آزمایش کند، شتاب مرکزگرای ماه را که در فاصله‌ی معین (حدود ۶۰ برابر شعاع زمین) با دوره‌ی گردش معلوم (حدود ۲۷ روز) به دور زمین می‌گردد، برآورد کرد. سپس شتاب ماه را با شتاب سقوط اجسام بر روی زمین، که گالیله آن را در آزمایش‌های سطح شیب‌دار خود اندازه‌گیری کرده بود، مقایسه کرد. نیوتن مشاهده کرد که نسبت این دو شتاب نزدیک به ۳,۶۰۰ برابر است که معادل با مربع ۶۰ است. این درست همان چیزی بود که قانون مربع معکوس پیش‌بینی می‌کرد، چرا که فاصله‌ی ماه از مرکز زمین ۶۰ برابر فاصله‌ی سیبی بود که از یک درخت روی سطح زمین سقوط می‌کند. بنابراین، شتاب آن باید با ضریب مربع ۶۰ کمتر باشد. در سال‌های بعد، نیوتن در جایی نوشت: «من نیروی لازم برای نگه‌داشتن ماه در مدار خود را با نیروی جاذبه در سطح زمین مقایسه کردم و مشاهده کردم که جواب آن‌ها بسیار نزدیک به هم است.»

این مفهوم که کشش جاذبه تا ماه ادامه داشته باشد، در آن زمان فکر دیوانه‌واری بود. به یاد آورید که در آموزه‌های ارسطویی، هر چیزی که در زیر ماه بود، فاسد و ناکامل شمرده می‌شد، و هر چیزی فراتر از ماه، کامل، ابدی، و بدون تغییر تلقی می‌گردید. نیوتن این آموزه را در هم شکست و آسمان و زمین را به هم پیوست و نشان داد که قوانین فیزیکی یکسانی هر دوی آن‌ها را توصیف می‌کند.

تقریباً بیست سال پس از شناختی که از قانون مربع معکوس به دست آورد، مدتی علایق دیگر خود را در زمینه‌ی کیمیاگری و تاریخ انجیل کنار گذاشت و دوباره به مسئله‌ی حرکت ناشی از گرانش پرداخت. این اقدام به تحریک همکاران و رقبایش در انجمن سلطنتی لندن صورت گرفت. آن‌ها نیوتن را به چالش کشیدند که مسئله‌ای را حل کند که از تمام مسایلی که قبلاً بررسی کرده بود، بسیار دشوارتر بود، و هیچ‌یک از آن‌ها پاسخ آن را نمی‌دانستند: اگر نیروی جاذبه‌ای وجود دارد که از خورشید سرچشمه می‌گیرد و بر اساس قانون مربع معکوس ضعیف می‌شود، آنگاه سیاره‌ها در چه مسیری

حرکت می‌کنند؟ گفته می‌شود که وقتی ادموند هالی، از دوستان نیوتن، این سؤال را مطرح کرد، او بلافاصله جواب داد: «به‌صورت بیضی.» هالی با تعجب پرسید: «ولی شما از کجا می‌دانید؟» نیوتن جواب داد: «خب، آن را محاسبه کرده‌ام.» وقتی که هالی از او خواست استدلالش را توضیح دهد، نیوتن شروع به بازسازی کارهای قدیمی خود کرد. او با رگبار دیوانه‌واری از فعالیت و بارش خلاقانه‌ای تقریباً به جنون دوران دانشجوی‌اش در سال‌های طاعون، کتاب *پرینکیپیا* را نوشت.

نیوتن قوانین حرکت و گرانش خود را به‌عنوان اصول موضوعه در نظر گرفت و از حسابان خود به‌عنوان ابزاری استنباطی استفاده کرد، و ثابت کرد که هر سه قانون کپلر به‌عنوان ضرورت منطقی از آن‌ها نتیجه می‌شود. همین مطلب در مورد قانون مانْدِ گالیله، برابرزمانیِ آونگ‌ها، قانون اعداد فرد برای گوی‌هایی که از سطح شیب‌دار به پایین می‌غلتند، و قوس‌های سهموی پرتابه‌ها نیز صادق بود. هر کدام از آن‌ها نتیجه‌ی قانون مربع معکوس و $F = ma$ بود. استفاده از استدلال استنتاجی موجب حیرت همکاران نیوتن شد و از لحاظ فلسفی آن‌ها را برآشفته ساخت. بسیاری از آن‌ها تجربه‌گرا بودند. فکر می‌کردند که منطق فقط در ریاضیات به کار می‌آید. طبیعت می‌بایست با تجربه و مشاهده مورد مطالعه قرار گیرد. آن‌ها از این فکر که طبیعت یک هسته‌ی ریاضی در درون خود داشته باشد و پدیده‌های طبیعی را بتوان بر اساس منطق از اصول موضوعه‌ی تجربی، مانند قوانین گرانش و حرکت، استنباط کرد، حیرت‌زده شده بودند.

مسئله‌ی دو جسم

مسئله‌ای که هالی برای نیوتن مطرح کرد، بی‌اندازه دشوار بود. این مسئله نیازمند تبدیل کردن اطلاعات محلی به اطلاعات سراسری بود، یعنی مشکل اصلی حساب انتگرال و پیش‌بینی، که در فصل ۷ درباره‌ی آن بحث کردیم.

ببینید که برای پیش‌بینی تعامل گرانشی دو جسم چه کاری باید انجام شود. برای این‌که مسئله را ساده‌تر کنیم، وانمود می‌کنیم که یکی از آن‌ها، خورشید، دارای جرم بی‌نهایت، و بنابراین، بی‌حرکت است، و دیگری سیاره‌ای است که در مدار آن قرار دارد و به دور آن می‌گردد. در ابتدا، سیاره در فاصله‌ی معینی از خورشید، در یک موقعیت داده شده، قرار دارد، و با سرعت معلوم در جهت معلوم حرکت می‌کند. در لحظه‌ی بعد، سرعت سیاره آن را به موقعیت بعدی می‌برد، که در فاصله‌ی بی‌نهایت‌کوچکی از موقعیت لحظه‌ی قبل آن قرار دارد. از آن‌جا که اکنون موقعیت آن اندکی فرق کرده است، لذا گرانش و کشش گرانشی حاصل از خورشید بر روی آن اندکی متفاوت است،

هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی. این نیروی جدید (که بر اساس قانون مربع معکوس قابل‌محاسبه است)، سیاره را دوباره به‌طرف خورشید می‌کشد و سرعت و جهت حرکت آن را به یک میزان بی‌نهایت‌کوچک (که بر اساس $F = ma$ قابل‌محاسبه است)، در طول بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک بعد، تغییر می‌دهد. این فرایند تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. همه‌ی این قدم‌های محلی بی‌نهایت‌کوچک را باید به‌طریقی با یکدیگر تلفیق کرد و با هم جمع کرد، تا مدار کلی حرکت سیاره به دست آید.

بر این اساس، انتگرال‌گیری $F = ma$ برای مسئله‌ی دو جسم، نوعی کاربرد اصل بی‌نهایت است. ارشمیدس و دیگران اصل بی‌نهایت را برای معمای منحنی‌ها به کار گرفته بودند، ولی نیوتن نخستین کسی بود که آن را برای معمای حرکت مورد استفاده قرار داد. با آن‌که مسئله‌ی دو جسم بسیار دشوار به نظر می‌رسید، ولی نیوتن موفق شد آن را به‌کمک قضیه‌ی بنیادی حسابان حل کند. به‌جای این‌که در ذهن خود سیاره را لحظه به لحظه جلوتر ببرد، آن را با استفاده از حسابان، گویی به‌طور جادویی، با یک جهش به پیش برد. فرمول‌های او می‌توانست پیش‌بینی کند که سیاره در هر زمان دلخواهی در آینده، کجا خواهد بود—و نیز با چه سرعتی حرکت خواهد کرد.

اصل بی‌نهایت و قضیه‌ی بنیادی حسابان از یک راستای جدید دیگر نیز وارد کارهای نیوتن شد. او در نخستین حمله‌اش به مسئله‌ی دو جسم، سیاره و خورشید را به‌صورت ذرات نقطه‌مانند در نظر گرفته بود. آیا او می‌توانست آن‌ها را به‌صورت واقعی‌تر، به‌عنوان همان گوی‌های کروی عظیمی که واقعاً هستند، مدل‌سازی کند و باز هم مسئله را حل کند؟ و اگر این کار شدنی بود، آیا نتایج آن تغییر می‌کرد؟

این کار در آن زمان در جریان توسعه‌ی حسابان، محاسبه‌ی فوق‌العاده دشواری بود. در نظر بگیرید که برای محاسبه‌ی کشش کلی کره‌ی عظیم خورشید بر روی کره‌ی زمین که کوچک‌تر ولی باز هم غول‌آسا است، چه زحمت زیادی لازم است. هر اتم موجود در خورشید، تک‌تک اتم‌های زمین را جذب می‌کند. دشواری کار در این است که این اتم‌ها هر کدام در فاصله‌ی متفاوتی از یکدیگر قرار دارند. اتم‌های موجود در قسمت پشتی خورشید، در مقایسه با اتم‌هایی که در قسمت جلوی خورشید قرار دارند، فاصله‌ی بیشتری با اتم‌های زمین دارند، و بنابراین، کشش گرانشی کمتری را بر روی آن‌ها اعمال می‌کنند. به‌علاوه، اتم‌های طرف چپ و طرف راست خورشید، زمین را در جهت‌های متضاد می‌کشند و بسته به فاصله‌ی آن‌ها از زمین، شدت جذب آن‌ها متفاوت است. همه‌ی این اثرات باید با یکدیگر جمع شود. جمع کردن این قطعه‌ها با یکدیگر برای این مسئله دشوارتر از هر مسئله‌ی دیگری بود که قبلاً در حساب انتگرال در نظر گرفته شده بود. امروزه برای حل آن از روشی به نام انتگرال‌گیری سه‌گانه استفاده

می‌کنیم. کار خیلی سختی است.

نیوتن موفق شد این انتگرال سه‌گانه را حل کند، و جوابی که پیدا کرد، به‌قدری زیبا و به‌قدری ساده بود که حتی امروز هم تقریباً باورنکردنی به نظر می‌رسد. او مشاهده کرد که می‌تواند فرض متمرکز بودن جرم کره‌ی خورشید در مرکز آن را کنار بگذارد؛ در مورد زمین هم همین‌طور. محاسبات او نشان می‌داد که مدار زمین به هر حال یکسان خواهد بود. به عبارت دیگر، می‌توانست کره‌های عظیم را با نقطه‌های بی‌نهایت‌کوچک جایگزین کند، بدون آنکه هیچ‌گونه خطایی در محاسبه وارد شود. از این بهتر چه می‌خواهید: مانند دروغی است که حقیقت را آشکار می‌کند!

با این حال، تقریب‌های زیاد دیگری نیز در محاسبات نیوتن بود که اثرات آن جدی‌تر و دردسرسازتر بود. او به‌خاطر سادگی، کشش‌های گرانشی حاصل از سیاره‌های دیگر را مورد چشم‌پوشی قرار داده بود. به‌علاوه، باز هم فرض کرده بود که گرانش به‌صورت لحظه‌ای اثر می‌کند. او می‌دانست که احتمالاً هیچ‌کدام از این تقریب‌ها نمی‌تواند درست باشد، ولی راهی به نظرش نمی‌رسید که بدون آن‌ها این مسئله را حل کند. هم‌چنین اعتراف می‌کرد هیچ‌گونه توضیحی ندارد که گرانش واقعاً چیست و یا این‌که چرا از این توصیف ریاضی پیروی می‌کند. او می‌دانست که منتقدان به کل برنامه‌ی او شک خواهند داشت. برای این‌که کارش حتی‌الامکان قانع‌کننده باشد، آن را به زبان اطمینان‌بخش هندسه، که در آن زمان استاندارد طلاییِ استواری و اطمینان محسوب می‌شد، بیان می‌کرد. ولی این هندسه‌ی سنتی اقلیدسی نبود؛ یک ترکیب غیرعادی و خاص از هندسه‌ی کلاسیک و حسابان بود. در واقع، حسابان بود در لباس هندسه.

با این وجود، او تمام تلاش خود را به کار گرفت تا آن را با رنگ و روی کلاسیک عرضه کند. سبک و سیاق کتاب *پرینکیپیا* همان مکتب قدیمی اقلیدسی است. نیوتن مطابق با قالب هندسه‌ی کلاسیک، از اصول موضوعه و فرضیات، یعنی قوانین حرکت و گرانش خود، شروع کرد و آن‌ها را به‌عنوان مبانی غیرقابل‌سؤال در نظر گرفت. سپس بر پایه‌ی آن‌ها، عمارتی از لم‌ها، گزاره‌ها، قضیه‌ها، و برهان‌ها را بنا نهاد، که همه‌ی آن‌ها بر اساس منطق، یکی از دیگری به‌صورت زنجیره‌ای به‌هم‌پیوسته استنتاج می‌شد که حلقه‌ی آغازین آن اصول موضوعه بود. درست همان‌گونه که اقلیدس سیزده کتاب جاویدان *اصول* خود را به جهان عرضه کرد، نیوتن نیز سه کتاب به جهان ارائه نمود. او بدون آنکه تظاهر به فروتنی کند، کتاب سوم را *نظام جهان* نامیده است.

سیستم او طبیعت را به‌صورت یک دستگاه ماشینی نشان می‌دهد. طی سال‌های بعد، خیلی از اوقات آن را با یک ساعت کوکی مقایسه می‌کردند که چرخ‌دنده‌های آن

در گردش است و فنرهای آن در کشش، و همه‌ی بخش‌ها به ترتیب حرکت می‌کنند، اعجوبه‌ای از کارکرد علت و معلول. با به‌کارگیری قضیه‌ی بنیادی حسابان و با مسلح بودن به سری‌های توانی و بهره‌مندی از نبوغ و شانس، نیوتن غالباً می‌توانست معادلات دیفرانسیل خود را به‌صورت دقیق حل کند. به‌جای این‌که لحظه به لحظه به‌کُندی جلو برود، می‌توانست به جلو پرش کند و وضعیت این ساعت کوکی را در هر زمان دلخواه در آینده پیش‌بینی کند، درست همان‌گونه که این کار را برای مسئله‌ی دو جسم مربوط به سیاره‌ای که به دور خورشید می‌گردد، انجام داده بود.

در طول سده‌های بعد از نیوتن، بسیاری از ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان، و ستاره‌شناسان سیستم او را پالوده‌تر کردند. تا آن‌جا به این سیستم اعتماد داشتند که زمانی که حرکت یک سیاره با پیش‌بینی آن جور درنمی‌آمد، ستاره‌شناسان فرض را بر این می‌گذاشتند که چیز مهمی را از قلم انداخته‌اند. بدین گونه بود که در سال ۱۸۴۶، سیاره‌ی نپتون کشف شد. نامنظمی در مدار اورانوس نشان‌دهنده‌ی وجود یک سیاره‌ی ناشناخته در ورای آن بود، همسایه‌ای نادیده که موجب آشفتگی گرانشی در اورانوس می‌شد. حسابان محل سیاره‌ی مفقوده را پیش‌بینی کرد، و وقتی که ستاره‌شناسان دقیق نگاه کردند، سیاره را در آن‌جا یافتند.

نیوتن و ارقام پنهان

در نیمه‌ی قرن بیستم، به نظر می‌رسید که فیزیک سرانجام از مکانیک نیوتنی عبور کرده است. نظریه‌ی کوانتوم و نسبیت فاتحه‌ی آن را خوانده بودند. ولی با این وجود، به لطف مسابقه‌ی فضایی بین ایالات متحده و اتحاد شوروی، افتخار دیگری نصیب مکانیک نیوتنی شد.

در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰، کاترین جانسون، ریاضی‌دان آمریکایی آفریقایی‌تبار و قهرمان *ارقام پنهان*، از مسئله‌ی دو جسم استفاده کرد تا فضانورد جان گلِن، نخستین آمریکایی که به دور زمین گردید، را سالم به زمین برگرداند. جانسون از چندین جهت کارهای بی‌سابقه‌ای انجام داد. در تحلیل او، دو جسم گرانشی شامل یک فضاپیما و زمین بودند، نه یک سیاره و خورشید، مانند مسئله‌ی نیوتن. او با استفاده از حسابان، موقعیت فضاپیمای در حال گردش در مدار زمین را که زمین در زیر آن در چرخش بود، پیش‌بینی کرد، و مسیر آن را برای ورود مجدد موفقیت‌آمیز به اتمسفر محاسبه کرد. برای انجام این کار، لازم بود عوارضی را که نیوتن از آن‌ها صرف‌نظر کرده بود، در محاسبات دخالت دهد، که حیاتی‌ترین آن‌ها این بود که کره‌ی زمین دقیقاً کروی

نیست، بلکه در قسمت استوا اندکی برجسته است و در دو قطب مسطح شده است. در این‌جا، رعایت دقیق جزئیات، مسئله‌ی مرگ و زندگی بود. کپسول فضایی باید با زاویه‌ی درست وارد اتمسفر می‌شد وگرنه آتش می‌گرفت و می‌سوخت. و می‌بایست در نقطه‌ی درست در اقیانوس فرود می‌آمد. اگر خیلی دور از محل تعیین شده فرود می‌آمد، ممکن بود گلن قبل از آنکه کسی به او برسد، در کپسول فضایی خود غرق شود.

در روز ۲۰ فوریه‌ی ۱۹۶۲، سرهنگ جان گلن سه دور کامل به دور سیاره‌ی ما گردید، و سپس با هدایت محاسبات جانسون دوباره وارد اتمسفر شد و سالم در اقیانوس اطلس شمالی فرود آمد. او یک قهرمان ملی شد. سال‌ها بعد، به‌عنوان نماینده‌ی مجلس سنای آمریکا انتخاب شد. کمتر کسی آگاه بود که او در آن روز تاریخ‌ساز ابتدا از رفتن به این مأموریت امتناع کرد، تا آنکه خود کاترین جانسون تمام محاسبات لحظه‌ی آخر را برای سفر وارسی کرد. جان گلن با جان خود به او اعتماد داشت.

کاترین جانسون از محاسبه‌گران سازمان ملی هوانوردی و فضایی آمریکا (ناسا) بود، در زمانی که محاسبه‌گرها زنان بودند، نه ماشین‌ها. او تقریباً از آغاز در آن‌جا بود، زمانی که با کمک او، الن شِپارد نخستین آمریکایی شد که به فضا رفت، و تقریباً در پایان هم در آن‌جا بود و بر روی مسیر نخستین فرود در ماه کار کرد. تا چندین دهه، کارهای او برای عموم مردم ناشناخته بود. خوش‌بختانه، خدمات پیشگامانه‌ی او (و داستان الهام‌بخش زندگی‌اش) اکنون برای همگان آشکار شده است. در سال ۲۰۱۵، او در سن نود و هفت سالگی مدال ریاست آزادی ریاست‌جمهوری را از رئیس‌جمهور باراک اوباما دریافت کرد. یک سال بعد، سازمان ناسا ساختمانی را به نام او نام‌گذاری کرد. در مراسم نام‌گذاری، یکی از مسئولان ناسا به حضار خاطرنشان کرد که «میلیون‌ها نفر در سراسر جهان پرواز [الن] شپارد را تماشا کردند، اما چیزی که در آن زمان نمی‌دانستند، این بود که محاسباتی که او را به فضا برد و به سلامت به خانه برگرداند، به دست مهمان افتخاری امروز ما، کاترین جانسون، انجام شده بود.»

حسابان و روشنگری

تصویری که نیوتن از قرار داشتن جهان تحت حاکمیت ریاضیات ترسیم کرده بود، تأثیراتی در فراسوی دنیای علم داشت. در حوزه‌ی علوم انسانی، قلم بطلانی بود بر شاعران رمانتیک، مانند ویلیام بلِیک، جان کیتس، و ویلیام وردزورث. وردزورث و کیتس و برخی دیگر در یک مهمانی شام پرسروصدا در سال ۱۸۱۷، بیان کردند که نیوتن شعر رنگین‌کمان را با تقلیل دادن آن به رنگ‌های منشوری تشکیل‌دهنده‌ی آن،

نابود کرده است. آن‌ها گیلاس‌هایشان را بلند کردند و رعدآسا فریاد زدند: «به سلامتی نیوتن و سردرگمی ریاضیات.»

نیوتن در دنیای فلسفه استقبال گرم‌تری دریافت کرد، و ایده‌های او بر ولتر، دیوید هیوم، جان لاک، و دیگر متفکران روشنگری تأثیر گذاشت. آن‌ها تحت تأثیر قدرت استدلال و موفقیت‌های توضیحی نظام او قرار گرفتند، که در آن جهان مثل یک ساعت کوکی بر پایه‌ی علیت حرکت می‌کند. رویکرد تجربی استنتاجی او، که ریشه در واقعیت‌ها داشت و با موتور حسابان حرکت می‌کرد، متافیزیک پیشینی فلاسفه را به کنار افکند (با شما هستم، جناب ارسطو). در ماورای دنیای علم، ایده‌های او بر مفاهیم مختلف روشنگری، از جبرگرایی و آزادی گرفته تا قانون طبیعی و حقوق بشر، تأثیر گذاشت.

برای نمونه، تأثیر نیوتن بر توماس جفرسون، معمار، مخترع، کشاورز، و رئیس‌جمهور ایالات متحده و نویسنده‌ی «اعلامیه‌ی استقلال»، را در نظر بگیرید. در سرتاسر این اعلامیه، طنین افکار نیوتن قابل‌مشاهده است. از همان ابتدا، عبارت «ما بر این باوریم که این حقایق بدیهی و مسلّم است»، ساختار بلاغی آن را اعلام می‌کند. همان‌گونه که اقلیدس در کتاب *اصول* و نیوتن در *پرینکیپیا* عمل کرد، جفرسون ابتدا با اصول موضوعه، یعنی حقایق مبرهن در موضوع مورد نظر، شروع کرد. آنگاه بر اساس نیروی منطق، یک رشته گزاره‌های گریزناپذیر را از این اصول موضوعه استنباط کرد، که مهم‌ترین آن‌ها این بود که مستعمره‌ها حق دارند خودشان را از حاکمیت بریتانیا جدا کنند. این اعلامیه جدایی را با توسل به «قوانین طبیعت و خدای طبیعت» توجیه می‌کند. (در ضمن، در این‌جا به الهیات پَسا_نیوتنی نهفته در ترتیب جمله‌ی جفرسون دقت کنید: خدا بعد از قوانین طبیعت و به‌صورت نقش فرعی، به‌عنوان «خدای طبیعت»، آمده است.) این استدلال بر اساس «عللی که [ساکنان مستعمره را] به جدایی از سلطنت بریتانیا می‌رانند»، استوار شده است. این علل نقش نیروهای نیوتنی را ایفا می‌کنند که حرکت این ساعت کوکی را پیش می‌برند، و معلول‌هایی را که باید در پی بیایند—که در این مورد انقلاب آمریکا است—تعیین می‌کنند.

اگر تمام این‌ها دور از ذهن به نظر می‌رسد، در نظر داشته باشید که جفرسون احترام بالایی برای نیوتن قایل بود. به‌قدری به نیوتن علاقه داشت که یک نسخه از نقاب مرگ نیوتن را گرفته بود. جفرسون زمانی که دیگر رئیس‌جمهور نبود، در روز ۲۱ ژانویه‌ی ۱۸۱۲ به دوست قدیمی‌اش جان آدامز درباره‌ی لذت پشت سر گذاشتن سیاست نوشت: «من روزنامه‌ها را کنار گذاشته‌ام و به‌جای آن‌ها به سراغ تاسیتوس و توسیدید، و نیوتن و اقلیدس رفته‌ام؛ و احساس می‌کنم که اکنون خیلی خوش‌حال‌ترم.»

شیفتگی جفرسون به اصول نیوتن، به علاقه‌ی او به کشاورزی نیز کشیده می‌شد. او با خود فکر می‌کرد که بهترین شکل برای صفحه‌ی برگردان خیش کدام است. (صفحه‌ی برگردان قسمت خمیده‌ی خیش است، که خاک کنده شده به‌وسیله‌ی تیغه را بلند می‌کند و برمی‌گرداند.) سؤال جفرسون در مورد کارایی خیش بود: انحنای صفحه‌ی برگردان خیش چگونه باید باشد تا با کمترین مقاومت از سوی خاک بلند شده مواجه شود؟ سطح صفحه‌ی برگردان باید در قسمت جلو افقی باشد، تا بتواند زیر خاک قرار گرفته و آن را بلند کند؛ سپس باید به‌تدریج خمیده شود و نهایتاً در قسمت عقب، عمود بر زمین قرار گیرد، به‌صورتی که بتواند خاک را برگرداند و آن را به کنار براند.

جفرسون از یکی از دوستان ریاضی‌دان خود درخواست کرد که این مسئله‌ی بهینه سازی را حل کند. این سؤال از بسیاری جهات یادآور سؤالی بود که خود نیوتن در *پرینکیپیا* درباره‌ی شکل یک جسم صلب که در حرکت درون آب کمترین مقاومت را داشته باشد، مطرح کرد. جفرسون با راهنمایی آن نظریه، خیشی را با یک صفحه‌ی برگردان چوبی با طراحی ویژه ساخت.

او در سال ۱۷۹۸ گزارش داد که «پنج سال تجربه این امکان را به من داده است که بگویم که این خیش آن چیزی را که به‌طور نظری وعده می‌دهد، در عمل نیز ارائه می‌کند.» این حسابان نیوتن بود که در خدمت کشاورزی قرار گرفته بود.

از سیستم‌های گسسته تا پیوسته

نیوتن عمدتاً از حسابان برای یک یا حداکثر دو جسم استفاده کرده بود—نوسان یک آونگ، پرتاب یک گلوله‌ی توپ، و یا گردش یک سیاره به دور خورشید. حل کردن معادلات دیفرانسیل برای سه جسم یا بیشتر کابوسی بود که خودش آن را به‌سختی تجربه کرده بود. مسئله‌ی گرانش متقابل زمین و ماه قبلاً سرش را به درد آورده بود. ازاین‌رو، تحلیل کردن کل منظومه‌ی شمسی اصولاً مطرح نبود، و بسیار فراتر از چیزی بود که حتی خود نیوتن می‌توانست با حسابان انجام دهد. او در یکی از مقالات منتشر نشده‌اش نوشته است: «مگر آنکه خیلی اشتباه کرده باشم، از توان ذهن بشر خارج است که این همه علل حرکت را هم‌زمان در نظر بگیرد.»

ولی جالب است که با رفتن به حتی از این هم بالاتر و نهایتاً در نظر گرفتن تعداد *بی‌نهایت* ذرات، معادلات دیفرانسیل دوباره قابل‌حل بود... مادام که ذرات یک محیط پیوسته تشکیل دهند، نه یک مجموعه‌ی گسسته. به تفاوت این‌ها دقت کنید: یک مجموعه‌ی گسسته از ذرات مانند مجموعه‌ای از مهره‌ها است که روی سطح زمین پخش شده است. این مجموعه گسسته است، بدان معنا که می‌توانید به یکی از مهره‌ها دست بزنید، دستتان را در فضای خالی حرکت دهید، دست به مهره‌ی دیگری بزنید، و الی آخر. بین مهره‌ها شکاف خالی وجود دارد. بر عکس، در محیط پیوسته، مثلاً مانند یک زه گیتار، وقتی که انگشت خود را روی آن حرکت می‌دهید، هرگز لازم نیست آن را از روی زه بلند کنید. تمام ذرات زه گیتار به یکدیگر پیوسته‌اند. البته در واقع این‌گونه نیست، زیرا سیم گیتار هم مانند تمام اشیای مادی دیگر، در مقیاس اتمی گسسته و دانه‌دانه است. ولی در ذهن ما، سیم گیتار به‌عنوان یک پیوستار در نظر گرفته می‌شود. این سازه‌ی مفید ما را از زحمت این‌که بخواهیم درباره‌ی تریلیون‌ها ذره فکر کنیم، آزاد می‌کند.

چیزی که به حسابان امکان داد که گام‌های بزرگ بعدی را به‌سوی تغییر دادن جهان بردارد، پرداختن به این معما بود که محیط‌های پیوسته چگونه حرکت و تغییر می‌کنند—چگونه زه‌های گیتار ارتعاش پیدا می‌کنند و چنین موسیقی دل‌نوازی را ایجاد می‌کنند یا این‌که چگونه گرما از محل‌های گرم به محل‌های سرد منتقل می‌شود. ولی اول لازم بود که حسابان خودش را تغییر دهد. باید مفهوم معادلات دیفرانسیل و چیزهایی که توصیف می‌کردند، وسیع‌تر می‌شد.

معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی

وقتی که آیزاک نیوتن مدارهای بیضوی سیاره‌ها را توضیح داد و زمانی که کاترین جانسون مسیر کپسول فضایی جان گلن را محاسبه کرد، هر دوی آن‌ها دسته‌ای از معادله‌های دیفرانسیل را حل می‌کردند که *معادلات دیفرانسیل معمولی* نامیده می‌شوند. کلمه‌ی *معمولی* در این‌جا به‌معنای کوچک بودن آن نیست. این اصطلاح فنی برای معادلات دیفرانسیلی است که فقط به یک متغیر مستقل وابسته هستند.

به‌عنوان مثال، در معادلات نیوتن برای مسئله‌ی دو جسم، موقعیت سیاره تابعی از زمان بود. موقعیت سیاره از لحظه‌ای به لحظه‌ی بعد بر اساس فرمول $F = ma$ مرتب عوض می‌شد. این معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مشخص می‌کرد که در طول بازه‌ی زمانی بی‌نهایت‌کوچک بعدی، موقعیت سیاره چه تغییری خواهد کرد. در این مثال، موقعیت سیاره متغیر وابسته است، زیرا بستگی به زمان (متغیر مستقل) دارد. به همین ترتیب، در مدل آلن پرلسون برای غلظت ویروس HIV نیز زمان متغیر مستقل بود. او مدلی تهیه می‌کرد از این‌که غلظت ذرات ویروس در خون پس از تجویز داروی ضدرتروویروسی چگونه کاهش می‌یابد. در این جا نیز مسئله، تغییرات در طول زمان بود—این‌که غلظت ویروس از لحظه‌ای به لحظه بعد چه تغییری می‌کند. در این‌جا، غلظت نقش متغیر وابسته را بازی می‌کرد؛ متغیر مستقل باز هم زمان بود.

به بیان عمومی‌تر، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی توصیف می‌کند که یک چیز (موقعیت یک سیاره، غلظت یک ویروس) در نتیجه‌ی یک تغییر بی‌نهایت‌کوچک در چیز دیگر (مانند یک بازه‌ی بی‌نهایت‌کوچک زمان) چگونه به‌صورت بی‌نهایت‌کوچک تغییر می‌کند. علت این‌که به چنین معادله‌ای «معمولی» می‌گویند، این است که دقیقاً یک چیز دیگر، یعنی یک متغیر مستقل، در آن وجود دارد.

نکته‌ی جالب این است که مهم نیست چه تعداد متغیر *وابسته* داشته باشیم. مادام که فقط یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به شمار می‌رود. برای مثال، برای مشخص کردن موقعیت یک فضاپیما که در فضای سه‌بعدی حرکت می‌کند، سه عدد مورد نیاز است. فرض کنید این اعداد x، y، و z باشند. این‌ها مشخص می‌کنند که فضاپیما در یک زمان معین در کجا قرار دارد، به این صورت که محل آن را در راستای چپ یا راست، بالا یا پایین، و جلو یا عقب مشخص می‌کنند، و به ما می‌گویند که از یک نقطه‌ی مرجع به نام مبدأ چقدر فاصله دارد. در حالی که فضاپیما حرکت می‌کند، مختصات x، y، و z آن از لحظه‌ای به لحظه‌ی دیگر تغییر می‌کند. بنابراین، این‌ها توابعی از زمان هستند. برای تأکید بر وابستگی آن‌ها به زمان،

می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ بنویسیم.

معادلات دیفرانسیل معمولی برای سیستم‌های گسسته‌ی متشکل از دو یا چند جسم کاملاً مناسب هستند. این معادلات می‌توانند چگونگی حرکت را برای یک فضاپیما که دوباره وارد اتمسفر می‌شود، یک آونگ که به جلو و عقب نوسان می‌کند، و یا یک سیاره‌ی واحد که به دور خورشید می‌چرخد، توصیف کنند. فقط لازم است که هر کدام از این اجسام را به‌صورت یک شیء نقطه‌مانند ایده‌آل تصور کنیم، یک نقطه‌ی بی‌نهایت‌کوچک و بدون هر گونه امتداد فضایی. با این کار، می‌توانیم آن را به‌عنوان نقطه‌ای با مختصات $x,\ y,\ z$ در نظر بگیریم. اگر ذرات نقطه‌مانند زیادی وجود داشته باشند—مانند رمه‌ای از فضاپیماهای ریز، زنجیره‌ای از آونگ‌های متصل شده با فنر، یک منظومه‌ی شمسی متشکل از هشت یا نُه سیاره و تعداد بی‌شماری سیارک—باز همین رویکرد قابل‌استفاده است. همه‌ی این سیستم‌ها با معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شوند.

در طول سده‌های بعد از نیوتن، ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان تکنیک‌های هوشمندانه‌ی زیادی را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و لذا پیش‌بینی آینده‌ی سیستم‌های دنیای واقعی که به‌وسیله‌ی آن‌ها توصیف می‌شوند، ابداع کردند. در این تکنیک‌های ریاضی از بسط ایده‌های نیوتن درباره‌ی سری‌های توانی، ایده‌های لایبنیتس درباره‌ی دیفرانسیل، تبدیل‌های هوشمندانه‌ای که امکان استفاده از قضیه‌ی بنیادی حسابان را فراهم می‌کند، و غیره استفاده می‌شد. صنعت بسیار عظیمی بود که امروزه نیز از عظمت آن کاسته نشده است.

ولی همه‌ی سیستم‌ها گسسته نیستند—یا دست‌کم همه‌ی آن‌ها را نمی‌توان به این صورت در نظر گرفت، همان‌طور که در مثال مربوط به سیم گیتار دیدیم. در نتیجه، همه‌ی سیستم‌ها را نمی‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف کرد. برای فهمیدن این‌که چرا این کار امکان‌پذیر نیست، نگاه دیگری به کاسه‌ی سوپ خیالی خودمان که روی پیشخوان آشپزخانه سرد می‌شود، می‌اندازیم.

کاسه‌ی سوپ، در یک سطح، مجموعه‌ی گسسته‌ای از مولکول‌ها است که همگی به‌صورت بی‌نظم حرکت می‌کنند. لیکن به هیچ طریقی نمی‌توانیم آن‌ها را ببینیم، یا اندازه بگیریم، و یا حرکت آن‌ها را بسنجیم. بنابراین، هیچ‌کس ممکن نیست که با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی، سرد شدن کاسه‌ی سوپ را مدل‌سازی کند. تعداد ذراتی که باید در نظر گرفته شوند، بیش از حد زیاد است، و حرکات آن‌ها بیش از حد نامنظم، تصادفی، و غیرقابل‌تعیین است.

یک روش بسیار عملی‌تر برای توصیف این پدیده این است که سوپ را به‌عنوان

یک پیوستار در نظر بگیریم. البته این واقعاً درست نیست، ولی مفید است. در تقریب پیوستار، وانمود می‌کنیم که سوپ در هر نقطه در داخل حجم سه‌بعدی کاسه‌ی سوپ وجود دارد. دما، T، در یک نقطه‌ی داده شده‌ی (x, y, z) بستگی به زمان، t، دارد. همه‌ی اطلاعات به‌وسیله‌ی یک تابع $T(x, y, z, t)$ نمایش داده می‌شود. به‌طوری که به‌زودی می‌بینیم، معادلات دیفرانسیلی برای توصیف نحوه‌ی تغییر کردن این تابع در فضا و زمان وجود دارد. یک چنین معادله‌ی دیفرانسیلی یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی نیست. نمی‌تواند باشد، زیرا فقط وابسته به یک متغیر مستقل نیست. در حقیقت، بستگی به چهار متغیر مستقل دارد: x، y، z، و t. این نوع جدیدی است که به آن *معادله‌ی دیفرانسیل جزئی* گفته می‌شود، و علت این نام‌گذاری آن است که هر کدام از متغیرهای مستقل آن «جزئی» از نقش ایجاد کردن تغییر را بر عهده دارند.

معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار غنی‌تر از معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. آن‌ها سیستم‌های پیوسته‌ای را توصیف می‌کند که به‌صورت هم‌زمان در فضا و زمان یا در دو یا چند بعد فضا حرکت و تغییر می‌کنند. غیر از سرد شدن کاسه‌ی سوپ، شکل آویزان یک ننو نیز با چنین معادله‌ای توصیف می‌شود. به همین صورت، گسترش یک آلاینده در دریاچه یا جریان هوا بر روی بال یک هواپیمای جنگنده نیز با این‌گونه معادلات توصیف می‌شود.

حل معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار دشوار است. دشواری آن‌ها به حدی است که معادلات دیفرانسیل معمولی، که خود آن‌ها هم آسان نیستند، در مقایسه با آن‌ها مانند بازی بچه‌ها به نظر می‌رسند. با این حال، معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار اهمیت دارند. هرگاه به آسمان می‌رویم، زندگی ما به آن‌ها وابسته است.

معادلات دیفرانسیل جزئی و بوئینگ ۷۸۷

پرواز هواپیماهای مدرن یکی از اعجازهای حسابان است. ولی همیشه این‌گونه نبود؛ زمانی که اوضاع از امروز ساده‌تر بود، در سحرگاه عصر هوانوردی، نخستین ماشین‌های پرنده به تقلید از پرندگان و بادبادک‌ها، با نبوغ مهندسی و با آزمایش و خطاهای مکرر اختراع شد. مثلاً برادران رایت از اطلاعاتی که درباره‌ی دوچرخه داشتند، استفاده کردند، و یک سیستم سه‌محوری را برای کنترل کردن هواپیما در پرواز و فائق شدن بر بی‌ثباتی ذاتی آن ابداع کردند.

با این حال، به‌تدریج که هواپیماها پیشرفته‌تر شدند، این ضرورت پیش آمد که از ابزارهای پیشرفته‌تری برای طراحی آن‌ها استفاده شود. تونل‌های باد به مهندسان امکان

می‌داد که خواص آئرودینامیک دستگاه‌های پرنده را، بدون آنکه هواپیما از زمین بلند شود، مورد آزمایش قرار دهند. مدل‌های با مقیاس کوچک که در آن طراحان نمونه‌های کوچکی از هواپیماهای واقعی می‌ساختند، امکان آزمایش کردن قابلیت پرواز را بدون ساخت مدل‌های بزرگ پرهزینه با اندازه‌ی واقعی فراهم می‌کرد.

پس از جنگ جهانی دوم، مهندسان هوانوردی کامپیوتر را نیز به زرادخانه‌ی طراحی خود اضافه کردند. کامپیوترهای بزرگ لامپی که برای رمزشکنی، محاسبات توپخانه، و پیش‌بینی وضع هوا مورد استفاده قرار گرفته بود، برای کمک به ساخت هواپیماهای جت مدرن به کار گرفته شد. از کامپیوتر می‌شد برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی پیچیده، که به‌طور اجتناب‌ناپذیر در فرایند طراحی ظاهر می‌شد، استفاده کرد.

محاسبات ریاضی لازم به چند دلیل بسیار دشوار بود. اولاً شکل هندسی هواپیما بسیار پیچیده است. مثل یک کُره یا بادبادک و یا گلایدر چوبی نیست. شکل بسیار پیچیده‌تری دارد که مشتمل بر بال، بدنه، موتور، دم، فلپ، و ارابه‌ی فرود است. هر کدام از این‌ها هوا را که با سرعت از روی هواپیما عبور می‌کند، پس می‌زند. و هرگاه هوای عبوری پس زده می‌شود، نیرویی بر سطحی که آن را پس زده است، وارد می‌کند (اگر زمانی که خودرو با سرعت در بزرگراه حرکت می‌کند، کسی دست خود را از پنجره بیرون بیاورد، این نیرو را احساس خواهد کرد). اگر بال هواپیما شکل درستی داشته باشد، هوای عبوری معمولاً آن را بلند می‌کند. اگر هواپیما در باند فرودگاه با سرعت کافی در حرکت باشد، این نیرو به‌طرف بالا سبب می‌شود که هواپیما از زمین بلند شود و در هوا بماند. ولی در حالی که نیروی بالا برنده نیروی عمود بر جهت جریان ورودی هوا است، نوع دیگری از نیرو به نام پَسا در جهتی موازی با جریان عمل می‌کند. پسا مانند اصطکاک است. این نیرو در مقابل حرکت هواپیما مقاومت می‌کند و آن را کند می‌کند، و سبب می‌شود که موتورها شدیدتر کار کنند و سوخت بیشتری بسوزانند. محاسبه کردن اندازه‌ی این نیروهای بَرآ و پسا یک مسئله‌ی شدیداً دشوار حسابان است، که بسیار فراتر از توانایی هر انسانی برای حل کردن آن در شرایط واقعی شکل یک هواپیما است. با این حال، این‌گونه مسئله‌ها باید حل شود. حل آن‌ها برای طراحی هواپیما اهمیت قاطع دارد.

به‌عنوان مثال، بوئینگ ۷۸۷ دریم‌لاینر را در نظر بگیرید. در سال ۲۰۱۱، شرکت بوئینگ که بزرگ‌ترین شرکت هوافضایی جهان است، نسل جدید جت‌های متوسط خود را برای انتقال ۲۰۰ تا ۳۰۰ مسافر در پروازهای طولانی ارائه کرد. طبق اعلام شرکت، این هواپیما ۶۰ درصد کم‌صداتر و ۲۰ درصد از نظر مصرف سوخت کارآمدتر از بوئینگ ۷۶۷ است، که قرار است با این هواپیما جایگزین شود. یکی از نوآورانه‌ترین

ویژگی‌های آن استفاده از پلیمرهای تقویت شده با فیبر کربنی در بدنه و بال‌های آن بود. این مواد کامپوزیتیِ عصر فضا، از آلومینیوم، فولاد، و تیتانیوم که به‌طور معمول برای ساخت هواپیمای جت مورد استفاده قرار می‌گیرند، سبک‌تر و محکم‌ترند. از آن‌جا که این مواد از فلزات سبک‌تر هستند، لذا موجب صرفه‌جویی سوخت می‌شوند و امکان سرعت بالاتر هواپیما را نیز فراهم می‌کنند.

ولی شاید مبتکرانه‌ترین چیز درباره‌ی بوئینگ ۷۸۷، میزان پیش‌بینی ریاضی و محاسباتی صورت گرفته برای طراحی آن است که از هر هواپیمای دیگری در گذشته بسیار بیشتر است. حسابان و کامپیوتر موجب صرفه‌جویی وقت بسیار زیادی شد—شبیه‌سازی یک پیش‌نمونه‌ی جدید خیلی سریع‌تر از ساختن آن است. بوئینگ در مصرف پول هم صرفه‌جویی زیادی کرد—اجرای شبیه‌سازی‌های کامپیوتری خیلی ارزان‌تر از آزمایش‌های تونل باد است، که قیمت آن در طول چند دهه‌ی گذشته به‌شدت افزایش یافته است. داگلاس بال، مهندس ارشد فناوری‌های توانمندساز و پژوهش در شرکت بوئینگ، در مصاحبه‌ای خاطرنشان کرد که در حین فرایند طراحی برای بوئینگ ۷۶۷ در دهه‌ی ۱۹۸۰، این شرکت هفتاد و هفت پیش‌نمونه‌ی بال ساخته و آزمایش کرده است. بیست و پنج سال بعد، با استفاده از ابررایانه برای شبیه‌سازی بال‌های بوئینگ ۷۸۷، فقط لازم بود که آن‌ها هفت پیش‌نمونه‌ی بال بسازند و آزمایش کنند.

معادلات دیفرانسیل جزئی از جهات متعدد وارد این فرایند می‌شوند. مثلاً ریاضی‌دانان کاربردی بوئینگ، ضمن محاسبه‌ی برآ و پسا، با استفاده از حسابان، چگونگی خم شدن بال‌های هواپیما را هنگام حرکت هواپیما با سرعت شش‌صد مایل بر ساعت پیش‌بینی کردند. وقتی که بال هواپیما در معرض برآ قرار می‌گیرد، نیروی برآ سبب می‌شود که بال به‌طرف بالا خم شده و تاب بخورد. یک پدیده که مهندسان می‌خواهند از آن اجتناب کنند، تأثیر خطرناکی به نام بال‌لرزه‌ی هواکشسانی است، که شبیه لرزش کرکره‌ها در هنگام وزیدن نسیم از درون آن است، ولی شدت بیشتری دارد. در بهترین حالت، این ارتعاشات ناخواسته‌ی بال‌ها باعث حرکت ناهموار و ناخوشایند هواپیما می‌شوند. در بدترین حالت، نوسانات یک حلقه‌ی بازخورد مثبت ایجاد می‌کند: وقتی بال‌ها لرزش پیدا می‌کنند، جریان هوای روی آن‌ها به‌صورتی تغییر می‌کند که سبب می‌شود که لرزش آن‌ها بیشتر شود. مطالعات نشان داده است که لرزش هواکشسانی به بال‌های هواگردهای آزمایشی آسیب می‌زند و موجب شکست سازه‌ای و سقوط می‌شود. (یک نمونه‌ی آن در یک جنگنده‌ی رادارگریز لاکهید اف‌ـ۱۱۷ نایت‌هاوک حین یک نمایش هوایی اتفاق افتاد.) اگر بال‌لرزه‌ی شدید در یک پرواز تجاری اتفاق بیفتد، می‌تواند جان صدها مسافر را در معرض خطر قرار دهد.

معادلاتی که حاکم بر بال‌لرزه‌ی هواکشسانی هستند، ارتباط نزدیکی با معادلاتی دارند که قبلاً در بحث مربوط به جراحی صورت به آن‌ها اشاره کردیم. در آن‌جا، مدل‌سازان برای تقریب بافت نرم بیمار و جمجمه با استفاده از صدها هزار چندوجهی و چندضلعی جواهرشکل، از آموزه‌های ارشمیدس بهره گرفتند. به همین منوال، ریاضی‌دانان بوئینگ نیز بال را با صدها هزار مکعب، منشور، و چهار وجهی کوچک، به‌طور تقریبی مدل‌سازی کردند. این شکل‌های ساده‌تر، نقش قطعات سازنده‌ی اولیه را ایفا می‌کنند. خواص سفتی و کشسانی به هر کدام از آن‌ها اختصاص داده می‌شود، درست مانند همان مدل‌سازی جراحی صورت، و سپس قطعات سازنده در معرض فشارها و کشش‌های ناشی از بلوک‌های مجاور قرار داده می‌شوند. پاسخ هر عنصر ساده نسبت به این نیروها به کمک معادلات دیفرانسیل جزئی نظریه‌ی کشسانی پیش‌بینی می‌شود. سرانجام به یاری یک ابررایانه، همه‌ی این پاسخ‌ها ترکیب شده و ارتعاش کلی بال پیش‌بینی می‌شود.

به‌طور مشابه، برای بهینه سازی فرایند احتراق در موتورهای هواگرد نیز از معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌شود. مدل‌سازی این مسئله خیلی پیچیده است و شامل تعامل سه شاخه‌ی مختلف علم است: شیمی (سوخت در دمای بالا تحت صدها واکنش شیمیایی قرار می‌گیرد)؛ انتقال گرما (زمانی که انرژی شیمیایی به انرژی مکانیکی چرخش پره‌های توربین تبدیل می‌شود، گرما در درون موتور باز توزیع می‌شود)؛ و جریان سیال (گازهای داغ در محفظه‌ی احتراق در هم می‌پیچند، و با توجه به تلاطمی که دارند، پیش‌بینی رفتار آن‌ها مسئله‌ی بسیار دشواری است). در این‌جا هم، تیم بوئینگ از رویکرد ارشمیدس استفاده کردند—مسئله را به چند قطعه تقسیم کردند، آن را برای هر کدام از قطعات حل کردند، و دوباره قطعات را روی هم سوار کردند. این نیز به‌کارگیری اصل بی‌نهایت است، راهبرد دفاعی «تفرقه بینداز و حکومت کن»، که تمام حسابان بر پایه‌ی آن استوار است. در این‌جا، این کار به‌کمک ابررایانه و یک روش عددی به نام تحلیل اجزای محدود انجام شد. ولی در نهایت، همه‌ی این‌ها باز هم حسابان است که به‌صورت معادلات دیفرانسیل نمود پیدا می‌کند.

گستردگی و جهان‌شمولی معادلات دیفرانسیل جزئی

کاربرد حسابان در علم مدرن عمدتاً به‌صورت فرمول‌بندی، حل، و تفسیر معادلات دیفرانسیل جزئی است. معادلات ماکسول برای الکتریسیته و مغناطیس معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. همین‌گونه است قوانین کشسانی، صوت‌شناسی، انتقال گرما،

جریان سیال‌ها، و دینامیک گازها. این لیست هم‌چنان ادامه دارد: مدل بلک_شولز برای قیمت‌گذاری اختیارات مالی، مدل هاجکین_هاکسلی برای گسترش تکانه‌های الکتریکی در امتداد تارهای عصبی—همه‌ی این‌ها معادلات دیفرانسیل جزئی هستند.

حتی در خط مقدم فیزیک مدرن نیز، زیرساخت ریاضی متشکل از معادلات دیفرانسیل جزئی است. مثلاً نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین را در نظر بگیرید. این نظریه تصویر جدیدی از گرانش به‌صورت نمودی از خمیدگی بافتار چهاربعدی فضا_زمان ارائه می‌کند. در تشبیه استاندارد، گفته می‌شود که فضا_زمان را می‌توان به‌صورت یک پارچه‌ی کشیده‌ی قابل‌انعطاف، مانند سطح یک ترامپولین، تصور کرد. در حالت عادی، این پارچه سفت کشیده شده است، ولی وقتی که چیز سنگینی، مانند یک توپ بولینگ سنگین، روی آن قرار داده شود، خم می‌شود. به همین صورت، یک جسم سماوی با جرم زیاد، مانند خورشید، می‌تواند بافتار فضا_زمان را در اطراف خود خم کند. حالا یک چیز خیلی کوچک‌تر، مانند یک تیله‌ی کوچک را (که نشان‌دهنده‌ی یک سیاره است) تصور کنید که روی سطح خمیده‌ی ترامپولین می‌غلتد. از آن‌جا که سطح زیر وزن توپ بولینگ فرورفته شده است، مسیر تیله را منحرف می‌کند. به‌جای این‌که تیله روی خط راست سیر کند، مطابق سطح منحنی حرکت می‌کند، و به‌طور مکرر به دور گلوله‌ی توپ بولینگ می‌چرخد. اینشتین می‌گوید که به این خاطر است که سیاره‌ها به دور خورشید می‌گردند. آن‌ها نیرویی را احساس نمی‌کنند؛ بلکه مسیر کمترین مقاومت را در بافتار خمیده‌ی فضا_زمان دنبال می‌کنند.

این نظریه هر چقدر هم عجیب باشد، ولی هسته‌ی ریاضی آن معادلات دیفرانسیل جزئی است. همین مسئله در مورد مکانیک کوانتومی، نظریه‌ی قلمرو میکروسکوپی، صادق است. معادله‌ی حاکم بر آن، معادله‌ی شرودینگر، نیز یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی است. در فصل بعد، نگاه دقیق‌تری به این‌گونه معادلات می‌اندازیم، تا بفهمیم که این‌ها چه هستند، از کجا آمده‌اند، و چرا در زندگی روزمره‌ی ما اهمیت دارند. به‌طوری که خواهیم دید، معادلات دیفرانسیل جزئی کاری بیش از توصیف سرد شدن کاسه‌ی سوپ روی پیشخوان آشپزخانه انجام می‌دهند. آن‌ها نحوه‌ی گرم کردن نان در مایکروفر را نیز توضیح می‌دهند.

فصل ۱۰

موج‌سازی

تا قبل از اوایل قرن نوزدهم، گرما یک معما بود. کسی نمی‌دانست گرما دقیقاً چیست. آیا مایعی مانند آب است؟ واقعاً به نظر می‌رسید جریان پیدا می‌کند. ولی نمی‌توانستید آن را در دستتان بگیرید یا ببینید. می‌توانستید با سنجش مکرر دمای چیز داغی که سرد می‌شد، آن را به‌طور غیرمستقیم اندازه‌گیری کنید، ولی هیچ‌کس نمی‌دانست در درون شیئی که در حال سرد شدن است، چه اتفاقی می‌افتد.

اسرار گرما به‌وسیله‌ی مردی برملا شد که غالباً احساس سرما می‌کرد. ژان باتیست ژوزف فوریه، که در سن ده‌سالگی یتیم شده بود، در نوجوانی به آسم و سوءهاضمه مبتلا بود و رنجور به نظر می‌رسید. در بزرگسالی به این باور رسیده بود که گرما برای سلامتی ضروری است. اتاقش را زیادی گرم می‌کرد و حتی در تابستان، پالتویی ضخیم به تن می‌کرد. فوریه در تمام جنبه‌های زندگی علمی‌اش، وسواسی درباره‌ی گرما داشت. او برای اولین بار مفهوم گرمایش زمین را مطرح کرد، و نخستین کسی بود که توضیح داد که اثر گلخانه‌ای چگونه موجب تنظیم دمای متوسط زمین می‌شود.

در سال ۱۸۰۷، فوریه از حسابان برای حل معمای انتقال گرما استفاده کرد. او یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی را پیدا کرد که می‌توانست به کمک آن پیش‌بینی کند که دمای شیئی، مانند یک میله‌ی آهنی داغ گداخته، موقع سرد شدن چگونه تغییر می‌کند. جالب است که او مشاهده کرد که حتی اگر هم دمای میله در ابتدای فرایند سرد شدن در امتداد طول آن به‌صورت نامنظمی متغیر باشد، باز هم او می‌تواند این‌گونه مسئله‌ها را حل کند. در ابتدا ممکن است میله در بعضی نقاط داغ و در بعضی نقاط سرد باشد.

اشکالی ندارد—روش تحلیلی فوریه می‌توانست این مسئله را حل کند.

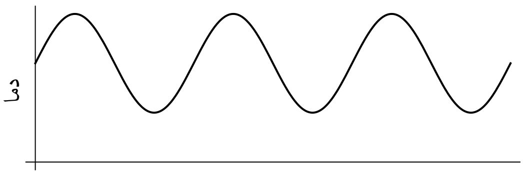
یک میله‌ی آهنی استوانه‌ای باریک بلند را تصور کنید که در کوره‌ی آهنگری به‌طور ناهمسان حرارت داده شده است، به‌طوری که لکه‌هایی از آن داغ شده و قسمت‌هایی از طول آن سرد است. برای سادگی، فرض کنید این میله با یک روکش عایق کامل پوشانده شده است، به‌طوری که حرارت نمی‌تواند فرار کند. تنها راه برای این‌که گرما انتقال پیدا کند، منتشر شدن آن در امتداد طول میله از محل‌های داغ به محل‌های سرد است. فوریه این فرض را مطرح کرد (و آزمایش‌ها هم آن را تأیید کرد) که نرخ تغییر دما در یک نقطه‌ی داده شده روی میله متناسب با اختلاف دمای آن نقطه و متوسط دمای محل‌های همسایه در دو طرف آن است. و وقتی می‌گوییم *همسایه*، منظورمان واقعاً *همسایه* است—مثلاً دو نقطه را در دو طرف نقطه‌ی مورد نظر به تصور درآورید، که هر کدام از آن‌ها به‌طور بی‌نهایت‌کوچک به آن نزدیک هستند.

در این شرایط ایده‌آل، فیزیک انتقال گرما ساده است. اگر نقطه‌ای از همسایه‌های خود سردتر باشد، گرم می‌شود. اگر داغ‌تر باشد، خنک می‌شود. هر چه اختلاف بیشتر باشد، دما با سرعت بیشتری تغییر می‌کند. اگر از قضا یک نقطه دقیقاً متوسط دمای همسایه‌های خود را داشته باشد، همه چیز به تعادل می‌رسد، گرما منتقل نمی‌شود، و دمای آن نقطه در لحظه‌ی بعد یکسان باقی می‌ماند.

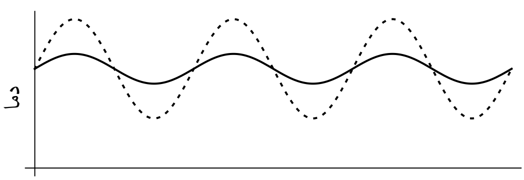
این فرایند مقایسه‌ی دمای لحظه‌ای یک نقطه با همسایه‌های آن، فوریه را به یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی رساند که امروزه به نام معادله‌ی گرما شناخته می‌شود. این معادله شامل مشتق نسبت به دو متغیر مستقل است، یکی برای تغییر بی‌نهایت‌کوچک در زمان (t) و دیگری برای تغییر بی‌نهایت‌کوچک در موقعیت (x) در امتداد میله.

قسمت دشوار مسئله‌ای که فوریه برای خودش مطرح کرد، این است که لکه‌های داغ و لکه‌های سرد باید در ابتدا به‌صورت تصادفی قرار داده شوند. برای حل یک چنین مسئله‌ی عمومی، فوریه روشی را پیشنهاد کرد که به‌طور دیوانه‌وار و تقریباً حماقت‌باری خوش‌بینانه به نظر می‌رسد. او ادعا کرد که می‌تواند هر *گونه* الگوی دمایی اولیه را با یک مجموع معادل از امواج سینوسی ساده جایگزین کند.

امواج سینوسی قطعات سازنده‌ی او بودند. بدان جهت آن‌ها را انتخاب کرده بود که مسئله را آسان‌تر می‌کردند. او می‌دانست که اگر دما در ابتدا الگوی سینوسی داشته باشد، در طول سرد شدن میله با همان الگو خواهد ماند.



این کلید مسئله بود: امواج سینوسی از بین نمی‌رفتند. همان جا می‌ماندند. درست است که با سرد شدن لکه‌های داغ و گرم شدن لکه‌های سرد، این امواج تا حدودی میرا می‌شدند، ولی این زوال را به آسانی می‌شد در نظر گرفت. این صرفاً بدان معنا بود که با گذشت زمان، تغییرات دما صاف می‌شد. همان‌طور که در نمودار زیر نشان داده شده است، یک الگوی دمایی که در ابتدا به‌صورت موج سینوسی مقطّع بود، به‌تدریج میرا می‌شد و شبیه موج سینوسی توپر می‌گردید.



مطلب مهم این بود که امواج سینوسی با وجود میرایی، هم‌چنان برقرار بودند. این‌ها *موج‌های ایستاده* بودند.

بنابراین، اگر می‌توانست راهی پیدا کند که الگوی دمایی داده شده‌ی اولیه را به امواج سینوسی تجزیه کند، می‌توانست مسئله‌ی انتقال حرارت را برای هر موج سینوسی به‌طور جداگانه حل کند. جواب این مسئله را از قبل می‌دانست: هر موج سینوسی با سرعت نمایی کاهش می‌یابد، و نرخ آن بستگی به تعداد قله‌ها و دره‌های آن دارد. امواج سینوسی که قله‌های بیشتری دارند، سریع‌تر کاهش می‌یابند، زیرا لکه‌های داغ و سرد آن‌ها در فاصله‌ی نزدیک‌تری از یکدیگر قرار گرفته بودند، که سبب می‌شد مبادله حرارت بین آن‌ها سریع‌تر باشد و لذا زودتر به تعادل برسند. ازاین‌رو، با توجه به اینکه فوریه می‌دانست که هر قطعه‌ی سازنده‌ی سینوسی چگونه کاهش می‌یابد، تنها کاری که باید می‌کرد، این بود که دوباره آن‌ها را با هم جمع کند تا به جواب مسئله‌ی اولیه برسد.

لُبّ همه‌ی این مطالب آن است که فوریه به‌طور اتفاقی یک *سری بی‌نهایت* امواج سینوسی را به کار گرفته بود. او باز غول بی‌نهایت را به حسابان فراخوانده بود، و

تازه این کار را بی‌پرواتر از پیشینیان خود انجام داده بود. او به‌جای این‌که از مجموع بی‌نهایتی از برش‌های مثلثی یا اعداد استفاده کند، دلیرانه یک مجموع بی‌نهایت امواج را به خدمت گرفته بود. این یادآور کاری بود که نیوتن با سری‌های بی‌نهایت توابع توانی x^n کرده بود، جز این‌که نیوتن هرگز ادعا نکرده بود که می‌تواند هر منحنی پیچیده‌ی دلخواهی را که مشتمل بر چیزهای وحشتناکی مانند جهش‌های ناپیوسته یا گوشه‌های تند باشد، با آن‌ها نمایش دهد. فوریه حالا دقیقاً همین ادعا را داشت—او واهمه‌ای از منحنی‌های دارای گوشه و جهش نداشت. به‌علاوه، امواج فوریه به‌طور طبیعی از خود معادله‌ی دیفرانسیل حاصل می‌شد، بدان معنا که این امواج مدهای طبیعی ارتعاش آن، یعنی الگوهای طبیعی امواج ایستاده‌ی آن بودند. این‌ها به‌طور ویژه برای انتقال گرما مورد استفاده قرار گرفته بودند. توابع توانی نیوتن ادعای خاصی به‌عنوان قطعات سازنده نداشتند؛ ولی فوریه برای امواج خود چنین ادعایی داشت. این‌ها ذاتاً برای مسئله‌ی مورد نظر مناسب بودند.

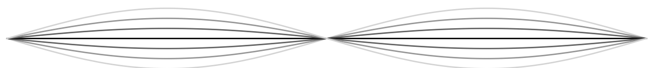
با آن‌که این استفاده‌ی متهورانه از امواج سینوسی به‌عنوان قطعات سازنده موجب برافروخته شدن آتش بحث و جدل شد و مسایل بغرنجی را در زمینه‌ی استواری منطقی پدید آورد که حل‌وفصل آن‌ها یک قرن به درازا کشید، ولی در دوران خود ما، ایده‌های بزرگ فوریه نقش ممتازی در فناوری‌هایی از قبیل مولدهای صدای کامپیوتری و تصویربرداری MRI در پزشکی داشته است.

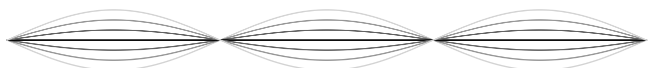
سازهای زهی

امواج سینوسی در موسیقی نیز ظاهر می‌شوند. این امواج مدهای طبیعی ارتعاش برای سیم‌های گیتار، ویولن، و پیانو هستند. می‌توان با اعمال مکانیک نیوتنی و دیفرانسیل‌های لایبنیتس برای مدل ایده‌آل یک زه کشیده شده، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی آن را به دست آورد. در این مدل، سیم به‌عنوان آرایه‌ی پیوسته‌ای از ذرات بی‌نهایت‌کوچک در نظر گرفته می‌شود که پهلو به پهلوی هم قرار گرفته‌اند و هر ذره با نیروهای کشسانی به ذره‌های همسایه چسبیده است. در هر لحظه از زمان t، هر ذره‌ی موجود در سیم بر اساس نیروهایی که بر آن وارد می‌شود، حرکت می‌کند. این نیروها بر اثر تنش سیم به‌خاطر کشش ذره‌ها بر روی یکدیگر ایجاد می‌شود. با این نیروها، هر ذره مطابق با قانون نیوتن $F = ma$ حرکت می‌کند. این در هر نقطه‌ی x در امتداد سیم اتفاق می‌افتد. بنابراین، معادله‌ی دیفرانسیل حاصله بستگی به هر دو متغیر x و t دارد، و مثال دیگری از یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی است. به آن معادله‌ی موج می‌گویند،

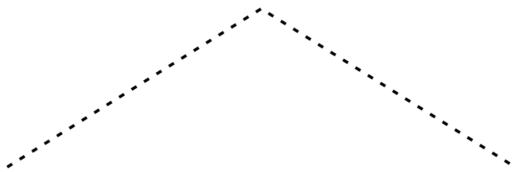
زیرا همان‌طور که انتظار می‌رود، پیش‌بینی می‌کند که حرکت معمول یک سیم در حال ارتعاش به‌صورت یک موج است.

همانند مسئله‌ی انتقال گرما، برخی امواج سینوسی هنگام ارتعاش دوباره خودشان را تولید می‌کنند، و این برای ما مفید واقع می‌شود. در صورتی که انتهاهای سیم محکم شده باشد، این امواج سینوسی منتشر نمی‌شوند؛ صرفاً بی‌حرکت می‌ایستند و در محل ارتعاش می‌کنند. در صورتی که مقاومت هوا و اصطکاک داخلی در سیم قابل چشم‌پوشی باشند، یک سیم ایده‌آل که با الگوی موج سینوسی به ارتعاش درآورده شود، برای همیشه با یک چنین الگوی موج سینوسی به ارتعاش خود ادامه خواهد داد. و بسامد ارتعاش آن هرگز تغییر نخواهد کرد. به‌خاطر همه‌ی این دلایل، امواج سینوسی به‌عنوان قطعات سازنده‌ی ایده‌آل برای این مسئله نیز عمل می‌کنند.



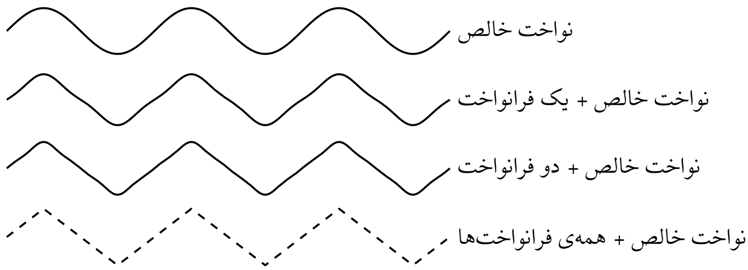


با مجموع‌های بی‌نهایت امواج سینوسی، شکل‌های ارتعاشی دیگری را نیز می‌توان ساخت. به‌عنوان مثال، در هارپسیکوردها که در قرن هجدهم رواج داشت، معمولاً یک خار زه را می‌کشید و آن را به شکل مثلثی درمی‌آورد و سپس رها می‌کرد.



با آن‌که یک موج مثلثی گوشه‌ی تندی دارد، ولی می‌توان آن را با مجموع بی‌نهایتی از امواج سینوسی کاملاً هموار نشان داد. به عبارت دیگر، برای ایجاد گوشه‌های تیز، لازم نیست حتماً گوشه‌های تیز داشته باشیم. در نمودار زیر، یک موج مثلثی که در

پایین به‌صورت مقطع نشان داده شده است، با امواج سینوسی ایجاد شده است که هر کدام به ترتیب تقریب بهتری نسبت به قبلی دارند.



تقریب اول یک موج سینوسی واحد را با بهترین دامنه‌ی ممکن نشان می‌دهد (*بهترین* بدان معنا که مقدار کل مربع خطا را نسبت به موج مثلثی کمینه‌سازی می‌کند، همان معیار بهینه‌سازی که در فصل ۴ دیدیم). تقریب دوم مجموع بهینه‌ی دو موج سینوسی است. و تقریب سوم بهترین مجموع سه موج سینوسی است. دامنه‌های امواج سینوسی بهینه تابع فرمولی هستند که فوریه کشف کرده است:

$$\text{موج مثلثی} = \sin x - \tfrac{1}{9}\sin 3x + \tfrac{1}{25}\sin 5x - \tfrac{1}{49}\sin 7x + \cdots .$$

این مجموع بی‌نهایت، سری فوریه برای موج مثلثی نامیده می‌شود. به الگوهای عددی جالب آن توجه کنید. فقط بسامدهای فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ... در امواج سینوسی ظاهر می‌شوند، و دامنه‌های متناظر آن‌ها، مربع معکوس آن عدد فرد است که علامت آن به‌صورت متناوب مثبت و منفی است. متأسفانه، من نمی‌توانم به آسانی توضیح دهم که چرا این فرمول کار می‌کند؛ باید حجم زیادی از مطالب دشوار حسابان را شخم بزنیم تا بفهمیم که این دامنه‌های جادویی از کجا آمده‌اند. ولی نکته آن است که فوریه می‌دانست چطور آن‌ها را محاسبه کند. با این کار، قادر بود یک موج مثلثی یا هر منحنی پیچیده‌ی دیگر را از امواج سینوسی ساده بسازد.

ایده‌ی بزرگ فوریه، مبنای کار سینتسایزرهای موسیقی است. برای این‌که علت آن را دریابید، صدای یک نت، مانند نت «لا» بالای «دو»ی وسط، را در نظر بگیرید. برای این‌که دقیقاً این صدا را ایجاد کنیم، می‌توانیم دیاپازونی را که برای نوسان روی بسامد ۴۴۰ سیکل بر ثانیه تنظیم شده است، به صدا درآوریم. دیاپازون شامل یک دسته و دو شاخه‌ی فلزی است. وقتی که با یک چکش لاستیکی به دیاپازون می‌زنیم، شاخه‌ها هر ثانیه ۴۴۰ بار ارتعاش می‌کنند. ارتعاش آن‌ها، هوای مجاور آن‌ها را تحریک

می‌کند. وقتی که شاخه به طرف بیرون ارتعاش می‌کند، هوا را فشرده می‌کند؛ وقتی که برمی‌گردد، هوای اطراف را رقیق‌تر می‌کند. وقتی که مولکول‌های هوا به جلو و عقب نوسان می‌کنند، یک تلاطم فشار سینوسی‌شکل ایجاد می‌کنند که گوش ما آن را به‌صورت یک نواخت خالص احساس می‌کند، یک نت «لا»ی کسالت‌آور و بی‌مزه. این صدا فاقد چیزی است که موسیقی‌دان‌ها به آن رنگ یا طنین می‌گویند. همین نت لا را می‌توانیم با ویولن یا پیانو بزنیم، و هر دوی آن‌ها صدایی طنین‌دار و گرم ایجاد می‌کنند. با آن‌که آن‌ها هم ارتعاشاتی با بسامد پایه‌ی ۴۴۰ سیکل بر ثانیه گسیل می‌کنند، ولی به‌علت این‌که هر کدام مجموعه‌ی متمایزی از فرانواخت‌ها دارند، صدای آن‌ها با یک دیاپازون یا با یکدیگر متفاوت است. این اصطلاح موسیقایی اشاره به امواجی مانند $\sin ۳x$ و $\sin ۵x$ در فرمول بالا برای موج مثلثی دارد. فرانواخت‌ها با افزودن مضارب بسامد پایه، به یک نت، رنگ اضافه می‌کنند. علاوه بر موج سینوسی با بسامد ۴۴۰ سیکل بر ثانیه، موج مثلثی ساخته شده شامل یک فرانواخت موج سینوسی در بسامد سه برابر نیز هست ($۱۳۲۰ = ۴۴۰ \times ۳$ سیکل بر ثانیه). این فرانواخت به اندازه‌ی مد پایه‌ی $\sin x$ قوی نیست. دامنه‌ی نسبی آن فقط $\frac{۱}{۹}$ دامنه‌ی موج پایه است، و مدهای فرد دیگر حتی از این هم ضعیف‌تر هستند. به اصطلاح موسیقی، این دامنه‌ها بلندی فرانواخت‌ها را مشخص می‌کنند. غنای صدای یک ویولن بستگی به ترکیب خاص فرانواخت‌های آهسته‌تر و بلندتر آن دارد.

قدرت متحد کننده‌ی ایده‌ی فوریه از آن جهت است که صدای هر آلت موسیقی را می‌توان با آرایه‌ای از بی‌نهایت دیاپازون ایجاد کرد. تنها کاری که باید بکنیم، این است که دیاپازون‌ها را با قدرت صحیح در زمان صحیح بزنیم، و با این کار، به‌طرزی باورنکردنی، صدای یک ویولن یا یک پیانو، و یا حتی یک ترومپت یا یک اوبوا ایجاد می‌شود، در حالی که ما تنها چیزی که استفاده کرده‌ایم، امواج سینوسی بی‌رنگ هستند. نخستین سینتسایزرهای الکترونیکی اساساً به این صورت عمل می‌کردند: صدای هر ابزاری را با ترکیب کردن تعداد زیادی موج سینوسی ایجاد می‌کردند.

در دوران دبیرستان، در یک کلاس موسیقی الکترونیکی شرکت کردم و تا حدودی یاد گرفتم که امواج سینوسی چه کارهایی می‌توانند بکنند. این در دوران تاریک دهه‌ی ۱۹۷۰ بود که موسیقی الکترونیکی به‌وسیله‌ی جعبه‌ی بزرگی تولید می‌شد که شبیه یک صفحه‌ی قدیمی سوئیچینگ بود. من و هم‌کلاسی‌هایم کابل‌ها را وارد جک‌های مختلف آن می‌کردیم و پیچ‌ها را کم و زیاد می‌کردیم، و با این کار امواج سینوسی، امواج مربعی، و امواج مثلثی از آن بیرون می‌آمد. تا جایی که یادم می‌آید، امواج سینوسی صدایی روشن و آشکار، مانند صدای فلوت، داشت. امواج مربعی گوش‌خراش بود،

مثل آژیر آتش‌سوزی. امواج مثلثی صدایی زنگ‌دار داشت. با یک پیچ، می‌توانستیم بسامد موج را تغییر دهیم تا زیروبمی آن را تنظیم کنیم. با یک پیچ دیگر می‌توانستیم دامنه‌ی آن را تغییر دهیم تا صدا را بلندتر یا آهسته‌تر کنیم. با وصل کردن هم‌زمان چندین کابل می‌توانستیم امواج و فرانواخت‌های آن‌ها را با ترکیبات مختلف اضافه کنیم، درست همان‌طوری که فوریه به‌صورت انتزاعی انجام داده بود، ولی برای ما این تجربه به‌صورت حسی بود. می‌توانستیم هم‌زمان با گوش کردن به امواج، شکل آن‌ها را نیز روی اسیلوسکوپ ببینیم. تمام این کارها را حالا می‌توانید در اینترنت انجام دهید. اگر چیزی مانند *صدای امواج مثلثی* را جستجو کنید، برخی صفحات نمایش تعاملی را پیدا خواهید کرد که با آن‌ها خواهید توانست چیزی را احساس کنید که گویی در کلاس درس من در سال ۱۹۷۴ نشسته‌اید، و برای تفریح با امواج بازی می‌کنید.

اهمیت کار فوریه از این جهت است که نخستین قدم را برای استفاده از حسابان به‌عنوان یک غیب‌گو برداشت که پیش‌بینی می‌کند که پیوستاری از ذرات چگونه حرکت یا تغییر می‌کند. این پیشرفت قابل‌توجهی نسبت به کارهای نیوتن درباره‌ی حرکت مجموعه‌های گسسته‌ی ذرات بود. در طول قرن‌های بعد، دانشمندان روش‌های فوریه را بسط دادند تا رفتار محیط‌های پیوسته‌ی دیگر را پیش‌بینی کنند، مانند بال‌لرزه‌ی بال بوئینگ ۷۸۷، قیافه‌ی بیمار بعد از جراحی صورت، جریان خون در سرخرگ، و غرش زمین بعد از زمین‌لرزه. امروزه این تکنیک‌ها در علم و مهندسی فراگیر هستند. از آن‌ها برای تحلیل پدیده‌های مختلفی استفاده می‌شود، مانند امواج ضربه‌ای حاصل از یک انفجار گرماهسته‌ای؛ امواج رادیویی برای ارتباطات؛ امواج گوارش در روده که امکان جذب مواد مغذی و حرکت محصولات زاید در جهت صحیح را فراهم می‌کند؛ امواج الکتریکی مرضی مغز در بیماری صرع و در رعشه‌های پارکینسون؛ و امواج تراکمی ترافیک در یک بزرگراه، که در پدیده‌ی ناراحت کننده‌ی راه‌بندان‌های خیالی مشاهده می‌شود، که در آن ترافیک بدون هر گونه دلیل مشهودی کُند می‌شود. ایده‌های فوریه و انشعابات آن‌ها امکان درک ریاضی تمام این پدیده‌های موجی را فراهم کرده است، که این کار گاه از طریق فرمول‌ها و گاه از طریق شبیه‌سازی‌های عظیم کامپیوتری انجام می‌شود، به‌طوری که می‌توانیم این پدیده‌ها را توضیح دهیم و پیش‌بینی کنیم، و در برخی از موارد، آن‌ها را کنترل کنیم یا خاتمه دهیم.

چرا امواج سینوسی

قبل از آن‌که امواج سینوسی را رها کنیم و به سراغ همتاهای دوبعدی و سه‌بعدی آن‌ها برویم، بد نیست که روشن کنیم که چه چیزی سبب شده است که این امواج این‌قدر خاص باشند. چرا که انواع دیگر منحنی‌ها هم می‌توانند به‌عنوان قطعات سازنده مورد استفاده قرار گیرند، و گاه از امواج سینوسی هم بهتر عمل می‌کنند. مثلاً برای نشان دادن ویژگی‌های محلی، از قبیل شیارهای اثر انگشت، اف‌بی‌آی از موجک‌ها استفاده می‌کند. برای بسیاری از کارهای پردازش تصویر و سیگنال در رشته‌هایی مانند تحلیل زمین‌لرزه، بازسازی و تعیین اصالت آثار هنری، و بازشناسی چهره، غالباً موجک‌ها برتر از امواج سینوسی هستند.

پس چرا امواج سینوسی این‌قدر برای حل معادله‌ی موج، معادله‌ی گرما، و دیگر معادلات دیفرانسیل جزئی مناسب هستند؟ حُسنِ آن‌ها در این است که در زمینه‌ی مشتق عملکرد خیلی خوبی دارند. به‌طور خاص، مشتق یک موج سینوسی، یک موج سینوسی دیگر است که به اندازه‌ی ربع سیکل جابه‌جا شده است. این خاصیت قابل‌توجهی است. این در مورد انواع دیگر موج صدق نمی‌کند. معمولاً وقتی مشتق یک منحنی را می‌گیریم، شکل منحنی بر اثر مشتق‌گیری دچار اعوجاج می‌شود. شکل قبل و بعد آن یکسان نیست. مشتق‌گیری یک تجربه‌ی تروماتیک برای بسیاری از منحنی‌ها است. ولی برای موج سینوسی چنین نیست. تنها صدمه‌ای که به آن می‌رسد—و البته یک صدمه‌ی واقعی هم نیست—آن است که موج سینوسی در زمان جابه‌جا می‌شود. قله‌ی آن یک ربعِ دُور زودتر از قبل فرامی‌رسد.

نمونه‌ی ناقصی از آن را در فصل ۴ در بررسی روند طول روز در شهر نیویورک در سال ۲۰۱۸ و مقایسه‌ی آن با میزان تغییر روزانه‌ی طول روز، یعنی تفاوت تعداد دقیقه‌های طول روز از روزی به روز بعد، مشاهده کردیم. دیدیم که هر دو منحنی تقریباً سینوسی به نظر می‌رسند، جز این‌که اختلاف طول روز از روزی به روز بعد موجی تشکیل می‌داد که نسبت به داده‌های اولیه‌ای که از آن حاصل شده بود، سه ماه جلو افتاده بود. به بیان ساده، طولانی‌ترین روز سال ۲۰۱۸، روز ۲۱ ژوئن [۳۱ خرداد] بود، در حالی که بیشترین سرعت طولانی‌تر شدن روز سه ماه قبل، در روز ۲۰ مارس [۲۹ اسفند] اتفاق افتاده بود. این همان چیزی است که از داده‌های سینوسی انتظار می‌رود. اگر داده‌های طول روز یک موج سینوسی *کامل* می‌بود، و اگر تفاوت آن را، نه از روزی به روز بعد، بلکه از *لحظه‌ای* به لحظه‌ی بعد در نظر می‌گرفتیم، آنگاه نرخ لحظه‌ای تغییر آن (موج «مشتق» به دست آمده از آن) باز یک موج سینوسی می‌بود که

دقیقاً یک چهارم دور زودتر اتفاق می‌افتاد. در فصل ۴ این را نیز دیدیم که این ربع دور جابه‌جایی به چه علت اتفاق می‌افتد. این جابه‌جایی از پیوند عمیق بین امواج سینوسی و حرکت دایره‌ای یکنواخت سرچشمه می‌گیرد. (اگر یادتان رفته، بد نیست دوباره نگاهی به آن بحث بیندازید.)

جابه‌جایی ربع دور، پیامد بسیار جالبی دارد. معنای ضمنی آن این است که اگر دو بار از موج سینوسی مشتق بگیریم، دو بار ربع دور جلو می‌افتد. بنابراین، در مجموع، *نصف* دور جلوتر واقع می‌شود. این بدان معنا است که جایی که قبلاً قله‌ی موج بوده، حالا یک دره است، و بر عکس. موج سینوسی وارونه می‌شود. به اصطلاح ریاضی، این مطلب با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x\right) = -\sin x$$

که در این‌جا نماد لایبنیتسی مشتق‌گیری $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ یعنی «از چیزی که در طرف راست قرار گرفته است، مشتق بگیر». این فرمول نشان می‌دهد که دو بار مشتق گرفتن از $\sin x$ به‌سادگی برابر با ضرب کردن آن در ۱− است. این جایگزینی مشتق با یک ضرب ساده، کار را به‌طور شگفت‌انگیزی ساده می‌کند. دو بار مشتق‌گیری عملی در سطح بالای حسابان است، در حالی که ضرب کردن در ۱− عملی در سطح حساب دوره‌ی اول متوسطه است.

شاید بپرسید که اصلاً چرا باید از چیزی دو بار مشتق بگیریم؟ زیرا طبیعت این کار را انجام می‌دهد، و همیشه هم انجام می‌دهد. یا به عبارت دیگر، *مدل‌های* ما از طبیعت همیشه این کار را انجام می‌دهند. مثلاً در قانون حرکت نیوتن، $F = ma$، شتاب a شامل دو مشتق است. برای فهمیدن علت آن، اگر یادتان باشد، شتاب مشتق سرعت است، و سرعت مشتق مسافت. بنابراین، شتاب مشتق *مشتق* مسافت، یا به بیان دقیق‌تر، مشتق دوم مسافت است. مشتق دوم در فیزیک و مهندسی در جاهای مختلف ظاهر می‌شود. غیر از معادله‌ی نیوتن، در معادله‌ی گرما و معادله‌ی موج نیز نقش مهمی دارد.

پس *به این خاطر* است که امواج سینوسی برای این معادله‌ها تا این حد مناسب هستند. در امواج سینوسی، دو بار مشتق گرفتن معادل با ضرب کردن در ۱− است. عملاً چیزهایی که در حسابان موجب می‌شود که تحلیل معادلات گرما و موج این‌قدر دشوار باشد، در صورتی که توجه خود را به امواج سینوسی محدود کنیم، دیگر مشکلی نخواهد داشت. به‌جای عمل‌های حسابان، ضرب قرار می‌گیرد. این است که سبب

می‌شود که حل مسئله‌ی ارتعاش سیم و مسئله‌ی انتقال گرما برای امواج سینوسی این‌قدر آسان‌تر باشد. اگر بتوانیم از امواج سینوسی یک منحنی دلخواه بسازیم، آن منحنی هم خصوصیات مطلوب آن‌ها را به ارث خواهد برد. تنها عیبش این است که برای ساختن یک منحنی دلخواه، لازم است که تعداد بی‌نهایت موج سینوسی را با هم جمع کنیم، ولی ارزش این هزینه‌ی اندک را دارد.

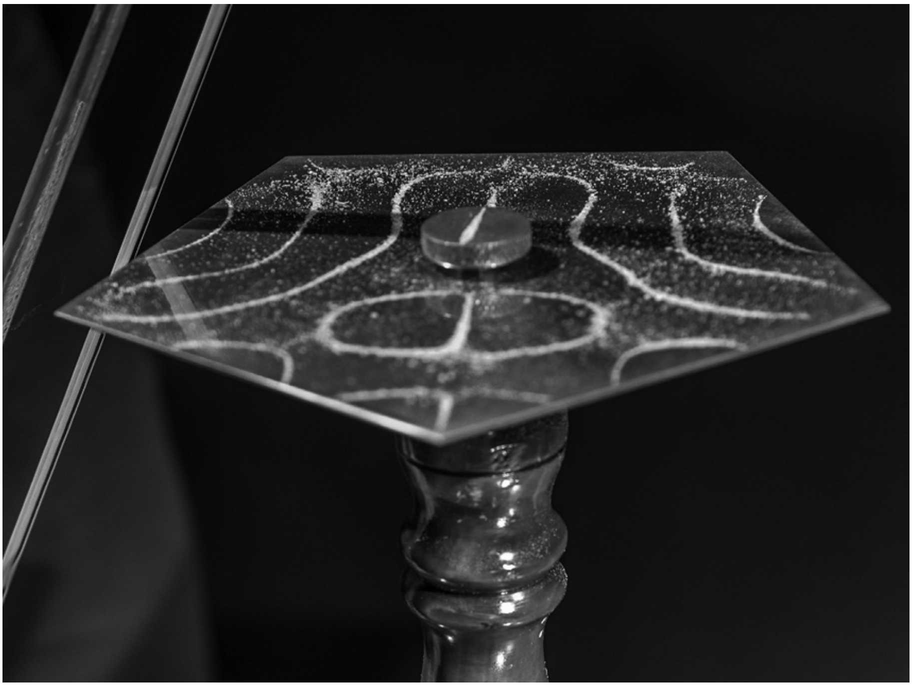
این علت اهمیت خاص امواج سینوسی از دیدگاه حسابان است. ولی فیزیک‌دان‌ها دیدگاه دیگری دارند که بد نیست آن را هم درک کنیم. از نظر یک فیزیک‌دان، ویژگی مهم امواج سینوسی (در ارتباط با مسایل ارتعاش و انتقال گرما) آن است که *امواج ایستاده* تشکیل می‌دهند. آن‌ها در طول سیم یا میله حرکت نمی‌کنند. در جای خود باقی می‌مانند. به بالا و پایین نوسان می‌کنند، ولی هرگز منتشر نمی‌شوند. حتی جالب‌تر این‌که امواج ایستاده با یک بسامد منحصر به فرد ارتعاش می‌کنند. این ویژگی کمیابی در دنیای امواج است. اکثر امواج ترکیبی از بسامدهای متعددی هستند، درست همان‌طور که نور سفید ترکیبی از تمام رنگ‌های رنگین‌کمان است. از این نظر، موج ایستاده خالص است، و مخلوط نیست.

مصورسازی مدهای ارتعاش: الگوهای کلادنی

صدای گرم یک گیتار و صدای نالان یک ویولن همه در ارتباط با ارتعاشاتی است که در دل ابزار موسیقی، در چوب و حفره‌های درون آن، ایجاد می‌شود، و امواج صوتی در آن می‌پیچد و تشدید می‌شود. این الگوهای ارتعاشی کیفیت و صدای آلت موسیقی را تعیین می‌کنند. این یکی از دلایلی است که یک ویولن استرادیواریوس از چنان امتیاز خاصی برخوردار است، به‌علت الگوهای ارتعاش منحصر به فرد و به‌یادماندنی چوب و هوای آن. ما هنوز دقیقاً نمی‌دانیم چه چیزی سبب می‌شود که بعضی از ویولن‌ها صدایی بهتر از دیگران داشته باشند، ولی کلید آن باید در مدهای ارتعاش آن باشد.

در سال ۱۷۸۷، ارنست کلادنی، فیزیک‌دان و سازنده‌ی آلات موسیقی آلمانی، مقاله‌ای را منتشر کرد که راه هوشمندانه‌ای را برای مصورسازی این الگوهای ارتعاش نشان می‌داد. ولی به‌جای این‌که از شکل پیچیده‌ای مانند گیتار یا ویولن استفاده کند، ابزار بسیار ساده‌تری را برای نواختن انتخاب کرد—یک صفحه‌ی فلزی نازک—به این صورت که کمان ویولن را بر لبه‌ی آن کشید. به این طریق، او موفق شد صفحه را به ارتعاش و آواز دربیاورد (تا حدودی مانند یک جام شراب نیمه‌پر که می‌توانید آن را با کشیدن انگشت به دور لبه‌ی آن به آواز درآورید). برای مصورسازی ارتعاشات، قبل از

کشیدن کمان، گرد ظریفی از ماسه را روی صفحه پاشید. وقتی که به صفحه ضربه می‌زد، در قسمت‌هایی که بیشترین ارتعاش را داشت، ذرات ماسه بلند می‌شد، و در بخش‌هایی که ارتعاش نمی‌کرد، رسوب می‌کرد. منحنی‌های حاصله را امروزه الگوهای کلادنی می‌نامند.



شاید نمایشی از الگوهای کلادنی را در موزه‌های علمی دیده باشید. یک صفحه‌ی فلزی را روی بلندگو قرار می‌دهند و روی آن ماسه می‌پاشند، سپس آن را با یک مولد سیگنال الکترونیکی به ارتعاش درمی‌آورند. وقتی که بسامد صدایی که از بلندگو خارج می‌شود، تنظیم شد، می‌توان صفحه را به‌گونه‌ای تحریک کرد که الگوهای تشدید مختلفی را ایجاد کند. هرگاه بلندگو در بسامد تشدید جدیدی تنظیم می‌شود، ماسه‌ها به‌صورت الگوی موج ایستاده‌ی درمی‌آید. صفحه به‌صورت نواحی مجاوری تقسیم می‌شود که در جهات متضاد ارتعاش می‌کنند، و در بینابین آن‌ها منحنی‌های گرهی واقع می‌شوند که در آن‌ها صفحه بی‌حرکت باقی می‌ماند.

شاید عجیب به نظر برسد که برخی از بخش‌های صفحه حرکت نمی‌کنند. ولی این نباید مایه‌ی تعجب باشد. همین موضوع را با امواج سینوسی در یک سیم گیتار نیز دیدیم. نقاطی که در آن سیم حرکت نمی‌کند، گره‌های ارتعاش هستند. در یک صفحه

نیز گره‌های مشابهی وجود دارند، ولی نقطه‌های مجزایی نیستند. بلکه به یکدیگر متصل می‌شوند و خطوط و منحنی‌های گرهی را تشکیل می‌دهند. این‌ها منحنی‌هایی هستند که کلادنی در آزمایش‌های خود آن‌ها را آشکار کرد. در آن زمان، این‌ها به‌قدری حیرت‌انگیز به نظر می‌رسید که کلادنی را دعوت کردند که آن‌ها را برای خود امپراتور ناپلئون نمایش دهد. ناپلئون که مقداری ریاضیات و مهندسی خوانده بود، به اندازه‌ای تحت تأثیر قرار گرفت که مسابقه‌ای ترتیب داد و بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان اروپا را به چالش کشید تا الگوهای کلادنی را توضیح دهند.

ابزارهای ریاضی لازم در آن زمان هنوز وجود نداشت. ریاضی‌دان برجسته‌ی اروپا در آن زمان، ژوزف لویی لاگرانژ، احساس می‌کرد که این مسئله فراتر از دسترس است و هیچ‌کس آن را حل نخواهد کرد. در واقع، فقط یک نفر سعی کرد آن را حل کند. نام او سوفی ژرمن بود.

شهامت شرافتمندانه

سوفی ژرمن در سن پایین حساب را خودش یاد گرفته بود. او که دختر خانواده‌ی ثروتمندی بود، پس از خواندن کتابی درباره‌ی ارشمیدس در کتابخانه‌ی پدرش، شیفته‌ی ریاضیات شده بود. وقتی که پدر و مادرش فهمیدند که او به ریاضیات عشق می‌ورزد و شب‌ها تا دیروقت بیدار می‌ماند تا روی آن کار کند، شمع‌هایش را گرفتند، آتش اتاق‌اش را خاموش کردند، و جامه‌های خوابش را از او ستاندند. سوفی بر کار خود اصرار کرد. خودش را شب‌ها در لحاف می‌پیچید و در روشنایی شمع‌هایی که دزدکی پیدا می‌کرد، به کار ادامه می‌داد. سرانجام خانواده‌اش کوتاه آمدند و به کارهای او رضایت دادند.

ژرمن، مانند تمام زنان آن دوران، اجازه نداشت به دانشگاه برود، بنابراین، خودش به یاد گرفتن ادامه داد، و گاه جزوه‌های دروس مدرسه‌ی پلی‌تکنیک را که در آن نزدیکی بود، با نام مُسیو آنتوان_اگوست لوبلان، دانشجویی که از این مدرسه خارج شده بود، می‌گرفت. مدیران دانشگاه که از رفتن لوبلان خبر نداشتند، هم‌چنان جزوات و دفترچه‌ی تمرین‌ها را برای او چاپ می‌کردند. ژرمن جواب‌ها را به اسم لوبلان تحویل می‌داد، تا آن‌که یکی از استادان دانشگاه، لاگرانژ بزرگ، متوجه شد که عملکرد تحصیلی مسیو لوبلان که قبلاً خیلی افتضاح بود، به‌طور قابل‌توجهی بهتر شده است. لاگرانژ درخواست کرد که لوبلان نزد او بیاید و با کمال حیرت و مسرت متوجه هویت واقعی او شد. او ژرمن را زیر پر و بال خود گرفت.

نخستین فتوحات او در زمینه‌ی نظریه‌ی اعداد بود، که در آن ژرمن خدماتی را در

ارتباط با یکی از دشوارترین مسایل حل نشده‌ی این رشته، موسوم به آخرین قضیه‌ی فرما، انجام داد. وقتی که ژرمن احساس کرد که کشف بزرگی کرده است، نامه‌ای به بزرگ‌ترین دانشمند نظریه‌ی اعداد در جهان (و یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان تمام اعصار)، کارل فریدریش گاوس، نوشت، و این بار هم از نام مستعار آنتوان لوبلان استفاده کرد. گاوس کارهای درخشان مخاطب اسرارآمیز خود را تحسین کرد، و تا سه سال نامه‌های مشتاقانه‌ای را با یکدیگر ردوبدل کردند. یک روز در سال ۱۸۰۶، اوضاع به تیرگی گرایید، و حوادثی پیش آمد که جان گاوس را در معرض تهدید قرار داد. ارتش ناپلئون به پروس حمله کرده بودند و زادگاه گاوس، برونزویک، را گرفته بودند. ژرمن به کمک ارتباطات خانوادگی که داشت، نامه‌ای را به یکی از دوستانش که ژنرال ارتش فرانسه بود، نوشت، و از او خواست که امنیت گاوس را تضمین کند. وقتی که خبر به گاوس رسید که با مداخله‌ی شخصی به نام مادموازل سوفی ژرمن، جان او در امان مانده است، او ممنون و حیرت‌زده شد، چون کسی را به این نام نمی‌شناخت. ژرمن در نامه‌ی بعدی‌اش نقاب از چهره برداشت. گاوس متحیر شد که تمام این مدت مشغول مکاتبه با یک زن بوده است. او با توجه به عمق معلومات ژرمن و با التفات به تعصبات و موانعی که لابد با آن‌ها مواجه بوده است، به او گفت که او «بدون تردید شهامتی شرافتمندانه، استعدادی کاملاً خارق‌العاده، و نبوغی متعالی» دارد.

بنابراین، زمانی که خبر مسابقه برای حل معمای الگوهای کلادنی به گوش ژرمن رسید، این چالش را پذیرفت. او تنها کسی بود که شجاعت آن را داشت که تلاش کند نظریه‌ی لازم برای حل این مسئله را از صفر ایجاد کند. راه‌حل او شامل ایجاد زیررشته‌ی جدیدی از مکانیک بود، به نام نظریه‌ی کشسانی برای صفحه‌های مسطح نازک دوبعدی، که بسی فراتر از نظریه‌های بسیار ساده‌تر قبلی برای رشته‌ها و باریکه‌های یک‌بعدی بود. او این نظریه را بر مبنای اصول نیرو و جابه‌جایی و انحنا ایجاد کرد، و با استفاده از تکنیک‌های حسابان، معادلات دیفرانسیل جزئی مناسب را برای صفحات مرتعش کلادنی و الگوهای شگفت‌انگیزی که ایجاد می‌کردند، نوشت و حل کرد. ولی با توجه به شکاف‌هایی در تحصیلات ژرمن وجود داشت و آموزش رسمی ندیده بود، راه‌حل پیشنهادی او حاوی نقایصی بود که داوران متوجه آن شدند. آن‌ها احساس کردند که مسئله به‌طور کامل حل نشده است، و مسابقه را برای دو سال تمدید کردند، و پس از آن هم دوباره برای دو سال دیگر تمدید کردند. در سومین تلاش، جایزه را به ژرمن اهدا کردند، و او نخستین زنی شد که به افتخار دریافت جایزه از آکادمی علوم پاریس نایل شده است.

اجاق‌های مایکروویو

الگوهای کلادنی به ما امکان می‌دهند که امواج ایستاده را در دو بعد به تصویر درآوریم. در زندگی روزمره، زمانی که از مایکروفر استفاده می‌کنیم، نوع سه‌بعدی الگوهای کلادنی به کار ما می‌آید. درون مایکروفر یک فضای سه‌بعدی است. وقتی که دکمه‌ی شروع را می‌زنید، یک الگوی موج ایستاده از کهموج‌ها درون مایکروفر را پر می‌کند. با آن‌که نمی‌توانید این ارتعاشات الکترومغناطیسی را با چشم ببینید، ولی می‌توانید آن‌ها را به‌طور غیرمستقیم با تقلید از همان کاری که کلادنی با ماسه انجام داد، به تصویر بکشید.

یک بشقاب قابل استفاده در مایکروفر بردارید و روی آن را با لایه‌ی نازکی از پنیر پرورده‌ی رنده شده بپوشانید (یا این‌که می‌توانید از هر چیزی که روی آن قرار می‌گیرد و به‌آسانی ذوب می‌شود، استفاده کنید، مانند ورقه‌ی نازکی از شکلات و یا پاشیدن مقداری پف‌نبات ریز). قبل از آن‌که بشقاب را داخل مایکروفر قرار دهید، حتماً صفحه‌ی گردان آن را بیرون بیاورید. این کار خیلی مهم است، چون باید بشقاب پنیر (یا هر چیز دیگری که استفاده می‌کنید) بی‌حرکت باشد، تا لکه‌های داغ روی آن مشخص شود. وقتی که صفحه‌ی گردان را خارج کردید و بشقاب را داخل مایکروفر گذاشتید، در مایکروفر را ببندید و آن را روشن کنید. بگذارید مایکروفر به مدت سی ثانیه کار کند، ولی بیشتر نه. بعد بشقاب را بیرون بیاورید. خواهید دید که در بعضی جاها پنیر به‌طور کامل ذوب شده است. این‌ها نقاط داغ هستند، و متناظر با پادگره‌های الگوی مایکروفر هستند، یعنی جاهایی که ارتعاشات بیشترین شدت را دارند. این‌ها مانند قله‌ها و دره‌های یک موج سینوسی هستند، و یا مانند محل‌هایی در الگوی کلادنی هستند که ماسه وجود *ندارد* (به‌خاطر این‌که نوسانات قوی ماسه را جابه‌جا کرده است).

برای یک مایکروفر استاندارد که با بسامد ۲٫۴۵ گیگاهرتز کار می‌کند (یعنی امواج آن ۲٫۴۵ میلیارد بار در ثانیه ارتعاش می‌کنند)، خواهید دید که فاصله‌ی بین لکه‌های ذوب شده‌ی مجاور حدود دو و نیم اینچ، یا شش سانتی‌متر، است. در نظر داشته باشید که این فقط فاصله‌ی بین یک قله تا یک دره است، یعنی برابر با *نصف* یک طول موج است. برای این‌که طول موج کامل را به دست آوریم، باید این فاصله را دو برابر کنیم. لذا طول موج الگوی ایستاده در مایکروفر حدود پنج اینچ، یا دوازده سانتی‌متر، است.

جالب است که از مایکروفر برای محاسبه‌ی سرعت نور نیز می‌توان استفاده کرد. اگر بسامد ارتعاش را (که روی در مایکروفر نوشته شده است) در طول موج به دست آمده از این آزمایش ضرب کنید، سرعت نور یا رقمی بسیار نزدیک به آن به

دست می‌آید. مثلاً با اعدادی که من ارائه کردم، محاسبه به‌صورت زیر است: بسامد ۲/۴۵ سیکل بر ثانیه است. طول موج ۱۲ سانتی‌متر (برای هر سیکل) است. با ضرب کردن آن‌ها، به دست می‌آید ۲۹/۳ سانتی‌متر بر ثانیه. این بسیار نزدیک به‌سرعت پذیرفته شده‌ی نور، یعنی ۳۰ میلیارد سانتی‌متر بر ثانیه است. برای یک چنین اندازه‌گیری تقریبی‌ای بدک نیست.

چرا در گذشته به مایکروفر بُرد رادار می‌گفتند؟

در پایان جنگ جهانی دوم، شرکت رِیتِئون به دنبال کاربردهای جدیدی برای مگنِترون‌ها، یعنی لامپ‌های خلأ پرقدرت خود که در رادار به کار می‌رفت، می‌گشت. مگنترون مشابه الکترونیکی یک سوت است. همان‌گونه که سوت امواج صوتی می‌فرستد، مگنترون امواج الکترومغناطیسی ارسال می‌کند. وقتی که این امواج از روی هواپیمایی که از بالای سر پرواز می‌کند، باز تابیده می‌شود، می‌توان فاصله و سرعت آن را تعیین کرد. امروزه از رادار برای ردیابی سرعت چیزهای مختلف، از کشتی و خودروهای متخلف سرعتی گرفته تا توپ فوتبال، ضربه‌ی تنیس، و الگوهای آب‌وهوایی استفاده می‌شود.

پس از جنگ، در سال ۱۹۴۶، ریتئون نمی‌دانست با مگنترون‌های زیادی که داشت تولید می‌کرد، چه باید بکند. مهندسی به نام پِرسی اسپِنسِر یک روز متوجه شد که وقتی داشت با مگنترون کار می‌کرد، یک قالب اسنک بادام‌زمینی که در جیب داشت، تبدیل به توده‌ی خمیری چسبناکی شده است. او متوجه شد که کهموج‌هایی که از آن گسیل می‌شود، می‌تواند غذا را به‌طور مؤثری گرم کند. برای بررسی بیشتر این فکر، مگنترون را به طرف یک تخم‌مرغ گرفت، و تخم‌مرغ به‌قدری داغ شد که توی صورت یکی از افراد، منفجر شد. به‌علاوه، اسپنسر نشان داد که می‌تواند با آن ذرت بو داده درست کند. به‌خاطر همین ارتباط بین رادار و کهموج‌ها است که نخستین اجاق‌های کهموجی، برد رادار نامیده می‌شد. مایکروفر تا اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ از نظر تجاری به موفقیت نرسید. مایکروفرهای اولیه خیلی بزرگ، تقریباً به ارتفاع شش فوت، بودند، و شدیداً گران‌قیمت بودند، به‌طوری که قیمت آن‌ها به پول امروز به ده‌ها هزار دلار می‌رسید. ولی نهایتاً مایکروفر به‌قدری کوچک و ارزان شدند که خانواده‌های معمولی هم توان خریدن آن‌ها را پیدا کردند. امروزه دست‌کم ۹۰ درصد خانوارها در کشورهای صنعتی از آن‌ها استفاده می‌کنند.

داستان رادار و مایکروفر شاهدی بر به‌هم‌پیوستگی علم است. ببینید که چه

چیزهایی در ساخت آن نقش داشته است: فیزیک، مهندسی برق، علم مواد، شیمی، و سرانجام، همان اختراع غیرمنتظره. حسابان نیز نقش مهمی در آن ایفا کرد. حسابان زبان مناسب برای بیان امواج و ابزارهای لازم برای تحلیل آن‌ها را ارائه کرد. معادله‌ی موج، که به‌عنوان محصول فرعی موسیقی در ارتباط با ارتعاش سیم‌ها کشف شد، نهایتاً از سوی ماکسول برای پیش‌بینی وجود امواج الکترومغناطیسی مورد استفاده قرار داد. از آنجا که با پرشی کوتاه به لامپ‌های خلأ، ترانزیستور، کامپیوتر، رادار، و مایکروفرها رسیدیم. در طول این مسیر، روش‌های فوریه یک ابزار ضروری بود. و به‌طوری که خواهیم دید، تکنیک‌های او در کشف کاربرد جدیدی برای امواج الکترومغناطیسی پرانرژی نیز نقش ایفا کرد. این امواج بسیار پرانرژی‌تر در آغاز قرن بیستم به‌طور تصادفی کشف شدند. کسی درست نمی‌دانست چه هستند، ازاین‌رو، به افتخار مجهول ریاضیات، نام آن‌ها را پرتوهای X گذاشتند.

برش‌نگاری کامپیوتری و تصویربرداری مغز

امواج مایکروویو برای آشپزی به درد می‌خورند، اما پرتوهای ایکس برای دیدن داخل بدن به کار می‌آیند. با استفاده از این پرتوها، امکان تشخیص غیرتهاجمی شکستگی استخوان‌ها، شکستگی جمجمه، و خمیدگی ستون فقرات فراهم می‌شود. متأسفانه، پرتوهای ایکس متعارف که روی فیلم‌های سیاه و سفید ثبت می‌شوند، نسبت به تغییرات ظریف در تراکم بافت‌ها حساس نیستند. این سبب می‌شود که فایده‌ی آن‌ها برای بررسی بافت‌های نرم و اعضای داخلی بدن محدود باشد. یک روش مدرن‌تر تصویربرداری پزشکی، به نام برش‌نگاری کامپیوتری یا سی‌تی_اسکن، صدها برابر حساسیت بیشتری نسبت به عکس‌های متعارف پرتو ایکس دارد. دقت این روش موجب تحولی در دنیای پزشکی شده است.

در اصطلاح CT_اسکن، حرف C مخفف *computerized* (*کامپیوتری*) و حرف T مخفف *tomography* (*برش‌نگاری*) است. در سی‌تی_اسکن، با استفاده از پرتوهای ایکس از یک عضو یا بافت بدن به‌صورت برش‌های متعدد تصویر تهیه می‌شود. زمانی که بیماری درون اسکنر CT قرار داده می‌شود، پرتوهای ایکس از زاویه‌های متعدد از بدن بیماری عبور داده می‌شود و در طرف دیگر با یک آشکارساز ثبت می‌شود. با استفاده از تمام این اطلاعات—تمام این نماها با زاویه‌های متفاوت—می‌توان چیزی را که پرتوهای ایکس از آن عبور کرده است، به‌صورت بسیار روشن‌تری بازسازی کرد. به عبارت دیگر، سی‌تی_اسکن فقط به دیدن مربوط نمی‌شود؛

بلکه در ارتباط با استنباط، استنتاج، و محاسبه نیز هست. در واقع، هوشمندانه‌ترین و انقلابی‌ترین جزء سی‌تی_ اسکن، استفاده‌ی آن از ریاضیات پیشرفته است. نرم‌افزار سی‌تی_ اسکن به یاری حسابان، تحلیل فوریه، پردازش سیگنال، و کامپیوتر، خواص بافت، عضو، یا استخوان را که پرتوهای ایکس از آن عبور کرده است، استنباط می‌کند، و سپس تصویری با جزئیات بالا را از آن بخش از بدن ایجاد می‌نماید.

برای درک این‌که حسابان چه نقشی در تمام این‌ها ایفا می‌کند، ابتدا باید ببینیم که سی‌تی_ اسکن چه مشکلی را و چگونه حل می‌کند.

فرض کنید باریکه‌ای از پرتو ایکس را از درون بافت مغز عبور می‌دهید. پرتوهای ایکس در این مسیر از ماده‌ی خاکستری، ماده‌ی سفید، و احیاناً تومورهای مغزی، لخته‌های خونی، و غیره، عبور می‌کند. این بافت‌ها به درجات متغیر، که بستگی به نوع بافت دارد، انرژی پرتوهای ایکس را جذب می‌کنند. هدف سی‌تی_ اسکن نقشه‌برداری از الگوی جذب در تمام قطعه است. سی‌تی_ اسکن بر اساس این اطلاعات می‌تواند مشخص کند که تومورها یا لخته‌ها در کجا قرار گرفته‌اند. سی‌تی_ اسکن مستقیماً مغز را نمی‌بیند؛ بلکه الگوی جذب پرتو ایکس در مغز را می‌بیند.

محاسبات ریاضی آن به این صورت است. زمانی که پرتو ایکس از نقطه‌ی مشخصی از درون مغز عبور می‌کند، مقداری از شدت خود را از دست می‌دهد. این کاهش شدت مانند زمانی است که نور معمولی از یک عینک عبور می‌کند و شدت آن کمتر می‌شود. پیچیدگی کار در مورد سی‌تی_ اسکن، این است که در این‌جا انواع متفاوتی از بافت مغز در مسیر پرتو ایکس قرار دارند، بنابراین، بافت‌ها مانند یک سری عینک عمل می‌کنند که هر کدام جلوی دیگری قرار گرفته‌اند و هر کدام کدورت متفاوتی دارند. به‌علاوه، ما کدورت هیچ‌کدام از عینک‌ها را نمی‌دانیم؛ این همان چیزی است که می‌خواهیم تعیین کنیم!

به‌خاطر این تغییرپذیری در خواص جذب بافت‌های مختلف، وقتی که پرتوهای ایکس از مغز خارج می‌شود و به آشکارساز در طرف دیگر می‌رسد، شدت آن به مقادیر متغیری در طول مسیر کاهش می‌یابد. برای محاسبه‌ی تأثیر خالص این کاهش‌ها، باید ببینیم در هر قدم بی‌نهایت‌کوچک در طول این مسیر شدت پرتوهای ایکس چقدر کاهش یافته است، و سپس همه‌ی این نتایج را به‌طور مناسبی با هم جمع کنیم. این محاسبه معادل با یک انتگرال است.

ظاهر شدن حساب انتگرال در این‌جا نباید برای ما تعجب‌آور باشد. حساب انتگرال طبیعی‌ترین راه برای قابل‌حل کردن یک مسئله‌ی بسیار پیچیده است. مثل همیشه به اصل بی‌نهایت متوسل می‌شویم. اول، تصور می‌کنیم که مسیر پرتوهای ایکس را به

بی‌نهایت قدم بی‌نهایت‌کوچک تقسیم کرده‌ایم، بعد نگاه می‌کنیم ببینیم که در هر قدم شدت آن‌ها چقدر کاهش می‌یابد، و سرانجام همه‌ی جواب‌ها را دوباره سر هم می‌کنیم تا میزان کاهش خالص در امتداد مسیر داده شده به دست آید.

متأسفانه وقتی تمام این کار را انجام دادیم، تازه فقط یک قطعه از اطلاعات را به دست می‌آوریم. میزان کل کاهش پرتوهای ایکس را در امتداد مسیر خاصی که پرتوهای ایکس دنبال کرده است، می‌دانیم. این چیز زیادی درباره‌ی کل مغز به ما نمی‌گوید. حتی درباره‌ی همان مسیر خاصی هم که پرتوهای ایکس طی کرده است، چیز زیادی به ما نمی‌گوید. فقط میزان کاهش خالص در امتداد خط را به ما می‌گوید، نه الگوی نقطه‌به‌نقطه‌ی کاهش در امتداد آن را.

برای این‌که دشواری این کار را بهتر توضیح دهم، از یک تشبیه استفاده می‌کنم: فکرش را بکنید که به چند طریق می‌توانیم اعداد را با هم جمع کنیم تا حاصل آن ۶ شود. همان‌طور که عدد ۶ می‌تواند از ۵ + ۱ یا ۴ + ۲ و یا ۳ + ۳ حاصل شود، میزان کاهش خالص پرتوهای ایکس نیز می‌تواند از توالی‌های متفاوت زیادی از کاهش‌های محلی حاصل شود. مثلاً ممکن است یک کاهش بالا در ابتدای خط وجود داشته باشد، و کاهش پایین در انتهای آن. یا این‌که ممکن است بر عکس این باشد. شاید هم اصلاً سطح کاهش در تمام مسیر در حد متوسط و ثابت باشد. به هیچ طریقی نمی‌توانیم فقط با یک اندازه‌گیری بین این حالت‌های مختلف افتراق قایل شویم.

با این حال، وقتی که علت مشکل را فهمیدیم، بلافاصله راهی برای حل آن به ذهن ما می‌رسد. باید پرتوهای ایکس را در امتداد *چندین* راستای متفاوت گسیل کنیم. این اساس برش‌نگاری کامپیوتری است. با گسیل کردن پرتوهای ایکس در راستاهای متعدد از یک نقطه‌ی یکسان بافت و سپس تکرار کردن این اندازه‌گیری برای نقطه‌های مختلف، اصولاً قادر خواهیم بود ضریب کاهش را در همه جای مغز نقشه‌برداری کنیم. این دقیقاً با *دیدن* مغز یکسان نیست، ولی تقریباً به‌خوبی آن است، زیرا اطلاعاتی را درباره‌ی انواع مختلف بافت‌هایی که در هر منطقه از مغز قرار دارند، به ما می‌دهد.

ازاین‌رو، چالش ریاضی این کار در روی هم گذاشتن اطلاعات به دست آمده از تمام اندازه‌گیری‌ها در امتداد مسیرهای مختلف به‌صورت یک تصویر دوبعدی منسجم از برش مغز است. این‌جا است که تحلیل فوریه وارد کار می‌شود. یک فیزیک‌دان اهل آفریقای جنوبی به نام آلن کورماک با استفاده از این روش توانست مسئله‌ی هم‌گذاری را حل کند. تحلیل فوریه بدان جهت وارد محاسبه می‌شود که در جایی از این مسئله یک دایره کمین کرده است. این دایره، دایره‌ی همه‌ی خطوط است—تمام راستاهایی که پرتوهای ایکس را می‌توان در امتداد آن‌ها گسیل کرد، به‌صورت یک برش دوبعدی

تخلیص می‌شوند.

به‌خاطر آورید که دایره همیشه با امواج سینوسی مرتبط است، و امواج سینوسی قطعات سازنده‌ی سری‌های فوریه هستند. کورماک با در نظر گرفتن مسئله‌ی هم‌گذاری بر پایه‌ی سری‌های فوریه، توانست یک مسئله‌ی هم‌گذاری دوبعدی را به یک مسئله‌ی آسان‌تر یک‌بعدی تقلیل دهد. در حقیقت، او از شر این مسئله که ۳۶۰ درجه زاویه‌ی ممکن وجود داشت، خلاص شد. بعد با مهارت فراوان در حساب انتگرال، توانست مسئله‌ی هم‌گذاری یک‌بعدی را حل کند. فایده‌اش این بود که با دانستن اندازه‌گیری‌ها در یک دایره‌ی کامل خطوط، می‌توانست خواص بافت داخل را استنتاج کند. می‌توانست نقشه‌ی جذب را استنباط نماید. تقریباً مانند دیدن خود مغز بود.

در سال ۱۹۷۹، کورماک به‌طور مشترک با گادفری هانسفیلد جایزه‌ی نوبل فیزیولوژی و پزشکی را به خاطر توسعه‌ی برش‌نگاری به کمک کامپیوتر دریافت کرد. هیچ‌کدام از این دو نفر دکتر پزشکی نبودند. کورماک نظریه‌ی ریاضی سی‌تی_اسکن بر پایه‌ی فوریه را در اواخر دهه‌ی ۱۹۵۰ توسعه داد. هانسفیلد، که یک مهندس برق بریتانیایی بود، دستگاه اسکنر را در همکاری با رادیولوژیست‌ها در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ اختراع کرد.

اختراع سی‌تی_اسکن نمونه‌ی دیگری از کارایی غیرمعقول ریاضیات است. در این مورد، ایده‌هایی که سی‌تی_اسکن را امکان‌پذیر ساخت، از بیش از نیم قرن قبل وجود داشت، و به‌هیچ‌وجه ارتباطی با پزشکی نداشت.

بخش بعدی داستان در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ شروع شد. هانسفیلد قبلاً پیش‌نمونه‌ای از دستگاه اختراعی خود را روی مغز خوک‌ها آزمایش کرده بود. او بی‌صبرانه در پی آن بود که یک رادیولوژیست بالینی پیدا کند که برای توسعه دادن این کار به بیماران انسانی به او کمک کند، ولی پزشکان یکی پس از دیگری از ملاقات با او امتناع می‌کردند. همه فکر می‌کردند که او دیوانه است. آن‌ها می‌دانستند که بافت نرم را نمی‌توان با اشعه‌ی ایکس مصور کرد. مثلاً در عکس متعارف پرتو ایکس از سر، استخوان‌های جمجمه به روشنی دیده می‌شد، ولی مغز مانند توده‌ی بی‌شکلی به نظر می‌رسید. علیرغم ادعایی که هانسفیلد داشت، تومورها، خون‌ریزی‌ها، و لخته‌های خون قابل مشاهده نبودند.

نهایتاً یک رادیولوژیست حاضر شد به حرف‌های او گوش کند. گفتگوی آن‌ها خوب پیش نرفت. در پایان جلسه، رادیولوژیست که قانع نشده بود، ظرفی حاوی مغز انسان که درون آن یک تومور داشت، به او داد و از او خواست که با اسکنر خودش از آن عکس‌برداری کند. هانسفیلد خیلی زود تصویری از مغز را برگرداند که نه تنها تومور را نشان می‌داد، بلکه نواحی خون‌ریزی درون آن را نیز مشخص می‌کرد.

رادیولوژیست متحیر شد. خبر در همه جا پیچید، و خیلی زود رادیولوژیست‌های دیگر هم به آن‌ها ملحق شدند. وقتی که هانسفیلد نخستین تصاویر برش‌نگاری کامپیوتری را در سال ۱۹۷۲ منتشر کرد، جهان پزشکی را در شوک و حیرت فروبرد. ناگهان رادیولوژیست‌ها این توانایی را پیدا کرده بودند که تومورها، کیست‌ها، ماده‌ی خاکستری، ماده‌ی سفید، و حفره‌های پر از مایع مغز را ببینند.

جالب است که همان‌گونه که نظریه‌ی موج و تحلیل فوریه با مطالعه‌ی موسیقی شروع شد، در یک لحظه‌ی کلیدی از توسعه‌ی برش‌نگاری کامپیوتری، موسیقی دوباره نقشی ضروری پیدا کرد. هانسفیلد در اواسط دهه‌ی ۱۹۶۰ که برای شرکتی به نام صنایع الکتریکی و موسیقی (EMI) کار می‌کرد، به این افکار پیشرفته رسید. او ابتدا برای این شرکت بر روی رادار و سلاح‌های هدایت شده کار می‌کرد، و سپس به سراغ ساخت نخستین کامپیوتر تمام‌ترانزیستوری بریتانیا رفت. پس از این موفقیت بزرگ، شرکت EMI تصمیم گرفت از هانسفیلد حمایت کند و اجازه دهد که او برای پروژه‌ی بعدی‌اش روی هم چیزی که دلش می‌خواهد، کار کند. در آن زمان، EMI پول زیادی داشت و می‌توانست مخاطرات این کار را بپذیرد. از زمانی که با یک گروه موسیقی لیورپول به نام بیتل‌ها قرارداد بسته بودند، سودشان دو برابر شده بود.

هانسفیلد ایده‌اش را درباره‌ی تصویربرداری از اعضای بدن با پرتو ایکس با مدیریت شرکت در میان گذاشت، و EMI که جیب‌هایش پرپول بود، به او کمک کرد نخستین قدم‌ها را بردارد. او خودش روشی برای حل مسئله‌ی هم‌گذاری در ریاضیات پیدا کرد، و خبر نداشت که کورماک یک دهه‌ی قبل آن را حل کرده است. باز کورماک هم مطلع نبود که یک ریاضی‌دان محض به نام یوهان رادون چهل سال قبل از او این مسئله را حل کرده است، بدون آن‌که کاربردی برای آن در نظر داشته باشد. جستجو برای درک ریاضی مسئله، ابزارهای مورد نیاز برای سی‌تی‌ـ اسکن را از نیم قرن قبل آماده کرده بود.

کورماک در سخنرانی جایزه‌ی نوبل خود اظهار داشت که او و همکارش تاد کوئینتو نتایج رادون را دیده بودند و سعی داشتند آن‌ها را به نواحی سه‌بعدی و حتی چهاربعدی تعمیم دهند. شاید تصور این‌ها برای مخاطبان او دشوار بود. ما در دنیای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم. چرا کسی باید تلاش کند که یک مغز چهاربعدی را مطالعه کند؟ کورماک توضیح داد:

> این نتایج چه کاربردی دارد؟ پاسخ این است که نمی‌دانم. مطمئناً بر اساس این‌ها قضیه‌هایی در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه خواهد شد، و برخی از آن‌ها ممکن است کاربردهایی در تصویربرداری با MRI یا سونوگرافی پیدا کند، ولی این به‌هیچ‌وجه قطعی نیست.

به‌علاوه، مطلب اصلی این نیست. من و کوئینتو این مباحث را بدان دلیل مطالعه می‌کنیم که به‌خودی‌خود به‌عنوان مسایل ریاضی جالب هستند، و این هدف اصلی علم است.

فصل ۱۱

آینده‌ی حسابان

با دیدن عنوان این فصل، ممکن است کسانی که معتقدند دوران حسابان به پایان رسیده است، ابروهایشان را با تعجب بالا بیندازند. چطور حسابان می‌تواند آینده‌ای داشته باشد؟ مگر کارش تمام نشده است؟ این چیزی است که در محافل ریاضی به‌طور عجیبی زیاد شنیده می‌شود. بر اساس این دیدگاه، حسابان به‌طور ناگهانی، به یُمنِ کشفیات بزرگ نیوتن و لایبنیتس، شروع شد. کشفیات آن‌ها در قرن هجدهم ذهنیتی همچون تب طلا ایجاد کرد، دوره‌ای مملو از اکتشافات بازی‌وار و حتی سرگیجه‌آور که در آن غول بی‌نهایت را رها کرده بودند تا آزادانه بچرخد. با گسیختن افسار آن، ریاضی‌دانان نتایج تماشایی زیادی ایجاد کردند، ولی مهملات و سردرگمی زیادی نیز به بار آوردند. لذا در قرن نوزدهم، نسل‌های بعدی ریاضی‌دانان که تمرکز بیشتری بر روی استحکام اثبات‌ها داشتند، غول را دوباره به قفس آن بازگرداندند. آن‌ها بی‌نهایت و بی‌نهایت‌کوچک‌ها را از حسابان بیرون ریختند، بنیان‌های این رشته را محکم‌تر کردند، و سرانجام به‌روشنی مشخص کردند که منظور از حد، مشتق، انتگرال، و اعداد حقیقی چیست. در حوالی سال ۱۹۰۰، عملیات پاک‌سازی آن‌ها کامل شد.

به نظر من، این دیدگاه از حسابان بیش از حد کوته‌نگرانه است. حسابان فقط کارهای نیوتن و لایبنیتس و اخلاف آن‌ها نیست. خیلی زودتر از آن موقع شروع شد و امروز هم هنوز با قدرت ادامه دارد. از دید من، حسابان بر اساس شعار آن تعریف می‌شود: برای حل کردن یک مسئله‌ی دشوار درباره‌ی یک چیز پیوسته، آن را به بی‌نهایت بخش تقسیم کنید و آن را حل کنید. بعد با روی هم گذاشتن جواب‌ها، می‌توانید پاسخ کل مسئله را به دست آورید. من به این شعار، «اصل بی‌نهایت» می‌گویم.

اصل بی‌نهایت از همان اول در کارهای ارشمیدس بر روی شکل‌های خمیده وجود داشت، در زمان انقلاب علمی در نظام نیوتن برای جهان از آن استفاده شده بود، و امروز نیز در خانه‌های ما، در سر کارمان، و در خودروهایمان به کار گرفته می‌شود. به کمک این اصل بود که GPS، تلفن موبایل، لیزر، و مایکروفر اختراع شد. اف‌بی‌آی از آن برای فشرده کردن میلیون‌ها فایل اثر انگشت استفاده کرد. آلن کورماک به کمک آن مبانی نظری سی‌تی‌ـ‌اسکن را ایجاد کرد. هم اف‌بی‌آی و هم کورماک یک مسئله‌ی دشوار را با سر هم کردن آن از اجزای ساده‌تر حل کردند: موجک‌ها برای اثر انگشت، و امواج سینوسی برای سی‌تی‌ـ‌اسکن. از این دیدگاه، حسابان مجموعه‌ی گسترده‌ای از فکرها و روش‌ها است که برای مطالعه‌ی هر چیزی—اعم از یک الگو، منحنی، حرکت، فرایند طبیعی، سیستم، یا پدیده—که به‌طور هموار و پیوسته تغییر می‌کند و لذا برای کاربرد اصل بی‌نهایت مناسب است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تعریف وسیع بسیار فراتر از حسابان نیوتن و لایبنیتس است و شامل شاخه‌های بعدی آن نیز هست: حسابان چندمتغیری، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی، تحلیل فوریه، آنالیز مختلط، . هر بخش دیگر ریاضیات عالی که در آن حد، مشتق، و انتگرال به کار می‌رود. از این نظرگاه، حسابان تمام نشده است. همان‌قدر گرسنه است که همیشه بوده.

ولی از این نظر من در اقلیت هستم. در واقع، اقلیتی یک‌نفره. هیچ‌کدام از همکارانم در گروه ریاضی موافق نیستند که این‌ها هم جزو حسابان است، و حق هم دارند: حرف مهملی است. اگر این‌طور باشد، باید اسم نصف دوره‌های درسی را عوض کنیم. غیر از حسابان ۱، ۲، و ۳، حالا حسابان ۴ تا ۳۸ خواهیم داشت. خیلی معنی‌دار نیست. بنابراین، به هر کدام از انشعابات حسابان نام دیگری می‌دهیم، که سبب می‌شود پیوستگی بین آن‌ها از نظر دور بماند. کل حسابان را به اجزای کوچک قابل استفاده تقسیم می‌کنیم. این طنزآمیز، و یا شاید به‌جا، است، چرا که خود حسابان هم چیزهای پیوسته را به اجزای آن تقسیم می‌کند، تا فهم آن آسان‌تر گردد. بگذارید روشن کنم: من مخالفتی با داشتن نام‌های متفاوت برای دروس ندارم. حرف من این است که چند تکه کردن یک چیز، اگر سبب شود فراموش کنیم که آن اجزا به یکدیگر تعلق دارند و همه‌ی آن‌ها بخشی از یک چیز بزرگ‌تر هستند، می‌تواند گمراه کننده باشد. هدف من در این کتاب این بود که حسابان را به‌عنوان یک کل نشان دهم،تا بتوانید زیبایی، وحدت، و عظمت آن را حس کنید.

پس آینده برای حسابان چه در چنته دارد؟ از قدیم گفته‌اند که پیش‌بینی همیشه کار دشواری است، خصوصاً درباره‌ی آینده، ولی فکر می‌کنم که با اطمینان می‌توان گفت

که در طول سال‌های آینده، چند روند اهمیت خواهند داشت. این‌ها شامل موارد زیر هستند:

- کاربردهای جدید حسابان در علوم اجتماعی، موسیقی، هنر، و علوم انسانی
- تداوم کاربرد حسابان در پزشکی و زیست‌شناسی
- کنار آمدن با تصادفی بودن ذاتی در دانش مالی، اقتصاد، و آب‌وهوا
- حسابان در خدمت داده‌های کلان، و بر عکس
- تداوم چالش‌ها در زمینه‌ی غیرخطیت، آشوب، و سامانه‌های پیچیده
- همکاری رو به رشد بین حسابان و کامپیوتر، از جمله هوش مصنوعی
- گسترش مرزهای حسابان در قلمرو کوانتومی

توضیح این‌ها بحث زیادی را می‌طلبد. به جای این‌که بخواهم درباره‌ی هر مبحثی که در این‌جا نام بردم، مقدار کمی توضیح بدهم، فقط روی چند تا از آن‌ها تمرکز خواهم کرد. پس از شرح مختصری از هندسه‌ی دیفرانسیل DNA، که در آن معمای منحنی‌ها با اسرار حیات ملاقات می‌کند، چند مورد را بررسی می‌کنیم که امیدوارم برای شما از نظر فلسفی تفکربرانگیز باشد. این‌ها شامل چالش‌هایی هستند که به علت ظهور آشوب، نظریه‌ی پیچیدگی، کامپیوتر، و هوش مصنوعی برای بینش و پیش‌بینی ایجاد می‌شود. اما برای این‌که این مطالب را بهتر درک کنید، ابتدا باید مبانی دینامیک غیرخطی را مرور کنیم. با بررسی زمینه، بهتر خواهیم توانست وسعت چالش‌های پیش رو را بشناسیم.

عدد پیچش DNA

حسابان به‌طور سنتی در علوم «سخت» مانند فیزیک، ستاره‌شناسی، و شیمی مورد استفاده قرار گرفته است. ولی در دهه‌های اخیر، به زیست‌شناسی و پزشکی نیز سرایت کرده و در رشته‌هایی مانند همه‌گیرشناسی، زیست‌شناسی جمعیت، علوم اعصاب، و تصویربرداری پزشکی به کار گرفته شده است. نمونه‌هایی از زیست‌شناسی ریاضیاتی را در سرتاسر این کتاب دیدیم، از کاربرد حسابان برای پیش‌بینی پیامد جراحی صورت

گرفته، تا مدل‌سازی HIV در حین نبرد آن با دستگاه ایمنی. ولی همه‌ی آن مثال‌ها به نحوی در ارتباط با معمای تغییر بود، که مدرن‌ترین وسواس در عرصه‌ی حسابان است. بر عکس، مثال زیر در ارتباط با معمای باستانی منحنی‌ها است که معمایی در خصوص مسیر سه‌بعدی DNA به آن جان تازه‌ای بخشیده است.

این معما در ارتباط با این است که DNA که مولکولی بسیار طولانی است و تمام اطلاعات ژنتیکی لازم برای ساختن یک فرد را در خود دارد، چگونه در درون سلول بسته‌بندی می‌شود. هر کدام از خود ده تریلیون سلول شما حاوی حدود دو متر DNA است. اگر همه‌ی آن‌ها را سر هم قرار دهیم، این DNAها ده دوازده بار تا خورشید می‌رود و برمی‌گردد. با این حال، یک فرد بدگمان ممکن است بگوید که این مقایسه آن‌قدرها هم که به نظر می‌رسد، جالب نیست؛ صرفاً منعکس کننده‌ی این است که هر کدام از ما تعداد زیادی سلول داریم. یک مقایسه‌ی مفیدتر این است که آن را با اندازه‌ی هسته‌ی سلول، یعنی محفظه‌ای که DNA را در بر می‌گیرد، مقایسه کنیم. قطر یک هسته‌ی سلول معمولاً حدود پنج میلیونیم متر است، و بنابراین، چهارصد هزار بار کوچک‌تر از DNAیی است که باید داخل آن جای بگیرد. این ضریب فشرده‌سازی مانند آن است که بیست مایل نخ را توی یک توپ تنیس جای بدهید.

افزون بر این، DNA را نمی‌توان به‌صورت تصادفی داخل هسته چپاند. نباید مثل کلاف سردرگمی باشد. بسته‌بندی باید به‌صورت منظم انجام شود، تا آنزیم‌ها بتوانند DNA را بخوانند و آن را به پروتئین‌هایی که برای نگهداری سلول لازم هستند، ترجمه کنند. بسته‌بندی منظم از این جهت هم اهمیت دارد که سلول بتواند در هنگام تقسیم سلولی از DNA به‌درستی نسخه‌برداری کند.

تکامل، مسئله‌ی بسته‌بندی را با قرقره حل کرده است، همان راه‌حلی که ما برای ذخیره‌سازی نخ‌های طویل مورد استفاده قرار می‌دهیم. DNA در داخل سلول به دور قرقره‌های ساخته شده از پروتئین‌های ویژه‌ای به نام هیستون پیچیده می‌شود. برای اینک باز هم فشرده‌سازی بیشتری انجام شود، قرقره‌ها مانند مهره‌های یک گردن‌بند به یکدیگر متصل می‌شوند، و سپس این گردن‌بند به‌صورت الیاف ریسمان‌مانندی حلقه می‌شود و باز از پیچ خوردن آن‌ها، کروموزوم‌ها حاصل می‌شوند. این حلقه‌های حلقه‌های حلقه‌ها، DNA را چنان فشرده می‌کنند که در محفظه‌ی تنگ هسته جا می‌شود.

ولی قرقره راه‌حل اولیه‌ی طبیعت برای مسئله‌ی بسته‌بندی نبود. قدیمی‌ترین موجودات روی زمین، ارگانیسم‌های تک‌یاخته‌ای بودند که فاقد هسته و کروموزوم بودند. آن‌ها قرقره نداشتند، کما این‌که باکتری‌ها و ویروس‌های امروز نیز ندارند. در این‌گونه موارد، ماده‌ی ژنتیکی با ساز و کاری مبتنی بر شکل هندسی و کشسانی، متراکم

می‌شود. فرض کنید یک کش لاستیکی را محکم می‌کشید و بعد آن را از یک طرف بین انگشتانتان تاب می‌دهید. تاب‌ها جمع می‌شوند و کش هم‌چنان مستقیم می‌ماند، تا آن‌که میزان پیچش انباشته شده از یک آستانه عبور کند. در آن زمان، ناگهان کش به داخل بعد سوم، شکم می‌اندازد. شروع می‌کند روی خودش حلقه زدن، انگار از درد به خود می‌پیچد. این پیچش‌ها موجب جمع شدن و متراکم شدن کش می‌شوند. DNA هم همین کار را می‌کند.

این پدیده ابرپیچش نامیده می‌شود، و در حلقه‌های مدور DNA به‌طور شایع دیده می‌شود. گرچه معمولاً DNA را به‌صورت یک مارپیچ راست با انتهاهای آزاد تصور می‌کنیم، ولی در بسیاری از موارد روی خودش بسته می‌شود و یک دایره تشکیل می‌دهد. وقتی که این اتفاق می‌افتد، مثل این است که کمربندتان را دربیاورید، آن را چند تاب بدهید، و بعد دوباره ببندید. بعد از آن دیگر تعداد تاب‌های کمربند نمی‌تواند تغییر کند. تاب‌ها درون آن قفل می‌شود. اگر سعی کنید کمربند را بدون درآوردن در جایی از آن تاب بدهید، تاب‌های متضادی در جای دیگری از آن برای جبران تشکیل خواهد شد. در این‌جا نوعی قانون پایستگی در کار است. همین اتفاق، وقتی که شیلنگ باغچه را حلقه می‌کنید و روی زمین می‌اندازید، می‌افتد. اگر سعی کنید شیلنگ را بکشید و راست کنید، در دستتان تاب می‌خورد. حلقه‌ها تبدیل به تاب می‌شود. این تبدیل در جهت دیگر نیز می‌تواند اتفاق بیفتد و تاب‌ها به حلقه تبدیل شود، کما این‌که کش لاستیکی، وقتی که آن را تاب می‌دهید، به خود می‌پیچد. DNA موجودات بدوی از این به خود پیچیدن استفاده می‌کند. بعضی از آنزیم‌ها می‌توانند DNA را ببُرند، تاب بدهند، و دوباره آن را ببندند. وقتی که DNA تاب‌های خود را باز می‌کند تا سطح انرژی را پایین‌تر بیاورد، قانون پایستگی آن را وادار می‌کند که ابرپیچش بیشتری پیدا کند و بنابراین، متراکم‌تر شود. در نتیجه، DNA مسیری پیدا می‌کند که دیگر در یک صفحه قرار ندارد. DNA در سه بعد در خود می‌پیچد.

در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰، یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام براک فولر نخستین توصیف ریاضی را برای این پیچش سه‌بعدی DNA ارائه کرد. او کمیتی را به نام *عدد پیچش* DNA ابداع کرد. با استفاده از انتگرال و مشتق، فرمول‌هایی برای آن به دست آورد، و قضیه‌هایی را درباره‌ی عدد پیچش اثبات کرد، که قانون پایستگی تاب‌ها و حلقه‌ها را مدون کرد. از آن زمان تا کنون، مطالعه‌ی هندسه و توپولوژی DNA هم‌چنان رو به رشد بوده است. ریاضی‌دانان از نظریه‌ی گره و حسابان کلاف برای روشن کردن ساز و کارهای برخی آنزیم‌ها که DNA را تاب می‌دهند و یا گره و پیوند در آن وارد می‌کنند، استفاده کرده‌اند. این آنزیم‌ها توپولوژی DNA را تغییر می‌دهند، و ازاین‌رو،

توپوایزومراز نامیده می‌شوند. آن‌ها می‌توانند رشته‌های DNA را قطع کنند و دوباره وصل کنند، و برای تقسیم و رشد سلول‌ها ضروری‌اند. در ضمن، این آنزیم‌ها اهداف مؤثری برای داروهای شیمی‌درمانی سرطان هستند. مکانیسم عمل به‌طور کامل روشن نشده است، ولی به نظر می‌رسد این داروها (که مهار کننده‌های توپوایزومراز نامیده می‌شوند) با مسدود کردن عمل توپوایزومرازها، می‌توانند به‌طور انتخابی به DNA سلول‌های سرطانی آسیب برسانند، که منجر به خودکشی آن سلول‌ها می‌شود. این خبر خوبی برای بیمار، و خبر بدی برای تومور است.

در کاربرد حسابان برای ابرپیچش DNA، مارپیچ دوگانه به‌عنوان یک منحنی پیوسته مدل‌سازی می‌شود. طبق معمول، حسابان دوست دارد با اشیای پیوسته کار کند. در دنیای واقعیت، DNA مجموعه‌ی گسسته‌ای از اتم‌ها است. هیچ ویژگی حقیقتاً پیوسته‌ای ندارد. ولی با تقریب قابل قبولی می‌توان تصور کرد که یک منحنی پیوسته است، مانند یک کش لاستیکی ایده‌آل. مزیت این کار آن است که حالا می‌توان از سیستم نظریه‌ی کشسانی و هندسه‌ی دیفرانسیل، دو شاخه از حسابان، استفاده کرد و محاسبه کرد که DNA تحت نیروهای حاصل از پروتئین‌ها، محیط، و نیز تعاملات با خودش چه تغییر شکلی پیدا می‌کند.

مطلب مهم‌تر آن است که حسابان از روش خلاقانه‌ی همیشگی خود، یعنی در نظر گرفتن اشیای گسسته به‌عنوان پیوسته، استفاده می‌کند تا نحوه‌ی رفتار آن‌ها را روشن کند. این مدل‌سازی تقریبی، ولی مفید، است. به هر حال، تنها روشی است که برای انجام این کار در دسترس است. بدون فرض پیوستگی، نمی‌توان از اصل بی‌نهایت استفاده کرد. و بدون اصل بی‌نهایت، از حسابان، هندسه‌ی دیفرانسیل، و نظریه‌ی کشسانی خبری نخواهد بود.

فکر می‌کنم در آینده شاهد نمونه‌های بیشتری از کاربرد حسابان و ریاضیات پیوسته برای بازیگران ذاتاً گسسته‌ی زیست‌شناسی، شامل ژن‌ها، سلول‌ها، پروتئین‌ها، و دیگر بازیگران نمایش زیست‌شناسی، خواهیم بود. این تقریب پیوستار به‌قدری بینش و درک به ما می‌دهد که حیف است از آن استفاده نکنیم. تا زمانی که شکل جدیدی از حسابان ابداع نکرده‌ایم که به همان خوبی که حسابان سنتی روی سیستم‌های پیوسته کار می‌کند، بر روی سیستم‌های گسسته نیز عمل نماید، اصل بی‌نهایت هم‌چنان راهنمای ما در مدل‌سازی ریاضی چیزهای زنده خواهد بود.

جبرگرایی و حدود آن

دو مبحث بعدی ما، ظهور دینامیک غیرخطی و تأثیر کامپیوتر بر حسابان است. این مباحث را از آن جهت انتخاب کرده‌ام که پیامدهای آن‌ها از نظر فلسفی بسیار شایان توجه است. این‌ها ممکن است ماهیت پیش‌بینی را برای همیشه تغییر دهند و منجر به دوران جدیدی در حسابان—و به‌طور کلی، علم—شوند که در آن بینش بشری ممکن است به‌تدریج افول کند، گرچه خود علم هنوز به پیشرفت خود ادامه خواهد داد. برای این‌که منظورم از این هشدار کمابیش آخرالزمانی را روشن کنم، باید بفهمیم که اصولاً پیش‌بینی چگونه امکان‌پذیر است، معنای کلاسیک آن چه بوده است، و کشفیات چند دهه‌ی اخیر در زمینه‌ی غیرخطیت، آشوب، و سیستم‌های پیچیده چگونه موجب تجدید نظر در مفاهیم کلاسیک شده‌اند.

در اوایل قرن نوزدهم، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس فرانسوی پیر سیمون لاپلاس جبرگرایی را در دنیای ساعت کوکی نیوتن از نظر منطقی به حد افراط رساند. او یک هوش خدامانند را (که امروزه به آن شیطان لاپلاس می‌گوییم) به تصور درآورد که می‌تواند موقعیت همه‌ی اتم‌های گیتی و نیز نیروهای وارد شده بر آن‌ها را ردیابی کند. او نوشت: «اگر این هوش آن‌قدر وسعت داشته باشد که بتواند همه‌ی این داده‌ها را تحلیل کند، دیگر هیچ چیز نامعین نخواهد بود، و آینده درست مانند گذشته، در مقابل چشمان او حاضر خواهد بود.»

با نزدیک شدن به آغاز قرن بیستم، این فرمول افراطی شبیه ساعت کوکی برای گیتی، از نظر علمی و فلسفی به دلایل مختلف غیرقابل قبول به نظر می‌رسید. اولین دلیل آن برخاسته از حسابان است که سوفیا کُوالِفسکایا آن را بیان کرده است. کوالفسکایا در سال ۱۸۵۰ متولد شد و در خانواده‌ای اشرافی در مسکو بزرگ شد. وقتی یازده ساله بود، حسابان تمام دور و برش را پر کرده بود—یکی از دیوارهای اتاق خوابش پر از یادداشت‌هایی بود که پدرش در یکی از کلاس‌های حسابان که در جوانی در آن شرکت کرده بود، برداشته بود. او بعدها نوشت: «در دوران کودکی، ساعت‌ها جلوی آن دیوار اسرارآمیز می‌نشستم و سعی می‌کردم حتی از یک جمله از مطالب آن یادداشت‌ها سر دربیاورم، و ترتیب منطقی صفحات را مشخص کنم.» او سرانجام نخستین زن در تاریخ شد که PhD ریاضیات گرفت.

با آنکه کوالفسکایا از همان ابتدا استعداد بالایی را در زمینه‌ی ریاضیات نشان می‌داد، ولی قوانین روسیه به او اجازه‌ی ثبت‌نام در دانشگاه را نمی‌داد. او تن به ازدواجی مصلحتی داد، که در طول سال‌های بعد بسی او را دل‌آزرده کرد، ولی لااقل این فایده را

داشت که به او امکان داد که به آلمان سفر کند، که در آن‌جا چندین استاد تحت تأثیر استعداد خارق‌العاده‌ی او قرار گرفتند. ولی حتی در آن‌جا هم به‌طور رسمی حق شرکت در کلاس‌ها را نداشت. او به‌طور خصوصی نزد متخصص آنالیز کارل وایرشتراس تعلیم دید، و سرانجام، به توصیه‌ی او، به‌خاطر حل چندین مسئله‌ی حل نشده در زمینه‌ی آنالیز، دینامیک، و معادلات دیفرانسیل جزئی، به او درجه‌ی دکترا اعطا شد. او سرانجام در دانشگاه استکهلم استاد تمام شد، و هشت سال در آن‌جا تدریس کرد، تا آن‌که در سن چهل و یک سالگی بر اثر انفلوآنزا درگذشت. در سال ۲۰۰۹، آلیس مانرو، نویسنده‌ی برنده‌ی جایزه‌ی نوبل، داستان کوتاهی درباره‌ی او به نام «خوش‌بختی در راه است» منتشر کرد.

دیدگاه‌های کوالفسکایا درباره‌ی حدود جبرگرایی حاصل کارهای او بر روی دینامیک اجسام صلب بود. جسم صلب در انتزاع ریاضی جسمی است که نمی‌توان آن را خم کرد یا تغییر شکل داد؛ تمام نقاط آن به‌صورت محکم به یکدیگر متصل هستند. نمونه‌ی آن یک فرفره‌ی چوبی است. این فرفره کاملاً جامد و متشکل از بی‌نهایت نقطه است، و بنابراین، از نظر مکانیکی شیئی پیچیده‌تر از ذرات نقطه‌مانندی است که نیوتن در نظر می‌گرفت. حرکت اجسام صلب در ستاره‌شناسی و علم فضا برای توصیف پدیده‌های مختلف، از تلوتلو خوردن آشفته‌ی هیپریون، قمر کوچک سیب‌زمینی‌شکل زحل، تا چرخش منظم یک کپسول فضایی یا ماهواره، اهمیت دارد.

کوالفسکایا هنگام مطالعه‌ی دینامیک اجسام صلب، به دو نتیجه‌ی بزرگ رسید. اولی نمونه‌ای از حرکت یک فرفره بود، که می‌شد آن را کاملاً تحلیل و حل کرد، همان‌گونه که نیوتن مسئله‌ی دو جسم را حل کرده بود. قبلاً دو «فرفره‌ی قابل‌انتگرال‌گیری» دیگر از این قبیل شناخته شده بود، ولی مورد او ظریف‌تر و عجیب‌تر بود.

مهم‌تر این‌که او ثابت کرد که هیچ‌گونه فرفره‌ی قابل‌حل دیگری وجود ندارد. او آخرین مورد را یافته بود. تمام موارد دیگر غیرقابل‌انتگرال‌گیری خواهند بود، یعنی دینامیک آن‌ها را نمی‌توان بر اساس فرمول‌های نیوتنی به دست آورد. مسئله این نیست که کسی هوش کافی برای اثبات آن ندارد؛ او ثابت کرد که فرمولی از یک نوع خاص (به اصطلاح علمی، یک تابع مرومورفیک زمان) که بتواند حرکت فرفره را برای همیشه توصیف کند، اصولاً نمی‌تواند وجود داشته باشد. به این طریق، او برای کارهایی که حسابان می‌تواند انجام دهد، حدی تعیین کرده است. اگر حتی یک فرفره بتواند در مقابل شیطان لاپلاس قد علم کند، دیگر امیدی—حتی به‌طور نظری—برای یافتن فرمولی برای سرنوشت گیتی وجود نخواهد داشت.

غیرخطیت

غیرقابل‌حل بودنی که کوالفسکایا کشف کرد، در ارتباط با یک جنبه‌ی ساختاری معادلات مربوط به فرفره است: این معادلات *غیرخطی* هستند. در این‌جا نیازی نیست به‌معنای فنی *غیرخطی* بپردازیم. برای مقاصد ما، کافی است به تمایزهای بین سیستم‌های خطی و غیرخطی توجه کنیم، که نمونه‌هایی معمولی از آن را می‌توان از زندگی روزمره به دست آورد.

برای این‌که ببینید سیستم‌های خطی چگونه هستند، تصور کنید دو نفر می‌خواهند محض شوخی برای وزن کردن خودشان هر دو با هم روی ترازو بروند. وزن ترکیبی آن‌ها مجموع وزن هر کدام از آن‌ها خواهد بود. علت آن است که ترازو یک دستگاه خطی است. وزن افراد تأثیری روی یکدیگر ندارد و کار خاصی انجام نمی‌دهد که بخواهیم به آن توجه کنیم. مثلاً بدن‌های آن‌ها به طریقی با هم دسیسه نمی‌کنند که سبک‌تر به نظر برسند، یا این‌که به ضرر یکدیگر خراب‌کاری کنند تا سنگین‌تر به نظر برسند. صرفاً با هم جمع می‌شوند. در یک سیستم خطی مانند ترازو، کل برابر با مجموع اجزا است. این اولین خاصیت کلیدی خطیت است. دومی این است که علت متناسب با معلول است. فرض کنید زه یک کمان را می‌کشید. اگر برای عقب کشیدن زه به یک فاصله‌ی معین، نیروی معینی لازم باشد، برای دو برابر کشیدن آن، دو برابر آن نیرو لازم خواهد بود. علت و معلوم با هم متناسب‌اند. این دو خاصیت—یعنی تناسب علت و معلول و تساوی کل با مجموع اجزا—اساس مفهوم خطی بودن را تشکیل می‌دهند.

ولی خیلی چیزها در طبیعت از این پیچیده‌ترند. هر گاه اجزای یک سیستم در کار یکدیگر مداخله می‌کنند یا با هم همکاری یا رقابت می‌نمایند، تعاملات غیرخطی روی می‌دهد. اکثر زندگی روزمره به‌طور قابل‌توجهی غیرخطی است؛ اگر هم‌زمان به دو آهنگ مورد علاقه‌ی خود گوش بدهید، لذت دو برابر دریافت نخواهید کرد. در مورد مصرف هم‌زمان الکل و مواد نیز همین مطلب صادق است، اثرات تداخلی آن‌ها ممکن است کُشنده باشد. بر عکس، کره‌ی بادام‌زمینی و ژله با هم بهترند. اثر آن‌ها صرفاً با هم جمع نمی‌شود—اثرات همدیگر را افزون می‌کنند.

غیرخطیت عامل غنای جهان است، و موجب زیبایی و پیچیدگی و غالباً مطالعه‌ناپذیری آن می‌شود. مثلاً تمام زیست‌شناسی غیرخطی است؛ جامعه‌شناسی هم همین‌طور. بدین خاطر است که علوم نرم دشوارترند—و دیرتر از همه تن به ریاضی‌سازی می‌دهند. به‌خاطر همین غیرخطی بودن، آن‌ها در واقع، به‌هیچ‌وجه نرم

نیستند.

همان تمایز بین خطی و غیرخطی در مورد معادلات دیفرانسیل نیز صادق است، البته کمتر شهودی است. تنها چیزی که باید بگوییم، این است که وقتی معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند، مانند حالت فرفره‌های کوالفسکایا، تحلیل آن‌ها به‌غایت دشوار است. از زمان نیوتن، ریاضی‌دانان تا جایی که امکان داشته، از معادلات دیفرانسیل غیرخطی دوری کرده‌اند. آن‌ها را موذی و لجوج دانسته‌اند.

بر عکس، معادلات دیفرانسیل خطی خوش‌برخورد و رام‌اند. ریاضی‌دان‌ها آن‌ها را خیلی دوست دارند، چون آسان‌اند. مطالب نظری زیادی درباره‌ی آن‌ها گفته شده است. در واقع، تا حوالی دهه‌ی ۱۹۸۰، آموزش سنتی برای ریاضی‌دانان کاربردی تقریباً به‌طور کامل اختصاص به روش‌های بهره‌گیری از خطی بودن داشت. سال‌ها وقت صرف تسلط بر سری‌های فوریه و دیگر تکنیک‌های مناسب معادلات خطی می‌شد.

مزیت بزرگ خطی بودن این است که امکان تفکر تقلیل‌گرا را فراهم می‌کند. برای حل یک مسئله‌ی خطی، می‌توانیم آن را به اجزای ساده‌ی آن تقسیم کنیم، هر کدام از اجزا را جداگانه حل کنیم، و بعد دوباره اجزا را روی هم قرار دهیم تا به جواب مسئله برسیم. فوریه معادله‌ی گرمای خود را—که خطی بود—با این راهبرد تقلیل‌گرا حل کرد. او توزیع پیچیده‌ی دما را با امواج سینوسی تجزیه کرد، مشخص کرد که هر کدام از امواج سینوسی به‌تنهایی چقدر تغییر کرده است، بعد دوباره آن امواج سینوسی را با هم ترکیب کرد تا پیش‌بینی کند که دمای کلی در امتداد طول میله‌ی فلزی گرم شده چگونه تغییر خواهد کرد. این راهبرد بدان علت مؤثر واقع شد که معادله‌ی گرما خطی است. می‌توان آن را به قطعات آن تجزیه کرد، بدون آن‌که عصاره‌ی آن از بین برود.

سوفیا کوالفسکایا به ما کمک کرد بفهمیم که وقتی سرانجام با غیرخطیت روبه‌رو شویم، دنیا چقدر متفاوت به نظر می‌رسد. او متوجه شد که غیرخطیت برای غرور انسان حد تعیین می‌کند. وقتی که یک سیستم غیرخطی است، ممکن است پیش‌بینی رفتار آن با فرمول غیرممکن باشد، ولو اینکه چگونگی رفتار آن کاملاً معین شده باشد. حرکت فرفره—یک اسباب‌بازی بچگانه—سبب شد که درباره‌ی چیزهایی که می‌توانیم بدانیم، فروتن شویم.

آشوب

حالا که به گذشته نگاه می‌کنیم، روشن‌تر می‌توانیم ببینیم که چرا نیوتن وقتی که سعی داشت مسئله‌ی سه جسم را حل کند، به سردرد مبتلا شد. مسئله به‌طور گریزناپذیری

غیرخطی است، بر خلاف مسئله‌ی دو جسم، که با تغییراتی می‌توان آن را خطی کرد. غیرخطی بودن به علت پرش از دو جسم به سه جسم نبود. ناشی از ساختار خود معادله‌ها بود. وقتی که دو جسم گرانشی داریم، غیرخطی بودن را می‌توان با انتخاب مناسب متغیرهای جدید در معادلات دیفرانسیل حذف کرد، اما در حالت سه جسم امکان این کار وجود ندارد.

مدت‌های مدید طول کشید تا نتایج تواضع‌برانگیز غیرخطیت به‌طور کامل درک شود. ریاضی‌دانان چندین قرن تلاش می‌کردند مسئله‌ی سه جسم را حل کنند، و با آن‌که پیشرفت‌هایی انجام شد، هیچ‌کس نتوانست آن را به‌طور کامل حل کند. در اواخر قرن نوزدهم، ریاضی‌دان فرانسوی هانری پوانکاره فکر کرد موفق به حل آن شده است، ولی اشتباه کرده بود. وقتی که خطایش را اصلاح کرد، باز هم نتوانست مسئله‌ی سه جسم را حل کند، ولی چیز بسیار مهم‌تری را کشف کرد: پدیده‌ای که حالا به آن *آشوب* می‌گوییم.

سیستم‌های آشفته بدقلق‌اند. کوچک‌ترین تغییری در نحوه‌ی شروع آن‌ها می‌تواند تفاوت بزرگی را در وضعیت پایانی آن‌ها ایجاد کند. علت آن است که تغییرات اندک در شرایط اولیه‌ی آن‌ها با سرعت نمایی بزرگ می‌شود. هر گونه خطا یا اختلال کوچک در بلندمدت با چنان سرعتی مثل گلوله‌ی برفی بزرگ می‌شود که سیستم غیرقابل‌پیش‌بینی می‌شود. سیستم‌های آشفته تصادفی نیستند—بلکه قطعی‌اند و لذا در کوتاه‌مدت قابل‌پیش‌بینی هستند—ولی در بلندمدت چنان نسبت به اختلالات کوچک حساس‌اند که عملاً از بسیاری جهان تصادفی به نظر می‌رسند.

سیستم‌های آشفته را تا زمان مشخصی که افق پیش‌بینی‌پذیری نامیده می‌شود، می‌توان خیلی خوب پیش‌بینی کرد. تا قبل از آن، قطعیت‌گرایی سیستم سبب می‌شود که پیش‌بینی‌پذیر باشد. به‌عنوان مثال، افق پیش‌بینی‌پذیری کل منظومه‌ی شمسی حدود چهار میلیون سال محاسبه شده است. برای زمان‌هایی که خیلی کوچک‌تر از آن هستند، مثلاً مدت زمان یک سال که طول می‌کشد که زمین به دور خورشید بگردد، همه چیز مثل ساعت کار می‌کند. ولی وقتی که از چند میلیون سال فراتر رفتیم، هیچ اطمینانی وجود ندارد. آشفتگی‌های گرانشی ظریف در میان همه‌ی اجسام منظومه‌ی شمسی روی هم جمع می‌شوند، به‌طوری که دیگر نمی‌توانیم سیستم را به دقت پیش‌بینی کنیم.

وجود افق پیش‌بینی‌پذیری از کارهای پوانکاره به دست آمد. تا قبل از او تصور می‌شد که خطاها به‌صورت خطی افزایش خواهد یافت، نه به‌صورت نمایی؛ یعنی اگر زمان را دو برابر کنید، میزان خطا هم دو برابر خواهد شد. وقتی که رشد خطاها خطی باشد، بهبود اندازه‌گیری همیشه همپای تمایل به پیش‌بینی طولانی‌تر باقی می‌ماند. ولی

وقتی که خطاها به‌صورت *نمایی* رشد می‌کنند، گفته می‌شود که سیستم وابستگی حساس به شرایط ابتدایی دارد. در این صورت، پیش‌بینی بلندمدت غیرممکن می‌شود. این پیام آشوب است که از نظر فلسفی آزار دهنده است.

مهم است که بفهمیم که کجای این مطلب تازگی دارد. افراد همیشه می‌دانستند که پیش‌بینی سیستم‌های پیچیده‌ی بزرگ، مانند آب‌وهوا، دشوار است. تعجب در این بود که حتی چیز ساده‌ای مانند یک فرفره یا سه جسم گرانشی نیز به همان صورت پیش‌بینی‌ناپذیر هستند. این شوکه‌کننده بود و ضربه‌ی دیگری به تلفیق جبرگرایی و پیش‌بینی‌پذیری از سوی لاپلاس بود.

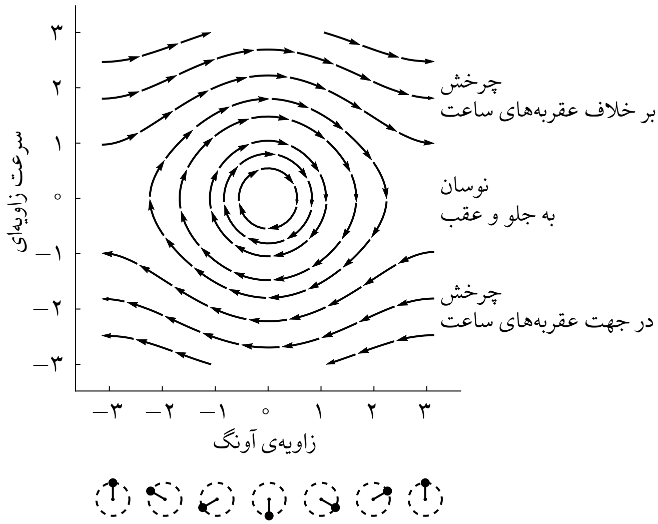
از جهت مثبت، در داخل سیستم‌های آشفته نیز به‌خاطر ماهیت قطعیت‌گرای آن‌ها، ردپایی از نظم وجود دارد. پوانکاره راهکارهای جدیدی را برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی، از جمله سیستم‌های آشفته، ابداع کرد، و روش‌هایی پیدا کرد که بتوان برخی از نظم نهفته در درون آن‌ها را استخراج کرد. او به‌جای فرمول و جبر، از تصاویر و هندسه استفاده کرد. رویکرد کیفی او به افشاندن بذر رشته‌های جدید ریاضی توپولوژی و سیستم‌های دینامیک کمک کرد. به‌خاطر کارهای پیشگامانه‌ی او، اکنون درک بهتری از نظم و آشوب داریم.

رویکرد بصری پوانکاره

برای این‌که ببینید رویکرد پوانکاره چگونه کار می‌کند، نوسانات یک آونگ ساده را مانند آونگی که گالیله مطالعه می‌کرد، در نظر بگیرید. با استفاده از قانون حرکت نیوتن و با در نظر گرفتن نیروهایی که در زمان نوسان بر آونگ وارد می‌شود، می‌توانیم تصویری انتزاعی ترسیم کنیم از این‌که زاویه و سرعت آونگ از لحظه‌ای به لحظه‌ی دیگر چگونه تغییر می‌کند. این تصویر اساساً یک ترجمه‌ی بصری از چیزی است که قانون نیوتن بیان می‌دارد. این تصویر هیچ محتوای جدیدی اضافه بر آن‌چه در معادله‌ی دیفرانسیل موجود است، ارائه نمی‌کند. فقط روش دیگری برای نگاه کردن به همان اطلاعات است.

این تصویر مانند نقشه‌ی الگوی آب‌وهوایی است که در سراسر کشور حرکت می‌کند. روی این‌گونه نقشه‌ها، پیکان‌هایی می‌بینیم که راستای محلی انتشار را نشان می‌دهد، این‌که جبهه‌ی هوا از لحظه‌ای به لحظه‌ی دیگر در کدام جهت حرکت خواهد کرد. این از همان نوع اطلاعاتی است که یک معادله‌ی دیفرانسیل ارائه می‌کند. و نیز از همان نوع اطلاعاتی است که برای تعلیم رقص داده می‌شود: پای چپتان را بگذارید این‌جا، پای راستتان را بگذارید آن‌جا. به یک چنین نقشه‌ای، گراف *میدان برداری* گفته

می‌شود. پیکان‌های کوچک روی آن بردارهایی هستند که نشان می‌دهند که اگر زاویه و سرعت آونگ در زمان حاضر این‌جا باشد، یک لحظه‌ی بعد کجا خواهد رفت. تصویر میدان بردار برای آونگ به این صورت است:



قبل از آن‌که تصویر را تفسیر کنیم، لطفاً توجه کنید که این یک تصویر انتزاعی است، بدان معنا که تصویر واقعی یک آونگ را نشان نمی‌دهد. الگوی پیکان‌های چرخان مشابه وزنه‌ای نیست که از نخی آویزان شده است. عکس یک آونگ این شکلی نیست. (نماهایی از عکس آونگ در زیر تصویر میدان برداری نشان داده شده است تا احساسی از معنای واقعی آن به دست آورید.) به‌جای نمایش واقعی آونگ، تصویر میدان برداری یک نقشه‌ی انتزاعی را از چگونگی تغییر حالت آونگ از یک لحظه به لحظه‌ی بعد نشان می‌دهد. هر نقطه‌ی روی این نقشه، یک ترکیب ممکن از زاویه و سرعت آونگ را در یک لحظه نشان می‌دهد. محور افقی نشان دهنده‌ی زاویه‌ی آونگ است. محور عمودی نشان دهنده‌ی سرعت آن است. در هر لحظه، با دانستن این دو عدد، زاویه و سرعت، *حالت* دینامیکی آونگ تعریف می‌شود. این‌ها اطلاعات لازم را به ما می‌دهند تا پیش‌بینی کنیم که زاویه و سرعت آونگ یک لحظه‌ی بعد چقدر خواهد بود، و یک لحظه‌ی دیگر بعد آن چقدر خواهد بود، و الی آخر. تنها کاری که باید بکنیم، این است که پیکان‌ها را دنبال کنیم.

آرایش چرخشی پیکان‌ها در حوالی قسمت وسط متناظر با حرکت نوسانی جلو و عقب آونگ در زمانی است که تقریباً مستقیم به طرف پایین قرار گرفته است. ساختار

موج‌مانند پیکان‌ها در بالا و پایین متناظر با چرخش قوی آونگ در بالا است که مثل ملخ [هواپیما] چرخش می‌کند. نیوتن هرگز این‌گونه حرکات گردابی را در نظر نگرفت؛ گالیله هم همین‌طور. این‌ها خارج از محدوده‌ای بود که با روش‌های کلاسیک قابل‌محاسبه بود. لیکن حرکات گردابی را در تصویر پوانکاره به‌سادگی می‌توان دید. روش کیفی نگاه کردن به معادلات دیفرانسیل امروزه در تمام رشته‌هایی که دینامیک غیرخطی در آن ظاهر می‌شود، از فیزیک لیزر گرفته تا علوم اعصاب، متداول است.

غیرخطیت به جنگ می‌رود

دینامیک غیرخطی می‌تواند شدیداً ماهیت عملی داشته باشد. ریاضی‌دانان بریتانیایی مری کارت‌رایت و جان لیتل‌وود، تکنیک‌های پوانکاره را در دفاع بریتانیا در مقابل حملات هوایی نازی‌ها در زمان جنگ مورد استفاده قرار دادند. در سال ۱۹۳۸، اداره‌ی پژوهش علمی و صنعتی دولت بریتانیا از انجمن ریاضی لندن برای مسئله‌ای در تحقیقات پیشرفته‌ی مربوط به شناسایی و گراگیری رادیویی، که امروزه رادار نامیده می‌شود، درخواست کمک کرد. مهندسان دولت بریتانیا از نویزها و نوسانات غیرعادی که در تقویت‌کننده‌های خود دریافت می‌کردند، گیج شده بودند، خصوصاً وقتی که دستگاه‌هایشان از امواج رادیویی پربسامد با انرژی بالا استفاده می‌کردند. می‌ترسیدند که شاید مشکلی در تجهیزاتشان وجود داشته باشد.

درخواست کمک دولت، توجه کارت‌رایت را جلب کرد. او از قبل هم مشغول مطالعه‌ی مدل‌های سیستم‌های نوسانی بود که به قول خودش، «معادلات دیفرانسیل بسیار ترسناکی» بر آن‌ها حاکم بود. او و لیتل‌وود در ادامه منبع نوسانات نامنظم را در دستگاه‌های الکترونیکی رادار کشف کردند. آمپلیفایرها غیرخطی بودند، و اگر سیگنال ورودی بیش از حد سریع یا شدید باشد، ممکن است به‌صورت آشفته پاسخ دهند.

چندین دهه بعد، فیزیک‌دان فریمن دایسون با یادآوری یک سخنرانی کارت‌رایت در سال ۱۹۴۲ درباره‌ی کارهایش، نوشت:

> کل کار توسعه‌ی رادار در جنگ جهانی دوم وابسته به تقویت‌کننده‌های با توان بالا بود، و داشتن آمپلیفایرهایی که کار مورد نظر را درست انجام دهند، مسئله‌ی مرگ و زندگی محسوب می‌شد. سربازان گرفتار تقویت‌کننده‌هایی بودند که درست کار نمی‌کردند، و آن‌ها فکر می‌کردند سازندگان مسئول این عملکرد نامنظم هستند. کارت‌رایت و لیتل‌وود

کشف کردند که سازندگان تقصیر نداشتند. مشکل از خود معادله بود.

کشفیات کارت‌رایت و لیتل‌وود، مهندسان دولت را قادر ساخت با به کار انداختن تقویت‌کننده‌ها بر اساس برنامه‌ای که در آن رفتار قابل‌پیش‌بینی داشتند، مسئله را حل کنند. کارت‌رایت درباره‌ی نقشی که در حل این مسئله داشت، خیلی با تواضع برخورد می‌کرد. وقتی که نظرات دایسون درباره‌ی کارهایش را خواند، او را سرزنش کرد که چرا آن را بیش از حد بزرگ کرده است.

بانو مری کارت‌رایت در سال ۱۹۹۸ در سن نود و هفت سالگی در گذشت. او نخستین ریاضی‌دان زنی بود که به عضویت انجمن سلطنتی انتخاب شد. او مؤکداً اعلام کرده بود که کسی در مراسم یادبودش سخنرانی نکند.

ائتلاف بین حسابان و کامپیوتر

نیاز به حل معادلات دیفرانسیل در زمان جنگ، محرک توسعه‌ی کامپیوتر شد. کامپیوتر، که در آن زمان گاه به آن مغز مکانیکی و الکترونیکی می‌گفتند، برای محاسبه‌ی مسیر موشک‌ها و گلوله‌های توپ در شرایط واقعی با در نظر گرفتن عوارضی مانند مقاومت هوا و جهت باد قابل استفاده بود. افسران توپ‌خانه در میدان نبرد برای زدن هدف به این‌گونه اطلاعات نیاز داشتند. تمام داده‌های پرتابه‌ای ضروری از قبل محاسبه می‌شد و در جداول و نمودارهای استاندارد تدوین می‌گردید. برای این کار، کامپیوترهای پرسرعت ضروری بودند. کامپیوترها با شبیه‌سازی ریاضی می‌توانستند یک گلوله‌ی توپ ایده‌آل را در مسیر خود قدم به قدم جلو ببرند، و در هر قدم، با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل مناسب، موقعیت و سرعت گلوله را احساس کنند، و با انجام تعداد زیادی عمل جمع، جواب را از طریق جستجوی فراگیر به دست آورند. فقط یک ماشین می‌توانست بی‌وقفه قدم به قدم به پیش برود و تمام جمع‌ها و ضرب‌های لازم را با سرعت و درستی و به‌طور خستگی‌ناپذیر انجام دهد.

تأثیر حسابان در این تلاش اولیه در نام برخی از کامپیوترهای اولیه هویدا است. یکی از آن‌ها دستگاهی مکانیکی بود که تحلیلگر تفاضلی نام داشت. کار آن حل معادلات دیفرانسیل برای محاسبه‌ی جداول آتش توپ‌خانه بود. دیگری انیاک (ENIAC) نام داشت که مخفف «انتگرال‌گیر و محاسبه‌گر عددی الکترونیکی» بود. در این‌جا کلمه‌ی *انتگرال‌گیر* به‌معنای آن در حسابان مورد نظر بود، یعنی گرفتن انتگرال یا حل معادله‌ی دیفرانسیل. انیاک که در سال ۱۹۴۵ تکمیل شد، یکی از نخستین

کامپیوترهای همه‌منظوره و قابل‌برنامه‌نویسی بود. این کامپیوتر علاوه بر محاسبه‌ی جداول آتش، امکان‌سنجی فنی بمب هیدروژنی را نیز ارزیابی کرد.

با آن‌که کاربردهای نظامی حسابان و دینامیک غیرخطی محرک توسعه‌ی کامپیوتر شد، ولی هم برای ریاضی و هم برای کامپیوتر، کاربردهای صلح‌آمیز زیادی نیز پیدا شد. در دهه‌ی ۱۹۵۰، دانشمندان شروع به استفاده از کامپیوتر برای حل مسایل رشته‌های خود در خارج از فیزیک کردند. مثلاً زیست‌شناسان بریتانیایی، آلن هاجکین و آندرو هاکسلی، برای کمک به فهمیدن این‌که چگونه سلول‌های عصبی با یکدیگر صحبت می‌کنند، و چگونه سیگنال‌های عصبی در طول الیاف عصبی حرکت می‌کنند، نیاز به کامپیوتر داشتند. آن‌ها آزمایش‌های پرزحمتی را برای محاسبه‌ی جریان یون‌های سدیم و پتاسیم از غشای رشته‌های عصبی بسیار بزرگی که برای آزمایش بسیار مناسب بودند—آکسون غول‌آسای یک ماهی مرکب—انجام دادند و به‌صورت تجربی رابطه‌ی بین این جریان‌ها و ولتاژ دو سوی غشا را به دست آوردند و مشخص کردند که جریان یون‌ها چه تأثیری بر ولتاژ دارد. ولی چیزی که بدون کامپیوتر نمی‌توانستند انجام دهند، محاسبه‌ی سرعت و شکل تکانه‌ی عصبی بود که در آکسون منتشر می‌شود. محاسبه‌ی حرکت آن نیاز به حل یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیرخطی از ولتاژ به‌عنوان تابعی از زمان و مکان داشت. آندرو هاکسلی آن را طی سه هفته با یک ماشین‌حساب مکانیکی دستی حل کرد.

در سال ۱۹۶۳، هاجکین و هاکسلی به‌خاطر کشفیاتشان درباره‌ی مبنای یونی عملکرد سلول‌های عصبی به‌طور مشترک برنده‌ی جایزه‌ی نوبل شدند. رویکرد آن‌ها الهام‌بخش تمام کسانی بوده است که به کاربرد ریاضیات در زیست‌شناسی علاقه‌مندند. این قطعاً عرصه‌ی رو به رشدی برای کاربردهای حسابان خواهد بود. زیست‌شناسی ریاضیاتی عرصه‌ی بی‌حدوحصری برای کاربرد معادلات دیفرانسیل غیرخطی است. زیست‌شناسان ریاضیاتی به کمک روش‌های تحلیلی به سبک نیوتن، روش‌های هندسی به سبک پوانکاره، و اتکای بی‌محابا به کامپیوتر، به دنبال معادلات دیفرانسیل حاکم بر ریتم‌های قلبی، گسترش همه‌گیری‌ها، عملکرد دستگاه ایمنی، هماهنگ‌سازی ژن‌ها، گسترش سرطان، و بسیاری دیگری از اسرار حیات هستند و پیشرفت‌هایی نیز در این زمینه داشته‌اند. هیچ‌کدام از این کارها را بدون حسابان نمی‌توانستیم انجام دهیم.

سامانه‌های پیچیده و نفرین ابعاد بالا

جدی‌ترین محدودیت رویکرد پوانکاره در ارتباط با مغز انسان است که نمی‌تواند فضاهای دارای بیش از سه بُعد را به تصور درآورد. انتخاب طبیعی دستگاه اعصاب ما را به‌گونه‌ای تنظیم کرده است که توانایی درک بالا و پایین، جلو و عقب، و راست و چپ، یعنی سه جهت فضای معمولی، را دارد. هر چقدر هم تلاش کنیم، نمی‌توانیم بعد چهارم را، لااقل به معنای *دیدن* آن در چشم ذهن، به تصور در آوریم. البته با نمادهای انتزاعی می‌توانیم تلاش کنیم که با هر تعداد بُعد کار کنیم. فرما و دکارت نحوه‌ی انجام این کار را به ما نشان دادند. صفحه‌ی xy به ما می‌آموزد که می‌توانیم برای هر بُعد از یک عدد استفاده کنیم. چپ و راست متناظر با عدد x هستند. بالا و پایین با عدد y متناظرند. با در نظر گرفتن عددهای بیشتر، می‌توانیم ابعاد بیشتری را در نظر بگیریم. برای سه بعد، x، y، و z کافی هستند. ولی چرا چهار بعد یا پنج بعد نداشته باشیم؟ هنوز حروف خیلی زیادی باقی مانده‌اند.

شاید شنیده باشید که زمان بُعد چهارم است. در واقع، در نظریه‌های نسبیت خاص و عام اینشتین، فضا و زمان به‌عنوان یک موجودیت واحد، فضا_زمان، با هم ادغام می‌شوند، و به‌صورت یک صحنه‌ی ریاضی چهاربعدی نمایش داده می‌شوند. به بیان تقریبی، فضای معمولی روی سه محور اول و زمان روی محور چهارم ترسیم می‌شود. این آرایش را می‌توان به‌عنوان تعمیم فضای دوبعدی xy فرما و دکارت در نظر گرفت.

ولی ما در این‌جا درباره‌ی فضا_زمان صحبت نمی‌کنیم. محدودیت ذاتی رویکرد پوانکاره به یک عرصه‌ی بسیار انتزاعی‌تر مربوط می‌شود. تعمیمی است از *فضای حالت* انتزاعی که در میدان برداری برای آونگ دیدیم. در آن مثال، یک فضای انتزاعی درست کردیم که یک محور آن زاویه‌ی آونگ و محور دیگر سرعت آن است. در هر لحظه، زاویه و سرعت آونگِ در حال نوسان مقادیر معینی دارد؛ لذا در آن لحظه، آن‌ها متناظر با یک نقطه‌ی واحد در صفحه‌ی زاویه_سرعت هستند. پیکان‌ها در آن صفحه (پیکان‌هایی که مانند دستورالعمل‌های رقص به نظر می‌رسند) مشخص می‌کردند که حالت از یک لحظه به لحظه‌ی دیگر، بر اساس معادله‌ی دیفرانسیل نیوتن برای آونگ، چگونه تغییر می‌کند. با دنبال کردن جهت پیکان‌ها، می‌توانستیم پیش‌گویی کنیم که آونگ چگونه حرکت خواهد کرد. بسته به این‌که آونگ از کجا شروع کرده باشد، ممکن است به جلو و عقب نوسان کند، یا این‌که در بالا حرکت گردابی داشته باشند. همه‌ی این‌ها در تصویر گنجانده شده است.

نکته‌ی کلیدی که باید به آن توجه کرد، این است که فضای حالت آونگ بدان

جهت دو بعد داشت که دو متغیر—یعنی زاویه و سرعت آونگ—برای پیش‌بینی آینده‌ی آن لازم و کافی بودند. این دو متغیر دقیقاً اطلاعاتی را که برای پیش‌بینی زاویه و سرعت آن در لحظه‌ی بعد و نیز لحظه‌ی پس از آن و همین‌طور الی آخر در آینده لازم داریم، به ما می‌دهند. بدین معنا، آونگ ذاتاً یک سیستم دوبعدی است. یک فضای حالت دوبعدی دارد.

نفرین ابعاد بالا زمانی ظاهر می‌شود که سیستم‌های پیچیده‌تر از یک آونگ را در نظر می‌گیریم. مثلاً همان مسئله‌ای را که که موجب شد نیوتن سردرد بگیرد، در نظر می‌گیریم، مسئله‌ی سه جسم با گرانش متقابل. فضای حالت آن هجده بُعد دارد. برای اینکه علت آن را دریابید، روی یکی از اجسام تمرکز کنید. در هر لحظه، این جسم در مکانی از فضای فیزیکی سه‌بعدی معمولی قرار دارد. مکان آن را می‌توان با سه عدد مشخص کرد: x، y، و z. هم‌چنین، در هر کدام از این سه راستا می‌تواند حرکت کند، که متناظر با سه سرعت است. ازاین‌رو، یک جسم واحد نیاز به شش نوع اطلاعات دارد: سه مختصه برای مکان آن، به‌اضافه‌ی سه مختصه‌ی دیگر برای سرعت آن در راستاهای مختلف. این شش عدد، مکان و چگونگی حرکت آن را مشخص می‌کنند. حال اگر این شش عدد را در سه جسم موجود در مسئله ضرب کنیم، $۶ \times ۳ = ۱۸$ بُعد در فضای حالت خواهید داشت. بنابراین، در رویکرد پوانکاره، تغییرات حالت سیستم سه جسم دارای گرانش متقابل با یک نقطه‌ی انتزاعی مشخص می‌شود که در یک فضای هجده‌بعدی حرکت می‌کند. با گذشت زمان، این نقطه‌ی انتزاعی مسیری را طی می‌کند، مشابه با مسیر یک ستاره‌ی دنباله‌دار یا گلوله‌ی توپ واقعی، با این تفاوت که این مسیر انتزاعی در عرصه‌ی تخیلی پوانکاره، فضای حالت هجده‌بعدی مسئله‌ی سه جسم، قرار دارد.

وقتی که دینامیک غیرخطی را برای زیست‌شناسی به کار می‌گیریم، غالباً مجبور می‌شویم که با فضاهایی با ابعاد حتی بالاتر از این کار کنیم. مثلاً در علوم اعصاب، لازم است که تغییر غلظت سدیم، پتاسیم، کلسیم، کلرید، و سایر یون‌های درگیر در معادلات غشای عصبی هاجکین و هاکسلی را ردیابی کنیم. نمونه‌های امروزی معادلات آن‌ها تا صدها متغیر دارد. این متغیرها نشان دهنده‌ی تغییر غلظت یون‌ها در سلول عصبی، تغییر ولتاژ در دو سوی غشای سلولی، و تغییر توانایی غشا برای هدایت یون‌های مختلف و دادن اجازه‌ی عبور به آن‌ها برای وارد شدن به سلول یا خارج شدن از آن است. فضای حالت انتزاعی در این مورد صدها بعد دارد، یک بعد به ازای هر متغیر—یکی برای غلظت پتاسیم، یکی دیگر برای غلظت سدیم، بعد سوم برای ولتاژ، بعد چهارم برای هدایت‌پذیری سدیم، و الی آخر. در هر لحظه‌ی داده شده، هر کدام از

این متغیرها مقدار معینی را اتخاذ می‌کند. معادلات هاجکین_هاکسلی (یا تعمیم آنها) دستورات رقص را به متغیرها می‌دهند و به آن‌ها می‌گویند که در چه مسیری حرکت کنند. به این طریق، می‌توان با بهره‌گیری از کامپیوتر برای پیش بردن مرحله به مرحله‌ی مسیرها در فضای حالت، دینامیک سلول‌های عصبی، سلول‌های مغزی، و سلول‌های قلب را، گاه حتی با دقتی تعجب‌آور، پیش‌بینی کرد. از نتایج این رویکرد برای مطالعه‌ی فرایندهای مرضی و آریتمی‌های قلبی و برای طراحی بهتر دستگاه‌های دفیبریلاتور [الکتروشوک] استفاده می‌شود.

امروزه ریاضی‌دانان به کرّات درباره‌ی فضاهای انتزاعی با تعداد ابعاد دلخواه فکر می‌کنند. ما درباره‌ی فضای n_بُعدی صحبت می‌کنیم و هندسه و حسابان را برای هر تعداد بعد توسعه داده‌ایم. به‌طوری که در فصل ۱۰ دیدیم، آلن کورماک، مخترع زیربنای نظری سی‌تی_اسکن، صرفاً از روی کنجکاوی فکری، این سؤال را مطرح کرد که سی‌تی_اسکن در فضای چهاربعدی چگونه خواهد بود. روحیه‌ی ماجراجویی محض تا کنون ثمرات بزرگی در بر داشته است. زمانی که اینشتین برای فضا و زمان خمیده در نسبیت عام نیاز به هندسه‌ی چهاربعدی داشت، با کمال مسرت متوجه شد که به لطف برنارد ریمان این هندسه از قبل وجود دارد، چرا که او چند دهه قبل آن را صرفاً به دلایل محض ریاضی ایجاد کرده بود.

بنابراین، درباره‌ی دنبال کردن کنجکاوی شخصی در ریاضیات حرف‌های زیادی می‌توان گفت. این کار غالباً پاداش‌های علمی و عملی دارد که قابل‌پیش‌بینی نیست. به‌علاوه، خود این کار به ریاضی‌دانان لذتی عظیم می‌دهد و پیوندهای پنهان را بین بخش‌های مختلف ریاضیات آشکار می‌کند. به‌خاطر این دلایل، بررسی فضاهای ابعاد بالاتر در دویست سال گذشته بخش مهمی از ریاضیات بوده است.

با این حال، گرچه یک سیستم انتزاعی برای انجام کارهای ریاضی در فضاهای با ابعاد بالا داریم، ولی ریاضی‌دانان هنوز در مصور کردن آن‌ها مشکل دارند. اصلاً بگذارید با صراحت بگوییم—ما *نمی‌توانیم* آنها را به تصور درآوریم. مغز ما کلاً قادر به این کار نیست. برای این کار ساخته نشده‌ایم.

این محدودیت شناختی ضربه‌ی شدیدی به برنامه‌ی پوانکاره، لااقل در ابعاد بالاتر از سه، وارد می‌کند. رویکرد او به دینامیک غیرخطی بستگی به شهود بصری دارد. اگر نتوانیم به تصویر بکشیم که در چهار یا هجده یا یک‌صد بعد چه اتفاقی می‌افتد، رویکرد او نمی‌تواند زیاد برایمان مفید باشد. این مانع بزرگی برای پیشرفت در رشته‌ی *سیستم‌های پیچیده* شده است، که در آن برای بررسی هزاران واکنش بیوشیمیایی که در سلول زنده‌ی سالم اتفاق می‌افتند و یا توضیح این‌که چرا در جریان سرطان دچار مشکل

می‌شوند، دقیقاً نیاز به فهمیدن فضاهای با ابعاد بالا داریم. برای این‌که کوچک‌ترین امیدی وجود داشته باشد که با استفاده از معادلات دیفرانسیل از زیست‌شناسی سلولی سر دربیاوریم، باید بتوانیم این معادلات را با فرمول حل کنیم (که سوفیا کوالفسکایا نشان داد که امکان آن وجود ندارد) یا این‌که آن‌ها را به تصور درآوریم (که به علت محدودیت مغزمان قادر به انجام آن نیستیم).

بنابراین، ریاضیات سیستم‌های غیرخطی پیچیده دلسرد کننده است. به نظر می‌رسد که همیشه، اگر نه غیرممکن، دشوار خواهد بود که پیشرفتی در زمینه‌ی مسایل دشوار روزگار ما صورت پذیرد، از رفتار اقتصادها، جوامع، و سلول‌ها گرفته تا سازوکار دستگاه ایمنی، ژن‌ها، مغز، و خودآگاهی.

دشواری دیگر این است که حتی نمی‌دانیم که آیا بعضی از این سیستم‌ها حاوی الگوهایی شبیه الگوهایی که کپلر و گالیله کشف کردند، هستند؟ سلول‌های عصبی ظاهراً چنین الگوهایی دارند، ولی درباره‌ی اقتصادها یا جوامع چه می‌توان گفت؟ در بسیاری از رشته‌ها، درک انسانی در مرحله‌ی پیشا ـ گالیله‌ای و پیشا ـ کپلری قرار دارد. الگوها را پیدا نکرده‌ایم. پس چگونه می‌توانیم نظریه‌های عمیق‌تری پیدا کنیم که منجر به درک آن الگوها شود؟ زیست‌شناسی و روان‌شناسی و اقتصاد هنوز نیوتنی نیستند، چرا که حتی گالیله‌ای و کپلری هم نیستند. راه درازی در پیش داریم.

کامپیوتر، هوش مصنوعی، و معمای آگاهی

این‌جا است که صدای برتری‌جویان کامپیوتری بلند می‌شود. آن‌ها می‌گویند با کامپیوتر و هوش مصنوعی، همه‌ی این مسایل حل خواهد شد. و شاید هم حرفشان درست باشد. کامپیوتر از از دیرباز در مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل، دینامیک غیرخطی، و سیستمی پیچیده به ما کمک کرده است. زمانی که هاجکین و هاکسلی در دهه‌ی ۱۹۵۰ دریچه‌ای را به درک چگونگی کارکرد سلول‌های عصبی گشودند، معادلات دیفرانسیل جزئی خود را روی یک ماشین‌حساب دستی حل کردند. زمانی که مهندسان بوئینگ در سال ۲۰۱۱ بوئینگ ۷۸۷ دریم‌لاینر را طراحی کردند، برای محاسبه‌ی برآ و پسای هواپیما و یافتن راهی برای جلوگیری از ارتعاش ناخواسته‌ی بال‌های آن از ابررایانه بهره گرفتند.

کامپیوترها در ابتدا ماشین‌های محاسبه—*محاسبه‌گر*—بودند، ولی حالا چیزی بیش از آن‌اند. به نوعی هوش مصنوعی دست یافته‌اند. مثلاً «ترجمه‌ی گوگل» حالا زبان‌ها را به‌طور شگفت‌انگیزی ترجمه می‌کند. سیستم‌های هوش مصنوعی پزشکی نیز هستند که بیماری‌ها را دقیق‌تر از بهترین متخصصان انسانی تشخیص می‌دهند.

با این حال، فکر نمی‌کنم کسی بگوید که ترجمه‌ی گوگل زبان‌ها را می‌فهمد یا سیستم‌های هوش مصنوعی پزشکی بیماری‌ها را می‌فهمند. آیا زمانی خواهد رسید که کامپیوتر آگاهی داشته باشد؟ اگر چنین شود، آیا آن‌ها خواهند توانست آگاهی خود را درباره‌ی چیزهایی که برای ما مهم است، مانند سیستم‌های پیچیده، که در دل اکثر مسایل بزرگ حل نشده‌ی علم قرار دارند، با ما در میان بگذارند؟

برای این‌که مطالب له و علیه امکان آگاهی کامپیوتری را بررسی کنیم، تکامل شطرنج کامپیوتری را در نظر بگیرید. در سال ۱۹۹۷، برنامه‌ی بازی شطرنج آی‌بی‌ام با نام دیپ بلو موفق شد قهرمان شطرنج جهان، گری کاسپاروف، را در یک بازی شش‌مرحله‌ای شکست دهد. با آنکه این رویداد در آن زمان غیرمنتظره بود، ولی راز بزرگی در این موفقیت نهفته نبود. ماشین می‌توانست دویست میلیون موقعیت را در ثانیه ارزیابی کند. ماشین آگاهی نداشت، ولی سرعت بالایی داشت، هرگز خسته نمی‌شد، هرگز در محاسبه اشتباه نمی‌کرد، و هرگز یادش نمی‌رفت که یک دقیقه‌ی پیش چه فکر می‌کرده است. با این حال، مثل یک کامپیوتر بازی می‌کرد، ماشینی و مادی. می‌توانست بهتر از کاسپاروف محاسبه کند، ولی نمی‌توانست بهتر از او فکر کند. نسل کنونی قوی‌ترین برنامه‌های شطرنج دنیا، با نام‌های مرعوب کننده‌ای مانند استاک‌فیش و کومودو، هنوز هم با همان سبک غیرانسانی بازی می‌کنند. دنبال به دست آوردن ماده هستند. مثل آهن دفاع می‌کنند. ولی با آن‌که از هر بازیکن انسانی بسیار قوی‌ترند، ولی خلاق یا بینشمند نیستند.

با ظهور یادگیری ماشینی، همه‌ی این‌ها تغییر کرد. در روز ۵ دسامبر ۲۰۱۷، تیم دیپ‌مایند در گوگل با اعلام برنامه‌ی یادگیری عمیق خود با نام آلفا زیرو، دنیا را حیرت‌زده کردند. این برنامه با میلیون‌ها بار بازی کردن با خود و درس گرفتن از اشتباهات گذشته، به خودش شطرنج یاد می‌داد. ظرف چند ساعت، این برنامه تبدیل به بهترین بازیکن شطرنج در تاریخ شد. نه تنها به آسانی می‌توانست بهترین استادان انسانی را شکست دهد (حتی زحمت امتحان کردن هم به خودش نداد)، بلکه قهرمانان شطرنج دنیای کامپیوتر را نیز در هم شکست. آلفا زیرو در یک مسابقه‌ی صدمرحله‌ای با استاک‌فیش، که واقعاً برنامه‌ی قَدَری بود، به بیست و هشت پیروزی و هفتاد و دو مساوی دست یافت. حتی یک بار هم شکست نخورد.

ترسناک‌ترین نکته آن است که آلفا زیرو از خودش، آگاهی نشان می‌داد. طوری بازی می‌کرد که تا حالا در کامپیوترها دیده نشده بود، شهودی و زیبا، با شیوه‌ای رمانتیک و تهاجمی. بعضی مهره‌ها را به‌صورت حساب شده فدا می‌کرد و ریسک می‌کرد. در بعضی بازی‌ها، استاک‌فیش را فلج می‌کرد و آن را به بازی می‌گرفت.

کارهایش شرورانه و سادیستی به نظر می‌رسید. خلاقیت آن قابل‌بیان نبود، حرکت‌هایی می‌کرد که هیچ استاد بزرگ یا کامپیوتری حتی به خوب هم نمی‌دید. روحیه‌ی یک انسان را داشت، با قدرت یک ماشین. این نخستین نگاه انسان‌ها به نوع وحشت‌آور جدیدی از هوش بود.

فرض کنید بتوانیم آلفا زیرو یا چیزی شبیه آن را—مثلاً نام آن را آلفا بی‌نهایت می‌گذاریم—به جان بزرگ‌ترین مسایل حل نشده در علوم نظری، مسایل ایمنی‌شناسی و زیست‌شناسی سرطان و خودآگاهی، بیندازیم. برای تکمیل این خیال‌پردازی، فرض کنید الگوهای گالیله‌ای و کپلری در این پدیده‌ها وجود دارند و آماده‌ی برداشت هستند، ولی هوشی بسیار بالاتر از ما برای شناخت آن‌ها لازم است. به فرض آن‌که چنین قوانینی وجود داشته باشند، آیا این هوش ابرانسانی قادر خواهد بود آن‌ها را کشف کند؟ نمی‌دانم. هیچ‌کس نمی‌داند. و شاید هم همه‌ی این حرف‌ها بی‌فایده باشد، یعنی چنین قوانینی اصولاً وجود نداشته باشند.

ولی اگر وجود داشته باشند، و اگر آلفا بی‌نهایت بتواند آن‌ها را پیدا کند، برای ما مانند سروش غیبی خواهد بود. کافی است پیش پایش بنشینیم و به حرف‌هایش گوش کنیم. نخواهیم توانست بفهمیم که چرا حرف‌هایش همیشه درست است یا حتی خود حرف‌هایش را هم درک نخواهیم کرد، ولی محاسبات آن را با آزمایش‌ها و مشاهدات کنترل خواهیم کرد، و خواهیم دید که ظاهراً همه چیز را می‌داند. ما فقط تماشاچیانی خواهیم شد که با شگفتی و سردرگمی تماشا می‌کنند. حتی اگر بتواند مقصودش را توضیح دهد، ما قادر به درک استدلالی آن نخواهیم بود. در آن لحظه، عصر آگاهی که با نیوتن آغاز شد، لااقل برای انسان‌ها، به پایان خواهد رسید، و دوران جدیدی از آگاهی آغاز خواهد شد.

داستان علمی ـ تخیلی؟ شاید. ولی من فکر می‌کنم که یک چنین سناریویی غیرممکن نیست. در بخش‌هایی از ریاضیات و علوم، هم‌اکنون هم شاهد غروب آگاهی هستیم. قضیه‌هایی هستند که به‌وسیله‌ی کامپیوتر ثابت شده‌اند، ولی هیچ انسانی قادر به فهمیدن اثبات آن‌ها نیست. این قضیه‌ها صحیح‌اند، ولی ما درباره‌ی علت آن آگاهی نداریم. و فعلاً، ماشین‌ها هم نمی‌توانند مقصودشان را توضیح دهند.

مثلاً مسئله‌ی ریاضی مشهور و قدیمی موسوم به قضیه‌ی نقشه‌ی چهار رنگ را در نظر بگیرید. این قضیه می‌گوید که تحت برخی محدودیت‌های معقول، هر نقشه‌ی کشورهای هم‌جوار را می‌توان فقط با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد، به‌طوری که هیچ دو کشور همسایه هم‌رنگ نباشند. (مثلاً نقشه‌ی اروپا یا آفریقا یا هر قاره‌ی دیگر، غیر از استرالیا، را در نظر بگیرید، تا منظورم را متوجه شوید.) قضیه‌ی چهار رنگ در سال

۱۹۷۷ به کمک کامپیوتر حل شد، ولی هیچ‌کس نمی‌توانست تمام مراحل اثبات را وارسی کند. گرچه این اثبات از آن زمان تا کنون اعتبارسنجی شده و تا حدودی ساده‌تر شده است، ولی بخش‌هایی از آن به‌طور ناگزیر مشتمل بر استفاده از جستجوی فراگیر است، مانند نحوه‌ی شطرنج بازی کردن کامپیوترها تا قبل از آلفا زیرو. وقتی که این اثبات ارائه شد، خیلی از ریاضی‌دانان فعال از آن خوششان نیامد. آن‌ها از قبل هم به قضیه‌ی چهار رنگ باور داشتند. نیازی به اطمینان از درستی آن نداشتند. بلکه می‌خواستند بدانند *چرا* درست است، و این اثبات در این جهت کمکی نمی‌کرد.

به همین ترتیب، یک مسئله‌ی چهارصدساله‌ی هندسه را که یوهانس کپلر مطرح کرده است، در نظر بگیرید. این مسئله درباره‌ی متراکم‌ترین راه چیدن کره‌های هم‌اندازه در فضای سه‌بعدی است، مثل مشکلی که بقالان هنگام چیدن پرتقال در یک صندوق با آن مواجه هستند. آیا کارآمدتر این است که کره‌ها را در لایه‌های یکسان روی هم بچینیم، به‌طوری که هر کره درست بالای کره‌ی دیگر باشد؟ یا بهتر است که هر لایه را کمی جابه‌جا کنیم تا هر کره در فضای خالی بین چهار کره‌ی پایینی قرار گیرد، به همان روشی که بقال‌ها پرتقال‌ها را روی هم می‌چینند؟ اگر چنین باشد، آیا این نحوه‌ی چیدن بهترین روش ممکن است، یا این‌که یک روش چیدن دیگر که ممکن است نامنظم هم باشد، تراکم بیشتری ایجاد می‌کند؟ حدس کپلر این بود که روش چیدن بقال‌ها، بهترین روش است. ولی این تا سال ۱۹۹۸ ثابت نشده بود. توماس هیلز به‌همراه دانشجویش ساموئل فرگوسن، با استفاده از ۱۸۰,۰۰۰ سطر برنامه‌ی کامپیوتری، محاسبه را به تعدادی زیاد ولی متناهی از حالت‌ها تقلیل دادند. بعد با جستجوی فراگیر و الگوریتم‌های هوشمندانه، برنامه‌ی او این حدس را تأیید کرد. جامعه‌ی ریاضی زیاد تأثیرات قرار نگرفت. حالا می‌دانیم که حدس کپلر صحیح است، ولی هنوز هم نمی‌فهمیم که چرا. آگاهی نداریم. کامپیوتر هیلز هم نمی‌تواند آن را برای ما توضیح دهد.

ولی وقتی که آلفا بی‌نهایت را به جان این‌گونه مسئله‌ها بیندازیم، چه خواهد شد؟ یک چنان ماشینی برهان‌های زیبایی پیدا خواهد کرد، به همان زیبایی بازی‌های شطرنج آلفا زیرو با استاک‌فیش. برهان‌های آن شهودی و زیبا خواهد بود. به قول ریاضی‌دان مجارستانی، پل اردوش، اثبات‌هایی که درست از کتاب درآمده است. اردوش در ذهن خود تصور می‌کرد که خدا کتابی دارد که بهترین برهان‌ها همگی در آن هستند. گفتن این‌که یک اثبات درست از آن کتاب درآمده است، بالاترین تمجید ممکن بود. معنایش این بود که آن اثبات آشکار می‌کرد که *چرا* قضیه درست است، نه آن‌که صرفاً خواننده را با استدلالی زشت و دشوار، وادار به پذیرش آن سازد. من روزی را، در آینده‌ای نه

چندان دور، تصور می‌کنم که هوش مصنوعی اثبات‌های برآمده از کتاب را به ما خواهد داد. آنگاه حسابان چه شکلی خواهد بود، و پزشکی و جامعه‌شناسی و سیاست چگونه خواهند بود؟

پایان سخن

حسابان می‌تواند با بهره‌گیری از بی‌نهایت به روش صحیح، اسرار کیهان را رمزگشایی کند. این اتفاق را بارها و بارها دیده‌ایم، ولی هنوز هم تقریباً معجزه‌آسا به نظر می‌رسد. سیستم استدلالی که انسان‌ها اختراع کرده‌اند، به‌نحوی با هارمونی طبیعت هماهنگ است. نه فقط در مقیاسی که در آن اختراع شده است، قابل اعتماد است—یعنی در مقیاس زندگی روزمره، با چیزهایی مانند فرفره و کاسه‌ی سوپ—بلکه در مقیاس بسیار کوچک اتم‌ها و در مقیاس بسیار بزرگ کیهان نیز هم‌چنان اعتمادپذیری خود را حفظ می‌کند. بنابراین، نمی‌توان گفت که فقط یک ترفند استدلال دایره‌وار است. این‌طور نیست که چیزهایی را که بدانیم، به حسابان بدهیم، و حسابان همان‌ها را به ما پس بدهد؛ حسابان چیزهایی را به ما می‌گوید که هرگز ندیده‌ایم، هرگز نمی‌توانستیم ببینیم، و هرگز نخواهیم دید. در برخی از موارد، درباره‌ی چیزهایی به ما می‌گوید که هرگز وجود نداشته‌اند ولی می‌توانند وجود داشته باشند—به شرط این‌که ذوق آن را داشته باشیم که آن‌ها را در ذهنمان به تصور درآوریم.

از نظر من، این بزرگ‌ترینِ همه‌ی معماها است: چرا جهان هستی قابل‌فهم است، و چرا حسابان با آن هماهنگ است؟ پاسخی برای آن ندارم، ولی امیدوارم شما هم قبول داشته باشید که این ارزش فکر کردن را دارد. بدین منظور، اجازه بدهید که به‌عنوان سه مثال آخر از کارآمدی عجیب حسابان، شما را به قلمرو تخیلات ببرم.

هشت رقم اعشاری

در مثال اول به همان جایی برمی‌گردیم که از آن‌جا شروع کردیم، جایی که ریچارد فاینمن به شوخی گفت که حسابان زبانی است که خدا به آن سخن می‌گوید. این مثال در ارتباط با کارهای خود فاینمن است در زمینه‌ی شاخه‌ی بسط یافته‌ای از مکانیک

کوانتومی که به آن الکترودینامیک کوانتومی یا به اختصار QED می‌گویند. QED نظریه‌ی کوانتومی مربوط به تعامل نور و ماده است. این رشته نظریه‌ی الکتریسیته و مغناطیس ماکسول را با نظریه‌ی کوانتومی هایزنبرگ و شرودینگر و نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین ادغام می‌کند. فاینمن یکی از معماران اصلی QED بود، و با نگاه کردن به ساختار نظریه‌اش می‌توانم بفهمم که چرا این‌قدر حسابان را تحسین می‌کرد. نظریه‌ی او، چه از نظر تاکتیک و چه از نظر سبک، سرشار از حسابان است. مملو از سری‌های توانی، انتگرال، و معادلات دیفرانسیل است، و بازی‌های زیادی با بی‌نهایت دارد.

مهم‌تر این‌که دقیق‌ترین نظریه‌ای است که کسی تا کنون... درباره‌ی هر چیزی ابداع کرده است. هنوز هم فیزیک‌دانان با استفاده از کامپیوتر و به‌کارگیری چیزی که نمودار فاینمن نامیده می‌شود، مشغول جمع بستن سری‌هایی هستند که در QED ظاهر می‌شوند، تا پیش‌بینی‌هایی درباره‌ی خواص الکترون‌ها و ذرات دیگر انجام دهند. آن‌ها با مقایسه‌ی آن پیش‌بینی‌ها با اندازه‌گیری‌های تجربی بسیار دقیق، نشان داده‌اند که نظریه تا هشت رقم اعشاری، یعنی دقت بالاتر از یک *در صد میلیون*، با واقعیت انطباق دارد.

این روش دیگری است برای گفتن این‌که این نظریه اساساً درست است. معمولاً به آسانی نمی‌توان تشبیهی برای فهمیدن معنای چنین اعداد بزرگی پیدا کرد، ولی اجازه بدهید آن را به این صورت برایتان بیان کنم: یک‌صد میلیون ثانیه برابر با ۳٫۱۷ سال است، بنابراین، این‌که چیزی تا یک در صد میلیون دقت داشته باشد، مانند آن است که تصمیم بگیرید که دقیقاً ۳٫۱۷ سال بعد با انگشتان خود بشکن بزنید، و این کار را با دقت یک ثانیه سر وقت انجام دهید—بدون آن‌که از ساعت یا آلارم استفاده کنید.

از نظر فلسفی، این‌ها از جهاتی حیرت‌انگیز است. معادلات دیفرانسیل و انتگرال‌های الکترودینامیک کوانتومی، حاصل ذهن بشرند. البته آن‌ها مبتنی بر تجربیات و مشاهدات‌اند، به‌طوری که تا این حد، واقعیت در ذات آن‌ها قرار گرفته است. با این وجود، حاصل تخیلات هستند. تقلیدی کورکورانه از واقعیت نیستند. نوعی اختراع هستند. و نکته‌ی حیرت‌انگیز این است که ما با نوشتن چیزهایی بر روی کاغذ و انجام دادن برخی محاسبات به روش‌های مشابه روش‌های ابداع شده به‌وسیله‌ی نیوتن و لایبنیتس البته با رنگ‌ولعاب قرن بیست و یکم، قادریم درونی‌ترین خصوصیات طبیعت را پیش‌بینی کنیم و آن‌ها را تا هشت رقم اعشاری برآورد نماییم. هیچ چیزی که بشر تا کنون پیش‌بینی کرده، به دقت پیش‌بینی‌های الکترودینامیک کوانتومی نیست.

من فکر می‌کنم این مسئله‌ی قابل‌توجهی است، زیرا شاهدی است بر نادرستی این مطلب که گهگاه می‌شنویم که علم هم مانند نظام‌های اعتقادی مختلف است و نمی‌تواند ادعای ویژه‌ای بر روی حقیقت داشته باشد. دست بردارید. هر نظریه‌ای که تا

دقت یک در صد میلیون با واقعیت انطباق داشته باشد، نمی‌تواند صرفاً یک نظام اعتقادی یا نظر شخصی باشد. اجباری نداشت که تا هشت رقم اعشاری صحیح باشد. خیلی از نظریه‌ها در فیزیک غلط از آب درآمده‌اند. ولی این یکی نه. لااقل هنوز نه. البته کمی اختلاف دارد، کما این‌که در مورد هر نظریه‌ای همیشه همین‌طور است، ولی قطعاً خیلی به واقعیت نزدیک است.

احضار پوزیترون

دومین مثال از کارایی ترسناک حسابان به یکی از شاخه‌های قبلی مکانیک کوانتومی مربوط می‌شود. در سال ۱۹۲۸، فیزیک‌دان بریتانیایی پل دیراک سعی کرد راهی پیدا کند که نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین را با اصول حاکم بر مکانیک کوانتومی برای یک الکترون که با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کند، آشتی دهد. نظریه‌ای پیدا کرد که به نظر خودش زیبا می‌رسید. عمدتاً بر اساس زیبایی آن را انتخاب کرد. هیچ‌گونه شواهد تجربی خاصی برای این نظریه نداشت، فقط از نظر هنری حس می‌کرد که زیبایی این نظریه نشانه‌ای از درستی آن است. همان قیودی که برای این نظریه در نظر گرفته بود—سازگاری با نسبیت و مکانیک کوانتومی، به‌همراه زیبایی ریاضیاتی—تا حد زیادی دستانش را می‌بست. او پس از کلنجار رفتن با نظریه‌های مختلف، نظریه‌ای را پیدا کرد که تمام معیارهای زیباشناسانه‌ی او را تأمین می‌کرد. به عبارت دیگر، این نظریه بر پایه‌ی جستجو برای هماهنگی به دست آمده بود. بعد، دیراک هم مثل هر دانشمند خوب دیگری، سعی کرد نظریه‌ای را با استخراج پیش‌بینی‌هایی از آن، آزمایش کند. برای او که فیزیک‌دانی نظری بود، این کار به‌معنای استفاده از حسابان بود.

وقتی که معادله‌ی دیفرانسیل‌اش را، که امروزه معادله‌ی دیراک نامیده می‌شود، حل کرد و در طول چند سال بعد آن را تحلیل نمود، مشاهده کرد که چندین پیش‌بینی غافلگیر کننده از آن حاصل می‌شود. یکی آن‌که *پادماده باید وجود داشته باشد*. به عبارت دیگر، باید ذره‌ای معادل با الکترون، ولی با بار مثبت، وجود داشته باشد. در ابتدا فکر کرد که این ذره‌ی خاص ممکن است پروتون باشد، ولی جرم پروتون بیش از حد زیاد بود؛ ذره‌ای که او پیش‌بینی کرده بود، تقریباً دو هزار برابر کوچک‌تر از پروتون بود. تا آن زمان هیچ‌گونه ذره‌ی با بار مثبتی که چنان جرم کمی داشته باشد، شناخته نشده بود. با این حال، معادله‌ی او آن را پیش‌بینی می‌کرد. دیراک آن را آنتی‌الکترون نامید. در سال ۱۹۳۱، مقاله‌ای منتشر کرد و در آن پیش‌بینی کرد زمانی که این ذره، که هنوز مشاهده نشده بود، با یک الکترون برخورد کند، هر دو یکدیگر را نابود می‌کنند. او

نوشت: «این تحول جدید نیازی به هیچ‌گونه تغییر در فرمول‌ها که به‌صورت نمادهای انتزاعی بیان شده است، ندارد»، و بعد با لحنی جدی ادامه داد: «تحت این شرایط، تعجب‌آور می‌بود اگر طبیعت از آن استفاده نمی‌کرد.»

سال بعد، یک فیزیک‌دان تجربی به نام کارل اندرسون که مشغول مطالعه‌ی پرتوهای کیهانی بود، ردّ عجیبی را در اتاقک ابر خود مشاهده کرد. ذره‌ی عجیبی مثل الکترون حرکت می‌کرد، ولی حرکت آن در جهت معکوس بود، گویی بار مثبت داشت. او اطلاعی از پیش‌بینی دیراک نداشت، ولی معنای آن‌چه را می‌دید، اجمالاً متوجه شد. وقتی که اندرسون مقاله‌ای را درباره‌ی آن در سال ۱۹۳۲ منتشر کرد، ویراستار مجله به او پیشنهاد کرد که نام آن را پوزیترون بگذارد. این نام جا افتاد. دیراک سال بعد به‌خاطر معادله‌اش برنده‌ی جایزه‌ی نوبل شد؛ اندرسون هم در سال ۱۹۳۶ به‌خاطر پوزیترون برنده‌ی این جایزه شد.

از آن زمان تا کنون، پوزیترون برای نجات جان افراد به خدمت گرفته شده است. این ذره مبنای اسکن PET (مخفف *برش‌نگاری گسیل پوزیترون*) است، نوعی تصویربرداری پزشکی که به پزشکان امکان می‌دهد که نواحی دارای فعالیت متابولیک غیرطبیعی را در بافت نرم مغز یا اندام‌های دیگر ببینند. اسکن PET که روشی غیرتهاجمی است و نیازی به عمل جراحی یا وارد کردن خطرناک ابزارها به داخل جمجمه ندارد، می‌تواند به تعیین محل تومورهای مغز و آشکارسازی پلاک‌های آمیلوییدی مربوط به بیماری آلزهایمر کمک کند.

این هم نمونه‌ی ناب دیگری که در آن حسابان در خدمت یک کاربرد عملی و مهم قرار گرفته است. از آنجا که حسابان زبان گیتی و نیز موتور منطقی برای رمزگشایی اسرار آن است، دیراک توانست یک معادله‌ی دیفرانسیل برای الکترون بنویسد که چیزی جدید و درست و زیبا را درباره‌ی طبیعت به او نشان داد. این به او کمک کرد که ذره‌ی جدیدی را به تصور درآورد که متوجه شود که این ذره باید وجود داشته باشد. منطق و زیبایی وجود آن را ایجاب می‌کرد. ولی نه به‌تنهایی—بلکه لازم بود که با دیگر حقایق شناخته شده هم‌راستا باشد و با نظریه‌های موجود درآمیخته شود. وقتی که همه‌ی آن‌ها با هم همراه شد، مثل این بود که انگار خود نمادها پوزیترون را به عالم وجود آوردند.

معمای قابل‌فهم بودن گیتی

به‌عنوان سومین مثال از کارآمدی ترسناک حسابان، مناسب به نظر می‌رسد که سفرمان را با همراهی آلبرت اینشتین به پایان ببریم. او تجسمی از بسیاری از مطالبی بود که

درباره‌ی آن‌ها صحبت کردیم: ستودن هماهنگی طبیعت، باور به این‌که ریاضیات از فتوحات تخیل است، و احساس شگفت‌زدگی از فهم‌پذیری جهان هستی.

این مضامین در هیچ جایی بهتر از نظریه‌ی نسبیت عام او مشهود نیست. در این نظریه که شاهکار او محسوب می‌شود، اینشتین مفهوم فضا و زمان نیوتن را واژگون کرد و تعریف دیگری برای رابطه‌ی بین ماده و گرانش ارائه کرد. از نظر اینشتین، گرانش دیگری نیرویی نبود که به‌صورت لحظه‌ای از فاصله‌ی دور عمل می‌کند. بلکه گرانش چیزی تقریباً قابل‌لمس بود، پیچشی در بافتار گیتی، تظاهری از انحنای فضا و زمان. انحنا—ایده‌ای که قدمت آن به زمان تولد حسابان، و شیفتگی ریاضی‌دانان باستان به خطوط خمیده و سطوح خمیده بازمی‌گردد—در دستان اینشتین تبدیل به خاصیتی نه از شکل‌ها که از خود فضا شد. مثل آن است که گویی صفحه‌ی xy فرما و دکارت جان گرفته است. فضا، به‌جای این‌که صحنه‌ای برای نمایش باشد، خودش یک بازیگر شده است. در نظریه‌ی اینشتین، ماده به فضا_زمان می‌گوید که چگونه خم شود، در حالی که انحنا به ماده می‌گوید که چگونه حرکت کند. رقص بین آن‌ها سبب می‌شود که این نظریه غیرخطی باشد.

و ما می‌دانیم که این چه معنایی دارد: فهمیدن نتایج معادلات دشوار است. تا همین امروز، معادلات غیرخطی نسبیت عام اسرار زیادی را پنهان کرده‌اند. اینشتین توانست بعضی از آن‌ها را با استفاده از مهارت ریاضی و پشتکار خود استخراج کند. مثلاً او پیش‌بینی کرد که اختر‌تاب (نور ستارگان)، هنگامی که از کنار خورشید عبور می‌کند تا به سیاره‌ی ما برسد، خمیده می‌شود، که این پیش‌بینی در سال ۱۹۱۹ در جریان خورشیدگرفتگی به اثبات رسید، و سبب شد که نام اینشتین در سراسر جهان بر سر زبان‌ها بیفتد و خبر صفحه‌ی اول *نیویورک تایمز* را به خود اختصاص دهد.

هم‌چنین، این نظریه پیش‌بینی کرد که گرانش می‌تواند اثر عجیبی بر روی زمان داشته باشد: وقتی که شیئی از یک میدان گرانشی عبور می‌کند، گذر زمان ممکن است تندتر یا کندتر شود. این با آن‌که بسیار عجیب به نظر می‌رسد، ولی واقعاً اتفاق می‌افتد. این پدیده در ماهواره‌های سیستم مکان‌یابی جهانی که بر فراز زمین حرکت می‌کنند، باید در نظر گرفته شود. میدان گرانشی در آن بالا ضعیف‌تر است، که موجب کاهش انحنای فضا_زمان می‌شود، و سبب می‌شود که ساعت‌ها تندتر از روی زمین کار کنند. اگر اصلاح برای این اثر انجام نشود، ساعت‌های روی ماهواره‌های GPS زمان دقیق را نشان نخواهد داد. هر روز تقریباً ۴۵ میکروثانیه از ساعت‌های روی زمین جلو خواهد زد. شاید این میزان اختلاف چندان زیاد به نظر نرسد، ولی در نظر داشته باشید که کل سیستم مکان‌یابی جهانی برای اینکه درست کار کند، نیاز به دقت در حد نانوثانیه دارد،

و ۴۵ میکروثانیه معادل ۴۵,۰۰۰ نانوثانیه است. بدون اصلاح بر اساس نسبیت عام، میزان خطای مکان‌یابی جهانی در هر روز به ده کیلومتر می‌رسید، و این سیستم از نظر مسیریابی ارزش خود را طی چند دقیقه از دست می‌داد.

معادلات دیفرانسیل نسبیت عام چند پیش‌بینی دیگر نیز می‌کنند، مانند انبساط جهان و وجود سیاه‌چاله‌ها. تمام این‌ها در زمانی که پیش‌بینی انجام شد، دور از ذهن به نظر می‌رسید، ولی همه‌ی آن‌ها درست از آب درآمده است.

جایزه‌ی نوبل فیزیک سال ۲۰۱۷ به‌خاطر آشکارسازی یک تأثیر تکان‌دهنده‌ی دیگر که به‌وسیله‌ی نسبیت عام پیش‌بینی شده بود، اهدا شد: امواج گرانشی. نظریه نشان می‌داد که یک جفت سیاه‌چاله که به دور یکدیگر می‌چرخند، فضا_زمان را دور خود تاب می‌دهند، و آن را به‌طور ریتمیک می‌کِشند و می‌فشرند. پیش‌بینی می‌شد که اختلالی که در نتیجه‌ی آن در بافتار فضا_زمان ایجاد می‌شود، مانند یک موج با سرعت نور به اطراف منتشر می‌شود. اینشتین شک داشت که اصولاً امکان اندازه‌گیری چنین موجی وجود داشته باشد؛ او نگران بود که این یک توهم ریاضی باشد. موفقیت تیمی که برنده‌ی جایزه‌ی نوبل شدند، این بود که حساس‌ترین آشکارسازی را که تا حالا ساخته شده است، ایجاد کردند. در روز ۱۴ سپتامبر ۲۰۱۵، دستگاه آن‌ها لرزشی را هزار بار کوچک‌تر از قطر پروتون در فضا_زمان آشکارسازی کرد. از نظر مقایسه، مثل آن است که فاصله تا نزدیک‌ترین ستاره را به اندازه‌ی ضخامت یک تار موی انسان تغییر دهید.

اکنون که این کلمات آخر را می‌نویسم، یک شب صاف زمستانی است. بیرون آمده‌ام تا به آسمان نگاه کنم. ستاره‌های آسمان و سیاهی فضا را که می‌بینم، ناگزیر احساس شگفتی می‌کنم.

چطور ما افراد *هومو ساپینس*، گونه‌ای بی‌اهمیت در سیاره‌ای بی‌اهمیت در کهکشانی متوسط، توانسته‌ایم پیش‌بینی کنیم که از برخورد دو سیاه‌چاله در این گیتی پهناور در فاصله‌ی یک میلیارد سال نوری، لرزشی در فضا و زمان ایجاد خواهد شد؟ قبل از آنکه موج به این‌جا برسد، می‌دانستیم چه صدایی خواهد داشت. و به لطف حسابان، کامپیوتر، و اینشتین، حدسمان درست بود.

آن موج گرانشی، ضعیف‌ترین نجوایی بود که تا حالا شنیده شده است. آن موج کوچک آرام از قبل از زمانی که ما در زمره‌ی نخستیان بودیم، قبل از آنکه پستاندار بودیم، از زمانی در گذشته‌ی میکروبی ما، به‌سوی ما رهسپار بود. وقتی که در آن روز در سال ۲۰۱۵ به ما رسید، چون داشتیم گوش می‌دادیم—و چون حسابان بلد بودیم—فهمیدیم که آن نجوای آهسته چه معنایی دارد.

سپاس‌گزاری

نوشتن درباره‌ی حسابان برای مخاطبان عام، چالشی بزرگ و بسیار جالب بود. من از وقتی که حسابان را در دبیرستان یاد گرفتم، عاشق آن بودم و از مدت‌ها پیش این رؤیا را در سر داشتم که این عشق را با خوانندگان زیادی به اشتراک بگذارم، ولی به هر دلیل تا این زمان موفق به این کار نشده بودم. هر بار کار دیگری پیش می‌آمد. یا باید مقاله‌ی پژوهشی می‌نوشتم، یا به دانشجویان تخصصی درس می‌دادم، مطالب تدریسی کلاس‌ها را آماده می‌کردم، بچه‌ها را بزرگ می‌کردم، و سگ را بیرون می‌بردم. بعد، حدود دو سال پیش، ناگهان فهمیدم که سن‌ام (طبیعتاً مثل سن خود شما) با سرعت یک سال در سال افزایش می‌یابد، و لذا احساس کردم که همین حالا بهترین زمان است که در لذت حسابان با دیگران شریک شوم. بنابراین، نخستین تشکر من از شما خواننده‌ی عزیز است. ده‌ها سال است که در ذهن من بوده‌اید. متشکرم که حالا این‌جا هستید.

از قضای روزگار، نوشتن کتابی که همیشه قصد داشتم بنویسم، از آن‌چه انتظار داشتم، سخت‌تر بود. نباید برایم تعجب‌آور می‌بود، ولی بود. من از مدت‌ها پیش غرقه در حسابان بوده‌ام، به‌طوری که خیلی سخت است که از چشم یک تازه‌وارد به آن نگاه کنم. خوش‌بختانه، افراد بسیار باهوش، سخاوتمند، و صبوری به من کمک کردند که اصلاً روحشان هم خبر نداشت که حسابان چیست یا چرا اهمیت دارد، و قطعاً بر خلاف من و همکاران‌ام تمام دقایق روزشان را صرف فکر کردن درباره‌ی ریاضیات نمی‌کردند.

متشکرم از نماینده‌ی انتشاراتی‌ام، کاتینکا ماتسون (Katinka Matson). مدت‌ها پیش، وقتی که اتفاقی گفتم که حسابان یکی از بزرگ‌ترین ایده‌هایی است که تا کنون به ذهن کسی رسیده است، تو گفتی که این کتابی خواهد بود که دوست داری بخوانی. خب، این هم از آن کتاب. بسیار سپاس‌گزارم که به من و به این پروژه باور داشتی.

من افتخار کار کردن با دو ویراستار متبحر را داشتم، ایمون دولان (Eamon Dolan) و آلکس لیتل‌فیلد (Alex Littlefield). ایمون، نمی‌دانم چطوری

از تو تشکر کنم. کار کردن با تو شگفت‌انگیز بود، از اول تا آخر. تو خواننده‌ای بودی که همیشه در ذهن داشتم: خیلی باهوش، کمی شکاک، کنجکاو، و مشتاق خواندن مطالب هیجان‌انگیز. بهتر از همه این‌که ساختار داستان را قبل از خودم می‌فهمیدی و مرا با دستی استوار ولی مهربان هدایت می‌کردی. تو را می‌بخشم که مجبورم کردی پشت سر هم چرک‌نویس کتاب را دوباره بنویسم، چون با این هر کار، هر بار کتاب را بهتر کردی. واقعاً بدون تو نمی‌توانستم این کار را بکنم. آلکس، متشکرم که پیش‌نویس کتاب را تا خط پایان راهنمایی کردی و کار کردن با تو از هر جهت مایه‌ی مسرت بود.

بحث مسرت پیش آمد، چه مسرتی بالاتر از این‌که ویراستاری نهایی کتاب بر عهده‌ی تریسی رو (Tracy Roe) باشد. تریسی، تقریباً دلم می‌خواهد یک کتاب دیگر بنویسم، فقط به‌خاطر چیزهایی که هر گاه با هم کار می‌کنیم، از روی محبت به من آموزش می‌دهی.

از دستیار ویراستاری رزماری مگینس (Rosemary McGuinness) به‌خاطر روحیه‌ی بالا، کارآمدی، و توجه به جزئیات سپاس‌گزارم. از همگان در انتشارات هافتن میفلین هارکورت به‌خاطر سخت‌کوشی و روحیه‌ی تیمی بالا تشکر می‌کنم. از کار کردن با همه‌ی شما احساس خوش‌اقبالی می‌کنم.

مارجی نلسون (Margy Nelson) زحمت تصاویر این کتاب را، مثل بقیه‌ی کتاب‌های من، کشیده است. از تو به‌خاطر دقت و روحیه‌ی همکاری‌ات سپاس‌گزارم.

از همکاران‌ام مایکل بارانی (Michael Barany)، بیل دانهم (Bill Dunham)، پل گینسپارگ (Paul Ginsparg)، و مانیل سوری (Manil Suri) متشکرم که لطف کردند و بخش‌هایی از کتاب یا تمام پیش‌نویس آن را خواندند، بعضی از جملات را بهتر کردند، خطاها را اصلاح کردند (کی می‌دانست که دو نفر به اسم مرکاتور داریم؟)، و پیشنهادهای مفیدی را به شیوه‌ی نکته‌سنجی طرب‌انگیزی که هر فرد دانشگاهی آرزوی آن را دارد، ارائه کردند. مایکل، از نظرات تو چیزهای زیادی یاد گرفتم. ای کاش کتاب را زودتر به تو نشان می‌دادم. بیل، تو یک قهرمانی. پل، تو همان چیزی هستی که همیشه هستی (و در این زمینه، بهترینی). مانیل، ممنونم که اولین پیش‌نویس‌ام را چنان با دقت خواندی، و امیدوارم در کتاب جدیدت موفق باشی. بی‌صبرانه منتظرم که نسخه‌ی چاپی آن را بخوانم.

تام گیلویچ (Tom Gilovich)، هربرت لویی (Herbert Hui)، و لیندا وودارد (Linda Woodard): متشکرم که چنین دوستان خوبی هستید. نزدیک دو سال که در فکر نوشتن این کتاب بودم، مدام درباره‌ی آن نزد شما وراجی می‌کردم و شما به حرف‌هایم گوش می‌دادید، بدون آن‌که دست از دلگرمی دادن به من بردارید یا، تا جایی که برای من

مشهود بود، از توجه‌تان به حرف‌هایم کاسته شود. آلن پرلسون (Alan Perelson) و جان استیلوِل (John Stillwell): من کارهای شما را شدیداً تحسین می‌کنم و برایم مایه‌ی افتخار است که افکارتان را درباره‌ی این کتاب با من در میان گذاشتید. هم‌چنین، از رودریگو تتسوئو آرجنتون (Rodrigo Tetsuo Argenton)، تونی دروز (Tony DeRose)، پیتر شرودر (Peter Schröder)، تونچ تزل (Tunç Tezel)، و استفان زاخوف (Stefan Zachow)، که به من اجازه دادند درباره‌ی پژوهش‌های آن‌ها بحث کنم و تصاویر آن‌ها را در این کتاب بازنشر نمایم، سپاس‌گزاری می‌کنم.

خطاب به موری (Murray): این را میلیون‌ها بار به تو گفته‌ام، و با آن‌که معنای آن را نمی‌فهمی، می‌دانم که منظورم را متوجه می‌شوی. پسر خوب کیه؟ تویی.

و سرانجام، از همسرم، کارول (Carole)، و دخترانم جو (Jo) و لیا (Leah)، به‌خاطر عشق و حمایت آن‌ها، و تحمل کردن قیافه‌ی حواس‌پرت من، که مطمئنم از حالت معمول هم آزار دهنده‌تر بوده است، تشکر می‌کنم. پارادوکس زنون که در آن هر بار نصف راه تا دیوار را می‌رفت، در خانواده‌ی ما معنای کاملاً جدیدی پیدا کرد، چون هر بار فکر می‌کردیم پروژه به پایان رسیده است، باز متوجه می‌شدیم هنوز خیلی راه مانده است. از همه‌ی شما به خاطر شکیبایی و عشق شما بسیار سپاس‌گزارم.

استیون استروگاتز،
ایتاکا، نیویورک

یادداشت‌ها

مقدمه

صفحه

۱ *«زبانی است که خدا به آن صحبت می‌کند»:*
Wouk, *The Language God Talks,* 5.

گیتی عمیقاً بر پایه‌ی ریاضیات است: برای دیدگاه‌های فیزیکی، رک.:
Barrow and Tipler, *Anthropic Cosmological Principle;* Rees, *Just Six Numbers;* Davies, *The Goldilocks Enigma;* Livio, *Is God a Mathematician?;* Tegmark, *Our Mathematical Universe;* and Carroll, *The Big Picture.*
برای دیدگاه فلسفی، رک.:
Simon Friederich, "Fine-Tuning," *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* `https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/fine-tuning/`.

۲ *پاسخ پرسش غایی زندگی، گیتی، و همه چیز:*
Adams, *Hitchhiker's Guide,* and Gill, *Douglas Adams' Amazingly Accurate Answer.*

۳ *«به درد آدمی مثل من بخورد که از ریاضی بی‌اطلاع هستم»:*
Wouk, *The Language God Talks*, 6.

۴ *طور دیگری بازگو می‌شد:* برای بحث‌های تاریخی در این زمینه، رک.:
Boyer, *The History of the Calculus,* and Grattan-Guinness, *From the Calculus.*
منابع زیر داستان حسابان را با بیان برخی از زیباترین مسایل آن و راه‌حل‌های آن‌ها، بازگو می‌کنند:
Dunham, *The Calculus Gallery;* Edwards, *The Historical Development;* and Simmons, *Calculus Gems.*

در رشته‌ی ریاضیات کاربردی: منابع زیر حال‌وهوا، گستردگی، و سرزندگی ریاضیات کاربردی را بیان می‌کنند:
Stewart, *In Pursuit of the Unknown;* Higham et al., *The Princeton Companion;* and Goriely, *Applied Mathematics*.

یک دنیای پاک و بی‌آلایش: این منابع ارتباط ریاضیات و پهنه‌ی وسیع‌تر فرهنگ را بیان می‌کنند:
Kline, *Mathematics in Western Culture,* and Newman, *The World of Mathematics*.

من ساعات زیادی را در دوران دبیرستان برای خواندن این دو شاهکار صرف کردم.

۵ *الکتریسیته و مغناطیس:* برای ریاضیات و فیزیک، رک.:
Maxwell, "On Physical Lines of Force," and Purcell, *Electricity and Magnetism*.

برای مفاهیم و مباحث تاریخی، رک.:
Kline, *Mathematics in Western Culture,* 304–21; Schaffer, "The Laird of Physics"; and Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 11.
برای زندگی‌نامه‌ی ماکسول و فارادی، رک.:
Forbes and Mahon, *Faraday, Maxwell*.

معادله‌ی ساده و زیبای موج:
Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 8.

۷ *«معمای ابدی جهان»:*
Einstein, *Physics and Reality,* 51.
این مطلب غالباً به‌صورت زیر بیان می‌شود: «فهم‌ناپذیرترین چیز درباره‌ی گیتی، فهم‌پذیری آن است.» برای نمونه‌های بیشتری از گفتاوردهای اینشتین، خواه واقعی و خواه موهومی، رک.:
Calaprice, *The Ultimate Quotable Einstein,* and Robinson, "Einstein Said That."

«کارآمدی نامعقول ریاضیات»:
Wigner, "The Unreasonable Effectiveness"; Hamming, "The Unreasonable Effectiveness"; and Livio, *Is God a Mathematician?*

فیثاغورس:
Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 4–5; Burkert, *Lore and Science;* Guthrie, *Pythagorean Sourcebook;* and C. Huffman, "Pythagoras," `https://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/pythagoras/`.
در منبع زیر، بسیاری از افسانه‌ها درباره‌ی فیثاغورس با بیانی لطیف و طنزی ویرانگر رد شده است.
Martínez, in *Cult of Pythagoras* and *Science Secrets*.

۸ *فیثاغوریان:* منابع زیر، ریاضیات و فلسفه‌ی فیثاغورسی را مورد بحث قرار می‌دهند:

Katz, *History of Mathematics,* 48–51, and Burton, *History of Mathematics*, section 3.2.

۱۶ *گسیل القایی:*
Ball, "A Century Ago Einstein Sparked," and Pais, *Subtle Is the Lord*.
مقاله‌ی اصلی عبارت است از:
Einstein, "Zur Quantentheorie der Strahlung."

۱. بی‌نهایت

۱۹ *سرآغاز ریاضیات:* منابع زیر، مقدمه‌ای آسان، ولی جامع، در زمینه‌ی تاریخ ریاضیات از دوران باستان تا قرن بیستم ارائه می‌کنند:
Burton, *History of Mathematics*, and Katz, *History of Mathematics*.
در سطح پیشرفته‌تر، منبع زیر عالی است:
Stillwell, *Mathematics and Its History*.
برای بررسی گسترده و انسان‌نگرانه به‌همراه اظهارنظرهای غرغرآلود، منبع زیر خیلی خوب است:
Kline, *Mathematics in Western Culture*.

۲۱ *شعبه‌ای از هندسه:* رک.:
Burton, *History of Mathematics,* section 4.5; Katz, *History of Mathematics,* chapters 2 and 3; and Stillwell, *Mathematics and Its History,* chapter 4.

۲۲ *مساحت دایره:* در منبع زیر، برآوردهای باستانی از مساحت دایره در فرهنگ‌های مختلف از سراسر جهان نقل شده است:
Katz, *History of Mathematics,* section 1.5.
نخستین اثبات فرمول با استفاده از روش افنا از سوی ارشمیدس ارائه شد؛ رک.:
Dunham, *Journey Through Genius,* chapter 4, and Heath, *The Works of Archimedes,* 91–93.

۳۴ *ارسطو:*
Henry Mendell, "Aristotle and Mathematics," *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* `https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics/`.

بی‌نهایت بالفعل: منابع زیر درباره‌ی تمایز ارسطو بین بی‌نهایت بالفعل (یا واقعی) و بی‌نهایت بالقوه بحث کرده‌اند:
Katz, *History of Mathematics,* 56, and Stillwell, *Mathematics and Its History*, 54.

جوردانو برونو: منبع زیر، بر اساس شواهد جدید، بیان کرده است که برونو به‌خاطر کیهان‌شناسی‌اش اعدام شد، نه به‌خاطر الهیاتش:

Martínez, *Burned Alive*.

هم‌چنین، رک.:

A. A. Martínez, “Was Giordano Bruno Burned at the Stake for Believing in Exoplanets?,” *Scientific American* (2018), https://blogs.scientificamerican.com/observations/was-giordano-bruno-burned-at-the-stake-for-believing-in-exoplanets/;
D. Knox, “Giordano Bruno,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* https://plato.stanford.edu/entries/bruno/.

۳۵ *بی‌اندازه ظریف و ژرف:* مقاله‌ی راسِل درباره‌ی زنون و بی‌نهایت عبارت است از:

Russell, “Mathematics and the Metaphysicians,” reprinted in Newman, *The World of Mathematics*, vol. 3, 1576–90.

پارادوکس‌های زنون:

Mazur, *Zeno’s Paradox*.

هم‌چنین، رک.:

Burton, *History of Mathematics*, 101–2; Katz, *History of Mathematics*, section 2.3.3; Stillwell, *Mathematics and Its History*, 54; John Palmer, “Zeno of Elea,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/zeno-elea/; and Nick Huggett, “Zeno’s Paradoxes,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* https://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/.

۴۰ *مکانیک کوانتومی:*

Greene, *The Elegant Universe*, chapters 4 and 5.

معادله‌ی شرودینگر:

Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 14.

۴۱ *طول پلانک:* منبع زیر توضیح داده است که چرا فیزیک‌دانان معتقدند که فضا در مقیاس فوق‌میکروسکوپی طول پلانک به‌صورت کف کوانتومی درمی‌آید:

Greene, *The Elegant Universe*, 127–31.

برای بحث فلسفی آن، رک.:

S. Weinstein and D. Rickles, “Quantum Gravity,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, https://plato.stanford.edu/entries/quantum-gravity/.

۲. مردی که بی‌نهایت را مهار کرد

۴۵ *ارشمیدس:* درباره‌ی زندگی او، رک.:

Netz and Noel, *The Archimedes Codex,* and C. Rorres, “Archimedes,” `https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/contents.html`.

برای زندگی‌نامه‌ی علمی او، رک.:

M. Clagett, “Archimedes,” in Gillispie, *Complete Dictionary,* vol. 1, with amendments by F. Acerbi in vol. 19.

درباره‌ی ریاضیات ارشمیدس، هر دو منبع زیر بسیار عالی است:

Stein, *Archimedes*, and Edwards, *The Historical Development*, chapter 2;

و می‌توانید به منبع زیر نیز مراجعه کنید:

Katz, *History of Mathematics,* sections 3.1–3.3, and Burton, *History of Mathematics*, section 4.5.

منبع زیر، مجموعه‌ای علمی از کارهای ارشمیدس فراهم آورده است:

Heath, *The Works of Archimedes*.

داستان‌های جالب زیادی درباره‌ی او: منبع زیر به بحث در خصوص چگونگی پیدایش افسانه‌های مختلف درباره‌ی ارشمیدس پرداخته است، از جمله ماجرای خنده‌دار اورکا، و داستان غم‌انگیز مرگ ارشمیدس به دست سرباز رومی در زمان محاصره‌ی سیراکوز در سال ۲۱۲ ق.م.:

Martínez, *Cult of Pythagoras*, chapter 4.

با آن‌که محتمل به نظر می‌رسد که ارشمیدس در زمان محاصره کشته شده باشد، ولی دلیلی ندارد بپذیریم که آخرین جمله‌ی او این بوده است: «دایره‌هایم را خراب نکن!»

پلوتارک: گفتاوردهای پلوتارک از منبع زیر گرفته شده است:

John Dryden’s translation of Plutarch’s *Marcellus*, available online at `http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html`.

مطالب خاص مربوط به ارشمیدس و محاصره‌ی سیراکوز در منبع زیر نیز موجود است:

`https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Siege/Plutarch.html`.

«خوردن غذا و تیمار شخصی را از یاد می‌برد»:

`http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html`.

«به‌زور به حمام ببرند»:

Ibid.

ویترویوس: داستان اورکا از زبان ویترویوس به زبان لاتین و انگلیسی در منبع زیر موجود است:

`https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/Vitruvius.html`.

این سایت نسخه‌ای کودکانه از داستان را نیز به قلم نویسنده‌ی تحسین شده جیمز بالدوین آورده است، که برگرفته شده است از:

James Baldwin, *Thirty More Famous Stories Retold* (New York: American Book Company, 1905).

متأسفانه، بالدوین و ویترویوس راه‌حل ارشمیدس برای مسئله‌ی تاج طلای پادشاه را بیش از حد ساده کرده‌اند. شرح موجّه‌تری در وب‌سایت رورِس ارائه شده است:
https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html,
که نظر گالیله را هم در مورد این‌که ارشمیدس احتمالاً آن را چگونه حل کرده است، آورده است:
https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/bilancetta.html.

۴۶ *تا ارتفاع بالایی در هوا بلند می‌کردند:*
http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html.

۴۷ *برآورد عدد پی:* منبع زیر نحوه‌ی انجام این کار به‌وسیله‌ی ارشمیدس را به تفصیل بیان کرده است:
Stein, *Archimedes,* chapter 11.
در نظر داشته باشید که در بحث مذکور در این کتاب، محاسبات ریاضی زیادی گنجانده شده است.

۵۱ *وجود اعداد گُنگ:* هیچ‌کس به درستی نمی‌داند چه کسی برای نخستین بار ثابت کرده است که جذر ۲ گنگ است، یا به بیان معادل، قطر مربع بر حسب ضلع آن سنجش‌پذیر نیست. از قدیم مشهور است که یکی از پیروان فیثاغورس به نام هیپاسوس به‌خاطر این مسئله در دریا غرق شد. منبع زیر، پیدایش این افسانه را ردیابی کرده و آن را رد کرده است:
Martínez, *Cult of Pythagoras*, chapter 2.
فیلم‌ساز آمریکایی اِرول موریس نیز در مقاله‌ای طولانی و پرپیچ‌وخم در *نیویورک تایمز* همین مطلب را بیان کرده است؛ رک.:
Errol Morris, “The Ashtray: Hippasus of Metapontum (Part 3),” *New York Times*, March 8, 2001, https://opinionator.blogs.nytimes.com/2011/03/08/the-ashtray-hippasus-of-metapontum-part-3/.

۵۳ *تربیع سهمی:* ترجمه‌ای از متن اصلی ارشمیدس در این منبع آمده است:
Heath, *The Works of Archimedes*, 233–52.
برای جزئیاتی که در استدلال پاره‌های مثلثی به‌طور اجمالی بیان کردم، رک.:
Edwards, *The Historical Development*, 35–39; Stein, *Archimedes*, chapter 7; Laubenbacher and Pengelley, *Mathematical Expeditions*, section 3.2; and Stillwell, *Mathematics and Its History*, section 4.4.
منابع زیادی در این مورد در اینترنت موجود است. یکی از این منابع که وشن‌تری توضیح داده است، عبارت است از:
Mark Reeder, https://www2.bc.edu/mark-reeder/1103quadparab.pdf.

هم‌چنین:
R.A.G. Seely, http://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf.

یا این‌که می‌توانید به منبع زیر مراجعه کنید که از رویکرد هندسه‌ی تحلیلی استفاده کرده است و شاید برایتان راحت‌تر قابل‌فهم باشد:
Simmons, *Calculus Gems*, section B.3.

۵۸ *«وقتی که غیرممکن‌ها را حذف کردید»:*
Arthur Conan Doyle, *The Sign of the Four* (London: Spencer Blackett, 1890), `https://www.gutenberg.org/files/2097/2097-h/2097-h.htm`.

۶۰ *ارشمیدس:* برای متن اصلی، رک.:
Heath, *The Works of Archimedes*, 326 and following.
برای کاربرد روش ارشمیدس در تربیع سهمی، رک.:
Laubenbacher and Pengelley, *Mathematical Expeditions*, section 3.3, and Netz and Noel, *The Archimedes Codex,* 150–57.
برای کاربرد روش ارشمیدس در چندین مسئله‌ی دیگر در خصوص مساحت، حجم، و گرانیگاه، رک.:
Stein, *Archimedes,* chapter 5, and Edwards, *The Historical Development,* 68–74.

«یک نمایش واقعی از نتایج مورد نظر ارائه نمی‌کند»: نقل شده در:
Stein, *Archimedes*, 33.

۶۱ *هنوز به ذهن ما نرسیده است:* نقل شده در:
Netz and Noel, *The Archimedes Codex,* 66–67.

۶۵ *«از همه‌ی خطوط موازی»:*
Heath, *The Works of Archimedes*, 17.

«رسم شده در درون منحنی»:
Dijksterhuis, *Archimedes*, 317.
دیکسترویس نیز، مثل من، می‌گوید که روش ارشمیدس تا حدودی نشان دهنده‌ی استفاده از ابزارهای ناپاک است. در واقع، نشان می‌دهد که استفاده از بی‌نهایت بالفعل «فقط در رساله‌های منتشر شده قدغن بوده است»، ولی این مانع از آن نمی‌شده است که ارشمیدس به‌طور خصوصی از ان استفاده کند. به گفته‌ی دیکسترویس: «در کارگاه تولید ریاضی‌دان»، استدلال بر پایه‌ی بی‌نهایت بالفعل «هم‌چنان مورد استفاده بود».

«نوعی نشانه»:
Heath, *The Works of Archimedes*, 17.

۶۶ *حجم کره:*
Stein, *Archimedes*, 39–41.

۶۷ *«در ذات شکل‌ها»:*
Heath, *The Works of Archimedes*, 1.

۶۹ *نسخه‌ی خطی پاک شده‌ی ارشمیدس:* رک.:

Netz and Noel, *The Archimedes Codex*;

مؤلفان داستان دست‌نویس گم‌شده و بازیابی آن را با آب‌وتاب بازگو کرده‌اند. یک قسمت جالب از سریال مستند *نووا* نیز درباره‌ی این موضوع بود، و در وب‌سایت مربوط به این سریال، زمان پخش، مصاحبه‌ها، و ابزارهای تعاملی مرتبط با آن آمده است؛ رک.:

`http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/`.

هم‌چنین، رک.:

Stein, *Archimedes*, chapter 4.

میراث ارشمیدس:

Rorres, *Archimedes in the Twenty-First Century*.

فیلم‌های پویانمایی کامپیوتری: برای مسایل ریاضی مربوط به فیلم‌ها و ویدئوهای ساخته شده به‌وسیله‌ی کامپیوتر، رک.

McAdams et al., "Crashing Waves."

مثلث‌سازی تقریبی سر یک مانکن:

Zorin and Schröder, "Subdivision for Modeling," 18.

۷۰ *شرک:*

DreamWorks, "Why Computer Animation Looks So Darn Real," July 9, 2012, `https://mashable.com/2012/07/09/animation-history-tech/#uYHyf6h0.Zq3`.

چهل و پنج میلیون چندضلعی:

Shrek, production information, `http://cinema.com/articles/463/shrek-production-information.phtml`.

آواتار:

"NVIDIA Collaborates with Weta to Accelerate Visual Effects for Avatar," `http://www.nvidia.com/object/wetadigital_avatar.html`, and Barbara Robertson, "How Weta Digital Handled Avatar," *Studio Daily,* January 5, 2010, `http://www.studiodaily.com/2010/01/how-weta-digital-handled-avatar/`.

نخستین فیلمی بود که از میلیاردها چندضلعی استفاده می‌کرد:

"NVIDIA Collaborates with Weta."

داستان اسباب‌بازی:

Burr Snider, "The Toy Story Story," *Wired,* December 1, 1995, `https://www.wired.com/1995/12/toy-story/`.

«تعداد افراد دارای مدرک دکترا که روی این فیلم کار می‌کنند»:

Ibid.

بازی جری:
Ian Failes, "'Geri's Game' Turns 20: Director Jan Pinkava Reflects on the Game-Changing Pixar Short," November 25, 2017, `https://www.cartoonbrew.com/cgi/geris-game-turns-20-director-jan-pinkava-reflects-game-changing-pixar-short-154646.html`.
این فیلم در یوتیوب در نشانی‌های زیر موجود است:
`https://www.youtube.com/watch?v=gLQG3sORAJQ` (original soundtrack) and `https://www.youtube.com/watch?v=9IYRC7g2ICg` (modified soundtrack).

۷۱ *فرایند تقسیم:*
DeRose et al., "Subdivision Surfaces."
می‌توانید در وب‌سایت آکادمی خان با همکاری پیکسار در نشانی زیر، به‌صورت تعاملی تقسیم کردن سطوح را انجام دهید:
`https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/modeling-character`.
دانشجویان و استادان می‌توانند از درس‌های دیگری نیز در بخش‌های «پیکسار در جعبه» و «پشت صحنه‌ی کار هنرمندان پیکسار» بهره بگیرند:
`https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar`.
این روش جالبی است که ببینید امروزه چگونه از ریاضیات در ساختن فیلم‌های سینمایی استفاده می‌شود.

۷۲ *غبغب:*
DreamWorks, "Why Computer Animation Looks So Darn Real."

جراحی صورت:
Deuflhard et al., "Mathematics in Facial Surgery"; Zachow et al., "Computer-Assisted Planning"; and Zachow, "Computational Planning."

۷۶ *پیچ ارشمیدس:*
Rorres, *Archimedes in the Twenty-First Century*, chapter 6, and `https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Screw/Applications.html`.

۷۷ *ارشمیدس ساکت بود:* البته باید اذعان کرد که ارشمیدس یک مطالعه هم در خصوص حرکت انجام داد، ولی این مطالعه درباره‌ی نوعی حرکت مصنوعی بود و با انگیزه‌ی ریاضیات انجام شد، نه فیزیک. به مقاله‌ی او «در باب مارپیچ‌ها» نقل شده در منبع زیر مراجعه کنید:
Heath, *The Works of Archimedes*, 151–88.
در این‌جا، ایده‌های مدرن مختصات قطبی و معادلات پارامتری برای نقطه‌ای که در صفحه حرکت می‌کند را پیش‌بینی کرده است. به‌طور خاص، او نقطه‌ای را در نظر گرفته است که به‌طور یکنواخت

در جهت شعاعی به طرف دور از مبدأ حرکت می‌کند، و هم‌زمان پرتو شعاعی نیز به‌صورت یکنواخت می‌چرخد. او نشان داد که مسیر این نقطه‌ی متحرک، نوعی منحنی است که امروزه به مارپیچ ارشمیدسی مشهور است. آنگاه با جمع بستن $۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲$ و به‌کارگیری روش افنا، مساحت محدود به یک حلقه از مارپیچ و پرتو شعاعی را به دست آورد. رک.:
Stein, *Archimedes*, chapter 9; Edwards, *The Historical Development,* 54–62; and Katz, *History of Mathematics*, 114–15.

۳. کشف قوانین حرکت

۸۰ *«کتاب بزرگی»:*
Galileo, *The Assayer* (1623). Selections translated by Stillman Drake, *Discoveries and Opinions of Galileo* (New York: Doubleday, 1957), 237–38, https://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm.

«جاودان با ذهن الهی»:
Johannes Kepler, *The Harmony of the World,* translated by E. J. Aiton, A. M. Duncan, and J. V. Field, *Memoirs of the American Philosophical Society* 209 (1997): 304.

«الگوهایی را برای آفرینش جهان به خدا می‌دهد»:
Ibid.

تعلیمات افلاطون:
Plato, *Republic* (Hertfordshire: Wordsworth, 1997), 240.

آموزه‌های ارسطو:
Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 17–20.

۸۱ *حرکت پسگرد:*
Katz, *History of Mathematics,* 406.

۸۳ *آریستارخوس:*
Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 24–25, and James Evans, "Aristarchus of Samos," *Encyclopedia Britannica,* https://www.britannica.com/biography/Aristarchus-of-Samos.

ارشمیدس در پاسخ به کیهان‌شناسی خورشیدمرکز:
Evans, "Aristarchus of Samos."

نظام بطلمیوسی:
Katz, *History of Mathematics,* 145–57.

۸۴ *جوردانو برونو:*
Martínez, *Burned Alive*.

گالیلئو گالیله: پروژه‌ی گالیله در نشانی زیر،
http://galileo.rice.edu/galileo.html,
منبع آنلاین ارزشمندی برای زندگی و آثار گالیله است. منبع زیر،
Fermi and Bernardini, *Galileo and the Scientific Revolution*,
که در سال ۱۹۶۱ منتشر شده است، زندگی‌نامه‌ی زیبایی از گالیله برای خوانندگان عمومی است. برای آشنایی سریع با کارهای گالیله، می‌توانید به منابع زیر مراجعه کنید:
Asimov's Biographical Encyclopedia, 91–96, and Kline, *Mathematics in Western Culture,* 182–95.

برای بحث عالمانه در این زمینه، رک.:
Drake, *Galileo at Work*, and Michele Camerota, "Galilei, Galileo," in Gillispie, *Complete Dictionary,* 96–103.

مارینا گامبا:
http://galileo.rice.edu/fam/marina.html.

دختر بزرگ‌ترش، ویرجینیا، را بیشتر دوست داشت:
Sobel, *Galileo's Daughter*.
نامه‌های خواهر ماریا چلسته به پدرش در نشانی زیر در دسترس است:
http://galileo.rice.edu/fam/daughter.html#letters.

۸۶ *دو علم جدید:* این کتاب به‌رایگان در نشانی زیر در دسترس است:
http://oll.libertyfund.org/titles/galilei-dialogues-concerning-two-new-sciences.

پیشنهاد کرده بود که اشیای سنگین از آن رو می‌افتند:
Kline, *Mathematics in Western Culture*, 188–90.

۸۷ *«یک دهم یک ضربان نبض»:*
Galileo, *Discourses*, 179, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_607.

«مانند نسبت اعداد فرد با شروع از یک است»:
Ibid., 190, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_516.

۸۹ *«بسیار راست، هموار، و صیقلی»:*
Ibid., 178, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_607.

۹۰ *«به کلفتی ریسمان کشتی»:*

Ibid., 109, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_242.

۹۱ چلچراغ بزرگ بالای سرش تکان می‌خورد:
Fermi and Bernardini, *Galileo and the Scientific Revolution*, 17–20, and Kline, *Mathematics in Western Culture*, 182.

۹۲ «هزاران بار نوسان‌ها را مشاهده کرده‌ام»:
Galileo, *Discourses*, 140, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_338.

«نسبت طول‌ها به یکدیگر برابر با نسبت مربع زمان‌ها به یکدیگر است»:
Ibid., 139, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_335.

۹۳ «ممکن است برای خیلی‌ها خشک به نظر برسد»:
Ibid., 138, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_329.

پیوندگر جوزفسون:
Strogatz, *Sync*, chapter 5, and Richard Newrock, "What Are Josephson Junctions? How Do They Work?," *Scientific American*, https://www.scientificamerican.com/article/what-are-josephson-juncti/.

۹۴ مسئله‌ی طول جغرافیایی:
Sobel, *Longitude*.

۹۵ سیستم مکان‌یابی جهانی:
Thompson, "Global Positioning System," and https://www.gps.gov.

۹۷ یوهانس کپلر: برای زندگی و آثار کپلر، رک.:
Owen Gingerich, "Johannes Kepler," in Gillispie, *Complete Dictionary*, vol. 7, online at https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14, with amendments by J. R. Voelkel in vol. 22.

هم‌چنین، رک.:
Kline, *Mathematics in Western Culture*, 110–25; Edwards, *The Historical Development,* 99–103; Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 96–99; Simmons, *Calculus Gems*, 69–83; and Burton, *History of Mathematics*, 355–60.

۹۸ «گرایش‌های مجرمانه»: نقل شده در:
Gingerich, "Johannes Kepler," https://www.encyclopedia.com/people/

science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14.

«بدخُلق»:

Ibid.

«هوش و ذکاوت سرشاری»:

Ibid.

«روز و شب غرق محاسبه بودم»:

Ibid.

۱۰۰ *«عظمت خدا در ستاره‌شناسی پدیدار شده است»:*

Ibid.

۱۰۱ *«از این روند پرزحمت خسته شده‌اید»:* کپلر در کتاب *ستاره‌شناسی نوین*، نقل شده در:
Owen Gingerich, *The Book Nobody Read: Chasing the Revolutions of Nicolaus Copernicus* (New York: Penguin, 2005), 48.

۱۰۵ *«جنون مقدس»:* نقل شده در:
Gingerich, "Johannes Kepler," https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14.

۱۰۶ *«به حماقت خارق‌العاده‌ی این جماعت بخندیم»:* نقل شده در:
Martínez, *Science Secrets*, 34.

۱۰۷ *«کپلر دل‌باخته‌ی رؤیای فیثاغورسی شد»:*

Koestler, *The Sleepwalkers*, 33.

۴. سرآغاز حساب دیفرانسیل

۱۱۰ *چین، هندوستان، و دنیای اسلام:*
Katz, "Ideas of Calculus"; Katz, *History of Mathematics,* chapters 6 and 7; and Burton, *History of Mathematics*, 238–85.

۱۱۱ *حسن ابن هیثم:*
Katz, "Ideas of Calculus," and J. J. O'Connor and E. F. Robertson, "Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham," http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham.html.

۱۱۲ *فرانسوا ویِت:*

Katz, *History of Mathematics,* 369–75.

کسرهای اعشاری:

Ibid., 375–78.

اوانجلیستا توریچلی و بوناوِنتورا کاوالیِری: در منبع زیر، مبارزات آن‌ها با یسوعیون بر سر بی‌نهایت‌کوچک‌ها ذکر شده است، زیرا مفهوم بی‌نهایت‌کوچک نه فقط از نظر ریاضی، که از نظر مذهبی نیز خطرناک شمرده می‌شد:

Alexander, *Infinitesimal*.

۱۱۸ *رنه دکارت:* برای زندگی او، رک.:

For his life, see Clarke, *Descartes;* Simmons, *Calculus Gems*, 84–92; and Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 106–8.

برای خلاصه‌ای از کارهای او در زمینه‌ی ریاضیات و فیزیک، رک.:

Kline, *Mathematics in Western Culture*, 159–81; Edwards, *The Historical Development*; Katz, *History of Mathematics,* sections 11.1 and 12.1; and Burton, *History of Mathematics*, section 8.2.

برای بررسی عالمانه‌ی تاریخی کارهای او در زمینه‌ی ریاضیات و فیزیک، رک.

Michael S. Mahoney, "Descartes: Mathematics and Physics," in Gillispie, *Complete Dictionary*, also online at *Encyclopedia Britannica*, `https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/descartes-mathematics-and-physics`.

«آن‌چه باستانیان به ما آموخته‌اند»:

René Descartes, *Les Passions de l'Ame* (1649), quoted in Guicciardini, *Isaac Newton,* 31.

۱۱۹ *«کشور خرس‌ها در میان سنگ و یخ»:*

Henry Woodhead, *Memoirs of Christina, Queen of Sweden* (London: Hurst and Blackett, 1863), 285.

۱۲۰ *پیر دو فرما:* منبع زیر بررسی جامعی در مورد او دارد:

Mahoney, *Mathematical Career*.

منبع زیر زندگی فرما را به‌صورت دقیق و سرگرم کننده بررسی کرده است (در واقع، همه‌ی آثار این نویسنده به همین صورت است؛ اگر هنوز کتاب‌های سیمونز را نخوانده‌اید، باید بخوانید):

Simmons, *Calculus Gems*, 96–105.

فرما و دکارت شاخ‌به‌شاخ شدند:

Mahoney, *Mathematical Career*, chapter 4.

۱۲۱ *سعی داشت شهرت او را نابود کند:*

Ibid., 171.

فرما اول آن را ابداع کرد: با ارزیابی ارائه شده در منبع زیر،
Simmons, *Calculus Gems*, 98,
درباره‌ی این‌که انتساب اختراع هندسه‌ی تحلیلی چگونه باید باشد، موافقم: «در ظاهر به نظر می‌رسد که مقاله‌ی دکارت همان هندسه‌ی تحلیلی است، اما این‌طور نیست؛ مطالب فرما به ظاهر این‌گونه به نظر نمی‌رسد، ولی در واقع، چنین است.» برای دیدگاه‌های متعادل‌تر، رک.:
Katz, *History of Mathematics,* 432–42, and Edwards, *The Historical Development,* 95–97.

یافتن روشی تحلیلی:
Guicciardini, *Isaac Newton*, and Katz, *History of Mathematics,* 368–69.

نوعی ناقلابی پست و حقیقتاً رقت‌انگیز:
Descartes, rule 4 in *Rules for the Direction of the Mind* (1629),
نقل شده در:
Katz, *History of Mathematics,* 368–69.

«جبر روش تحلیل پخمه‌ها در ریاضیات است»:
Quoted in Guicciardini, *Isaac Newton*, 77.

۱۲۲ *مسئله‌های بهینه‌سازی:* در منبع زیر، کار فرما بر روی مسئله‌ی بیشینه‌سازی که در متن اصلی ارائه شده، مورد بحث قرار گرفته است:
Mahoney, *Mathematical Career*, 199–201.

۱۲۶ *برابری تقریبی:*
Ibid., 162–65, and Katz, *History of Mathematics*, 470–72.

۱۲۷ *JPEG:*
Austin, "What Is . . . JPEG?," and Higham et al., *The Princeton Companion,* 813–16.

تغییر طول روز: برای به دست آوردن این اطلاعات درباره‌ی هر محل مورد نظر، می‌توانید به وب‌سایت timeanddate.com مراجعه کنید.

۱۳۲ *به نام موجک:* برای مقدمه‌ی آسانی در مورد موجک‌ها و کاربردهای آن‌ها، رک.:
Dana Mackenzie, "Wavelets: Seeing the Forest and the Trees," in Beyond Discovery: The Path from Research to Human Benefit, a project of the National Academy of Sciences; go to `http://www.nasonline.org/publications/beyond-discovery/wavelets.pdf`.
سپس می‌توانید منابع زیر را امتحان کنید:
Kaiser, *Friendly Guide*, Cipra, "*Parlez-Vous* Wavelets?," or Goriely, *Applied Mathematics,* chapter 6.
منبع زیر یک رشته سخنرانی‌های شاخص درباره‌ی جنبه‌های ریاضی موجک‌ها از طرف یکی از

پیشگامان این رشته است:

Daubechies, *Ten Lectures*.

اف‌بی‌آی از موجک‌ها:

Bradley et al., “FBI Wavelet/Scalar Quantization.”

۱۳۳ *ریاضی‌دانان آزمایشگاه ملی لُس‌آلاموس به همکاری با اف‌بی‌آی پرداختند:*

Bradley and Brislawn, “The Wavelet/Scalar Quantization”; Brislawn, “Fingerprints Go Digital”; and `https://www.nist.gov/itl/iad/image-group/wsq-bibliography`.

۱۳۵ *قانون سینوس‌های اسنل:*

Kwan et al., “Who Really Discovered Snell’s Law?,” and Sabra, *Theories of Light*, 99–105.

۱۳۶ *اصل کمترین زمان:*

Mahoney, *Mathematical Career*, 387–402.

۱۳۷ *«تمایل ذاتی من به تنبلی»:*

Ibid., 398.

«هنوز نتوانسته‌ام از حیرت دربیایم»: این را از مطلب فرانسوی فرما ترجمه کرده‌ام:

Ibid., 400.

اصل کمترین عمل: اصل کمترین زمان فرما، اصل کمترین عمل را که عمومی‌تر از آن است، پیش‌بینی می‌کند. برای بحث سرگرم کننده و بسیار روشنگر درباره‌ی این اصل، از جمله مبنای آن در مکانیک کوانتومی، رک.:

R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, “The Principle of Least Action,” *Feynman Lectures on Physics,* vol. 2, chapter 19 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1964), and Feynman, *QED*.

۱۳۸ *روش دیگری برای یافتن خط‌های مماس:*

Katz, *History of Mathematics*, 472–73.

۱۳۹ *روشی عمومی:* نقل شده در:

Grattan-Guinness, *From the Calculus*, 16.

۱۴۰ *«حتی نمی‌خواهم اسم او را ببرم»:* نقل شده در:

Mahoney, *Mathematical Career*, 177.

مساحت زیر منحنی:

Simmons, *Calculus Gems*, 240–41; and Katz, *History of Mathematics,* 481–84.

مطالعات او نتوانست: منبع زیر توضیح می‌دهد که فرما نباید به‌عنوان مخترع حسابان در نظر

گرفته شود، و دلایل خوبی نیز برای این ادعا می‌آورد:
Katz, *History of Mathematics,* 485.

۵. چهارراه

۱۵۰ *لگاریتم برای پاسخ دادن به این‌گونه سؤالات اختراع شده است:*
Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 2, and Katz, *History of Mathematics,* section 10.4.

۱۵۵ *ادعا می‌شد از آثار فِرمیر است:*
Braun, *Differential Equations,* section 1.3.

۶. واژگان تغییر

۱۷۸ *اوسین بولت:*
Bolt, *Faster than Lightning*.

آن شب در پکن:
Jonathan Snowden, "Remembering Usain Bolt's 100m Gold in 2008," `Bleacherreport.com` (August 19, 2016), `https://bleacherreport.com/articles/2657464-remembering-usain-bolts-100m-gold-in-2008-the-day-he-became-a-legend`, and Eriksen et al., "How Fast."
برای ویدئوی زنده‌ای از عملکرد حیرت‌انگیز او، رک.:
`https://www.youtube.com/watch?v=qslbf8L9nl0` and `http://www.nbcolympics.com/video/gold-medal-rewind-usain-bolt-wins-100m-beijing`.

۱۷۹ *این اصلاً اخلاق من است:*
Snowden, "Remembering Usain Bolt's."

۱۸۲ *نقطه‌ها را با خط راست به هم وصل کنیم:* تحلیل من مبتنی بر منبع زیر است:
A. Oldknow, "Analysing Men's 100m Sprint Times with TI-Nspire," `https://rcuksportscience.wikispaces.com/file/view/Analysing+men+100m+Nspire.pdf`.
جزئیات ممکن است بین دو مطالعه اندکی متفاوت باشد، زیرا ما از روش برازش منحنی استفاده کردیم، ولی نتیجه‌گیری‌های کیفی ما یکسان است.

۱۸۴ *پژوهشگران بیومدیکال با دوربین‌های لیزری:*
Graubner and Nixdorf, "Biomechanical Analysis."

۱۸۵ *«هنر دروغی است»:* این نقل‌قول از منبع زیر است:
"Picasso Speaks," *The Arts* (May 1923),
که چکیده‌ی آن در منبع زیر آمده است:
`http://www.gallerywalk.org/PM_Picasso.html` from Alfred H. Barr Jr., *Picasso: Fifty Years of His Art* (New York: Arno Press, 1980).

۷. سرچشمه‌ی پنهان

۱۸۷ *آیزاک نیوتن:* برای اطلاعات درباره‌ی زندگی‌نامه‌ی او، رک.:
Gleick, *Isaac Newton*. See also Westfall, *Never at Rest,* and I. B. Cohen, "Isaac Newton," in vol. 10 of Gillispie, *Complete Dictionary*, with amendments by G. E. Smith and W. Newman in vol. 23.
برای کارهای نیوتن در زمینه‌ی ریاضیات، رک.:
Whiteside, *The Mathematical Papers,* vols. 1 and 2; Edwards, *The Historical Development;* Grattan-Guinness, *From the Calculus;* Rickey, "Isaac Newton"; Dunham, *Journey Through Genius;* Katz, *History of Mathematics;* Guicciardini, *Reading the Principia;* Dunham, *The Calculus Gallery;* Simmons, *Calculus Gems;* Guicciardini, *Isaac Newton;* Stillwell, *Mathematics and Its History;* and Burton, *History of Mathematics*.

۱۸۸ *«نسبتی که بین خط راست و خط منحنی برقرار است»:*
René Descartes, *The Geometry of René Descartes: With a Facsimile of the First Edition*, translated by David E. Smith and Marcia L. Latham (Mineola, NY: Dover, 1954), 91.
ظرف بیست سال، معلوم شد که نظر دکارت درباره‌ی غیرممکن بودن به دست آوردن طول دقیق قوس برای منحنی‌ها اشتباه بوده است؛ رک.:
Katz, *History of Mathematics,* 496–98.

۱۸۹ *«هیچ‌گونه خط منحنی‌ای»:* در این‌جا [در متن اصلی کتاب]، متن نوشته‌ی نیوتن به املای مصطلح امروزی درآورده شده است.
Letter 193 from Newton to Collins, November 8, 1676, in Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 179.
مطالب حذف شده مشتمل بر مشکلات فنی مربوط به دسته‌ی معادلات سه‌جمله‌ای است که ادعای او برای آن‌ها صادق است. رک.:
"A Manuscript by Newton on Quadratures," manuscript 192, in ibid., 178.

«چشمه‌ای که از آن برمی‌گیرم»:
Letter 193 from Newton to Collins, November 8, 1676, in ibid., 180.
در این‌جا نیز املای مطالب به انگلیسی امروز درآورده شده است.

نخستین کسانی نبودند که این قضیه را دریافته بودند: منبع زیر،

Katz, *History of Mathematics*, 498–503,

نشان می‌دهد که جیمز گرگوری و آیزاک بارو هر دو رابطه‌ی مسئله‌ی مساحت با مسئله‌ی مماس را دریافته بودند و ازاین‌رو، قضیه‌ی بنیادی را پیش‌بینی کرده بودند، ولی چنین نتیجه‌گیری کرده است که «هیچ‌کدام از این دو نفر در سال ۱۶۷۰ قادر نبودند این روش‌ها را به‌صورت یک ابزار واقعی برای محاسبات و حل مسئله با هم تلفیق کنند.» اما نیوتن پنج سال قبل از آن این کار را کرده بود. تو در کادری در صفحه‌ی ۵۲۱ استدلال متقاعد کننده‌ای ارائه می‌کند دایر بر این‌که نیوتن و لایبنیتس (و نه «فرما یا بارو یا هیچ‌کس دیگر») لیاقت آن را دارند که اختراع حسابان به نام آن‌ها نوشته شود.

۱۹۳ *محققان قرون وسطی:*

Katz, *History of Mathematics*, section 8.4.

۲۰۲ *در دفترچه‌ی دانشگاه‌اش:* می‌توانید دفترچه‌ی دانشگاهی دست‌نویس نیوتن را آنلاین مشاهده کنید. صفحه‌ی نشان داده شده در متن اصلی مربوط است به:

`http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/260.`

۲۰۷ *در یک خانه‌ی کشاورزی سنگی به دنیا آمد:* شرحی که از اوایل زندگی نیوتن ارائه داده‌ام، مبتنی است بر:

Gleick, *Isaac Newton*.

۲۰۹ *به‌طور اتفاقی به موضوعی جادویی برخورد:*

Whiteside, *The Mathematical Papers,* vol. 1, 96–142, and Katz, *History of Mathematics,* section 12.5.

ادواردز بحث جالبی درباره‌ی کارهای والیس در زمینه‌ی درون‌یابی و ضرب‌های بی‌نهایت ارائه کرده و نشان می‌دهد که کارهای نیوتن بر روی سری‌های توانی، تلاشی در جهت تعمیم آن بوده است؛ رک.:

Edwards, *The Historical Development,* chapter 7.

می‌دانیم که نیوتن این کشفیات را در چه زمانی انجام داده است، زیرا تاریخ آن‌ها را در صفحه‌ی 14v دفترچه‌ی دانشگاهی‌اش درج کرده است، که به‌صورت آنلاین در نشانی زیر در دسترس است:

`https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/32.`

نیوتن می‌نویسد: «یادم هست که در سال ۱۶۶۴ مدتی مانده به کریسمس... آثار والیس را امانت گرفتم و در نتیجه‌ی آن این تعلیقات را... در زمستان بین سال‌های ۱۶۶۴ و ۱۶۶۵ نوشتم. و در آن زمان بود که روش سری‌های بی‌نهایت را پیدا کردم. و در تابستان سال ۱۶۶۵ که به علت طاعون مجبور به ترک کمبریج شدم، مساحت هذلولی را... با همان روش تا دو و پنجاه رقم محاسبه کردم.»

۲۱۰ *روش پخت آن‌ها:* منبع زیر مراحل تفکر نیوتن را برای به دست آوردن نتایج‌اش درباره‌ی سری‌های توانی را نشان می‌دهد:

Edwards, *The Historical Development*, 178–87, and Katz, *History of Mathematics*, 506–59.

۲۱۳ «*از این ابداعات، بیش از حد کیف می‌کردم*»:
Letter 188 from Newton to Oldenburg, October 24, 1676, in Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 133.

ریاضی‌دانان در کرالا، هندوستان:
Katz, "Ideas of Calculus"; Katz, *History of Mathematics,* 494–96.

۲۱۴ «*آنالیز به کمک آن‌ها به همه‌ی مسئله‌ها تسری پیدا می‌کند*»: این سطر در *نامه‌ی نخست* مشهور نیوتن که در پاسخ به استعلام اول لایبنیتس نوشته شده، و به واسطه‌ی هنری اولدنبرگ فرستاده شده است، درج شده است؛ رک.:
Letter 165 from Newton to Oldenburg, June 13, 1676, in Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 39.

۲۱۶ «*در آن زمان در بهترین دوران عمرم برای اختراع بودم*»: پیش‌نویس نامه‌ای از نیوتن به پیِر دِ مزو که در سال ۱۷۱۸ نوشته شده است، زمانی که نیوتن می‌خواست تقدم خود بر لایبنیتس را در اختراع حسابان به اثبات برساند؛ این نامه در کلکسیون کتابخانه‌ی دانشگاه کمبریج به‌صورت آنلاین در نشانی زیر در دسترس است:
https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03968/1349.
نقل‌قول کامل آن خیلی جالب است: «در آغاز سال ۱۶۶۵، روش تقریب سری‌ها و قاعده‌ی تقلیل دادن هر دوجمله‌ای به یک چنین سری را پیدا کردم. همان سال در ماه مه، روش مماس‌های گرگوری و اسلوسیوس را پیدا کردم، و در ماه نوامبر، روش مستقیم شارش‌ها، و سال بعد در ماه ژانویه، نظریه‌ی رنگ‌ها را یافتم، و سپس در ماه مه وارد روش معکوس شارش‌ها شدم. و همان سال به این فکر افتادم که جاذبه تا کره‌ی ماه ادامه می‌یابد و (با توجه به اینکه چگونگی برآورد نیرویی را که یک جسم کروی در حال چرخش در درون یک کره با آن بر سطح کره فشار وارد می‌آورد، به دست آورده بودم) بر اساس این قاعده‌ی کپلر که زمان تناوب سیارات متناسب با توان یک و نیمِ فاصله‌ی آن‌ها از مرکز مدار آن‌ها است، استنباط کردم که نیرویی که سیارات را در مدار آن‌ها نگه‌می‌دارد، باید به‌صورت معکوس متناسب با مربع فاصله‌ی آن‌ها از مرکز گردش آن‌ها باشد: و از این طریق، نیروی لازم برای نگه‌داشتن ماه در مدار خود را با نیروی جاذبه در سطح زمین مقایسه کردم و مشاهده کردم که جواب آن‌ها بسیار نزدیک به هم است. همه‌ی آن‌ها در دو سال طاعونی ۱۶۶۵ و ۱۶۶۶ بود. زیرا در آن زمان در بهترین دوران عمرم برای اختراع بودم و بیش از هر زمان دیگری پس از آن، ذهنم برای ریاضیات و فلسفه آمادگی داشت.»

«*وراج‌هایی که چیز زیادی از ریاضیات نمی‌فهمیدند*»: نقل شده در:
Whiteside, "The Mathematical Principles," reference in his ref. 2.

توماس هابز: منبع زیر،
Alexander, *Infinitesimal*,
داستان نبردهای خشمگینانه‌ی هابز با والیس را، که به همان اندازه که ریاضی بودند سیاسی نیز بودند، بازگو می‌کند. فصل ۷ شرح حال هابز را به‌عنوان کسی که می‌خواست هندسه‌دان باشد، بیان می‌کند.

«دلمه‌ای از نمادها»: نقل شده در:
Stillwell, *Mathematics and Its History*, 164.

«کتابی بی‌مایه»:
Ibid.

«لایقِ گفتن برای عموم»: نقل شده در:
Guicciardini, *Isaac Newton*, 343.

«این جبر ظاهری ما»:
Ibid.

۸. ساخته‌های ذهن

۲۱۹ *«نام او آقای نیوتن است»:*
Letter from Isaac Barrow to John Collins, August 20, 1669, quoted in Gleick, *Isaac Newton*, 68.

«اثبات را برایم بفرستید»:
Letter 158, from Leibniz to Oldenburg, May 2, 1676, in Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 4.
برای اطلاع بیشتر درباره‌ی مکاتبات نیوتن و لایبنیتس، رک.:
Mackinnon, "Newton's Teaser."
منبع زیر تحلیل بسیار روشن و مفیدی از بازی ریاضیاتی موش و گربه که به‌صورت نامه بین نیوتن و لایبنیتس قفا، ارائه کرده است:
Guicciardini, *Isaac Newton*, 354–61.
اصل نامه‌ها در منبع زیر است:
The original letters appear in Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*;
به‌خصوص نگاه کنید به نامه‌ی ۱۵۸ (استعلام اولیه‌ی لایبنیتس از نیوتن به واسطه‌ی اولدنبرگ)؛ نامه‌ی ۱۶۵ (*نامه‌ی نخست* نیوتن، موجز و ارعاب‌کننده)؛ نامه‌ی ۱۷۲ (درخواست لایبنیتس برای توضیح)؛ نامه‌ی ۱۸۸ (*نامه‌ی بعدی* نیوتن، ملایم‌تر و روشن‌تر، ولی هنوز هم می‌خواهد به لایبنیتس نشان دهد کی رئیس است)، و نامه‌ی ۲۰۹ (حمله‌ی متقابل لایبنیتس، البته مؤدبانه، که روشن می‌کند که او هم حسابان بلد است).

۲۲۰ *«برای من بی‌مزه شده است»:* یکی از بهترین متلک‌ها در *نامه‌ی نخست*:
Letter 165 from Newton to Oldenburg, June 13, 1676. See Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 39.

«بسیار برجسته»: از *نامه‌ی بعدی*:
Letter 188 from Newton to Oldenburg, October 24, 1676, in ibid., 130.

«امید کارهای بسیار بزرگی از او داشته باشیم»:
Ibid.

«می‌توان به یک هدف واحد رسید»:
Ibid.

۲۲۱ *«ترجیح می‌دهم آن را بدین‌گونه مخفی سازم»:*
Ibid., 134.
این رمزنگاشت درک نیوتن را از قضیه‌ی بنیادی و مسئله‌های مرکزی حسابان بیان می‌کند: «با داشتن هر معادله از هر تعداد کمیت شاره، شارش‌ها را به دست آورید، و بر عکس». هم‌چنین، رک. صفحه‌ی ۱۵۳، یادداشت ۲۵.

«در یک چشم بر هم زدن»: نامه از لایبنیتس به مارکی دو لوپیتال، ۱۶۹۴، خلاصه شده در:
Child, *Early Mathematical Manuscripts*, 221.
در منبع زیر نیز نقل شده است:
Edwards, *The Historical Development*, 244.

«در یکی از خصوصیاتی که در این دنیا خیلی اهمیت دارد، نقص دارم»:
Mates, *Philosophy of Leibniz*, 32.

لاغر و خمیده و رنگ‌پریده بود:
Ibid.

او جامع‌ترینِ نوابغ بود: برای زندگی لایبنیتس، رک.:
Hofmann, *Leibniz in Paris;* Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia;* and Mates, *Philosophy of Leibniz*.
برای فلسفه‌ی لایبنیتس، رک.:
Mates, *Philosophy of Leibniz*.
برای ریاضیات لایبنیتس، رک.:
Child, *Early Mathematical Manuscripts;* Edwards, *The Historical Development;* Grattan-Guinness, *From the Calculus;* Dunham, *Journey Through Genius;* Katz, *History of Mathematics;* Guicciardini, *Reading the Principia;* Dunham, *The Calculus Gallery;* Simmons, *Calculus Gems;* Guicciardini, *Isaac Newton;* Stillwell, *Mathematics and Its History;* and Burton, *History of Mathematics*.

۲۲۲ *رویکرد لایبنیتس به حسابان:* منبع زیر به‌خصوص خیلی خوب است:
Edwards, *The Historical Development*, chapter 9.
هم‌چنین، رک.:
Katz, *History of Mathematics*, section 12.6, and Grattan-Guinness, *From the Calculus*, chapter 2.

۲۲۳ *لایبنیتس دیدگاه عمل‌گرایانه‌تری را اتخاذ کرد:* به‌عنوان مثال، لایبنیتس می‌نویسد: «باید تلاش کنیم که دامن ریاضیات محض را از آلودگی به مجادلات متافیزیکی پاکیزه نگه‌داریم. این در صورتی قابل حصول است که بدون نگرانی از این‌که بی‌نهایت و کمیت‌ها، اعداد، و خطوط بی‌نهایت‌کوچک واقعی هستند، از بی‌نهایت و بی‌نهایت‌کوچک‌ها به‌عنوان روش بیان مناسبی جهت مختصر کردن استدلال‌ها استفاده کنیم.» نقل شده در:
Guicciardini, *Reading the Principia*, 160.

«ساخته‌های ذهن»: لایبنیتس در نامه‌ای به دِ بوس در سال ۱۷۰۶، نقل شده در:
Guicciardini, *Reading the Principia,* 159.

۲۲۸ *«حساب من»:* نقل شده در:
Ibid., 166.

۲۲۹ *قانون سینوس‌ها را به سهولت استنباط کرد:*
Edwards, *The Historical Development,* 259.

«مردان بسیار فرهیخته‌ی دیگری»: نقل شده در:
Ibid.

۲۳۲ *او را به قضیه‌ی بنیادی رهنمون شد:*
Ibid., 236–38.
در حقیقت، مجموعی که در نظر لایبنیتس بود، مجموع وارون‌های اعداد مثلثی بود، که دو برابر مجموع در نظر گرفته شده در متن کتاب است. هم‌چنین، رک.:
Grattan-Guinness, *From the Calculus*, 60–62.

۲۳۹ *«پیدا کردن مساحت شکل‌ها به این کار تقلیل پیدا می‌کند»:* از نامه‌ای به اِرِنفرید والتر فُن چیرنهاوس در سال ۱۶۷۹، نقل شده در:
Guicciardini, *Reading the Principia*, 145.

ویروس کمبود ایمنی اکتسابی انسانی: برای آمار HIV و ایدز، رک.:
https://ourworldindata.org/hiv-aids/.
برای تاریخچه‌ی ویروس و تلاش‌ها برای مبارزه با آن، رک.:
https://www.avert.org/professionals/history-hiv-aids/overview.

۲۴۰ *معمولاً از سه مرحله عبور می‌کند:*
"The Stages of HIV Infection," AIDSinfo, https://aidsinfo.nih.gov/understanding-hiv-aids/fact-sheets/19/46/the-stages-of-hiv-infection.

۲۴۱ *کارهای هو و پرلسون:*
Ho et al., "Rapid Turnover"; Perelson et al., "HIV-1 Dynamics"; Perelson, "Modelling Viral and Immune System"; and Murray, *Mathematical Biology*

1.

۲۴۵ *درمان ترکیبی سه‌دارویی:* نتایج محاسبه‌ی احتمالات نخستین بار در منبع زیر منتشر شد:
Perelson et al., “Dynamics of HIV-1.”

۲۴۶ *مرد سال:*

Gorman, “Dr. David Ho.”

جایزه‌ی بزرگی:
American Physical Society, 2017 Max Delbruck Prize in Biological Physics Recipient, `https://www.aps.org/programs/honors/prizes/prizerecipient.cfm?first_nm=Alan&last_nm=Perelson&year=2017`.

هپاتیت C:
“Multidisciplinary Team Aids Understanding of Hepatitis C Virus and Possible Cure,” Los Alamos National Laboratory, March 2013, `http://www.lanl.gov/discover/publications/connections/2013-03/understanding-hep-c.php`.
برای آشنایی با مدل‌سازی ریاضی هپاتیت C، رک.:
Perelson and Guedj, “Modelling Hepatitis C.”

۹. جهان منطقی

۲۴۸ *انفجار کامبرین برای ریاضیات:* برای آشنایی با انشعابات مختلف حسابان از سال ۱۷۰۰ تا کنون، رک.:
Kline, *Mathematics in Western Culture;* Boyer, *The History of the Calculus;* Edwards, *The Historical Development;* Grattan-Guinness, *From the Calculus;* Katz, *History of Mathematics;* Dunham, *The Calculus Gallery;* Stewart, *In Pursuit of the Unknown;* Higham et al., *The Princeton Companion;* and Goriely, *Applied Mathematics*.

۲۴۹ *نظامی را برای جهان پیشنهاد کرد:*
Peterson, *Newton's Clock;* Guicciardini, *Reading the Principia;* Stewart, *In Pursuit of the Unknown;* and Stewart, *Calculating the Cosmos*.

شروع دوران روشنگری را در پی داشت: منبع زیر،
Kline, *Mathematics in Western Culture*, 234–86,
تاریخچه‌ای از تأثیر شگرف کارهای نیوتن بر سیر فلسفه، مذهب، زیباشناسی، و ادبیات غرب، و نیز بر علم و ریاضیات، را بیان می‌کند. هم‌چنین، رک.:
W. Bristow, “Enlightenment,” `https://plato.stanford.edu/entries/enlightenment/`.

«سردرد بگیرد»:
D. Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, vol. 2 (Edinburgh: Thomas Constable, 1855), 158.

۲۵۲ *سیبی روی سرش افتاد:* برای تاریخچه‌ی عجیب داستان سیب، رک.:
Gleick, *Isaac Newton*, 55–57, and note 18 on 207.

هم‌چنین، رک.:
Martínez, *Science Secrets*, chapter 3.

۲۵۳ *«نیروی لازم برای نگه‌داشتن ماه در مدار خود»:* پیش‌نویس نامه‌ای از نیوتن به پیر دِ مزو که در سال ۱۷۱۸ نوشته شده است، و در کلکسیون کتابخانه‌ی دانشگاه کمبریج به‌صورت آنلاین در نشانی زیر در دسترس است:
`https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03968/1349`.

۲۵۴ *«به‌صورت بیضی»:*
Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 138, gives one version of this oft-told story.

به‌عنوان ضرورت منطقی از آن‌ها نتیجه می‌شود: منبع زیر،
Katz, *History of Mathematics*, 516–19,
شرحی از استدلال‌های هندسی نیوتن ارائه می‌دهد. منبع زیر،
Guicciardini, *Reading the Principia*,
بیان می‌کند که معاصران نیوتن چه واکنشی در قبال *پرینکیپیا* داشتند، و انتقادات آن‌ها از آن چه بود (بعضی از اعتراضات آن‌ها متقاعد کننده بود). روش به دست آوردن امروزی قوانین کپلر از قانون مربع معکوس در منبع زیر داده شده است:
Simmons, *Calculus Gems*, 326–35.

۲۵۷ *نپتون:*
Jones, *John Couch Adams,* and Sheehan and Thurber, "John Couch Adams's Asperger Syndrome."

کاترین جانسون: منبع زیر،
Shetterly, *Hidden Figures,*
سبب شد که کاترین جانسون به جایگاهی که از دیرباز شایسته‌ی آن بود، نایل شود. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی زندگی او، رک.:
`https://www.nasa.gov/content/katherine-johnson-biography`.
درباره‌ی کارهای ریاضی او، رک.:
Skopinski and Johnson, "Determination of Azimuth Angle." See also `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Johnson_Katherine.html` and `https://ima.org.uk/5580/hidden-figures-impact-mathematics/`.

۲۵۸ *یکی از مسئولان ناسا به حضار خاطرنشان کرد:*
Sarah Lewin, “NASA Facility Dedicated to Mathematician Katherine Johnson,” Space.com, May 5, 2016, https://www.space.com/32805-katherine-johnson-langley-building-dedication.html.

۲۵۹ *رعدآسا فریاد زدند:* نقل شده از:
Kline, *Mathematics in Western Culture,* 282.
شرح این مهمانی شام از دفترچه‌ی خاطرات میزبان مراسم، بنجامین هیدونِ نقاش، گرفته شده است، که در منبع زیر به‌طور خلاصه درج شده است:
Ainger, *Charles Lamb,* 84–86.

توماس جفرسون: منبع زیر،
Cohen, *Science and the Founding Fathers,*
بحث موجهی درباره‌ی تأثیر نیوتن بر جفرسون و «پژواک‌های نیوتنی» در اعلامیه‌ی استقلال ارائه کرده است؛ هم‌چنین، رک.:
“The Declaration of Independence,” http://math.virginia.edu/history/Jefferson/jeff_r(4).htm.
برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی جفرسون و ریاضیات، به سخنرانی زیر مراجعه کنید:
John Fauvel, “‘When I Was Young, Mathematics Was the Passion of My Life’: Mathematics and Passion in the Life of Thomas Jefferson,” online at http://math.virginia.edu/history/Jefferson/jeff_r.htm.

«روزنامه‌ها را کنار گذاشته‌ام»: نامه‌ای از توماس جفرسون به جان آدامز، به تاریخ ۲۱ ژانویه‌ی ۱۸۱۲، قابل دسترسی آنلاین در نشانی زیر:
https://founders.archives.gov/documents/Jefferson/03-04-02-0334.

۲۶۰ *صفحه‌ی برگردان خیش:*
Cohen, *Science and the Founding Fathers,* 101.
هم‌چنین، رک.:
“Moldboard Plow,” *Thomas Jefferson Encyclopedia*, https://www.monticello.org/site/plantation-and-slavery/moldboard-plow, and “Dig Deeper—Agricultural Innovations,” https://www.monticello.org/site/jefferson/dig-deeper-agricultural-innovations.

«آن چیزی را که به‌طور نظری وعده می‌دهد»: نامه‌ای از توماس جفرسون به سر جان سینکلر، به تاریخ ۲۳ مارس ۱۷۹۸،
https://founders.archives.gov/documents/Jefferson/01-30-02-0135.

۲۶۱ *«مگر آنکه خیلی اشتباه کرده باشم»:*

Hall and Hall, *Unpublished Scientific Papers,* 281.

۲۶۲ *معادلات دیفرانسیل معمولی:* برای معادلات دیفرانسیل معمولی و کاربردهای آن‌ها، رک.:
Simmons, *Differential Equations.* See also Braun, *Differential Equations;* Strogatz, *Nonlinear Dynamics;* Higham et al., *The Princeton Companion;* and Goriely, *Applied Mathematics.*

۲۶۴ *معادله‌ی دیفرانسیل جزئی:* برای معادلات دیفرانسیل جزئی و کاربردهای آن‌ها، رک.:
Farlow, *Partial Differential Equations*, and Haberman, *Applied Partial Differential Equations.* See also Higham et al., *The Princeton Companion,* and Goriely, *Applied Mathematics.*

۲۶۵ *بوئینگ ۷۸۷ دریم‌لاینر:*
Norris and Wagner, *Boeing 787,* and `http://www.boeing.com/commercial/787/by-design/#/featured`.

۲۶۶ *بال‌لرزه‌ی هواکشسانی:*
Jason Paur, "Why 'Flutter' Is a 4-Letter Word for Pilots," *Wired* (March 25, 2010), `https://www.wired.com/2010/03/flutter-testing-aircraft/`.

۲۶۸ *قیمت‌گذاری اختیارات مالی:*
Szpiro, *Pricing the Future,* and Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 17.

مدل هاجکین_ هاکسلی:
Ermentrout and Terman, *Mathematical Foundations*, and Rinzel, "Discussion."

نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین:
Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, chapter 13, and Ferreira, *Perfect Theory.*

هم‌چنین، رک.:
Greene, *The Elegant Universe*, and Isaacson, *Einstein.*

معادله‌ی شرودینگر:
Körner, *Fourier Analysis,* and Kline, *Mathematics in Western Culture*, chapter 19.

برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی زندگی و آثار او، رک.:
Dirk J. Struik, "Joseph Fourier," *Encyclopedia Britannica*, `https://www.britannica.com/biography/Joseph-Baron-Fourier`.

هم‌چنین، رک.:

Grattan-Guinness, *From the Calculus;* Stewart, *In Pursuit of the Unknown;* Higham et al., *The Princeton Companion;* and Goriely, *Applied Mathematics*.

۲۶۹ *انتقال گرما:* جنبه‌های ریاضی معادله‌ی گرمای فوریه در منبع زیر مورد بحث قرار گرفته است:
Farlow, *Partial Differential Equations*, Katz, *History of Mathematics*, and Haberman, *Applied Partial Differential Equations*.

۲۷۲ *معادله‌ی موج:* برای جنبه‌های ریاضی زه‌های در حال ارتعاش، سری‌های فوریه، و معادله‌ی موج، رک.:
Farlow, *Partial Differential Equations*; Katz, *History of Mathematics;* Haberman, *Applied Partial Differential Equations;* Stillwell, *Mathematics and Its History;* Burton, *History of Mathematics;* Stewart, *In Pursuit of the Unknown;* and Higham et al., *The Princeton Companion*.

۲۸۰ *الگوهای کلادنی:* تصاویر از اصل آن‌ها در منابع زیر گرفته شده است:
`https://publicdomainreview.org/collections/chladni-figures-1787/` and `http://www.sites.hps.cam.ac.uk/whipple/explore/acoustics/ernstchladni/chladniplates/`.
برای یک نمایش امروزی از این پدیده، رک.:
The video by Steve Mould called "Random Couscous Snaps into Beautiful Patterns," `https://www.youtube.com/watch?v=CR_XL192wXw` and the video by Physics Girl called "Singing Plates—Standing Waves on Chladni Plates," `https://www.youtube.com/watch?v=wYoxOJDrZzw`.

۲۸۱ *سوفی ژرمن:* نظریه‌ی او در زمینه‌ی الگوهای کلادنی در منبع زیر مورد بحث قرار گرفته است:
Bucciarelli and Dworsky, *Sophie Germain*. For biographies, see: `https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain.htm` and `http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/sophie-germain.html` and `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Germain.html`.

۲۸۲ *«شهامتی شرافتمندانه»:* نقل شده در:
Newman, *The World of Mathematics*, vol. 1, 333.

۲۸۳ *مایکروفر:* برای توضیح بسیار روشنی از طرز کار مایکروفر نیز نمایش آزمایشی که پیشنهاد کردم، رک.:
"How a Microwave Oven Works," `https://www.youtube.com/watch?v=kp33ZprO0Ck`.
برای اندازه‌گیری سرعت نور با مایکروفر، از شکلات نیز می‌توانید استفاده کنید: که در این‌جا نشان داده شده است:

`https://www.youtube.com/watch?v=GH5W6xEeY5U`.

برای تاریخچه‌ی اجاق‌های مایکروویو و ماده‌ی بی‌شکل چسبناکی که پرسی اسپنسر در جیبش پیدا کرد، رک.:

Matt Blitz, "The Amazing True Story of How the Microwave Was Invented by Accident," *Popular Mechanics* (February 23, 2016), `https://www.popularmechanics.com/technology/gadgets/a19567/how-the-microwave-was-invented-by-accident/`.

۲۸۵ *سی‌تی‌ـ اسکن:*

Kevles, *Naked to the Bone,* 145–72; Goriely, *Applied Mathematics*, 85–89; and `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/`.

مقاله‌ی اولیه‌ای که مسئله‌ی بازسازی را با حسابان و سری‌های فوریه حل می‌کند، عبارت است از:

Cormack, "Representation of a Function."

۲۸۷ *آلن کورماک:* مقاله‌ی اولیه‌ای که مسئله‌ی بازسازی را در برش‌نگاری کامپیوتری با استفاده از حسابان، سری‌های فوریه، و معادلات انتگرالی حل می‌کند، عبارت است از:

Cormack, "Representation of a Function."

سخنرانی اهدای جایزه‌ی نوبل او در نشانی زیر به‌صورت آنلاین در دسترس است:

`https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-lecture.pdf`.

۲۸۹ *بیتل‌ها:* برای داستان گادفری هانسفیلد، بیتل‌ها، و اختراع سی‌تی‌ـ اسکن، رک.:

Goodman, "The Beatles," and `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/perspectives.html`.

کورماک توضیح داد: این نقل‌قول در صفحه‌ی ۵۶۳ سخنرانی نوبل او آمده است:

`https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-lecture.pdf`.

۱۱. آینده‌ی حسابان

۲۹۵ *عدد پیچش:*

Fuller, "The Writhing Number." See also Pohl, "DNA and Differential Geometry."

هندسه و توپولوژی:

Bates and Maxwell, *DNA Topology,* and Wasserman and Cozzarelli, "Biochemical Topology."

نظریه‌ی گره و حسابان کلاف:

Ernst and Sumners, "Calculus for Rational Tangles."

۲۹۶ *اهداف مؤثری برای داروهای شیمی‌درمانی سرطان هستند:*
Liu, "DNA Topoisomerase Poisons."

۲۹۷ *پیر سیمون لاپلاس:*
Kline, *Mathematics in Western Culture;* C. Hoefer, "Causal Determinism," https://plato.stanford.edu/entries/determinism-causal/.

«هیچ چیز نامعین نخواهد بود»:
Laplace, *Philosophical Essay on Probabilities,* 4.

سوفیا کُوالِفسکایا:
Cooke, *Mathematics of Sonya Kovalevskaya,* and Goriely, *Applied Mathematics*, 54–57.
او غالباً به اسامی دیگری نیز خوانده می‌شود. یک نمونه‌ی متداول آن سوفیا کوالفسکی است. برای زندگی‌نامه‌ی آنلاین او، رک.:
Becky Wilson, "Sofia Kovalevskaya," *Biographies of Women Mathematicians,* https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/kova.htm, and J. J. O'Connor and E. F. Robertson, "Sofia Vasilyevna Kovalevskaya," http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kovalevskaya.html.

۲۹۸ *تلوتلو خوردن آشفته‌ی هیپریون:*
Wisdom et al., "Chaotic Rotation."

۳۰۱ *هانری پوانکاره فکر کرد موفق به حل آن شده است:*
Diacu and Holmes, *Celestial Encounters.*

سیستم‌های آشفته:
Gleick, *Chaos;* Stewart, *Does God Play Dice?;* and Strogatz, *Nonlinear Dynamics.*

افق پیش‌بینی‌پذیری:
Lighthill, "The Recently Recognized Failure."

افق پیش‌بینی‌پذیری کل منظومه‌ی شمسی:
Sussman and Wisdom, "Chaotic Evolution."

۳۰۲ *رویکرد پوانکاره:*
Gleick, *Chaos;* Stewart, *Does God Play Dice?;* Strogatz, *Nonlinear Dynamics;* and Diacu and Holmes, *Celestial Encounters.*

۳۰۴ *مری کارت‌رایت:*
McMurran and Tattersall, "Mathematical Collaboration," and L. Jardine, "Mary, Queen of Maths," *BBC News Magazine*, https://www.bbc.com/

news/magazine-21713163.

برای زندگی‌نامه‌ی او، رک.:

http://www.ams.org/notices/199902/mem-cartwright.pdf and http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cartwright.html.

«معادلات دیفرانسیل بسیار ترسناکی»:

Quoted in L. Jardine, "Mary, Queen of Maths."

۳۰۵ *«مشکل از خود معادله بود»:*

Dyson, "Review of *Nature's Numbers*."

۳۰۶ *هاجکین و هاکسلی:*

Ermentrout and Terman, *Mathematical Foundations;* Rinzel, "Discussion"; and Edelstein-Keshet, *Mathematical Models*.

زیست‌شناسی ریاضیاتی: برای آشنایی با مدل‌سازی ریاضی همه‌گیری‌ها، ریتم‌های قلبی، سرطان، و تومورهای مغزی، رک.:

Edelstein-Keshet, *Mathematical Models;* Murray, *Mathematical Biology 1;* and Murray, *Mathematical Biology 2*.

۳۰۹ *سیستم‌های پیچیده:*

Mitchell, *Complexity*.

۳۱۱ *شطرنج کامپیوتری:* برای اطلاعات زمینه‌ای درباره‌ی آلفا زیرو و شطرنج کامپیوتری، رک.:

https://www.technologyreview.com/s/609736/alpha-zeros-alien-chess-shows-the-power-and-the-peculiarity-of-ai/.

پیش‌نویس اولیه‌ی معرفی آلفا زیرو در نشانی زیر موجود است:

https://arxiv.org/abs/1712.01815.

برای تحلیل ویدئویی بازی‌ها بین آلفا زیرو و استاک‌فیش، می‌توانید ابتدا به نشانی‌های زیر مراجعه کنید:

https://www.youtube.com/watch?v=Ud8F-cNsa-k and https://www.youtube.com/watch?v=6z1o48Sgrck.

۳۱۲ *غروب آگاهی:*

Davies, "Whither Mathematics?," https://www.ams.org/notices/200511/comm-davies.pdf.

۳۱۳ *پل اردوش:*

Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*.

پایان سخن

۳۱۶ *الکترودینامیک کوانتومی:*
Feynman, *QED*, and Farmelo, *The Strangest Man*.

دقیق‌ترین نظریه‌ای:
Peskin and Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, 196–98.
برای اطلاعات زمینه‌ای، رک.:
http://scienceblogs.com/principles/2011/05/05/the-most-precisely-tested-theo/.

۳۱۷ *پل دیراک:* برای زندگی و آثار دیراک، رک.:
Farmelo, *The Strangest Man*.
مقاله‌ی سال ۱۹۲۸ که معادله‌ی دیراک در آن معرفی شده است، عبارت است از:
Dirac, "The Quantum Theory."

در سال ۱۹۳۱، مقاله‌ای منتشر کرد:
Dirac, "Quantised Singularities."

۳۱۸ *«تحت این شرایط، تعجب‌آور می‌بود»:*
Ibid., 71.

برش‌نگاری گسیل پوزیترون:
Kevles, *Naked to the Bone*, 201–27, and Higham et al., *The Princeton Companion*, 816–23.
برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی پوزیترون در اسکن PET، رک.:
Farmelo, *The Strangest Man*, and Rich, "Brief History."

آلبرت اینشتین:
Isaacson, *Einstein*, and Pais, *Subtle Is the Lord*.

۳۱۹ *نسبیت عام:*
Ferreira, *Perfect Theory*, and Greene, *The Elegant Universe*.

اثر عجیبی بر روی زمان داشته باشد: برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی جی‌پی‌اس و اثرات نسبیتی بر سنجش زمان، رک.:
Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, and http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/gps.html.

۳۲۰ *امواج گرانشی:* منبع زیر،
Levin, *Black Hole Blues*,
کتابی شاعرانه درباره‌ی جستجو برای امواج گرانشی است. برای اطلاعات زمینه‌ای بیشتر، رک.:
https://brilliant.org/wiki/gravitational-waves/ and https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2017/press.html.

برای نقش حسابان، کامپیوتر، و روش‌های عددی در این کشف، رک.:
R. A. Eisenstein, "Numerical Relativity and the Discovery of Gravitational Waves," https://arxiv.org/pdf/1804.07415.pdf.

کتاب‌نامه

Adams, Douglas. *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy.* London: Pan Books, 1979.

Ainger, Alfred. *Charles Lamb.* New York: Harper and Brothers, 1882.

Alexander, Amir. *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World.* New York: Farrar, Straus and Giroux, 2014.

Asimov, Isaac. *Asimov's Biographical Encyclopedia of Science and Technology.* Rev. ed. New York: Doubleday, 1972.

Austin, David. "What Is ... JPEG?," *Notices of the American Mathematical Society* 55, no. 2 (2008): 226–29. `http://www.ams.org/notices/200802/tx080200226p.pdf`.

Ball, Philip. "A Century Ago Einstein Sparked the Notion of the Laser." *Physics World* (August 31, 2017). `https://physicsworld.com/a/a-century-ago-einstein-sparked-the-notion-of-the-laser/`.

Barrow, John D., and Frank J. Tipler. *The Anthropic Cosmological Principle.* New York: Oxford University Press, 1986.

Bates, Andrew D., and Anthony Maxwell. *DNA Topology.* New York: Oxford University Press, 2005.

Bolt, Usain. *Faster than Lightning: My Autobiography.* New York: HarperSport, 2013.

Boyer, Carl B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* Mineola, NY: Dover, 1959.

Bradley, Jonathan N., and Christopher M. Brislawn. "The Wavelet/Scalar Quantization Compression Standard for Digital Fingerprint Images." *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* 3 (1994): 205–8.

Bradley, Jonathan N., Christopher M. Brislawn, and Thomas Hopper. "FBI Wavelet/Scalar Quantization Standard for Gray-Scale Fingerprint Image Compression." Proc. SPIE 1961, Visual Information Processing II (27 August 1993). DOI: 10.1117/12.150973; https://doi.org/10.1117/12.150973; http://helmut.knaust.info/class/201330_NREUP/spie93_Fingerprint.pdf.

Braun, Martin. *Differential Equations and Their Applications*. 3rd ed. New York: Springer, 1983.

Brislawn, Christopher M. "Fingerprints Go Digital." *Notices of the American Mathematical Society* 42, no. 11 (1995): 1278–83.

Bucciarelli, Louis L., and Nancy Dworsky. *Sophie Germain: An Essay in the History of Elasticity*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, 1980.

Burkert, Walter. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Translated by E. L. Minar Jr. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972.

Burton, David M. *The History of Mathematics*. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

Calaprice, Alice. *The Ultimate Quotable Einstein*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011.

Carroll, Sean. *The Big Picture: On the Origins of Life, Meaning, and the Universe Itself*. New York: Dutton, 2016.

Child, J. M. *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago: Open Court, 1920.

Cipra, Barry. "*Parlez-Vous* Wavelets?" *What's Happening in the Mathematical Sciences* 2 (1994): 23–26.

Clarke, Desmond. *Descartes: A Biography*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Cohen, I. Bernard. *Science and the Founding Fathers: Science in the Political Thought of Thomas Jefferson, Benjamin Franklin, John Adams, and James Madison*. New York: W. W. Norton, 1995.

Cooke, Roger. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York: Springer, 1984.

Cormack, Allan M. "Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications." *Journal of Applied Physics* 34, no. 9 (1963): 2722–27.

Daubechies, Ingrid C. *Ten Lectures on Wavelets.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

Davies, Brian. "Whither Mathematics?" *Notices of the American Mathematical Society* 52, no. 11 (2005): 1350–56.

Davies, Paul. *The Goldilocks Enigma: Why Is the Universe Just Right for Life?* London: Allen Lane, 2006.

DeRose, Tony, Michael Kass, and Tien Truong. "Subdivision Surfaces in Character Animation." *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (1998): 85–94. DOI: `http://dx.doi.org/10.1145/280814.280826`; `https://graphics.pixar.com/library/Geri/paper.pdf`.

Deuflhard, Peter, Martin Weiser, and Stefan Zachow. "Mathematics in Facial Surgery." *Notices of the American Mathematical Society* 53, no. 9 (2006): 1012–16.

Diacu, Florin, and Philip Holmes. *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996.

Dijksterhuis, Eduard J. *Archimedes.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.

Dirac, Paul A. M. "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field." *Proceedings of the Royal Society of London A* 133 (1931): 60–72. DOI: 10.1098/rspa.1931.0130.

———. "The Quantum Theory of the Electron." *Proceedings of the Royal Society of London A* 117 (1928): 610–24. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.

Drake, Stillman. *Galileo at Work: His Scientific Biography.* Chicago: University of Chicago Press, 1978.

Dunham, William. *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.

———. *Journey Through Genius.* New York: John Wiley and Sons, 1990.

Dyson, Freeman J. "Review of *Nature's Numbers* by Ian Stewart." *American Mathematical Monthly* 103, no. 7 (August/September 1996): 610–12. DOI: 10.2307/2974684.

Edelstein-Keshet, Leah. *Mathematical Models in Biology*. 8th ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

Edwards, C. H., Jr. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer, 1979.

Einstein, Albert. "Physics and Reality." *Journal of the Franklin Institute* 221, no. 3 (1936): 349–82.

———. "Zur Quantentheorie der Strahlung (On the Quantum Theory of Radiation)." *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917): 121–28. English translation at `http://web.ihep.su/dbserv/compas/src/einstein17/eng.pdf`.

Eriksen, H. K., J. R. Kristiansen, Ø. Langangen, and I. K. Wehus. "How Fast Could Usain Bolt Have Run? A Dynamical Study." *American Journal of Physics* 77, no. 3 (2009): 224–28.

Ermentrout, G. Bard, and David H. Terman. *Mathematical Foundations of Neuroscience*. New York: Springer, 2010.

Ernst, Claus, and DeWitt Sumners. "A Calculus for Rational Tangles: Applications to DNA Recombination." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 108, no. 3 (1990): 489–515.

Farlow, Stanley J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Mineola, NY: Dover, 1993.

Farmelo, Graham. *The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Mystic of the Atom*. New York: Basic Books, 2009.

Fermi, Laura, and Gilberto Bernardini. *Galileo and the Scientific Revolution*. Mineola, NY: Dover, 2003.

Ferreira, Pedro G. *The Perfect Theory*. Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2014.

Feynman, Richard P. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986.

Forbes, Nancy, and Basil Mahon. *Faraday, Maxwell, and the Electromagnetic Field: How Two Men Revolutionized Physics*. New York: Prometheus Books, 2014.

Fuller, F. Brock. "The Writhing Number of a Space Curve." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 68, no. 4 (1971): 815–19.

Galilei, Galileo. *Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences* (1638). Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio, with an introduction by Antonio Favaro. New York: Macmillan, 1914. `http://oll.libertyfund.org/titles/753`.

Gill, Peter. *42: Douglas Adams' Amazingly Accurate Answer to Life, the Universe and Everything.* London: Beautiful Books, 2011.

Gillispie, Charles C., ed. *Complete Dictionary of Scientific Biography.* 26 vols. New York: Charles Scribner's Sons, 2008. Available electronically through the Gale Virtual Reference Library.

Gleick, James. *Chaos: Making a New Science.* New York: Viking, 1987.

———. *Isaac Newton.* New York: Pantheon, 2003.

Goodman, Lawrence R. "The Beatles, the Nobel Prize, and CT Scanning of the Chest." *Thoracic Surgery Clinics* 20, no. 1 (2010): 1–7. `https://www.thoracic.theclinics.com/article/S1547-4127(09)00090-5/fulltext`. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.thorsurg.2009.12.001`.

Goriely, Alain. *Applied Mathematics: A Very Short Introduction.* Oxford: Oxford University Press, 2018.

Gorman, Christine. "Dr. David Ho: The Disease Detective." *Time* (December 30, 1996). `http://content.time.com/time/magazine/article/0,9171,135255,00.html`.

Grattan-Guinness, Ivor, ed. *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910: An Introductory History.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1980.

Graubner, Rolf, and Eberhard Nixdorf. "Biomechanical Analysis of the Sprint and Hurdles Events at the 2009 IAAF World Championships in Athletics." *New Studies in Athletics* 26, nos. 1/2 (2011): 19–53.

Greene, Brian. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions and the Quest for the Ultimate Theory.* New York: W. W. Norton, 1999.

Guicciardini, Niccolò. *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method.* Cambridge, MA: MIT Press, 2009.

———. *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Guthrie, Kenneth S. *The Pythagorean Sourcebook and Library.* Grand Rapids, MI: Phanes Press, 1987.

Haberman, Richard. *Applied Partial Differential Equations.* 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.

Hall, A. Rupert, and Marie Boas Hall, eds. *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

Hamming, Richard W. "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics." *American Mathematical Monthly* 87, no. 2 (1980): 81–90. `https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Hamming.html`.

Heath, Thomas L., ed. *The Works of Archimedes.* Mineola, NY: Dover, 2002.

Higham, Nicholas J., Mark R. Dennis, Paul Glendinning, Paul A. Martin, Fadil Santosa, and Jared Tanner, eds. *The Princeton Companion to Applied Mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2015.

Ho, David D., Avidan U. Neumann, Alan S. Perelson, Wen Chen, John M. Leonard, and Martin Markowitz. "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection." *Nature* 373, no. 6510 (1995): 123–26.

Hoffman, Paul. *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth.* New York: Hachette, 1998.

Hofmann, Joseph E. *Leibniz in Paris 1672–1676: His Growth to Mathematical Maturity.* Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

Isaacson, Walter. *Einstein: His Life and Universe.* New York: Simon and Schuster, 2007.

Isacoff, Stuart. *Temperament: How Music Became a Battleground for the Great Minds of Western Civilization.* New York: Knopf, 2001.

Jones, H. S. *John Couch Adams and the Discovery of Neptune.* Cambridge: Cambridge University Press, 1947.

Kaiser, Gerald. *A Friendly Guide to Wavelets.* Boston: Birkhäuser, 1994.

Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 2nd ed. Boston: Addison Wesley Longman, 1998.

———. "Ideas of Calculus in Islam and India." *Mathematics Magazine* 68, no. 3 (1995): 163–74.

Kevles, Bettyann H. *Naked to the Bone: Medical Imaging in the Twentieth Century.* Rutgers, NJ: Rutgers University Press, 1997.

Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture.* London: Oxford University Press, 1953.

Koestler, Arthur. *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe.* New York: Penguin, 1990.

Körner, Thomas W. *Fourier Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Kwan, Alistair, John Dudley, and Eric Lantz. "Who Really Discovered Snell's Law?" *Physics World* 15, no. 4 (2002): 64.

Laplace, Pierre Simon. *A Philosophical Essay on Probabilities.* Translated by Frederick Wilson Truscott and Frederick Lincoln Emory. New York: John Wiley and Sons, 1902.

Laubenbacher, Reinhard, and David Pengelley. *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers.* New York: Springer, 1999.

Levin, Janna. *Black Hole Blues and Other Songs from Outer Space.* New York: Knopf, 2016.

Lighthill, James. "The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics." *Proceedings of the Royal Society of London A* 407, no. 1832 (1986): 35–50.

Liu, Leroy F. "DNA Topoisomerase Poisons as Antitumor Drugs." *Annual Review of Biochemistry* 58, no. 1 (1989): 351–75.

Livio, Mario. *Is God a Mathematician?* New York: Simon and Schuster, 2009.

Mackinnon, Nick. "Newton's Teaser." *Mathematical Gazette* 76, no. 475 (1992): 2–27.

Mahoney, Michael S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665.* 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Martínez, Alberto A. *Burned Alive*: *Giordano Bruno, Galileo and the Inquisition.* London: Reaktion Books, 2018.

———. *The Cult of Pythagoras: Math and Myths.* Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 2012.

———. *Science Secrets: The Truth About Darwin's Finches, Einstein's Wife, and Other Myths.* Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 2011.

Mates, Benson. *The Philosophy of Leibniz: Metaphysics and Language.* Oxford: Oxford University Press, 1986.

Maxwell, James Clerk. "On Physical Lines of Force. Part III. The Theory of Molecular Vortices Applied to Statical Electricity." *Philosophical Magazine* (April/May 1861): 12–24.

Mazur, Joseph. *Zeno's Paradox: Unraveling the Ancient Mystery Behind the Science of Space and Time.* New York: Plume, 2008.

McAdams, Aleka, Stanley Osher, and Joseph Teran. "Crashing Waves, Awesome Explosions, Turbulent Smoke, and Beyond: Applied Mathematics and Scientific Computing in the Visual Effects Industry." *Notices of the American Mathematical Society* 57, no. 5 (2010): 614–23. `https://www.ams.org/notices/201005/rtx100500614p.pdf`.

McMurran, Shawnee L., and James J. Tattersall. "The Mathematical Collaboration of M. L. Cartwright and J. E. Littlewood." *American Mathematical Monthly* 103, no. 10 (December 1996): 833–45. DOI: 10.2307/2974608.

Mitchell, Melanie. *Complexity: A Guided Tour.* Oxford: Oxford University Press, 2011.

Murray, James D. *Mathematical Biology 1.* 3rd ed. New York: Springer, 2007.

———. *Mathematical Biology 2.* 3rd ed. New York: Springer, 2011.

Netz, Reviel, and William Noel. *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist.* Boston: Da Capo Press, 2007.

Newman, James R. *The World of Mathematics.* 4 vols. New York: Simon and Schuster, 1956.

Norris, Guy, and Mark Wagner. *Boeing 787 Dreamliner.* Minneapolis: Zenith Press, 2009.

Pais, A. *Subtle Is the Lord.* Oxford: Oxford University Press, 1982.

Perelson, Alan S. "Modelling Viral and Immune System Dynamics." *Nature Reviews Immunology* 2, no. 1 (2002): 28–36.

Perelson, Alan S., Paulina Essunger, and David D. Ho. "Dynamics of HIV-1 and CD4+ Lymphocytes in Vivo." *AIDS* 11, supplement A (1997): S17–S24.

Perelson, Alan S., and Jeremie Guedj. "Modelling Hepatitis C Therapy—Predicting Effects of Treatment." *Nature Reviews Gastroenterology and Hepatology* 12, no. 8 (2015): 437–45.

Perelson, Alan S., Avidan U. Neumann, Martin Markowitz, John M. Leonard, and David D. Ho. "HIV-1 Dynamics in Vivo: Virion Clearance Rate, Infected Cell Life-Span, and Viral Generation Time." *Science* 271, no. 5255 (1996): 1582–86.

Peskin, Michael E., and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Boulder, CO: Westview Press, 1995.

Peterson, Ivars. *Newton's Clock: Chaos in the Solar System.* New York: W. H. Freeman, 1993.

Pohl, William F. "DNA and Differential Geometry." *Mathematical Intelligencer* 3, no. 1 (1980): 20–27.

Purcell, Edward M. *Electricity and Magnetism.* 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Rees, Martin. *Just Six Numbers: The Deep Forces That Shape the Universe.* New York: Basic Books, 2001.

Rich, Dayton A. "A Brief History of Positron Emission Tomography." *Journal of Nuclear Medicine Technology* 25 (1997): 4–11. `http://tech.snmjournals.org/content/25/1/4.full.pdf`.

Rickey, V. Frederick. "Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics." *College Mathematics Journal* 18, no. 5 (1987): 362–89.

Rinzel, John. "Discussion: Electrical Excitability of Cells, Theory and Experiment: Review of the Hodgkin-Huxley Foundation and an Update." *Bulletin of Mathematical Biology* 52, nos. 1/2 (1990): 5–23.

Robinson, Andrew. "Einstein Said That—Didn't He?" *Nature* 557 (2018): 30. `https://www.nature.com/articles/d41586-018-05004-4`.

Rorres, Chris, ed. *Archimedes in the Twenty-First Century.* Boston: Birkhäuser, 2017.

Sabra, A. I. *Theories of Light: From Descartes to Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Schaffer, Simon. "The Laird of Physics." *Nature* 471 (2011): 289–91.

Schrödinger, Erwin. *Science and Humanism.* Cambridge: Cambridge University Press, 1951.

Sheehan, William, and Steven Thurber. "John Couch Adams's Asperger Syndrome and the British Non-Discovery of Neptune." *Notes and Records* 61, no. 3 (2007): 285–99. `http://rsnr.royalsocietypublishing.org/content/61/3/285`. DOI: 10.1098/rsnr.2007.0187.

Shetterly, Margot Lee. *Hidden Figures: The American Dream and the Untold Story of the Black Women Mathematicians Who Helped Win the Space Race.* New York: William Morrow, 2016.

Simmons, George F. *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America, 2007.

———. *Differential Equations with Applications and Historical Notes.* 3rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2016.

Skopinski, Ted H., and Katherine G. Johnson. "Determination of Azimuth Angle at Burnout for Placing a Satellite Over a Selected Earth Position." *NASA Technical Report,* NASA-TN-D-233, L-289 (1960). `https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19980227091.pdf`.

Sobel, Dava. *Galileo's Daughter: A Historical Memoir of Science, Faith, and Love.* New York: Walker, 1999.

———. *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time.* New York: Walker, 1995.

Stein, Sherman. *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1999.

Stewart, Ian. *Calculating the Cosmos.* New York: Basic Books, 2016.

———. *Does God Play Dice?: The New Mathematics of Chaos.* Oxford: Blackwell, 1990.

———. *In Pursuit of the Unknown: Seventeen Equations That Changed the World.* New York: Basic Books, 2012.

Stillwell, John. *Mathematics and Its History.* 3rd ed. New York: Springer, 2010.

Strogatz, Steven. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

———. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order.* New York: Hyperion, 2003.

Sussman, Gerald Jay, and Jack Wisdom. "Chaotic Evolution of the Solar System." *Science* 257, no. 5066 (1992): 56–62.

Szpiro, George G. *Pricing the Future: Finance, Physics, and the Three-Hundred-Year Journey to the Black-Scholes Equation.* New York: Basic Books, 2011.

Tegmark, Max. *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality.* New York: Knopf, 2014.

Thompson, Richard B. "Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers." *Mathematics Magazine* 71, no. 4 (1998): 260–69. `https://pdfs.semanticscholar.org/60d2/c444d44932e476b80a109d90ad03472d4d5d.pdf`.

Turnbull, Herbert W., ed. *The Correspondence of Isaac Newton, Volume 2, 1676–1687.* Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

Wardhaugh, Benjamin. "Musical Logarithms in the Seventeenth Century: Descartes, Mercator, Newton." *Historia Mathematica* 35 (2008): 19–36.

Wasserman, Steven A., and Nicholas R. Cozzarelli. "Biochemical Topology: Applications to DNA Recombination and Replication." *Science* 232, no. 4753 (1986): 951–60.

Westfall, Richard S. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Whiteside, Derek T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volume 1.* Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

———. *The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volume 2.* Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

Whiteside, Derek T. “The Mathematical Principles Underlying Newton’s Principia Mathematica.” *Journal for the History of Astronomy* 1, no. 2 (1970): 116–38. https://doi.org/10.1177/002182867000100203.

Wigner, Eugene P. “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.” *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1960): 1–14. https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html.

Wisdom, Jack, Stanton J. Peale, and François Mignard. “The Chaotic Rotation of Hyperion.” *Icarus* 58, no. 2 (1984): 137–52.

Wouk, Herman. *The Language God Talks: On Science and Religion.* Boston: Little, Brown, 2010.

Zachow, Stefan. “Computational Planning in Facial Surgery.” *Facial Plastic Surgery* 31 (2015): 446–62.

Zachow, Stefan, Hans-Christian Hege, and Peter Deuflhard. “Computer-Assisted Planning in Cranio-Maxillofacial Surgery.” *Journal of Computing and Information Technology* 14, no. 1 (2006): 53–64.

Zorin, Denis, and Peter Schröder. “Subdivision for Modeling and Animation.” *SIGGRAPH 2000 Course Notes*, chapter 2 (2000). http://www.multires.caltech.edu/pubs/sig00notes.pdf.