TP du CC2–Indice de Gini

Des indicateurs particuliers ont été développés pour mesurer les inégalitées de revenus ou de patrimoine. Une société sera parfaitement égalitaire si tous les individus reçoivent le même revenu. Au contraire, elle est considérée comme parfaitement inégalitaire si un seul individu reçoit tous les revenus.

On représente ces inégalités par **la courbe de Lorenz**.

2.1 Courbe de Lorenz

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les revenus des n individus de la société considérée. Comme précédemment, on note $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ les revenus ordonnés par ordre croissant. Le revenu total est la somme des revenus $x_1 + \ldots + x_n = x_{(1)} + \ldots + x_{(n)}$. Pour tout i entre 1 et n, Q_i est la proportion de revenus (par rapport au revenu total) perçus par les i individus ayant les i plus petits revenus :

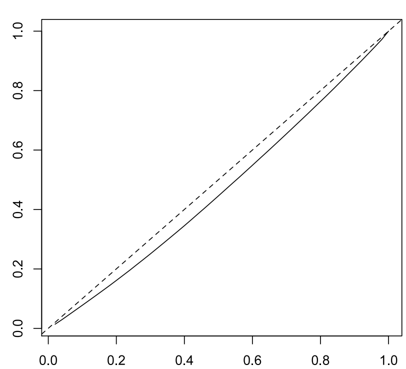
$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^{i} x_{(k)}}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

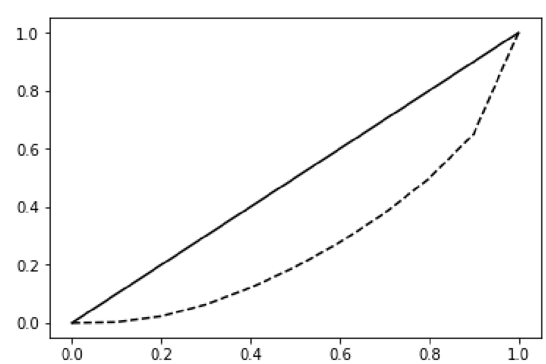
De plus, on pose $Q_0 = 0$ et on a $Q_n = 1$.
La courbe de Lorenz relie les points $\left(\frac{i}{n}, Q_i\right)$. Ainsi à chaque proportion $\frac{i}{n}$ d'individus les moins riches, on attribue la fraction des revenus totaux dont ils disposent.

Remarque
Dans le cas particulier où chaque individu perçoit le même revenu alors $x_i = \frac{C}{n}$ *d'où* $x_1 + \ldots + x_n = C$ *et* $Q_i = \frac{i}{n}$. *La courbe de Lorenz est la droite d'équation* $y = x$

Exemple de courbe de Lorenz

Suivent deux courbes de Lorenz, l'une représentant une situation égalitaire, l'autre une situation beaucoup moins égalitaire.





Pour une série statistique donnée, on représente la courbe de Lorenz et la diagonale du carré de côté 1. Plus l'écart entre la courbe de Lorenz et la diagonale est grand et plus la société considérée est inégalitaire.

2.2 Indice de Gini

L'indice de Gini permet de quantifier cet écart. Il est égal à 2 fois la surface comprise entre la courbe de Lorenz et la diagonale :

$$\begin{aligned} G &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_1 + Q_{i+1}}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n}\left[1 - 2\sum_{i=0}^{n} Q_i\right]. \end{aligned}$$

Démonstration

Tout d'abord remarquons que G est égal à 2 fois la surface entre les 2 courbes.

– La surface entre les 2 courbes vaut

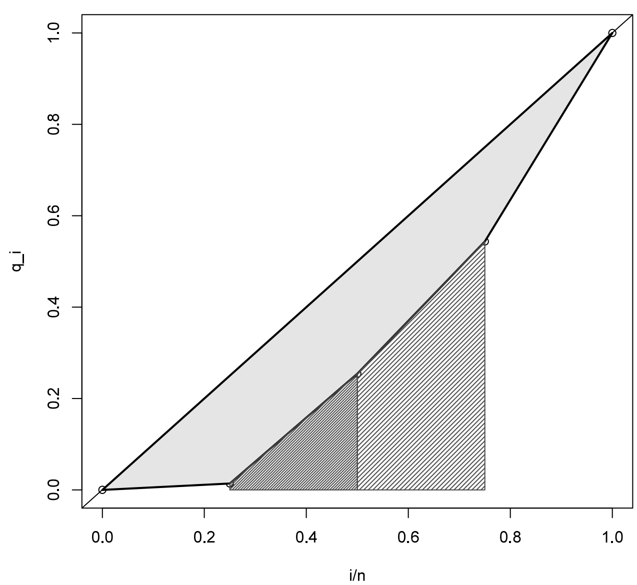
$$\text{la surface sous la diagonale} \; - \; \text{la surface sous la courbe de Gini}$$

– La surface sous la diagonale est égale à la moitié de la surface du carré soit $\frac{1}{2}$.

– La surface sous la courbe de Gini est une somme de trapèzes $= \sum_{i=0}^{n-1} T_i$ où T_i est la surface d'un trapèze (représenté en gris hachuré sur la figure 2.3)

La largeur de chaque trapèze est $\frac{i}{n} - \frac{i+1}{n} = \frac{1}{n}$ Le trapèze est de hauteur Q_i à gauche et Q_{i+1} à droite. D'où une surface de

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{n}Q_i + \frac{1}{2}\frac{1}{n}(Q_{i+1} - Q_i) \\ &= \frac{1}{2n}\left[2Q_i + Q_{i+1} - Q_i\right] \\ &= \frac{1}{2n}\left[Q_i + Q_{i+1}\right] \end{aligned}$$



Finalement, l'indice de Gini vaut

$$\begin{aligned} G &= 2\left[\frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_i + Q_{i-1}}{2n}\right] \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_i + Q_{i-1}}{n} \end{aligned}$$

2.3 Interprétation

L'indice de Gini

$$G = 1 + \frac{1}{n}\left[1 - 2\sum_{i=0}^{n} Q_i\right]$$

est compris entre 0 et 1. Il est proche de 0 si tous les revenus sont égaux.

2.4 Exercice

On lit dans le tableau ci-dessous les produits intérieurs bruts par habitant (en euros) pour chaque région de France métropolitaine en 2015.

Hauts-de-France 26095	Bourgogne-Franche-Comté 26218	Corse 26954
Centre-Val de Loire 27274	Grand Est 27378	Occitanie 27449
Normandie 27465	Nouvelle-Aquitaine 27657	Bretagne 27838
Pays de la Loire 29424	Provence-Alpes-Côte d'Azur 30864	Auvergne-Rhônes-Alpes 31639
Île-de-France 55227		

Source : INSEE, Produit intrieur brut en 2015, Comparaisons régionales, paru le 29/11/2018

(i) Tracer la courbe de Lorenz.

(ii) Calculer l'indice de Gini et commenter.

Vous enverrez par e-mail à l'adresse `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr` un fichier contenant votre code R, vos interprétations et le graphe R.