Analyse de la décision

Cours 3 - Kuhn, Tucker, Marshall, Hicks

<u>Motivation</u> : on a vu dans le cours no. 2 comment le problème de maximisation de l'utilité se traduisait en un problème dit "d'optimisation" :

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \end{cases}$$

Ce problème dont la fonction coût, à maximiser, est l'utilité d'une consommatrice (c'est ainsi que les préférences de celle-ci sont modélisées), comporte des contraintes :

- le choix / la décision de la consommatrice est modélisé par les quantités des biens ① et ② qu'elle souhaite acheter : ces quantités sont <u>positives</u> (achat et non vente) ;
- le budget de cette consommatrice est borné par son revenu, $r > 0$ (fixé) ; les prix des biens ① et ② étant également fixés, la contrainte de budget s'écrit

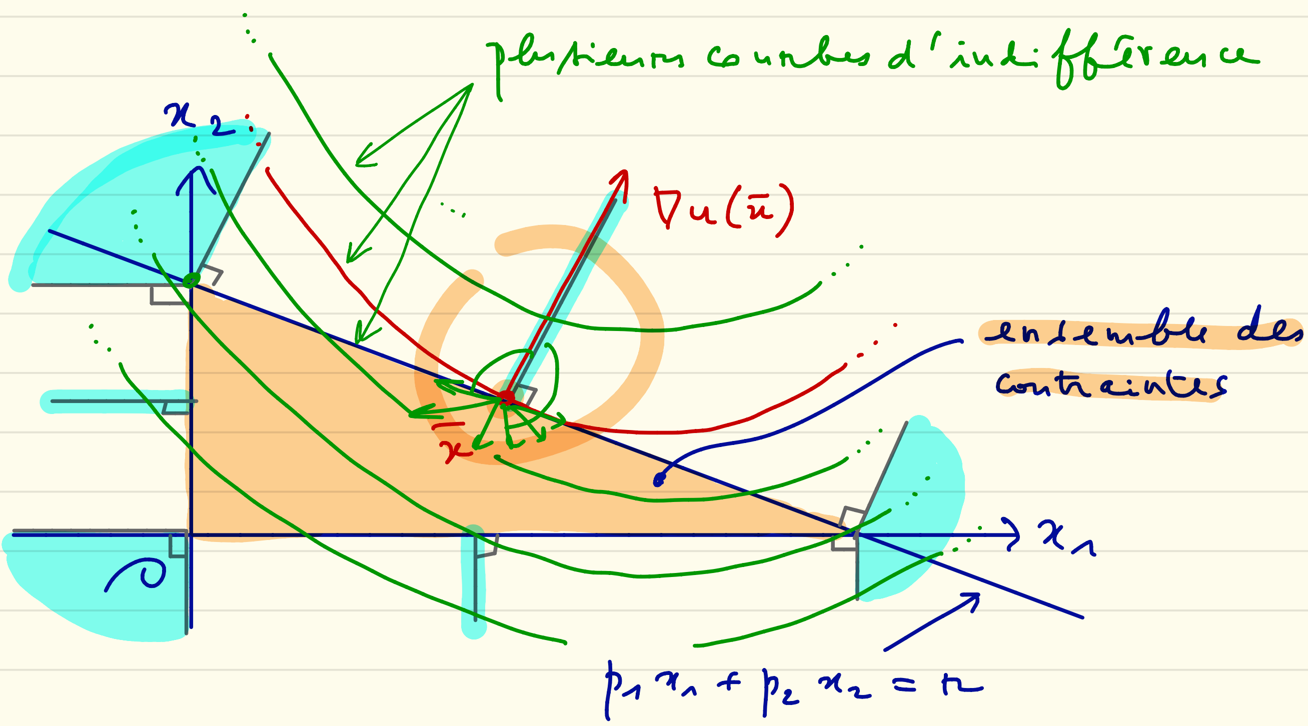
$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r$$

où p_1 et p_2 sont strictement positifs.

On a défini la courbe d'indifférence (de niveau d'utilité u_0) comme le sous-ensemble de $X = \mathbb{R}^2_+$ (ensemble des choix $x_1, x_2 \geq 0$)

$$\{(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}^2_+ \mid u(x_1, x_2) = u_0\}$$

et on montré que, si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X$ est un choix optimal (ie un choix qui maximise l'utilité tout en respectant la contrainte de budget), on doit avoir (condition "nécessaire") la situation géométrique ci-dessous :



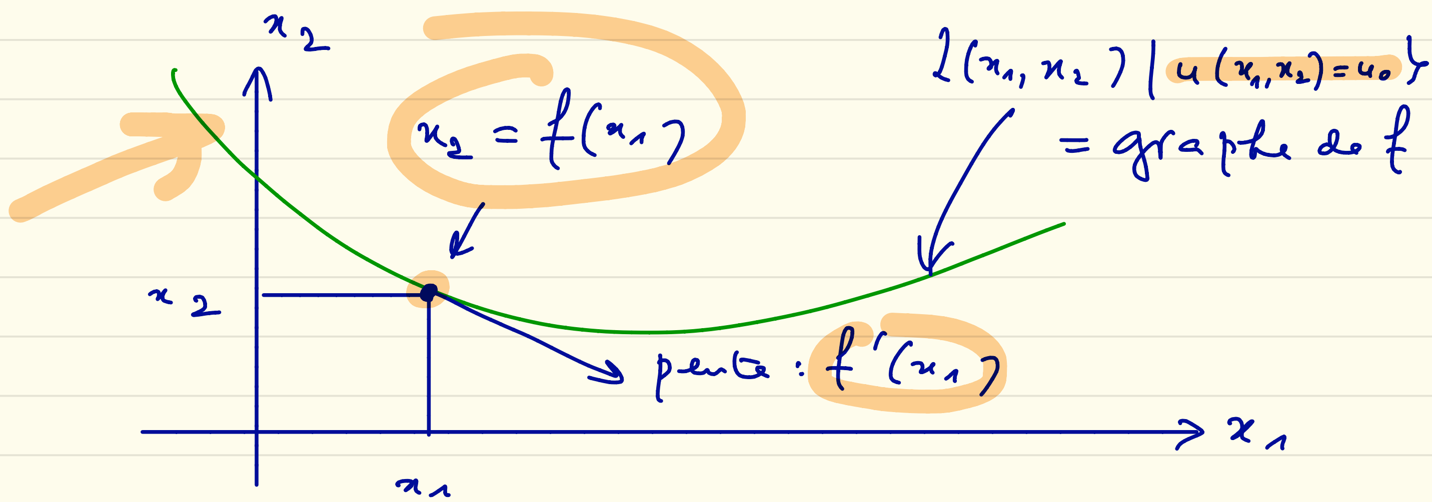
Le gradient $\nabla u(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{bmatrix}$ de l'utilité à l'optimum doit appartenir à l'ensemble des directions (en bleu sur le schéma) qui forment un angle obtus ($\geq 90°$) avec les directions qui, partant de $\bar{x}$, font "rester dans les contraintes".

Le but de cette séance est de donner une version algébrique de cette condition géométrique à l'aide de la notion de "multiplicateurs de Lagrange". Donnons au préalable quelques définitions complémentaires relatives à l'utilité.

Soit $(x_1^0, x_2^0) \in X = \mathbb{R}_+^2$; notons $u_0 := u(x_1^0, x_2^0)$ l'utilité de ce choix. Si $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \neq 0$, il existe une fonction f, définie pour x_1 assez proche de x_1^0, telle que "localement", la courbe d'indifférence de niveau u_0 est le graphe de f :

$$u(x_1, x_2) = u_0 \iff x_2 = f(x_1).$$

On va faire dans la suite l'hypothèse que cette représentation est "globale" et que, $\forall u_0$, on peut trouver une telle fonction f (elle dépend de u_0 — cf. Exo 4, TD 2) de même régularité que u (dérivable sur $\mathbb{R}$ si u est dérivable sur $\mathbb{R}^2$, etc.)



Déf. (TMS = Taux Marginal de Substitution) : soit $(x_1, x_2) \in X$, on appelle taux marginal de substitution, et on note $TMS_{12}(x_1, x_2)$, l'opposé de la pente de la tangente en (x_1, x_2) à la courbe d'indifférence passant par ce point :

$$TMS_{12}(x_1, x_2) = - f'(x_1)$$

où f paramétrise la courbe d'indifférence de niveau $u(x_1, x_2)$.

Remarque : comme précédemment indiqué, une telle fonction f existe au voisinage de x_1 dès que $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0$. On fait cette hypothèse, et on suppose en outre que u est dérivable, ce qui garantit que f l'est aussi. C'est le théorème (fondamental !) des "fonctions implicites" qui est à l'oeuvre ici.

Prop. : $$TMS_{12}(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

dém. : par définition de la courbe d'indifférence passant par le point $(x_1^0, x_2^0) \in X$, on a

$u(x_1, f(x_1)) = cte = u(x_1^0, x_2^0)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx_1}\left(u(x_1, f(x_1))\right) = 0$

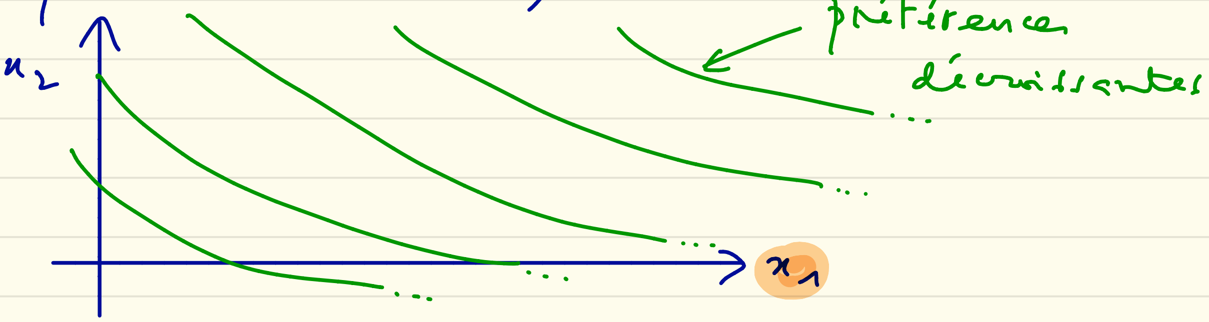
$\Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, f(x_1)) \cdot f'(x_1)$

$\Rightarrow f'(x_1) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, f(x_1))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, f(x_1)),$

de sorte que $TMS_{12}(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$

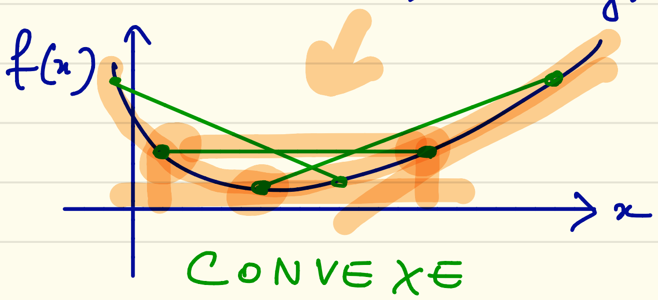
en appliquant le résultat au point $(x_1^0, x_2^0) = (x_1^0, f(x_1^0))$. $\square$

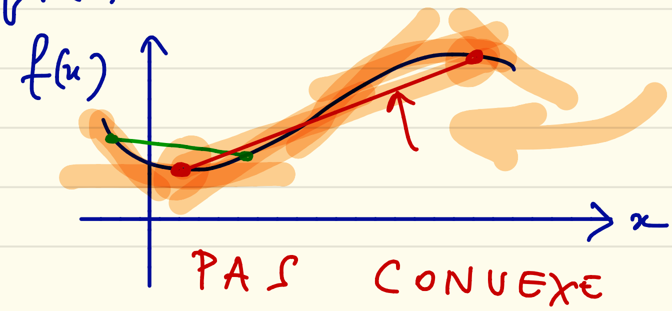
<u>Déf.</u> : les préférences modélisées par l'utilité u sont dites croissantes (resp. décroissantes) lorsque les courbes d'indifférence (quel que soit le niveau d'utilité) sont croissantes (resp. décroissantes).



<u>Déf.</u> : les préférences modélisées par l'utilité u sont dites convexes lorsque les courbes d'indifférence (quel que soit le niveau) sont convexes.

<u>Remarques</u> : i) une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si, quels que soient deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sur son graphe, le segment (ou "corde") qui relie ces points est au dessus du graphe :





Algébriquement, la condition se traduit par :

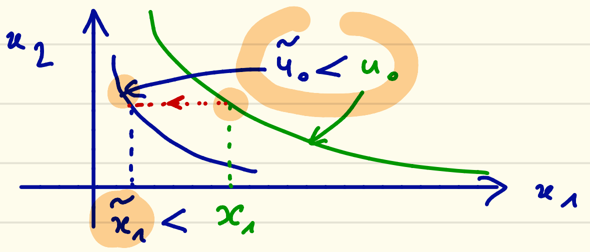
$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \lambda \in [0,1])$:

$$\underbrace{f(\underbrace{(1-\lambda)x+\lambda y}_{\substack{\text{combinaison}\\ \text{convexe } \in [x,y]\\ \text{quand } \lambda \in [0,1]}})}_{\substack{\text{image (par } f\text{)}\\ \text{de cette combinaison}\\ \text{convexe}}} \leq \overbrace{(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)}^{\text{combinaison convexe des images}}$$

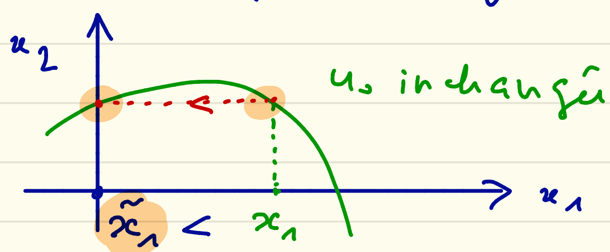
ii) Si la fonction est dérivable, ça signifie que la pente de la tangente au graphe est croissante ; ie, si la fonction est deux fois dérivable, que la dérivée seconde (= la dérivée de la dérivée) est positive :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, est convexe ssi $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f''(x) \geq 0$.

iii) En micro-économie, la convexité des préférences est une hypothèse souvent utilisée qui traduit le goût pour la diversité : un panier où les biens sont en quantités équilibrées est préféré à un panier où l'un des biens est en quantité faible.



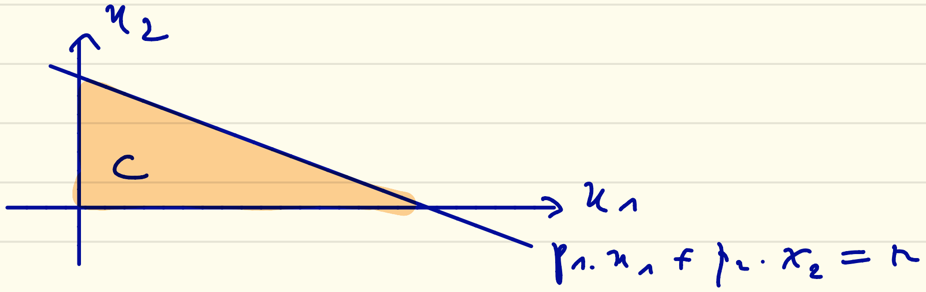
CONVEXE



PAS CONVEXE

Prop. (existence en utilité maximale) : si l'utilité est continue, le problème de maximisation de l'utilité possède (au moins) une solution.

dém. :



Comme p_1 et p_2 sont > 0, la droite de budget intersecte (Ox_1) et (Ox_2), de sorte que $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1.x_1 + p_2.x_2 \leq r\}$ est borné (et fermé) : c'est un compact, donc l'utilité, si elle est continue, prend des valeurs également bornées sur ce compact et y atteint ses bornes. □

Donnons maintenant la traduction algébrique annoncée de la condition nécessaire de solution vue au cours 2.

Th. (KKT = Karush-Kuhn-Tucker) : soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ une solution du problème d'optimisation (de minimisation) suivant :

$x_1, \dots, x_n$: n inconnues

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ g_1(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0 \end{cases}$$

où les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ sont continûment différentiables.

Alors, il existe $(\bar\mu_0, \overbrace{\bar\mu_1, \dots, \bar\mu_p}^{p \text{ inconnues}}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{R}^{1+p}$
tq :

i) $\nabla_x L(\bar x, \bar\mu) = 0$ où L est le Lagrangien du problème,

n équ.

$$L(x, \mu) := \cancel{\mu_0}\,1.\, f(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot g_i(x)$$

ii) $\bar\mu_0 \geq 0, \bar\mu_1 \geq 0, \dots, \bar\mu_p \geq 0$: les $\bar\mu_i$, appelés multiplicateurs de Lagrange, sont tous positifs ; ($\bar\mu_i > 0$ (ici!), contrair., idem géom., K(KT))

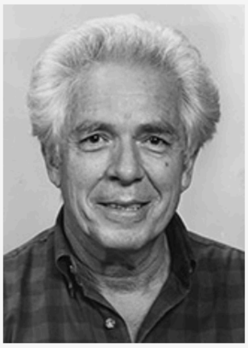
iii) $(\forall i = 1, p)$: $\bar\mu_i \cdot g_i(\bar x) = 0$: complémentarité, ie

– soit $g_i(\bar x) = 0$ (la contrainte $g_i(\bar x) \leq 0$ est dite "active")

p équ.

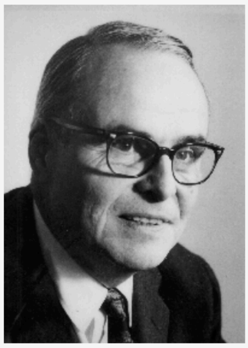
– soit $\bar\mu_i = 0$ (les deux pouvant être vrais simultanément).

Harold W. Kuhn



Born	July 29, 1925 Santa Monica, California
Died	July 2, 2014 (aged 88) New York City, New York
Nationality	American
Alma mater	Princeton University
Known for	Hungarian method Karush–Kuhn–Tucker conditions Kuhn poker
Awards	John von Neumann Theory Prize (1980)

Albert W. Tucker



Born	Albert William Tucker 28 November 1905 Oshawa, Ontario, Canada
Died	25 January 1995 (aged 89) Hightstown, New Jersey, U.S.
Nationality	Canadian American
Alma mater	University of Toronto, Princeton University
Known for	Prisoner's dilemma Karush–Kuhn–Tucker conditions Combinatorial linear algebra
Awards	John von Neumann Theory Prize (1980)

Remarques : i) en pratique, on dispose de conditions (de "qualifications des contraintes") qui garantissent que $\bar{\mu}_0$ est > 0 : par homogénéité, on pose alors $\bar{\mu}_0 = 1$. C'est le cas en maximisation de l'utilité : on met le problème sous la forme voulue en le reformulant selon

$$\begin{cases} -u(x_1, x_2) \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0 \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r \leq 0 \end{cases}$$

Le Lagrangien (avec $\bar{\mu}_0 = 1 > 0$ — des contraintes linéaires sont automatiquement qualifiées...) s'écrit :

$$L(x, \mu) = -u(x_1, x_2) + \mu_1 . (-x_1) + \mu_2 (-x_2) + \mu_3 (p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r)$$

puisque $g_1(x) = -x_1$, $g_2(x) = -x_2$
$g_3(x) = p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r$.

Les conditions KKT disent qu'en $\bar{x}$, solution, $\exists (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{R}^3$ tq :

$$0 = \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = -\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \bar{\mu}_1 . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mu}_2 . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \bar{\mu}_3 . \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

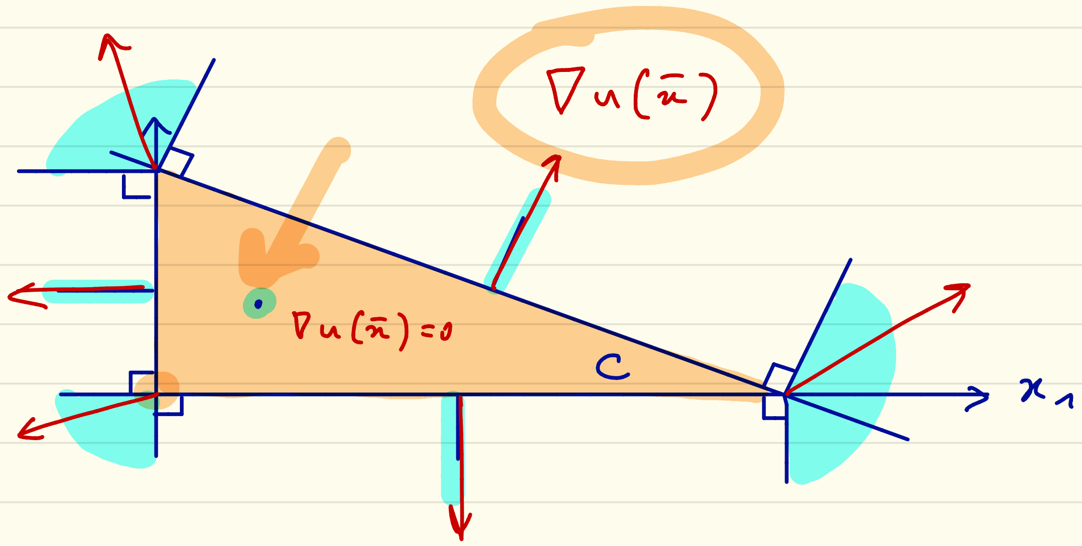
avec $\bar{\mu}_1 \geq 0$, $\bar{\mu}_2 \geq 0$, $\bar{\mu}_3 \geq 0$ et

$$\begin{cases} \bar{\mu}_1 . \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{\mu}_2 . \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_3 . (p_1 . \bar{x}_1 + p_2 . \bar{x}_2 - r) = 0 .$$

La relation (*) se réécrit $\exists(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$ positifs tq

$$\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{\mu}_3 \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\mu}_1 \\ -\bar{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

ce qui traduit exactement la condition géométrique rappelée en début de cours :



Par exemple, parmi les cas possibles :

– si la solution $\bar{x}$ est à l'intérieur des contraintes, ie si l'on a

aucune contrainte active

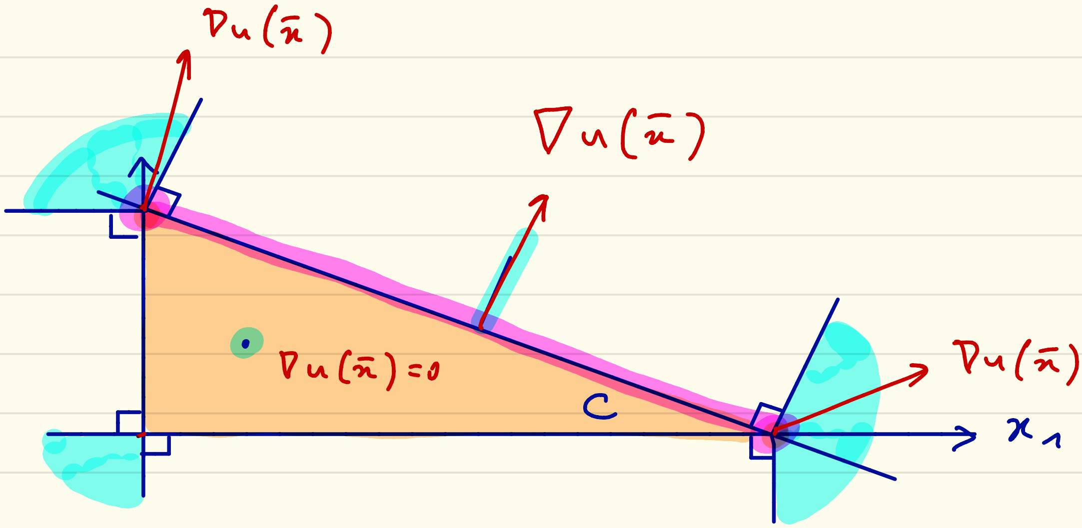
$$\bar{x}_1 > 0,\ \bar{x}_2 > 0 \text{ et } p_1 \cdot \bar{x}_1 + p_2 \cdot \bar{x}_2 < r,$$

par complémentarité $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3 = 0$, et nécessairement $\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$;

– si on a, $\forall x \in C$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$,

la situation précédente est exclue, de même que le cas $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$;

de fait on voit que les conditions KKT impliquent dans ce cas que la contrainte de budget doit être active, les solutions "en coins" ($\bar{x}_1$ ou $\bar{x}_2 = 0$) n'étant pas exclues :



Dans ce cas, il suffit alors pour résoudre de maximiser la fonction

$p_1.x_1 + p_2.x_2 = r$

$$(**) \begin{cases} \varphi(x_1) = u\left(x_1, \dfrac{1}{p_2}(r - p_1.x_1)\right) \\ \text{avec } x_1 \in \left[0, \dfrac{r}{p_1}\right] \end{cases}$$

puisque le bord de la contrainte sur lequel toute solution doit se trouver se paramétrise selon : $x_2 = \dfrac{1}{p_2}(r - p_1.x_1)$.

Le tableau des variations de φ permet donc de résoudre le problème de maximisation de l'utilité.

NB. Sans hypothèse supplémentaire sur l'utilité, pas unicité de solution.

En particulier, si une solution $\bar{x}_1 \in]0, r/p_1[$, on a :

$$\varphi'(\bar{x}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\bar{x}_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\bar{x}_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = p_1/p_2}$$

avec $\bar{x}_2 = \frac{1}{p_2}(r - p_1 . \bar{x}_1)$

ie : $$TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{p_1}{p_2}.$$

Cette relation s'appelle en économie le "principe d'égalisation marginale" :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \Big/ p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \Big/ p_2$$

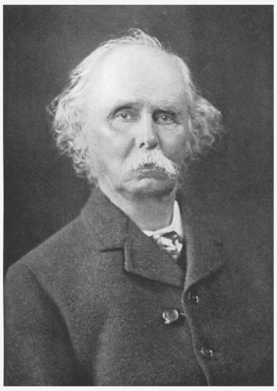
"utilités marginales"

Déf. : lorsque la solution du problème de maximisation de l'utilité est unique, on définit la "demande marshallienne" comme la quantité

$$\bar{x}(p_1, p_2, r) = (\bar{x}_1(p_1, p_2, r), \bar{x}_2(p_1, p_2, r))$$

qui traduit la dépendance des quantités optimales des biens (1) et (2) en leurs prix p_1, p_2 et le revenu r.

Alfred Marshall
FBA



Born	26 July 1842 London, England
Died	13 July 1924 (aged 81) Cambridge, England
Nationality	British
Institution	St John's College, Cambridge University College, Bristol Balliol College, Oxford

Prop. : la demande marshallienne est homogène (positivement) au sens où :

$$(\forall \lambda > 0) : \bar{x}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda r) = \bar{x}(p_1, p_2, r).$$

dém. : évident puisque $(\lambda p_1).x_1 + (\lambda p_2).x_2 \leq \lambda r$

$$\iff p_1.x_1 + p_2.x_2 \leq r. \quad \square$$

Remarque : lorsque la demande marshallienne active ("sature") la contrainte de budget, on a :

$$p_1.\bar{x}_1(p_1, p_2, r) + p_2.\bar{x}_2(p_1, p_2, r) = r \quad (\text{"loi de Walras"})$$

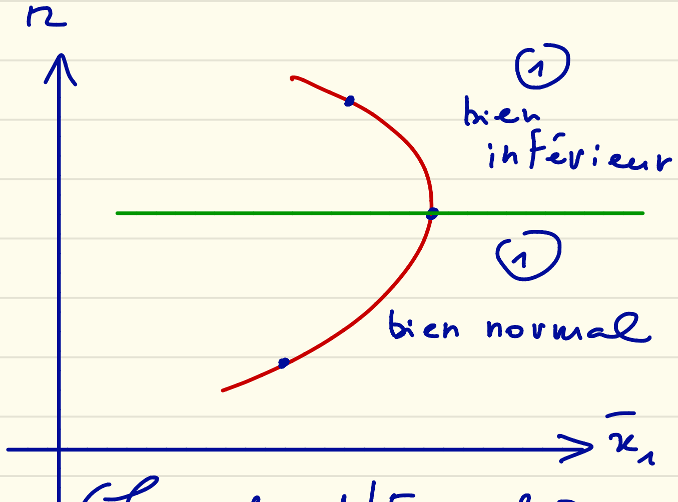
On suppose dans les définitions qui suivent que la demande marshallienne est une fonction dérivable des prix et du revenu.

Déf. : l'effet revenu du bien i ($i = 1$ ou 2) mesure la variation de la consommation optimale (marshallienne) du bien i quand le revenu varie et que les prix sont fixés : c'est la quantité

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial r}(p_1, p_2, r).$$

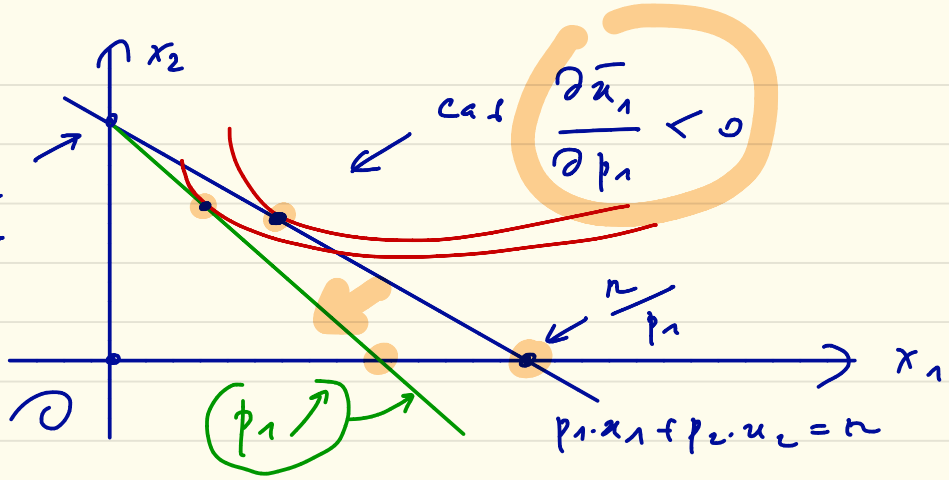
→ $\dfrac{\partial \bar{x}_i}{\partial r} > 0$: bien "normal"

→ $\dfrac{\partial \bar{x}_i}{\partial r} < 0$: bien "inférieur"



(Courbe d'Engel)

Déf. : l'**effet prix** d'un bien i ($i = 1$ ou 2) mesure la variation de la consommation optimale (marshallienne) quand le prix du bien i change, l'autre prix et le revenu étant inchangés : c'est la quantité



$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_i}(p_1, p_2, r).$$

$\rightarrow \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_i}(p_1, p_2, r) > 0$: bien "de Giffen" ; la baisse du prix traduit une baisse de consommation. Ce paradoxe apparent traduit le fait que le gain de pouvoir d'achat résultant de la baisse du prix p_i est plus "utilement" mis à profit en diminuant la quantité $\bar{x}_i$.

Considérons pour terminer le problème obtenu en inversant coût et contrainte de budget : la minimisation de la dépense à niveau d'utilité minimale fixé. (Ce "renversement" coût / contrainte est une démarche classique en optimisation.) Avec les deux mêmes biens, le problème s'écrit (cf. CM2) :

coût = dépense

$$\begin{cases} p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \longrightarrow \min \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \\ u(x_1, x_2) \geqslant u_0 \end{cases}$$

u_0 : niveau d'utilité minimale fixé

On a vu que, sous les hypothèses précédentes (notamment $\partial u / \partial x_2 \neq 0$), on peut représenter la courbe d'indifférence de niveau u_0 comme le graphe d'une fonction f :

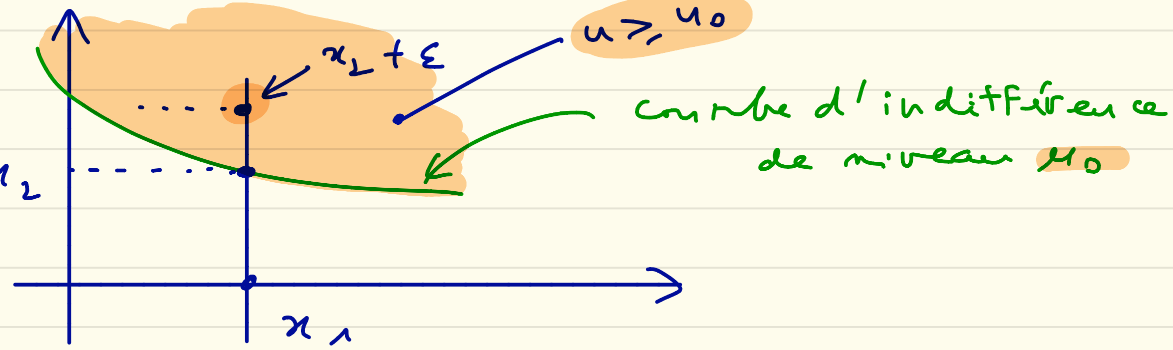
$$u(x_1, x_2) = u_0 \iff x_2 = f(x_1) ;$$

plaçons nous en $(x_1, x_2 := f(x_1))$ sur cette courbe, et supposons que $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$;

clairement, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$u(x_1, x_2 + \varepsilon) > u(x_1, x_2) = u_0$$

de sorte que (au moins localement), l'ensemble des pts d'utilité $\geq u_0$ est au dessus du graphe de f :

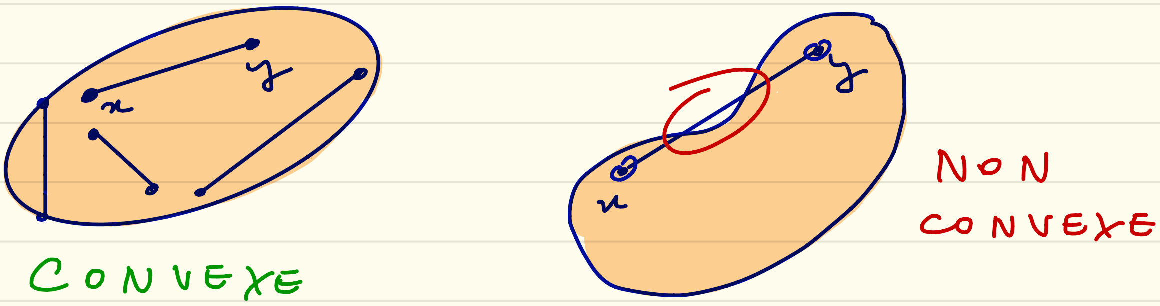


Si les préférences sont convexes, f est une fonction convexe et l'ensemble

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq f(x_1)\}$$

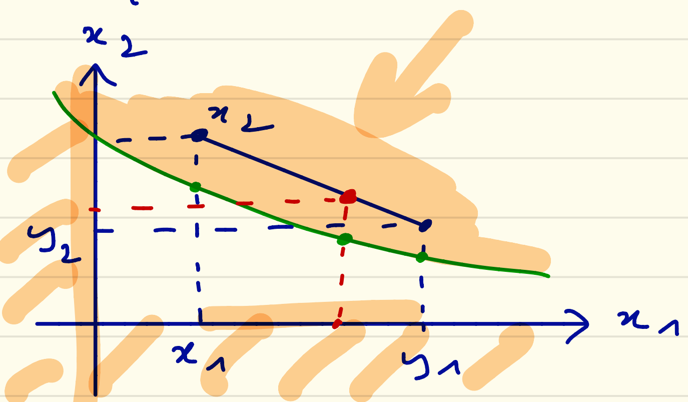
est un ensemble convexe au sens de la définition ci-après :

Déf. : $C \subset \mathbb{R}^2$ est convexe si $(\forall (x,y) \in C^2)$:
$[x,y] := \{(1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in [0,1]\} \subset C$.



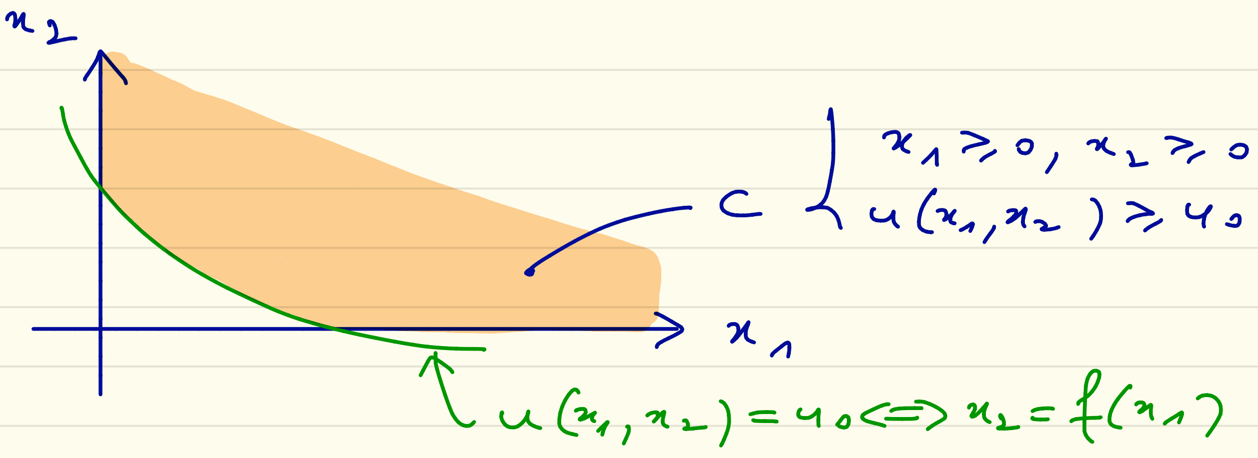
→ En effet, si la fonction f est convexe, soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ au dessus du graphe de f, et soit $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1) \leq (1-\lambda)\overbrace{f(x_1)}^{\leq x_2} + \lambda \overbrace{f(y_1)}^{\leq y_2}$$
$$\leq (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2$$



ce qui montre que le point $(1-\lambda).x + \lambda.y$ est aussi au dessus du graphe de f ; donc que l'ensemble des pts au dessus du graphe est convexe.

Comme les deux demi-plans $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ sont aussi convexes et qu'une intersection de convexes est convexe, on en conclut dans ce cas que l'ensemble des contraintes est convexe :



Bien que cet ensemble (qui est fermé si la fonction d'utilité est continue — ce que l'on suppose) ne soit pas borné, on a toujours existence d'une solution au problème de minimisation de la dépense. En effet, p_1 et $p_2 > 0$

$$\Longrightarrow \quad p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \longrightarrow \infty \quad \text{si } \|(x_1, x_2)\| \longrightarrow \infty$$

(avec x_1 et $x_2 \geq 0$)

On peut se restreindre, pour minimiser cette dépense à (x_1, x_2) tq $\|(x_1, x_2)\| \leq M$, M assez grand : C intersecté avec cet ensemble est fermé borné (compact) et la dépense atteint son minimum sur cet ensemble.

Écrivons donc la condition nécessaire de solution (conditions KKT) : si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ minimise la dépense sous contrainte d'utilité, $\exists (\cancel{\bar{\mu}_0}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \neq (0,0,0,0)$ tq

5 inconnues

i) $D_x L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) = 0$

où $L(x, \mu) = \mu_0 \cdot (p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2)$
$\quad + \mu_1 \cdot (-x_1) + \mu_2 \cdot (-x_2)$
$\quad + \mu_3 \cdot (u_0 - u(x_1, x_2))$;

2 équ.

noter qu'on a bien mis le problème sous la forme requise en reformulant les contraintes selon :

$$\begin{cases} -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \\ u_0 - u(x_1, x_2) \leq 0. \end{cases}$$

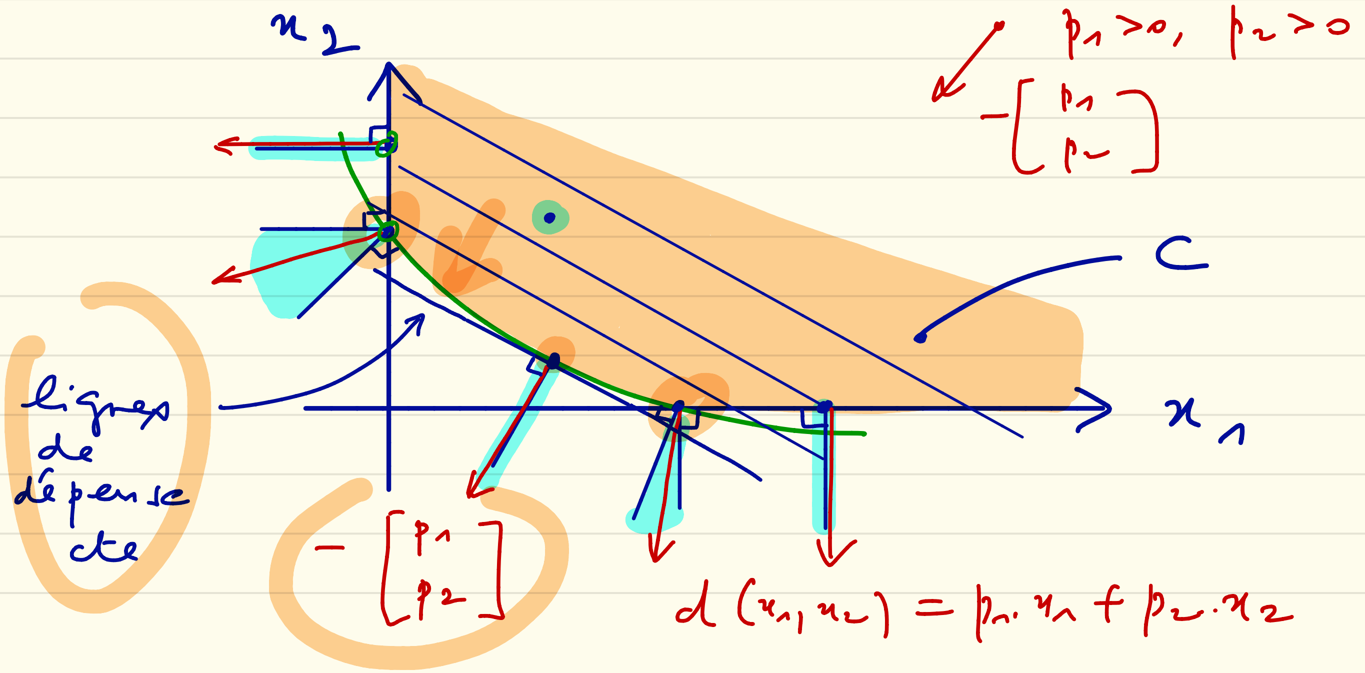
ii) $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3$ sont positifs ; en pratique, on pourra toujours supposer $\bar{\mu}_0 > 0$ et poser $\bar{\mu}_0 = 1$:

$$L(x, \mu) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - \mu_1 \cdot x_1 - \mu_2 \cdot x_2 + \mu_3 (u_0 - u(x_1, x_2)).$$

3 équ.

iii) $\bar{\mu}_1 \cdot \bar{x}_1 = 0, \ \bar{\mu}_2 \cdot \bar{x}_2 = 0,$: complémentarité.
$\bar{\mu}_3 \cdot (u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - u_0) = 0$

Ces conditions algébriques traduisent la même condition géométrique qu'en max de l'utilité (noter le signe $-$ devant le gradient $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ du coût puisqu'on <u>minimise</u>) :



Notons en particulier que le cas d'une solution appartenant à l'intérieur des contraintes est interdit puisque le gradient du coût, $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ est $\neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (p_1 et $p_2 > 0$).

Dans le cas où la contrainte d'utilité est active avec $\bar{x}_1 > 0$ et $\bar{x}_2 > 0$, on peut directement écrire que si la dépense est minimisée, alors

$$\varphi'(\bar{x}_1) = 0 \quad \text{où} \quad \varphi(x_1) = p_1 . x_1 + p_2 . f(x_1)$$

en utilisant la paramétrisation par f de la courbe d'indifférence de niveau u_0.
(ça correspond au cas $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0$ et $u(x_1, x_2) = u_0$ dans KKT.) Alors,

$$0 = p_1 + p_2 . f'(\bar{x}_1) \qquad (\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1))$$

$$\Rightarrow -f'(\bar{x}_1) = p_1 / p_2 \Rightarrow TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{ie} \quad \frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) :$$

on retrouve dans ce cas le principe d'égalisation marginale vu en max de l'utilité.

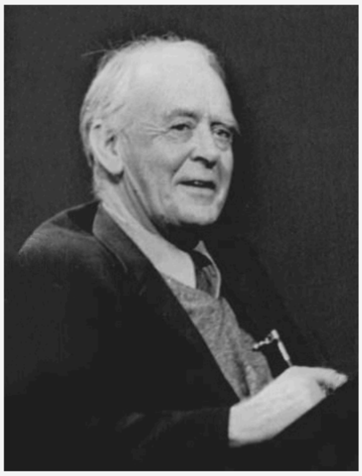
<u>Remarque</u> : les contraintes et le coût étant convexes, on mq la condition nécessaire de solution (KKT) est aussi une condition suffisante.

Lorsque le problème de min. de la dépense possède une unique solution $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, on définit :

Déf. : $h_1(p_1, p_2, u_0) := \bar{x}_1$, $h_2(p_1, p_2, u_0) := \bar{x}_2$,

les demandes hicksiennes en fonction des prix p_1, p_2 des biens 1 et 2, et du niveau d'utilité u_0.

Sir John Hicks



Hicks in 1972

Born	John Richard Hicks 8 April 1904 Warwick, England, UK
Died	20 May 1989 (aged 85) Blockley, England, UK
Nationality	British
Institution	Gonville & Caius College, Cambridge London School of Economics University of Manchester Nuffield College, Oxford
School or tradition	Neo-Keynesian economics
Alma mater	Balliol College, Oxford