Analyse de la décision.

TD 2 – Maximisation de l'utilité

Exo 1. Contrainte de budget :

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \quad (r > 0 \text{ fixé})$$

$$(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2 \text{ (infini)}$$

L'utilité que la consommatrice cherche à maximiser est donnée :

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2), \; x_1, x_2 \geq 0$$
$$= x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$$

(forme quadratique en (x_1, x_2) ...)

fonction coût

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \end{cases}$$

$r > 0$: paramètre

contraintes

$p_1 = 5$ $\quad$ $p_2 = 3$ (prix fixés et connus)

C'est un problème d'optimisation (ici de maximisation), cf. cm 2 (et cm 3).

→ existence de solution ?

→ unicité de solution ?

→ moyen effectif de déterminer les solutions (si elles existent) ?

1.1. Soit $u_0 > 0$ un niveau d'utilité fixé, on définit la courbe d'indifférence (de niveau u_0) selon :

$$\mathcal{C}_{u_0} := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) = u_0 \}$$

$$(u_1 \neq u_0 , \quad \mathcal{C}_{u_0} \cap \mathcal{C}_{u_1} = \emptyset : \text{partition de } X)$$

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{u_0} \Leftrightarrow u(x_1, x_2) = u_0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 2)(x_1 + 3 x_2) = u_0$$

2 degrés de liberté : x_1, x_2 ;

1 équation

$2 - 1$: 1 degré de liberté

"Tirons x_2 en fonction de x_1" :

$$\Leftrightarrow x_1 + 3 x_2 = \frac{u_0}{x_1 + 2}$$

$x_1 \geq 0$
$\Rightarrow x_1 + 2 > 2$
$\Rightarrow x_1 + 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{u_0}{x_1 + 2} - x_1 \right) =: f(x_1)$$: on a représenté $\mathcal{C}_{u_0}$ comme le graphe de f.

On dit (cf. CM3) que les préférences (celles qui sont modélisées par l'utilité :

$$(x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, x_2) \leq u(y_1, y_2))$$

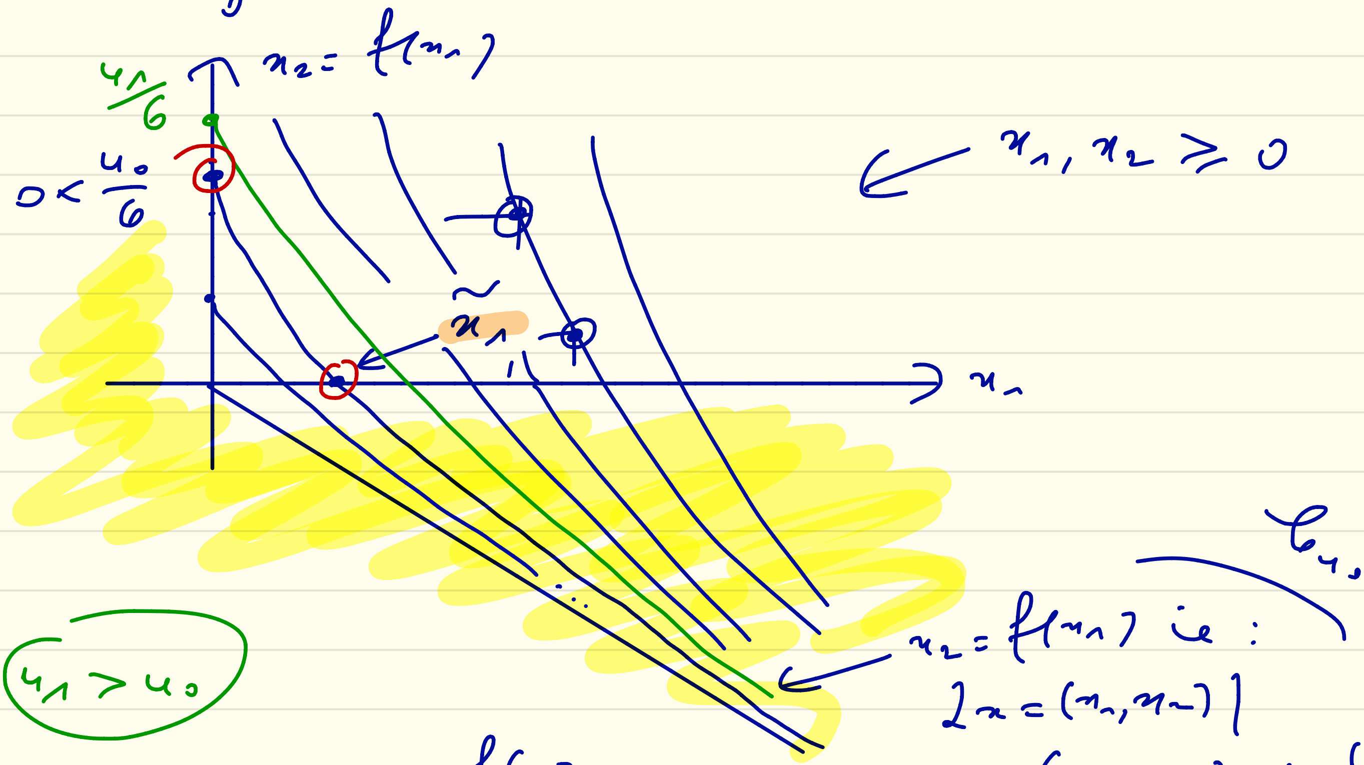
sont monotones ($\nearrow$ ou $\searrow$) si la fonction f (qui paramétrise la courbe d'indifférence, et qui dépend de u_0) est monotone.

Ici, $x_1 \geqslant 0 \Rightarrow x_1 > -2$ et $f(x_1) = \left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right)\cdot\frac{1}{3}$

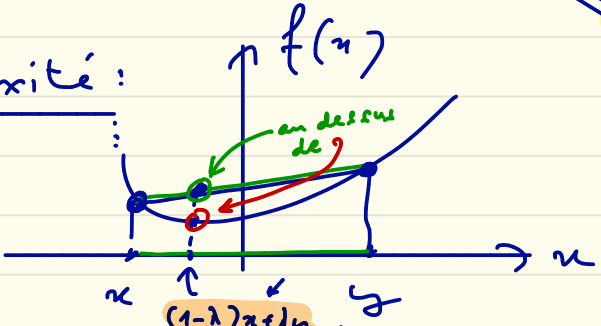
est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ($x_1 \geqslant 0$), et :

$$f'(x_1) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{-\frac{u_0}{(x_1+2)^2}}_{<0} - 1\right) < -1 < 0 : f \searrow$$

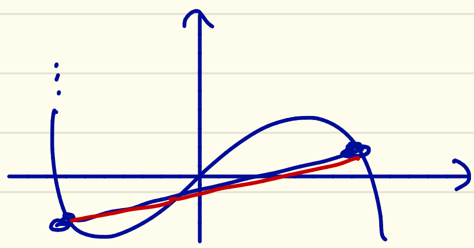
x_1	0		$\tilde{x}_1$		$+\infty$
$f'(x_1)$		$-$	$\vdots$		
$f(x_1)$	$\underset{\underset{0}{\vee}}{u_0/6}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Convexité :



fonction CONVEXE

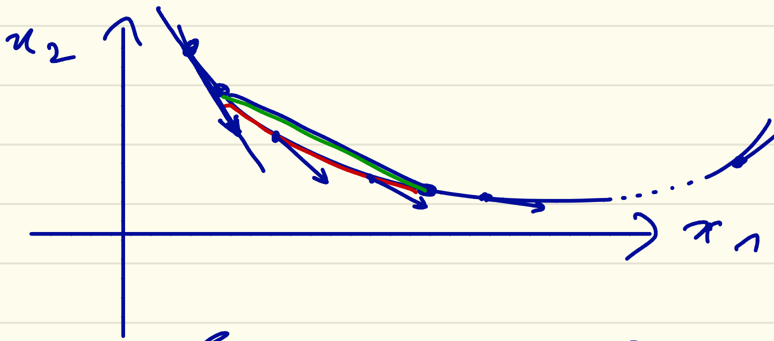


PAS CONVEXE

$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \lambda \in [0,1])$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Autre interprétation (géométrique) :



Convexité $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe est croissante
$\Leftrightarrow$ la dérivée $f' \nearrow$
$\Leftrightarrow$ $(f')' = f'' \geq 0$

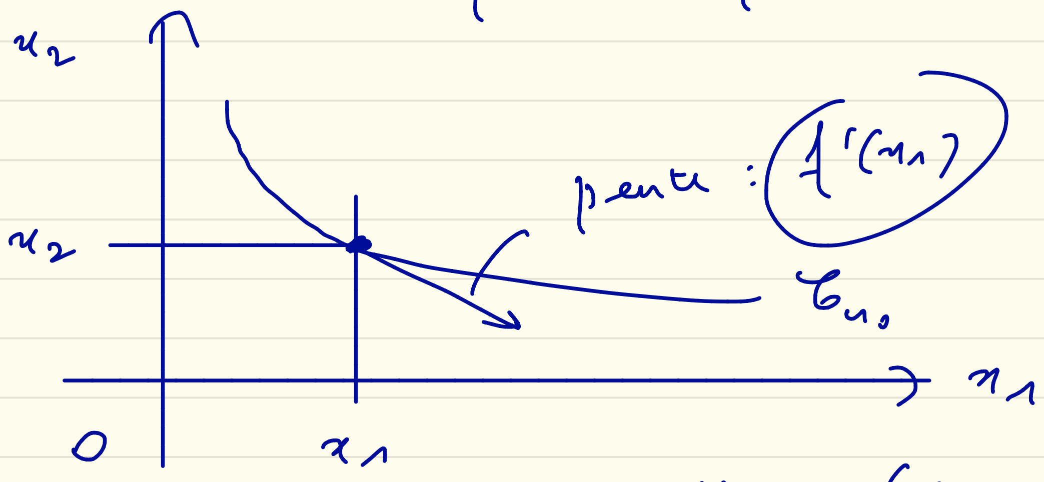
Calculons ici f'' :

$$f'(x_1) = -\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{(x_1+2)^2} - 1\right), \quad x_1 \geq 0 > -2$$

$$\Rightarrow f''(x_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{(u_0)}^{>0}}{(x_1+2)^3} > 0 \geq 0 : \text{convexe.}$$

On dit alors (cf. CM3) que les préférences sont convexes (voir aussi la convexité de l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in X \mid u(x_1, x_2) \geq u_0\}$ est convexe ... cf. Exo 2).

TMS (cf. CM3) : le Taux Marginal de Substitution en $(x_1, x_2) \in X$ est l'opposé de la pente (de la tangente ...) de la courbe d'indifférence passant par ce point :



$u_0 = u(x_1, x_2)$

où f tq $\mathcal{C}_{u_0}$ = graphe de f

(ie $u(x_1, x_2) = u_0 \Leftrightarrow x_2 = f(x_1)$)

$TMS_{12}(x_1, x_2) = - f'(x_1) > 0$

$= \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) \Big/ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)$ (cf. ch 3)

cf. ici $f' < 0$ ($\forall u_0 > 0$)

1.2. D'après le tableau de variation, on sait que le graphe intersecte l'axe $x_1 = 0$ en le point $(0, u_0/6)$ ($u_0/6 \geq 0$) ;

de plus, l'intersection avec $x_2 = 0$ se détermine en résolvant $f(x_1) = 0$, ie :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{x_1+2} = x_1$$

$$\Rightarrow u_0 = x_1^2 + 2x_1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - u_0 = 0, \quad x_1 \geq 0 \qquad \text{cf. } u_0 > 0$$

$\Delta = 4 + 4u_0 = 4(1+u_0) > 0$: 2 racines

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1 - \sqrt{1+u_0} < -1 < 0 \\ \tilde{x}_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1 + \underbrace{\sqrt{1+u_0}}_{>1\ (u_0>0)} > 0 \quad (\nearrow \text{ en } u_0) \end{cases}$$

$$\left(= \frac{\cancel{(1+u_0)} - \cancel{1}}{1+\sqrt{1+u_0}} = \frac{u_0}{1+\sqrt{}} > 0 \right)$$

1.3. Le problème se formule comme suit :

$$(*) \begin{cases} u(x_1, x_2) = (x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \quad (r > 0) \end{cases}$$

$$(*) \iff \begin{cases} -(x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \leq 0 \end{cases}$$

on met toutes les inégalités sous la forme $\text{—} \leq 0$

On a mis (*) sous la forme

$$(**)\begin{cases} c(x_1, x_2) \longrightarrow \min & (c = -u \dots) \\ g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ g_2(\text{—}) \leq 0 \\ g_3(\text{—}) \leq 0 \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} c(x) = -u(x) \\ g_1(x_1, x_2) = -x_1 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_2 \\ g_3(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \end{cases}$$

cf. cm3

Par déf., le Lagrangien du problème est :

$$L(x_1, x_2, \underbrace{\mu_1, \mu_2, \mu_3}_{\text{3 multiplicateurs de Lagrange}}) := c(x_1, x_2) + \mu_1 \cdot g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \cdot g_2(\text{—}) + \mu_3 \cdot g_3(\text{—})$$

$$= c(x) + (\mu \mid g(x))$$

où $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$

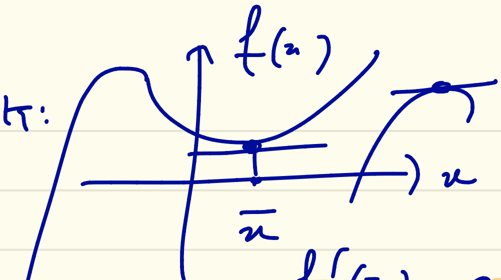
& $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$
$(= (-x_1, -x_2, p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r))$

(avec $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i$: produit scalaire)

Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est solution de (**) (ie est sol. de (*) qui est équivalent), alors :

SI… ALORS : CONDITION NÉCESSAIRE

il existe $\bar\mu = (\bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3) \in \mathbb{R}^3$ t.q. :

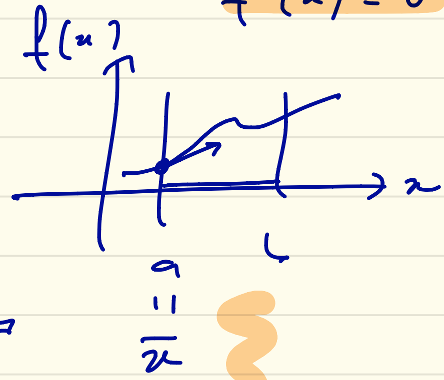


$f'(\bar x) = 0$

i) $\nabla_x L(\bar x, \bar\mu) = 0$

ie $\nabla_{x_1} L(\bar x_1, \bar x_2, \bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3) = 0$

$\nabla_{x_2} L(\text{———————}) = 0$



ii) $\bar\mu \geq 0$ ie $\bar\mu_1 \geq 0$, $\bar\mu_2 \geq 0$, $\bar\mu_3 \geq 0$

(positivité des multiplicateurs de Lagrange associés à des inégalités)

Le Lagrangien permet d'écrire ce type de condition même avec des contraintes

iii)
$$\begin{cases} \bar\mu_1 \cdot g_1(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \\ (\bar\mu_1 = 0 \text{ ou } g_1(\bar x_1, \bar x_2) = 0) \\ \bar\mu_2 \cdot g_2(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \\ \bar\mu_3 \cdot g_3(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \end{cases}$$

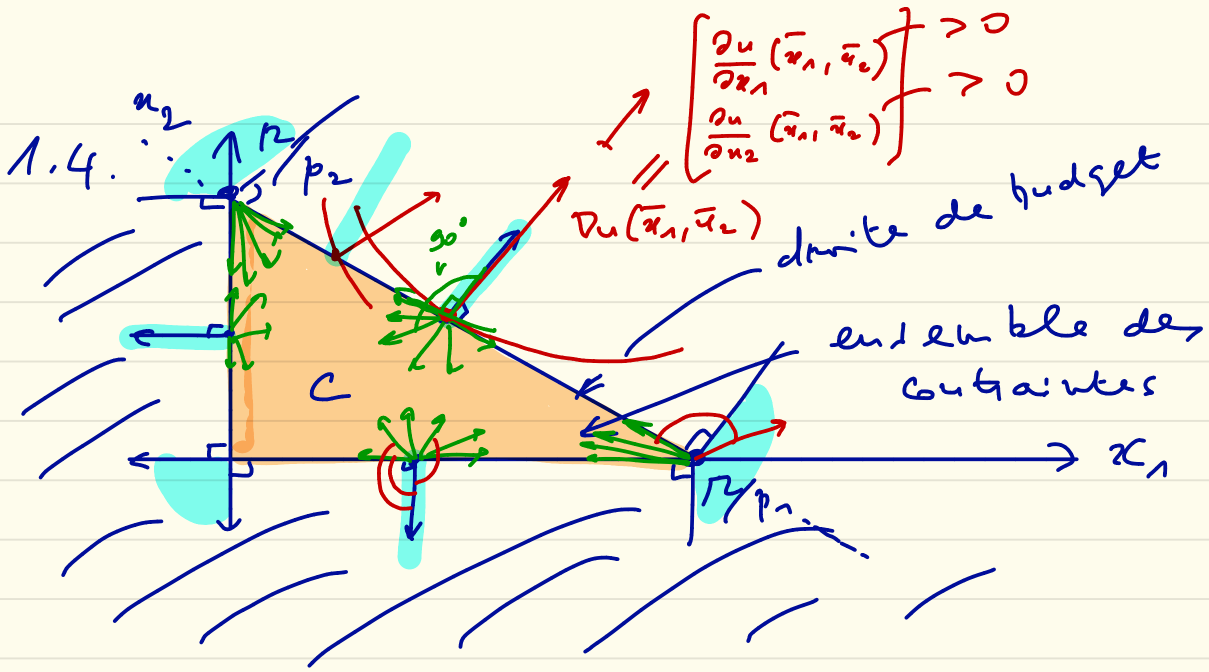
(complémentarité)

$$\boxed{\text{On a 5 équations et 5 inconnues : } \bar x_1, \bar x_2, \bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3}$$

↳ Soit $g_i(\bar x) = 0$ (auquel cas on sait juste que $\bar\mu_i \geq 0$), soit $g_i(\bar x) < 0$ et nécessairement $\bar\mu_i = 0$.

Ici :
$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -(x_1 + 2)(x_1 + 3x_2) + \mu_1(-x_1) + \mu_2(-x_2) + \mu_3(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - R).$$

1.4.



$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq R\}$

Droite de contrainte budgétaire : $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = R$

Les conditions (nécessaires) i)–iii) traduisent algébriquement la condition géométrique du cas 2 : le gradient de l'utilité en une solution $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $Du(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$

$$Du(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \end{bmatrix}$$

doit appartenir à l'ensemble des directions bleues

Ici, vérifions qu'on est dans le cas où $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sont nécessairement positives à l'optimum ; en effet, $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2)$

$\Rightarrow \quad u = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$

$$\Rightarrow \quad u = x_1^2 + 3\underset{=}{x_1 x_2} + 2x_1 + 6\underset{=}{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 2 \underset{\uparrow}{\geq} 2 > 0$$

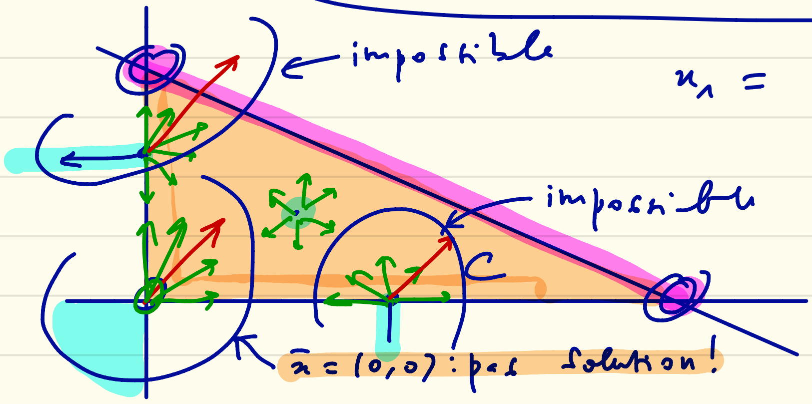
car $x_1, x_2 \geq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_1 + 6 \underset{\uparrow}{\geq} 6 > 0$$

$x_1 \geq 0$

Cela implique que la contrainte de budget est nécessairement active ("saturée") en une solution :

$$p_1 \cdot \bar{x}_1 + p_2 \cdot \bar{x}_2 = r$$



$x_1 =$

Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ était à l'intérieur de C (i.e. $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$ et $p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 < r$), on aurait :

$$\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0,$$ ce qui est impossible.

$\Rightarrow$ La solution est nécessairement sur le bord des contraintes ; on a les possibilités suivantes :

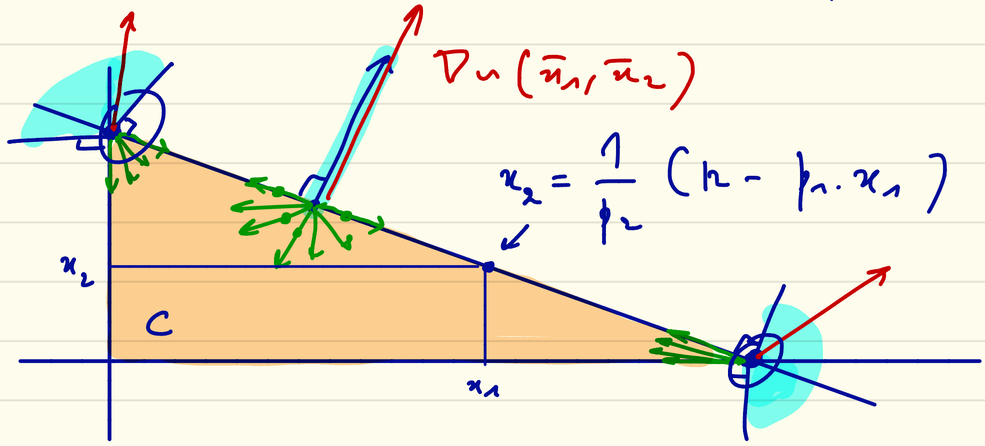
- on est soit sur l'un des 3 coins :

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \frac{r}{p_2}) = (0, \frac{r}{3})$,

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (r/p_1, 0) = (r/5, 0) \longleftrightarrow$ 2 contraintes actives clairement, le cas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \cdot)$ est exclu

- soit on est sur le bord sans être en l'un des coins $\longleftrightarrow$ 1 seule contrainte active ; clairement, on ne peut avoir ni $\bar{x}_1 = 0$, ni $\bar{x}_2 = 0$ ni on n'est pas dans un coin (cf. dessin) ;

On a donc saturation de la contrainte de budget, la situation est la suivante :



On est donc ramené à maximiser l'utilité sur le segment qui relie $(0, \frac{r}{3})$ à $(\frac{r}{5}, 0)$; sur ce segment, on peut par exemple exprimer x_2 en fonction de x_1 :

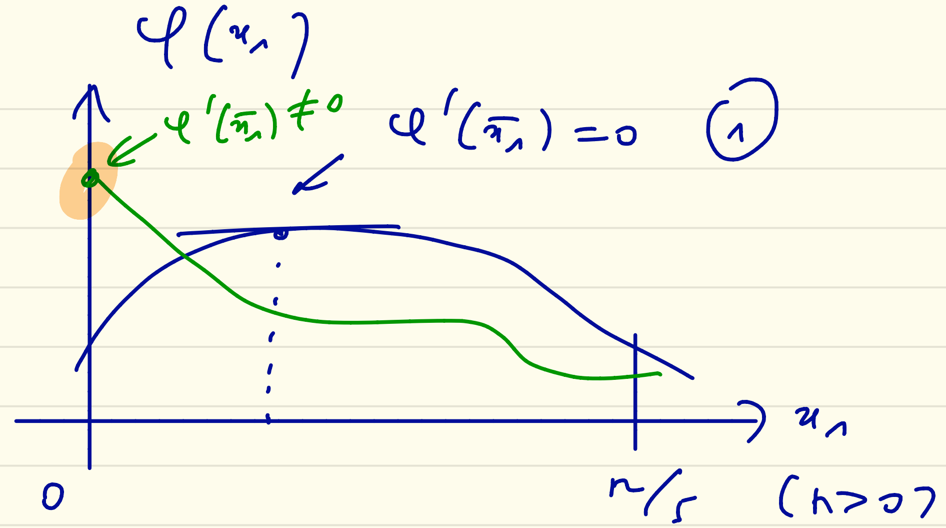
$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 = r$$

$\Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)$; on doit donc

coût

$$\text{maximiser} \quad \varphi(x_1) = u\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right)$$
$$= u\left(x_1, \frac{1}{3}(r - 5 . x_1)\right)$$

avec $x_1 \in \left[0, \dfrac{r}{5}\right]$ $\longleftarrow$ contraintes



- une solution est soit dans $]0, \frac{r}{5}[$ auquel cas $\varphi'(\bar{x}_1) = 0$ (cas 1)
- sinon, solution $\bar{x}_1 = 0$ ou $\bar{x}_1 = \frac{r}{5}$ (cas 2)

On fait l'étude des variations de φ sur $[0, r/5]$.

Ici, $\varphi(x_1) = u(x_1, \overbrace{\frac{1}{3}(r - 5x_1)}^{x_2})$

$$= (x_1 + 2)\cdot(x_1 + \cancel{3}(\frac{1}{\cancel{3}}(r - 5x_1)))$$

$$= (x_1 + 2)(-4x_1 + r)$$

$$= -4x_1^2 + (r-8)\cdot x_1 + 2r$$

φ est dérivable et

$$\varphi'(x_1) = -8x_1 + (r - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \boxed{\frac{r}{8} - 1}$$

: selon la valeur du paramètre de revenu r (>0), le zéro de la dérivée appartiendra ou non à l'intervalle $[0, r/5]$.

$\rightarrow \frac{r}{8} - 1 > 0 \Leftrightarrow r > 8$

$\rightarrow \frac{n}{8} - 1 < \frac{n}{5} \iff \frac{3n}{40} > -1$

$\iff n > -\frac{40}{3}$: toujours vrai car $n > 0$.

On n'a donc que deux cas :

- soit $n > 8$ et $\frac{n}{8} - 1 \in]0, \frac{n}{5}[$

x_1	0		$\frac{n}{8}-1$		$\frac{n}{5}$
$\varphi'(x_1)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x_1)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ le maximum est atteint en un seul pt (existence et unicité) : $\overline{x}_1 = \frac{n}{8} - 1$;

donc, la sol. est $\overline{x} = \left(\frac{n}{8} - 1, \frac{n}{8} + \frac{5}{3}\right)$

(cf. $\overline{x}_2 = \frac{1}{3}(n - 5 \cdot \overline{x}_1)$

$= \frac{1}{3}\left(n - 5\left(\frac{n}{8} - 1\right)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3n}{8} + 5\right) = \frac{n}{8} + \frac{5}{3}$)

- soit $n \leq 8$ et $\frac{n}{8} - 1 \leq 0$:

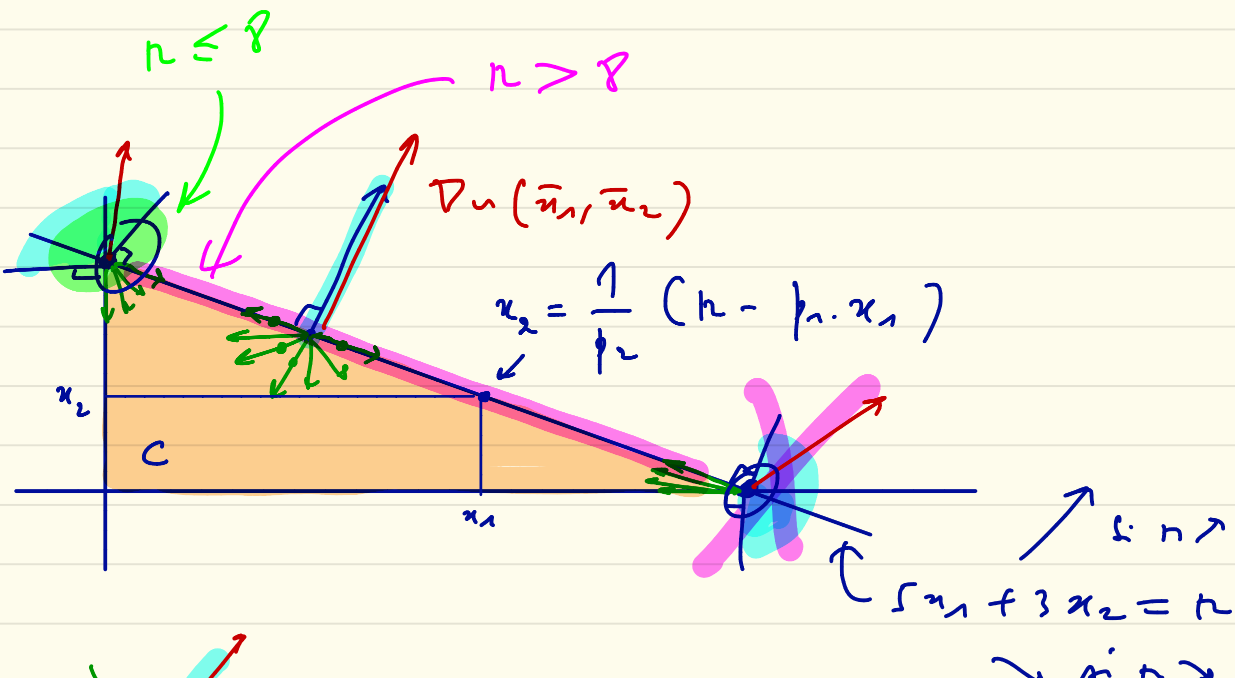
x_1	0		$\frac{n}{5}$
$\varphi'(x_1)$		$-$	
$\varphi(x_1)$		$\searrow$	

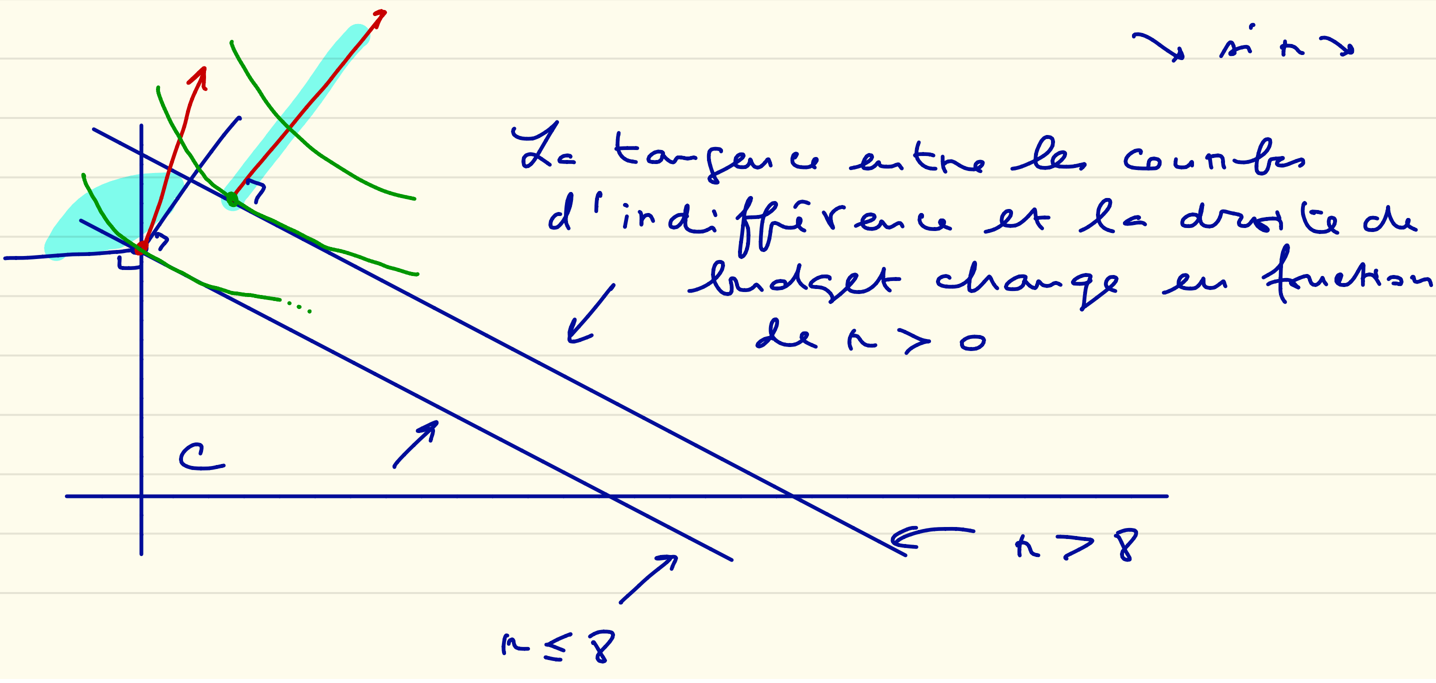
$\Rightarrow$ le maximum est atteint en $\bar{x}_1 = 0$ (existence et unicité), et la solution est :

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(0, \frac{1}{3}(r - 5 \cdot \cancel{x_1}_0)\right)$$

$$= \left(0, \frac{r}{3}\right)$$

On a donc, selon la valeur du revenu r, les deux cas ci-dessous :



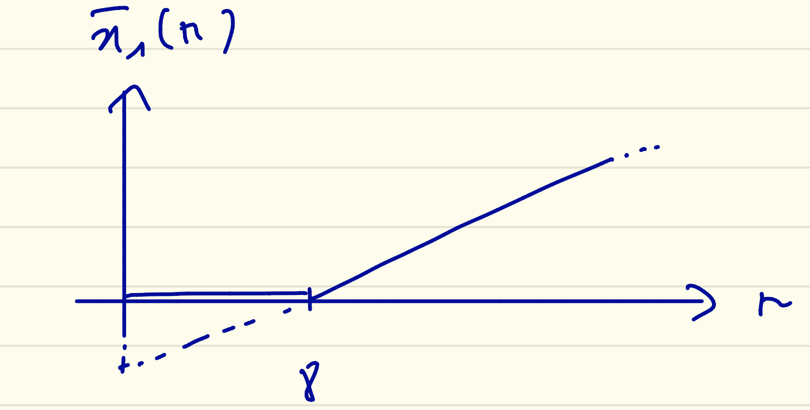


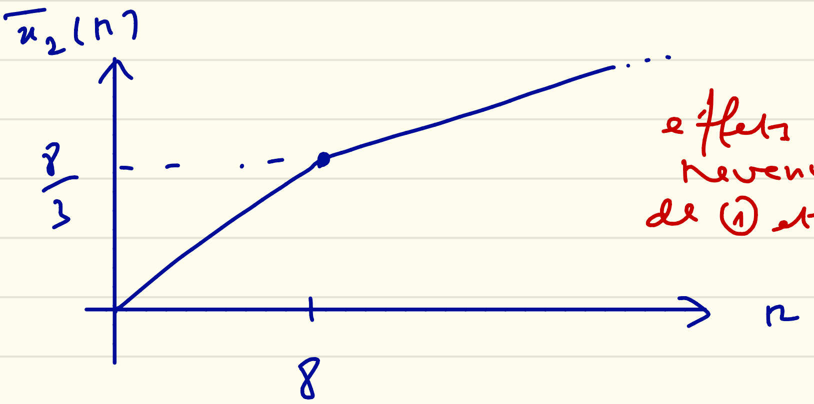
La demande marshallienne (la sol. qui maximise l'utilité en fonction des prix p_1, p_2 et du revenu r) est donc :

(p_1, p_2 fixés)

- pour le bien (1) : $\bar{x}_1(r) = 0$ si $r \leq 8$
  $= r/8 - 1$ si $r > 8$

- pour le bien (2) : $\bar{x}_2(r) = \dfrac{r}{3}$ si $r \leq 8$
  $= \dfrac{r}{8} + \dfrac{5}{3}$ si $r > 8$





effets revenu de (1) et (2)

En particulier, on peut calculer, pour $r > 8$, on a

$$\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial r} > 0 \text{ et } \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial r} > 0 :$$

les biens (1) et (2) sont des biens "normaux".

Remarque : on a mq la demande optimale sature toujours la contrainte de budget ; on a donc :

$$p_1 \cdot \bar{x}_1(r) + p_2 \cdot \bar{x}_2(r) = 5 \cdot \bar{x}_1(r) + 3 \cdot \bar{x}_2(r) = r :$$

loi de Walras (cf. cours 3).

$(= 5 \cdot 0 + 3 \cdot r/3 = r$ si $r \leq 8$

$= 5 \cdot (r/8 - 1) + 3(r/8 + 5/3) = r$ si $r > 8)$.

Remarques : i) dans le cas $r > 8$, on a :

$$0 = \varphi'(x_1) = \frac{d}{dx_1}\left(u\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right)\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1, \frac{1}{p_2}(\dots)\right) \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = p_1 / p_2$$

− pente de la courbe d'indifférence en ce point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $= TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Si $r > 8$, on a donc : $TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{p_1}{p_2} \left(= 5/3\right)$

(cf. CH 3)

ii) on était certain que le problème de max. de l'utilité possédait une solution (au moins une !) En effet, l'ensemble des contraintes C est borné (cf. $0 \leq x_1 \leq r/5$ et $0 \leq x_2 \leq r/3 \dots$) ; il est aussi fermé (car défini par des inégalités larges...), donc C est une partie compacte et l'utilité qui est continue est bornée et atteint ses bornes.

TD2 - Maximisation de l'utilité.

Exo 2.2.1. On se fixe une utilité minimale u_0, et on minimise la dépense (cf. CM2, 3) :

$$\begin{cases} \underbrace{p_1 . x_1 + p_2 . x_2}_{= d(x_1, x_2)\ :\ \text{dépense}} \longrightarrow \min \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ u(x_1, x_2) \geq u_0 > 0 \end{cases}$$

$p_1 = 5$, $p_2 = 3$ (fixés, idem exo 1)

paramètre : u_0

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0 \\ u_0 - u(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$

$g_i(x) \leq 0$, $i = 1, p$ $(p = 3)$

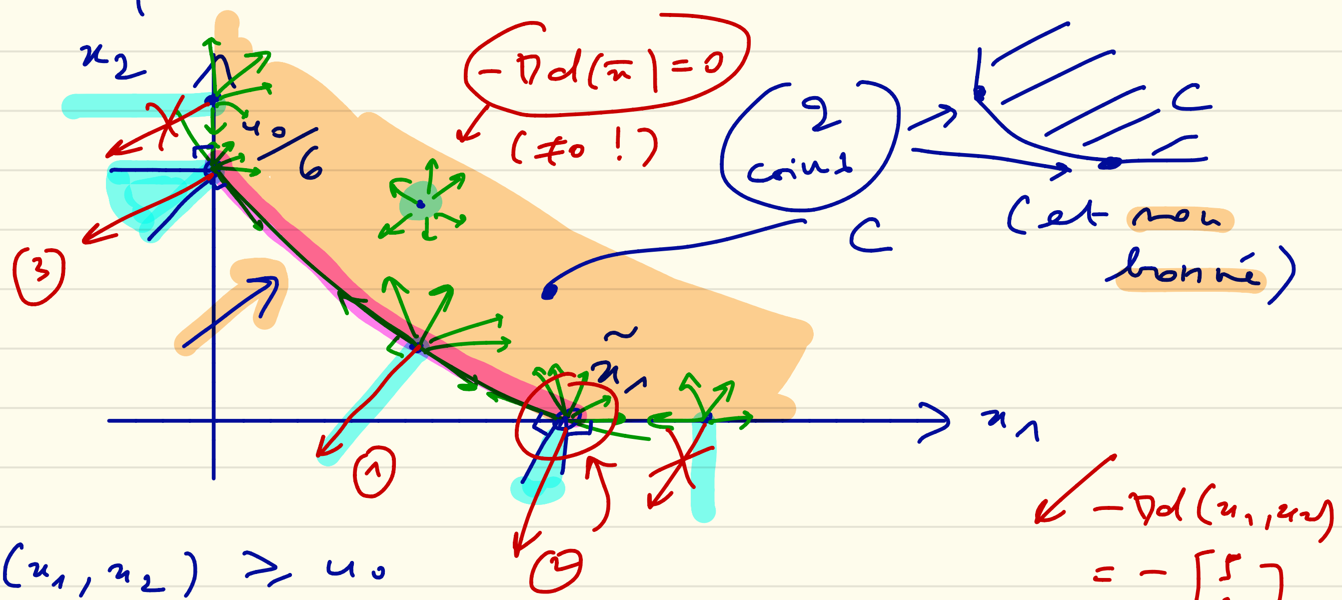
$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1, \quad g_2(x) = -x_2 \\ g_3(x) = u_0 - u(x_1, x_2) \\ \qquad = u_0 - (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2) \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \cancel{\mu_0}^{\,1} . (5x_1 + 3x_2)$$

$$+ \mu_1 . (-x_1) + \mu_2 . (-x_2) + \mu_3 . (u_0 - (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2))$$

$$(= d(x) + \sum_{i=1}^{3} \mu_i . g_i(x))$$

2.2. Représentons l'ensemble des contraintes :



$u(x_1,x_2) \geq u_0$

$\iff (x_1+2)(x_1+3x_2) \geq u_0$; pour mémoire,

$\overbrace{(x_1+2)}^{\neq 0}\ \overbrace{(x_1+3x_2)}^{\neq 0} = u_0 > 0$

$\iff 3x_2 = \dfrac{u_0}{x_1+2} - x_1$ $\qquad x_2 = f(x_1)$ (paramétrisation de la courbe indifférence)

$\iff x_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_0}{\underbrace{x_1+2}_{\neq 0}} - x_1\right)$: clairement, $f(x_1)$

si x_1 et x_2 augmentent, on va augmenter la valeur de $u(x_1,x_2)$, donc l'ensemble

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x_1,x_2) \geq u_0\}$$

est au dessus de la courbe d'indifférence de niveau u_0.

Remarque (cf. CM3) : $\quad p_1.x_1 + p_2.x_2 \longrightarrow \infty$

x_1 ou $x_2 \longrightarrow \infty$

$(x_1, x_2 \geq 0)$

$\Rightarrow$ on peut se limiter à $x_1, x_2 \leq M$, M assez grand : on peut se restreindre à un ens. $\tilde{C} = C \cap \{x_1, x_2 \leq M\} \ldots)$

borné, auquel cas on est sûr de l'existence d'une solution (au moins une) $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ qui minimise la dépense.

Ici, $d(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$

$$\Rightarrow \nabla d(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial d}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\nabla d(x_1, x_2) = -\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En particulier, $\nabla d(x) \neq (0,0) \Rightarrow$ une solution ne peut pas être à l'intérieur des contraintes (i.e. tq : $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$, $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > u_0$).

On constate géométriquement que toute solution doit saturer la contrainte d'utilité :

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = u_0 \qquad (\bar{\mu}_3 = ? \quad \bar{\mu}_3 \geq 0$$
$$\text{cf. } \bar{\mu}_3 \cdot (u_0 - u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = 0)$$

Restent donc les trois possibilités suivantes :

1. $\bar{x}_1 > 0$ et $\bar{x}_2 > 0$ $(\Rightarrow \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0)$

on sature la contrainte d'utilité sauf être sur l'un des coins ($\bar{x}_2 = 0$ ou $\bar{x}_1 = 0$)

Cf. complémentarité (iii) de KKT) :

$$\bar\mu_1 \cdot (\underbrace{-\bar x_1}_{\neq 0}) = 0, \quad \bar\mu_2 \cdot (\overbrace{-\bar x_2}^{\neq 0}) = 0 \implies \bar\mu_2 = 0,$$

$$\bar\mu_3 \cdot (u_0 - u(\bar x_1, \bar x_2)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar\mu_1 = 0$$

On suppose ici qu'on est dans le cas 1, les autres étant :

2 $u(\bar x_1, \bar x_2) = u_0$ et $\bar x_2 = 0$;

3 $u(\bar x_1, \bar x_2) = u_0$ et $\bar x_1 = 0$.

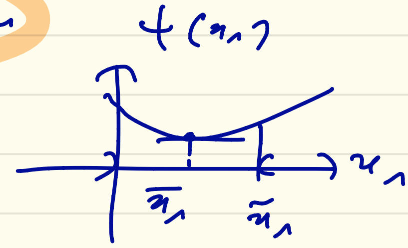
Dans le cas 1, on peut donc se ramener à minimiser une fonction d'une seule variable, x_1 :

$x_2 = f(x_1) \iff u(x_1, x_2) = u_0$

$$\varphi(x_1) := d(x_1, f(x_1)) \to \min$$

$$0 < x_1 < \tilde x_1 = -1 + \sqrt{1 + u_0}$$

↑ cf. Exo 1



Nécessairement, $\bar x_1$ sol. $\Rightarrow \varphi'(\bar x_1) = 0$.

Remarque : pour traiter le cas général en incluant les cas 2 et 3, il suffit de minimiser φ sur $[0, \tilde x_1]$ en faisant l'étude des variations de φ sur cet intervalle fermé (0 et $\tilde x_1$ inclus).

ii) dans le cas 1, KKT nous dit :

$$\nabla_x L = 0 \quad \text{avec } \bar\mu_1 = \bar\mu_2 = 0, \text{ ie}$$

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 5\,x_1 + 3\,x_2 + \mu_3\left(u_0 - u(x_1, x_2)\right)$$

$$0 = \nabla_{x_1} L = 5 - \bar\mu_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar x_1, \bar x_2)$$

$$0 = \nabla_{x_2} L = 3 - \bar\mu_3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar x_1, \bar x_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar\mu_3 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\bar x_1, \bar x_2) = 5 \quad (\Rightarrow \bar\mu_3 \neq 0\,!) \\ \bar\mu_3 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\quad) = 3 \end{cases}$$

2 inconnues $\bar x_1, \bar x_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar x_1, \bar x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar x_1, \bar x_2) = 5/3 \quad (= p_1/p_2)$$

élimine $\bar\mu_3$

2 équations

Et $u(\bar x_1, \bar x_2) = u_0$

Ie : $TMS_{12}(\bar x_1, \bar x_2) = p_1/p_2 \quad (= -f'(\bar x_1))$

Dans le cas 1, dérivons φ' et résolvons $\varphi' = 0$:

$$\varphi'(x_1) = \frac{d}{dx_1}\left(p_1 . x_1 + p_2 . f(x_1)\right)$$
$$= p_1 + p_2 . f'(x_1)$$

Donc $0 = \varphi'(\bar x_1) \Rightarrow \underbrace{-f'(\bar x_1)}_{TMS_{12}(\bar x_1, f(\bar x_1) = \bar x_2)} = p_1/p_2$: principe d'égalité marginale.

On sait que (cf. exo 1) :

$$f(x_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{3}\left(-\frac{u_0}{(x_1+2)^2} - 1\right)$$

Donc :

$$\underbrace{\cancel{-}\,\frac{1}{\cancel{3}}\left(\cancel{-}\,\frac{u_0}{(\bar{x}_1+2)^2} \cancel{-}\, 1\right)}_{\text{TM } J_{12}(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1))} = 5/\cancel{3}$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{(\bar{x}_1+2)^2} + 1 = 5$$

$$\Rightarrow (\bar{x}_1+2)^2 = \frac{u_0}{4} \quad (>0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(\bar{x}_1+2)^2}}_{|\bar{x}_1+2| = \bar{x}_1+2, \text{ cf. } \bar{x}_1 \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_1+2 \geq 0} = \frac{\sqrt{u_0}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2 \in \left]0, \tilde{x}_1 = -1+\sqrt{1+u_0}\right[$$

<u>Remarque</u> : la discussion sur u_0 pour que

$$0 < \frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2 < -1 + \sqrt{1+u_0}$$

toujours vrai

est exactement la discussion entre le cas 1 et les cas 2 et 3. (En particulier, on voit que $\frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2 > 0 \Leftrightarrow u_0 > 16$: on est donc dans le cas 1 si $u_0 > 16$, dans le cas 3 sinon, le cas 2 ne donnant jamais un minimum (...))

On tire $\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{\bar{x}_1+2} - \bar{x}_1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{\sqrt{u_0}/2} - \left(\frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{u_0} - \frac{\sqrt{u_0}}{2} + 2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{u_0}}{2} + \frac{2}{3}.$$

Par définition,
$$\boxed{\begin{aligned} h_1(u_0) &= \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2 \quad (u_0 > 16\ldots) \\ h_2(u_0) &= \bar{x}_2 = \frac{\sqrt{u_0}}{2} + \frac{2}{3} \end{aligned}}$$

2.3. La dépense minimale en fonction de u_0 dans le cas 1 [faire aussi le calcul dans les cas 2 et 3 ...] est :

$$d(u_0) := p_1 . \bar{x}_1 + p_2 . \bar{x}_2$$

$$= p_1 . h_1(u_0) + p_2 . h_2(u_0)$$

$$= 5 . \left(\frac{\sqrt{u_0}}{2} - 2\right) + 3 . \left(\frac{\sqrt{u_0}}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 4\sqrt{u_0} - 8 \, ;$$

par ailleurs, les demandes marshalliennes déterminées à l'exo 1 étaient :

$$\begin{cases} \bar{x}_1(R) = \dfrac{R}{8} - 1 \text{ si } R > 8 \\ \bar{x}_2(R) = \dfrac{R}{8} + \dfrac{5}{3} \text{ si } R > 8 \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} (4\sqrt{u_0} - 8 > 8 \\ \Leftrightarrow u_0 > 16 \;) \end{array} \right.$$

Calculons

$$\begin{cases} \bar{x}_1(d(u_0)) = \dfrac{d(u_0)}{8} - 1 \\ \qquad = \dfrac{4\sqrt{u_0} - 8}{8} - 1 \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{u_0}}{2} - 2 \\ \bar{x}_2(d(u_0)) = \dfrac{d(u_0)}{8} + \dfrac{5}{3} \\ \qquad = \dfrac{4\sqrt{u_0} - 8}{8} + \dfrac{5}{3} = h_1(u_0) \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{u_0}}{2} + \dfrac{2}{3} = h_2(u_0) \end{cases}$$

On vérifie de même que (dans le cas $n > 8$ qui donne bien $\bar{u}(n) > 16\ldots$)

$$\begin{cases} h_1(\bar{u}(n)) = \bar{x}_1(n) \\ \text{où } \bar{u}(n) = u(\bar{x}_1(n), \bar{x}_2(n)) \\ h_2(\bar{u}(n)) = \bar{x}_2(n) \end{cases}$$

Remarque : dans le cas 3 on a

$$\begin{cases} h_1(u_0) = \bar{x}_1 = 0 \\ h_2(u_0) = u_0/6 \end{cases}$$

et le même lien entre demandes hicksiennes et marshalliennes puisque :

$$\bar{d}(u_0) = p_1 . \cancel{h_1(u_0)}^{0} + p_2 . h_2(u_0)$$

$$= 3 . \frac{u_0}{6}$$

$$= \frac{u_0}{2} \text{ et } u_0 \leq 16 \Rightarrow \bar{d}(u_0) \leq 8, \text{ donc}$$

$$\bar{x}_1(\bar{d}(u_0)) = 0 = h_1(u_0)$$

cf. cas $n \leq 8$
de l'exo 1

$$\bar{x}_2(\bar{d}(u_0)) = \frac{\bar{d}(u_0)}{3} = \frac{u_0}{6} = h_2(u_0).$$

Et symétriquement pour les marshalliennes en fonctions des hicksiennes (cas $n \leq 8$).