# Analyse de la décision.

## TD 2 — Maximisation de l'utilité

### Exo 1. Contrainte de budget :

$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \quad (r > 0 \text{ fixé})$$

$$(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2 \text{ (infini)}$$

L'utilité que la consommatrice cherche à maximiser est donnée :

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2), x_1, x_2 \geq 0$$
$$= x_1^2 + 3x_1 x_2 + 2x_1 + 6x_2$$

fonction coût

(forme quadratique en $(x_1, x_2)$ ...)

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ \boxed{x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r} \end{cases}$$

$r > 0$ : paramètre

contraintes

$p_1 = 5$ $\quad p_2 = 3$ (prix fixés et connus)

C'est un problème d'optimisation (ici de maximisation), cf. cm2 (et cm3).

→ existence de solution ?
→ unicité de solution ?
→ moyen effectif de déterminer les solutions (si elles existent) ?

1.1. Soit $u_0 > 0$ un niveau d'utilité fixé, on définit la courbe d'indifférence (de niveau $u_0$) selon :

$$\mathcal{C}_{u_0} := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) = u_0 \}$$

$$( u_1 \neq u_0 , \quad \mathcal{C}_{u_0} \cap \mathcal{C}_{u_1} = \emptyset : \text{partition de } X )$$

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{u_0} \Leftrightarrow u(x_1, x_2) = u_0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+2)(x_1+3x_2) = u_0$$

2 degrés de liberté : $x_1, x_2$ ;
1 équation

2 − 1 : 1 degré de liberté

"Tirons $x_2$ en fonction de $x_1$" :

$$\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = \frac{u_0}{x_1+2}$$

$x_1 \geq 0$
$\Rightarrow x_1 + 2 > 2$
$\Rightarrow x_1 + 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{u_0}{x_1+2} - x_1 \right) =: f(x_1)$$ : on a représenté $\mathcal{C}_{u_0}$ comme le graphe de $f$.

On dit (cf. CM3) que les préférences (celles qui sont modélisées par l'utilité :

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Longleftrightarrow u(x_1, x_2) \leq u(y_1, y_2) )$$

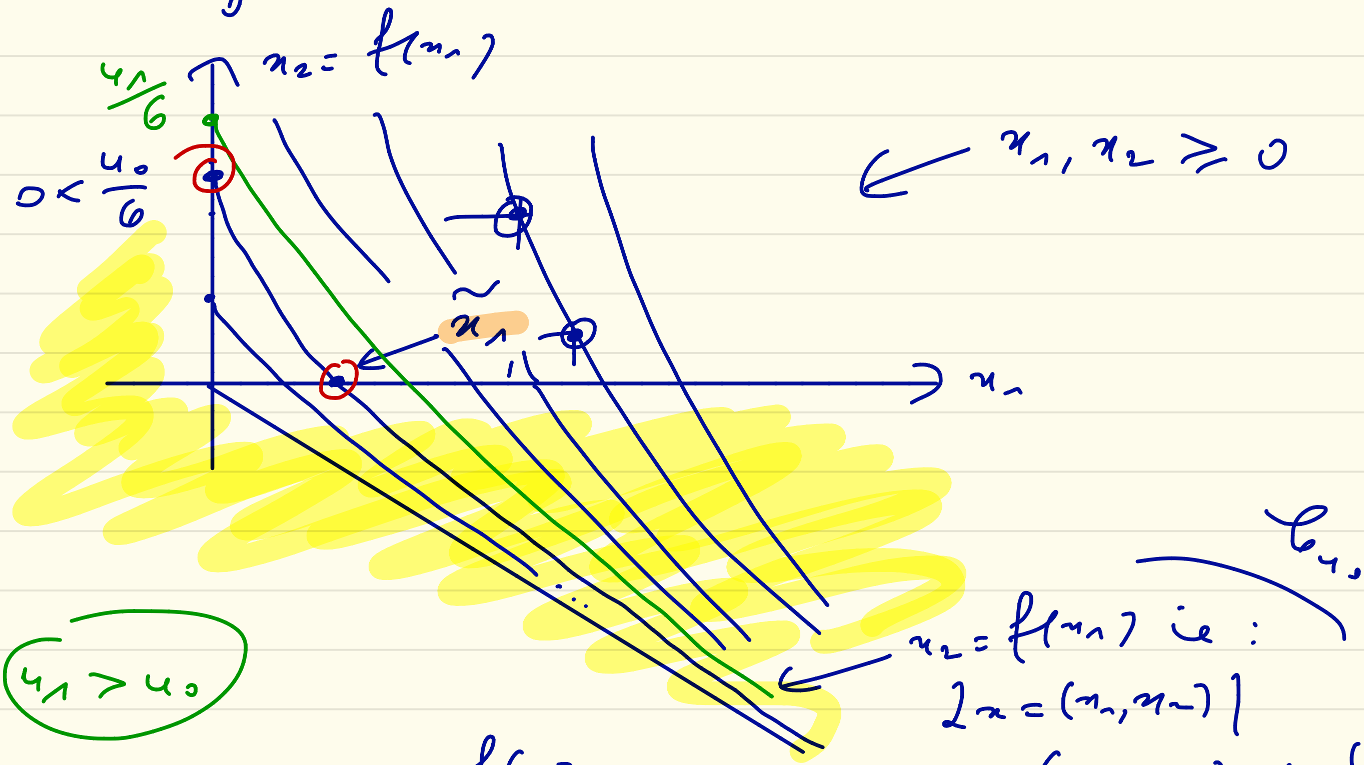
sont monotones ($\nearrow$ ou $\searrow$) si la fonction $f$ (qui paramétrise la courbe d'indifférence, et qui dépend de $u_0$) est monotone.

Ici, $x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 > -2$ et $f(x_1) = \left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right)\cdot\frac{1}{3}$

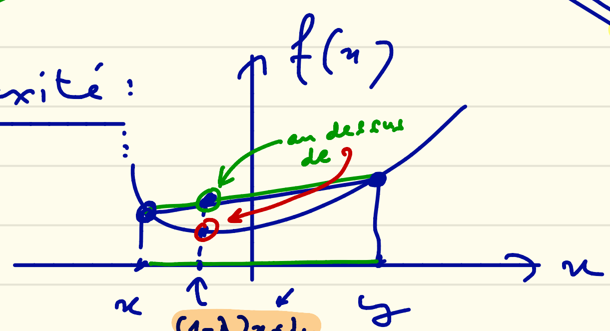
est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ($x_1 \geq 0$), et :

$$f'(x_1) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{-\frac{u_0}{(x_1+2)^2}}_{<0} - 1\right) < -1 < 0 \ : \ f \searrow$$

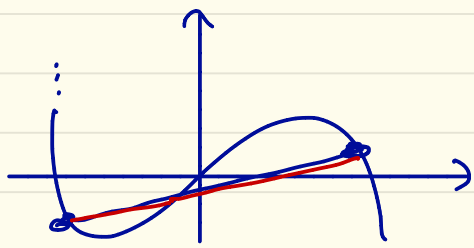
| $x_1$ | $0$ | | $\tilde{x}_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x_1)$ | | $-$ | | | |
| $f(x_1)$ | $\underset{\underset{0}{\vee}}{u_0/6}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |




Convexité :




fonction CONVEXE

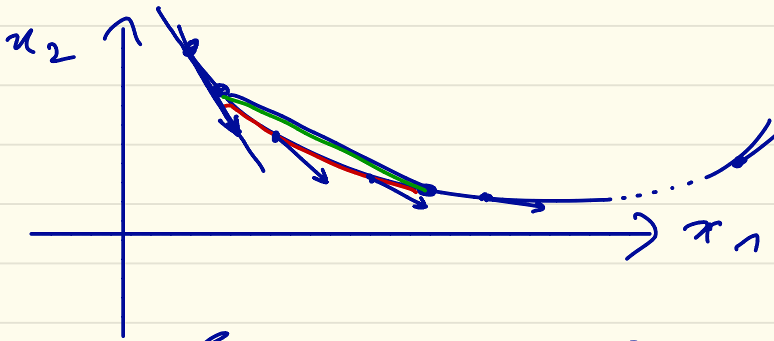


PAS CONVEXE

$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \lambda \in [0,1])$ :

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

Autre interprétation (géométrique) :




Convexité $\iff$ la pente de la tangente au graphe est croissante

$\iff$ la dérivée $f' \nearrow$

$\iff (f')' = f'' \geq 0$

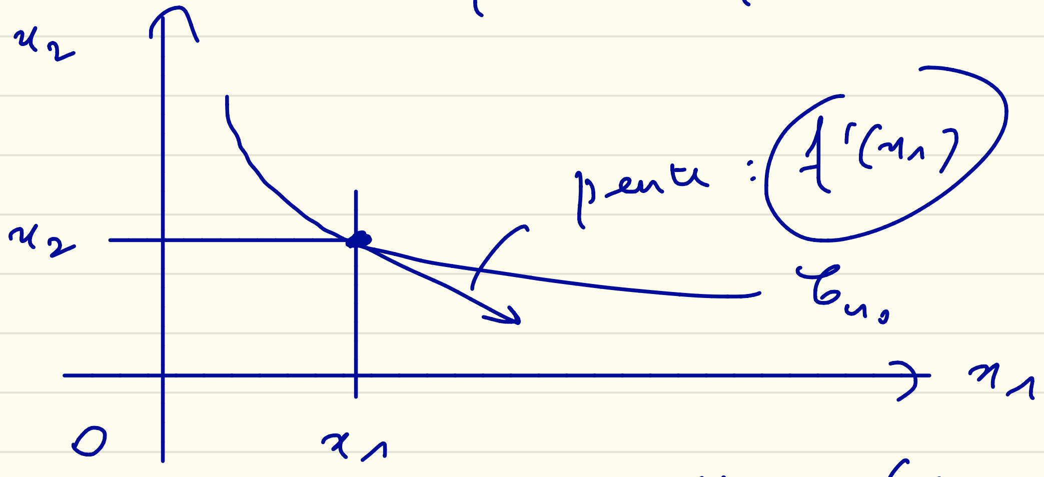
Calculons ici $f''$ :

$$f'(x_1) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4u_0}{(x_1+2)^2} - 1\right), \quad x_1 \geq 0 > -2$$

$$\Rightarrow f''(x_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{(4u_0)}^{>0}}{(x_1+2)^3} > 0 \geq 0 : \text{convexe.}$$

On dit alors (cf. CM3) que les préférences sont convexes (voir aussi la convexité de l'ensemble $\{(x_1,x_2) \in X \mid u(x_1,x_2) \geq u_0\}$ est convexe ... cf. Exo 2).

TMS (cf. CM3) : le Taux Marginal de Substitution en $(x_1,x_2) \in X$ est l'opposé de la pente (de la tangente ...) de la courbe d'indifférence passant par ce point :




$u_0 = u(x_1, x_2)$

où $f$ tq $\mathcal{C}_{u_0}$ = graphe de $f$

(ie $u(x_1, x_2) = u_0 \Leftrightarrow x_2 = f(x_1)$)

$TMS_{12}(x_1, x_2) = - f'(x_1) > 0$

$\quad \| $

$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)$ (cf. cm 3)

cf. ici $f' < 0$ $(\forall u_0 > 0)$

1.2. D'après le tableau de variation, on sait que le graphe intersecte l'axe $x_1 = 0$ en le point $(0, u_0/6)$ $(u_0/6 \geq 0)$ ;

de plus, l'intersection avec $x_2 = 0$ se détermine en résolvant $f(x_1) = 0$, ie :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{x_1+2} = x_1$$

$$\Rightarrow u_0 = x_1^2 + 2x_1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - u_0 = 0, \quad x_1 \geq 0 \qquad \text{cf. } u_0 > 0$$

$\Delta = 4 + 4u_0 = 4(1+u_0) > 0$ : 2 racines

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1-\sqrt{1+u_0} < -1 < 0 \\[2ex] \tilde{x}_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1 + \underbrace{\sqrt{1+u_0}}_{>1\ (u_0>0)} > 0 \quad (\nearrow \text{ en } u_0) \end{cases}$$

$$\left( = \frac{\cancel{(1+u_0)} - \cancel{1}}{1+\sqrt{1+u_0}} = \frac{u_0}{1+\sqrt{\phantom{x}}} > 0 \right)$$

## 1.3. Le problème se formule comme suit :

$$(*) \begin{cases} u(x_1,x_2) = (x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \quad (r>0) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -(x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \leq 0 \end{cases}$$

on met toutes les inégalités sous la forme $\boxed{\ \text{—} \leq 0\ }$

On a mis $(*)$ sous la forme

$$(**) \begin{cases} c(x_1, x_2) \longrightarrow \min & (c = -u \dots) \\ g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ g_2(\text{---}) \leq 0 \\ g_3(\text{---}) \leq 0 \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} c(x) = -u(x) \\ g_1(x_1, x_2) = -x_1 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_2 \\ g_3(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \end{cases}$$

cf. cm3

Par déf., le Lagrangien du problème est :

$$\underbrace{L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}_{\text{3 multiplicateurs de Lagrange}} := c(x_1, x_2) + \mu_1 \cdot g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \cdot g_2(\text{---}) + \mu_3 \cdot g_3(\text{---})$$

$$= c(x) + (\mu \mid g(x))$$

où $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$

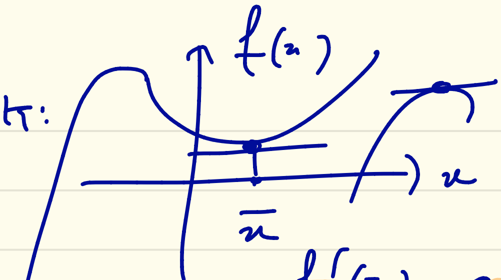
et $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$
$(= (-x_1, -x_2, p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r))$

(avec $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i$ : produit scalaire)

Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est solution de $(**)$ (i.e. est sol. de $(*)$ qui est équivalent), alors :

Si... ALORS : CONDITION NÉCESSAIRE

il existe $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{R}^3$ tq :

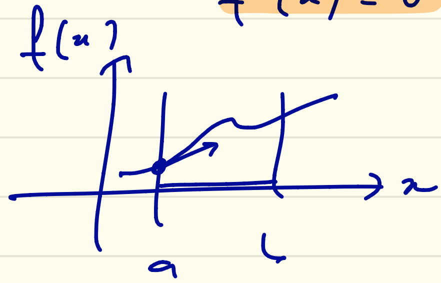



$f'(\bar{x}) = 0$

i) $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$

ie $\nabla_{x_1} L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) = 0$

$\nabla_{x_2} L( \text{———} ) = 0$




$a = \bar{x}$

ii) $\bar{\mu} \geq 0$ ie $\bar{\mu}_1 \geq 0$, $\bar{\mu}_2 \geq 0$, $\bar{\mu}_3 \geq 0$

(positivité des multiplicateurs de Lagrange associés à des inégalités)

Le Lagrangien permet d'écrire ce type de condition même avec des contraintes

iii) $\begin{cases} \bar{\mu}_1 \cdot g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\ (\bar{\mu}_1 = 0 \text{ ou } g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0) \\ \bar{\mu}_2 \cdot g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\ \bar{\mu}_3 \cdot g_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \end{cases}$

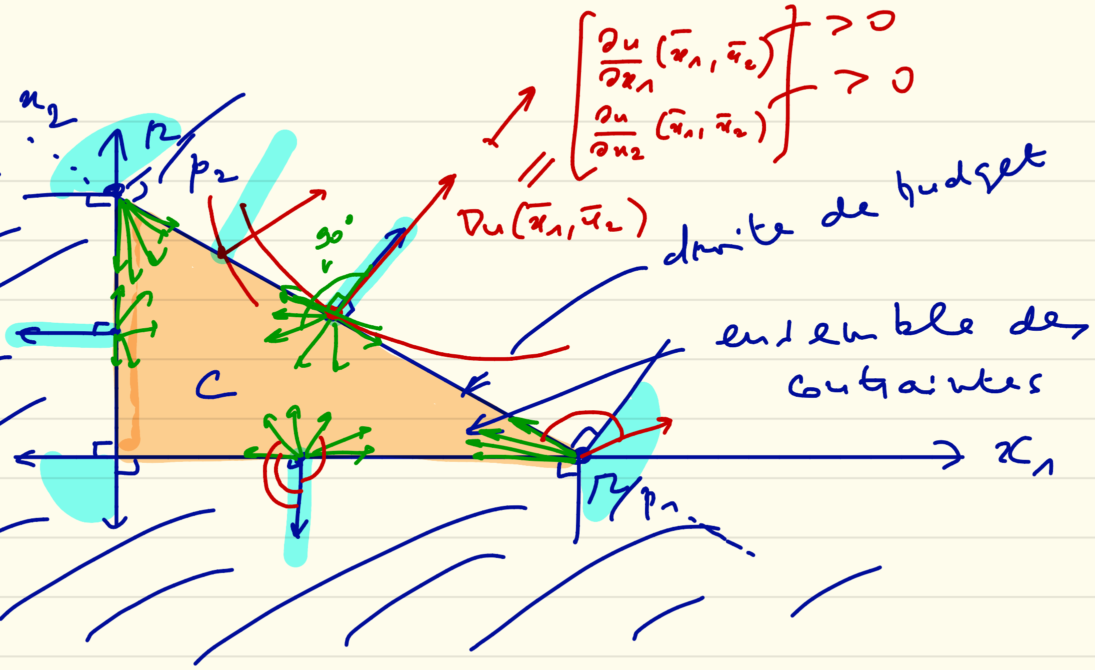
(complémentarité)

$\boxed{\text{On a 5 équations et 5 inconnues : } \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3}$

$\hookrightarrow$ Soit $g_i(\bar{x}) = 0$ (auquel cas on sait juste que $\bar{\mu}_i \geq 0$), soit $g_i(\bar{x}) < 0$ et nécessairement $\bar{\mu}_i = 0$.

Ici : $L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -(x_1 + 2)(x_1 + 3x_2)$
$+ \mu_1(-x_1)$
$+ \mu_2(-x_2)$
$+ \mu_3(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - R)$.

1.4.




$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \le r\}$

Droite de contrainte budgétaire : $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = r$

Les conditions (nécessaires) i)–iii) traduisent algébriquement la condition géométrique du cas 2 : le gradient de l'utilité en une solution $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $Du(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$

doit appartenir à l'ensemble des directions bleues

$$Du(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix}$$

Ici, vérifions qu'on est dans le cas où $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ sont nécessairement positives à l'optimum ; en effet, $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2)$

$\Rightarrow \quad u = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$

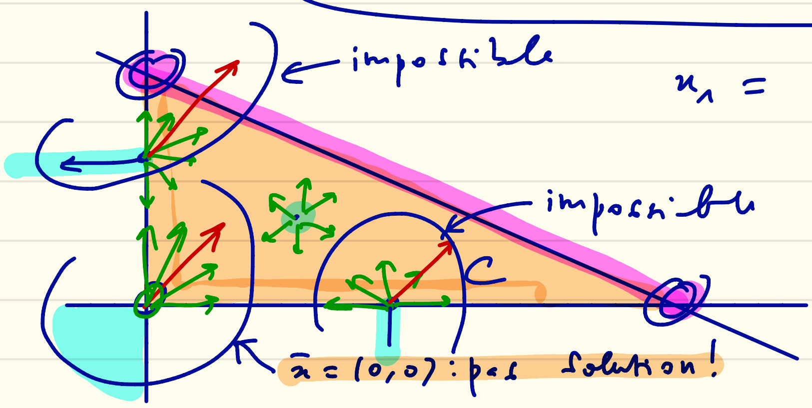
$$\Rightarrow \quad u = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cf. } x_1,\, x_2 \geq 0}}{\geq} 2 > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 3x_1 + 6 \underset{\substack{\uparrow \\ x_1 \geq 0}}{\geq} 6 > 0$$

Cela implique que la contrainte de budget est nécessairement active ("saturée") en une solution :

$$p_1 \cdot \bar{x}_1 + p_2 \cdot \bar{x}_2 = r$$




$x_1 =$

Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ était à l'intérieur de C (i.e. $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$ et $p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 < r$), on aurait :

$$\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \text{ ce qui est impossible.}$$

$\Rightarrow$ La solution est nécessairement sur le bord des contraintes ; on a les possibilités suivantes :

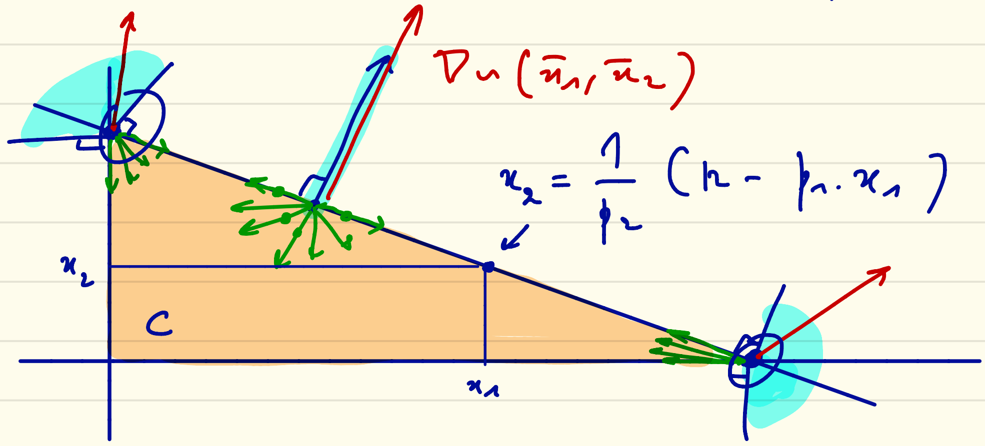
– on est soit sur l'un des 3 coins :

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \frac{r}{p_2}) = (0, \frac{r}{3})$,

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (r/p_1, 0) = (r/5, 0) \longleftrightarrow$ 2 contraintes actives clairement, le cas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \cdot)$ est exclu

- soit on est sur le bord sans être en l'un des coins $\longleftrightarrow$ 1 seule contrainte active ; clairement, on ne peut avoir ni $\bar{x}_1 = 0$, ni $\bar{x}_2 = 0$ si on n'est pas dans un coin (cf. dessin) ;

On a donc saturation de la contrainte de budget, la situation est la suivante :




On est donc ramené à maximiser l'utilité sur le segment qui relie $(0, \frac{r}{3})$ à $(\frac{r}{5}, 0)$ ; sur ce segment, on peut par exemple exprimer $x_2$ en fonction de $x_1$ :

$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 = r$$

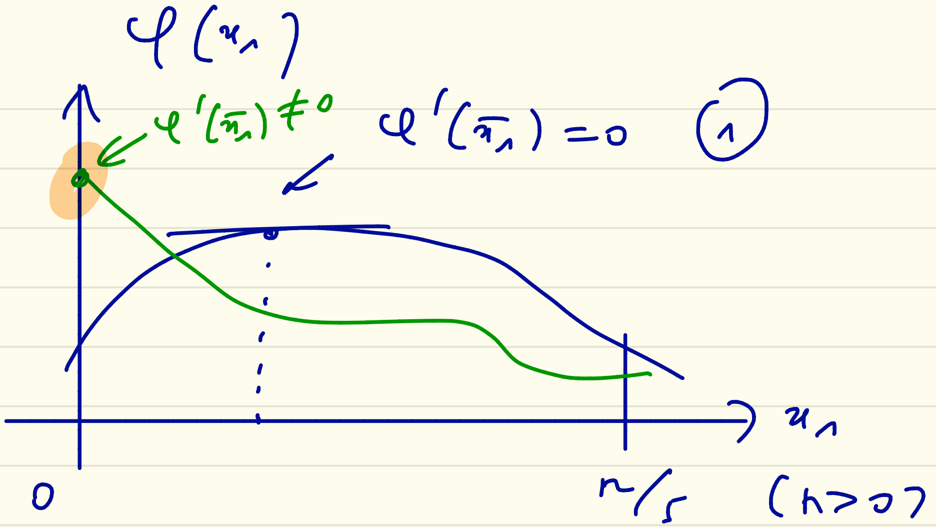
$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1) \text{ ; on doit donc}$$

coût

$$\text{maximiser } \varphi(x_1) = u\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right)$$

$$= u\left(x_1, \frac{1}{3}(r - 5 . x_1)\right)$$

avec $x_1 \in \left[0, \frac{r}{5}\right]$ $\longleftarrow$ contraintes




- une solution est soit dans $]0, \frac{r}{5}[$ auquel cas $\varphi'(\bar{x}_1) = 0$ (cas (1))
- sinon, solution $\bar{x}_1 = 0$ ou $\bar{x}_1 = \frac{r}{5}$ (cas (2))

On fait l'étude des variations de $\varphi$ sur $[0, r/5]$.

Ici,
$$\varphi(x_1) = u(x_1, \overbrace{\frac{1}{3}(r - 5x_1)}^{x_2})$$
$$= (x_1 + 2)\cdot(x_1 + \cancel{3}(\frac{1}{\cancel{3}}(r - 5x_1)))$$
$$= (x_1 + 2)(-4x_1 + r)$$
$$= -4x_1^2 + (r-8)\cdot x_1 + 2r$$

$\varphi$ est dérivable et

$$\varphi'(x_1) = -8x_1 + (r-8)$$
$$\underset{\Longleftrightarrow}{=0} \quad x_1 = \frac{r}{8} - 1$$

: selon la valeur du paramètre de revenu $r$ $(>0)$, le zéro de la dérivée appartiendra ou non à l'intervalle $[0, r/5]$.

$\rightarrow \frac{r}{8} - 1 > 0 \Longleftrightarrow r > 8$

$\to \frac{n}{8} - 1 < \frac{n}{5} \iff \frac{3n}{40} > -1$

$\iff n > -\frac{40}{3}$ : toujours vrai car $n > 0$.

On n'a donc que deux cas :

- soit $n > 8$ et $\frac{n}{8} - 1 \in \left]0, \frac{n}{5}\right[$

| $x_1$ | $0$ | | $\frac{n}{8}-1$ | | $\frac{n}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x_1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(x_1)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$\Rightarrow$ le maximum est atteint en un seul pt (existence et unicité) : $\bar{x}_1 = \frac{n}{8} - 1$ ;

donc, la sol. est $\bar{x} = \left(\frac{n}{8} - 1, \frac{n}{8} + \frac{5}{3}\right)$

(cf. $\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(n - 5 \cdot \bar{x}_1)$

$= \frac{1}{3}\left(n - 5\left(\frac{n}{8} - 1\right)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3n}{8} + 5\right) = \frac{n}{8} + \frac{5}{3}$ )

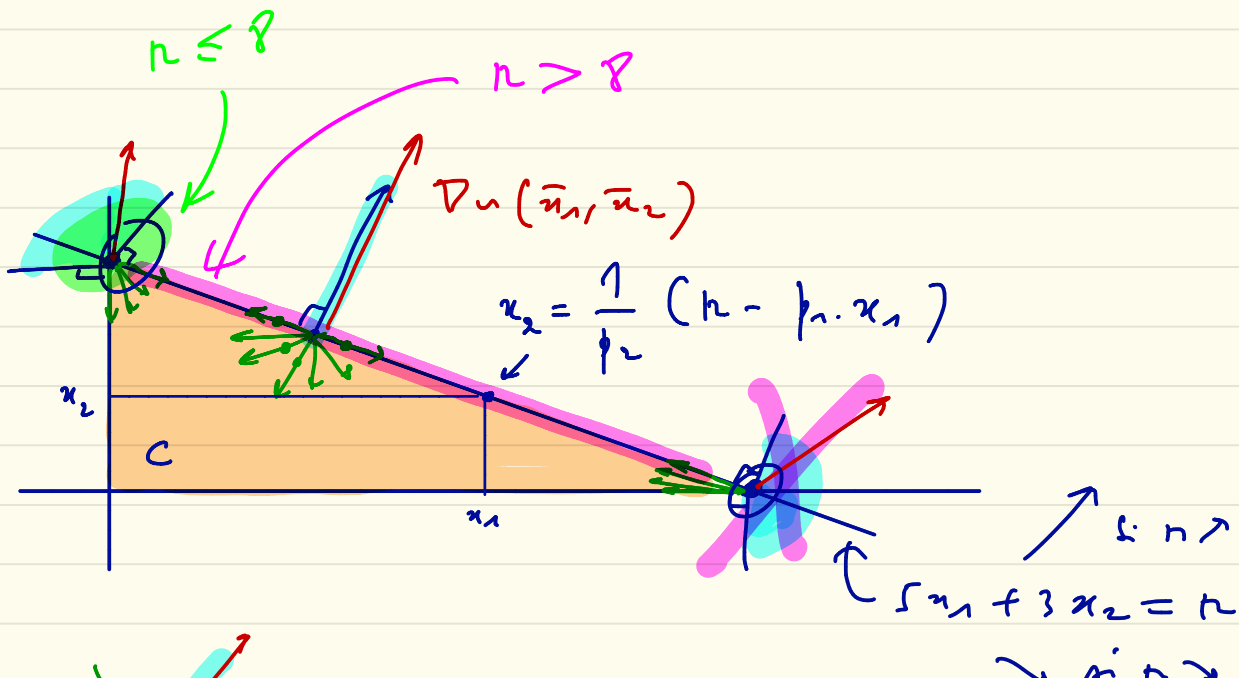
- soit $n \leq 8$ et $\frac{n}{8} - 1 \leq 0$ :

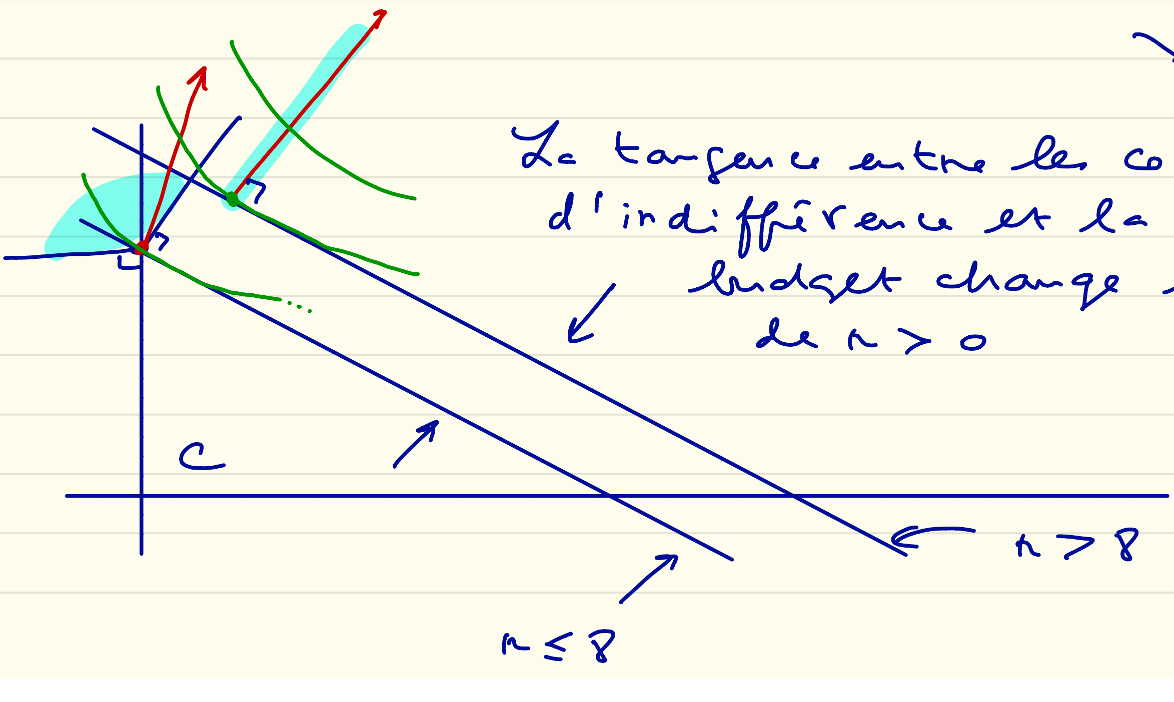
| $x_1$ | $0$ | | $\frac{n}{5}$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x_1)$ | | $-$ | |
| $\varphi(x_1)$ | | $\searrow$ | |

$\Rightarrow$ le maximum est atteint en $\bar{x}_1 = 0$ (existence et unicité), et la solution est :

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(0, \frac{1}{3}(r - 5 \cdot \cancel{x_1}^{\,0})\right)$$
$$= \left(0, \frac{r}{3}\right)$$

On a donc, selon la valeur du revenu $r$, les deux cas ci-dessous :




La tangence entre les courbes d'indifférence et la droite de budget change en fonction de $r > 0$

La demande marshallienne (la sol. qui maximise l'utilité en fonction des prix $p_1, p_2$ et du revenu $r$) est donc :

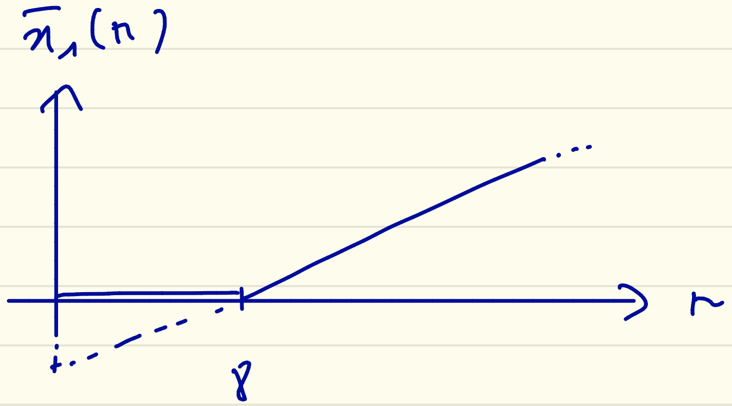
($p_1, p_2$ fixés)

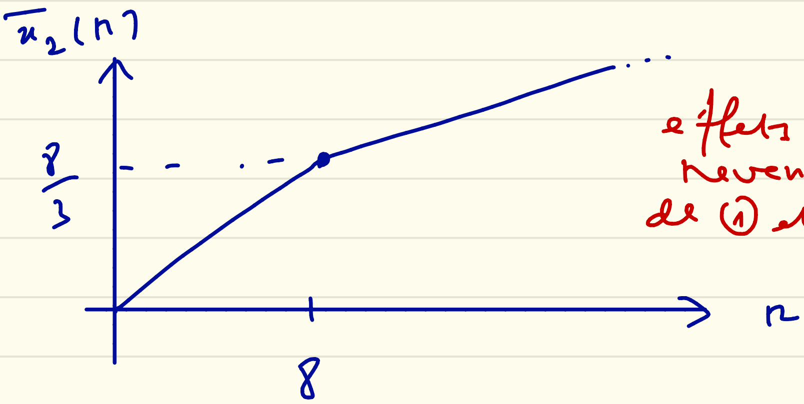
– pour le bien (1) : $\bar{x}_1(r) = 0$ si $r \leq 8$

$= r/8 - 1$ si $r > 8$

– pour le bien (2) : $\bar{x}_2(r) = \frac{r}{3}$ si $r \leq 8$

$= \frac{r}{8} + \frac{5}{3}$ si $r > 8$




effets revenu de (1) et (2)

En particulier, on peut calculer, pour $r > 8$, on a $\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial r} > 0$ et $\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial r} > 0$ : les biens (1) et (2) sont des biens "normaux".

<u>Remarque</u> : on a mq la demande optimale sature toujours la contrainte de budget ; on a donc :

$p_1 . \bar{x}_1(r) + p_2 . \bar{x}_2(r) = 5 . \bar{x}_1(r) + 3 . \bar{x}_2(r) = r$ : loi de Walras (cf. cours 3).

$\Big( = 5 . 0 + 3 . r/3 = r$ si $r \leq 8$

$= 5 . (r/8 - 1) + 3 (r/8 + 5/3) = r$ si $r > 8 \Big)$.

Remarque : i) dans le cas $r > 8$, on a :

$$0 = \varphi'(x_1) = \frac{d}{dx_1}\left( u\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right)\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1, \frac{1}{p_2}(\dots)\right) \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = p_1/p_2$$

$-$ pente de la courbe d'indifférence en ce point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $= TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Si $r > 8$, on a donc : $TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{p_1}{p_2} (= 5/3)$

(cf. CH3)

ii) on était certain que le problème de max. de l'utilité possédait une solution (au moins une !) En effet, l'ensemble des contraintes $C$ est borné (cf. $0 \leq x_1 \leq r/5$ et $0 \leq x_2 \leq r/3 \dots$) ; il est aussi fermé (car défini par des inégalités larges...), donc $C$ est une partie compacte et l'utilité qui est continue est bornée et atteint ses bornes.