Analyse de la décision

Cours 3 - Kuhn, Tucker, Marshall, Hicks

Motivation : on a vu dans le cours no. 2 comment le problème de maximisation de l'utilité se traduisait en un problème dit "d'optimisation" :

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \end{cases}$$

Ce problème dont la fonction coût, à maximiser, est l'utilité d'une consommatrice (c'est ainsi que les préférences de celle-ci sont modélisées), comporte des contraintes :

- le choix / la décision de la consommatrice est modélisé par les quantités des biens (1) et (2) qu'elle souhaite acheter : ces quantités sont positives (achat et non vente) ;
- le budget de cette consommatrice est borné par son revenu, $r > 0$ (fixé) ; les prix des biens (1) et (2) étant également fixés, la contrainte de budget s'écrit

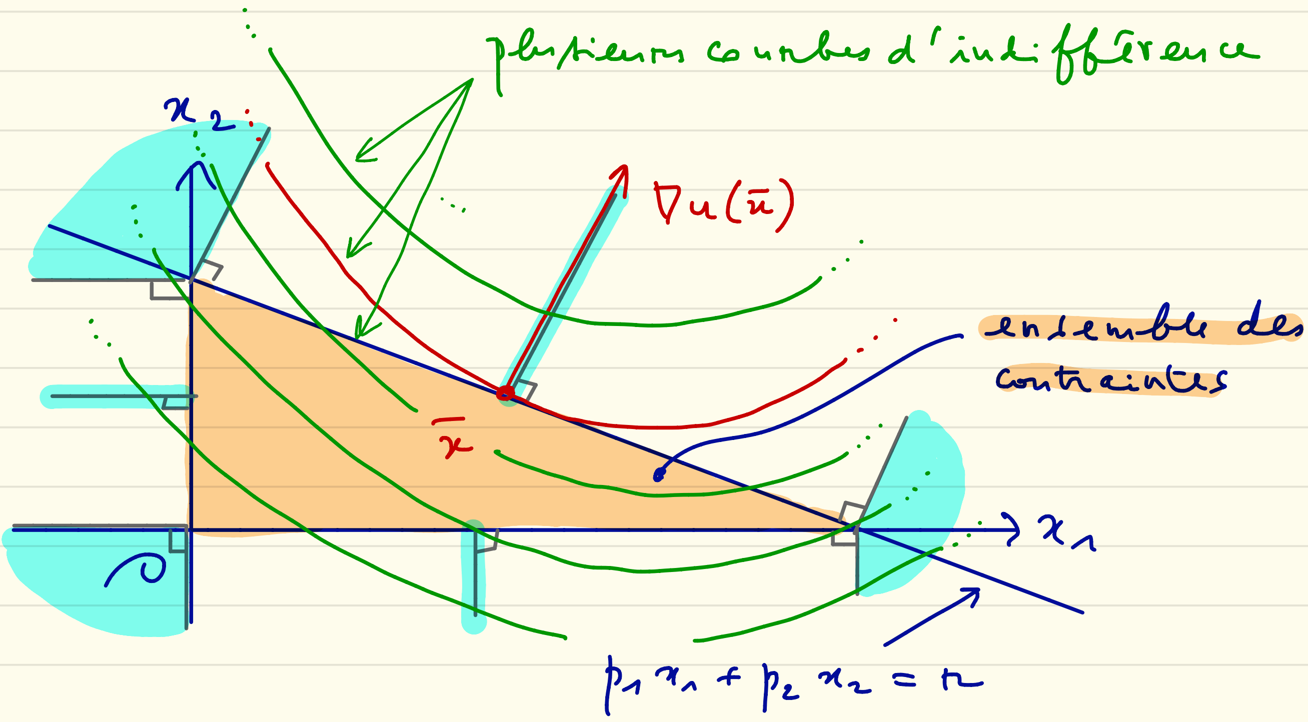
$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r$$

où p_1 et p_2 sont strictement positifs.

On a défini la courbe d'indifférence (de niveau d'utilité u_0) comme le sous-ensemble de $X = \mathbb{R}_+^2$ (ensemble des choix $x_1, x_2 \geq 0$)

$$\{(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}^2_+ \mid u(x_1, x_2) = u_0\}$$

et on a montré que, si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X$ est un choix optimal (i.e. un choix qui maximise l'utilité tout en respectant la contrainte de budget), on doit avoir (condition "nécessaire") la situation géométrique ci-dessous :



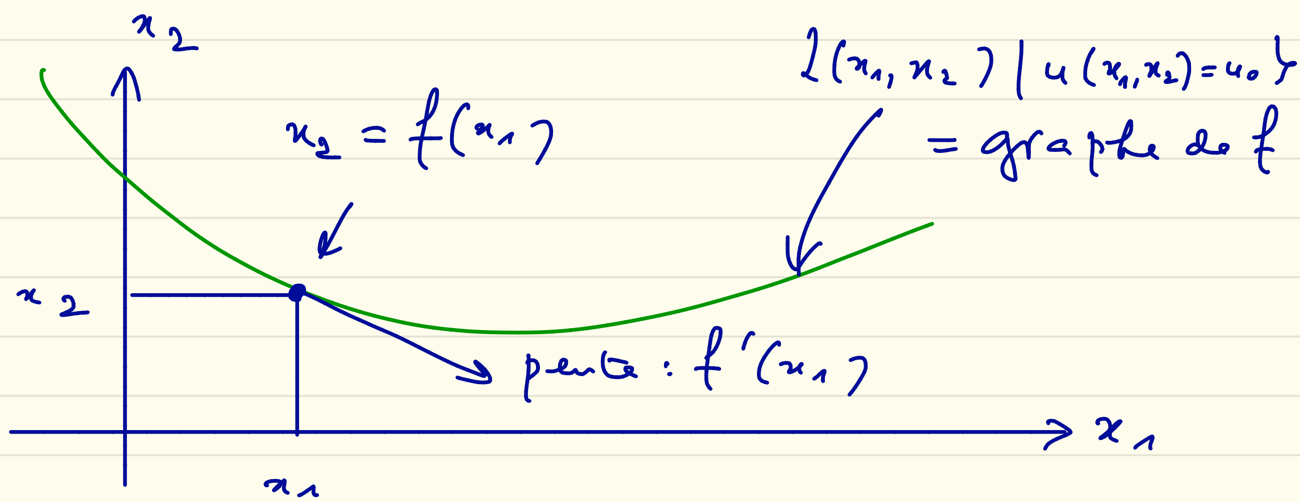
Le gradient $\nabla u(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{bmatrix}$ de l'utilité à l'optimum doit appartenir à l'ensemble des directions (en bleu sur le schéma) qui forment un angle obtus ($\geq 90°$) avec les directions qui, partant de $\bar{x}$, font "rester dans les contraintes".

Le but de cette séance est de donner une version algébrique de cette condition géométrique à l'aide de la notion de "multiplicateurs de Lagrange". Donnons au préalable quelques définitions complémentaires relatives à l'utilité.

Soit $(x_1^0, x_2^0) \in X = \mathbb{R}_+^2$; notons $u_0 := u(x_1^0, x_2^0)$ l'utilité de ce choix. Si $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \neq 0$, il existe une fonction f, définie pour x_1 assez proche de x_1^0, telle que "localement", la courbe d'indifférence de niveau u_0 est le graphe de f :

$$u(x_1, x_2) = u_0 \iff x_2 = f(x_1).$$

On va faire dans la suite l'hypothèse que cette représentation est "globale" et que, $\forall u_0$, on peut trouver une telle fonction f (elle dépend de u_0 — cf. Exo 4, TD 2) de même régularité que u (dérivable sur $\mathbb{R}$ si u est dérivable sur $\mathbb{R}^2$, etc.)



Déf. (TMS = Taux Marginal de Substitution) : soit $(x_1, x_2) \in X$, on appelle taux marginal de substitution, et on note $TMS_{12}(x_1, x_2)$, l'opposé de la pente de la tangente en (x_1, x_2) à la courbe d'indifférence passant par ce point :

$$TMS_{12}(x_1, x_2) = - f'(x_1)$$

où f paramétrise la courbe d'indifférence de niveau $u(x_1, x_2)$.

Remarque : comme précédemment indiqué, une telle fonction f existe au voisinage de x_1 dès que $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0$. On fait cette hypothèse, et on suppose en outre que u est dérivable, ce qui garantit que f l'est aussi. C'est le théorème (fondamental !) des "fonctions implicites" qui est à l'oeuvre ici.

Prop. : $TMS_{12}(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

dém. : par définition de la courbe d'indifférence passant par le point $(x_1^0, x_2^0) \in X$, on a
$u(x_1, f(x_1)) = cte = u(x_1^0, x_2^0)$

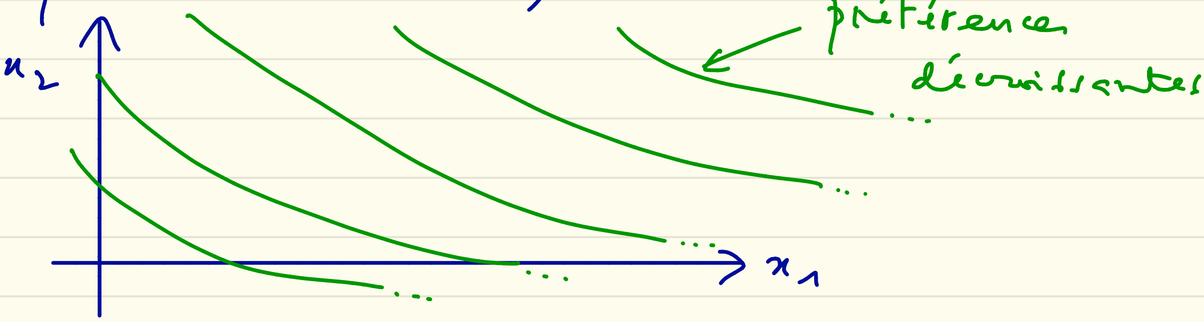
$\Rightarrow \frac{d}{dx_1}\left(u(x_1, f(x_1))\right) = 0$

$\Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, f(x_1)) \cdot f'(x_1)$

$\Rightarrow f'(x_1) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, f(x_1))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, f(x_1))$, de sorte que $TMS_{12}(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$

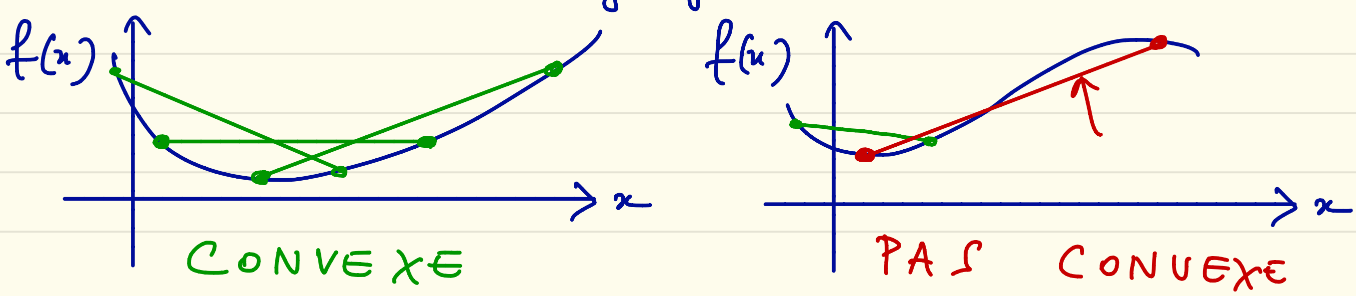
en appliquant le résultat au point
$(x_1^0, x_2^0) = (x_1^0, f(x_1^0))$. $\square$

<u>Déf.</u> : les préférences modélisées par l'utilité u sont dites croissantes (resp. décroissantes) lorsque les courbes d'indifférence (quel que soit le niveau d'utilité) sont croissantes (resp. décroissantes).



<u>Déf.</u> : les préférences modélisées par l'utilité u sont dites convexes lorsque les courbes d'indifférence (quel que soit le niveau) sont convexes.

<u>Remarques</u> : i) une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si, quels que soient deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sur son graphe, le segment (ou "corde") qui relie ces points est au dessus du graphe :



Algébriquement, la condition se traduit par :

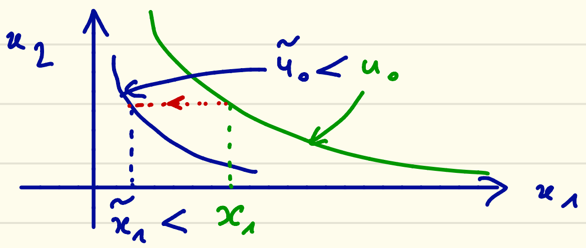
$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \lambda \in [0,1]) :$$

$$\underbrace{f(\underbrace{(1-\lambda)x+\lambda y}_{\text{combinaison convexe } \in [x,y] \text{ quand } \lambda \in [0,1]})}_{\text{image (par } f\text{) de cette combinaison convexe}} \leq \overbrace{(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)}^{\text{combinaison convexe des images}}$$

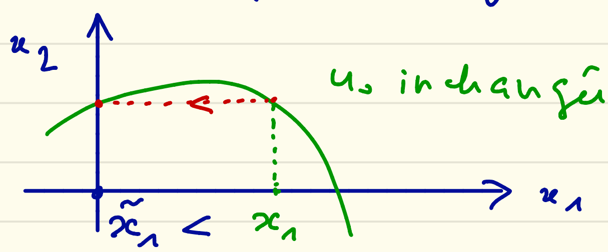
ii) Si la fonction est dérivable, ça signifie que la pente de la tangente au graphe est croissante ; ie, si la fonction est deux fois dérivable, que la dérivée seconde (= la dérivée de la dérivée) est positive :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, est convexe ssi $(\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) \geq 0$.

iii) En micro-économie, la convexité des préférences est une hypothèse souvent utilisée qui traduit le goût pour la diversité : un panier où les biens sont en quantités équilibrées est préféré à un panier où l'un des biens est en quantité faible.



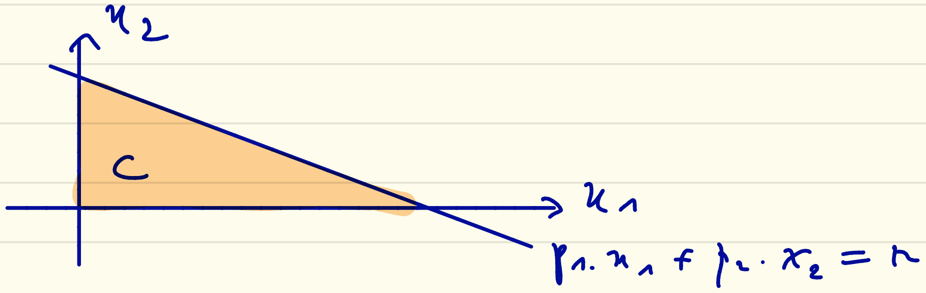
CONVEXE



PAS CONVEXE

Prop. (existence en utilité maximale) : si l'utilité est continue, le problème de maximisation de l'utilité possède (au moins) une solution.

dém. :



Comme p_1 et p_2 sont > 0, la droite de budget intersecte (Ox_1) et (Ox_2), de sorte que $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r\}$ est borné (et fermé) : c'est un compact, donc l'utilité, si elle est continue, prend des valeurs également bornées sur ce compact et y atteint ses bornes. □

Donnons maintenant la traduction algébrique annoncée de la condition nécessaire de solution vue au cours 2.

Th. (KKT = Karush-Kuhn-Tucker) : soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ une solution du problème d'optimisation (de minimisation) suivant :

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ g_1(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0 \end{cases}$$

où les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ sont continûment différentiables.

Alors, il existe $(\bar\mu_0, \bar\mu_1, \dots, \bar\mu_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{R}^{1+p}$ tq :

i) $\nabla_x L(\bar x, \bar\mu) = 0$ où L est le Lagrangien du problème,

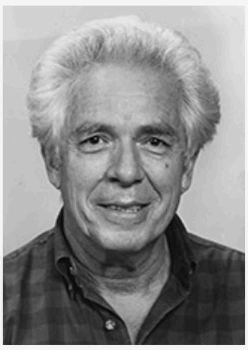
$$L(x, \mu) := \mu_0 . f(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i . g_i(x)$$

ii) $\bar\mu_0 \geq 0, \bar\mu_1 \geq 0, \dots, \bar\mu_p \geq 0$: les $\bar\mu_i$, appelés multiplicateurs de Lagrange, sont tous positifs ; ($\bar\mu_0 > 0$ (ici!), contrain., idem géom., K(KT))

iii) $(\forall i = 1, p)$: $\bar\mu_i \cdot g_i(\bar x) = 0$: complémentarité, ie

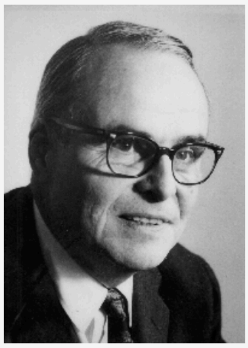
- soit $g_i(\bar x) = 0$ (la contrainte $g_i(\bar x) \leq 0$ est dite "active")
- soit $\bar\mu_i = 0$ (les deux pouvant être vrais simultanément).

Harold W. Kuhn



Born	July 29, 1925 Santa Monica, California
Died	July 2, 2014 (aged 88) New York City, New York
Nationality	American
Alma mater	Princeton University
Known for	Hungarian method Karush–Kuhn–Tucker conditions Kuhn poker
Awards	John von Neumann Theory Prize (1980)

Albert W. Tucker



Born	Albert William Tucker 28 November 1905 Oshawa, Ontario, Canada
Died	25 January 1995 (aged 89) Hightstown, New Jersey, U.S.
Nationality	Canadian American
Alma mater	University of Toronto, Princeton University
Known for	Prisoner's dilemma Karush–Kuhn–Tucker conditions Combinatorial linear algebra
Awards	John von Neumann Theory Prize (1980)

<u>Remarques</u> : i) en pratique, on dispose de conditions (de "qualifications des contraintes") qui garantissent que $\bar{\mu}_0$ est > 0 : par homogénéité, on pose alors $\bar{\mu}_0 = 1$. C'est le cas en maximisation de l'utilité : on met le problème sous la forme voulue en le reformulant selon

$$\begin{cases} -u(x_1, x_2) \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0 \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r \leq 0 \end{cases}$$

Le Lagrangien (avec $\bar{\mu}_0 = 1 > 0$ — des contraintes linéaires sont automatiquement qualifiées...) s'écrit :

$$L(x, \mu) = -u(x_1, x_2) + \mu_1 . (-x_1) + \mu_2 (-x_2) + \mu_3 (p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r)$$

puisque $g_1(x) = -x_1$, $g_2(x) = -x_2$
$g_3(x) = p_1 . x_1 + p_2 . x_2 - r$.

Les conditions KKT disent qu'en $\bar{x}$, solution, $\exists (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3) \in \mathbb{R}^3$ tq :

$$0 = \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = -\nabla u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \bar{\mu}_1 . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mu}_2 . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \bar{\mu}_3 . \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

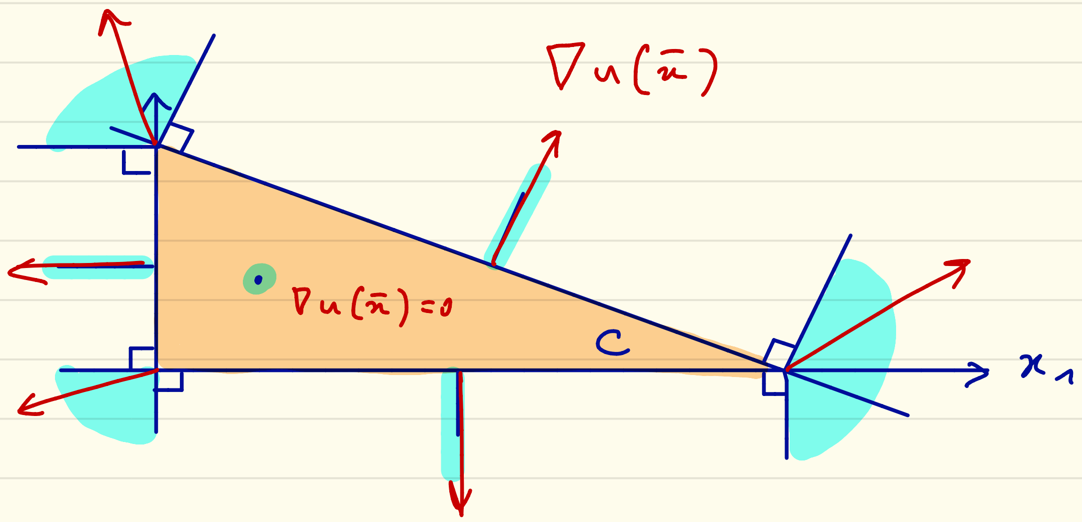
avec $\bar{\mu}_1 \geq 0$, $\bar{\mu}_2 \geq 0$, $\bar{\mu}_3 \geq 0$ et

$$\begin{cases} \bar{\mu}_1 . \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{\mu}_2 . \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$ et $\bar{\mu}_3 . (p_1 . \bar{x}_1 + p_2 . \bar{x}_2 - r) = 0$.

La relation $(*)$ se réécrit $\exists(\bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3)$ positifs tq

$$\nabla u(\bar x_1, \bar x_2) = \bar\mu_3 \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar\mu_1 \\ -\bar\mu_2 \end{bmatrix}$$

ce qui traduit exactement la condition géométrique rappelée en début de cours :



Par exemple, parmi les cas possibles :

– si la solution $\bar x$ est à l'intérieur des contraintes, ie si l'on a

aucune contrainte active

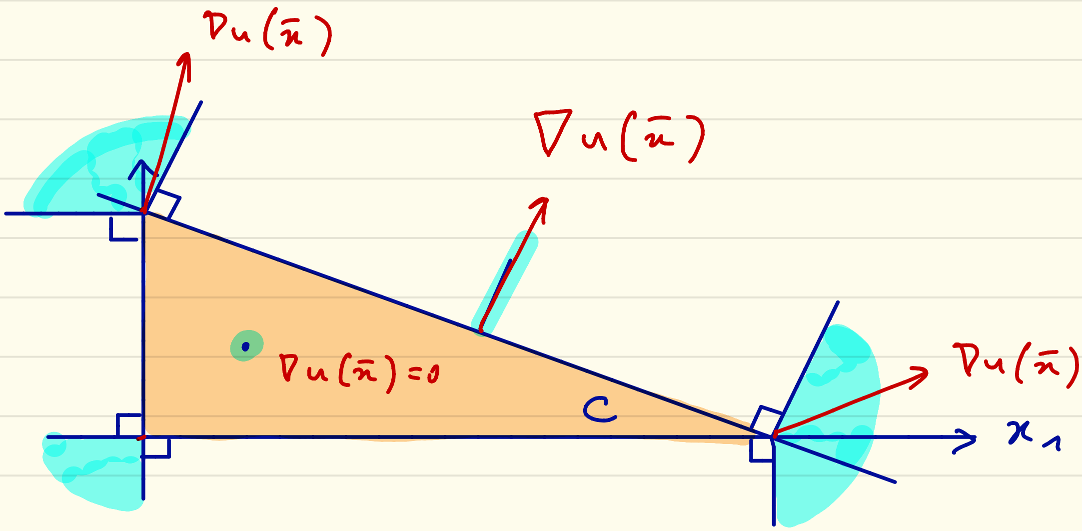
$$\bar x_1 > 0, \bar x_2 > 0 \text{ et } p_1 \cdot \bar x_1 + p_2 \cdot \bar x_2 < r,$$

par complémentarité $\bar\mu_1 = \bar\mu_2 = \bar\mu_3 = 0$, et nécessairement $\nabla u(\bar x_1, \bar x_2) = 0$;

– si on a, $\forall x \in C$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$,

la situation précédente est exclue, de même que le cas $\bar x_1 = \bar x_2 = 0$;

de fait on voit que les conditions KKT impliquent dans ce cas que la contrainte de budget doit être active, les solutions "en coins" ($\bar{x}_1$ ou $\bar{x}_2 = 0$) n'étant pas exclues :



Dans ce cas, il suffit alors pour résoudre de maximiser la fonction

$$(**) \begin{cases} \varphi(x_1) = u\left(x_1, \dfrac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) \\ \text{avec } x_1 \in \left[0, \dfrac{r}{p_1}\right] \end{cases}$$

puisque le bord de la contrainte sur lequel toute solution doit se trouver se paramétrise selon : $x_2 = \dfrac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)$.

Le tableau des variations de φ permet donc de résoudre le problème de maximisation de l'utilité.

NB. Sans hypothèse supplémentaire sur l'utilité, pas unicité de solution.

En particulier, si une solution $\bar{x}_1 \in \,]0, r/p_1[$, on a :

$$\varphi'(\bar{x}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\bar{x}_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\bar{x}_1, \frac{1}{p_2}(r - p_1 . x_1)\right) \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = p_1 / p_2 \quad \text{avec} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{p_2}(r - p_1 . \bar{x}_1)$$

ie : $\quad TMS_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \dfrac{p_1}{p_2}.$

Cette relation s'appelle en économie le "principe d'égalisation marginale" :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}) \Big/ p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) \Big/ p_2$$

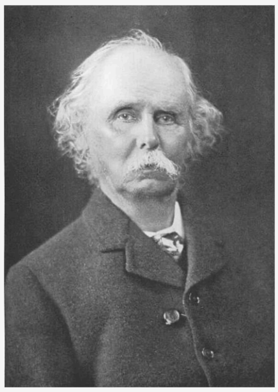
"utilités marginales"

Déf. : lorsque la solution du problème de maximisation de l'utilité est unique, on définit la "demande marshallienne" comme la quantité

$$\bar{x}(p_1, p_2, r) = (\bar{x}_1(p_1, p_2, r), \bar{x}_2(p_1, p_2, r))$$

qui traduit la dépendance des quantités optimales des biens 1 et 2 en leurs prix p_1, p_2 et le revenu r.

Alfred Marshall
FBA



Born	26 July 1842 London, England
Died	13 July 1924 (aged 81) Cambridge, England
Nationality	British
Institution	St John's College, Cambridge University College, Bristol Balliol College, Oxford

Prop. : la demande marshallienne est homogène (positivement) au sens où :

$$(\forall \lambda > 0) : \bar{x}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda r) = \bar{x}(p_1, p_2, r).$$

dém. : évident puisque $(\lambda p_1).x_1 + (\lambda p_2).x_2 \leq \lambda r$
$\iff p_1.x_1 + p_2.x_2 \leq r.$ $\square$

Remarque : lorsque la demande marshallienne active ("sature") la contrainte de budget, on a :

$$p_1.\bar{x}_1(p_1, p_2, r) + p_2.\bar{x}_2(p_1, p_2, r) = r \quad (\text{"loi de Walras"})$$

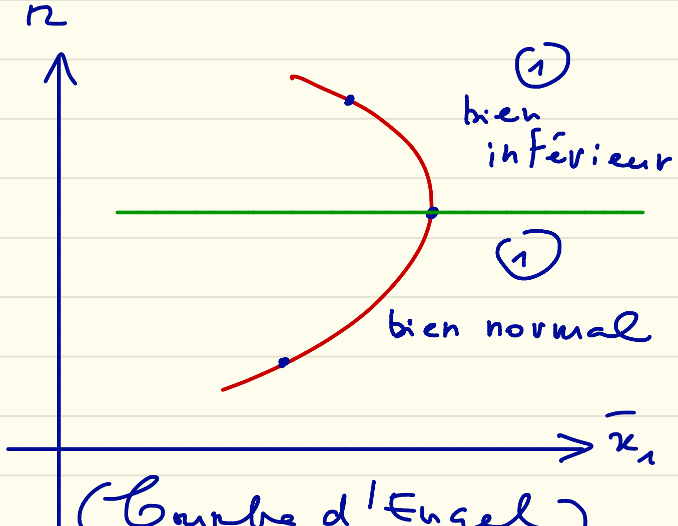
On suppose dans les définitions qui suivent que la demande marshallienne est une fonction dérivable des prix et du revenu.

Déf. : l'effet revenu du bien i ($i = 1$ ou 2) mesure la variation de la consommation optimale (marshallienne) du bien i quand le revenu varie et que les prix sont fixés : c'est la quantité

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial r}(p_1, p_2, r).$$

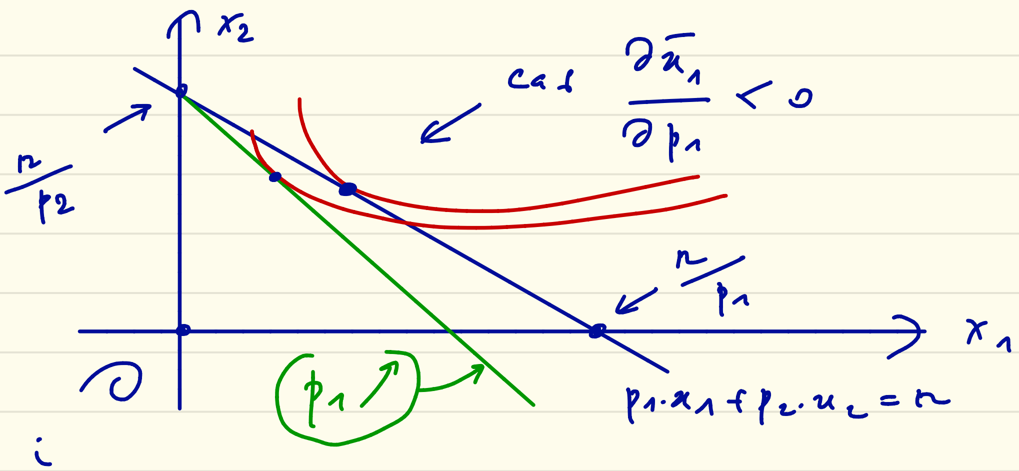
→ $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial r} \geq 0$: bien "normal"

→ $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial r} < 0$: bien inférieur



(Courbe d'Engel)

Déf.: l'effet prix d'un bien i ($i = 1$ ou 2) mesure la variation de la consommation optimale (marshallienne) quand le prix du bien i



change, l'autre prix et le revenu étant inchangés: c'est la quantité

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_i}(p_1, p_2, r).$$

$\rightarrow$ $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_i}(p_1, p_2, r) > 0$: bien "de Giffen"; la baisse du prix traduit une baisse de consommation. Ce paradoxe apparent traduit le fait que le gain de pouvoir d'achat résultant de la baisse du prix p_i est plus "utilement" mis à profit en diminuant la quantité $\bar{x}_i$.