

به نام خدا

استاد: دکتر محمدرضا محمدی
درس مبانی بینایی کامپیوتر

نام: فاطمه زهرا بخشنده
شماره دانشجویی: 98522157

گزارش تمرین 4:

سوال اول:

فرمول تبدیل فوریه دوبعدی به صورت زیر تعریف میشود:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

تصویر ما همان $f(x, y)$ است. با توجه به پیکسل های تصویر:

$$f(0,0) = 2, \quad f(0,1) = 3, \quad f(1,0) = 1, \quad f(1,1) = 4$$

همچنین $M = N = 2$ هستند. جایگذاری می کنیم.

اولین مولفه تصویر:

1	1
1	1

ضریب فوریه آن:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{0}{2} + \frac{0}{2})} = 2 + 3 + 1 + 4 = 10$$

دومین مولفه:

1	-1
1	-1

ضریب فوریه آن:

$$F(0,1) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 f(x,y) e^{-j\pi y} = 2 + 3e^{-j\pi} + 1 + 4e^{-j\pi} = 3 - 7 = -4$$

سومین مولفه:

1	1
-1	-1

ضریب فوریه آن:

$$F(1,0) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 f(x,y) e^{-j\pi x} = 2 + 3 + e^{-j\pi} + 4e^{-j\pi} = 5 - 5 = 0$$

چهارمین مولفه:

1	-1
-1	1

ضریب فوریه آن:

$$F(1,1) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^1 f(x,y) e^{-j\pi(x+y)} = 2 + 3e^{-j\pi} + e^{-j\pi} + 4e^{-j2\pi} = 2$$

پس تبدیل فوریه تصویر f یعنی $F(u,v)$ به صورت زیر است:

10	-4
0	2

و تصویر f را میتوان به صورت جمع مولفه هایش نوشت.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{10}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{0}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال دوم:

الف) برای اینکه ببینیم برای یک تصویر n در n ، بخش حقیقی دامنه ی فرکانسی آن در چه ابعادی در فضا قرار دارد، باید تعداد مولفه های آزاد این تصویر را در نظر بگیریم. مثلاً برای یک تصویر با ماتریس قطری، تنها مولفه های قطر آن مولفه آزاد محسوب می شوند، چون در واقع روی بقیه مولفه ها شرط وجود دارد و حتماً باید صفر باشند پس آزاد نیستند. یا برای یک ماتریس متقارن، اگر یکی از مولفه های بالا یا پایین قطر آن مقداری داشته باشد، مولفه متناظر آن در آن طرف قطر ماتریس، باید دقیقاً همان مقدار را داشته باشد و نمی تواند مقدار دیگری بگیرد، پس در واقع به اندازه تعداد مولفه های یک طرف قطر این ماتریس، روی آن شرط گذاشته ایم و این تعداد از مولفه ها آزاد نیستند.

حالا برای شمردن مولفه های آزاد یک تصویر n در n ، باید ببینیم که مولفه های این تصویر، به چه صورت است. آیا روی سری فوریه آن شرطی گذاشته شده یا نه. در حالت کلی تعداد این مولفه ها همان n^2 است و بخش حقیقی دامنه ی فرکانسی آن در بعد n^2 در فضا قرار دارد. حالا اگر روی تعدادی از مولفه های آن شرط گذاشته شود، به همان تعداد از مولفه های آزاد آن کم می شود. مثلاً اگر روی یک سطر آن شرط گذاشته و بگوییم همه دقیقاً می توانند یک عدد خاص باشند آنگاه تعداد مولفه های آزاد آن $n^2 - n$ می شود، یا اگر روی border آن شرط داشته باشیم و بدانیم حتماً یک border یک پیکسلی با یک عدد مشخص دارد که جزو همین ماتریس n در n است، آنگاه تعداد مولفه های آزاد آن $n^2 - 4n$ می شود.

ب) با توجه به فرمول تبدیل فوریه، مقدار هر نقطه $F(u, v)$ با ضرب تصویر در حوزه مکان در تابع پایه مربوطه و جمع کردن نتیجه به دست می آید. توابع پایه امواج سینوسی و کسینوسی با فرکانس های افزایشی هستند، یعنی $F(0,0)$ مولفه DC تصویر را نشان می دهد که مربوط به شدت روشنایی کل تصویر است و $F(N-1, N-1)$ بالاترین فرکانس را نشان می دهد.

اثبات با فرمول:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^M \sum_{y=0}^N f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{0}{M} + \frac{0}{N})} = \sum_{x=0}^M \sum_{y=0}^N f(x,y) \\ = f(0,0) + f(1,0) + \dots + f(M,N)$$

که در واقع برابر با مجموع مقادیر روشنایی همه پیکسل های تصویر است. اگر آن را نرمال سازی کرده و به N^2 تقسیم کنیم آنگاه به میانگین روشنایی تصویر می رسیم.

منابع: [لینک](#) و [لینک](#)

سوال سوم:

الف) برای فیلتر تصویر با کرنل باید تصویر را با کرنل convolve کنیم. برای اینکار با توجه به اینکه می‌خواهیم از zero padding استفاده کنیم، ابتدا ماتریس imagePadded را طوری می‌سازیم که تصویر در وسط آن قرار گرفته و دور آن متناسب با اندازه کرنل zero padding در نظر می‌گیریم، تا برای عمل convolution یک برادر سیاه دور تصویر در نظر بگیرد. سپس عملیات را روی هر پیکسل تصویر اعمال می‌کنیم.

ب) برای ساخت این کرنل، کافیه یک کرنل که همه خانه های آن 1 است را در $\frac{1}{size*size}$ ضرب کنیم. سپس از آن برای حذف نویز نمک و فلفل استفاده می‌کنیم. نتیجه:



می بینیم که نویز تا حدی رفع شده (هنوز مقداری دیده می‌شود)، اما تصویر smooth تر و کمی تار شده است. هرچه اندازه کرنل را بالاتر ببریم نویز بیشتری حذف می‌شود اما تصویر تارتر می‌شود.

نتیجه با کرنل 5 و 9:



پ) در این فیلتر، برای هر پیکسل به جای میانگین، میانه آن پیکسل و پیکسل های اطرافش را جای آن می‌گذاریم (به اندازه size کرنل). نتیجه:



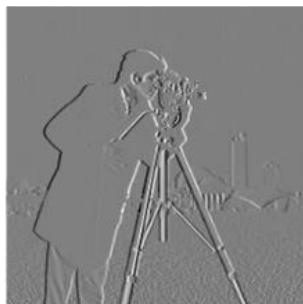
می بینیم که نویز تا حدی رفع شده (تصویر ورودی نسبت به تصویر قبلی خیلی نویز بیشتری داشته و فیلتر میانه گیر قدرتمندتر از فیلتر قبلی عمل کرده است)، و تصویر smooth تر شده است. هرچه اندازه کرنل را بالاتر ببریم نویز بیشتری حذف می‌شود اما تصویر تارتر می‌شود. نتیجه با کرنل 5 و 9:



ت) از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$$

در راستای x مشتق می گیریم.



میبینیم که خطوط عمودی برجسته شده اند.

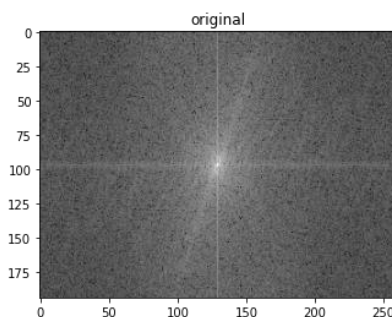
اگر تصویر ما نویزی باشد، مشتق آن هارا برجسته تر می کند. و بعدا اگر بخواهیم مثلا برای لبه یابی از آن استفاده کنیم، به مشکل می خوریم. چون حضور مقدار کمی نویز می تواند به میزان زیادی کار تشخیص لبه را توسط مشتق گیری سخت کند. برای کاهش نویز تصویر خروجی، می توانیم ابتدا آن را تا حدی رفع نویز کنیم و سپس مشتق بگیریم. هموارسازی تصویر قبل از استفاده از مشتق در کاربردهایی که نویز با چنین سطحی تصویر را تخریب میکند ضروری است. و این هموارسازی را در جهت عمود بر جهت مشتق گیری و لبه یابی انجام می دهیم.

منابع: اسلاید ها و [لینک](#)

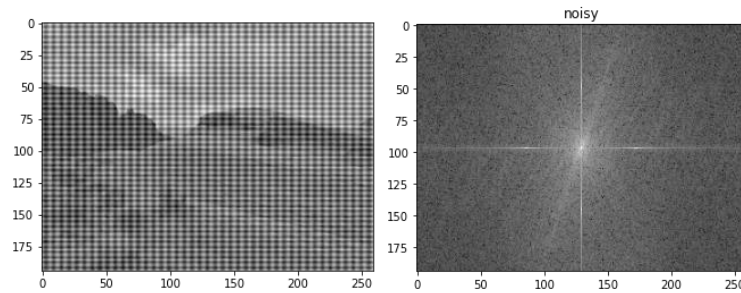
سوال چهارم:

الف) یک نویز متناوب به تصویر اضافه شده است. بهترین روش برای کاهش نویزهای متناوب، گرفتن تبدیل فوریه است. با گرفتن تبدیل فوریه و شیفت نقطه ی $(0, 0)$ به وسط و نمایش اندازه ی آن، متوجه مقادیر نویزی میشویم که با صفر کردن آن مقادیر و تبدیل معکوس فوریه میتوان نویز تصویر را کاهش داد. سپس تبدیل فوریه معکوس می گیریم.

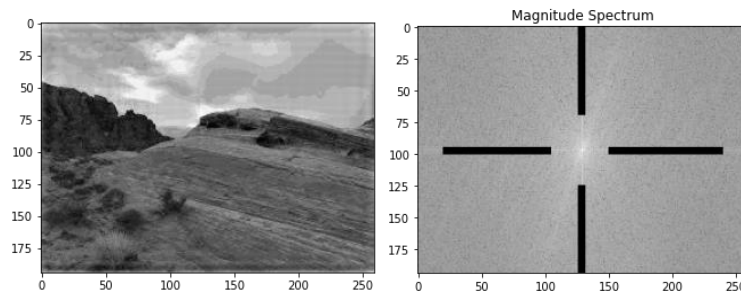
تبدیل فوریه برای خود تصویر اصلی:



تصویر نویزی و تبدیل فوریه آن:



لازم به ذکر است که برای از بین بردن تصویر نباید نقطه ی وسط یعنی $(0, 0)$ را صفر کرد. باید مقدار قسمت هایی را کم کنیم که مربوط به نویز است. در اینجا با بررسی تبدیل فوریه تصویر نویزی می بینیم به تصویر در راستای عمودی و افقی در وسط آن نویز اضافه شده است. این مقادیر را صفر می کنیم. سعی کردم تا جایی مقادیر را صفر کنم که به بالاترین PSNR برسم و تصویر خروجی نمای بهتری داشته باشد.



```
PSNR between noisy image and original image = 8.122255096865844
PSNR between denoised image and original image = 30.574695265612043
```

ب) نسبت Peak signal-to-noise (PSNR) نسبت بین حداکثر توان ممکن یک تصویر و قدرت نویز مخرب است که بر کیفیت نمایش آن تأثیر می گذارد. برای تخمین PSNR یک تصویر، باید آن تصویر را با یک تصویر تمیز ایده آل با حداکثر توان ممکن مقایسه کرد. PSNR را می توانیم برای تخمین بازده فیلترها استفاده کنیم. هر چه مقدار PSNR بزرگتر باشد، فیلتر مربوطه کارآمدتر است.

این نسبت بین تصویر اصلی و نویزی 8.12 بوده که وقتی آن را رفع نویز می کنیم این نسبت بین تصویر اصلی و تصویر رفع نویز شده به 30.57 افزایش می یابد و نشان می دهد نویز را تا حدی رفع کردیم و به تصویر اصلی نزدیک شدیم.

پ) این نویز از نوع جمع شونده است که به تصویر اصلی اضافه شده است.

مدل نویز جمع شونده: نویز جمع شونده، سیگنال ناگهانی ناخواسته ای است که به برخی از سیگنال های واقعی اضافه می شود. مدل این نویز به صورت زیر است:

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$

که در آن، $f(x, y)$ تصویر اصلی است که توسط نویز $n(x, y)$ خراب شده است. هدف اصلی مدل بازسازی تصویر نویز جمع شونده، بازیابی تصویر $f(x, y)$ بر اساس مشاهدات $g(x, y)$ است.

حذف این نویز از تصویر کار چندان دشواری نیست زیرا مدل های بازیابی تصویر زیادی برای حذف نویز جمع شونده موجود است. نویز گاوسی بهترین مثال از نویز افزایشی است. این نویز در بسیاری از کاربردها مانند تصویربرداری نوری و تعداد کمی از تصاویر پزشکی مانند سی تی اسکن و ... وجود دارد. این نویز در طول گرفتن تصویر ایجاد می شود و دارای الگوی توزیع نرمال است. تأثیر آن بر روی تصویر کمتر از نویز ضرب شونده است زیرا در اینجا سیگنال نویز به سیگنال اصلی اضافه می شود در حالی که در ضرب، نویز چند برابر می شود.

مدل نویز ضرب شونده: نویز ضرب شونده سیگنال ناگهانی ناخواسته ای است که در سیگنال واقعی ضرب می شود. مدل نویز ضرب شونده به شرح زیر است:

$$g(x, y) = f(x, y) * n(x, y)$$

هدف اصلی مدل بازیابی تصویر نویز ضرب شونده مانند نویز جمع شونده، بازیابی تصویر f بر اساس مشاهدات تصویر نویزی g است. حذف این نویز از تصویر کار بسیار دشواری است زیرا مدل های بازیابی تصویر بسیار کمی برای حذف این نوع نویز موجود است. راه دیگر حذف این مدل نویز، استفاده از مدل های بازیابی تصویر نویز جمع شونده است. ابتدا با استفاده از تبدیل لگاریتم، نویز ضرب شونده به نویز جمع شونده تبدیل می شود و اکنون می توان هر روش فیلتری را برای آن اعمال کرد. و بعداً از inverse log برای به دست آوردن نتیجه صحیح استفاده می شود.

نویز ضرب شونده در حین ضبط، انتقال یا پردازش های دیگر ایجاد می شود و دارای الگوی توزیع گاما است. این نویز تأثیر نامطلوبی بر روی تصویر دارد زیرا سیگنال نویز در سیگنال اصلی ضرب می شود. این نوع نویز عمدتاً در تصاویر رادار و تصاویر ultrasound یافت می شود. نویز لکه ای بهترین مثال برای نویز ضرب شونده است.

منابع: [لینک](#) و [لینک](#) و [لینک](#)