

به نام خدا

نام: فاطمه زهرا بخشنده

شماره دانشجویی 98522157

3 روش برای محاسبه دترمینان ماتریس:

1- بسط لاپلاس دترمینان

بسط لاپلاس (یا بسط همسازه ای) برای محاسبه دترمینان ماتریس مرتبه n ، به فرم زیر است:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

یا

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|, \quad 1 \leq j \leq n$$

که در حالت اول بسط بر اساس سطر دلخواه i و در حالت دوم بر اساس ستون دلخواه j صورت گرفته است. منظور از A_{ij} (ماتریس کهاد) ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس اصلی به دست آمده است.

در روش بسط لاپلاس، محاسبه دترمینان یک ماتریس مرتبه $n \times n$ ، به محاسبه دترمینان n ماتریس کهاد از مرتبه $(n-1) \times (n-1)$ شکسته می‌شود. این روش از دو روش دیگر بسیار کندتر است.

پیچیدگی زمانی:

$$T(n) = nT(n-1) + 3n - 1, \quad T(1) = 0 \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n!)$$

2- روش گاوس

مرحله اول: ابتدا به دنبال سطر می‌گردیم که مقدار درایه‌ی ستون اول آن صفر نباشد. اگر چنین سطر ی یافت نشد، یعنی تمامی درایه‌های ستون اول صفر هستند. پس مقدار دترمینان صفر شده و انجام مراحل بعدی نیاز نیست.

مرحله‌ی دوم: ضریب مناسبی از مقدار درایه‌ی ستون اول سطر پیدا شده را که درایه‌ی ستون اول هر سطر را صفر کند، به هر سطر به صورت مجزا اضافه می‌کنیم. اگر مقدار درایه‌ی ستون اول آن ستون، از قبل صفر باشد، نیاز به انجام عمل خاصی نیست. این عمل مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد.

مرحله‌ی سوم: در ماتریس به دست آمده، ستون اول آن، به غیر از سطر پیدا شده همه صفر هستند. بسط لاپلاس دترمینان ماتریس را بر اساس ستون اول انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی چهارم: محاسبه‌ی دترمینان ماتریس از مرتبه‌ی n به محاسبه‌ی دترمینان ماتریس مرتبه‌ی $n-1$ تقلیل یافته است. با ادامه‌ی این مراحل برای این ماتریس، تا رسیدن به ماتریسی از مرتبه‌ی یک، مقدار دترمینان اصلی محاسبه می‌شود.

در روش گاوس، محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس مرتبه‌ی $n \times n$ ، به محاسبه‌ی دترمینان 1 ماتریس کهاد از مرتبه‌ی $n-1 \times n-1$ شکسته می‌شود. این روش، از دو روش دیگر بسیار سریعتر است.

پیچیدگی زمانی:

$$T(n) = T(n-1) + 2n^2 - 2n + 2, \quad T(1) = 0 \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n^3)$$

3- روش جدید رضایی فر

مرحله‌ی اول: M را ماتریسی $n \times n$ در نظر می‌گیریم.

مرحله‌ی دوم: ماتریس M_{ij} (ماتریس کهاد) ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس M به دست آمده است.

مرحله‌ی سوم: ماتریس M_{11} ، M_{1n} ، M_{n1} و M_{11nn} را محاسبه می‌کنیم. ماتریس M_{11nn} ماتریسی است که از حذف سطر 1 و n ام و ستون 1 و n ام ماتریس M به دست آمده است.

مرحله‌ی چهارم: سپس دترمینان ماتریس از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = \begin{vmatrix} |M_{11}| & |M_{1n}| \\ |M_{n1}| & |M_{nn}| \end{vmatrix} * \frac{1}{|M_{11nn}|}$$

در این روش، محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس مرتبه‌ی $n \times n$ ، به محاسبه‌ی دترمینان 4 ماتریس کهاد از مرتبه‌ی $n-1 \times n-1$ و 1 ماتریس از مرتبه‌ی $n-2 \times n-2$ شکسته می‌شود.

پیچیدگی زمانی:

$$T(n) = 4T(n-1) + T(n-2), \quad T(1) = 0, \quad T(2) = O(1) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O((2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n)$$