

به نام خدا

تمرین سری اول (موعد تحویل ۴ شنبه ۱۵ اسفند ساعت ۵ بعد از ظهر)

- ✓ لطفا گزارش و فایل های MATLABتان را آپلود کنید.
- ✓ گزارش می بایست به فارسی تایپ شده و مرتب باشد. برای راحتی اگر مایل بودید می توانید روابط ریاضی را روی کاغذ بنویسید و سپس تصویر آن را در گزارش قرار دهید.
- ✓ لطفاً در محیط live متلب کد ننیزید و اسکریپت معمولی بنویسید.

تابع هدف دو متغیره زیر را در نظر بگیرید

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1x_2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(۱) با استفاده از دستور mesh این تابع را بر حسب  $x_1$  و  $x_2$  در بازه ی  $-10 < x_2, x_1 < 10$  به صورت سه بعدی رسم کنید. بهتر است تابع هدف را به صورت db رسم کنید تا تغییرات تابع هدف برایتان واضح تر شود.

(۲) با استفاده از دستور contour سطوح هم پتانسیل این تابع را در فضای دو بعدی رسم کنید. مقادیر سطوح هم پتانسیل نیز روی شکل نشان داده شود (help دستور را مطالعه کنید).

(۳) بردار گرادیان (g) و ماتریس هسین (H) را محاسبه کنید. با توجه به ماتریس هسین به دست آمده، ثابت کنید تابع هدف داده شده convex است و در نتیجه فقط یک مینیمم دارد. (همان طور که در کلاس اشاره شد باید ثابت کنید نامساوی  $\underline{x}^T H \underline{x} > 0$  به ازای همه ی مقادیر برداری  $\underline{x}$  برقرار است).

(۴) نقطه ای که مینیمم تابع در آن رخ می دهد را با صفر قرار دادن بردار گرادیان به دست آورید.

همان طور که ملاحظه کردید، این مساله بهینه سازی به راحتی حل شد. حال می خواهیم با استفاده از روش هایی که در کلاس شرح داده شد هم مینیمم تابع را به دست آوریم.

(۵) از نقطه ی اولیه  $x_1 = x_2 = 6$  روش Steepest Descend را به ازای  $\mu$  های 0.01 و 0.1 پیاده کنید. آیا در هر دو حالت الگوریتم همگرا شد؟ کدام یک سریع تر همگرا شد؟ نمودار همگرایی (مقدار تابع هدف بر حسب شماره iteration) را به ازای هر دو  $\mu$  روی یک شکل رسم کنید.

(۶) از نقطه ی اولیه  $x_1 = x_2 = 6$  روش Newton را پیاده کنید. در چند iteration الگوریتم همگرا می شود؟ دلیل این اتفاق را شرح دهید.

(۷) از نقطه ی اولیه  $x_1 = x_2 = 6$  با رویکرد alternation minimization بین دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$  مساله بهینه سازی را حل کنید. توجه کنید که در هر alternation، با مساله ی بهینه سازی جدیدی مواجه می شوید. چون مساله جدید ساده است، جواب فرم بسته برای آن در نظر بگیرید و دیگر احتیاجی نیست از SD یا الگوریتم های دیگر برای حل آن استفاده کنید. مسیر همگرایی را از مقدار اولیه تا مقدار بهینه در فضای دو بعدی  $x_1$  و  $x_2$  رسم کنید. contour ها را هم در تصویر به صورت همزمان نمایش دهید.

(۸) قید  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  یا به عبارت دیگر  $\|x\|_2 = 1$  را به مساله اضافه می کنیم. حال تابع هدف را با رویکرد Gradient Projection از نقطه ی اولیه  $x_1 = x_2 = 6$  و با استفاده از الگوریتم Steepest Descend و با  $\mu = 0.1$  حل کنید. مقدار بهینه به دست آمده را گزارش کنید.

(۹) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، قسمت (۸) را به صورت ریاضی حل کنید و نشان دهید جواب به دست آمده در قسمت (۸) جواب مساله است.

توجه داشته باشید که همه موارد بالا را اگر با مقادیر اولیه متفاوتی نیز اجرا می کردید به همان جواب بهینه همگرا می شدید.