**به نام خالق ستارگان**

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

**تمرین اول درس جداسازی کور منابع (BSS)**

**دکتر سعید اخوان**

| | |
|---|---|
| **نام و نام خانوادگی** | سیده غزل موسوی |
| **شماره دانشجویی** | ۸۱۰۱۰۰۲۵۹ |
| **مهلت ارسال پاسخ** | **۱۴۰۳.۱۲.۸** |

# بخش اول

ابتدا با دستور unifrnd منبع $s_1$ و $s_2$ به ترتیب در بازه $[-3,3]$ و $[-2,2]$ با اندازه $T \times 1$ و همچنین تابع مخلوط‌کننده را تعریف می‌کنیم. توجه شود که منابع به صورت ماتریس ستونی تعریف شده‌اند ولی برای تشکیل ماتریس S از transposed ماتریس‌های منابع استفاده می‌کنیم.

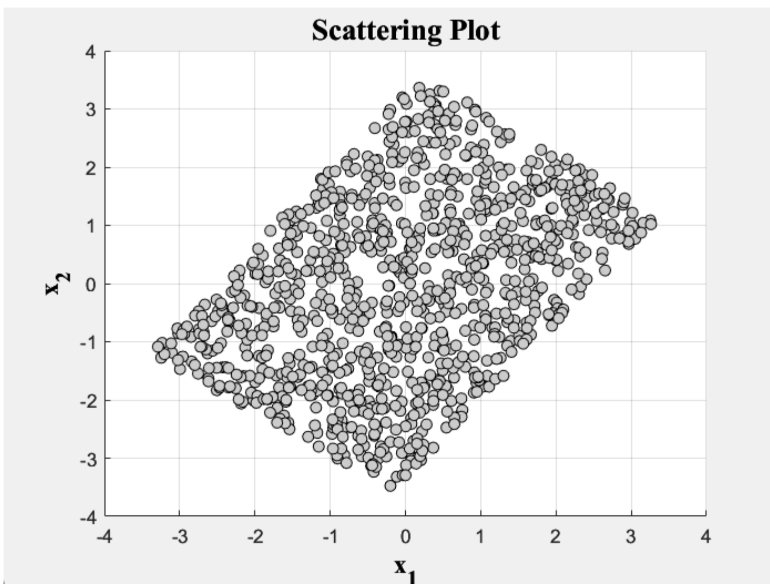
طبق گفته سوال، ماتریس مخلوط‌کننده به صورت خطی و آنی است در نتیجه ماتریس مشاهدات از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\underline{X}_{2\times T} = \underline{A}_{2\times 2}.\underline{S}_{2\times T}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{با استفاده از معادله بالا}} \begin{cases} X_1 = 0.6S_1 + 0.8S_2 \\ X_2 = 0.8S_1 - 0.6S_2 \end{cases}$$

۱)

پس از به دست آوردن ماتریس مشاهدات، با استفاده از دستور scatter ، نمودار پراکندگی $x_2$ برحسب $x_1$ رسم می‌کنیم.




شکل ۱. نمودار پراکندگی $x_2$ بر حسب $x_1$

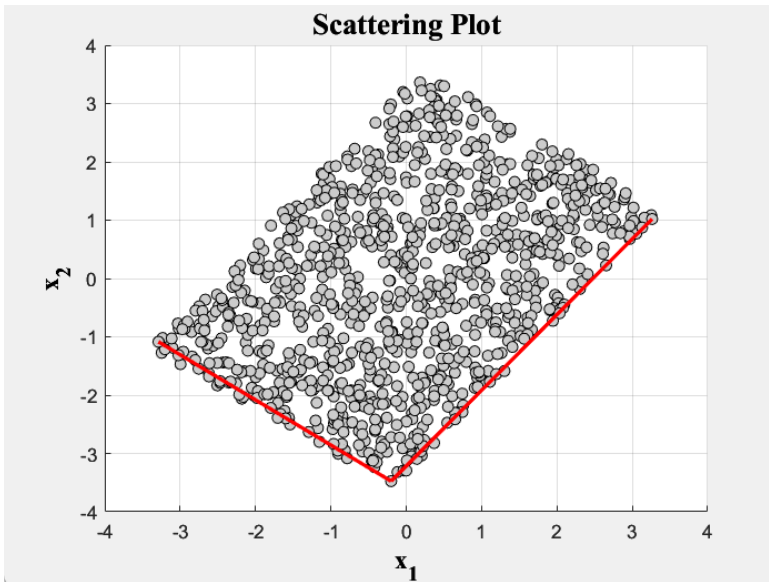
همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود نمودار پراکندگی به دلیل یکنواخت بودن توزیع منابع و محدود بودن آن‌ها دارای مرزهای مشخصی است. با به دست آوردن مرزهای این چهارضلعی می‌توان بردارهای مکانی $\underline{a_1}$ و $\underline{a_2}$ را به دست آورد، سپس با سطری قرار دادن این بردارها در کنار یکدیگر ماتریس مخلوط کننده را محاسبه کرد.

$$\underline{X}_{2\times T} = \underline{a_1}\ \underline{s_1^T} + \underline{a_2}\ \underline{s_2^T}\ and\ \ A = [\underline{a_1}, \underline{a_2}]$$

۲)

نقاط گوشه این چهارضلعی به دلیل مینیمم و ماکسیمم مقدارهای منابع رخ داده است. پس با به دست‌آوردن دو ضلع متفاوت این چهارضلعی و سپس نرمالایز کردن آن، می‌توان بردارهای مکانی را یافت.

از مینیمم و ماکسیمم $x_1$ و همچنین از مینیمم $x_2$ استفاده کردیم تا نقاط گوشه پایین و بالا سمت چپ و همچنین گوشه پایین سمت راست را به دست آوریم. سپس با استفاده از این سه نقطه بردارهای $\beta_1$ و $\beta_2$ حساب کرده و پس از نرمالایز کردن آن‌ها (تقسیم بر اندازه بردارها) ماتریس مخلوط کننده تخمین زده شد.




شکل ۲. بردار مکانی $\beta_1$ و $\beta_2$

**Beta**

| | |
|---|---|
| 0.61023 | 0.79074 |
| 0.79222 | -0.61216 |

شکل ۳. ماتریس مخلوط کننده تخمین زده شده

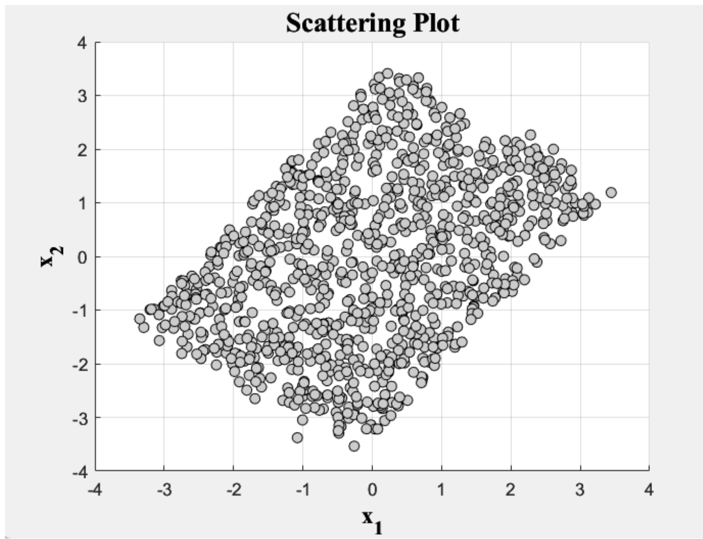
همانطور که مشاهده می‌شود ماتریس تخمین زده شده تا حد خوبی با ماتریس مخلوط‌کننده اصلی برابر است. برای مقایسه ماتریس مخلوط‌کننده تخمین زده شده با ماتریس مخلوط‌کننده اصلی از متریک ارزیابی MSE(Mean Squaredd Error) میانگین

مربعات خطا استفاده شد. طبق عدد به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که خطا بسیار کم است و ماتریس تخمین زده شده به ماتریس اصلی بسیار نزدیک است.

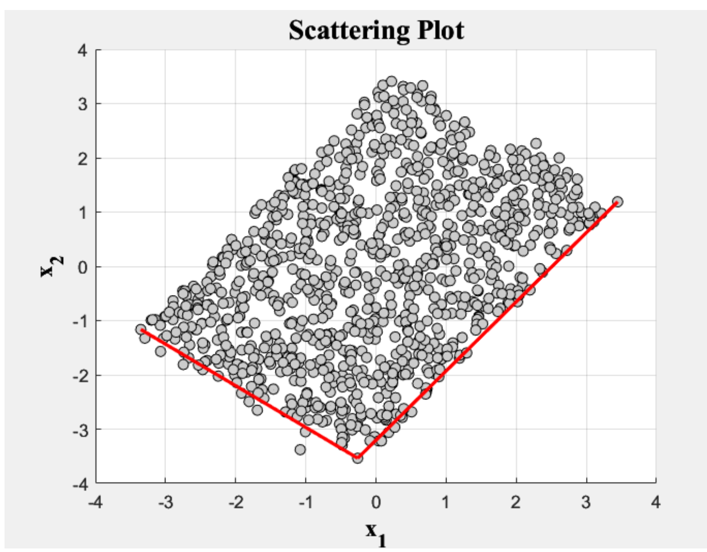
MSE:9.9672e-05

۳)

با استفاده از دستور $0.1 \times \mathrm{randn}$ بردار نویزی با قدرت کم و با اندازه $T \times 1$ تولید می‌کنیم و با $\mathrm{x}_1$ و $\mathrm{x}_2$ جمع می‌کنیم. سپس مطابق بخش قبل نمودار پراکندگی را رسم کرده و ماتریس مخلوط کننده را تخمین می‌زنیم.




شکل ۴. نمودار پراکندگی $x_2$ برحسب $x_1$ بعد از افزودن نویز




شکل ۵. بردارهای تخمین زده شده ماتریس مخلوط کننده بعد از افزودن نویز

**Beta**

| | |
|---|---|
| 0.61717 | 0.79348 |
| 0.78683 | -0.6086 |

شکل ۶. ماتریس مخلوط‌کننده تخمین زده شده بعد از افزودن نویز

برای مقایسه ماتریس مخلوط‌کننده تخمین زده شده با ماتریس مخلوط‌کننده اصلی از همان متریک ارزیابی قبلی یعنی MSE(Mean Squaredd Error) میانگین مربعات خطا استفاده شد.

MSE:0.00014618

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار میانگین مربعات خطا کم است که این نشان می‌دهد روش ما در تخمین ماتریس مخلوط‌کننده با وجود نویز با قدرت کم، خوب عمل کرده است.

۴)

ابتدا توزیع $x_1$ را به دست می‌آوریم.

در ادامه از روابط آماری زیر برای به دست آوردن توزیع استفاده می‌شود.

$$F_X(x) = \Pr\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$ تابع توزیع تجمعی

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$ توزیع چگالی احتمال

برای توزیع یکنواخت در بازه $[a, b]$ داریم:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & Otherwise \end{cases}$$

با توجه به توضیحاتی که در ابتدا داده شد داریم:

$X_1 = 0.6S_1 + 0.8S_2$

$$F_{X1}(x_1) = \Pr\{ X_1 \le x_1\} = \Pr\{ 0.6S_1 + 0.8S_2 \le x_1\} = \Pr\left\{S_1 \le \frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}S_2\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{S_1 \le \frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}s_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_{s_1}\left\{\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}s_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{5}{3} \times \int_{-\infty}^{\infty} f_{s_1}\left\{\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}s_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$f_{S_1}(s_1) = \begin{cases} \frac{1}{6} & -3 \le s_1 \le 3 \\ 1 & Otherwise \end{cases}$$

$$F_{S_2}(s_2) = \begin{cases} 0 & s_2 < -2 \\ \frac{s_2 + 2}{4} & -2 \le s_2 \le 2 \\ 1 & s_2 > 2 \end{cases}$$

برای هربازه، توزیع را به طور جداگانه به دست می‌آوریم:

$$s_1 < -3 \; or \; s_1 > 3 \rightarrow f_{X_1}(x_1) = 0$$

$$-3 \le s_1 \le 3 \rightarrow f_{X1}(x_1) = \frac{5}{3} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

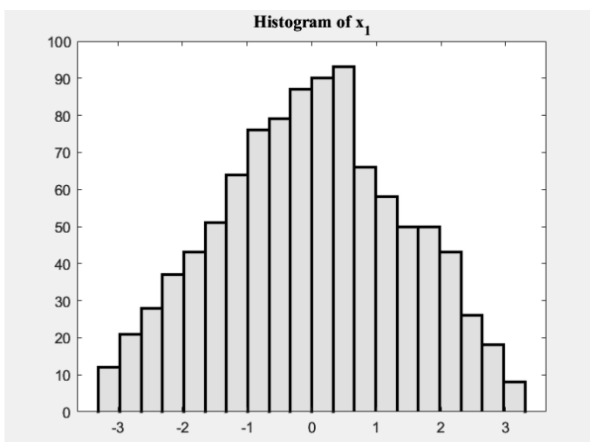
$$-3 \le \frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}s_2 \le 3 \rightarrow \frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_1 \le s_2 \le -\frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_1$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{5}{18} \times \int_{-\infty}^{\infty} f_{s_2}(s_2)ds_2 = \frac{5}{18} \times \int_{-\frac{9}{4}+\frac{15}{4}x_1}^{\frac{9}{4}+\frac{15}{4}x_1} f_{s_2}(s_2)ds_2$$
$$= \frac{5}{18}\left(F_{S_2}\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_1\right) - F_{S_2}\left(-\frac{9}{4} + \frac{5}{4}x_1\right)\right)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{5}{18}\left(\begin{cases} 0 & x_1 < -3.4 \\ \frac{5x_1+17}{16} & -3.4 \le x_1 \le -0.2 \\ 1 & x_1 > -0.2 \end{cases} - \begin{cases} 0 & x_1 < 0.2 \\ \frac{5x_1-1}{16} & 0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 1 & x_1 > 3.4 \end{cases}\right)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{5}{18}\left(\begin{cases} 0 & x_1 < -3.4 \\ \frac{5x_1+17}{16} & -3.4 \le x_1 \le -0.2 \\ 1 & -0.2 < x_1 < 0.2 \\ 1-\frac{5x_1-1}{16} & 0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 0 & x_1 > 3.4 \end{cases}\right)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & x_1 < -3.4 \\ \frac{25x_1+85}{288} & -3.4 \le x_1 \le -0.2 \\ \frac{5}{18} & -0.2 < x_1 < 0.2 \\ \frac{-25x_1+85}{288} & 0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 0 & x_1 > 3.4 \end{cases}$$




شکل ۷. هیستوگرام مربوط به متغیر $x_1$

با توجه به رابطه به دست آمده در هیستوگرام نیز می‌توان مشاهده کرد که در بازه $[-0.2, 0.2]$ تقریبا ثابت است و در سمت دارای شیب مثبت و در سمت راست دارای شیب منفی است و تقریبا از بعد از 3.4 صفر می‌شود. و تقریبا هیستوگرام به دست آمده با توزیع $x_1$ همخوانی دارد.

۵) مشابه بالا توزیع $x_2$ را به دست می‌آوریم.

$$X_2 = 0.8S_1 - 0.6S_2$$

$$F_{X_2}(x_2) = \Pr\{ X_2 \le\ x_2\} = \Pr\{ 0.8S_1 - 0.6S_2\ \le\ x_2\} = \Pr\left\{S_1 \le\ \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}\ S_2\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{S_1 \le\ \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}\ S_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_{s_1}\left\{\frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}\ s_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2} = \frac{5}{4} \times \int_{-\infty}^{\infty} f_{s_1}\left\{\frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}\ s_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$f_{S_1}(s_1) = \begin{cases} \frac{1}{6} & -3 \le s_1 \le 3 \\ 1 & Otherwise \end{cases}$$

$$F_{S_2}(s_2) = \begin{cases} 0 & s_2 < -2 \\ \frac{s_2+2}{4} & -2 \le s_2 \le 2 \\ 1 & s_2 > 2 \end{cases}$$

برای هربازه، توزیع را به طور جداگانه به دست می‌آوریم:

$$s_1 < -3\ or\ s_1 > 3 \rightarrow\ f_{X_2}(x_2) = 0$$

$$-3 \le s_1 \le 3 \rightarrow\ f_{X_2}(x_2) = \frac{5}{4} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$-3\ \le \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}\ s_2 \le 3 \rightarrow\quad -4 - \frac{5}{3}x_2\ \le s_2 \le\ 4 - \frac{5}{3}x_2$$

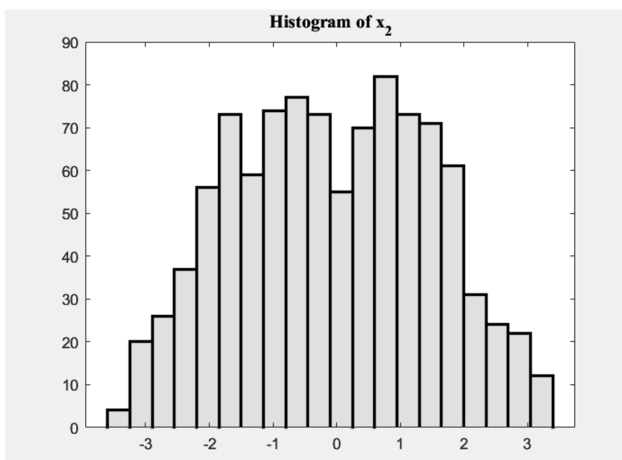
$$f_{X1}(x_1) = \frac{5}{24} \times \int_{-\infty}^{\infty} f_{s_2}(s_2)ds_2 = \frac{5}{24} \times \int_{-4-\frac{5}{3}x_2}^{4-\frac{5}{3}x_2} f_{s_2}(s_2)ds_2$$

$$= \frac{5}{24}\left(F_{S_2}\left(4 - \frac{5}{3}x_2\right) - F_{S_2}\left(-4 - \frac{5}{3}x_2\right)\right)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{5}{24}\left(\begin{cases} 0 & x_1 < -3.6 \\ \frac{5x_2+18}{12} & -3.6 \le x_1 \le -1.2 \\ 1 & x_1 > -1.2 \end{cases} - \begin{cases} 0 & x_2 < 1.2 \\ \frac{-5x_2-6}{12} & 1.2 \le x_1 \le 3.6 \\ 1 & x_1 > 3.6 \end{cases}\right)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{5}{24}\left(\begin{cases} 0 & x_1 < -3.6 \\ \frac{5x_2+18}{12} & -3.6 \le x_1 \le -1.2 \\ 1 & -1.2 < x_1 < 1.2 \\ \frac{-5x_2+18}{12} & 1.2 \le x_1 \le 3.6 \\ 0 & x_1 > 3.6 \end{cases}\right)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 < -3.6 \\ \frac{25x_2+90}{288} & -3.6 \le x_1 \le -1.2 \\ \frac{5}{24} & -1.2 < x_1 < 1.2 \\ \frac{-25x_2+90}{288} & 1.2 \le x_1 \le 3.6 \\ 0 & x_1 > 3.6 \end{cases}$$




شکل ۸. هیستوگرام مربوط به متغیر $X_2$

در این هیستوگرام نیز می‌توان مشاهده کرد که $x_2$ در بازه $[-1.2, 1.2]$ تقریبا ثابت است و درسمت چپ به صورت صعودی و با شیب مثبت است و قبل از 3.6- تقریبا صفر است، و در سمت راست با شیب منفی است و بعد از 3.6 به صفر می‌رسد. درنتجه هیستوگرام تقریبا با توزیع $x_2$ مطابقت دارد.

۶)

$$X = a_1S_1 + a_2S_2$$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \Pr\{\, X \le\ x\} = \Pr\{\, a_1S_1 + a_2S_2\ \le\ x\} = \Pr\left\{S_1 \le\ \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1}\ S_2\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left\{S_1 \le\ \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1}\ S_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_{s_1}\left\{\frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1}\ S_2\right\} f_{s_2}(s_2)ds_2
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم بازه منابع و توزیع دقیقشان را داریم،  می‌توان با انجام عکس محاسبات قسمت قبل، تنهای مجهولات که مربوط به ستون‌ها ماتریس مخلوط کننده هستند را به دست آورد و در نتیجه مسئله BSS را تنها با داشتن هیستوگرام و توزیع منابع حل کرد.

# بخش دوم

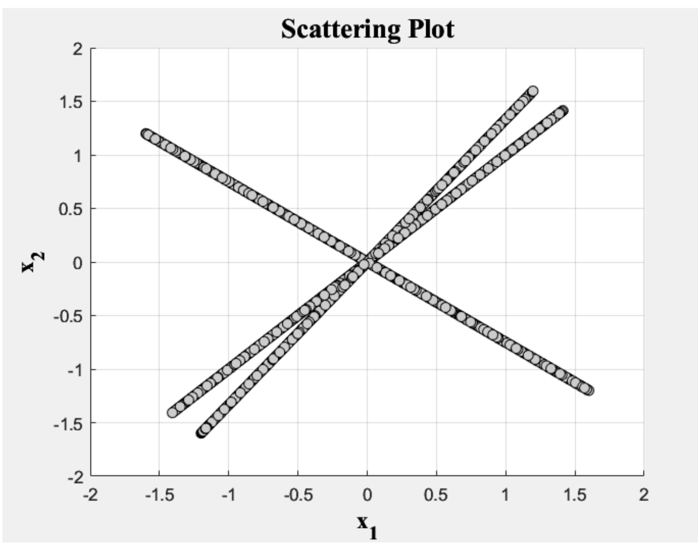
ابتدا با دستور unifrnd منبع $s_1$ و $s_2$ و $s_3$ در بازه $[-2,2]$ با اندازه $T \times 1$ و همچنین تابع مخلوط‌کننده را تعریف می‌کنیم.

چون در صورت سوال گفته شده است که فرض کنیم درهر لحظه فقط یک منبع روشن است، با استفاده دستور randi برای هر لحظه یک منبع را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. سپس آن منابع را به یک ماتریس sparse تبدیل می‌کنیم. این کار باعث می‌شود فقط عناصر غیرصفر و مکان آن‌ها دخیره شود و به کاهش مصرف حافظه کمک می‌کند.

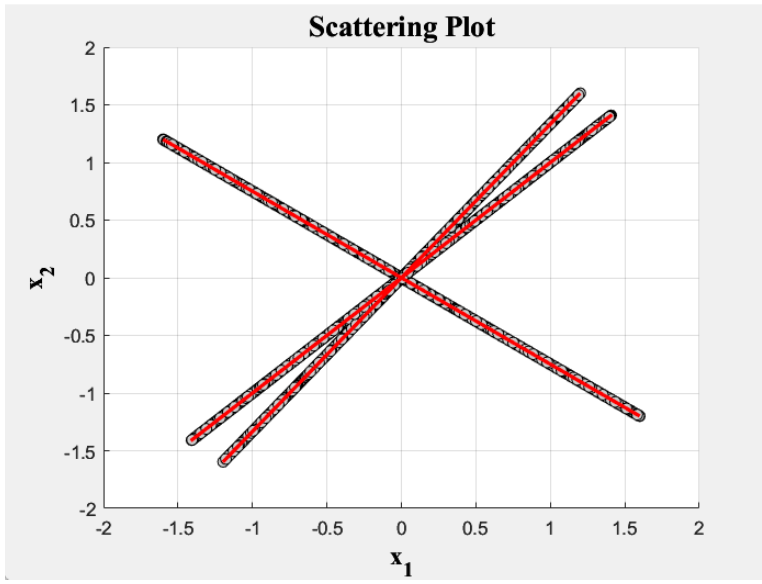
چون در هرلحظه فقط یک منبع روشن است، هرمشاهده فقط به یک منبع وابسته است و ضریبی از بردار مکانی آن منبع است، در نتیجه نمونه‌ها روی سه بردار هستند که این بردارها نشان‌دهنده بردارهای مکانی $a_1, a_2, a_3$ هستند.

۲)

برای تخمین بردار مکانی، با استفاده از مینمم و ماکسیمم $x_1$ و $x_2$ ابتدا و انتهای دوتا از بردارها را به دست می‌آوریم، بردار سوم نیز خطی با زاویه ۴۵ درجه است، در نتیجه مینمم و ماکسیمم $x_1$ و $x_2$ای را به دست می‌آوریم که با یکدیگر برابرند. در انتها نیز بردارهای به دست آمده را بر اندازه‌شان تقسیم کرده و بردارهای مکانی و در نهایت ماتریس مخلوط کننده تخمین زده می‌شود.




شکل ۹. نمودار پراکندگی $x_2$ بر حسب $x_1$




شکل ۱۰. بردار مکانی $\beta_1$ و $\beta_2$ و $\beta_3$

**Beta**

| | | |
|---|---|---|
| 0.6 | 0.70711 | 0.8 |
| 0.8 | 0.70711 | -0.6 |

شکل ۱۱. ماتریس مخلوط‌کننده تخمین زده شده

۳)

با توجه به اینکه هرمشاهده فقط به یک منبع وابسته است می‌توانیم بین مشاهدات و هریک از بردارهای مکانی $a_1, a_2, a_3$ کورولیشن بگیریم و هرکدام که بزرگتر بود به عنوان منبع در آن لحظه درنظر گرفته شود.

با پیاده‌سازی این روش میبینم که منابع به دست آمده منابعی که در ابتدا تعریف کرده‌ایم هستند و  به درستی استخراج شده‌اند.