به نام خالق ستارگان

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سوم درس جداسازی کور منابع (BSS)

دکتر سعید اخوان

نام و نام خانوادگی	سیده غزل موسوی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۰۰۲۵۹
مهلت ارسال پاسخ	**۱۴۰۳.۱۲.۲۲**

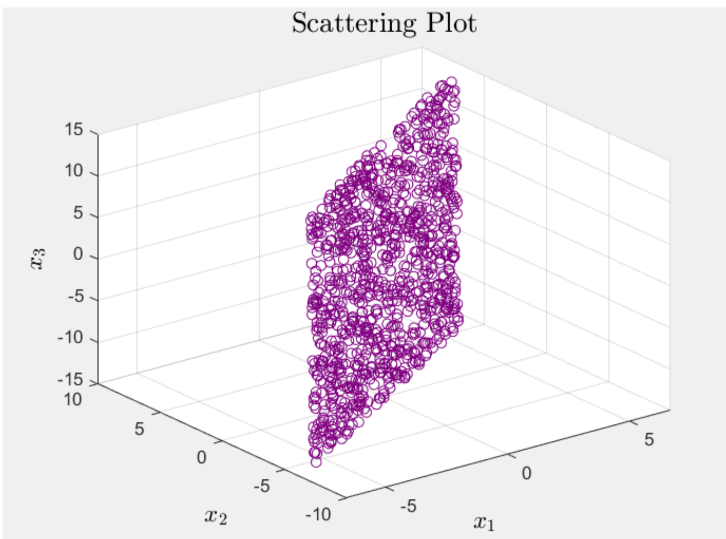
ابتدا با دستور unifrnd منبع s_1 و s_2 به ترتیب در بازه $[-3,3]$ و $[-2,2]$ با اندازه $T \times 1$ و همچنین تابع مخلوط‌کننده را تعریف می‌کنیم. توجه شود که منابع به صورت ماتریس ستونی تعریف شده‌اند ولی برای تشکیل ماتریس S از transposed ماتریس‌های منابع استفاده می‌کنیم.

طبق گفته سوال، ماتریس مخلوط‌کننده به صورت خطی و آنی است در نتیجه ماتریس مشاهدات از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\underline{X}_{3\times T} = \underline{A}_{3\times 2}.\underline{S}_{2\times T}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{با استفاده از معادله بالا}} \begin{cases} x_1 = s_1 - 2s_2 \\ x_2 = 2s_1 - s_2 \\ x_3 = 3s_1 - 2s_2 \end{cases}$$

آ) با استفاده از دستور scatter3، نمودار پراکندگی مشاهدات را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که مشاهدات تقریبا روی یک صفحه دوبعدی پخش شده‌اند. با توجه به اینکه مشاهدات ناشی از ترکیب خطی دومنبع هستند، انتظار می‌رفت که در یک صفحه دوبعدی پخش شوند.



شکل ۱. نمودار پراکندگی مشاهدات درفضای سه بعدی

همانطور که در درس مطرح شد هدف از تحلیل PCA یافتن پایه‌های یکه و متعامد است به‌گونه‌ای که این پایه‌ها به بهترین نحو ممکن داده‌ها را توصیف کند. سپس برای یافتن این پایه‌ها به این مسئله بهینه‌سازی رسیدیم که باید اندازه تصویر هریک از داده‌ها را روی آن بردار پایه ماکسیمم کنیم و می‌دانستیم که منابع uncorrelated هستند. در نهایت این مسئله بهینه‌سازی را با استفاده

از روش لاگرانژ حل کرده و به این نتیجه رسیدیم که ماتریس بردارهای ویژه و مقادیر ویژه با استفاده از ماتریس کورولیشین مشاهدات به دست می‌آید. در متلب با استفاده از دستور eig ماتریس بردارهای ویژه U و مقادیر ویژه D به دست آمد.

```
U =

    0.3547    0.9142    0.1961
    0.5026   -0.3633    0.7845
    0.7884   -0.1797   -0.5883
```

```
D =

   1.0e+04 *

    5.1958         0         0
         0    0.2094         0
         0         0   -0.0000
```

شکل ۲. ماتریس مقادیر و بردارهای ویژه

همانطور که مشاهده می‌شود یکی از مقادیر ویژه صفر است و این یعنی داده‌های ما در راستای آن بردار پایه پراکندگی ندارد.

ب)

باتوجه به توضیحات در قسمت قبل ما در نهایت به مسئله بهینه‌سازی زیر رسیدیم:

$$\begin{cases} f(u_1) = \operatorname{argmax}\left(\underline{u_1^T} R_x \underline{u_1}\right) \\ s.t \qquad \underline{u_1^T}\,\underline{u_1} = 1 \end{cases}$$

روش steepest descend:

ابتدا بردار u_1 را با اندازه 3×1 با مقادیر اولیه ۱ تعریف می‌کنیم و سپس در هرمرحله طبق رابطه زیر بردار u_1 را آپدیت می‌کنیم.

$$g = 2R_x \underline{u_1}$$

$$\underline{u_{1(k+1)}} = \underline{u_{1(k)}} + \mu \times 2R_x \underline{u_{1(k)}}$$

شرط توقف نیز زمانی است که مقدار تابع هدف در نقطه فعلی با نقطه قبلی به اندازه 0.0001 اختلاف داشته باشد. مقدار $\mu =$ 0.01 است. پس از هرآپدیت نیز اندازه بردار u_1 نرمال می‌شود.

برای بردارهای u_3 و u_2 نیز مشابه بالا عمل می‌کنیم با این تفاوت که شرط تعامد را نیز اعمال می‌کنیم و سپس نرمال می‌کنیم. برای متعامد شدن تصویر بردارها را بر روی بردار دیگر از خود بردار کم می‌کنیم سپس مقادیر ویژه نیز از رابطه $d_i = u_i^T R_x u_i$ به دست می‌آید.

```
Steepest Descent converged with mu = 0.01 after 4 iterations.
Steepest Descent converged with mu = 0.01 after 4 iterations.
Steepest Descent converged with mu = 0.01 after 2 iterations.
==================================================================
```

شکل ۳. همگراشدن مقادیر بردارهای ویژه

```
Us =

    0.3547    0.9142    0.1961
    0.5026   -0.3633    0.7845
    0.7884   -0.1797   -0.5883
```

```
Ds =

   1.0e+04 *

    5.1958         0         0
         0    0.2094         0
         0         0    0.0000
```

شکل ۴. ماتریس مقدار و بردار ویژه به دست آمده با روش steepest descend

روش Newton:

برای روش نیوتن آپدیت کردن به صورت زیر انجام می‌شود و مشابه روش قبلی شرط u_1 یکه بودن و شرط دو بردار پایه دیگر علاوه بر یکه بودن متعامد بودن بر دیگر بردارهای یکه نیز هست.

$$g = 2R_x\underline{u_1}$$

$$h = R_x\underline{u_1}$$

$$\underline{u_{1(k+1)}} = \underline{u_{1(k)}} + H^{-1} \times 2R_x\underline{u_{1(k)}}$$

```
Un =

    0.3421    0.9166    0.2069
    0.5076   -0.3655    0.7802
    0.7908   -0.1619   -0.5903
```

```
Dn =

   1.0e+04 *

    5.1949         0         0
         0    0.2103         0
         0         0    0.0000
```

شکل ۵. ماتریس مقادیر و بردارهای ویژه با استفاده از روش Newton

ماتریس U و D به دست آمده از هردو روش بسیار به جواب قسمت آ نزدیک و مشابه است منتها روش steepest descend خیلی دقیق‌تر به دست آمده است.

وقتی از inv استفاده می‌کردیم به مقدار خاطر نزدیک صفر وارنینگ می‌داد و از دستور pinv استفاده کردیم منتها مقادیر خطای بیشتری نسبت به بخش الف دارند.

```
Un =

   -0.8137    0.1961    0.5472
    0.4650    0.7845    0.4104
    0.3487   -0.5884    0.7295
```

```
Dn =

   1.0e+04 *

    0.4508         0         0
         0    0.0000         0
         0         0    4.9545
```

شکل ۶. ماتریس مقادیر و بردارهای ویژه با روش نیوتن و استفاده pinv

ج)

* همانطور که دربخش اول گفته شد مشاهدات در یک صفحه دو بعدی پخش شده است و در راستای بردار u_3 مقدار ویژه صفر شده است به این معنی که واریانس تصویر مشاهدات در راستای u_3 صفر است و در آن جهت پراکندگی ندارد.

*در واقع مشاهدات ترکیب خطی از بردار مکانی هستند و هر ستون ماتریس مخلوط کننده اثر هر منبع را روی ماتریس مشاهدات نشان می‌دهد و از آنجا که تنها دو منبع داشتیم انتظار می‌رفت که مشاهدات فقط در دو راستا پخش شده باشد و راستای سوم پراکندگی نداشته باشند که به این معنی است که بردار u_3 بر ماتریس A یا در واقع هر ستون آن که a_2 و a_1 هستند عمود هستند.

```
u_3A =

   1.0e-14 *

    0.0416   -0.1499
```

شکل ۷. تعامد بین u_3 و ماتریس مخلوط کننده

همانطور که در صورت سوال گفته شد ضرب داخلی A و u_3 چون عمود هستند صفر است که تصویر بالا نیز این موضوع را تایید می‌کند.

*

```
C =

    3.7251   -2.7888
   -0.3516   -1.1056
```

شکل ۸. ماتریس C

د) برای اینکه داده‌ها را سفید کنیم:

۱) باید داده‌ها را uncorrelated کنیم.

۲) و واریانس داده‌ها را ۱ کنیم.

$$B = D^{-0.5}A$$

$$Z = D^{-\frac{1}{2}}U^T X$$

$$R_z = ZZ^T = D^{-\frac{1}{2}}U^T XX^T UD^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}U^T R_x UD^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}U^T UDU^T UD^{-\frac{1}{2}} = I$$

ماتریسی که بتواند درفضای جدید داده‌ها را سفید کند ماتریس B است و درنهایت کورولیشین مشاهدات به دست آمده از ماتریس B ماتریسی همانی است که نشان می‌دهد واریانس داده‌ها ۱ شده است.

```
B =

    0.0016    0.0022    0.0035
    0.0200   -0.0079   -0.0039
```

شکل ۹. ماتریس B

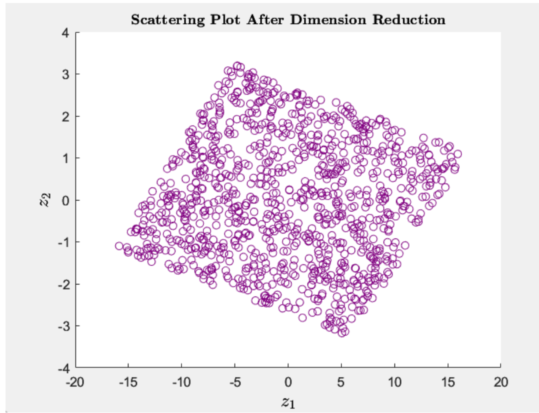
```
Rz =

    1.0000   -0.0000
   -0.0000    1.0000
```

شکل ۱۰. کورولیشین ماتریس مشاهدات سفیدشده

ه) برای اینکه بعد داده‌ها اولیه را کاهش دهیم به طوری که ۹۰ درصد انرژی کل مشاهدات حفظ شود باید ببینیم چندتا از مقادیر ویژه را نگه داریم تا نسبت مجموع آن‌ها به مجموع کل مقادیر ویژه بیشتر از ۹۰ درصد شود. و از آنجا میفهمیم که تا چه ابعادی می‌توانیم کاهش دهیم. در اینجا حالت‌ها مختلف را بررسی می‌کنیم تا ببینیم تا چه ابعادی می‌توانیم کاهش دهیم.

اگر d_2 و d_1 را نگه داریم، ۱۰۰ درصد انرژی حفظ می‌شود.

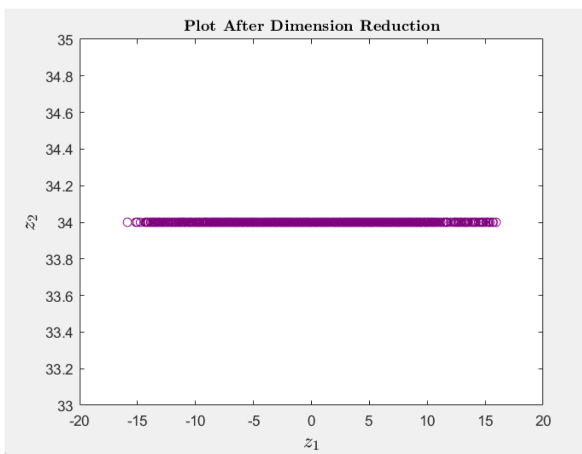
```
Energy retention ratio after 2D reduction: 100.00
```



شکل ۱۱. کاهش ابعاد به ۲ بعد و پراکندگی داده‌ها

اگر به یک بعد کاهش دهیم و تنها d_1 را نگه داریم:

```
Energy retention ratio after 1D reduction: 96.13
```



شکل ۱۲. نمودار پراکندگی بعد از کاهش ابعاد به یک بعد

در نتیجه می‌توان با حفظ حداقل انرژی ۹۰ درصد داده‌های اولیه را به ۱ و ۲بعد کاهش ابعاد داد.