

مقدمه:

هدف از این تمرین پیاده‌سازی تابع رگرسیون خطی برای ۲ متغیر، یا تعداد بیشتر است. ابتدا تابع هزینه را تعریف می‌کنیم، سپس به پیاده‌سازی تابع گرادیان کاهشی و در نهایت به تست داده‌های موجود می‌پردازیم.

۱. پیاده‌سازی تابع هزینه

برای این مقدار از rmse استفاده می‌کنیم که تعریف آن به صورت زیر است.

$$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(y_{pred} - y_{ref})^2}{N}}$$

۲. پیاده‌سازی تابع گرادیان کاهشی

در این تابع، قصد داریم مقدار تابع هزینه مینیمم شود. به این منظور، هر بار مقدار گرادیان در نقطه‌ای که روی تابع هزینه هستیم محاسبه شده، و آلفا برابر آن در خلاف جهت حرکت می‌کنیم تا به مقدار کمترین برسیم. مقدار آلفا در این تابع داده می‌شود و در هر مرحله در مقداری به نام شتاب (momentum) ضرب می‌شود. این روند تا جایی تکرار می‌شود که یکی از این اتفاقات بیفتد:

۱. تعداد حلقه‌های ورودی تمام شود.

۲. اختلاف هزینه از مقداری مانند ۰.۰۰۰۱ کمتر شود و عملاً بهبودی نداشته باشیم.

۳. مقدار هزینه به تعداد دفعات مشخصی زیاد شود؛ زیرا در این صورت داریم مقدار هزینه را زیاد

می‌کنیم.

از ریاضیات زیر در این تابع استفاده شده:

$$hypothesis = X.\theta$$

$$loss = hypothesis - y$$

$$Gradient = \frac{(x^T \cdot loss)}{n}$$

$$\theta = \theta - \alpha * Gradient$$

$$\alpha = \alpha * momentum$$

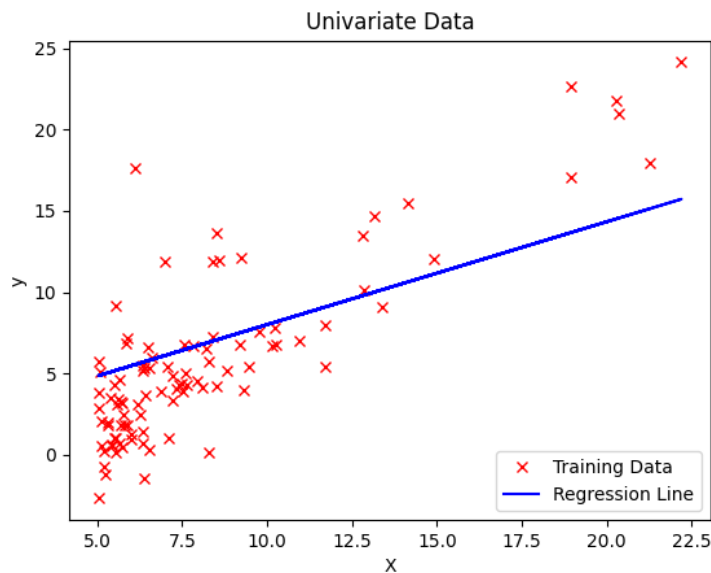
۳. آزمایش اول

تابع رگرسیون خطی با مقادیر اولیه‌ی زیر فراخوانی شده است

```
n_iter = 200  
alpha = 0.002  
momentum = 0.99  
stop_step = 5  
limit = 0.00001
```

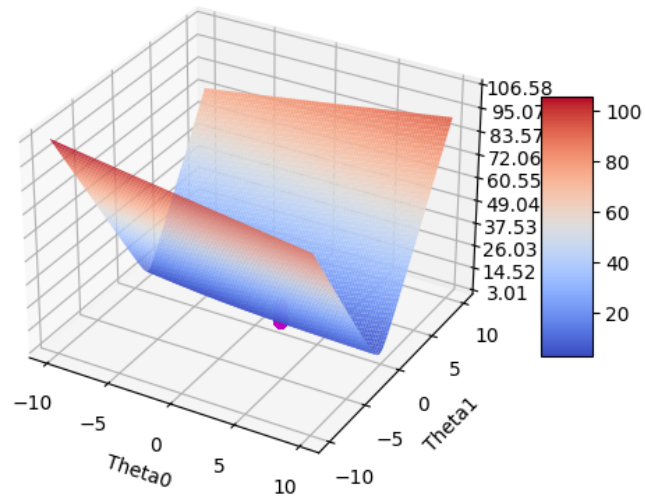
و خروجی آن به صورت زیر است.

```
Iteration: 1, Cost: 13.20483, alpha: 0.001980  
Iteration: 2, Cost: 11.23629, alpha: 0.001960  
Iteration: 3, Cost: 9.642029, alpha: 0.001941  
Iteration: 4, Cost: 8.357661, alpha: 0.001921  
...  
Iteration: 199, Cost: 3.824156, alpha: 0.000273  
Iteration: 200, Cost: 3.824082, alpha: 0.000271  
Iteration: 201, Cost: 3.824009, alpha: 0.000268  
Stop reason:  
Iterations finished.
```

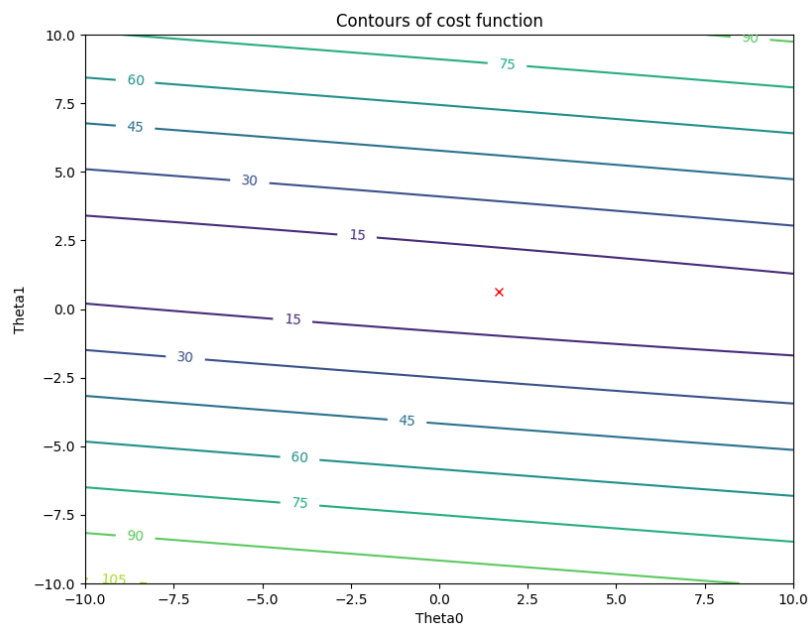


شکل ۱: نقاط و خط رگرسیون

Surface plot of the cost function



شکل ۲: تابع هزینه و روند کاهش هزینه



شکل ۳: کانتور تابع هزینه

۴. آزمایش دوم

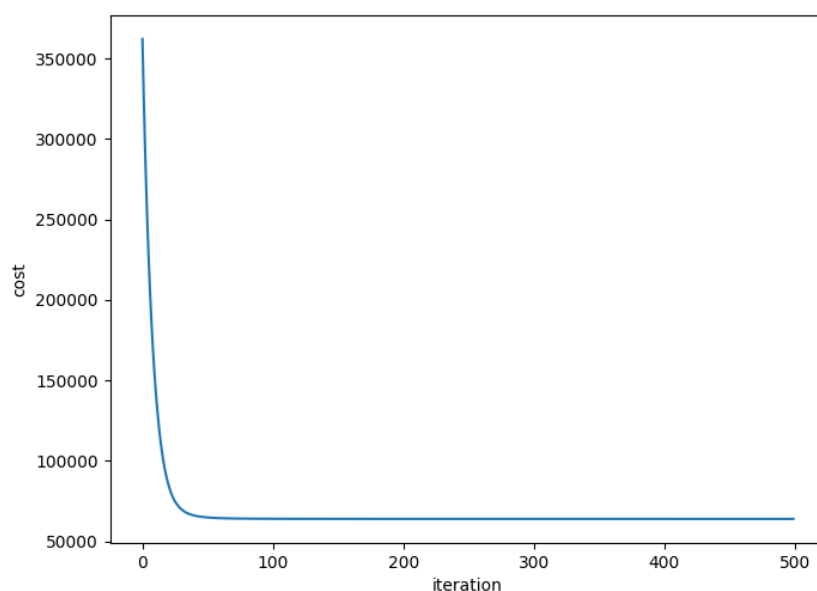
۱.۴. داده‌ی اولیه

در این بخش به جای دو بعد، در ابعاد بیشتری رگرسیون خطی را محاسبه می‌کنیم. در کد برنامه هیچ تغییری داده نشده و تنها تابع برای ماتریس بزرگتری فراخوانی شده است.

```
n_iter = 500  
alpha = 1  
momentum = 0.99  
stop_step = 5  
limit = 0.00001
```

خروجی آن به صورت زیر است:

```
Iteration: 1, Cost: 76313.765923, alpha: 0.077782  
Iteration: 2, Cost: 74812.681048, alpha: 0.077004  
Iteration: 3, Cost: 73511.085414, alpha: 0.076234  
Iteration: 4, Cost: 72381.933735, alpha: 0.075472  
Iteration: 5, Cost: 71401.674525, alpha: 0.074717  
...  
Iteration: 498, Cost: 63929.565507, alpha: 0.000677  
Iteration: 499, Cost: 63929.563486, alpha: 0.000670  
Iteration: 500, Cost: 63929.561485, alpha: 0.000664  
Stop reason:  
Iterations finished.
```



شکل ۴: کاهش هزینه برای ماتریس داده‌ی اولیه

$$\text{RMSE} = 48067.034592032694$$

تست روی داده‌ی holdout