R et la prévision des séries temporelles Chapitre 3 - Lissages exponentiels et modèles à espace d'états

Michel CARBON

Université Laval de Québec

13 mai 2019

Introduction

Les techniques de lissage exponentiel sont encore parmi les plus utilisées. Elles sont très faciles à mettre en oeuvre, et aisées à appréhender. De plus, il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup de données pour les utiliser.

Nous distinguerons essentiellement trois types de séries :

- (i) les séries localement constantes, à un bruit près
- (ii) les séries présentant une tendance localement linéaire
- (iii) les séries saisonnières, avec ou sans tendance

Le lissage exponentiel simple est particulièrement adapté à la situation (i), le lissage de type Holt au cas (ii), et le lissage de Winters à (iii).

On distingue également le cas additif du cas multiplicatif dans certains cas.

Lissage exponentiel simple

On considère maintenant une série temporelle sans tendance, ni saisonnalité : $X_1, ..., X_T$. Il s'agit d'un lisseur linéaire, noté S, et défini par récurrence par :

$$S(t) = S(t-1) + (1-\alpha)[X_t - S(t-1)] \quad , \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

ou encore :

$$S(t) = (1-\alpha)\, X_t + \alpha S(t-1) \quad , \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

où α est appelée la constante de lissage $(0 < \alpha < 1)$, à disposition du statisticien.

En itérant l'équation (1), il vient successivement :

$$
\begin{aligned}
S(t) &= (1-\alpha) X_t + \alpha \left[(1-\alpha) X_{t-1} + \alpha S(t-2) \right] \\
&= (1-\alpha) X_t + \alpha (1-\alpha) X_{t-1} + \alpha^2 S(t-2) \\
&= (1-\alpha) \sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j X_{t-j} + \alpha^T S(t-T)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

La valeur $\widehat{X}_{T+h}$, prévision de X_{T+h} (h=horizon de prévision) est donc donnée par :

$$\widehat{X}_{T+h} = S(T+h) = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j X_{T-j} \qquad (4)$$

en négligeant le dernier terme de (3).

Exemple

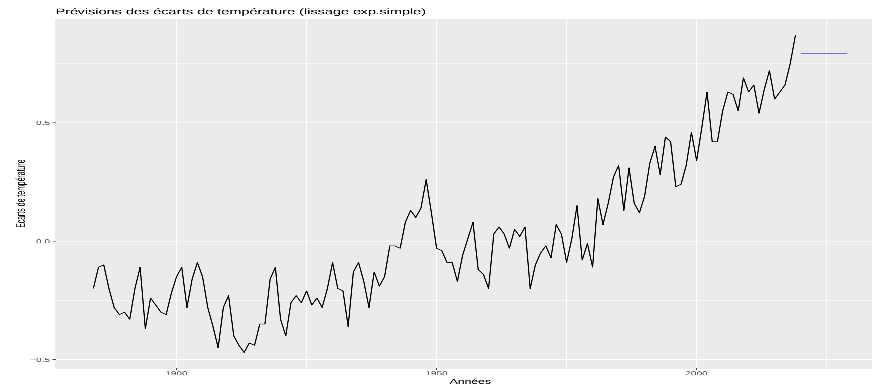


Figure 1: Lissage exponentiel simple des écarts annuels de température

Lissage exponentiel double

On suppose, bien sûr, de toujours avoir observé la série temporelle X_t pour $t = 1, 2, ..., T$.

Ce type de lissage, encore appelé lissage de Brown, est particulièrement adapté au cas où la série temporelle peut être ajustée localement par une droite quelconque au voisinage de T :

$$Y_t = \alpha + (t-T)\beta$$

Cela conduit à proposer comme prévision à l'horizon k :

$$\widehat{X}_{T+k} = \widehat{\alpha}(T) + k\widehat{\beta}(T) \ , \qquad (5)$$

où $\widehat{\alpha}(T)$ et $\widehat{\beta}(T)$ sont des constantes à estimer.

Exemple

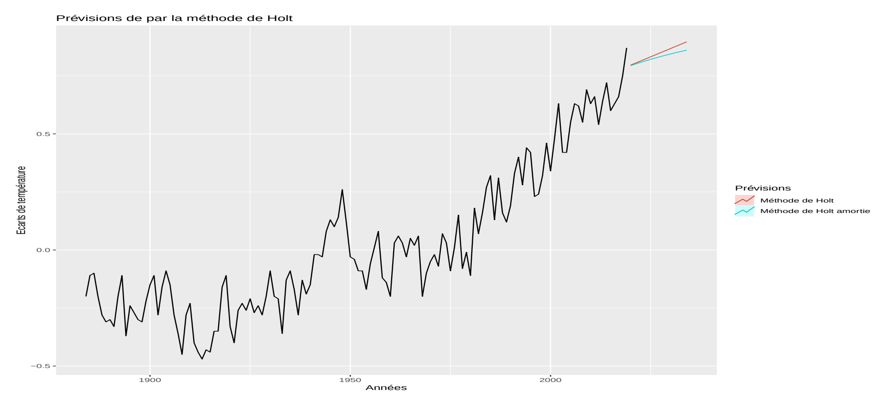


Figure 2: Lissage exponentiel double de la série températures moyennes annuelles

Méthode non saisonnière

La méthode de Holt Winters sans saisonnalité est également adaptée au cas où la série temporelle est localement ajustable à une droite d'équation :

$$y_t = a_1 + (t - T)\, a_2$$

Holt et Winters proposent les formules de mise à jour suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{a}_1(T) & = & (1-\alpha)\, X_T + \alpha \left[\widehat{a}_1(T-1) + \widehat{a}_2(T-1) \right] \quad ; \\ \widehat{a}_2(T) & = & (1-\gamma) \left[\widehat{a}_1(T) - \widehat{a}_1(T-1) \right] + \gamma \widehat{a}_2(T-1) \quad ; \end{array} \right. \tag{6}$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \gamma < 1$.

La prévision est bien sûr :

$$\widehat{X}_{T+h} = \widehat{a}_1(T) + h\, \widehat{a}_2(T) \tag{7}$$

Cette méthode est plus flexible que la méthode du lissage exponentiel double, car elle fait intervenir deux constantes : α et γ, au lieu d'une.

Méthode saisonnière additive

Elle s'applique quand la série peut être approchée localement, au voisinage de T, par :

$$a_1 + a_2(t - T) + S_t$$

(où S_t est la composante saisonnière).

Exemple

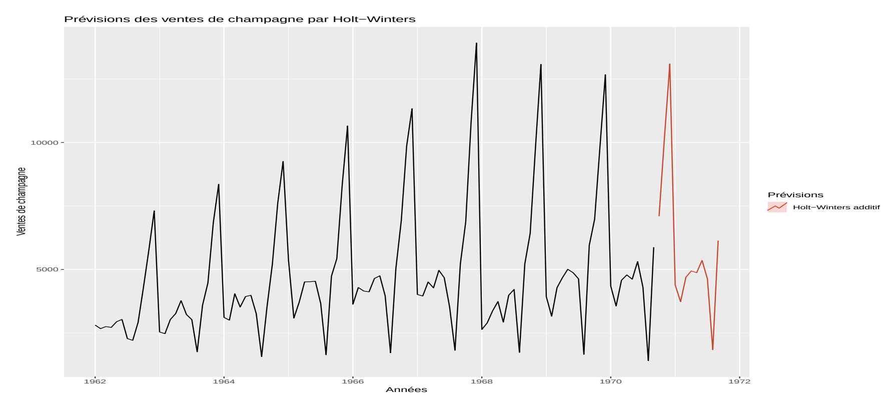


Figure 3: Série champagne et lissage Holt-Winters saisonnier

Méthode saisonnière multiplicative

Elle s'applique quand, localement, au voisinage de T, la série peut être approchée par :

$$[a_1 + (t - T)\,a_2]\,S_t$$

Exemple

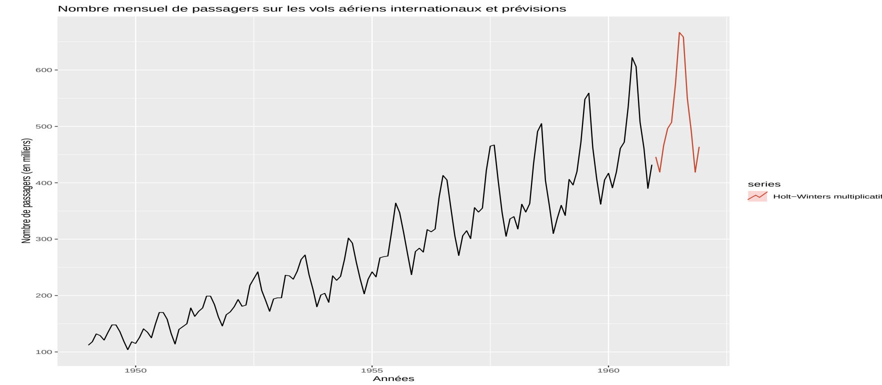


Figure 4: Méthode Holt-Winters saisonnière multiplicative pour Airline

Modèles à espace d'états

1. Les méthodes de lissage exponentiel fournissent des algorithmes permettant de calculer des prévisions successives.
2. Les modèles à espace d'états génèrent aussi des prévisions, mais également des intervalles de prévisions.

   Un processus stochastique est introduit pour modéliser la loi des prévisions.

Modèles à espace d'états - suite

Chaque modèle a une équation d'observation et une équation d'états, une pour chaque état (niveau, tendance, saisonnalité). C'est un modèle dit à espace d'états.

Il ya 18 modèles pour chaque méthode (dont 2 modèles pour chaque méthode suivant que l'erreur est additive ou multiplicative).

Erreur={A,M}

Tendance={N,A,A_a}

Saisonnalité={N,A,M}

Modèle pour le lissage exponentiel simple ou ets(A,N,N)

$$\begin{cases} \text{Équation de prévision :} & \hat{X}_{T+h\,|\,T} = l_T \\ \text{Équation d'états :} & l_T = \alpha X_T + (1-\alpha) l_{T-1} \end{cases}$$

L'erreur de prévision est :

$$e_T = X_T - \hat{X}_{T\,|\,T-1} = X_T - l_{T-1}$$

D'où :

$$\begin{cases} X_T = l_T + e_T & \text{(équation d'observations)} \\ l_T = l_{T-1} + \alpha(X_T - l_{T-1}) = l_{T-1} + \alpha e_T & \text{(équation d'états)} \end{cases}$$

On supposera que $e_T = \varepsilon_T \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Modèle pour le lissage de Holt-Winters additif ou ets(A,A,A)

$$\begin{aligned} \text{Équation de prévisions :} \quad \hat{X}_{T+h\,|\,T} &= l_T + hb_T + S_{T+h-m(k+1)} \\ \text{Équation d'observation :} \quad X_T &= l_{T-1} + b_{T-1} + S_{T-m} + \varepsilon_T \\ \text{Équations d'états :} \quad l_T &= l_{T-1} + b_{T-1} + \alpha\varepsilon_T \\ b_T &= b_{T-1} + \beta\varepsilon_T \\ S_T &= S_{T-m} + \gamma\varepsilon_T \end{aligned}$$

L'erreur de prévision est : $\varepsilon_T = X_T - \hat{X}_{T\,|\,T-1}$

$k =$ partie entière de $(h-1)/m$ (où m est la saison).

La commande ets

ets est l'acronyme de "Erreur, Tendance, Saisonnalité".
La commande "R" nommée ets est automatisée et donne d'excellents résultats.

Elle permet de choisir entre différents modèles de lissage exponentiel basés sur des modèles à espace d'états.

Le critère de choix entre les différents modèles est essentiellement fait via des critères d'information.

La commande ets - suite

Cette démarche de sélection consiste à minimiser l'un des critères suivants :

L'AIC défini par : $AIC = -2\ln(L) + 2k$ où L est la vraisemblance du modèle considéré et k est égal au nombre de paramères à estimer et du nombre d'états initiaux du modèle, incluant la variance des résidus.

L'AIC$_c$ corrigé défini par : $AIC_c = AIC + \dfrac{k(k+1)}{T-k-1}$.

Le BIC défini : $BIC = AIC + k(\ln T - 1)$.

La commande ets - suite

	Composante saisonnière		
	N	A	M
Tendance	sans	additive	multiplicative
N (sans)	N,N	N,A	N,M
A (additif)	A,N	A,A	A,M
A_a (additif amorti)	A_a,N	A_a,A	A_a,M

La commande ets - suite

Par exemple :

(N,N) : lissage exponentiel simple

(A,N) : méthode linéaire de Holt

(A,A) : méthode additive de Holt-Winters

(A,M) : méthode multiplicative de Holt-Winters

(A_a,M) : méthode multiplicative de Holt-Winters amortie

La commande ets - suite

Les états initiaux sont sélectionnés de manière heuristique.

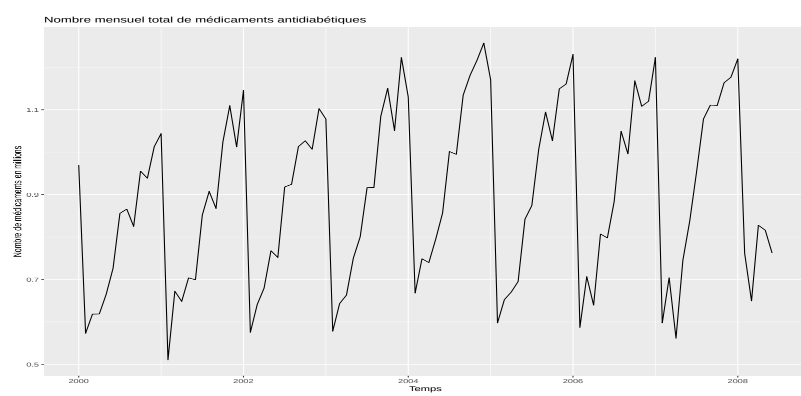
Les paramètres de lissage sont estimés en utilisant le maximum de vraisemblance.

La meilleure méthode est sélectionnée via le critère AIC_c.

Les prévisions sont obtenues en utilisant la meilleure méthode retenue.

Exemple 1

Série sur la vente de médicaments antidiabétiques.



Exemple 1 - suite

On peut tenter un modèle de type Holt-Winters additif, dont voici le code :

```
ets(diab1,model="AAA")%>% forecast(h=24)%>% autoplot()+
ggtitle("Nombre mensuel total de médicaments antidiabétiques")+
  xlab("Temps")+
  ylab("Nombre de médicaments en millions")
```


Exemple 1 - suite

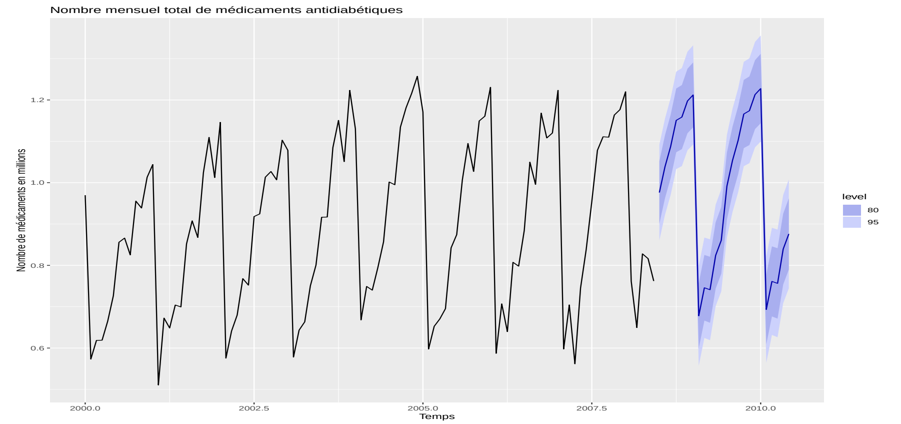


Figure 5: Ventes de médicaments antidiabétiques et prévisions par Holt-Winters additif

Exemple 1 - suite

On peut être tenté de laisser la commande ets de choisir un modèle lui-même. Voici le code :

```
ets(diab1,model="ZZZ")%>% forecast(h=24)%>% autoplot()+
ggtitle("Nombre mensuel total de médicaments antidiabétiques")+
  xlab("Temps")+
  ylab("Nombre de médicaments en millions")
```

Le modèle sélectionné est : ets(M,N,M)

Exemple 1 - suite

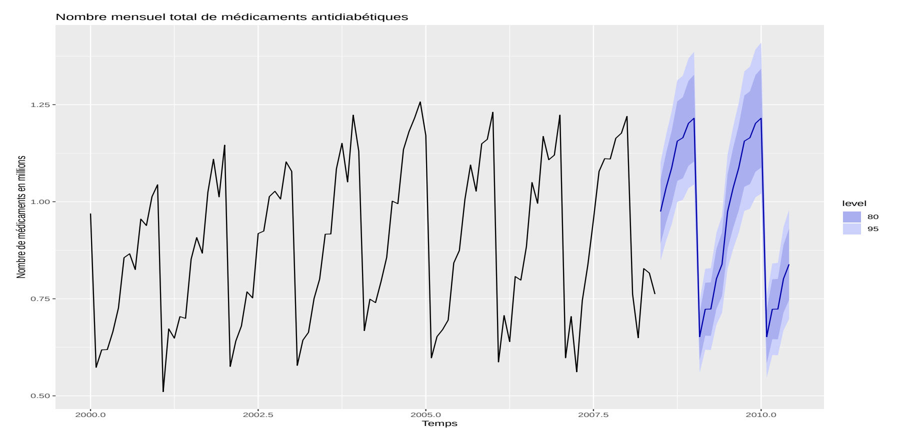


Figure 6: Ventes de médicaments antidiabétiques et prévisions par ETS(M,N,M)

Exemple 1 - suite

On peut comparer les deux approches.

```
> diab %>% ets(model="AAA") %>% accuracy()
                     ME       RMSE        MAE        MPE
Training set   0.001149689 0.05417285  0.04436907 -0.1506682
  MAPE      MASE     ACF1
5.27636  0.7167734 0.025262
```

```
> diab %>% ets() %>% accuracy()
                     ME      RMSE        MAE        MPE
Training set 0.009300434 0.0515159 0.0423964 0.6525751
  MAPE       MASE       ACF1
4.900056  0.6849053 -0.1668753
```


Exercice

À vous !

Reprendre la série "lait" de l'exercice du chapitre 2.

1. Utilisez la commande "ets" pour prévoir à horizon 12 la série "lait". Faites un graphique.
2. Reprendre la série "lait.train" pour faire des prévisions sur une année via l'approche ets. Faites un graphique illustratif pour comparer les prévisions et le réalisé a posteriori.
3. Comparez les pertinences des prévisions faites via "snaïve" et via "ets".