1. $T(n) = 25T(\frac{n}{5}) + n^2$

Решение:
$a = 25,\ b = 5,\ f(n) = n^2$.
c $= \log_b a = \log_5 25 = 2$
Получим, что $f(n) = \Theta(n^c) = \Theta(n^2)$ тогда применяем 3 случай Мастер-теоремы:
T(n) $= \Theta(n^2 \log n)$.
Ответ: $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

2. $T(n) = 16T(\frac{n}{2}) + n^3$

Решение:
$a = 16,\ b = 2,\ f(n) = n^3$.
c $= \log_b a = \log_2 16 = 4$
Получим, что $\exists\epsilon\ f(n) = O(n^{(c-\epsilon)})) = O(n^{(4-\epsilon)})$ тогда применяем 1 случай Мастер-теоремы:
T(n) $= \Theta(n^4)$.
Ответ: $T(n) = \Theta(n^4)$.

3. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^3$

Решение:
$a = 9,\ b = 3,\ f(n) = n^3$.
c $= \log_b a = \log_3 9 = 2$
Получим, что $\exists\epsilon\ f(n) = \Omega(n^{(c+\epsilon)})) = \Omega(n^{(2+\epsilon)})$ тогда применяем 2 случай Мастер-теоремы:
Проверка условия регулярности: $\exists k = 0.5$
$9 * f(\frac{n}{3}) < k * f(n)$
$\frac{n^3}{3} < \frac{n^3}{2}$
Значит усорвия регулярности выполняются и получаем:
T(n) $= \Theta(n^3)$
Ответ: $T(n) = \Theta(n^3)$.

4. $T(n) = T(n-1) + 3n$

Решение:
Видно, что здесь нельзя применить Мастер-теорему из-за того, что T(n) не подходит по общему виду функции для применения Мастер-теоремы, т.е. $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

Поэтому просто руками распишем рекурсию для оценки асимптотики T(n):

$$T(n) = T(n-1)+3n = T(n-2)+3n+3(n-1) = T(n-3)+3n+3(n-1)+3(n-2) = T(0)+3\sum_{k=1}^{n} k = T(0)+\frac{3}{2}n(n+1).$$

И так как T(0) является просто константой, а сумма стремиться к n^2 при $n- > \infty$, то получим асимптотическую оценку T(n)

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Ответ: $T(n) = \Theta(n^2)$.

5. $T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n$

Решение:
Видно, что здесь нельзя применить Мастер-теорему из-за того, что T(n) не подходит по общему виду функции для применения Мастер-теоремы, т.е. $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

Поэтому просто руками распишем рекурсию для оценки асимптотики T(n):
$T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n = T(\frac{n}{16}) + T(\frac{3n}{16}) + \frac{n}{4} + T(\frac{3n}{16}) + T(\frac{9n}{16}) + \frac{3n}{4} + n =$
$= T(\frac{n}{16}) + 2T(\frac{3n}{16}) + T(\frac{9n}{16}) + 2n =$
$= T(\frac{n}{64}) + T(\frac{3n}{64}) + \frac{n}{16} + 2(T(\frac{3n}{64}) + T(\frac{9n}{64}) + \frac{3n}{16}) + T(\frac{9n}{64}) + T(\frac{27n}{64}) + (\frac{9n}{16}) + 2n$

Расписанный вид рекурсии помогает понять, что на каждом шаге нашей рекурсии мы всегда делаем n операций и продолжаем ветвление. Значит на каждом шаге асимптотическая оценка функции $T(n) = \Theta(n)$. А количество шагов оценивается $\log_{\frac{4}{3}}$, так как под знаком θ это будет самый большой log, так как на каждом шаге мы уменьшаем n в $\frac{1}{4}$ или $\frac{3}{4}$.

Тогда асимптотическая сложность T(n) равна:

$$T(n) = \Theta(n \log_{\frac{4}{3}} n) = \Theta(n \log n).$$

Ответ: $T(n) = \Theta(n \log n)$.