

Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)”
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)



Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

ОТЧЁТ по учебной практике за 1 семестр 2020—2021 гг.

Руководитель практики, ст. преп. кафедры ФН1	_____	Кравченко О.В.
	(подпись)	
студент группы ФН1–11	_____	Шумский И. С.
	(подпись)	

Москва,
2020 г.

Содержание

1	Цели и задачи практики	3
1.1	Цели	3
1.2	Задачи	3
1.3	Индивидуальное задание	3
2	Отчёт	4
3	Индивидуальное задание	5
3.1	Пределы и непрерывность.	5
	Список литературы	10

1 Цели и задачи практики

1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

1.2 Задачи

1. Знакомство с программными средствами, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.
2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.
3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе вёрстки \LaTeX .
2. Изучить возможности системы контроля версий `Git`.
3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе \LaTeX . Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива `TeXLive` и оболочки `TeXStudio`.
4. Оформить в системе \LaTeX типовые расчёты по курсу математического анализа согласно своему варианту.
5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе `GitHub` и загрузить исходные `tex`-файлы и результат компиляции в формате `pdf`.

2 Отчёт

Актуальность темы продиктована необходимостью владеть системой вёрстки L^AT_EX и средой вёрстки TeXStudio для отображения текста, формул и графиков. Полученные в ходе практики навыки могут быть применены при написании курсовых проектов и дипломной работы, а также в дальнейшей профессиональной деятельности.

Система вёрстки L^AT_EX содержит большое количество инструментов (пакетов), упрощающих отображение информации в различных сферах инженерной и научной деятельности.

3 Индивидуальное задание

3.1 Пределы и непрерывность.

Задача № 1.

Условие. Дана последовательность $\{a_n\} = \frac{1+3n}{5-n}$ и число $c = -3$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c,$$

а именно, для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найти наименьшее натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - c| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Решение. Рассмотрим неравенство $a_n - c < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, учитывая выражение для a_n и значение c из условия варианта, получим

$$\left| \frac{1+3n}{5-n} + 3 \right| < \varepsilon.$$

Неравенство запишем в виде двойного неравенства и приведём выражение под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$-\varepsilon < \frac{16}{5-n} < \varepsilon.$$

Заметим, что левое неравенство не выполнено для любого номера $n \in \mathbb{N}$ поэтому, будем рассматривать правое неравенство и левое неравенство

$$y = f(x) \equiv \begin{cases} \frac{16}{5-n} < \varepsilon, \\ \frac{16}{5-n} > -\varepsilon. \end{cases}$$

Выполнив цепочку преобразований, решим неравенство, и учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, получим:

1. Для случая когда $5-n > 0$

$$\begin{aligned} \frac{16}{(5-n)} &< \varepsilon, \\ 5-n &> \frac{16}{\varepsilon}, \\ n &< \left[\frac{5\varepsilon - 16}{\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

2. Для случая когда $5-n < 0$

$$\begin{aligned} \frac{16}{(5-n)} &< -\varepsilon, \\ n-5 &> \frac{16}{\varepsilon}, \\ n &> \left[\frac{5\varepsilon + 16}{\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

где $[]$ — целая часть числа. Заполним таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	165	1605	16005

Проверка:

$$|a_{166} - c| = \frac{16}{161} < 0,1,$$

$$|a_{1606} - c| = \frac{16}{1601} < 0,01,$$

$$|a_{16006} - c| = \frac{16}{16001} < 0,001.$$

Задача № 2.

Условие. Вычислить пределы функций

$$(a): \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 5x - 6},$$

$$(б): \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt[6]{x+1} + \sqrt[3]{x^4+2x^3}}{\sqrt[3]{x^3+27x^4}},$$

$$(в): \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x+9} - 5},$$

$$(г): \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos(\pi x) \frac{1}{x \sin(\pi x)} \right),$$

$$(д): \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1 - \cos 2x} \right)^{\cos x + 1},$$

$$(е): \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln(8-x)}{\sin(\pi x)}.$$

Решение.

(a):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+6)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 4}{x+6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+4+4}{7} = \frac{9}{7}.$$

(б):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt[6]{x+1} + \sqrt[3]{x^4+2x^3}}{\sqrt[3]{x^3+27x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 27}} = \frac{1}{3}.$$

(в):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x+9} - 5} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x+9}+5)}{(x-16)(\sqrt[4]{x}+2)(\sqrt{x}+4)} = \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x+9}+5)}{(\sqrt[4]{x}+2)(\sqrt{x}+4)} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{5+5}{(2+2)(4+4)} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

(г):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos(\pi x) \frac{1}{x \sin(\pi x)} \right) &= \epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin(\pi x)} \right)^{(\cos(\pi x)-1)} = \\ \left| \sin(x) \sim \pi x, \cos(\pi x) - 1 \sim -\frac{\pi^2 x^2}{2} \right| &\epsilon \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 \pi} \frac{-\pi^2 x^2}{2} \right) = \epsilon^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(д):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1 - \cos 2x} \right)^{\cos x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(2x)}{2 \sin^2(x) \cos^2(2x)} \right)^{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \sin^2(x) \cos^2(x)}{2 \sin^2(x) \cos^2(2x)} \right)^{\cos x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cos^2(x)}{\cos^2(2x)} \right)^{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{1} \right)^{1+1} = 4\end{aligned}$$

(е):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln(8-x)}{\sin(\pi x)} &= \left| \begin{array}{l} t = x - 7 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| \frac{\ln(8-x) = \ln(1-t)}{\sin(\pi x) = -\sin(\pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{-\sin(\pi t)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \ln(1-t) \sim -t \\ -\sin(\pi t) \sim -\pi t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{-\pi t} = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Задача № 3.

Условие.

(а): Показать, что данные функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента.

(б): Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида $C(x-x_0)^\alpha$ при $x \rightarrow x_0$ или Cx^α при $x \rightarrow \infty$, указать их порядки малости (роста).

(в): Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$ при указанном стремлении.

№ варианта	функции $f(x)$ и $g(x)$	стремление
27	$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\ln(x)}$	$x \rightarrow 1$

Решение.

(а): Покажем, что $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\ln(x)} = 0\end{aligned}$$

(б): Так как $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции, то эквивалентными им будут функции вида Cx^α при $x \rightarrow 1$. Найдём эквивалентную для $f(x)$ из условия

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = ,$$

где C — некоторая константа. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(x-1)^\alpha} = \left| \begin{array}{l} x-1 = t, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t+1} - 1}{t^\alpha} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{t+1} - 1 \sim \frac{1}{3}t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}t}{t^\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ последний предел равен $\frac{1}{3}$, откуда $C = \frac{1}{3}$ и

$$f(x) \sim \frac{1}{3}(x-1) \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Аналогично, рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\ln(x)}}{(x-1)^\alpha} = \left| \begin{array}{l} x-1 = t, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\ln(t+1)}}{t^\alpha} = \left| \begin{array}{l} \ln(t+1) \sim t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t}}{t^\alpha}.$$

При $\alpha = \frac{1}{3}$ последний предел равен 1, откуда $C = 1$ и

$$g(x) \sim (x-1)^{\frac{1}{3}} \text{ при } x \rightarrow 1.$$

(в): Для сравнения функций $f(x)$ и $g(x)$ рассмотрим предел их отношения при указанном стремлении

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Применим эквивалентности, определенные в пункте (б), получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}(x-1)}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Отсюда, $f(x)$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $g(x)$.

Задача № 4.

Условие.

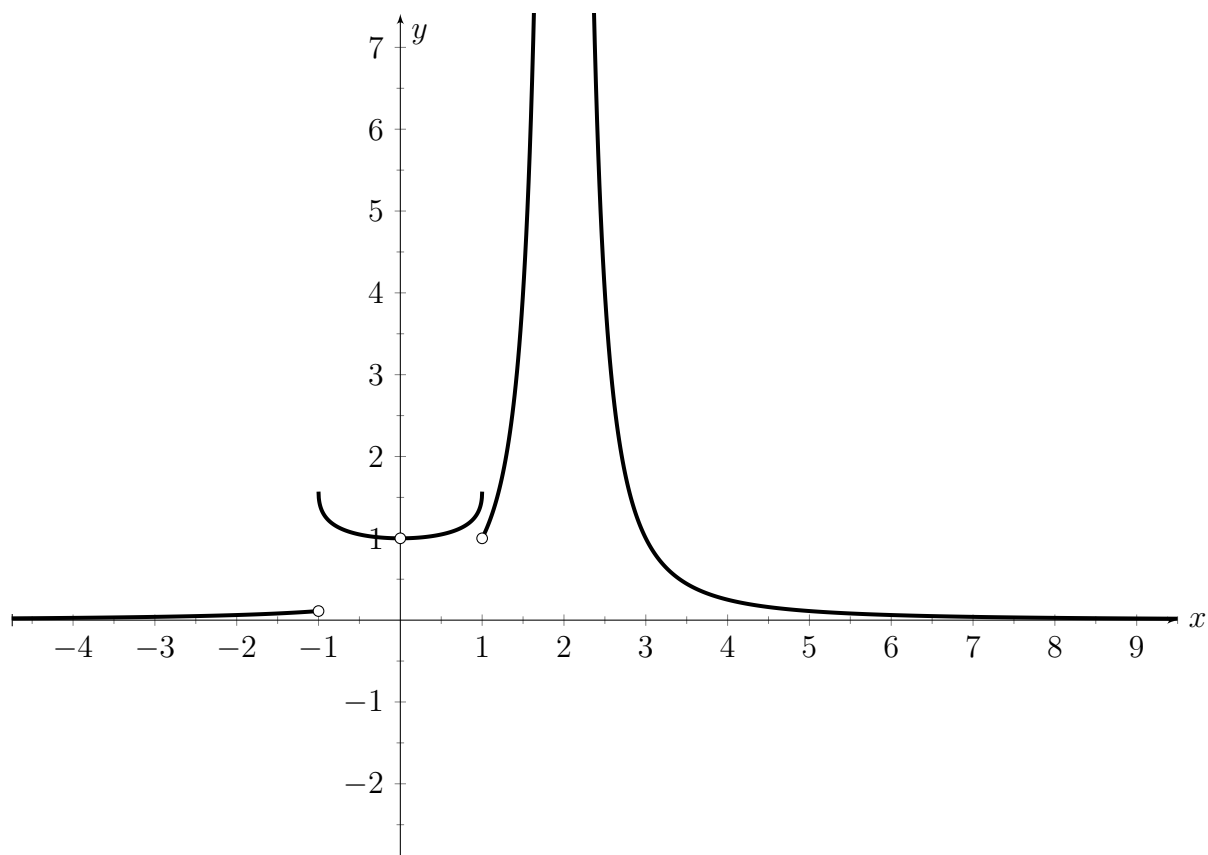
Найти точки разрыва функции

$$y = f(x) \equiv \begin{cases} \frac{\arcsin(x)}{x}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

и определить их характер. Построить фрагменты графика функции в окрестности каждой точки разрыва.

Решение. Особыми точками являются точки $x = 0, 2, 1, -1$. Рассмотрим односторонние пределы в окрестности каждой из особых точек

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\arcsin(x)}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{(x-2)^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{(x-2)^2} &= +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{(x-2)^2} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{(x-2)^2} &= \frac{1}{9}, & \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Отсюда, точка $x = 0$ — точка устранимого разрыва 1-го рода, точка $x = 2$ — точка неустранимого разрыва 2-го рода, точка $x = 1$ — точка неустранимого разрыва 1-го рода, точка $x = -1$ — точка неустранимого разрыва 1-го рода.

Список литературы

- [1] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе \LaTeX , 2003 с.
- [2] Котельников Игорь А., Чеботаев Платон Э \LaTeX 2 е по-русски.
- [3] Е.М. Балдин \LaTeX , GNU/Linux и русский стиль.