SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 06 -2023

MÔN THI: TOÁN

Thời gian : 120 phút

Bài 1. *(2,0 điểm)*

a) Tính $A=\sqrt{4}+\sqrt{20}-\sqrt{5}-2$

Cách tư duy :

Rút gọn số trong căn

Ta có $A=\sqrt{4}+\sqrt{20}-\sqrt{5}-2$

$$=\sqrt{2^2}+\sqrt{2^2.5}-\sqrt{5}-2$$

$$=2+2\sqrt{5}-\sqrt{5}-2$$

$$=(2-2)+\left(2\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)$$

$$=\sqrt{5}$$

b) Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

Rút gọn biểu thức B và so sánh giá trị của B với 1

Cách tư duy :

Rút gọn biểu thức trong dấu () trước.

Với $x>0$ và $x\neq 1$, ta có:

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right].\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

Để so sánh B với 1 thì phân tích $B = 1 + \cdots$ và xem nó > 1 or < 1

Ta có $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=1+\frac{1}{\sqrt{x}}>1$

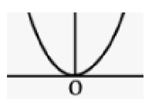
Vậy với $x>0$ và $x\neq 1$ thì $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}>1$.

Bài 2. *(1,5 điểm)*

Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P)

Cách tư duy :

Vì $y = ax^2$ có $a = \frac{1}{2} > 0$ nên đồ thị là 

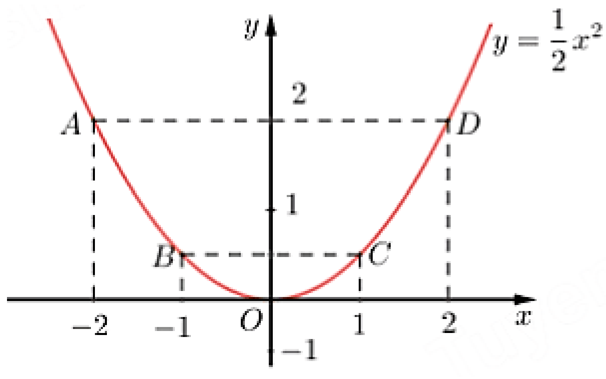
Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ là parabol có bề lõm hướng lên phía trên.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vậy parabol $y=\frac{1}{2}x^2$ đi qua các điểm $O(0;\,0)$, $A(-2;\,2)$, $B\left(-1;\,\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-1;\,\frac{1}{2}\right)$, $D(-2;\,2)$.

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ như sau:



b) Đường thẳng $y=-x+b$ (với $b>0$) lần lượt cắt các tia Ox, Oy tại E, F. Chứng minh rằng tam giác OEF vuông cân và tìm b để tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là một điểm thuộc (P), với O là gốc tọa độ.

Cách tư duy :

Trước tiên, vẽ đường thẳng $y=-x+b$ (với $b>0$)

Muốn chứng minh $\triangle OEF$ là tam giác vuông cân thì cần chứng minh $OE=OF$

Từ đó suy ra tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle OEF$ là trung điểm của EF

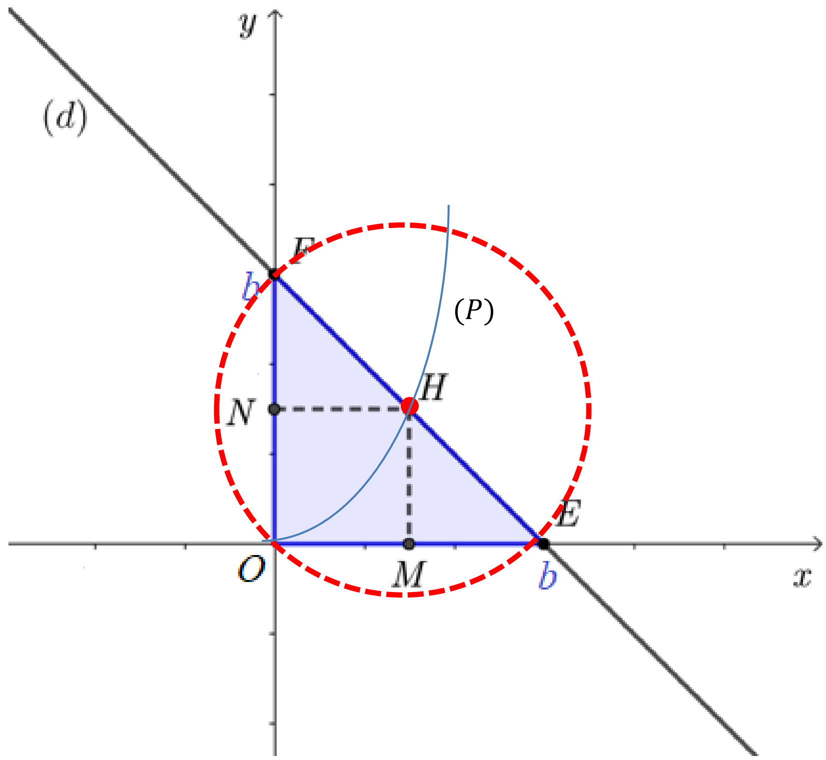
Từ điều kiện (tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle OEF$ là một điểm thuộc (P), ta tìm được giá trị b

Cho $y=0\Rightarrow -x+b=0\Leftrightarrow x=b$

Suy ra đường thẳng $y=-x+b$ cắt Ox tại $E(b;\,0)$.

Cho $x=0\Rightarrow y=0+b=b$

Suy ra đường thẳng $y=-x+b$ cắt Oy tại $F(0;\,b)$.



Xét ΔOEF có:

• $OE \perp OF$ (do $Ox \perp Oy$)

• $OE = OF = b$ (do $b > 0$)

Do đó $\triangle OEF$ vuông cân tại O

Khi đó, tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OEF$ là trung điểm của cạnh huyền EF.

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOEF là H.

Vẽ $HM \perp Ox$

Vì $OF \perp Ox$ suy ra $HM // OF$ (từ vuông góc đến song song).

Mà H là trung điểm của EF nên M là trung điểm của OE (theo tính chất đường trung bình của tam giác).

Do đó HM là đường trung bình của tam giác OEF suy ra $HM = \frac{1}{2}OF = \frac{b}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta tính được $HN = \frac{b}{2}$.

Do đó tọa độ điểm $H\left(\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right)$.

Để tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là một điểm thuộc (P) khi và chỉ khi $H\left(\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right)\in(P)$ và vì $y=\frac{1}{2}x^2$ nên

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{2}=\frac{b^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow b^2-4b=0$$

$$\Leftrightarrow b(b-4)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b-4=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\text{ (KTM)}\\b=4\text{ (TM)}\end{array}\right.$$

Theo điều kiện đề bài, $b>0$ nên $b=0$ không thỏa mãn.

Vậy $b=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

a) Tổng của hai số bằng 23. Hai lần số này lớn hơn số kia 1 đơn vị. Tìm hai số đó.

Cách tư duy :

Dựa theo điều kiện đề bài, lập hệ phương trình để tìm 2 ẩn số.

Gọi số thứ nhất là a, số thứ hai là b $(0<a,b<23)$.

Theo đề bài:

Tổng của hai số bằng 23, ta có phương trình: $a+b=23$;

Hai lần số này hơn số kia 1 đơn vị, ta có phương trình: $2a-b=1$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=23 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=23 \\ 3a=24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=23 \\ a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8\text{ (TM)} \\ b=15\text{ (TM)} \end{cases}.$$

Vậy số thứ nhất là 8, số thứ hai là 15.

b) Hai đội công nhân cùng dọn vệ sinh khu vực khán đài Lễ hội Pháo hoa quốc tế Đà Nẵng trong 1 giờ 12 phút thì xong. Nếu đội A làm trong 40 phút và đội B làm 2 giờ thì xong việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?

Cách tư duy :

Đề bài hỏi gì thì đặt ẩn số theo yêu cầu.

Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu =>

Gọi thời gian đội A làm riêng hoàn thành công việc là x (giờ)

Gọi thời gian đội B làm riêng hoàn thành công việc là y (giờ)

Từ điều kiện đề bài, lập hệ phương trình.

Điều kiện 1 : Hai đội làm xong 1 giờ 12 phút (quy đổi sang giờ)

Điều kiện 2 : Đội A làm trong 40 phút (quy đổi sang giờ) và đội B làm 2 giờ thì xong việc

Đổi 1 giờ 12 phút = $\frac{6}{5}$ giờ; 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian đội A làm riêng hoàn thành công việc là x (giờ) $\left(x>\frac{6}{5}\right)$;

thời gian đội B làm riêng hoàn thành công việc là y (giờ) $\left(y>\frac{6}{5}\right)$

Trong 1 giờ, đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc; đội B làm được $\frac{1}{y}$ công việc

Suy ra trong 1 giờ hai đội làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (công việc)

Theo đề bài, hai đội làm cùng nhau thì sau 1 giờ 12 phút = $\frac{6}{5}$ giờ xong công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \qquad (1)$$

Theo đề bài, nếu đội A làm 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ và đội B làm 2 giờ thì xong công việc, nên ta có phương trình: $\frac{2}{3x}+\frac{2}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x}=u \\ \frac{1}{y}=v \end{cases}$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3}u+2v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{5}{6}-u \\ \frac{2}{3}u+2v=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{5}{6}-u \\ \frac{2}{3}u+2\left(\frac{5}{6}-u\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{5}{6}-u \\ \frac{2}{3}u+\frac{5}{3}-2u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{5}{6}-u \\ \frac{4}{3}u=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{5}{6} - u \\ u = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{(TM)}$$

Vậy thời gian đội A làm riêng hoàn thành công việc là 2 giờ; thời gian đội B làm riêng hoàn thành công việc là 3 giờ.

Bài 4. *(1,5 điểm)*

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 2m + 5 = 0\ (*)$, với m là tham số.

a) Giải phương trình $(*)$ khi $m = 1$.

Cách tư duy :

Phương trình có tham số nên thay tham số vào để giải phương trình.

Thay $m = 1$ vào phương trình (*) ta được:

$x^2 - 2(1+1)x - 1^2 - 2.1 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy khi $m = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{4x_1^2 + 4mx_1 + m^2} + \sqrt{x_2^2 + 4mx_2 + 4m^2} = 7m + 2$

Cách tư duy :

Đầu tiên, để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì Δ *or* $\Delta' > 0$ => điều kiện của m

Sau đó rút gọn $\sqrt{4x_1^2+4mx_1+m^2}+\sqrt{x_2^2+4mx_2+4m^2}=7m+2$

Muốn mở dấu giá trị tuyệt đối thì phải biết điều kiện của 2 nghiệm. Dựa vào định lý Vi-et suy ra điều kiện của 2 nghiệm.

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(m^2-2m+5)$

$$=m^2+2m+1-m^2+2m-5$$

$$=4m-4.$$

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow 4m-4>0 \Leftrightarrow m>1.$

Ta có $\sqrt{4x_1^2+4mx_1+m^2}+\sqrt{x_2^2+4mx_2+4m^2}=7m+2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x_1+m)^2}+\sqrt{(x_2+2m)^2}=7m+2$$

$$\Leftrightarrow |2x_1+m|+|x_2+2m|=7m+2$$

Áp dụng định lí Vi-et, ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1)=2m+2>0 \text{ (do } m>1) \\ x_1x_2=m^2-2m+5=(m-1)^2+4>0\ \forall m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \forall m>1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1+m>0 \\ x_2+2m>0 \end{cases} \forall m.$$

Khi đó, ta có:

$$|2x_1+m|+|x_2+2m|=7m+2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1+m+x_2+2m=7m+2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1+x_2+3m=7m+2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1+x_2=4m+2$$

$\Leftrightarrow 2m+2+x_1=4m+2$

$\Leftrightarrow x_1=2m$

$\Rightarrow x_2=2m+2-x_1=2$

$\Rightarrow x_1x_2=4m$

Mà theo định lý Vi-et $x_1\ x_2=m^2-2m+5$ nên

$4m=m^2-2m+5 \ \leftrightarrow \ \ m^2-6m+5=0 \ \ (**)$

Ta có $a+b+c=1+(-6)+5=0$ nên phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt

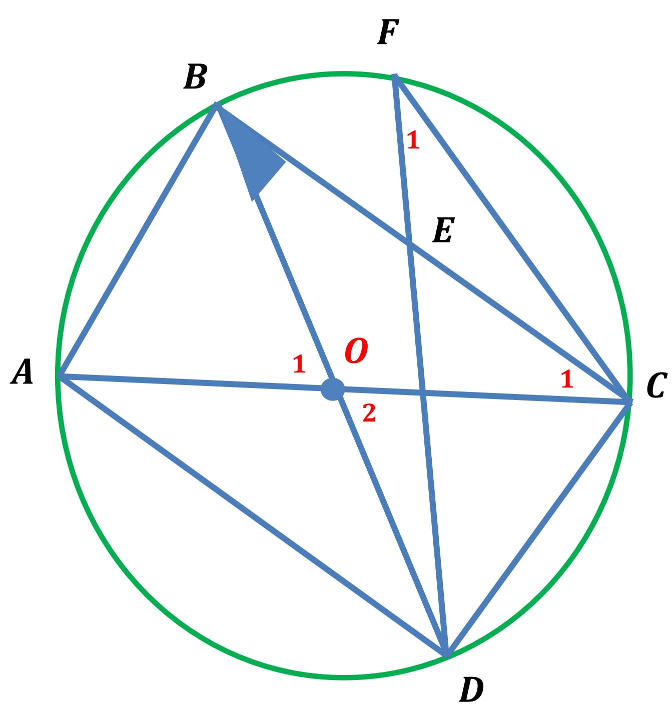
$\left[\begin{array}{l} m_1=1\,(\text{KTM}) \\ m_2=5\,(\text{TM}) \end{array}\right.$.

Vậy để m thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $m=5$.

Bài 5. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AC, BD (A khác B, D). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm E (E khác B, C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh rằng $AB=CD$ và $\widehat{CFD}=\widehat{BCA}$



Cách tư duy :

Muốn chứng minh $AB = CD$ thì xét 2 tam giác có cạnh AB và CD để chứng minh chúng bằng nhau.

Muốn chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$ thì xem thử chúng bằng góc trung gian nào.

Chứng minh $AB = CD$

Xét ΔAOB và ΔCOD có:

$OA = OC\ (= R)$

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (hai góc đối đỉnh)

$OB = OD\ (= R)$

Do đó $\Delta AOB = \Delta COD$ (c.g.c).

Suy ra $AB = CD$ (hai cạnh tương ứng) (điều phải chứng minh).

Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$

Ta có $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

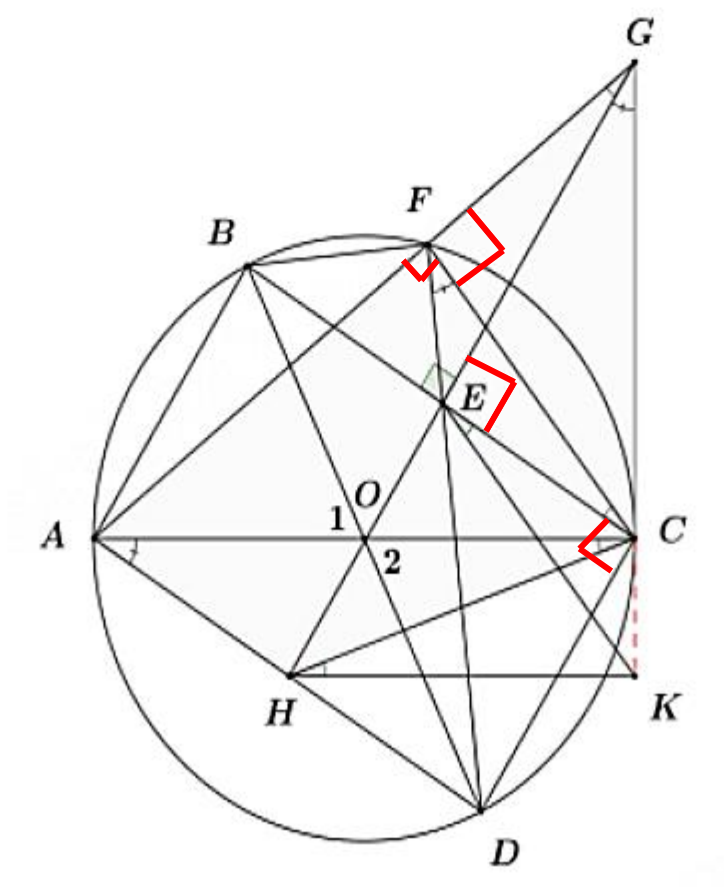
Lại có $OB = OC = R$ nên ΔOBC cân tại O.

Suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (tính chất tam giác cân).

Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{BCA}$.

Vậy $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$ (điều phải chứng minh).

b) Đường thẳng qua E, vuông góc với BC cắt tia AF tại G. Chứng minh rằng tứ giác $CEFG$ nội tiếp và $CD.EG = CB.CE$.



Cách tư duy :

Muốn chứng minh tứ giác $CEFG$ nội tiếp thì chứng minh 2 góc nhìn cạnh CG là góc vuông.

Muốn chứng minh $CD.EG = CB.CE$ thì chứng minh 2 tam giác vuông

ΔCDB và ΔEGC đồng dạng.

Chứng minh tứ giác $CEFG$ nội tiếp

Ta có $\widehat{AFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\widehat{CFG} = 90^\circ$

Xét tứ giác $CEFG$ có: $\widehat{CFG} = \widehat{CEG} = 90^\circ$

Mà hai đỉnh E, F kề nhau cùng nhìn dưới CG dưới hai góc bằng nhau.

Do đó tứ giác $EFGC$ nội tiếp (điều phải chứng minh).

Chứng minh $CD.EG = CB.CE$

Vì tứ giác $EFGC$ nội tiếp nên $\widehat{CGE} = \widehat{CFD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

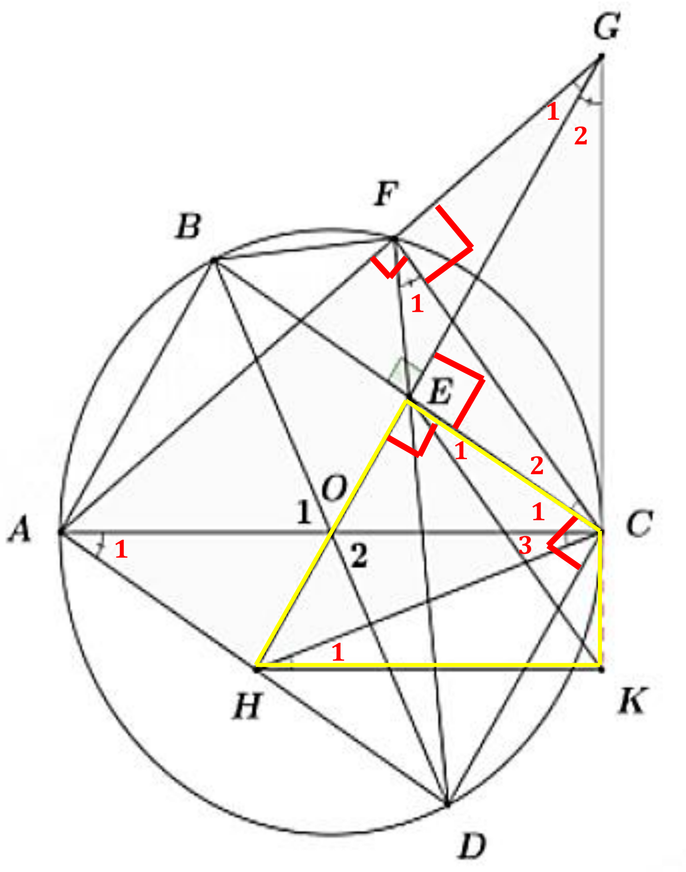
Mà $\widehat{CFD} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Suy ra $\widehat{CGE} = \widehat{DBC}$

Do đó tam giác vuông $\Delta CGE \sim \Delta DBC$

Suy ra $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{EG}{CE}$ hay $CD.EG = CB.CE$ (điều phải chứng minh)

c) Gọi H là giao điểm của tia GE và AD. Đường thẳng qua H, song song với AC cắt đường thẳng qua E, song song với FC tại K. Chứng minh rằng ba điểm G, C, K thẳng hàng.



Cách tư duy :

Muốn chứng minh 3 điểm G,C,K thẳng hàng thì phải chứng minh $CG\perp AC$ và $CK\perp AC$

Theo câu b, $\widehat{CGE}=\widehat{DBC}$

Mà theo câu a, $\widehat{DBC}=\widehat{BCA}$

Nên $\widehat{CGE}=\widehat{BCA}$

Vì $\widehat{CGE}+\widehat{GCE}=90^\circ$ nên $\widehat{CGE}+\widehat{BCA}=90^\circ$

Suy ra $CG\perp AC$

Muốn chứng minh $CK\perp AC$ thì ta chứng minh tứ giác $CKEH$ là tứ giác nội tiếp. Lúc đó, $\widehat{CEH}=90^\circ$ nên $\widehat{CHK}=90^\circ$

Muốn chứng minh tứ giác $CKEH$ là tứ giác nội tiếp thì phải chứng minh $\widehat{E_1}(\widehat{CEK})=\widehat{H_1}(\widehat{CHK})$

Ta có: $\widehat{E_1}(\widehat{CEK})=\widehat{C_2}(\widehat{ECF})$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{C_2}(\widehat{ECF})=\widehat{G_1}(\widehat{EGF})$ (vì tứ giác EFGC nội tiếp)

Nên $\widehat{E_1}(\widehat{CEK})=\widehat{G_1}(\widehat{EGF})$ (1)

Ta có: $\widehat{H_1}(\widehat{CHK})=\widehat{C_3}(\widehat{HCA})$ (hai góc so le trong) (2)

Xét tứ giác AGCH

Ta có $\widehat{G_2}(\widehat{CGE})=\widehat{F_1}(\widehat{CFE})$ (vì tứ giác EFGC nội tiếp)

Và $\widehat{F_1}(\widehat{CFE})=\widehat{A_1}(\widehat{CAD})$

Nên $\widehat{G_2}(\widehat{CGE})=\widehat{A_1}(\widehat{CAD})$

Suy ra tứ giác AGCH là tứ giác nội tiếp.

Nên $\widehat{G_1}(\widehat{EGF})=\widehat{C_3}(\widehat{HCA})$ (vì tứ giác AGCH nội tiếp)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $CKEH$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\widehat{HEC}+\widehat{HKC}=180^\circ$

$\leftrightarrow 90^\circ + \widehat{HKC} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{HKC} = 90^\circ$ hay $CK \perp AC$

Vì $CK \perp AC$ và $CG \perp AC$ nên ba điểm G, C, K thẳng hàng.