컴퓨터 그래픽스
5. 3차원 그래픽스의 기하변환과 뷰잉

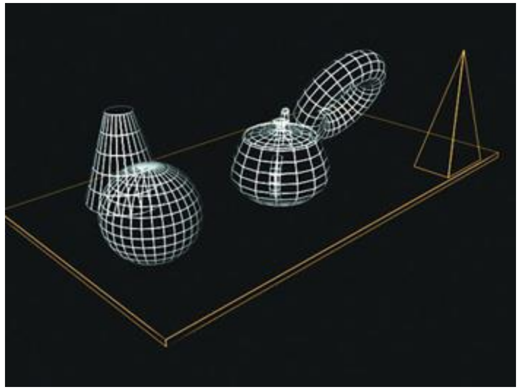
2020년 2학기

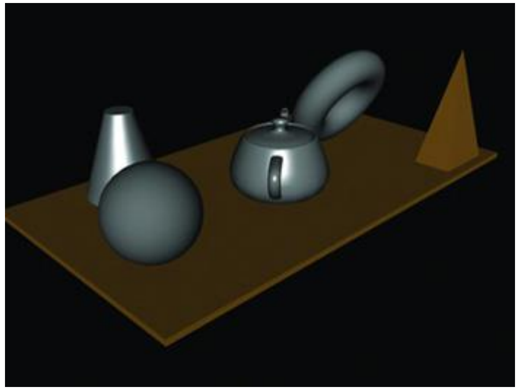
학습 내용

- **3차원 그래픽스 기하 변환과 뷰잉**
  - 3차원 그래픽스의 처리 과정
  - 3차원 기하 변환
  - 투영

3차원 그래픽스의 처리과정

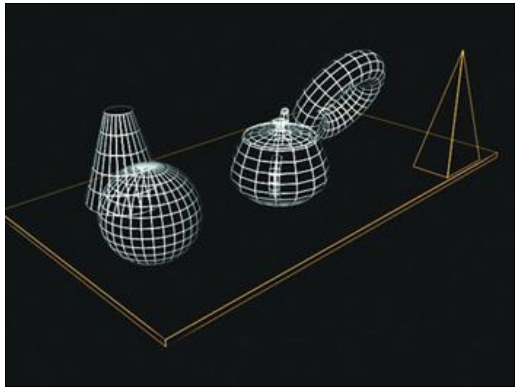
- **3차원 그래픽스**
  - 모델링 과정 (Modeling): 3차원 객체들을 형상화
  - 투영 과정 (Projection): 모델링한 객체들을 모니터와 같은 2차원 평면에 투영
  - 렌더링 과정 (Rendering): 객체에 현실감을 부여





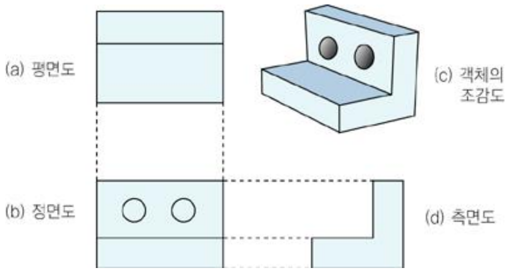
3차원 그래픽스의 처리과정

- **모델링 (Modeling)**
  - 3차원 객체들을 3차원 좌표계를 사용하여 표현하는 것
  - 모델링 방법:
    - 다각형 표면 모델링 (Polygon Surface Modeling)
    - 매개변수를 이용한 곡면 모델링 (Parametric Surface Modeling)
    - 와이어 프레임 (Wire-frame)
    - 솔리드 모델링 (Solid Modeling)
    - 스위핑 (Sweeping)
    - 프랙털 기하학 (Fractal Geometry)
    - 입자 시스템 (Particle System)

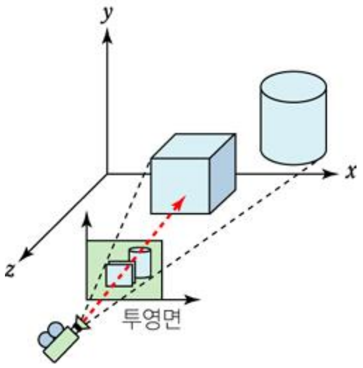


3차원 그래픽스의 처리과정

- Projection (투영)
  - 3차원 객체를 2차원 출력장치에 출력
    - 예) 3차원 공간의 원뿔 -> 2차원의 삼각형 모양
  - 투영 종류:
    - Parallel Projection (평행투영)
      - 객체를 구성하는 각 요소들간의 상대적인 크기가 보존된다
      - 기계 설계, 건축 설계
    - Perspective Projection (원근투영)
      - 객체의 원근감이 잘 나타난다
      - 투영면에 보이는 2차원 객체의 크기는 3차원 객체와 투영면과의 거리에 반비례한다.
      - 건물의 조감도



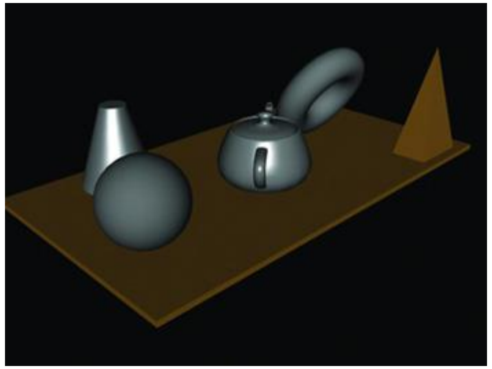
평행 투영



원근 투영

3차원 그래픽스의 처리과정

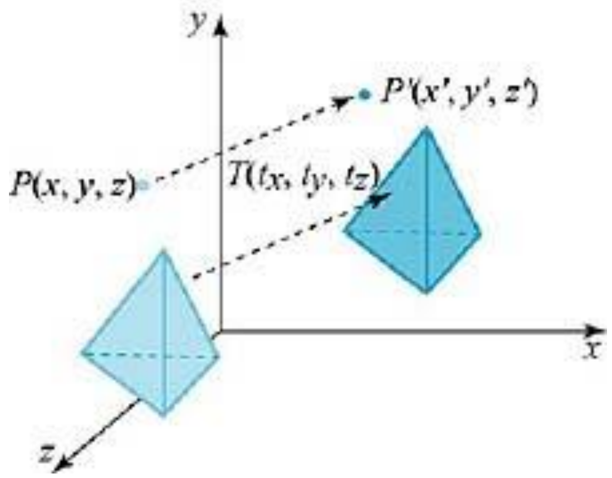
- **Rendering (렌더링)**
  - 투영된 그림을 렌더링하고 그림자나 색상의 변화를 표현하여 현실감 있는 그림을 만들어내는 과정
  - 렌더링 과정:
    - Hidden Surface Removal (은면제거): 보이지 않는 면 제거
    - Shading (쉐이딩): 객체의 색상과 명암 표현
    - Texture Mapping (텍스쳐 매핑): 객체에 이미지 매핑하기



3차원 기하변환: 이동

- **Translation (이동)**
  - 공간상의 한 점에 이동거리를 더하여 이동한다.
  - $x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$ $z' = z + t_z$
  - $P' = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$ (t_x, t_y, t_z): 이동 벡터

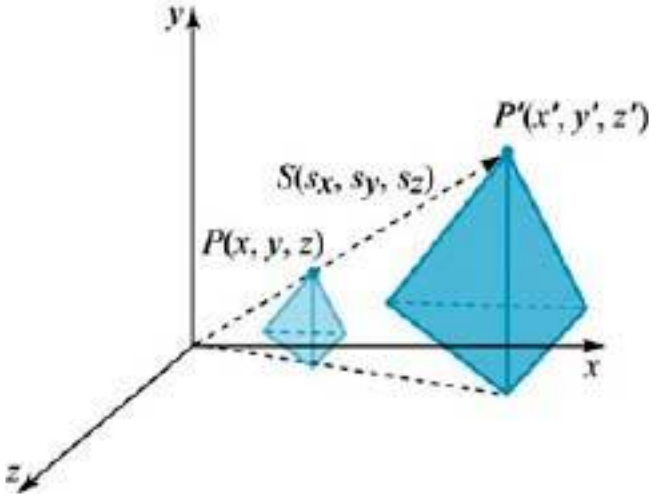
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$$



3차원 기하변환: 신축

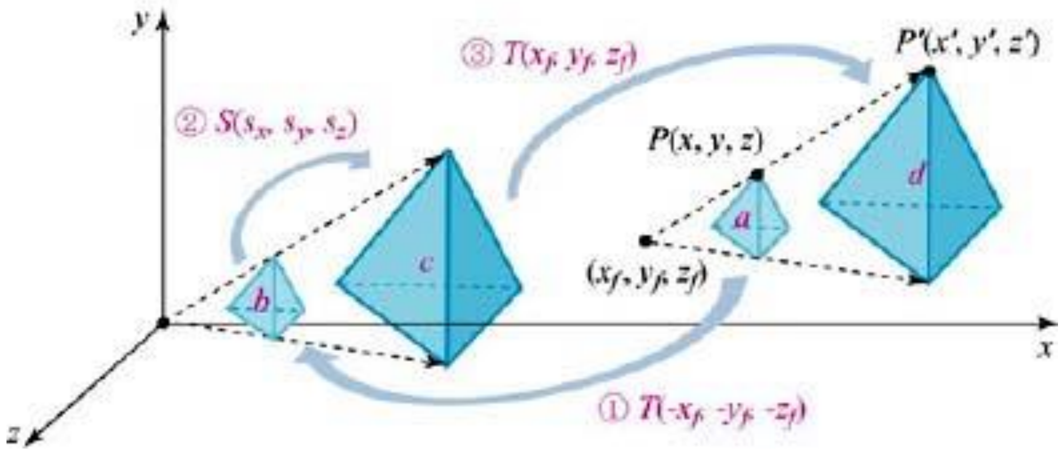
- **Scaling (신축)**
  - 객체의 크기를 확대 또는 축소, 비율 변화
  - $x' = s_x \cdot x$ $y' = s_y \cdot y$ $z' = s_z \cdot z$
  - $P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$ (s_x, s_y, s_z): 신축률

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$



3차원 기하변환: 신축

- 임의의 점에 대한 신축
  - Translation: $P' = (-x_f, -y_f, -z_f) \cdot P$
  - Scaling: $P'' = (s_x, s_y, s_z) \cdot P'$
  - Translation: $P''' = (x_f, y_f, z_f) \cdot P''$



3차원 기하변환: 회전

- **Rotation (회전)**
  - 객체를 기준 축 주위로 회전시킨다.

  - z축 회전: $P' = R_z(\theta) \cdot P$

    $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

    $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

    $z' = z$

  - x축 회전 : $P' = R_x(\theta) \cdot P$

    $x' = x$

    $y' = y\cos\theta - z\sin\theta$

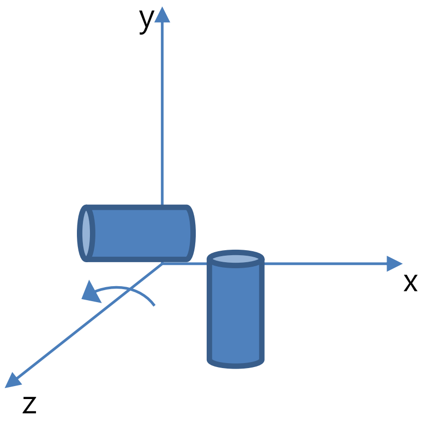
    $z' = y\sin\theta + z\mathrm{con}\,\theta$

  - y축 회전 : $P' = R_y(\theta) \cdot P$

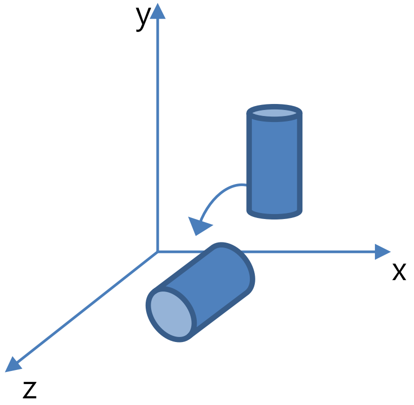
    $x' = x\cos\theta + z\sin\theta$

    $y' = y$

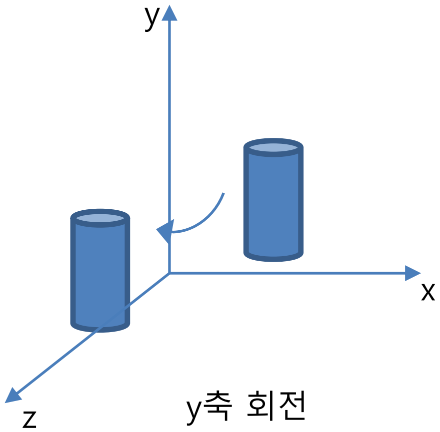
    $z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$



z축 회전



x축 회전



y축 회전

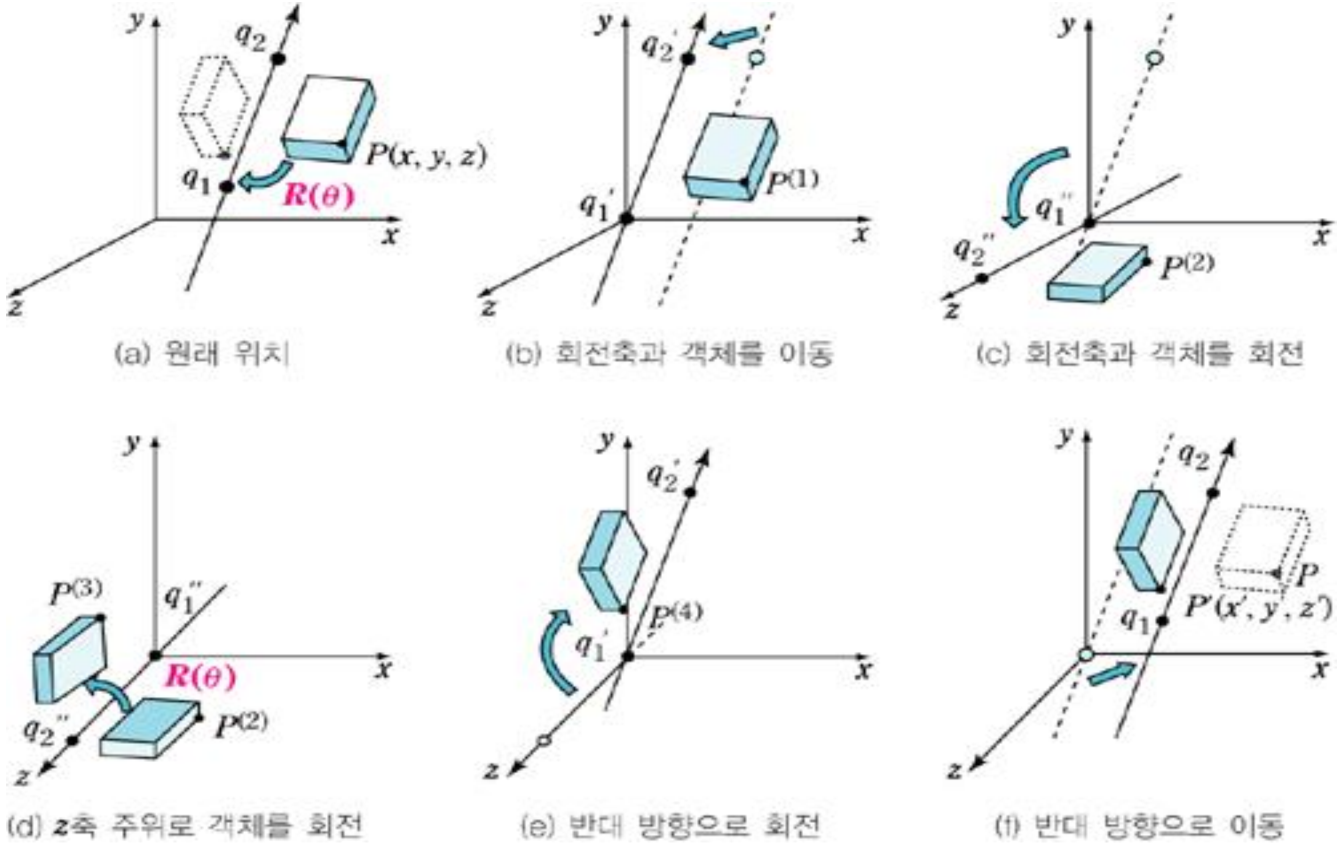
3차원 기하변환: 회전

- 임의의 축과 평행한 직선에 대한 회전
  - 회전축이 한 축이 되도록 이동
  - 그 축에 대해서 회전
  - 제자리로 역 이동

  예) x축에 평행한 회전축에 대하여 회전하려면: $R = T(P_0) \bullet R_x(\theta) \bullet T(-P_0)$

- 축과 평행하지 않은 일반적인 직선에 대한 회전
  - 회전축이 원점을 지나도록 이동시킨다.
  - 회전축을 좌표축 가운데 하나와 일치하도록 회전시킨다.
  - 일치된 좌표축을 중심으로 회전시킨다.
  - 2단계의 반대방향으로 회전한다.
  - 1단계의 반대방향으로 이동시킨다.

3차원 기하변환: 회전

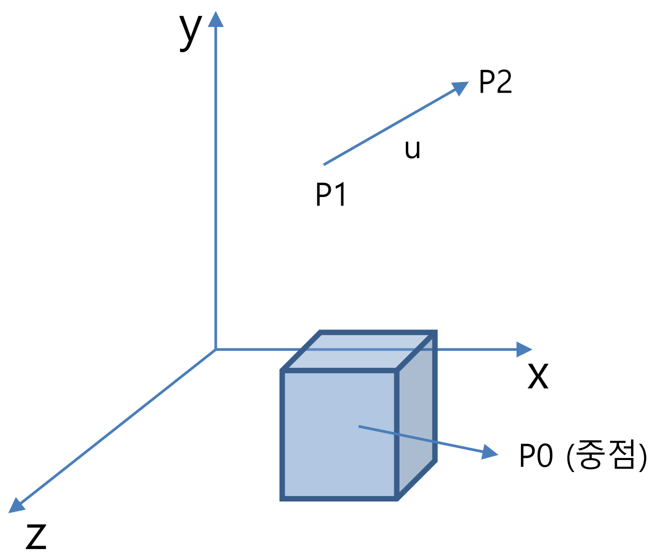


$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)\ R_y(\theta_y)\ R_x(\theta_x)\ T(-P_0)$$

3차원 기하변환: 회전

1. 임의의 점에 대하여 회전하기 위하여
   - 원점을 지나가도록 이동: T(-P0)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x0 \\ 0 & 1 & 0 & -y0 \\ 0 & 0 & 1 & -z0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

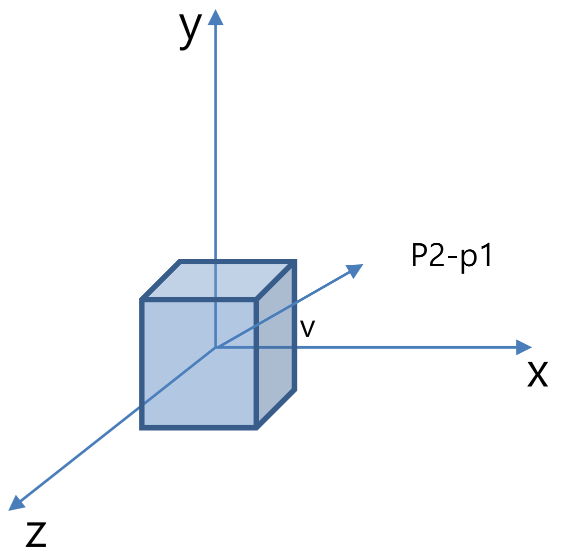


   - 회전축 벡터

     $u = P2 - P1 = (x2 - x1, y2 - y1, z2 - z1)$

   - u를 정규화 하기

     $v = \dfrac{u}{|u|} = (a_x, a_y, a_z),$ $\qquad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$



3차원 기하변환: 회전

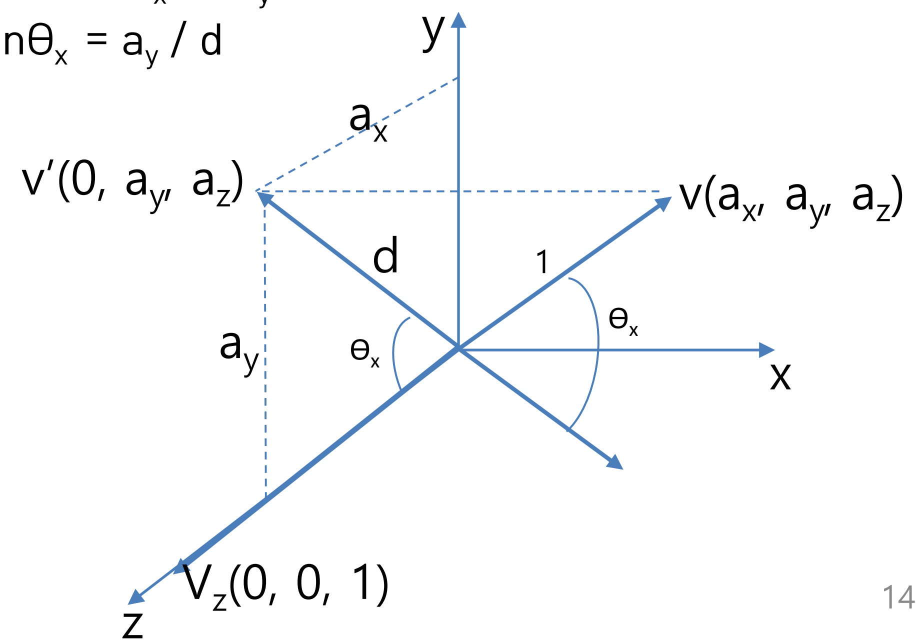
2. 회전축이 xz평면에 놓이도록 x축 회전

– yz 평면 위의 벡터 v′와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v' \cdot v_z = |v'||v_z| \cos\theta_x$
  - $v' = \sqrt{a_y^2 + a_z^2}$ $\quad$ ($d = \sqrt{a_y^2 + az^2}$)
  - $v_z = (0, 0, 1)$이고 $|v_z| = 1$
  - 수학적으로, $v' \cdot v_z = (0, a_y, a_z) \cdot (0, 0, 1) = a_z$
  - 따라서, $|v'||v_z| \cos\theta_x = a_z$ $\rightarrow$ $d\cos\theta_x = a_z$ $\rightarrow$ $\cos\theta_x = a_z / d$

– v′와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v' \times v_z = |v'||v_z|\, v_x \sin\theta_x$
  - 직교좌표 형식으로, $v' \times v_z = (0, a_y, a_z) \times (0, 0, 1) = (ay, 0, 0) = a_y(1, 0, 0) = v_x \cdot a_y$
  - 따라서, $|v'||v_z|\, v_x \sin\theta_x = v_x \cdot a_y$ $\rightarrow$ $d\, v_x \sin\theta_x = v_x \cdot a_y$ $\rightarrow$ $\sin\theta_x = a_y / d$

– 따라서, x축에 대한 θ_x의 회전 행렬은

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{d} & -\frac{a_y}{d} & 0 \\ 0 & \frac{a_y}{d} & \frac{a_z}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



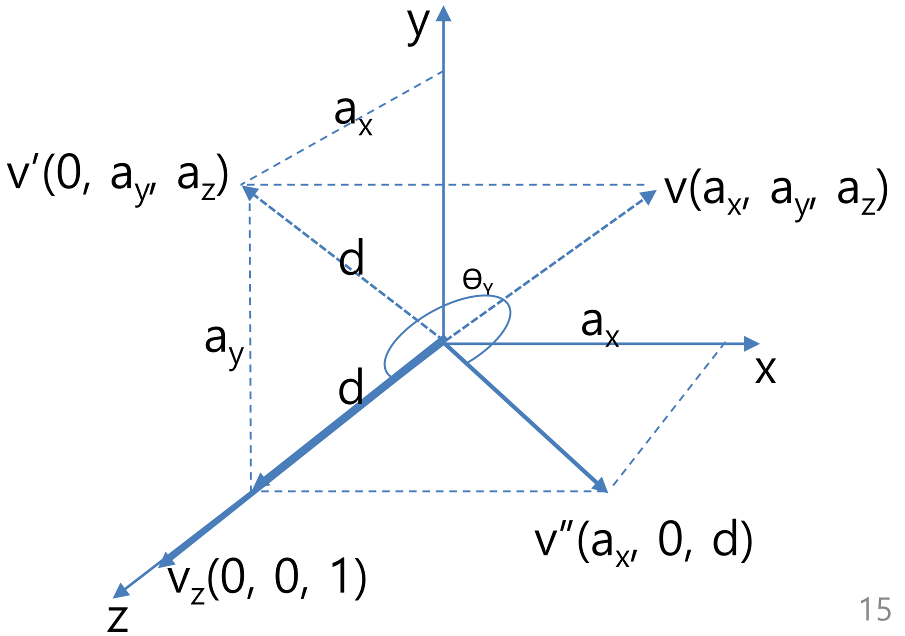
3차원 기하변환: 회전

3. **회전축이 z축이 되도록 y축 회전**
   – xz평면 위의 벡터 v′′와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 내적: $v'' \bullet v_z = |v''||v_z| \cos\theta_y$
      - $|v_z| = 1$, $|v''| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$
      - 수학적으로, $v'' \cdot v_z = (a_x, 0, d) \bullet (0, 0, 1) = d$ $\quad (d = \sqrt{a_y^2 + a_z^2})$
      - 따라서, $\cos\theta_y = d$

   – v′′와 z축의 단위 벡터 v_z 사이의 외적: $v'' \times v_z = |v''||v_z|\, v_y \sin\theta_y$
      - 직교좌표 형식으로, $v'' \times v_z = (a_x, 0, d) \times (0, 0, 1) = (0, -a_x, 0) = -a_x(0, 1, 0)$
      - 따라서, $\sin\theta_y = -a_x$

   – 따라서, y축에 대한 θ_y의 회전 행렬은

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3차원 기하변환: 회전

4. Z축 회전

– $R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **회전 후 제자리로 가기 위하여 역회전과 역 이동**
  - 역회전 $R_x(-\theta_x)$, $R_y(-\theta_y)$
  - 역이동 $T(P_0)$

- 최종적으로,

$$M = T(P_0)R_x(-\theta_x)R_y(-\theta_y)R_z(\theta)\, R_y(\theta_y)\, R_x(\theta_x)\, T(-P_0)$$

기타 3차원 기하변환: 반사

- Reflection (반사)
  - xy 평면에 반사
    - Z축 값의 부호가 바뀐다.

      $x' = x, \; y' = y, \; z' = -z$

  - yz 평면에 반사
    - X축 값의 부호가 바뀐다.

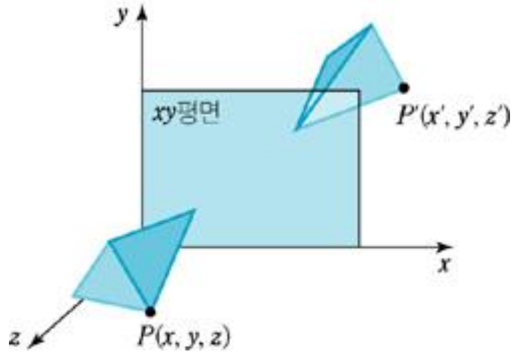
      $x' = -x, y' = y, z' = z$

  - xz 평면에 반사
    - Y축 값의 부호가 바뀐다.

      $x' = x, y' = -y, z' = z$

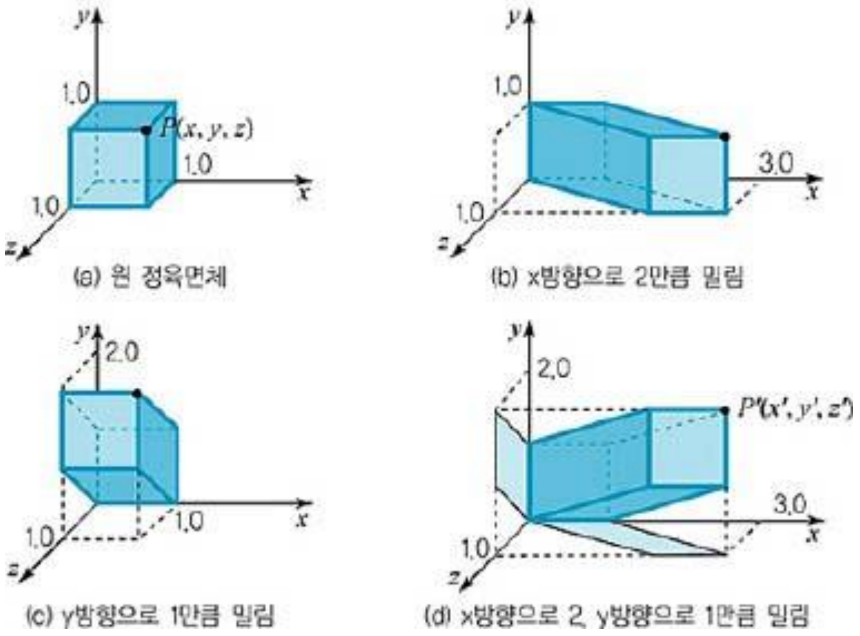
  - 원점에 반사
    - 모든 좌표값의 부호가 바뀐다.

      $x' = -x, y' = -y, z' = -z$



기타 3차원 기하변환: 밀림

- Shearing (밀림)
  - x축을 기준으로 밀림 변환
    - x’ = x
    - y’ = y + ax
    - z’ = z + bx
      - a, b: 각각 y축과 z축 방향으로 밀리는 정도
    - x축을 기준으로 한 밀림이므로 x값은 변함이 없다.
  - y축을 기준으로 밀림 변환
    - x’ = x + ay
    - y’ = y
    - z’ = z + by
      - a, b: 각각 x축과 z축 방향으로 밀리는 정도
    - y축을 기준으로 한 밀림이므로 y값은 변함이 없다.
  - z축을 기준으로 밀림 변환
    - x’ = x + az
    - y’ = y + bz
    - z’ = z
      - a, b: 각각 x축과 y축 방향으로 밀리는 정도
    - z축을 기준으로 한 밀림이므로 z값은 변함이 없다.



Z축을 기준으로 하는 밀림 변환

투영 (Projection)

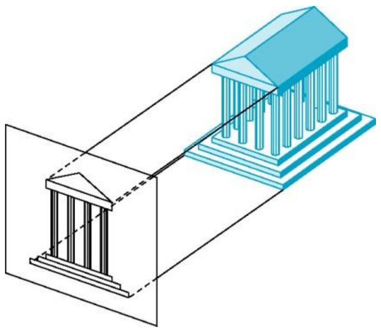
- **투영**
  - 3차원 공간상의 그래픽 개체를 2차원 평면에 표현하여 그래픽 화면을 만들어 내는 과정

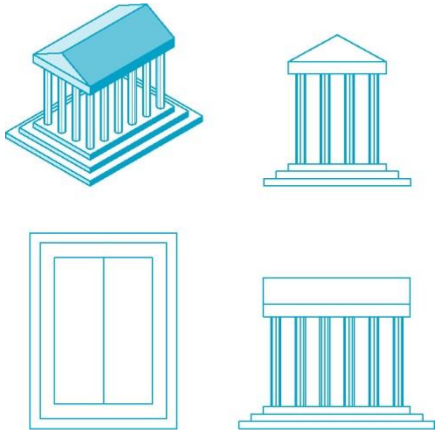
  - 평행 투영(Parallel Projection)
    - 출력면에 수평선의 선을 따라 물체 표면의 점들을 투영하는 방법
    - 객체들간의 상대적인 크기 정보가 보존된다.
    - 다른 view에 따라 물체의 다른 2차원 view를 얻을 수 있다.

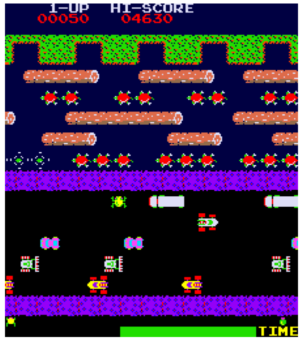
  - 원근 투영 (Perspective Projection)
    - 공간상의 객체와 투영 중심점 (view point)를 연결하여 투영
    - 투영면과 시점이 먼 객체는 작게, 가까운 객체는 크게
    - 현실적인 결과

투영: 평행 투영

- **평행 투영 (Parallel Projection)**
  - 직각 투영 (Orthographic Projection)
    - 투영방향과 투영면이 직각을 이루는 경우
    - 임의의 점 $P(x, y, z) \rightarrow P'(x_p, y_p, z_p)$
      - $x_p = x$ $y_p = y$ $z_p = 0$
      - Front view (z 값 삭제): 입면도, 정면도
      - Side view (x 값 삭제): 측면도
      - Rear view (z 값 삭제)
      - Top view (y 값 삭제): 평면도
      - 엔지니어링, 건축에서 많이 사용한다 (길이와 각도가 정확하다)

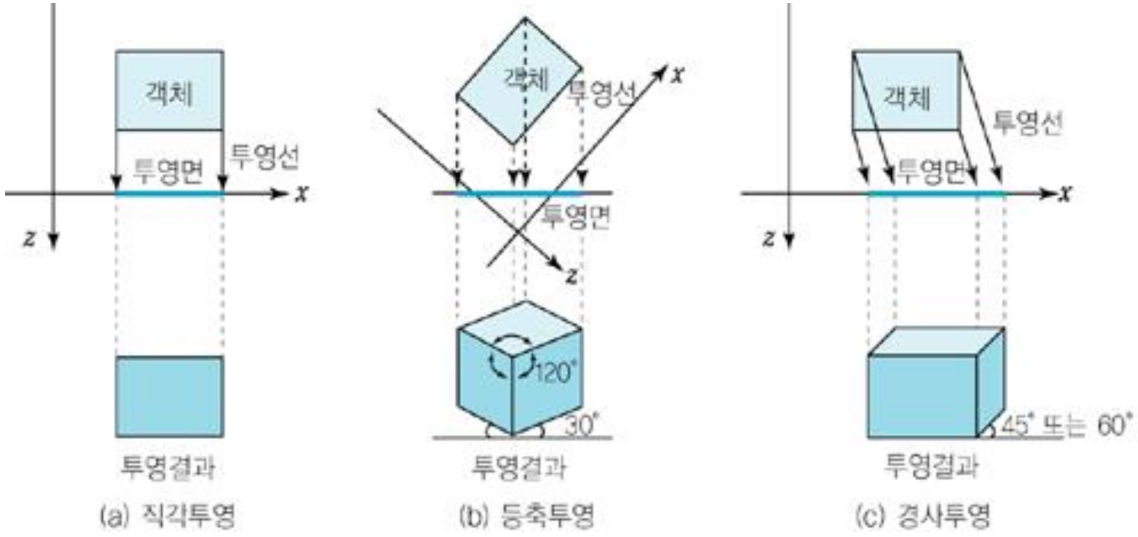






투영: 평행 투영

– 경사 투영(Oblique Projection)
  - 객체의 투영방향이 투영면과 수직이 아닌 일정한 각도를 이루는 경우
  - 2개의 각도로 정의
    – **각도 α (투영 각도):** 점 (x, y, z)과 경사투영의 점 (x_p, y_p)의 선, 점 (x, y, z)과 직각투영의 점 (x, y)의 선이 만드는 각도
    – **각도 ϕ:** 점 (x, y)와 점 (x_p, y_p)의 선, 투영면에 평행한 방향과의 각도





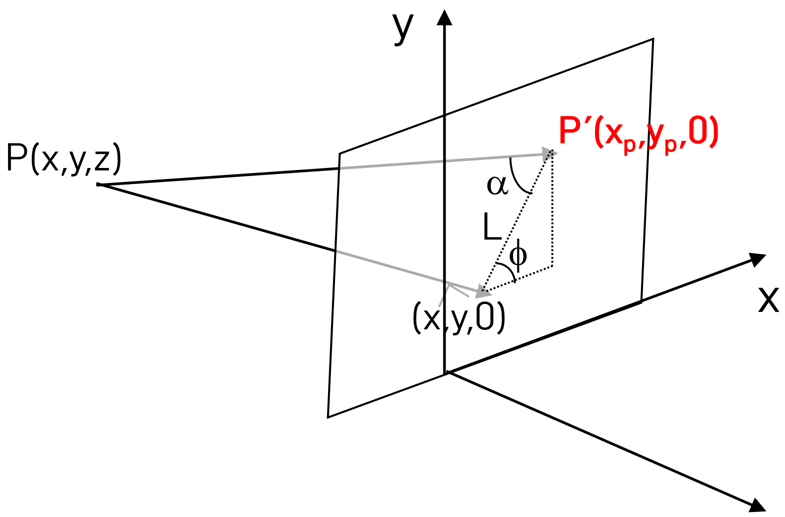


투영: 평행 투영

– 경사 투영에서
  - 투영면: z = 0
  - 공간상의 점: P (x, y, z)
  - 경사 투영된 점: P' (x_p, y_p, z_p), 투영면이 z=0이므로 P' = (x_p, y_p, 0)

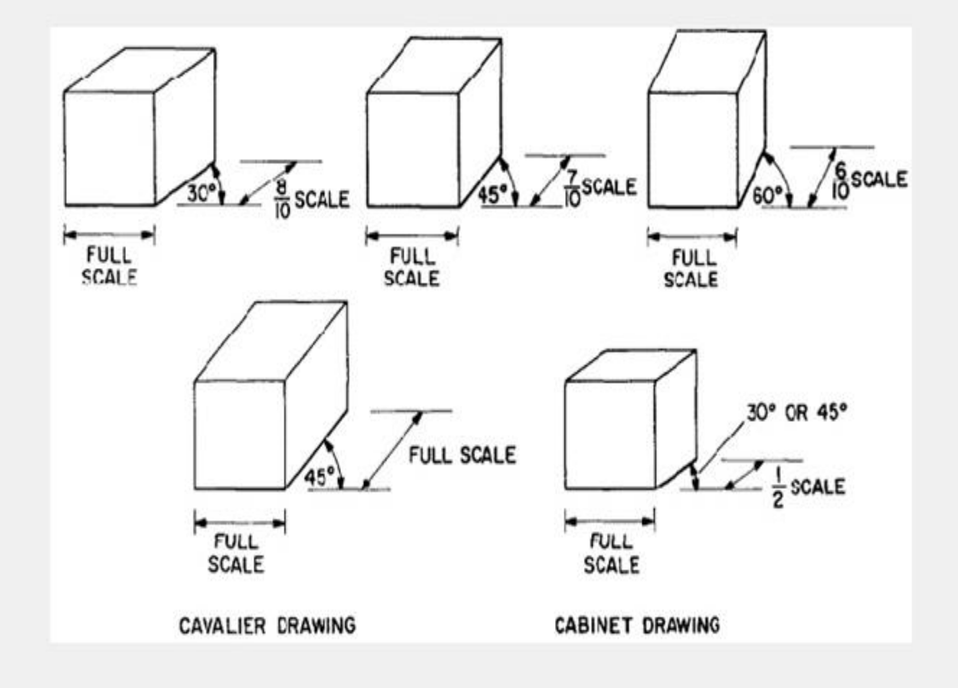
  - 투영 각도: α
  - 점P가 직각 투영된 점과 경사 투영된 점을 연결한 선분: L
  - L과 x축과 평행한 직선과 이루는 각도: ϕ
    - $\cos\phi = \frac{(x_p - x)}{L}$ → $x_p = x + L\cos\phi$
    - $\sin\phi = \frac{(y_p - y)}{L}$ → $y_p = y + L\sin\phi$
    - $\tan\alpha = \frac{z}{L}$ → $L = \frac{z}{\tan\alpha} = zL_1$

  - $x_p = x + L\cos\phi = x + z\frac{\cos\phi}{\tan\alpha}$
  - $y_p = y + L\sin\phi = y + z\frac{\sin\phi}{\tan\alpha}$



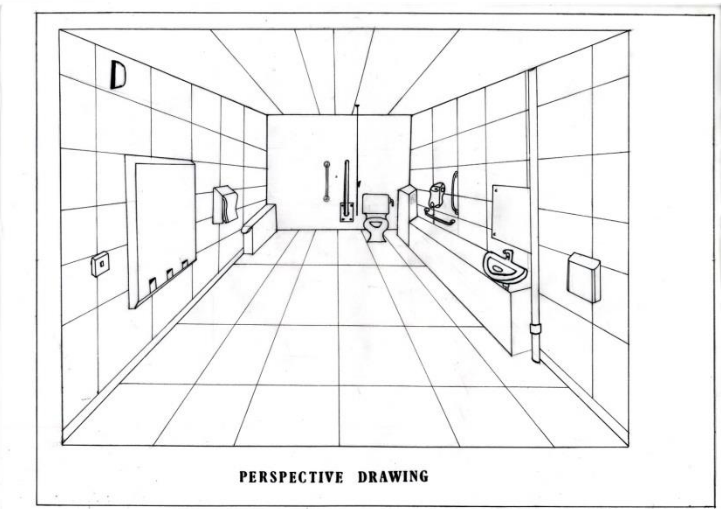
투영: 평행 투영

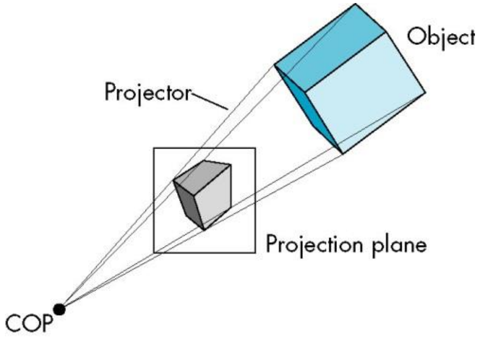
- 투영 각도 α에 대해서
  - α = 45’ (tan α = 1) 인 경우: cavalier 투영
    - 투영면에 수직인 선들은 길이 변환이 없고, 정육면체의 깊이는 폭과 높이가 같은 길이로 투영된다.
  - α = 63.4’ (tan α = 2)인 경우: cabinet 투영
    - 투영면과 수직인 선들은 그들 길이의 절반으로 투영되고 깊이가 폭과 높이의 절반으로 투영된다.

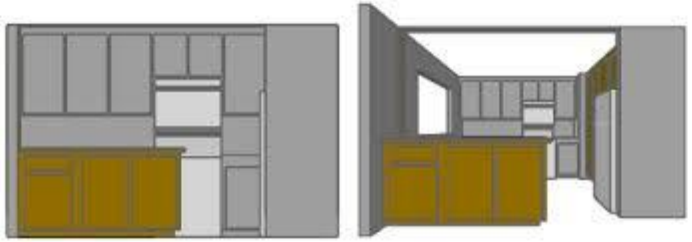


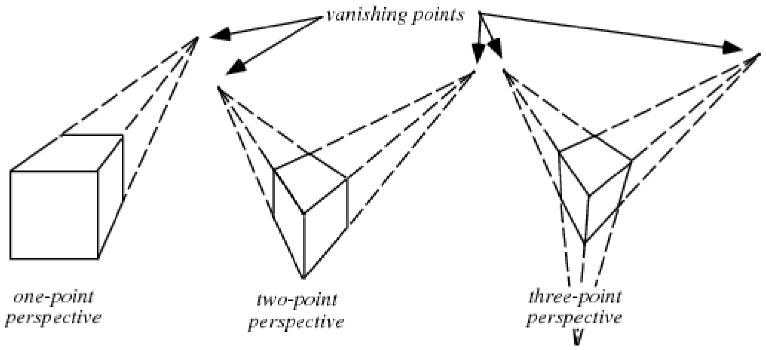
투영: 원근 투영

- Perspective Projection (원근 투영)
  - 객체와 투영중심점 (시점, view point)을 연결하여 투영 면에 2차원 객체를 만든다.
  - 투영면에서 멀리 떨어진 객체는 작게, 가까운 객체는 크게 나타나 현실감 있는 결과를 얻는다.





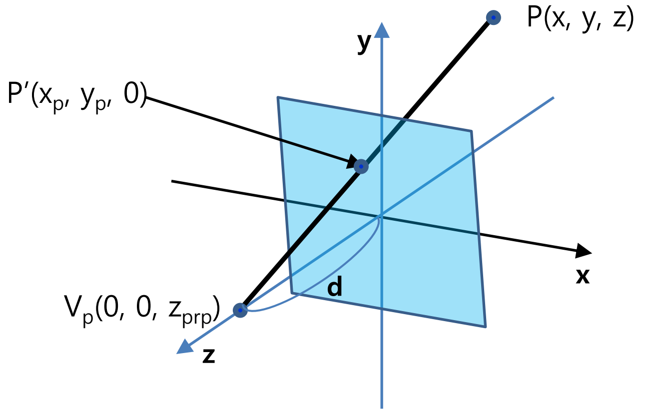




투영: 원근 투영

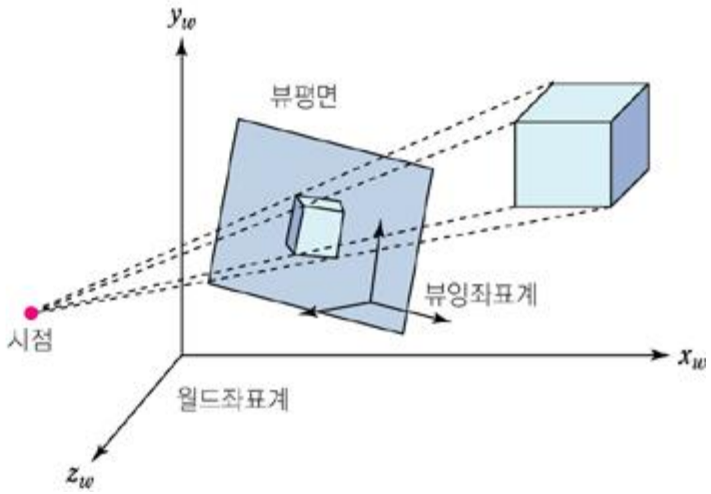
- Z축 위의 임의의 점 로 투영할 때
  - 투영참조점: z_{prp} 투영 면: z_{vp}
- 점 P(x, y, z)을 z축에 따라 투영면 (z = 0)에 원근 투영시키면,
  - 투영점 $P'(x_p, y_p, z_{vp})$, 투영참조점 좌표를 $(0, 0, z_{prp})$라 하면
    - $u = \dfrac{(z - zvp)}{(z - z_{prp})} = \dfrac{|z|}{|z| + d}$
      - |z|: (x, y, z)에서 투영면까지의 거리
      - d: 투영면에서 투영 참조점까지의 거리
  - 매개 변수 u : $0 \le u \le 1$ 의 값으로
    - $u = 0 \rightarrow u = \dfrac{|z|}{|z| + d} = 0 \rightarrow |z| = 0 \rightarrow P' = (x, y, z)$
    - $u = 1 \rightarrow u = \dfrac{|z|}{|z| + d} = 1 \rightarrow d = 0 \rightarrow P' = (0, 0, z_{prp})$
  - 매개변수 u를 사용하여
    - $x_p = (1-u)x_1 + ux_2 = x_1 - x_1u = x - x\dfrac{|z|}{|z| + d}$
      (x_1 은 x, x_2 는 0)
    - $y_p = (1-u)y_1 + uy_2 = y_1 - y_1u = y - y\dfrac{|z|}{|z| + d}$
      (y_1 은 y, y_2 는 0)

    행렬로 나타내면,



뷰잉 변환

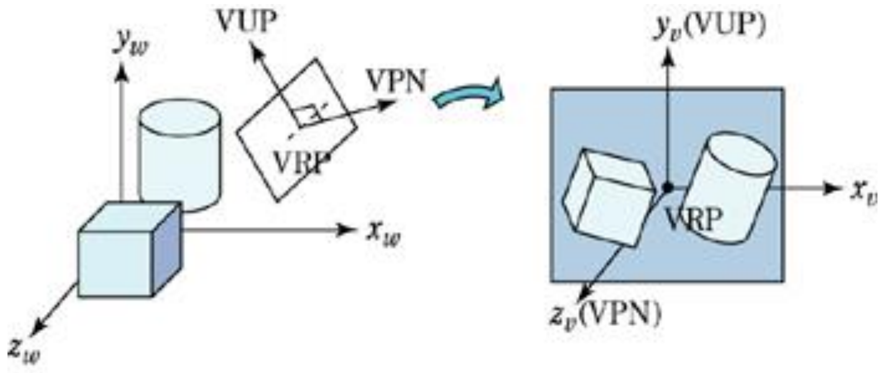
- **뷰잉 과정**
  - 3차원 객체들을 하나의 좌표계로 통합한 후 투영되어 출력 화면에 나타나게 되는 과정
  - 뷰잉 변환



뷰잉 변환

- 투영 과정을 용이하게 처리하기 위해 월드 좌표계를 뷰잉 좌표계로 변환
  - 투영면이 z = 0 인 xy 평면으로 된다

- 뷰 평면의 축 벡터와 법선 벡터를 이용하여 설정
  - 원점: 뷰 평면 상의 한 점 (카메라 위치)
  - Normal Vector: z축에 해당 (바라보는 방향)
  - Up Vector: y축에 해당 (x축은 자동으로 결정) (카메라 각도)

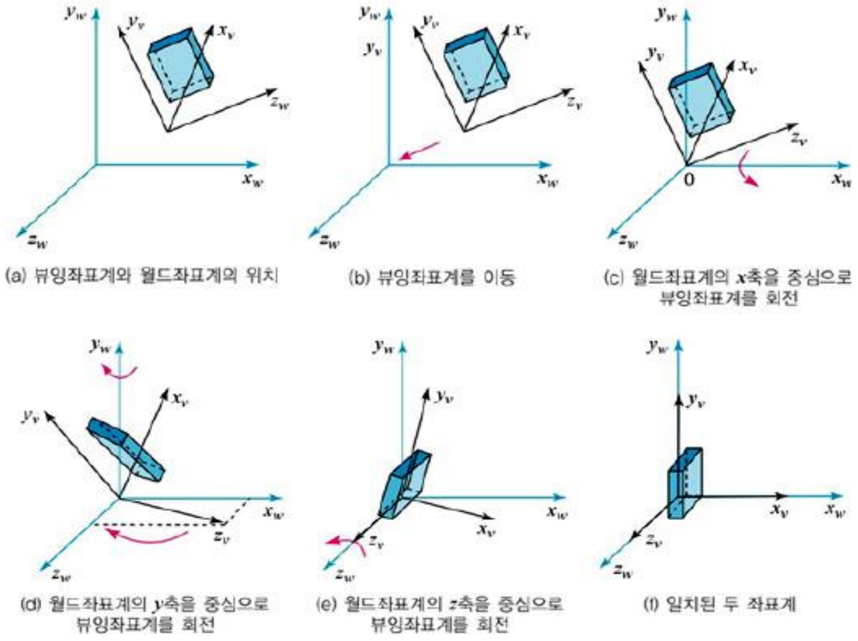


(a) 월드좌표계와 뷰평면 (b) 뷰평면에 나타난 객체

VRP: View Reference Point
VPN: View Plane Normal Vector
VUP: View Up Vector

좌표계 변환

- World Coordinate → Viewing Coordinate
  - 뷰잉좌표계가 주어짐
  - 뷰잉좌표계 원점을 월드좌표계 원점과 일치하도록 이동
  - 월드좌표계의 X축을 중심으로 뷰잉좌표계의 Z축을 회전
    - 뷰잉좌표계의 z축이 월드좌표계의 zx 평면에 위치
  - 월드좌표계의 Y 축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전- 두 좌표계의 z축이 일치
  - 월드좌표계의 Z축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전- 뷰잉좌표계와 월드 좌표계가 일치

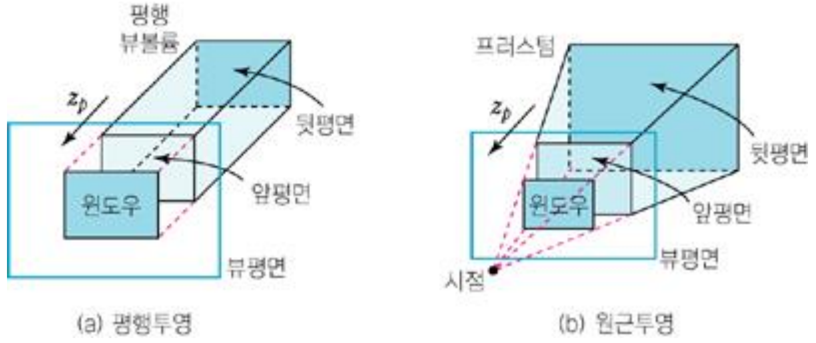


(a) 뷰잉좌표계와 월드좌표계의 위치 (b) 뷰잉좌표계를 이동 (c) 월드좌표계의 x축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전

(d) 월드좌표계의 y축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전 (e) 월드좌표계의 z축을 중심으로 뷰잉좌표계를 회전 (f) 일치된 두 좌표계

투영을 위한 변환

- **뷰평면의 윈도우 내에 투영되는 공간상의 일정영역**
  - 투영 변환에서 뷰평면의 윈도우에 투영되는 객체들은 3차원 공간에서 일정한 영역 내에 존재: 뷰볼륨
    - 평행 투영의 경우: 평행 뷰볼륨
    - 원근 투영의 경우: 프러스텀(Frustum) 뷰볼륨
  - 뷰볼륨을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영을 이용하면, 투영과 클리핑이 간단해진다
  - 정규화된 뷰볼륨
    - 모든 좌표를 0과 1사이의 값으로 표현, 정육면체 형태
    - 장치 좌표계로의 변환 용이, 클리핑 과정이 매우 단순화



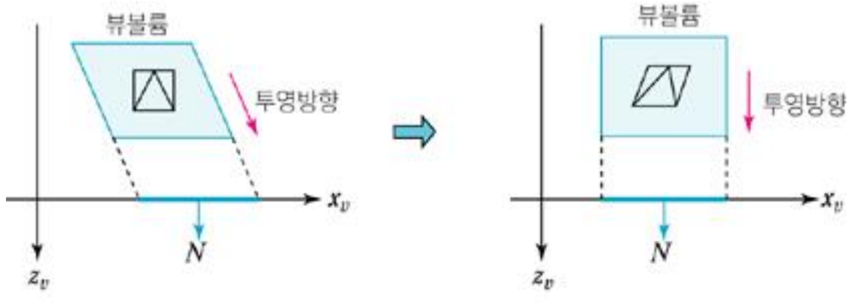
투영을 위한 변환

- **평행 투영의 변환 행렬**
  - 직각 투영
    - 투영면이 xy평면(z=0)인 경우
    - 공간상의 점 P(x, y, z)가 직각 투영된 점은 (x, y, 0)이 된다 즉,

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{ortho} \cdot P$$

투영을 위한 변환

- **평행 투영의 변환 행렬**
  - 경사 투영
    - 기울어진 형태의 뷰볼륨을 직육면체 형태로 밀림 변환

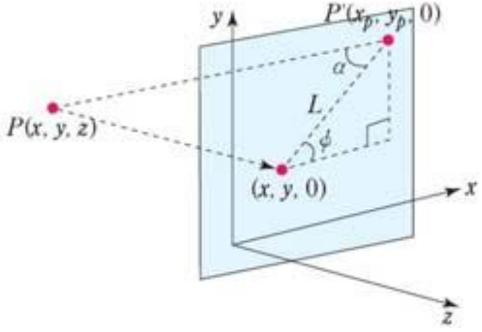


(a) 경사투영의 경우 (b) 직각투영의 경우

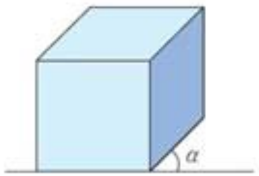
투영을 위한 변환

- 공간상의 점 P(x, y, z)가 경사 투영된 점 P′(x_p, y_p, 0)을 구하려면

- 경사 각도 α와 투영길이 L로 정의
  - L: 경사 투영점과 직각 투영점간의 거리
  - ϕ : L과 x축과 이루는 각도
  - $\tan\alpha = z / L \quad \rightarrow \quad L = z / \tan\alpha \quad = z \cot\alpha$
  - $x_p = x + L\cos\alpha$
  - $y_p = y + L\sin\alpha$



(a) 공간상의 한 점이 경시투영된 경우

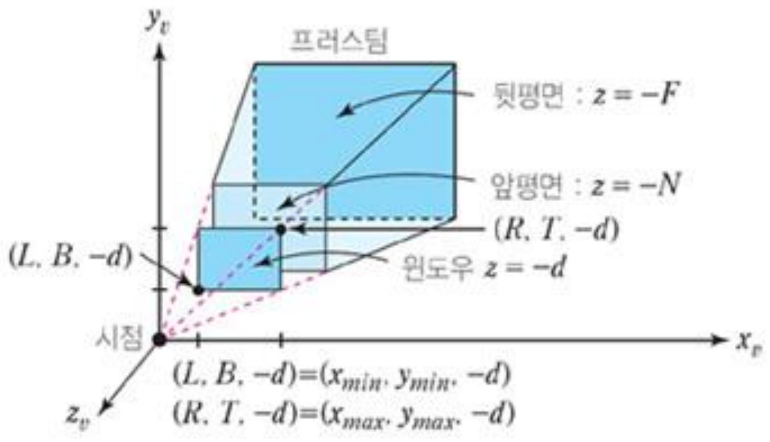


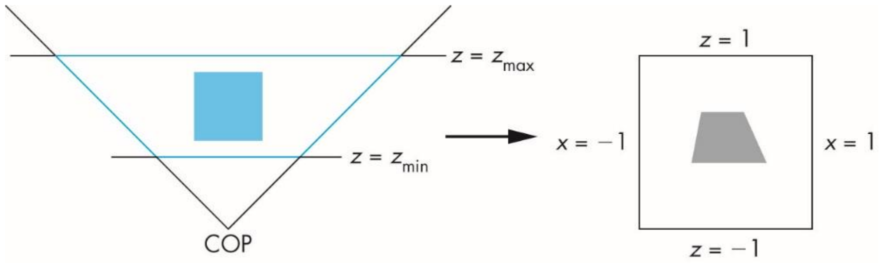
(b) 경시투영의 경우

$$P' = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cot\alpha\cos\phi & 0 \\ 0 & 1 & \cot\alpha\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{obliq} \cdot P$$

투영을 위한 변환

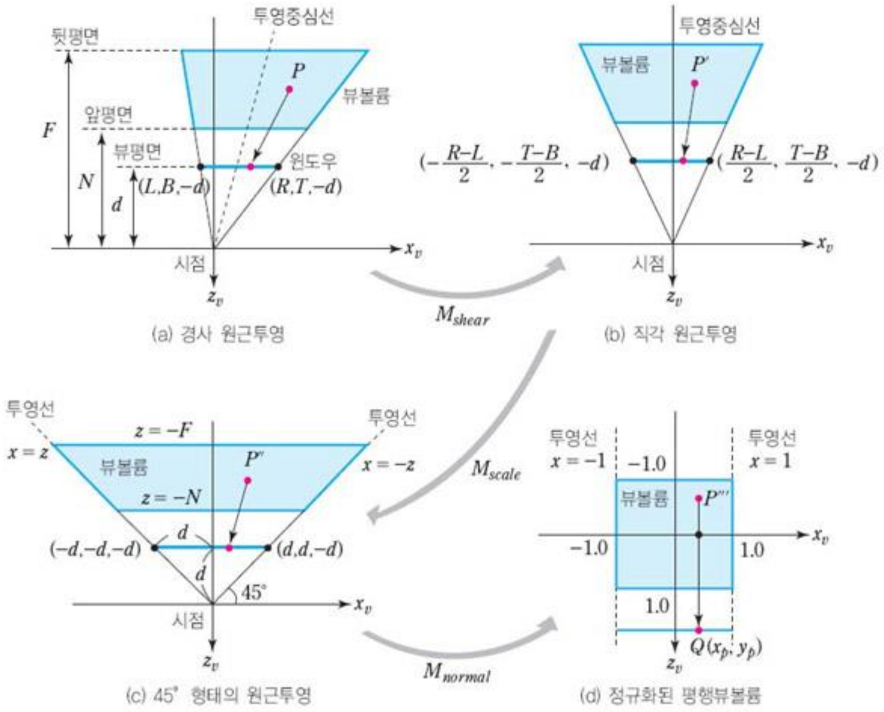
- **원근 투영의 변환 행렬**
  - 프러스텀을 직육면체 형태로 변환하여 직각투영 이용
    - 시점: 뷰잉 좌표계의 원점
    - 윈도우: 법선벡터는 z축 방향
    - 뷰평면 기준: left, right, top, bottom
      - d: 뷰 평면이 놓여진 z 값
    - 프러스텀 뒷 평면과 앞 평면: -F, -N





투영을 위한 변환

- 밀림변환과 신축변환을 수행
  - 과정 1: 경사원근투영을 직각원근투영의 뷰볼륨으로 변환
  - 과정 2: 직각원근투영의 뷰볼륨을 정육면체 형태로 변환
    - 45도 각도의 피라미드 형태의 뷰볼륨으로 변환
    - 피라미드 뷰볼륨을 정육면체 뷰볼륨으로 변환



투영을 위한 변환

- 과정 1: 밀림변환 적용 P 가 P' 으로 변환

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{R+L}{2d} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T+B}{2d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{shear} \cdot P$$

- 과정 2: 신축변환 적용 P’가 P’’로 변환

$$P'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2d}{R-L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2d}{T-B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{scale} \cdot P'$$

- 과정 3: 정규화 적용, P'' 이 P''' 으로 변환

$$P''' = \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & -\frac{2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = M_{normal} \cdot P''$$

- 따라서, 원근 투영 뷰볼륨의 전체 변환 과정은,

$$\begin{aligned} P''' &= M_{persp} \bullet P \\ &= M_{normal} \bullet M_{scale} \bullet M_{shear} \bullet P \end{aligned}$$