

space에 관한 이야기. Column space와 row space.

행렬 A

153

261

즉, 2*3행렬.

A에 곱하려면 3*1행렬 X.

그럼 출력은 2*1행렬.

Row의 Whole space는 3차원.

그럼 row값이 두개니까 나타낼 수 있는 공간이 2차원 밖에안됨.

즉, 나머지 1차원은 null space.

수학적 해석: Null space = $AX=0$. 0으로 이뤄진 2*1행렬.

응용적 해석:입력이 들어와도 출력에 영향을 미치지 않음.

➔ 무언가를 처음 배울 때 딱딱한 모습이다가 나중에 험란해지는 모습. 어찌보면 불필요한 행동

사람의 인생도 결국 null space를 늘리는 과정. Null space를 늘리면서 skillful해짐.

기하적 해석:어떤 방향으로의 변화는 출력에 영향을 미치지 않음. 이것이 바로 null space상에서의 변화.

인공지능: 그림이 들어가면 무엇이라고 인식!

다양한 강아지 사진을 넣어도 강아지가 나옴.

즉, 입력이 변해도 출력이 바뀌지 않음. 즉, null space를 따라 움직이는 것.

$AX=B$ 라고 할 때, X값이 변해도 B값이 변하지 않는다는 것은 null space상에서 일정한 방향을 따라 움직이는 것.

10

01 행렬은 입력이 어떻게 들어가도 출력이 안바뀜.

아이겐벡터는 원점과 입력과 출력이 한 직선 위에 존재하는 순간 생김.

즉, $AX=B$ 라고 할 때 원점과 X 와 B 의 좌표가 한 직선 위에 존재할 때, 그 직선이 바로 아이겐벡터

결국 입, 출력의 위치는 중요치 않음. 방향이 중요한 것.

즉, 주어진 행렬에 대한 아이겐벡터는 무엇인가? 하고 물으면 어떤 값 하나만 존재하는 게 아니라 그 직선 상의 모든 값 (아이겐벡터 space)

2*2행렬에서 아이겐벡터는 2개.

3*3행렬에서 아이겐벡터는 3개.

아이겐벡터는 아이겐밸류가 있음.

아이겐밸류란? 원점과 입력 사이의 거리: 입력과 출력사이의 거리. 이 둘의 비율임!

즉, 원점과 X 사이의 거리가 2인데, X 와 B 의 거리가 5라면 아이겐밸류는 2.5임.

다시 null space가 필요한 이유.

사람은 진화를 하면서 null space를 확보함.

출력의 부분이 우리가 필요한 것이라고 생각.

Nullspace는 방해받지 않고 피하기 위한 방식.

결국 인공지능과도 똑같음. 사진 입력이 변해도 강아지라는 똑같은 출력이 나오도록 null space를 이용.

국영수와 점수를 분석해주는게 아이겐벡터의 역할(?)

<상관관계>

국영수와 성적을 데이터로 다 받아온 후 그래프 그리기.

2차원으로

Y축 영어, X축 수학 점 찍기.

이 점들은 모두 벡터 값.

그렇다면 4차원에 국영수와 점수로 점찍기. 즉, 한 점이 가진 값은 4개. 4차원의 벡터값임.

일단, 2차원에서 그려보자.

점들이 한 선처럼 몰려서 그려진다면? -> 국어가 오르면 영어도 오른다. 이 같이 가는 느낌이 바로 상관관계 co-relation.

상관관계 $-1 \leq r \leq 1$

즉, -1은 완전한 선상에서 반비례, 1은 완전한 선상에서 비례하는 경우를 의미함.

즉, 선상에 얼마나 가까운지가 1, -1에 가까움

점들이 완전히 동그라미처럼 그려지면서 상관관계를 알 수 없으면 0.

!!!! 여기서 선형대수가 어떻게 쓰일까.

국어벡터 : 85명의 국어 점수를 85차원에 그리기. 85차원에서 1개의 차원은 한 사람을 의미.

85개의 점을 찍음.

영어 벡터도 마찬가지로.

그리고 나서 어떤 한 차원에서 국어벡터, 영어벡터, 원점 총3점을.

국어, 원점, 영어의 각도값이 θ_1

국어, 원점, 수학의 각도값이 θ_2

이각도 값에 cos을 붙인게 바로 r.

Ex) $\cos 90 = 0$, $\cos 0 = 1$.

즉, 선형대수로 상관관계를 설명한 것임.

서로 완전히 관계가 없는 것은 $r=0$ 이 되겠지.

각도가 완전히 같으면 세타가 0이니까 $\cos 0 = 1$. 즉, 완벽한 상관관계.

벡터의 점의 위치가 중요한게 아님. 방향만 가지고 각을 재니까.

그렇다면 n차원에서 두 벡터와 원점이 이루는 각도를 어떻게 잴까?

<inner product(=dot product)>

차원에 상관없이, 원점과 두 벡터가 있을 때, 이 것의 inner product는

Ex) inner product의 정의

벡터 A는 [1,2,3]

벡터 B는 [4,5,6]

그렇다면 inner product는 $1*4 + 2*5 + 3*6 = 32$

즉, $A \cdot B = 32$

이 32라는 숫자를 기하학적으로 구하면,

점A에서 직선OB에 수직선을 그었을 때, 직선 OB상에 찍히는 점을 C라고 한다면, $OB \cdot OC = 32$

혹은

점B에서 직선OA에 수직선을 그었을 때, 직선 OA상에 찍히는 점을 C라고 한다면, $OA \cdot OC = 32$

따라서 직선 OA의 길이는 $\cos\theta \cdot OC$!!!

n차원에서 점A의 좌표가 (1,2,3,...n)이라고 한다면

원점으로부터 점A까지의 거리는 루트(1제곱+2제곱+3제곱+...+n제곱)

즉, 우리는 두 직선의 길이를 아니까 각도를 알아낼 수 있음.

->스펙트로그램을 만드는 원리: corelation이 많으면 inner product값이 높게 나오고, corelation이 낮으면 inner product값이 낮게 나옴.

11월 28일

<복습>

아이겐벡터: 행렬A가 $2*2$ 이고 여기에 다른 행렬 X를 곱했을 때, X의 위치와 AX의 위치가 모두 원점으로부터의 직선상에 위치할 때, 그직선상의 모든 값들이 아이겐벡터

즉, 수학적으로하면 $Av = \lambda(\text{일종의 상수}) \cdot v$

즉, 행렬 A에 v라는 아이겐벡터를 곱했을 때, 결국 벡터가 원점으로부터 람다만큼의 비율로 증가했기때문에 위와 같이 표현가능. 즉, 한 직선상에 있음을 의미.

그리고 이 비율을 의미하는 것이 아이겐밸류.

<inner product>

차원에 상관없이, 두 개의 벡터는 원점을 중심으로 삼각형을 만들. 2차원의 평면이 그려지겠지.

Ex> A= 123, B=247 둘다 1*3임.

둘이 곱하려면 transpose해야됨.

B를 3*1로 바꾸면 $1*2+2*4+3*7=31$. 즉, 1*3 행렬 곱하기 3*1 행렬이므로 1*1행렬 31이 나옴.

A를 3*1로 바꾸면

2 4 7

4 8 14

6 12 21

이런 행렬 3*3으로 만들어짐

즉, 위의 경우 행렬 사이즈가 작아졌으니 inner product.

아래의 경우 행렬 사이즈가 커졌으니 outer product

중요한건 inner product.

이는 A.B로 표시 가능. A transpose * B할필요 없이.

기하학적으로 보면 A에서 OB에 수직선 긋고 만나는 점이 C라고 할 때,

OB*OC가 inner product이고, 이는 B에다가 A를 project한 것(?)

결론적으로 $OC*OB = OA*\cos\theta*OB$ 이므로,

우리는 이 공식을 통해 THETA값을 구할 수 있음.

COS세타는 CORELATION r과 거의 유사함.

결국 이 코사인값이 두 벡터 A,B가 얼마나 유사한지를 의미함.

시험: 두개의 벡터를 주고, 코사인 시그널 구하기. 이런거나옴.

음성의 파형을 분석할 때 inner product사용함.

웨이브를 점으로 나타내면, 모두 벡터값임.

예를들어 100개의 벡터값이라면,

즉, 원래의 파형을 100, 200, 300....10000Hz별로 inner product함.

각각의 Hz파형도 100개의 벡터값을 가짐.

애네를 각각 모두 inner product하면, 100개의 innerproduct가 만들어지겠지.

이렇게해서 예를들어 100헤르츠의 ip가 100이고, 200헤르츠의 ip가 10, 1000헤르츠의 ip가 1000이면, 그 파형에서 $1000\text{hz} > 100\text{hz} > 200\text{hz}$ 이런식으로 분석가능. 1000헤르츠는 많고, 200헤르츠는 적고.

이걸 결국 스펙트로그램으로 그리면 1000은 진하게, 200은 연하게.

다시한번 설명

a,b라는 똑같은 파형이 있고,

c라는 파형이 있는데, c의 주기는 a의 두배.

a.b와 a.c의 차이는?

A와 b의 ip는 서로 증가할 때 같이 증가하므로 값이 매우 커짐.

허나 ac는 서로 증감이 다르므로 값이 비교적 작음.

이러한 원리를 이용하여 결국 파형 분석할 때, 둘의 곱이 크려면 둘 다 같이 커야 되니까 이러한 원리를 이용해서 분석을 하는 것임.

파형이 비슷하면 값이 높아지고, 다르면 값이 낮아지고!!

근데 이 방식의 약점.

사인 * 코사인 하면, ip가 0이 나옴.

주기가 똑같으니까 ip가 커야되잖아? 단지 90도 이동했을 뿐인데...

즉, a벡터와 b벡터가 점 개수(n) n차원 상에서 원점과 삼각형을 그렸을 때, 90도라는 것!

따라서 사인 코사인 phasor는 phasor shift에 대한 민감도가 안좋기 때문에,

우리는 complex phasor를 사용할 것임.

이를 통해 phasor에 대한 민감도문제를 해결할 수 있음.