Regla de la Suma, Producto y Permutaciones

Myrian Sadith Gonzalez
Pedro José Molina Morales

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

Regla de la Suma

Definición

Supongamos que hay k tareas a realizarse, donde cada tarea i se puede realizar de n_i formas diferentes, y no es posible realizar tareas de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de ellas se pueden realizar de

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

formas posibles.

Ejemplo:
¿De cuántas formas se puede cruzar un río, sabiendo que se dispone de 3 botes y 4 barcos?
R:$3 + 4 = 7$

Regla del Producto

Definición

Si un procedimiento se puede descomponer en k etapas, y existen que para cada i etapa existen n_i resultados posibles, entonces el procedimiento total se puede realizar en

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$$

formas posibles.

Ejemplo:
¿De cuantas formas se puede vestir una persona que tiene 3 pantalones, 3 camisas y 2 pares de zapatos?
R:$3 \times 3 \times 2 = 18$

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor.

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos?

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25, b) 20

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25, b) 20
3. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar sin dígitos repetidos?

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25, b) 20
3. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar sin dígitos repetidos?R: $9 \times 9 \times 8 = 648$

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25, b) 20
3. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar sin dígitos repetidos?R: $9 \times 9 \times 8 = 648$
4. ¿Cuántas placas diferentes de autos se pueden formar con 3 letras, seguidas de 4 números del 0 al 9? Considere que el alfabeto consta de 25 letras.

Ejemplos

1. ¿De cuántas formas se puede obtener una pizza, si hay 2 opciones de masa (tradicional y especial), y 4 sabores (hawaiana, carne, vegetariana y americana)? Solo se puede pedir una masa y un sabor. R: $2 \times 4 = 8$
2. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos : 1, 2, 3, 4 y 5, si a) Si se pueden repetir los dígitos? b) No se pueden repetir los dígitos? R: a) 25, b) 20
3. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar sin dígitos repetidos?R: $9 \times 9 \times 8 = 648$
4. ¿Cuántas placas diferentes de autos se pueden formar con 3 letras, seguidas de 4 números del 0 al 9? Considere que el alfabeto consta de 25 letras.R: $25^3 \times 10^4 = 156,250,000$

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

   Solución:

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

   Solución:

   Sean n la cantidad de formas que se puede ir de A a B, y m la cantidad de formas que se puede ir de B a C, aplicando la regla de suma obtenemos:

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

   Solución:

   Sean n la cantidad de formas que se puede ir de A a B, y m la cantidad de formas que se puede ir de B a C, aplicando la regla de suma obtenemos:

$$n = 2 + 3 = 5 \text{ y } m = 2 + 2 + 3 = 7$$

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

   Solución:

   Sean n la cantidad de formas que se puede ir de A a B, y m la cantidad de formas que se puede ir de B a C, aplicando la regla de suma obtenemos:

   $$n = 2 + 3 = 5 \text{ y } m = 2 + 2 + 3 = 7$$

   Ahora bien, observemos que el procedimiento de ir de A a C se hace en dos etapas, primeramente de A a B, y luego de B a C, entonces aplicamos la regla del producto.

Ejemplos

En ciertos casos se necesitan aplicar ambas reglas en un mismo ejercicio. Por ejemplo:

1. De la ciudad A a la ciudad B, se puede ir mediante 2 buses o 3 trenes. De la ciudad B a la ciudad C se puede ir mediante 2 barcos, 2 trenes o 3 aviones. ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B?

   Solución:

   Sean n la cantidad de formas que se puede ir de A a B, y m la cantidad de formas que se puede ir de B a C, aplicando la regla de suma obtenemos:

   $$n = 2 + 3 = 5 \text{ y } m = 2 + 2 + 3 = 7$$

   Ahora bien, observemos que el procedimiento de ir de A a C se hace en dos etapas, primeramente de A a B, y luego de B a C, entonces aplicamos la regla del producto.

   R: $m \times n = 7 \times 5 = 35$

Permutaciones sin repetición

Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina **permutación** de la colección.

Definición:

Las permutaciones sin repetición de m elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación, y se define

$$P_n = n!$$

donde $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ y $0! = 1$

Ejemplo: Con las letras de la palabra DISCO ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas se pueden formar?

R: $P_5 = 5! = 120$

Permutaciones de elementos seleccionados

Definición:

Si existen n objetos distintos y r un número entero, entonces por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

$$nPr = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

Si partimos de las letras a,b,c, y nos interesa colocar dos letras a la vez, veremos que hay seis formas de disponerlas o permutarlas: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

En efecto

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Permutaciones con repetición

Definición:

Llamamos permutaciones con repetición de n elementos, cuando en los n elementos existen elementos repetidos no necesariamente iguales.
En general, si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,..., y n_r de un $r-$ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ disposiciones de los n objetos dados.

Ejemplo:
¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?
Solución:
Observemos que hay 3 tipos de objetos, entonces definimos $n_1 = 4$ bolas blancas, $n_2 = 3$ bolas amarillas, y $n_3 = 2$ bolas azules, entonces

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3\cdot 2\cdot 2} = \frac{2520}{2} = 1260$$

R: 1260 maneras

Permutaciones circulares

Definición:

Una permutación circular de n elementos, es aquella que las disposiciones se consideran idénticas si una se puede obtener de la otra mediante una rotación, y se puede demostrar que hay

$$PC_n = (n-1)!$$

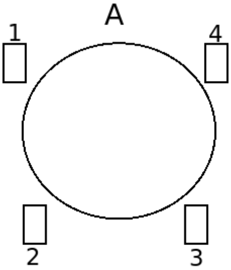
formas posibles.

Permutaciones circulares

¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 amigos alrededor de una mesa circular?

R:$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Ilustración: Supongamos que A, B, C, D y E representan a los 5 amigos.



Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE?

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A?

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$
   b. empiecen y terminen con vocal?

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$
   b. empiecen y terminen con vocal? R: $4 \times 6! \times 3 = 8640$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$
   b. empiecen y terminen con vocal? R: $4 \times 6! \times 3 = 8640$
   c. mantengan el orden de las consonantes? R: $4! = 24$

Ejemplos:

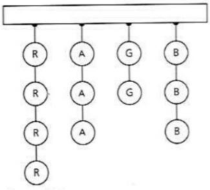
1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$
   b. empiecen y terminen con vocal? R: $4 \times 6! \times 3 = 8640$
   c. mantengan el orden de las consonantes? R: $4! = 24$
3. Queremos ordenar los 7 libros que tenemos: 4 son de matemática, 2 de lengua y 1 de física. ¿De cuántas formas podemos ordenarlos en el estante?

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden formar una cadena de 3 letras, de las letras que pertenecen a la palabra PHONE? R:$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 60$
2. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALMUERZO existen tal que
   a. inicien con A? R: $7! = 5040$
   b. empiecen y terminen con vocal? R: $4 \times 6! \times 3 = 8640$
   c. mantengan el orden de las consonantes? R: $4! = 24$
3. Queremos ordenar los 7 libros que tenemos: 4 son de matemática, 2 de lengua y 1 de física. ¿De cuántas formas podemos ordenarlos en el estante? R: $\frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = 105$

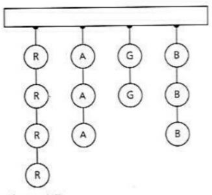
Ejemplos

4. Doce platillos (con forma idéntica) se ordenan en cuatro columnas verticales, donde cada columna le corresponde a un color. Hay cuatro de color rojo en la primera columna, tres de color azúl en la segunda columna, dos grises en la tercera columna y tres blancos en la cuarta. Para entrar al equipo de tiro de su universidad, Dora debe romper el platillo que queda en la parte inferior de la columna, ¿De cuántas formas puede disparar (y romper) los 12 platillos?



Ejemplos

4. Doce platillos (con forma idéntica) se ordenan en cuatro columnas verticales, donde cada columna le corresponde a un color. Hay cuatro de color rojo en la primera columna, tres de color azúl en la segunda columna, dos grises en la tercera columna y tres blancos en la cuarta. Para entrar al equipo de tiro de su universidad, Dora debe romper el platillo que queda en la parte inferior de la columna, ¿De cuántas formas puede disparar (y romper) los 12 platillos?



R: $\dfrac{12!}{4! \times 3! \times 2! \times 3!} = 277200$

Ejemplos

5. Determinar el valor de n tal que cumple con $P(n,2) = 6$.

Ejemplos

5. Determinar el valor de n tal que cumple con $P(n, 2) = 6$.
   Solución:

Ejemplos

5. Determinar el valor de n tal que cumple con $P(n, 2) = 6$.
   Solución:

   Tenemos que

$$P(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n = 6$$

Ejemplos

5. Determinar el valor de n tal que cumple con $P(n,2) = 6$.
   Solución:

   Tenemos que

   $$P(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n = 6$$

   Observemos que es una ecuación de grado 2, realizando factorización obtenemos las raíces $n = 3$,y $n = -2$, entonces tomamos el entero positivo.

Ejemplos

5. Determinar el valor de n tal que cumple con $P(n,2) = 6$.
Solución:

Tenemos que

$$P(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n = 6$$

Observemos que es una ecuación de grado 2, realizando factorización obtenemos las raíces $n = 3$,y $n = -2$, entonces tomamos el entero positivo.
R:$n = 3$

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar?

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

Ejemplos

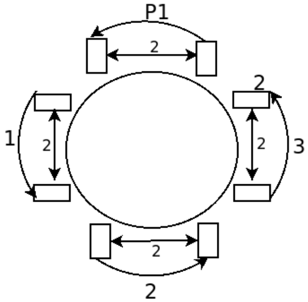
6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

Ilustración:

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

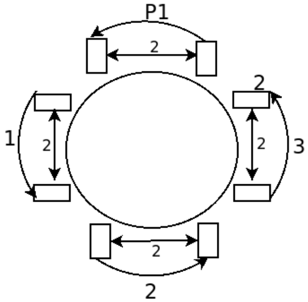
Ilustración:



Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

Ilustración:

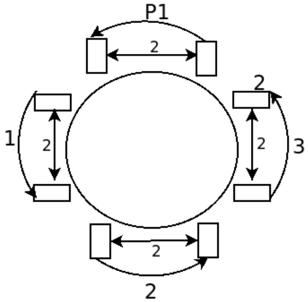


Formas posibles de ubicar las parejas: 3!

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

Ilustración:

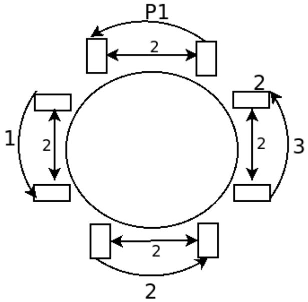


Formas posibles de ubicar las parejas: 3!
Formas posibles de ubicar cada persona de la pareja: 2^4

Ejemplos

6. a) ¿De cuántas formas se pueden sentar ocho personas en torno a una mesa circular ?. b) si se componen de 4 parejas que insisten en sentarse juntas, ¿De cuántas formas se pueden sentar? R: a) $7! = 5040$ b) $3! \times 2^4 = 96$

Ilustración:



Formas posibles de ubicar las parejas: $3!$
Formas posibles de ubicar cada persona de la pareja: 2^4
Regla de producto: $3! \times 2^4 = 96$

Ejercicios de práctica

1. Durante una campaña local, ocho candidatos republicanos y cinco demócratas se nominan para presidentes del consejo escolar.
    a. Si el presidente va a ser alguno de estos candidatos, ¿cuántas posibilidades hay para el posible ganador? R: 13
    b. ¿Cuántas posibilidades hay para que una pareja de candidatos (uno de cada partido) se opongan entre si en la elección final? R: 40
2. a. ¿De cuántas formas es posible ordenar los símbolos a, c, f, g, i, t, w, x? R: $40,320$
    b. ¿Cuántas de las permutaciones de la parte anterior, comienzan con la letra t? R: 5760
    c. ¿Cuántas de las permutaciones de la parte anterior comienzan con la letra t y terminan con la letra c? R: 720
3. ¿De cuántas formas es posible ordenar los símbolos a,b,c,d,e,e,e,e,e de modo que ninguna e queda junto a otra? R: 3024
4. ¿Cuántos enteros distintos de cuatro dígitos se pueden formar con los números 1,3,3,7,7, y 8? R: 180

Ejercicios de práctica

5. ¿Cuántas permutaciones de la palabra ALMUERZO existen tal que inicien con vocal o terminen con vocal?
   Nota: *Considérelo por casos:*
   Caso 1: Inicie con vocal y no termine en vocal
   Caso 2: Inicie con consonante y termine en vocal
   Caso 3: Inicie y termine con vocal.

   Luego aplicar la regla de la suma.

   R: 31,680

6. Los **números hexadecimales** son números representados en base 16, que generalmente utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. ¿Cúantos números hexadecimales de 6 dígitos se pueden formar?
   R: 15,728,640