Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación

Tarea Unidad II
MM420 Matemática Discreta

1. Para el universo de los enteros sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ las siguientes proposiciones abiertas

$p(x)$: $x > 0$
$q(x)$: x es par
$r(x)$: x es un cuadrado perfecto
$s(x)$: x es exactamente divisible por 4
$t(x)$: x es exactamente divisible por 5
$a(x, y)$: x e y son números pares
$b(x, y)$: $x + y$ es un número impar

1.1. Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica, además determine si es verdadera o falsa, y en caso de ser falsa, dé un contraejemplo.

a. Al menos un entero es par.
b. Existe al menos un entero positivo que es par.
c. Si x es par, entonces x no es divisible por 5
d. Ningún entero par es divisible por 5
e. Existe un x tal que para todo y, $x + y$ es un número par.
f. Para todo x e y, si x, y son números pares entonces $x + y$ es un número par.
g. Para algunos x, y, si $x + y$ son pares, entonces x e y son impares.

1.2. Exprese en palabras cada una de las siguientes representaciones simbólicas, además determine la negación de cada una, verifique su valor de verdad, en caso de falso, dé un contraejemplo.

a. $\forall x[r(x) \to p(x)]$
b. $\forall x[s(x) \to \neg t(x)]$
c. $\exists x[s(x) \wedge \neg r(x)]$
d. $\forall x[\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$
e. $\exists x \exists y[a(x, y) \wedge b(x, y)]$
f. $\forall x \forall y[\neg b(x, y) \to a(x, y)]$

2. Para las siguientes proposiciones, el universo abarca todos los enteros distintos de cero. Determine el valor de verdad y niegue cada una.

a. $\exists x \forall y[xy = 1]$
b. $\forall x \forall y[\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y]$

c. $\exists x \exists y[(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$

d. $\exists x \exists y[\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2} = 7 \wedge \sqrt{4x^2 + 16xy + 16y^2} = 3)]$

e. $\forall x \forall y \left[\frac{x^2y - y}{y} = (x-1)(x+1)\right]$

3. Para un universo dado y cualesquiera proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ en la variable x, demuestre que

   a. $\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$

   b. $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$

   c. $\forall x p(x) \vee \forall q(x) \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$

   d. Encuentre un contraejemplo para la recíproca del inciso c.
   Recomendación: encuentre proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ y un universo tal que $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ sea verdadera, pero $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ sea falsa.

4. Sean m, n dos enteros positivos. Demuestre que si m y n son cuadrados perfectos, entonces el producto mn también es un cuadrado perfecto.

5. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, determine el número de

   a. subconjuntos de A.

   b. subconjuntos propios de A

   c. subconjuntos de A que contienen al menos cinco elementos, pero no más de 9.

   d. subconjuntos propios de A que contengan a los números $1, 2, 3$.

   e. subconjuntos de A que contienen un número par de elementos.

6. Demuestre o refute con un contraejemplo lo siguiente

   a. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}$, $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

   b. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}$, $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$

   c. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}$, $[(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)] \Rightarrow A = B$

   d. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}$, $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$

7. Mediante las leyes de la teoría de conjuntos, simplifique lo siguiente

   a. $A \cap (B \cap ((A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$

   b. $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) \cup (A^c \cap B)$

   c. $(A - B) \cup (A \cap B)$

8. Demuestre lo siguiente mediante inducción matemática

   a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$

   c. $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

   d. $\displaystyle(1+x)^n \geq 1 + (n+1)n + \frac{(n+1)nx^2}{2}$

   e. $2^n \geq 1 + n$

9. Considere las siguientes 6 ecuaciones:

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ 1^2+0^2=1^2 & (3)\ 5^2+12^2=13^2 & (5)\ 9^2+40^2=41^2 \\
(2)\ 3^2+4^2=5^2 & (4)\ 7^2+24^2=25^2 & (6)\ 11^2+60^2=61^2
\end{array}
$$

   Conjeture la fórmula general y demuéstrela.

10. Dé una definición recursiva para cada una de las sucesiones de enteros c_1, c_2,..., donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

    a. $c_n = 10n$
    b. $c_n = 10^n$
    c. $c_n = (n+1)(n+2)$
    d. $c_n = 2-(-1)^n$

11. Dé una definición recursiva para la disyunción de proposiciones $p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}, , \geq 1$

12. Dé una deficinión recursiva para la intersección de conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} \subset \mathcal{U}$