Teoría de conjuntos

Myrian Sadith González
Pedro José Molina Morales

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

1. Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

1. Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

1. Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   En este caso, podemos decir que $4 \in B$, pero $7 \notin B$.

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

1. Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
En este caso, podemos decir que $4 \in B$, pero $7 \notin B$.
Además, otra notación común es $B = \{x | x \text{ es un entero y } 1 \leq x \leq 5\}$, donde la línea vertical | se lee ¨tal que”. Entonces el conjunto B se lee ¨el conjunto de todos los x tal que x es un entero y $1 \leq x \leq 5$.

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que son miembros del conjunto.
Usualmente se utilizan letras mayúsculas A, B, C,..., para representar los conjuntos, y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $z \notin A$ cuando z no es un miembro de A.

Ejemplos:

1. Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   En este caso, podemos decir que $4 \in B$, pero $7 \notin B$.
   Además, otra notación común es $B = \{x | x \text{ es un entero y } 1 \leq x \leq 5\}$, donde la línea vertical $|$ se lee ¨tal que". Entonces el conjunto B se lee ¨el conjunto de todos los x tal que x es un entero y $1 \leq x \leq 5$.
   Podemos también denotar $B = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, pero con la condición que el universo $\mathscr{U}$ sean los enteros. Si $\mathscr{U}$ son todos los números reales, entonces el conjunto $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$ contendría a todos los números reales entre 1 y 5, inclusive. Si $\mathscr{U}$ son los números enteros impares, entonces $\{x | 1 \leq x \leq 5\} = \{1, 3, 5\}$.

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2 | x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2 | x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2 | x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\} = \{x^2 | x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 81\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 81\}$
   c. $C = \{2n|n \in \mathscr{U}\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 81\}$
   c. $C = \{2n|n \in \mathscr{U}\} = \{2, 4, 6, ...\}$

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 81\}$
   c. $C = \{2n|n \in \mathscr{U}\} = \{2, 4, 6, ...\}$

   Los conjuntos A y B son ejemplos de conjuntos finitos, mientras que C es un conjunto infinito.

Conjuntos

Definición

Para cualquier conjunto finito A. Se define el **cardinal** de A como el número de sus elementos o el tamaño de A y se denota $|A|$.

Ejemplo

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, ...\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos, sean
   a. $A = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x|x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 9\}$
   b. $B = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 100\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 < 95\} = \{x^2|x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 81\}$
   c. $C = \{2n|n \in \mathscr{U}\} = \{2, 4, 6, ...\}$

   Los conjuntos A y B son ejemplos de conjuntos finitos, mientras que C es un conjunto infinito. Además, $|A| = 9$ y $|B| = 9$.

Subconjunto

Definición:

Si A, B son conjuntos del universo $\mathscr{U}$, decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$, si cada elemento de A es un elemento de B. Si, además, B contiene un elemento que no está en A, entonces A es un **subconjunto propio** y se denota $A \subset B$ o $B \supset A$

Subconjunto

Definición:

Si A, B son conjuntos del universo $\mathscr{U}$, decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$, si cada elemento de A es un elemento de B. Si, además, B contiene un elemento que no está en A, entonces A es un **subconjunto propio** y se denota $A \subset B$ o $B \supset A$

Observemos que para cualesquiera conjuntos A, B del universo. Si $A \subseteq B$ entonces

$$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

y si $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$, entonces $A \subseteq B$.

Subconjunto

Definición:

Si A, B son conjuntos del universo $\mathscr{U}$, decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$, si cada elemento de A es un elemento de B. Si, además, B contiene un elemento que no está en A, entonces A es un **subconjunto propio** y se denota $A \subset B$ o $B \supset A$

Observemos que para cualesquiera conjuntos A, B del universo. Si $A \subseteq B$ entonces

$$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

y si $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$, entonces $A \subseteq B$.

Además, para todos los conjuntos A, B de $\mathscr{U}$

$$A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$$

y cuando A,B son finitos

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$$

$$A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$$

Ejemplos

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$,

Ejemplos

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$,entonces las siguientes proposiciones son verdaderas.
   a. $A \subset B$

Ejemplos

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$,entonces las siguientes proposiciones son verdaderas.
   a. $A \subset B$
   b. $A \subseteq B$

Ejemplos

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$,entonces las siguientes proposiciones son verdaderas.
   a. $A \subset B$
   b. $A \subseteq B$
   c. $B \nsubseteq A$

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\}$.

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\}$.
   Observemos que $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\} = \{1, 2\}$

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\}$.
   Observemos que $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\} = \{1, 2\}$, entonces podemos decir que
   - $A \subseteq B$
   - $B \subseteq A$

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\}$.
   Observemos que $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\} = \{1, 2\}$, entonces podemos decir que
   - $A \subseteq B$
   - $B \subseteq A$

$$\therefore A = B$$

Igualdad de conjuntos

Definición

Para un universo $\mathscr{U}$, los conjuntos A y B son **iguales**, y esto se escribe $A = B$ cuando $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ consideremos a $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\}$.
   Observemos que $B = \{x | x^2 \in \mathscr{U}\} = \{1, 2\}$, entonces podemos decir que
   - $A \subseteq B$
   - $B \subseteq A$

$$\therefore A = B$$

Observación: según la definición vemos que el orden o la repetición no son significativos para un conjunto en general. Por ejemplo:
$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$

Negación de la definición de subconjunto

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Negación de la definición de subconjunto

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Entonces la negación es

$$\begin{array}{ll}
 & A \nsubseteq B \\
\Leftrightarrow & \neg\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B] \\
\Leftrightarrow & \exists x \neg[x \in A \Rightarrow x \in B] \\
\Leftrightarrow & \exists x \neg[\neg(x \in A) \vee (x \in B)] \\
\Leftrightarrow & \exists x[(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \\
\Leftrightarrow & \exists x[(x \in A) \wedge (x \notin B)]
\end{array}$$

Negación de la definición de subconjunto

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Entonces la negación es

$$\begin{array}{cl} & A \nsubseteq B \\ \Leftrightarrow & \neg\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg[\neg(x \in A) \vee (x \in B)] \\ \Leftrightarrow & \exists x[(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \\ \Leftrightarrow & \exists x[(x \in A) \wedge (x \notin B)] \end{array}$$

Es decir, A no es subconjunto de B si, y solo si existe al menos un elemento tal que x es miembro de A y no de B.

Negación de la definición de igualdad

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Negación de la definición de igualdad

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Entonces la negación es

$$\begin{aligned} & A \neq B \\ \Leftrightarrow \quad & \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \\ \Leftrightarrow \quad & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{aligned}$$

Es decir, dos conjuntos no son iguales si, y solo si (1) existe al menos un elemento $x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in A$ pero $x \notin B$,

Negación de la definición de igualdad

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Entonces la negación es

$$\begin{array}{rl} & A \neq B \\ \Leftrightarrow & \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \\ \Leftrightarrow & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{array}$$

Es decir, dos conjuntos no son iguales si, y solo si (1) existe al menos un elemento $x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in A$ pero $x \notin B$, o (2) existe al menos un elemento $y \in \mathscr{U}$ tal que $y \in B$ pero $y \notin A$,

Negación de la definición de igualdad

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Entonces la negación es

$$\begin{aligned} & A \neq B \\ \Leftrightarrow \quad & \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \\ \Leftrightarrow \quad & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{aligned}$$

Es decir, dos conjuntos no son iguales si, y solo si (1) existe al menos un elemento $x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in A$ pero $x \notin B$, o (2) existe al menos un elemento $y \in \mathscr{U}$ tal que $y \in B$ pero $y \notin A$, o pueden ocurrir (1) y (2).

Negación de la definición de igualdad

Sabemos que para los conjuntos A, B de un universo dado, tenemos que

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Entonces la negación es

$$\begin{array}{rl} & A \neq B \\ \Leftrightarrow & \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \\ \Leftrightarrow & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{array}$$

Es decir, dos conjuntos no son iguales si, y solo si (1) existe al menos un elemento $x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in A$ pero $x \notin B$, o (2) existe al menos un elemento $y \in \mathscr{U}$ tal que $y \in B$ pero $y \notin A$, o pueden ocurrir (1) y (2).

Observemos que para cualesquiera A, B conjuntos de $\mathscr{U}$ tenemos

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más).

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

i) $A \subseteq \mathscr{U}$	ii) $A \subset \mathscr{U}$	iii) $A \in \mathscr{U}$
iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$	v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$	vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

i) $A \subseteq \mathscr{U}$	ii) $A \subset \mathscr{U}$	iii) $A \in \mathscr{U}$
iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$	v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$	vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,y ahora vemos que

      i) $A \in B$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,y ahora vemos que

      i) $A \in B$ ii) $\{A\} \subseteq B$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,y ahora vemos que

      i) $A \in B$ ii) $\{A\} \subseteq B$ iii) $\{A\} \subset B$
      iv) $\{A\} \notin B$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,y ahora vemos que

      i) $A \in B$ ii) $\{A\} \subseteq B$ iii) $\{A\} \subset B$
      iv) $\{A\} \notin B$ v) $A \not\subseteq B$

Ejemplos

1. Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde x, y representan letras del alfabeto y no representan nada más). Entonces $|\mathscr{U}| = 11$
   a. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

      i) $A \subseteq \mathscr{U}$ ii) $A \subset \mathscr{U}$ iii) $A \in \mathscr{U}$
      iv) $\{A\} \subseteq \mathscr{U}$ v) $\{A\} \subset \mathscr{U}$ vi) $\{A\} \notin \mathscr{U}$

   b. Ahora sea, $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$.Entonces $|B| = 5$,y ahora vemos que

      i) $A \in B$ ii) $\{A\} \subseteq B$ iii) $\{A\} \subset B$
      iv) $\{A\} \notin B$ v) $A \nsubseteq B$ vi) $A \not\subset B$

Propiedades

Teorema

Sean $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
b. Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
c. Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$
d. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Propiedades

Demostración:

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$.
Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$

$$A \subseteq C$$

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$
$$A \subseteq C$$

b. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$
$$A \subseteq C$$

b. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Además, $B \subseteq C$, entonces $x \in C$, por lo que $A \subseteq C$

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$
$$A \subseteq C$$

b. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Además, $B \subseteq C$, entonces $x \in C$, por lo que $A \subseteq C$. Sin embargo $A \subset B$, implica que existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, pero como $B \subseteq C$, entonces $b \in C$

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$
$$A \subseteq C$$

b. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Además, $B \subseteq C$, entonces $x \in C$, por lo que $A \subseteq C$. Sin embargo $A \subset B$, implica que existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, pero como $B \subseteq C$, entonces $b \in C$. Así existe $b \in C$ tal que $b \notin A$, entonces $A \neq C$.

Propiedades

Demostración:

a. Para demostrar que $A \subseteq C$, necesitamos verificar que para todo $x \in \mathscr{U}$, si $x \in A$, entonces $x \in C$.
Sea $x \in A$ (tomado arbitrariamente), como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Ahora bien, como $B \subseteq C$, se tiene que $x \in C$, dado que $x \in B$. Hemos probado que si $x \in A$, entonces $x \in C$, y como tomamos x arbitrariamente, por la regla de generalización universal tenemos que $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in C]$
$$A \subseteq C$$

b. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Además, $B \subseteq C$, entonces $x \in C$, por lo que $A \subseteq C$. Sin embargo $A \subset B$, implica que existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, pero como $B \subseteq C$, entonces $b \in C$. Así existe $b \in C$ tal que $b \notin A$, entonces $A \neq C$.
$$\therefore A \subset C$$

Conjunto vacío

Definición

El **conjunto vacío** o **nulo**, es el único conjunto que no contiene elementos. Se denota como $\emptyset$ o $\{\}$.

Observaciones:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $\{0\} \neq \emptyset$
3. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Conjunto vacío

Teorema 2

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Conjunto vacío

Teorema 2

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Demostración: (por contradicción)

Conjunto vacío

Teorema 2

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Demostración: (por contradicción)

Supongamos que $\emptyset \not\subseteq A$, entonces por definición existe un elemento x tal que $x \in \emptyset$ pero $x \notin A$

Conjunto vacío

Teorema 2

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Demostración: (por contradicción)

Supongamos que $\emptyset \nsubseteq A$, entonces por definición existe un elemento x tal que $x \in \emptyset$ pero $x \notin A$. Pero $x \in \emptyset$ es imposible dado que el conjunto vacío no tiene elementos, entonces $\emptyset \subseteq A$

Conjunto vacío

Teorema 2

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Demostración: (por contradicción)

Supongamos que $\emptyset \nsubseteq A$, entonces por definición existe un elemento x tal que $x \in \emptyset$ pero $x \notin A$. Pero $x \in \emptyset$ es imposible dado que el conjunto vacío no tiene elementos, entonces $\emptyset \subseteq A$. Ahora bien, si $A \neq \emptyset$, entonces existe $a \in A$ y $a \notin \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$

Conjunto potencia

Definición

Si A es un conjunto del universo $\mathscr{U}$. El **conjunto potencia**, que se denota por $\mathscr{P}(A)$ es la colección (o conjunto) de todos los subconjuntos A.

En general, para cualquier conjunto finito A con $n \geq 0$, A tiene 2^n subconjuntos y $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$. Para cualquier k, $0 \leq k \leq n$, existen $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k.

Si sumamos todos los subconjuntos de tamaño k de A, tenemos la identidad combinatoria

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

   Solución:

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
    a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

       Solución:
       Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

    b. Determine el conjunto potencia de A.

       Solución

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

      Solución
      $$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \cdots \\ &= \cdots \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, A\} \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

      Solución

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \cdots \\ &= \cdots \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A\} \end{aligned}$$

   c. Determine cuántos subconjuntos de tamaño 2 tiene el conjunto A.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

      Solución
      $$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \cdots \\ &= \cdots \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, A\} \end{aligned}$$

   c. Determine cuántos subconjuntos de tamaño 2 tiene el conjunto A.

      Solución:

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

      Solución
      $$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \cdots \\ &= \cdots \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A\} \end{aligned}$$

   c. Determine cuántos subconjuntos de tamaño 2 tiene el conjunto A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces hay $\binom{4}{2} = 6$ subconjuntos de cardinalidad 2.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   a. Determine la cardinalidad del conjunto potencia de A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

   b. Determine el conjunto potencia de A.

      Solución
      $$\begin{aligned} \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \cdots \\ &= \cdots \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A\} \end{aligned}$$

   c. Determine cuántos subconjuntos de tamaño 2 tiene el conjunto A.

      Solución:
      Tenemos que $|A| = 4$, entonces hay $\binom{4}{2} = 6$ subconjuntos de cardinalidad 2.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

   Solución:

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

   Solución:
   Hay 15 subconjuntos propios dado que $|\mathscr{P}(A)| = 16$, y el único subconjunto que no es propio de A es A.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

      Solución:
      Hay 15 subconjuntos propios dado que $|\mathscr{P}(A)| = 16$, y el único subconjunto que no es propio de A es A.

   e. Determine el número de subconjuntos propios de A que contengan a las letras a y d.

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

   Solución:
   Hay 15 subconjuntos propios dado que $|\mathscr{P}(A)| = 16$, y el único subconjunto que no es propio de A es A.

   e. Determine el número de subconjuntos propios de A que contengan a las letras a y d.

   Solución:

Ejemplos

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ de un universo $\mathscr{U}$ dado.
   d. Cuántos subconjuntos propios tiene A.

   Solución:
   Hay 15 subconjuntos propios dado que $|\mathscr{P}(A)| = 16$, y el único subconjunto que no es propio de A es A.

   e. Determine el número de subconjuntos propios de A que contengan a las letras a y d.

   Solución:
   Observemos que tienen que ser subconjuntos con cardinalidad 2 y 3 que contengan las letras a y d. Entonces hay 3.

Operaciones con conjuntos

Definición

Para $A, B \subseteq \mathscr{U}$ definimos lo siguiente

a. La **unión** A **y** B como $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
b. La **intersección de** A **y** B como $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
c. La **diferencia de** A **y** B como $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
d. La **diferencia simétrica de** A **y** B como $A \triangle B = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$
e. El **complemento de** A como $\mathscr{U} - A = \overline{A} = A^c = \{x | x \in \mathscr{U} \wedge x \notin A\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
    a. $A \cap B = \{3, 4\}$
    b. $A \cup B$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$

   a. $A \cap B = \{3, 4\}$

   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$

   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
    a. $A \cap B = \{3, 4\}$
    b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
    c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
    d. $A - B$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$
   f. $A \cap C$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$
   f. $A \cap C = \emptyset$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$
   f. $A \cap C = \emptyset$
   g. $A \cup C$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,a,b,c\}$, $A = \{1,2,3,4,a\}$, $B = \{3,4,5,b\}$, y $C = \{7,8,9,c\}$

   a. $A \cap B = \{3,4\}$
   b. $A \cup B = \{1,2,3,4,a,5,b\} = \{1,2,3,4,5,a,b\}$
   c. $A \triangle B = \{1,2,5,a,b\}$
   d. $A - B = \{1,2,a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5,6,7,b,c\}$
   f. $A \cap C = \emptyset$
   g. $A \cup C = \{1,2,3,4,a,7,8,9,c\} = \{1,2,3,4,7,8,9,a,c\}$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$
   f. $A \cap C = \emptyset$
   g. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, a, 7, 8, 9, c\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, a, c\}$
   h. $A \triangle C$

Ejemplos

1. Si $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$, $B = \{3, 4, 5, b\}$, y $C = \{7, 8, 9, c\}$
   a. $A \cap B = \{3, 4\}$
   b. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, 5, b\} = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$
   c. $A \triangle B = \{1, 2, 5, a, b\}$
   d. $A - B = \{1, 2, a\}$
   e. $A^c = \mathscr{U} - A = \{5, 6, 7, b, c\}$
   f. $A \cap C = \emptyset$
   g. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, a, 7, 8, 9, c\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, a, c\}$
   h. $A \triangle C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, a, c\}$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

por la regla de amplificación disyuntiva.

Operaciones con conjuntos

Corolario

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Demostración

i. Demostraremos que $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

por la regla de simplificación conjuntiva

ii. Demostraremos que $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

por la regla de amplificación disyuntiva.

$$\therefore A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Conjuntos disjuntos

Definición

Sean $C, D \subseteq \mathscr{U}$. Los conjuntos C y D son **disjuntos o mutuamente disjuntos** si $C \cap D = \emptyset$.

Conjuntos disjuntos

Definición

Sean $C, D \subseteq \mathscr{U}$. Los conjuntos C y D son **disjuntos o mutuamente disjuntos** si $C \cap D = \emptyset$.

Teorema 3

Sean $C, D \subseteq \mathscr{U}$. C y D son disjuntos si, y solo si $C \cup D = C \triangle D$

Propiedades de conjuntos

Teorema 4

Para cualquier universo $\mathscr{U}$ y cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. $A \subseteq B$	b. $A \cup B = B$
c. $A \cap B = A$	d. $B^c \subseteq A^c$

Propiedades de conjuntos

Teorema 4

Para cualquier universo $\mathscr{U}$ y cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. $A \subseteq B$ b. $A \cup B = B$

c. $A \cap B = A$ d. $B^c \subseteq A^c$

Demostración:

Propiedades de conjuntos

Teorema 4

Para cualquier universo $\mathscr{U}$ y cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. $A \subseteq B$	b. $A \cup B = B$
c. $A \cap B = A$	d. $B^c \subseteq A^c$

Demostración:

Demostraremos que (a.)$\Rightarrow$(b.), (b.)$\Rightarrow$(c.), (c.)$\Rightarrow$(d.) y (d.)$\Rightarrow$(a.).

Propiedades de conjuntos

Teorema 4

Para cualquier universo $\mathscr{U}$ y cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. $A \subseteq B$ b. $A \cup B = B$

c. $A \cap B = A$ d. $B^c \subseteq A^c$

Demostración:

Demostraremos que (a.)⇒(b.), (b.)⇒(c.), (c.)⇒(d.) y (d.)⇒(a.).Esto se sigue dado que por las leyes de la lógica para p, q y r proposiciones tenemos que

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)]$$

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$ por corolario demostrado anteriormente

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$ por corolario demostrado anteriormente. Ahora bien, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$, pero $A \subseteq B$, entonces tenemos que $x \in B \vee x \in B$. Así, $A \cup B \subseteq B$, y por definición de igualdad concluimos $A \cup B = B$.

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$ por corolario demostrado anteriormente. Ahora bien, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$, pero $A \subseteq B$, entonces tenemos que $x \in B \vee x \in B$. Así, $A \cup B \subseteq B$, y por definición de igualdad concluimos $A \cup B = B$.

ii. (b.)$\Rightarrow$(c.), Si $A \cup B = B$, entonces $A \cap B = A$.

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$ por corolario demostrado anteriormente. Ahora bien, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$, pero $A \subseteq B$, entonces tenemos que $x \in B \vee x \in B$. Así, $A \cup B \subseteq B$, y por definición de igualdad concluimos $A \cup B = B$.

ii. (b.)$\Rightarrow$(c.), Si $A \cup B = B$, entonces $A \cap B = A$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $A \cap B \subseteq A$ por corolario

Propiedades de conjuntos

i. (a.)$\Rightarrow$ (b.), Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$ por corolario demostrado anteriormente. Ahora bien, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$, pero $A \subseteq B$, entonces tenemos que $x \in B \vee x \in B$. Así, $A \cup B \subseteq B$, y por definición de igualdad concluimos $A \cup B = B$.

ii. (b.)$\Rightarrow$(c.), Si $A \cup B = B$, entonces $A \cap B = A$.
Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $A \cap B \subseteq A$ por corolario. Ahora bien, sea $x \in A$, como $A \cup B = B$, entonces tenemos que $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$. Por lo cúal se tiene que $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$.

$$A \cap B = A$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración:

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
Demostración:

sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$x \in (A \cap B)^c$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración:

sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$x \in (A \cap B)^c \quad \Rightarrow \quad x \notin A \cap B$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración:

sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

   Demostración:

   sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración:

sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Demuestre una de las propiedades de la teoría de conjuntos llamada ley de De Morgan.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demostración:

sea $x \in \mathscr{U}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Entonces $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$x \in A^c \cup B^c$$

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$x \in A^c \cup B^c \quad \Rightarrow \quad x \in A^c \vee x \in B^c$$

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \end{aligned}$$

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B \end{aligned}$$

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^c \end{aligned}$$

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^c \end{aligned}$$

Entonces $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

Ejemplos

Ahora bien, falta probar la inclusión opuesta. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^c \end{aligned}$$

Entonces $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

$$\therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejercicios de práctica

1. Sea $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
   a. $1 \in A$
   b. $\{1\} \in A$
   c. $\{1, 2\} \in A$
   d. $\{1, 2\} \subseteq A$
   e. $\{2\} \in A$
2. Demuestre los incisos c. y d. del teorema 1.
3. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine el número de
   a. subconjuntos de A
   b. subconjuntos de A que contienen tres elementos.
4. Para $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Determine lo siguiente
   a. $(A \cup B) \cap C$
   b. $(C \cap B)^c$
   c. $A \cup (B - C)$
5. Demuestre (c.)$\Rightarrow$(d.) y (d.)$\Rightarrow$(a.), del teorema 4.
6. Demuestre todas las propiedades de los conjuntos. (El archivo de las propiedades está disponible en la plataforma).