Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Facultad de Ciencias

Escuela de Matematicas y Ciencias de la Computación

Tarea Unidad II

MM-420 Mat. Discreta.

Sofia Gineth Valladares Videa.

Ing. Sistemas

20171004366.

0800.

1. Para el universo de los enteros sean $p(x), q(x), r(x), s(x),$ y $t(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$p(x): x > 0.$

$q(x)$: x es par.

$r(x)$: x es un cuadrado perfecto.

$s(x)$: x es exactamente divisible por 4.

$t(x)$: x es exactamente divisible por 5.

$a(x,y)$: x e y son números pares

$b(x,y)$: $x+y$ es un número par.

1.1 Escriba las siguientes proposiciones en forma simbolica, además determine si es verdadera o falsa, y en caso de ser falsa, dé un contraejemplo:

a. Al menos un entero es par.

$\exists x \; q(x) \longrightarrow$ Verdadero

b. Existe al menos un entero positivo que es par.

$\exists x [p(x) \wedge q(x)] \longrightarrow$ Verdadero.

c. Si x es par, entonces x no es divisible por 5

$\forall x [q(x) \rightarrow \sim t(x)] \longrightarrow$ Falso, sea $x = 20$

d. Ningún entero par es divisible por 5.

$\forall x [q(x) \rightarrow \sim t(x)] \longrightarrow$ Falso, sea $x = 20$

e. Existe un x tal que para todo y, $x+y$ es un número par.
$\exists! x \forall y [\sim b(x,y)]$

f. Para todo x e y, si x, y son numeros pares entonces $x+y$ es un número par.
$\forall x \forall y [a(x,y) \rightarrow \sim b(x,y)]$

g. Para algunos x, y, si $x+y$ son pares, entonces x e y son impares.
$\exists x \exists y [\sim b(x,y) \rightarrow \sim a(x,y)]$

- Valores de verdad.

a. Verdadero

b. Verdadero

c. $x = 20 \rightarrow$ Falso

d. $x = 20 \rightarrow$ Falso

e. $x = 4,\ y = 1 \rightarrow$ Falso

f. Verdadero

g. Verdadera.

1.2 Exprese en palabras cada una de las siguientes representaciones simbólicas, además determine la negación de cada una, verifique su valor de verdad, en caso de falso, de un contraejemplo.

a. $\forall x [r(x) \rightarrow p(x)]$
Para cualquier x, si x es un cuadrado perfecto entonces $x > 0$.

$\neg[\forall x [r(x) \rightarrow p(x)]$
$\exists x \neg [r(x) \rightarrow p(x)]$
$\exists x \neg (\neg r(x) \vee p(x)]$
$\exists x (r(x) \wedge \sim p(x))$

Valor de verdad:
~~Verdadero~~
Falso
$x = 0$.

20171004366

b. $\forall x [s(x) \rightarrow \neg t(x)]$

Valor de verdad.

$\neg(\forall x [s(x) \rightarrow \neg t(x)]$

Falso

$\exists x \neg [s(x) \rightarrow \neg t(x)]$

Sea $x = 100$

$\exists x [\neg[\neg s(x) \vee \neg t(x)]$

$\exists x [s(x) \wedge t(x)]$

- Para cualquier x, si x es exactamente divisible por 4 entonces x no es exactamente divisible por 5.

c. $\exists x [s(x) \wedge \neg r(x)]$

Valor de Verdad:

$\neg [\exists x [s(x) \wedge \neg r(x)]$

Verdadero

$\forall x [\neg s(x) \vee r(x)]$

- Para algunos x, x es exactamente divisible por 4 y x no es un cuadrado perfecto.

d. $\forall x [\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$

Valor de Verdad:

$\neg[\forall x [\neg r(x) \vee \neg q(x) \vee s(x)]$

Verdadero.

$\exists x [r(x) \wedge q(x) \wedge \neg s(x)]$

- Para cualquier x, x no es un cuadrado perfecto, o x no es par o x es exactamente divisible por 4.

e. $\exists x \exists y [a(x,y) \wedge b(x,y)]$

Valor de Verdad

$\neg [\exists x \exists y [a(x,y) \wedge b(x,y)]$

Verdadero

$\forall x \forall y [\neg a(x,y) \vee \neg b(x,y)]$

- Para algunos x e y, x e y son números pares y $x+y$ es un número par

f. $\forall x \forall y [\neg b(x,y) \rightarrow a(x,y)]$

Valor de Verdad:

$\neg[\forall x \forall y [\neg b(x,y) \rightarrow a(x,y)]]$

Falso.

$\exists x \exists y [\neg (b(x,y) \vee a(x,y)]$

$x = 7$

$y = 2$

$\exists x \exists y [\neg b(x,y) \wedge \neg a(x,y)]$

- Para todo x e y, si $x+y$ es un número impar entonces x e y son números pares.

20171004366.

2. Para las siguientes proposiciones, el universo abarca todos los enteros distintos de cero. Determine el valor de verdad y niegue cada una.

a: ~~$\exists x \exists y$~~

$\exists x \forall y [xy = 1]$ | Falso

$\neg [\exists x \forall y [x \cdot y = 1]]$ | Cuando

$\forall x \exists y \neg [xy = 1]$ | $x = 1$,

$\forall x \exists y [xy \neq 1]$ | $y = 1$

b. $\forall x \forall y [sen^2(x) + cos^2(x) = sen^2(y) + cos^2(y)]$ | Verdadero

$\neg [\forall x \forall y [sen^2(x) + cos^2(x) = sen^2(y) + cos^2(y)]]$

$\exists x \exists y \neg [sen^2(x) + cos^2(x) = sen^2(y) + cos^2(y)]$

$\exists x \exists y [sen^2(x) + cos^2(x) \neq sen^2(y) + cos^2(y)]$

c. $\exists x \exists y [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$ | Falso.

$\neg [\exists x \exists y [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]]$

$\forall x \forall y \neg [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$

$\forall x \forall y [(2x + y \neq 5) \vee (x - 3y \neq -8)]$

d. $\exists x \exists y [(\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2} = 7 \wedge \sqrt{4x^2 + 16xy + 16y^2} = 3)]$ | V

$\neg [\exists x \exists y [(\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2} = 7 \wedge \sqrt{4x^2 + 16xy + 16y^2} = 3)]]$

$\forall x \forall y \neg [(\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2} = 7 \wedge \sqrt{4x^2 + 16xy + 16y^2} = 3)]$

$\forall x \forall y [(\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2} \neq 7 \vee \sqrt{4x^2 + 16xy + 16y^2} \neq 8)]$

e. $\forall x \forall y [\frac{x^2y - y}{y} = (x-1)(x+1)]$ | Falso.

$\neg [\forall x \forall y [\frac{x^2y - y}{y} = (x-1)(x+1)]]$

$\exists x \exists y \neg [\frac{x^2y - y}{y} = (x-1)(x+1)]$

$\exists x \exists y [\frac{x^2y - y}{y} \neq (x-1)(x+1)]$

Escaneado con CamScanner

20171004366.

3. Para un universo dado y cualesquiera proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ en la variable x, demuestre que

a. $\underbrace{\exists x[p(x) \vee q(x)]}_{\alpha} \Leftrightarrow \underbrace{\exists x p(x) \vee \exists x q(x)}_{\beta}$

· Cuando α es verdadero significa que al menos un valor en el universo lo hace verdadero. Al menos una proposición es verdadera y valor de 1, entonces al menos una proposición $\exists x\, p(x)$ y $\exists x\, q(x)$ es verdadera.

b. $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$

· Hay que ver donde $\forall x$ es verdadera. Esto pasa cuando $p(c)$ y $q(c)$ es verdadero para cualquier valor que le demos a c, si es así entonces $\forall x\, p(x)$, $\forall x\, q(x)$ son verdaderos.

c. $\forall x p(x) \vee \forall q(x) \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$

· Supongamos que la proposición $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$ es verdadera. Teniendo que $\forall x\, p(x)$ es verdadera. Eso significa que por cada c $p(c)$ es verdadero.

d. Encuentre un contraejemplo para la recíproca del inciso c. Recomendación: encuentre proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ y un universo tal que $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ sea verdadera, pero $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ sea falsa.

$\left.\begin{array}{l} p(x): x>0 \\ q(x): x<0 \end{array}\right\}$ Para el universo de todos los enteros, pero no 0.

$\Rightarrow \forall x p(x), \forall x q(x) = \text{falso}$

$\therefore \forall x p(x) \vee \forall x q(x) = \text{falso}$

mientras $\forall x(p(x) \vee q(x)] = \text{verdadera}$.

Escaneado con CamScanner

201710043 66.

4. Sean m, n dos enteros positivos. Demuestre que si m y n son cuadrados perfectos, entonces el producto mn también es un cuadrado perfecto.

$m = 9 = 3^2$
$n = 4 = 2^2$ } Enteros positivos; cuadrados perfectos.

$\Rightarrow m \cdot n =$ cuadrado perfecto.

$9 \times 4 = 36$ ✓

$\therefore$ El producto de $m \cdot n$ es un cuadrado perfecto.

5. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ determine el número de:

a. Subconjuntos de A.

$2^{10} = 1{,}024$ subconjuntos

b. Subconjuntos propios de A.

$1{,}024 - 1 = 1{,}023$ subconjuntos propios.

c. Subconjuntos de A que contienen al menos cinco elementos, pero no más de 9.

$\binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} = 637$ subconjuntos

d. Subconjuntos propios de A que contengan a los números 1, 2, 3.

$\underbrace{\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}_{175} - 1 = 174$ subconjuntos propios

e. Subconjuntos de A que contienen un número par de elementos.

$\binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = 511$ subconjuntos.

20171004366

6. Demuestre o refute con un contraejemplo lo siguiente.

a. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}, A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

$\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{4,5,6\}$

$C = \{2,4,6\}$

$A \cap C = \{2\}$ ¦ $B \cap C = \{4,6\} \Rightarrow A \cap C \neq B \cap C$

$\therefore$ Falso

b. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}, A \overset{\cup}{\cancel{\cap}} C = B \overset{\cup}{\cancel{\cap}} C \Rightarrow A = B$

$A = \{1\}$

$B = \{1,2\}$

$C = \{1,3\}$

$A \cup C = \{1,3\}$ ¦ $B \cup C = \{1,2,3\} \Rightarrow A \neq B$

$\therefore$ Falso

c. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}, [(A \cap C = B \cap C) \wedge [A \cup C = B \cup C]] \Rightarrow A = B$

$A = \{1\}$

$B = \{1,2\}$

$C = \{1,3\}$

$A \cap C = \{1\}$ ¦ $B \cap C = \{1\}$, $A \cup C = \{1,3\}$ ¦ $B \cup C = \{1,2,3\}$

$(A \cup C = B \cap C) \wedge (A \cup C \neq B \cup C) \Rightarrow A \neq B$

$\therefore$ Falso

d. Para conjuntos $A, B, C \subset \mathcal{U}, A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$

$A = \{1\}$

$B = \{1,2\}$

$C = \{1,3\}$

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \Delta C = (A \cup C) - (A \cap C) = \{1,3\} - \{1\} = \{3\}$

$B \Delta C = (B \cup C) - (B \cap C) = \{1,2,3\} - \{1\} = \{2,3\}$

$\Rightarrow A \Delta C \neq B \Delta C$

$A \neq B$

$\therefore$ Falso.

20171004366.

7. Mediante las leyes de la teoría de conjuntos, simplifique lo siguiente.

a. $A \cap (B \cap ((A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$

	Reglas
$A \cap (B \cap (A^c \cup (B \cap B^c)))$	Ley Distributiva
$A \cap ((B \cap A^c) \cup (B \cap B^c))$	Ley Asociativa
$A \cap (B \cup (A^c \cap B^c))$	Ley de Absorción
$(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$	Ley Asociativa
$(A \cap B \cup A^c) \cap (A \cap B \cap B^c)$	Ley Distibutiva
$(A \cup A^c \cap B) \cap (A \cap B \cap B^c)$	Ley Comutativa.
$(U \cap B) \cap (A \cap \emptyset)$	Inversa
$B \cap \emptyset$	
$\emptyset$	

b. $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap (C^c \cap D) \cup (A^c \cap B)$

	Reglas
$(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$	Ley de Absorción
$(B \cap A) \cup (B \cap A^c)$	Ley Comutativa.
$B \cap (A \cup A^c)$	Ley Distibutiva.
$B \cap U$	Inversa.
B	

c. $(A - B) \cup (A \cap B)$

	Reglas
$(A \cap B^c) \cup (A \cap B)$	Por definición
$A \cap (B^c \cup B)$	Ley Distributiva.
$A \cap U$	Inverso.
A	

20171004366.

8. Demuestre lo siguiente mediante inducción matemática.

a. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Para $n=k$.

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = S(k)$$

$$S(k+1): \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k^2+2k+1)(k^2+4k+4)}{4} = \frac{k^4+4k^3+4k^2+2k^3+8k+k^2+4k+4}{4}$$

$$= \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$$

Tenemos.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1) = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)}{4} = \frac{k^2(k+1)^2+4k+4}{4}$$

$$= \frac{k^2(k^2+2k+1)+4k+4}{4} = \frac{k^4+2k^3+k^2+4k+4}{4}$$

$$= \frac{k^4+2k^3+k^2+4k+4}{4}$$

$\therefore$ Es verdadera porque $S(n)$ es verdadera.

20171004366.

b. $\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$

Para $n=k$.

$$\sum_{i=1}^{k} 2(3^{i-1}) = 3^k - 1$$

$$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} 2(3^{i-1}) = 3^{k+1} - 1$$

Tenemos.

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2(3^{i-1}) = 3^k - 1 + (k+1)$$

$$= 3^k \cancel{-1} + k \cancel{+1} = 3^k + k$$

Condiciones,

$$1^{\circ}\ S(1): \sum_{i=1}^{1} 2(3^{1-1}) = 3^1 - 1$$

$$2 = 2$$

∴ Es verdadero porque para todo $S(n)$ es verdadero.

c. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

$$S(1): \binom{2(1)}{1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k}^2$$

$$\binom{2}{1} = \cancel{\binom{1}{0}^2}^{\to 1} + \cancel{\binom{1}{1}^2}^{\to 1}$$

$2 = 2 \longrightarrow$ es verdadero.

Sea $n=k$

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2$$

$$S(k+1): \binom{2(k+1)}{k+1} = \binom{2k}{k}$$

20171004866.

d. $(1+x)^n \geq 1 + (n+1)n + \frac{(n+1)nx^2}{2}$

$S(1): (1+x)^1 \geq 1 + (1+1)(1) + \frac{(1+1)(1)x^2}{2}$

$x+1 \geq 1 + 2 + \frac{2x^2}{\cancel{2}}$

$x+1 \geq 3 + \frac{x^2}{2}$

$x+1 \geq \frac{6+x^2}{2}$

No se conoce el valor de x

$\therefore$ No se puede determinar si $S(1)$ [el caso base] es verdadero.

e. $2^n \geq 1+n$

$S(1): 2^{(1)} \geq 1+1$

$2 \geq 2 \rightarrow$ Es verdadero.

Sea $n=K$

$\Rightarrow 2^K \geq 1+K$

$S(K+1): 2^{K+1} = 2^K \cdot 2$

$2^{K+1} \geq 2(1+K)$

$2^{K+1} \geq 2+2K$

$2K \geq K$ para $K \geq 1$

$2^{K+1} \geq 2+K$

$2^{K+1} \geq 1+(1+K)$

$S(1)$ es verdadero, para $n=K$ también $n=K+1$ es verdadera.

$\therefore$ Es verdadero.

20171004366.

9. Considere las siguientes 6 ecuaciones

(1) $1^2 + 0^2 = 1^2$

(2) $3^2 + 4^2 = 5^2$

(3) $5^2 + 12^2 = 13^2$

(4) $7^2 + 24^2 = 25^2$

(5) $9^2 + 40^2 = 41^2$

(6) $11^2 + 60^2 = 61^2$

Conjeture la fórmula y demuéstrela.

(1) $\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{array}\right\} + = 1 = 1^2$

(2) $3^2 = 9 = 4 + 2 \cdot 3 - 1 = C_2 + 2 \cdot 3 - 1$

$4^2 = 16 = 9 + 2 \cdot 4 - 1 = C_3 + 2 \cdot 4 - 1$

(3) $5^2 = 25 = 16 + 2 \cdot 5 - 1 = C_5 + 2 \cdot 5 - 1$

$12^2 = 144 = 121 + 2 \cdot 12 - 1 = C_{12} + 2 \cdot 12 - 1$

(4) $7^2 = 49 = 36 + 2 \cdot 7 - 1 = C_7 + 2 \cdot 7 - 1$

$24^2 = 576 = 529 + 2 \cdot 24 - 1 = C_{24} + 2 \cdot 24 - 1$

(5) $9^2 = 81 = 64 + 2 \cdot 9 - 1 = C_9 + 2 \cdot 9 - 1$

$40^2 = 1{,}600 = 1521 + 2 \cdot 40 - 1 = C_{40} + 2 \cdot 40 - 1$

(6) $11^2 = 121 = 100 + 2 \cdot 11 - 1 = C_{11} + 2 \cdot 11 - 1$

$60^2 = 3{,}600 = 3{,}480 + 2 \cdot 60 - 1 = C_{60} + 2 \cdot 60 - 1$

20171004366.

10. Dé una definición recursiva para cada una de las sucesiones de enteros $c_1, c_2, \ldots,$ donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene.

a. $C_n = 10n$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 10 \\ C_{n+1} = C_n + 7 \end{array}\right\} \text{Para } n \geq 1$$

b. $C_n = 10^n$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 10 \\ C_{n+1} = 10\,C_n, \end{array}\right\} \text{Para } n \geq 1$$

c. $C_n = (n+1)(n+2)$

$C_1 = (1+1)(1+2)$
$= (2)(3)$
$= 6$

d. $C_n = 2-(-1)^n$

$C_1 = 2-(-1)^1$

$C_1 = 2+1$
$= 3$

11. Dé una definición recursiva para la disyunción de proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, , \geq 1$

Para cualquier $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ definimos

(1) la disyunción de p_1, p_2 como $p_1 \vee p_2$

(2) la disyunción de p_1, p_2, p_n, p_{n+1} como

$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \vee p_{n+1} \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee p_{n+1}.$

20171004366.

12. Dé una definición recursiva para la intersección de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} \subseteq U$.

- la intersección de A_1, A_2 es $A_1 \cap A_2$
- la intersección de $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ es

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1}$
siendo la intersección de los dos conjuntos

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ con A_{n+1}