Relaciones y funciones

Myrian Sadith González
Pedro José Molina Morales

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

1. Producto cartesiano
2. Relaciones
3. Funciones
   - Funciones inyectivas
   - Funciones sobreyectivas
4. Número de Stirling

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si A, B son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6\}$. Entonces

a) $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si A, B son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6\}$. Entonces

a) $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$
b) $B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si A, B son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6\}$. Entonces

a) $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$
b) $B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
c) $B^2 = B \times B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si A, B son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6\}$. Entonces

a) $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$

b) $B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

c) $B^2 = B \times B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

d) $B^3 = B \times B \times B = \{(a, b, c) | a, b, c \in B\}$, por ejemplo, $(5, 6, 6) \in B^3$

Producto cartesiano

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, el **producto cartesiano**, de A y B se denota con $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Decimos que los elementos de $A \times B$ son **pares ordenados**. Además, para $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tenemos que $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si A, B son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6\}$. Entonces

a) $A \times B = \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$
b) $B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
c) $B^2 = B \times B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
d) $B^3 = B \times B \times B = \{(a, b, c) | a, b, c \in B\}$, por ejemplo, $(5, 6, 6) \in B^3$

Observación: del inciso b. podemos decir que generalmente no ocurre que $A \times B = B \times A$.

Relaciones

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, cualquier subconjunto $A \times B$ es una **relación** de A en B, usualmente se denota por $\mathscr{R}$.
Cualquier subconjunto $A \times A$ es una **relación binaria** en A.

En general, para conjuntos finitos A, B, existen $2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Relaciones

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, cualquier subconjunto $A \times B$ es una **relación** de A en B, usualmente se denota por $\mathscr{R}$.
Cualquier subconjunto $A \times A$ es una **relación binaria** en A.

En general, para conjuntos finitos A, B, existen $2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Tenemos que $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$. Las siguientes son relaciones de A en B

a) $\emptyset$	b) $\{(3, 4)\}$
c) $\{(2, 4), (4, 5)\}$	d) $\{(2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
e) $\{(2, 5)\}$	f) $A \times B$

Relaciones

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, cualquier subconjunto $A \times B$ es una **relación** de A en B, usualmente se denota por $\mathscr{R}$.
Cualquier subconjunto $A \times A$ es una **relación binaria** en A.

En general, para conjuntos finitos A, B, existen $2^{|A\times B|} = 2^{|A|\cdot|B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Tenemos que $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$. Las siguientes son relaciones de A en B

a) $\emptyset$ b) $\{(3, 4)\}$
c) $\{(2, 4), (4, 5)\}$ d) $\{(2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
e) $\{(2, 5)\}$ f) $A \times B$

Como $|A \times B| = 6$, de la definición se sigue que existen 2^6 posibles relaciones de A en B

Relaciones

Definición

Para los conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, cualquier subconjunto $A \times B$ es una **relación** de A en B, usualmente se denota por $\mathscr{R}$.
Cualquier subconjunto $A \times A$ es una **relación binaria** en A.

En general, para conjuntos finitos A, B, existen $2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Ejemplo

Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Tenemos que $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$. Las siguientes son relaciones de A en B

a) $\emptyset$	b) $\{(3, 4)\}$
c) $\{(2, 4), (4, 5)\}$	d) $\{(2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
e) $\{(2, 5)\}$	f) $A \times B$

Como $|A \times B| = 6$, de la definición se sigue que existen 2^6 posibles relaciones de A en B. Es decir, que para cada $\mathscr{R} \in \mathscr{P}(A \times B)$, es una relación.

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C)$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B$ y $b \in C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B$ y $b \in C \Leftrightarrow a \in A$ o $a \in B$, y $b \in C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B$ y $b \in C \Leftrightarrow a \in A$ o $a \in B$, y $b \in C \Leftrightarrow a \in A, b \in C$ o $a \in B, b \in C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B$ y $b \in C \Leftrightarrow a \in A$ o $a \in B$, y $b \in C \Leftrightarrow a \in A, b \in C$ o $a \in B, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times C$ o $(a, b) \in B \times C$

Relaciones

Teorema

Para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
d) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración:

a) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ y $b \in B, C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ y $a \in A, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

d) Para $a, b \in \mathscr{U}$, $(a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B$ y $b \in C \Leftrightarrow a \in A$ o $a \in B$, y $b \in C \Leftrightarrow a \in A, b \in C$ o $a \in B, b \in C \Leftrightarrow (a, b) \in A \times C$ o $(a, b) \in B \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

Funciones

Definición

Para los conjuntos no vacíos A, B, una **función, o aplicación**, f de A en B, que se denota con $f : A \to B$, es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primera componente de un par ordenado en la relación.

Generalmente escribimos $f(a) = b$ cuando (a, b) es un par ordenado en la función f, b se conoce como la **imagen** de a mediante f, mientras que a es la **preimagen** de b.

En consecuencia, si $f(a) = b$ y $f(a) = c$, entonces $b = c$, dado que f es una función.

Funciones

Definición

Para los conjuntos no vacíos A, B, una **función, o aplicación**, f de A en B, que se denota con $f : A \to B$, es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primera componente de un par ordenado en la relación.

Generalmente escribimos $f(a) = b$ cuando (a, b) es un par ordenado en la función f, b se conoce como la **imagen** de a mediante f, mientras que a es la **preimagen** de b.

En consecuencia, si $f(a) = b$ y $f(a) = c$, entonces $b = c$, dado que f es una función.

Ejemplo:

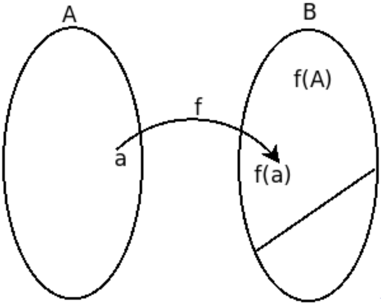
Sean $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$. Tenemos que $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$. Las siguientes son ejemplos de funciones

- $f = \{(2, 4), (3, 5), (4, 4)\}$
- $g = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$

Funciones

Definición

Para la función $f : A \to B$, A es el **dominio** (conjunto de partida) de f y B es el **codominio** (conjunto de llegada) de f. El subconjunto de B formado por aquellos elementos que aparecen como segundas componentes segundas componentes de los pares ordenados de f se conoce como la **imagen o rango** de f y se denota también $f(A)$ ya que es el conjunto de imágenes mediante f.



Ejemplos

1. Si $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{a, b, c, d\}$.
   - $f = \{(4, a), (6, b), (8, b), (10, c)\}$ es una función , el dominio de f es $\{4, 6, 8, 10\}$, el codominio es $\{a, b, c, d\}$ y la imagen de f es $f(A) = \{a, b, c\}$.

Ejemplos

1. Si $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{a, b, c, d\}$.
   - $f = \{(4, a), (6, b), (8, b), (10, c)\}$ es una función , el dominio de f es $\{4, 6, 8, 10\}$, el codominio es $\{a, b, c, d\}$ y la imagen de f es $f(A) = \{a, b, c\}$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^2$. El dominio de f es $\mathbb{R}$, el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen de f es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Ejemplos

1. Si $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{a, b, c, d\}$.
    - $f = \{(4, a), (6, b), (8, b), (10, c)\}$ es una función , el dominio de f es $\{4, 6, 8, 10\}$, el codominio es $\{a, b, c, d\}$ y la imagen de f es $f(A) = \{a, b, c\}$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^2$. El dominio de f es $\mathbb{R}$, el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen de f es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.
3. La función suelo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ está dada por

   $$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero menor o igual que } x.$$

   En consecuencia, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Z}$, y si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f(x)$ es el entero inmediato a la izquierda de x. Por ejemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 4.8 \rfloor = 4$, $\lfloor -4.8 \rfloor = -5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$

Ejemplos

1. Si $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{a, b, c, d\}$.
   - $f = \{(4, a), (6, b), (8, b), (10, c)\}$ es una función , el dominio de f es $\{4, 6, 8, 10\}$, el codominio es $\{a, b, c, d\}$ y la imagen de f es $f(A) = \{a, b, c\}$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^2$. El dominio de f es $\mathbb{R}$, el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen de f es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.
3. La función suelo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ está dada por
   $$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero menor o igual que } x.$$
   En consecuencia, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Z}$, y si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f(x)$ es el entero inmediato a la izquierda de x. Por ejemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 4.8 \rfloor = 4$, $\lfloor -4.8 \rfloor = -5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$
4. La función techo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ está dada por
   $$g(x) = \lceil x \rceil = \text{el menor entero mayor o igual que } x.$$
   En consecuencia, $g(x) = x$ si $x \in \mathbb{Z}$, y si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $g(x)$ es el entero inmediato a la derecha de x. Por ejemplo, $\lceil 4 \rceil = 4$, $\lceil 4.8 \rceil = 5$, $\lceil -4.8 \rceil = -4$, $\lceil -4 \rceil = -4$

Funciones

Proposición

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$ conjuntos finitos no vacíos, entonces existen $|B|^{|A|}$ funciones de A en B.

Funciones

Proposición

Sean $A, B \subseteq \mathscr{U}$ conjuntos finitos no vacíos, entonces existen $|B|^{|A|}$ funciones de A en B.

Ejemplo:

Si $A = \{a, b, c\}$, $B = \{w, x, y, z\}$

- entonces existen $|B|^{|A|} = 4^3 = 64$ funciones $f : A \to B$.
- entonces existen $|A|^{|B|} = 3^4 = 81$ funciones $g : B \to A$.
- entonces existen $|A|^{|A|} = 3^3 = 27$ funciones $h : A \to A$.

Funciones inyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ se denomina **uno a uno** o **inyectiva**, si cada elemento de B aparece como máximo una vez como la imagen de un elemento de A.

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si, y solo si para cada $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Si $f : A \to B$ es inyectiva con A, B finitos, debemos tener que $|A| \leq |B|$.

Funciones inyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ se denomina **uno a uno** o **inyectiva**, si cada elemento de B aparece como máximo una vez como la imagen de un elemento de A.

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si, y solo si para cada $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Si $f : A \to B$ es inyectiva con A, B finitos, debemos tener que $|A| \leq |B|$.

Ejemplos

1. Sean $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. La función

$$f = \{(1, 2), (3, 6), (5, 4)\}$$

es una función uno a uno de A en B. Por otro lado, la función

$$g = \{(1, 2), (3, 10), (5, 10)\}$$

es una función de A en B, pero no es uno a uno, ya que $g(3) = g(5)$, pero $3 \neq 5$.

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $f(x_1) = f(x_2)$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}}$$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5}$$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

   por lo que f es una función uno a uno.

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

   por lo que f es una función uno a uno.
3. Demuestre o refute que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2 - 1$ es uno a uno.

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

   por lo que f es una función uno a uno.
3. Demuestre o refute que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2 - 1$ es uno a uno.
   Solución:

   Observemos que

   $$h(1) = (1)^2 - 1 = 0$$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

   por lo que f es una función uno a uno.
3. Demuestre o refute que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2 - 1$ es uno a uno.
   Solución:

   Observemos que
   $$h(1) = (1)^2 - 1 = 0$$
   y
   $$h(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

Ejemplos

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\sqrt{3x-5}}$ es uno a uno.
   Demostración:

   Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{\sqrt{3x_1-5}} = e^{\sqrt{3x_2-5}} \Rightarrow \sqrt{3x_1 - 5} = \sqrt{3x_2 - 5} \Rightarrow x_1 = x_2$$

   por lo que f es una función uno a uno.
3. Demuestre o refute que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2 - 1$ es uno a uno.
   Solución:

   Observemos que
   $$h(1) = (1)^2 - 1 = 0$$
   y
   $$h(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$
   En consecuencia, h no es uno a uno.

Funciones inyectivas

Proposición

Sean A, B finitos tal que $|A| = m$ y $|B| = n$ con $m \leq n$, entonces existen $P(n, m)$ funciones inyectivas de A en B.

Funciones inyectivas

Proposición

Sean A, B finitos tal que $|A| = m$ y $|B| = n$ con $m \leq n$, entonces existen $P(n, m)$ funciones inyectivas de A en B.

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces existen $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ funciones inyectivas de A en B.

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{-9, -7, -5, -3\}$, sea $f = \{(2, -9), (4, -7), (6, -7), (8, -5), (10, -5)\}$. Entonces para $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4, 6\}$, y $A_5 = \{4, 6, 8, 10\}$, encontramos las siguientes imágenes mediante f

- $f(A_1) = \{f(a) | a \in A_1\} = \{f(2)\} = \{-9\}$

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{-9, -7, -5, -3\}$, sea $f = \{(2, -9), (4, -7), (6, -7), (8, -5), (10, -5)\}$. Entonces para $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4, 6\}$, y $A_5 = \{4, 6, 8, 10\}$, encontramos las siguientes imágenes mediante f

- $f(A_1) = \{f(a)|a \in A_1\} = \{f(2)\} = \{-9\}$
- $f(A_2) = \{f(a)|a \in A_2\} = \{f(2), f(4)\} = \{-9, -7\}$

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{-9, -7, -5, -3\}$, sea $f = \{(2, -9), (4, -7), (6, -7), (8, -5), (10, -5)\}$. Entonces para $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4, 6\}$, y $A_5 = \{4, 6, 8, 10\}$, encontramos las siguientes imágenes mediante f

- $f(A_1) = \{f(a) | a \in A_1\} = \{f(2)\} = \{-9\}$
- $f(A_2) = \{f(a) | a \in A_2\} = \{f(2), f(4)\} = \{-9, -7\}$
- $f(A_3) = \{f(a) | a \in A_3\} = \{f(2), f(4), f(6)\} = \{-9, -7, -7\} = \{-9, -7\}$

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{-9, -7, -5, -3\}$, sea $f = \{(2, -9), (4, -7), (6, -7), (8, -5), (10, -5)\}$. Entonces para $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4, 6\}$, y $A_5 = \{4, 6, 8, 10\}$, encontramos las siguientes imágenes mediante f

- $f(A_1) = \{f(a)|a \in A_1\} = \{f(2)\} = \{-9\}$
- $f(A_2) = \{f(a)|a \in A_2\} = \{f(2), f(4)\} = \{-9, -7\}$
- $f(A_3) = \{f(a)|a \in A_3\} = \{f(2), f(4), f(6)\} = \{-9, -7, -7\} = \{-9, -7\}$
- $f(A_4) = \{f(a)|a \in A_4\} = \{f(4), f(6)\} = \{-7, -7\} = \{-7\}$

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces

$$f(A_1) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_1\}$$

y $f(A_1)$ se conoce como la imagen de A_1 mediante f.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{-9, -7, -5, -3\}$, sea $f = \{(2, -9), (4, -7), (6, -7), (8, -5), (10, -5)\}$. Entonces para $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{4, 6\}$, y $A_5 = \{4, 6, 8, 10\}$, encontramos las siguientes imágenes mediante f

- $f(A_1) = \{f(a)|a \in A_1\} = \{f(2)\} = \{-9\}$
- $f(A_2) = \{f(a)|a \in A_2\} = \{f(2), f(4)\} = \{-9, -7\}$
- $f(A_3) = \{f(a)|a \in A_3\} = \{f(2), f(4), f(6)\} = \{-9, -7, -7\} = \{-9, -7\}$
- $f(A_4) = \{f(a)|a \in A_4\} = \{f(4), f(6)\} = \{-7, -7\} = \{-7\}$
- $f(A_5) = \{f(a)|a \in A_5\} = \{f(4), f(6), f(8), f(10)\} = \{-7, -7, -5, -5\} = \{-7, -5\}$

Funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ con $A_1, A_2 \subseteq A$. Entonces

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ cuando f es inyectiva.

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces $f|_{A_1} : A_1 \to B$ es la **restricción** de f a A_1, donde $f|_{A_1}(a) = f(a)$ para todo $a \in A_1$.

Definición

Sea $A_1 \subseteq A$ y $f : A_1 \to B$. Si $g : A \to B$ y $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A_1$, entonces g es una **extensión** de f a A.

Funciones

Definición

Si $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, entonces $f|_{A_1} : A_1 \to B$ es la **restricción** de f a A_1, donde $f|_{A_1}(a) = f(a)$ para todo $a \in A_1$.

Definición

Sea $A_1 \subseteq A$ y $f : A_1 \to B$. Si $g : A \to B$ y $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A_1$, entonces g es una **extensión** de f a A.

Ejemplo

Para $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida como $f = \{(2, 3), (4, 15), (6, 35), (8, 63), (10, 99)\}$. Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 - 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Por último, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = t^2 - 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces

- g es una extensión de f de A a $\mathbb{Q}$
- f es una restricción de g de $\mathbb{Q}$ a A.
- h es una extensión de g de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Funciones sobreyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva**, o **sobre**, si $f(A) = B$, es decir, si para todo $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ con $f(a) = b$.

Funciones sobreyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva**, o **sobre**, si $f(A) = B$, es decir, si para todo $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ con $f(a) = b$.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -2x + 4$ para cualquier $x \in \mathbb{Z}$. En este caso la imagen de f es $\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\} \subseteq \mathbb{Z}$, y podemos ver que f no es una función sobreyectiva, por ejemplo, el entero 7 no está en la imagen de f, dado que no existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$-2x + 4 = 7$$

La ecuación tiene solución para $x = -\frac{3}{2}$, pero este valor no es parte del dominio.

Funciones sobreyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva**, o **sobre**, si $f(A) = B$, es decir, si para todo $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ con $f(a) = b$.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -2x + 4$ para cualquier $x \in \mathbb{Z}$. En este caso la imagen de f es $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$, y podemos ver que f no es una función sobreyectiva, por ejemplo, el entero 7 no está en la imagen de f, dado que no existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$-2x + 4 = 7$$

   La ecuación tiene solución para $x = -\frac{3}{2}$, pero este valor no es parte del dominio.

   Por otro lado, sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que $g(x) = -2x + 4$ si es sobre, y lo mostramos de la siguiente manera.
   Sea $b \in \mathbb{Q}$, entonces necesitamos encontrar $x \in \mathbb{Q}$ tal que

   $$-2x + 4 = b$$

   teniendo una solución $x = -\frac{b-4}{2} \in \mathbb{Q}$.

Ejemplos

2. La función $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ln(x + 2)$ es una función sobre, ya que en este caso, sea $r \in \mathbb{R}$, entonces tomamos $x = e^r - 2 \in (-2, \infty)$ y vemos que $f(e^r - 2) = ln(e^r - 2 + 2) = ln(e^r) = r$.

$$\therefore f((-2, \infty)) = \mathbb{R}$$

Ejemplos

2. La función $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ln(x+2)$ es una función sobre, ya que en este caso, sea $r \in \mathbb{R}$, entonces tomamos $x = e^r - 2 \in (-2, \infty)$ y vemos que $f(e^r - 2) = ln(e^r - 2 + 2) = ln(e^r) = r$.

$$\therefore f((-2, \infty)) = \mathbb{R}$$

3. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x^2 - 5$, no es sobre, pues no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 5 = -6$. Así, tenemos que la imagen de g es $g(\mathbb{R}) = [-5, \infty)$. Sin embargo, si tomamos $h : \mathbb{R} \to [-5, \infty)$ definida como $h(x) = x^2 - 5$ es sobre.

Ejemplos

2. La función $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ln(x + 2)$ es una función sobre, ya que en este caso, sea $r \in \mathbb{R}$, entonces tomamos $x = e^r - 2 \in (-2, \infty)$ y vemos que $f(e^r - 2) = ln(e^r - 2 + 2) = ln(e^r) = r$.

$$\therefore f((-2, \infty)) = \mathbb{R}$$

3. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x^2 - 5$, no es sobre, pues no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 5 = -6$. Así, tenemos que la imagen de g es $g(\mathbb{R}) = [-5, \infty)$. Sin embargo, si tomamos $h : \mathbb{R} \to [-5, \infty)$ definida como $h(x) = x^2 - 5$ es sobre.
4. Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{-6, -4, -2\}$ entonces

$$f_1 = \{(2, -2), (4, -4), (6, -6), (8, -4)\} \quad f_2 = \{(2, -2), (4, -6), (6, -4)\}$$

son ambas funciones de A sobre B. Sin embargo, la función $g = \{(2, -6), (4, -6), (6, -4), (8, -4)\}$ no es sobre, ya que $g(A) = \{-6, -4\} \neq B$.

Funciones sobreyectivas

Proposición

Para los conjuntos finitos A, B tales que $|A| = m$ y $|B| = n$ con $m \geq n$, existen

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

funciones sobre de A en B.

Funciones sobreyectivas

Proposición

Para los conjuntos finitos A, B tales que $|A| = m$ y $|B| = n$ con $m \geq n$, existen

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

funciones sobre de A en B.

Ejemplos

1. Si $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Si aplicamos la fórmula con $m = 7$ y $n = 5$, vemos que existen

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{5-k} (5-k)^7 = \binom{5}{5} 5^7 - \binom{5}{4} 4^7 + \binom{5}{3} 3^7 - \binom{5}{2} 2^7 + \binom{5}{1} 1^7 = 16800$$

funciones de A sobre B.

Número de Stirling

Proposición

Para $m \geq n$, existen $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ formas de distribuir m objetos distintos en n recipientes numerados, sin que quede ningún recipiente vacío. Si eliminamos los números de los recipientes, de modo que ahora tengan una apariencia idéntica, vemos que una distribución de estos n recipientes idénticos corresponde con $n!$ de estas distribuciones en los recipientes numerados.

Así, el número de formas que se pueden distribuir los m objetos en n recipientes idénticos, sin que quede ninguno vacío, es

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

Este número se le conoce como el **número de Stirling de segundo tipo**.

Número de Stirling

Proposición

Para $m \geq n$, existen $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ formas de distribuir m objetos distintos en n recipientes numerados, sin que quede ningún recipiente vacío. Si eliminamos los números de los recipientes, de modo que ahora tengan una apariencia idéntica, vemos que una distribución de estos n recipientes idénticos corresponde con $n!$ de estas distribuciones en los recipientes numerados.

Así, el número de formas que se pueden distribuir los m objetos en n recipientes idénticos, sin que quede ninguno vacío, es

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

Este número se le conoce como el **número de Stirling de segundo tipo**.

Ejemplos

1. Hay $S(6,3) = 90$ formas posibles de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos de forma que ninguno de estos recipientes queden vacíos.

Ejemplos

1. Hay $S(6,3) = 90$ formas posibles de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos de forma que ninguno de estos recipientes queden vacíos.
2. ¿Cuántas formas posibles existen de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos?
   Solución

   Observemos que el problema no nos dice que ningún recipiente no debe quedar vacío, es decir que podemos considerar que algunos queden vacíos

Ejemplos

1. Hay $S(6,3) = 90$ formas posibles de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos de forma que ninguno de estos recipientes queden vacíos.
2. ¿Cuántas formas posibles existen de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos?
   Solución

   Observemos que el problema no nos dice que ningún recipiente no debe quedar vacío, es decir que podemos considerar que algunos queden vacíos, entonces existen

   $$\sum_{i=1}^{3} S(6,i) = S(6,1) + S(6,2) + S(6,3) = 1 + 31 + 90 = 122$$

   formas posibles.

Ejemplos

1. Hay $S(6,3) = 90$ formas posibles de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos de forma que ninguno de estos recipientes queden vacíos.
2. ¿Cuántas formas posibles existen de distribuir 6 objetos en 3 recipientes idénticos?

   Solución

   Observemos que el problema no nos dice que ningún recipiente no debe quedar vacío, es decir que podemos considerar que algunos queden vacíos, entonces existen

   $$\sum_{i=1}^{3} S(6,i) = S(6,1) + S(6,2) + S(6,3) = 1 + 31 + 90 = 122$$

   formas posibles.

Observación: Para $m \geq n$, existen

$$\sum_{i=1}^{n} S(m,i)$$

formas posibles de distribuir m objetos diferentes en n recipientes idénticos.

Ejercicios de práctica

1. Determine $A \times B$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
2. Sean $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $E = \{0\}$.
   a) ¿Cuántas funciones de A en B existen?
   b) ¿Cuántas funciones inyectivas de E en A existen?
   c) ¿Cuántas funciones sobreyectivas de A en B existen?