Proposiciones cuantificadas

Myrian Sadith González
Pedro José Molina Morales

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

Proposiciones abiertas

Definición

Una frase declarativa es una **proposición abierta** si

- Contiene una o más variable
- No es una proposición, pero se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por ciertas opciones permisibles.

Ejemplo

1. El número $x + 2$ es un entero par
2. Los números $y + 2$, $x - y$ y $x + 2y$ son enteros pares.

En este caso restringimos las ciertas opciones permisibles a los enteros. Estas opciones permisibles forman lo que se llama **universo** para la proposición abierta.

Notación: A estas proposiciones abiertas las notaremos como sigue

1. $p(x)$: El número $x + 2$ es un entero par
2. $q(x, y)$: Los números $y + 2$, $x - y$ y $x + 2y$ son enteros pares.

Proposiciones abiertas

Con $p(x)$ y $q(x, y)$ como antes y un universo en el que los enteros siguen siendo las mismas opciones permisibles, obtenemos el siguiente resultado cuando sustituimos las variables x, y

$p(7)$:	El número $7 + 2$ es un entero par. (Falso)
$\neg p(5)$:	El número $5 + 2$ no es un entero par. (Verdadero)
$q(4, 2)$:	Los números 4, 2, y 8 son enteros pares. (Verdadero)

Observemos que ambas expresiones $p(x)$, $q(x, y)$, según los valores dados, producen proposiciones falsas y verdaderas. Por lo tanto, podemos construir las siguientes proposiciones verdaderas.

1. Para algún x, $p(x)$.
2. Para algún x, $\neg p(x)$
3. Para algunos x, y $q(x, y)$

Las frases *"Para algún x", "Para algunos x, y* cuantifican las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x, y)$, respectivamente. Muchos postulados, definiciones y teoremas de matemáticas implican proposiciones que son proposiciones abiertas cuantificadas. Esto surge dos tipos de cuantificadores, el *cuantificador existencial* y *cuantificador universal*

Cuantificadores

Definición

- El cuantificador universal se denota por $\forall x, y, \ldots$ y se lee ¨*para todo* $x, y, \ldots$, ¨*para cualquier* $x, y \ldots$, etc...
- El cuantificador existencial se denota por $\exists x, y, \ldots$ y se lee ¨*existe al menos* $x, y, \ldots$, ¨*para algunos* $x, y \ldots$, etc...
- El cuantificador existencial único se denota por $\exists ! x, y \ldots$ y se lee ¨ *existen únicamente* $x, y \ldots$”, ¨*existen solamente un* $x, y \ldots$, etc...

Del ejemplo anterior teníamos las siguientes proposiones verdaderas

1. Para algún x, $p(x)$.
2. Para algún x, $\neg p(x)$
2. Para algunos x, y $q(x, y)$

Entonces utilizando la notación de cuantificadores tenemos

1. $\exists x \; p(x)$.
2. $\exists x \; \neg p(x)$
2. $\exists x \; \exists y \; q(x, y)$

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \geq 0 \\ q(x): & x^2 \geq 0 \\ r(x): & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x): & x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \geq 0 \\ q(x): & x^2 \geq 0 \\ r(x): & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x): & x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \geq 0 \\ q(x): & x^2 \geq 0 \\ r(x): & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x): & x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

   Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas
   1. $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{aligned} p(x)&: \quad x \geq 0 \\ q(x)&: \quad x^2 \geq 0 \\ r(x)&: \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x)&: \quad x^2 - 3 > 0 \end{aligned}$$

   Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas

   1. $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$
      Dado que el número 2, es un miembro del universo tal que las dos proposiciones son verdaderas.

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \geq 0 \\ q(x): & x^2 \geq 0 \\ r(x): & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x): & x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

   Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas

   1. $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$
      Dado que el número 2, es un miembro del universo tal que las dos proposiciones son verdaderas.
   2. $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

Ejemplos

1. El universo comprende todos los números reales. Las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ están dadas por.

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \geq 0 \\ q(x): & x^2 \geq 0 \\ r(x): & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ s(x): & x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

   Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas

   1. $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$
      Dado que el número 2, es un miembro del universo tal que las dos proposiciones son verdaderas.
   2. $\forall x[p(x) \to q(x)]$
      Si, en $p(x)$ reemplazamos x por un número real negativo a, entonces $p(a)$ es falsa, pero la implicación $p(a) \to q(a)$ independientemente del valor de verdad de $q(a)$. Al reemplazar x, en $p(x)$ por un número real no negativo b, vemos que $p(b)$ y $q(b)$ son verdaderas, entonces $p(b) \to q(b)$ es verdadero. Por lo tanto, $p(x) \to q(x)$ es verdadera para todos los valores del universo, entonces la proposición $\forall x[p(x) \to q(x)]$ es verdadera.

Ejemplos

Ahora bien, veremos que las siguientes proposiciones son falsas

1'. $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$

Ejemplos

Ahora bien, veremos que las siguientes proposiciones son falsas

1'. $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$
Para mostrar que la proposición es falsa, necesitamos encontrar un contraejemplo, es decir, un valor de x para que la proposición $q(x) \rightarrow s(x)$ sea falsa. Si reemplazamos x por 1 vemos que $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa. Por lo tanto, $q(1) \rightarrow s(1)$ es falsa, entonces la proposición $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$ es falsa.

Ejemplos

Ahora bien, veremos que las siguientes proposiciones son falsas

1'. $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$
Para mostrar que la proposición es falsa, necesitamos encontrar un contraejemplo, es decir, un valor de x para que la proposición $q(x) \rightarrow s(x)$ sea falsa. Si reemplazamos x por 1 vemos que $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa. Por lo tanto, $q(1) \rightarrow s(1)$ es falsa, entonces la proposición $\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$ es falsa.

2'. $\forall x[p(x) \vee s(x)]$

Ejemplos

Ahora bien, veremos que las siguientes proposiciones son falsas

1'. $\forall x[q(x) \to s(x)]$
Para mostrar que la proposición es falsa, necesitamos encontrar un contraejemplo, es decir, un valor de x para que la proposición $q(x) \to s(x)$ sea falsa. Si reemplazamos x por 1 vemos que $q(1)$ es verdadera y $s(1)$ es falsa. Por lo tanto, $q(1) \to s(1)$ es falsa, entonces la proposición $\forall x[q(x) \to s(x)]$ es falsa.

2'. $\forall x[p(x) \vee s(x)]$
Observemos que hay muchos valores de x como ser 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{2}$ y 0, que son contraejemplos de esta proposición.

Proposiciones cuantificadas

Sea $p(x)$ cualquier proposición abierta (en la variable x) con un universo predeterminado no vacío (es decir, el universo contiene al menos un miembro). Entonces, si $\forall x p(x)$ es verdadera, también lo es $\exists x p(x)$ o

$$\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$$

Cuando escribimos $\forall p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$, estamos diciendo que la implicación $\forall p(x) \rightarrow \exists x p(x)$ es una implicación lógica; es decir $\exists x p(x)$ es verdadera siempre que $\forall x p(x)$ es verdadera. Por otro lado si $\exists x p(x)$ es verdadera, no se sigue que $\forall x p(x)$ sea verdadera, es decir

$$\exists x p(x) \not\Rightarrow \forall x p(x)$$

Proposiciones cuantificadas

Proposición	**¿Cuándo es verdadera?**	**¿Cuando es falsa?**
$\exists x p(x)$	Para (al menos) un a del universo, $p(a)$ es verdadera.	Para cada a del universo, $p(a)$ es falsa.
$\forall x p(x)$	Para cada reemplazo de a del universo, $p(a)$ es verdadera.	Existe al menos un reemplazo a en el universo para el cual $p(a)$ es falsa.
$\exists x \neg p(x)$	Para al menos una elección de a del universo, $p(a)$ es falsa, de modo que la negación $\neg p(a)$ es verdadera.	Para cada reemplazo a del universo, $p(a)$ es verdadera.
$\forall x \neg p(x)$	Para cada reemplazo a del universo, $p(a)$ es falsa y su negación $\neg p(a)$ es verdadera.	Existe al menos un reemplazo a en el universo para el cuál $\neg p(a)$ es falsa y $p(a)$ es verdadera

Tabla 1: Valores de verdad para las proposiciones cuantificadas

Equivalencia e implicación lógica

Definición

Sean $p(x)$, $q(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ son **lógicamente equivalentes**, y escribimos $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$, cuando la bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera para cada reemplazo a del universo dado. Si la implicación $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera para cada a del universo entonces escribimos $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y decimos que $p(x)$ **implica lógicamente** $q(x)$.

Equivalencia e implicación lógica

Definición

Sean $p(x)$, $q(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ son **lógicamente equivalentes**, y escribimos $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$, cuando la bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera para cada reemplazo a del universo dado. Si la implicación $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera para cada a del universo entonces escribimos $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y decimos que $p(x)$ **implica lógicamente** $q(x)$.

Ejemplo

Para el universo de todos los triángulos del plano, sean $p(x)$, $q(x)$ las proposiciones abiertas

$p(x)$: x es equiangular
$q(x)$: x es equilátero

Equivalencia e implicación lógica

Definición

Sean $p(x)$, $q(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ son **lógicamente equivalentes**, y escribimos $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$, cuando la bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera para cada reemplazo a del universo dado. Si la implicación $p(a) \rightarrow q(a)$ es verdadera para cada a del universo entonces escribimos $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y decimos que $p(x)$ **implica lógicamente** $q(x)$.

Ejemplo

Para el universo de todos los triángulos del plano, sean $p(x)$, $q(x)$ las proposiciones abiertas

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \text{ es equiangular} \\ q(x): & x \text{ es equilátero} \end{array}$$

Entonces para cualquier, triángulo a, sabemos que $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadera. En consecuencia $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$.

Observe que en general, $\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$ si, y solo si $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ y $\forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$

Equivalencia e implicación lógica

Definición

Para las proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$, definidas en un universo dado, y la proposición cuantificada en forma universal $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, definimos:

- La **contrapositiva** de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$
- La **recíproca** de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[q(x) \rightarrow p(x)]$
- La **inversa** de $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ como $\forall x[\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)]$

Ejemplo

Para el universo de todos los cuadriláteros del plano, sean $s(x)$ y $e(x)$ las proposiciones abiertas

$s(x)$: x es un cuadrado $\qquad$ $e(x)$: x es un equilátero

a. La proposición

$$\forall x[s(x) \rightarrow e(x)$$

es una proposición verdadera y es lógicamente equivalente a su contrapositiva

$$\forall x[\neg e(x) \rightarrow \neg s(x)]$$

ya que $[s(a) \rightarrow e(a)] \Leftrightarrow [\neg e(a) \rightarrow \neg s(a)]$ para cada reemplazo a. Por lo tanto, $\forall x[s(x) \rightarrow e(x) \Leftrightarrow \forall x[\neg e(x) \rightarrow \neg s(x)]$

Equivalencia e implicación lógica

Para un universo dado y cualesquiera proposiciones abiertas $p(x)$, $q(x)$ en la variable x
$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$
$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x p(x) \vee \exists x q(x)]$
$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)]$
$[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)] \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$

Tabla 2: Equivalencias e implicaciones lógicas para proposiciones cuantificadas de una variable

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado. Encontramos las siguientes equivalencias lógicas.
   - $\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado. Encontramos las siguientes equivalencias lógicas.
   - $\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$

     Para probar que esta proposición es un equivalencia lógica lo hacemos de la siguiente manera:

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado. Encontramos las siguientes equivalencias lógicas.
   - $\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$

     Para probar que esta proposición es un equivalencia lógica lo hacemos de la siguiente manera:
     Para cada a del universo, consideramos las proposiciones $p(a) \wedge (q(a) \wedge r(a))$ y $(p(a) \wedge q(a)) \wedge r(a)$. Por la ley asociativa de $\wedge$ tenemos que

     $$p(a) \wedge (q(a) \wedge r(a)) \Leftrightarrow (p(a) \wedge q(a)) \wedge r(a)$$

     Entonces como se cumple para cada a del universo, por definición $\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$

Ejemplos

- $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$

Ejemplos

- $\exists x[p(x) \to q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$
  Para cada c del universo, se sigue que

$$[p(c) \to q(c)] \Leftrightarrow [\neg p(c) \vee q(c)]$$

  Por lo tanto, la proposición $\exists x[p(x) \to q(x)]$ es verdadera (respectivamente, falsa) si y sólo si la proposición $\exists x(\neg p(x) \vee q(x))$ de modo que

$$\exists x[p(x) \to q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg p(x) \vee q(x)]$$

- Otras equivalencias lógicas que encontramos con frecuencia
  a. $\forall x \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall x p(x)$
  b. $\forall x \neg[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x[\neg p(x) \vee \neg q(x)]$

Negación de proposiciones cuantificadas

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg[\forall x p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg p(x) \\ \neg[\exists x p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg p(x) \\ \neg[\forall x \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \exists x p(x) \\ \neg[\exists x \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall x p(x) \end{array}}$$

Tabla 3: Reglas para negar proposiciones cuantificadas

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x)\colon x \text{ es impar}$$
$$q(x)\colon x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ", puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \to q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x)\text{: } x \text{ es impar}$$
$$q(x)\text{: } x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición ”Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ”, puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

$$\neg[\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]] \quad \Leftrightarrow$$

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x): x \text{ es impar}$$
$$q(x): x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ", puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

$$\neg[\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]] \quad \Leftrightarrow \quad \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))]$$

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x)\colon x \text{ es impar}$$
$$q(x)\colon x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ", puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \neg[\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]] &\Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \end{aligned}$$

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x)\colon x \text{ es impar}$$
$$q(x)\colon x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ", puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \neg[\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]] &\Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \neg q(x)] \end{aligned}$$

Ejemplos

1. El universo comprende de todos los números enteros. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dadas por

$$p(x)\colon x \text{ es impar}$$
$$q(x)\colon x^2 - 1 \text{ es par}$$

La proposición "Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par ", puede simbolizarse de la siguiente forma $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$, lo cuál es una proposición verdadera.
La negación de esta proposición se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \neg[\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]] &\Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \neg q(x)] \end{aligned}$$

En palabras, la negación dice ¨Existe un entero x tal que x es impar y $x^2 - 1$ es impar", lo cuál es falsa.

Ejemplos

2. Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ y $r(x, y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]$$

Ejemplos

2. Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ y $r(x, y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]$$

Solución:

Ejemplos

2. Sean $p(x,y)$, $q(x,y)$ y $r(x,y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]$$

Solución:

$$\neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]]$$

Ejemplos

2. Sean $p(x, y)$, $q(x, y)$ y $r(x, y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y [(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \neg[\forall x \exists y [(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]] \\ \Leftrightarrow \quad & \exists x [\neg \exists y [(p(x, y) \wedge q(x, y)) \rightarrow r(x, y)]] \end{aligned}$$

Ejemplos

2. Sean $p(x,y)$, $q(x,y)$ y $r(x,y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]$$

Solución:

$$\begin{array}{rl} & \neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x[\neg \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)] \end{array}$$

Ejemplos

2. Sean $p(x,y)$, $q(x,y)$ y $r(x,y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]$$

Solución:

$$\begin{array}{rl} & \neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x[\neg \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)] \end{array}$$

Ejemplos

2. Sean $p(x,y)$, $q(x,y)$ y $r(x,y)$ tres proposiciones abiertas, y las variables x, y se reemplazan de ciertos universos prescritos. ¿Cuál es la negación de la siguiente proposición?

$$\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} & \neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x[\neg \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)] \\ \Leftrightarrow & \exists x \forall y[[p(x,y) \wedge q(x,y)] \wedge \neg r(x,y)] \end{array}$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

   $$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

   $$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

   $$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

   $$\begin{aligned} & \lim_{x \to a} f(x) \neq L \\ \Leftrightarrow \quad & \neg[\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]] \end{aligned}$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

   $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

   $$\begin{array}{ll} & \lim_{x\to a} f(x) \neq L \\ \Leftrightarrow & \neg[\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]] \\ \Leftrightarrow & \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\neg[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon] \end{array}$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

   $$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

   $$\begin{array}{ll} & \lim_{x \to a} f(x) \neq L \\ \Leftrightarrow & \neg[\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \neg[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \neg[\neg[0 < |x - a| < \delta] \vee (|f(x) - L| < \epsilon)] \end{array}$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

   $$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

   $$\begin{array}{ll} & \lim_{x \to a} f(x) \neq L \\ \Leftrightarrow & \neg[\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \neg[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \neg[\neg[0 < |x - a| < \delta] \vee (|f(x) - L| < \epsilon)] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x [0 < |x - a| < \delta] \wedge \neg(|f(x) - L| < \epsilon)] \end{array}$$

Ejemplos

3. En cálculo, se estudian las propiedades de límites, al respecto,encontramos la siguiente definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada x, $(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$.

   Al reescribirlo de forma simbólica tenemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]$$

   Entonces para negar esta definición

$$\begin{array}{ll} & \lim_{x \to a} f(x) \neq L \\ \Leftrightarrow & \neg[\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x [0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon]] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \neg[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \neg[\neg[0 < |x - a| < \delta] \vee (|f(x) - L| < \epsilon)] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x [0 < |x - a| < \delta] \wedge \neg(|f(x) - L| < \epsilon)] \\ \Leftrightarrow & \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x [[0 < |x - a| < \delta] \wedge (|f(x) - L| \geq \epsilon)] \end{array}$$

   Traducido en palabras tenemos, $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ si, y solo si existe un número positivo ϵ tal que para cada número real positivo δ, existe un valor x tal que $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

Regla de especificación universal

Regla de especificación universal

Si una proposición abierta es verdadera para todos los reemplazos con los miembros de un universo dado, entonces esa proposición abierta es verdadera para cada miembro específico de ese universo dado. (De forma simbólica, si $p(x)$ es una proposición abierta para un universo dado y si $\forall x p(x)$ es verdadero, entonces $p(a)$ es verdadera para cada a del universo.

Ejemplos

1. Consideremos el universo de todos los triángulos que hay en el plano, junto con las proposiciones abiertas

   $p(t)$: t tiene dos lados de igual longitud
   $q(t)$: t es un triángulo isósceles
   $r(t)$: t tiene dos ángulos de igual medida

   Vamos a concentrarnos en un triángulo específico que no tenga dos ángulos de igual medida. Este triángulo se llamará XYZ y se designará con c. Entonces vemos que el argumento

En el triángulo *XYZ* no hay dos ángulos de igual medida.	$\neg r(c)$
Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces es un isósceles.	$\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$
Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos de igual medida.	$\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$
Por lo tanto, el triángulo *XYZ* no tiene dos lados de igual longitud	$\therefore \neg p(c)$

Ejemplos

Entonces mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \neg r(c) \\ \forall t[p(t) \to q(t)] \\ \underline{\forall t[q(t) \to r(t)]} \\ \therefore \neg p(c) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\neg r(c)$	Premisa
2) $\forall t[p(t) \to q(t)]$	Premisa
3) $\forall t[q(t) \to r(t)]$	Premisa

Ejemplos

Entonces mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \neg r(c) \\ \forall t[p(t) \to q(t)] \\ \underline{\forall t[q(t) \to r(t)]} \\ \therefore \neg p(c) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\neg r(c)$	Premisa
2) $\forall t[p(t) \to q(t)]$	Premisa
3) $\forall t[q(t) \to r(t)]$	Premisa
4) $p(c) \to q(c)$	Paso (2), regla de especificación universal

Ejemplos

Entonces mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \neg r(c) \\ \forall t[p(t) \to q(t)] \\ \underline{\forall t[q(t) \to r(t)]} \\ \therefore \neg p(c) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\neg r(c)$	Premisa
2) $\forall t[p(t) \to q(t)]$	Premisa
3) $\forall t[q(t) \to r(t)]$	Premisa
4) $p(c) \to q(c)$	Paso (2), regla de especificación universal
5) $q(c) \to r(c)$	Paso (3), regla de especificación universal

Ejemplos

Entonces mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \neg r(c) \\ \forall t[p(t) \rightarrow q(t)] \\ \underline{\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]} \\ \therefore \neg p(c) \end{array}$$

Pasos	Razones
1) $\neg r(c)$	Premisa
2) $\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$	Premisa
3) $\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$	Premisa
4) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (2), regla de especificación universal
5) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3), regla de especificación universal
6) $p(c) \rightarrow r(c)$	Paso (4) y (5), ley del silogismo

Ejemplos

Entonces mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \neg r(c) \\ \forall t[p(t) \rightarrow q(t)] \\ \underline{\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]} \\ \therefore \neg p(c) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\neg r(c)$	Premisa
2) $\forall t[p(t) \rightarrow q(t)]$	Premisa
3) $\forall t[q(t) \rightarrow r(t)]$	Premisa
4) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (2), regla de especificación universal
5) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3), regla de especificación universal
6) $p(c) \rightarrow r(c)$	Paso (4) y (5), ley del silogismo
7) $\therefore \neg p(c)$	Paso (6), Modus Tollens

Regla de la generalización universal

Regla de la generalización universal

Si se demuestra que una proposición abierta $p(x)$ es verdadera cuando x se reemplaza por cualquier elemento c **elegido en forma arbitraria** de nuestro universo, entonces la proposición cuantificada universalmente $\forall x p(x)$ es verdadera. Además, la regla se extiende al caso de más de una variable.

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \to q(x)] \\ \forall x[q(x) \to r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \to r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \to q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \to q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
3) $\forall x[q(x) \to r(x)]$	Premisa

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
3) $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$	Premisa
4) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3) y la regla de especificación universal

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \to q(x)] \\ \forall x[q(x) \to r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \to r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \to q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \to q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
3) $\forall x[q(x) \to r(x)]$	Premisa
4) $q(c) \to r(c)$	Paso (3) y la regla de especificación universal
5) $p(c) \to r(c)$	Pasos (2) y (4), ley del silogismo

Ejemplos

1. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas definidas para un universo dado. Mostraremos que el argumento

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

es válido.

Solución:

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	Premisa
2) $p(c) \rightarrow q(c)$	Paso (1) y la regla de especificación universal
3) $\forall x[q(x) \rightarrow r(x)]$	Premisa
4) $q(c) \rightarrow r(c)$	Paso (3) y la regla de especificación universal
5) $p(c) \rightarrow r(c)$	Pasos (2) y (4), ley del silogismo
6) $\therefore \forall x[p(x) \rightarrow r(x)]$	Paso (5) y la regla de la generalización universal

Ejemplos

Definición

Sea n un entero. Decimos que n es **par** si n es divisible entre 2, es decir, si existe un entero k tal que $n = 2k$. Si n no es par, entonces decimos que n es **impar**, para este caso existe un entero s tal que $n = 2s + 1$.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

   Solución:

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

   Solución:

   Como hay un bicondicional "si y solo si", debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

   Solución:

   Como hay un bicondicional "si y solo si", debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

   i. Usando el método de la contrapositiva demostraremos que, si n es impar, entonces n^2 es impar. Sea n impar, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

   Solución:

   Como hay un bicondicional ”si y solo si”, debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

   i. Usando el método de la contrapositiva demostraremos que, si n es impar, entonces n^2 es impar. Sea n impar, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Observemos que $l = 2k^2 + 2k$ es un entero, entonces $n^2 = 2l + 1$. Por lo tanto, n^2 es impar.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

Solución:

Como hay un bicondicional "si y solo si", debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

i. Usando el método de la contrapositiva demostraremos que, si n es impar, entonces n^2 es impar. Sea n impar, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Observemos que $l = 2k^2 + 2k$ es un entero, entonces $n^2 = 2l + 1$. Por lo tanto, n^2 es impar.
ii. Si n es par, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$, entonces $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

Solución:

Como hay un bicondicional "si y solo si", debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

i. Usando el método de la contrapositiva demostraremos que, si n es impar, entonces n^2 es impar. Sea n impar, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Observemos que $l = 2k^2 + 2k$ es un entero, entonces $n^2 = 2l + 1$. Por lo tanto, n^2 es impar.
ii. Si n es par, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$, entonces $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
Observemos que $l = 2k^2$ es un entero, entonces $n^2 = 2l$. Por lo tanto, n^2 es par.

Ejemplos

2. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si, y solo si n es par.

Solución:

Como hay un bicondicional "si y solo si", debemos probar dos resultados, (i) Si n^2 es par, entonces n es par y (ii) Si n es par, entonces n^2 es par.

i. Usando el método de la contrapositiva demostraremos que, si n es impar, entonces n^2 es impar. Sea n impar, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, entonces $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Observemos que $l = 2k^2 + 2k$ es un entero, entonces $n^2 = 2l + 1$. Por lo tanto, n^2 es impar.
ii. Si n es par, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$, entonces $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
Observemos que $l = 2k^2$ es un entero, entonces $n^2 = 2l$. Por lo tanto, n^2 es par.

Como n se tomó arbitrariamente y por la ley de la generalización universal concluimos que, para todo entero n, n^2 es par si y solo si n es par.

Ejercicios de práctica

1. Sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ las siguientes proposiciones

$$p(x)\text{: } x \leq 3 \qquad q(x)\text{: } x+1 \text{ es impar} \qquad r(x)\text{: } x > 0$$

   a. Si el universo consta de todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad de las siguientes proposiciones?
      - $p(1)$
      - $\neg q(3)$
      - $p(3) \wedge q(4)$
      - $p(2) \rightarrow [q(2) \rightarrow r(2)]$
      - $\exists x[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)]$
      - $\forall x[\neg p(x) \rightarrow r(x)]$
   b. Niegue cada proposición cuantificada, y tradúzcala en palabras
      - $\forall x[\neg p(x) \rightarrow q(x)]$
      - $\exists x[\neg p(x) \vee r(x)]$
      - $\forall x[r(x) \rightarrow p(x)]$
2. Para los enteros n y m, si n, m son impares entonces $n+m$ es par.