Algebraische Geometrie II

Inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung Algebraische Geometrie II von Prof. Walter Gubler im Sommersemester 2014 an der Universität Regensburg

Johannes Loher

10. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

- Die klassische algebraische Geometrie ist für Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Die Koordinatenringe sind dann immer reduzierte Algebren. In der algebraischen Schnittheorie muss man aber nicht-reduzierte Algebren betrachten („Multiplizitäten“).
- In der Zahlentheorie wird man gezwungen, über Zahlenkörpern zu arbeiten. Dies sind endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, also nicht algebraisch abgeschlossen.
- Viele Klassifikationsprobleme führen auf Modulräume, die keine Varietäten sind.

Um diese Probleme zu lösen, hat Alexander Grothendieck zu Beginn der 60er Jahre die Theorie der Schemata eingeführt (EGA I–IV). Dies ist eine relative Theorie, das heißt es wird kein Grundkörpervorausgesetzt und die Koordinatenringe sind beliebige kommutative Ringe. Das heißt, man kann (beziehungsweise muss) die Methoden der kommutativen Algebra für die Beweise nutzen.

Erfolge: Weil-Vermutung (Deligne 70er), Fields-Medaillen, Schemata haben sich als Standard in der algebraischen und arithmetischen Geometrie durchgesetzt.

In dieser Vorlesung seien Ringe und Algebren immer kommutativ und mit Einselement, falls nichts anderes gesagt wird.

1 Garben

Garben sind abstrakte Verallgemeinerungen von Funktionenräumen. Sie sind fundamental für das Studium von Mannigfaltigkeiten und Schemata.

X sei ein topologischer Raum.

1.1 Definition. Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ (von abelschen Gruppen) auf X besteht aus folgenden Daten:

a) Für alle U offen in X sein $\mathcal{F}(U)$ eine abelsche Gruppe.

b) Für alle $V \subseteq U$ offen in X sei $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ein Homomorphismus.

c) Es sei $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

d) Für alle U offen in X sei $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

e) Für alle $W \subseteq V \subseteq U$ offen in X sei $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U. Der Homomorphismus $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabbildung** von U auf die offene Teilmenge V von U

1.2 Bemerkung. Analog definiert man Prägarben von Ringen, Algebren oder Mengen, ...

1.3 Definition. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **Garbe**, falls zusätzlich für jede offene Menge U in X und jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ von U folgendes gilt:

f) Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $\rho_{UV_i}(s) = 0$ für alle $i \in I$, so gilt bereits $s = 0$.

g) Sind $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ für alle $i \in I$ mit $\rho_{V_i V_i \cap V_J}(s_i) = \rho_{V_j V_i \cap V_J}(s_j)$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Eine Garbe ist also duch lokale Informationen vollständig bestimmt.

1.4 Bemerkung. Nach f) ist der Schnitt s in g) eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind s, s' zwei solche Schnitte in g), so gilt:

$$\rho_{UV_i}(s - s') = \rho_{UV_i}(s) - \rho_{UV_i}(s') \overset{\text{g)}}{=} s_i - s_i = 0$$

Also gilt nach f) schon $s - s' = 0$ und damit $s = s'$. $\square$

1.5 Beispiel. Sei x ein topologischer Raum. Für U offen in X sei

$$\mathcal{F}(U) := \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Funktion}\}.$$

Dies ist eine Garbe (abelscher Gruppen und sogar $\mathbb{R}$-Algebren) und die Restirktionsabbildungen sind gegeben durch:

$$\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), \; f \mapsto f|_V$$

Die Menge der stetigen Funktionen $C(U)$ liefert eine **Untergarbe** $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}'(U) := C(U)$), das heißt $\mathcal{F}'$ ist auch eine Garbe, es gilt $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ für alle U offen und für die Restriktionen ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathcal{F}'(V) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

1.6 Beispiel. Sein A eine fixierte abelsche Gruppe. Die zugehörige **konstante Prägarbe** $\mathcal{F}$ ist definiert durch:

- Es sei $\mathcal{F}(U) := \begin{cases} A & \text{falls } U \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } U = \emptyset \end{cases}$.
- Es sei $\rho_{UV} := \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{falls } V \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } V = \emptyset \end{cases}$.

Falls X nicht zusammenhängend und $A \neq 0$ ist, dann ist $\mathcal{F}$ keine Garbe. Sei zum Beispiel $X = \{p, q\}$ mit der diskreten Topologie. Seien außerdem $U = \{p, q\}$, $V_1 = \{p\}$, $V_2 = \{q\}$. Dann gilt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(V_1) = \mathcal{F}(V_2) = A$ und $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Seien nun $s_1 \neq 0 \in \mathcal{F}(V_1)$ und $s_2 = 0 \in \mathcal{F}(V_2)$. Wäre $\mathcal{F}$ eine Garbe, dann gäbe es ein $s \in \mathcal{F}(U) = A$ mit $\rho_{UV_i}(s) = s_i$. Dies ist aber offenbar nicht der Fall.

1.7 Beispiel. Seien X, S topologische Räume und $\pi\colon S \to X$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

i) π ist surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus.

j) $\pi^{-1}(x)$ ist für alle $x \in X$ eine abelsche Gruppe.

k) Sei $S \times_X S := \{(s_1, s_2) \in S \times S \mid \pi(s_1) = \pi(s_2)\}$ das **Faserprodukt** über X mit der von $S \times S$ induzierten Topologie. Dann induzieren die Addition und Invertierung aus j) stetige Abbildungen $S \times_X S \to S$, $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, beziehungsweise $S \to S$, $s \mapsto -s$.

Die Abbildung π heißt **Projektion** und $\pi^{-1}(x)$ heißt **Faser** von x.

- Sei $U \subseteq X$ offen. Eine stetige Funktion $f\colon U \to S$ heißt **Schnitt**, wenn $\pi \circ f = \mathrm{id}_U$, das heißt für alle $x \in U$ gilt $f(x) \in \pi^{-1}(x)$.
- Es gibt einen kanonischen globalen Schnitt $X \to S$, $x \mapsto 0_x \in f^{-1}(x)$, den wir **Nullschnitt** nennen.
- Mit $\Gamma(U, S)$ bezeichnen wir den Raum der Schnitte von S über U, wir setzen also

$$\Gamma(U, S) := \{f\colon U \to S \mid f \text{ stetig}, \ \pi \circ f = \mathrm{id}_U\}.$$

Behauptung: Die Abbildung $U \mapsto \Gamma(U, S)$ zusammen mit der Restriktion $\rho_{UV}(f) := f|_V$ ist eine Garbe.

Beweis. Dies ist klar. □

1.8 Bemerkung. Weil π ein lokaler Homöomorphismus ist, muss jeder Schnitt eine offene Abbildung sein (das heißt das Bild einer offenen Teilmenge ist offen). Falls zwei Schnitte in $x \in X$ übereinstimmen, dann stimmen sie auch auf einer Umgebung von x überein.

Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Abbildung wie in Beispiel 1.7.

1.9 Bemerkung. Das Beispiel 1.7 erklärt die abstrakten Begriffe aus Definition 1.1. Wir werden sehen, dass jede Garbe durch einen topologischen Raum S und eine Abbildung $\pi\colon S \to X$ wie in Beispiel 1.7 dargestellt werden kann.

1.10 Beispiel. In Beispiel 1.5 wählen wir ein $x \in X$. Wir definieren $f \sim g$, falls es eine Umgebung U von x gibt mit $f|_U = g|_U$. Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellwertigen Funktionen, die auf einer Umgebung von x definiert sind. Der **Halm** $\mathcal{F}_x$ ist definiert als Raum der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

1.11 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, dann verallgemeinern wir die obige Konstruktion. Sei $x \in X$. Wir betrachten die Menge $\{(U, s) \mid s \in \mathcal{F}(U),\ U \text{ offene Umgebung von } x\}$. Wir definieren auf dieser Menge eine Relation auf folgende Weise: Es gelte $(U, s) \sim (V, t)$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von x mit $\rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)$ gibt. Man zeigt leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Der **Halm** $\mathcal{F}_x$ ist definiert als der Raum der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Dies ist eine abelsche Gruppe:

$$[(U_1, s_1)] + [(U_2, s_2)] = [(U_1 \cap U_2, \rho_{U_1 U_1 \cap U_2}(s_1) + \rho_{U_2 U_1 \cap U_2}(s_2)].$$

Wir schreiben auch s_x anstatt von $[(U, s)] \in \mathcal{F}_x$.

1.13 Definition. Ein **Homomorphismus** $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **von (Prä-)Garben** auf x ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ abelscher Gruppen für alle U offen in X, sodass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{UV}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[\varphi_V]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

für alle $V \subseteq U$ offen in X kommutiert.

Wir können Homomorphismen $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben zu einem Homomorphismus $\psi \circ \varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ verknüpfen. Damit können wir auch Isomorphismen von (Prä-)Garben definieren.

Die Prägarben, beziehungsweise Garben auf einem topologischen Raum X bilden eine Kategorie, die wir mit $\mathrm{PSh}(X)$, beziehungsweise $\mathrm{Sh}(X)$ bezeichnen.

1.14 Proposition. *Sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben auf X. Dann ist φ genau dann ein Isomorphismus von Garben, wenn $\varphi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x,\ s_x \mapsto \varphi_x(s_x) := [(U, \varphi|_U(s))]$ für alle $x \in X$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.*

Beweis. Dies ist eine einfache Übung. □

Beachte, dass diese Aussage nicht für Prägarben gilt.

1.15 Bemerkung. Wir zeigen nun, dass es zu einer gegebene Prägarbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum X eine kanonische Überlagerung $\pi \colon S \to X$ wie in Beispiel 1.7 gibt.

Wir definieren

$$S := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Weiter sei π gegeben durch

$$\pi \colon S \to X,\ s_x \in \mathcal{F}_x \mapsto x.$$

Für jedes U offen in X und jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir

$$\overline{s} \colon U \to S,\ x \mapsto s_x = [(U, s)] \in \mathcal{F}_x \subseteq S.$$

Die Topologie von S ist durch die Basis

$$B \coloneqq \{\overline{s}(U) \mid U \text{ offen in } X, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

gegeben. Es ist leicht zu sehen, dass B tatsächlich die Basis einer Topologie auf S ist. Wir überzeugen uns ebenfalls leicht, dass $\pi\colon S \to X$ die Voraussetzungen aus Beispiel 1.7 erfüllt, das heißt π ist eine topologische Überlagerung und die Fasern sind abelsche Gruppen mit gewissen Stetigkeitseigenschaften. Es gilt

$$\overline{s} \in \Gamma(U,S) \coloneqq \{\gamma\colon U \to S \mid \gamma \text{ stetig}, \ \pi \circ \gamma = \mathrm{id}_U\}.$$

1.16 Definition. Wir bezeichnen die Garbe $U \mapsto \Gamma(U,S)$ mit $\mathcal{F}^+$. Sie heißt zu $\mathcal{F}$ **assoziierte Garbe**. Wir haben einen kanonischen Homomorphismus

$$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+, \quad \underbrace{s}_{\in \mathcal{F}(U)} \mapsto \underbrace{\overline{s}}_{\in \mathcal{F}^+(U) = \Gamma(U,S)}.$$

In Übung 1.2 wird gezeigt, dass θ einen Isomorphismus $\theta_x\colon \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x^+$ der Halme induziert.

1.17 Proposition. *Falls $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Prägarben ist, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ von Garben, für den das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\theta"] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"'] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweisskizze. Sei $\pi\colon S \to X$ (beziehungsweise $\pi\colon T \to X$) die topologische Überlagerung, die zu $\mathcal{F}$ (beziehungsweise $\mathcal{G}$) gehört wie in Bem 1.15. Wir zeigen zuerst, dass es genau eine stetige Abbildung $\psi\colon S \to T$ mit $\psi \circ \overline{s} = \overline{\varphi(s)}$ für alle U offen in X und alle $s \in \mathcal{F}(U)$ gibt, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für $s_x = [(U,s)] \in \mathcal{F}_x \subseteq S$ definieren wir $\psi(s_x) \coloneqq [(U, \varphi_U(s))] \in \mathcal{G}_x$. Dies ist wohldefiniert und erfüllt das Gewünschte. Die Eindeutigkeit ist durch die Konstruktion klar.

Dann definieren wir $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ durch

$$\varphi_U^+\colon \mathcal{F}^+(U) = \Gamma(U,S) \to \mathcal{G}^+(U) = \Gamma(U,T), \ \gamma \mapsto \psi \circ \gamma.$$

Damit erhalten wir einen Garbenhomomorphismus mit der gewünschten Eigenschaft. Die Eindeutigkeit von φ^+ folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+$ und $\mathcal{G}_x \cong \mathcal{G}_x^+$ gilt. Also muss φ^+ auf den Halmen durch φ eindeutig bestimmt sein. Weil $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{G}^+$ Garben sind, folgt sofort aus den Garbeneigenschaften f) und g), dass damit auch φ^+ durch φ eindeutig bestimmt ist. $\square$

1.18 Korollar (Universelle Eigenschaft von $\mathcal{F}^+$)**.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Für jede Garbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Homomorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi_+ \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, für den das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi_+"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 1.17, denn für eine Garbe $\mathcal{G}$ gilt $\mathcal{G} \xrightarrow[\sim]{\theta} \mathcal{G}^+$. □

2 Lokal geringte Räume

Mit dem Konzept der lokal geringten Räume kann man die Mannigfaltigkeiten aus der Analysis und Differentialgeometrie, die algebraische Varietäten aus der Algebraischen Geometrie I und die Schemata aus der Algebraischen Geometrie II zusammenfassen.

2.1 Bemerkung. Im Folgenden soll, wenn nichts anderes gesagt wird, Folgendes gelten:

- Alle Ringe sind kommutativ mit Eins.
- Ringhomomorphismen bilden die Eins auf die Eins ab.

Bemerkung. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn es in R genau ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ gibt.

2.2 Proposition. *Sei R ein Ring. R ist genau dann ein lokaler Ring, wenn es ein Ideal $I \neq R$ mit $R \setminus I = R^\times$ gibt.*

Beweis. Dies ist eine einfache Eigenschaft aus der kommutativen Algebra. □

2.3 Definition. Ein Homomorphismus $\varphi\colon R_1 \to R_2$ von Ringen heißt **lokal**, wenn

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_1,$$

wobei $\mathfrak{m}_i$ das Maximalideal von R_i ist.

Beispiel. Der Homomorphismus $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist kein lokaler Homomorphismus, da

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\} \subsetneq p\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$$

gilt.

2.4 Beispiel. Sei $\mathcal{F}$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X, das heißt $\mathcal{F}(U) \coloneqq \mathcal{C}(U)$ für alle U offen in X (siehe Beispiel 1.5). Dann ist der Halm $\mathcal{F}_x$ in jedem $x \in X$ ein lokaler Ring.

Beweis. Nach Beispiel 1.5 ist $\mathcal{F}_x$ ein Ring und sogar eine $\mathbb{R}$-Algebra. Die Menge

$$\mathfrak{m}_x \coloneqq \{[(U,f)] \in \mathcal{F}_x \mid U \text{ offene Umgebung von } x,\ f \in \mathcal{C}(U),\ f(x) = 0\}$$

ist ein Ideal in $\mathcal{F}_x$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x \setminus \mathfrak{m}_x = \{[(U,f)] \in \mathcal{F}_x \mid f(x) \neq 0\} = \{[(U,f)] \in \mathcal{F}_x \mid{} & \\ f \text{ invertierbar als stetige Funktion in einer Umgebung von } x\} = \mathcal{F}_x^\times.&\end{aligned}$$

Aus Proposition 2.2 folgt, dass $\mathcal{F}_x$ ein lokaler Ring ist. □

Wir benötigen einen wichtigen Begriff aus der Garbentheorie:

2.5 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Die **direkt Bildgarbe** $f_*\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

für alle U offen in Y. Weiter seien die Restriktionsabbildungen von $f_*\mathcal{F}$ gegeben durch

$$\rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV} = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)}.$$

2.6 Proposition. *$f_*\mathcal{F}$ wie in Definition 2.5 ist eine Garbe.*

Beweis. Es ist klar, dass $f_*\mathcal{F}$ eine Prägarbe ist. Sei U offen in Y und $U = \coprod_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung von U. Sei weiter $s \in (f_*\mathcal{F})(U)$ mit $\rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV_i}(s) = 0$ für alle $i \in I$. Es gilt $f^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Nach Definition gilt weiter $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ und

$$0 = \rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV_i}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(U)f^{-1}(V_i)}(s)$$

und damit folgt mit f) angewendet auf $\mathcal{F}$ schon $s = 0 \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$. Also gilt f) auch für $f_*\mathcal{F}$. Analog beweist man, dass auch g) für $f_*\mathcal{F}$ gilt. □

Im Folgenden betrachten wir Garben von Ringen. Alles aus Kaptiel 1 und auch Proposition 2.6 gelten auch für diese Garben.

2.7 Definition.
- Ein **geringter Raum** $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X.
- Ein **Morphismus von geringten Räumen** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar $(f, f^\#)$, wobei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ein Homomorphismus von Garben ist.

Wir erhalten die Kategorie gR der geringten Räume.

2.8 Beispiel. Seien $\mathcal{O}_X$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_Y$) die Garbe der stetigen rellwertigen Funktionen auf X (beziehungsweise Y). Wir haben in Beispiel 2.4 gesehen, dass die eine Garbe von Ringen ist. Dann induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ einen kanonischen Morphismus $(f, f^\#)$ von geringten Räumen durch

$$f^\#_U\colon \mathcal{O}_Y(U) \to (f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)),\ g \mapsto g \circ f.$$

2.9 Bemerkung. Sei $(f, f^\#)$ ein Morphismus von geringten Räumen wie in Definition 2.7. Sei $x \in X$ und $y := f(x) \in Y$. Dann haben wir einen kanonischen Homomorphismus

$$f^\#_x\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x},\ [(U,g)] \mapsto [(f^{-1}(U), f^\#_U(g))]$$

von Ringen.

2.10 Definition.
- Ein **lokal geringter Raum** ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, bei dem die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ lokale Ringe sind.
- Ein **Morphismus von lokal geringten Räumen** ist ein Morphismus von geringten Räumen, für den die Homomorphismen $f^\#_x$ aus Bemerkung 2.9 für alle $x \in X$ lokal sind.

Wir erhalten die Kategorie lgR der lokal geringten Räume.

2.11 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 2.8)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein lokal geringter Raum (siehe Beispiel 2.4). Weiter ist $(f, f^\#)$ ein Morphismus lokal geringter Räume.

Beweis. Sei $x \in X$, $y = f(x)$ und $f^\#\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x},\ [(U,g)] \mapsto [(f^{-1}U, g \circ f)]$.
Zu zeigen: $(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$.
„$\subseteq$“: Das Bild eines ivertierbaren Elementes ist wieder invertierbar, also gilt

$$f_x^\#(\mathcal{O}_{Y,y} \setminus \mathfrak{m}_y) \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_y$$

und damit

$$(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \subseteq \mathfrak{m}_y$$

(dies gilt für alle Morphismen von geringten Räumen).
„$\supseteq$“: Sei $[(U,g)] \in \mathfrak{m}_y$, das heißt g ist eine stetige Funktion auf U mit $g(y) = 0$. Es folgt

$$g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \text{ und } (g \circ f)(x) = 0$$

und damit

$$f_x^\#([(U,g)]) = [(f^{-1}U, g \circ f)] \in \mathfrak{m}_x.$$

$\square$

2.12 Bemerkung. Wenn man Morphismen definiert, sollte man sie verknüpfen können (das heißt, man erhält eine Kategorie): Seien $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(g, g^\#)\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ Morphismen von geringten Räumen. Dann ist

$$(g, g^\#) \circ (f, f^\#) \coloneqq (g \circ f, (g \circ f)^\#)$$

mit

$$(g \circ f)_U^\# \coloneqq f_{g^{-1}U}^\# \circ g_U^\#$$

ein Morphismus von geringten Räumen. Falls $(f, f^\#)$ und $(g, g^\#)$ Morphismen von lokal geringten Räumen sind, dann ist auch $(g, g^\#) \circ (f, f^\#)$ ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

Beweis. Sei $x \in X$, $y = f(x)$ und $z = g(y)$. Dann gilt

$$((g \circ f)_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = (f_x^\# \circ g_y^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \overset{f_x^\# \text{ lokal}}{=} (g_y^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_y) \overset{g_y^\# \text{ lokal}}{=} \mathfrak{m}_z.$$

$\square$

3 Modulgarben auf geringten Räumen

3.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine **Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln** (oder einfach ein **$\mathcal{O}_X$-Modul**) ist eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X, die Folgendes erfüllt:

i) Für $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul.

ii) Für offene $U \subseteq V \subseteq X$ ist die Restriktionsabbildung
$$\rho^{\mathcal{F}}_{VU} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$
verträglich mit der Modulstruktur bezüglich
$$\rho_{VU} \colon \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U),$$
das heißt es gilt
$$\rho^{\mathcal{F}}_{VU}(\lambda \cdot \alpha) = \rho_{VU}(\lambda) \cdot \rho^{\mathcal{F}}_{VU}(\alpha)$$
für alle $\alpha \in \mathcal{F}(V)$ und $\lambda \in \mathcal{O}_X(V)$.

Ein **Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln** (oder **$\mathcal{O}_X$-linearer Morphismus**) ist ein Garbenmorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle U offen in X ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln mit ($\mathcal{O}_X$-Mod) und setzen
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \coloneqq \operatorname{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Mod})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

3.2 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

i) Sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modulmorphismus. In Aufgabe 1.4 wurden für den zugehörigen Garbenmorphismus die Garben $\ker(\varphi)$ und $\operatorname{im}(\varphi)$ auf X definiert. Diese sind auf kanonische Weise $\mathcal{O}_X$-Moduln.

ii) Ist $\mathcal{F}'$ eine Untergrabe von $\mathcal{O}_X$-Moduln des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$, so ist die Quotientengarbe $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ (nach Garbifizierung) ebenfalls ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

iii) Das direkte Produkt, die direkte Summe (hier wird garbifiziert) und der direkte Limes von $\mathcal{O}_X$-Moduln haben wieder die Struktur eines $\mathcal{O}_X$-Moduls.

iv) Eine Sequenz
$$\cdots \to \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i-1} \to \cdots$$
von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt **exakt**, wenn die zugehörige Sequenz von Garben exakt ist, das heißt für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\operatorname{im}(\varphi_{i+1}) = \ker(\varphi_i).$$

v) Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $U \subseteq X$ offen. Dann ist $\mathcal{F}|_U$ ein $\mathcal{O}_X|_U$-Modul. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben abelscher Gruppen auf X. In Aufgabe 2.2 wurde gezeigt, dass die Prägarbe
$$U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$
bereits eine Garbe $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so wird durch
$$U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$
eine Untergarbe $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ von $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ definiert, welche ebenfalls die Struktur eines $\mathcal{O}_X$-Moduls trägt.

vi) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringt, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $p \in X$, so ist der Halm $\mathcal{F}_p$ ein $\mathcal{O}_{X,p}$-Modul. Sei

$$\kappa(p) := \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$$

der **Restklassenkörper** von p. Dann heißt der $\kappa(p)$-Vektorraum

$$\mathcal{F}(p) := \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \kappa(p)$$

die **Faser** von $\mathcal{F}$ in p.

3.3 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum.

i) Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt **frei**, falls $\mathcal{F} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ gilt.

ii) Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt **lokal frei**, falls es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, für die jeder $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modul $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei ist. In diesem Fall definiert die lokal-konstante Funktion

$$X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},\ p \mapsto \mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) := \dim_{\kappa(p)}(\mathcal{F}(p))$$

den Rang des lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$. Falls $p \in U_i$ und $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_X|_{U_i}$ für ein $i \in I$, dann ist $\mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) = |J|$. Ist $\mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) < \infty$ für alle $p \in X$, so ist $\mathcal{F}$ **von endlichem Rang**. Ist $r = \mathrm{rg}_p(\mathcal{F})$ konstant für alle $p \in X$, so heißt $\mathcal{F}$ **lokal frei vom Rang** r. Ist X zusammenhängend, so hat ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ einen wohldefinierten Rang $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

iii) Ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von Rang 1 heißt **invertierbare Garbe**.

3.4 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ auf Y betrachten wir die Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U) \subseteq V \\ V \subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{G}(V) = \frac{\{(V, s) \mid V \supseteq f(U),\ V \subseteq Y \text{ offen},\ s \in \mathcal{G}(V)\}}{(V, s) \sim (V', s') \Leftrightarrow \exists\, W \supseteq f(U),\ W \subseteq V \cap V' \text{ offen mit } s|_W = s'|_W}.$$

Die **inverse Bildgarbe** $f^{-1}\mathcal{G}$ auf X ist die dazu assoziierte Garbe. Die Konstruktion definiert einen kontravarianten Funktor

$$f^{-1}\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X),\ \mathcal{F} \mapsto f^{-1}\mathcal{F}.$$

3.5 Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann existiert für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf X und jede Garbe $\mathcal{G}$ auf Y eine Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

*welche natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist. Man sagt f^{-1} ist **linksadjungiert** zu f_* und f_* ist **rechtsadjungiert** zu f^{-1}*

3.6 Konstruktion. i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Dann definiert

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

eine Prägarbe auf X. Sei $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ die dazu assoziierte Garbe. Man sieht sofort, dass das **Tensorprodukt** $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

ii) Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf X. Wir haben in 2.5 die direkte Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$ definiert. Offenbar ist $f_*\mathcal{F}$ ein $f_*\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweis. Sei V offen in Y, dann gilt $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$ und dies ist ein $f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$-Modul. $\square$

Nach der Definition von Morphismen geringter Räume gibt es einen Homomorphismus $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Durch Verknüpfung sehen wir, dass die direkte Bildgarbe ein $\mathcal{O}_Y$-Modul auf Y ist. Beachte, dass f_* ein kovarianter Funktor ist.

iii) Sei $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphimus geringter Räume und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Wir betrachten den geringten Raum $(X, f^{-1}\mathcal{O}_Y)$, wobei die inverse Bildgarbe durch die zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U)\subseteq V \\ V\subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{O}_Y(V)$$

assoziierte Garbe definiert ist. Beachte, dass $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ eine Ringgarbe ist. Analog sei $f^{-1}\mathcal{G}$ die zur Prägrabe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U)\subseteq V \\ V\subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{G}(V)$$

assoziierte Garbe. Dann erhalten wir $f^{-1}\mathcal{G}$ als $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul. Wieder haben wir einen Homomorphismus $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Mit Hilfe der Adjunktion aus Proposition 3.5 erhalten wir einen Homomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Wir definieren das **inverse Bild** der Modulgarbe $\mathcal{G}$ als

$$f^*\mathcal{G} \coloneqq f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Indem wir von rechts mit $\mathcal{O}_X$ tensorieren, erhalten wir tatsächlich einen $\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweisskizze. Aus der Modultheorie ist folgendes bekannt: Ist M ein A-Modul und $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann wird B durch

$$a \cdot m \coloneqq \varphi(a) \cdot m$$

zu einem A-Modul. Auf dem A-Modul $M \otimes_A B$ definieren wir eine B-Modulstruktur durch

$$b \cdot (m \otimes a) \coloneqq m \otimes (a \cdot b).$$

Dies machen wir genauso für Garben auf jeder offenen Menge □

Man beachtem dass f^* ein kovarianter Funktor ist.

3.7 Lemma. *i) Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $p \in X$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann gilt*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p = \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p.$$

ii) Sei $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, $p \in X$ und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann gilt

$$(f^{-1}\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)}$$

und

$$(f^*\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(p)}} \mathcal{O}_{X,p},$$

wobei $\mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ der Homomorphismus der Halme $f_p^{\#}$ aus Bemerkung 2.9 ist.

Beweis. Dies wird in den Übungen 3.2 und 3.3 gezeigt. □

3.8 Lemma. *Sei $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume. Dann ist der Funktor f^* linksdadjungiert zum Funktor f_*, das heißt für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und alle $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{G}$ gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Beweisskizze. Dies beruht auf der Adjunktion aus Proposition 3.5 und dem Tensorieren mit $\mathcal{O}_X$. $\square$

4 Affine Schemata

Zu jedem Ring A (kommutativ und mit Eins) betrachten wir das Spektrum $\operatorname{Spec}(A)$ der Primideale, das in natürlicher Weise eine Topologie besitzt. Durch Lokalisierung von A erhalten wir eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ auf $\operatorname{Spec}(A)$ und damit einen lokal gringten Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$. Im folgenden Kapitel 5 werden dies die Bausteine für Schemata sein. Affine Schemata sind ähnlich wie affine Varietäten aus der Algebraischen Geometrie I, mit dem Unterschied, dass Primideale statt Maximalideale als Punkte und beliebige Ringe zugelassen werden.

4.1 Definition. Für $M \subseteq A$ sei $V(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq M\}$. Dies entspricht der Nullstellenmenge aus der Algebraischen Gerometrie I.

4.2 Lemma. *i) Sei $\mathfrak{a} := \langle M \rangle$ das von $M \subseteq A$ erzeugte Ideal. Dann gilt $V(\mathfrak{a}) = V(M)$.*

ii) Es gilt $V(\{0\}) = \operatorname{Spec}(A)$ und $V(A) = \emptyset$.

iii) Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von A gilt $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

iv) Für eine Familie $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ von Idealen in A gilt $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

Beweis. i) und ii) sind trivial.

iii) Es gilt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle \{a \cdot b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\} \rangle.$$

„$\subseteq$“: Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Dann gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

„$\supseteq$“: Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$. Dann gilt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ ist, dann gilt $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ und wir sind fertig. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein $b \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Für jedes $a \in \mathfrak{a}$ gilt dann $a \cdot b \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, gilt also schon $a \in \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

iv) Dies ist einfach nachzurechnen.

□

4.3 Definition (Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$)**.** Wir definieren eine Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$ als abgeschlossen, wenn sie die Form $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A hat. Eine Teilmenge U von $\operatorname{Spec}(A)$ heißt dann offen, wenn $\operatorname{Spec}(A) \setminus U$ abgeschlossen ist. Nach Lemma 4.2 definiert dies eine Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$, die wir **Zariski-Topologie** nennen.

4.4 Proposition. *Für $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ definieren wir das Verschwindungsideal $I(Y) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$.*

i) Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

ii) Für $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ gilt $\sqrt{I(Y)} = I(Y)$ und $\overline{Y} = V(I(Y))$.

iii) Die Abbildungen

$$\{\textit{abgeschlossene Teilmengen in } \operatorname{Spec}(A)\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\textit{Ideale } \mathfrak{a} \textit{ in } A \textit{ mit } \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\}$$

sind bijektiv, zueinander invers und inklusionsumkehrend.

iv) $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ *ist genau dann irreduzibel, wenn* $I(Y)$ *ein Primideal ist.*

v) Die Korrespondenz aus iii) induziert eine Bijektion

$$\{\textit{irreduzible abgeschlossene Teilmengen in } \mathrm{Spec}(A)\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spec}(A)$$

Beweis. Wir benutzen

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Dann folgen die Behauptungen analog wie bei affinen Varietäten. □

4.5 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

i) Ein Punkt $p \in X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\{p\}$ abgeschlossen ist.

ii) Ein Punkt $p \in X$ heißt **generischer Punkt**, wenn $\overline{\{p\}} = X$ gilt.

iii) Ein Punkt $q \in X$ heißt **Spezialisierung** von $p \in X$, wenn $q \in \overline{\{p\}}$ ist.

4.6 Lemma. *Sei* X *ein topologischer Raum.*

i) Ist X *hausdorffsch, so ist jeder Punkt abgeschlossen.*

ii) Existiert ein generischer Punkt in X*, dann ist* X *irreduzibel.*

Beweis. i) Dies ist einfach zu zeigen.

ii) Sei p ein generischer Punkt von X und $X = X_1 \cup X_2$, wobei X_1 und X_2 abgeschlossen sind. Wir müssen zeigen, dass $X_1 = X$ oder $X_2 = X$ gilt. Es gilt $p \in X_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und damit

$$X = \overline{\{p\}} \subseteq X_i.$$

□

4.7 Proposition. *Sei* $X = \mathrm{Spec}(A)$.

i) Für $\mathfrak{p} \in X$ *gilt* $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$*. Für* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ *gilt insbesondere* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ *gilt.*

ii) Unter der Korrespondenz aus Proposition 4.4 iii) entsprechen die abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Spec}(A)$ *genau den Maximalideal von* A.

iii) Für $Y \subseteq X$ *irreduzibel und abgeschlossen gilt* $Y = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ *für* $\mathfrak{p} = I(Y)$*. Damit ist* $\mathfrak{p}$ *der nach i) eindeutig bestimmte generische Punkt von* Y.

iv) Ist A *ein noetherscher Ring, so ist* X *ein noetherscher topologischer Raum.*

v) Sei A *ein noetherscher Ring. Dann entsprechen die irreduziblen Komponenten von* $\mathrm{Spec}(A)$ *unter der Korrespondenz aus Proposition 4.4 iii) genau den minimalen Primidealen von* A.

vi) In einem noetherschen Ring existieren nur endliche viele minimale Primideale.

Beweis. Dies wird in Übung 4.1 gezeigt. □

4.8 Proposition. *Für* $f \in A$ *sei* $V(f) := V(\langle f \rangle)$ *und* $D(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f)$.

i) Für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ in A und $g \in A$ gilt:

$$D(g) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle \{f_i \mid i \in I\}\rangle}$$

ii) Die Mengen $(D(f))_{f\in A}$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

iii) Versehen wir $D(f)$ mit der induzierten Topologie, so ist $D(f)$ quasikompakt. Insbesondere ist $\operatorname{Spec}(A) = D(1)$ quasikompakt.

Beweis. i) Es gilt:

$$\begin{aligned} & D(g) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ \iff\quad & V(g) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V(\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle) \\ \iff\quad & \sqrt{\langle g\rangle} \subseteq \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \\ \iff\quad & g \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \end{aligned}$$

ii) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $\mathfrak{p} \in U := \operatorname{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$. Zu zeigen ist, dass es ein $f \in A$ mit $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$ gibt (Basiseigenschaft). Wegen $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ gibt es ein $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und man sieht leicht, dass dieses f das Gewünschte liefert.

iii) Quasikompakt heißt, dass jede offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von $D(f)$ eine endliche Teilüberdeckung hat, das heißt es gibt ein endliches $I_0 \subseteq I$ mit $\bigcup_{i\in I_0} V_i \supseteq D(f)$. Nach ii) bilden die Mengen $D(f)$ eine Basis, also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in A$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} & D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ \overset{\text{i)}}{\iff}\quad & f \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \\ \iff\quad & \exists\, m \geq 1,\ f^m = \sum_{i\in I_0} a_i f_i \in \langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle \text{ für ein endliches } I_0 \subseteq I, a_i \in A \\ \iff\quad & \exists \text{ endliches } I_0 \subseteq I,\ f \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I_0\}\rangle} \\ \iff\quad & D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I_0} D(f_i) \end{aligned}$$

Also ist $D(f)$ quasikompakt. Insbesondere ist $D(1) = \operatorname{Spec}(A)$ quasikompakt.

□

4.9 Proposition. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

i) Die Abbildung $f\colon X = \operatorname{Spec}(B) \to Y = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ist stetig. Oft bezeichnen wir f auch mit $\operatorname{Spec}(\varphi) = f$. Weiter gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(M)) &= V(\varphi(M)) && \forall\, M \subseteq A \\ f^{-1}(D(a)) &= D(\varphi(a)) && \forall\, a \in A \\ \overline{f(V(\mathfrak{b}))} &= V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) && \forall\, \mathfrak{b} \text{ Ideal in } B \end{aligned}$$

ii) Ist φ surjektiv und $\mathfrak{a} := \ker(\varphi)$, dann definiert f einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec}(B) \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{a}).$$

Beweis. Dies wird in Aufgabe 4.2 gezeigt. □

4.10 Erinnerung. Sei $S \subseteq A$ abgeschlossen unter Multiplikation und $1 \in S$. Dann ist die Lokalisierung A_S definiert als die Menge der Äquivalenzklassen unter folgender Äquivalenzrelation auf $A \times S$:

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists\, t \in S \text{ mit } t(s'a - sa') = 0$$

Die Äquivalenzklasse von (a,s) wird mit $\frac{a}{s}$ bezeichnet. A_S ist ein Ring.

i) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ sei $A_{\mathfrak{p}} := A_S$ mit $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

ii) Für $f \in A$ sei $A_f := A_S$ mit $S = \{f^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

4.11 Konstruktion (Lokal geringter Raum auf $\operatorname{Spec}(A)$)**.** i) Sei U offen in $\operatorname{Spec}(A)$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$ die Menge der Funktionen $s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

a) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$

b) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und $a, f \in A$ mit $V \subseteq D(f)$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in V$.

ii) Aufgrund der lokalen Natur der Axiome a) und b) sieht man, dass $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ eine Garbe von Ringen auf $\operatorname{Spec}(A)$ definiert. Dabei sind die Addition und Multiplikation von solchen Funktionen punktweise unter Benutzung der entsprechenden Operation in den $A_{\mathfrak{p}}$ definiert.

4.12 Proposition. *i) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$$

von Ringen, wobei $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der Halm der Garbe $\mathcal{O}$ in $\mathfrak{p}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring und damit ist $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum.

ii) Für alle $f \in A$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$A_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D(f))$$

von Ringen.

iii) Es gilt $\mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) = A$.

Beweis. i) Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\substack{\mathfrak{p}\in U \\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U),$$

das heißt ein Element von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ist repräsentiert durch (U,s), wobei U offen mit $\mathfrak{p} \in U$ und $s \in \mathcal{O}(U)$ ist. Weiter gilt $[(U,s)] = [(U',s')] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn es ein offenes $V \subseteq U \cap U'$ gibt mit $\mathfrak{p} \in V$ und $s|_V = s'|_V$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ und U eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$. Für U offen in $\operatorname{Spec}(A)$ betrachten wir

$$\mathcal{O}(U) \to A_{\mathfrak{p}},\ s \mapsto s(\mathfrak{p}).$$

Nach a) sind dies wohldefinierte Ringhomomorphismen. Weiter sind diese Homomorphismen verträglich mit Einschränkungen auf kleinere Umgebungen V. Also wird ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p},\ [(U,s)] \mapsto s(\mathfrak{p})$ induziert. Sei $\frac{a}{f} \in A_\mathfrak{p}$, also $f \notin \mathfrak{p},\ a \in A$. Dies definiert einen Schnitt

$$s = \frac{a}{f}\colon D(f) \to \coprod_{\mathfrak{q} \in D(f)} A_\mathfrak{q},\ \mathfrak{q} \mapsto s(\mathfrak{q}) := \frac{a}{f} \in A_\mathfrak{q}.$$

Offenbar gilt $\varphi(s) = \frac{a}{f} \in A_\mathfrak{p}$, also ist φ surjektiv.

Sei U eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ und seien $s, t \in \mathcal{O}(U)$ mit $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$, das heißt

$$\varphi([(U,s)]) = \varphi([(U,t)]).$$

Wir wollen nun $s = t \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ zeigen. Indem wir die Umgebung von $\mathfrak{p}$ gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir nach b) annehmen, dass es $a, b, f, g \in A$ mit $f, g \notin \mathfrak{p}$ gibt, so dass $s = \frac{a}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $t = \frac{b}{g} \in \mathcal{O}(U)$ gilt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & s(\mathfrak{p}) = \varphi(s) = \varphi(t) = t(\mathfrak{p}) \\ \implies\ & \frac{a}{f} = \frac{b}{g} \in A_\mathfrak{p} \\ \implies\ & \exists\, h \in A \setminus \mathfrak{p} \text{ mit } h(ga - fb) = 0 \end{aligned}$$

Weiter gilt $\frac{a}{f} = \frac{b}{g} \in A_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $f, g, h \notin \mathfrak{q}$. Die Menge dieser $\mathfrak{q}$ ist gleich der offenen Menge $W := D(f) \cap D(g) \cap D(h) \ni \mathfrak{p}$. Also gilt $s|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$ und damit $s = t \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ nach der Definition von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Also ist φ injektiv.

Damit ist φ ein kanonischer Isomorphismus.

ii) Wir definieren

$$\begin{aligned} \psi_f\colon A_f &\to \mathcal{O}(D(f)) \\ \frac{a}{f^n} &\mapsto \left(s\colon D(f) \to \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_\mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \mapsto s(\mathfrak{p}) := \frac{a}{f^n} \in A_\mathfrak{p} \right). \end{aligned}$$

Offenbar ist ψ_f ein wohldefinierter Ringhomomorphismus.

Sei $\psi_f\left(\frac{a}{f^n}\right) = \psi_f\left(\frac{b}{f^m}\right)$. Dann gilt $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \in A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$. Sei

$$\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}_A(f^m a - f^n b) = \{g \in A \mid g \cdot (f^m a - f^n b) = 0\}.$$

Beachte, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist. Nun gibt es ein $h \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $h(f^m a - f^n b) = 0$, also $h \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Also gilt $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, das heißt $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Dies gilt für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$, also gilt $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Damit gilt $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$. Mit Proposition 4.4 folgt wegen $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, dass es ein $k \geq 1$ mit $f^k \in \mathfrak{a}$ gibt. Dann gilt $f^k(f^m a - f^n b) = 0$ und damit $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{g^m} \in A_f$. Also ist ψ_f injektiv.

Sei $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Nach Proposition 4.8 ii) und der Definition von $\mathcal{O}$ in Konstruktion 4.11 gibt es eine Familie $(h_i)_{i \in I}$ in A mit

$$D(f) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \tag{$\star$}$$

und $a_i, g_i \in A$ mit $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, sodass für alle $i \in I$

$$s|_{D(h_i)} = \frac{a_i}{g_i} \in \mathcal{O}(D(h_i))$$

gilt. Aus $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ folgt mit Proposition 4.8, dass es $n_i \geq 1$ und $c_i \in A$ mit $h_i^{n_i} = c_i g_i$ gibt. Dann gilt

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{c_i a_i}{h_i^{n_i}} \in \mathcal{O}(D(h_i)) = \mathcal{O}(D(h_i^{n_i})).$$

Wir ersetzen h_i durch $h_i^{n_i}$ und a_i durch $c_i a_i$ und erhalten

$$s|_{D(h_i)} = \frac{a_i}{h_i} \in \mathcal{O}(D(h_i)).$$

Da $D(f)$ nach Proposition 4.8 quasikompakt ist, gibt es $h_1, \dots, h_r$ mit

$$D(f) \overset{(\star)}{=} D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r).$$

Wir fassen $\frac{a_i}{h_i}$ und $\frac{a_j}{h_j}$ als Elemente von $A_{h_i h_j}$ auf. Wegen $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ gilt

$$\psi_{h_i h_j}\left(\frac{a_i}{h_i}\right) = \psi_{h_i h_j}\left(\frac{a_j}{h_j}\right) = s|_{D(h_i h_j)} \in \mathcal{O}(D(h_i h_j)).$$

Aus der Injetivität von $\psi_{h_i h_j}$ folgt $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j} \in A_{h_i h_j}$. Deswegen gibt es $n_{ij} \geq 1$ mit

$$(h_i h_j)^{n_{ij}}(h_j a_i - h_i a_j) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r. \tag{$\star\star$}$$

Sei $n \coloneqq \max\{n_{ij} \mid 1\ \leq i, j \leq r\}$, $\widetilde{a}_i \coloneqq h_i^n a_i$, $\widetilde{h}_i \coloneqq h_i^{n+1}$. Wieder gilt $D(\widetilde{h}_i) = D(h_i)$. Aus $(\star\star)$ folgt

$$h_j^{n+1}(h_i a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r.$$

Deswegen gilt

$$s|_{D(\widetilde{h}_i)} = \frac{\widetilde{a}_i}{\widetilde{h}_i} \text{ und } \widetilde{h}_i \widetilde{a}_j = \widetilde{a}_i \widetilde{h}_j \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r.$$

Aus $(\star)$ folgt mit Proposition 4.8 i), dass es ein $m \geq 1$ mit $f^m = \sum_{i=1}^r b_i \widetilde{h}_i$ für gewisse $b_i \in A$ gibt. Wir setzen $a \coloneqq \sum_{i=1}^r b_i \widetilde{a}_i$. Für $1 \leq j \leq r$ gilt

$$\widetilde{h}_j a = \sum_{i=1}^r \widetilde{h}_j b_i \widetilde{a}_i = \sum_{i=1}^r \widetilde{h}_i b_i \widetilde{a}_j = f^m \widetilde{a}_j$$

und damit folgt

$$\frac{\widetilde{a}_j}{\widetilde{h}_j} = \frac{a}{f^m} \in A_{\widetilde{h}_j} \overset{\psi_{\widetilde{h}_j}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}(D(\widetilde{h}_j))$$

und damit $\psi_f\left(\frac{a}{f}\right) = s$ auf jedem $D(\widetilde{h}_j)$. Da $\mathcal{O}$ eine Garbe ist, gilt dies auch auf $D(f)$. Damit ist ψ_f surjektiv.

Insgesamt ist ψ_f ein Isomorphismus.

iii) Dies folgt aus ii) mit $f = 1$.

□

Bemerkung. Wir nennen $\mathcal{O}$ die Garbe der regulären Funktionen auf $\operatorname{Spec}(A)$.

4.13 Definition. Der lokal geringte Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **Spektrum** von A.

4.14 Proposition. *Seien A, B Ringe, $X \coloneqq \operatorname{Spec}(B)$ und $Y \coloneqq \operatorname{Spec}(A)$.*

i) Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ induziert eine stetige Abbildung

$$(f = \operatorname{Spec}(\varphi))\colon X \to Y,\ \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}),$$

einen Garbenhomomorphismus

$$f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$$

und einen Morphismus

$$(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

lokal geringter Räume.

ii) Ein Morphismus lokal geringter Räume $(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ induziert einen Ringhomomorphismus

$$(\varphi = \Gamma(Y, f^{\#}))\colon (A = \mathcal{O}_Y(Y)) \to (B = \mathcal{O}_X(X)).$$

iii) Es gibt eine bijektive Korrespondenz

$$\begin{aligned}\phi\colon \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, B) &\to \operatorname{Hom}_{\mathrm{lgR}}((\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}), (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}))\\ \varphi &\mapsto ((f = \operatorname{Spec}(\varphi)), f^{\#})\end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung Ψ ist gegeben durch

$$(f, f^{\#}) \mapsto \Gamma(\operatorname{Spec}(A), f^{\#}).$$

Beweis. Dies wird in Aufgabe 5.1 gezeigt. □

4.15 Definition. Ein **affines Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, welcher für einen Ring A zu $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ isomorph ist.

4.16 Lemma. *Sei $f \in A$. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$(\operatorname{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)}) \xrightarrow{\sim} (D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}|_{D(f)})$$

von lokal geringten Räumen. Insbesondere ist $(D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}|_{D(f)})$ ein affines Schema.

Beweis. Dies folgt leicht aus Proposition 4.12 und wird in Aufgabe 5.2 gezeigt. □

4.17 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $p \in X$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,p}$ ein lokaler Ring mit eindeutigem Maximalideal $\mathfrak{m}_p$. Also ist

$$\kappa(p) \coloneqq \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$$

ein Körper, den wir **Restklassenkörper** von $(X, \mathcal{O}_X)$ in p nennen.

5 Schemata

Schemata sind die Hauptobjekte der algebraischen Geometrie. Sie verallgemeinern die (quasi-projektiven) Varietäten aus der Algebraischen Geometrie I.

5.1 Definition. i) Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei X eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ hat, die die Eigneschaft besitzt, dass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ für alle $i \in I$ ein affines Schema ist. Wir nennen X den **unterliegenden topologischen Raum** und $\mathcal{O}_X$ die **Strukturgarbe**. Oft wird das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ einfach mit X abgekürzt, obwohl der topologische Raum das Schema nicht bestimmt.

ii) Ein **Morphismus** von Schemata ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

Wir erhalten die Katergorie Sch der Schemata.

5.2 Proposition. *Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.*

i) Für U offen in X ist $(U, (\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U))$ ein Schema. Weiter hat man einen kanonischen Morphismus

$$j \colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X).$$

*Wir nennen dies die **induzierte Schemastruktur** auf U und sagen, dass $(U, \mathcal{O}_U)$ ein **offenes Unterschema** von X ist.*

ii) Die affinen offenen Unterschemata von X bilden eine Basis der Topologie von X.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.8 und Lemma 4.16. □

5.3 Bemerkung. Ein offenes Unterschema eines affinen Schemas muss im Allgemeinen nicht wieder affin sein.

Bemerkung. Sei X ein topologischer Raum.

i) X erfüllt das Axiom T_0, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge U mit $x \in U$, $y \notin U$ oder $x \notin U$, $y \in U$ gibt. X heißt dann T_0-Raum.

ii) X erfüllt das Axiom T_1, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x$, $y \notin U_x$ und $x \notin U_y$, $y \in U_y$. X heißt dann T_1-Raum.

iii) X erfüllt das Axiom T_2, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. X heißt dann T_2-Raum oder **Hausdorffraum**.

Man sieht leicht, dass das Axiom T_2 das Axiom T_1 impliziert und dass das Axiom T_1 das Axiom T_0 impliziert.

5.4 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.*

i) Der topologische Raum X ist ein T_0-Raum.

ii) Jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge des topologischen Raums X besitzt genau einen generischen Punkt.

Beweis. i) Seien $x \neq y \in X$. Nach Definition 5.1 gibt es eine affine offene Umgebung $U \cong \operatorname{Spec}(A)$ von x. Falls $y \notin U$, dann sind wir fertig, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y \in U$. Die Punkte x, y sind durch Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ von A gegeben. Es gilt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, und somit ist $D(f)$ offen in X mit $x \notin D(f)$, aber $y \in D(f)$.

ii) Wir zeigen zunächst die Existenz: Sei $V \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen. Nach Definition 5.1 gibt es ein offenes affines Unterschema $U \cong \operatorname{Spec}(A)$ mit $U \cap V \neq \emptyset$. Da V abgeschlossen in X ist, ist $U \cap V$ abgeschlossen in U und weil U offen in X ist, ist $U \cap V$ offen in V. In Aufgabe 1.5 zur Algebraischen Geometrie I haben wir gesehen, dass jede nicht leere, offene Teilmenge eines irreduziblen topologischen Raumes irreduzibel und dicht ist, also ist $U \cap V$ irreduzibel und dicht in V. Sei $\mathfrak{p} := I(U \cap V) \in \operatorname{Spec}(A)$. Nach Proposition 4.7 iii) ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt von $\operatorname{Spec}(A)$. Dieser entspricht einem Punkt η in $U \subseteq X$. Es gilt $\overline{\eta} = U \cap V$ und damit ist η dicht in V, also ein generischer Punkt von V.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit: Seien η_1, η_2 generische Punkte von V. Wir nehmen an, dass $\eta_1 \neq \eta_1$. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein offenes U mit $\eta_1 \in U$ und $\eta_2 \neq U$. Dann gilt $\eta_2 \in V \setminus U \neq V$ und damit folgt $\overline{\eta_2} \subseteq V \setminus U \neq V$ im Widerspruch dazu, dass η_2 ein generischer Punkt von V ist.

□

Bemerkung. Wir haben inbesondere gezeigt, dass jedes irreduzible affine Schema ein T_0-Raum ist. Weiter haben wir gesehen, dass jedes irreduzible affine Schema X genau einen generischen Punkt η hat.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, das mindestens zwei Punkte enthält. Dann ist X jedoch kein T_1-Raum.

Beweis. Wir wählen $y = \eta$, $x \neq y$. Falls U eine offene Umgebung von x ist, so gilt $y \in U$, da y ein generischer Punkt ist. □

5.5 Lemma. *Seien X, Y Schemata.*

i) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und seien $f_i \colon U_i \to Y$ Morphismen mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall\, i, j \in I.$$

Dann gibt es genau einen Morphismus $f \colon X \to Y$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

ii) Die durch $U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathrm{Sch}}(U, Y)$ mit den Restriktionsabbildungen

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Sch}}(U, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{Sch}}(V, Y)$$

definierte Prägarbe von Mengen auf X ist eine Garbe.

Beweis. i) Genauer ist ein Morphismus $(f, f^{\#}) \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von lokal geringten Räumen zu konstruieren und die Eindeutigkeit zu zeigen. Gegeben sind Morphismen

$$(f_i, f_i^{\#}) \colon (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y),$$

die auf den Überlappungen übereinstimmen. Für alle $x \in X$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Nun definieren wir die stetige Abbildung

$$f \colon X \to Y,\ x \mapsto f(x) := f_i(x).$$

Dies ist wohldefiniert, da die f_i auf den Überlappungen der U_i übereinstimmen. Wir konstruieren nun $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Für V offen in Y müssen wir einen Homomorphismus

$$f_V^{\#}\colon \mathcal{O}_Y(V) \to ((f_*\mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}V))$$

konstruieren. Sei $s \in \mathcal{O}_Y(V)$. Beachte, dass $f^{-1}V$ von den offenen Teilmegenen $U_i \cap f^{-1}V$ überdeckt wird. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_{i,V}^{\#}\colon \mathcal{O}_Y(V) &\to ((f_{i*}\mathcal{O}_{U_i})(V) = \mathcal{O}_X(U_i \cap f^{-1}V)) \\ s &\mapsto f_{i,V}^{\#}(s). \end{aligned}$$

Wegen der Vorraussetzung stimmen die $f_{i,V}^{\#}(s)$ auf den Überlappungen der Mengen $U_i \cap f^{-1}V$ überein. Wegen der Garbeneigenschaft gibt es ein eindeutiges $t \in \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ mit $t|_{U_i \cap f^{-1}V} = f_{i,V}^{\#}(s)$ für alle $i \in I$. Wir definieren $f_V^{\#}(s) \coloneqq t$. Man sieht sofort, dass $f_V^{\#}$ das Gewünschte liefert und eindeutig ist.

ii) Dies folgt aus i), indem man $X \coloneqq U$ setzt.

□

5.6 Proposition. *Sei X ein Schema und A ein Ring. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A)) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, \mathcal{O}_X(X)) \\ (f, f^{\#}) &\mapsto f^{\#}_{\mathrm{Spec}(A)} \end{aligned}$$

eine kanonische Bijektion.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, \mathcal{O}_X(X))$. Wir müssen nun zeigen, dass es genau ein $(f, f^{\#}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A))$ mit $f^{\#}_{\mathrm{Spec}(A)} = \varphi$ gibt. Wir wählen eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X, wobei U_i für alle $i \in I$ ein offenes Unterschema von X ist. Nach Proposition 4.14 gibt es genau ein $(f_i, f_i^{\#}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(U_i, \mathrm{Spec}(A))$ mit $f^{\#}_{i,\mathrm{Spec}(A)} = \varphi_i$. Für jedes affine offene Unterschema V von $U_i \cap U_j$ gilt $f_i|_V = f_j|_V$ für alle $i, j \in I$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit in Proposition 4.14. Weil die Prägarbe der Morphismen in der Kategorie Sch schon eine Garbe ist, folgt

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j},$$

da es nach Lemma 5.5 genau ein $(f, f^{\#}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A))$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$ gibt. Dies ergibt sofort die Existenz von $(f, f^{\#})$ mit Hilfe der Garbeneigenschaft der Morphismen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Konstruktion. □

5.7 Definition. i) Sei S ein Schema. Ein **S-Schema** ist ein Morphismus $f\colon X \to S$ von Schemata. Sei $g\colon X \to S$ ein weiteres S-Schema, dann setzen wir

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) = \{h\colon X \to Y \mid h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, Y) \text{ mit } g \circ h = f\},$$

das heißt $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ ist die Menge aller Morphismen $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, Y)$, für die folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

ii) Sei $S = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring A. Dann sagen wir **A-Schema** statt S-Schema.

Bemerkung. Alternativ zur Notation in Definition 5.7 verwenden wir manchmal auch folgende Sprechweisen: Für ein S-Schema X sagen wir auch: X ist ein **Schema über** S. Ist $S = \mathrm{Spec}(A)$, so sagen wir für ein A-Schema X auch: X ist ein **Schema über** A.

Bemerkung. Nach Proposition 5.6 haben wir ein A-Schema $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ genau dann, wenn wir einen Ringhomomorphismus $f^{\#}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \to \mathcal{O}_X(X)$ haben, also wenn es eine A-Algebrastruktur auf $\mathcal{O}_X(X)$ gibt.

5.8 Beispiel.

i) Setzte $A := \mathbb{Z}$. Dann existiert für jedes Schema X genau ein Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und somit ist X ein kanonisches $\mathbb{Z}$-Schema, da genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X(X)$ existiert. Damit ist $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ein finales Objekt in der Kategorie der Schemata.

ii) Sei X ein Schema, dann setzen wir $A := \mathcal{O}_X(X)$. Dann gibt es einen kanonischen Homomorphismus $A \to \mathcal{O}_X(X)$, nämlich die Identität. Damit existiert nach Proposition 5.6 ein kanonischer Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(A)$, das heißt X ist kanonisch ein $(A = \mathcal{O}_X(X))$-Schema.

5.9 Definition. Ein **Verklebedatum** von Schemata ist eine Familie von Tripeln der Form $(X_i, U_{ij}, \varphi_{ij})_{i,j\in I}$, wobei X_i für alle $i \in I$ ein Schema ist, U_{ij} für alle $i, j \in I$ eine offene Teilmenge von X_i ist und φ_{ij} für alle $i, j \in I$ ein Isomorphismus

$$\varphi_{ij}\colon (U_{ij} = (U_{ij}, \mathcal{O}_{X_i}|_{U_{ij}})) \xrightarrow{\sim} (U_{ji} = (U_{ji}, \mathcal{O}_{X_j}|_{U_{ji}}))$$

mit folgenden Eigenschaften ist:

i) Für alle $i, j \in I$ gilt $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$, $U_{ii} = X_i$ und $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$.

ii) Für alle $i, j, k \in I$ gilt $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.

iii) Für alle $i, j, k \in I$ gilt $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$.

5.10 Lemma (Verkleben von Schemata)**.** *Sei ein Verklebedatum $(X_i, U_{ij}, \varphi_{ij})_{i,j\in I}$ gegeben. Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Schema X zusammen mit Morphismen $\psi_i\colon X_i \to X$, die für alle $i, j \in I$ folgende Eigenschaften erfüllen:*

i) ψ_i induziert einen Isomorphismus $\psi_i\colon X_i \to \psi_i(X_i)$ von X_i auf das offene Unterschema $\psi_i(X_i)$ von X.

ii) Es gilt $\bigcup_{i\in I} \psi_i(X_i) = X$.

iii) Es gilt $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

iv) Es gilt $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij}.

Beweis. Sei $\widetilde{X} := \coprod_{i\in I} X_i$ versehen mit der disjunkten Vereinigungstopologie, das heißt die offenen Mengen in $\widetilde{X}$ haben die Form $\coprod_{i\in I} U_i$, wobei U_i für alle $i \in I$ offen in X_i ist. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{X}$ wie folgt:

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, i, j \in I \text{ mit } a \in U_i,\ b \in U_j \text{ und } \varphi_{ij}(a) = b.$$

Sei $X := \widetilde{X}/\!\sim$ der Raum der Äquivalenzklassen. Dann erhalten wir die Klassenabbildung

$$\pi\colon \widetilde{X} \twoheadrightarrow X,\ a \mapsto [a].$$

Wir versehen X mit der **Quotiententopologie**, das heißt U ist genau dann offen in X, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\widetilde{X}$ ist. π wird damit eine stetige und offene Abbildung. Nach Definition ist somit U genau dann offen in X, wenn $\psi_i^{-1}(U)$ für alle $i \in I$ offen in X_i ist, wobei ψ_i durch

$$\psi_i\colon X_i \to X,\ a \mapsto [a]$$

gegeben ist. Beachte, dass ψ_i für alle $i \in I$ stetig und injektiv ist. Nach Konstruktion gelten nun ii), iii), iv). Ebenso folgt, dass ψ_i einen Homöomorphismus $X_i \to \psi_i(X_i)$ induziert. Weiter sehen wir aufgrund der Charakterisierung offener Mengen in X ein, dass $U_i \coloneqq \psi_i(X_i)$ offen in X ist. Wir definieren die Garbe

$$\mathcal{O}_{U_i} \coloneqq \psi_{i*}(\mathcal{O}_{X_i})$$

auf U_i. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\psi_i \colon (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \xrightarrow{\sim} (U_i, \mathcal{O}_{U_i})$$

von lokal geringten Räumen. Also ist $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ ein Schema. Die Garbenisomorphismen

$$\varphi_{ij}^{\#} \colon \mathcal{O}_{X_j}|_{U_{ji}} \xrightarrow{\sim} (\varphi_{ij})_*(\mathcal{O}_{X_i}|_{U_{ij}})$$

auf dem Verklebedatum liefern Garbenisomorphismen

$$\widetilde{\varphi}_{ij}^{\#} \colon \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$$

mit $\widetilde{\varphi}_{ii}^{\#} = \mathrm{id}$, die die sogenannte **Kozykelbedingung**

$$\widetilde{\varphi}_{ik} = \widetilde{\varphi}_{jk} \circ \widetilde{\varphi}_{ij} \text{ auf } U_i \cap U_j \cap U_k$$

erfüllen. Durch Verkleben der Garben $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ entlang der $\widetilde{\varphi}_{ij}$ erhält man eine Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X (siehe Lemma 5.11). Nach Konstruktion ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Da $(X, \mathcal{O}_X)$ eine offene Überdeckung durch die affinen Schemata

$$(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (X_i, \mathcal{O}_{X_i})$$

bestitzt, folgt die Existenz. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Konstruktion. □

5.11 Lemma (Verkleben von Garben)**.** *Sein X ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Für alle $i \in I$ sei $\mathcal{F}_i$ eine Garbe auf U_i und für alle $i, j \in I$ sei*

$$\varphi_{ij} \colon \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$$

ein Isomorphismus von Garben mit folgenden Eigenschaften:

i) für alle $i \in I$ gilt $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_i}$.

ii) Für alle $i, j, k \in I$ gilt $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe $\mathcal{F}$ auf X zusammen mit Isomorphismen $\psi_i \colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$ derart, dass für alle $i, j \in I$

$$\psi_j|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{ij} \circ \psi_i|_{U_i \cap U_j}$$

*gilt. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ durch **Verkleben der $\mathcal{F}_i$ entlang der Isomorphismen** φ_{ij} entsteht.*

5.12 Beispiel. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Schemata. Wir setzen $U_{ij} \coloneqq \emptyset$ und wählen als φ_{ij} die trivialen Abbildungen. Damit erhalten wir ein Verklebedatum $(X_i, U_{ij}, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ und mit Verkleben nach Lemma 5.10 damit ein Schema X. Es ist X die **disjunkte Vereinigung** $\coprod_{i \in I} X_i$ der X_i als Schemata.

5.13 Beispiel. Sei K ein Körper. Für $i = 1, 2$ sei $X_i \coloneqq \mathbb{A}_K^1 = \mathrm{Spec}(K[T])$. Wir setzen $U_{12} \coloneqq X_1 \setminus V(T)$ und $U_{21} \coloneqq X_2 \setminus V(T)$. Als φ_{12} und φ_{21} wählen wir die identische Abbildung auf $U_{12} = U_{21} = U = \mathrm{Spec}(K[T]) \setminus V(T)$. Verkleben nach Lemma 5.10 liefert ein Schema $X =$„$\mathbb{A}_K^1$

mit verdoppeltem Nullpunkt“. Es gilt $X = X_1 \cup X_2$ und $X_1 \cap X_2 = U$. Nach dem Garbenaxiom gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(X) &= \{(f,g) \in \mathcal{O}_X(X_1) \times \mathcal{O}_X(X_2) \mid f|_U = g|_U\} \\ &= \{(f,g) \in K[T] \times K[T] \mid \frac{f}{1} = \frac{g}{1} \in K[T]_T\} \\ &= K[T], \text{ wobei wir } \mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(D(T)) = K[T]_T \text{ benutzt haben.}\end{aligned}$$

Behauptung: X ist kein affines Schema.

Beweis. Wäre X ein affines Schema, so wäre

$$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)) = \mathrm{Spec}(K[T])$$

und

$$(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = K[T]) \to (\Gamma(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = K[T])$$

wäre die Identität. Also erhalten wir den Widerspruch $X = X_1$. □

Wir konstruieren jetzt projektive Schemata. Dabei gehen wir analog wie bei affinen Schemata vor, aber „homogenisieren alles“ (vergleiche auch [Gub14, 11 Projektive Varietäten]).

5.14 Definition. Sei $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$ ein graduierter Ring. Sei $S_+ := \bigoplus_{d>0} S_d$ das homogene Maximalideal, $S^{\mathrm{hom}} := \bigcup_{d \in \mathbb{N}} S_d$ die Menge der homogenen Elemente von S und

$$\mathrm{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal in } S \text{ mit } S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ von S setzen wir

$$V_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

5.15 Lemma. *i) Es gilt $V_+(S_+) = \emptyset$ und $V_+(\langle 0 \rangle) = \mathrm{Proj}(S)$.*

ii) Für homogene Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in S gilt $V_+(\mathfrak{a}) \cup V_+(\mathfrak{b}) = V_+(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

iii) Für homogene Ideale $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ in S gilt $\bigcap_{i \in I} V_+(\mathfrak{a}_i) = V_+\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

Beweis. i) ist trivial. Die Eigenschaften ii) und iii) folgen aus

$$V_+(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Proj}(S) \subseteq \mathrm{Spec}(S)$$

und den entsprechenden Aussagen für $V(\mathfrak{a})$ in $\mathrm{Spec}(S)$. □

5.16 Konstruktion (des Schemas $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O})$)**.** Das Lemma 5.15 liefert sofort, dass $\mathrm{Proj}(S)$ ein topologischer Raum ist, bei dem abgeschlossenen Teilmengen gerade Mengen der Form $V_+(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ von S sind. Damit erhalten wir die Zariski-Topologie auf $\mathrm{Proj}(S)$.

Wir definieren die Garbe $\mathcal{O}$ auf $\mathrm{Proj}(S)$ folgendermaßen: Sei U offen in $\mathrm{Proj}(S)$. Dann ist $\mathcal{O}(U)$ die Menge der Funktionen $s \colon U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

a) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$.

b) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und $a, f \in S^{\mathrm{hom}}$ mit folgenden Eigenschaften: $\deg(a) = \deg(f)$ und für alle $\mathfrak{q} \in V$ gilt $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in S_{(\mathfrak{q})}$.

Hier ist

$$S_{(\mathfrak{p})} \coloneqq \left\{\text{Elemente vom Grad 0 in } S_{S^{\mathrm{hom}}\setminus\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in S^{\mathrm{hom}},\, s \in S^{\mathrm{hom}} \setminus \mathfrak{p},\, \deg(a) = \deg(s)\right\}.$$

Analog zum affinen Fall ist $\mathcal{O}$ eine Garbe auf $\mathrm{Proj}(S)$. Wir nennen $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O})$ das **projektive Spektrum** von S.

5.17 Proposition. *i) Für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ *gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} S_{(\mathfrak{p})}.$$

ii) Für $f \in S^{hom}$ *ist* $D_+(f) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ *offen in* $\mathrm{Proj}(S)$. *Für eine Familie* $(f_i)_{i\in I}$ *in* S^{hom} *mit* $\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle = S_+$ *gilt* $\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{i\in I} D_+(f_i)$.

iii) Für $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$, $f \in S_d$ *und* $S_{(f)} \coloneqq \left\{\frac{a}{f^m} \mid a \in S^{hom}, \deg(a) = md\right\}$ *gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$(\varphi, \varphi^{\#})\colon \left(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}\right) \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{Spec}(S_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})}\right).$$

iv) $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O})$ *ist in kanonischer Weise ein* S_0*-Schema.*

Beweis. Dies wird analog zum affinen Fall in Aufgabe 6.2 gezeigt. □

5.18 Definition. Sei A ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir

$$\mathbb{A}^n_A \coloneqq \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_n])$$

als den n-dimensionalen **affinen Raum** über A und

$$\mathbb{P}^n_A \coloneqq \mathrm{Proj}(A[T_0, \ldots, T_n])$$

als den n-dimensionalen **projektiven Raum** über A.

5.19 Beispiel. Sei $S \coloneqq A[T_0, \ldots, T_n]$. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ ergibt sich ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} A[T_0, \ldots, T_{i-1}, \widehat{T_i}, T_{i+1}, \ldots, T_n] &\xrightarrow{\sim} S_{(T_i)} \\ f(T_0, \ldots, T_{i-1}, \widehat{T_i}, T_{i+1}, \ldots, T_n) &\longmapsto f\left(\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}\right), \end{aligned}$$

wobei mit $\widehat{T_i}$ gemeint ist, dass wir T_i weglassen. Damit folgt $D_+(T_i) \cong \mathbb{A}^n_A$ und wir erhalten aus Proposition 5.17, dass $\mathbb{P}^n_A = \bigcup_{i=0}^n D_+(T_i)$ eine offene Überdeckung durch affine Räume ist (vergleiche Standardüberdeckung von $\mathbb{P}^n_k$ in der Algebraischen Geometrie I).

6 Erste Eigenschaften von Schemata

Nachdem wir Schemata definiert haben, untersuchen wir hier erste Eigenschaften, wie „Endlichkeit“ von Morphismen.

6.1 Erinnerung. i) Ein topologischer Raum heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

ii) Ein Ring A heißt **reduziert**, wenn $\mathrm{nil}(A) = \{0\}$ gilt, wobei $\mathrm{nil}(A) \coloneqq \sqrt{\{0\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p}$ das **Nilradikal** von A ist.

6.2 Definition. i) Ein Schema heißt $\left\{\begin{matrix}\text{zusammenhängend}\\ \text{irreduzibel}\\ \text{quasikompakt}\end{matrix}\right\}$, wenn der unterliegene topologische Raum $\left\{\begin{matrix}\text{zusammenhängend}\\ \text{irreduzibel}\\ \text{quasikompakt}\end{matrix}\right\}$ ist.

ii) Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{integer}\\ \text{reduziert}\end{matrix}\right\}$, falls für jedes offene U in X auch schon $\mathcal{O}_X(U)$ $\left\{\begin{matrix}\text{integer}\\ \text{reduziert}\end{matrix}\right\}$ ist.

6.3 Lemma. $X = \mathrm{Spec}(A)$ *ist genau dann irreduzibel, wenn* $\mathrm{nil}(A)$ *ein Primideal ist. In diesem Fall ist* $\mathrm{nil}(A)$ *der generische Punkt von* X.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& X \text{ irreduzibel} \\
\overset{\text{Proposition 5.4 ii)}}{\underset{\text{und Lemma 4.6 ii)}}{\iff}} \quad & X \text{ hat generischen Punkt} \\
\iff \quad & \exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \text{ mit } X = \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) \\
\iff \quad & \exists \text{ kleinstes Primideal in } A \\
\iff \quad & \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \text{ ist Primideal.}
\end{aligned}$$

□

6.4 Lemma. *Sei* X *ein Schema und* $f \in \mathcal{O}_X(X)$. *Wir betrachten die zu* f *assoziierte Funktion*

$$F\colon X \to \coprod_{p \in X} \kappa(p),\ p \mapsto F(p) \coloneqq f_p + \mathfrak{m}_{X,p} \in \kappa(p).$$

Die Menge

$$V(f) \coloneqq \{p \in X \mid F(p) = 0\}$$

ist abgeschlossen in X *und* $X_f \coloneqq X \setminus V(f)$ *ist offen in* X.

Beweis. X wird durch offene affine Unterschemata $U = \operatorname{Spec}(A)$ überdeckt. Um zu zeigen, dass $V(f)$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass für eine fixierte solche Überdeckung für alle Unterschemata U der Überdeckung schon $V(f) \cap U$ abgeschlossen in U ist. Setze

$$\widetilde{f} \coloneqq f|_U \in \mathcal{O}_X(U) \cong A.$$

Für $\mathfrak{p} \in U = \operatorname{Spec}(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p} \in V(f) \cap U \\ \iff & F(\mathfrak{p}) = 0 \\ \iff & f_\mathfrak{p} + \mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}} = 0 \in \kappa(\mathfrak{p}) \cong A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \\ \iff & \widetilde{f}_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \\ \iff & \widetilde{f} \in \mathfrak{p} \\ \iff & \mathfrak{p} \in V(\langle \widetilde{f} \rangle) \subset \operatorname{Spec}(A). \end{aligned}$$

Somit ist $V(f) \cap U$ abgeschlossen in $U = \operatorname{Spec}(A)$. Dies zeigt auch, dass diese Definition von $V(f)$ konsistent mit der Defininition von $V(f)$ ist, im Fall, dass X ein affines Schema ist. □

6.5 Proposition. *Sei X ein Schema.*

i) X ist genau dann reduziert, wenn $\mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ ein reduzierter Ring ist.

ii) Ist X integer, so ist $\mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ ein Integritätsbereich.

iii) X ist integer genau dann, wenn X reduziert und irreduzibel ist.

Beweis. i) „$\Longrightarrow$“: Sei X also reduziert und $p \in X$. Falls es ein $f \in \mathcal{O}_{X,p} \setminus \{0\}$ mit $f^n = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$ gibt für ein $n \in \mathbb{N}$, so gibt es ein $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_X(U)$ für eine offene Umgebung U von p mit $\widetilde{f}_p = f \in \mathcal{O}_{X,p}$ und $\widetilde{f}^n = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Tastsache, dass $\mathcal{O}_X(U)$ ein reduzierter Ring ist.
„$\Longleftarrow$“: Sei U offen in X. Falls $\mathcal{O}_X(U)$ nicht reduziert ist, dann gibt es ein $f \in \mathcal{O}_X(U) \setminus \{0\}$ mit $f^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $p \in U$ mit $f_p \neq 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$. Mit

$$(f^n)_p = (f_p)^n = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$$

folgt dann aber ein Widerspruch.

ii) Sei X integer und sei $p \in X$. Wir wählen eine affine offene Umgebung $U = \operatorname{Spec}(A)$ von p in X. Dann ist p durch ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gegeben. Weil X integer ist, ist $A = \mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich. Es gilt $\mathcal{O}_{X,p} = A_\mathfrak{p}$. Da die Lokalisierung eines Integritätsbereiches wieder integer ist, folgt die Behauptung.

iii) „$\Longrightarrow$“: Sei X ein integres Schema. Dann ist X trivialerweise reduziert. Wir zeigen wieder indirekt, dass X irreduzibel ist. Ist X nicht irreduzibel, so gibt es nicht-leere disjunkte offene Teilmengen U_1, U_2 von X. Da U_1 und U_2 disjunkt sind, gilt

$$\mathcal{O}_X(U_1 \mathbin{\dot\cup} U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2).$$

Solch ein Produkt hat jedoch immer Nullteiler der Form $(f,0) \cdot (0,g) = (0,0)$.
„$\Longleftarrow$“: Sei nun X reduziert und irreduzibel. Sei weiter U offen in X. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich ist. Seien $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f \cdot g = 0$. Es gilt

$$X = V(0) = V(fg) = V(f) \cup V(g).$$

Da U offen im irreduziblem Raum X ist, ist auch U irreduzibel. Deswegen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V(f) = U$ setzen. Beachte, dass $V(f)$ wie in Lemma 6.4

und damit abgeschlossen ist. Wir zeigen nun für jedes affine offene Unterschema $V = \mathrm{Spec}(A)$ von U, dass $f|_V = 0$ gilt, woraus mit der Garbeneigenschaft $f = 0$ folgt, dass U integer ist. Für $V = \mathrm{Spec}(A) \subset U = V(f)$ offen gilt nach Definition $f|_V \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Also gilt

$$f|_V \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p} = \mathrm{nil}(A) = \{0\},$$

da $A = \mathcal{O}_X(V)$ reduziert ist.

□

6.6 Definition. i) Ein Schema X heißt **lokal noethersch**, wenn $\mathcal{O}_X(U)$ für alle affinen offenen Unterschemata $U = \mathrm{Spec}(A)$ noethersch ist.

ii) Ein Schema X heißt **noethersch**, wenn X lokal noethersch und quasikompakt ist.

6.7 Proposition. *Sei X ein Schema.*

i) X ist genau dann lokal noethersch (bzw. noethersch), wenn es eine Überdeckung (bzw. endliche Überdeckung) $(U_i)_{i \in I}$ durch affine offene Unterschemata $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ mit noetherschen Ringen A_i gibt.

ii) Ein affines Schema $\mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann noethersch, wenn A ein noetherscher Ring ist.

iii) Ist X ein noethersches Schema, so ist der unterliegende topologische Raum noethersch und hat damit eine Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

iv) Ist X ein noethersches Schema, so ist $\mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ ein noetherscher lokaler Ring.

Beweis. [Har77, Proposition II.3.2]. □

6.8 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

i) f heißt **injektiv** beziehungsweise **surjektiv** beziehungsweise **bijektiv**, wenn die unterliegende Abbildung topologischer Räume injektiv beziehungsweise surjektiv beziehungsweise bijektiv ist.

ii) f heißt **offen** beziehungsweise **abgeschlossen** beziehungsweise **Homöomorphismus**, wenn die unterliegende Abbildung topologischer Räume offen beziehungsweise abgeschlossen beziehungsweise ein Homöomorphismus ist.

iii) f heißt **quasikompakt**, wenn $f^{-1}(V)$ für alle V quasikompakt und offen in Y quasikompakt ist.

iv) f heißt **lokal von endlichem Typ**, wenn für alle affinen offenen Unterschemata $V = \mathrm{Spec}(A)$ von Y und jedes affine offene Unterschema $U = \mathrm{Spec}(B)$ in $f^{-1}(V)$ schon B eine endlich erzeugte A-Algebra ist vermöge der Abbildung

$$(A = \mathcal{O}_Y(V)) \xrightarrow{f^\#} (\Gamma(V, f_*\mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}V, \mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\text{Einschränkung}} (\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = B).$$

v) f heißt **von endlichem Typ**, wenn f lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

vi) f heißt **endlich**, wenn für alle affinen offenen Unterschemata $V = \mathrm{Spec}(A)$ von Y schon $f^{-1}(V)$ ein affines offenes Unterschema von X und $B = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ ein endlich erzeugter A-Modul ist vermöge derselben Abbildung, wie in iv).

6.9 Bemerkung. Nach Proposition 4.7 ist jedes affine Schema quasikompakt. Also ist ein Schema X genau dann quasikompakt, wenn es eine endliche Vereinigung von affinen offenen Unterschemata ist.

6.10 Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.*

i) f ist genau dann quasikompakt, wenn es eine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y durch affine offene Unterschemata $V_i = \operatorname{Spec}(B_i)$ mit quasikompakten Urbildern $f^{-1}(V_i)$ gibt.

ii) f ist genau dann lokal von endlichem Typ, wenn es eine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y durch affine offene Unterschemata $V_i = \operatorname{Spec}(B_i)$ mit

$$f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j\in J_i} U_{ij}$$

gibt für gewisse offene affine Unterschemata $U_{ij} = \operatorname{Spec}(B_{ij})$, wobei B_{ij} für alle $i, j \in I$ eine endlich erzeugte B_i-Algebra ist.

iii) f ist genau dann endlich, wenn es eine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y durch affine offene Unterschemata $V_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec}(B_i)$ für alle $i \in I$ ein affines offenes Unterschema von X ist und B_i für alle $i \in I$ ein endlich erzeugter A_i-Modul ist.

Beweis. Dies wird in den Aufgaben 7.1 bis 7.3 bewiesen. □

6.11 Proposition. *i) Sei Y ein lokal noethersches Schema und sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus lokal von endlichem Typ. Dann ist auch X ein lokal noethersches Schema.*

ii) Sei Y ein noethersches Schema und sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. Dann ist auch X ein noethersches Schema.

Beweis. Nach dem Hilbert'schen Basissatz ist eine endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen Ring wieder noethersch.

i) Es gibt eine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y durch offene affine Unterschemata $V_i = \operatorname{Spec}(B_i)$ mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j\in J_i} U_{ij}$ gilt, wobei $U_{ij} = \operatorname{Spec}(B_{ij})$ ist und B_{ij} für alle $i, j \in I$ eine endlich erzeugte B_i-Algebra ist. Da Y lokal noethersch ist, ist B_i noethersch und damit nach dem Hilbert'schen Basissatz auch B_{ij}. Nach Proposition 6.7 ist X lokal noethersch.

ii) Dies folgt aus i), weil f quasikompakt ist.

□

6.12 Beispiel. Sei A ein Ring. Dann sind die kanonischen Morphismen $\mathbb{A}^n_A \to \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec}(A)$ quasikompakt (benutze die endliche Standardüberdeckung durch affine Räume). Sie sind auch von endlichem Typ. Weiter sind sie genau dann endlich, wenn $n = 0$ ist. Falls A ein noetherscher Ring ist, sind $\mathbb{A}^n_A$ und $\mathbb{P}^n_A$ noethersche Schemata.

6.13 Definition. Sei X ein Schema.

i) Die **Dimension** von X ist definiert als die Dimension des unterliegenden topologischen Raumes und wird mit $\dim(X)$ bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{aligned}\dim(X) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid\ &\text{es gibt eine Kette } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \\ &\text{von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen in } X\}.\end{aligned}$$

ii) Für $Z \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel heißt

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}(Z, X) \coloneqq \sup\{n \in \mathbb{N} \mid\ &\text{es gibt eine Kette } Z = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \\ &\text{von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen in } X\}.\end{aligned}$$

die **Kodimension** von Z in X.

iii) Für $Y \subseteq X$ abgeschlossen (aber nicht notwendigerweise irreduzibel) definieren wir

$$\operatorname{codim}(Y, X) \coloneqq \inf\{\operatorname{codim}(Z, X) \mid Z \text{ abgeschlossen und irreduzibel in } Y\}.$$

Konvention: $\operatorname{codim}(\emptyset, X) = +\infty$.

6.14 Bemerkung. i) Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$, so gilt $\dim(X) = \dim(A)$, wobei $\dim(A)$ die Krulldimension von A ist.

ii) Ist X ein affines integres Schema über dem Körper K mit der Eigenschaft, dass der Morphismus $X \to \operatorname{Spec}(K)$ von endlichem Typ ist, dann gilt

$$\dim(Y) + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim(X)$$

für alle abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Y von X. Dies folgt aus dem entsprechenden Satz für die Krulldimension (siehe auch [Mat70, Chapter5, §14]). Für beliebige Schemata ohne gewisse Endlichkeitsvorraussetzungen ist dies im Allgemeinen falsch.

7 Abgeschlossene Immersionen und Unterschemata

Wir untersuchen die Schemastrukturen von einer abgeschlossenen Teilmenge eines gegebenen Schemas X. Im affinen Fall werden sie durch die Ideale in $\mathcal{O}(X)$ bestimmt.

7.1 Definition. Eine **offene Immersion** ist ein injektiver offener Morphismus $j\colon U \to X$ von Schemata, der einen Isomorphismus von U auf das offene Unterschema $(j(U), \mathcal{O}_X|_U)$ von X induziert.

7.2 Definition. i) Ein Morphismus $i\colon Z \to X$ von Schemata heißt **abgeschlossene Immersion** oder **abgeschlossene Einbettung**, falls folgende Eigenschaften gelten:

a) i(Z) ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

b) Die stetige Abbildung $i\colon Z \to i(Z)$ ist ein Homöomorphismus.

c) Der Homomorphismus $i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$ von Ringgarben ist surjektiv, d. h. der induzierte Homomorphismus $i_p^{\#}$ auf den Halmen ist für alle $p \in X$ surjektiv.

ii) Zwei abgeschlossene (beziehungsweise offene) Immersionen $i\colon Z \to X$ und $i'\colon Z' \to X$ heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus $h\colon Z \to Z'$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i"'] & & Z' \arrow[dl, "i'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert, gibt.

iii) Ein **abgeschlossenes Unterschema** ist eine Isomorphieklasse von abgeschlossenen Immersionen $i\colon Z \to X$.

7.3 Konstruktion. Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Wir betrachten ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A und den Morphismus

$$(i := \operatorname{Spec}(\varphi))\colon (Z := \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})) \to (X = \operatorname{Spec}(A)),$$

der vom kanonischen Homomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} A/\mathfrak{a}$ induziert wird. Wir wollen zeigen, dass i eine abgeschlossene Immersion ist.

Nach Übungsaufgabe 4.2 b) ist klar, dass i ein Homöomorphismus

$$i\colon \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to (V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\})$$

ist. Somit gelten a) und b). Es bleibt c) zu zeigen: Sei zuerst $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) = Z)$ und $\mathfrak{q} = i(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in (V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec}(A))$. Da Lokalisieren exakt ist, erhalten wir

$$A_\mathfrak{q}/\mathfrak{a}_\mathfrak{q} \cong (A/\mathfrak{a})_{\varphi(\mathfrak{q})}. \qquad (\star)$$

Wir betrachten

$$i^{\#}_\mathfrak{q}\colon (\mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}} = A_\mathfrak{q}) \to ((i_*\mathcal{O}_Z)_\mathfrak{q} = \mathcal{O}_{Z,\mathfrak{p}} = (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} \overset{(\star)}{\cong} A_\mathfrak{q}/\mathfrak{a}_\mathfrak{q}).$$

Wir sehen also, dass $i^\#_\mathfrak{q}$ surjektiv ist. Es bleibt $\mathfrak{q} \in X \setminus V(\mathfrak{a})$ zu betrachten. Dann gilt

$$(i_*\mathcal{O}_Z)_\mathfrak{q} = \{0\}.$$

Also ist $i^\#_\mathfrak{q}$ trivialerweise surjektiv.

i ist also eine abgeschlossene Immersion und das dadurch definierte abgeschlossene Unterschema von X bezeichnen wir mit $V(\mathfrak{a})$.

7.4 Bemerkung. i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine **Idealgarbe** $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_X$ ist eine Vorschrift, die jeder offenen Teilmenge U von X ein Ideal $\mathcal{J}(U)$ in $\mathcal{O}_X(U)$ zuordnet, wobei die $J(U)$ für alle V offen in U durch die Restriktionsabbildung ρ_{UV} von $\mathcal{O}_X$ auf $J(V)$ abgebildet wird.

ii) Sei $\mathcal{J}$ eine Idealgarbe, dann haben wir die Quotientengarbe $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, die als zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{J}(U)$$

assoziierte Garbe definiert ist. Beachte, dass der Quotientenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ im Sinne der Garben surjektiv ist, das heißt er ist auf den Halmen surjektiv.

iii) Sei nun $i\colon Z \to X$ eine abgeschlossene Immersion von Schemata. Nach c) haben wir einen surjektiven Homomorphismus $i^\#\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$, dessen Kern eine Idealgarbe $\mathcal{J}$ ist. Wir haben einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Z.$$

Da isomorphe abgeschlossene Immersionen dieselbe Idealgarbe induzieren, ist $\mathcal{J}$ eine Invariante des von i induzierten abgeschlossenen Unterschemas.

7.5 Theorem. *Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Dann definiert die Abbildung*

$$\begin{aligned} \{\textit{Ideale in } A\} &\to \{\textit{abgeschlossene Unterschemata von } X\} \\ \mathfrak{a} &\mapsto i_\mathfrak{a}\colon V(\mathfrak{a}) \to X \end{aligned}$$

eine Bijektion. Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema von X wieder affin.

Beweis. Die Abbildung ist injektiv, denn wegen

$$\mathfrak{a} = \ker(i^\#_\mathfrak{a})\colon (A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to (\Gamma(X, i_{\mathfrak{a}*}\mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})}) = \Gamma(V(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})}) = A/\mathfrak{a})$$

kann man das Ideal $\mathfrak{a}$ aus dem abgeschlossenen Unterschema $i_\mathfrak{a}\colon V(\mathfrak{a}) \to X$ zurückgewinnen. Dabei bezeichnet $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ für alle Garben $\mathcal{F}$ und alle offenen Mengen U von $\mathcal{F}$. Wir wollen nun die Surjektivität zeigen. Sei also ein abgeschlossenes Unterschema von X durch die abgeschlossene Immersion $i\colon Z \to X$ gegeben. Betrachte

$$i^\#_X\colon \underbrace{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)}_{=A} \to (\Gamma(X, i_*\mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)).$$

Sei $\mathfrak{a} = \ker(i^\#_X)$, da heißt $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal in A. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$\psi\colon A/\mathfrak{a} \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z).$$

Nach Proposition 5.6 gibt es genau einen Morphismus $i'\colon Z \to (V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}))$ mit der Eigenschaft, dass $i'^\#_{V(\mathfrak{a})} = \psi$.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z) & \\ A/\mathfrak{a} \arrow[ur] & & A \arrow[ll] \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "i'"'] \arrow[dr, "i"] & \\ V(\mathfrak{a}) \arrow[rr, "i_{\mathfrak{a}}"'] & & X \end{tikzcd}$$

Mir müssen zeigen, dass i' eine Isomorphismus ist, da dann i isomorph zu $i_{\mathfrak{a}}$ und damit die Abbildung in der Behauptung surjektiv ist.

1. Schritt: Sei $i\colon Z \to (X = \operatorname{Spec}(A))$ eine abgeschlossene Immersion und es sei $i_X^{\#}\colon (A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \to \Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$ injektiv. Dann ist i ein Isomorphismus.

Beweis des 1. Schrittes. Wir zeigen zuerst, dass i ein Homöomorphismus ist. Da i eine abgeschlossene Immersion ist, muss i ein Homöomorphismus auf die abgeschlossene Teilmenge $i(Z)$ von X sein. Also genügt es zu zeigen, dass i surjektiv ist. Da $i(Z)$ abgeschlossen in X ist und die offenen Mengen $D(a) \subseteq X \setminus Z$ eine Basis bilden, genügt es zu zeigen, dass $D(a) \subseteq X \setminus Z$ für alle $a \in A$ leer ist. Sei U ein offenes affines Unterschema von Z, das heißt $U = \operatorname{Spec}(B)$. Sei $f \coloneqq i^{\#}(a)|_U \in B$. Es gilt

$$U \overset{i(Z)\cap D(a)=\emptyset}{=} i^{-1}(V(a)) \cap U \overset{4.9}{=} V(f),$$

also ist $f \in \operatorname{nil}(B)$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$ und damit folgt $i^{\#}(a^n)|_U = 0$. Da i ein Homöomorphismus auf $i(Z)$ ist und $i(Z)$ eine abgeschlossene Teilmenge des quasikompakten Raumes X ist, ist auch Z quasikompakt. Also gibt es eine endliche Überdeckung von Z durch offene affine Unterschemata U, wie oben. Nehmen wir das größte n, dann gilt $i^{\#}(a^n)|_U = 0$ für diese endlich vielen U und mit dem Garbenaxiom folgt $i^{\#}(a^n) = 0$. Da $i_x^{\#}$ injektiv ist, folgt $a^n = 0$. Dann gilt $a \in \operatorname{nil}(A)$ und somit $V(a) = X$, das heißt $D(a) = \emptyset$. Dies zeigt, dass i ein Homöomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass $i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$ ein Isomorphismus von Garben ist. Nach Definition einer abgeschlossenen Immersion ist $i^{\#}$ surjektiv. Es gnügt die Injektivität auf den Halmen zu zeigen. Sei also $\mathfrak{p} \in (X = \operatorname{Spec}(A))$. Es gilt $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$. Weil i bijektiv ist, gibt es genau ein $z \in Z$ mit $i(z) = \mathfrak{p}$. Es gilt wie zuvor $(i_*\mathcal{O}_Z)_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{Z,z}$, da i ein Homöomorphismus ist. Die Halmabbildung durch

$$(A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{i_z^{\#}} \mathcal{O}_{Z,z}$$

gegeben. Sei $\frac{a}{s}$ im Kern von $i_z^{\#}$ mit $a, s \in A,\ s \notin \mathfrak{p}$. Dann liegt auch a im Kern von $i_z^{\#}$. Wir wollen $\frac{a}{s} = 0$ zeigen, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s = 1$. Es gibt eine offene Umgebung U_0 von z in Z mit

$$i^{\#}(a)|_{U_0} = 0 \tag{$\star\star$}$$

und wir dürfen annehmen, dass U_0 wieder affin ist. Da Z quasikompakt ist, gilt

$$Z = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

für affine offene Unterschemata $(U_k, \mathcal{O}|_{U_k}),\ k \in \{1,\ldots,n\}$. Da die $D_X(s)$ mit $s \in A$ eine Basis von $X = \operatorname{Spec}(A)$ bilden, gibt es ein $s_0 \in A$ mit $\mathfrak{p} \in D_X(s_0) \subseteq i(U_0)$. Wir zeigen

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \text{ mit } i^{\#}(s_0^m a) = 0. \tag{$\star\star\star$}$$

Die Injektivität von $i_X^{\#}$ zeigt dann, dass $s_0^m a =$ gilt. Wegen $s_0 \in \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^{\times}$ folgt dann, dass $a = 0$ gilt, wie gewünscht. Um ($\star\star\star$) zu zeigen, genügt es für jedes $j \in \{0,\ldots,n\}$ ein m_j mit

$$i^{\#}(s_0^{m_j} a)|_{U_j} = 0 \tag{$\star\star\star\star$}$$

zu finden (wegen dem Garbenaxiom). Für $j = 0$ folgt mit ($\star\star$) $m_0 = 0$. Aus

$$D_{U_j}(i^{\#}(s_0)|_{U_j}) \overset{\textit{Proposition 4.9}}{=} i^{-1}(D(s_0)) \cap U_j \subseteq U_0 \cap U_j$$

folgt mit ($\star\star$) und mit $f_j \coloneqq i^\#(s_0)|_{U_j}$, dass

$$i^\#(a)|_{D_{U_j}(f_j)} = 0 \in (\mathcal{O}_Z(D_{U_j}(f_j)) = \mathcal{O}_Z(U_j)_{f_j})$$

gilt. Dies zeigt ($\star\star\star\star$) und mit Hilfe der Definition der Lokalisierung folgt der 1. Schritt. $\square$

2. Schritt: Wende den 1. Schritt auf $i' \colon Z \to (V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}))$ an. $\square$

8 Gefaserte Produkte und Basiswechsel

Das kartesische Produkt von Mengen, Vektorräumen oder Ringen ist wohlbekannt. In diesem Abschnitt wollen wir etwas ähnliches in der Kategorie der Schemata betrachten. In der modernen algebraischen Geometrie betrachtet man alles relativ bezüglich eines Schemas S als Basis, das heißt wir wollen ein gefasertes Produkt $X \times_S Y$ für S-Schemata $f\colon X \to S$ und $g\colon Y \to S$ definieren. Das gefaserte Produkt wird ein S-Schema sein, dessen unterliegende Menge im Allgemeinen verschieden vom kartesischen Produkt der Mengen sein wird. $X \times_S Y$ ist (im Allgemeinen) ebenfalls verschieden von $\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$.

8.1 Definition. Seien X, Y, S Schemata und seien $f\colon X \to S$ und $g\colon Y \to S$ Morphismen. Ein **gefasertes Produkt** der S-Schemata X und Y ist ein Schema $X \times_S Y$ zusammen mit Morphismen, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Wir verlangen weiter, dass folgende universelle Eigenschaft gilt: Für alle S-Schemata T und alle Morphismen $h_1\colon T \to X$ und $h_2\colon T \to Y$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, gibt es einen eindeutigen Morphismus $\theta\colon T \to X \times_S Y$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\theta"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Man nennt p_1 und p_2 die Projektionsabbildungen.

8.2 Theorem. *Für zwei S-Schemata X und Y existiert das gefaserte Produkt $X \times_S Y$, es ist ein S-Schema und eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

8.3 Bemerkung (Vorbemerkung zum Beweis)**.** Für Schemata X, Y und für ein offenes Unterschema U von Y gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den Morphismen $h\colon X \to U$ und den Morphismen $h\colon X \to Y$ mit $h(X) \subseteq U$.

Beweis von Theorem 8.2. Mit den bekannten Standardargumenten bei universellen Eigenschaften folgt die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie.

Wir konstruieren $X \times_S Y$ zuerst im affinen Fall mit Hilfe des Tensorprodukts der unterliegenden Ringe. Der allgemeine Fall folgt durch „Verkleben".

1. Schritt (affiner Fall): Seien $X = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B)$ und $S = \mathrm{Spec}(R)$. Dann existiert $X \times_S Y$ und „ist" $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

Beweis. Da X und Y beide S-Schemata sind, sind A und B nach Proposition 5.6 R-Algebren. Dann ist $A \otimes_R B$ eine R-Algebra mit dem Produkt

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2).$$

Die Projektionen $p_1\colon X \times_S Y \to X$ und $p_2\colon X \times_S Y \to Y$ entsprechen nach Proposition 5.6 den Morphismen

$$\mathrm{Spec}(p_1)\colon A \to A \otimes_R B,\ a \mapsto a \otimes 1$$

und

$$\mathrm{Spec}(p_2)\colon B \to A \otimes_R B,\ b \mapsto 1 \otimes b.$$

Allgemeiner gilt nach Proposition 5.6: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(T, \mathrm{Spec}(D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(D, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$. Wir benutzen die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes, die impliziert dass es für jeden Ring C und für alle Homomorphismen $\varphi_1\colon A \to C$ und $\varphi_2\colon B \to C$ mit $\varphi_1 \circ \mathrm{Spec}(f) = \varphi_2 \circ \mathrm{Spec}(g)$ genau einen Morphismus $\varphi\colon A \otimes_R B \to C$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C & & \\
& A \otimes_R B \arrow[ul, dashed, "\exists!\ \varphi"'] & B \arrow[l, "\mathrm{Spec}(p_2)"'] \arrow[ull, bend right, "\varphi_2"'] \\
& A \arrow[u, "\mathrm{Spec}(p_1)"] \arrow[uul, bend left, "\varphi_1"] & R \arrow[l, "\mathrm{Spec}(f)"] \arrow[u, "\mathrm{Spec}(g)"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Benutzen wir die „Dualität" aus Proposition 5.6, dann folgt die universelle Eigenschaft des gefaserten Produkts und damit der 1. Schritt. □

2. Schritt: Seien X, Y zwei S-Schemata, für die $X \times_S Y$ existiert und sei U ein offenes Unterschema von X. Dann existiert $U \times_S Y = p_1^{-1}(U)$.

Beweis. Das folgt aus der Vorbemerkung 8.3 für das offene Unterschema $p_1^{-1}(U)$, das dann offensichtlich die universelle Eigenschaft erfüllt. □

3. Schritt: Seien X, Y zwei S-Schemata und sei $(X_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit der Eigenschaft, dass $X_i \times_S Y$ für alle $i \in I$ existiert. Dann existiert auch $X \times_S Y$.

Beweis. Für alle $i, j \in I$ sei
$$X_{ij} \coloneqq X_i \cap X_j$$
und
$$U_{ij} \coloneqq (p_1^i)^{-1}(X_{ij}) = X_{ij} \times_S Y \subseteq X_i \times_S Y,$$
wobei $p_1^i \colon X_i \times_S Y \to X$ die kanonische Projektion ist. Wegen $X_{ij} = X_{ji}$ gilt $\varphi_{ij} \colon U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$ kanonisch. Dies ergibt ein Verklebedatum und nach Lemma 5.10 erhalten wir ein Schema $X \times_S Y$ durch Verklebung der $X_i \times_S Y$ entlang der φ_{ij}. Es ist leicht zu sehen, dass $X \times_S Y$ die universelle Eigenschaft des gefaserten Produkts erfüllt. □

4. Schritt:

- Nach dem 1. Schritt existiert $X \times_S Y$ für X, Y und S affin.
- Nach dem 3. Schritt existiert $X \times_S Y$ für X beliebig und Y und S affin (X ist überdeckt durch affine offene U).
- Nach dem 3. Schritt existiert $X \times_S Y$ für X und Y beliebig und S affin.

5. Schritt: Sei nun S ein beliebiges Schema. Dann gibt es eine affine offene Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ von S. Sei $X_i \coloneqq f^{-1}(S_i)$ und $Y_i \coloneqq g^{-1}(S_i)$. Das sind offene Unterschemata von X beziehungsweise Y. Nach dem 4. Schritt existiert $X_i \times_{S_i} Y_i$. Dann existiert aber auch $X_i \times_S Y = X_i \times_{S_i} Y_i$, da für jedes Paar von Morphismen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ X_i \arrow[r, "f|_{X_i}"'] & S \end{tikzcd}$$

kommutiert, $T \to Y$ über Y_i faktorisiert (da das Bild von T in Y in $g^{-1}(f|_{X_i}(X_i)) \subset g^{-1}(S_i)$ enthalten ist). Nach dem 3. Schritt existiert dann $X \times_S Y$ (da X von $(X_i)_{i \in I}$ überdeckt wird). □

8.4 Beispiel. i) Sei X ein Schema und seien U, V offene Unterschemata von X. Dann gilt $U \times_X V = U \cap V$ (hier tragen U bzw. V eine X-Schema-Struktur bezüglich der offenen Immersion $U \to X$ bzw. $V \to X$). Insbesondere ist im affinen Fall $U = \operatorname{Spec}(B)$, $V = \operatorname{Spec}(C)$ offen in $X = \operatorname{Spec}(A)$

$$U \cap V = U \times_X V = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$$

und damit ist $U \cap V$ affin.

ii) Für einen Morphismus $f \colon X \to Y$ von Schemata und ein offenes Unterschema U von Y gilt
$$U \times_Y X = f^{-1}(U)$$
als offenes Unterschema von X.

Beweis. Mit Vorbemerkung 8.3 folgt leicht, dass $U \cap V$ (beziehungsweise $f^{-1}(U)$) die universelle Eigenschaft des gefaserten Produkts erfüllt. □

8.5 Bemerkung. Sei X ein Schema, $p \in X$ und $\kappa(p)$ der Restklassenkörper von p. Für eine offene Umgebung U von p in X haben wir kanonische Homomorphismen

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,p} \to \kappa(p),\ s \mapsto s_p + \mathfrak{m}_p$$

(wobei $\mathfrak{m}_p$ das Maximalideal von $\mathcal{O}_{X,p}$ ist). Wir erhalten weiter einen kanonischen Morphismus

$$\iota_p\colon \operatorname{Spec}(\kappa(p)) \to X,$$

indem wir den einzigen Punkt von $\operatorname{Spec}(\kappa(p))$ auf p abbilden und für U offen in X den Homomorphismus

$$\iota_{p,U}^{\#}\colon \mathcal{O}_X(U) \to (\iota_{p*}\mathcal{O}_{Spec(\kappa(p))})(U) = \begin{cases} \kappa(p) & \text{falls } p \in U \\ 0 & \text{falls } p \notin U \end{cases}$$

von zuvor bzw. den Nullmorphismus benutzen.

8.6 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $p \in Y$. Wir betrachten $\operatorname{Spec}(\kappa(p))$ als Schema über Y mit Hilfe von ι_p aus Bemerkung 8.5. Dann heißt das Y-Schema $X \times_Y \operatorname{Spec}(\kappa(p))$ **Faser** von f in p und wird mit X_p bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
(X_p = X \times_Y \operatorname{Spec}(\kappa(p))) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \operatorname{Spec}(\kappa(p)) \arrow[d, "\iota_p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

8.7 Bemerkung. Man kann zeigen, dass der X_p zugrunde liegende topologische Raum homöomorph zu $f^{-1}(\{p\})$ mit der induzierten Topologie (siehe [GD60, I.3.6.1] oder [Har77, Exercise II.3.10] oder [GW10, Proposition4.20 und (4.8)]).

8.8 Beispiel. Sei K ein Körper, $X = \operatorname{Spec}(K[T_1, T_2, T_3]/\langle T_2T_3 - T_1^2\rangle)$. Wir betrachten den Morphismus

$$f\colon X \to \mathbb{A}_K^1 := \operatorname{Spec}(K[T_3]),$$

der durch den Ringhomomorphismus

$$K[T_3] \to K[T_1, T_2, T_3]/\langle T_2T_3 - T_1^2\rangle, T_3 \mapsto T_3 + \langle T_2T_3 - T_1^2\rangle.$$

induziert wird. Der Punkt p von $\mathbb{A}_K^1$ sei gegeben als Bild des Morphismus $\operatorname{Spec}(K) \to \mathbb{A}_K^1$, der durch den Ringhomomorphismus $K[T_3] \to K$, $T_3 \mapsto a$ mit $a \in K$ induziert wird. Das heißt a ist die Koordinate des Punktes p. Es gilt:

$$\begin{aligned}
X_p &= X \times_{\mathbb{A}_K^1} \operatorname{Spec}(\kappa(p)) \\
&= \operatorname{Spec}(K[T_1, T_2, T_3]/\langle T_2T_3 - T_1^2\rangle) \times_{\mathbb{A}_K^1} \operatorname{Spec}(K) \\
&= \operatorname{Spec}\big((K[T_1, T_2, T_3]/\langle T_2T_3 - T_1^2\rangle) \otimes_{K[T_3]} K\big) \\
&= \operatorname{Spec}(K[T_1, T_2]/\langle aT_2 - T_1^2\rangle)
\end{aligned}$$

Für $a \neq 0$ gilt

$$X_p \overset{T_2 = \frac{1}{a}T_1^2}{\cong} \operatorname{Spec}(K[T_1]) \cong \mathbb{A}_K^1$$

und damit ist X_p ein integres affines Schema. Für $a = 0$ gilt

$$X_p = \operatorname{Spec}(K[T_1, T_2]/\langle T_1^2\rangle)$$

und damit ist diese Faser nicht reduziert und damit auch nicht integer.

8.9 Definition (Basiswechsel)**.** Wir betrachten ein Y-Schema X, das heißt einen Morphismus $f\colon X \to Y$. Weiter sei ein Morphismus $g\colon Y' \to Y$ von Schemata gegeben. Wir betrachten das gefaserte Produkt

$$\begin{array}{ccc} (X' := X \times_Y Y') & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \big\downarrow{\scriptstyle g'} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y, \end{array}$$

wobei wir die Projektionen mit f' und g' bezeichnen. Wir nennen dies ein **kartesisches Diagramm**. Wir sagen, dass das Y'-Schema X' **durch den Basiswechsel** $Y' \to Y$ **aus dem** Y**-Schema** X **entsteht**. Äquivalent sagen wir, dass f' Der Basiswechsel von f bezüglich g ist. Analog ist g' der Basiswechsel von g bezüglich f.

8.10 Definition. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Morphismen.

i) Die Eigenschaft $\mathcal{E}$ heißt **abgeschlossen unter Komposition**, wenn für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben schon gilt, dass $g \circ f$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

ii) Die Eigenschaft $\mathcal{E}$ heißt **stabil unter Basiswechsel**, wenn für Morphismen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y' \to Y$, wobei f die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat, schon gilt, dass der Basiswechsel f' von f bezüglich g die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

8.11 Proposition. *Die Eigenschaft „lokal von endlichem Typ“ ist abgeschlossen unter Komposition und stabil unter Basiswechsel.*

Beweis. „Komposition“: Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ lokal von endlichem Typ. Sei $W = \operatorname{Spec}(A)$ ein offenes affines Unterschema von Z. Sei weiter $p \in (g \circ f)^{-1}(W)$. Sei $V = \operatorname{Spec}(B)$ ein offenes affines Unterschema von $g^{-1}(W)$ mit $f(p) \in V$. Da g lokal von endlichem Typ ist, folgt, dass B eine endlich erzeugte A-Algebra ist. Sei $U = \operatorname{Spec}(C)$ ein offenes affines Unterschema von $f^{-1}(V)$ mit $p \in U$. Weil f lokal von endlichem Typ ist, folgt, dass C eine endlich erzeugte B-Algebra ist. Insgesamt ist also C eine endlich ereugte A-Algebra. Wenn p über X läuft, erhalten wir entsprechend obige Mengen W, V und U, wobei X durch die Mengen U überdeckte wird. Aus Proposition 6.10 folgt, dass $g \circ f$ lokal von endlichem Typ ist.

„Basiswechsel“: Wir haben folgendes kartesisches Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (X' := X \times_Y Y') & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \big\downarrow{\scriptstyle g'} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y, \end{array}$$

Wir nehmen an, dass f lokal von endlichem Typ ist und müssen zeigen, dass auch f' lokal von endlichem Typ ist. Nach Proposition 6.10 ii) existieren offene affine Überdeckungen $(V_i)_{i\in I}$ von Y und $(U_{ij})_{j\in J_i}$ von $f^{-1}(V_i)$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ für alle $i \in I$ und alle $j \in J_i$ eine endlich erzeugte $\mathcal{O}_Y(V_i)$-Algebra ist. Sei $(V_{ik})_{k\in K_i}$ eine offene affine Überdeckung von $g^{-1}(V_i)$.

$$\begin{array}{ccccccc} U_{ijk} & := & U_{ij} \times_{V_i} V'_{ik} & \longrightarrow & V'_{ik} & \subseteq & Y' \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ X' & \supseteq & U_{ij} & \longrightarrow & V_i & \subseteq & X \end{array}$$

Für dieses gefaserte Produkt U_{ijk} gilt

$$U_{ijk} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(U_{ij}) \otimes_{\mathcal{O}(V_i)} \mathcal{O}(V'_{ik}))$$

nach dem ersten Schritt im Beweis von Theorem 8.2. Also ist $\mathcal{O}(U_{ijk}) = \mathcal{O}(U_{ij}) \otimes_{\mathcal{O}(V_i)} \mathcal{O}(V'_{ik})$ eine endlich erzeugte $\mathcal{O}(V'_{ik})$-Algebra. Wir haben im Beweis von Theorem 8.2 gesehen, dass $(U_{ijk})_{i\in I,\, j\in J_i,\, k\in K_i}$ eine offene affine Überdeckung von X' ist. Nach Proposition 6.10 ist dann f' lokal von endlichem Typ. $\square$

9 Quasikohärente Modulgarben

Wenn man in der Konstruktion der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf $X = \operatorname{Spec}(A)$ den Ring A durch einen A-Modul M ersetzt, erhält man eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Auf einem beliebigen Schema X heißt eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe quasikohärent, wenn wenn sie lokal von obiger Gestalt ist. Die quasikohärenten Garben erfüllen wichtige Eigenschaften in der algebraischen Geometrie, wie wir später sehen werden. Die kohärenten Garben spielen auf noetherschen Schemata die Rolle der endlich erzeugten Moduln in der Algebra.

9.1 Konstruktion. Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Wir definieren eine Garbe $\widetilde{M}$ auf $\operatorname{Spec}(A)$ auf folgende Weise. Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ haben wir die Lokalisierung

$$M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p}.$$

Sei also U eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$. Wir definieren $\widetilde{M}(U)$ als die Menge der Funktionen $s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_\mathfrak{p}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

a) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$

b) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und $m \in M$, $f \in A$ mit $V \subseteq D(f)$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in V$.

Offensichtlich bildet $\widetilde{M}$ mit „Einschränken von Funktionen“ als Restriktionsabbildungen eine Garbe.

9.2 Proposition. *Für die Garbe $\widetilde{M}$ auf $X = \operatorname{Spec}(A)$ gelten folgende Eigenschaften:*

i) *$\widetilde{M}$ ist kanonisch ein $\mathcal{O}_X$-Modul.*

ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in X$ gilt $\widetilde{M}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$.*

iii) *Für alle $f \in A$ ist der $(A_f = \mathcal{O}_X(D(f)))$-Modul $\widetilde{M}(D(f))$ kanonisch Isomorph zur Lokalisierung $M_f = M \otimes_A A_f$.*

iv) *Es gilt $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.*

v) *Für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und alle A-Moduln M existieren kanonische Isomorphismen:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \underset{\underset{\beta}{\sim}}{\overset{\overset{\alpha}{\sim}}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$$

Beweis. i) folgt aus der Konstruktion von $\widetilde{M}$ in Konstruktion 9.1 (beziehungsweise $\mathcal{O}_X$ in Konstruktion 4.11). ii)–iv) werden analog zu den entsprechenden Aussagen in Proposition 4.12 für $\mathcal{O}_X$ bewiesen.

Wir beweisen v): Um α zu definieren, nehmen wir einfach die globalen Schnitte des Homomorphismus $\widetilde{M} \to \mathcal{F}$ und erhalten einen A-Modulhomomorphismus $\Gamma(X, \widetilde{M}) \to \Gamma(X, \mathcal{F})$. Nach iv) erhalten wir $M = \Gamma(X, \widetilde{M})$ und damit einen A-Modulhomomorphismus $M \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ wie gewünscht. Dies definiert α. Sei nun ein A-Modulhomomorphismus $h\colon M \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ gegeben. Wir definieren einen kanonischen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\beta(h)\colon \widetilde{M} \to \mathcal{F}$ wie folgt: Für $f \in A$ gilt $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ und $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ ist damit ein A_f-Modul. Nach iii) gilt

$$\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f.$$

Da die Mengen $D(f)$ eine Basis der Topologie von $X = \operatorname{Spec}(A)$ bilden, folgt aus den Garbenaxiomen, dass ein Morphismus $\widetilde{M} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln durch ein auf Durchschnitten $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ kompatibeles System von A_f-linearen Abbildungen $\widetilde{M}(D(f)) \to \mathcal{F}(D(f))$ eindeutig gegeben ist. Damit das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (M = \widetilde{M}(X)) & \xrightarrow{h=\alpha(\beta(h))} & \Gamma(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{M}(D(f)) & \xrightarrow{\beta(h)_{D(f)}} & \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \end{array}$$

kommutiert, müssen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} (M \otimes_A A_f = \widetilde{M}(D(f))) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_A A_f &\to \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \\ m \otimes a \mapsto h(m) \otimes a & \\ s \otimes a \qquad &\mapsto a \cdot s|_{D(f)} \end{aligned}$$

wählen. Diese liefern ein System kompatibler Abbildungen und definieren damit ein kanonisches $\beta(h) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F})$. Wählt man speziell $f = 1$ mit $D(1) = X$, $M_1 = M$ und $A_1 = A$, dann folgt $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$. Da sich

$$(\Gamma(X, \widetilde{M}) = M) \to \Gamma(X, \mathcal{F})$$

wie oben gesehen zu einem Homomorphismus $\widetilde{M} \to \mathcal{F}$ fortsetzt, folgt auch $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. □

9.3 Proposition. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $(f := \operatorname{Spec}(\varphi))\colon \operatorname{Spec}(B) \to (X := \operatorname{Spec}(A))$ der zugehörige Morphismus von Schemata. Dann gilt:*

i) Für jede exakte Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

von A-Moduln ist auch

$$0 \to \widetilde{M'} \to \widetilde{M} \to \widetilde{M''} \to 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln und für alle A-Moduln M, N existiert eine kanonische Bijektion

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}).$$

ii) Für alle A-Moduln M, N gilt $(\widetilde{M \otimes_A N}) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.

iii) Für eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln gilt $(\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i}) = \bigoplus_{i \in I} \widetilde{M_i}$

iv) Sei N ein B-Modul. Da B eine A-Algebra ist, kann man N als A-Modul betrachten. Wir bezeichnen diese A-Modulstruktur auf N mit ${}_AN$. Es gilt $f_*(\widetilde{N}) = (\widetilde{{}_AN})$.

v) Für einen A-Modul M gilt

$$f^*(\widetilde{M}) = (\widetilde{M \otimes_A B}).$$

vi) Für einen A-Modul M und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ gilt

$$f^*(\widetilde{M})_{\mathfrak{q}} = (\widetilde{M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}})$$

Beweis. Dies wird in den Übungen gezeigt. □

9.4 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

i) Wir betrachten einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{F}),\ h \mapsto h_X(1)$$

von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln. Die Umkerhabbildung ist folgendermaßen gegeben: Der globale Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ wird auf den Homomorphismus $h_s \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, der auf einer offenen Menge U durch $h_s(U) \colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{F}(U),\ f \mapsto f \circ s|_U$ definiert ist, geschickt.

ii) Für einen A-Modul M definieren wir $M^I := \prod_{i \in I} M$ und den Teilmodul $M^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} M$. Wir verwenden die analoge Notation für $\mathcal{O}_X$-Moduln. Für eine beliebige Menge I gilt aufgrund der universellen Eigenschaft der direkten Summe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F}) &\overset{\text{Definition}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\Big(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X, \mathcal{F}\Big) \\
&= \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \\
&\overset{\text{Definition}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})^I \\
&\overset{\text{i)}}{=} \Gamma(X, \mathcal{F})^I
\end{aligned}$$

9.5 Definition. i) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul wie oben. Weiter sei $(s_i)_{i \in I} \in \Gamma(X, \mathcal{F})^I$ eine Familie von globalen Schnitten von $\mathcal{F}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ **von** $(s_i)_{i \in I}$ **erzeugt wird**, falls der zugehörige Morphismus $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{F}$ aus Bemerkung 9.4 ii) surjektiv ist.

ii) $\mathcal{F}$ heißt **quasikohärenter** $\mathcal{O}_X$-Modul, falls jeder Punkt aus X eine offene Umgebung U hat mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F}|_U$ isomorph zum Kokern eines $\mathcal{O}_X|_U$-Modulhomomorphismus von freien $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln ist, das heißt, dass es eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \to \mathcal{O}_X|_U^{(J)} \to \mathcal{F}|_U \to 0 \tag{$\star$}$$

von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln gibt.

iii) Sei jetzt $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann heißt ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul **kohärent**, wenn man in $(\star)$ die Indexmengen I und J endlich wählen kann.

9.6 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.*

i) $\mathcal{F}$ ist genau dann quasikohärent, wenn es für alle $p \in X$ eine offene affine Umgebung $U = \mathrm{Spec}(A)$ und einen A-Modul M mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ gibt.

ii) Wenn X ein noethersches Schema ist, ist $\mathcal{F}$ genau dann hohärent, wenn es für alle $p \in X$ eine offene affine Umgebung $U = \mathrm{Spec}(A)$ und einen endlich erzeugten A-Modul M mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ gibt.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ bei i) (beziehungsweise ii)). Sei also $\mathcal{F}$ quasikohärent (beziehungsweise kohärent) und $p \in X$. Wir wählen eine offene Umgebung U von p, für die $(\star)$ gilt. Durch Verkleinern können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass U offen und affin ist, also $U = \mathrm{Spec}(A)$ für einen gewissen Ring A. Dann gilt

$$\mathcal{O}_X|_U = \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} = \widetilde{A}$$

und damit folgt

$$(\mathcal{O}_X|_U)^{(I)} = \mathcal{O}_U^{(I)} \overset{\text{Proposition 9.3}}{=} \widetilde{(A^{(I)})}. \tag{$\star\star$}$$

Sei M der Kokern des Homomorphismus $A^{(I)} \to A^{(J)}$, der durch Betrachtung der globalen Schnitte von $(\mathcal{O}_X|_U)^{(I)} \to (\mathcal{O}_X|_U)^{(J)}$ abgeleitet wird. Wir erhalten wegen der Definition von Kokern und der Exaktheit des Funktors $\widetilde{\cdot}$ ein kommutatives Diagramm mit exaten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathcal{O}_X|_U)^{(I)} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X|_U)^{(J)} & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow & & \\
\widetilde{A^{(I)}} & \longrightarrow & \widetilde{A^{(J)}} & \longrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Also wird (Fünferlemma!) ein Isomorphismus $\mathcal{F}|_U \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}$ von $(\mathcal{O}_X|_U = \mathcal{O}_U)$-Moduln induziert.

„$\Longleftarrow$“: Offenbar ist jeder A-Modul M der Kokern von einem Homomorphismus freier Moduln, das heißt

$$A^{(I)} \to A^{(J)} \to M \to 0, \tag{$\star\star\star$}$$

wähle zum Beispiel $J = M$ und $I = \ker(A^{(J)} \to M)$. Falls A noethersch und M endlich erzeugt ist, dann kann man I und J endlich wählen (wähle $J =$ endliches Erzeugendensystem von M und $I =$ endliches Erzeugendensystem von $\ker(A^{(J)} \to M)$). Sei nun $U = \operatorname{Spec}(A)$ und $\widetilde{M} \cong \mathcal{F}|_U$. Dann ergibt ($\star\star\star$) und Proposition 9.3 eine exakte Folge

$$\underbrace{\widetilde{A^{(I)}}}_{\cong \mathcal{O}_X|_U^{(I)}} \to \underbrace{\widetilde{A^{(J)}}}_{\cong \mathcal{O}_X|_U^{(J)}} \to \underbrace{\widetilde{M}}_{\cong \mathcal{F}|_U} \to 0$$

wie in ($\star$). □

9.7 Beispiel. i) Für jedes Schema X ist $\mathcal{O}_X$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

ii) Seien A ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A und $i\colon (Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})) \to X$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\widetilde{A/\mathfrak{a}} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Y. \tag{$\triangle$}$$

Ist A noethersch, so folgt insbesondere, dass $i_*\mathcal{O}_Y$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Beweis von ii). Es genügt einen Isomorphismus ($\triangle$) zu konstruieren. Es gilt

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y(Y) = A/\mathfrak{a}$$

und somit induziert der Isomorphismus $A/\mathfrak{a} \to \Gamma(X, i_*\mathcal{O}_Y)$ nach Proposition 9.2 einen Homomorphismus

$$\widetilde{A/\mathfrak{a}} \to i_*\mathcal{O}_Y.$$

Für $f \in A$ mit Bild $\widetilde{f} \in A/\mathfrak{a}$ gilt

$$(i_*\mathcal{O}_Y)(D(f)) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(f)) = \mathcal{O}_Y(D(\widetilde{f})) = (A/\mathfrak{a})_{\widetilde{f}} = (A/\mathfrak{a})_f = \widetilde{A/\mathfrak{a}}(D(f)).$$

Da die $D(f)$ eine Basis bilden folgt, dass

$$\widetilde{A/\mathfrak{a}} \xrightarrow{\sim} i_*\mathcal{O}_Y$$

ein Isomorphismus ist. □

9.8 Proposition. *Seien X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul*

i) $\mathcal{F}$ ist genau dann quasikohärent, wenn es für alle offenen affinen Unterschemata von X einen A-Modul M mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ gibt.

ii) Falls X noethersch ist, dann ist $\mathcal{F}$ genau dann kohärent, wenn es für alle offenen affinen Unterschemata von X einen endlich erzeugten A-Modul M mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ gibt.

Beweis. [Har77, Proposition II.5.9]. □

9.9 Proposition. *Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ und*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Folge von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Falls $\mathcal{F}'$ quasikohärent ist, so ist die Sequenz

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$$

exakt.

Beweis. [Har77, Proposition II.5.6]. □

9.10 Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und sei $\mathcal{F}$ beziehungsweise $\mathcal{G}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$- beziehungsweise $\mathcal{O}_Y$-Modul.*

i) $f^*\mathcal{G}$ ist quasikohärent.

ii) Falls X und Y noethersch sind und falls $\mathcal{G}$ kohärent ist, so ist auch $f^*\mathcal{G}$ kohärent.

iii) Falls X noethersch ist, so ist auch $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent.

Beweis. i) und ii): Die Behauptung ist lokal auf X und Y, also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = \operatorname{Spec}(B)$ und $Y = \operatorname{Spec}(A)$. Dann folgt die Behauptung aus Proposition 9.3 v).

Es bleib iii) zu zeigen: Sei X noethersch. Es ist zu zeigen, dass $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent ist. Die Behauptung ist lokal auf Y, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y = \operatorname{Spec}(A)$. Da X ein noethersches Schema ist, ist X ein noetherscher topologischer Raum. Jede offene Teilmenge eines noetherschen topologischen Raumes ist quasikompakt. Also besitzt X eine endliche offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ durch offene affine Unterschemata U_i. Weiter besitzt $U_{ij} \coloneqq U_i \cap U_j$ eine endliche offene Überdeckung $(U_{ijk})_{k\in I_{ij}}$ durch offene affine Unterschemata U_{ijk}. Wir bezeichnen die kanonischen Morphismen

$$X \to Y,\ U_i \to Y,\ U_{ijk} \to Y$$

alle mit f. Dann besagen die Garbenaxiome, dass die Folge

$$\begin{array}{ccc} 0 \to f_*\mathcal{F} \to & \displaystyle\prod_{i\in I} f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) & \to \displaystyle\prod_{i,j\in I}\prod_{k\in I_{ij}} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}}) \\ & s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I}, & (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_{ijk}} - s_j|_{U_{ijk}})_{i,j\in I,\, k\in I_{ij}} \end{array} \tag{$\bigcirc$}$$

exakt ist. Nach Proposition 9.3 iv) sind $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ und $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Aus Proposition 9.3 iii) folgt, dass auch die obigen Produktgarben quasikohärent sind (denn über endlichen Indexmengen stimmen Produkte und direkte Summen überein). In Übung 9.4 sehen wir, dass der Kern von einem Homomorphismus von quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduln wieder quasikohärent ist. Also folgt aus ($\bigcirc$), dass $f_*(\mathcal{F})$ quasikohärent ist. □

9.11 Bemerkung. Für einen Morphismus $f\colon X \to Y$ noetherscher Schemata muss die direkte Bildgarbe eines kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduls nicht kohärent sein.

Gegenbeispiel: Sei $X = \mathbb{A}^1_K$ und $Y = \operatorname{Spec}(K)$ für einen Körper K. Weiter sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Dann gilt

$$f_*(\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(X) = K[x]$$

bezüglich des kanonischen Morphismus $f\colon X \to Y$. Aber $K[x]$ ist nicht endlich erzeugt als Modul über $K = \mathcal{O}_Y(Y)$ und damit ist $f_*(\mathcal{F})$ nicht kohärent.

9.12 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Garbe auf einem topologischen Raum X.

i) Sei U offen in X und $s \in \mathcal{F}(U)$. $\operatorname{Supp}(s) \coloneqq \{p \in U \mid s_p \neq 0 \text{ im Halm } \mathcal{F}_p\}$ heißt **Träger** des Schnitts s.

ii) $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \coloneqq \{p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0\}$ heißt **Träger** von $\mathcal{F}$.

9.13 Lemma. *i) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und U offen in X. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$, so ist* $\operatorname{Supp}(s)$ *abgeschlossen in U.*

ii) Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ für einen Ring A und sei $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für einen A-Modul M. Für $m \in (M = \Gamma(X, \mathcal{F}))$ gilt $\operatorname{Supp}(m) = V(\operatorname{Ann}_A(m))$ für das Annihilatorideal

$$\operatorname{Ann}_A(m) \coloneqq \{a \in A \mid a \cdot m = 0\}.$$

iii) Sei $\mathcal{F}$ wie in ii) für einen endlich erzeugten A-Modul M. Dann gilt $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = V(\operatorname{Ann}_A(M))$ für

$$\operatorname{Ann}_A(M) \coloneqq \{a \in A \mid a \cdot m = 0 \text{ für alle } m \in M\}.$$

iv) Für ein noethersches Schema X und einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ist $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ abgeschlossen in X.

Beweis. Dies wird in Übung 10.1 bewiesen. □

9.14 Definition. Sei Y ein abgeschlossenes Unterschema des Schemas X gegeben durch die abgeschlossene Immersion $i\colon Y \to X$, das heißt i ist eine Homöomorphismus auf die abgeschlossene Teilmenge $i(Y)$ und $i^\#\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv. Sei $J_Y \coloneqq \ker(i^\#)$ die Idealgarbe zu Y. Es gilt $\mathcal{O}_X/J_Y \cong i_*\mathcal{O}_Y$.

9.15 Proposition. *Sei X ein Schema.*

i) Für ein abgeschlossenes Unterschema $i\colon Y \to X$ ist J_Y ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

ii) Ist X ein noethersches Schema, so ist J_Y kohärent.

iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\{\textit{abgeschlossene Unterschemata in } X\} &\to \{\textit{quasikohärente } \mathcal{O}_X\textit{-Idealgarben}\}\\ Y &\mapsto J_Y\end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis. i) Die Behauptung ist lokal auf X, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring X. Da Y ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathrm{Spec}(A)$ ist, ist Y nach Theorem 7.5 durch

$$i\colon \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$$

für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A gegeben. Trivialerweise ist $\mathfrak{a} = \ker(A \to A/\mathfrak{a})$ und mit Proposition 9.3i) folgt

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = \ker(\widetilde{A} \to \widetilde{A/\mathfrak{a}}) \overset{\text{Beispiel 9.7 ii)}}{=} \ker(\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y) = J_Y.$$

Also ist J_Y quasikohärent wie gewünscht.

ii) Die Behauptung ist wieder lokal, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring A. Wie oben gilt $J_Y \cong \widetilde{\mathfrak{a}}$. Da A noethersch ist, folgt, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt und damit J_Y kohärent ist.

iii) Wir definieren die Umkehrabbildung: Sei J eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe auf X. Dann ist $\mathcal{O}_X/J$ quasikohärent. Wir betrachten den globalen Schnitt $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X/J)$. Er erzeugt die Garbe $\mathcal{O}_X/J$ in jedem Halm, das heißt es gilt $1_p \neq 0 \in (\mathcal{O}_X/J)_p$ genau dann, wenn $(\mathcal{O}_X/J)_p \neq 0$. Nach Lemma 9.13i) ist

$$Y \coloneqq \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/J) = \mathrm{Supp}(1)$$

abgeschlossen in X. Wir versehen Y mit der von X induzierten Topologie und betrachten die Inklusion $i\colon Y \hookrightarrow X$. Wir betrachten den Morphismus

$$(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/J)) \to (X, \mathcal{O}_X) \tag{$\star$}$$

von lokal geringten Räumen. Wir müssen zeigen, dass $(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ ein Schema ist und dass $(\star)$ eine abgeschlossene Immersion mit Idealgarbe J ist. Da wir beide Behauptungen lokal auf X prüfen können sei ohne Beschränung der Allgemeinheit $X = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring A. Aus Proposition 9.8 erhalten wir $J = \widetilde{\mathfrak{a}}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A, da J quasikohärent ist. Mit Proposition 9.3 folgt $\mathcal{O}_X/J = \widetilde{A/\mathfrak{a}}$ und damit folgt

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{A/\mathfrak{a}}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} \neq 0\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} = V(\mathfrak{a}).$$

Weiter folgt

$$(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/J)) = (V(\mathfrak{a}), \widetilde{A/\mathfrak{a}}) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

da die beiden Garben die gleichen Halem haben:

$$(i^{-1}(\mathcal{O}_X/J))_\mathfrak{p} = (\mathcal{O}_X/J)_\mathfrak{p} = (\widetilde{A/\mathfrak{a}})_\mathfrak{p} \quad \forall\, \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$$

Damit ist $(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/J))$ ein Schema und $(\star)$ eine abgeschlossene Immersion mit Idealgarbe J. Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildungen invers zueinander sind. Das kann man lokal auf $U = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring A prüfen. Dann folgt es aus Theorem 7.5.

□

9.16 Definition. Sei S ein graduierter Ring und M ein graduierter S-Modul. Dann definieren wir analog zum affinen Fall eine Garbe $\widetilde{M}$ auf $\mathrm{Proj}(S)$. Für ein homogenes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ sei $M_{(\mathfrak{p})} \coloneqq$ Gruppe der Elemente vom Grad 0 in $T^{-1}M$, mit $T \coloneqq \{s \in S^{\mathrm{hom}} \mid s \in S \setminus \mathfrak{p}\}$. Also ist

$$M_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{m}{s} \,\middle|\, m \in M^{\mathrm{hom}},\ s \in S^{\mathrm{hom}},\ \deg(m) = \deg(s) \right\}$$

ein $S_{(\mathfrak{p})}$-Modul. Sei U offen in $\mathrm{Proj}(S)$. Definiere $\widetilde{M}(U)$ als die Menge der Funktionen $s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

a) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$.

b) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und $m \in M^{\mathrm{hom}}$, $f \in S^{\mathrm{hom}}$ mit den folgenden Eigenschaften: $\deg(m) = \deg(f)$ und für alle $\mathfrak{q} \in V$ gilt $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_{(\mathfrak{q})}$.

Mit „Einschränken von Funktionen" als Restriktionsabbildungen wird $\widetilde{M}$ zu einer Garbe auf $\mathrm{Proj}(S)$.

9.17 Proposition. *i) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ gilt $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$.*

ii) Für alle $f \in S_+^{hom}$ gilt $\widetilde{M}|_{D^+(f)} = \widetilde{M_{(f)}}$

iii) $\widetilde{M}$ ist ein quasikohärenter $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$-Modul. Falls S noethersch ist und M ein endlich erzeugter S-Modul ist, so ist $\widetilde{M}$ kohärent.

Beweis. i) und ii) folgen analog zum Beweis von Proposition 5.17, beziehungsweise Übung 6.2 mit M statt S. iii) folgt aus ii). $\square$

10 Separierte und eigentliche Morphismen

Ein top. Raum X ist genau dann hausdoffsch, wenn die Diagonale $\Delta \coloneqq \{(x,x) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist. Nun ist bekanntlich ein Schema X nicht hausdorffsch (außer $\dim(X) = 0$) und $X \times X$ ist auch nicht mit der Produkttopologie versehen. Deshalb ist es sinnvoll, die Diagonale zu benutzen, um den Begriff des **separierten** Morphismus einzuführen. Das ersetzt hausdorffsch in der algebraischen Geometrie.

Weiter werden wir **eigentliche** Morphismen definieren, die eine ähnliche Rolle spielen, wie die Kompaktheit in der Analysis. Das präzise Analogon in der Topologie ist eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

10.1 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

i) Wir benutzen das gefaserte Produkt, um den **Diagonalmorphismus**

$$\Delta \coloneqq \Delta_{X/Y} \coloneqq \Delta_f \colon X \to X \times_Y X$$

zu definieren:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\ & X \times_Y X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

ii) f heißt **separiert**, wenn Δ_f eine abgeschlossene Immersion ist.

iii) X heißt **separiertes Schema**, wenn der kanonische Morphismus $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ aus Beispiel 5.8 separiert ist.

10.2 Lemma. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist f genau dann separiert, wenn es eine offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y gibt, mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(V_i) \to V_i$ für alle $i \in I$ separiert ist.*

Beweis. Mit der universellen Eigenschaft des gefaserten Produkts folgt

$$W_i \coloneqq p_1^{-1}(f^{-1}(V_i)) \cap p_2^{-1}(f^{-1}(V_i)) = f^{-1}(V_i) \times_{V_i} f^{-1}(V_i) \subseteq X \times_Y X.$$

Die W_i bilden eine offene Überdeckung der Diagonalen $\Delta(X)$ und es gilt $\Delta_{X/Y}|_{W_i} = \Delta_{f^{-1}(V_i)/V_i}$, das heißt, es gilt

$$\left(\Delta_{X/Y}^{-1}(W_i) \xrightarrow{\Delta_{X/Y}} W_i\right) = \left(f^{-1}(V_i) \xrightarrow{\Delta_{f^{-1}(V_i)/V_i}} W_i\right).$$

Da man die Eigenschaft „abgeschlossene Immersion“ lokal auf dem Bild prüfen kann, folgt die Behauptung. $\square$

10.3 Proposition. *Jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ von affinen Schemata ist separiert.*

Beweis. Seien $X = \operatorname{Spec}(B)$ und $Y = \operatorname{Spec}(A)$ für gewisse Ring A und B. Dann wird B durch f zu einer A-Algebra. Die Morphismen $g_1\colon B \to B \otimes_A B,\ b \mapsto b \otimes 1$ und $g_2\colon B \to B \otimes_A B,\ b \mapsto 1 \otimes b$ induzieren die Projektionen $p_1, p_2\colon X \times_Y X \to X$. Dann induziert $\varphi\colon B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$ den Diagonalmorphismus $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$. φ ist surjektiv, also ist Δ_f nach Konstruktion 7.3 eine abgeschlossene Immersion gegeben durch das Ideal $\ker(\varphi)$. □

10.4 Proposition. *Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ ist genau dann separiert, wenn $\Delta(X)$ abgeschlossen ist in $X \times_Y X$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da f separiert ist, ist Δ eine abgeschlossene Immersion und damit ist $\Delta(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\Delta(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$. Wir versehen $\Delta(X) \subseteq X \times_Y X$ mit der induzierten Topologie. Beachte, dass der Morphismus Δ ein Schnitt von p_1 (beziehungsweise p_2) ist, dass heißt $p_i \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, also ist $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ injektiv und natürlich surjektiv auf das Bild. $\Delta\colon X \to \Delta(X)$ ist also bijektiv und stetig.

Für $U \subseteq X$ offen gilt $\Delta(U) = \Delta(X) \cap (U \times_Y U)$, und da $U \times_Y U$ offen in $X \times_Y X$ ist, ist auch $\Delta(U)$ offen in $\Delta(X)$. Demnach ist $\Delta\colon X \to \Delta(X)$ eine offene Abbildung und damit insgesamt ein Homöomorphismus.

Um zu sehen, dass Δ eine abgeschlossene Immersion ist, bleibt die Surjektivität des Garbenhomomorphismus $\Delta^\#\colon \mathcal{O}_{X \times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ zu Zeigen. Das kann man lokal auf $X \times_Y X$ testen. Sei $P \in X \times_Y X$ und V eine offenene affine Umgebung von $f(P)$ in Y, sowie U offene affine Umgebung von P in $f^{-1}(V)$. Dann ist $U \times_Y U$ eine offene affine Umgebung von $\Delta(P)$ in $X \times_Y X$. Nach Proposition 10.3 ist $\Delta\colon U \to U \times_Y U$ eine abgeschlossene Immersion, damit ist $\Delta^\#$ surjektiv über $U \times_Y U$ und damit in einer Umgebung von $\Delta(P)$.

Für $Q \in (X \times_Y X) \setminus \Delta(X)$ müssen wir die Surjektivität von $\Delta^\#$ auch in einer Umgebung testen. Da $(X \times_Y X) \setminus \Delta(X)$ offen ist folgt $(\Delta_* \mathcal{O}_X)_Q = 0$, dass heißt die Surjektivität ist trivial im Halm über Q.

□

10.5 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ Morphismus von Schemata.

i) f heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn für alle $Z \subseteq X$ abgeschlossen gilt, dass $f(Z) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

ii) f heißt **universell abgeschlossen**, wenn jeder Basiswechsel f' von f abgeschlossen ist.

iii) f heißt **eigentlich**, wenn f separiert, von endlichem Typ und universell abgeschlossen ist.

10.6 Bemerkung. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ zwischen noetherschen Schemata. Wir sagen, dass f das **Bewertungskriterium für Separiertheit (beziehungsweise Eigentlichkeit)** erfüllt, falls Folgendes gilt:

Für jeden diskreten Bewertungsring R mit $K = \operatorname{Quot}(R)$, den durch $R \subseteq K$ induzierten Morphismus $i\colon \operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(R)$ und alle Morphismen $\operatorname{Spec}(K) \to X, \operatorname{Spec}(R) \to Y$ für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}(R) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert, gibt es einen (beziehungsweise genau einen) Morphismus $d\colon \operatorname{Spec}(R) \to X$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, "d"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

10.7 Theorem. *Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata ist genau dann separiert (bzw. eigentlich), wenn f das Bewertungskriterium für Separiertheit (beziehungsweise Eigentlichkeit) erfüllt.*

Beweis. [GD61, Proposition 7.2.3] oder [GW10, Theorem 15.9] (beziehungsweise [GD61, Theorèm 7.3.8]). □

11 Projektive Morphismen

Wir werden projektive Schemata oder allgemeiner projektive Morphismen studieren. Sie sind ein wichtiger Spezialfall von eigentlichen Morphismen. Im Chow-Lemma werden wir eine gewisse Umkehrung sehen und zeigen, dass jeder eigentliche Morphismus unter gewissen Umständen durch einen projektiven Morphismus dominiert wird.

11.1 Definition. i) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt **projektiv**, wenn eine abgeschlossene Immersion i existiert, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} Y \arrow[d, "p_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

ii) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt **quasi-projektiv**, wenn es eine offene Immersion $o\colon X \to X'$ in ein Schema X' und einen projektiven Morphismus $f'\colon X' \to Y$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "o"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

11.2 Warnung. Dies ist nicht die allgemeine Definition projektiver Morphismen aus [GD61, 5.5]. Letztere ist im Gegensatz zu Definition 11.1 lokal im Bild definiert. Beide Definitionen sind äquivalent, falls Y eine quasi-projektive Varietät über einem affinen Schema ist.

11.3 Proposition. *i) Sei $\varphi\colon S \to S'$ ein Homomorphismus graduierter Ringe. Dann wird ein Morphismus*

$$\big(f = \mathrm{Proj}(\varphi)\big)\colon\ \mathrm{Proj}(S') \setminus V_+\Big(\langle \varphi(S_+)\rangle\Big) \to \mathrm{Proj}(S)$$

mit folgenden Eigenschaften induziert:

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{p}) &:= \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) && \forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S') \setminus V_+\Big(\langle \varphi(S_+)\rangle\Big) \\ f^{-1}(D_+(h)) &= D_+(\varphi(h)) && \forall\, h \in S_+^{hom} \\ f|_{D_+(\varphi(h))} &= \mathrm{Spec}(\varphi_{(h)}) && \forall\, h \in S_+^{hom} \end{aligned}$$

Wir verwenden dabei die folgenden kanonischen Abbildungen:

$$\Big(D_+(\varphi(h)) = \mathrm{Spec}(S'_{(\varphi(h))})\Big) \to \Big(D_+(h) = \mathrm{Spec}(S_{(h)})\Big)$$
$$\varphi_{(h)} := \Big(S_{(h)} \to S'_{(\varphi(h))}\Big)$$

ii) Ist φ in i) surjektiv, dann ist $V_+\Big(\langle\varphi(S_+)\rangle\Big) = \emptyset$ *und* $\operatorname{Proj}(\varphi)\colon \operatorname{Proj}(S') \to \operatorname{Proj}(S)$ *ist eine abgeschlossene Immersion.*

iii) Sei A ein Ring, S eine graduierte A-Algebra, B eine A-Algebra. Betrachte die Graduierung

$$S \otimes_A B = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} (S_d \otimes B)\,.$$

Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\operatorname{Proj}(S) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj}(S \otimes_A B).$$

iv) Seien S, S' graduierte A-Algebren. Für die graduierte A-Algebra

$$S \times_A S' \coloneqq \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} (S_d \otimes_A S'_d) \subseteq S \otimes_A S'$$

existert eine kanonischer Isomorphismus

$$\operatorname{Proj}(S) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Proj}(S') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj}(S \times_A S').$$

Beweis. Dies folgt leicht aus den Definitionen. □

11.4 Korollar. *i) Sei S ein graduierter Ring, der als S_0-Algebra durch endlich viele Elemente aus S_1 erzeugt wird. Dann ist der kanonische Morphismus*

$$\operatorname{Proj}(S) \to \operatorname{Spec}(S_0)$$

projektiv.

ii) Seien Y ein Schema und $N \coloneqq mn + m + n = (m+1)(n+1) - 1$ für $m, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann existiert eine kanonische abgeschlossene Immersion

$$\psi_{m,n}\colon \mathbb{P}^m_Y \times \mathbb{P}^n_Y \to \mathbb{P}^N_Y,$$

*die **Segre-Einbettung** genannt wird.*

Beispiel (Ein klassisches Beispiel aus der Algebraischen Geometrie I)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann erhält man

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}\colon \mathbb{P}^m_k \times \mathbb{P}^n_k &\to \mathbb{P}^N_k \\ ((x_0 : \cdots : x_m), (y_1 : \cdots : y_n)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_0y_n : x_1y_0 : \cdots : x_ny_m) \end{aligned}$$

Beweis. i) Sei $A = S_0$. Da S durch endlich viele Elemente aus S_1 als A-Algebra erzeugt wird existiert eine Surjektion

$$S' \coloneqq A[T_0, \ldots, T_n] \to S$$

von graduierten Ringen. Nach Proposition 11.3 ii) ist $\operatorname{Proj}(S) \to \operatorname{Proj}(S')$ eine abgeschlossene Immersion, und man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Proj}(S) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Proj}(S') = \mathbb{P}^n_A \arrow[dl] \\ \operatorname{Spec}(A) & \end{tikzcd}$$

und damit die Tatsache, dass $\operatorname{Proj}(S) \to \operatorname{Spec}(A)$ projektiv ist.

ii) Setze

$$\begin{aligned} S &:= \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_m] \\ S' &:= \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_n] \\ S'' &:= Z_0[T_0, \dots, T_N] \\ &= \mathbb{Z}[T_{ij} | 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n] \end{aligned}$$

mit lexikographischer Ordnung auf den T_{ij}. Dann haben wir einen surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} S'' &\to S \times_A S' \\ T_{ij} &\mapsto T_i \otimes T_j. \end{aligned}$$

Nach Proposition 11.3 ii) und iv) erhalten wir eine abgeschlossene Immersion $\mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$. Durch Basiswechsel erhalten wir die Aussage.

□

11.5 Proposition. *i) Abgeschlossene Immersionen sind projektiv.*

ii) Projektivität ist stabil unter Basiswechsel.

iii) Eine Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.

iv) Für projektive Morphismen $X \to S$ und $Y \to S$ ist $X \times_S Y \to S$ projektiv.

v) Sind $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ Morphismen mit der Eingeschaft, dass g und $g \circ f$ projektiv sind, dann ist auch f projektiv.

Beweisidee für iii). Seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ projektive Morphismen. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{P}^m_Z \times \mathbb{P}^n_Z \arrow[r, "\psi_{n,m}", "\text{Segre}"'] \arrow[d] & \mathbb{P}^N_Z \arrow[ddl, bend left] \\ & Y \arrow[r, hook, "i_Y"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^m_Z \arrow[d] & \\ & & Z & \end{tikzcd}$$

Man kann zeigen, dass das Rechteck in der Mitte des Diagramms karthesisch ist. Damit ist $\mathbb{P}^n_Y \to P^m_Z \times \mathbb{P}^n_Z$ nach iii) eine abgeschlossene Immersion und $\psi_{n,m}$ nach Korollar 11.4 ii) ebenfalls. Da die Komposition abgeschlossener Immersionen wieder eine abgeschlossene Immersion ist, ist $f \circ g$ projektiv. □

11.6 Lemma. *i) Für ein homogenes Ideal I im graduierten Ring S mit $I \subseteq S_+$ gilt*

$$S_+ \cap \sqrt{I} = S_+ \cap \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S) \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

ii) Es gilt $\operatorname{Proj}(S) = \emptyset$ *genau dann, wenn* $S_+ \subseteq \operatorname{nil}(S)$.

Beweis. i) [GW10, Proposition 13.2 (3)].

ii) **„⇐“:** Sei $S_+ \subseteq \mathrm{nil}(S)$. Dann gilt

$$S_+ \subseteq \mathrm{nil}(S) = \sqrt{\{0\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}$$

und damit folgt $\mathrm{Proj}(S) = \emptyset$.

„⇒“: Sei $\mathrm{Proj}(S) = \emptyset$. Wir verwenden i) für $I = \{0\}$. Dann folgt

$$S_+ \cap \sqrt{\{0\}} = S_+ \cap \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \\ U \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = S_+$$

und daraus folgt wiederum

$$S_+ \subseteq \mathrm{nil}(S).$$

□

11.7 Theorem. *Ein projektiver Morphismus von Schemata ist eigentlich.*

Beweis. Sei $f\colon X \to Y$ ein projektiver Morphismus, das heißt f faktorisiert auf folgende Weise:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d, "p_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Eine abgeschlossene Immersion ist nach Aufgabe 11.2 eigentlich. Weil die Eigenschaft, eigentlich zu sein, abgeschlossen unter Komposition ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ eigentlich ist. Weil die Eigenschaft, eigentlich zu sein, nach Aufgabe 11.2 stabil unter Basiswechsel ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ eigentlich ist. Nach Aufgabe 10.3 ist $p_2\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ separiert und nach Beispiel 6.12 vom endlichem Typ. Es bleibt zu zeigen, dass p_2 universell abgeschlossen ist. Sei also X ein Schema, dann wollen wir zeigen, dass $\pi\colon \mathbb{P}^n_X \to X$ abgeschlossen ist. Da wir dies lokal auf X prüfen können, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = \mathrm{Spec}(A)$ für einen Ring A annehmen. Für $B \coloneqq A[T_0, \dots, T_n]$ gilt $\mathbb{P}^n_X = \mathrm{Proj}(B)$. Sei V abgeschlossen in $\mathbb{P}^n_X$. Wir müssen zeigen, dass $\pi(V)$ abgeschlossen in X ist. Nach Definition der Topologie auf $\mathrm{Proj}(B)$ folgt

$$V = V_+(\mathfrak{a})$$

für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ von B. Wir werden zeigen, dass $X \setminus \pi(V)$ offen in X ist. Sei $C \coloneqq B/\mathfrak{a}$, dann ist C ein graduierter Ring. Da der Quotientenhomomorphismus $B \to C$ surjektiv ist, erhalten wir eine abgeschlossene Immersion $(V = \mathrm{Proj}(C)) \to (\mathrm{Proj}(B) = \mathbb{P}^n_X = \mathbb{P}^n_A)$ und damit V als abgeschlosssenes Unterschema von $\mathbb{P}^n_X$. Für $\mathfrak{p} \in X \setminus \pi(V)$ gilt $V \cap \pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$. Beachte, dass $V \cap \pi^{-1}(\mathfrak{p})$ Die Faser der Abbildung $V \xrightarrow{\pi} X$ über $\mathfrak{p}$ ist. Nach Proposition 11.3 gilt

$$V \cap \pi^{-1}(\mathfrak{p}) = V \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(\mathfrak{p})) \overset{\text{Proposition 11.3 iii)}}{=} \mathrm{Proj}(C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$$

Aus $\emptyset = \mathrm{Proj}(C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ folgt aber mit Lemma 11.6 ii)

$$(C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))_+ \subseteq \mathrm{nil}(C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})). \qquad (\star)$$

Wegen $B = A[T_0, \dots, T_n]$ ist B als A-Algebra durch endlich viele Elemente aus B_1 erzeugt (zum Beispiel $T_0, \dots, T_n$). Deswegen ist auch $C = B/\mathfrak{a}$ als C_0-Algebra durch endlich viele Elemente aus C_1 erzeugt und damit ist auch $C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ als $C_0 \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$-ALgebra erzeugt durch endlich viele Elemente aus $C_1 \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$. Anders geasgt kann man jedes $c \in C \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ als Polynom mit

Koeffizienten in $C_0 \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ un in den „Variablen“ $\overline{c_0}, \dots, \overline{c_n} \in C_1 \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ schreieben. Nach $(\star)$ sind die Elemente $\overline{c_0}, \dots, \overline{c_n}$ alle nilpotent. Es gibt also ein $d \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $C_{d'} \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = \{0\}$ für alle $d' \geq d$ gilt. Betrachte jetzt

$$(C_d)_{\mathfrak{p}} = C_d \otimes_A A_{\mathfrak{p}}.$$

Da C_d also A-Modul endlich erzeugt ist, ist $(C_d)_{\mathfrak{p}}$ endlich erzeugt über dem lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$. Wegen

$$(C_d)_{\mathfrak{p}} \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = C_d \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = \{0\}$$

folgt mit dem Lemma von Nakayama

$$(C_d)_{\mathfrak{p}} = \{0\}.$$

Nach Lemma 9.13 ist $\operatorname{Supp}(C_d)$ abgeschlossen. Es ist aber $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(C_d)$ wegen (11.7). Also gibt es ein $h \in A$ mit

$$\mathfrak{p} \in D(h) \subseteq \operatorname{Spec}(A) \setminus \operatorname{Supp}(C_d).$$

Daraus folgt

$$\underbrace{C_d \otimes_A A_h}_{=(C_d)_h} = \{0\},$$

es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$h^N C_d = \{0\}.$$

Wir dürfen h durch h^N ersetzen, dann folgt $hC_d = \{0\}$. Mit $C_d = B_d/\mathfrak{a}_d$ folgt $hB_d \subseteq \mathfrak{a}_d$. Inbesondere gilt $hT_i^d \in \mathfrak{a}_d$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Um nun zu zeigen, dass $X \setminus \pi(V)$ offen ist, genügt es zu zeigen, dass $D(h)$ als offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ und $\pi(V)$ disjunkt sind. Dabei gehen wir indirekt vor. Wir nehmen also an, dass es ein $\mathfrak{q} \in V = V_+(\mathfrak{a})$ mit $\pi(\mathfrak{q}) \in D(h)$ gibt. Es gilt $\pi(\mathfrak{q}) = A \cap \mathfrak{q}$ nach Definition von π. Aus $\pi(\mathfrak{q}) \in D(h)$ folgt $h \notin A \cap \mathfrak{q}$. Wegen $h \in A$ gilt insbesondere $h \notin \mathfrak{q}$. Andererseits gilt $hT_i^d \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ und daraus folgt $T_i^d \in \mathfrak{q}$, denn $\mathfrak{q}$ ist ein Primideal. Es gilt also auch $T_i \in \mathfrak{q}$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ und damit $B_+ \subseteq \mathfrak{q}$ im WIderspruch zu $\mathfrak{q} \in \operatorname{Proj}(B)$. □

11.8 Korollar. *Ein quasiprojektiver Morphismus ist separiert und von endlichem Typ.*

Beweis. Nach Aufgabe 10.2 ist eine offene Immersion separiert. Offenbar ist eine offene Immersion auch von endlichem Typ. Sei $f: X \to Y$ ein quasiprojektiver Morphismus, das heißt f hat eine Faktorisierung $f = g \circ i$, wobei i eine offene Immersion und g ein projektiver Morphismus ist. Da i von endlichem Typ und separiert ist, und weil g nach Theorem 11.7 von endlichem Typ und separirt ist, ist auch $f = g \circ i$ von endlichem Typ und separiert, da diese Eigneschaften abgeschlossen unter Komposition sind. □

Es gibt eigentliche Morphismen, die nicht projektiv sind. In der Theorie der torischen Varietäten gibt man sogar Beispiele von eigentlichen torischen Varietäten über Körpern an, die nicht projektiv sind. Das folgende Lemma ist die bestmögliche „Umkehrung“ von Theorem 11.7.

11.9 Lemma (Lemma von Chow). *Sei Y ein noethersches Schema und $g: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus. Dann existiert ein Schema X', ein Morphismus $h: X' \to X$ und eine offene dichte Teilmenge U von X mit der eigenschaft, dass $f := g \circ h$ projektiv ist und h einen Morphismus $g^{-1}(U) \to U$ induziert.*

$$h^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Beweis. [GD61, 5.6] □

11.10 Bemerkung. Aus Proposition 9.3 ii) und Proposition 9.8 folgt, dass für quasikohärente (beziehungsweise kohärente) $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ auf dem (noetherschen) Schema X auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ein quasikohärenter (beziehungsweise kohärenter) $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

11.11 Definition. Sei S ein graduierter Ring und $X = \operatorname{Proj}(S)$.

i) Ein **graduierter S-Modul** M ist ein S-Modul M mit einer Graduierung $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ mit der Eigenschaft, dass $S_d M_n \subseteq M_{d+n}$ für alle $d, n \in \mathbb{Z}$ gilt. Das Tensorprodukt $M \otimes_S N$ versehen wir mit der Graduierung, die die Eigenschaft hat, dass $\deg(m \otimes n) = \deg(m) + \deg(n)$ für alle $m \in M^{\text{hom}}$ und $n \in N^{\text{hom}}$ gilt.

ii) Sei M ein graduierter S-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir den graduierten S-Modul $M(n)$ als den Modul M mit neuer Graduierung

$$M(n)_m := M_{m+n} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

„Wir verschieben die alte Graduierung um n Schritte nach links." Insbesondere bezeichnet $S(n)$ den S-Modul S mit der Graduierung

$$S(n)_m := S_{m+n}.$$

iii) Ist $n \in \mathbb{Z}$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X(n)$ den quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{S(n)}$ aus Proposition 9.6. Der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{O}_X(1) = \widetilde{S(1)}$ heißt die **getwistete Garbe von Serre**.

iv) Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, dann haben wir einen quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n).$$

11.12 Proposition. *Sei S ein graduierter Ring, der von S_1 also S_0-Algebra erzeugt wird. Sei $X := \operatorname{Proj}(S)$. Dann gilt:*

i) $\mathcal{O}_X(n)$ ist eine invertierbare Garbe auf X, das heißt lokal frei vom Rang 1.

ii) Für graduierte S-Moduln M, N gibt es kanonische Isomorphismen

$$\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$$
$$\widetilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$$
$$\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n).$$

11.13 Definition. Sei S ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj}(S)$ und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

i) Ein Element $s \in S_d = (S(d))_0$ definiert für jedes $f \in S_+^{\text{hom}}$ ein Element $\frac{s}{1}$ in $(S(d))_{(f)} = \Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X(d))$. Diese Elemente verkleben zu einem Element in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$, das wir (ebenfalls) mit s bezeichnen.

ii) Der **graduierte S-Modul assoziiert zu $\mathcal{F}$** ist die graduierte abelsche Gruppe

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

mit folgender Struktur: Sind $s \in S_d$ und $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$, so ist $st \in \Gamma_*(\mathcal{F})$ das Bild von $s \otimes t$ unter

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \otimes_S \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Big(\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}(n)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))\Big).$$

12 Weildivisoren

In der Algebraischen Geometrie I haben wir Divisoren auf Kurven eingeführt und wichtige Sätze wie den Satz von Riemann-Roch gesehen. Wir führen nun Weildivisoren als formale Linearkombinationen von irreduziblen Teilmengen der Kodimension 1 ein.

12.1 Erinnerung. Ein Integritätsbereich A heißt **ganz abgeschlossen**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ und $\alpha \in \operatorname{Quot}(A)$ mit

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

schon $\alpha \in A$ folgt.

12.2 Definition. Ein Schema X heißt **normal**, falls $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist.

12.3 Definition. Ein noetherscher lokaler Ring A heißt **regulär**, wenn für das Maximalideal $\mathfrak{m}$ und den Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ schon

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$$

gilt.

12.4 Bemerkung. Sei A ein noetherscher lokaler Ring. Wenn A regulär ist, dann ist A faktoriell. Daraus folgt leicht, dass A ganz abgeschlossen ist.

Beweis. [Mat70, S. 78]. □

12.5 Definition. Ein noethersches Schema X heißt **regulär** (bzw. **lokal faktoriell**), wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ regulär (beziehungsweise faktoriell) ist.

12.6 Definition. Ein noethersches Schema heißt **regulär in Kodimension** 1, wenn jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Dimension 1 regulär ist.

12.7 Theorem. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1 mit Maximalideal $\mathfrak{m}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) A ist ein diskreter Bewertungsring.

ii) A ist ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich.

iii) A ist regulär.

iv) $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.

Beweis. [AM94, Proposition 9.2, S. 94]. □

12.8 Bemerkung. Mit Bemerkung 12.4 und Theorem 12.7 folgt sofort für jedes noethersche Schema X:

$$X \text{ regulär} \overset{12.4}{\Longrightarrow} X \text{ lokal faktoriell} \overset{12.4}{\Longrightarrow} X \text{ normal} \overset{12.7}{\Longrightarrow} X \text{ regulär in Kodimension 1}$$

Ab jetzt sei X ein noethersches integrales separiertes Schema, das regulär in Kodimension 1 ist.

12.9 Definition.
- Ein **Primdivisor** Y von X ist ist ein abgeschlossenes Unterschema Y von X der Kodimension 1.
- Ein **Weildivisor** D von X ist eine formale Linearkombination $D = \sum_i m_i Y_i$ mit Koeffizienten $m_i \in \mathbb{Z}$ und endlich vielen Primdivisoren Y_i. Die Weildivisroen bilden also eine Gruppe
$$Z^1(X) \coloneqq \{\text{Weildivisoren auf } X\} = \bigoplus_{Y \text{ Primdivisor von } X} Y.$$
- Ein Weildivisor D von X heißt effektiv, wenn $D = \sum_i m_i Y_i$ mit $m_i \geq 0$ gilt. Man schreibt dann auch $D \geq 0$.

12.10 Bemerkung. Für alle $x \in X$ folgt direkt aus der Definition der Kodimension in Definition 6.13
$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \operatorname{codim}(\overline{x}, X). \tag{$\star$}$$
Sei Y ein Primdivisor von X. Da Y irreduzibel ist, gibt es genau einen generischen Punkt η von Y. Mit ($\star$) folgt $\dim(\mathcal{O}_{X,\eta}) = 1$ und mit Theorem 12.7 folgt, dass $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Beachte, dass
$$\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,\eta}) = K(X)$$
gilt, da X integral ist. Dabei ist $K(X)$ der Funktionenkörper, der durch $\mathcal{O}_{X,\xi}$ für den generischen Punkt ξ von X definert ist. Es gilt $K(X) = \operatorname{Quot}(B)$ für jedes offene affine Unterschema $\emptyset \neq \operatorname{Spec}(B)$ von X.

Fazit: Wir erhalten eine durch Y eindeutig bestimmte diskrete Bewertung $v_Y \colon K(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. Nach dem Bewertungskriterium und weil X separiert ist, ist Y eindeutig durch die Bewertung v_Y bestimmt.

12.11 Lemma. *Ist $f \in K(X)^\times$, so gilt $v_Y(f) \neq 0$ für höchstens endlich viele Primdivisoren Y von X.*

Beweis. [Har77, Lemma II.6.1]. □

12.12 Definition. Der **Weildivisor zu** $f \in K(X)^\times$ ist definiert als
$$\operatorname{cyc}(f) \coloneqq \sum_Y v_Y(f) Y,$$
wobei Y über alle Primdivisoren läuft. Nach Lemma 12.11 ist $\operatorname{cyc}(f)$ ein Weildivisor. Solche Divisoren nennen wir **Hauptdivisoren**.

12.13 Definition. Zwei Weildivisoren D_1 und D_2 von X heißen **linear äquivalent**, falls $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist. Wir erhalten eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Gruppe der Weildivisoren auf X. Wegen $\operatorname{cyc}(fg) = \operatorname{cyc}(f) - \operatorname{cyc}(g)$ bilden die Hauptdivisoren eine Untergruppe von $Z^1(X)$. Die Gruppe
$$\operatorname{CH}^1(X) \coloneqq Z^1(X)/\sim\, = Z^1(X)/\{\text{Hauptdivisoren}\}$$
heißt erste **Chowgruppe** oder **Divisorenklassengruppe**.

12.14 Proposition. *Sei A ein noetherscher Integritätsbereich und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist A genau dann faktoriell, wenn $\operatorname{CH}^1(X) = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Dies ist ein Resultat aus der kommutativen Algebra, siehe [Bou98, Chapter 7, §3] oder [Har77, Proposition II.6.2]. Es verallgemeinert das entsprechende Resultat für Dedekindbereiche aus der algebraischen Zahlentheorie. □

12.15 Beispiel. Sei K ein Körper. Dann ist $\mathrm{CH}^1(\mathbb{A}^n_K) = \{0\}$, denn $\mathbb{A}^1_K = \mathrm{Spec}(A)$ für den faktoriellen Ring $A = K[T_1, \dots, T_n]$. Dies gilt allgemeiner für einen faktoriellen Ring K. Siehe [Gub14, Appendix A].

12.16 Definition. Sei K ein Körper und H sei ein Primdivisor von $\mathbb{P}^n_K$, das heißt H ist ein integres abgeschlossene Unterschema von $\mathbb{P}^n_K$ der Kodimension 1. Nach [GW10, Corollary 5.4.2] gilt $H = V_+(g)$ für ein irreduzibles homogenes Polynom $g \in K[T_0, \dots, T_n]$. Wir defineren den **Grad** von H als

$$\deg(H) \coloneqq \deg(g).$$

Für einen Weildivisor $D = \sum_j m_j H_j$ definieren wir den **Grad** durch

$$\deg(D) = \sum_j m_j \deg(H_j).$$

12.17 Proposition. *Sei $H \coloneqq V_+(T_0)$ in $\mathbb{P}^n_K$, wobei $T_0, \dots, T_n$ die homogenen Koordinaten sind.*

a) Falls D ein Weildivisor von $\mathbb{P}^n_K$ vom Grad d ist, so gilt $D \sim dH$.

b) Für alle $f \in K(\mathbb{P}^n_K)^\times$ gilt $\deg(\mathrm{cyc}(f)) = 0$.

c) $\deg$ induziert einen Isomorphismus $\mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^n_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist $S = K[T_0, \dots, T_n]$ faktoriell nach [Gub14, Theorem A.3]. Für $g \in S_d$ gilt $g = g_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot g_r^{n_r}$ für irreduzible $g_j \in S_{d_j}$ und $n_j \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\mathrm{cyc}(g) \coloneqq \sum_j n_j V_+(g_j).$$

Dies ist jedoch **kein** Hauptdivisor (für $d \neq 0$), da g **keine** rationale Funktion ist.

Sei jetzt $f \in K(\mathbb{P}^n_K)^\times$, dann gilt $f = \frac{g}{h}$ mit $g, h \in S_d$. Durch Berechnen der Multiplizitäten in jedem $V_+(g_j)$, beziehungsweise $V_+(h_k)$ und durch Benutzung der Additivität von Bewertungen erhält man sofort

$$\mathrm{cyc}(f) = \mathrm{cyc}(g) - \mathrm{cyc}(h).$$

Dann folgt

$$\deg(\mathrm{cyc}(f)) = \deg(\mathrm{cyc}(g)) - \deg(\mathrm{cyc}(h)) = \sum_j n_j d_j - \sum_k n'_k d'_k = d - d = 0,$$

wobei $h = h_1^{n'_1} \cdot, \dots, h_s^{n'_s}$ mit $h_k \in S_{d'_k}$ und $n'_k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist b) gezeigt.

Wir zeigen nun a). Sei D ein Weildivisor vom Grad d. Dann gilt $D = D_1 - D_2$ für effektive Weildivisoren D_1 und D_2. Weil der Grad additiv ist, genügt es, die Behauptung für D_1 und D_2 zu zeigen. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit D ein effektiver Weildivisor. Es gilt also $D = \sum_j m_j H_j$ mit $m_j \geq 0$. Nach Definition 12.16 gilt $H_j = V_+(g_j)$ für $g_j \in S_{d_j}$ irreduzibel. Es gilt also nach Definition

$$D = \sum_j m_j \,\mathrm{cyc}(g_j) = \mathrm{cyc}(g)$$

für $g = g_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot g_r^{m_r}$. Dann folgt

$$D - dH = \mathrm{cyc}(g) - d\,\mathrm{cyc}(T_0) = \mathrm{cyc}\left(\frac{g}{T_0^d}\right) = \text{ Hauptdivisor}$$

und damit a).

Nun wollen wir noch c) zeigen. Wir haben einen Homomorphismus $Z^1(\mathbb{P}^n_K) \to \mathbb{Z},\ D \mapsto \deg(D)$. Nach b) ist die Untergruppe der Hauptdivisoren im Kern dieses Morphismuses und damit erhalten wir einen induzierten Isomorphismus

$$\mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^n_K) \to \mathbb{Z},$$

denn ist $D \in Z^1(X)$ mit $\deg(D) = 0$, so gilt nach a) schon $D \sim 0$, also ist der Morphismus injektiv, und es gilt $\deg(H) = \deg(T_0) = 1$, also ist er auch surjektiv. $\square$

13 Kähler-Differentiale

13.1 Definition. Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und M ein B-Modul.

i) Eine **A-Derivation von B nach M** ist eine A-lineare Abbildung

$$d\colon B \to M$$

mit

$$d(fg) = fd(g) + d(f)g \quad \forall f, g \in B.$$

ii) Die Menge der A-Derivationen von B nach M bildet einen A-Untermodul von $\mathrm{Hom}_A(B, M)$, den wir mit $\mathrm{Der}_A(B, M)$ bezeichnen.

iii) Der **Modul der (relativen) (Kähler-) Differentiale von B über A** ist ein B-Modul $\Omega^1_{B/A}$ zusammen mit einer A-Derivation

$$d_{B/A}\colon B \to \Omega^1_{B/A},$$

die in folgendem SInne universell ist: Ist $d\colon B \to M$ eine A-Derivation in einen B-Modul M, so gibt es genau einen B-Modulhomomorphismus

$$\varphi\colon \Omega^1_{B/A} \to M$$

mit der Eigenschaft, dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "d_{B/A}"] \arrow[dr, "d"'] & & \Omega^1_{B/A} \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $d_{B/A}$ heißt **äußeres DIfferential von B über A**.

13.2 Bemerkung. Sei $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & d(1) = d(1 \cdot 1) = 1 \cdot d(1) + d(1) \cdot 1 \\ \Longrightarrow \quad & d(1) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & d(a) = a \cdot d(1) = 0 \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

13.3 Lemma. *Sei B eine A-Algebra. Der Modul $(\Omega^1_{B/A}, d_{B/A})$ existiert und ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.*

Beweis. **Eindeutigkeit** Standardagument.

Existenz $B \otimes_A B$ ist eine B-Algebra vermöge Linksmultiplikation:

$$f(g \otimes h) \coloneqq (f \otimes 1)(g \otimes h) = (fg) \otimes h \quad \forall\, f, g, h \in B$$

Betrachte den Epimorphismus $m\colon B \otimes_B \to B,\ f \otimes g \mapsto fg$ von B-Algebren und setze $I \coloneqq \ker(m)$. Dann ist

$$\Omega^1_{B/A} \coloneqq I/I^2$$

ein Modul über dem Ring $(B \otimes_A B)_I \underset{\cong}{m}$. Wir definieren

$$d_{B/A}\colon B \to \Omega^1_{B/A},\ f \mapsto 1 \otimes f - f \otimes 1 + I^2.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $d_{B/A}$ eine A-Derivation ist. Sei nun $d\colon B \to M$ eine beliebige A-Derivation. Dann definieren

$$\varphi'\colon I \to M,\ \sum_i f_i \otimes g_i \mapsto \sum_i f_i d(g_i).$$

Dann ist φ' B-linear und $I^2 \subseteq \ker(\varphi')$, also erhalten wir eine B-lineare Abbildung

$$\varphi\colon \Omega^1_{B/A} \to M$$

mit

$$\varphi \circ d_{B/A}(f) = \varphi(1 \otimes f - f \otimes 1) = d(f) - f \cdot d(1) = d(f).$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ eindeutig ist. Für $h = \sum_i f_i \otimes g_i$ gilt:

$$\begin{aligned} h &\equiv \sum_i f_i \otimes g_i - \underbrace{f_i g_i \otimes 1}_{\in I^2} && \bmod I^1 \\ &\equiv \sum_i f_i d_{B/A}(g_i) && \bmod I^2 \end{aligned}$$

Also wird I/I^2 als B-Modul von Elementen der Form $d_{B/A}(g)$ erzeugt. Mit $\varphi \circ d_{B/A} = d$ folgt die Behauptng.

$\square$

13.4 Lemma. *Sei B eine A-Algebra und $\Omega^1_{B/A} = (\Omega^1_{B/A}, d)$ der Modul der Differentiale. Dann gilt:*

i) Falls B von $E \subseteq B$ also A-Algebra erzeugt wird, dann lässt sich jedes $\alpha \in \Omega^1_{B/A}$ als

$$\alpha = sum_{i=1}^k b_i d(e_i)$$

für geeignete $k \in \mathbb{N}$, $b_i \in B$ und $e_i \in E$ schreiben.

ii) Ist $B = A[T_1, \ldots, T_n$, so ist $\Omega^1_{B/A} = BdT_1 + \ldots + BdT_n$ ein freier B-Modul mit Basis $dT_1, \ldots, dT_n$.

iii) Sei A' eine A-Algebra und $B' = B \otimes_A A'$, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus von B'-Moduln

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B'/A'}.$$

iv) Ist $A \to B$ surjektiv, so gilt $\Omega^1_{B/A} = 0$.

Sei $S \subseteq B$ multiplikativ abgeschlossen.

v) *Eine A-Derivation $d\colon B \to M$ ein einen B-Moduk M besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer A-Derivation*

$$d_S\colon S^{-1}B \to S^{-1}M$$

gegeben durch

$$d_S\left(\frac{b}{s}\right) = \left(\frac{sd(b) - bd(s)}{s^2}\right).$$

Beweis. [Har77, II.8] □

13.5 Lemma (Lemma über die relative Kotangentialfolge)**.** *Ist $\varphi\colon B \to C$ ein Homomorphismus von A-Algebren, so existiert eine exakte Sequenz von $C - Moduln$*

$$\Omega^1_{B/A} \otimes C \xrightarrow{f} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{g} \Omega^1_{B/C} \longrightarrow 0$$

mit

$$f(b_1 d_{B/A}(b_2) \otimes c) = b_1 c d_{C/A}(b_2)$$

für alle $b_1, b_2 \in B$ und $c \in C$ und

$$g(c_1 d_{C/A}(c_2)) = c_1 d_{C/B}(c_2)$$

für alle $c_1, c_2 \in C$.

13.6 Bemerkung. Sei $f\colon X \to S$ ein Morphismus von Schemata und $\Delta = \Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$ der Diagonalmorphismus.

i) Seien $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und $S = \bigcup_{j\in J} V_j$ offene affine Überdeckungen mit der Eigenschaft, dass für jedes $i \in I$ ein $j(i) \in J$ mit $f(U_i) \subseteq V_{j(i)}$ existiert. Dann bilden die affinen Schemata $W_i \coloneqq U_i \times_{V_{j(i)}} U_i$ eine offene Überdeckung von $\Delta(X)$. Nach Proposition 10.3 ist $\Delta(X) \cap W_i = \Delta_{U_i/V_{j(i)}}(U_i)$ abgeschlossen in W_i, also auch in der offenen Menge $W \coloneqq \bigcup_{i\in I} W_i$. Wir erhalten

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta", "\text{abgeschlossene Immersion}"'] & & X \times_S X \\ & W \arrow[ur, "\text{offene Immersion}"'] & \end{tikzcd}$$

ii) Ist $X \to S$ separiert, so ist $\Delta(X)$ in $X \times_S X$ abgeschlossen und wir können in i) $W = X \times_S X$ wählen.

13.7 Definition. Sei X ein S-Schema und $\Delta\colon X \to W \subseteq X \times_S X$ der Diagonlamorphismus, wobei W wie in Bemerkung 13.6 gewählt sei. Weiter sei J die quasikohärente Idealgarbe $\mathcal{O}_W$, die $\Delta(X)$ als abgeschlossenes Unterschema von W beschreibt. Dann heißt der $\mathcal{O}_X$-Modul

$$\Omega^1_{X/S} \coloneqq \Delta^*(J/J^2)$$

die **Garbe der (relativen) Differentiale** für X über S.

13.8 Bemerkung. Mit der Notation aus Definition 13.7 gilt:

i) $\Omega^1_{X/S}$ ist unabhängig von der Wahl von W.

ii) Mit J sind auch $J^2, J/J^2$ und $\Omega^1_{X/S}$ quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln. Ist S noethersch und $X \to S$ von endlichem Typ, so ist $X \times_S X$ noethersch und J und $\Omega^1_{X/S}$ sind kohärent.

iii) Die kanonische $\mathcal{O}_S$-lineare Abbildung $d_{X/S}\colon \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S}$, die einen Schnitt f von $\mathcal{O}_X$ auf $p_2^* f - p_1^* f$ abbildet, heißt **äußeres Differential**.

iv) Zu $f\colon X \to S$ seien affine offene Mengen $U = \operatorname{Spec}(B) \subseteq X$ und $V = \operatorname{Spec}(A) \subseteq S$ mit $f(U) \subseteq V$ gewählt. Da die Diagonale $\Delta_{U/V}\colon U \to U \times_V U$ durch die Multiplikationsabbildung $B \otimes_A B \to B$ definiert ist, folgt aus dem Beweis von Lemma 13.3:

$$\Omega^1_{X/S}|_U = \widetilde{\Omega^1_{B/A}}, \quad d_{X/S}|_U = \widetilde{d_{B/A}}$$

Damit übertragen sich die Eigenschaften von $\Omega^1_{B/A}$ auf $\Omega^1_{X/S}$:

v) Sei S' ein S-Schema und $X' = X \times_S S'$ der Basiswechsel mit zugehöriger Prjektion $p_1\colon X' \to X$, so liefert der Isomorphismus in Lemma 13.4 iii) mit iv) einen Isomorphismus

$$p_1^*\Omega^1_{X/S} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X'/S'}$$

vi) Sei $f\colon X \to Y$ ein S-Morphismus. Dann liefert Lemma 13.5 mit iv) eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0.$$

vii) Seien X_1, X_2 S-Schemata und seien $p_i\colon X_1 \times_S X_2 \to X_i$ die Prijektionen. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$p_1^*\Omega^1_{X_1/S} \oplus p_2^*\Omega^1_{X_2/S} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X_1 \times_S X_2/S}.$$

13.9 Beispiel. Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(A[T_1, \dots, T_n])$. Dann ist $\Omega^1_{X/\operatorname{Spec}(A)}$ ein freier $\mathcal{O}_X$-Modul, dessen Basis durch die globalen Schnitte $dT_1, \dots, dT_n$ gegeben ist. (siehe Lemma 13.4 ii) und Bemerkung 13.8 iv)).

13.10 Theorem. *Sei X eine irreduzible Varietät über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k (siehe 11.23). Dann ist $\Omega^1_{X/k}$ genau dann lokal frei vom Rang $\dim(X)$, wenn X regulär ist.*

Beweis. [Har77, Theorem II.8.15]. □

14 Cartier-Divisoren

Cartier-Divisoren sind lokal durch eine Gleichung gegeben. Dabei steht die FUnktion im Vordergrund und nicht die Nullstellen. Geht man zu den Nullstellen und Polstellen über, so erhält man einen Weildivisor.

14.1 Definition. Eine **invertierbare Garbe** $\mathcal{F}$ auf einem geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang 1, das heißt für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x mit $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U$.

14.2 Proposition. *Sein $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang ind sei $\mathcal{E}^V := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ der **duale $\mathcal{O}_X$-Modul**. Dann gilt*

a) Es gilt $\mathcal{E} \cong (\mathcal{E}^v)^v$.

b) Für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

14.3 Korollar. *Seien $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ invertierbare Garben. Dann dann sind*

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

und

$$\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^v.$$

wieder invertierbare Garben.

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 14.2. □

14.4 Definition. Nach Korollar 14.3 bilden die Isomorphisklassen invertierbarer Garben auf X eine abelsche Gruppe bezüglich $\otimes$. Sie heit die **Picard-Gruppe** von X und wird mit $\mathrm{Pic}(X)$ bezeichnet.

14.5 Bemerkung. Sei X ein geringter Raum und U offen in X. Die Menge

$$S(U) := \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \text{ für alle } p \in U \text{ ist } f_p \text{ kein Nullteiler in } \mathcal{O}_{X,p}\}$$

ist multiplikativ abgeschlossen.

14.6 Definition. Sie zur Prägarbe $U \mapsto S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ assoziierte Garbe $\mathcal{M}_X$ heißt die **Garbe der meromorphen Funktionen** auf X.

Warnung. Die Definitionen in [Har77, II.6] und [GD67, §21] sind falsch. Siehe [Kle79].

14.7 Bemerkung. i) Der kanonische Homomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{M}_X$ ist injektiv.

Beweis. Betrachte die Halme, dann ist $\mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{M}_{X,p}$ injektiv, weil wir nicht in nullteiler lokalisieren. □

ii) Seien $\mathcal{O}_X^\times$ und $\mathcal{M}_X^\times$ die Garben der Einheiten in den entsprechenden Garben, dann erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{M}_X^\times$.

14.8 Bemerkung. i) Sei X ein Schema und $U = \operatorname{Spec}(A)$ ein offenes affines Unterschema. Dann gilt

$$S(U) = \{f \in A \mid f \text{ ist kein Nullteiler in } A\}.$$

ii) Ist X ein integres Schema, η der generische Punkt von X und $K(X) := \kappa(\eta)$ der Funktionenköroer, so ist $\mathcal{M}_X$ die konstante Garbe, die zu $K(X)$ assoziiert ist, das heißt für alle nicht leeren offenen U in X gilt $\mathcal{M}_X(U) = K(X)$ und die Restriktionen sind durch die Identität gegeben.

Beweis. i) Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$. Falls $f \in S(U)$ mit $fg = 0)$ für ein $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$, dann gilt für alle $p \in X$ schon $f_p g_p = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$. Also ist $g_p = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ und es folgt $g = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A$. Sei umgekehrt f kein Nullteiler in A. Dann ist f_p für alle $p \in X$ kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,p} = A_p$.

ii) Dies folgt mit [GW10, 3.29].

□

14.9 Definition. i) ein **Cartier-Divisor** auf X ist ein Element der abelschen Gruppe

$$\operatorname{CaDiv}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times).$$

Wir schreiben Cartier-Divisoren additiv, obwohl $\mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times$ multiplikativ geschrieben wird.

ii) Ein Cartier-Divisor heißt **Haupt-Cartier-Divisor (Hauptdivisor)**, falls er im Bild der kanonischen Abbildung

$$\operatorname{div}\colon \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times) \tag{$\star$}$$

liegt. Zwei Cartier-Divisoren D_1 und D_2 heißen **linear äquivalent**, wenn $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist. Wir schreiben $D_1 \sim D_2$.

iii) Der Kokern von $(\star)$ heißt **Cartier-Divisorenklassengruppe** und wird mit $\operatorname{CaCl}(X)$ bezeichnet, das heißt $\operatorname{CaCl}(X) = \operatorname{CaDiv}(X)/\{\text{Hauptdivisoren}\}$.

14.10 Bemerkung. i) Seien U und V offen in X, $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^\times$ und $g \in \Gamma(V, \mathcal{M}_X^\times)$. Dann ergibt $f \cdot g$ Sinn auf $U \cap V$, das heißt $f \cdot g := f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V} \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{M}_X^\times)$.

ii) Cartier-Divisoren sind Elemente in $\Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ und werden damit surch **zulässige Familien** $(U_i, f_i)_{i \in I}$ repräsentiert, wobei Folgendes gilt:

- $(U_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von X.
- Es gilt $f_i \in (U_i \mathcal{O}_X^\times)$.
- Für alle $i, j \in I$ gilt $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$, das heißt es gibt ein $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$ mit $f_i = g_{ij} f_j$.

iii) Zwei zulässige Familien $(U_i, f_i)_{i \in I}$ und $(U'_j, f'_j)_{j \in J}$ definieren genau dann denselben Cartier-Divisor, wenn $f_i (f'_j)^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U'_j, \mathcal{O}_X^\times)$ für alle $i \in I$ und $j \in J$ gilt.

iv) Nach ii) können zwei Cartier-Divisoren nach geeigneter Verfeinerung der Überdeckungen stets durch zulässige Funktionen **derselben** Überdeckung beschrieben werden.

v) Für Cartier-Divisoren $D = [(U_i, f_i)_{i\in I}]$, $E = [(U_i, g_i)_{i\in I}]$ und $f \in \mathcal{M}_X^\times(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} D + E &= [(U_i, f_i g_i)_{i\in I}] \\ -D &= [(U_i, f_i^{-1})_{i\in I}] \\ \operatorname{div}(f) &= [(X, f)] \\ 0 = \operatorname{div}(1) &= [(X, 1)] \end{aligned}$$

14.11 Definition. Ein Cartier-Divisor D heißt **effektiv**, wenn $D = [(U_i, f_i)_{i\in I}]$ mit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \cap \Gamma(U_i, \mathcal{M}_X^\times)$. Wir schreiben $D \geq 0$ und erhalten eine partielle Ordnung auf $\operatorname{CaDiv}(X)$.

14.12 Konstruktion. i) Sei $D \in \operatorname{CaDiv}(X)$ repräsentiert durch die zulässige Familie $(U_i, f_i)_{i\in I}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{M}_X$ ein torsionsfreier $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir konstruieren nun einen invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{O}_X(D)$ von $\mathcal{M}_X$. Für $i \in I$ sei $\mathcal{L}_i := f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ der von f_i^{-1} erzeugte $\mathcal{O}_{U_i}$-Untermodul von $\mathcal{M}_X|_{U_i} = M_{U_i}$. Für $i, j \in I$ gilt

$$\mathcal{L}_i|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{L}_j|_{U_i\cap U_j} \subseteq \mathcal{M}_X|_{U_i\cap U_j},$$

also gibt es genau einen $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{O}_X(D)$ von $\mathcal{M}_X$ mit $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = \mathcal{L}_i$ für alle $i \in I$.

ii) Man prüft leicht, dass $\mathcal{O}_X(D)$ unabhängig von der Wahl der zulässigen Familie $(U_i, f_i)_{i\in I}$ ist.

iii) Nach Konstruktion ist $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_X(D)|_{U_i}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{U_i}$-Modul vom Rang 1. Also ist $\mathcal{O}_X(D)$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{M}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_X(D)$ die **dem Cartier-Divisor D zugeordnete invertierbare Garbe**.

14.13 Proposition. *i) Die Abbildung*

$$\operatorname{CaDiv}(X) \to \{\textit{ivertierbare } \mathcal{O}_X - \textit{Untermoduln von } \mathcal{M}_X\},\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$$

ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.

ii) Die Abbildung

$$\operatorname{CaDiv}(X) \to \operatorname{Pic}(X),\ D \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]$$

ist ein Gruppenhomomorphismus und induziert einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{CaCl}(X) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(X),\ [D] \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]. \tag{$\triangle$}$$

iii) Falls X integer ist, dann ist ($\triangle$) ein Isomorphismus.

Beweis. [Har77, Propositionen II.6.13-II.6.15]. □

14.14 Bemerkung. Sei jetzt X ein integres noethersches separiertes Schema, das regulär in Kodimension 1 ist. Sei D ein Cartier-Divisor auf X, gegeben durch die zulässige Familie $(U_i, f_i)_{i\in I}$. Weil X integer ist gilt nach Bemerkung 14.8 ii)

$$f_i \in K(X)^\times \text{ und } f_i/f_j \in \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^\times. \tag{$\square$}$$

Wir definieren den **assoziierten Weildivisor** $\operatorname{cyc}(D)$ druch Verkleben der Hauptdivisoren $\operatorname{div}(f|_{U_i})$ auf U_i. Dies ist wohldefiniert wegen ($\square$). Damit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{cyc}\colon \operatorname{CaDiv}(X) \to \{\text{Wildivisoren}\},\ D \mapsto \operatorname{cyc}(D).$$

14.15 Theorem. *Falls X ein integres* ***normales*** *noethersches separiertes Schema ist, dann ist dieser Gruppenhomomrphismus* cyc *injektiv. Er ist genau dann ein Isomorphismus, wenn X loakl faktoriell ist.*

Beweis. [GD67, Théorème 21.6.9]. □

14.16 Korollar. *Sei X wie in Theorem 14.15. Dann haben wir einen Monomorphismus*

$$\mathrm{CH}^1(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X),\ [D] \mapsto [\mathrm{cyc}(D)].$$

Falls X noch lokal faktoriell ist, dann ist dies ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Definition ist das Bild der Gruppe der Hauptdivisoren gleich der Gruppe der Haupt-Cartier-Divisoren. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 14.15. □

14.17 Beispiel. Es gilt

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_K) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m) \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

nach Korollar 14.16 und Proposition 12.17.

15 Projektive Einbettungen

15.1 Bemerkung. Wir werden in diesem Abschnitt zu einem Schema X von endlichem Typ über dem Ring A die Abbildungen und Immersionen in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^n_A$ studieren.

15.2 Bemerkung. i) Sei A ein Ring und $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj}(A[T_0, \dots, t_n])$. Dann haben wir für alle $m \in \mathbb{Z}$ invertierbare Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{P}^n_A$. Sei $S := A[T_0, \dots, T_n]$. Nach **??** gilt dann

$$S \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}) := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(m)).$$

Insbesondere sind $T_0, \dots, T_n$ globale Schnitte von $\mathcal{O}(1)$. Für $p \in \mathbb{P}^n_A$ gilt $\mathcal{O}(1) = S(1)_{(p)}$. Also wird $\mathcal{O}(1)_p$ von den Bildern der globalen Schnitte $T_0, \dots, T_n$ erzeugt und damit wird $\mathcal{O}(1)$ durch die globalen Schnitte $T_0, \dots, T_n$ erzeugt.

ii) Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Wir haben eine Adjunktion

$$\operatorname{Hom}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{F}) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, f_*f^*\mathcal{F}),$$

also induziert die Identität links auf der rechten Seite einen Homomorphismus, den wir auf den Schnitten einer offenen Menge U von Y mit

$$f^*\colon \Gamma(U, \mathcal{F}) \to (\Gamma(U, f_*f^*\mathcal{F}) = \Gamma(f^{-1}U, f^*\mathcal{F}))$$

bezeichnen.

15.3 Theorem. *i) Sei $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ ein Morphismus über A. Dann ist $\mathcal{L} := \varphi^*\mathcal{O}(1)$ eine invertierbare Garbe auf X, die durch die globalen Schnitte $s_i := \varphi^*(T_i)$, $i = 0, \dots, n$ erzeugt wird.*

ii) Sei umgekehrt X ein Schema über dem Ring A und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und seien $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{L}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul von $s_0, \dots, s_n$ erzeugt wird. Dann gibt es genau ein Paar (φ, ψ) mit der Eigenschaft, dass $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ ein A-Morphismus und $\psi\colon \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \varphi^*\mathcal{O}(1)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulen mit der Eigenschaft, dass für alle $i = 0, \dots, n$ schon $\psi(s_i) = \varphi^*(T_i)$ gilt.

Beweis. i) Es gilt $\varphi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_X \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}} \varphi^{-1}\mathcal{O}(1)$, wobei $\varphi^{-1}\mathcal{O}(1)$ die Garbe zu

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{\varphi(U) \subseteq V \\ V \text{ offen in } X}} \mathcal{O}(1)(V)$$

ist. Die T_i defineren $s_i := \varphi^*(T_i) \in \Gamma(X, \varphi^*\mathcal{O}(1))$ und die erzeugen $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ als $\mathcal{O}_X$-Modul, denn für $p \in X$ und $q := \varphi(p)$ gilt

$$(\varphi^*\mathcal{O}(1))_p = \mathcal{O}_{X,p)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}}} \mathcal{O}(1)_q$$

und dann kann man Bemerkung 15.2 benutzen und es folgt i).

ii) Seien X, $\mathcal{L}$ und $s_0, \dots, s_n$ wie in ii) gegeben. Für $i \in I := \{0, \dots, n\}$ sei

$$X_i := \{p \in X \mid (s_i)_p \notin \mathfrak{m}_{X,p}\mathcal{L}_p\}.$$

Aus Lemma 6.4 folgt, dass X_i offen in X ist.

Wir behaupten nun

$$\mathcal{O}_{X_i} s_i|_{X_i} = \mathcal{L}|_{X_i}. \tag{$\star$}$$

In der Tat is die Abbildung

$$\mathcal{O}_{X_i} \to \mathcal{L}_{|X_i},\ f \mapsto f \cdot s_i$$

bijektiv, da sie nach Definition von X_i auf den Halmen bijektiv ist.

Da $\mathcal{L}$ von den s_i als $\mathcal{O}_X$-Modul erzeugt wird, folgt, dass $(X_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. Für $i, j \in I$ gibt es wegen $(\star)$ ein $g_{ij} \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ mit $s_j = g_{ij} s_i$ euf X_i. Der Ringhomomorphismus

$$\left(A[T_0, \dots, T_n]_{(T_i)} = A\left[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}\right]\right) \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}),\ \frac{T_j}{T_i} \mapsto g_{ij}$$

induziert nach Proposition 5.6 einen Morphismus

$$\varphi_i \colon X_i \to (U_i := D_+(T_i) = \operatorname{Spec} A[T_0, \dots, T_n]_{(T_i)} \subseteq \mathbb{P}^n_A).$$

Man rechnet leicht nach, dass die $(\varphi_i)_{i \in I}$ zu einem Morphismus $\varphi \colon X \to \mathbb{P}^n_A$ verkleben. Wegen $\mathcal{O}(1)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} T_i$ folgt $\varphi^*\mathcal{O}(1)|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}\varphi^*(T_i)$. Damit existiert ein Isomorphismus

$$\psi_i \colon \mathcal{L}|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \varphi^*\mathcal{O}(1)|_{X_i},\ s_i \mapsto \varphi^*(T_i).$$

Da $s_j = g_{ij} s_i$ und $\varphi^*(T_j) = g_{ij}\varphi^*(T_i)$ gilt, verkleben diese ψ_i zum gesuchten Isomorphismus $\psi \colon \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \varphi^*\mathcal{O}(1)$. Dies zeigt die Existenz von (φ, ψ) in ii) und die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Konstruktion.

$\square$

15.4 Beispiel (Automorphismus von $\mathbb{P}^n_K$ für Körper K)**.** i) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$.

$$\psi_A \colon K[T_0, \dots, T_n] \to K[T_0, \dots, T_n],\ T_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_j$$

ist ein Automorphismus graduierter Ringe mit Inverser $\psi_{A^{-1}}$. Dies induziert einen Automorphismus $\phi_A \colon \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$ mit $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$ und $\phi_{A^{-1}} = \phi_A^{-1}$.

ii) Für $\lambda \in K^\times$ gilt $\phi_{\lambda A} = \phi_{\lambda_A}$. Damit operiert $\mathrm{GL}_n(K) := \mathrm{GL}_{n+1}(K)/K^\times$ als Gruppe von Automorphismen auf $\mathbb{P}^n_K$.

iii) Diese Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $\mathbb{P}^n_K$ ist treu, das heißt

$$\Phi \colon\ \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{Aut}_K(\mathbb{P}^n_K),\ [A] \mapsto \phi_A$$

ist injektiv, wie man leicht durch das Betrachten der Punkte $[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \dots, [0 : \dots : 0 : 1]$ feststellt.
Behauptung: $\Phi \colon\ \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{Aut}_K(\mathbb{P}^n_K)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $\varphi \colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n_K$ ein Isomorphismus. Nach Beispiel 14.17 gilt $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n_K) \cong \mathbb{Z}$ mit den Erzeugern $\mathcal{O}(1)$ beziehungsweise $\mathcal{O}(-1)$. Da φ ein Automotphismus ist, ist auch

$$\varphi^* \colon\ \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n_K) \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n_K),\ L \mapsto \varphi^* L$$

ein Isomorphismus. Es folgt $\varphi^*\mathcal{O}(1) \in \{\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1)\}$. Da φ^* euch einen Isomorphismus zwischen $\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(1))$ und $\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \varphi^*\mathcal{O}(1)$ liefert, kommt nur $\mathcal{O}(1)$ als $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ in Frage, denn es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(1)) = KT_0 \oplus \ldots \oplus KT_n \neq 0 = \Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(-1)).$$

Wir können also $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ mit $\mathcal{O}(1)$ identifizieren. Da $T_0, \ldots, T_n$ eine K-Basis von $\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(1))$ ist, folgt

$$s_i := \varphi^*(T_i) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} T_j$$

für geeignete $a_{ij} \in K$. Da φ^* einen Automorphismus auf den globalen Schnitten induziert, ist $(s_i)_{0\leq i\leq n}$ eine K-Basis von $\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}(1))$. Dann ist $A := (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$. Nach Theorem 15.3 ist φ eindeutig durch die s_i bestimmt und es folgt $\varphi = \phi_A$.

15.5 Proposition. *Sei phi: $X \to \mathbb{P}^n_A$ ein Morphismus über A wie in Theorem 15.3 zur invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf X mit $s_0 \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ assoziiert. phi ist genau dann eine abgeschlossene Immersion (und folglich X projektiv über A), wenn folgendes gilt:*

i) *Jede offene Menge $X_i := X_{s_i}$ ist affin.*

ii) *Für alle $i = 0, \ldots, n$ ist der Ringhomomorphismus*

$$A\left[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}\right] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}),\ \frac{T_j}{T_i} \mapsto \frac{s_j}{s_i}$$

surjektiv.

Beweis. Sei φ eine abgeschlossene Immersion, $U_i := D_+(T_i) = \mathrm{Spec}(B_i) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{P}^n_A$, mit $B_i := A\left[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}\right]$. Dan ist $X_i = X \cap U_i$ ein abgeschlossene Unterschema von dem affinen Schema U_i und nach Theorem 7.5ist X_i durch ein Ideal $\mathfrak{b}_i$ in B_i gegeben und es gilt $X_i = \mathrm{Spec}(B_i/\mathfrak{b}_i)$. Weiter ist dann der Morphismus aus ii) surjektiv, weil $B_i \to B_i/\mathcal{F}_i$ surjektiv ist.

Sei umgekehrt φ ein Morphismus mit i) und ii). Dann ist X_i ein abgeschlossenes Unterschema von X gegeben durch den Kern von des Morphismus in ii). Also definiert φ (lokal im Zielbereich) eine abgeschlossenes Unterschema und damit ist φ eine abgeschlossene Immersion. □

15.6 Erinnerung. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann heißt $\mathcal{L}$ **sehr ampel relativ zu $\mathcal{F}$**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine abgeschlossene Immersion $i\colon X \to \mathbb{P}^n_Y$ von Y-Schemata gibt, mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{L} \cong i^*\mathcal{O}(1)$ gilt. Siehe auch **??**.

15.7 Definition. Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem noetherschen Schema X heißt **ampel**, wenn es für alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$ auf X ein $l_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ git, mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}$ für alle $l \geq l_0$ durch globale Schnitte erzeugt wird.

15.8 Bemerkung. i) Eine invertierbare Garbe ist ampel **auf einem Schema** und sehr ampel **relativ zu einem Morphismus**.

ii) Sei A ein noetherscher Ring und $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ ein projektiver Morphismus. Falls $\mathcal{L}$ eine sehr ample Garbe relativ zu f ist, dann ust $\mathcal{L}$ ampel auf X. Dies folgt aus dem Theorem von Serre in **??**.

iii) Die Umkehrung von ii) ist im Allgemeinen falsch.

iv) Ist X affin, dann zeigt man leicht, dass jede invertierbare Garbe ampel auf X ist.

15.9 Proposition. *Für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem noetherschen Schema X sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *$\mathcal{L}$ ist ampel.*

ii) *Für alle $m > 0$ ist $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ampel.*

iii) *Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ampel ist.*

Beweis. [Har77, Proposition II.7.5]. □

15.10 Theorem. *Sei A ein noetherscher Ring, $f\colon X \to \operatorname{Spec}(A)$ ein Morphismus von endlichem Typ und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{L}$ genau dann ampel auf X, wenn es ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel relativ zu f.*

Beweis. [Har77, Theorem II.7.6]. □

Literatur

[AM94] Michael Atiyah und Ian MacDonald. *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Westview Press, 1994. ISBN: 9780813345444. URL: http://books.google.de/books?id=HOASFid4x18C.

[Bou98] Nicolas Bourbaki. *Commutative Algebra: Chapters 1-7*. Springer, 1998. ISBN: 9783540642398. URL: http://books.google.de/books?id=Bb30CjGW7EAC.

[GD60] Alexandre Grothendieck und Jean Dieudonné. „Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas“. In: *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 4 (1960), S. 5–228. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__4__5_0.

[GD61] Alexandre Grothendieck und Jean Dieudonné. „Éléments de géométrie algébrique: II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes“. In: *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 8 (1961), S. 5–222. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1961__8__5_0.

[GD67] Alexandre Grothendieck und Jean Dieudonné. „Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie“. In: *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 32 (1967), S. 5–361. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1967__32__5_0.

[Gub14] Walter Gubler. *Vorlesungsskript zur Algebraischen Geoemetrie I*. 2014. URL: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/gubler/EAG.pdf.

[GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry: Part I: Schemes. With Examples and Exercises*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 2010. ISBN: 9783834897220. URL: http://books.google.de/books?id=XEiLudn6sq4C.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977. ISBN: 9780387902449. URL: http://books.google.de/books?id=3rtX9t-nnvwC.

[Kle79] Steven Kleiman. „Misconceptions about K_X“. In: *L'Enseignement Mathématique*. 2. Ser. 25.3-4 (1979), S. 203–206.

[Mat70] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra*. Mathematics lecture note series. Benjamin, 1970. ISBN: 9780805370249. URL: http://books.google.de/books?id=fXuSQQAACAAJ.