Algebraische Geometrie II

Inoffizielles Vorlesungsskript zur Vorlesung Algebraische Geometrie II von Prof. Walter Gubler im Sommersemester 2014 an der Universität Regensburg

Johannes Loher

9. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

- Die klassische algebraische Geometrie ist für Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Die Koordinatenringe sind dann immer reduzierte Algebren. In der algebraischen Schnitttheorie muss man aber nicht-reduzierte Algebren betrachten („Multiplizitäten").
- In der Zahlentheorie wird man gezwungen, über Zahlenkörpern zu arbeiten. Dies sind endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, also nicht algebraisch abgeschlossen.
- Viele Klassifikationsprobleme führen auf Modulräume, die keine Varietäten sind.

Um diese Probleme zu lösen, hat Alexander Grothendieck zu Beginn der 60er Jahre die Theorie der Schemata eingeführt (EGA I–IV). Dies ist eine relative Theorie, das heißt es wird kein Grundkörpervorausgesetzt und die Koordinatenringe sind beliebige kommutative Ringe. Das heißt, man kann (beziehungsweise muss) die Methoden der kommutativen Algebra für die Beweise nutzen.

Erfolge: Weil-Vermutung (Deligne 70er), Fields-Medaillen, Schemata haben sich als Standard in der algebraischen und arithmetischen Geometrie durchgesetzt.

In dieser Vorlesung seien Ringe und Algebren immer kommutativ und mit Einselement, falls nichts anderes gesagt wird.

1 Garben

Garben sind abstrakte Verallgemeinerungen von Funktionenräumen. Sie sind fundamental für das Studium von Mannigfaltigkeiten und Schemata.

X sei ein topologischer Raum.

1.1 Definition. Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ (von abelschen Gruppen) auf X besteht aus folgenden Daten:

a) Für alle U offen in X sein $\mathcal{F}(U)$ eine abelsche Gruppe.

b) Für alle $V \subseteq U$ offen in X sei $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ein Homomorphismus.

c) Es sei $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

d) Für alle U offen in X sei $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

e) Für alle $W \subseteq V \subseteq U$ offen in X sei $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U. Der Homomorphismus $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabbildung** von U auf die offene Teilmenge V von U

1.2 Bemerkung. Analog definiert man Prägarben von Ringen, Algebren oder Mengen, ...

1.3 Definition. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **Garbe**, falls zusätzlich für jede offene Menge U in X und jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ von U folgendes gilt:

f) Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $\rho_{UV_i}(s) = 0$ für alle $i \in I$, so gilt bereits $s = 0$.

g) Sind $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ für alle $i \in I$ mit $\rho_{V_i V_i \cap V_J}(s_i) = \rho_{V_j V_i \cap V_J}(s_j)$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ für alle $i \in I$.

Eine Garbe ist also duch lokale Informationen vollständig bestimmt.

1.4 Bemerkung. Nach f) ist der Schnitt s in g) eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind s, s' zwei solche Schnitte in g), so gilt:

$$\rho_{UV_i}(s - s') = \rho_{UV_i}(s) - \rho_{UV_i}(s') \stackrel{\text{g)}}{=} s_i - s_i = 0$$

Also gilt nach f) schon $s - s' = 0$ und damit $s = s'$. □

1.5 Beispiel. Sei x ein topologischer Raum. Für U offen in X sei

$$\mathcal{F}(U) := \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Funktion}\}.$$

Dies ist eine Garbe (abelscher Gruppen und sogar $\mathbb{R}$-Algebren) und die Restirktionsabbildungen sind gegeben durch:

$$\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V),\ f \mapsto f|_V$$

Die Menge der stetigen Funktionen $C(U)$ liefert eine **Untergarbe** $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}'(U) := C(U)$), das heißt $\mathcal{F}'$ ist auch eine Garbe, es gilt $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ für alle U offen und für die Restriktionen ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}'(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\ \mathcal{F}'(V) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$

1.6 Beispiel. Sein A eine fixierte abelsche Gruppe. Die zugehörige **konstante Prägarbe** $\mathcal{F}$ ist definiert durch:

- Es sei $\mathcal{F}(U) \coloneqq \begin{cases} A & \text{falls } U \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } U = \emptyset \end{cases}.$
- Es sei $\rho_{UV} \coloneqq \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{falls } V \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } V = \emptyset \end{cases}.$

Falls X nicht zusammenhängend und $A \neq 0$ ist, dann ist $\mathcal{F}$ keine Garbe. Sei zum Beispiel $X = \{p, q\}$ mit der diskreten Topologie. Seien außerdem $U = \{p, q\}$, $V_1 = \{p\}$, $V_2 = \{q\}$. Dann gilt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(V_1) = \mathcal{F}(V_2) = A$ und $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Seien nun $s_1 \neq 0 \in \mathcal{F}(V_1)$ und $s_2 = 0 \in \mathcal{F}(V_2)$. Wäre $\mathcal{F}$ eine Garbe, dann gäbe es ein $s \in \mathcal{F}(U) = A$ mit $\rho_{UV_i}(s) = s_i$. Dies ist aber offenbar nicht der Fall.

1.7 Beispiel. Seien X, S topologische Räume und $\pi\colon S \to X$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

i) π ist surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus.

j) $\pi^{-1}(x)$ ist für alle $x \in X$ eine abelsche Gruppe.

k) Sei $S \times_X S \coloneqq \{(s_1, s_2) \in S \times S \mid \pi(s_1) = \pi(s_2)\}$ das **Faserprodukt** über X mit der von $S \times S$ induzierten Topologie. Dann induzieren die Addition und Invertierung aus j) stetige Abbildungen $S \times_X S \to S,\ (s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, beziehungsweise $S \to S,\ s \mapsto -s$.

Die Abbildung π heißt **Projektion** und $\pi^{-1}(x)$ heißt **Faser** von x.

- Sei $U \subseteq X$ offen. Eine stetige Funktion $f\colon U \to S$ heißt **Schnitt**, wenn $\pi \circ f = \mathrm{id}_U$, das heißt für alle $x \in U$ gilt $f(x) \in \pi^{-1}(x)$.
- Es gibt einen kanonischen globalen Schnitt $X \to S,\ x \mapsto 0_x \in f^{-1}(x)$, den wir **Nullschnitt** nennen.
- Mit $\Gamma(U, S)$ bezeichnen wir den Raum der Schnitte von S über U, wir setzen also
$$\Gamma(U, S) \coloneqq \{f\colon U \to S \mid f \text{ stetig},\ \pi \circ f = \mathrm{id}_U\}.$$

Behauptung: Die Abbildung $U \mapsto \Gamma(U, S)$ zusammen mit der Restriktion $\rho_{UV}(f) \coloneqq f|_V$ ist eine Garbe.

Beweis. Dies ist klar. □

1.8 Bemerkung. Weil π ein lokaler Homöomorphismus ist, muss jeder Schnitt eine offene Abbildung sein (das heißt das Bild einer offenen Teilmenge ist offen). Falls zwei Schnitte in $x \in X$ übereinstimmen, dann stimmen sie auch auf einer Umgebung von x überein.

Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},\ t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Abbildung wie in Beispiel 1.7.

1.9 Bemerkung. Das Beispiel 1.7 erklärt die abstrakten Begriffe aus Definition 1.1. Wir werden sehen, dass jede Garbe durch einen topologischen Raum S und eine Abbildung $\pi\colon S \to X$ wie in Beispiel 1.7 dargestellt werden kann.

1.10 Beispiel. In Beispiel 1.5 wählen wir ein $x \in X$. Wir definieren $f \sim g$, falls es eine Umgebung U von x gibt mit $f|_U = g|_U$. Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellwertigen Funktionen, die auf einer Umgebung von x definiert sind. Der **Halm** $\mathcal{F}_x$ ist definiert als Raum der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

1.11 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, dann verallgemeinern wir die obige Konstruktion. Sei $x \in X$. Wir betrachten die Menge $\{(U, s) \mid s \in \mathcal{F}(U),\ U \text{ offene Umgebung von } x\}$. Wir definieren auf dieser Menge eine Relation auf folgende Weise: Es gelte $(U, s) \sim (V, t)$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von x mit $\rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)$ gibt. Man zeigt leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Der **Halm** $\mathcal{F}_x$ ist definiert als der Raum der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Dies ist eine abelsche Gruppe:

$$[(U_1, s_1)] + [(U_2, s_2)] = [(U_1 \cap U_2, \rho_{U_1 U_1 \cap U_2}(s_1) + \rho_{U_2 U_1 \cap U_2}(s_2)].$$

Wir schreiben auch s_x anstatt von $[(U, s)] \in \mathcal{F}_x$.

1.13 Definition. Ein **Homomorphismus** $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **von (Prä-)Garben** auf x ist eine Familie von Homomorphismen $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ abelscher Gruppen für alle U offen in X, sodass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

für alle $V \subseteq U$ offen in X kommutiert.

Wir können Homomorphismen $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben zu einem Homomorphismus $\psi \circ \varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ verknüpfen. Damit können wir auch Isomorphismen von (Prä-)Garben definieren.

Die Prägarben, beziehungsweise Garben auf einem topologischen Raum X bilden eine Kategorie, die wir mit $\mathrm{PSh}(X)$, beziehungsweise $\mathrm{Sh}(X)$ bezeichnen.

1.14 Proposition. *Sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben auf X. Dann ist φ genau dann ein Isomorphismus von Garben, wenn $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x,\ s_x \mapsto \varphi_x(s_x) := [(U, \varphi|_U(s))]$ für alle $x \in X$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.*

Beweis. Dies ist eine einfache Übung. □

Beachte, dass diese Aussage nicht für Prägarben gilt.

1.15 Bemerkung. Wir zeigen nun, dass es zu einer gegebene Prägarbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischen Raum X eine kanonische Überlagerung $\pi\colon S \to X$ wie in Beispiel 1.7 gibt.

Wir definieren

$$S := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Weiter sei π gegeben durch

$$\pi\colon S \to X,\ s_x \in \mathcal{F}_x \mapsto x.$$

Für jedes U offen in X und jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir

$$\overline{s}\colon U \to S,\ x \mapsto s_x = [(U, s)] \in \mathcal{F}_x \subseteq S.$$

Die Topologie von S ist durch die Basis

$$B \coloneqq \{\overline{s}(U) \mid U \text{ offen in } X, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

gegeben. Es ist leicht zu sehen, dass B tatsächlich die Basis einer Topologie auf S ist. Wir überzeugen uns ebenfalls leicht, dass $\pi\colon S \to X$ die Voraussetzungen aus Beispiel 1.7 erfüllt, das heißt π ist eine topologische Überlagerung und die Fasern sind abelsche Gruppen mit gewissen Stetigkeitseigenschaften. Es gilt

$$\overline{s} \in \Gamma(U, S) \coloneqq \{\gamma\colon U \to S \mid \gamma \text{ stetig, } \pi \circ \gamma = \mathrm{id}_U\}.$$

1.16 Definition. Wir bezeichnen die Garbe $U \mapsto \Gamma(U, S)$ mit $\mathcal{F}^+$. Sie heißt zu $\mathcal{F}$ **assozierte Garbe**. Wir haben einen kanonischen Homomorphismus

$$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+, \quad \underbrace{s}_{\in \mathcal{F}(U)} \mapsto \underbrace{\overline{s}}_{\in \mathcal{F}^+(U) = \Gamma(U,S)}.$$

In Übung 1.2 wird gezeigt, dass θ einen Isomorphismus $\theta_x\colon \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+_x$ der Halme induziert.

1.17 Proposition. *Falls $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Prägarben ist, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ von Garben, für den das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\theta"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"'] & \mathcal{G}^+
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweisskizze. Sei $\pi\colon S \to X$ (beziehungsweise $\pi\colon T \to X$) die topologische Überlagerung, die zu $\mathcal{F}$ (beziehungsweise $\mathcal{G}$) gehört wie in Bem 1.15. Wir zeigen zuerst, dass es genau eine stetige Abbildung $\psi\colon S \to T$ mit $\psi \circ \overline{s} = \overline{\varphi(s)}$ für alle U offen in X und alle $s \in \mathcal{F}(U)$ gibt, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \arrow[dl, "\pi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für $s_x = [(U, s)] \in \mathcal{F}_x \subseteq S$ definieren wir $\psi(s_x) \coloneqq [(U, \varphi_U(s))] \in \mathcal{G}_x$. Dies ist wohldefiniert und erfüllt das Gewünschte. Die Eindeutigkeit ist durch die Konstruktion klar.

Dann definieren wir $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ durch

$$\varphi^+_U\colon \mathcal{F}^+(U) = \Gamma(U, S) \to \mathcal{G}^+(U) = \Gamma(U, T), \ \gamma \mapsto \psi \circ \gamma.$$

Damit erhalten wir einen Garbenhomomorphismus mit der gewünschten Eigenschaft. Die Eindeutigkeit von φ^+ folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}^+_x$ und $\mathcal{G}_x \cong \mathcal{G}^+_x$ gilt. Also muss φ^+ auf den Halmen durch φ eindeutig bestimmt sein. Weil $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{G}^+$ Garben sind, folgt sofort aus den Garbeneigenschaften f) und g), dass damit auch φ^+ durch φ eindeutig bestimmt ist. $\square$

1.18 Korollar (Universelle Eigenschaft von $\mathcal{F}^+$)**.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Für jede Garbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Homomorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi_+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, für den das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi_+"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 1.17, denn für eine Garbe $\mathcal{G}$ gilt $\mathcal{G} \overset{\theta}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{G}^+$. $\square$

2 Lokal geringte Räume

Mit dem Konzept der lokal geringten Räume kann man die Mannigfaltigkeiten aus der Analysis und Differentialgeometrie, die algebraische Varietäten aus der algebraischen Geometrie I und die Schemata aus der algebraischen Geometrie II zusammenfassen.

2.1 Bemerkung. Im Folgenden soll, wenn nichts anderes gesagt wird, Folgendes gelten:

- Alle Ringe sind kommutativ mit Eins.
- Ringhomomorphismen bilden die Eins auf die Eins ab.

Bemerkung. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn es in R genau ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ gibt.

2.2 Proposition. *Sei R ein Ring. R ist genau dann ein lokaler Ring, wenn es ein Ideal $I \neq R$ mit $R \setminus I = R^\times$ gibt.*

Beweis. Dies ist eine einfache Eigenschaft aus der kommutativen Algebra. □

2.3 Definition. Ein Homomorphismus $\varphi\colon R_1 \to R_2$ von Ringen heißt **lokal**, wenn

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_1,$$

wobei $\mathfrak{m}_i$ das Maximalideal von R_i ist.

Beispiel. Der Homomorphismus $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist kein lokaler Homomorphismus, da

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\} \subsetneq p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$$

gilt.

2.4 Beispiel. Sei $\mathcal{F}$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X, das heißt $\mathcal{F}(U) \coloneqq \mathcal{C}(U)$ für alle U offen in X (siehe Beispiel 1.5). Dann ist der Halm $\mathcal{F}_x$ in jedem $x \in X$ ein lokaler Ring.

Beweis. Nach Beispiel 1.5 ist $\mathcal{F}_x$ ein Ring und sogar eine $\mathbb{R}$-Algebra. Die Menge

$$\mathfrak{m}_x \coloneqq \{[(U, f)] \in \mathcal{F}_x \mid U \text{ offene Umgebung von } x,\ f \in \mathcal{C}(U),\ f(x) = 0\}$$

ist ein Ideal in $\mathcal{F}_x$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x \setminus \mathfrak{m}_x = \{[(U, f)] \in \mathcal{F}_x \mid f(x) \neq 0\} = \{[(U, f)] \in \mathcal{F}_x \mid \\ f \text{ invertierbar als stetige Funktion in einer Umgebung von } x\} = \mathcal{F}_x^\times.\end{aligned}$$

Aus Proposition 2.2 folgt, dass $\mathcal{F}_x$ ein lokaler Ring ist. □

Wir benötigen einen wichtigen Begriff aus der Garbentheorie:

2.5 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Die **direkt Bildgarbe** $f_*\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

für alle U offen in Y. Weiter seien die Restriktionsabbildungen von $f_*\mathcal{F}$ gegeben durch

$$\rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV} = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)}.$$

2.6 Proposition. *$f_*\mathcal{F}$ wie in Definition 2.5 ist eine Garbe.*

Beweis. Es ist klar, dass $f_*\mathcal{F}$ eine Prägarbe ist. Sei U offen in Y und $U = \coprod_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung von U. Sei weiter $s \in (f_*\mathcal{F})(U)$ mit $\rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV_i}(s) = 0$ für alle $i \in I$. Es gilt $f^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Nach Definition gilt weiter $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ und

$$0 = \rho^{f_*\mathcal{F}}_{UV_i}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(U)f^{-1}(V_i)}(s)$$

und damit folgt mit f) angewendet auf $\mathcal{F}$ schon $s = 0 \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$. Also gilt f) auch für $f_*\mathcal{F}$. Analog beweist man, dass auch g) für $f_*\mathcal{F}$ gilt. □

Im Folgenden betrachten wir Garben von Ringen. Alles aus Kaptiel 1 und auch Proposition 2.6 gelten auch für diese Garben.

2.7 Definition.
- Ein **geringter Raum** $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X.
- Ein **Morphismus von geringten Räumen** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar $(f, f^\#)$, wobei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ein Homomorphismus von Garben ist.

Wir erhalten die Kategorie gR der geringten Räume.

2.8 Beispiel. Seien $\mathcal{O}_X$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_Y$) die Garbe der stetigen rellwertigen Funktionen auf X (beziehungsweise Y). Wir haben in Beispiel 2.4 gesehen, dass die eine Garbe von Ringen ist. Dann induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ einen kanonischen Morphismus $(f, f^\#)$ von geringten Räumen durch

$$f^\#_U\colon \mathcal{O}_Y(U) \to (f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)),\ g \mapsto g \circ f.$$

2.9 Bemerkung. Sei $(f, f^\#)$ ein Morphismus von geringten Räumen wie in Definition 2.7. Sei $x \in X$ und $y := f(x) \in Y$. Dann haben wir einen kanonischen Homomorphismus

$$f^\#_x\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x},\ [(U,g)] \mapsto [(f^{-1}(U), f^\#_U(g))]$$

von Ringen.

2.10 Definition.
- Ein **lokal geringter Raum** ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, bei dem die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ lokale Ringe sind.
- Ein **Morphismus von lokal geringten Räumen** ist ein Morphismus von geringten Räumen, für den die Homomorphismen $f^\#_x$ aus Bemerkung 2.9 für alle $x \in X$ lokal sind.

Wir erhalten die Kategorie lgR der lokal geringten Räume.

2.11 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 8)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein lokal geringter Raum (siehe Beispiel 2.4). Weiter ist $(f, f^\#)$ ein Morphismus lokal geringter Räume.

Beweis. Sei $x \in X$, $y = f(x)$ und $f^\#\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x},\ [(U,g)] \mapsto [(f^{-1}U, g \circ f)]$.
Zu zeigen: $(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$.
„$\subseteq$“: Das Bild eines ivertierbaren Elementes ist wieder invertierbar, also gilt

$$f_x^\#(\mathcal{O}_{Y,y} \setminus \mathfrak{m}_y) \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_y$$

und damit

$$(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \subseteq \mathfrak{m}_y$$

(dies gilt für alle Morphismen von geringten Räumen).
„$\supseteq$“: Sei $[(U,g)] \in \mathfrak{m}_y$, das heißt g ist eine stetige Funktion auf U mit $g(y) = 0$. Es folgt

$$g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \text{ und } (g \circ f)(x) = 0$$

und damit

$$f_x^\#([(U,g)]) = [(f^{-1}U, g \circ f)] \in \mathfrak{m}_x.$$

□

2.12 Bemerkung. Wenn man Morphismen definiert, sollte man sie verknüpfen können (das heißt, man erhält eine Kategorie): Seien $(f,f^\#)\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ und $(g,g^\#)\colon (Y,\mathcal{O}_Y) \to (Z,\mathcal{O}_Z)$ Morphismen von geringten Räumen. Dann ist

$$(g,g^\#) \circ (f,f^\#) \coloneqq (g \circ f, (g \circ f)^\#)$$

mit

$$(g \circ f)_U^\# \coloneqq f_{g^{-1}U}^\# \circ g_U^\#$$

ein Morphismus von geringten Räumen. Falls $(f,f^\#)$ und $(g,g^\#)$ Morphismen von lokal geringten Räumen sind, dann ist auch $(g,g^\#) \circ (f,f^\#)$ ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

Beweis. Sei $x \in X$, $y = f(x)$ und $z = g(y)$. Dann gilt

$$((g \circ f)_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = (f_x^\# \circ g_y^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \overset{f_x^\# \text{ lokal}}{=} (g_y^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_y) \overset{g_y^\# \text{ lokal}}{=} \mathfrak{m}_z.$$

□

3 Modulgarben auf geringten Räumen

3.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine **Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln** (oder einfach ein **$\mathcal{O}_X$-Modul**) ist eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X, die Folgendes erfüllt:

i) Für $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul.

ii) Für offene $U \subseteq V \subseteq X$ ist die Restriktionsabbildung

$$\rho^{\mathcal{F}}_{VU} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

verträglich mit der Modulstruktur bezüglich

$$\rho_{VU} \colon \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U),$$

das heißt es gilt

$$\rho^{\mathcal{F}}_{VU}(\lambda \cdot \alpha) = \rho_{VU}(\lambda) \cdot \rho^{\mathcal{F}}_{VU}(\alpha)$$

für alle $\alpha \in \mathcal{F}(V)$ und $\lambda \in \mathcal{O}_X(V)$.

Ein **Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln** (oder **$\mathcal{O}_X$-linearer Morphismus**) ist ein Garbenmorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle U offen in X ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist. Wir bezeichnen die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln mit ($\mathcal{O}_X$-Mod) und setzen

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \coloneqq \operatorname{Hom}_{(\mathcal{O}_X\text{-Mod})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

3.2 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

i) Sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modulmorphismus. In Aufgabe 1.4 wurden für den zugehörigen Garbenmorphismus die Garben $\ker(\varphi)$ und $\operatorname{im}(\varphi)$ auf X definiert. Diese sind auf kanonische Weise $\mathcal{O}_X$-Moduln.

ii) Ist $\mathcal{F}'$ eine Untergrabe von $\mathcal{O}_X$-Moduln des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$, so ist die Quotientengarbe $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ (nach Garbifizierung) ebenfalls ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

iii) Das direkte Produkt, die direkte Summe (hier wird garbifiziert) und der direkte Limes von $\mathcal{O}_X$-Moduln haben wieder die Struktur eines $\mathcal{O}_X$-Moduls.

iv) Eine Sequenz

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i-1} \to \cdots$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt **exakt**, wenn die zugehörige Sequenz von Garben exakt ist, das heißt für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\operatorname{im}(\varphi_{i+1}) = \ker(\varphi_i).$$

v) Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $U \subseteq X$ offen. Dann ist $\mathcal{F}|_U$ ein $\mathcal{O}_X|_U$-Modul. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben abelscher Gruppen auf X. In Aufgabe 2.2 wurde gezeigt, dass die Prägarbe

$$U \mapsto \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sh}(X)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

bereits eine Garbe $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ist. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so wird durch

$$U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

eine Untergarbe $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ von $\underline{\operatorname{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ definiert, welche ebenfalls die Struktur eines $\mathcal{O}_X$-Moduls trägt.

vi) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringt, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $p \in X$, so ist der Halm $\mathcal{F}_p$ ein $\mathcal{O}_{X,p}$-Modul. Sei

$$\kappa(p) \coloneqq \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$$

der **Restklassenkörper** von p. Dann heißt der $\kappa(p)$-Vektorraum

$$\mathcal{F}(p) \coloneqq \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \kappa(p)$$

die **Faser von $\mathcal{F}$ in** p.

3.3 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum.

i) Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt **frei**, falls $\mathcal{F} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ gilt.

ii) Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt **lokal frei**, falls es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, für die jeder $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modul $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei ist. In diesem Fall definiert die lokal-konstante Funktion

$$X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},\ p \mapsto \mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) \coloneqq \dim_{\kappa(p)}(\mathcal{F}(p))$$

den Rang des lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$. Falls $p \in U_i$ und $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_X|_{U_i}$ für ein $i \in I$, dann ist $\mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) = |J|$. Ist $\mathrm{rg}_p(\mathcal{F}) < \infty$ für alle $p \in X$, so ist $\mathcal{F}$ **von endlichem Rang**. Ist $r = \mathrm{rg}_p(\mathcal{F})$ konstant für alle $p \in X$, so heißt $\mathcal{F}$ **lokal frei vom Rang** r. Ist X zusammenhängend, so hat ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ einen wohldefinierten Rang $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

iii) Ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von Rang 1 heißt **invertierbare Garbe**.

3.4 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ auf Y betrachten wir die Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U) \subseteq V \\ V \subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{G}(V) = \frac{\{(V, s) \mid V \supseteq f(U),\ V \subseteq Y \text{ offen},\ s \in \mathcal{G}(V)\}}{(V, s) \sim (V', s') \Leftrightarrow \exists\, W \supseteq f(U),\ W \subseteq V \cap V' \text{ offen mit } s|_W = s'|_W}.$$

Die **inverse Bildgarbe** $f^{-1}\mathcal{G}$ auf X ist die dazu assozieierte Garbe. Die Konstruktion definiert einen kontravarianten Funktor

$$f^{-1}\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X),\ \mathcal{F} \mapsto f^{-1}\mathcal{F}.$$

3.5 Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann existiert für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf X und jede Garbe $\mathcal{G}$ auf Y eine Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

*welche natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist. Man sagt f^{-1} ist **linksadjungiert** zu f_* und f_* ist **rechtsadjungiert** zu f^{-1}*

3.6 Konstruktion. i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Dann definiert

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

eine Prägarbe auf X. Sei $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ die dazu assoziierte Garbe. Man sieht sofort, dass das **Tensorprodukt** $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

ii) Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf X. Wir haben in 2.5 die direkte Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$ definiert. Offenbar ist $f_*\mathcal{F}$ ein $f_*\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweis. Sei V offen in Y, dann gilt $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$ und dies ist ein $f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$-Modul. □

Nach der Definition von Morphismen geringter Räume gibt es einen Homomorphismus $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Durch Verknüpfung sehen wir, dass die direkte Bildgarbe ein $\mathcal{O}_Y$-Modul auf Y ist. Beachte, dass f_* ein kovarianter Funktor ist.

iii) Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphimus geringter Räume und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Wir betrachten den geringten Raum $(X, f^{-1}\mathcal{O}_Y)$, wobei die inverse Bildgarbe durch die zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U)\subseteq V \\ V\subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{O}_Y(V)$$

assoziierte Garbe definiert ist. Beachte, dass $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ eine Ringgarbe ist. Analog sei $f^{-1}\mathcal{G}$ die zur Prägrabe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U)\subseteq V \\ V\subseteq Y \text{ offen}}} \mathcal{G}(V)$$

assoziierte Garbe. Dann erhalten wir $f^{-1}\mathcal{G}$ als $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul. Wieder haben wir einen Homomorphismus $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Mit Hilfe der Adjunktion aus Proposition 3.5 erhalten wir einen Homomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ von Ringgarben. Wir definieren das **inverse Bild** der Modulgarbe $\mathcal{G}$ als

$$f^*\mathcal{G} \coloneqq f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Indem wir von rechts mit $\mathcal{O}_X$ tensorieren, erhalten wir tatsächlich einen $\mathcal{O}_X$-Modul.

Beweisskizze. Aus der Modultheorie ist folgendes bekannt: Ist M ein A-Modul und $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann wird B durch

$$a \cdot m \coloneqq \varphi(a) \cdot m$$

zu einem A-Modul. Auf dem A-Modul $M \otimes_A B$ definieren wir eine B-Modulstruktur durch

$$b \cdot (m \otimes a) \coloneqq m \otimes (a \cdot b).$$

Dies machen wir genauso für Garben auf jeder offenen Menge □

Man beachtem dass f^* ein kovarianter Funktor ist.

3.7 Lemma. *i) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $p \in X$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann gilt*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p = \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p.$$

ii) Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, $p \in X$ und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann gilt

$$(f^{-1}\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)}$$

und

$$(f^*\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(p)}} \mathcal{O}_{X,p},$$

wobei $\mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ der Homomorphismus der Halme $f_p^{\#}$ aus Bemerkung 2.9 ist.

Beweis. Dies wird in den Übungen 3.2 und 3.3 gezeigt. □

3.8 Lemma. *Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume. Dann ist der Funktor f^* linksdadjungiert zum Funktor f_*, das heißt für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und alle $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{G}$ gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Beweisskizze. Dies beruht auf der Adjunktion aus Proposition 3.5 und dem Tensorieren mit $\mathcal{O}_X$. □

4 Affine Schemata

Zu jedem Ring A (kommutativ und mit Eins) betrachten wir das Spektrum $\mathrm{Spec}(A)$ der Primideale, das in natürlicher Weise eine Topologie besitzt. Durch Lokalisierung von A erhalten wir eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ und damit einen lokal gringten Raum $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$. Im folgenden Kapitel 5 werden dies die Bausteine für Schemata sein. Affine Schemata sind ähnlich wie affine Varietäten aus der Algebraischen Geometrie I, mit dem Unterschied, dass Primideale statt Maximalideale als Punkte und beliebige Ringe zugelassen werden.

4.1 Definition. Für $M \subseteq A$ sei $V(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq M\}$. Dies entspricht der Nullstellenmenge aus der Algebraischen Gerometrie I.

4.2 Lemma. *i) Sei $\mathfrak{a} := \langle M \rangle$ das von $M \subseteq A$ erzeugte Ideal. Dann gilt $V(\mathfrak{a}) = V(M)$.*

ii) Es gilt $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(A)$ und $V(A) = \emptyset$.

iii) Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von A gilt $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

iv) Für eine Familie $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ von Idealen in A gilt $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

Beweis. i) und ii) sind trivial.

iii) Es gilt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle \{a \cdot b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\} \rangle.$$

„$\subseteq$“: Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Dann gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

„$\supseteq$“: Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$. Dann gilt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ ist, dann gilt $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$ und wir sind fertig. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein $b \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Für jedes $a \in \mathfrak{a}$ gilt dann $a \cdot b \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, gilt also schon $a \in \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

iv) Dies ist einfach nachzurechnen.

□

4.3 Definition (Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$)**.** Wir definieren eine Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ als abgeschlossen, wenn sie die Form $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A hat. Eine Teilmenge U von $\mathrm{Spec}(A)$ heißt dann offen, wenn $\mathrm{Spec}(A) \setminus U$ abgeschlossen ist. Nach Lemma 4.2 definiert dies eine Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$, die wir **Zariski-Topologie** nennen.

4.4 Proposition. *Für $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ definieren wir das Verschwindungsideal $I(Y) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$.*

i) Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

ii) Für $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ gilt $\sqrt{I(Y)} = I(Y)$ und $\overline{Y} = V(I(Y))$.

iii) Die Abbildungen

$$\{\textit{abgeschlossene Teilmengen in } \mathrm{Spec}(A)\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\textit{Ideale } \mathfrak{a} \textit{ in } A \textit{ mit } \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\}$$

sind bijektiv, zueinander invers und inklusionsumkehrend.

iv) $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ *ist genau dann irreduzibel, wenn* $I(Y)$ *ein Primideal ist.*

v) Die Korrespondenz aus iii) induziert eine Bijektion

$$\{\textit{irreduzible abgeschlossene Teilmengen in } \operatorname{Spec}(A)\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \operatorname{Spec}(A)$$

Beweis. Wir benutzen

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\\ \mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Dann folgen die Behauptungen analog wie bei affinen Varietäten. □

4.5 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

i) Ein Punkt $p \in X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\{p\}$ abgeschlossen ist.

ii) Ein Punkt $p \in X$ heißt **generischer Punkt**, wenn $\overline{\{p\}} = X$ gilt.

iii) Ein Punkt $q \in X$ heißt **Spezialisierung** von $p \in X$, wenn $q \in \overline{\{p\}}$ ist.

4.6 Lemma. *Sei* X *ein topologischer Raum.*

i) Ist X *hausdorffsch, so ist jeder Punkt abgeschlossen.*

ii) Existiert ein generischer Punkt in X*, dann ist* X *irreduzibel.*

Beweis. i) Dies ist einfach zu zeigen.

ii) Sei p ein generischer Punkt von X und $X = X_1 \cup X_2$, wobei X_1 und X_2 abgeschlossen sind. Wir müssen zeigen, dass $X_1 = X$ oder $X_2 = X$ gilt. Es gilt $p \in X_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und damit

$$X = \overline{\{p\}} \subseteq X_i.$$

□

4.7 Proposition. *Sei* $X = \operatorname{Spec}(A)$.

i) Für $\mathfrak{p} \in X$ *gilt* $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. *Für* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ *gilt insbesondere* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ *gilt.*

ii) Unter der Korrespondenz aus Proposition 4.4 iii) entsprechen die abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}(A)$ *genau den Maximalideal von* A.

iii) Für $Y \subseteq X$ *irreduzibel und abgeschlossen gilt* $Y = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ *für* $\mathfrak{p} = I(Y)$. *Damit ist* $\mathfrak{p}$ *der nach i) eindeutig bestimmte generische Punkt von* Y.

iv) Ist A *ein noetherscher Ring, so ist* X *ein noetherscher topologischer Raum.*

v) Sei A *ein noetherscher Ring. Dann entsprechen die irreduziblen Komponenten von* $\operatorname{Spec}(A)$ *unter der Korrespondenz aus Proposition 4.4 iii) genau den minimalen Primidealen von* A.

vi) In einem noetherschen Ring existieren nur endliche viele minimale Primideale.

Beweis. Dies wird in Übung 4.1 gezeigt. □

4.8 Proposition. *Für* $f \in A$ *sei* $V(f) := V(\langle f\rangle)$ *und* $D(f) := \operatorname{Spec}(A) \setminus V(f)$.

i) Für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ in A und $g \in A$ gilt:

$$D(g) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \Leftrightarrow g \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle}$$

ii) Die Mengen $(D(f))_{f\in A}$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

iii) Versehen wir $D(f)$ mit der induzierten Topologie, so ist $D(f)$ quasikompakt. Insbesondere ist $\operatorname{Spec}(A) = D(1)$ quasikompakt.

Beweis. i) Es gilt:

$$\begin{aligned} & D(g) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ \iff\ & V(g) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(f_i) = V(\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle) \\ \iff\ & \sqrt{\langle g\rangle} \subseteq \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \\ \iff\ & g \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \end{aligned}$$

ii) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $\mathfrak{p} \in U := \operatorname{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$. Zu zeigen ist, dass es ein $f \in A$ mit $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$ gibt (Basiseigenschaft). Wegen $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ gibt es ein $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und man sieht leicht, dass dieses f das Gewünschte liefert.

iii) Quasikompakt heißt, dass jede offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von $D(f)$ eine endliche Teilüberdeckung hat, das heißt es gibt ein endliches $I_0 \subseteq I$ mit $\bigcup_{i\in I_0} V_i \supseteq D(f)$. Nach ii) bilden die Mengen $D(f)$ eine Basis, also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in A$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} & D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) \\ \overset{\text{i)}}{\iff}\ & f \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle} \\ \iff\ & \exists\, m \geq 1,\ f^m = \sum_{i\in I_0} a_i f_i \in \langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle \text{ für ein endliches } I_0 \subseteq I, a_i \in A \\ \iff\ & \exists \text{ endliches } I_0 \subseteq I,\ f \in \sqrt{\langle\{f_i \mid i \in I_0\}\rangle} \\ \iff\ & D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I_0} D(f_i) \end{aligned}$$

Also ist $D(f)$ quasikompakt. Insbesondere ist $D(1) = \operatorname{Spec}(A)$ quasikompakt.

□

4.9 Proposition. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

i) Die Abbildung $f\colon X = \operatorname{Spec}(B) \to Y = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ist stetig. Oft bezeichnen wir f auch mit $\operatorname{Spec}(\varphi) = f$. Weiter gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(M)) &= V(\varphi(M)) && \forall\, M \subseteq A \\ f^{-1}(D(a)) &= D(\varphi(a)) && \forall\, a \in A \\ \overline{f(V(\mathfrak{b}))} &= V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) && \forall\, \mathfrak{b} \textit{ Ideal in } B \end{aligned}$$

ii) Ist φ surjektiv und $\mathfrak{a} := \ker(\varphi)$, dann definiert f einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec}(B) \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{a}).$$

Beweis. Dies wird in Aufgabe 4.2 gezeigt. □

4.10 Erinnerung. Sei $S \subseteq A$ abgeschlossen unter Multiplikation und $1 \in S$. Dann ist die Lokalisierung A_S definiert als die Menge der Äquivalenzklassen unter folgender Äquivalenzrelation auf $A \times S$:

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists\, t \in S \text{ mit } t(s'a - sa') = 0$$

Die Äquivalenzklasse von (a, s) wird mit $\frac{a}{s}$ bezeichnet. A_S ist ein Ring.

i) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ sei $A_{\mathfrak{p}} := A_S$ mit $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

ii) Für $f \in A$ sei $A_f := A_S$ mit $S = \{f^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

4.11 Konstruktion (Lokal geringter Raum auf $\operatorname{Spec}(A)$)**.** i) Sei U offen in $\operatorname{Spec}(A)$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$ die Menge der Funktionen $s\colon U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

a) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$

b) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und $a, f \in A$ mit $V \subseteq D(f)$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in V$.

ii) Aufgrund der lokalen Natur der Axiome a) und b) sieht man, dass $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ eine Garbe von Ringen auf $\operatorname{Spec}(A)$ definiert. Dabei sind die Addition und Multiplikation von solchen Funktionen punktweise unter Benutzung der entsprechenden Operation in den $A_{\mathfrak{p}}$ definiert.

4.12 Proposition. *i) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$$

von Ringen, wobei $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der Halm der Garbe $\mathcal{O}$ in $\mathfrak{p}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring und damit ist $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum.

ii) Für alle $f \in A$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$A_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D(f))$$

von Ringen.

iii) Es gilt $\mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) = A$.

Beweis. i) Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\substack{\mathfrak{p}\in U\\ U \text{ offen}}} \mathcal{O}(U),$$

das heißt ein Element von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ist repräsentiert durch (U, s), wobei U offen mit $\mathfrak{p} \in U$ und $s \in \mathcal{O}(U)$ ist. Weiter gilt $[(U, s)] = [(U', s')] \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ genau dann, wenn es ein offenes $V \subseteq U \cap U'$ gibt mit $\mathfrak{p} \in V$ und $s|_V = s'|_V$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ und U eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$. Für U offen in $\operatorname{Spec}(A)$ betrachten wir

$$\mathcal{O}(U) \to A_{\mathfrak{p}},\ s \mapsto s(\mathfrak{p}).$$

Nach a) sind dies wohldefinierte Ringhomomorphismen. Weiter sind diese Homomorphismen verträglich mit Einschränkungen auf kleinere Umgebungen V. Also wird ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p},\ [(U,s)] \mapsto s(\mathfrak{p})$ induziert. Sei $\frac{a}{f} \in A_\mathfrak{p}$, also $f \notin \mathfrak{p},\ a \in A$. Dies definiert einen Schnitt

$$s = \frac{a}{f}\colon D(f) \to \coprod_{\mathfrak{q} \in D(f)} A_\mathfrak{q},\ \mathfrak{q} \mapsto s(\mathfrak{q}) := \frac{a}{f} \in A_\mathfrak{q}.$$

Offenbar gilt $\varphi(s) = \frac{a}{f} \in A_\mathfrak{p}$, also ist φ surjektiv.

Sei U eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ und seien $s,t \in \mathcal{O}(U)$ mit $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$, das heißt

$$\varphi([(U,s)]) = \varphi([(U,t)]).$$

Wir wollen nun $s = t \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ zeigen. Indem wir die Umgebung von $\mathfrak{p}$ gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir nach b) annehmen, dass es $a,b,f,g \in A$ mit $f,g \notin \mathfrak{p}$ gibt, so dass $s = \frac{a}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $t = \frac{b}{g} \in \mathcal{O}(U)$ gilt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & s(\mathfrak{p}) = \varphi(s) = \varphi(t) = t(\mathfrak{p}) \\ \Longrightarrow\quad & \frac{a}{f} = \frac{b}{g} \in A_\mathfrak{p} \\ \Longrightarrow\quad & \exists\, h \in A \setminus \mathfrak{p} \text{ mit } h(ga - fb) = 0 \end{aligned}$$

Weiter gilt $\frac{a}{f} = \frac{b}{g} \in A_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $f,g,h \notin \mathfrak{q}$. Die Menge dieser $\mathfrak{q}$ ist gleich der offenen Menge $W := D(f) \cap D(g) \cap D(h) \ni \mathfrak{p}$. Also gilt $s|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$ und damit $s = t \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ nach der Definition von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Also ist φ injektiv.

Damit ist φ ein kanonischer Isomorphismus.

ii) Wir definieren

$$\begin{aligned} \psi_f\colon A_f &\to \mathcal{O}(D(f)) \\ \frac{a}{f^n} &\mapsto \left(s\colon D(f) \to \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_\mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \mapsto s(\mathfrak{p}) := \frac{a}{f^n} \in A_\mathfrak{p} \right). \end{aligned}$$

Offenbar ist ψ_f ein wohldefinierter Ringhomomorphismus.

Sei $\psi_f\left(\frac{a}{f^n}\right) = \psi_f\left(\frac{b}{f^m}\right)$. Dann gilt $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \in A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$. Sei

$$\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}_A(f^m a - f^n b) = \{g \in A \mid g \cdot (f^m a - f^n b) = 0\}.$$

Beachte, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist. Nun gibt es ein $h \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $h(f^m a - f^n b) = 0$, also $h \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Also gilt $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, das heißt $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Dies gilt für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$, also gilt $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Damit gilt $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$. Mit Proposition 4.4 folgt wegen $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, dass es ein $k \geq 1$ mit $f^k \in \mathfrak{a}$ gibt. Dann gilt $f^k(f^m a - f^n b) = 0$ und damit $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{g^m} \in A_f$. Also ist ψ_f injektiv.

Sei $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Nach Proposition 4.8 ii) und der Definition von $\mathcal{O}$ in Konstruktion 4.11 gibt es eine Familie $(h_i)_{i \in I}$ in A mit

$$D(f) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \qquad (\star)$$

und $a_i, g_i \in A$ mit $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, sodass für alle $i \in I$

$$s|_{D(h_i)} = \frac{a_i}{g_i} \in \mathcal{O}(D(h_i))$$

gilt. Aus $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ folgt mit Proposition 4.8, dass es $n_i \geq 1$ und $c_i \in A$ mit $h_i^{n_i} = c_i g_i$ gibt. Dann gilt

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{c_i a_i}{h_i^{n_i}} \in \mathcal{O}(D(h_i)) = \mathcal{O}(D(h_i^{n_i})).$$

Wir ersetzen h_i durch $h_i^{n_i}$ und a_i durch $c_i a_i$ und erhalten

$$s|_{D(h_i)} = \frac{a_i}{h_i} \in \mathcal{O}(D(h_i)).$$

Da $D(f)$ nach Proposition 4.8 quasikompakt ist, gibt es $h_1, \dots, h_r$ mit

$$D(f) \overset{(\star)}{=} D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r).$$

Wir fassen $\frac{a_i}{h_i}$ und $\frac{a_j}{h_j}$ als Elemente von $A_{h_i h_j}$ auf. Wegen $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ gilt

$$\psi_{h_i h_j}\left(\frac{a_i}{h_i}\right) = \psi_{h_i h_j}\left(\frac{a_j}{h_j}\right) = s|_{D(h_i h_j)} \in \mathcal{O}(D(h_i h_j)).$$

Aus der Injetivität von $\psi_{h_i h_j}$ folgt $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j} \in A_{h_i h_j}$. Deswegen gibt es $n_{ij} \geq 1$ mit

$$(h_i h_j)^{n_{ij}}(h_j a_i - h_i a_j) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r. \tag{$\star\star$}$$

Sei $n := \max\{n_{ij} \mid 1 \ \leq i, j \leq r\}$, $\tilde{a}_i := h_i^n a_i$, $\tilde{h}_i := h_i^{n+1}$. Wieder gilt $D(\tilde{h}_i) = D(h_i)$. Aus $(\star\star)$ folgt

$$h_j^{n+1}(h_i a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r.$$

Deswegen gilt

$$s|_{D(\tilde{h}_i)} = \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{h}_i} \text{ und } \tilde{h}_i \tilde{a}_j = \tilde{a}_i \tilde{h}_j \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq r.$$

Aus $(\star)$ folgt mit Proposition 4.8 i), dass es ein $m \geq 1$ mit $f^m = \sum_{i=1}^r b_i \tilde{h}_i$ für gewisse $b_i \in A$ gibt. Wir setzen $a := \sum_{i=1}^r b_i \tilde{a}_i$. Für $1 \leq j \leq r$ gilt

$$\tilde{h}_j a = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_j b_i \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i b_i \tilde{a}_j = f^m \tilde{a}_j$$

und damit folgt

$$\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{h}_j} = \frac{a}{f^m} \in A_{\tilde{h}_j} \overset{\psi_{\tilde{h}_j}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}(D(\tilde{h}_j))$$

und damit $\psi_f\left(\frac{a}{f}\right) = s$ auf jedem $D(\tilde{h}_j)$. Da $\mathcal{O}$ eine Garbe ist, gilt dies auch auf $D(f)$. Damit ist ψ_f surjektiv.

Insgesamt ist ψ_f ein Isomorphismus.

iii) Dies folgt aus ii) mit $f = 1$.

□

Bemerkung. Wir nennen $\mathcal{O}$ die Garbe der regulären Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$.

4.13 Definition. Der lokal geringte Raum $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **Spektrum** von A.

4.14 Proposition. *Seien A, B Ringe, $X := \mathrm{Spec}(B)$ und $Y := \mathrm{Spec}(A)$.*

i) Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ *induziert eine stetige Abbildung*

$$(f = \operatorname{Spec}(\varphi))\colon X \to Y,\ \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}),$$

einen Garbenhomomorphismus

$$f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Y)$$

und einen Morphismus

$$(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

lokal geringter Räume.

ii) Ein Morphismus lokal geringter Räume $(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *induziert einen Ringhomomorphismus*

$$(\varphi = \Gamma(Y, f^{\#}))\colon (A = \mathcal{O}_Y(Y)) \to (B = \mathcal{O}_X(X)).$$

iii) Es gibt eine bijektive Korrespondenz

$$\begin{aligned}\phi\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, B) &\to \operatorname{Hom}_{\mathrm{lgR}}((\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}), (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}))\\ \varphi &\mapsto ((f = \operatorname{Spec}(\varphi)), f^{\#})\end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung Ψ *ist gegeben durch*

$$(f, f^{\#}) \mapsto \Gamma(\operatorname{Spec}(A), f^{\#}).$$

Beweis. Dies wird in Aufgabe 5.1 gezeigt. □

4.15 Definition. Ein **affines Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, welcher für einen Ring A zu $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ isomorph ist.

4.16 Lemma. *Sei* $f \in A$. *Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$(\operatorname{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)}) \xrightarrow{\sim} (D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}|_{D(f)})$$

von lokal geringten Räumen. Insbesondere ist $(D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}|_{D(f)})$ *ein affines Schema.*

Beweis. Dies folgt leicht aus Proposition 4.12 und wird in Aufgabe 5.2 gezeigt. □

4.17 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $p \in X$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,p}$ ein lokaler Ring mit eindeutigem Maximalideal $\mathfrak{m}_p$. Also ist

$$\kappa(p) := \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$$

ein Körper, den wir **Restklassenkörper** von $(X, \mathcal{O}_X)$ in p nennen.

5 Schemata

Schemata sind die Hauptobjekte der algebraischen Geometrie. Sie verallgemeinern die (quasi-projektiven) Varietäten aus der algebraischen Geometrie I.

5.1 Definition. i) Ein Schema ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei X eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ hat, die die Eigneschaft besitzt, dass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ für alle $i \in I$ ein affines Schema ist. Wir nennen X den **unterliegenden topologischen Raum** und $\mathcal{O}_X$ die **Strukturgarbe**. Oft wird das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ einfach mit X abgekürzt, obwohl der topologische Raum das Schema nicht bestimmt.

ii) Ein **Morphismus** von Schemata ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

Wir erhalten die Katergorie Sch der Schemata.

5.2 Proposition. *Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.*

i) Für U offen in X ist $(U, (\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema. Weiter hat man einen kanonischen Morphismus

$$j\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X).$$

*Wir nennen dies die **induzierte Schemastruktur** auf U und sagen, dass $(U, \mathcal{O}_U)$ ein **offenes Unterschema** von X ist.*

ii) Die affinen offenen Unterschemata bilden eine Basis der Topologie von X.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.8 und Lemma 4.16. □

5.3 Bemerkung. Ein offenes affines Unterschema muss im Allgemeinen nicht wieder affin sein.

Bemerkung. Sei X ein topologischer Raum.

i) X erfüllt das Axiom T_0, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge U mit $x \in U$, $y \notin U$ oder $x \notin U$, $y \in U$ gibt. X heißt dann T_0-Raum.

ii) X erfüllt das Axiom T_1, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x$, $y \notin U_X$ und $x \notin U_Y$, $y \in U_y$. X heißt dann T_1-Raum.

iii) X erfüllt das Axiom T_2, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_Y = \emptyset$. X heißt dann T_2-Raum oder **Hausdorffraum**.

Man sieht leicht, dass das Axiom T_2 das Axiom T_1 impliziert und, dass das Axiom T_1 das Axiom T_0 impliziert.

5.4 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema*

i) Der topologische Raum X ist ein T_0-Raum.

ii) Jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge des topologischen Raums X besitzt genau einen generischen Punkt.

Beweis. i) Seien $x \neq y \in X$. Nach Definition 5.1 gibt es eine affine offene Umbebung $U \cong \mathrm{Spec}(A)$ von x. Falls $y \notin U$, dann sind wir fertig, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y \in U$. Die Punkte x, y sind durch Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ von A gegeben. Es gilt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. $D(f)$ ist offen in X und $x \notin D(f)$, aber $y \in D(f)$.

ii) Wir zeigen zunächst die Existenz: Sei $V \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen. Nach Definition 5.1 gibt es ein offenes affines Unterschema $U \cong \mathrm{Spec}(A)$ mit $U \cap V \neq \emptyset$. Da V abgeschlossen in X ist, ist $U \cap V$ abgeschlossen in U und weil U offen in X ist, ist $U \cap V$ offen in V. In Aufgabe 1.5 zur algebraischen Geometrie I haben wir gesehen, dass jede nicht leere, offene Teilmenge eines irreduziblen topologischen Raumes irreduzibel und dicht ist, also ist $U \cap V$ irreduzibel und dicht in V. Sei $\mathfrak{p} := I(U \cap V) \in \mathrm{Spec}(A)$. Nach Proposition 4.7 iii) ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$. Dieser entspricht einem Punkt η in $U \subseteq X$. Es gilt $\overline{\eta} = U \cap V$ und damit ist η dicht in V, also ein generischer Punkt von V.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit: Seien η_1, η_2 generische Punkte von V. Wir nehmen an, dass $\eta_1 \neq \eta_1$. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein offenes U mit $\eta_1 \in U$ und $\eta_2 \neq U$. Dann gilt $\eta_2 \in V \setminus U \neq V$ und damit folgt $\overline{\eta_2} \subseteq V \setminus U \neq V$ im Widerspruch dazu, dass η_2 ein generischer Punkt von V ist.

□

Bemerkung. Wir haben inbesondere gezeigt, dass jedes irreduzible affine Schema ein T_0-Raum ist. Weiter haben wir gesehen, dass jedes irreduzible affine Schema X genau einen generischen Punkt η hat.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, das mindestens zwei Punkte enthält. Dann ist X jedoch kein T_1-Raum.

Beweis. Wir wählen $y = \eta, x \neq y$. Falls U eine offene Umgebung von x ist, so gilt $y \in U$, da y ein generischer Punkt ist. □

5.5 Lemma. *Seien X, Y Schemata.*

i) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und seien $f_i \colon U_i \to Y$ Morphismen mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall\, i, j \in I.$$

Dann gibt es genau einen Morphismus $f \colon X \to Y$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

ii) Die durch $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(U, Y)$ mit den Restriktionsabbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(U, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(V, Y)$$

definierte Prägarbe von Mengen auf X ist eine Garbe.

Beweis. i) Genauer ist ein Morphismus $(f, f^{\#}) \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von lokal geringten Räumen zu konstruieren und die Eindeutigkeit zu zeigen. Gegeben sind Morphismen

$$(f_i, f_i^{\#}) \colon (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y),$$

die auf den Überlappungen übereinstimmen. Für alle $x \in X$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Nun definieren wir die stetige Abbildung

$$f \colon X \to Y,\ x \mapsto f(x) := f_i(x).$$

Dies ist wohldefiniert, da die f_i auf den Überlappungen der U_i übereinstimmen. Wir konstruieren nun $f^\# \colon \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$. Für V offen in Y müssen wir einen Homomorphismus

$$f^\#_V \colon \mathcal{O}_Y(V) \to ((f_*\mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}V))$$

konstruieren. Sei $s \in \mathcal{O}_Y(V)$. Beachte, dass $f^{-1}V$ von den offenen Teilmegenen $f^{-1}V \cap U_i$ überdeckt wird. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} f^\#_{i,V} \colon \mathcal{O}_Y(V) &\to ((f_{i*}\mathcal{O}_{U_i})(V) = \mathcal{O}_X(U_i \cap f^{-1}V)) \\ s &\mapsto f^\#_{i,V}(s). \end{aligned}$$

Wegen der Vorraussetzung stimmen die $f^\#_{i,V}(s)$ auf den Überlappungen der Mengen $U_i \cap f^{-1}V$ überein. Wegen der Garbeneigenschaft gibt es ein eindeutiges $t \in \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ mit $t|_{U_i \cap f^{-1}V} = f^\#_{i,V}(s)$ für alle $i \in I$. Wir definieren $f^\#_V := t$. Man sieht sofort, dass $f^\#_V$ das Gewünschte liefert und eindeutig ist.

ii) Dies folgt aus i), indem man $X := U$ setzt.

□