Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Garmulewicz
Nr albumu: 304742

L_p-kohomologie f-stożków Riemannowskich.

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Andrzeja Webera
Instytut Matematyki

Maj 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W tej pracy licencjackiej opisane jest obliczenie L_p-kohomologii rozmaitości Riemannowskich.

Słowa kluczowe

kohomologie de Rhama, topologia różniczkowa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry
14F (Co)homology theory
14F40 de Rham cohomology

Tytuł pracy w języku angielskim

L_p-cohomologies of Riemannian f-horns.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

W pracy [Weber] prezentowane jest między innymi obliczenie L_p-kohomologii stożka nad pseudorozmaitością Riemannowską.

Na stożku tym określona jest metryka postaci $dt \otimes dt + t^2 g$, gdzie g jest metryką na części nieosobliwej wyjściowej pseudorozmaitości. W dalszej części wspomnianej pracy obliczana jest L_p-kohomologia wspomnianej przestrzeni.

1. (bardzo krotka czesc) Algebra liniowa: tu zbiera Pan fragmenty, w ktorych jest powiedziane jak iloczyn skalarny/norma w V indukuje iloczyn skalarny/norme w $V^*, \Lambda^k V^*$ i co sie dzieje przy przeskalowaniu.

2. Formy rozniczkowe i regula homotopii: tu dowodzi Pan formule homotopii (*) $Kd+dK = Id - \pi^* i^*$ (o szacowaniu normy nie ma mowy). Wniosek: $H^*(M) = H^*(M \times R)$, izomorfizm zadany przez π^*.

3. L^p-kohomologie (definicja za pomoca form gladkich), szacowanie norm $\pi^*\omega$, $I_r\omega$, (osobno dla $r = \infty$). Trzeba jasno wypowiedziec idee przewodnia: $\mathrm{C}_f M$ jest dyfeomorficzne z$M \times R$, chcemy porownac $H^*(M \times R) z H^*(C_f M)$ uzywajac π^* i korzystajac z formuly (*). Dlatego robimy te oszacowania.

W tej pracy licencjackiej przedstawiam drobną modyfikację tych pojęć do e^{-t}-stożków Riemannowskich, czyli przestrzeni będących produktem rozmaitości Riemannowskiej oraz półprostej na której określono metrykę $dt \otimes dt + (e^{-t})^2 g$.

Rozdział 2

Algebra liniowa

W rozdziale tym przytaczam definicje i wyprowadzam podstawowe zależności, które pomogą nam w dalszych obliczeniach.

2.1. Algebra zewnętrzna

W tej sekcji przytaczam definicje form zewnętrznych oraz ich własności. Przytoczone definicje podane są według podręczników [Lee], rozdział 14 oraz [Kostrikin] - rozdział 6 § 3. Formy zewnętrzne są dla nas istotne, ponieważ formy różniczkowe, które są podstawowym obiektem służącym do badania kohomologii de Rhama, są lokalnie elementami algebry zewnętrznej na przestrzeni stycznej do rozmaitości w otoczeniu danego punktu.

Definicja 2.1.1 (k-kowektor)**.** Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Tensor $T : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$ nazwiemy kowariantnym. Bierze on jako argumenty jedynie wektory i konsekwentnie, nie bierze on jako argumentów form. Takie tensory mają wiele nazw: formy zewnętrzne, multi-kowektory, czy też po prostu k-kowektory. Przestrzeń wszystkich k-kowektorów na przestrzeni V ma wiele oznaczeń. Jednym z bardziej popularnych oznaczeń jest $T^k(V^*)$.

Tensor będzie nazwany *alternującym*, gdy jego wartość zmieni znak w przypadku zmienimy miejscami jego dwa wektory wejściowe. Przestrzeń takich tensorów, które należą do $T^k(V^*)$, a do tego są antysymetryczne, często oznacza się $\Lambda^k(V^*)$.

Przedstawmy teraz kilka podstawowych operacji określonych na takich tensorach.

Definicja 2.1.2 (produkt tensorowy)**.** Dla dwóch tensorów kowariantnych $f \in T^p(V^*)$ oraz $g \in T^q(V^*)$ możemy określić produkt (tensorowy) $f \otimes g \in T^{p+q}(V^*)$ za pomocą wzoru:

$$f \otimes g(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \cdot g(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}).$$

Dowolny kowariantny tensor możemy przekształcić na tensor alternujący za pomocą przekształcenia *alternatora*, nazywanego także *rzutem alternującym*. Jest on określony w następujący sposób:

$$\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$$

$$\mathrm{Alt}(f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(k)}).$$

Z pomocą alternatora określić można iloczyn zewnętrzny antysymetryczny. Dla elementów $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ oraz $\eta \in \Lambda^q(V^*)$, ich iloczyn zewnętrzny zadamy wzorem

$$\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Przytoczmy teraz sposób, w jaki definiuje się bazę potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Niech $v_1, v_2, ..., v_n$ będzie bazą przestrzeni dualnej V^*, która jest dualna do bazy $w_1, w_2, ..., w_n$. Wówczas układ

$$B = \{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_k} : 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n\}$$

jest bazą potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Warto zauważyć, że implikuje to $dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$

Aby zrealizować tytuł tego podrozdziału, zdefiniujmy *algebrę zewnętrzną*. Jest to suma prosta:

$$\Lambda^*(V) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*) \oplus ... \ .$$

Stanowi ona algebrę z działaniami dodawania oraz iloczynu zewnęnętrznego. Fakt ten jest dokładnie uargumentowany w wielu standardowych podręcznikach, przykładowo w [Lee], Proposition 14.11 albo [Kostrikin].

2.2. Norma indukowana na potędze zewnętrznej przestrzeni dualnej. Skalowanie norm.

W tym rozdziale przedstawiam relacje pomiędzy normą określoną na danej przestrzeni wektorowej a indukowaną przez iloczyn skalarny normą na przestrzeni dualnej oraz na potęgach zewnętrznych przestrzeni dualnej. W szczególności, w dalszych obliczeniach będziemy badać wyrażenia typu $r|\cdot|$, gdzie $|\cdot|$ jest normą na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Znaczenie będzie miało jak zachowuje się norma na przestrzenii dualnej, gdy skalujemy normę wyjściowej przestrzenii liniowo o czynnik r.

Komentarz: Tu jest konieczny cytat gdzie są opisane ładnie te rzeczy.

Niech będzie dana skończenie wymiarowa rzeczywista przestrzeń liniowa V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ten iloczyn skalarny, na przykład na podstawie twierdzenia Riesza o reprezentacji *Komentarz: cytowanie*, zadaje izometryczny izomorfizm pomiędzy V oraz jej przestrzenią dualną V^*.

Dzięki temu, że jest on izometrią widzimy, że iloczyn skalarny z V indukuje iloczyn skalarny na V^*. Istnienie iloczynu skalarnego implikuje także istnienie normy na przestrzeni dualnej. Możemy tę normę wyrazić w nieco inny sposób, co ułatwi nam obliczenie zachowania normy ze względu na skalowanie. *Komentarz: cytowanie. Może coś jest w książce Warner, którą wspominał Pan Weber..*

Dla rzeczywistej przestrzeni wektorowej funkcjonał $\phi \in V^*$ ma normę określoną wzorem:

$$||\phi|| = \sup \{|\phi(v)| : v \in V, ||v|| = 1\}, \tag{2.1}$$

gdzie $||v||$ to norma pochodząca z wyjściowej przestrzeni wektorowej V.

Iloczyn skalarny jest także przenoszony na potęgę zewnętrzną przestrzeni dualnej. *Komentarz: cytowanie!! - niby jest napisane w ćwiczeniu z Kostrikina ale lepiej byłoby znaleźć coś, co mówi o tym wprost* Dla dwóch k-form jest on zadany wzorem

$$\langle v^1 \wedge .... \wedge v^k, w^1 \wedge ... \wedge w^k \rangle = \det \left(\langle v^i, w^j \rangle \right), \tag{2.2}$$

czyli jest on równy wyznacznikowi macierzy wartości iloczynu skalarnego zaaplikowanych do poszczególnych składowych k-kowektorów.

Możemy teraz zobserwować w jaki sposób zachowają się normy przestrzeni dualnej oraz potęgi zewnętrznej gdy przeskalujemy normę wyjściową o czynnik liniowy r.

Załóżmy więc, że rozważamy rzeczywistą przestrzeń liniową V z określoną normą $||\cdot||$. Określmy nową normę dla $v \in V$:

$$||v||_r = r||v||.$$

Z definicji 2.1 możemy bardzo prosto zauważyć, że dla funkcjonału $\phi \in V^*$ nowa norma będzie dana następującym wzorem:

$$||\phi||_r = \frac{1}{r}||\phi||$$

Zauważmy bowiem, że dla przestrzeni skończenie wymiarowej, supremum ze wzoru 2.1 jest osiągane. *Komentarz: cytat ze stosownego AFu* Załóżmy, że supremum to jest osiągane dla wektora v. W nowej normie wektor ten ma normę $||v||_r = r \cdot ||v|| = r \cdot 1 = r$. Ze względu na liniowość operatora ϕ widzimy, że na zbiorze $\{w \in V : ||w||_r = 1\}$ wartość $|\phi(w)|$ będzie osiągała swoje supremum dla wielokrotności αv. Istotnie, $\frac{1}{r}v$ maksymalizuje tę wartość i jednocześnie widzimy, że

$$||\phi||_r = \frac{1}{r}|\phi(v)| = \frac{1}{r}||\phi||.$$

Skoro wiemy w jaki sposób skaluje się iloczyn skalarny na przestrzeni dualnej. W definicji wyznacznika zakładamy bowiem, że wyznacznik jest liniowy ze względu na mnożenie wiersza macierzy. Pomnożenie całej macierzy kwadratowej rzędu k przez czynnik r powoduje więc pomnożenie wyznacznika przez czynnik r^k. Otrzymujemy stąd natychmiast dla k-formy $\omega = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k$ wzór:

$$||\omega||_r = \frac{1}{r^k}||\omega||. \tag{2.3}$$

Rozdział 3

Formy rozniczkowe i regula homotopii

W tym rozdziale opisuję formy różniczkowe, kohomologie de Rhama i udowadniam formułę homotopii. Formuła ta, jej dowód jest dla nas szczególnie interesująca. Technika ta będzie w dalszym ciągu pracy kluczowa dla porównania grup kohomologii f-stożka i rozmaitości M.

Poniższe definicje są przytoczone w formie opartej na podręczniku [Lee] oraz [Bott,Tu]. W szczególności, dowód formuły homotopii jest zaczerpnięty z [Bott,Tu], rozdział I § 4.

Rozważamy rozmaitość M. Dla dowolnej przestrzeni kostycznej T_p^*M rozpatrzmy jej potęgę zewnętrzną $\Lambda^k(T_p^*M)$. Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń liniową nad każdym punktem $p \in M$. Ich sumę rozłączną oznaczymy $\Lambda^k(T^*M)$. Przestrzenie te, określone nad każdym punktem z osobna, można skleić do wiązki wektorowej, na której można zdefniować formy różniczkowe, wybierając lokalną trywializację wiązki stycznej. *Komentarz: zastanowić się co to znaczy dokładnie*

Definicja 3.0.1 (Forma różniczkowa)**.** k-formą różniczkową na rozmaitości M nazwiemy gładki przekrój wiązki $\Lambda^k(T^*M)$ nad M, czyli gładkie odwzorowanie $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$, spełniające $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p^*)$ dla każdego punktu $p \in M$.

Przestrzeń k-form różniczkowych oznaczać będziemy przez $\Omega^k(M)$. Określimy na niej kluczowe dla dalszych kroków naszego rozumowania pojęcie *pochodnej zewnętrznej* formy różniczkowej. Operacja ta zwiększa stopień formy, czyli $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Pozwala to patrzeć na nią w dalszej części rozumowania, jako na operator w ciągu przestrzeni wektorowych $\Omega^k(M)$, tworzącym kompleks łańcuchowy.

Aby nadać nieco więcej intuicji definicji, przypomnimy najpierw definicję różniczki funkcji, czyli operację $d : C^\infty = \Omega^o(M) \to \Omega^1(M)$. Niech f będzie funkcją gładką na M, a (x^i) - układem współrzędnych. Na dziedzinie tego układu określimy różniczkę df wzorem

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{3.1}$$

Dla form o wyższej gradacji określamy pochodną zewnętrzną w następujący sposób. Niech

$\omega = \sum_{j \in I} \alpha_{j_1,...,j_k} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k}$. Różniczka $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ jest dana jako

$$d(\sum_{j \in I} \alpha_{j_1,...,j_k} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k}) = \sum_{j \in I} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{j_1,...,j_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k}).$$

Ponadto, jeśli ϕ jest p-formą, a ψ jest q-formą, to możemy zapisać następujący wariant formuły Leibniza

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi.$$

Jest on udowodniony w [Lee], Proposition 14.23 (b).

Warto zwrócić uwagę, że własność 3.1 wraz z formułą Leibniza determinują postać różniczki dla form w wyższych gradacjach.

Przytoczymy teraz kluczową własność różniczki wraz z dowodem. Przypomnijmy, że w teorii homologii badamy kompleksy łańcuchowe, czyli ciągi przestrzeni

$$... \xrightarrow{d} A^i \xrightarrow{d} A^{i+1} \xrightarrow{d} ...,$$

że $d^2 = d \circ d = 0$. Pokażemy, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.0.1. *Dla różniczki zewnętrznej form należących do $(\Omega^*(M), d)$ zachdzi*

$$d \circ d = 0.$$

W związku z tym ciąg przestrzeni $\left(\Omega^i(M), d\right)_i$ jest kompleksem łańcuchowym.

Dowód. Udowodnijmy najpierw na przypadku szczególnym 0-formy, czyli funkcji o własnościach rzeczywistych. Dla tego przypadku zachodzi

$$\begin{aligned} d(du) &= d\left(\sum_j \frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0, \end{aligned}$$

z uwagi na to, że pochodne cząstkowe mieszane są sobie równe. Dla przypadku ogólnego natomiast, skorzystamy z powyższego przypadku szególnego oraz formuły Leibniza, które w połączeniu pozwolą nam napisać

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= \sum_J d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k} \\ &+ \sum_J \sum_{i=1}^{k} (-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge d(dx^{j_i}) \wedge ... dx^{j_k} = 0. \end{aligned}$$

Nadużywam tu nieco notacji dla zachowania jasności dowodu. Iteracja po J to iteracja po multiindeksach, a iteracja po i to normalna konwencja sumowania. Ostatnia równość wynika wprost z definicji różniczki form $d\omega_J$.

□

3.1. Metryka Riemannowska i forma objętości

Metryką Riemannowską nazwiemy gładkie, symetryczne kowariantne pole 2-tensorów na rozmaitości M które jest dodatnio określone w każdym punkcie. Mówiąc bardziej intuicyjnie, określenie metryki Riemannowskiej to doczepienie pola iloczynów skalarnych do rozmaitości, które zmienia się w sposób gładki.

W dowolnych lokalnych gładkich współrzędnych (x^i) metryka Riemannowska może być zapisana jako

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

gdzie g_{ij} jest dodatnio określoną macierzą (której współrzędne to funkcje gładkie). Ostatnia część równości zapisuje naszą metrykę w terminach produktu symetrycznego.

Biorąc pod uwagę, że w głównej części pracy rozważać będziemy rozmaitości Riemannowskie będące produktem dwóch rozmaitości Riemannowskich, zbadajmy w jaki sposób zadana będzie metryka na takiej przestrzeni produktowej. Jeżeli (M, g) oraz (M', g') będą rozmaitościami Riemannowskimi, to na $M \times M'$ możemy zadać metrykę produktową $\hat{g} = g \oplus g'$ w następujący sposób:

$$\hat{g}\left((v, v'), (w, w')\right) = g(v, w) + g'(v', w')$$

dla każdego $(v, v'), (w, w') \in T_pM \oplus T_qM' \cong T_{(p,q)}(M \times M')$. Gdy mamy dane jakieś konkretne współrzędne $(x_1, ..., x_n)$ dla M oraz $(y_1, ..., y_n)$ dla M', to dostajemy prosto lokalne współrzędne $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ na $M \times M'$ i nietrudno sprawdzić, że metryka produktowa jest lokalnie reprezentowana przez macierz blokowo diagonalną

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & \left(g'_{ij}\right) \end{pmatrix}.$$

W kolejnym rozdziale pracy będziemy mówić o całkowaniu funkcji po rozmaitości Riemannowskiej. Co prawda nie będzie nam to potrzebne aż do kolejnego rozdziału, ale jest do technika ściśle związana z metryką Riemannowską, więc przedstawię ją tutaj.

Aby móc całkować funkcje na rozmaitości potrzebne jest nam pojęcie Riemannowskiej formy objętości. Szczegóły dotyczącego tego rozumowania są obszerne i w małym stopniu mają wpływ na tę pracę. Dlatego też przywołam tylko definicję i twierdzenie o postaci formy objętości w lokalnych współrzędnych, zamieszczając jedynie odnośnik do dowodu w źródle.

Uwaga 3.1.1. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru $n \geq 1$. Istnieje dokładnie jedna gładka forma objętości $\omega_g \in \Omega^n(M)$, nazywana **Riemannowską formą objętości**, która spełnia równanie

$$\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1$$

gdzie (E_i) jest lokalną, ortonormalną, dodatnio zorientowaną bazą pól wektorowych.

Dowód. Pomijam, zamieszczony w oryginalnym źródle [Lee], Proposition 15.29. □

To, co dokładnie oznacza ta definicja i jaka jest jej motywacja jest poza zakresem zainteresowania tej pracy. Musimy natomiast z perspektywy dalszych obliczeń znać jaka jest lokalna postać formy objętości.

Uwaga 3.1.2. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. W dowolnych zorientowanych gładkich współrzędnych (x_i), Riemmanowska forma objętości może być wyrażona lokalnie w następujący sposób:

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

Dowód tej własności także omijam, jest on dostępny w [Lee], Proposition 15.31.

Do naszych dalszych obliczeń potrzebna nam będzie umiejętność całkowania funkcji rzeczywistych pod rozmaitościach Riemannowskich. Zdefiniujmy w tym celu stosowną całkę. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską. Niech vol_g oznacza jej formę objętości. Jeżeli mamy teraz f - funkcję o zwartym nośniku, rzeczywistą i ciągłą, określoną na M, to $f\mathrm{vol}_g$ jest n-formą. Nie odwołując się do ogólnych definicji całek z różnych typów form różniczkowych, w naszym przypadku będziemy mogli zapisać prosto, korzystając z wcześniejszych uwag dotyczących zapisu formy objętości:

$$\int_M f d\mathrm{vol}_g = \int_{\phi(U)} f(x)\sqrt{det(g_{ij})}dx^1...dx^n,$$

zakładając, że rozmaitość jest cała w obrazie jednej mapy ϕ. Jeżeli bowiem tak by nie było, to musielibyśmy korzystać z wielu map $\phi_1, \phi_2...$, które opisywałyby całą rozmaitość biorąc pod uwagę gładki podział jedynki na rozmaitości.

3.2. Norma formy różniczkowej

Biorąc pod uwagę lokalną strukturę form różniczkowych jako algebry zewnętrznej oraz uwagi z rozdziału 2.1, iloczyn skalarny na rozmaitości Riemannowskiej indukuje zarówno na przestrzeni kostycznej, jak i na potędze zewnętrznej przestrzeni kostycznej iloczyn skalarny, a w związku z tym także normę. Dla porządku zapiszę jej lokalną postać.

Niech (M, g) będzie zorientowaną, spójną rozmaitością Riemannowską. Dla danych dwóch form zapisanych w lokalnych współrzędnych, ortogonalnych względem iloczynu skalarnego (metryki Riemannowskiej)

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \alpha_{i_1...i_k;x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$$

oraz

$$\beta_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \beta_{i_1...i_k;x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k},$$

iloczyn skalarny na przestrzeni form daje się zapisać prostym wzorem

$$G(\alpha_x, \beta_x) = \sum_{i_1,...,i_k} \alpha_{i_1...i_k;x}\beta_{i_1...i_k;x}.$$

Mamy więc dzięki temu iloczynowi określoną lokalną normę dla form różniczkowych. Dla $\omega \in \Omega^k(M)$ oraz $x \in M$ napiszemy

$$|\omega|_x = \sqrt{G(\omega_x, \omega_x)}.$$

Warto podkreślić tu prosty, ale istotny wniosek, że po określeniu formy ω norma jest funkcją skalarną $|\omega|_x : M \to \mathbb{R}$. Jest to warte odnotowania, ponieważ pomaga to w rozumieniu intuicji stojącej za definicją normy na całości rozmaitości Riemannowskiej. Taka norma będzie po prostu całką z normy punktowej rozważanej formy różniczkowej.

3.3. Przekształcenie indukowane, kohomologie de Rhama oraz formuła homotopii

Rozważmy przypadek gładkiej funkcji $F : M \to N$, pomiędzy dwoma rozmaitościami. Za pomocą tej funkcji będziemy mogli określić przekształcenie, które pozwoli nam zamieniać formy różniczkowe z rozmaitości N na formy różniczkowe z rozmaitości M. Z różniczką takiej funkcji możemy bowiem stowarzyszyć przekształcenie przeciągnięcia $F^* : \Omega^p N \to \Omega^p M$, działające w taki sposób:

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_n) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)).$$

Przeciągnięcie jest też czasami nazywane cofnięciem.

Pokażemy teraz bardzo interesującą strukturę jaką mają formy różniczkowe na rozmaitości, gdy rozpatrywać je jako kompleksy z działaniem różniczki. W poniższym rozumowaniu, przez $\Omega^p(M)$ oznaczać będziemy przestrzeń gładkich k-form. Niech M będzie rozmaitością a p będzie nieujemną liczbą całkowitą. Ponieważ $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ jest przekształceniem liniowym, jego jądro oraz obraz są podprzestrzeniami liniowymi. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\mathcal{Z}^p(M) = d : \Omega^p(M) \to \Omega_{p+1}(M) = \{p\text{-formy zamknięte na } M\ \}$$

$$\mathcal{B}^p(M) = d : \Omega^p(M) \to \Omega_{p+1}(M) = \{p\text{-formy dokładne na } M\ \}.$$

Jako konwencję przyjmuje się, że $\Omega^p(M)$ jest zerową przestrzenią wektorową gdy $p < 0$ lub $p > n = \dim M$. W związku z tym zachodzi przykładowo $\mathcal{B}^0(M) = 0$ oraz $\mathcal{Z}^n(M) = \Omega^n(M)$.

Sprawdzona wcześniej własność operatora różniczkowania $d \circ d = 0$ oznacza, że każda forma dokładna jest zamknięta, czyli $\mathcal{B}^p(M) \subseteq \mathcal{Z}^p(M)$. Stąd ma sens następująca definicja:

Definicja 3.3.1. **p-tą grupą kohomologii de Rhama** nazwiemy następującą ilorazową przestrzeń liniową:

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

Jest to rzeczywista przestrzeń liniowa i w związku z tym jest ona grupą z działaniem dodawania wektorów. Pokażemy, że grupy de Rhama są niezmiennicze ze względu na dyfeomorifzmy. Dla każdej domkniętej p-formy ω na M poprzez $[\omega]$ będziemy oznaczać klasę równoważności formy ω w $H_{dR}(M)$. Taką klasę równoważności będziemy nazywać także klasą kohomologii formy ω. Jeżeli dwie formy ω, η należą do tej samej klasy kohomologii, czyli zachodzi $[\omega] = [\eta]$, to różnią się one conajwyżej o formę dokładną. Zachodzi także następujący lemat:

Lemat 3.3.1. *(Przekształcenia indukowane kohomologii) Dla każdej gładkiej funkcji $F : M \to N$ pomiędzy dwoma rozmaitościami gładkimi, przeciągnięcie $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ przenosi formy dokładne na formy dokładne, a formy zamknięte na formy zamknięte. W ten sposób indukuje ono przekształcenie liniowe, w dalszym ciągu oznaczane jako F^* z $H^p_{dR}(N)$ do $H^p_{dR}(M)$, które nazywane jest przekształceniem indukowanym kohomologii.*

Dowód. Jeśli ω jest formą zamkniętą, to $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, więc $F^*\omega$ także jest zamknięte. Stąd wynika już, że przeciągnięcie to przenosi formy zamknięte na zamknięte, a dokłądne na dokładne. Przekształcenie indukowane jest zadane w prosty sposób. Dla p-formy zamkniętej ω, niech

$$F^*[\omega] = [F^*\omega].$$

Wtedy jeśli $\omega' = \omega + d\eta$, to

$$F^*[\omega'] = [F^*\omega + d(F^*\eta)] = [F^*\omega],$$

a więc przekształcenie jest dobrze zdefiniowane. □

Odnotujmy za [**?**], Corollary 17.3-4 następujące wnioski:

Uwaga 3.3.1. Dla każdej liczby całkowitej p, przypisanie $M \mapsto H^p_{\mathrm{dR}}(M)$, $F \mapsto F^ast$ jest funktorem kontrawariantnym z kategorii rozmaitości gładkich do kategorii rzeczywistych przestrzeni wektorowych.

Uwaga 3.3.2. Rozmaitości gładkie, które są ze sobą dyfeomorficzne, mają izomorficzne grupy kohomologii de Rhama, bo z funktorialności $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.

Przedstawione powyżej wnioski mają daleko idące uogólnienie. Grupy de Rhama okażą się być niezmiennikami topologicznymi. Udowodnimy bowiem, że wspomniane grupy są niezmiennikami homotopii. Oznacza to, że homotopijnie równoważne rozmaitości posiadać będą izomorficzne kohomologie de Rhama. Udowodnimy następującą rzecz:

Propozycja 3.3.1. *Homotopijnie gładko równoważne rozmaitości mają izomorficzne grupy de Rhama.*

Przedstawię teraz dowód powyższej propozycji. W tym rozumowaniu ciekawy jest dla nas zarówno wynik, jak i technika, która wykorzystywana będzie do jego udowodnienia. Skorzystam później z bardzo podobnych technik do udowodnienia najważniejszych twierdzeń pracy. Wyprowadzimy bowiem równanie, które sprowadzi naszą tezę do udowodnienia istnienia pewnego operatora o żądanych własnościach.

Chcemy najpierw udowodnić, że homotopijne funkcje gładkie indukują to samo przekształcenie kohomologii. Rozważamy w tym celu dwie gładkie funkcje $F, G : M \to N$. Pokażemy, że ich przekształcenia indukowane są równe $F^* = G^*$. Wyraźmy ten warunek w nieco innych słowach.

Gdy weźmiemy zamkniętą formę $p-$formę ω na N, aby przekształcenia indukowane były równe, musimy być w stanie wyprodukować taką $(p-1)$-formę η na M, aby spełnione

$$G^*\omega - F^*\omega = d\eta.$$

Z tego wyniknie bowiem, że $G^*[\omega] - F^*[\omega] = [d\eta] = 0$.

Możemy podejść do tego problemu nieco bardziej systematycznie, szukając takie operatora h, który jako argumenty bierze zamknięte p formy na N i działa tak, że spełniona jest zależność

$$d(h\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Zamiast definiować $h\omega$ tylko dla przypadku, kiedy ω jest zamknięta, określimy operator h z przestrzeni wszystkich gładkich p-form na N do przestrzeni wszystkich gładkich $(p-1)$-form na M, dla którego spełnione jest równanie

$$d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Gdy warunek ten jest bowiem spełniony to dla formy ω, która jest zakmnięta zajdzie także poprzedni warunek. Zanim udowodnimy ten wzór, udowodnimy prostszy lemat.

Komenatarz: Popatrzeć w Lee jak się zamienia lemat Poincare na tą formułę homotopii i jakoś do podsumować, a nie zupełnie porzucić tę formułę.

Następujące twierdzenia i wnioski przytaczam z książki [Bott,Tu], Section I.§4, s 35.

Obliczenie rozpoczniemy od prostszego przypadku $M = \mathbb{R}^n$. Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będzie rzutowaniem na pierwszy czynnik, a s będzie włożeniem zerowym (na wartość 0 na drugim czynniku). Podsumowując mamy:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{\pi}{\overset{s}{\leftrightarrows}} \mathbb{R}^n$$

$$\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} \Omega(\mathbb{R}^n)$$

$$\pi(x,t) = x$$
$$s(x) = (x,0)$$

Pokażemy, że funkcje indukują przeciwne do siebie izomorfizmy na grupach kohomologii i stąd zachodzi $H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \cong H^*(\mathbb{R}^n)$.

Jako. że $\pi \circ s = id$ mamy prosto $s^* \circ \pi^* = id$. Jednak $s \circ \pi \neq id$ i stąd dla operatorów na formach zachodzi także $\pi^* \circ s^* \neq id$. Dla przykładu, $\pi^* \circ s^*$ posyła funkcję $f(x,t)$ na $f(x,0)$ czyli funkcję która jest stała wzdłuż każdego włókna. Okazuje się jednak że w kohomologiach jednak $\pi^* \circ s^*$ jest identycznością. Aby to pokazać, posłużymy się formułą homologii. Chcemy mianowicie znaleźć funkcję K na $\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ taką, że spełnione jest równanie:

$$id - \pi^* \circ s^* = \pm dK \pm Kd.$$

Podkreślmy ponownie, że $dK \pm Kd$ przekształca formy domknięte na formy dokładne i dlatego indukuje przekształcenie zerowe w kohomologii. Dla pełnej klarowności, dzieje się tak dlatego, że skoro $d \circ d = 0$ to z definicji forma zamknięta ω zachowuje wzór $d\omega = 0$ i w konsekwencji $Kd\omega = 0$. Dlatego też z powyższego wzoru pozostaje tylko $dK\omega$, która jest formą dokładną.

Gdy taki operator K istnieje, nazwany jest on *operatorem homotopii*, a operator $\pi^* \circ s^*$ jest łańcuchowo homotopijne z identycznością. Zwróćmy także uwagę, że operator homotopii obniża gradację formy o 1.

Każda forma na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ da się wyrazić jako suma następujących dwóch podstawowych typów form:

1. $(\pi^*\phi)f(x,t)$,

2. $(\pi^*\phi)f(x,t) \wedge dt$,

gdzie ϕ jest formą określoną na przestrzeni podstawowej $\mathbb{R}^n$. Zdefiniujemy teraz $K : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ na poszególnych typach form jako:

1. $(\pi^*\phi)f(x,t) \mapsto 0$,
2. $(\pi^*\phi)f(x,t) \wedge dt \mapsto (\pi^*\phi)\int_0^t f$.

Przystąpimy teraz do sprawdzenia, że K jest rzeczywiście operatorem homotopii. Dla uproszczenia dalszych wzorów zastosujemy uproszczenie notacji. Będziemy pisać $\partial f/\partial x$ zamiast $\sum \partial f/\partial x^i dx^i$ oraz $\int g$ zamiast $\int g(x,t)dt$.

Korzystając z tej notacji, sprawdzamy dla q-formy typu 1:

$$\omega = (\pi^*\phi) \cdot f(x,t)$$
$$(1 - \pi^*s^*)\omega = (\pi^*\phi) \cdot f(x,t) - \pi^*\phi \cdot f(x,0)$$
$$(dK - Kd)\omega = -Kd\omega = -K\left((d\pi^*\phi)f + (-1)^q\pi^*\phi\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial t} \wedge dt\right)\right) =$$
$$(-1)^{q-1}\pi^*\phi\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} = (-1)^{q-1}\pi^*\phi[f(x,t) - f(x,0)].$$

Zestawiając powyższe równości możemy więc napisać

$$1 - \pi^*s^* = (-1)^{q-1}(dK - Kd)$$

dla form typu 1.

Zbadajmy formułę homotopii dla q-form typu 2:

$$\omega = (\pi^*\phi)f dt$$
$$d\omega = (\pi^*d\phi)f dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx \wedge dt$$

$$(1 - \pi^*s^*) = \omega \text{ ponieważ } s^*(dt) = d(s^*) = d(0) = 0$$
$$Kd\omega = (\pi^*d\phi)\int_0^t f + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)dx \wedge (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x})$$
$$dK\omega = (\pi^*d\phi)\int_0^t f + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)\left[dx \wedge (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}) + f dt\right],$$

i podsumowując zachodzi wzór

$$(dK - Kd)\omega = (-1)^{q-1}\omega.$$

W obu przypadkach mamy więc

$$1 - \pi^* \circ s^* = (-1)^{q-1}(dK - Kd).$$

Podsumowując, wnioskiem jest

Wniosek 3.3.1. *Przekształcenia* $H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} H^*(\mathbb{R}^n)$ *są izomorfizmami.*

Możemy także dzięki tym obserwacjom policzyć kohomologie $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 3.3.2. *(Lemat Poincaré)*

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(punkt) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{dla wymiaru 0} \\ 0 & \textit{dla wszyskich innych przypadków} \end{cases}$$

Możemy teraz uogólnić powyższy prostszy przypadek na przypadek dowolnej rozmaitości. Rozważmy mianowicie

$$M \times \mathbb{R}^1 \underset{\pi}{\overset{s}{\leftrightarrows}} M$$

Jeśli U_α jest atlasem dla M, wtedy $U_\alpha \times \mathbb{R}^1$ jest atlasem $M \times \mathbb{R}^1$. Ponownie można zauważyć, że każda forma na $M \times \mathbb{R}$ jest kombinacją liniową dwóch przedstawionych powyżej typów form. Możemy więc zdefiniować operator homotopii K w taki sam sposób jak wcześniej. Wtedy można będzie przepisać wcześniejszy dowód zamieniając $\mathbb{R}^n$ na M i będzie on nadal poprawny. Stąd dostajemy mocniejszy fakt, że $H^*(M \times \mathbb{R}^1) \cong H^*(M)$, gdzie izomorfizmy przeciwne to $\pi^* \circ s^*$. Możemy też w końcu udowodnić Propozycję 3.3.1.

Wniosek 3.3.3. *Homotopijne funkcje indukują tę samą mapę w kohomologii.*

Dowód. Na potrzeby argumentu przypomnijmy definicję homotopii. Niech N, M będą rozmaitościami. Homotopią pomiędzy dwoma funkcjami $f, g : M \to N$ nazywamy funkcję $F : M \times \mathbb{R} \to N$ taką, że

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } t \geq 1 \\ g(x) & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

□

Równoważnie jeśli $s_0, s_1 : M \to M \times \mathbb{R}^1$ są 0-włożeniem $s_0(x) = (x, 0)$ i 1-włożeniem $s_1(x) = (x, 1)$, wtedy zachodzi

$$f = F \circ s_1$$
$$g = F \circ s_0$$

a stąd także

$$f^* = (F \circ s_1)^* = s_1^* \circ F^*$$
$$g^* = (F \circ s_0)^* = s_0^* \circ F^*.$$

Skoro więc zarówno s_1^*, jak i s_0^* odwracają π^*, więc są one równe w kohomologiach. Stąd zachodzi równoważny tezie wzór

$$f^* = g^*.$$

Aby podkreślić dokładnie w jaki sposób implikuje to naszą tezę, przytoczę definicję rozmaitości homotopijnie równoważnych. O rozmaitościach M, N powiemy, że są homotopijnie równoważne, gdy istnieją funkcje $f : M \to N$ oraz $g : N \to M$ takie, że $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są homotopijne do identyczności odpowiednio na M oraz N.

Rozdział 4

Kohomologie f-stożka

W tym rozdziale przedstawione jest najważniejsze twierdzenie pracy, porównujące kohomologie f-stożka z kohomologiami jego podstawy M. Jako, że $\mathrm{C}^f M$ jest dyfeomorficzne z$M \times R$, chcemy porownac $H^*(M \times \mathbb{R})$ z $H^*(C_f M)$ uzywajac π^* i korzystajac z formuly (*). Aby móc skorzystać z tego mechanizmu, musimy kontrolować normę formy, na którą podziałaliśmy operatorem homotopii. W rozdziale tym zakładać będę, że formy na których pracuję są gładkie. Nie jest to konieczne, jednak wymagałoby to korzystania z bardziej skomplikowanej deficji różniczkowania - różniczki w sensie prądów. Z tego sposobu korzysta między innymi praca [Weber]. Obliczenie jest wykonane sposobem prezentowanym między innymi w pracach [Cheeger], [Youssin], [Kirwan, Woolf], [Weber].

Definicja 4.0.2 (f-stożek)**.** Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemannowską. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_{\geq 0} \times M$. Określmy na tym produkcie tensor Riemannowski zadany przez wzór $dt^2 + f^2(t)g$, gdzie g jest metryką na M. Przestrzeń taką nazywamy **f-stożkiem**. Oznaczać ją będziemy symbolem $\mathrm{C}^f M$.

Twierdzenie 4.0.1. *Niech M, g będzie rozmaitością Riemannowską, a $\mathrm{C}^f M$ określonym dla niej f-stożkiem dla $f = e^{-t}$. L_p-kohomologie tych dwóch przestrzeni są w następującej relacji*

$$H^k_{(p)}\left(\mathrm{C}^f M\right) = \begin{cases} H^k(M) & k < \frac{n}{p} + 1 \\ 0 & k \geq \frac{n}{p} + 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Dowód tego twierdzenia oraz zmierzające do tego definicje i lematy są treścią tego rozdziału.

4.1. Norma L_p formy różniczkowej. L_p-kohomologie.

Definicja 4.1.1 (L_p-norma formy różniczkowej)**.** p-normą dla k-formy ω na rozmaitości Riemannowskiej M nazwiemy

$$||\omega||^p = \int_M |\omega|^p_x d\mathrm{vol}_g(x). \tag{4.2}$$

Formę należącą do tej przestrzeni będziemy nazywać formą p-całkowalną.

Zajmiemy się pewną modyfikacją kohomologii de Rhama - L_p-kohomologiami. Będziemy rozważać elementy tego samego kompleksu łańcuchowego co w kohomologiach de Rhama, lecz z dodanym warunkiem p-całkowalności form. Głównym obiektem naszego zainteresowania są przestrzenie $L_p^k = \omega \in \Omega^k(M) : ||\omega|| < \infty$, gdzie $|| \cdot ||$ to norma (całka) z formy, która będzie przedstawiona powyżej. Ograniczenie naszych rozważań do form, które są p-całkowalne pozwala nam rozszerzyć klasę przestrzeni, które badamy. Przy dobrym doborze funkcji wagowej, którą ważymy metrykę Riemannowską na części nieosobliwej, możemy bowiem rozważać rozmaitości z osobliwościami.

4.2. Uogólnione nierówności Hardy'ego

Kluczowa w dalszych obliczeniach będzie nierówność, Hardy'ego łącząca całkowalność funkcji z całkowalnością jej funkcji pierwotnej.

Twierdzenie 4.2.1 (Uogólnione nierówności Hardy'ego)**.** *Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, funkcje-wagi $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $p > 1$. Równości*

$$\int_0^\infty \left|\phi(x) \int_0^x f(t)dt\right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x) f(x)|^p \, dx \tag{4.3}$$

$$\int_0^\infty \left|\phi(x) \int_x^\infty f(t)dt\right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x) f(x)|^p \, dx \tag{4.4}$$

zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio dla 4.3 zachodzi

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^\infty |\phi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x |\psi(t)|^{-q} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

a dla 4.4 zachodzi

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x |\phi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_x^\infty |\psi(t)|^{-q} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia pomijam. Jest on dostępny w pracy [Muckenhoupt]. □

Twierdzenie 4.2.2. *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dla $\alpha > 0$ $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$.*

Dowód. Wykorzystamy uogólnioną nierówność Hardy'ego. Załóżmy $\psi(t) = \phi(t) = e^{-\frac{t}{p}}$. Wtedy jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ oraz $-q = \frac{p}{1-p}$. Zbadajmy teraz, czy spełniony jest warunek, aby zachodzić mogła nierówność Hardy'ego, część 4.3:

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^\infty e^{-t} dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x e^{-t\frac{1}{1-p}} dt\right]^{\frac{p-1}{p}} = \sup_{x>0} C e^{-\frac{x}{p}} \left(e^{\frac{x}{p-1}} - 1\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$C \sup_{x>0} \left(e^{-\frac{x}{p-1}} e^{\frac{x}{p-1}} - e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = C \sup_{x>0} \left(1 - e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Wyrażenie to jest ograniczone dla $p > 1$. Po zastosowaniu uogólnionej nierówności Hardy'ego i ewentualnym przeskalowaniu zmiennej x do αx otrzymujemy tezę. □

Zmodyfikujemy powyższe twierdzenie, tak aby rozważać funkcję pierwotną $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ oraz $\alpha < 0$.

Twierdzenie 4.2.3. *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$. Dla $\alpha < 0$ $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$.*

Dowód. Dowód będzie bardzo podobny do poprzedniego. Dokonamy zmiany znaku, aby uwzględnić zmianę parametru α i założymy $\psi(t) = \phi(t) = e^{\frac{t}{p}}$. Wykorzystamy nierówność 4.4. W tym celu musimy sprawdzić jej warunek konieczny i wystarczający:

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x e^t dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_x^\infty e^{t\frac{-1}{p-1}} dt\right]^{\frac{p-1}{p}} = \sup_{x>0} \left[e^x - 1\right]^{\frac{1}{p}} (p-1)^{\frac{p-1}{p}} \left(e^{t\frac{-x}{p}} dt\right) = \sup_{x>0} C\left[1 - e^{-x}\right] < +\infty$$

Stosujemy nierówność 4.4 i po przeskalowaniu x przez dodatni czynnik $-\alpha$ otrzymujemy tezę. □

4.3. Obliczenie L_p kohomologii f-stożka

Definicja 4.3.1. Niech $L_p^k M$ oznacza przestrzeń gładkich p-całkowalnych k-form różnikowych z mierzalnymi współczynnikami.

Możemy teraz poczynić obserwację o formach różniczkowych określonych na f-stożku. Przestrzeń styczna do $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t, m) to:

$$T_{(t,m)}(\mathrm{c}^f M) = \mathbb{R} \times T_m M.$$

W terminach form różniczkowych powiązanych z rozważanym f-stożkiem oznacza to, że możemy napisać:

$$\Lambda^k(T^*_{(t,m)}\mathrm{C}^f M) = \Lambda^{k-1}(M) \oplus \Lambda^k(M).$$

Spostrzeżenie to możemy wyrazić także w inny sposób:

Uwaga 4.3.1. Każda k-forma $\omega \in \Lambda^k(T^*_{(t,m)}\mathrm{C}^f M)$, a w konsekwencji każda forma z przestrzeni form p-całkowalnych $L_p^k(\mathrm{C}^f M)$ może być zapisana jako $\omega = \eta + \xi \wedge dt$, gdzie zarówno η, jak i ξ nie zawierają dt. Zauważmy ponadto, że η jest k-formą, a ξ jest $k-1$ formą.

Ustalmy także dla klarowności nieco inną notację dotyczącą zapisywania form różniczkowych względem lokalnych współrzędnych, która pozwoli nam lepiej zilustrować istotne dla nas elementy rozumowania. Dowolną k-formę η, która w domyśle nie zawiera czynnika dt, zapisywać będziemy względem lokalnych rzeczywstich współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ na M jako:

$$\eta(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha,$$

gdzie $I(k)$ jest zbiorem wszystkich multiindeksów $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ takich, że $1 \leq \alpha_1 < ... < \alpha_i \leq n$, gdzie

$$dx^\alpha = dx^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dx^{\alpha_k}, \tag{4.5}$$

a η_α jest gładką funkcją określoną na $(0, \infty) \times M$.

Przypomnijmy w tym miejscu, że $\mathrm{C}^f M$ oraz $M \times R_+$ są dyfeomorficzne. Naszym planem będzie teraz zastosowanie wniosku 3.3.1 przy zachowaniu kontroli nad normą, aby nie wyjść poza przestrzeń L_p.

Pomiędzy rozmaitościami M oraz $\mathrm{C}^f M$ istnieją kanoniczne przekształcenia projekcji oraz inkluzji. Żeby dobrze zilustrować w sposób w jaki działają one na formy różniczkowe na poszczególnych rozmaitościach, przypomnijmy ich typy. Inkluzja to funkcja:

$$i_r : M \to \mathrm{C}^f M$$

$$i_r(x) = (x, r).$$

Możemy za jej pomocą przeciągać formy z $\mathrm{C}^f M$ do M. Przeciągnięcie takie oznaczymy jako $\omega_r = i_r^*(\omega) = i_r^*(\eta)$ dla formy $\omega = \eta + \xi \wedge dt$.
Projekcja (rzutowanie) zadane jest jako:

$$\pi : \mathrm{C}^f M \to M$$

$$\pi(x, t) = x.$$

Rozważamy formę $\omega \in L_p^k(\mathrm{C}^f M)$, gdzie $\omega = \eta + \xi \wedge dt$. Zauważmy, że metryka Riemannowska na $\mathrm{C}^f M$ jest określona w taki sposób, że stosowne normy spełniają następujące zależności:

$$|\eta(t,x)|^2 = (\mathrm{e}^{-t})^{-2k} |\eta(t,x)|_M^2 + (\mathrm{e}^{-t})^{-2(k-1)} |\xi(t,x)|_M^2,$$

gdzie $|\cdot|_M$ jest normą form różniczkowych indukowaną przez metrykę Riemannowską na rozmaitości M. Czynnik $(\mathrm{e}^{-t})^{-2k}$ pojawia się ponieważ forma η należy do k-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej do rozmaitości $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t, x).

Zbadamy teraz w jaki sposób zachowują się normy form przeciągniętych projekcją π na $\mathrm{C}^f M$. Niech ω będzie k-formą na M, którą można zapisać w lokalnych współrzędnych $(x^1, ..., x^n)$ jako

$$\omega(x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \omega_\alpha(t,x) dx^\alpha.$$

Po przeciągnięciu forma $\pi^*\omega$ na $\mathrm{C}^f M$ jest dana w lokalnych współrzędnych $(t, x^1, ..., x^n)$ dokładnie tym samym wzorem

$$\pi^*\omega(t,x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \omega_\alpha(t,x) dx^\alpha.$$

Zauważmy, że Riemannowska forma objętości na $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t, x) różni się od formy objętości na M w punkcie x o czynnik $(e^{-t})^n$. Policzmy więc normę $\pi^*\omega$ jako elementu przestrzeni $L_k^p(\mathrm{C}^f M)$.

$$||\pi^*\omega||^p = \int_{\mathrm{C}^f M} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{C}^f M} = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} \int_M |\omega|^p d\mathrm{vol}_M dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} ||\omega||_M dt = \int_0^\infty ||\omega||_t^p dt,$$

gdzie

$$||\omega||_r \stackrel{\mathsf{def}}{:=} ||\omega_{|M \times \{r\}}|| = \mathrm{e}^{-r \cdot (\frac{n}{p} - k)} ||\omega||_M.$$

Zauważmy teraz w jaki sposób zachowywać się będzie norma formy, która została przeciągnięta z podstawy, czyli rozmaitości M. Dla $\eta \in L_p^*(M)$ możemy napisać

$$||\eta||_r \overset{\mathsf{def}}{:=} ||\pi^*||_r = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k)}||\eta||_M.$$

Wniosek 4.3.1. *Całkowalność formy π^* jest określona następującym warunkiem:*

$$||\pi^*\omega|| < \infty \iff k < \frac{n}{p}.$$

Zgodnie z TUTEJ odnośnik do rozdziału wcześniej ... zachodzi formuła (i istnieje stosowny operator I_r):

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega + I_r d\omega$$

Zbadamy kiedy dla p-całkowalnej formy ω forma $I_r\omega$ także jest całkowalna. Fakt, że forma jest p-całkowalna oznacza innymi słowy, że

$$||\omega||^p = \int_{\mathrm{C}^f M} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{C}^f M} = \int_0^\infty \int_M \left((e^{-t})^{-pk}|\eta^{(t)}|_M^p + (e^{-t})^{-p(k-1)}|\xi^{(t)}|_M^p\right)(e^{-t})^n dt < \infty.$$

Przypomnijmy, że czynnik $(e^{-t})^n$ pochodzi od skalowania formy objętości, a czynniki $p \cdot k$ pochodzą od tego, że forma jest w k-tej potędze zewnętrznej, a norma podniesiona jest do p-tej potęgi.

$I_r\omega$ jest $(k-1)$ formą. Napiszemy analogicznie:

$$||I_r\omega||^p = \int_{\mathrm{C}^f M} |I_r\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{C}^f M} = \int_0^\infty \int_M (e^{-t})^{n-p(k-1)} \left|\int_r^t |\xi^{(\tau)}|_M^p d\tau\right| dt.$$

Wykorzystamy teraz lemat, który udowodniony został w dodatku, przyjmując funkcję $f = |\xi^{(\tau)}|^p$, a za jej funkcję pierwotną $F = \int_r^t |\xi^{(\tau)}|^p d\tau$.
Komentarz: zacytować właściwy lemat

Lemat możemy wykorzystać, tylko wtedy gdy współczynnik przy e^{-t}, nazwijmy go α, jest większy od zera. Ten współczynnik to: $\alpha = -p(k-1) + n$. Zbadajmy warunek:

$$-p(k-1) + n > 0$$

$$-k + 1 + \frac{n}{p} > 0$$

$$k < \frac{n}{p} + 1.$$

Warunek pozwalający na wykorzystanie lematu jest więc spełniony dla $k \le \frac{n}{p}$.

Gdy warunek ten jest spełniony, stosujemy Lemat4.2.1, wykorzystujący nierówność Hardy'ego i uzyskujemy rezultat, że $I_r\omega$ jest formą p-całkowalną.
Innymi słowy udowodniliśmy, że zachodzi

Wniosek 4.3.2. *I_r jest operatorem ciągłym w normie L_p dla gradacji $k \leq \frac{n}{p}$*

Pokazaliśmy więc, że jeśli ω jest k-formą p-całkowalną, to $I_r\omega$ jest p-całkowalna i zachodzi wzór

$$\omega = dI_r\omega + I_r d\omega + \pi^*\left(\eta^{(s)}.\right).$$

Stąd jeśli $d\omega = 0$, to

$$\eta \in d(L^{i-1}\mathrm{C}^f M) + \pi^*(L^i * M),$$

więc

$$\pi^* : H\left(M\right) \to H(\mathrm{C}^f M),$$

jest operatorem suriektywnym. Dzieje się tak ponieważ każda forma zamknięta należy zgodnie z 4.3 z dokładnością do formy dokładnej do obrazu π^*. A więc dowolna klasa abstrakcji form zamkniętych ω znajduje się w obrazie tego operatora, co jest definicją suriektywności.

Udowodnimy teraz iniektywność. Jako, że zachodzi $d^2 = 0$ dla równiania 4.3 możemy napisać

$$\begin{aligned} d\omega &= d(I_r d\omega) + d\pi^*(\eta^{(s)}) \\ &= d(I_r d\omega) + \pi^*(\eta^{(s)}). \end{aligned}$$

Z definicji operatora I_r wynika natychmiast, że jeśli $d\omega \in \pi^*(L_i(M))$, to $Hd\omega = 0$. Stąd $d\omega = d\pi^*(\eta^{(s)})$, a skoro d komutuje z π^*, to widzimy, że każda forma dokładna jest obrazem formy dokładnej. Każdy operator liniowy $\phi : V \to W$ jest różnowartościowy, gdy $\ker \phi = 0_V$. Ma to miejsce dla operatora π^*, ponieważ na formy dokładne przechodzą jedynie formy dokładne, co wynika wprost z pokazanych powyżej własności.

Komentarz: Nie jestem pewien czy to dokładnie stąd wynika iniektywność

Chcemy teraz pokazać, że dla $k > \frac{n}{p}$ mamy $H^*_p(\mathrm{C}^f M) = 0$ dla $k \geq \frac{n}{p}$. Niech ϕ będzie p-całkowalną k-formą na $\mathrm{C}^f M$. Dla określonego $a > 0$ możemy napisać, korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$\begin{aligned} \left(\int_0^a \int_M |\phi^{(t)}|^p_M dt\right) &\leq \left(\int_0^\infty \int_M (e^{-t})^{n-pk} |\phi^{(t)}|^p dt\right) \left(\int_0^a \int_M (e^{-t})^{pk-n} dt\right) \\ &= ||\phi||^p_{\mathrm{C}^f M} \left(\int_M 1\right) \left(\frac{(e^{-a})^{pk-n} - 1}{n - pk} < \infty\right) \end{aligned}$$

Z powyższego wzoru wynika, że całka $\int_0^\infty \int_M |\phi^{(t)}|^p_M$ istnieje dla $k \geq \frac{n}{p}$ i także dla prawie wszystkich *Komentarz: Dlaczego prawie wszystkich? Pomyśleć $x \in M$* całka

$$\int_0^t \phi = \int_0^t \phi^{(\tau)} d\tau$$

istnieje dla $t \in (0, \infty)$.

Zbadajmy teraz przypadek dla $k \geq \frac{n}{p} + 1$.

Na potrzeby tego przypadku należy określić inny operator homotopii. Dzieje się tak ponieważ niektóre formy po zadziałaniu na nie starym operatorem nie będą p-całkowalne. Na podstawie lematu 4.4 możemy jednak zdefiniować operator całkowania od t do ∞.

Bierzemy więc tak jak p-całkowalną k-formę $\omega = \eta + dt \wedge \xi$ i gdy $k - 1 \geq \frac{n}{p}$, definiujemy operator homotopii jako

$$I_\infty \omega = \int_t^\infty \xi.$$

oraz pomocnicze operatory

$$I_r \omega = \int_t^r \xi.$$

Pomocnicze operatory wykorzystamy do modyfikacji lematu o formule homotopii. *Komentarz: Dać odnośnik.*

W szczególności, w lemacie tym badaliśmy wyrażenia typu $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} = f(x,t) - f(x,0)$. W przypadku nowego operatora I_∞, wyrażenia te przyjmują postać $\int_t^\infty \frac{\partial f}{\partial t}$ i niekoniecznie muszą zezwalać na zcałkowanie różniczki, czyli na zastosowanie wariantu podstawowego twierdzenia rachunku całkowego. Konkretniej, granica funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$ niekoniecznie musi być skończona. Jednak dla dowolnego r pomocniczy operator I_r spełnia równanie homotopii. *Komentarz: Dać odnośnik.* Jedyny sposób w jaki zmienia się dowód tej formuły dla I_r, to wspomiane granice całkowania w dowodzie: z $\int_0^t$ na $\int_t^r$. Zbiegając $r \to \infty$, w granicy otrzymujemy formułę homotopii postaci:

$$\omega = dI_\infty \omega + I_\infty d\omega.$$

Warto jednak zwrócić uwagę, że zakładamy tu gładkość formy $I_\infty \omega$, aby móc przybliżać $I_\infty \omega$ formami $I_r \omega$ dla $r \to \infty$.

Komentarz: Zwróć uwagę, że $s_t^* \omega = \omega_t$ to po prostu dwie różne notacje.

$$||\omega_s|| \to 0,$$

ponieważ dla każdego r formuła homotopii jest prawdziwa, a jednocześnie prawdziwy jest wzór

$$||\omega||^p = \int_0^\infty e^{\alpha t} ||\omega_t||^p dt,$$

dla $\alpha > 0$ i jako, że $e^{\alpha t} \to \infty$, $||\omega_t||^p$ musi dążyć do 0. Formą o normie zero jest jedynie forma zerowa, więc operator s_r^* to asymtpotycznie operator zerowy.

Formuła 4.3 oznacza w szczególności, że gdy $d\omega = 0$ to $\omega = dI_\infty \omega$. Innymi słowy każda forma zamknięta jest formą dokładną, a więc wszystkie formy danej grupie kohomologii należą do jednej klasy abstrakcji i $H^i(\mathrm{C}^f M) = 0$, gdy $k \geq \frac{n}{p}$.

Jeżeli forma $I_\infty \omega$ nie jest gładka, to sytuacja jest bardziej skomplikowana. Można pokazać, że formuła homotopii zachodzi korzystając z różniczek w sensie “prądów,” ang. *currents* tak, jak przedstawiono w pracach [Weber], [Cheeger], jest to jednak dużo trudniejsze.

Bibliografia

[Weber] Andrzej Weber, *An isomorphism from intersection homology to* L_p*-cohomology*, Forum Mathematicum, de Gruyer, 1995.

[Cheeger] Jeff Cheeger, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol.36,

[Kirwan, Woolf] Frances Kirwan, Jonathan Woolf, *An Introduction to Intersection Homology Theory*, Taylor & Francis, LLC.

[Bott,Tu] Raou Bott, *Differetial forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.

[Kostrikin] Aleksiej I. Kostrikin, *Wstęp do algebry. Tom II: Algebra liniowa*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2012.

[Youssin] Boris Youssin, L_p *cohomology of cones and horns* J. Differential Geometry, Volume 39, Number 3, 1994.

[Lee] Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*

[Muckenhoupt] Benjamin Muckenhoupt, *Hardy's inequality with weights*, Studia Mathematica, T. XLIV, 1972