

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Michał Garmulewicz**

Nr albumu: 304742

$L_p$ -kohomologie  $f$ -stożków  
Riemannowskich.

Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra hab. Andrzeja Webera**  
Instytut Matematyki

Maj 2015

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

W tej pracy licencjackiej opisane jest obliczenie  $L_p$ -kohomologii rozmaitości Riemannowskich.

## **Słowa kluczowe**

kohomologie de Rhama, topologia różniczkowa

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.0 Matematyka, Informatyka:

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

14 Algebraic Geometry

14F (Co)homology theory

14F40 de Rham cohomology

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

$L_p$ -cohomologies of Riemannian  $f$ -horns.



# Spis treści

<b>1. Wstęp</b> . . . . .	5
<b>2. Podstawy</b> . . . . .	7
2.1. Algebra zewnętrzna . . . . .	7
2.2. Formy różniczkowe . . . . .	8
2.3. Skalowanie norm przestrzeni wektorowych i tensorów . . . . .	9
2.4. Metryka Riemannowska i forma objętości . . . . .	9
2.5. Norma formy różniczkowej . . . . .	11
2.6. Przekształcenie indukowane, kohomologie de Rhama oraz formuła homotopii .	12
2.7. Uogólniona nierówność Hardy’ego . . . . .	15
<b>3. Obliczenie</b> . . . . .	17
3.1. Co pan Weber kazał mi zrobić . . . . .	21
<b>Bibliography</b> . . . . .	23



# Rozdział 1

## Wstęp

W pracy [Weber] prezentowane jest między innymi obliczenie  $L_p$ -kohomologii stożka nad pseudorozmaitością Riemannowską.

Na stożku tym określona jest metryka postaci  $dt \otimes dt + t^2 g$ , gdzie  $g$  jest metryką na części nieosobliwej wyjściowej pseudorozmaitości. W dalszej części wspomnianej pracy obliczana jest  $L_p$ -kohomologia wspomnianej przestrzeni.

W tej pracy licencjackiej przedstawiam drobną modyfikację tych pojęć do  $e^{-t}$ -stożków Riemannowskich, czyli przestrzeni będących produktem rozmaitości Riemannowskiej oraz półprostej na której określono metrykę  $dt \otimes dt + (e^{-t})^2 g$ .





## Rozdział 2

# Podstawy

W rozdziale tym przytaczam definicje i wyprowadzam prostsze zależności, które pomogą nam w dalszych obliczeniach.

### 2.1. Algebra zewnętrzna

W tej sekcji przytaczam definicje form różniczkowych oraz ich proste własności. Formy różniczkowe są ważnym narzędziem, pozwalającym przenieść wiele wyników z analizy rzeczywistej na rozmaiwości tak, aby sformułowania nie były zależne od wyboru konkretnych współrzędnych na rozważanej rozmaiwości.

Niech  $V$  będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Tensor kowariantny  $T : V \times \dots V \rightarrow$  będzie nazwany *alternującym* gdy jego wartość zmieni znak w przypadku zmienimy miejscami jego dwa wektory wejściowe. Takie tensory mają wiele nazw: *formy zewnętrzne*, *multi-kowektory*, czy też po prostu  $k$ -kowektory. Przestrzeń wszystkich  $k$ -kowektorów na przestrzeni  $V$  ma wiele oznaczeń. Jednym z bardziej popularnych oznaczeń jest  $T^k(V^*)$ . Przestrzeń takich tensorów, które należą do  $T^k(V^*)$ , a do tego są antysymetryczne, często oznaczają się  $\Lambda^k(V^*)$ .

Dla dwóch tensorów kowariantnych, czyli mających za argumenty jedynie wektory  $f \in T^p(V^*)$ ,  $g \in T^q(V^*)$  możemy określić produkt  $f \otimes g \in T^{p+q}(V^*)$  za pomocą wzoru:

$$f \otimes g(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) \cdot g(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}).$$

Dowolny kowariantny tensor możemy przekształcić na tensor alternujący za pomocą przekształcenia *alternatora*, nazywanego także *rzutem alternującym*. Jest on określony w następujący sposób:

$$\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$$
$$\text{Alt}(f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Z pomocą alternatora określić można iloczyn zewnętrzny antysymetryczny. Dla elementów  $\omega \in \Lambda^p(V^*)$  oraz  $\eta \in \Lambda^q(V^*)$ , ich iloczyn zewnętrzny zadamy wzorem

$$\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Przytoczmy teraz sposób, w jaki definiuje się bazę potęgi zewnętrznej  $\Lambda^k(V^*)$ . Niech  $v_1, v_2, \dots, v_n$  będzie bazą przestrzeni dualnej  $V^*$ , która jest dualna do bazy  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Wówczas układ

$$B = \{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

jest bazą potęgi zewnętrznej  $\Lambda^k(V^*)$ . Warto zauważyć, że implikuje to  $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$  *Komentarz: można zamieścić tu dowód powyższej własności*

Aby uczynić zadość tytułowi tego podrozdziału, zdefiniujemy *algebrę zewnętrzną*. Jest to suma prosta:

$$\Lambda^*(V) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*) \oplus \dots,$$

z działaniami dodawania oraz iloczynu zewnętrznego.

## 2.2. Formy różniczkowe

Poniższe definicje są przytoczone w formie opartej na notatkach [Duszenko]. *Komentarz: w jaki sposób można ctować takie niepublikowane notatki? Nie wypada ich po prostu nie cytować*

Rozważamy rozmaitość  $M$ . Dla dowolnej przestrzeni kostycznej  $T_p^*M$  rozpatrzmy jej potęgę zewnętrzną  $\Lambda^k(T_p^*M)$ . Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń liniową nad każdym punktem  $p \in M$ . Ich sumę rozłączną oznaczmy  $\Lambda^k(T^*M)$ . Przestrzenie te, określone nad każdym punktem z osobna, można skleić do wiązki wektorowej. *Komentarz: może pokazać jak?*

**Definicja 2.2.1** (Forma różniczkowa).  $k$ -formą różniczkową na rozmaitości  $M$  nazwiemy gładkie cięcie wiązki  $\Lambda^k(T^*M)$  nad  $M$ , czyli gładkie odwzorowanie  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(T^*M)$ , czyli gładkie odwzorowanie  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(T^*M)$ , spełniające  $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p^*)$  dla każdego punktu  $p \in M$ .

Przestrzeń  $k$ -form różniczkowych oznaczać będziemy przez  $\Omega^k(M)$

Określmy teraz kluczowe dla dalszych kroków naszego rozumowania pojęcie *pochothanej zewnętrznej* formy różniczkowej. Operacja ta ma typ  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ . Pozwala to patrzeć na nią, w dalszej części rozumowania, jako na operator w ciągu łańcuchowym, gdzie elementami ciągu są  $\Omega^k(M)$  albo podprzestrzenie tej przestrzeni mające szczególne własności.

Aby nadać nieco więcej intuicji definicji, przypomnimy najpierw definicję różniczki funkcji, czyli operację  $d : C^\infty = \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ . Niech  $f$  będzie funkcją gładką na  $M$ , a  $x$  - układem współrzędnych. Na dziedzinie tego układu określimy różniczkę  $df$  wzorem

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Dla form o wyższej gradacji określamy pochodną zewnętrzną w następujący sposób. Niech  $\omega = \sum_{j \in I} \alpha_{j_1, \dots, j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ , a wtedy różniczką  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  jest dana jako

$$d\left(\sum_{j \in I} \alpha_{j_1, \dots, j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}\right) = \sum_{j \in I} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{j_1, \dots, j_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

### 2.3. Skalowanie norm przestrzeni wektorowych i tensorów

W dalszych obliczeniach będziemy badać wyrażenia typu  $r|\cdot|$ , gdzie  $|\cdot|$  jest normą na skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej. Znaczenie będzie miało jak zachowuje się norma na przestrzeni dualnej, gdy skalujemy normę wyjściowej przestrzeni liniowo o czynnik  $r$ .

Rozważać będziemy skończonej wymiarową przestrzeń wektorową  $V$  z daną metryką  $\|\cdot\|$  i zdefiniujemy na niej nową metrykę  $\|\cdot\|_r \stackrel{\text{def}}{=} r\|\cdot\|$ . Wtedy w przestrzeni  $(V, \|\cdot\|_r)^*$  dualnej do  $(V, \|\cdot\|)$  norma skaluje się przez współczynnik  $\frac{1}{r}$ . Oznacza to, że dla  $\varphi \in V^*$  otrzymamy skalowanie  $\|\varphi\|_r = \frac{1}{r}\|\varphi\|$ .

Poczynimy tu jeszcze jedną obserwację, która pomoże nam w dalszych obliczeniach. Rozważmy  $n$ -wymiarową rozmaitość Riemannowską  $M$  oraz jej przestrzeń styczną  $T_x M$  i kostyczną  $T_x^* M$  w punkcie  $x$ . Niech bazami ortogonalnymi tych przestrzeni będą  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oraz dualna  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ . Chcemy teraz obliczyć w jaki sposób formy z  $\Lambda(M)$  skalują się ze względu na taką zmianę w normie.

Załóżmy że rozważamy przestrzeń  $k$ -form na  $M$  w pewnym punkcie rozmaitości. Wtedy każda  $k$  forma może być lokalnie wyrażona w bazie składającej się z produktów kowektorów należących do bazy dualnej do bazy standardowej. Oznacza to, że każda  $k$ -forma w punkcie  $x$  może być zapisana, korzystając z lokalnych współrzędnych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jako  $\sum_{I \in I} a_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , gdzie  $I$  jest zbiorem  $k$ -indeksów postaci  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , dla  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

Popatrzmy w jaki sposób skalują się wektory bazowe. Przy założeniu ortogonalności zachodzi:

$$\begin{aligned} \|dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\|_t &= \|dx_{i_1}\|_t \cdot \|dx_{i_2}\|_t \cdot \dots \cdot \|dx_{i_k}\|_t = \\ &= \frac{1}{t} \|dx_{i_1}\| \cdot \frac{1}{t} \|dx_{i_2}\| \cdot \dots \cdot \frac{1}{t} \|dx_{i_k}\| = \frac{1}{t^k} \|dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\| \end{aligned}$$

Oznacza to, że każda  $k$  forma skaluje się przez  $1/t^k$  gdy metryka jest skalowana przez czynnik  $t$ . Obserwację tą możemy także zaplikować do formy objętości, opisywanej w dalszych częściach otrzymując:

$$d\text{vol}_t = \frac{1}{t^n} d\text{vol}$$

### 2.4. Metryka Riemannowska i forma objętości

**Metryką Riemannowską** nazwiemy gładkie, symetryczne kowariantne pole 2-tensorów na rozmaitości  $M$  które jest dodatnio określone w każdym punkcie. Mówiąc bardziej intuicyjnie, określenie metryki Riemannowskiej to doczepienie pola iloczynów skalarnych do rozmaitości,

które zmienia się w sposób gładki.

W dowolnych lokalnych gładkich współrzędnych  $(x^i)$  metryka Riemannowska może być zapisana jako

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

gdzie  $g_{ij}$  jest dodatnio określoną macierzą (której współrzędne to funkcje gładkie). Ostatnia część równości zapisuje naszą metrykę w terminach produktu symetrycznego. *Komentarz: Czy potrzebne jest tu uzasadnienie?*

Biorąc pod uwagę, że w głównej części pracy rozważać będziemy rozmaitości Riemannowskie będące produktem dwóch rozmaitości Riemannowskich, zbadajmy w jaki sposób zadana będzie metryka na takiej przestrzeni produktowej. Jeżeli  $(M, g)$  oraz  $(M', g')$  będą rozmaitościami Riemannowskimi, to na  $M \times M'$  możemy zadać metrykę produktową  $\hat{g} = g \oplus g'$  w następujący sposób:

$$\hat{g}((v, v'), (w, w')) = g(v, w) + g'(v', w')$$

dla każdego  $(v, v'), (w, w') \in T_p M \oplus T_q M' \cong T_{(p,q)}(M \times M')$ . Gdy mamy dane jakieś konkretne współrzędne  $(x_1, \dots, x_n)$  dla  $M$  oraz  $(y_1, \dots, y_m)$  dla  $M'$ , to dostajemy prosto lokalne współrzędne  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  na  $M \times M'$  i nietrudno sprawdzić, że metryka produktowa jest lokalnie reprezentowana przez macierz blokowo diagonalną

$$\hat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g'_{ij} \end{pmatrix}$$

Warto także zapisać dla lokalnych współrzędnych Riemannowską formę objętości.

**Uwaga 2.4.1.** Niech  $(M, g)$  będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru  $n$ , z brzegiem lub bez brzegu. W dowolnych zorientowanych gładkich współrzędnych  $(x_i)$ , Riemannowska forma objętości może być wyrażona lokalnie w następujący sposób:

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

*Komentarz: a może tutaj dowód tego?*

Do naszych dalszych obliczeń potrzebna nam będzie umiejętność całkowania funkcji rzeczywistych pod rozmaitościami Riemannowskich. Zdefiniujmy w tym celu stosowną całkę.

Niech  $(M, g)$  będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską. Niech  $\text{vol}_g$  oznacza jej formę objętości. Jeżeli mamy teraz  $f$  - funkcję o zwartym nośniku, rzeczywistą i ciągłą, określoną na  $M$ , to  $f \text{vol}_g$  jest  $n$ -formą. Nie odwołując się do ogólnych definicji całek z różnych typów form różniczkowych, w naszym przypadku będziemy mogli zapisać prosto, korzystając z wcześniejszych uwag dotyczących zapisu formy objętości:

$$\int_M f d\text{vol}_g = \int_{\phi(U)} f(x) \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n,$$

zakładając, że rozmaitość jest cała w obrazie jednej mapy  $\phi$ . Jeżeli bowiem tak by nie było, to musielibyśmy korzystać z wielu map  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , które opisywałyby całą rozmaitość biorąc pod uwagę gładki podział jedynek na rozmaitości.

## 2.5. Norma formy różniczkowej

Przytoczę teraz definicję normy formy różniczkowej w poszczególnych punktach rozmaitości. Niech  $(M, g)$  będzie zorientowaną, spójną rozmaitością Riemannowską. Niech  $M$  będzie rozmaitością, a  $x$  jej punktem.  $\Lambda^k T_x M$  jest przestrzenią  $k$ -liniowych funkcji alternujących:

$$\alpha_x : T_x^* M \times \dots \times T_x^* M \rightarrow \mathbb{R}$$

Przypomnijmy także, że forma zewnętrzna stopnia  $k$  jest zdefiniowana jako sekcja  $k$ -tej wiązki kostycznej.

$$\Lambda^k M = \coprod_{x \in M} \Lambda^k T_x^* M \xrightarrow{\pi} M.$$

Stąd w każdym punkcie  $x \in M$  mamy funkcję wieloliniową  $\alpha_x \in \Lambda^k T_x^* M$ . Można ją wyrazić w prostej formie. Jeśli  $(e_1, \dots, e_n)$  jest bazą  $T_x M$ , a  $(e^1, \dots, e^n)$  jest bazą dualną, możemy napisać

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

gdzie współczynniki są zadane jako  $a_{i_1 \dots i_k} = \alpha_x(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})$ .

Korzystając z powyższych spostrzeżeń, możemy wyrazić daną formę dla współrzędnych lokalnych  $x^1, \dots, x^n$  na otwartym podzbiore  $U \subset M$ . Mamy bazę  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  dla  $T_x M$  dla każdego  $x \in U$  wraz ze stowarzyszoną bazą dualną  $dx^1, \dots, dx^n$ . Ponadto, dla każdego punktu ze zbioru  $U$  możemy napisać

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Na rozmaitości Riemannowskiej posiadamy iloczyn składowy zadany na  $T_x M$  dla każdego punktu  $x \in M$ . Korzystając z niego możemy zdefiniować normę każdej  $k$ -formy  $\alpha$ . Wprowadźmy proste oznaczenie iloczynu skalarnego na  $T_x M$  przez  $\langle u, v \rangle_x = g_x(u, v)$ . Wybierzmy bazę  $(e_1, \dots, e_n)$  przestrzeni  $T_x M$  z odpowiadającą jej bazą dualną  $(e^1, \dots, e^n)$ .

Można argumentować, że możemy zawsze wybrać taką bazę tak aby była ona ortogonalna. Dzieje się tak, ponieważ możemy zawsze zastosować algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy zadanej przez różniczkowanie lokalnych współrzędnych rozmaitości.

Możemy teraz zdefiniować funkcję  $G : \Lambda^k T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dla danych dwóch form

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k; x} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

oraz

$$\beta_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \beta_{i_1 \dots i_k; x} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k},$$

określimy tę funkcję jako

$$G(\alpha_x, \beta_x) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k; x} \beta_{i_1 \dots i_k; x}.$$

Przytoczymy teraz następujący lemat, którego dowód jest dostępny na przykład w [Ducret].

**Lemat 2.5.1.** *Zdefiniowane powyżej przekształcenie  $G : \Lambda^k T_x M \rightarrow T_x M$  jest liniowe, symetryczne i dodatnio określone. Przez to jest ono iloczynem skalarnym dla każdego punktu  $x \in M$ . Nie zależy ono od wyboru konkretnej bazy  $(e_1, \dots, e_n)$  spośród baz ortogonalnych. Dodatkowo, baza  $(e^1 \wedge \dots \wedge e^n)$  jest ortonormalna dla  $G$ .*

Gdy określony mamy iloczyn skalarny na przestrzeni form, to zadaje on normę formy w punkcie rozmaitości. Dla  $\omega \in \Omega^k(M)$  oraz  $x \in M$  napiszemy

$$|\omega|_x = \sqrt{G(\omega_x, \omega_x)}.$$

Warto podkreślić tu prosty, ale istotny wniosek, że po określeniu formy  $\omega$  norma jest funkcją typu  $|\omega|_x : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Jest to warte odnotowania, ponieważ pomaga to w rozumieniu intuicji stojącej za definicją normy na całości rozmaitości Riemannowskiej. Taka norma będzie po prostu całką z normy punktowej rozważanej formy różniczkowej.

Dokładniej, możemy zdefiniować  $p$ -normę dla formy na całej rozmaitości Riemannowskiej:

$$\|\omega\|^p = \int_M |\omega|_x^p d\text{vol}_g(x) \quad (2.1)$$

## 2.6. Przekształcenie indukowane, kohomologie de Rhama oraz formuła homotopii

Rozważmy przypadek gładkiej funkcji  $F : M \rightarrow N$ , pomiędzy dwoma rozmaitościami (z brzegiem lub bez brzegu). Za pomocą tej funkcji będziemy mogli określić przekształcenie, które pozwoli nam zamieniać formy różniczkowe z rozmaitości  $N$  na formy różniczkowe z rozmaitości  $M$ . Z różniczką takiej funkcji możemy bowiem stowarzyszyć przekształcenie przeciągnięcia  $F^* : \Lambda^p N \rightarrow \Lambda^p M$ , działające w taki sposób:

$$(F^* \omega)_p(v_1, \dots, v_n) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_n)).$$

Przeciągnięcie jest też czasami nazywane cofnięciem.

Pokażemy teraz bardzo interesującą strukturę jaką mają formy różniczkowe na rozmaitości, gdy rozpatrywać je jako kompleksy z działaniem różniczkowym. W poniższym rozumowaniu, przez  $\Omega^p(M)$  oznaczać będziemy przestrzeń gładkich  $k$ -form. Niech  $M$  będzie rozmaitością z brzegiem lub bez brzegu, a  $p$  będzie nieujemną liczbą całkowitą. Ponieważ  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_{p+1}(M)$  jest przekształceniem liniowym, jego jądro oraz obraz są podprzestrzeniami liniowymi. Wprowadźmy tymczasowe oznaczenie:

$$\mathcal{Z}^p(M) = d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_{p+1}(M) = \{p\text{-formy zamknięte na } M\}$$

$$\mathcal{B}^p(M) = d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_{p+1}(M) = \{p\text{-formy dokładne na } M\}.$$

Jako konwencję przyjmuje się, że  $\Omega^p(M)$  jest zerową przestrzenią wektorową gdy  $p < 0$  lub  $p > n = \dim M$ . W związku z tym zachodzi przykładowo  $\mathcal{B}^0(M) = 0$  oraz  $\mathcal{Z}^n(M) = \Omega^n(M)$ .

Fakt, że każda forma dokładna jest zamknięta implikuje oznacza oczywiście  $\mathcal{B}^p(M) \subseteq \mathcal{Z}^p(M)$ . Stąd ma sens następująca definicja:

**Definicja 2.6.1. Grupa kohomologii de Rhama rzędu  $p$**  nazwiemy następującą ilorazową przestrzeń liniową:

$$H_{dR}^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

Jest to rzeczywista przestrzeń liniowa, i w związku z tym jest ona grupą z działaniem dodawania wektorów. Można także pokazać, że grupy de Rhama są niezmiennicze ze względu na dyfeomorfizmy. Dla każdej domkniętej  $p$ -formy  $\omega$  na  $M$  poprzez  $[\omega]$  będziemy oznaczać klasę równoważności formy  $\omega$  w  $H_{dR}^p(M)$ . Taką klasę równoważności będziemy nazywać także klasą kohomologii formy  $\omega$ . Jeżeli dwie formy  $\omega, \eta$  należą do tej samej klasy kohomologii, czyli zachodzi  $[\omega] = [\eta]$ , to różnią się one co najwyżej o formę dokładną. Zachodzi także następujący lemat:

**Lemat 2.6.1. (Przekształcenia indukowane kohomologii)** Dla każdej gładkiej funkcji  $F : M \rightarrow N$  pomiędzy dwoma rozmaitościami gładkimi, przeciągnięcie  $F^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  przenosi formy dokładne na formy dokładne, a formy zamknięte na formy zamknięte. W ten sposób indukuje ono przekształcenie liniowe, w dalszym ciągu oznaczane jako  $F^*$  z  $H_{dR}^p(N)$  do  $H_{dR}^p(M)$ , które nazywane jest przekształceniem indukowanym kohomologii.

*Dowód.* Jeśli  $\omega$  jest formą zamkniętą, to  $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$ , więc  $F^*\omega$  także jest zamknięte. Stąd wynika już, że przeciągnięcie to przenosi formy zamknięte na zamknięte, a dokładne na dokładne. Przekształcenie indukowane jest zadane w prosty sposób. Dla  $p$ -formy zamkniętej  $\omega$ , niech

$$F^*[\omega] = [F^*\omega].$$

Wtedy jeśli  $\omega' = \omega + d\eta$ , to

$$F^*[\omega'] = [F^*\omega + d(F^*\eta)] = [F^*\omega],$$

a więc przekształcenie jest dobrze zdefiniowane. □

Odnótujemy następujący, ważny wniosek.

**Uwaga 2.6.1.** Rozmaitości gładkie, które są ze sobą dyfeomorficzne, mają izomorficzne grupy kohomologii de Rhama.

Przedstawiony powyżej wniosek jest nieco zaskakujący - grupy de Rhama okazały się być topologicznym niezmiennikiem. Wniosek ten ma daleko idące uogólnienie. Można bowiem udowodnić, że wspomniane grupy są niezmiennikami homotopii. Oznacza to, że homotopijnie równoważne rozmaitości posiadać będą izomorficzne kohomologie de Rhama.

W poniższym rozumowaniu ciekawy jest dla nas zarówno wynik, jak i technika, która wykorzystywana będzie do jego udowodnienia. Wyprowadzimy bowiem równanie, które zada

warunek na istnienie pewnego operatora. Nasza teza będzie wtedy równoznaczna z istnieniem interesującego nas operatora.

Chcemy najpierw udowodnić, że homotopijne funkcje gładkie indukują to samo przekształcenie kohomologii. Rozważamy w tym celu dwie gładkie funkcje  $F, G : M \rightarrow N$ . Chcemy udowodnić, że ich przekształcenia indukowane są równe  $F^* = G^*$ . Wyrażmy ten warunek w nieco innych słowach.

Gdy weźmiemy zamkniętą formę  $p$ -formę  $\omega$  na  $N$ , aby przekształcenia indukowane były równe, musimy być w stanie wyprodukować taką  $(p-1)$ -formę  $\eta$  na  $M$ , aby spełnione

$$G^*\omega - F^*\omega = d\eta.$$

Z tego wyniknie bowiem, że  $G^*[\omega] - F^*[\omega] = [d\eta] = 0$ . Możemy podejść do tego problemu nieco bardziej systematycznie, szukając takiego operatora  $h$ , który jako argumenty bierze zamknięte  $p$  formy na  $N$  i działa tak, że spełniona jest zależność

$$d(h\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Zamiast definiować  $h\omega$  tylko dla przypadku, kiedy  $\omega$  jest zamknięta, okazuje się, że łatwiej jest określić operator  $h$  z przestrzeni wszystkich gładkich  $p$ -form na  $N$  do przestrzeni wszystkich gładkich  $(p-1)$ -form na  $M$ , dla którego spełnione jest równanie

$$d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Gdy warunek ten jest bowiem spełniony to dla formy  $\omega$ , która jest zamknięta zajdzie także poprzedni warunek.

Jeśli chcemy być całkowicie dokładni, to musimy zdefiniować rodzinę funkcji, po jednej funkcji dla każdego  $p$ , która będzie spełniać stosowny warunek na danym poziomie.

$$H(M \times \mathbb{R}_{\geq})_{dR}^* = H(M)_{dR}^*$$

(Przytoczyć dowód istnienia operatora homotopii - ale nie ma jak tego zrobić bez definiowania innych rzeczy, np pochodnej Liego w książce Lee).

Niniejsza praca zajmuje się pewną modyfikacją kohomologii de Rhama. Dokładniej, ta praca zajmuje się  $L_p$ -kohomologiami. Można patrzeć na nie jak na rozważanie niemal tego samego kompleksu łańcuchowego co w kohomologiach de Rhama, lecz z dodanym warunkiem  $p$ -całkowalności form. Głównym obiektem naszego zainteresowania są przestrzenie  $L_p^k = \omega \in \Omega^k(M) : \|\omega\| < \infty$ , gdzie  $\|\cdot\|$  to norma (całka) z formy, która była omawiana w 2.1. Ograniczenie naszych rozważań do form, które są  $p$ -całkowalne pozwala nam rozszerzyć klasę przestrzeni, które badamy. Przy dobrym doborze funkcji wagowej, którą ważymy metrykę Riemannowską na części nieosobliwej, możemy bowiem rozważać rozmaitości z osobliwościami.



## 2.7. Uogólniona nierówność Hardy'ego

Kluczowa w dalszych obliczeniach będzie nierówność, Hardy'ego łącząca całkowalność funkcji z całkowalnością jej funkcji bazowych.

**Lemat 2.7.1** (Uogólniona nierówność Hardy'ego). *Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , funkcje-  
wagi  $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $p, q \in \mathbb{R}$  takie, że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Zachodzi dla nich*

$$\int_0^\infty \left| \phi(x) \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x) f(x)|^p dx$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sup_{x>0} \left[ \int_x^\infty |\phi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^x |\phi(t)|^{-q} dt \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

*Dowód.* Dowód pomijam. Jest on dostępny w ... . Zacytować paper od pana Webera. □

**Lemat 2.7.2.** *Rozważmy pewną funkcję  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $f \geq 0$  oraz jej funkcję pierwotną  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Dla  $\alpha > 0$  warunek  $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$  implikuje  $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$ .*

*Dowód.* Wykorzystamy uogólnioną nierówność Hardy'ego. Załóżmy  $\psi(t) = \phi(t) = e^{-\frac{t}{p}}$ . Wtedy jeśli  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to  $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$  oraz  $-q = \frac{p}{1-p}$ . Zbadajmy teraz, czy spełniony jest warunek, aby zachodzić mogła nierówność Hardy'ego:

$$\begin{aligned} \sup_{x>0} \left[ \int_x^\infty e^{-t} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^x e^{-t \frac{1}{1-p}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} &= \sup_{x>0} C e^{-\frac{x}{p}} \left( e^{\frac{x}{p-1}} - 1 \right)^{\frac{p-1}{p}} = \\ C \sup_{x>0} \left( e^{-\frac{x}{p-1}} e^{\frac{x}{p-1}} - e^{-\frac{x}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} &= C \sup_{x>0} \left( 1 - e^{-\frac{x}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Wyrażenie to jest ograniczone dla  $p > 1$ . Po zastosowaniu uogólnionej nierówności Hardy'ego i ewentualnym przeskalowaniu zmiennej  $x$  do  $\alpha x$  otrzymujemy tezę. □



## Rozdział 3

# Obliczenie

Celem tego rozdziału jest prezentacja obliczenia  $L_p$ -kohomologii Riemannowskiego  $f$ -stożka z funkcją wagową  $f = e^{-t}$ . Obliczenie jest wykonane sposobem prezentowanym między innymi w pracach [Cheeger], [Youssin], [?], [Weber].

**Definicja 3.0.1** ( $f$ -stożek). Niech  $M$  będzie rozmaitością Riemannowską. Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times M$ . Określmy na tym produkcie tensor Riemannowski zadany przez wzór  $dt^2 + f^2(t)g$ , gdzie  $g$  jest metryką na  $M$ . Przestrzeń taką nazywamy  **$f$ -stożkiem**. Oznaczać ją będziemy przez symbol  $c^f M$ .

**Definicja 3.0.2.** Niech  $L_p^k M$  oznacza przestrzeń  $p$ -całkowalnych  $k$ -form różniczkowych z mierzalnymi współczynnikami.

Możemy teraz poczynić obserwację o formach różniczkowych określonych na  $f$ -stożku. Przestrzeń styczna do  $c^f M$  w punkcie  $(t, m)$  to:

$$T_{(t,m)}(c^f M) = \mathbb{R} \times T_m M.$$

W terminach form różniczkowych powiązanych z rozważanym  $f$ -stożkiem oznacza to, że możemy napisać:

$$\Lambda^k(\mathbb{R} \times T_m M) = \Lambda^{k-1}(M) \oplus \Lambda^k(M).$$

Spostrzeżenie to możemy wyrazić także w inny sposób:

**Uwaga 3.0.1.** Każda  $k$ -forma  $\omega \in \Lambda^k T(c^f M)$ , a w konsekwencji każda forma z przestrzeni form  $p$ -całkowalnych  $L_k^p(c^f M)$  może być zapisana jak  $\omega = \eta + \xi \wedge dt$ , gdzie zarówno  $\eta$ , jak i  $\xi$  nie zawierają  $dt$ . Zauważmy ponadto, że  $\eta$  jest  $k$ -formą, a  $\xi$  jest  $k-1$  formą.

Ustalmy także dla klarowności nieco inną notację dotyczącą zapisywania form różniczkowych względem lokalnych współrzędnych, która pozwoli nam lepiej zilustrować istotne dla nas elementy rozumowania. Dowolną  $k$ -formę  $\eta$ , która w domyśle nie zawiera czynnika  $dt$ , zapisywać będziemy względem lokalnych rzeczywistych współrzędnych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  na  $M$  jako:

$$\eta(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha,$$

gdzie  $I(k)$  jest zbiorem wszystkich multiindeksów  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  takich, że  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n$ , gdzie

$$dy^\alpha = dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k}, \quad (3.1)$$

a  $\eta_\alpha$  jest gładką funkcją określoną na  $(0, \infty) \times M$ .

Pomiędzy rozmaitościami  $M$  oraz  $c^f M$  istnieją kanoniczne przekształcenia projekcji oraz inkluzji. Żeby dobrze zilustrować w sposób w jaki działają one na formy różniczkowe na poszczególnych rozmaitościach, przypomnijmy ich typy. Inkluzja to funkcja:

$$i_r : M \rightarrow c^f M$$

$$i_r(x) = (x, r).$$

Możemy za jej pomocą przeciągać formy z  $c^f M$  do  $M$ . Przeciągnięcie takie oznaczmy jako  $\omega_r = i_r^*(\omega) = i_r^*\eta$  dla formy  $\omega = \eta + \xi \wedge dt$ .

Projekcja (rzutowanie) zadane jest jako:

$$\pi : c^f M \rightarrow M$$

$$\pi(x, t) = x.$$

Rozważamy formę  $\omega \in L_p^k(c^f M)$ , gdzie  $\omega = \eta + \xi \wedge dt$ . Zauważmy, że metryka Riemannowska na  $c^f M$  jest określona w taki sposób, że stosowne normy spełniają następujące zależności:

$$|\eta(t, x)|^2 = (e^{-t})^{-2k} |\eta(t, x)|_M^2 + (e^{-t})^{-2(k-1)} |\xi(t, x)|_M^2,$$

gdzie  $|\cdot|_M$  jest normą form różniczkowych indukowaną przez metrykę Riemannowską na rozmaitości  $M$ . Czynniki  $(e^{-t})^{-2k}$  pojawia się ponieważ forma  $\eta$  należy do  $k$ -tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej do rozmaitości  $c^f M$  w punkcie  $(t, x)$ . Zauważmy ponadto, że Riemannowska forma objętości na  $c^f M$  w punkcie  $(t, x)$  różni się od formy objętości na  $M$  w punkcie  $x$  o czynnik  $(e^{-t})^n$ . Policzmy więc normę  $\omega$  jako elementu przestrzeni  $L_k^p(c^f M)$ .

$$\begin{aligned} \|\omega\|^p &= \int_{c^f M} |\omega|^p d\text{vol}_{c^f M} = \int_0^\infty (e^{-t})^{n-pk} \int_M |\omega|^p d\text{vol}_M dt = \\ &= \int_0^\infty (e^{-t})^{n-pk} \|\omega_t\|_M^p dt = \int_0^\infty \|\omega\|_t^p dt, \end{aligned}$$

gdzie

$$\|\omega\|_r \stackrel{\text{def}}{=} \|\omega|_{M \times \{r\}}\| = e^{-r \cdot (\frac{n}{p} - k)} \|\omega_r\|_M.$$

Przypomnijmy, że  $\omega_r = i_r^*(\eta)$ .

Zauważmy teraz w jaki sposób zachowywać się będzie norma formy, która została przeciągnięta z podstawy, czyli rozmaitości  $M$ . Dla  $\eta \in L_p^*(M)$  możemy napisać

$$\|\eta\|_r \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi^*\eta\|_r = e^{-r \cdot (\frac{n}{p} - k)} \|\eta\|_M.$$

W badanym przypadku rozmaitości  $c^f M$  fakt, że spełniona jest formuła homotopii wymaga szczegółowego uzasadnienia. Motywacja stojąca za formułą homotopii została przedstawiona we wcześniejszym rozdziale.

Będziemy starać się dowieść, że zachodzi formuła (i istnieje stosowny operator  $I_r$ ):

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega + I_r d\omega$$

W tym celu ponownie posłużymy się rozbiem  $k$ -formy  $\omega$ , określonej na  $c^f M$  na

$$\omega = \eta + dt \wedge \xi.$$

Możemy teraz dla  $\eta$  określić na  $c^f M$   $k$ -formę  $\partial\eta/\partial t$  zadaną w lokalnych współrzędnych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jako

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \frac{\eta_\alpha}{\partial t}(t, x) dx^\alpha.$$

Wykorzystujemy tutaj notację z 3.1. Na tej samej podstawie możemy zapisać dla formy  $\xi$   $(k-1)$  formę  $\partial\xi/\partial t$  jako:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k-1)} \frac{\xi_\alpha}{\partial t}(t, x) dx^\alpha.$$

Możemy zdefiniować na stosownym kompleksie form różnikowych

$$\begin{aligned} d_M\omega &= \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\alpha \in I(k)} \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x_j}(t, x) dx_j \wedge dy^\alpha \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\alpha \in I(k-1)} \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_j}(t, x) dx_j \wedge dt \wedge dy^\alpha. \end{aligned}$$

Możemy wtedy określić różniczkę formy najpierw na podstawie  $f$ -stożka:

$$d_M\omega = d_M\eta - dt \wedge d_M\xi,$$

a następnie na całym badanym  $f$ -stożku:

$$d\omega = d_M\omega + dt \wedge \frac{\partial\eta}{\partial t} = d_M\eta + dt \wedge \left( \frac{\partial\eta}{\partial t} - d_M\xi \right).$$

Możemy teraz postarać się zdefiniować operator homotopii. Dla ustalonego  $r \in (0, \infty)$  określimy operator

$$I_r : \Lambda^k(c^f M) \rightarrow \Lambda^{k-1}(c^f M),$$

który w lokalnych współrzędnych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest zadany wzorem:

$$(I_r\omega)(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k-1)} \left( \int_s^t \xi(\tau, x) d\tau \right) dy^\alpha.$$

Dla klarowności kolejnych wzorów wprowadzimy oznaczenie. Będziemy mianowicie pisać

$$(I_r\omega)(t, x) = \int_s^t \xi.$$

Możemy teraz zbadać wyrażenia  $dI_r\omega$  oraz  $I_r d\omega$ , które występują w formule homotopii. Napiszemy:

$$\begin{aligned} dI_r\omega &= d_M \int_r^t \xi + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \int_r^t \xi = \\ &= \int_r^t d_M \xi + dt \wedge \xi \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_r\omega &= I_r \left( d_M \eta + dt \wedge \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} - d_M \xi \right) \right) \\ &= \int_r^t \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} - d_M \xi \right) \\ &= \eta - \pi^* \left( \eta^{(r)} \right) - \int_r^t d_M \xi, \end{aligned}$$

gdzie  $\eta^{(r)} \in \Lambda^k(M)$  jest zadane w lokalnych współrzędnych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jako

$$\eta^{(s)}(x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha.$$

W związku z tym, zachodzi wzór:

$$dI_r\xi + I_r d\xi = dt \wedge \xi + \eta - \pi^* \left( \eta^{(r)} \right).$$

Spróbujemy teraz zbadać, kiedy dla  $p$ -całkowalnej formy  $\omega$  forma  $I_r\omega$  także jest całkowalna. Fakt, że forma jest  $p$ -całkowalna oznacza innymi słowy, że

$$||\omega||^p = \int_{c^f M} |\omega|^p = \int_0^1 \int_M \left( (e^{-t})^{-2k} |\eta^{(t)}|_M^p + (e^{-t})^{-2(k-1)} |\xi^{(t)}|_M^p \right) (e^{-t})^m dt.$$

Jako że  $I_r\omega$  jest  $(k-1)$  formą, to możemy napisać

$$||I_r\omega||^p = \int_{c^f M} ||I_r\omega||^p = \int_0^1 \int_M \left( (e^{-t})^{-p(k-1)} \int_r^t ||\xi^{(\tau)} d\tau||_M^p (e^{-t})^n dt \right).$$

Wykorzystamy teraz lemat, który udowodniony został w dodatku.

Lemat możemy wykorzystać, tylko wtedy gdy współczynnik przy  $e^{-t}$ , nazwijmy go  $\alpha$ , jest większy od zera. Ten współczynnik to:  $\alpha = -p(k-1) + n$ . Zbadajmy warunek:

$$-p(k-1) + n > 0$$

$$-k + 1 + \frac{n}{p} > 0$$

$$k < \frac{n}{p} + 1.$$

Warunek pozwalający na wykorzystanie lematu jest więc spełniony dla  $k \leq \frac{n}{p}$ .

Gdy warunek ten jest spełniony, stosujemy lemat 2.7.1 ... (z nierówności Hardy'ego) i uzyskujemy rezultat, że  $I_r \omega$  jest formą  $p$ -całkowalną.

Pokazaliśmy więc, że jeśli  $\omega$  jest  $k$ -formą  $p$ -całkowalną, to  $I_r \omega$  jest  $p$ -całkowalna i zachodzi wzór

$$\omega = dI_r \omega + I_r d\omega + \pi^* \left( \eta^{(s)} \right).$$

Stąd jeśli  $d\omega = 0$  to

$$\eta \in d(L^{i-1} c^f M) + \pi^*(L^i * M),$$

więc

$$\pi^* : H(M) \rightarrow H(c^f M)$$

jest operatorem suriektywnym.

### 3.1. Co pan Weber kazał mi zrobić

Ten fragment, który Pan kontempluje: Chodzi o to, że zamiast form gładkich trzeba rozważać formy o mierzalnych współczynnikach z różniczką w sensie "prądów" (currents), czyli funkcjonałów na formach. Być może to trochę zbyt obszerny temat na licencjat. Moim zdaniem wystarczy by Pan oszacował operator  $I$  (odcałkowanie form) w normie  $L^p$  i powiedział że, tak jak np w mojej pracy pozwoli to dowieść znikanie kohomologii w jakichś gradacjach.

Czyli twierdzenie główne pracy by było: Operator

$$I_0 : A^k \rightarrow A^{k+1}$$

jest ciągły w normie  $L^p$  dla  $k \leq \frac{n}{p}$ .

Operator

$$I_\infty : A^k \rightarrow A^{k+1}$$

jest ciągły w normie  $L^p$  dla  $k \leq \frac{n}{p}$ , gdzie  $A^k$  oznacza  $k$ -formy o mierzalnych współczynnikach.





# Bibliografia

- [Weber] Andrzej Weber, *An isomorphism from intersection homology to  $L_p$ -cohomology*, Forum Mathematicum, de Gruyter, 1995.
- [Cheeger] Jeff Cheeger, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol.36,
- [Duszenko] , Kamil Duszenko, *Formy różniczkowe*, notatka
- [Bott] Raou Bott, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.
- [Youssin] Boris Youssin,  *$L_p$  cohomology of cones and horns* J. Differential Geometry, Volume 39, Number 3, 1994.
- [Lee] Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*
- [Ducret] Stephen Ducret,  *$L_{q,p}$ -Cohomology of Riemannian Manifolds and Simplicial Complexes of Bounded Geometry*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Doctor Thesis, Lausanne, 2009