**Uniwersytet Warszawski**
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Michał Garmulewicz**
Nr albumu: 304742

# $L_p$-cohomologies of Riemannian $f$-horns.

**Praca licencjacka**
**na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem
**dra hab. Andrzeja Webera**
Instytut Matematyki

Maj 2015

## Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data                                        Podpis kierującego pracą

## Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data                                        Podpis autora (autorów) pracy

## Streszczenie

In this thesis $L_p$-cohomologies of Riemannian $f$-horn are calculated.

## Słowa kluczowe

kohomologie de Rhama, topologia różniczkowa

## Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

## Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry
14F (Co)homology theory
14F40 de Rham cohomology

## Tytuł pracy w języku angielskim

An implementation of a difference blabalizer based on the theory of $\sigma - \rho$ phetors

# Spis treści

# Rozdział 1

# Introduction

W pracy [Weber] prezentowane jest między innymi obliczenie $L_p$-kohomologii stożka nad pseudorozmaitością Riemannowską.

The cone is given a metric of the form $dt \otimes dt \oplus t^2 g$ and $g$ is the metric on the nonsingular part of the original pseudomanifold. In the mentioned work, $L_p$ cohomology of this space is presented.

We present a slight modification of this notions, by considering manifolds where the Riemannian metric is of the for

# Rozdział 2

# Preliminaries

## 2.1. Vector spaces and tensors

If we consider a finite-dimensional vector space $V$ with a given metric $||\cdot||$ and define a new metric $||x||_r = r||x||$. Then in the space $(V, ||\cdot||_r)^*$ dual to $(V, |||\cdot|||)$, the normed is scaled by the factor $\frac{1}{r}$, that is for any $\varphi \in V^*$ we get $||\varphi||_r = \frac{1}{r}||\varphi||$.

We will make a simple observation that we will later use in the computations. We consider a Riemannian manifold M and tagent $T_x$M and cotangent $T_x^*$M spaces in the point $x$. Let the bases of these spaces be $e_1, e_2, ..., e_n$ and dual $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$. The volume form of this manifold is $d\mathrm{vol} = \pm e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_n^*$.

We now want to compute how forms from $\Lambda(\mathcal{M})$ are scaled with respect to such a change in the norm. Suppose we are considering space of $k$-forms on $\mathbb{M}$ at some arbitrary point. Then every $k$-form can be locally expressed in a basis consisting of products of covectors belonging to basis dual to the standard basis. That is every $k$-form in the point $x$ using some local coordinates $(x_1, x_2, ...x_n)$ can be written $\sum_{\mathrm{I} \in I} a_{\mathrm{I}} dx_{\mathrm{i}}$, where $I$ is the set of $k$-indices of form $\underbrace{(i_1, i_2, ..., i_k)}_{k \text{ times}}$, with $i_1, i_2, ... \in \{1, 2, ..., n\}$. (following Einstein convention). Let us see how basis vector is scaled:

$$||dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}||_t = ||dx_{i_1}||_t \cdot ||dx_{i_2}||_t \cdot ... \cdot ||dx_{i_k}||_t = \frac{1}{t}||dx_{i_1}|| \cdot \frac{1}{t}||dx_{i_2}||_t \cdot ... \cdot \frac{1}{t}||dx_{i_k}||_t = \frac{1}{t^k}||dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}||$$

This means that any $k$ form is scaled by $1/t^k$ when metric is scaled by a factor of $t$. This applies also to the volume form, so we obtain:

$$d\mathrm{vol}_t = \frac{1}{t^n} d\mathrm{vol}$$

## 2.2. Riemannian metric

**Riemannian metric** is a smooth symmetric covariant 2-tensor field on manifold $\mathcal{M}$ that is positive definite at each point.(attaching a field of linear functions that takes two variables to every point of the manifold).

In any smooth local coordinates $(x^i)$, Riemannian metric can be written as:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

where $g_{ij}$ is a positive definite matrix of smooth functions.

The simplest example of Riemannian metric is *Euclidean metric* on $\mathbb{R}^n$ given in standard coordinates by

$$g = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

## 2.3. Differetial forms

We will now recall definition of a norm of a differential form in each point of the manifold. Let $(M.g)$ be an orientable, connected and complete Riemannian manifold. By $x$ we will mean a point of $X$ and $\Lambda^k T_x M$ is the vector space of multilinear alternate maps:

$$\alpha_x : T_x^\star M \times ... \times T_x^\star M \times \to \mathbb{R}$$

Using this, we recall that exterior form of degree $k$ is defined as a section of the $k$-th cotangent bundle

$$\Lambda^k M = \coprod_{x \in M} \Lambda^k T_x^\star M \xrightarrow{\pi} M.$$

Therefore for each point $x \in M$ we have a multilinear map $\alpha_x \in \Lambda^k T_x^\star M$. At a given point it can be expressed in an easy form. If $(e_1, ..., e_n)$ is a basis of $T_x M$ and $(e^1, ..., e^n)$ is the dual basis, we can write

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$$

where coefficients are $a_{i_1...i_k} = \alpha_x(e^{i^1}, ..., e^{i^2})$.

Using above, we can express given form in terms of local coordinates $x^1, ..., x^n$ of an open subset $U$ of $M$. We have a basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ of $T_x M$ for each $x \in U$ with corresponding dual basis $dx^1, ..., dx^n$. For every point of the set $U$ one can write

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} dx^{i^1} \wedge ... \wedge dx^{i^k}.$$

On a Riemannian manifold one has a scalar product defined on $T_x M$ for each point $x \in M$. Therefore, we can define a norm of every $k$-form $\alpha$. We denote the scalar product on $T_x M$ by $< u, v >_x = g_x(u, v)$. Let us choose for some basis $(e_1, ..., e_n)$ of $T_x M$ with corresponding dual basis $(e^1, ..., e^n)$. We can argue that such basis can always be chosen to be orthogonal, because we can always apply Gram-Schmidt's orthogonalisation algorithm to a basis given by local coordinates. We can then define a map $G : \Lambda^k T_x M \times T_x M \leftarrow \mathbb{R}$. Given two forms $\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \alpha_{i_1 ... i_k ; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$ and $\beta_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \beta_{i_1 ... i_k ; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$, we set

$$G(\alpha_x, \beta_x) = \sum_{i_1, ..., i_k} \alpha_{i_1 ... i_k ; x} \beta_{i_1 ... i_k ; x}.$$

We can then cite lemma 1.1 from [Ducret].

**Lemma 2.3.1.** *The above stated map $G : \Lambda^k T_x M \times T_x M$ is symmetric and positive definite, and hence is a scalar product at any given point $x \in M$. It does not depend on the choice of the particular basis $(e_1, ..., e_n)$ among the orhonormal ones. Additionaly the basis $(e^1 \wedge ... \wedge e^n)$ is orthonormal for $G$.*

We can also give eqivalent definition using other terms ...

**Induced map** For any smooth map $F : M \to N$ between two smooth manifolds with or without boundary, the pullback $F^* : \Omega^p N \to \Omega^p M$ carries closed forms to closed forms and exact forms to exact forms. It thus decsends to a linear map, denoted by $F^* : H^p N \to H^p M$, too.

Digression in digression in digression: **Pullback** of $F^*$ is

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_n) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)).$$

## 2.4. Explaination about induced maps etc.

If we have two smooth maps $F, G : M \to N$ and we want to prove that the induced maps are equal $F^* = G^*$. Given a closed $p-$form $\omega$ on $N$, we need to produce a $(p-1)$-form $\eta$ no $M$ such that

$$G^*\omega - F^*\omega = d\eta$$

from this, it will follow that $G^*[\omega] - F^*[\omega] = [d\eta] = 0$, where [] is just taking homotopy equivalence class of given form. The author suggests a way to make it more systematic, by finding an operator $h$, which transforms closed $p$-forms on $N$ to $(p-1)$-forms on $M$ and satisfies

$$d(h\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Instead of defining $h\omega$ only when $\omega$ is close, it turns out to be far easier to define a map $h$ from the space of *all* smooth $p$-forms on $N$ to the space of smoooth $(p-1)$-forms on $M$, which satisfies:

$$d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega,$$

which implies the above equality when $\omega$ is closed. (To be completly precise, we define a family of maps, one for each $p$, which satisfy said equalities on adequate levels.

$$H(\mathcal{M} \times \mathbb{R}_{\geq})^*_{dR} = H(\mathcal{M})^*_{dR}$$

## 2.5. $L_p(\mathcal{M})$ space

# Rozdział 3

# Obliczenie

Celem tego rozdziału jest prezentacja obliczenia $L_p$-kohomologii Riemannowskiego $f$-stożka z funkcją wagową $f = e^{-t}$. Obliczenie jest podobne do prac [Cheeger], [Youssin], [?], [Weber].

**Definicja 3.0.1** ($f$-horn)**.** Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością Riemannowską. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{M}$. Określmy na tym produkcie tensor Riemannowski zadany przez wzór $dt^2 \oplus f^2(t)g$, gdzie $g$ jest metryką na $\mathcal{M}$. Przestrzeń taką nazywamy $f$**-stożkiem**. Oznaczać ją będziemy przez symbol $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$.

**Definicja 3.0.2.** Niech $L^k_p\mathcal{M}$ oznacza przestrzeń $p$-całkowalnych $k$-form różnikowych z mierzalnymi współczynnikami.

Możemy teraz poczynić obserwację o formach różniczkowych określonych na $f$-stożku. Przestrzeń styczna do $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie
$(t, m)$ to:

$$T_{(t,m)}(\mathrm{c}^f\mathcal{M}) = \mathbb{R} \times T_m\mathcal{M}.$$

W terminach form różniczkowych powiązanych z rozważanym $f$-stożkiem oznacza to, że możemy napisać:

$$\Lambda^k(\mathbb{R} \times T_m\mathcal{M}) = \Lambda^{k-1}(\mathcal{M}) \oplus \Lambda^k(\mathcal{M}).$$

Spostrzeżenie to możemy wyrazić także w inny sposób:

**Uwaga 3.0.1.** Każda $k$-forma $\omega \in \Lambda^k T(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$, a w konsekwencji każda forma z przestrzeni form $p$-całkowalnych $L^p_k(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$ może być zapisana jako$\omega = \eta + \xi \wedge dt$, gdzie zarówno $\eta$, jak i $\xi$ nie zawierają $dt$. Zauważmy ponadto, że $\eta$ jest $k$-formą, a $\xi$ jest $k-1$ formą.

Przypomnijmy także dla klarowności notację dotyczącą zapisywania form różniczkowych względem lokalnych współrzędnych. Dowolną $k$-formę $\eta$, która w domyśle nie zawiera czynnika $dt$, zapisywać będziemy względem lokalnych rzeczywstich współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ na $\mathcal{M}$ jako:

$$\eta(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha,$$

gdzie $I(k)$ jest zbiorem wszystkich multiindeksów $\alpha = (alpha_1, ..., \alpha_k)$ takich, że $1 \leq \alpha_1 < ... < \alpha_i \leq n$, gdzie

$$dy^\alpha = dy^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dy^{\alpha_k}, \tag{3.1}$$

a $\eta_\alpha$ jest gładką funkcją określoną na $(0,\infty)\times\mathcal{M}$.

Pomiędzy rozmaitościami $\mathcal{M}$ oraz $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ istnieją kanoniczne przekształcenia projekcji oraz inkluzji. Żeby dobrze zilustrować w sposób w jaki działają one na formy różniczkowe na poszczególnych rozmaitościach, przypomnijmy ich typy. Inkluzja to funkcja:

$$i_r : \mathcal{M} \to \mathrm{c}^f\mathcal{M}$$

$$i_r(x) = (x, r).$$

Możemy za jej pomocą przeciągać formy z $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ do $\mathcal{M}$. Przeciągnięcie takie oznaczymy jako $\omega_r = i_r^*(\omega) = i_r^*\eta$ dla formy $\omega = \eta + \xi \wedge dt$.
Projekcja (rzutowanie) zadane jest jako:

$$\pi : \mathrm{c}^f\mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

$$\pi(x, t) = x.$$

Rozważamy formę $\omega \in L_p^k(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$, gdzie $\omega = \eta + \xi \wedge dt$. Zauważmy, że metryka Riemannowska na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ jest określona w taki sposób, że stosowne normy spełniają następujące zależności:

$$|\eta(t,x)|^2 = (\mathrm{e}^{-t})^{-2k}|\eta(t,x)|^2_{\mathcal{M}} + (\mathrm{e}^{-t})^{-2(k-1)}|\xi(t,x)|^2_{\mathcal{M}},$$

gdzie $|\cdot|_{\mathcal{M}}$ jest normą form różniczkowych indukowaną przez metrykę Riemannowską na rozmaitości $\mathcal{M}$. Czynnik $(\mathrm{e}^{-t})^{-2k}$ pojawia się ponieważ forma $\eta$ należy do $k$-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej do rozmaitości $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie $(t,x)$. Zauważmy ponadto, że Riemannowska forma objętośći na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie $(t,x)$ różni się od formy objętości na $\mathcal{M}$ w punkcie $x$ o czynnik $(e^{-t})^n$. Policzmy więc normę $\omega$ jako elementu przestrzeni $L_k^p(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$.

$$\begin{aligned}||\omega||^p = \int_{\mathrm{c}^f\mathcal{M}} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{c}^f\mathcal{M}} = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} \int_{\mathcal{M}} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathcal{M}} dt = \\ = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} ||\omega_t||_{\mathcal{M}} dt = \int_0^\infty ||\omega||_t^p dt,\end{aligned}$$

gdzie

$$||\omega||_r \overset{\mathsf{def}}{=} ||\omega_{|\mathcal{M}\times\{r\}}|| = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k)}||\omega_r||_{\mathcal{M}}.$$

Przypomnijmy, że $\omega_r = i_r^*(\eta)$.

Zauważmy teraz w jaki sposób zachowywać się będzie norma formy, która została przeciągnięta z podstawy, czyli rozmaitości $\mathcal{M}$. Dla $\eta \in L_p^*(\mathcal{M})$ możemy napisać

$$||\eta||_r \overset{\mathsf{def}}{=} ||\pi^*||_r = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k)}||\eta||_{\mathcal{M}}.$$

Zazwyczaj w obliczeniach dotyczących kohomologii form argument pokazujący że zachodzi formuła homotopii jest prosty. W badanym przypadku rozmaitości $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ fakt, że spełniona jest formuła homotopii wymaga szczegółowego uzasadnienia.

Będziemy starać się dowieść, że zachodzi formuła:

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega + I_r d\omega$$

W tym celu ponownie posłużymy się rozbiciem $k$-formy $\omega$, określonej na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ na

$$\omega = \eta + dt \wedge \xi.$$

Możemy teraz dla $\eta$ określić na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ $k$-formę $\partial\eta/\partial t$ zadaną w lokalnych współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jako

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(t,x) = \sum_{\alpha\in I(k)} \frac{\eta_\alpha}{\partial t}(t,x)dx^\alpha.$$

Wykorzystujemy tutaj notację z 3.1. Na tej samej podstawie możemy zapisać dla formy $\xi$ $(k-1)$ formę $\partial\xi/\partial t$ jako:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}(t,x) = \sum_{\alpha\in I(k-1)} \frac{\xi_\alpha}{\partial t}(t,x)dx^\alpha.$$

Może zdefiniować na stosownych zbiorów kompleksie form ró

$$d_\mathcal{M}\omega = \sum_{1\le j\le m} \sum_{\alpha\in I(k)} \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x_j}(t,x)dx_j \wedge dy^\alpha$$

$$+ \sum_{1\le j\le m} \sum_{\alpha\in I(k-1)} \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_j}(t,x)dx_j \wedge dt \wedge dy^\alpha$$

Then

$$d_\mathcal{M}\omega = d_\mathcal{M}\eta - dt \wedge d_\mathcal{M}\xi$$

oraz

$$d\omega = d_\mathcal{M}\omega + dt \wedge \frac{\partial\eta}{\partial t} = d_\mathcal{M}\eta + dt \wedge \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} - d_\mathcal{M}\xi\right).$$

Ustalmy $r \in (0,1)$ i zdefiniujmy:

$$I_r : \Lambda^i(\mathrm{c}^f\mathcal{M}) \to \Lambda^{i-1}(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$$

# Rozdział 4

# Dowody lematów

1. $||\omega||_r = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k}$
2. Lemat Hardy'ego - Webera
3. Formuła homotopii jest prawdziwa dla naszego stożka

**Lemma 4.0.1** (Uogólniona nierówność Hardy'ego)**.** *Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, funkcje-wagi $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zachodzi dla nich*

$$\int_0^\infty \left|\phi(x)\int_0^x f(t)dt\right|^p dx \leq C\int_0^\infty |\psi(x)f(x)|^p\, dx$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sup_{x>0}\left[\int_x^\infty |\phi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^x |\phi(t)|^{-q} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

*Dowód.* Dowód pomijam. Jest on dostępny w ... . Zacytować papier od pana Webera. □

**Lemma 4.0.2.** *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dla $\alpha > 0$ warunek $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$ implikuje $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$.*

*Dowód.* Wykorzystamy uogólnioną nierówność Hardy'ego. Załóżmy $\psi(t) = \phi(t) = e^{-\frac{t}{p}}$. Wtedy jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ oraz $-q = \frac{p}{1-p}$. Zbadajmy teraz, czy spełniony jest warunek, aby zachodzić mogła nierówność Hardy'ego:

$$\sup_{x>0}\left[\int_x^\infty e^{-t}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^x e^{-t\frac{1}{1-p}}dt\right]^{\frac{p-1}{p}} = \sup_{x>0} Ce^{-\frac{x}{p}}\left(e^{\frac{x}{p-1}} - 1\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$C\sup_{x>0}\left(e^{-\frac{x}{p-1}}e^{\frac{x}{p-1}} - e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = C\sup_{x>0}\left(1 - e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Wyrażenie to jest ograniczone dla $p > 1$. Po zastosowaniu uogólnionej nierówności Hardy'ego i ewentualnym przeskalowaniu zmiennej $x$ do $\alpha x$ otrzymujemy tezę. □

# Bibliografia


[Weber] Andrzej Weber, *An isomorphism from intersection homology to* $\mathrm{L}_p$*-cohomology*, Forum Mathematicum, de Gruyer, 1995.

[Cheeger] Jeff Cheeger, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol.36, American Mathematical Society, Providence, 1982.

[Bott] Raou Bott, *Differetial forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.

[Youssin] Boris Youssin, $\mathrm{L}_p$ *cohomology of cones and horns* J. Differential Geometry, Volume 39, Number 3, 1994.

[Lee] Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*

[Ducret] Stephen Ducret, $L_{q,p}$*-Cohomology of Riemannian Manifolds and Simplical Complexes of Bounded Geometry*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Doctor Thesis, Lausanne, 2009