Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Garmulewicz
Nr albumu: 304742

L_p-kohomologie f-stożków Riemannowskich.

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Andrzeja Webera
Instytut Matematyki

Maj 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W tej pracy licencjackiej opisane jest obliczenie L_p-kohomologii rozmaitości Riemannowskich.

Słowa kluczowe

kohomologie de Rhama, topologia różniczkowa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry
14F (Co)homology theory
14F40 de Rham cohomology

Tytuł pracy w języku angielskim

L_p-cohomologies of Riemannian f-horns.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

W pracy [Weber] prezentowane jest między innymi obliczenie L_p-kohomologii stożka nad pseudorozmaitością Riemannowską.

Na stożku tym określona jest metryka postaci $dt \otimes dt + t^2 g$, gdzie g jest metryką na części nieosobliwej wyjściowej pseudorozmaitości. W dalszej części wspomnianej pracy obliczana jest L_p-kohomologia wspomnianej przestrzeni.

W tej pracy licencjackiej przedstawiam drobną modyfikację tych pojęć do e^{-t}-stożków Riemannowskich, czyli przestrzeni będących produktem rozmaitości Riemannowskiej oraz półprostej na której określono metrykę $dt \otimes dt \oplus (e^{-t})^2 g$.

Rozdział 2

Podstawy

W rozdziale tym przytaczam definicje i wyprowadzam prostsze zależności, które pomogą nam w dalszych obliczeniach.

2.1. Formy różniczkowe

W tej sekcji przytaczam definicje form różniczkowych oraz ich proste własności. Formy rózniczkowe są ważnym narzędziem, pozwalającym przenieść wiele wyników z analizy rzeczywistej na rozmaitości tak, aby sformułowania nie były zależne od wyboru konkretnych współrzędnych na rozważanej rozmaitości.

Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Tensor kowariantny $T : V \times ...V \to$ będzie nazwany *alternującym* gdy jego wartość zmieni znak w przypadku zmienimy miejscami jego dwa wektory wejściowe. Takie tensory mają wiele nazw, takich jak *formy zewnętrzne, multi-kowektory,* czy też po prostu k-kowektory. Przestrzeń wszystkich k-kowektorów na przestrzeni V ma wiele oznaczeń. Jednym z bardziej popularnych oznaczeń jest $T^k(V^*)$. Przestrzeń takich tensorów które należą do $T^k(V^*)$, a do tego są antysymetryczne, często oznacza się $\Lambda^k(V^*)$.

Dla dwóch tensorów kowariantnych $f \in T^p(V^*)$, $g \in T^q(V^*)$ możemy określić produkt $f \otimes g \in T^{p+q}(V^*)$ za pomocą wzoru:

$$f \otimes g(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \cdot g(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}).$$

Dowolny kowariantny tensor, czyli mający za argumenty jedynie wektory, możemy przekształcić na tensor alternujący za pomocą przekształcenia *alternatora*, nazywanego także *rzutem alternującym.* Jest on określony w następujący sposób:

$$\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$$

$$\mathrm{Alt}(f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(k)}).$$

Z pomocą alternatora określić można iloczyn zewnętrzny antysymetryczny. Dla elementów $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ oraz $\eta \in \Lambda^q(V^*)$, ich iloczyn zewnętrzny zadamy wzorem

$$\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Przytoczmy teraz sposób, w jaki definiuje się bazę potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Niech $v_1, v_2, ..., v_n$ będzie bazą przestrzeni dualnej V^*, która jest dualna do bazy $w_1, w_2, ..., w_n$. Wówczas układ

$$B = \{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}$$

jest bazą potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Warto zauważyć, że implikuje to $dim\Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$ *Komentarz: można zamieścić tu dowód powyższej włanośći*

2.2. Skalowanie norm przestrzeni wektorowych i tensorów

W dalszych obliczeniach będziemy badać wyrażenia typu $r|\cdot|$, gdzie $|\cdot|$ jest normą na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Znaczenie będzie miało jak zachowuje się norma na przestrzenii dualnej, gdy skalujemy normę wyjściowej przestrzenii liniowo o czynnik r.

Rozważać będziemy skończenie wymiarową przestrzeń wektorową V z daną metryką $||\cdot||$ i zdefiniujemy na niej nową metrykę $||\cdot||_r \overset{\text{def}}{=} r||x||$. Wtedy w przestrzeni $(V, ||\cdot||_r)^*$ dualnej do $(V, |||\cdot|||)$ norma skaluje się przez współczynnik $\frac{1}{r}$. Oznacza to, że dla $\varphi \in V^*$ otrzymamy skalowanie $||\varphi||_r = \frac{1}{r}||\varphi||$.

Poczynimy tu jeszcze jedną obserwację, która pomoże nam w dalszych obliczeniach. Rozważmy n-wymiarową rozmaitość Riemannowską M oraz jej przestrzeń styczną T_xM i kostyczną T_x^*M w punkcie x. Niech bazami ortogonalnymi tych przestrzeni będą $e_1, e_2, ..., e_n$ oraz dualna $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$. Chcemy teraz obliczyć w jaki sposób formy z $\Lambda(\mathcal{M})$ skalują się ze względu na taką zmainę w normie.

Załózmy że rozważamy przestrzeń k-form na $\mathcal{M}$ w pewnym punkcie rozmaitości. Wtedy każda k forma może być lokalnie wyrażona w bazie składającej się z produktów kowektorów należących do bazy dualnej do bazy standardowej. Oznacza to, że każda k-forma w punkcie x może być zapisana, korzystając z lokalnych współrzędnych $(x_1, x_2, ...x_n)$ jako $\sum_{\mathrm{I} \in I} a_{\mathrm{I}} dx_{\mathrm{i}}$, gdzie I jest zbiorem k-indeksów postaci $(i_1, i_2, ..., i_k)$, dla $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$.

Popatrzmy w jaki sposób skalują się wektory bazowe. Przy założeniu ortogonalności zachodzi:

$$||dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}||_t = ||dx_{i_1}||_t \cdot ||dx_{i_2}||_t \cdot ... \cdot ||dx_{i_k}||_t =$$
$$\frac{1}{t}||dx_{i_1}|| \cdot \frac{1}{t}||dx_{i_2}||_t \cdot ... \cdot \frac{1}{t}||dx_{i_k}||_t = \frac{1}{t^k}||dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}||$$

Oznacza to, że każda k forma skaluje się przez $1/t^k$ gdy metryka jest skalowana przez czynnik t. Obserwację tą możemy także zaplikować do formy objętości, opisywanej w dalszych częściach otrzymując:

$$d\mathrm{vol}_t = \frac{1}{t^n} d\mathrm{vol}$$

2.3. Metryka Riemannowska i forma objętości

Metryką Riemannowską nazwiemy gładkie, symetryczne kowariantne pole 2-tensorów na rozmaitości $\mathcal{M}$ które jest dodatnio określone w każdym punkcie. Mówiąc bardziej intuicyjnie, określenie metryki Riemannowskiej to doczepienie pola iloczynów skalarnych do rozmaitości, które zmienia się w sposób gładki.

W dowolnych lolalnych gładkich współrzędnych (x^i) metryka Riemannowska może być zapisana jako

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j = g_{ij}dx^i dx^j,$$

gdzie g_{ij} jest dodatnio określoną macierzą (której współrzędne to funkcje gładkie).

Warto także zapisać dla lokalnych współrzędnych Riemannowską formę objętości.

Uwaga 2.3.1. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru n, z brzegiem lub bez brzegu. W dowolnych zorientowanych gładkich współrzędnych (x_i), Riemmanowska forma objętości może być wyrażona lokalnie w następujący sposób:

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij}}$$

Komentarz: a może tutaj dowód tego?

TUTEJ

Najprostszym przykładem metryki Riemannowskiej jest *metryka Euklidesowa* na $\mathbb{R}^n$, która zadana jest w standardowych współrzędnych jako

$$g = \delta_{ij}dx^i dx^j.$$

(Krótkie podsumowanie informacji o całkowaniu na rozmaitości Riemannowskiej .., forma objętości)

2.4. Norma formy różniczkowej

Przytoczę teraz definicję normy formy różniczkowej w poszczególnych punktach rozmaitości. Niech (M, g) będzie zorientowaną, spójną rozmaitością Riemannowską. Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością, a x jej punktem. $\Lambda^k T_x M$ jest przestrzenią k-liniowych funkcji alternujących:

$$\alpha_x : T_x^\star M \times ... \times T_x^\star M \times \to \mathbb{R}$$

Przypomnijmy także, że forma zewnętrzna stopnia k jest zdefiniowana jako sekcja k-tej wiązki kostycznej.

$$\Lambda^k M = \coprod_{x \in M} \Lambda^k T_x^\star M \xrightarrow{\pi} M.$$

Stąd w każdym punkcie $x \in M$ mamy funkcję wieloliniową $\alpha_x \in \Lambda^k T_x^\star M$. Można ją wyrazić w prostej formie. Jeśli $(e_1, ..., e_n)$ jest bazą T_xM, a $(e^1, ..., e^n)$ jest bazą dualną, możem napisać

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$$

gdzie współczynniki są zadane jako $a_{i_1 ... i_k} = \alpha_x(e^{i^1}, ..., e^{i^2})$.

Korzystając z powyższych spostrzeżeń, możemy wyrazić daną formę w terminach współrzędnych lokalnych $x^1, ..., x^n$ na otwartym podzbiorze $U \subset M$. Mamy bazę $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ dla T_xM dla każdego $x \in U$ wraz ze stowarzyszoną bazą dualną $dx^1, ..., dx^n$. Ponadto, dla każdego punktu ze zbioru U możemy napisać

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 ... i_k} dx^{i^1} \wedge ... \wedge dx^{i^k}.$$

Na rozmaitości Riemannowskiej posiadamy iloczyn sklarany zadany na T_xM dla każdego punktu $x \in M$. Korzystając z niego możemy zdefiniować normę każdej k-formy α. Wprowadźmy proste oznaczenie iloczynu skalarnego na T_xM przez $< u, v >_x = g_x(u, v)$. Wybierzmy bazę $(e_1, ..., e_n)$ przestrzeni T_xM z odpowiadającą jej bazą dualną $(e^1, ..., e^n)$. Można argumentować, że możemy zawsze wybrać taką bazę tak aby była ona ortogonalna. Dzieje się tak, ponieważ możemy zawsze zastosować algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy zadanej przez różniczkowanie lokalnych współrzędnych rozmaitości.

Możemy teraz zdefiniować funkcję $G : \Lambda^k T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$. Dla danych dwóch form $\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \alpha_{i_1 ... i_k ; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$ oraz $\beta_x = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \beta_{i_1 ... i_k ; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$, określimy tę funkcję jako

$$G(\alpha_x, \beta_x) = \sum_{i_1, ..., i_k} \alpha_{i_1 ... i_k ; x} \beta_{i_1 ... i_k ; x}.$$

Przytoczymy teraz następujący lemat, dostępny na przykład w [Ducret].

Lemat 2.4.1. *Zdefiniowane powyżej przekształcenie $G : \Lambda^k T_xM \times T_xM$ jest liniowe, symetryczne i dodatnio określone. Przez to jest ono iloczynem skalarnym dla każdego punktu $x \in M$. Nie zależy ono od wyboru konkretnej bazy $(e_1, ..., e_n)$ spośród baz ortogonalnych. Dodatkowo, baza $(e^1 \wedge ... \wedge e^n)$ jest ortonormalna dla G.*

2.5. Przekształcenie indukowane, kohomologie de Rhama oraz formuła homotopii

Rozważmy przypadek gładkiej funkcji $F : M \to N$, pomiędzy dwoma rozmaitościami (z brzegiem lub bez brzegu). Za pomocą tej funkcji będziemy Z różniczką takiej funkcji możemy stowarzyszyć przekształcenie przeciągnięcia $F^* : \Lambda^p N \to \Lambda^p M$, działające w taki sposób:

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_n) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)).$$

W poniższym rozumowaniu, przez $\Omega^p\mathcal{M}$ oznaczać będziemy przestrzeń gładkich k-form. Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością z brzegiem lub bez brzegu, a p będzie nieujemną liczbą całkowitą. Ponieważ $d : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega_{p+1}(\mathcal{M})$ jest przekształceniem liniowym, jego jądro oraz obraz są podprzestrzeniami liniowymi. Wprowadźmy tymaczasowe oznaczenie:

$$\mathcal{Z}^p(\mathcal{M}) = d : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega_{p+1}(\mathcal{M}) = \{p\text{-formy zamknięte na } \mathcal{M}\ \}$$

$$\mathcal{B}^p(\mathcal{M}) = d : \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega_{p+1}(\mathcal{M}) = \{p\text{-formy dokładne na } \mathcal{M}\ \}.$$

Jako konwencję przyjmuje się, że $\Omega^p(\mathcal{M})$ jest zerową przestrzenią wektorową gdy $p < 0$ lub $p > n = \dim\mathcal{M}$. W związku z tym zachodzi przykładowo $\mathcal{B}^0(\mathcal{M}) = 0$ oraz $\mathcal{Z}^n(\mathcal{M}) = \Omega^n(\mathcal{M})$.

Fakt, że każda forma dokładna jest zamknięta implikuje, że $\mathcal{B}^p(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{Z}^p(\mathcal{M})$. Stąd ma sens następująca definicja:

Definicja 2.5.1. Grupą kohomologii de Rhama rzędu p nazwiemy następującą ilorazową przestrzeń liniową:

$$H^p_{dR}(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{Z}^p(\mathcal{M})}{\mathcal{B}^p(\mathcal{M})}$$

Jest to rzeczywista przestrzeń liniowa, i w związku z tym jest ona grupą z działaniem dodawania wektorów. Można także pokazać, że grupy de Rhama są niezmiennicze ze względu na dyfeomorifzmy. Dla każdej domkniętej p-formy ω na $\mathcal{M}$ poprzez $[\omega]$ będziemy oznaczać klasę równoważności formy ω w $H_{dR}(M)$. Taką klasę równoważności będziemy nazywać także klasą kohomologii formy ω. Jeżeli dwie formy ω, η należą do tej samej klasy kohomologii, czyli zachodzi $[\omega] = [\eta]$, to różnią się one conajwyżej o formę dokładną. Zachodzi także następujący lemat:

Lemat 2.5.1. *(Przekształcenia indukowane kohomologii) Dla każdej gładkiej funkcji $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ pomiędzy dwoma rozmaitościami gładkimi, przeciągnięcie $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ przenosi formy dokładne na formy dokładne, a formy zamknięte na formy zamknięte. W ten sposób indukuje ono przekształcenie liniowe, w dalszym ciągu oznaczane jako F^* z $H^p_{dR}(N)$ do $H^p_{dR}(M)$, które nazywane jest przekształceniem indukowanym kohomologii.*

Dowód. Jeśli ω jest formą zamkniętą, to $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, więc $F^*\omega$ także jest zamknięte. Stąd wynika już, że przeciągnięcie to przenosi formy zamknięte na zamknięte, a dokłądne na dokładne. Przekształcenie indukowane jest zadane w prosty sposób. Dla p-formy zamkniętej ω, niech

$$F^*[\omega] = [F^*\omega].$$

Wtedy jeśli $\omega' = \omega + d\eta$, to

$$F^*[\omega'] = [F^*\omega d(F^*\eta)] = [F^*\omega],$$

a więc przekształcenie jest dobrze zdefiniowane. □

Odnotujmy następujący, ważny wniosek.

Uwaga 2.5.1. Rozmaitości gładkie, które są ze sobą dyfeomorficzne, mają izomorficzne grupy kohomologii de Rhama.

Przedstawiony powyżej wniosek jest nieco zaskakujący - grupy de Rhama okazały się być topologicznym niezmiennikiem. Wniosek ten ma daleko idące uogólnienie. Można bowiem udowodnić, że wspomniane grupy są niezmiennikami homotopii. Oznacza to, że homotopijnie równoważne rozmaitości posiadać będą izomorficzne kohomologie de Rhama.

W poniższym rozumowaniu ciekawy jest dla nas zarówno wynik, jak i technika, która wykorzystywana będzie do jego udowodnienia. Wyprowadzimy bowiem równanie, które zada warunek na istnienie pewnego operatora. Nasza teza będzie wtedy równoznaczna z istnieniem interesującego nas operatora.

Chcemy najpierw udowodnić, że homotopijne funkcje gładkie indukują to samo przekształcenie kohomologii. Rozważamy w tym celu dwie gładkie funkcje $F, G : M \to N$. Chcemy udowodnić, że ich przekształcenia indukowane są równe $F^* = G^*$. Wyraźmy ten warunek w nieco innych słowach.

Gdy weźmiemy zamkniętą formę $p-$formę ω na N, aby przekształcenia indukowane były równe, musimy być w stanie wyprodukować taką $(p-1)$-formę η na M, aby spełnione

$$G^*\omega - F^*\omega = d\eta.$$

Z tego wyniknie bowiem, że $G^*[\omega] - F^*[\omega] = [d\eta] = 0$. Możemy podejść do tego problemu nieco bardziej systematycznie, szukając takie operatora h, który jako argumenty bierze zamknięte p formy na N i działa tak, że spełniona jest zależność

$$d(h\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Zamiast definiować $h\omega$ tylko dla przypadku, kiedy ω jest zamknięta, okazuje się, że łatwiej jest określić operator h z przestrzeni wszystkich gładkich p-form na N do przestrzeni wszystkich gładkich $(p-1)$-form na M, dla którego spełnione jest równanie

$$d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Gdy warunek ten jest bowiem spełniony to dla formy ω, która jest zakmnięta zajdzie także poprzedni warunek.

Jeśli chcemy być całkowicie dokładni, to musimy zdefiniować rodzinę funkcji, po jednej funkcji dla każdego p, która będzie spełniać stosowny warunek na danym poziomie.

$$H(\mathcal{M} \times \mathbb{R}_{\geq})^*_{dR} = H(\mathcal{M})^*_{dR}$$

(Przytoczyć dowód istnienia operatora homotopii - najlepiej z książki Bott)

2.6. L_p-kohomologie

(Opisać krótko, że L_p kohomologie to jest to samo tylko z dodanym warunkiem, żeby normy były p-całkowalne).

2.7. Uogólniona nierówność Hardy'ego

Kluczowa w dalszych obliczeniach będzie nierówność, Hardy'ego łącząca całkowalność funkcji z całkowalnością jej funkcji bazowych.

Lemat 2.7.1 (Uogólniona nierówność Hardy'ego)**.** *Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, funkcje-wagi $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zachodzi dla nich*

$$\int_0^\infty \left| \phi(x) \int_0^x f(t)dt \right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x)f(x)|^p \, dx$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^\infty |\phi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x |\phi(t)|^{-q} dt \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

Dowód. Dowód pomijam. Jest on dostępny w ... . Zacytować papier od pana Webera. □

Lemat 2.7.2. *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dla $\alpha > 0$ warunek $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$ implikuje $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x} dx < \infty$.*

Dowód. Wykorzystamy uogólnioną nierówność Hardy'ego. Załóżmy $\psi(t) = \phi(t) = e^{-\frac{t}{p}}$. Wtedy jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ oraz $-q = \frac{p}{1-p}$. Zbadajmy teraz, czy spełniony jest warunek, aby zachodzić mogła nierówność Hardy'ego:

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^\infty e^{-t} dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x e^{-t \frac{1}{1-p}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} = \sup_{x>0} C e^{-\frac{x}{p}} \left(e^{\frac{x}{p-1}} - 1 \right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$C \sup_{x>0} \left(e^{-\frac{x}{p-1}} e^{\frac{x}{p-1}} - e^{-\frac{x}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = C \sup_{x>0} \left(1 - e^{-\frac{x}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Wyrażenie to jest ograniczone dla $p > 1$. Po zastosowaniu uogólnionej nierówności Hardy'ego i ewentualnym przeskalowaniu zmiennej x do αx otrzymujemy tezę. □

Rozdział 3

Obliczenie

Celem tego rozdziału jest prezentacja obliczenia L_p-kohomologii Riemannowskiego f-stożka z funkcją wagową $f = e^{-t}$. Obliczenie jest wykonane sposobem prezentowanym między innymi w pracach [Cheeger], [Youssin], [?], [Weber].

Definicja 3.0.1 (f-stożek)**.** Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością Riemannowską. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{M}$. Określmy na tym produkcie tensor Riemannowski zadany przez wzór $dt^2 + f^2(t)g$, gdzie g jest metryką na $\mathcal{M}$. Przestrzeń taką nazywamy f**-stożkiem**. Oznaczać ją będziemy przez symbol $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$.

Definicja 3.0.2. Niech $L_p^k\mathcal{M}$ oznacza przestrzeń p-całkowalnych k-form różnikowych z mierzalnymi współczynnikami.

Możemy teraz poczynić obserwację o formach różniczkowych określonych na f-stożku. Przestrzeń styczna do $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie (t, m) to:

$$T_{(t,m)}(\mathrm{c}^f\mathcal{M}) = \mathbb{R} \times T_m\mathcal{M}.$$

W terminach form różniczkowych powiązanych z rozważanym f-stożkiem oznacza to, że możemy napisać:

$$\Lambda^k(\mathbb{R} \times T_m\mathcal{M}) = \Lambda^{k-1}(\mathcal{M}) \oplus \Lambda^k(\mathcal{M}).$$

Spostrzeżenie to możemy wyrazić także w inny sposób:

Uwaga 3.0.1. Każda k-forma $\omega \in \Lambda^k T(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$, a w konsekwencji każda forma z przestrzeni form p-całkowalnych $L_k^p(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$ może być zapisana jako$\omega = \eta + \xi \wedge dt$, gdzie zarówno η, jak i ξ nie zawierają dt. Zauważmy ponadto, że η jest k-formą, a ξ jest $k-1$ formą.

Przypomnijmy także dla klarowności notację dotyczącą zapisywania form różniczkowych względem lokalnych współrzędnych. Dowolną k-formę η, która w domyśle nie zawiera czynnika dt, zapisywać będziemy względem lokalnych rzeczywstich współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ na $\mathcal{M}$ jako:

$$\eta(t, x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha,$$

gdzie $I(k)$ jest zbiorem wszystkich multiindeksów $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ takich, że $1 \leq \alpha_1 < ... < \alpha_i \leq n$, gdzie

$$dy^\alpha = dy^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dy^{\alpha_k}, \tag{3.1}$$

a η_α jest gładką funkcją określoną na $(0,\infty)\times\mathcal{M}$.

Pomiędzy rozmaitościami $\mathcal{M}$ oraz $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ istnieją kanoniczne przekształcenia projekcji oraz inkluzji. Żeby dobrze zilustrować w sposób w jaki działają one na formy różniczkowe na poszczególnych rozmaitościach, przypomnijmy ich typy. Inkluzja to funkcja:

$$i_r : \mathcal{M} \to \mathrm{c}^f\mathcal{M}$$

$$i_r(x) = (x, r).$$

Możemy za jej pomocą przeciągać formy z $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ do $\mathcal{M}$. Przeciągnięcie takie oznaczymy jako $\omega_r = i_r^*(\omega) = i_r^*\eta$ dla formy $\omega = \eta + \xi \wedge dt$.
Projekcja (rzutowanie) zadane jest jako:

$$\pi : \mathrm{c}^f\mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

$$\pi(x,t) = x.$$

Rozważamy formę $\omega \in L_p^k(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$, gdzie $\omega = \eta + \xi \wedge dt$. Zauważmy, że metryka Riemannowska na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ jest określona w taki sposób, że stosowne normy spełniają następujące zależności:

$$|\eta(t,x)|^2 = (\mathrm{e}^{-t})^{-2k}|\eta(t,x)|^2_{\mathcal{M}} + (\mathrm{e}^{-t})^{-2(k-1)}|\xi(t,x)|^2_{\mathcal{M}},$$

gdzie $|\cdot|_{\mathcal{M}}$ jest normą form różniczkowych indukowaną przez metrykę Riemannowską na rozmaitości $\mathcal{M}$. Czynnik $(\mathrm{e}^{-t})^{-2k}$ pojawia się ponieważ forma η należy do k-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej do rozmaitości $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie (t,x). Zauważmy ponadto, że Riemannowska forma objętośći na $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ w punkcie (t,x) różni się od formy objętości na $\mathcal{M}$ w punkcie x o czynnik $(e^{-t})^n$. Policzmy więc normę ω jako elementu przestrzeni $L_k^p(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$.

$$||\omega||^p = \int_{\mathrm{c}^f\mathcal{M}} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{c}^f\mathcal{M}} = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} \int_{\mathcal{M}} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathcal{M}} dt =$$
$$= \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} ||\omega_t||_{\mathcal{M}} dt = \int_0^\infty ||\omega||_t^p dt,$$

gdzie

$$||\omega||_r \stackrel{\mathsf{def}}{=} ||\omega_{|\mathcal{M}\times\{r\}}|| = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k)}||\omega_r||_{\mathcal{M}}.$$

Przypomnijmy, że $\omega_r = i_r^*(\eta)$.

Zauważmy teraz w jaki sposób zachowywać się będzie norma formy, która została przeciągnięta z podstawy, czyli rozmaitości $\mathcal{M}$. Dla $\eta \in L_p^*(\mathcal{M})$ możemy napisać

$$||\eta||_r \stackrel{\mathsf{def}}{=} ||\pi^*||_r = \mathrm{e}^{-r\cdot(\frac{n}{p}-k)}||\eta||_{\mathcal{M}}.$$

Zazwyczaj w obliczeniach dotyczących kohomologii form argument pokazujący że zachodzi formuła homotopii jest prosty. W badanym przypadku rozmaitości $\mathrm{c}^f\mathcal{M}$ fakt, że spełniona jest formuła homotopii wymaga szczegółowego uzasadnienia.

Będziemy starać się dowieść, że zachodzi formuła:

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega + I_r d\omega$$

W tym celu ponownie posłużymy się rozbiciem k-formy ω, określonej na $c^f\mathcal{M}$ na

$$\omega = \eta + dt \wedge \xi.$$

Możemy teraz dla η określić na $c^f\mathcal{M}$ k-formę $\partial\eta/\partial t$ zadaną w lokalnych współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jako

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(t,x) = \sum_{\alpha\in I(k)} \frac{\eta_\alpha}{\partial t}(t,x)dx^\alpha.$$

Wykorzystujemy tutaj notację z 3.1. Na tej samej podstawie możemy zapisać dla formy ξ $(k-1)$ formę $\partial\xi/\partial t$ jako:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}(t,x) = \sum_{\alpha\in I(k-1)} \frac{\xi_\alpha}{\partial t}(t,x)dx^\alpha.$$

Może zdefiniować na stosownym kompleksie form różnikowych

$$d_\mathcal{M}\omega = \sum_{1\le j\le m}\sum_{\alpha\in I(k)} \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x_j}(t,x)dx_j \wedge dy^\alpha$$
$$+ \sum_{1\le j\le m}\sum_{\alpha\in I(k-1)} \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_j}(t,x)dx_j \wedge dt \wedge dy^\alpha.$$

Możemy wtedy określić różniczkę formy najpierw na podstawie f-stożka:

$$d_\mathcal{M}\omega = d_\mathcal{M}\eta - dt \wedge d_\mathcal{M}\xi,$$

a następnie na całym badanym f-stożku:

$$d\omega = d_\mathcal{M}\omega + dt \wedge \frac{\partial\eta}{\partial t} = d_\mathcal{M}\eta + dt \wedge \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} - d_\mathcal{M}\xi\right).$$

Możemy teraz postarać się zdefiniować operator homotopii. Dla ustalonego $r \in (0,\infty)$ określimy operator

$$I_r : \Lambda^k(c^f\mathcal{M}) \to \Lambda^{k-1}(c^f\mathcal{M}),$$

który w lokalnych współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest zadany wzorem:

$$(I_r\omega)(t,x) = \sum_{\alpha\in I(k-1)} \left(\int_s^t \xi(\tau,x)d\tau\right) dy^\alpha.$$

Dla klarowności kolejnych wzorów wprowadzimy oznaczenie. Będziemy mianowicie pisać

$$(I_r\omega)(t,x) = \int_s^t \xi.$$

Możemy teraz zbadać wyrażenia $dI_r\omega$ oraz $I_r d\omega$, które występują w formule homotopii. Napiszemy:

$$dI_r\omega = d_\mathcal{M}\int_r^t \xi + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}\int_r^t \xi =$$

$$= \int_r^t d_{\mathcal{M}}\xi + dt \wedge \xi$$

oraz

$$I_r\omega = I_r\left(d_{\mathcal{M}}\eta + dt \wedge \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - d_{\mathcal{M}}\xi\right)\right)$$
$$= \int_r^t \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - d_M\xi\right)$$
$$= \eta - \pi^*\left(\eta^{(r)}\right) - \int_r^t d_{\mathcal{M}}\xi,$$

gdzie $\eta^{(r)} \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ jest zadane w lokalnych współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ jako

$$\eta^{(s)}(x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t, x) dx^\alpha.$$

W związku z tym, zachodzi wzór:

$$dI_r\xi + I_r d\xi = dt \wedge \xi + \eta - \pi^*\left(\eta^{(r)}\right).$$

Spróbujemy teraz zbadać, kiedy dla p-całkowalnej formy ω forma $I_r\omega$ także jest całkowalna. Fakt, że forma jest p-całkowalna oznacza innymi słowy, że

$$||\omega||^p = \int_{c^f\mathcal{M}} |\omega|^p = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \left((e^{-t})^{-2k}|\eta^{(t)}|^p_{\mathcal{M}} + (e^{-t})^{-2(k-1)}|\xi^{(t)}|^p_{\mathcal{M}}\right)(e^{-t})^m dt.$$

Jako że $I_r\omega$ jest $(k-1)$ formą, to możemy napisać

$$||I_r\omega||^p = \int_{c^f\mathcal{M}} ||I_r\omega||^p = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \left((e^{-t})^{-p(k-1)} \int_r^t ||\xi^{(\tau)} d\tau||^p_{\mathcal{M}} (e^{-t})^n dt\right).$$

Wykorzystamy teraz lemat, który udowodniony został w dodatku.

Lemat możemy wykorzystać, tylko wtedy gdy współczynnik przy e^{-t}, nazwijmy go α, jest większy od zera. Ten współczynnik to: $\alpha = -p(k-1) + n$. Zbadajmy warunek:

$$-p(k-1) + n > 0$$
$$-k + 1 + \frac{n}{p} > 0$$
$$k < \frac{n}{p} + 1.$$

Warunek pozwalający na wykorzystanie lematu jest więc spełniony dla $k \leq \frac{n}{p}$.

Gdy warunek ten jest spełniony, stosujemy lemat ... i uzyskujemy rezultat, że $I_r\omega$ jest formą p-całkowalną.

Pokazaliśmy więc, że jeśli ω jest k-formą p-całkowalną, to $I_r\omega$ jest p-całkowalna i zachodzi wzór

$$\omega = dI_r\omega + I_r d\omega + \pi^* \left(\eta^{(s)}.\right).$$

Stąd jeśli $d\omega = 0<$ to

$$\eta \in d(L^{i-1}\mathrm{c}^f\mathcal{M}) + \pi^*(L^i * \mathcal{M}),$$

więc

$$\pi^* : H\left(\mathcal{M}\right) \to H(\mathrm{c}^f\mathcal{M})$$

jest operatorem suriektywnym.

3.1. Co pan Weber kazał mi zrobić

Ten fragment, który Pan kontempluje: Chodzi o to, że zamiast form gładkich trzeba rozważać formy o mierzalnych współczynnikach z różniczką w sensie "prądów" (currents), czyli funkcjonałów na formach. Być może to troche zbyt obszerny temat na licencjat. Moim zdaniem wystarczy by Pan oszacował operator I (odcałkowanie form) w normie L^p i powiedział że, tak jak np w mojej pracy pozwoli to dowieść znikanie kohomologii w jakichś gradacjach.

Czyli twierdzenie główne pracy by było: Operator

$$I_0 : A^k \to A^{k+1}$$

jest ciągły w normie L^p dla k....

Operator

$$I_\infty : A^k \to A^{k+1}$$

jest ciągły w normie L^p dla k.... , gdzie A^k oznacza k-formy o mierzalnych współczynnikach.

Bibliografia

[Weber] Andrzej Weber, *An isomorphism from intersection homology to* L_p*-cohomology*, Forum Mathematicum, de Gruyer, 1995.

[Cheeger] Jeff Cheeger, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol.36,

[Bott] Raou Bott, *Differetial forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.

[Youssin] Boris Youssin, L_p *cohomology of cones and horns* J. Differential Geometry, Volume 39, Number 3, 1994.

[Lee] Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*

[Ducret] Stephen Ducret, $L_{q,p}$*-Cohomology of Riemannian Manifolds and Simplical Complexes of Bounded Geometry*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Doctor Thesis, Lausanne, 2009