Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Garmulewicz
Nr albumu: 304742

L_p-kohomologie riemannowskich rożków

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Andrzeja Webera
Instytut Matematyki

Wrzesień 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Tematem niniejszej pracy jest porównanie L_p-kohomologii rozmaitości Riemannowskiej i f-rożka skonstruowanego nad nią. Rożek ten jest zdefiniowany jako produkt

$$\mathrm{C}^f M = M \times \mathbb{R}_+$$

z metryką Riemannowską postaci $dt \otimes dt + f(t)^2 g$, gdzie g jest metryką na części nieosobliwej wyjściowej pseudorozmaitości.

Praca opiera się na serii prac [Ch], [You] i [We]. W szczególności, w pracy [We] prezentowane jest między innymi obliczenie L_p-kohomologii stożka nad pseudorozmaitością Riemannowską dla funkcji $f(t) = t^k$. W niniejszej pracy rozważany będzie przypadek funkcji $f(t) = e^{-t}$.

Słowa kluczowe

kohomologie de Rhama, topologia różniczkowa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry
14F (Co)homology theory
14F40 de Rham cohomology

Tytuł pracy w języku angielskim

L_p-cohomologies of Riemannian horns.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Kohomologie de Rhama są jednym ze standardowych narzędzi służących do badania topologii rozmaitości. Nie są one jednak dobrym narzędziem do badania rozmaitości z osobliwościami lub rozmaitości otwartych z metryką riemannowską. Choć grupy kohomologii de Rhama są tam dobrze zdefiniowane dla części nieosobliwej, to nie zawierają one informacji o metryce w otoczeniu osobliwości oraz własnościach asymtpotycznych badanych przestrzeni. Jednym ze sposobów na badanie takich własności jest ograniczenie naszych rozważań do podkompleksu klasycznego kompleksu de Rhama, a mianowicie form p-całkowalnych. Zdefiniowana w ten sposób L_p kohomologia w ogólności nie jest niezmiennikiem topologicznym. Zależy ona jednak jedynie od klasy quasi-izometrii metryki i pozwala uzyskać nowe narzędzia w badaniu rozmaitości z osobliwościami. Jednym z typowych zabiegów jest rozważanie otoczeń osobliwości, które wyglądają lokalnie jak „rożek" $M \times \mathbb{R}_+$ ze "ściśnięciem" podstawy M w nowym kierunku t funkcją $f(t)$. Aby osiągnąć ten efekt, wyposażamy tę rozmaitość produktową w metrykę Riemannowską postaci $dt^2 + f(t)^2 g$. Uzyskujemy w ten sposób pewien model otoczenia osobliwości, który może posłużyć jako narzędzie do dekomponowania bardziej skomplikowanych rozmaitości na mniejsze kawałki, których kohomologie są prostsze do policzenia.

Podstawowym pytaniem, które możemy zadać w tym kontekście jest pytanie o relację pomiędzy L_p kohomologiami podstawy, czyli rozmaitości M a L_p kohomologiami przestrzeni produktowych $M \times (0,1)$ czy $M \times \mathbb{R}_+$. W literaturze opisanych jest wiele przykładów takich porównań. W jednej z podstawowych prac na ten temat, jaką jest [Ch] wykonane jest obliczenie dla L_2 kohomologii skończonego stożka $cM = M \times (0,1)$, gdzie M jest zamkniętą rozmaitością wymiaru n z metryką stożkową postaci $dt^2 + t^2 g$. W pracy [We] jest ono uogólnione dla L_p kohomologii, dla których otrzymano wynik

$$H^k_{(p)}(cM) = \begin{cases} H^k(M) & \text{dla } k < (n+1)/p \\ 0 & \text{dla } k \geq (n+1)/p \end{cases}$$

W pracy [You] uogólniono to obliczenie na szersze klasy funkcji g na tej samej przestrzeni $M \times (0,1)$.

Niniejsza praca zajmuje się pewną modyfikacją powyższych wyników. Zostanie przedstawione obliczenie grup L_p kohomologii dla rożka, czyli przestrzeni ilorazowej $M \times \mathbb{R}_+$ z metryką $dt^2 + (e^{-t})^2 g$. Skrótowe sformułowanie najważniejszego twierdzenia to

$$H^k_{(p)}\left(\mathrm{C}^f M\right) = \begin{cases} H^k(M) & k < \frac{n}{p} + 1, \\ 0 & k > \frac{n}{p} + 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

gdzie k to gradacja formy, n to wymiar rozmaitości-podstawy, a parametr p pochodzi od p-normy. W przypadku granicznym $k = \frac{n}{p} + 1$ sytuacja jest bardziej skomplikowana. W szczególności, $H^k_{(p)}(\mathrm{C}^f M)$ może być wymiaru ∞. Przypadek taki jest ilustrowany przez pierwsze L_p kohomologie półprostej, które umówione są w Przykładzie 4.1.1. Wyniki w pracach [You], [We] sugerują, że możliwe jest nałożenie pewnych dodatkowych założeń, które pozwalają na osiągnięcie dokładnych wyników w przypadku granicznym, ale wątek ten nie jest podejmowany w tej pracy.

Omówmy krótko plan pracy. W Rozdziale 2 przedstawione są podstawowe zagadnienia z zakresu Algebry Liniowej, które są wykorzystywane w dalszych obliczeniach. Szczególnie interesujące z perspektywy dalszego ciągu pracy będzie zachowanie potęgi zewnętrznej przestrzeni liniowej ze względu na skalowanie metryki. W Rozdziale 3 prezentowana jest konstrukcja kohomologii Riemanna. Ponadto dowodzę formułę homotopii i pokazuję jako wniosek, że zachodzi $H^*(M) \simeq H^*(M \times \mathbb{R})$, gdzie izomorfizm zadany jest przez π^*. W Rozdziale 4 przedstawiona jest definicja L_p-kohomologii i udowodnione jest wspomniane wyżej kluczowe twierdzenie pracy.

Rozdział 2

Algebra liniowa

W rozdziale tym przytaczam definicje i wyprowadzam podstawowe zależności, które pomogą nam w dalszych obliczeniach.

2.1. Algebra zewnętrzna

W tej sekcji przytaczam definicje form zewnętrznych oraz ich własności. Przytoczone definicje podane są według podręczników [Lee], rozdział 14 oraz [Ko] - rozdział 6 § 3. Formy zewnętrzne są dla nas istotne, ponieważ formy różniczkowe, które są podstawowym obiektem służącym do badania kohomologii de Rhama, są lokalnie elementami algebry zewnętrznej na przestrzeni stycznej do rozmaitości.

Definicja 2.1.1 (k-kowektor)**.** Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Tensor działający jedynie na wektorach, ale nie na kowektorach, czyli tensor $T : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$ nazwiemy kowariantnym. Takie tensory mają wiele nazw: formy zewnętrzne, multi-kowektory, czy też po prostu k-kowektory. Przestrzeń wszystkich k-kowektorów na przestrzeni V ma wiele oznaczeń. Jednym z bardziej popularnych oznaczeń jest $T^k(V^*)$.

Tensor będzie nazwany *alternującym*, gdy jego wartość zmieni znak w przypadku zmienimy miejscami jego dwa wektory wejściowe. Przestrzeń takich tensorów, które należą do $T^k(V^*)$, a do tego są antysymetryczne, często oznacza się $\Lambda^k(V^*)$. Przedstawmy teraz kilka podstawowych operacji określonych na takich tensorach.

Definicja 2.1.2 (produkt tensorowy)**.** Dla dwóch tensorów kowariantnych $f \in T^p(V^*)$ oraz $g \in T^q(V^*)$ możemy określić produkt (tensorowy) $f \otimes g \in T^{p+q}(V^*)$ za pomocą wzoru:

$$f \otimes g(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \cdot g(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{p+q}).$$

Dowolny kowariantny tensor możemy przekształcić na tensor alternujący za pomocą przekształcenia *alternatora*, nazywanego także *rzutem alternującym*.

Definicja 2.1.3 (Alternator)**.** Rzut alternujący jest określony w następujący sposób:

$$\mathrm{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$$

$$\mathrm{Alt}(f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(k)}).$$

Z pomocą alternatora określić można iloczyn zewnętrzny antysymetryczny.

Definicja 2.1.4 (Iloczyn zewnętrzny)**.** Dla elementów $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ oraz $\eta \in \Lambda^q(V^*)$ iloczyn zewnętrzny zadamy wzorem

$$\omega \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Przytoczmy teraz sposób, w jaki definiuje się bazę potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Niech $v_1, v_2, ..., v_n$ będzie bazą przestrzeni dualnej V^*, która jest dualna do bazy $w_1, w_2, ..., w_n$. Wówczas układ

$$B = \{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge ... \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n\}$$

jest bazą potęgi zewnętrznej $\Lambda^k(V^*)$. Jest to udowodnione w podręczniku [Ko, Rozdział §3.2, Twierdzenie 3]. Zdefiniujmy teraz *algebrę zewnętrzną.*

Definicja 2.1.5 (algebra zewnętrzna)**.** Algebra zewnętrzna jest to suma prosta:

$$\Lambda^*(V) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*) \oplus ... \, .$$

Przestrzeń ta stanowi algebrę z działaniami dodawania oraz iloczynu zewnętrznego. Ponieważ działanie iloczynu zewnętrznego jest w $\Lambda^*(V)$ dwulinowe, to wprowadza ono w tej przestrzeni strukturę algebry. Algebra zewnętrzna jest opisywana w wielu standardowych podręcznikach, przykładowo [Ko, Rozdział 6§3.2], albo [Lee, Proposition 14.11].

2.2. Norma indukowana na potędze zewnętrznej przestrzeni dualnej. Skalowanie norm.

W tym rozdziale przedstawiam relacje pomiędzy normą określoną na danej przestrzeni wektorowej a indukowaną przez iloczyn skalarny normą na przestrzeni dualnej oraz na potędze zewnętrznej przestrzeni dualnej. W szczególności, w dalszych obliczeniach będziemy badać wyrażenia typu $r|\cdot|$, gdzie $|\cdot|$ jest normą na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Znaczenie będzie miało jak zachowuje się norma na przestrzenii dualnej, gdy skalujemy normę wyjściowej przestrzenii liniowo o czynnik r.

Niech będzie dana skończenie wymiarowa rzeczywista przestrzeń liniowa V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ten iloczyn skalarny zadaje izomorfizm pomiędzy V oraz jej przestrzenią dualną V^*. Ten izomorfizm indukuje iloczyn skalarny na V^*. Iloczyn skalarny jest zdeterminowany przez normę i w dalszych obliczeniach wygodniej jest używać normy zamiast iloczynu skalarnego. Przypomnijmy równoważny sposób określenia normy, który ułatwi nam obliczenie zachowania normy ze względu na skalowanie.

Definicja 2.2.1 (Norma przestrzeni dualnej)**.** Dla rzeczywistej przestrzeni wektorowej funkcjonał $\phi \in V^*$ ma normę określoną wzorem:

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(v)| : v \in V, ||v|| = 1\}, \tag{2.1}$$

gdzie $||v||$ to norma pochodząca z wyjściowej przestrzeni wektorowej V.

Iloczyn skalarny jest także przenoszony na potęgę zewnętrzną przestrzeni dualnej, co jest opisane na przykład w podręczniku [Ko, Rozdział 6§3]. Dla dwóch k-form jest on zadany wzorem

$$\langle v^1 \wedge .... \wedge v^k, w^1 \wedge ... \wedge w^k \rangle = \det \left(\langle v^i, w^j \rangle \right), \tag{2.2}$$

czyli jest on równy wyznacznikowi macierzy wartości iloczynu skalarnego zaaplikowanych do poszczególnych składowych k-kowektorów.

Zaobserwujmy w jaki sposób zachowają się normy przestrzeni dualnej oraz potęgi zewnętrznej, gdy przeskalujemy normę wyjściową o czynnik liniowy r. Załóżmy, że rozważamy rzeczywistą przestrzeń liniową V z określoną normą $|| \cdot ||$. Określmy nową normę dla $v \in V$:

$$||v||_r = r||v||.$$

Z definicji 2.1 możemy bardzo prosto zauważyć, że dla funkcjonału $\phi \in V^*$ nowa norma będzie dana wzorem

$$||\phi||_r = \frac{1}{r}||\phi||.$$

Zauważmy bowiem, że dla przestrzeni skończenie wymiarowej ze zwartości sfery wynika, że supremum ze wzoru 2.1 jest osiągane. Załóżmy, że supremum to jest osiągane dla wektora v. W nowej normie wektor ten ma normę $||v||_r = r \cdot ||v|| = r \cdot 1 = r$. Ze względu na liniowość operatora ϕ widzimy, że na zbiorze $\{w \in V : ||w||_r = 1\}$ wartość $|\phi(w)|$ będzie osiągała swoje supremum dla wielokrotności αv. Istotnie, $\frac{1}{r}v$ maksymalizuje tę wartość i jednocześnie widzimy, że

$$||\phi||_r = \frac{1}{r}|\phi(v)| = \frac{1}{r}||\phi||.$$

Dzięki powyższym obserwacjom otrzymyjemy w jaki sposób skaluje się iloczyn skalarny na przestrzeni dualnej W definicji wyznacznika zakładamy bowiem, że wyznacznik jest liniowy ze względu na mnożenie wiersza macierzy. Pomnożenie całej macierzy kwadratowej wymiaru k przez czynnik r powoduje więc pomnożenie wyznacznika przez czynnik r^k. Otrzymujemy stąd natychmiast dla k-formy $\omega = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k$ wzór:

$$||\omega||_r = \frac{1}{r^k}||\omega||. \tag{2.3}$$

Rozdział 3

Formy różniczkowe i reguła homotopii

W tym rozdziale opisuję formy różniczkowe, kohomologie de Rhama i udowadniam formułę homotopii. Technika otaczająca formułę homotopii będzie dla nas szczególnie interesująca. Będzie ona w dalszym ciągu pracy poddawana modyfikacjom i posłuży ona do udowodnienia kluczowego twierdzenia pracy. Poniższe definicje są przytoczone w formie opartej na podręczniku [Lee] oraz [BoTu]. W szczególności, dowód formuły homotopii jest zaczerpnięty z [BoTu, Rozdział I§4].

Rozważamy rozmaitość M. Dla dowolnej przestrzeni kostycznej T_p^*M rozpatrzmy jej potęgę zewnętrzną $\Lambda^k(T_p^*M)$. Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń liniową nad każdym punktem $p \in M$. Ich sumę rozłączną oznaczymy $\Lambda^k(T^*M)$. Przestrzenie te, określone nad każdym punktem z osobna, można skleić do wiązki wektorowej. Przekroje tej wiązki stycznej to formy różniczkowe.

Definicja 3.0.2 (Forma różniczkowa)**.** k-formą różniczkową na rozmaitości M nazwiemy gładki przekrój wiązki $\Lambda^k(T^*M)$ nad M, czyli gładkie odwzorowanie $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$, spełniające $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p^*)$ dla każdego punktu $p \in M$.

Przestrzeń k-form różniczkowych oznaczać będziemy przez $\Omega^k(M)$. Określimy na niej kluczowe dla dalszych kroków naszego rozumowania pojęcie *pochodnej zewnętrznej* formy różniczkowej. Operacja ta zwiększa stopień formy, czyli $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Pozwala to patrzeć na nią w dalszej części rozumowania, jako na operator w ciągu przestrzeni wektorowych $\Omega^k(M)$, tworzącym kompleks łańcuchowy.

Rozpocznijmy od najprostszego przypadku przywołując definicję różniczki funkcji, czyli operację $d : C^\infty = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$. Niech f będzie funkcją gładką na M, a (x^i) - układem współrzędnych. Na dziedzinie tego układu określimy różniczkę df wzorem

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{3.1}$$

Napisy dx^i oznaczają tutaj 1-formy będące różniczkami zewnętrznymi poszczególnych składowych z układu współrzędnych x_i. Działanie to jest dobrze zdefiniowane, ponieważ $x_i : M \to \mathbb{R}^n$ są funkcjami, a więc 0-formami różniczkowymi.

Uzupełnijmy definicję dla form o wyższej gradacji. Dla takich form określamy pochodną zewnętrzną w następujący sposób. Niech $\omega = \sum_{j \in I} \alpha_{j_1,\ldots,j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$. Różniczka d :

$\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ jest dana jako

$$d(\sum_{j\in I} \alpha_{j_1,\dots,j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \sum_{j\in I}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{j_1,\dots,j_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}).$$

Ponadto, jeśli ϕ jest p-formą, a ψ jest q-formą, to możemy zapisać następujący wariant formuły Leibniza

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge d\psi.$$

Jest on udowodniony w [Lee, Proposition 14.23 (b)].

Warto zwrócić uwagę, że własność 3.1 wraz z formułą Leibniza oraz własnością $d \circ d = d^2 = 0$ determinują postać różniczki dla form w wyższych gradacjach.

Przytoczymy teraz kluczową własność różniczki wraz z dowodem, która pozwoli nam stwierdzić, że ciąg przestrzeni form różniczkowych kolejnych gradacji z operatorem d różniczki zewnętrznej jest kompleksem łańcuchowym, czyli ciągiem przestrzeni

$$\dots \xrightarrow{d} A^i \xrightarrow{d} A^{i+1} \xrightarrow{d} \dots .$$

Twierdzenie 3.0.1. *Dla różniczki zewnętrznej form należących do* $(\Omega^*(M), d)$ *zachdzi*

$$d \circ d = 0.$$

W związku z tym ciąg przestrzeni $\big(\Omega^i(M), d\big)_i$, $i \in \mathbb{N}$ *jest kompleksem łańcuchowym.*

Dowód. Udowodnijmy najpierw na przypadku szczególnym 0-formy, czyli funkcji o własnościach rzeczywistych. Dla tego przypadku zachodzi

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0, \end{aligned}$$

z uwagi na to, że pochodne cząstkowe mieszane są sobie równe. Dla przypadku ogólnego natomiast, skorzystamy z powyższego przypadku szególnego oraz formuły Leibniza, które w połączeniu pozwolą nam napisać

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d\left(\sum_J d\alpha_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= \sum_J d(d\alpha_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &+ \sum_J \sum_{i=1}^{k} (-1)^i d\alpha_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \dots dx^{j_k} = 0. \end{aligned}$$

Nadużywam tu nieco notacji dla zachowania jasności dowodu. Iteracja po J to iteracja po multiindeksach, a iteracja po i to normalna konwencja sumowania. Ostatnia równość wynika wprost z definicji różniczki form $d\alpha_J$.

$\square$

3.1. Metryka Riemannowska i forma objętości

Definicja 3.1.1 (Metryka Riemannowska)**.** Metryką Riemannowską nazwiemy gładkie, symetryczne kowariantne pole 2-tensorów na rozmaitości M które jest dodatnio określone w każdym punkcie. Mówiąc bardziej intuicyjnie, określenie metryki Riemannowskiej to doczepienie pola iloczynów skalarnych do rozmaitości, które zmienia się w sposób gładki. Rozmaitość gładką wyposażaoną w metrykę Riemannowską nazwiemy rozmaitością Riemannowską.

W dowolnych lokalnych gładkich współrzędnych (x^i) metryka Riemannowska może być zapisana jako

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

gdzie g_{ij} jest dodatnio określoną macierzą (której współrzędne to funkcje gładkie). Ostatnia część równości zapisuje naszą metrykę w terminach produktu symetrycznego.

Biorąc pod uwagę, że w głównej części pracy rozważać będziemy rozmaitości Riemannowskie będące produktem dwóch rozmaitości Riemannowskich, zbadajmy w jaki sposób zadana będzie metryka na takiej przestrzeni produktowej. Jeżeli (M, g) oraz (M', g') będą rozmaitościami Riemannowskimi, to na $M \times M'$ możemy zadać metrykę produktową $\hat{g} = g \oplus g'$ w następujący sposób:

$$\hat{g}\left((v, v'), (w, w')\right) = g(v, w) + g'(v', w') \tag{3.2}$$

dla każdego $(v, v'), (w, w') \in T_pM \oplus T_qM' \cong T_{(p,q)}(M \times M')$. Gdy mamy dane jakieś konkretne współrzędne $(x_1, ..., x_n)$ dla M oraz $(y_1, ..., y_n)$ dla M', to dostajemy prosto lokalne współrzędne $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ na $M \times M'$ i nietrudno sprawdzić, że metryka produktowa jest lokalnie reprezentowana przez macierz blokowo-diagonalną

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} (g_{ij}) & 0 \\ 0 & \left(g'_{ij}\right) \end{pmatrix}.$$

W kolejnym rozdziale pracy będziemy mówić o całkowaniu funkcji po rozmaitości Riemannowskiej. Aby móc całkować funkcje na rozmaitości potrzebne jest nam pojęcie Riemannowskiej formy objętości. Szczegóły dotyczącego tego rozumowania są obszerne i w małym stopniu mają wpływ na tę pracę. Dlatego też przywołam tylko definicję i twierdzenie o postaci formy objętości w lokalnych współrzędnych, zamieszczając jedynie odnośnik do dowodu w źródle.

Uwaga 3.1.1. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru $n \geq 1$. Istnieje dokładnie jedna gładka forma objętości $\omega_g \in \Omega^n(M)$, nazywana **Riemannowską formą objętości**, która spełnia równanie

$$\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1$$

gdzie (E_i) jest lokalną, ortonormalną, dodatnio zorientowaną bazą pól wektorowych.

Dowód. Pomijam, zamieszczony w oryginalnym źródle [Lee, Proposition 15.29]. □

Dokładne znaczenie tej definicji i jej motywacja jest poza zakresem zainteresowania tej pracy. Musimy natomiast z perspektywy dalszych obliczeń znać jaka jest lokalna postać formy objętości.

Uwaga 3.1.2. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską wymiaru n. W dowolnych zorientowanych gładkich współrzędnych (x_i), Riemannowska forma objętości może być wyrażona lokalnie w następujący sposób:

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

Dowód tej własności także omijam, jest on dostępny w [Lee, Proposition 15.31].

Do naszych dalszych obliczeń potrzebna nam będzie umiejętność całkowania funkcji rzeczywistych pod rozmaitościach Riemannowskich. Zdefiniujmy w tym celu stosowną całkę. Niech (M, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemannowską. Niech vol_g oznacza jej formę objętości. Jeżeli mamy teraz f - funkcję o zwartym nośniku, rzeczywistą i ciągłą, określoną na M, to $f\mathrm{vol}_g$ jest n-formą. Nie odwołując się do ogólnych definicji całek z różnych typów form różniczkowych, w naszym przypadku będziemy mogli zapisać prosto, korzystając z wcześniejszych uwag dotyczących zapisu formy objętości:

$$\int_M f d\mathrm{vol}_g = \int_{\phi(U)} f(x) \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 ... dx^n,$$

zakładając, że nośnik f jest cały w obrazie jednej mapy ϕ. Jeżeli bowiem tak by nie było, to musielibyśmy korzystać z wielu map $\phi_1, \phi_2 ...$, które opisywałyby całą rozmaitość biorąc pod uwagę gładki podział jedynki na rozmaitości.

3.2. Norma formy różniczkowej indukowana przez iloczyn skalarny

Biorąc pod uwagę lokalną strukturę form różniczkowych jako algebry zewnętrznej oraz uwagi z rozdziału 2.1, iloczyn skalarny na rozmaitości Riemannowskiej indukuje zarówno na przestrzeni kostycznej, jak i na potędze zewnętrznej przestrzeni kostycznej iloczyn skalarny, a w związku z tym także normę. Dla porządku zapiszę jej lokalną postać.

Niech (M, g) będzie zorientowaną, spójną rozmaitością Riemannowską. Dla danych dwóch form zapisanych w lokalnych współrzędnych, ortogonalnych względem iloczynu skalarnego (metryki Riemannowskiej)

$$\alpha_x = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \alpha_{i_1 ... i_k; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k}$$

oraz

$$\beta_x = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \beta_{i_1 ... i_k; x} e^{i^1} \wedge ... \wedge e^{i^k},$$

iloczyn skalarny na przestrzeni form daje się zapisać prostym wzorem

$$G(\alpha_x, \beta_x) = \sum_{i_1, ..., i_k} \alpha_{i_1 ... i_k; x} \beta_{i_1 ... i_k; x}.$$

Mamy więc dzięki temu iloczynowi określoną lokalną normę dla form różniczkowych. Dla $\omega \in \Omega^k(M)$ oraz $x \in M$ napiszemy

$$|\omega|_x = \sqrt{G(\omega_x, \omega_x)}.$$

Warto podkreślić tu prosty, ale istotny wniosek, że po określeniu formy ω norma jest funkcją skalarną $|\omega|_x : M \to \mathbb{R}$. Jest to warte odnotowania, ponieważ pomaga to w rozumieniu intuicji stojącej za definicją normy na całości rozmaitości Riemannowskiej. Taka norma będzie po prostu całką po całej rozmaitości z normy punktowej rozważanej formy różniczkowej.

3.3. Przekształcenie indukowane, kohomologie de Rhama oraz formuła homotopii

Rozważmy przypadek gładkiej funkcji $F : M \to N$, pomiędzy dwoma rozmaitościami. Za pomocą tej funkcji będziemy mogli określić przekształcenie, które pozwoli nam zamieniać formy różniczkowe z rozmaitości N na formy różniczkowe z rozmaitości M. Z różniczką takiej funkcji możemy bowiem stowarzyszyć nastęjące przekształcenie.

Definicja 3.3.1 (Przeciągnięcie). Przeciągnięcie $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ to przekształcenie określone wzorem

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_n) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k)),$$

gdzie dF_p jest przekształceniem stycznym $T_pM \to T_{f(p)N}$. Przeciągnięcie jest też czasami nazywane cofnięciem.

Uwaga 3.3.1. Przeciągnięcie komutuje z różniczką zewnętrzną:

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

Dowód. Pomijam standardowy dowód tej własności. Jest on dostępny przykładowo w [Lee, Lemma 14.16]. □

Pokażemy teraz bardzo interesującą strukturę, jaką mają formy różniczkowe na rozmaitości, gdy rozpatrywać je jako kompleksy z działaniem różniczki. W poniższym rozumowaniu, przez $\Omega^p(M)$ oznaczać będziemy przestrzeń gładkich k-form. Niech M będzie rozmaitością, a p nieujemną liczbą całkowitą. Ponieważ $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ jest przekształceniem liniowym, jego jądro oraz obraz są podprzestrzeniami liniowymi. Wprowadźmy oznaczenie:

$$\mathcal{Z}^p(M) = \ker\left(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)\right) = \{p\text{-formy zamknięte na } M\}$$

$$\mathcal{B}^p(M) = \operatorname{im}\left(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)\right) = \{p\text{-formy dokładne na } M\}.$$

Jako konwencję przyjmuje się, że $\Omega^p(M)$ jest zerową przestrzenią wektorową gdy $p < 0$ lub $p > n = \dim M$. W związku z tym zachodzi przykładowo $\mathcal{B}^0(M) = 0$ oraz $\mathcal{Z}^n(M) = \Omega^n(M)$.

Sprawdzona wcześniej własność operatora różniczkowania $d \circ d = 0$ oznacza, że każda forma dokładna jest zamknięta, czyli $\mathcal{B}^p(M) \subseteq \mathcal{Z}^p(M)$. Stąd ma sens następująca definicja:

Definicja 3.3.2. p-tą grupą kohomologii de Rhama nazwiemy następującą ilorazową przestrzeń liniową:

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$$

Nazwywanie tych przestrzeni grupą jest uzasadnione. Są one rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi i w związku z tym są grupami z działaniem dodawania wektorów. Pokażemy, że grupy de Rhama są niezmiennicze ze względu na dyfeomorifzmy. Dla każdej domkniętej p-formy ω na M poprzez $[\omega]$ będziemy oznaczać klasę równoważności formy ω w $H_{dR}(M)$. Taką klasę równoważności będziemy nazywać także klasą kohomologii formy ω. Jeżeli dwie formy ω, η należą do tej samej klasy kohomologii, czyli zachodzi $[\omega] = [\eta]$, to różnią się one co najwyżej o formę dokładną. Zachodzi także następujący lemat:

Lemat 3.3.1 (Przekształcenia indukowane kohomologii)**.** *Dla każdej gładkiej funkcji $F : M \to N$ pomiędzy dwoma rozmaitościami gładkimi, przeciągnięcie $F^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ jest przekształceniem kompleksów:*

$$d \circ F^* = F^* \circ d$$

Wniosek 3.3.1. *Powyższe przekształcenie indukuje przekształcenie liniowe, w dalszym ciągu oznaczane jako F^* z $H^p_{\mathrm{dR}}(N)$ do $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$, które nazywane jest przekształceniem indukowanym kohomologii.*

Dowód. Jeśli ω jest formą zamkniętą, to $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$, więc $F^*\omega$ także jest zamknięte. Stąd wynika już, że przeciągnięcie to przenosi formy zamknięte na zamknięte, a dokłądne na dokładne. Przekształcenie indukowane jest zadane w prosty sposób. Dla p-formy zamkniętej ω, niech

$$F^*[\omega] = [F^*\omega].$$

Wtedy jeśli $\omega' = \omega + d\eta$, to

$$F^*[\omega'] = [F^*\omega + d(F^*\eta)] = [F^*\omega],$$

a więc przekształcenie jest dobrze zdefiniowane. □

Odnotujmy za [Lee, Corollary 17.3-4], następujące wnioski:

Uwaga 3.3.2. Dla każdej liczby całkowitej p, przypisanie $M \mapsto H^p_{\mathrm{dR}}(M)$, $F \mapsto F^*$ jest funktorem kontrawariantnym z kategorii rozmaitości gładkich do kategorii rzeczywistych przestrzeni wektorowych.

Uwaga 3.3.3. Rozmaitości gładkie, które są ze sobą dyfeomorficzne, mają izomorficzne grupy kohomologii de Rhama, bo z funktorialności $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.

Przedstawione powyżej wnioski mają daleko idące uogólnienie. Grupy de Rhama okażą się być niezmiennikami topologicznymi. Udowodnimy bowiem, że wspomniane grupy są niezmiennikami homotopii. Oznacza to, że homotopijnie równoważne rozmaitości posiadać będą izomorficzne kohomologie de Rhama. Udowodnimy następującą rzecz:

Propozycja 3.3.1. *Homotopijnie równoważne rozmaitości mają izomorficzne grupy de Rhama.*

Przedstawię teraz dowód powyższej propozycji. W tym rozumowaniu ciekawy jest dla nas zarówno wynik, jak i technika, która wykorzystywana będzie do jego udowodnienia. Skorzystam później z bardzo podobnych technik do udowodnienia najważniejszych twierdzeń pracy. Wyprowadzimy bowiem równanie, które sprowadzi naszą tezę do udowodnienia istnienia pewnego operatora o żądanych własnościach.

Funkcje, które zadają homotopijną równoważność niekoniecznie muszą być gładkie. Zauważmy jednak, że biorąc ich aproksymacje, możemy ograniczyć nasze rozważanie do funkcji gładkich.

Chcemy najpierw udowodnić, że homotopijne funkcje indukują to samo przekształcenie kohomologii. Weźmy więc dwie gładkie funkcje $F, G : M \to N$. Pokażemy, że ich przekształcenia indukowane są równe $F^* = G^*$. Wyraźmy ten warunek w nieco inny sposób.

Gdy weźmiemy zamkniętą formę $p-$formę ω na N, aby przekształcenia indukowane były równe, musimy być w stanie wyprodukować taką $(p-1)$-formę η na M, aby spełnione

$$G^*\omega - F^*\omega = d\eta.$$

Z tego wyniknie bowiem, że $G^*[\omega] - F^*[\omega] = [d\eta] = 0$. Możemy podejść do tego problemu nieco bardziej systematycznie, szukając takiego operatora I, który jako argumenty bierze zamknięte p formy na N i działa tak, że spełniona jest zależność

$$d(I\omega) = G^*\omega - F^*\omega.$$

Zamiast definiować $I\omega$ tylko dla przypadku, kiedy ω jest zamknięta, określimy operator I z przestrzeni wszystkich gładkich p-form na N do przestrzeni wszystkich gładkich $(p-1)$-form na M, dla którego spełnione jest równanie

$$d(I\omega) + I(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega. \tag{3.3}$$

Gdy warunek ten jest bowiem spełniony to dla formy ω, która jest zakmnięta zajdzie także poprzedni warunek. Zanim udowodnimy ten wzór, udowodnimy prostszy lemat dla $M = \mathbb{R}^n$.

Następujące twierdzenia i wnioski przytaczam z książki [BoTu, Section I.§4, s 35].

Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będzie rzutowaniem na pierwszy czynnik, a s będzie włożeniem zerowym (na wartość 0 na drugim czynniku). Podsumowując mamy:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{\pi}{\overset{s}{\leftrightarrows}} \mathbb{R}^n$$

$$\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} \Omega(\mathbb{R}^n)$$

$$\pi(x,t) = x$$
$$s(x) = (x, 0)$$

Lemat 3.3.2. *Funkcje π oraz s indukują przeciwne do siebie izomorfizmy na grupach kohomologii de Rhama i stąd zachodzi $H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \cong H^*(\mathbb{R}^n)$.*

Jako. że $\pi \circ s = id$ mamy prosto $s^* \circ \pi^* = id$. Jednak $s \circ \pi \neq id$ i stąd dla operatorów na formach zachodzi także $\pi^* \circ s^* \neq id$. Dla przykładu, $\pi^* \circ s^*$ posyła funkcję $f(x,t)$ na $f(x,0)$ czyli funkcję która jest stała wzdłuż każdego włókna. Okazuje się jednak że w kohomologiach jednak $\pi^* \circ s^*$ jest identycznością. Aby to pokazać, posłużymy się formułą homologii. Chcemy mianowicie znaleźć funkcję I na $\Omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ taką, że spełnione jest równanie:

$$id - \pi^* \circ s^* = \pm(dI - Id)$$

Gdy taki operator I istnieje, nazwany jest on *operatorem homotopii łańcuchowej*, a operator $\pi^* \circ s^*$ jest łańcuchowo homotopijne z identycznością. Zwróćmy także uwagę, że operator homotopii obniża gradację formy o 1.

Każda forma na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ da się wyrazić jako suma następujących dwóch podstawowych typów form:

1. $f(x,t)(\pi^*\phi)$,
2. $f(x,t)(\pi^*\phi) \wedge dt$,

gdzie ϕ jest formą określoną na przestrzeni podstawowej $\mathbb{R}^n$. Zdefiniujemy teraz $I : \Omega^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ na poszególnych typach form jako:

1. $f(x,t)(\pi^*\phi) \mapsto 0$,
2. $f(x,t_0)(\pi^*\phi) \wedge dt \mapsto (\int_0^{t_0} f dt)(\pi^*\phi)$

Przystąpimy teraz do sprawdzenia, że I jest rzeczywiście operatorem homotopii. Dla uproszczenia dalszych wzorów zastosujemy uproszczenie notacji. Będziemy pisać $\partial f/\partial x$ zamiast $\sum \partial f/\partial x^i dx^i$ oraz $\int g$ zamiast $\int g(x,t)dt$.

Korzystając z tej notacji, sprawdzamy dla q-formy typu 1:

$$\omega = f(x,t)(\pi^*\phi)$$

$$(1 - \pi^*s^*)\omega = f(x,t) \cdot (\pi^*\phi) - f(x,0) \cdot (\pi^*\phi)$$

$$(dI - Id)\omega = -Id\omega = -I\left(f(d\pi^*\phi) + (-1)^q \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt\right) \wedge (\pi^*\phi)\right) =$$

$$(-1)^{q-1} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(\pi^*\phi) = (-1)^{q-1}[f(x,t) - f(x,0)](\pi^*\phi).$$

Zestawiając powyższe równości możemy więc napisać

$$1 - \pi^*s^* = (-1)^{q-1}(d \circ I - I \circ d)$$

dla form typu 1.

Zbadajmy formułę homotopii dla q-form typu 2:

$$\omega = f(\pi^*\phi) \wedge dt$$

$$d\omega = f(\pi^*d\phi) \wedge dt + (-1)^{q-1}\frac{\partial f}{\partial x}(\pi^*\phi) \wedge dx \wedge dt$$

$$(1 - \pi^*s^*) = \omega \text{ ponieważ } s^*(dt) = d(s^*) = d(0) = 0$$

$$Id\omega = \left(\int_0^t f\right)(\pi^*d\phi) + (-1)^{q-1}(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x})(\pi^*\phi) \wedge dx$$

$$dI\omega = \left(\int_0^t f\right)(\pi^*d\phi) + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \wedge \left[(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x})dx + fdt\right],$$

i podsumowując zachodzi wzór

$$(d \circ I - I \circ d)\omega = (-1)^{q-1}\omega.$$

W obu przypadkach mamy więc

$$1 - \pi^* \circ s^* = (-1)^{q-1}(d \circ I - I \circ d).$$

Uwaga 3.3.4. Redefiniując operator homotopii jako

$$I'(\omega) = (-1)^{\deg\,\omega} I(\omega)$$

możemy uzyskać formułę homotopii w bardziej popularnej i eleganckiej postaci, która pojawia się w innych gałęziach matematyki:

$$1 - \pi^* \circ s^* = d \circ I + I \circ d.$$

Wniosek 3.3.2. *Przekształcenia* $H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} H^*(\mathbb{R}^n)$ *są izomorfizmami. Równoważnie, zachodzi formuła:*

$$\omega - \pi^*(s^*\omega) = dI\omega - Id\omega \tag{3.4}$$

Możemy także dzięki tym obserwacjom policzyć kohomologie $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 3.3.3. *(Lemat Poincaré)*

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(punkt) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{dla wymiaru 0} \\ 0 & \textit{dla wszyskich innych przypadków} \end{cases}$$

Twierdzenie 3.3.1. *Grupy kohomologii* M *oraz* $M \times \mathbb{R}$ *są izomorficzne:*

$$H^*(M \times \mathbb{R}^1) \cong H^*(M)$$

Dowód. Uogólnimy przedstawione wyżej rozumowanie na przypadek dowolnej rozmaitości. Rozważmy mianowicie

$$M \times \mathbb{R}^1 \underset{\pi}{\overset{s}{\leftrightarrows}} M$$

Jeśli U_α jest atlasem dla M, wtedy $U_\alpha \times \mathbb{R}^1$ jest atlasem $M \times \mathbb{R}^1$. Ponownie można zauważyć, że każda forma na $M \times \mathbb{R}$ jest kombinacją liniową dwóch przedstawionych powyżej typów form. Możemy więc zdefiniować operator homotopii I w taki sam sposób jak wcześniej. Wtedy można będzie przepisać wcześniejszy dowód zamieniając $\mathbb{R}^n$ na M i będzie on nadal poprawny. Stąd dostajemy tezę, gdzie izomorfizmy przeciwne to $\pi^* \circ s^*$. Możemy też w końcu wywnioskować Propozycję 3.3.1, a co za tym idzie formułę 3.3. □

Wniosek 3.3.4. *Homotopijne funkcje indukują tę samą mapę w kohomologii.*

Dowód. Możemy biorąc przybliżenia założyć, że rozważana homotopia jest gładka. Na potrzeby argumentu przypomnijmy definicję homotopii. Niech N, M będą rozmaitościami. Homotopią pomiędzy dwoma funkcjami $f, g : M \to N$ nazywamy funkcję $F : M \times \mathbb{R} \to N$ taką, że

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } t \geq 1 \\ g(x) & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

□

Równoważnie jeśli $s_0, s_1 : M \to M \times \mathbb{R}^1$ są 0-włożeniem $s_0(x) = (x, 0)$ i 1-włożeniem $s_1(x) = (x, 1)$, wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} f &= F \circ s_1 \\ g &= F \circ s_0 \end{aligned}$$

a stąd także

$$\begin{aligned} f^* &= (F \circ s_1)^* = s_1^* \circ F^* \\ g^* &= (F \circ s_0)^* = s_0^* \circ F^*. \end{aligned}$$

Skoro więc zarówno s_1^*, jak i s_0^* odwracają π^*, więc są one równe w kohomologiach. Stąd zachodzi równoważny tezie wzór

$$f^* = g^*.$$

Aby podkreślić dokładnie w jaki sposób implikuje to naszą tezę, przytoczę definicję rozmaitości homotopijnie równoważnych. O rozmaitościach M, N powiemy, że są homotopijnie równoważne, gdy istnieją funkcje $f : M \to N$ oraz $g : N \to M$ takie, że $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są homotopijne do identyczności odpowiednio na M oraz N. Zachodzi zatem:

$$f^* \circ g^* = id$$

oraz

$$g^* \circ f^* = id.$$

Rozdział 4

Kohomologie f-stożka

W tym rozdziale przedstawione jest najważniejsze twierdzenie pracy, porównujące L_p kohomologie f-stożka z L_p kohomologiami jego podstawy M. Jako, że stożek $\mathrm{C}^f M$ jest dyfeomorficzny z $M \times R$, chcemy porównać $H^*(M \times \mathbb{R})$ z $H^*(C_f M)$ uzywajac π^* i korzystając z formuly 3.3. Aby móc skorzystać z tego mechanizmu, musimy kontrolować normę formy na którą podziałaliśmy operatorem homotopii tak, aby formy występujące w formule homotopii wciąż należały do przestrzeni form p-całkowalnych. W przeciwnym wypadku nie moglibyśmy bowiem powoływać się na formułę homotopii.

W rozdziale tym zakładać będę, że formy na których pracuję są gładkie. Nie jest to konieczne, jednak wymagałoby to korzystania z bardziej skomplikowanej deficji różniczkowania - różniczki w sensie prądów. Z tego sposobu korzysta między innymi praca [We]. Przedstawiane w niniejszej pracy obliczenie jest wykonane sposobem prezentowanym między innymi w pracach [Ch], [You], [KirWo], [We].

Definicja 4.0.3 (f-stożek)**.** Niech (M, g) będzie rozmaitością Riemannowską. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_{\geq 0} \times M$. Określmy na tym produkcie tensor Riemannowski zadany przez wzór $dt^2 + f^2(t)g$, gdzie g jest metryką na M. Przestrzeń taką nazywamy **f-stożkiem**. Oznaczać ją będziemy symbolem $\mathrm{C}^f M$.

Twierdzenie 4.0.2. *Niech M, g będzie rozmaitością Riemannowską, a $\mathrm{C}^f M$ określonym dla niej f-stożkiem dla $f = e^{-t}$. L_p-kohomologie tych dwóch przestrzeni są w następującej relacji*

$$H^k_{(p)}\left(\mathrm{C}^f M\right) = \begin{cases} H^k_{(p)}(M) & k < \frac{n}{p} + 1 \\ 0 & k > \frac{n}{p} + 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Dowód tego twierdzenia oraz zmierzające do tego definicje i lematy są treścią tego rozdziału. Przypadek graniczny $k = \frac{n}{p} + 1$ jest w ogólności nieregularny i nie jest badany w tej pracy. Zdarza się bowiem, że grupy kohomologii tego rzędu są nieskończenie wymiarowe dla prostych przestrzeni, czego ilustracją jest Przykład 4.1.1.

4.1. Norma L_p formy różniczkowej. L_p-kohomologie.

Definicja 4.1.1 (L_p-norma formy różniczkowej)**.** p-normą dla k-formy ω na rozmaitości Riemannowskiej M nazwiemy

$$||\omega|| = \left(\int_M |\omega|^p_x d\mathrm{vol}_g(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

Formę należącą do tej przestrzeni będziemy nazywać formą p-całkowalną.

Zajmiemy się pewną modyfikacją kohomologii de Rhama - L_p-kohomologiami. Będziemy rozważać elementy tego samego kompleksu łańcuchowego co w kohomologiach de Rhama, lecz z dodanym warunkiem p-całkowalności form. Głównym obiektem naszego zainteresowania będą przestrzenie $L_p^k = \{\omega \in \Omega^k(M) : ||\omega|| < \infty, ||d\omega|| < \infty\}$, gdzie $|| \cdot ||$ to norma (całka) z formy, która została przedstawiona powyżej. Ograniczenie naszych rozważań do form, które są p-całkowalne pozwala rozszerzać klasę przestrzeni, które badamy. Przy odpowiednim doborze funkcji wagowej, którą ważymy metrykę Riemannowską na części nieosobliwej, możemy bowiem rozważać rozmaitości z osobliwościami, na których L_p kohomologie zawierają dodatkowe informacji o osobliwości.

Uwaga 4.1.1. Ciąg przestrzeni L_p^* z operatorem różniczki zewnętrznej stanowi kompleks łańcuchowy.

$$... \xrightarrow{d} L_p^i \xrightarrow{d} L_p^{i+1} \xrightarrow{d} ... \,.$$

Prześledźmy przykład ilustrujący, że niekiedy grupy L_p kohomologii mogą być nieskończenie wymiarowe.

Przyład 4.1.1 (Nieskończenie wymiarowe kohomologie w przypadku granicznym)**.** *Dla półprostej rzeczywistej $\mathbb{R}_{(+)}$ ze standardową metryką, otrzymujemy*

$$H^0_{(2)}(\mathbb{R}_+) = 0,$$

$$\dim(H^1_{(2)}(\mathbb{R}_+)) = \infty.$$

Dowód. Aby udowodnić pierwszą równość wystarczy zauważyć, że funkcja stała różna od zera nie może być nigdy L_2 całkowalna. Dla drugiej równości rozważmy rodzinę form postaci $x^\alpha dx$, gdzie $\alpha \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Z jednej strony widzimy, że formy te są całkowalne. Z drugiej strony zauważmy, że jeżeli forma takiej postaci miałaby być dokładna, $df = x^\alpha dx$ to jej przeciwobraz w różniczce zewnętrznej miałby postać $f = \frac{1}{1+\alpha} x^{\alpha+1}$ i nie byłby całkowalny. Formy tej postaci nie są więc dokładne. Podobnie sprawdzamy, że klasy form $[x^\alpha dx]$ są liniowo niezależne w kohomologiach. Otrzymaliśmy więc nieskończoną rodzinę liniowo niezależnych klas kohomologii form. □

4.2. Uogólnione nierówności Hardy'ego

Kluczowa w dalszych obliczeniach będzie nierówność Hardy'ego łącząca całkowalność funkcji z całkowalnością jej funkcji pierwotnej.

Twierdzenie 4.2.1 (Uogólnione nierówności Hardy'ego)**.** *Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, funkcje-wagi $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $p > 1$. Równości*

$$\int_0^\infty \left|\phi(x) \int_0^x f(t)dt\right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x) f(x)|^p \, dx \tag{4.3}$$

$$\int_0^\infty \left|\phi(x) \int_x^\infty f(t)dt\right|^p dx \leq C \int_0^\infty |\psi(x) f(x)|^p \, dx \tag{4.4}$$

zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio dla 4.3 zachodzi

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^\infty |\phi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x |\psi(t)|^{-q} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

a dla 4.4 zachodzi

$$\sup_{x>0}\left[\int_0^x |\phi(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_x^\infty |\psi(t)|^{-q} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia pomijam. Jest on dostępny w pracy [Mu]. □

Twierdzenie 4.2.2. *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dla $\alpha > 0$ $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$.*

Dowód. Wykorzystamy uogólnioną nierówność Hardy'ego. Załóżmy $\psi(t) = \phi(t) = e^{-\frac{t}{p}}$. Wtedy jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ oraz $-q = \frac{p}{1-p}$. Zbadajmy teraz, czy spełniony jest warunek, aby zachodzić mogła nierówność Hardy'ego, część 4.3:

$$\sup_{x>0}\left[\int_x^\infty e^{-t}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^x e^{-t\frac{1}{1-p}}dt\right]^{\frac{p-1}{p}} = \sup_{x>0} Ce^{-\frac{x}{p}}\left(e^{\frac{x}{p-1}}-1\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$C\sup_{x>0}\left(e^{-\frac{x}{p-1}}e^{\frac{x}{p-1}} - e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = C\sup_{x>0}\left(1-e^{-\frac{x}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Wyrażenie to jest ograniczone dla $p > 1$. Po zastosowaniu uogólnionej nierówności Hardy'ego i ewentualnym przeskalowaniu zmiennej x do αx otrzymujemy tezę. □

Zmodyfikujemy powyższe twierdzenie, tak aby rozważać funkcję pierwotną $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ oraz $\alpha < 0$.

Twierdzenie 4.2.3. *Rozważmy pewną funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gdzie $f \geq 0$ oraz jej funkcję pierwotną $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$. Dla $\alpha < 0$, $\int_0^\infty F(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^\infty f(x)^p e^{-\alpha x}dx < \infty$.*

Dowód. Dowód będzie bardzo podobny do poprzedniego. Dokonamy zmiany znaku, aby uwzględnić zmianę parametru α i założymy $\psi(t) = \phi(t) = e^{\frac{t}{p}}$. Wykorzystamy nierówność 4.4. W tym celu musimy sprawdzić jej warunek konieczny i wystarczający:

$$\begin{aligned}\sup_{x>0}\left[\int_0^x e^t dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_x^\infty e^{t\frac{1}{1-p}}dt\right]^{\frac{p-1}{p}} &= \sup_{x>0}\,(e^x-1)^{\frac{1}{p}}\,(p-1)^{\frac{p-1}{p}}\left(e^{-\frac{x}{p}}dt\right)\\ &= \sup_{x>0} C\left(1-e^{-x}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\end{aligned}$$

Stosujemy nierówność 4.4 i po przeskalowaniu x przez dodatni czynnik $-\alpha$ otrzymujemy tezę. □

4.3. Obliczenie L_p kohomologii f-stożka

Niech $L_p^k M$ oznacza przestrzeń gładkich p-całkowalnych k-form różnikowych z mierzalnymi współczynnikami. Możemy poczynić obserwację o postaci forma różniczkowych określonych na f-stożku. Przestrzeń styczna do $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t,m) to:

$$T_{(t,m)}(\mathrm{c}^f M) = \mathbb{R} \times T_m M.$$

W terminach form różniczkowych powiązanych z rozważanym f-stożkiem możemy napisać:

$$\Lambda^k(T^*_{(t,m)}\mathrm{C}^f M) = \Lambda^{k-1}(T^*_m M) \oplus \Lambda^k(T^*_m M).$$

Wniosek 4.3.1. *Każda k-forma $\omega \in \Lambda^k(T^*_{(t,m)}\mathrm{C}^f M)$, a w konsekwencji każda forma z przestrzeni form p-całkowalnych $L^k_p(\mathrm{C}^f M)$ może być zapisana jako $\omega = \eta + \xi \wedge dt$, gdzie zarówno η, jak i ξ nie zawierają dt. Zauważmy ponadto, że η jest k-formą, a ξ jest $k-1$ formą.*

Ustalmy także dla klarowności nieco inną notację dotyczącą zapisywania form różniczkowych względem lokalnych współrzędnych, która pozwoli nam lepiej zilustrować istotne dla nas elementy rozumowania. Dowolną k-formę η, która w domyśle nie zawiera czynnika dt, zapisywać będziemy względem lokalnych rzeczywistych współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ na M jako:

$$\eta(t,x) = \sum_{\alpha \in I(k)} \eta_\alpha(t,x) dx^\alpha,$$

gdzie $I(k)$ jest zbiorem wszystkich multiindeksów $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ takich, że $1 \leq \alpha_1 < ... < \alpha_i \leq n$, gdzie

$$dx^\alpha = dx^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dx^{\alpha_k}, \tag{4.5}$$

a η_α jest gładką funkcją określoną na $(0,\infty) \times M$.

Przypomnijmy w tym miejscu, że $\mathrm{C}^f M$ oraz $M \times R_+$ są dyfeomorficzne. Naszym planem będzie teraz zastosowanie wniosku 3.3.2 przy zachowaniu kontroli nad normą, aby nie wyjść poza przestrzeń L_p.

Pomiędzy rozmaitościami M oraz $\mathrm{C}^f M$ istnieją kanoniczne przekształcenia projekcji oraz inkluzji. Żeby dobrze zilustrować w sposób w jaki działają one na formy różniczkowe na poszczególnych rozmaitościach, przypomnijmy ich typy. Inkluzja to funkcja:

$$s_r : M \to \mathrm{C}^f M$$

$$s_r(x) = (x, r).$$

Możemy za jej pomocą przeciągać formy z $\mathrm{C}^f M$ do M. Przeciągnięcie takie oznaczymy jako $\omega_r = s_r^*(\omega) = s_r^*(\eta)$ dla formy $\omega = \eta + \xi \wedge dt$.
Projekcja (rzutowanie) zadane jest jako:

$$\pi : \mathrm{C}^f M \to M$$

$$\pi(x,t) = x.$$

Rozważamy formę $\omega \in L^k_p(\mathrm{C}^f M)$, gdzie $\omega = \eta + \xi \wedge dt$. Zauważmy, że metryka Riemannowska na $\mathrm{C}^f M$ jest określona w taki sposób, że stosowne normy spełniają następujące zależności:

$$|\omega(t,x)|^2 = (\mathrm{e}^{-t})^{-2k} |\eta(t,x)|^2_M + (\mathrm{e}^{-t})^{-2(k-1)} |\xi(t,x)|^2_M, \tag{4.6}$$

gdzie $|\cdot|_M$ jest normą form różniczkowych indukowaną przez metrykę Riemannowską na rozmaitości M. Czynnik $(\mathrm{e}^{-t})^{-2k}$ pojawia się ponieważ forma η należy do k-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej do rozmaitości $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t,x). Wniosek ten jest zastosowaniem uwag o postaci metryki Riemannowskiej na produkcie rozmaitości przedstawionych w równaniu 3.2, lokalnej postaci formy objętości 3.1.2 i uwag o skalowaniu norm z Rozdziału 2.2

Zbadamy teraz w jaki sposób zachowują się normy form przeciągniętych projekcją π na $\mathrm{C}^f M$. Zauważmy, że Riemannowska forma objętości na $\mathrm{C}^f M$ w punkcie (t, x) różni się od formy objętości na M w punkcie x o czynnik $(e^{-t})^n$. Z uwag o skalowaniu norm przytoczonych w Rozdziale 2.2 wynika też, że norma elementu należącego do k-tej potęgi zewnętrznej pewnej przestrzeni liniowej V skaluje się od czynnik $\frac{1}{r^k}$ gdy skalujemy normę bazowej przestrzeni V o czynnik r. Norma formy przy naszym skalowaniu skaluje się więc o $\frac{1}{e^{-tk}} = e^{tk}$ Policzmy więc normę $\pi^*\omega$ jako elementu przestrzeni $L^p_k(\mathrm{C}^f M)$.

$$||\pi^*\omega||^p = \int_{\mathrm{C}^f M} |\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{C}^f M} = \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} \int_M |\omega|^p d\mathrm{vol}_M dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-t}\right)^{n-pk} ||\omega||^p_M dt$$

Wniosek 4.3.2. *Całkowalność formy π^* jest określona następującym warunkiem:*

$$||\pi^*\omega|| < \infty \iff k < \frac{n}{p}.$$

Zgodnie z rozumowaniem identycznym do tego z Rozdziału 3 zachodzi formuła analogiczna do 3.4 (i istnieje stosowny operator I_r):

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega - I_r d\omega.$$

Jedyne zmiany w dowodzie tej formuły to zmiany granic całkowania w dowodzie formuły homotopii.

Zbadajmy kiedy dla p-całkowalnej formy $\omega = \eta + \xi \wedge dt$ forma $I_r\omega$ także jest całkowalna:

$$||I_r\omega||^p = \int_{\mathrm{C}^f M} |I_r\omega|^p d\mathrm{vol}_{\mathrm{C}^f M} = \int_0^\infty (e^{-t})^{n-p(k-1)} \int_M |I_r\omega|^p \, d\mathrm{vol}_M dt =$$

$$\int_0^\infty (e^{-t})^{n-p(k-1)} ||(I_r\omega)_t||^p_M dt \leq \int_0^\infty (e^{-t})^{n-p(k-1)} \left(\int_r^t ||\xi_s||_M ds \right)^p \, dt.$$

Aby oszacować tę wartość, wykorzystamy Twierdzenie 4.2.2, przyjmując za funkcję z twierdzenie funkcję $f = \left(\int_M |\xi_t|^p d\mathrm{vol}_M\right)^{\frac{1}{p}} = ||\xi_t||_M$. Funkcja ta jest całkowalna w interesującym nas sensie, bowiem

$$||\xi||^p = \int_0^\infty (e^{-t})^{n-p(k-1)} ||\xi_t||^p dt < \infty$$

Twierdzenie to możemy wykorzystać tylko wtedy, gdy współczynnik α w wyrażeniu $(e^{-t})^\alpha$ jest większy od zera. Ten współczynnik to: $\alpha = -p(k-1) + n$. Zbadajmy warunek:

$$-p(k-1) + n > 0 \iff k < \frac{n}{p} + 1.$$

Warunek pozwalający na wykorzystanie lematu jest więc spełniony dla $k < \frac{n}{p} + 1$. Gdy warunek ten jest spełniony, stosujemy wspomniane powyżej twierdzenie wykorzystujące nierówność Hardy'ego i uzyskujemy rezultat, że $I_r\omega$ jest formą p-całkowalną. Pokazaliśmy więc, że jeśli ω jest k-formą p-całkowalną, to $I_r\omega$ jest p-całkowalna i dla $k < \frac{n}{p} + 1$, jeśli ω jest gładka zachodzi wzór

$$\omega = dI_r\omega - I_r d\omega + \pi^*(\eta_r)$$

Zwróćmy uwagę, że w tyn wzorze η_r jest $k-1$-formą, więc Wniosek 4.3.2 stosujemy dla $k-1$, a nie k. Analogicznie do Wniosku 3.3.2 stwierdzamy więc, że skoro zachodzi formuła homotopii, to π^* zadaje izomorfizm między kohomologiami M a kohomologiami $\mathrm{C}^f M$. Udowodniliśmy więc pierwszą część Twierdzenia 4.0.2.

Chcemy teraz pokazać, że dla $k > \frac{n}{p}+1$ mamy $H_p^*(\mathrm{C}^f M) = 0$. Na potrzeby tego przypadku należy określić inny operator homotopii. Dzieje się tak ponieważ niektóre formy po zadziałaniu na nie dotychczas rozważanym operatorem nie będą p-całkowalne. Na podstawie lematu 4.4 możemy jednak zdefiniować operator całkowania od t do ∞. Bierzemy więc tak jak wcześniej p-całkowalną k-formę $\omega = \eta + dt \wedge \xi$, gdzie $k > \frac{n}{p} + 1$, lecz definiujemy operator homotopii jako

$$I_\infty \omega = \int_t^\infty \xi.$$

oraz pomocnicze operatory

$$I_r \omega = \int_t^r \xi,$$

gdzie $r \in (0, \infty)$. Będziemy chcieli uzyskać zbieżność pomocniczych operatorów $I_r \to I_\infty$ Aby I_∞ miał sens, musimy jednak przekonać się, że całka $\int_a^\infty \xi_t$ istnieje. Niech ξ będzie p-całkowalną k-formą na $\mathrm{C}^f M$. Dla określonego $a > 0$ możemy napisać, korzystając z nierówności Höldera

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^\infty \int_M \xi_t dt \right| &\leq \int_a^\infty \int_M |\xi_t|_M dt = \int_a^\infty \int_M (e^{-t})^{\frac{n}{p}-(k-1)} (e^{-t})^{k-1-\frac{n}{p}} |\xi_t|_M dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty \int_M (e^{-t})^{n-p(k-1)} |\xi_t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty \int_M (e^{-t})^{q(k-1-\frac{n}{p})} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= ||\xi||_{\mathrm{C}^f M} \left(\frac{(e^{-a})^{q(k-1-\frac{n}{p})}}{k-1-\frac{n}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,
\end{aligned}$$

bo $k > \frac{n}{p} + 1$ oraz $q = \frac{p}{p-1} > 0$. Wnioskujemy więc, że skoro dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\left| \int_a^\infty \int_M \xi_t dt \right| < \infty,$$

to dla prawie wszystkich $x \in M$ i dla wszystkich $t \in (0, \infty)$ całka

$$\int_t^\infty \xi = \int_t^\infty \xi_\tau d\tau$$

istnieje.

Pomocnicze operatory wykorzystamy do modyfikacji lematu o formule homotopii, patrz Wniosek 3.4. W szczególności w lemacie tym badaliśmy wyrażenia typu $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} = f(x,t) - f(x,0)$. W przypadku nowego operatora I_∞, wyrażenia te przyjmują postać $\int_t^\infty \frac{\partial f}{\partial t}$ i niekoniecznie muszą zezwalać na zcałkowanie różniczki, czyli na zastosowanie wariantu podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, bowiem granica funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$ niekoniecznie musi być skończona. Jednak dla dowolnego r pomocniczy operator I_r spełnia równanie homotopii, co widać wprost w rozumowaniu porzedzającym Wniosek 3.4. Jedyny sposób w jaki zmienia się dowód tej formuły dla I_r, to wspomiane granice całkowania w dowodzie: z $\int_0^t$ na $\int_t^r$. Zbiegając $r \to \infty$, w granicy chcielibyśmy otrzymać formułę homotopii postaci:

$$\omega = dI_\infty\omega - I_\infty d\omega, \tag{4.7}$$

ale nie możemy tego zrobić bez dodatkowych założeń, ponieważ forma $I_\infty\omega$ może nie być gładka.

Uwaga 4.3.1. W formule homotopii wykorzystującej nowy operator I_r

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega - I_r d\omega \tag{4.8}$$

gdy $r \to \infty$ zachodzi

$$\omega_r \to 0,$$

Jest tak ponieważ dla każdego r formuła homotopii jest prawdziwa, a jednocześnie prawdziwy jest wzór

$$||\omega||^p = \int_0^\infty e^{\alpha t}||\omega_t||_M^p dt$$

dla $\alpha \geq 0$. Jako, że $e^{\alpha t} \to \infty$ to $||\omega_t||^p$ musi dążyć do 0. Formą o normie zero jest jedynie forma zerowa.

Wniosek 4.3.3. *Dla przypadku $k > \frac{n}{p} + 1$ w formule homotopii 4.8 składnik $\pi^*(\omega_r)$ dąży do zera dla $r \to \infty$.*

Dla formy dokładnej ω mamy więc formułę

$$\omega - \pi^*(\omega_r) = dI_r\omega.$$

Gdy założymy dodatkowo, że $I_\infty\omega$ jest formą gładką, oraz że zachodzi zbieżność

$$d\,(I_r\omega) \to d(I_\infty\omega),$$

to ω jest różniczką formy $I_\infty\omega$, i zachodzi $[\omega] = 0$, co jest treścią drugiej częsci Twierdzenia 4.0.2.

Jeżeli będziemy starali pozbyć się powyższych założeń, to sytuacja jest bardziej skomplikowana. Twierdzenie przedstawione w pracy jest prawdziwe, jednak jego dowód wymaga wykorzystania różniczek w sensie "prądów," ang. *currents* tak, jak przedstawiono w pracach [Ch], [We]. Jest to jednak trudniejsze zadanie, które nie jest omawiane w tej pracy.

Bibliografia

[BoTu] Bott R., Tu, L.W.: *Differetial forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.

[Dai] Dai, X.: *An introduction to L^2 cohomology*, Topology of Stratified Spaces, MSRI Publications, vol. 58, 2010.

[Ch] Cheeger, J.: *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol.36.

[KirWo] Kirwan, F., Woolf, J.: *An Introduction to Intersection Homology Theory*, Taylor & Francis, LLC.

[Ko] Kostrikin, A.I.: *Wstęp do algebry. Tom II: Algebra liniowa*, Wydawnictwo naukowe PWN, 2012.

[Lee] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2013.

[Mu] Muckenhoupt, B., *Hardy's inequality with weights*, Studia Mathematica, T. XLIV, 1972.

[We] Weber, A.: *An isomorphism from intersection homology to* L_p*-cohomology*, Forum Mathematicum, de Gruyer, 1995.

[You] Youssin, B., L_p *cohomology of cones and horns* J. Differential Geometry, Volume 39, Number 3, 1994.