Tribute to FaMI

GIẢI TÍCH III - NOTE
FaMI Rebel Club
2024.2

FaMI Rebel Club

(Ngày 13 tháng 6 năm 2025)

Mục lục

"The important thing is not to stop questioning."
- Albert Einstein

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích III là một học phần quan trọng và nền tảng trong chương trình đào tạo của sinh viên các khối ngành kỹ thuật. Tuy nhiên, với khối lượng kiến thức lớn và nhiều dạng bài tập phức tạp, việc nắm vững và vận dụng lý thuyết vào giải quyết các bài toán thường là một thách thức không nhỏ.

Với mong muốn tạo ra một nguồn tài liệu tham khảo hệ thống và hữu ích, chúng mình đã biên soạn cuốn sách này. Tài liệu tổng hợp lý thuyết trọng tâm của ba chuyên đề chính: **Chuỗi**, **Phương trình Vi phân**, và **Phép biến đổi Laplace**. Đặc biệt, điểm nhấn của cuốn sách là phần tuyển tập và phân loại các bài toán được trích từ đề thi cuối kỳ của Đại học Bách khoa Hà Nội qua nhiều năm, đi kèm với lời giải chi tiết và nhận xét phương pháp.

Hy vọng rằng tài liệu này sẽ là một người bạn đồng hành tin cậy, giúp các bạn sinh viên có thể hệ thống hóa kiến thức một cách logic, rèn luyện kỹ năng giải bài tập và tự tin hơn khi bước vào kỳ thi cuối kỳ.

Để thuận tiện cho việc ôn tập theo các trình độ khác nhau, tài liệu sử dụng một số quy ước: những phần lý thuyết nâng cao hoặc bài tập khó sẽ được đánh dấu riêng sử dụng màu đỏ thay vì màu xanh, đi kèm thang điểm tham khảo. Tài liệu cũng bao gồm các chuyên đề mở rộng dành cho những bạn yêu thích và muốn tìm hiểu sâu hơn về Toán. Chúng mình khuyến khích bạn đọc lựa chọn những nội dung phù hợp nhất với mục tiêu học tập của mình.

Tài liệu này được biên soạn chủ yếu dựa trên cuốn *Bài Giảng GIẢI TÍCH III* của TS. Bùi Xuân Diệu (Khoa Toán - Tin, ĐH Bách khoa Hà Nội), *slide bài giảng GIẢI TÍCH III* của khoa Toán - Tin, cùng với các nguồn đề thi qua các kỳ. Trong quá trình biên soạn, mặc dù nhóm tác giả đã rất cố gắng nhưng chắc chắn không thể tránh khỏi những sai sót. Chúng mình rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu từ bạn đọc để tài liệu ngày càng hoàn thiện hơn.

Chúc các bạn "qua môn" thành công và đạt kết quả thật cao!

FRC - FaMI Rebel Club

1 Chuỗi

1.1 Xét sự hội tụ của chuỗi

Đề bài: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum a_n$

Các bước:

B1. Kiểm tra điều kiện cần:

- Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ hoặc giới hạn không tồn tại, kết luận chuỗi **phân kỳ**.
- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, chuỗi *có thể* hội tụ. (Chuyển sang các bước tiếp theo).

B2. Xác định loại chuỗi

- Chuỗi có phải là **chuỗi dương** ($a_n \geq 0 \quad \forall n$) không ? Nếu có, chuyển đến bước sau.
- Nếu không phải, **không được áp dụng tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi**.

  Ở bước này, chuỗi có thể là **chuỗi đan dấu** (dạng $\sum(-1)^n b_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} b_n$ với $b_n > 0$) hoặc chuỗi có **dấu bất kỳ**.

  Đối với loại chuỗi này, ưu tiên xét **hội tụ tuyệt đối**: $\sum |a_n|$, chuyển đến bước sau với các tiêu chuẩn xét chuỗi dương. Nếu $\sum |a_n|$ hội tụ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

  Riêng với chuỗi đan dấu, có thể xét bằng tiêu chuẩn được nói rõ ở bước sau.

B3. Nếu nó là chuỗi dương, áp dụng các tiêu chuẩn như:

- Tiêu chuẩn so sánh:
  - So sánh trực tiếp: Tìm chuỗi $\sum b_n$ đã biết tính chất hội tụ và so sánh a_n với b_n.
  - So sánh giới hạn: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.
- Tiêu chuẩn D'Alembert: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.
- Tiêu chuẩn Cauchy: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Tiêu chuẩn tích phân: Nếu $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là hàm liên tục, dương, giảm trên $[1, \infty)$, xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int\limits_1^\infty f(x)dx$.

Nếu nó là chuỗi đan dấu, sử dụng tiêu chuẩn như:

- Tiêu chuẩn D'Alembert mở rộng
- Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng
- Tiêu chuẩn Leibniz: Đối với chuỗi $\sum(-1)^n b_n$ (hoặc $\sum(-1)^{n-1} b_n$) với $b_n > 0$:

  (a) Kiểm tra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

  (b) Kiểm tra dãy $\{b_n\}$ có phải là dãy giảm (tức là $b_{n+1} \leq b_n$) từ một chỉ số N nào đó trở đi không.

  Nếu cả hai điều kiện trên đều thỏa mãn, chuỗi **hội tụ**. (Nếu $\sum |a_n|$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum a_n$ **hội tụ có điều kiện**).

Ví dụ:

1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right)$?

Câu 1b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

Cách giải sai:
Khi $n \to \infty$ thì $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right) \sim \dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right)$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.
Sai: Chuỗi này không phải chuỗi dương, nên không được sử dụng TCSS. Cách làm đúng là sử dụng khai triển Maclaurin.

Cách giải đúng:
Ta khai triển Maclaurin: $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}} - \dfrac{1}{2n^{2/3}} + \dfrac{(-1)^n}{3n} - \dfrac{1}{4n^{4/3}} + O\left(\dfrac{1}{n^{4/3}}\right)$
Ta có:

- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}, \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{4n^{4/3}}$ cùng các vô cùng bé bậc cao hơn của nó hội tụ tuyệt đối.
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2/3}}$ phân kì.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}\right)$ phân kì.

2. Tìm α để chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}\right)$ hội tụ?

Câu 2 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

Ta có $1-\cos\left(\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}\right)$ là chuỗi số dương.
Khi $n \to \infty$ thì $n^{\alpha}\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}\right) \sim n^{\alpha}\cdot\dfrac{2}{2n^3} = \dfrac{1}{n^{3-\alpha}}$
Để $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}\right)$ hội tụ thì theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3-\alpha}}$ phải hội tụ.
Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3-\alpha}}$ hội tụ khi $3-\alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 2$.

3. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$

Câu 1 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2022.2

a) Với mọi $n \geq 3$ ta có $\dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \dfrac{n-2}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})} > 0$
Nên $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ là chuỗi số dương.

Khi $n \to \infty$ thì $\dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \dfrac{n-2}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})} \sim \dfrac{1}{3(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}}$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{3(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}}$ phân kì nên chuỗi $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ phân kì theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ phân kì.

b) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$. Đây là chuỗi đan dấu có dạng $\sum(-1)^{n-1}a_n$ với $a_n = \dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$.

Ta có $a_n > 0$ với mọi $n \geq 1$ (vì $\ln(2n) > 0$ khi $2n > 1 \Rightarrow n > 1/2$, và $\sqrt{3n} > 0$).

Xét dãy $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ là dãy dương và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}} = 0$.

Xét $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{\sqrt{3x}}$ ta có:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{3x} - \sqrt{3}\ln 2x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-\ln(2x)}{x^{3/2}} < 0 \quad \forall x \geq 2$$

Nên $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ là dãy giảm.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz hay chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$ cũng hội tụ.

4. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$

Câu 9 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Cách 1: Đặt $u_n = \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \dfrac{1}{e^{\ln n \cdot \ln(\ln(\ln(n+1)))}} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln(\ln(n+1)))}}$.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(\ln(n+1))) = +\infty \Rightarrow \exists N_0 > 0 : \ln(\ln(\ln(n+1))) > 2 \quad \forall n > N_0 \Rightarrow u_n < \dfrac{1}{n^2} = v_n$ khi $n > N_0$.

Vì $\sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Cách 2:

$\forall n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow \ln(n+1) > 1 \Rightarrow \ln(\ln(n+1)) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} > 0$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$ là chuỗi số dương.

Khi $n \to \infty$ thì $\dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} \sim \dfrac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$.

Ta xét $f(x) = \dfrac{1}{(\ln(\ln x))^{\ln x}}$ là một hàm dương đơn điệu giảm trên $[e^{e^4}, +\infty)$ có:

$\displaystyle\int_{e^{e^4}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{e^{e^4}}^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(\ln x))^{\ln x}}$. Đặt $\ln x = t \Rightarrow dx = e^t dt$ và $x\Big|_{e^{e^4}}^{+\infty} \to t\Big|_{e^4}^{\infty}$ ta có:

$\displaystyle\int_{e^{e^4}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{e^4}^{+\infty} \frac{e^t}{(\ln t)^t}\,dt$. Ta có $\ln t \geq 4, \forall t \geq e^4 \Rightarrow \dfrac{e^t}{(\ln t)^t} \leq \dfrac{e^t}{4^t}, \forall t \geq e^4$

Mà $\displaystyle\int_{e^4}^{\infty} \frac{e^t}{4^t}\,dt = \int_{e^4}^{\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^t dt = \frac{\left(\frac{e}{4}\right)^t}{\ln\frac{e}{4}}\Bigg|_{e^4}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 4}\left(\frac{e}{4}\right)^{e^4}$ hội tụ $\Rightarrow \displaystyle\int_{e^{e^4}}^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.

Nên $\sum\limits_{n=[e^{e^4}]+1}^{+\infty} \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân hay $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$ hội tụ.

5. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$

Câu 1c - Đề 5 - NN3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$.

Ta có: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\left(1+\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}\right)}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}}}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)^{-1/2}$

$= \dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{2n^{1/2}}+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}} - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

Xét sự hội tụ của từng chuỗi thành phần:

- Chuỗi (1): $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz (vì $1/n^{1/2} \to 0$ và là dãy giảm).
- Chuỗi (2): $\sum \left(-\dfrac{1}{2n}\right)$ phân kỳ
- Chuỗi (3): $\sum O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ hội tụ

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$ phân kỳ.

6. Xét sự hội tụ hay phân kì của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+\sin(n+1)}{n(\ln n)^2}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{(2n+1)!}{n^2-1}\right)$

Câu 1 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

a) Ta có:

$$\left|\frac{(-1)^n+\sin(n+1)}{n(\ln n)^2}\right| \le \left|\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\right| + \left|\frac{\sin(n+1)}{n(\ln n)^2}\right| \le \frac{2}{n(\ln n)^2}$$

Ta xét $f(x) = \dfrac{2}{x(\ln x)^2}$ có $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[2,+\infty)$

Xét $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x(\ln x)^2} = \int_2^{+\infty} \frac{2d\ln x}{(\ln x)^2} = -\frac{2}{\ln x}\Bigg|_2^{+\infty} = \frac{2}{\ln 2}$ nên $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{n(\ln n)^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+\sin(n+1)}{n(\ln n)^2}$ hội tụ tuyệt đối.

b) Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{(2n+1)!}{n^2-1}\right)$ là chuỗi số dương.

Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)^2-1} \dfrac{3^n(n^2-1)}{(2n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)(2n+2)(n^2-1)}{3((n+1)^2-1)} = +\infty > 1$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{(2n+1)!}{n^2-1}\right)$ phân kì theo tiêu chuẩn D'Alembert.

7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

Câu 1 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta có $\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right) > 0\, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$ là chuỗi số dương.

Khi $n \to \infty$ thì $\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì

$\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$ phân kì theo tiêu chuẩn so sánh.

8. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + \ln(n+1)}{n^3}$.

Câu 1b - Đề 5 - Nhóm 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Cách 1:

Ta có:

$$\left|\frac{(-1)^n n + \ln(n+1)}{n^3}\right| \le \left|\frac{(-1)^n n}{n^3}\right| + \left|\frac{\ln(n+1)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + \ln(n+1)}{n^3}$ hội tụ tuyệt đối.

Cách 2:

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ có: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối.

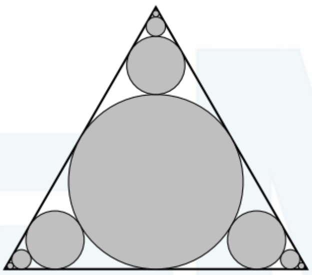
Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n^3}$ là chuỗi số dương có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln(n+1)}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

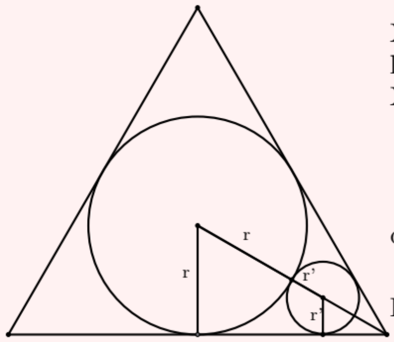
Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n^3}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + \ln(n+1)}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n n}{n^3} + \dfrac{\ln(n+1)}{n^3}\right)$ hội tụ.

9. Trong hình vẽ sau có vô hạn hình tròn nằm trong một tam giác đều, trong đó mỗi đường tròn nhỏ tiếp xúc với hai cạnh của tam giác và với các đường tròn khác. Biết cạnh tam giác đều là 1. Tính tổng diện tích các hình tròn đó?



Câu 1, Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2023.1



Xét một dãy các hình tròn tương ứng với hình tròn lớn nhất và bé dần lần lướt với bán kính $r_0, r_1, r_2, \ldots$
Xét 2 hình tròn bất kì như hình bên, theo định lí Ta-let:

$$\frac{r'}{r} = 1 - \frac{r'+r}{2r} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{1}{3}$$

$\overset{\text{Quy nạp}}{\Rightarrow}$ Bán kính hình tròn nhỏ bằng $\frac{1}{3}$ hình tròn lớn: $r_i = \frac{1}{3}r_{i-1}$
Dễ dàng ta tính được bán kính nội tiếp tam giác đều: $r_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Tổng diện tích của một dãy hình tròn là: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi \cdot S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi \cdot r_n^2 = \pi r_0^2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$

$$\Rightarrow S = \pi r_0^2 \left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{\pi r_0^2}{8} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}{8} = \frac{\pi}{96}$$

Vậy tổng diện tích của tất cả hình tròn là: $3S + \pi r_0^2 = 3 \cdot \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{11\pi}{96}$

Bài tập tự làm:

10. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n+n}$ hội tụ?

Câu 1a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

11. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-1}}{2n+3}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(3n)}{\sqrt{2n}}$

Câu 1 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2022.2

12. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2\cos 2023n)\sqrt{n+1}}{2n+3}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n-1}}{2n+5}$

Câu 1 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

13. Đánh giá sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n(n+2)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Câu 1 - Đề 6 - NN2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2022.2

14. Phát biểu và chứng minh điều kiện cần của chuỗi số hội tụ.

Câu 1 - Đề 7 - NN3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

15. Phát biểu điều kiện cần cho sự hội tụ của chuỗi số. Chỉ ra một chuỗi số thỏa mãn điều kiện này nhưng phân kỳ.

Câu 1 - Đề 8 - NN3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

16. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan\left(\dfrac{2n+3}{n^2+4}\right)$.

Câu 2 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

17. Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ D'Alembert cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Câu 1 - Đề 1 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

18. Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ Co-si cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Câu 1 - Đề 2 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

19. Phát biểu điều kiện cần để chuỗi số hội tụ. Áp dụng điều kiện cần để xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n}$.

Câu 1 - Đề 3 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

20. Phát biểu điều kiện cần để chuỗi số hội tụ. Áp dụng điều kiện cần để xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{n}$.

Câu 1 - Đề 4 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

21. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e^2}-1)$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + \sin n}{n^2}$

Câu 1 - Đề 1 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20192

22. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$

Câu 10 - Đề 3 - Nhóm 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20172

23. Tìm một chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì.

Câu 2 - Đề 1, K60, Giải tích 3 - Học kì 20153

24. Tìm một chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì nhưng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ hội tụ.

Câu 2 - Đề 2, K60, Giải tích 3 - Học kì 20153

25. Tìm tất cả số thực dương α sao cho $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ hội tụ.

Câu 9 - Đề 2, K60, Giải tích 3 - Học kì 20153

26. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Câu 1 - Đề 5, Đề 6, K60, Giải tích 3 - Học kì 20152

1.1.1 Một số dấu hiệu hội tụ khác cho chuỗi số dương

Tiêu chuẩn Cauchy là điều kiện cần và đủ để một chuỗi số bất kỳ hội tụ.

Định lý Tiêu chuẩn Cauchy. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}^* \text{ chỉ phụ thuộc vào } \epsilon \text{ sao cho } |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

với mọi $n > n_0(\epsilon)$ và với mọi $p \in \mathbb{N}^*$.

Định lý Dấu hiệu Raabe. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử tồn tại $R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Khi đó:

a) Nếu $R > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

b) Nếu $R < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Định lý Dấu hiệu Gauss. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Giả sử ta có khai triển sau

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

trong đó, $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ và θ_n là đại lượng bị chặn với mọi n, và $\epsilon > 0$. Khi đó:

a) Nếu $\lambda > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

b) Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

c) Nếu $\lambda = 1$ và $\mu > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

d) Nếu $\lambda = 1$ và $\mu \leq 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

1. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Bài tập tiêu chuẩn Cauchy - Câu 1

2. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$.

Bài tập tiêu chuẩn Cauchy - Câu 2

3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Bài tập tiêu chuẩn Cauchy - Câu 3

4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$.

Bài tập tiêu chuẩn Cauchy - Câu 4

1.2 Khai triển hàm số thành chuỗi Maclaurin

Các bước:

B1. Biến đổi hàm số thành các hàm đơn giản đã biết.

B2. Biến đổi các hàm đơn giản về chuỗi Maclaurin, cùng với điều kiện hội tụ:

Khai triển Maclaurin và Bán kính hội tụ

Hàm số	Chuỗi Maclaurin (dạng tổng)	Khai triển	Bán kính (R)
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots$	1
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\ldots$	1
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$	∞
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$	∞
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	∞
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$	∞
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	∞
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	1
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	1
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$	1
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}-\ldots$	1
$(1+x)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \dbinom{k}{n} x^n$	$1+kx+\dfrac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\dbinom{k}{n}x^n+\ldots$	1

Ví dụ:

1. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{3}{1+x-2x^2}$ thành chuỗi Maclaurin

Câu 3 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta có $f(x) = \dfrac{3}{1+x-2x^2} = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)} = \dfrac{2}{1+2x} + \dfrac{1}{1-x}$

Ta có các công thức của khai triển của Maclaurin là:

- $\dfrac{2}{1+2x} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1}x^n \quad \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$

Vậy khai triển Maclaurin của $f(x)$ là $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1}x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^{n+1} + 1\right)x^n, \forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

2. Khai triển hàm số $y = \cos x \cos 3x$ thành chuỗi Maclaurin

Câu 4 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT2 - Học kì 20161

Ta có $y = \cos x \cos 3x = \dfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(4x)^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$

Vậy khai triển Maclaurin của y là $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(16^n + 4^n)}{2(2n)!}x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$

1.3 Chuỗi hàm số

Ví dụ:

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\sin x)^n}{n}$

Câu 4 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\sin x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$ trong đó $a_n = \dfrac{1}{n}, X = \sin x$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{1} = 1$ và khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

Tại $X = 1$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Chuỗi này phân kì.

Tại $X = -1$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Chuỗi này là chuỗi đan dấu.

Ta có $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $a_n = \dfrac{1}{n}$ là một dãy dương giảm ngặt và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Vậy miền hội tụ đối với X là $[-1, 1)$. Thay $X = \sin x$ vào ta thu được bất phương trình:

$$-1 \leq \sin x < 1 \Rightarrow \sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy miền hội tụ với x là $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\cos x)^n}{n}$

Câu 4 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\cos x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$ trong đó $a_n = \dfrac{1}{n}, X = \cos x$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{1} = 1$ và khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

Tại $X = 1$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Chuỗi này phân kì.

Tại $X = -1$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Chuỗi này là chuỗi đan dấu.

Ta có $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $a_n = \dfrac{1}{n}$ là một dãy dương giảm ngặt và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Vậy miền hội tụ đối với X là $[-1, 1)$. Thay $X = \cos x$ vào ta thu được bất phương trình:

$$-1 \le \cos x < 1 \Rightarrow \cos x \ne 1 \Rightarrow x \ne k2\pi\, , k \in \mathbb{Z}$$

Vậy miền hội tụ với x là $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

1.4 Chuỗi lũy thừa

1.4.1 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Các bước:

B1. Đặt $X = u(x)$ để đưa chuỗi về dạng $\sum a_n X^n$ và xác định hệ số a_n:

- Xác định biểu thức $u(x)$ trong chuỗi hàm đã cho mà lũy thừa bậc n của nó xuất hiện.
- Đặt $X = u(x)$.
- Viết lại chuỗi hàm dưới dạng $\sum a_n X^n$, từ đó xác định rõ hệ số a_n (chỉ phụ thuộc vào chỉ số n, không phụ thuộc vào x hay X).
- *Ví dụ:* Với chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n+1}$, ta đặt $X = \cos x$. Chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} X^n$. Vậy hệ số $a_n = \frac{1}{n+1}$.

B2. Tìm bán kính hội tụ R cho chuỗi $\sum a_n X^n$:

- Tính $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hoặc $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho}$.
- Lưu ý các trường hợp đặc biệt:
  - Nếu $\rho = 0$ thì $R = +\infty$ (chuỗi $\sum a_n X^n$ hội tụ với mọi X).
  - Nếu $\rho = +\infty$ thì $R = 0$ (chuỗi $\sum a_n X^n$ chỉ hội tụ khi $X = 0$).
- Chuỗi $\sum a_n X^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|X| < R$ và phân kỳ khi $|X| > R$.

B3. Xét sự hội tụ tại các đầu mút $X = R$ và $X = -R$ (nếu R hữu hạn và $R > 0$):

- Thay $X = R$ và $X = -R$ vào chuỗi $\sum a_n X^n$ để thu được hai chuỗi số cụ thể.

- Sử dụng các tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi số (ví dụ: tiêu chuẩn Leibniz cho chuỗi đan dấu, tiêu chuẩn so sánh, p-series, điều kiện cần $a_n \to 0$, v.v.) để xác định sự hội tụ hay phân kỳ của hai chuỗi số này.

- Từ đó, xác định được tập hội tụ D_X đầy đủ cho biến X (ví dụ: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, hoặc $[-R, R]$).

B4. Tìm miền hội tụ cho biến x ban đầu:

- Từ mối quan hệ $X = u(x)$ và tập hội tụ D_X của X (ví dụ, nếu $D_X = [-R, R)$, điều này có nghĩa là $-R \le X < R$), ta giải các bất phương trình/phương trình tương ứng với $u(x)$ để tìm ra miền giá trị của x.

- *Ví dụ ở B1:* Nếu $X = \cos x$ và sau B3 ta tìm được $D_X = [-1, 1)$ (tức là $-1 \le \cos x < 1$), thì ta cần giải: $-1 \le \cos x$ (luôn đúng) và $\cos x < 1$. Điều kiện $\cos x < 1$ có nghĩa là $\cos x \ne 1$, suy ra $x \ne k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Vậy miền hội tụ theo x là $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ví dụ:

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{100-2n}{n+3}\right)^n x^n$.

Câu 2 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{100-2n}{n+3}\right)^n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \left(\dfrac{100-2n}{n+3}\right)^n$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{100-2n}{n+3}\right)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-100}{n+3} = 2$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{2}$ và khoảng hội tụ là $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Tại $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = \dfrac{1}{2}$ ta đều có:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{100-2n}{n+3}\right)^n x^n\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-100}{2n+6}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+3}{53}}\right)^{\frac{-(n+3)}{53} \cdot \frac{-53}{n+3} n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-53n}{n+3}} = e^{-53} \ne 0$$

Nên vi phạm điều kiện cần để chuỗi số hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3x+1)^{3n}}{9^n\sqrt{3n+1}}$?

Câu 3 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3x+1)^{3n}}{9^n\sqrt{3n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ trong đó $a_n = \dfrac{1}{9^n\sqrt{3n+1}}, X = (3x+1)^3$

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9^n\sqrt{3n+1}}{9^{n+1}\sqrt{3n+4}} = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ và khoảng hội tụ là $(-9, 9)$.

Tại $X = 9$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ là 1 chuỗi số dương.

Khi $n \to \infty$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n}}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n}}$ phân kì.

Nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ phân kì theo tiêu chuẩn so sánh.

Tại $X = -9$ chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$ là một chuỗi đan dấu.

Ta có $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy dương, giảm ngặt và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
$\Rightarrow$ Miền hội tụ đối với X là $[-9, 9)$. Thay $X = (3x+1)^3$ vào ta thu được bất phương trình:

$$-\sqrt[3]{9} \leq 3x + 1 < \sqrt[3]{9} \Rightarrow -\frac{\sqrt[3]{9}+1}{3} \leq x < \frac{\sqrt[3]{9}-1}{3}$$

Vậy miền hội tụ với x là $\left[-\dfrac{\sqrt[3]{9}+1}{3}, \dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{3}\right)$.

3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{3^n n^3 + 2}$

Câu 2 - Đề 6 - NN3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20172

Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{3^n n^3 + 2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \dfrac{1}{3^n n^3 + 2}$.
Xét $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n n^3 + 2}{3^{n+1}(n+1)^3 + 2} = \dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ và khoảng hội tụ là $(-3, 3)$.
Tại $x = -3$ và $= 3$ ta đều có $\left|\dfrac{x^n}{3^n n^3 + 2}\right| \leq \dfrac{3^n}{3^n n^3 + 2} < \dfrac{3^n}{3^n n^3} = \dfrac{1}{n^3}$
Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\dfrac{x^n}{3^n n^3 + 2}$ hội tụ tuyệt đối tại $x = -3$ và $x = 3$.
Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-3, 3]$.

4. Xét sự hội tụ đều của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ trên $[-1; 0)$

Câu 10 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}, S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$
Ta xét phần dư thứ n của chuỗi là:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Với mọi $x \in [-1, 0)$ ta có $\dfrac{x^k}{k} = \dfrac{(-1)^k |x|^k}{k}$.
Phần dư thứ n của chuỗi được viết lại là:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^k}{k}$$

Đây là 1 chuỗi đan dấu có dạng $\sum (-1)^k a_k$ với $a_k = \dfrac{|x|^k}{k}$.
Với mọi $x \in [-1, 0)$. ta kiểm tra điều kiện hội tụ cho chuỗi có tổng là $R_n(x)$:

- $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|x|^k}{k} = 0$
- Với mỗi x cố định, ta có a_k là dãy giảm.

Nên phần dư $R_n(x)$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Hơn nữa, theo tính chất của chuỗi Leibniz hội tụ, giá trị tuyệt đối của tổng chuỗi không vượt quá giá trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k |x|^k}{k} \right| \le \left| \frac{(-1)^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Mặt khác, $|x| \le 1$ với $x \in [-1, 0)$ nên:

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0, n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ thì chuỗi $S(x)$ sẽ hội tụ đều trên $[-1, 0)$.

5. Cho chuỗi lũy thừa $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt[4]{n}}, x \in [-1; 1)$. Tính giới hạn

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)S(x)$$

Câu 10 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta đặt:

$$A(x) = (1-x)S(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{\sqrt[4]{n}} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[4]{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[4]{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} = x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \right) x^{n+1}$$

Với mọi $x \in [-1, 1)$ ta luôn có;

$$\left| \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \right) x^{n+1} \right| \le \frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/4} - 1 \right) \sim \frac{1}{4n\sqrt[4]{n}}$ (Áp dụng khai triển Taylor)

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n\sqrt[4]{n}}$ hội tụ nên chuỗi $A(x)$ hội tụ đều trên $[-1, 1)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass.

Tại $x = 1$ ta có $A(1) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \right) = 1 - 1 = 0$.

Theo định lí Abel về sự hội tụ của chuỗi lũy thừa ta có:

- Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 1$.
- $A(1)$ hội tụ.

Nên $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)S(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} A(x) = A(1) = 0$

6. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 1$.

Câu 3 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(x-1)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}} (x-1)^n \quad \forall x \in (0, 2)$$

7. Tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\sin n)\cdot x^n$

Câu 10 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Với mọi $x \in (-1,1)$ ta có:

$$|(\sin n)x^n| < |x|^n$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|x|^n$ hội tụ trên $x \in (-1,1)$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\sin n)\cdot x^n$ hội tụ tuyệt đối trên $(-1,1)$.
Tại $x = 1$ và $x = -1$ thì $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}|(\sin n)x^n| = \lim\limits_{n\to\infty}|\sin n|$.
Với mọi $|x| > 1$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty}|(\sin n)x^n| = +\infty$ vi phạm điều kiện cần để chuỗi hội tụ.
Vậy bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 1$.

1.5 Chuỗi Fourier

Định lý 4.30 (Dirichlet). Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của f tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ hội tụ đến tổng $S(x)$. Nói riêng,

- $S(x) = f(x)$ nếu f liên tục tại x.
- $S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ nếu x là điểm gián đoạn của f.

Định lý 4.31 (Đẳng thức Parseval). Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì đẳng thức Parseval sau được thoả mãn:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

1.5.1 Khai triển chuỗi Fourier

Giả sử hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2L$ (hoặc được cho trên một đoạn có độ dài $2L$ và được mở rộng tuần hoàn), đồng thời thỏa mãn các điều kiện Dirichlet (đơn điệu từng khúc và bị chặn). Chuỗi Fourier của $f(x)$ có dạng:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Các bước khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier

Các bước thực hiện:

B1. Xác định chu kỳ $2L$ và tính L:

- Nếu hàm tuần hoàn với chu kỳ T, thì $2L = T \Rightarrow L = T/2$.
- Nếu hàm được cho trên đoạn $[a, b]$ và cần khai triển, thường ta chọn $2L = b - a$ (trừ khi có yêu cầu khác về mở rộng chẵn/lẻ trên một đoạn lớn hơn).
- Trường hợp đặc biệt: nếu hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π (hoặc cho trên $[-\pi, \pi]$), thì $L = \pi$.

B2. Kiểm tra tính chẵn/lẻ của $f(x)$ trên đoạn đối xứng (nếu có thể):

- Nếu $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-L, L]$: $b_n = 0$ với mọi $n \geq 1$. Chỉ cần tính a_0 và a_n.
- Nếu $f(x)$ là hàm lẻ trên $[-L, L]$: $a_n = 0$ với mọi $n \geq 0$. Chỉ cần tính b_n.
- Nếu không chẵn không lẻ, hoặc xét trên đoạn không đối xứng, tính cả a_0, a_n, b_n.

B3. Tính các hệ số Fourier:

- $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$ (Nếu $f(x)$ chẵn: $a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx$)
- $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (n = 1, 2, \dots)$ (Nếu $f(x)$ chẵn: $a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx$)
- $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (n = 1, 2, \dots)$ (Nếu $f(x)$ lẻ: $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)dx$)

(Lưu ý: Nếu hàm $f(x)$ được cho bởi nhiều biểu thức trên các khoảng khác nhau, cần chia tích phân tương ứng).

B4. Viết chuỗi Fourier của $f(x)$: Thay các hệ số a_0, a_n, b_n vừa tính được vào công thức chuỗi Fourier tổng quát. Đơn giản hóa biểu thức nếu có thể (ví dụ, tách riêng các trường hợp n chẵn, n lẻ cho a_n, b_n nếu cần).

Với dạng **tính tổng** bằng cách sử dụng chuỗi Fourier, quy trình lặp lại như trên, bổ sung thêm bước 5:

B5: Xét sự hội tụ của chuỗi Fourier (theo Định lý Dirichlet):

- Tại các điểm x mà $f(x)$ liên tục, chuỗi Fourier $S(x)$ hội tụ về $f(x)$, tức là $S(x) = f(x)$.
- Tại các điểm x_0 mà $f(x)$ gián đoạn (nhưng có giới hạn trái $f(x_0^-)$ và giới hạn phải $f(x_0^+)$), chuỗi Fourier $S(x_0)$ hội tụ về trung bình cộng của giới hạn trái và giới hạn phải: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$.
- (Bước này quan trọng nếu đề bài yêu cầu tính tổng của một chuỗi số cụ thể bằng cách thay giá trị x đặc biệt vào chuỗi Fourier).

Ví dụ:

1. Khai triển hàm số $f(x) = \cos(3x)$, $0 < x < \pi$, thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm sin.

Câu 4 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2023.2

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm sin, ta xây dựng $g(x)$ là hàm lẻ, chu kì 2π với:

$$g(x) = \begin{cases} \cos(3x) & , \quad 0 < x < \pi \\ -\cos(3x) & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Khai triển Fourier của $g(x)$ với chu kì 2π có các hệ số là:

- $a_n = 0$
- $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(3x)\sin(nx)\,dx$

Với $n = 3$ ta có $b_3 = 0$.

Với $n \neq 3$ ta có $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin(n+3)x + \sin(n-3)x)\,dx = -\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\cos(n+3)x}{n+3} + \dfrac{\cos(n-3)x}{n-3}\right)\Bigg|_0^\pi$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+3}}{n+3} + \frac{1-(-1)^{n-3}}{n-3}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2k+3} + \dfrac{1}{2k-3}\right) & \text{với } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ 0 \quad \text{với } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{cases}$$

Vậy khai triển Fourier của $f(x)$ trên $(0, \pi)$ là $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n-3}\right)\sin(2nx)$

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 2 \end{cases}$ tuần hoàn chu kỳ 4.

a) Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier?

b) Chuỗi Fourier ở trên hội tụ đến hàm số nào trên $[-2,2]$?

Câu 7 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2023.1

a) Ta có các hệ số khai triển fourier của $f(x)$ với chu kì là 4 là:

- $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{2} 2dx = 2$
- $a_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\cos\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)dx = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 0$
- $b_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\sin\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)dx = -\dfrac{2}{n\pi}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}$

$= \begin{cases} 0 \quad \text{với } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} \text{với } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Vậy khai triển fourier của $f(x)$ là $S(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4}{(2n+1)\pi}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$

b) Theo định lí Dirichlet:

- Tại $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ thì $f(x)$ liên tục nên $S(x)$ hội tụ về $f(x)$.
- Tại $x = -2, x = 0, x = 2$ thì $f(x)$ gián đoạn nên S(x) hội tụ về $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = 1$.

3. Tính tổng $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}$.

Câu 5b - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

Ta khai triển Fourier cho $f(x) = \dfrac{x^2}{\pi^2} - 1$ trên đoạn $[-\pi,\pi]$ với chu kì 2π

Vì $f(x)$ là hàm chẵn nên ta có các hệ số khai triển Fourier là:

- $b_n = 0$
- $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\dfrac{x^2}{\pi^2} - 1\right)dx = \dfrac{-4}{3}$
- $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\dfrac{x^2}{\pi^2} - 1\right)\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{x^2}{\pi^2}\cos(nx)dx - 0 = \dfrac{2}{\pi^3}\left(\dfrac{x^2}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\dfrac{x}{n}\sin(nx)dx\right)$

$= \dfrac{4}{\pi^3}\left(\dfrac{x\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\cos(nx)}{n^2}dx\right) = \dfrac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

Vậy khai triển Fourier của $f(x)$ trên $[-\pi,\pi]$ chu kì 2π là:

$$S(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(nx)$$

Kiểm tra điều kiện hội tụ:

- $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π.
- $f(x)$ đơn điệu từng khúc.
- $f(x)$ bị chặn trên $[-\pi,\pi]$

Vì f(x) liên tục tại 0 nên khai triển Fourier $S(x)$ hội tụ về $f(x)$ nên:

$$f(0) = -1 = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Vậy $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

4. Cho khai triển Fourier $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}, x \in [-\pi, \pi)$. Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Câu 10 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta áp dụng đẳng thức Parseval $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ cho khai triển Fourier của $x^2, x \in [-\pi, \pi)$

với các hệ số:

- $b_n = 0$
- $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$
- $a_n = 4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}$

Ta có:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

5. Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π thỏa mãn

$$\begin{cases} -x, \text{ nếu } -\pi < x < 0, \\ 1, \text{ nếu } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ và áp dụng tính $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Câu 10 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có các hệ số khai triển Fourier của $f(x)$ với chu kì 2π là:

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} -$
$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx + 0 = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 \text{ với } n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{-2}{\pi(2k+1)^2} \text{ với } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} -$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx+\frac{1}{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$

Vậy khai triển Fourier của $f(x)$ là:

$$S(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$$

Kiểm tra điều kiện hội tụ:

- $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π.
- $f(x)$ đơn điệu từng khúc.
- $f(x)$ bị chặn trên $(-\pi,\pi)$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\neq 1=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ nên $x=0$ là điểm gián đoạn theo định lí Dirichlet ta có:

$$S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2n+1)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Lưu ý: Phần tính tổng chuỗi áp dụng bằng chuỗi Fourier cực kỳ hiếm ra ở CT chuẩn, nhưng thường xuyên ra ở CT KSTN.

Dưới đây là một số khai triển Fourier với tổng thường gặp:

(1) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-\pi;0)\\ 1, & x\in[0;\pi]\end{cases},\quad T=2\pi$

$$\Longrightarrow\ \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\quad\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

$f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\pi]$, $T=2\pi$

$$\Longrightarrow\ \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\quad\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\pi]$, $\quad T=2\pi$

$$\Longrightarrow\ \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\quad\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$f(x)=|x|$, $x\in[-2;2]$, $T=4$.

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi;0)\\ 1, & x\in[0;\pi]\end{cases},\quad T=2\pi$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\quad\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

(3) $f(x)=x^2$, $x\in[-\pi;\pi]$, $\quad T=2\pi$

$$\Longrightarrow\ \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

$$\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$f(x)=\begin{cases}x(\pi+x), & x\in[-\pi;0)\\ x(\pi-x), & x\in[0;\pi]\end{cases}, T=2\pi$

$$\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

$f(x)=\begin{cases}-(x+\pi), & x\in[-\pi;0)\\ x-\pi, & x\in[0;\pi]\end{cases}, T=2\pi$

$$\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$f(x) = |x|,\ x \in [-1;1], \quad T = 2L.$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2},\ x \in [-\pi;\pi], \quad T = 2\pi$

$$\Longrightarrow \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(4) $f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi;0) \\ \frac{\pi - x}{2}, & x \in [0;\pi] \end{cases}, \quad T = 2\pi$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

(5) $f(x) = |\sin x|,\ x \in [-\pi;\pi], \quad T = 2\pi$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \quad \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

Đẳng thức Parseval và một số tổng chuỗi: Đẳng thức Parseval (cho $L = \pi$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Áp dụng cho một số tổng:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

Bài tập tự làm:

6. Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π sau đây thành chuỗi Fourier: $f(x) = \pi - 2x$ với $x \in (-\pi, \pi)$.

Câu 3 - Đề 5 - NN2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2021.2

7. Khai triển hàm số $f(x) = \pi - x$, tuần hoàn chu kỳ 2π thành chuỗi Fourier trên $(0, 2\pi)$. Chuỗi Fourier đó hội tụ về hàm nào trên $[0, 2\pi]$?

Câu 5 - Đề 7 - NN3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2021.2

8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -(1+x) & \text{khi } -\pi \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{khi } 0 < x < \pi \end{cases}$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$. Khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

Câu 3 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

9. Khai triển hàm số $f(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π, thỏa mãn $f(x) = x, 0 \le x \le \pi$ thành chuỗi Fourier.

Câu 3 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

1.6 Tính tổng chuỗi

Để tính tổng một chuỗi số, ta thường tìm cách liên hệ chuỗi đó với các chuỗi hàm quen thuộc như chuỗi lũy thừa hoặc chuỗi Fourier, sau đó áp dụng các phương pháp tương ứng.

1.6.1 Phương pháp 1: Nhận dạng và sử dụng trực tiếp chuỗi Maclaurin

Phương pháp này áp dụng khi chuỗi cần tính tổng có dạng tương tự hoặc chính là chuỗi Maclaurin của một hàm quen thuộc tại một giá trị cụ thể.

Các bước thực hiện:

B1. Phân tích chuỗi cần tính tổng: Xác định dạng của số hạng tổng quát a_n.

B2. So sánh với các chuỗi Maclaurin cơ bản: Đối chiếu dạng của a_n với các khai triển trong bảng (ví dụ: $e^x, \sin x, \ln(1+x), \ldots$).

B3. Biến đổi và đồng nhất: Thực hiện các phép biến đổi đại số (thêm/bớt số hạng, thay đổi chỉ số n) để đưa chuỗi về chính xác dạng của một chuỗi Maclaurin đã biết, $\sum f_n(x_0)$.

B4. Kết luận tổng: Nếu chuỗi cần tính là $\sum f_n(x_0)$, và chuỗi Maclaurin của hàm $S(x)$ là $\sum f_n(x)$ với x_0 nằm trong miền hội tụ, thì tổng của chuỗi chính là $S(x_0)$.

Ví dụ: Tính tổng $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

- Ta nhận thấy chuỗi này rất giống với khai triển của $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
- Ta có: $e^x = \dfrac{x^0}{0!} + \dfrac{x^1}{1!} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + S$.
- Vậy, tổng của chuỗi là $S = e^x - 1 - x$.

1.6.2 Phương pháp 2: Sử dụng đạo hàm và tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa

Phương pháp này hiệu quả khi chuỗi cần tính tổng có chứa các thừa số như $n, n-1, \ldots$ hoặc $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$ trong hệ số. Ý tưởng là biến đổi một chuỗi đã biết tổng (thường là chuỗi hình học) bằng cách lấy đạo hàm hoặc tích phân để ra được chuỗi cần tìm.

Định lý: Cho chuỗi lũy thừa $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó, với mọi $x \in (-R, R)$, ta có thể lấy đạo hàm và tích phân từng số hạng:

- **Đạo hàm:** $S'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
- **Tích phân:** $\displaystyle\int S(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C$.

Các bước thực hiện:

B1. Xây dựng chuỗi lũy thừa gốc: Từ chuỗi số cần tính, xây dựng một chuỗi lũy thừa $f(x)$ bằng cách thay hằng số trong chuỗi số bằng biến x. Chuỗi gốc này thường là chuỗi hình học có tổng $S(x) = \dfrac{a}{1-x}$.

B2. Thực hiện đạo hàm/tích phân: Lấy đạo hàm hoặc tích phân hàm $S(x)$ và chuỗi $\sum a_n x^n$ một hoặc nhiều lần cho đến khi thu được chuỗi lũy thừa có dạng giống với chuỗi cần tính.

B3. Tính tổng của chuỗi lũy thừa mới: Tổng của chuỗi mới chính là kết quả của phép đạo hàm/tích phân hàm $S(x)$.

B4. Thay giá trị x: Thay giá trị x tương ứng vào tổng vừa tìm được để ra kết quả của chuỗi số ban đầu.

Ví dụ: Tính tổng $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi^n}$.

- Chuỗi này có dạng $\sum nx^n$ với $x = 1/\pi$.
- Ta bắt đầu từ chuỗi hình học: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ với $|x| < 1$.
- Lấy đạo hàm hai vế: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Nhân hai vế với x: $xf'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
- Chuỗi cần tính là tổng trên tại $x = 1/\pi$. Vì $|1/\pi| < 1$ nên ta có thể thay vào:

$$S = \frac{1/\pi}{(1-1/\pi)^2} = \frac{1/\pi}{(\frac{\pi-1}{\pi})^2} = \frac{\pi}{(\pi-1)^2}$$

1.6.3 Phương pháp 3: Sử dụng khai triển Fourier

Như đã được đề cập trong các ví dụ ở mục khai triển Fourier, chúng ta có thể tận dụng sự hội tụ của chuỗi Fourier tại một điểm cụ thể để tính tổng của nhiều chuỗi số đặc biệt. Phương pháp này đặc biệt hiệu quả với các chuỗi có hệ số dạng $\frac{1}{n^k}$, $\frac{(-1)^n}{n^k}$, v.v.

Các bước thực hiện:

B1. Lựa chọn hàm số $f(x)$ và khoảng khai triển phù hợp: Đây là bước sáng tạo và quan trọng nhất. Cần chọn một hàm số $f(x)$ (ví dụ: $x, x^2, |x|, \dots$) và một khoảng đối xứng (ví dụ: $[-\pi, \pi]$ hoặc $[-L, L]$) sao cho các hệ số Fourier a_n hoặc b_n của nó có dạng chứa số hạng của chuỗi cần tính tổng.

B2. Khai triển Fourier cho hàm $f(x)$: Tính các hệ số a_0, a_n, b_n và viết ra chuỗi Fourier đầy đủ của $f(x)$:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

B3. Áp dụng Định lý hội tụ Dirichlet: Chọn một giá trị $x = x_0$ đặc biệt (thường là các đầu mút như $0, L, \pi$) và thay vào hai vế của đẳng thức hội tụ.

- Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0, ta có $f(x_0) = S(x_0)$.
- Nếu $f(x)$ gián đoạn tại x_0, ta có $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = S(x_0)$.

Việc chọn x_0 hợp lý sẽ giúp các số hạng cos và sin nhận các giá trị đơn giản (như $1, -1, 0$), từ đó rút ra được một phương trình cho tổng chuỗi số cần tìm.

B4. (Phương pháp thay thế) Áp dụng Đẳng thức Parseval: Nếu chuỗi cần tính có dạng bình phương $(\frac{1}{n^4}, \frac{1}{n^6}, \dots)$, ta có thể sử dụng đẳng thức Parseval:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Bằng cách thay các hệ số đã tính vào, ta có thể suy ra tổng của chuỗi bình phương.

Ví dụ kinh điển: Tính tổng $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

- **B1-B2:** Chọn hàm $f(x) = x^2$ trên $[-\pi, \pi]$ (hàm chẵn, $b_n = 0$). Khai triển Fourier của nó là:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

- **B3:** Chọn $x = \pi$. Vì $f(x)$ liên tục tại biên (sau khi mở rộng tuần hoàn, $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$), ta có:

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) \\ \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n \\ \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \frac{2\pi^2}{3} &= 4S \implies S = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

1. Tính tổng của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

Câu 3 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta có $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x - 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}$

2. Tính tổng $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{4^{n-1}}$.

Câu 8 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Ta có: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{4^{n-1}} = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4^{n-1}} = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ Trong đó $x = \dfrac{1}{4} \in (-1; 1)$

Xét $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ $\forall x \in (-1; 1)$ và hội tụ đều trên đoạn $[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Với $x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{4^{n-1}} = \dfrac{2}{(1-\frac{1}{4})^2} = \dfrac{32}{9}$

3. Tính tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\pi^n}$

Câu 9 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta xét $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ là chuỗi lũy thừa hội tụ trên $(-1, 1)$.

$\Rightarrow f(x)$ hội tụ đều trên $[-0,5; 0,5]$.

Ta có $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ $\forall x \in (-1, 1)$.

Với mọi $x \in [-0,5;0,5]$ ta có: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Thay $x = \dfrac{1}{\pi} \in [-0,5;0,5]$ ta thu được $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\pi^n} = \dfrac{\pi}{(\pi-1)^2}$.

4. Tính tổng $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$.

Câu 8 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Ta xét chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ trên $(-1,1) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ đều trên $\left[-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ khi đó:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2$
- $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = 4$

Vậy $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{2^{n-1}} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot 4 - 2 = 6$

5. Tính tổng $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Câu 9 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Ta có:

- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in R$
- $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad \forall x \in R$

Ta có $\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} = \begin{cases} 0 & \forall n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ 2\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} & \forall n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

Vậy $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

Bài tập tự làm:

6. Tính tổng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)}{2^n}$.

Câu 8 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

2 Phương trình vi phân

2.1 PTVP cấp 1

2.1.1 Phương trình khuyết

Phương trình vi phân cấp một dạng khuyết là phương trình không có sự xuất hiện của biến y hoặc biến x.

1. Phương trình khuyết y Phương trình có dạng $F(x, y') = 0$.

Các bước giải:

- **Trường hợp 1:** Nếu giải được $y' = f(x)$.
  - Lấy tích phân hai vế: $y = \int f(x)dx + C$.
- **Trường hợp 2:** Nếu giải được $x = f(y')$.
  - Đặt $y' = t$. Ta có $x = f(t)$.
  - Vì $dy = y'dx = t \cdot d(f(t)) = tf'(t)dt$, suy ra $y = \int tf'(t)dt + C$.
  - Nghiệm tổng quát của phương trình được cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int tf'(t)dt + C \end{cases}$.
- **Trường hợp 3:** Nếu giải được dưới dạng tham số $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$.
  - Ta có $dy = y'dx = \psi(t)\phi'(t)dt$.
  - Suy ra $y = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C$.
  - Nghiệm tổng quát dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C \end{cases}$.

1. Giải các phương trình vi phân sau: $y''' = x^2 + 2e^{3x} + \cos 2x$.

Câu 4a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

2. Phương trình khuyết x Phương trình có dạng $F(y, y') = 0$.

Các bước giải:

- **Trường hợp 1:** Nếu giải được $y' = f(y)$.
  - Ta có $\frac{dy}{dx} = f(y)$, suy ra $dx = \frac{1}{f(y)}dy$ (với $f(y) \neq 0$).
  - Lấy tích phân hai vế: $x = \int \frac{1}{f(y)}dy + C$.
- **Trường hợp 2:** Nếu giải được $y = f(y')$.
  - Đặt $y' = t$. Ta có $y = f(t)$.
  - Vì $dy = y'dx \Rightarrow dx = \frac{1}{y'}dy = \frac{1}{t}d(f(t)) = \frac{f'(t)}{t}dt$.
  - Suy ra $x = \int \frac{f'(t)}{t}dt + C$.

– Nghiệm tổng quát dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t}dt + C \\ y = f(t) \end{cases}$.

- **Trường hợp 3:** Nếu giải được dưới dạng tham số $\begin{cases} y = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$.

  – Ta có $dy = y'dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{y'}dy = \dfrac{1}{\psi(t)}d(\phi(t)) = \dfrac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt$.

  – Suy ra $x = \displaystyle\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C$.

  – Nghiệm tổng quát dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \phi(t) \end{cases}$.

2.1.2 Phương trình vi phân biến số phân ly

Định nghĩa: Phương trình có dạng $f(x)dx = g(y)dy$ (hoặc $M(x)dx + N(y)dy = 0$, hay $y' = f(x)h(y)$) được gọi là phương trình vi phân với biến số phân ly.

Cách giải: Lấy tích phân hai vế của phương trình $f(x)dx = g(y)dy$, ta được nghiệm tổng quát:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

hay $F(x) = G(y) + C$.

1. Giải phương trình vi phân $xdx = \sqrt{x^2+1}ydy$.

Câu 3 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Ta có:

$$xdx = \sqrt{x^2+1}ydy \Rightarrow \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = ydy \Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int ydy$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \sqrt{x^2+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:
- Đưa về PT phân ly (0.5đ)
- Giải PTVP tìm được tích phân tổng quát (0,5đ)

2. Cho phương trình vi phân $y' = (a^3x + ay + 4)^2$ thỏa mãn $y(0) = -\dfrac{4}{a}$ với hằng số $a > 0$. Tính $y(1)$?

Câu 5a - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Ta đặt $u = a^3x + ay + 4 \Rightarrow u' = a^3 + ay' \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{a} - a^2$. Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$\frac{u'}{a} - a^2 = u^2 \Rightarrow u' = a(u^2 + a^2) \Rightarrow \frac{du}{u^2 + a^2} = adx$$

Đây là phương trình biến số phân ly. Giải phương trình trên:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int adx \Rightarrow \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} = ax + C$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a}\arctan\frac{a^3x + ay + 4}{a} = ax + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Mà $y(0) = -\dfrac{4}{a} \Rightarrow C = 0$ nên tích phân tổng quát là:

$$\frac{1}{a}\arctan\frac{a^3x + ay + 4}{a} = ax$$

Tại $x = 1$ ta có:

$$\frac{1}{a}\arctan\frac{a^3 + ay(1) + 4}{a} = a \Rightarrow y(1) = \tan(a^2) - a^2 - \frac{4}{a}$$

3. Giải phương trình vi phân $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ bằng cách đổi ẩn hàm $y = \dfrac{z}{x}$.

Câu 8 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Ta đặt $y = \dfrac{z}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{xz' - z}{x^2}$. Thay vào phương trình trên ta có:

$$\frac{xz' - z}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow z'x = z^2 + z - 2 \Rightarrow xz' = (z-1)(z+2) \qquad (1)$$

Xét 3 trường hợp:

- TH1: Tại $z - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ là một nghiệm riêng của PTVP.
- TH2: Tại $z + 2 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{x}$ là nghiệm kỳ dị của PTVP.
- TH3: Với $z \neq 1, z \neq 2$.
  Từ (1) ta có:

$$\frac{dz}{(z-1)(z+2)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{(z-1)(z+2)} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-1}{z+2}\right| = \ln|\sqrt[3]{C}x| \Leftrightarrow \ln\left|\frac{z-1}{z+2}\right| = \ln|Cx^3|$$
$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+2} = Cx^3$$

  Thay $z = xy$ vào phương trình trên ta thu được:

$$\frac{xy-1}{xy+2} = Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R})$$

Lưu ý: Đây là phương trình Riccati, đối với dạng phương trình này mà không có gợi ý đổi biến, hãy lướt đến Mục 2.1.8

4. Giải phương trình vi phân $xy' = y + 2x^3\sin^2\dfrac{y}{x}$.

Câu 4a - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Với $x \neq 0$ thì phương trình có nghĩa, nên ta có:

$$xy' = y + 2x^3\sin^2\frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + 2x^2\sin^2\frac{y}{x}$$

Ta đặt $y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$ thay vào phương trình trên ta có:

$$u + xu' = u + 2x^2\sin^2 u$$
$$u' = 2x\sin^2 u$$

Xét 2 trường hợp:

- **TH1:** $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$ là một nghiệm của phương trình. Vậy $y = ux = k\pi x$ là nghiệm kỳ dị của phương trình.
- **TH2:** $\sin u \neq 0 \Rightarrow u \neq k\pi$, ta có:

$$u + xu' = u + 2x^2 \sin^2 u$$
$$\Rightarrow xu' = 2x^2 \sin^2 u$$
$$\Rightarrow \frac{du}{\sin^2 u} = 2xdx$$
$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sin^2 u} = \int 2xdx$$
$$\Rightarrow -\cot u = x^2 + C$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ vào phương trình trên ta có:

$$\cot \frac{y}{x} + x^2 = C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:
- Với $x \neq 0$, tìm được **nghiệm kỳ dị** (0.5đ)
- Với $u \neq k\pi$, đưa về PT phân ly, giải đúng nghiệm tổng quát (0,5đ)

5. Giải phương trình vi phân $y' + (x - y + 1)^2 = 0, y(0) = 0.$

Câu 8 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

Ta đặt $u = x - y + 1 \Rightarrow u' = 1 - y'$. Thay vào phương trình trên ta có:

$$1 - u' + u^2 = 0 \Rightarrow u' = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2+1} = dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan u = x + C$$

Thay $u = x + y - 1$ vào phương trình trên ta được nghiệm tổng quát:

$$\arctan(x - y + 1) = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Với $y(0) = 0$, ta có $\arctan(1) = C \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\arctan(x - y + 1) = x + \dfrac{\pi}{4}$ là nghiệm riêng của phương trình ban đầu.
Chấm điểm:
- Đặt ẩn, đưa về PT phân ly (0.5đ)
- Giải PTVP tìm được nghiệm tổng quát, sau đó suy ra nghiệm riêng (0,5đ)

6. Giải phương trình vi phân $y' = (x + y)^2$, $y' = \sqrt{x + y}$.

Câu 4 - Đề 1, Đề 2 cuối kỳ môn GT3 - Học kì 20152

- Ta đặt $u = x + y \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$ thay vào phương trình trên ta có:
  $\dfrac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{du}{u^2+1} = dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan u = x + C$
  Thay $u = x + y$, ta có $\arctan(x + y) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- Với $x + y \geq 0$ thì phương trình có nghĩa.
  Ta đặt $u = \sqrt{x+y} \Rightarrow u^2 = x + y \Rightarrow 2u\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$ thay vào phương trình trên ta có:

$2u\dfrac{du}{dx} - 1 = u \Rightarrow 2u\dfrac{du}{dx} = u + 1 \Rightarrow \dfrac{2u}{u+1}du = dx$

$\displaystyle\int \frac{2u}{u+1}du = \int dx \Rightarrow \int \left(2 - \frac{2}{u+1}\right) du = dx \Rightarrow 2u - 2\ln(u+1) = x + C$

Thay $u = \sqrt{x+y}$ ta có tích phân tổng quát là:

$2\sqrt{x+y} - 2\ln(\sqrt{x+y}+1) = x + C$

Chấm điểm:

- Biến đổi đúng để đưa về phương trình phân ly (0.5đ)
- Giải ra tích phân tổng quát (0,5đ)

7. Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = 1 + 2\int\limits_0^x tf(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

.

Câu 9 - Đề 1 - Đề cuối kỳ môn GT3 - Học kì 20152

Cách 1: Đạo hàm 2 vế phương trình ta được:

$\Rightarrow f'(x) = 2xf(x) \Rightarrow \dfrac{df(x)}{f(x)} = 2xdx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int 2xdx \Rightarrow \ln|f(x)| = x^2 + C$

Mà $f(0) = 1 + \int\limits_0^0 tf(t)\,dt = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2}$

Cách 2:

Nhân 2 vế của phương trình với x thu được:

$$xf(x) = x + 2x\int\limits_0^x tf(t)dt$$

Đặt $y = \int\limits_0^x tf(t)dt \Rightarrow y' = xf(x)$. Thay vào phương trình trên ta có: $y' = x + 2xy \Rightarrow y' - 2xy = x$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int 2x\,dx}\left(\int xe^{\int -2x\,dx}dx + C\right) = e^{x^2}\left(\int xe^{-x^2}\,dx + C\right) \\ &= e^{x^2}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2} + C\right) = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mà $y(0) = \int\limits_0^0 tf(t)dt = 0 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{x^2}}{2}$. Thay vào $xf(x) = y'$ được $xf(x) = xe^{x^2}$.

Vậy $f(x) = e^{x^2}$.

Chấm điểm:

- Từ PT suy ra $f(x)$ có đạo hàm và điều kiện $f'(x) = 2xf(x), f(0) = 1$ (0.5đ)
- Giải PTVP, tìm ra C suy ra được $f(x)$ (0,5đ)

Lưu ý: Đây là phương trình tích phân Volterra loại hai, với dạng tổng quát:

$$y(x) = g(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

Trong bài toán này:

- $y(x)$ chính là $f(x)$.
- $g(x) = 1$.
- $\lambda = 2$.
- Hạt nhân tích phân $K(x,t) = t$. (Lưu ý rằng hạt nhân ở đây không phụ thuộc vào x, đây là một trường hợp đặc biệt).

- Giới hạn dưới của tích phân là $a = 0$.

Phương pháp giải bằng cách lấy đạo hàm hai vế (như Cách 1) là một kỹ thuật phổ biến để chuyển một số phương trình tích phân Volterra thành phương trình vi phân.

Bài tập tự làm:

8. Giải các phương trình vi phân sau: $y' = y^2 - 2y + 1$, $y(0) = 2$.

Câu 3a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

9. Giải phương trình vi phân $x'(y) = e^y\sqrt{x^2+3}$.

Câu 6 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

10. Giải phương trình vi phân $\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)dx + 2dy = 0$ bằng phép đổi ẩn hàm $y = \frac{z}{x}$.

Câu 7 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

11. Giải phương trình vi phân $2y(x^2+4)dy = (y^2+1)dx$.

Câu 3a - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

12. Giải phương trình vi phân $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

Câu 5 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

13. Giải phương trình vi phân $y' = y^2 - y$.

Câu 4 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

2.1.3 Phương trình vi phân đẳng cấp

Định nghĩa: Phương trình có dạng $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp.

Cách giải:

B1. Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$.

B2. Lấy đạo hàm: $y' = u'x + u$.

B3. Thay vào phương trình ban đầu: $u'x + u = F(u)$.

B4. Đây là phương trình biến số phân ly: $x\frac{du}{dx} = F(u) - u \Rightarrow \frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$ (với $F(u) - u \neq 0$).

B5. Giải phương trình này để tìm u, sau đó thay $u = y/x$ để tìm nghiệm y.

1. Giải phương trình vi phân $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

Câu 5 - Đề 3 cuối kỳ môn GT3 - Học kì 20152

Với $x \neq 0$ thì phương trình xác định. Biến đổi phương trình ban đầu:

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y \Rightarrow y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Ta đặt $y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$. Thay vào phương trình trên ta thu được:

$$\begin{aligned} u + xu' &= e^u + u \\ \Rightarrow xu' &= e^u \\ \Rightarrow \frac{du}{e^u} &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{du}{e^u} &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow -e^{-u} &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ vào ta thu được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:
- Biến đổi đúng đến phương trình $xu' = e^u$ để đưa về phương trình phân ly (0.5đ)
- Giải đúng phương trình (0,5đ)

Bài tập tự làm:

2. Giải các phương trình: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 6xy + y^2}{6x^2}$

Câu 3a - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

3. Giải các phương trình vi phân sau: $y' + 3y^2 \sin 3x = 0$.

Câu 3a - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

4. Giải phương trình vi phân $2y' - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 1$.

Câu 4 - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

2.1.4 Phương trình vi phân tuyến tính

Định nghĩa: Phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)$ được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Cách giải (Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange):

B1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng: $y' + p(x)y = 0$.

Ta thấy $y = 0$ là 1 nghiệm của phương trình. Với $y \neq 0$, ta có phương trình biến số phân ly: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad \text{trong đó } C \text{ là hằng số.}$$

B2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất:

Coi C là một hàm số của x, tức $C = C(x)$. Nghiệm của phương trình không thuần nhất có dạng $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Lấy đạo hàm: $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Thay y và y' vào phương trình không thuần nhất ban đầu:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ \Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ \Rightarrow C'(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Suy ra $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$ (với K là hằng số mới).

B3. Kết luận nghiệm tổng quát:

$$\begin{aligned} y &= \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right)e^{-\int p(x)dx} \\ &= Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \end{aligned}$$

1. Giải các phương trình: $x^2y' - y = x^2e^{-\frac{1}{x}}; x \neq 0$

Câu 3b - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

Với $x \neq 0$ phương trình có nghĩa nên ta có:

$$x^2y' - y = x^2e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow y' - \frac{y}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(x) = -\dfrac{1}{x^2}, q(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right) = e^{\int \frac{dx}{x^2}}\left(\int e^{-\frac{1}{x}}e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}dx + K\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\left(\int e^{-\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x}}dx + K\right) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\int dx + K\right) = e^{-\frac{1}{x}}(x+K) \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Đưa về phương trình tuyến tính (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát (0,5đ)

2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ biết $y' + \dfrac{1}{\sqrt{x}}y = e^{-x^4}$.

Câu 10 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất có $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, q(x) = e^{-x^4}$ nên nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int_1^x p(t)dt}\left(\int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)du}dt + K\right) = e^{-\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}}\left(\int_1^x e^{-t^4}e^{\int_1^t \frac{du}{\sqrt{u}}}dt + K\right) \\ &= \frac{\int_1^x e^{-t^4}e^{2\sqrt{t}-2}dt + K}{e^{2\sqrt{x}-2}} = \frac{\int_1^x e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt}{e^{2\sqrt{x}-2}} + \frac{K}{e^{2\sqrt{x}-2}} \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ta xét $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt}{e^{2\sqrt{x}-2}} + \dfrac{K}{e^{2\sqrt{x}-2}}$ có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{K}{e^{2\sqrt{x}-2}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt = \int_1^{+\infty} e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt$

Khi $t \to +\infty$ thì $e^{2\sqrt{t}-t^4-2} \sim e^{-t^4}$. Với mọi $t \geq 1$ thì $e^{-t^4} \leq e^{-t}$.

Ta có $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_1^{+\infty} = \dfrac{1}{e}$ hội tụ. Nên $\int\limits_1^{+\infty} e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt = \int\limits_1^{+\infty} e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt = L \quad (L \in \mathbb{R})$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2\sqrt{x}-2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x e^{2\sqrt{t}-t^4-2}dt}{e^{2\sqrt{x}-2}} = 0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0.$

Chấm điểm:

- Viết ra nghiệm tổng quát, tính được giới hạn $\dfrac{K}{e^{2\sqrt{x}-2}}$ (0.5đ)
- Tìm được giới hạn còn lại, suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ (0,5đ)

3. Gọi $y(t)$ là hàm đo mức độ định lượng một hoocmon trong máu của một bệnh nhân phụ thuộc vào biến thời gian t. Tốc độ thay đổi của hoocmon đó trong máu đo được là hiệu của hàm đầu vào $(A + B\cos\omega t)$ tự tuyến giáp và $Ky(t)$ - hàm mô tả tỷ lệ mất đi liên tục của hoocmon. Vậy phương trình Toán học cho hàm đo mức nội tiết tố trong máu là $y'(t) = A + B\cos\omega t - Ky(t)$. Tìm nghiệm $y(t)$ của phương trình trên với A, B, K, ω là các hằng số đo đạc được, và mốc thời gian tại $t = 0, y(0) = y_0$.

Câu 5 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có:

$$y'(t) = A + B\cos\omega t - Ky(t) \Rightarrow y'(t) + Ky(t) = A + B\cos\omega t$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(t) = K, q(t) = A + B\cos\omega t$ nên nghiệm của phương trình là:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(t)dt}\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right) = e^{-\int Kdt}\left(\int (A + B\cos\omega t)\, e^{\int Kdt}dt + C\right) \\ &= e^{-Kt}\left(\int (A + B\cos\omega t)\, e^{Kt}dt + C\right) = e^{-Kt}\left(\frac{A}{K}e^{Kt} + \int B\cos\omega t\, e^{Kt}dt + C\right) \quad (K \neq 0) \qquad (1) \end{aligned}$$

Tính tích phân:

$$\begin{aligned} \int B\cos\omega t\, e^{Kt}dt &= \frac{B}{K}\cos\omega t\, e^{Kt} + \frac{\omega}{K}\int B\sin\omega t\, e^{Kt}dt \\ &= \frac{B}{K}\cos\omega t\, e^{Kt} + \frac{B\omega}{K^2}\sin\omega t\, e^{Kt} - \frac{\omega^2}{K^2}\int B\cos\omega t\, e^{Kt}dt \\ \Rightarrow \int B\cos\omega t\, e^{Kt}dt &= \frac{B}{K^2+\omega^2}\left(K\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)e^{Kt} \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta thu được:

$$\begin{aligned} y &= e^{-Kt}\left(\frac{A}{K}e^{Kt} + \frac{B}{K^2+\omega^2}\left(K\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)e^{Kt} + C\right) \\ &= \left(\frac{A}{K} + \frac{B}{K^2+\omega^2}(K\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\right) + Ce^{-Kt} \end{aligned}$$

Mà $y(0) = y_0 \Rightarrow C = y_0 - \dfrac{BK}{K^2+\omega^2} - \dfrac{A}{K}$. Thay vào phương trình trên ta có:

$$y = \left(\frac{A}{K} + \frac{B}{K^2+\omega^2}(K\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\right) + \left(y_0 - \frac{BK}{K^2+\omega^2} - \frac{A}{K}\right)e^{-Kt}$$

Chấm điểm:

- Chỉ ra phương trình tuyến tính và giải đúng nghiệm tổng quát (0.5đ)
- Tìm ra hằng số C, từ đó tìm được nghiệm riêng của phương trình (0,5đ)

Nhận xét: Đề này ra chưa chặt bởi xét về mặt Toán học vẫn còn trường hợp $K = 0$, nhưng trường hợp $K = 0$ trong thực tế là không xảy ra vì không có hormone nào tồn tại mãi mãi.

4. Giải phương trình vi phân $y' + y = \cos x - \sin x$.

Câu 4 - Đề 3 cuối kỳ môn GT3 - Học kì 20152

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(x) = 1, q(x) = \cos x - \sin x$. Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right) = e^{-\int dx}\left(\int (\cos x - sinx)e^{\int dx}dx + K\right) \\
&= e^{-x}\left(\int (\cos x - \sin x)e^{x}\,dx + K\right) = e^{-x}\left(e^{x}\cos x + K\right) \\
&= \cos x + Ke^{-x} \quad (K \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Chỉ ra phương trình tuyến tính và công thức nghiệm tổng quát (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát của phương trình (0,5đ)

5. Theo định luật Newton, tốc độ nguội dần hoặc nóng lên của vật tỉ lệ với hiệu số của nhiệt độ vật với nhiệt độ môi trường xung quanh. Tìm quy luật nguội dần của vật nếu nhiệt độ môi trường là 20°C, và trong khoảng thời gian 20 phút, vật nguội dần từ 100°C xuống 60°C.

Câu 10 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của vật ở thời điểm t (phút). Nên tốc độ nguội dần hoặc nóng dần của vật là $\frac{dT}{dt}(t)$. Theo đề bài ta có tốc độ nguội dần hoặc nóng lên của vật tỉ lệ với hiệu số của nhiệt độ vật với nhiệt độ môi trường xung quanh.

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt}(t) = K(T(t) - T_{mt})$$

với K là hằng số, T_{mt} là nhiệt độ của môi trường. Với $T_{mt} = 20°C$, phương trình trên trở thành:

$$\frac{dT}{dt}(t) = K(T(t) - 20) \Rightarrow \frac{dT}{dt}(t) - KT(t) = -20K$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(t) = -K, q(t) = -20K$. Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned}
T(t) &= e^{-\int p(t)dt}\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right) = e^{\int Kdt}\left(\int -20Ke^{\int -Kdt}dt + C\right) \\
&= e^{Kt}\left(\int -20Ke^{-Kt}dt + C\right) = e^{Kt}\left(20e^{-Kt} + C\right) \quad (C \in \mathbb{R}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Tại thời điểm $t = 0$ phút và $t = 20$ phút vật có nhiệt độ lần lượt là $100°C$ và $60°C$, thay vào phương trình trên ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20 + C & = 100 \\ e^{20K}\left(20e^{-20K} + C\right) & = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 80 \\ K = -\dfrac{\ln 2}{20} \end{cases}$$

Thay vào (1) ta có:

$$T(t) = e^{\frac{-\ln 2}{20}t}\left(20e^{\frac{\ln 2}{20}t} + 80\right) = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

Chấm điểm:

- Chỉ ra được phương trình $T'(t) = k(T - 20)$ với các giá trị $T(0) = 100, T(20) = 60$ (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát, suy ra nghiệm riêng của phương trình (0,5đ)

Bài tập tự làm:

6. Giải phương trình vi phân $(e^{2y} + x)y' = 1$.

Câu 5 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

7. Giải phương trình vi phân $y' - \dfrac{4}{x}y = 4x^7$.

Câu 3b - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

8. Giải phương trình vi phân $xy' - y = x^2e^x, y(1) = 2e$.

Câu 5 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

9. Giải phương trình vi phân $y' - y = 2e^{3x}$.

Câu 4 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

2.1.5 Phương trình Bernoulli

Định nghĩa: Phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Cách giải:

B1. Kiểm tra nghiệm tầm thường: Nếu $\alpha > 0$, $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

B2. Biến đổi phương trình (với $y \neq 0$): Chia cả hai vế cho y^α: $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$.

B3. Đặt ẩn phụ: Đặt $u = y^{1-\alpha}$.

B4. Tính đạo hàm của u: $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$.

B5. Thay vào phương trình đã biến đổi: Từ $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, suy ra $y^{-\alpha}y' = \dfrac{u'}{1-\alpha}$.

Phương trình trở thành: $\dfrac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x)$. Hay

$$\boxed{u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).}$$

B6. Giải phương trình tuyến tính theo u: Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với u. Tìm nghiệm $u(x)$.

B7. Tìm lại nghiệm $y(x)$: Từ $u = y^{1-\alpha}$, suy ra $y(x)$. **Nhớ** bao gồm cả nghiệm $y = 0$ **nếu có**.

Lưu ý: Nếu $\alpha = 0$, đây là phương trình tuyến tính. Nếu $\alpha = 1$, đây là phương trình tuyến tính thuần nhất (đưa về phương trình biến số phân ly).

1. Giải các phương trình vi phân sau: $x^2y' + 8xy = 10y^3$, $y(1) = -1/2$.

Câu 3a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

Ta có $y = 0$ là nghiệm kỳ dị của phương trình.
Khi $y \neq 0$ ta có:

$$x^2y' + 8xy = 10y^3 \Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{8}{x}\frac{1}{y^2} = \frac{10}{x^2}$$

Ta đặt $u = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow u' = \dfrac{-2y'}{y^3}$ thay vào phương trình trên ta có:

$$-\frac{u'}{2} + \frac{8}{x}u = \frac{10}{x^2} \Rightarrow u' - \frac{16}{x}u = -\frac{20}{x^2}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(x) = -\dfrac{16}{x}, q(x) = -\dfrac{20}{x^2}$. Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = e^{\int \frac{16}{x}dx}\left(\int -\frac{20}{x^2}e^{-\int \frac{16}{x}dx}dx + C\right) \\
&= e^{16\ln|x|}\left(\int -\frac{20}{x^2}e^{-16\ln|x|}dx + C\right) = x^{16}\left(\int -\frac{20}{x^{18}}\,dx + C\right) \\
&= x^{16}\left(\frac{20}{17x^{17}} + C\right) \\
&= \left(\frac{20}{17x} + Cx^{16}\right) \quad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Thay $u = \dfrac{1}{y^2}$ vào phương trình trên ta thu được:

$$\frac{1}{y^2} = \left(\frac{20}{17x} + Cx^{16}\right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Mà $y(1) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = \dfrac{48}{17}$ nên nghiệm của bài toán Cauchy là:

$$\frac{1}{y^2} = \left(\frac{20}{17x} + \frac{48}{17}x^{16}\right)$$

Chấm điểm: Phải xét đủ nghiệm kỳ dị của phương trình.

- Đặt $u = y^{-2}$, đưa được về PTVP tuyến tính (với $y \neq 0$) (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát, từ đó tìm được nghiệm riêng (0,5đ)

2. Giải phương trình vi phân $y' - 4y\tan 2x = 2y^2\sin^2 2x$.

Câu 3a - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20173

Ta có $y = 0$ là nghiệm kì dị của phương trình. Với $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ thì phương trình có nghĩa.
Khi $y \neq 0, 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ta có:

$$y' - 4y\tan 2x = 2y^2\sin^2 2x \Rightarrow \frac{y'}{y^2} - \frac{4\tan 2x}{y} = 2\sin^2 2x$$

Ta đặt $u = \dfrac{1}{y} \Rightarrow u' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Thay vào phương trình trên được:

$$-u' - 4\tan 2x\, u = 2\sin^2 2x \Rightarrow u' + 4u\tan 2x = -2\sin^2 2x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(x) = 4\tan 2x, q(x) = -2\sin^2 2x$.
Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int 4\tan 2x dx}\left(\int -2\sin^2 2x\, e^{\int 4\tan 2x dx}dx + C\right)$$
$$= e^{-\int 4\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx}\left(\int -2\sin^2 2x\, e^{\int 4\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx}dx + C\right) = e^{2\ln(\cos 2x)}\left(\int -2\sin^2 2x\, e^{-2\ln(\cos 2x)}dx + C\right)$$
$$= \cos^2 2x\left(\int -2\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}dx + C\right) = \cos^2 2x\left(\int -2\tan^2 2x dx + C\right)$$
$$= \cos^2 2x\left(-\int 2(\tan^2 2x + 1)dx + 2\int dx + C\right)$$
$$= \cos^2 2x\,(-\tan 2x + 2x + C)$$

Thay $u = \dfrac{1}{y}$ vào phương trình trên ta có:

$$\frac{1}{y} = \cos^2 2x\,(-\tan 2x + 2x + C) \Rightarrow y = \frac{1}{\cos^2 2x\,(-\tan 2x + 2x + C)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm: Phải xét đủ các nghiệm kỳ dị, nhiều bạn không xét đủ nghiệm kỳ dị nên không đặt đủ điều kiện để đưa về PTVP tuyến tính.

- Với $y \neq 0, 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, đặt $y^{-1} = u$, đưa được về PTVP tuyến tính (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát (0,5đ)

3. Giải phương trình vi phân $2xyy' - y^2 = x, y(1) = 2$

Câu 5 - Đề 1 cuối kỳ môn GT3 - Học kì 20152

Ta có:
$$2xyy' - y^2 = x \Rightarrow 2yy' - \frac{y^2}{x} = 1$$

Ta đặt $u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy'$. Phương trình trở thành:
$$u' - \frac{u}{x} = 1 \quad (x \neq 0)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $p(x) = -\dfrac{1}{x}, q(x) = 1$.
Nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right) = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int e^{\int -\frac{dx}{x}}dx + K\right)$$
$$= e^{\ln x}\left(\int e^{-\ln x}dx + K\right) = x\left(\int \frac{dx}{x} + K\right)$$
$$= x(\ln|x| + K) \quad (K \in \mathbb{R})$$

Thay $u = y^2$ vào phương trình trên ta có:
$$y^2 = x(\ln|x| + K)$$

Mà $y(1) = 2 \Rightarrow K = 4$ nên nghiệm riêng của phương trình trên là:
$$y^2 = x(\ln|x| + 4)$$

Chấm điểm:

- Đặt $u = y^2$, đưa được về PTVP tuyến tính (với $x \neq 0$) (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát, từ đó tìm được nghiệm riêng (0,5đ)

Bài tập tự làm:

4. Giải các phương trình vi phân sau: $xyy' + y^2 = \sin x, y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Câu 4a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

5. Giải phương trình vi phân $xy' + y = y^2 \ln x$.

Câu 4a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

6. Giải phương trình vi phân $y' + xy = \dfrac{x}{y}$.

Câu 4 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

7. Giải phương trình vi phân $2yy' = y^2 + x + 1$.

Câu 8 - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

2.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa: Phương trình có dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Cách nhận biết (Tiêu chuẩn kiểm tra): Giả sử $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên một miền đơn liên $\mathcal{D}$. Phương trình là toàn phần nếu và chỉ nếu:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Cách giải: Nếu phương trình là toàn phần, tích phân tổng quát của nó là $u(x,y) = C$. Hàm $u(x,y)$ có thể được tìm bằng một trong các cách sau:

Cách 1 :

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt = C$$

trong đó (x_0, y_0) là một điểm thuộc miền liên tục trong miền $\mathcal{D}$, **lưu ý** chọn điểm thuận tiện để tính toán nhất. Thường nên chọn $x_0 = y_0 = 0$, lưu ý nếu các hàm P, Q không xác định tại 0 thì phải chọn (x_0, y_0) khác.

Cách 2 (Tìm $u(x,y)$ trực tiếp):

(1) Từ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, lấy tích phân theo x: $u(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y)$, trong đó $g(y)$ là một hàm chỉ theo y (hằng số đối với x).

(2) Lấy đạo hàm $u(x,y)$ vừa tìm được theo y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + g'(y)$.

(3) Đồng nhất với $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + g'(y) = Q(x,y)$.

(4) Từ đó giải ra $g'(y)$, rồi tìm $g(y) = \int g'(y)dy$.

(5) Thay $g(y)$ vào biểu thức của $u(x,y)$ ở bước 1. Tích phân tổng quát là $u(x,y) = C$.

(Hoặc có thể bắt đầu bằng $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ rồi tích phân theo y trước).

1. Giải phương trình vi phân $2xe^{x^2}ydx + \left(e^{x^2} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right)dy = 0$.

Câu 5 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Ta đặt $P(x,y) = 2xe^{x^2}y, Q(x,y) = e^{x^2} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}$ có:

- P, Q là những hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^{x^2}$

Nên phương trình đã cho có dạng phương trình vi phân toàn phần.
Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$, ta có tích phân tổng quát là:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x 0dt + \int_0^y e^{x^2} + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt \\ &= \left(e^{x^2}t + \sqrt{t^2+1}\right)\Big|_0^y \\ &= e^{x^2}y + \sqrt{y^2+1} - 1 = C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Lưu ý: Ghi kết quả $e^{x^2}y + \sqrt{y^2+1} = C$ cũng không sao vì nó là hằng số bất định của tích phân.
Chấm điểm:

- Ghi rõ $P'_y = Q'_x$, từ đó chỉ ra PTVP toàn phần (0.5đ)
- Giải ra tích phân tổng quát (0,5đ)

2. Tìm m để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình với m vừa tìm được $(1 + y^2 \sin 2x)dx + my\cos^2 x dy = 0$.

Câu 4 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

Ta đặt $P(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x; Q(x,y) = my\cos^2 x$ có:

- P, Q là những hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \sin 2x$
- $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2my \sin x \cos x = -my \sin 2x$

Để phương trình $(1 + y^2 \sin 2x)dx + my\cos^2 x dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phân thì:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2y\sin 2x = -my\sin 2x \Rightarrow m = -2$$

Với $m = -2$, phương trình trở thành $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.
Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$ ta có tích phân tổng quát là:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = \int_0^x dt - \int_0^y 2t\cos^2 x dt \\ &= x - y^2\cos^2 x = C \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Chỉ ra điều kiện của PTVP toàn phần, sau đó tìm được m (0.5đ)
- Giải ra tích phân tổng quát (0,5đ)

Bài tập tự làm:

3. Giải các phương trình vi phân sau: $(y^2 - y\sin x)dx + (2xy + \cos x)dy = 0$ với $y(0) = 1$.

Câu 4a - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

4. Giải phương trình vi phân $(e^x \sin y - 2x)dx + (e^x \cos y + 1)dy = 0$.

Câu 4a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20163

5. Giải phương trình vi phân $(x^2 + \frac{2}{x} + 2y)dx + (2x + y^2 + \frac{1}{y})dy = 0$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

6. Giải phương trình vi phân $(2x + 3y)dx + (4y + 3x)dy = 0$.

Câu 5 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

2.1.7 Thừa số tích phân

Đặt vấn đề Xét phương trình vi phân có dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ mà không phải là phương trình vi phân toàn phần, tức là $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Mục tiêu là tìm một hàm số $\mu(x,y)$, gọi là **thừa số tích phân**, sao cho khi nhân vào phương trình ban đầu, ta được một phương trình vi phân toàn phần mới:

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Phương trình mới này phải thỏa mãn điều kiện toàn phần:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Cách tìm thừa số tích phân Không phải lúc nào cũng tìm được thừa số tích phân. Dưới đây là một số trường hợp đặc biệt thường gặp:

TH1. Nếu $\mu = \mu(x)$ (chỉ phụ thuộc vào x): Điều kiện để phương trình có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào x là biểu thức $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ phải là một hàm chỉ chứa x, ký hiệu là $\phi(x)$. Khi đó, thừa số tích phân được tính theo công thức:

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx}$$

TH2. Nếu $\mu = \mu(y)$ (chỉ phụ thuộc vào y): Điều kiện để phương trình có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào y là biểu thức $\frac{P'_y - Q'_x}{P}$ phải là một hàm chỉ chứa y, ký hiệu là $\psi(y)$. Khi đó, thừa số tích phân được tính theo công thức:

$$\mu(y) = e^{\int -\psi(y)dy}$$

TH3. Một số trường hợp khác (ít gặp hơn trong chương trình cơ bản): Đôi khi thừa số tích phân có thể phụ thuộc vào cả x và y dưới một dạng đặc biệt nào đó, ví dụ $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x/y)$, v.v. Việc tìm các dạng này thường phức tạp hơn:

1. Thừa số tích phân dạng $\mathbf{z = xy}$

- **Điều kiện:** Nếu biểu thức $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP}$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào $z = xy$, ký hiệu là $f(z)$ (với $yQ - xP \neq 0$).
- **Thừa số tích phân:** $\mu(z) = e^{\int f(z)dz}$.

Ví dụ minh họa: Xét phương trình: $(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0$.

Ta đặt $P(x,y) = y + xy^2; Q(x,y) = x - x^2y$ ta có:

$$\begin{cases} P, Q \text{ là những hàm xác định và liên tục trên } \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 2xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ta xét: $\phi(x+y) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = \dfrac{4xy}{-x^2y^2 - x^2y^2} = \dfrac{-2}{xy}$

Với $z = xy \Rightarrow \phi(z) = \dfrac{-2}{z} \Rightarrow$ Thừa số tích phân: $F(xy) = e^{\int \phi(z)dz} = e^{\int \frac{-2}{z}dz} = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{x^2y^2}$

2. Thừa số tích phân dạng z = x + y

- **Điều kiện:** Nếu biểu thức $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P}$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào $z = x + y$, ký hiệu là $g(z)$ (với $Q - P \neq 0$).
- **Thừa số tích phân:** $\mu(z) = e^{\int g(z)dz}$.

Ví dụ minh họa: Xét phương trình: $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$.

Ta đặt $P(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$; $Q(x,y) = y^2 + 2xy - x^2$ ta có:

$$\begin{cases} P, Q \text{ là những hàm xác định và liên tục trên } \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ta xét: $\phi(x+y) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} = \dfrac{4x - 4y}{2y^2 - 2x^2} = \dfrac{-2}{x+y}$

Với $z = x + y \Rightarrow \phi(z) = \dfrac{-2}{z} \Rightarrow$ Thừa số tích phân: $F(x+y) = e^{\int \phi(z)dz} = e^{\int \frac{-2}{z}dz} = \dfrac{1}{(x+y)^2}$

3. Thừa số tích phân dạng z = y/x

- **Điều kiện:** Nếu biểu thức $\dfrac{x(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})}{yQ + xP}$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào $z = y/x$, ký hiệu là $h(z)$ (với $yQ + xP \neq 0$).
- **Thừa số tích phân:** $\mu(z) = e^{\int h(z)dz}$.

Cách giải sau khi tìm được thừa số tích phân

B1. Tìm thừa số tích phân $\mu(x,y)$ theo một trong các trường hợp trên.

B2. Nhân cả hai vế của phương trình vi phân ban đầu với $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Đặt $P^*(x,y) = \mu(x,y)P(x,y)$ và $Q^*(x,y) = \mu(x,y)Q(x,y)$. Phương trình mới $P^*(x,y)dx + Q^*(x,y)dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.

B3. Giải phương trình toàn phần mới này bằng các phương pháp đã biết. Tích phân tổng quát sẽ là $u(x,y) = C$.

1. Tìm một hàm $F(x)$ để phương trình vi phân sau $F(x)[(6xe^y + 2y)dx + (2x^2e^y + x)dy] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. Hãy giải phương trình vi phân đó.

Câu 4 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20173

Xét phương trình vi phân: $(6xe^y + 2y)dx + (2x^2e^y + x)dy = 0$ với $Q = 6xe^y + 2y$; $P = 2x^2e^y + x$
Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 6xe^y + 2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = 4xe^y + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} \neq \frac{\partial P}{\partial x}$$

Ta xét:

$$\phi(x) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial x}}{P} = \frac{2xe^y + 1}{x(2xe^y + 1)} = \frac{1}{x}$$

Vì hàm $\phi(x)$ chỉ phụ thuộc vào x nên ta có: $F(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$ (thừa số tích phân)

Ta có phương trình: $(6x^2e^y + 2xy)dx + (2x^3e^y + x^2)dy = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial Q'}{\partial y} = \dfrac{\partial P'}{\partial x} = 6x^2e^y + 2x$

Chọn $(x_0, y_0) = (0, 0)$, ta có:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x Q'(t,0)dt + \int_0^y P'(x,t)dt = \int_0^x 6t^2 dt + \int_0^y (2x^3e^t + x^2)dt \\ &= 2x^3 + 2x^3e^y - 2x^3 + x^2y = x^2(2xe^y + y) = C \text{ (Với } C \text{ là hằng số)} \end{aligned}$$

Chấm điểm:
- Xác định P'_x, Q'_y sau đó tìm được thừa số tích phân. (0.5đ)
- Thay thừa số tích phân vào PTVP, tìm được tích phân tổng quát. (0,5đ)

2.1.8 PTVP đặc biệt

Trong lĩnh vực phương trình vi phân, **phương trình Clairaut** và **phương trình Lagrange** (còn gọi là phương trình d'Alembert) là hai dạng phương trình vi phân cấp một đặc biệt, không giải ra được theo đạo hàm y'.

Phương trình Clairaut Phương trình Clairaut là phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát:

$$y = xy' + f(y')$$

trong đó f là một hàm khả vi của y'. Ký hiệu $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$y = xp + f(p)$$

Cách giải:

1. **Đạo hàm hai vế theo** x: Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $y = xp + f(p)$ theo biến x, ta được:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

Thay $\dfrac{dy}{dx} = p$, ta có:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (x + f'(p))\frac{dp}{dx}$$

2. **Xét hai trường hợp**:

- **Trường hợp 1:** $\frac{dp}{dx} = 0$ Nếu $\frac{dp}{dx} = 0$, thì $p = C$ (với C là hằng số tùy ý). Thay $p = C$ trở lại vào phương trình Clairaut ban đầu, ta được nghiệm tổng quát (general solution) là một họ đường thẳng:

$$y = Cx + f(C)$$

- **Trường hợp 2:** $x + f'(p) = 0$ Từ $x + f'(p) = 0$, ta có $x = -f'(p)$. Thay $x = -f'(p)$ vào phương trình Clairaut ban đầu $y = xp + f(p)$, ta được:

$$y = (-f'(p))p + f(p)$$

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

là nghiệm kỳ dị của phương trình Clairaut, thường được cho dưới dạng tham số p. Nghiệm kỳ dị này là bao hình của họ nghiệm tổng quát.

Phương trình Lagrange Phương trình Lagrange (hay phương trình d'Alembert) là phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát:

$$y = xg(y') + f(y')$$

trong đó f và g là các hàm khả vi của y'. Ký hiệu $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$y = xg(p) + f(p)$$

Chú ý: Phương trình Clairaut là trường hợp đặc biệt của phương trình Lagrange khi $g(p) = p$.

Cách giải:

1. **Đạo hàm hai vế theo** x: Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $y = xg(p) + f(p)$ theo biến x:

$$\frac{dy}{dx} = g(p) + xg'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

Thay $\frac{dy}{dx} = p$:

$$p = g(p) + (xg'(p) + f'(p))\,\frac{dp}{dx}$$

$$(p - g(p))\,\frac{dx}{dp} = xg'(p) + f'(p) \quad \left(\text{nếu } \frac{dp}{dx} \neq 0\right)$$

2. **Giải phương trình tuyến tính theo** x: Nếu $p - g(p) \neq 0$, phương trình trên có thể viết lại thành:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x = \frac{f'(p)}{p - g(p)}$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với x (coi p là biến độc lập). Giải phương trình này ta tìm được $x = \phi(p, C)$, với C là hằng số. Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình Lagrange được cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = \phi(p, C)g(p) + f(p) \end{cases}$$

3. **Xét trường hợp** $p - g(p) = 0$: Nếu tồn tại các giá trị p_0 sao cho $p_0 - g(p_0) = 0$, thì p_0 là hằng số. Khi đó $y' = p_0$, suy ra $y = p_0x + C_1$. Thay vào phương trình Lagrange ban đầu:

$$p_0x + C_1 = xg(p_0) + f(p_0)$$

$$p_0x + C_1 = xp_0 + f(p_0)$$

$$C_1 = f(p_0)$$

Vậy, $y = p_0x + f(p_0)$ cũng là nghiệm. Các nghiệm này có thể là nghiệm kỳ dị nếu chúng không thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách chọn hằng số C. Những nghiệm này tạo thành các đường thẳng.

Cả hai loại phương trình này đều là những ví dụ quan trọng trong lý thuyết phương trình vi phân cấp một, minh họa sự tồn tại của cả nghiệm tổng quát và nghiệm kỳ dị.

Bài tập: Giải các phương trình Clairaut và Lagrange:

1) $y = xy' + y'$
2) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$
3) $y = (1 + y')x + y'^2$

1) Đặt $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y = xp + p = p(x + 1)$.
Lấy đạo hàm 2 vế theo x ta được:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dp}{dx}(x+1) + p\\ p &= p + \frac{dp}{dx}(x+1)\\ 0 &= \frac{dp}{dx}(x+1)\end{aligned}$$

Xét 2 trường hợp:
TH1: $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C$. Thay $p = C$ vào phương trình ban đầu, ta có nghiệm tổng quát:

$$y = Cx + C$$

TH2: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Thay $x = -1$ vào phương trình ban đầu:

$$\begin{aligned}y &= -y' + y'\\ \Rightarrow y &= 0\end{aligned}$$

Vậy nghiệm kỳ dị của phương trình này là $(-1; 0)$.

2) Đặt $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y = xp + \sqrt{1 + p^2}$.
Tương tự bài 1, ta có nghiệm tổng quát: $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$.
Nghiệm kỳ dị của bài toán này là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. **Lời giải chi tiết nhường lại cho các bạn.**

3) Nhận thấy đây là phương trình Lagrange ($g(y') = 1 + y', f(y') = y'^2$)
Đặt $p = y'$. Phương trình trở thành:

$$y = x(1 + p) + p^2$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1+p) + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}\\ p &= 1 + p + (x + 2p)\frac{dp}{dx}\\ -1 &= (x + 2p)\frac{dp}{dx}\end{aligned}$$

Nếu $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$, ta có: $-\dfrac{dx}{dp} = x + 2p \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + x = -2p$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một theo $x(p)$. Thừa số tích phân là $I = e^{\int 1dp} = e^p$. Nhân hai vế với e^p:

$$e^p \frac{dx}{dp} + xe^p = -2pe^p$$
$$\frac{d}{dp}(xe^p) = -2pe^p$$

Lấy tích phân hai vế theo p:

$$\begin{aligned} xe^p &= \int -2pe^p dp \\ &= -2\left(pe^p - \int e^p dp\right) \\ &= -2(pe^p - e^p) + C \\ \Rightarrow xe^p &= -2pe^p + 2e^p + C \\ \Leftrightarrow x &= -2p + 2 + Ce^{-p} \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình dưới dạng tham số là:

$$\begin{cases} x(p) = -2p + 2 + Ce^{-p} \\ y(p) = (-2p + 2 + Ce^{-p})(1+p) + p^2 \end{cases} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Phương trình này không có nghiệm kỳ dị.

Phương trình Riccati **Định nghĩa:** Phương trình vi phân có dạng:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

hoặc thường được viết là:

$$y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$$

được gọi là **phương trình Riccati**.

- Nếu $P(x) \equiv 0$ (hoặc $q(x) \equiv 0$ trong dạng thứ hai), phương trình trở thành phương trình vi phân tuyến tính cấp một.
- Nếu $R(x) \equiv 0$ (hoặc $r(x) \equiv 0$ trong dạng thứ hai), phương trình trở thành phương trình Bernoulli.

Cách giải: Phương trình Riccati tổng quát không có phương pháp giải sơ cấp nếu không biết trước một nghiệm riêng.

B1. Tìm một nghiệm riêng $y_1(x)$: Đây thường là bước khó nhất. Trong các bài toán học thuật, một nghiệm riêng $y_1(x)$ có thể được cho trước, hoặc có thể tìm được bằng cách "đoán"nghiệm dưới dạng đơn giản (ví dụ: $y_1 =$ hằng số, $y_1 = ax$, $y_1 = a/x$, v.v.) rồi thử vào phương trình.

B2. Đặt ẩn phụ: Sau khi đã có một nghiệm riêng $y_1(x)$, ta thực hiện phép đổi biến:

$$y = y_1 + u$$

hoặc một phép đổi biến phổ biến hơn để đưa về phương trình tuyến tính là:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

Trong đó $u = u(x)$ là một hàm mới cần tìm.

B3. Biến đổi phương trình: Lấy đạo hàm của y theo x từ phép đặt ẩn phụ và thay cả y và y' vào phương trình Riccati ban đầu.

- Nếu dùng $y = y_1 + u$: Thay vào, phương trình mới theo u sẽ là một phương trình Bernoulli.
- Nếu dùng $y = y_1 + \frac{1}{u}$: Lấy đạo hàm $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$. Thay y và y' vào phương trình Riccati ban đầu. Sau khi rút gọn (sử dụng việc y_1 là nghiệm), ta sẽ thu được một **phương trình vi phân tuyến tính cấp một** đối với $u(x)$. Cụ thể:
$$u' + [Q(x) + 2P(x)y_1(x)]u = -P(x)$$
(Trong trường hợp phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$, sau khi đặt $y = y_1 + 1/u$, phương trình tuyến tính theo u sẽ là: $u' - [p(x) - 2q(x)y_1(x)]u = q(x)$).

B4. Giải phương trình theo u: Giải phương trình vi phân (Bernoulli hoặc tuyến tính) vừa thu được để tìm hàm $u(x)$.

B5. Tìm lại nghiệm $y(x)$: Thay $u(x)$ trở lại vào phép đặt ẩn phụ ở Bước 2 để tìm nghiệm tổng quát $y(x)$ của phương trình Riccati ban đầu.

Lưu ý quan trọng: Nếu không tìm được hoặc không được cho trước một nghiệm riêng $y_1(x)$, việc giải phương trình Riccati tổng quát là rất khó khăn và thường không thể biểu diễn nghiệm bằng các hàm sơ cấp.

2.2 PTVP cấp 2

2.2.1 Đại cương về PTVP cấp 2

Định nghĩa Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'') = 0$ hoặc tường minh hơn là $y'' = f(x, y, y')$.

Bài toán Cauchy Là bài toán tìm nghiệm của PTVP cấp 2 thỏa mãn điều kiện ban đầu:
$$y(x_0) = y_0 \quad \text{và} \quad y'(x_0) = y_0'$$

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm Nếu hàm $f(x, y, y')$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trên một miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ chứa điểm (x_0, y_0, y_0'), thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất trong một lân cận của x_0.

Các loại nghiệm

- **Nghiệm tổng quát (NTQ):** Là họ nghiệm $y = g(x, C_1, C_2)$ phụ thuộc vào hai hằng số tùy ý, có thể thỏa mãn mọi điều kiện ban đầu.
- **Nghiệm riêng:** Là nghiệm nhận được từ NTQ với các giá trị hằng số C_1, C_2 cụ thể.
- **Nghiệm kì dị:** Là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.

2.2.2 Các phương trình khuyết có thể hạ cấp

1. **Phương trình khuyết y (dạng $F(x, y', y'') = 0$):** Đặt $u = y'$, phương trình trở thành PTVP cấp một $F(x, u, u') = 0$. Giải tìm u, sau đó tính $y = \int u(x)dx$.
2. **Phương trình khuyết x (dạng $F(y, y', y'') = 0$):** Đặt $u = y'$, ta có $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$. Phương trình trở thành PTVP cấp một $F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0$. Giải tìm $u(y)$, sau đó giải phương trình tách biến $y' = u(y)$.
3. **Phương trình khuyết y và y' (dạng $F(x, y'') = 0$):**

   Nếu từ phương trình $F(x, y'') = 0$, ta giải được $y'' = g(x)$, thì ta chỉ cần lấy tích phân hai lần liên tiếp để tìm nghiệm tổng quát:

$$y' = \int g(x)dx + C_1$$
$$y = \int \left(\int g(x)dx + C_1 \right) dx + C_2$$

Nếu từ phương trình $F(x, y'') = 0$, ta giải được $x = f(y'')$, ta sẽ tham số hóa nghiệm như sau:

- Đặt $t = y''$, suy ra $x = f(t)$.
- Để tìm y', ta có $dy' = y''dx = t \cdot f'(t)dt$. Lấy nguyên hàm hai vế, ta tính được $y' = \int tf'(t)dt + C_1 = f_1(t, C_1)$.
- Để tìm y, ta biến đổi $dy = y'dx = f_1(t, C_1)f'(t)dt$. Lấy nguyên hàm hai vế, ta tính được $y = \int f_1(t, C_1)f'(t)dt + C_2 = f_2(t, C_1, C_2)$.
- Nghiệm tổng quát được cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = f_2(t, C_1, C_2) \end{cases}$.

Bài tập **1.** Giải phương trình vi phân $xy'' + 6y' = 0$.

Câu 5 - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta đặt $y' = p \Rightarrow y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Thay vào phương trình của đề ta có:

$$x\frac{dp}{dx} + 6p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -6\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -6\int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \ln|p| = -6\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow p = \frac{C}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{C}{x^6}$$
$$\Rightarrow y = \int \frac{Cdx}{x^6} = -\frac{C}{5x^5} + C_2 = \frac{C_1}{x^5} + C_2 \quad (C_1 = -\frac{C}{5}; C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2.2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Định nghĩa Phương trình có dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

- Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình được gọi là **thuần nhất**.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$, phương trình được gọi là **không thuần nhất**.

Cấu trúc nghiệm

- **Phương trình thuần nhất:** Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính (tức là $\dfrac{y_1}{y_2} \neq$ hằng số), thì nghiệm tổng quát có dạng $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$. Cặp nghiệm (y_1, y_2) được gọi là một **hệ nghiệm cơ bản**.
- **Phương trình không thuần nhất:** Nghiệm tổng quát có dạng $y = \overline{y} + Y$, trong đó $\overline{y}$ là NTQ của phương trình thuần nhất tương ứng, và Y là một nghiệm riêng bất kỳ của phương trình không thuần nhất.

Các phương pháp giải **Các bước:**

B1. Tìm hệ nghiệm cơ bản cho phương trình thuần nhất:

- Tìm một nghiệm riêng $y_1 \neq 0$,
- Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với nó có thể được tìm bằng cách đặt $y_2 = y_1 \cdot u$. Ta có **công thức Liouville**: $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$.

- Nếu phương trình có hệ số hằng, giải **phương trình đặc trưng** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$:
  - Nếu có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2: $\overline{y} = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.
  - Nếu có nghiệm kép λ_0: $\overline{y} = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_0 x}$.
  - Nếu có cặp nghiệm phức $\alpha \pm i\beta$: $\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

B2. Tìm một nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất:

- **Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:** Tìm nghiệm riêng dưới dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, trong đó $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$.
- **Phương pháp hệ số bất định (chỉ cho hệ số hằng):**
  - Nếu $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$: Tìm nghiệm riêng dạng $Y = x^s e^{\alpha x}Q_n(x)$, với $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_n(x)$, và s là số lần α là nghiệm của phương trình đặc trưng.
  - Nếu $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$: Tìm nghiệm riêng dạng $Y = x^s e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$, với $l = \max(m, n)$, và s là số lần $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng.

B3. Kết luận nghiệm tổng quát: $y = \overline{y} + Y$.

2.2.4 Phương trình Euler

Định nghĩa Là phương trình có dạng $x^2y'' + axy' + by = 0$, với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số.

Cách giải

B1. Đặt $|x| = e^t$, hay $t = \ln|x|$. Khi đó, ta có:

- $y_x' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}y_t'$.
- $y_{xx}'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}y_t'\right) = -\dfrac{1}{x^2}y_t' + \dfrac{1}{x}\dfrac{d(y_t')}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}y_t' + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{d(y_t')}{dt}\dfrac{dt}{dx}\right)$

$$= -\frac{1}{x^2}y_t' + \frac{1}{x^2}y_{tt}'' = \frac{1}{x^2}(y_{tt}'' - y_t').$$

B2. Phép đổi biến này sẽ đưa phương trình Euler về một phương trình tuyến tính cấp hai với hệ số hằng theo biến t: $y_{tt}'' + (a-1)y_t' + by = 0$.

B3. Giải phương trình hệ số hằng này để tìm $y(t)$.

B4. Thay $t = \ln|x|$ trở lại để có nghiệm $y(x)$.

Bài tập:

PTVP cấp 2 thuần nhất:

1. Giải phương trình vi phân $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0$.

Câu 10 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có:

$$(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{2x+3}{x+1}y' + \frac{x+2}{x+1}y = 0 \qquad (2)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với $p(x) = -\frac{2x+3}{x+1}, q(x) = \frac{x+2}{x+1}$.
Rất dễ dàng ta có thể thấy $y_1 = e^x$ là 1 nghiệm riêng của phương trình trên, áp dụng công thức Liouville ta có:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int \frac{2x+3}{x+1}dx} dx \\ &= e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int 2 + \frac{1}{x+1}dx} dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x}(x+1)dx \\ &= e^x \int (x+1)dx = e^x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2) là $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^x + C_2e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Chấm điểm:
- Dự đoán e^x là một nghiệm riêng, dựa vào tổng hệ số của PT bằng 0 (0.5đ)
- Giải PTVP tìm được nghiệm tổng quát, sau đó suy ra nghiệm riêng (0,5đ)

2. Giải phương trình vi phân $(x^2+2x)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$, biết $y_1 = x+1$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Câu 6 - Đề 3 GT3 HK20152

Ta có:

$$\begin{aligned} &(x^2+2x)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0 \\ &\Rightarrow y'' - \frac{2(x+1)}{x^2+2x}y' + \frac{2}{x^2+2x} = 0 \end{aligned}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có 1 nghiệm là $y_1 = x+1$, áp dụng công thức Liouville ta có:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \cdot u = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x}dx} dx = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{\ln(x^2+2x)dx} \\ &= (x+1) \int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = (x+1) \int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = (x+1)\left(x + \frac{1}{x+1}\right) = x^2+x+1 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1(x+1) + C_2(x^2+x+1)$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Chấm điểm:
- Biến đổi về PTVP thuần nhất, áp dụng CT Liouville (0.5đ)
- Tìm được y_2, suy ra nghiệm tổng quát (0,5đ)

3. Sử dụng phép đổi biến $x = \cos t, t \in (0, \pi)$, giải phương trình vi phân $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$.

Câu 9 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

Đặt $x = \cos t$. Trong đó: $\begin{cases} x \in (-1;1) \\ t \in (0;\pi) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{-y'_t}{\sin t};\ y''(x) = \frac{-\cos t}{\sin^3 t}y'_t + \frac{1}{\sin^2 t}y''_{tt}$

Thay vào PTVP, ta có:

$$\sin^2 t \left(\frac{-\cos t}{\sin^3 t}y'_t + \frac{1}{\sin^2 t}y''_{tt}\right) - \cos t \frac{-y'_t}{\sin t} + 4y = 0 \Leftrightarrow y''_{tt} + 4y = 0$$

.
Đây là PTVP cấp 2 với hệ số hằng, xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) \Rightarrow y(x) = C_1(2x^2 - 1) + 2C_2 \cdot x\sqrt{1 - x^2} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:
- Viết ra $y'(x), y''(x)$ rồi đưa về PTVP cấp 2 hệ số hằng (0.5đ)
- Tìm được nghiệm tổng quát theo x (0,5đ)

Lưu ý: Đây là phương trình Chebysev, đối với dạng phương trình này, chuyển đến Mục 2.2.5.

PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất, hệ số hằng:

4. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' - 4y' + 3y = (16x^7 + 56x^6 + 2)e^{3x}$.

Câu 1c - Đề 1 cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20232

Ta xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 3y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất trên là: $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.
Xét phương trình không thuần nhất $y'' - 4y' + 3y = (16x^7 + 56x^6 + 2)e^{3x}$.
Cách 1:
Sử dung phương pháp biến thiên hằng số Lagrange có:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + 3C_2'(x)e^{3x} = (16x^7 + 56x^6 + 2)e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -(8x^7 + 28x^6 + 1)e^{2x} \\ C_2'(x) = 8x^7 + 28x^6 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\left(\dfrac{1}{2} + 4x^7\right)e^{2x} \\ C_2(x) = x^8 + 4x^7 + x \end{cases} \text{ có thể sử dụng công thức } \int e^{ax}x^n dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!a^{k+1}}x^{n-k}$$

Nghiệm riêng của phương trình là $y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{3x} = \left(x^8 + x - \dfrac{1}{2}\right)e^{3x}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{3x} + \left(x^8 + x - \dfrac{1}{2}\right)e^{3x}$

Hay $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \left(x^8 + x\right)e^{3x}$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

5. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' + 9y = 52xe^{2x} + 29e^{2x} + 3x + 1$.

Câu 4b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

Xét phương trình thuần nhất $y'' + 9y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 3i \\ k = -3i \end{cases}$$

Nên nghiệm của phương thuần nhất là $\overline{y} = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Xét phương trình không thuần nhất

$$y'' + 9y = 52xe^{2x} + 29e^{2x} \tag{1}$$

Vì $k = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình là:

$$Y_1 = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow Y_1' = (2Ax + A + 2B)e^{2x} \Rightarrow Y_1'' = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$$

Thay vào (1) ta có:

$$\begin{aligned}(4Ax+4A+4B)e^{2x}+9(Ax+B)e^{2x} &= (52x+29)e^{2x}\\ \Rightarrow (13Ax+4A+13B)e^{2x} &= (52x+29)e^{2x}\\ \Rightarrow A=4, B=1 \Rightarrow Y_1=(4x+1)e^{2x}\end{aligned}$$

Xét phương trình không thuần nhất:

$$y''+9y=3x+1 \tag{2}$$

Vì 0 không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình là:

$$Y_2=Cx+D \Rightarrow Y_2'=C \Rightarrow Y_2''=0$$

Thay vào (2) ta có:

$$9(Cx+D)=3x+1 \Rightarrow C=\frac{1}{3}, D=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow Y_2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$$

Theo nguyên lí chồng nghiệm ta có nghiệm riêng của phương trình $y''+9y=52xe^{2x}+29e^{2x}+3x+1$ là:

$$Y=Y_1+Y_2=(4x+1)e^{2x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y=\overline{y}+Y=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)+(4x+1)e^{2x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$$

Chấm điểm:
- Đưa ra phương trình đặc trưng, từ đó tìm được nghiệm tổng quát của PT thuần nhất (0.5đ)
- Tìm được nghiệm riêng, suy ra được nghiệm tổng quát của phương trình (0,5đ)

6. Giải phương trình vi phân sau: $(x^2+4)y''+2xy'-\dfrac{y}{x^2+4}=\dfrac{2023x}{(x^2+4)^2}$.

Câu 5b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Ta đặt $x=2\tan t \Rightarrow t=\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ hay khi đó ta có:
- $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot y'_t=\dfrac{2}{4+x^2}\cdot y'_t$
- $y''_{xx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{4+x^2}\cdot y'_t\right)=\dfrac{4}{(4+x^2)^2}\cdot y''_{tt}-\dfrac{4x}{(4+x^2)^2}\cdot y'_t$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$(x^2+4)\left(\frac{4}{(4+x^2)^2}\cdot y''_{tt}-\frac{4x}{(4+x^2)^2}\cdot y'_t\right)+2x\cdot\frac{2}{4+x^2}\cdot y'_t-\frac{y}{x^2+4}=\frac{2023x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 4y''_{tt}-y=\frac{2023x}{x^2+4}\Rightarrow 4y''_{tt}-y=\frac{2023\cdot 2\tan t}{4\tan^2 t+4}\Rightarrow 4y''_{tt}-y=\frac{2023}{4}\sin 2t$$

Đây là phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
Xét phương trình thuần nhất $4y''_{tt}-y=0$ có phương trình đặc trưng là:

$$4k^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\ k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $\overline{y}=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{-\frac{1}{2}t}\quad(C_1,C_2\in\mathbb{R})$

Xét phương trình không thuần nhất $4y''_{tt} - y = \dfrac{2023}{4}\sin 2t$
Vì $k = 2i, k = -2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của nó có dạng:

$$Y = A\cos 2t + B\sin 2t \Rightarrow Y' = 2B\cos 2t - 2A\sin 2t \Rightarrow Y'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

Thay vào phương trình trên ta có:

$$\begin{aligned}
&4(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) - A\cos 2t - B\sin 2t = \frac{2023}{4}\sin 2t\\
\Rightarrow &-17A\cos 2t - 17B\sin 2t = \frac{2023}{4}\sin 2t\\
\Rightarrow &A = 0, B = -\frac{119}{4} \Rightarrow Y = -\frac{119}{4}\sin 2t
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{119}{4}\sin 2t$.
Thay $t = \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ vào biểu thức trên ta thu được:

$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{119}{4}\sin 2\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&= C_1 e^{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{119x}{x^2+4}
\end{aligned}$$

Chấm điểm:
- Đưa ra phương trình đặc trưng, từ đó tìm được nghiệm tổng quát của PT thuần nhất (0.5đ)
- Tìm được nghiệm riêng, suy ra được nghiệm tổng quát của phương trình (0,5đ)

7. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' + 2y' + y = 2(x+1)e^x + \dfrac{e^{-x}}{2x}$.

Câu 4a - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

Ta xét phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \quad \text{(nghiệm kép)}$$

Nên nghiệm của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$
Xét phương trình không thuần nhất $y'' + 2y' + y = 2(x+1)e^x$.
Vì 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y_1 = (Ax+B)e^x \Rightarrow Y_1' = (Ax+A+B)e^x \Rightarrow Y_1'' = (Ax+2A+B)e^x$$

Thay vào phương trình trên ta có:

$$\begin{aligned}
&(Ax+2A+B)e^x + 2(Ax+A+B)e^x + (Ax+B)e^x = 2(x+1)e^x\\
\Rightarrow &(4Ax+4A+4B)e^x = 2(x+1)e^x\\
\Rightarrow &A = \frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2}xe^x
\end{aligned}$$

Xét phương trình không thuần nhất $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{2x}$. Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Largrange ta có:

$$\begin{cases}
C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0\\
C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{2x}
\end{cases}$$

Đây là hệ Cramer có:

$$D = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \dfrac{e^{-x}}{2x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{2} \qquad D_{C_2.} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^{-x}}{2x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{2x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{1}{2} \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{x}{2} \\ C_2(x) = \dfrac{\ln|x|}{2} \end{cases}$$

Nên nghiệm riêng của phương trình trên là $Y_2 = -\dfrac{x}{2}e^{-x} + \dfrac{x\ln|x|}{2}e^{-x}$

Theo nguyên lí chồng nghiệm ta có nghiệm riêng của phương trình $y'' + 2y' + y = 2(x+1)e^x + \dfrac{e^{-x}}{2x}$ là:

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{2}xe^x + -\frac{x}{2}e^{-x} + \frac{x\ln|x|}{2}e^{-x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x + -\frac{x}{2}e^{-x} + \frac{x\ln|x|}{2}e^{-x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:

- Đưa ra phương trình đặc trưng, từ đó tìm được nghiệm tổng quát của PT thuần nhất (0.5đ)
- Tìm được nghiệm riêng của PT $y'' + 2y' + y = 2(x+1)e^x$ (0,5đ)
- Tìm được nghiệm riêng của PT $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{2x}$, sau đó kết luận nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu (0,5đ)

8. Cho phương trình $y'' + m^2y = 4\cos 3x$; với m là hằng số thực khác 0.

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Giải và biện luận phương trình theo m.

Câu 4 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

a) Với $m = 2$ phương trình trở thành:

$$y'' + 4y = 4\cos 3x$$

Xét phương trình thuần nhất $y'' + 4y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2i \\ k = -2i \end{cases}$$

Nên nghiệm của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$
Xét phương trình không thuần nhất $y'' + 4y = 4\cos 3x$.
Vì $k = 3i, k = -3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = A\cos 3x + B\sin 3x \Rightarrow Y' = 3B\cos 3x - 3A\sin 3x \Rightarrow Y'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Thay vào phương trình trên ta thu được:

$$\begin{aligned}&-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 4(A\cos 3x + B\sin 3x) = 4\cos 3x\\ \Rightarrow&-5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 4\cos 3x\\ \Rightarrow& A = -\frac{4}{5}, B = 0 \Rightarrow Y = -\frac{4}{5}\cos 3x\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$y = \overline{y} + Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{4}{5}\cos 3x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:

- Đưa ra phương trình đặc trưng, từ đó tìm được nghiệm tổng quát của PT thuần nhất (0.5đ)
- Tìm được nghiệm riêng của PT, từ đó tìm được nghiệm tổng quát (0,5đ)

b) Với $m \neq 0, m \neq 3$ ta có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + m^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = m\,i \\ k = -m\,i \end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $y = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx)$
Vì $k = 3i, k = -3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = A\cos 3x + B\sin 3x \Rightarrow Y' = 3B\cos 3x - 3A\sin 3x \Rightarrow Y'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$\begin{aligned}&-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + m^2(A\cos 3x + B\sin 3x) = 4\cos 3x\\ \Rightarrow&(m^2-9)A\cos 3x + (m^2-9)B\sin 3x = 4\cos 3x\\ \Rightarrow& A = \frac{4}{m^2-9}, B = 0 \Rightarrow Y = \frac{4}{m^2-9}\cos 3x\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx) + \frac{4}{m^2-9}\cos 3x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$
Với $m = 3, m = -3$ ta có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 3i \\ k = -3i \end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $\overline{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$
Vì $k = 3i, k = -3i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x \Rightarrow Y' = (A + 3Bx)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x$$

$$\Rightarrow Y'' = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$\begin{aligned}&(-9Ax + 6B)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x + 9(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x) = 4\cos 3x\\ \Rightarrow&6B\cos 3x - 6A\sin 3x = 4\cos 3x\\ \Rightarrow& A = 0, B = \frac{2}{3} \Rightarrow Y = \frac{2}{3}x\sin 3x\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{2}{3}x\sin 3x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Chấm điểm:

- Với $m \neq 0$, chỉ ra phương trình đặc trưng, suy ra nghiệm tổng quát của PT thuần nhất (0.25đ)
- Với $m \neq \pm 3$, tìm được nghiệm riêng và nghiệm tổng quát (0.25đ)
- Với $m = \pm 3$, tìm được nghiệm riêng của PT, từ đó tìm được nghiệm tổng quát (0,5đ)

9. Cho $y(x)$ là một nghiệm của phương trình $y'' + my' + y = 0, m \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của tham số m để $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Câu 10 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

Ta có $y'' + my' + y = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng nên nghiệm của nó có dạng:

- $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ khi phương trình đặc trưng có $\Delta > 0$.
- $y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ khi phương trình đặc trưng có $\Delta = 0$.
- $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ khi phương trình đặc trưng có $\Delta < 0$.

Vậy để $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$ thì phần thực của tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng phải là số âm.

Ta có phương trình đặc trưng của $y'' + my' + y = 0$ lần lượt là:

$$k^2 + mk + 1 = 0$$

Ta có biệt thức $\Delta = m^2 - 4$

TH1: Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt ($\Delta > 0$)

Khi $\Delta > 0$, tức là $m^2 - 4 > 0$, suy ra $m < -2$ hoặc $m > 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Để $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, cả hai nghiệm k_1 và k_2 phải là số âm.

Theo định lý Viète:

- $k_1 + k_2 = -m$
- $k_1 k_2 = 1$

Vì $k_1 k_2 = 1 > 0$, hai nghiệm k_1 và k_2 phải cùng dấu.

Để $k_1, k_2 < 0$, ta cần $k_1 + k_2 < 0$, tức là $-m < 0 \Rightarrow m > 0$.

Kết hợp với điều kiện $m < -2$ hoặc $m > 2$, ta được $\mathbf{m > 2}$.

TH2: Phương trình có nghiệm kép ($\Delta = 0$)

Khi $\Delta = 0$, tức là $m^2 - 4 = 0$, suy ra $m = 2$ hoặc $m = -2$.

- Với $\mathbf{m = 2}$, phương trình đặc trưng là $k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1$.
  Nghiệm tổng quát là $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.
  Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} (C_1 + C_2 x)e^{-x} = 0$.
  Vậy $m = 2$ thỏa mãn.
- Với $\mathbf{m = -2}$, phương trình đặc trưng là $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$.
  Nghiệm tổng quát là $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{x}$.
  Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} (C_1 + C_2 x)e^{x} \neq 0$.
  Vậy $m = -2$ không thỏa mãn.

TH3: Phương trình có hai nghiệm phức liên hợp ($\Delta < 0$)

Khi $\Delta < 0$, tức là $m^2 - 4 < 0$, suy ra $-2 < m < 2$.

Hai nghiệm phức liên hợp có dạng $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, trong đó $\alpha = \frac{-m}{2}$ và $\beta = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.

Để $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, phần thực của nghiệm α phải âm.

Tức là $\frac{-m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0$.

Kết hợp với điều kiện $-2 < m < 2$, ta được $\mathbf{0 < m < 2}$.

—

Kết luận

Tổng hợp các điều kiện từ ba trường hợp trên, để $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, ta có:

- $m > 2$ (từ TH1)
- $m = 2$ (từ TH2)
- $0 < m < 2$ (từ TH3)

Kết hợp lại, điều kiện cuối cùng là $\mathbf{m > 0}$.

Chấm điểm:

- Kết luận được phần thực của tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng phải là số âm.(0.5đ)
- Đưa ra điều kiện tổng quát $m > 0$ (0,5đ)

10. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' - y = -|x| + 2, x \in \mathbb{R}$ sao cho đồ thị của nó có tiệm cận xiên phải và tiệm cận xiên trái.

Câu 9 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Với $x < 0$ phương trình trở thành:

$$y'' - y = x + 2$$

Xét phương trình thuần nhất $y'' - y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$
Xét phương trình không thuần nhất $y'' - y = x + 2$.
Vì $k = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = Ax + B \Rightarrow Y' = A \Rightarrow Y'' = 0$$

Thay vào phương trình trên ta có:

$$0 - Ax - B = x + 2 \Rightarrow A = -1, B = -2 \Rightarrow Y = -x - 2$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1e^{-x} + C_2e^x - x - 2$
Để y có tiệm cận xiên trái $\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y = C_2e^x - x - 2$
Với $x \geq 0$ phương trình trở thành:

$$y'' - y = -x + 2$$

Xét phương trình thuần nhất $y'' - y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $\overline{y} = C_3e^{-x} + C_4e^x \quad (C_3, C_4 \in \mathbb{R})$
Xét phương trình không thuần nhất $y'' - y = -x + 2$.
Vì $k = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = Ax + B \Rightarrow Y' = A \Rightarrow Y'' = 0$$

Thay vào phương trình trên ta có:

$$0 - Ax - B = -x + 2 \Rightarrow A = 1, B = -2 \Rightarrow Y = x - 2$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_3e^{-x} + C_4e^x + x - 2$
Để y có tiệm cận xiên phải $\Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow y = C_3e^{-x} + x - 2$
Vì y liên tục tại 0.$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^+} = f(0) \Rightarrow C_2 - 2 = C_3 - 2 \Rightarrow C_2 = C_3$
Vì y khả vi tại 0.$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} y' = \lim\limits_{x \to 0^+} y' \Rightarrow C_2 - 1 = -C_3 + 1$.
Vậy $C_2 = C_3 = 1 \Rightarrow y = \begin{cases} e^x - x - 2 & \text{với } x < 0. \\ e^{-x} + x + 2 & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$
Kiểm tra lại ta thấy y khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có tiệm cận xiên trái là $y = -x - 2$ và tiệm cân xiên phải là $y = x + 2$.
Chấm điểm:

- Ghi ra công thức nghiệm tổng quát của 2 trường hợp của x. Chỉ ra điều kiện để có tiệm cận xiên (0.5đ)
- Đưa ra nghiệm thỏa mãn tiệm cận xiên (0,5đ)

Phương trình Euler:

11. Giải phương trình vi phân $y'' = \dfrac{6y+1}{x^2}$.

Câu 9 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

Ta có:

$$y'' = \frac{6y+1}{x^2} \Rightarrow x^2y'' - 6y = 1$$

Ta đặt $|x| = e^t$ hay $t = \ln|x|$ khi đó ta có:

- $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}y'_t$.
- $y''_{xx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}y'_t\right) = -\dfrac{1}{x^2}y'_t + \dfrac{1}{x}\dfrac{d(y'_t)}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}y'_t + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{d(y'_t)}{dt}\dfrac{dt}{dx}\right)$
  $= -\dfrac{1}{x^2}y'_t + \dfrac{1}{x^2}y''_{tt} = \dfrac{1}{x^2}(y''_{tt} - y'_t)$.

Thay vào phương trình trên ta có:

$$y''_{tt} - y'_t - 6y = 1$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất.
Xét phương trình thuần nhất $y''_{tt} - y'_t - 6y = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Nên nghiệm thuần nhất của phương trình là $\overline{y} = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$.
Xét phương trình không thuần nhất $y''_{tt} - y'_t - 6y = 1$.
Vì $k = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$Y = Ax + B \Rightarrow Y'_t = A \Rightarrow Y''_{tt} = 0$$

Thay vào phương trình trên ta có:

$$-A - 6Ax - 6B = 1 \Rightarrow A = 0, B = -\frac{1}{6} \Rightarrow Y = -\frac{1}{6}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \overline{y} + Y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} - \dfrac{1}{6}$.
Thay $t = \ln|x|$ vào biểu thức trên ta thu được:

$$y = C_1|x|^{-2} + C_2|x|^3 - \frac{1}{6}$$

Chấm điểm:

- Đặt ẩn $|x| = e^t$, ghi rõ các đạo hàm, đưa về PTVP cấp 2 hệ số hằng. (0.5đ)
- Giải ra nghiệm tổng quát (0,5đ)

Tư duy đi:

12. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình vi phân $y'' + y = \cos^{2017}x\sin x$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Câu 7 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - KSTN K61C - HK20162

Ta xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.
Xét phương trình không thuần nhất $y'' + y = \cos^{2017}x\sin x$ sử dụng phương pháp biến thiên hằng số

Largrange ta có:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \cos^{2017} x \sin x \end{cases}$$

Đây là hệ Cramer có:

$$D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos^{2017} x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = -\cos^{2017} x \sin^2 x \quad D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos^{2017} x \sin x \end{vmatrix} = \cos^{2018} x \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\cos^{2017} x \sin^2 x \\ C_2'(x) = \cos^{2018} x \sin x \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int\limits_0^x -\cos^{2017} t \sin^2 t \, dt \\ C_2(x) = \int\limits_0^x \cos^{2018} t \sin t \, dt \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là : $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ với $C_1(x), C_2(x)$ vừa tìm được ở trên.
Ta có:

$$C_1(x+\pi) - C_1(x-\pi) = -\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \cos^{2017} t \sin^2 t \, dt = -\int\limits_{x}^{x+\pi} \cos^{2017} t \sin^2 t \, dt - \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2017} t \sin^2 t \, dt$$

Đặt $u = t - \pi \Rightarrow du = dt$ phương trình trên trở thành:

$$C_1(x+\pi) - C_1(x-\pi) = -\int_{x-\pi}^{x} \cos^{2017}(u-\pi)\sin^2(u-\pi) du - \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2017} t \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_{x-\pi}^{x} \cos^{2017}(u)\sin^2(u) du - \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2017} t \sin^2 t \, dt = 0$$

$$\Rightarrow C_1(x+\pi) = C_1(x-\pi)$$
$$\Rightarrow C_1(x) = C_1(x+2\pi)$$

Ta có:

$$C_2(x+\pi) - C_2(x-\pi) = \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \cos^{2018} t \sin t \, dt = \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2018} t \sin t \, dt + \int\limits_{x}^{x+\pi} \cos^{2018} t \sin t \, dt$$

Đặt $u = t - \pi \Rightarrow du = dt$ phương trình trên trở thành:

$$C_2(x+\pi) - C_2(x-\pi) = \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2018} t \sin t \, dt + \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2018}(u+\pi)\sin(u+\pi) \, du$$

$$= \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2018} t \sin t \, dt - \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos^{2018}(u)\sin(u) \, du = 0$$

$$\Rightarrow C_2(x+\pi) = C_2(x-\pi)$$
$$\Rightarrow C_2(x) = C_2(x+2\pi)$$

Nên y^* tuần hoàn với chu kì 2π.
Ta cũng có $\overline{y}$ tuần hoàn với chu kì 2π.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình $y = \overline{y} + y^*$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$

13. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình vi phân $y'' + y = \sin^{2016} x$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Câu 9 - Đề 3 GT3 HK20152

Cách 1:
Ta xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Xét phương trình không thuần nhất $y'' + y = \sin^{2016} x$ sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange
Ta có:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin^{2016} x \end{cases}$$

Đây là hệ Cramer có:

$$D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \quad D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin^{2016} x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin^{2017} x \quad D_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin^{2016} x \end{vmatrix} = \sin^{2016} x \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\sin^{2017} x \\ C_2'(x) = \sin^{2016} x \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int\limits_0^x -\sin^{2017} t \, dt \\ C_2(x) = \int\limits_0^x \sin^{2016} t \cos t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int\limits_0^x (1 - \cos^2 t)^{1008} \, d(\cos t) \\ C_2(x) = \dfrac{\sin^{2017} x}{2017} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{1008} \binom{1008}{n} \cdot (-1)^{1008-n} \cdot \cos^{2n}(t) \, d(\cos t) \\ C_2(x) = \dfrac{\sin^{2017} x}{2017} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{1008} \binom{1008}{n} (-1)^{1008-n} \dfrac{\cos^{2n+1} t}{2n+1} \Bigg|_0^x \\ C_2(x) = \dfrac{\sin^{2017} x}{2017} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{1008} \binom{1008}{n} (-1)^{1008-n} \dfrac{\cos^{2n+1} x}{2n+1} - \sum\limits_{n=0}^{1008} \binom{1008}{n} \dfrac{(-1)^{1008-n}}{2n+1} \\ C_2(x) = \dfrac{\sin^{2017} x}{2017} \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ với $C_1(x), C_2(x)$ vừa tìm được ở bên trên.
Nghiệm tổng quát của phương trình là : $y = \overline{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ trong đó $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ và $C_1(x), C_2(x)$ vừa tìm được ở trên.
Rất dễ dàng để có thể thấy y tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Cách 2:
Ta xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Xét phương trình không thuần nhất $y'' + y = \sin^{2016} x$ sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Largrange ta có:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin^{2016} x \end{cases}$$

Đây là hệ Cramer có:

$$D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin^{2016} x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin^{2016} x \sin x \quad D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin^{2016} x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \sin^{2016} x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\sin^{2017} x \\ C_2'(x) = \cos x \cdot \sin^{2016} x \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int\limits_0^x -\sin^{2017} t\, dt \\ C_2(x) = \int\limits_0^x \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là : $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ với $C_1(x), C_2(x)$ vừa tìm được ở trên.
Ta có:

$$C_1(x+\pi) - C_1(x-\pi) = -\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \sin^{2017} t\, dt = -\int\limits_{x}^{x+\pi} \sin^{2017} t\, dt - \int\limits_{x-\pi}^{x} \sin^{2017} t\, dt$$

Đặt $u = t - \pi \Rightarrow du = dt$ phương trình trên trở thành:

$$\begin{aligned} C_1(x+\pi) - C_1(x-\pi) &= -\int_{x-\pi}^{x} \sin^{2017}(u-\pi) du - \int\limits_{x-\pi}^{x} \sin^{2017} t\, dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x} (-\sin u)^{2017} du - \int\limits_{x-\pi}^{x} \sin^{2017} t\, dt \\ &= -\int_{x-\pi}^{x} \sin^{2017} u\, du - \int_{x-\pi}^{x} \sin^{2017} t\, dt = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1(x+\pi) = C_1(x-\pi)$$
$$\Rightarrow C_1(x) = C_1(x+2\pi)$$

Ta có:

$$C_2(x+\pi) - C_2(x-\pi) = \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt = \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt + \int\limits_{x}^{x+\pi} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt$$

Đặt $u = t - \pi \Rightarrow du = dt$ phương trình trên trở thành:

$$\begin{aligned} C_2(x+\pi) - C_2(x-\pi) &= \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt + \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos(u+\pi) \cdot \sin^{2016}(u+\pi)\, du \\ &= \int\limits_{x-\pi}^{x} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt + \int_{x-\pi}^{x} (-\cos u)(-\sin u)^{2016} du \\ &= \int_{x-\pi}^{x} \cos t \cdot \sin^{2016} t\, dt - \int_{x-\pi}^{x} \cos u \cdot \sin^{2016} u\, du = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_2(x+\pi) = C_2(x-\pi)$$
$$\Rightarrow C_2(x) = C_2(x+2\pi)$$

Nên y^* tuần hoàn với chu kì 2π.
Ta cũng có $\overline{y}$ tuần hoàn với chu kì 2π.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình $y = \overline{y} + y^*$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$

14. Tìm tất cả các hàm khả vi cấp hai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) + f(-x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 8 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có:

$$f'(x) + f(-x) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} f'(-x) + f(x) = -\sin x \\ f''(x) - f'(-x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f''(x) + f(x) = \cos x - \sin x \quad (1)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất.
Xét phương trình thuần nhất $f''(x) + f(x) = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = i \\ k = -i \end{cases}$$

Nên nghiệm của phương trình thuần nhất là $\overline{f(x)} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Xét phương trình không thuần nhất $f''(x) + f(x) = \cos x - \sin$ có $i, -i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} &f(x)* = Ax\cos x + Bx\sin x \\ \Rightarrow &f(x)*' = (A + Bx)\cos x + (-Ax + B)\sin x \\ \Rightarrow &f(x)*'' = (-Ax + 2B)\cos x + (-2A - Bx)\sin x \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được:

$$((-Ax + 2B)\cos x + (-2A - Bx)\sin x) + (Ax\cos x + Bx\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow 2B\cos x - 2A\sin x = \cos x - \sin x \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

Nên nghiệm riêng của phương trình là $f(x)* = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương tình là $f(x) = \overline{f(x)} + f(x)* = C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

15. Tìm một hàm số $f(x)$ khả vi mọi cấp trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^{(n)}(0) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - KSTN K59 - HK20142

Ta có khai triển Maclaurin của $f(x)$ là $f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
Với điều kiện $f^{(n)}(0) = n^2$ thay vào $f(x)$ ta thu được:

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n \quad (1)$$

Ta xét $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ là chuỗi lũy thừa có miền hội tụ là $(-\infty, +\infty)$, nên $g(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n$$

Mặt khác ta có $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x.e^x$. Nên:

$$\Rightarrow g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n = (x+1)e^x$$

Thay vào (1) ta thu được:
$$f(x) = x(x+1)e^x = (x^2+x)e^x$$

16. Tìm tất cả các nghiệm tuần hoàn của phương trình vi phân $y'' + 2y' + (\sin^{2016} x - 2)y = 0$.

Câu 10 - Đề thi cuối kỳ GT3 - KSTN K60 - HK20152

Ta có:
- $y = 0$ là 1 nghiệm tuần hoàn của phương trình.
- $y = K$ với K là hằng số, $K \neq 0$ không là nghiệm của phương trình. Kiểm chứng: Thay $y = K$ vào phương trình được $K(\sin^{2016} x - 2) = 0$, mà $\sin^{2016} x - 2 \in [-1, -2] \Rightarrow K = 0$ (Mâu thuẫn)

Giả sử $y(x)$ là một nghiệm không tầm thường tuần hoàn của phương trình vi phân trên.
Vì $y(x)$ là hàm tuần hoàn, liên tục và khả vi ít nhất đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$, nó phải bị chặn và đạt max và min trên $\mathbb{R}$.
Ta giả sử $y(x_0) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x)$. Khi này $x = x_0$ là điểm cực đại, nên $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \leq 0$.
Thay $x = x_0$ vào phương trình ban đầu ta có:
$$y''(x_0) + 2y'(x_0) + (\sin^{2016} x_0 - 2)y(x_0) = 0$$
Với $y'(x_0) = 0$, phương trình trở thành:
$$y''(x_0) = \left(2 - \sin^{2016} x_0\right) y(x_0)$$
Mà:
- $y''(x_0) \leq 0$ (tại điểm cực đại)
- $2 - \sin^{2016} x_0 > 0$ (vì $0 \leq \sin^{2016} x_0 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin^{2016} x_0 \leq 2$)

Từ $y''(x_0) = \left(2 - \sin^{2016} x_0\right) y(x_0)$ và các điều kiện trên, ta suy ra:
$$\left(2 - \sin^{2016} x_0\right) y(x_0) \leq 0$$
Vì $2 - \sin^{2016} x_0 > 0$, điều này chỉ đúng khi $y(x_0) \leq 0$.
Mặt khác, xét tại điểm cực tiểu $y(x_1) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y(x)$. Tại đây, $y'(x_1) = 0$ và $y''(x_1) \geq 0$.
Tương tự, thay vào phương trình ta có $y''(x_1) = \left(2 - \sin^{2016} x_1\right) y(x_1)$.
Vì $y''(x_1) \geq 0$ và $2 - \sin^{2016} x_1 > 0$, ta suy ra $y(x_1) \geq 0$.
Do $y(x_0) \leq 0$ (max) và $y(x_1) \geq 0$ (min), đồng thời $y(x_1) \leq y(x_0)$, điều này chỉ có thể xảy ra nếu $y(x) \equiv 0$.
Vậy $y = 0$ là nghiệm tuần hoàn duy nhất của phương trình.

Bài tập tự làm:

17. Giải các phương trình vi phân sau: $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, biết $y_1 = x$ là một nghiệm riêng.

Câu 4b - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

18. Giải phương trình vi phân $(2x^2+1)y'' - 4xy' + 4y = 0$ biết một nghiệm riêng là $y_1 = x$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20163

19. Giải phương trình vi phân $(x^2+2x)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$, biết $y_1 = x+1$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Câu 6 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

20. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$.

Câu 4a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

21. Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

Câu 6 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20222

22. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' + 3y' - 4y = 16 \sin x \cos x$.

Câu 4c - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

23. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' + y' = -e^{-x}$.

Câu 3b - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

24. Giải các phương trình vi phân sau: $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Câu 3c - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

25. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $(y + 5x^2)dx = xdy, y(1) = 2$.

b) $xdy + (3y - 6x^3y^4)dx = 0, y(1) = 2$.

c) $y'' + 2y' + 5y = 260e^x \sin x$.

d) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

Câu 5 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20192

26. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $dy + (y - x)dx = 0$.

b) $y' = \dfrac{2y - x}{x}, y(1) = 1$.

c) $y'' - 2y' - 3y = e^x(2 - 4x^2)$.

d) $x^2y'' - 4xy' - 6y = 2x^2 \ln x$.

Câu 5 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20192

27. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$.

b) $(3x^2 + 6xy)dx + (3x^2 - 4y^2)dy = 0$.

c) $y'' + 3y' + 2y = (8x^2 + 16x + 13)e^x$.

d) $y'' - y = \dfrac{2e^{2x}}{e^x + 1}$.

Câu 4 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20181

28. Giải phương trình vi phân $y'' + 4y = xe^x$.

Câu 4b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

29. Giải phương trình vi phân $y'' + 3y' + 2y = e^x \cos 2x$.

Câu 5 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

30. Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' - 4y = (11 + 6x)e^{2x}$.

Câu 3c - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

31. Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = 8\cos x + 14\sin x$.

Câu 3d - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

32. Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = e^x + 10\sin x$.

Câu 3b - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20173

33. Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' = 8x - 2$.

Câu 4b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20163

34. Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' = -11\cos x - 14\sin x$.

Câu 6 - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

35. Giải phương trình vi phân $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\sin x}$.

Câu 4b - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

36. Giải phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

37. Giải phương trình vi phân $y'' - y = 4(x + 1)e^x$.

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

38. Giải phương trình vi phân $y'' - 3y' - 4y = 4\sin 2x - 22\cos 2x$.

Câu 6 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

39. Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' - 8y = 9(x + 1)e^{-x}$.

Câu 6 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

2.2.5 Đọc thêm: Phương trình Chebysev

Định nghĩa Phương trình vi phân có dạng:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

(trong đó n là hằng số) được gọi là **phương trình Chebysev**.

Cách giải

B1. Thực hiện phép đổi biến số: Đặt $x = \cos t$, hay $t = \arccos x$. Khi $x \in (-1, 1)$, thì $t \in (0, \pi)$.

B2. Tính các đạo hàm y' và y'' theo biến mới t:

- $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$.
  Với $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
  Do $x = \cos t$, nên $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ (vì $t \in (0, \pi)$ thì $\sin t > 0$).
  Vậy, $y'_x = -\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}$.

- $y''_{xx} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right) \\ &= -\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

B3. Thay vào phương trình Chebysev ban đầu:

Ta có $(1-x^2) = \sin^2 t$ và $xy' = (\cos t)\left(-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{\cos t}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}$.
Thay thế vào phương trình $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$:

$$(\sin^2 t)\left(-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right) + n^2y = 0$$

Rút gọn, ta được:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất với hệ số hằng theo biến t.

B4. Giải phương trình hệ số hằng: Phương trình đặc trưng là $k^2 + n^2 = 0$, có nghiệm $k = \pm ni$. Nghiệm tổng quát của phương trình theo t là:

$$y(t) = C_1\cos(nt) + C_2\sin(nt)$$

B5. Thay $t = \arccos x$ trở lại: Nghiệm tổng quát của phương trình Chebysev ban đầu là:

$$y(x) = C_1\cos(n\arccos x) + C_2\sin(n\arccos x)$$

2.3 Hệ PTVP cấp 1

2.3.1 Đại cương về hệ phương trình vi phân

Định nghĩa Một **hệ phương trình vi phân (PTVP) cấp một chuẩn tắc** là hệ có dạng:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

trong đó ‘x‘ là biến số độc lập, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ là các hàm số cần tìm. Các hàm $f_1, \ldots, f_n$ được cho trước và xác định trong một miền $\mathcal{D}$ của không gian $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bài toán giá trị ban đầu (Bài toán Cauchy) Là bài toán tìm nghiệm của hệ PTVP cấp một thỏa mãn các **điều kiện ban đầu** cho trước tại một điểm x_0:

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0$$

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm Nếu các hàm f_i và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ đều liên tục trên một miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ và điểm ban đầu $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ thuộc $\mathcal{D}$, thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất trong một lân cận của x_0.

Các loại nghiệm

- **Nghiệm tổng quát:** Là một họ nghiệm $y_i = g_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ phụ thuộc vào n hằng số tùy ý.
- **Nghiệm riêng:** Là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi các hằng số C_i nhận các giá trị cụ thể.
- **Nghiệm kì dị:** Là nghiệm của hệ mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ.

2.3.2 Phương pháp giải hệ phương trình vi phân

Có hai phương pháp chính để giải hệ PTVP tuyến tính với hệ số hằng.

1. Phương pháp khử Phương pháp này đưa hệ PTVP về một PTVP cấp cao hơn chỉ chứa một hàm ẩn.

Các bước:

B1. Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một hàm ẩn qua các hàm còn lại và đạo hàm của chúng.

B2. Thế biểu thức vừa tìm được vào (các) phương trình còn lại của hệ để thu được một phương trình vi phân cấp cao hơn chỉ chứa một hàm ẩn.

B3. Giải phương trình vi phân cấp cao này để tìm nghiệm tổng quát cho hàm ẩn đó.

B4. Thay nghiệm vừa tìm được trở lại biểu thức ở Bước 1 để tìm các hàm còn lại.

2. Phương pháp đặc trưng (Cho hệ PTVP tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng) Phương pháp này sử dụng các khái niệm về trị riêng và véctơ riêng của ma trận.

Các bước:

B1. Viết hệ PTVP dưới dạng ma trận: $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

B2. Tìm các trị riêng λ của ma trận hệ số $\mathbf{A}$ bằng cách giải phương trình đặc trưng: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

B3. Với mỗi trị riêng λ, tìm véctơ riêng $\mathbf{v}$ tương ứng bằng cách giải hệ phương trình $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

B4. Dựa vào các trường hợp của trị riêng để viết nghiệm tổng quát cho hệ:

- **Trường hợp 1: A có các trị riêng thực phân biệt** λ_1, λ_2. Nghiệm tổng quát là: $\mathbf{Y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2$.
- **Trường hợp 2: A có cặp trị riêng phức liên hợp** $\lambda = \alpha \pm i\beta$ với véctơ riêng $\mathbf{v} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$. Nghiệm tổng quát có dạng: $\mathbf{Y}(x) = C_1 e^{\alpha x}(\mathbf{a}\cos\beta x - \mathbf{b}\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\mathbf{a}\sin\beta x + \mathbf{b}\cos\beta x)$.
- **Trường hợp 3: A có trị riêng thực λ bội hai.**
  - Nếu tìm được hai véctơ riêng độc lập tuyến tính $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: $\mathbf{Y}(x) = C_1 e^{\lambda x}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda x}\mathbf{v}_2$.
  - Nếu chỉ tìm được một véctơ riêng $\mathbf{v}$: $\mathbf{Y}(x) = C_1 e^{\lambda x}\mathbf{v} + C_2 e^{\lambda x}(x\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta})$, trong đó véctơ $\boldsymbol{\eta}$ được tìm từ hệ $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}$.

1. Tìm điều kiện cần và đủ của a để hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = (a+1)y + z, \\ z' = 2y + az \end{cases} \quad \text{thỏa mãn} \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} z(x) = 0$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = y_0, z(0) = z_0$ bất kỳ.

Câu 7 - Đề 1 cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20232

Cách 1:

Ta xét phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} a+1-\lambda & 1 \\ 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (2a+1)\lambda + (a^2+a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a-1 \\ \lambda_2 = a+2 \end{cases}$$

Với $\lambda_1 = a-1$ ta có hệ phương trình để xác định vector riêng:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 = 0 \\ 2p_1 + p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = C_1 \\ p_2 = -2C_1 \end{cases}$$

Với $\lambda_2 = a+2$ ta có hệ phương trình để xác định vector riêng:

$$\begin{cases} -p_1 + p_2 = 0 \\ 2p_1 - 2p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = C_2 \\ p_2 = C_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} y = C_1 e^{(a-1)x} + C_2 e^{(a+2)x} \\ z = -2C_1 e^{(a-1)x} + C_2 e^{(a+2)x} \end{cases}$

Để $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} z(x) = 0$ thì $a < -2$.

Cách 2:

Ta tác động Laplace lên hệ phương trình với $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{z\} = Z(s)$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{(a+1)y + z\} \\ \mathcal{L}\{z'\} = \mathcal{L}\{2y + az\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sY(s) - y_0 = (a+1)Y(s) + Z(s) \\ sZ(s) - z_0 = 2Y(s) + aZ(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-a-1)Y(s) - Z(s) = y_0 \\ -2Y(s) + (s-a)Z(s) = z_0 \end{cases}$$

Ta xét định thức của ma trận Cramer:

$$\begin{vmatrix} s-a-1 & -1 \\ -2 & s-a \end{vmatrix} = (s-a-1)\cdot(s-a) - 2 = s^2 - 2as + a^2 - s + a - 2$$

Phương trình mẫu: $\Delta(s) = s^2 - (2a+1)s + (a^2+a-2) \Rightarrow \Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2+a-2) = 9 > 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = a-1,\ \lambda_2 = a+2$

Nghiệm của $y(t)$ và $z(t)$ sẽ có dạng $A = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, để nghiệm $y(t), z(t) \to 0$ khi $t \to \infty$, ta có:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a-1 < 0 \\ \lambda_2 = a+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a < -2 \end{cases} \Rightarrow a < -2$$

2. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x'(t) = y - 5\sin t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$.

Câu 7 - Đề 2 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20212

Ta có:

$$\begin{cases} x'(t) = y - 5\sin t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x'(t) + 5\sin t \\ \dfrac{d}{dt}(x'(t) + 5\sin t) = 2x + \dfrac{dx}{dt} + 5\sin t \end{cases} \Rightarrow x'' + 5\cos t = 2x + x' + 5\sin t$$

Ta có phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất:

$$x'' - x' - 2x = 5(\sin t - \cos t)$$

Xét phương trình

$$x'' - x' - 2x = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình (*): $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$
Ta đi tìm nghiệm riêng, nhận thấy $f(t)$ của ptvp có dạng $5\sin t - 5\cos t$
Giả sử $x = a\cos t + b\sin t$:

$$\begin{aligned} & -a\cos t - b\sin t + a\sin t - b\cos t - 2(a\cos t + b\sin t) = 5(\sin t - \cos t) \\ \Leftrightarrow\ & (-3a - b)\cos t + (-3b + a)\sin t = 5(\sin t - \cos t) \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} -3a - b = -5 \\ a - 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình trên là: $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 2\cos t - \sin t \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + 3\sin t - \cos t \end{cases} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Chấm điểm:
- Viết và giải ra nghiệm TQ của PTVP cấp 2 không thuần nhất (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát của hệ PT (0,5đ)

3. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} y' = y + z + e^x, \\ z' = y - z. \end{cases}$

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta có:

$$\begin{cases} y' = y + z + e^x, \\ z' = y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'' + z' = z' + z + z + e^x \\ y = z' + z \end{cases} \Rightarrow z'' - 2z = e^x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất, hệ số hằng. Xét phương trình thuần nhất:

$$z'' - 2z = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình (*): $z = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x}$.
Vì vế phải của phương trình là e^x, ta tìm một nghiệm riêng có dạng tương ứng là $z = ae^x$.
Giả sử $z = ae^x$:

$$ae^x - 2ae^x = e^x \Leftrightarrow -ae^x = e^x \Rightarrow a = -1$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(x) = (1+\sqrt{2})C_1e^{\sqrt{2}x} + (1-\sqrt{2})C_2e^{-\sqrt{2}x} - 2e^x \\ z(x) = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - e^x \end{cases} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Chấm điểm:
- Suy ra được PTVP cấp 2 không thuần nhất theo y hoặc theo z (0.5đ)
- Giải đúng nghiệm tổng quát của hệ PT (0,5đ)

3 Biến đổi Laplace

3.1 Biến đổi Laplace cơ bản

3.1.1 Phép biến đổi Laplace

1. Định nghĩa Cho hàm $f(t)$ xác định trên $[0, \infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn. Nếu tích phân suy rộng $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ với $s \in D \subset \mathbb{R}$ hội tụ thì ta đặt

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad \text{trong đó } s \in D$$

và gọi hàm F là biến đổi Laplace của hàm f. Ký hiệu: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Ví dụ:

a) $f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$ (nếu $s > 0$). Không tồn tại $F(s)$ khi $s \le 0$.

b) $f(t) = e^{at}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$ (nếu $s > a$). Không tồn tại $F(s)$ khi $s \le a$.

c) $f(t) = t^a, a > -1$. Đặt $z = st \Rightarrow t = \frac{z}{s} \Rightarrow dt = \frac{1}{s}dz$. Xét $s > 0$, ta có: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-z} z^a dz = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$. trong đó $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ được gọi là hàm Gamma.

d) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$. Thay $a = n$ trong câu c) ta có $F(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$. Thực hiện tích phân từng phần n lần cho hàm Gamma, ta được $\Gamma(n+1) = n!$. $\Rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ với $s > 0$.

e) $f(t) = \cos(kt)$. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt = \frac{s}{s^2 + k^2}$ với $s > 0$.

f) $f(t) = \sin(kt)$. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin(kt) dt = \frac{k}{s^2 + k^2}$ với $s > 0$.

2. Tính chất tuyến tính Nếu tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}$ và $\mathcal{L}\{g(t)\}$, thì với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

Ví dụ:

a) $\mathcal{L}\{3t^2 + 4t^3\} = \frac{6s + 24}{s^4}$ với $s > 0$.

b) $\mathcal{L}\{3e^{2t} + 2\sin^2(3t)\} = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 36}$ với $s > 2$.

c) $\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$ với $s > |k|$.

d) $\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$ với $s > |k|$.

3. Bảng các phép biến đổi Laplace

4. Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

- **Định nghĩa (Hàm bị chặn mũ):** Hàm $f(t)$ được gọi là bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ nếu tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ với mọi $t \ge 0$.

Bảng 1: Bảng các phép biến đổi Laplace cơ bản

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	**Điều kiện của** s
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^a \quad (a \in \mathbb{R}, a > -1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
$u(t-c) \quad (c > 0)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$

- **Định lý 1 (Điều kiện đủ cho sự tồn tại):** Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn:

  i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$,

  ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ (với hằng số α),

  thì luôn tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$.

- **Hệ quả:** Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 1, thì $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.

3.1.2 Biến đổi Laplace ngược

1. Sự duy nhất của biến đổi Laplace ngược

- **Định lý 2:** Giả sử 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 1 (về sự tồn tại biến đổi Laplace) để tồn tại $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ và $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó: Nếu $F(s) = G(s)$ với mọi $s > \alpha$ (trong đó α là hằng số trong Định lý 1), thì $f(t) = g(t)$ tại những giá trị của t mà cả 2 hàm số liên tục.

2. Định nghĩa Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, thì ta nói $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của hàm số $F(s)$ và viết $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ví dụ:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^4}\right\} = t^3$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\} = \sin(2t)$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-9}\right\} = \cosh(3t)$

3. Tính chất tuyến tính Với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Ví dụ:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s^3}\right\} = 1 + \dfrac{1}{2}t^2.$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2-8s+15}\right\} = 2(e^{5t} - e^{3t}).$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s^2+5}\right\} = 3\cos(\sqrt{5}t) - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t).$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+1}{s^2-4}\right\} = -2\cosh(2t) + \dfrac{1}{2}\sinh(2t).$

4. Đọc thêm: Tích phân trên mặt phẳng phức (Tích phân Bromwich) Về mặt toán học chặt chẽ, phép biến đổi Laplace ngược không chỉ là một phép toán ngược đơn thuần mà được định nghĩa bởi một công thức tích phân trong mặt phẳng phức. Công thức này được gọi là **Tích phân Bromwich** hoặc công thức ngược Mellin-Fourier.

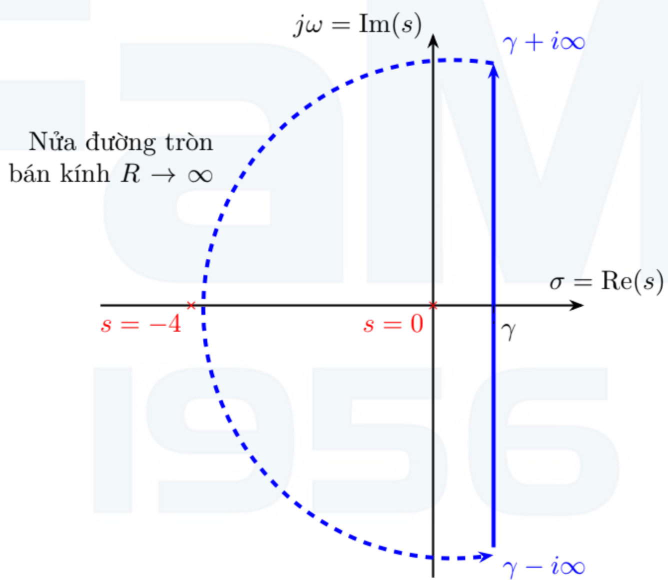
Định nghĩa chính thức: Hàm số $f(t)$ được tìm lại từ hàm ảnh $F(s)$ thông qua công thức:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st}F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds$$

trong đó:

- s là một biến số phức ($s = \gamma + i\omega$).
- Tích phân này là một tích phân đường dọc theo một đường thẳng đứng trong mặt phẳng phức.
- γ là một số thực được chọn sao cho đường thẳng đứng $x = \gamma$ nằm ở **bên phải** của tất cả các điểm kỳ dị của hàm $F(s)$. Điều này đảm bảo rằng đường lấy tích phân nằm trong miền hội tụ của $F(s)$.

Ví dụ: Laplace ngược của $F(s) = \dfrac{1}{s(s+4)}$



Lưu ý:

- Việc tính toán trực tiếp tích phân phức này thường rất khó khăn.
- Trong thực tế, người ta thường sử dụng **Định lý Thặng dư** trong giải tích phức để tính tích phân này. Phép biến đổi ngược $f(t)$ chính là tổng các thặng dư của hàm $e^{st}F(s)$ tại các cực điểm của nó.

$$f(t) = \sum_k \text{Res}[e^{st}F(s), s_k]$$

- Mặc dù định nghĩa này là nền tảng lý thuyết vững chắc, trong thực hành, ta thường dựa vào các **bảng biến đổi Laplace**, các **tính chất** (như tịnh tiến, đạo hàm, tích chập), và phương pháp **phân tích thành phân thức đơn giản** để tìm biến đổi ngược, vì chúng đơn giản và hiệu quả hơn cho hầu hết các bài toán ứng dụng.

3.2 Các tính chất và kỹ thuật nâng cao của phép biến đổi Laplace

3.2.1 Biến đổi Laplace của đạo hàm hàm gốc

Định nghĩa (Hàm trơn từng khúc): Hàm $f(t)$ được gọi là trơn từng khúc trên $[a, b]$ nếu nó khả vi trên $[a, b]$ (trừ ra một số hữu hạn điểm) và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a, b]$.

Định lý (Biến đổi Laplace của đạo hàm cấp 1): Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết:

i) liên tục và trơn từng khúc trên $[0, \infty)$,

ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$ (hoặc $t \geq T$ theo một số định nghĩa khác),

thì luôn tồn tại $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$$

Hệ quả (Biến đổi Laplace của đạo hàm cấp cao): Nếu các hàm $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ liên tục, trơn từng khúc trên $[0, \infty)$ và là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, thì luôn tồn tại $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Các kỹ thuật biến đổi bổ sung

a) $\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tổng quát: $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

b) $\mathcal{L}\{t \sin kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$

c) $\mathcal{L}\{t \cos kt\}(s) = \dfrac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$

d) $\mathcal{L}\{t \sinh kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$

e) $\mathcal{L}\{t \cosh kt\}(s) = \dfrac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$

3.2.2 Biến đổi Laplace của tích phân hàm gốc

Định lý: Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết:

i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$

ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ (với hằng số α), thì với $s > \alpha$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Tức là,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$$

3.2.3 Phép tịnh tiến trên trục s (Dịch ảnh)

Định lý (Phép tịnh tiến trên trục s / Phép biến đổi trên trục s): Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha$, thì $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha + a$ và

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

Tức là,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

3.2.4 Phép tịnh tiến trên trục t (Dịch gốc) và hàm Heaviside

Định nghĩa (Hàm Heaviside): Hàm bậc thang (Heaviside) tại $t = a$ ($a \geq 0$) được ký hiệu là $u_a(t)$ (hoặc $u(t-a)$) và được xác định bởi:

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } t \geq a \end{cases}$$

Định lý (Phép tịnh tiến trên trục t): Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha$, thì

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

Tức là,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$$

3.2.5 Đạo hàm và tích phân của ảnh Laplace

Định lý 1 (Đạo hàm của biến đổi Laplace / Vi phân của phép biến đổi): Nếu hàm $f(t)$ liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$ và là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$ (với hằng số α), thì với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$:

$$F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)$$

Tổng quát:

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

Định lý 2 (Tích phân của biến đổi Laplace): Nếu hàm $f(t)$ liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$, là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$ (với hằng số α), và tồn tại $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, thì với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(\lambda)d\lambda$$

3.2.6 Biến đổi Laplace của tích chập

Định nghĩa (Tích chập): Tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$, xác định trên $[0,\infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn, được ký hiệu là $(f*g)(t)$ hoặc $f(t)*g(t)$ và được xác định bởi:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(r)g(t-r)dr, \quad \text{với } t \geq 0$$

Chú ý: Tích chập có tính chất giao hoán $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$.

Định lý (Biến đổi Laplace của tích chập): Nếu các hàm $f(t)$ và $g(t)$ liên tục từng khúc với $t \geq 0$ và là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$, thì:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Tức là,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f*g)(t)$$

3.2.7 Kỹ thuật tìm biến đổi Laplace ngược (sử dụng phân thức đơn giản)

Việc tìm biến đổi Laplace ngược của hàm hữu tỉ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ (thường với bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) được quy về việc tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức đơn giản.

- Phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ thành tổng của các phân thức đơn giản.

Quy tắc 1 (Nghiệm đơn hoặc bội ở mẫu bậc nhất): Nếu $Q(s)$ có chứa thừa số $(s-a)^k$, thì trong phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ sẽ có các số hạng dạng:

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(s-a)^k}$$

Biến đổi ngược: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{A_j}{(s-a)^j}\right\}=A_j\dfrac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{at}$.

Quy tắc 2 (Nghiệm phức hoặc nghiệm bội ở mẫu bậc hai không phân tích được thành nhân tử thực): Nếu $Q(s)$ có chứa thừa số $((s-a)^2+b^2)^k$ (với $b\neq 0$), thì trong phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ sẽ có các số hạng dạng:

$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2s+B_2}{((s-a)^2+b^2)^2}+\cdots+\frac{A_ks+B_k}{((s-a)^2+b^2)^k}$$

Biến đổi ngược cho hạng tử đầu tiên ($k=1$): $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{A_1(s-a)+(A_1a+B_1)}{(s-a)^2+b^2}\right\}=A_1e^{at}\cos(bt)+\dfrac{A_1a+B_1}{b}e^{at}\sin(bt)$. (Việc tìm biến đổi ngược cho $k\geq 2$ thường phức tạp hơn, có thể cần dùng tích chập hoặc các công thức đặc biệt.)

3.2.8 Ví dụ

1. Tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t)=(e^{-t}+1)^2\sin(3t)$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

Ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(e^{-t}+1)^2\sin(3t)\}&=\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)+2e^{-t}\sin(3t)+sin(3t)\}\\&=\mathcal{L}\{(e^{-2t}\sin(3t)\}+2\mathcal{L}\{(e^{-t}\sin(3t)\}+\mathcal{L}\{\sin(3t)\}\\&=\frac{3}{(s+2)^2+9}+\frac{6}{(s+1)^2+9}+\frac{3}{s^2+9}\quad(s>0)\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Tách hàm số ra những hàm cơ bản (0.5đ)
- Áp dụng biến đổi Laplace (0,5đ)

2. Tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t)=t^2e^{2t}\sin 2t$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

Ta có:

$$F(s)=\mathcal{L}\{\sin(2t)\}=\frac{2}{s^2+4}\Rightarrow\mathcal{L}\{t^2\sin(2t)\}=(-1)^2\cdot(F(s))''=\left(\frac{2}{s^2+4}\right)''=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\sin(2t)\}=\frac{12(s-2)^2-16}{((s-2)^2+4)^3}\quad(s>2)$$

Chấm điểm:

- Đạo hàm biến đổi Laplace (0.5đ)
- Áp dụng phép tịnh tiến (0,5đ)

Lưu ý: Tịnh tiến xong đạo hàm cho điểm như nhau.

3. Tìm biến đổi Laplace ngược:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\}.$$

Câu 5a - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20222

Ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\left(s^2+3\right)-3s+6}{\left(s^2+3\right)^2}\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+3\right)^2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+3\right)^2}\right\}\\ &= \cos\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}t\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{3}t - \sqrt{3}t\cos\sqrt{3}t\right) \quad (s>0)\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Phân tách thành các hàm phân thức đơn giản (0.5đ)
- Biến đổi Laplace ngược về hàm gốc (0.5đ)

Lưu ý: Đối với biến đổi $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)$ là một biến đổi kỹ thuật bổ sung, tùy thuộc giảng viên cho phép sử dụng trực tiếp biến đổi này hay không. Chúng mình nghĩ bài này nên biến đổi về các phân thức cơ bản tránh tranh cãi.

4. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 7e^{2t}\sin 3t + t^4e^{3t};\quad t \geq 0$.

Câu 5a - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

Ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{7e^{2t}\sin 3t + t^4e^{3t}\right\} = 7\mathcal{L}\left\{e^{2t}\sin 3t\right\} + \mathcal{L}\left\{t^4e^{3t}\right\}\\ &= 7\frac{3}{(s-2)^2+9} + \frac{4!}{(s-3)^5} = \frac{21}{(s-2)^2+9} + \frac{24}{(s-3)^5} \quad (s>3)\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Phân tách biến đổi Laplace ra thành các hàm đơn giản (0.5đ)
- Biến đổi tịnh tiến theo s (0.5đ)

5. Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t) = e^{2t}$.

Câu 8 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20212

Ta có:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{2t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-2)t}dt = -\frac{e^{-(s-2)t}}{s-2}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-2} \quad (s>2)$$

Chấm điểm:

- Viết đúng định nghĩa của biến đổi Laplace (0.5đ)
- Tính đúng biến đổi Laplace (0.5đ)

6. Tìm biến đổi Laplace của hàm số

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-x)\cos 2x\,dx \quad \text{với } t \geq 0.$$

Câu 5a - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20212

Ta có:

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-x)\cos 2x\,dx = \sin t * \cos 2t$$

Tác động toán tử Laplace vào $f(t)$ ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin t * \cos 2t\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \cdot \mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+4} = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad (s > 0)\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Viết đúng tích chập $f(t) = \sin t * \cos 2t$ (0.5đ)
- Tính đúng biến đổi Laplace (0.5đ)

7. Tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t) = e^{3t} t\sin(\pi t)$.

Câu 4a - Đề 7 - GT3 HK20212

Ta có:

$$\mathcal{L}\{t\sin \pi t\} = \frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{3t} t\sin(\pi t)\} = \frac{2\pi(s-3)}{\left((s-3)^2+\pi^2\right)^2}$$

Chấm điểm:

- Đạo hàm biến đổi Laplace (0.5đ)
- Tịnh tiến theo s (0.5đ)

8. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ nếu biết

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ e^{-\pi t}, & 2 \leq t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

Câu 5 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20162

Áp dụng định nghĩa biến đổi Laplace ta có:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_2^4 e^{-st} e^{-\pi t} dt \\ &= \int_2^4 e^{-(s+\pi)t} dt = -\left.\frac{e^{-(s+\pi)t}}{s+\pi}\right|_2^4 \\ &= \frac{e^{-2(s+\pi)} - e^{-4(s+\pi)}}{s+\pi} \quad (s \neq -\pi)\end{aligned}$$

Chấm điểm:

- Áp dụng định nghĩa, biến đổi đến bước $\int_2^4 e^{-st}e^{-\pi t}dt$ (0.5đ)
- Tính đúng biến đổi Laplace với điều kiện (0.5đ)

Lưu ý: Có thể sử dụng hàm dịch chuyển theo t để giải.

9. Tìm biến đổi Laplace của hàm số $y(t)$, biết $y(t)$ là nghiệm của phương trình: $y(t) = t + 2\int_0^t y(\tau)\sin(2t - 2\tau)d\tau$.

Câu 7 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

Ta có:

$$y(t) = t + 2\int_0^t y(\tau)\sin(2t - 2\tau)d\tau = t + 2y(t) * \sin 2t$$

Tác động toán tử Laplace vào $y(t)$ ta có:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} + 2\mathcal{L}\{y(t) * \sin 2t\} = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^2+4}\mathcal{L}\{y(t)\}$$
$$\Rightarrow \frac{s^2}{s^2+4}\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s^2+4}{s^4}$$

Chấm điểm:
- Áp dụng biến đổi Laplace được $Y(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{4}{s^2+4}Y(s)$ (0.5đ)
- Tính đúng biến đổi Laplace với điều kiện (0.5đ)

Bài tập tự làm:

10. Tính phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t) = te^{2t}\sin(3t)$.

Câu 8 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20222

11. Áp dụng định nghĩa, hãy tính biến đổi Laplace của hàm số $f(t) = t + 1$.

Câu 8 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20212

12. Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)^2(s+1)}\right\}(t)$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

13. Tìm phép biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{\cos^3 t\}(s)$.

Câu 6 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

14. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số $G(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4s + 5}$.

Câu 7 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

15. Tìm biến đổi Laplace của $f(t) = t\cos^2 t$.

Câu 7 - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

16. Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = te^{-t}\sin 2t$.

Câu 6 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

17. Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$.

Câu 7 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

18. Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{(e^t + t)^2\}(s)$.

Câu 7 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

19. Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\left\{e^{3t}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s)$.

Câu 7 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

20. Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+4s}\right\}(t)$.

Câu 7 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

3.3 Bài toán Cauchy

1. Giải phương trình vi phân bằng phương pháp toán tử Laplace:

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} - 8y'' - 30y' - 25y = e^t$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3, y'''(0) = 4$.

Câu 8 - Đề KSTN K60 - Học kì 20152

Ta tác động toán tử Laplace 2 vế có:

$$\mathcal{L}\{y^{(4)}\} - 2\mathcal{L}\{y^{(3)}\} - 8\mathcal{L}\{y''\} - 30\mathcal{L}\{y'\} - 25\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-1} \tag{1}$$

Dựa vào công thức Laplace của đạo hàm ta có:
- $\mathcal{L}\{y^{(4)}\} = s^4\mathcal{L}\{y\} - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y^{(3)}(0)$
- $\mathcal{L}\{y^{(3)}\} = s^3\mathcal{L}\{y\} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$

Mà $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3, y'''(0) = 4$ nên thay vào phương trình (1) ta có:

$$\left(s^4 - 2s^3 - 8s^2 - 30s - 25\right)\mathcal{L}\{y\} - s^3 + 9s + 48 = \frac{1}{s-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{(s+1)(s-1)(s-5)\left((s+1)^2+4\right)} + \frac{s^3-9s-48}{(s+1)(s-5)\left((s+1)^2+4\right)} \\
&= \frac{27}{16}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{64}\frac{1}{s-1} + \frac{43}{320}\frac{1}{s-5} - \frac{129}{160}\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{89}{40}\frac{1}{(s+1)^2+4} \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{27}{16}e^{-t} - \frac{1}{64}e^t + \frac{43}{320}e^{5t} - \frac{129}{160}e^{-t}\cos 2t + \frac{89}{80}e^{-t}\sin 2t
\end{aligned}$$

Chấm điểm:
- Tác động Laplace vào 2 vế, biến đổi $\mathcal{L}\{y\}$ về phân thức đơn giản (0.5đ)
- Biến đổi Laplace ngược giải ra được nghiệm đúng của phương trình (0.5đ)

2. Sử dụng biến đổi Laplace giải phương trình

$$x^{(3)} + x''(t) - 17x'(t) - 65x(t) = 0, \quad x(0) = -1, x'(0) = -24, x''(0) = -63$$

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.2

Xét $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$. Ta tác động Laplace 2 vế phương trình:

$$\mathcal{L}\left\{x^{(3)}\right\} + \mathcal{L}\{x''\} - 17\mathcal{L}\{x'\} - 65\mathcal{L}\{x\} = 0$$

Với: $\begin{cases} \mathcal{L}\left\{x^{(3)}\right\} = s^3X(s) - (-1)s^2 - (-24)s - (-63) = s^3X(s) + s^2 + 24s + 63 \\ \mathcal{L}\{x''\} = s^2X(s) - (-1)s - (-24) = s^2X(s) + s + 24 \\ \mathcal{L}\{x\} = sX(s) - (-1) = sX(s) + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow X(s)(s^3+s^2-17s-65)+s^2+24s+63+s+24-17 = X(s)(s^3+s^2-17s-65)+s^2+25s+70=0$$

$$\Rightarrow X(s) = -\frac{s^2+25s+70}{s^3+s^2-17s-65} = -\frac{s^2+25s+70}{(s-5)(s^2+6s+13)} = -\frac{55}{17(s-5)} + \frac{38s+95}{17(s^2+6s+13)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{55}{17(s-5)} + \frac{38s+95}{17(s^2+6s+13)}\right\}$$
$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{55}{17(s-5)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{38(s+3)-19}{17((s+3)^2+4)}\right\} = -\frac{55}{17}e^{5t} + \frac{38}{17}e^{-3t}\cos(2t) - \frac{19}{34}e^{-3t}\sin(2t)$$

Chấm điểm:
- Biến đổi Laplace 2 vế phương trình, đưa về các phân thức đơn giản (0.5đ)
- Biến đổi ngược Laplace tìm được nghiệm đúng của phương trình (0.5đ)

3. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} x''+25x = f(t) \\ x(0)=0, x'(0)=3 \end{cases} \qquad \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} 24\sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 2023.1

Ta có: $f(t) = \begin{cases} 24\sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & t\geq\pi \end{cases} \Rightarrow f(t) = 24\cdot(1-u(t-\pi))\sin t = 24\sin t + 24\cdot u(t-\pi)\sin(t-\pi)$

Tác động biến đổi Laplace vào phương trình với $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$, ta có:

$$X(s)(s^2+25) - 3 = 24\mathcal{L}\{\sin t\} + 24\mathcal{L}\{u(t-\pi)\sin(t-\pi)\} = \frac{24}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{24}{s^2+1}$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{24}{(s^2+1)(s^2+25)} + e^{-\pi s}\frac{24}{(s^2+1)(s^2+25)} + \frac{3}{s^2+25}$$
$$= e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+25}\right) + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+25}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+25}\} = \frac{1}{5}\sin(5t) \\ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin(t) \end{cases} \Rightarrow x(t) = u(t-\pi)\left(\sin(t-\pi) - \frac{1}{5}\sin(5(t-\pi))\right) + \sin(t) + \frac{2}{5}\sin(5t)$$

Chấm điểm:
- Biến đổi Laplace 2 vế phương trình, đưa về các phân thức đơn giản (0.5đ)
- Biến đổi ngược Laplace tìm được nghiệm đúng của phương trình (0.5đ)

4. Giải phương trình vi phân sau:

$$tx''(t) - (2t+1)x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t}, \quad x(0) = -\frac{1}{2}.$$

Câu 4b - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20222

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế của phương trình với $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$, ta có:
- $\mathcal{L}\{tx''(t)\} = -(s^2X(s) + \frac{1}{2}s + C)' = -2sX(s) - s^2X'(s) - \frac{1}{2}$ (với C là hằng số)
- $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) + \frac{1}{2}$

- $\mathcal{L}\{tx'(t)\} = -\left(sX(s) + \frac{1}{2}\right)' = -X(s) - sX'(s)$

$\Rightarrow -2sX(s) - s^2X'(s) - \frac{1}{2} + 2X(s) + 2sX'(s) - sX(s) - \frac{1}{2} - 2X(s) = X'(s)(2s - s^2) - 3sX(s) - 1 = \frac{2}{s-2}$

$\Rightarrow X'(s) \cdot s(2-s) - 3sX(s) = \frac{s}{s-2} \Leftrightarrow (2-s)X'(s) - 3X(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow X'(s) + \frac{3}{s-2} = \frac{-1}{(s-2)^2}\ (s \neq 2)$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, ta có:

$$X(s) = e^{\int -\frac{3}{s-2}ds} \cdot \left(K + \int \frac{-1}{(s-2)^2} e^{\frac{3}{s-2}ds} ds\right) = \frac{1}{(s-2)^3} \cdot \left(K + \int \frac{-1}{(s-2)^2} \cdot (s-2)^3 ds\right)$$
$$= \frac{1}{(s-2)^3} \cdot \left(K - \frac{(s-2)^2}{2}\right) = \frac{K}{(s-2)^3} - \frac{1}{2(s-2)} \quad \text{(với } K \text{ là hằng số)}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $x(t) = \frac{K}{2}t^2e^{2t} - \frac{e^{2t}}{2}$

Chấm điểm:
- Biến đổi Laplace 2 vế thu được phương trình (0.5đ)
- Giải PTVP tuyến tính cấp 1, kết luận nghiệm (0.5đ)

5. Giải bài toán giá trị ban đầu bằng phương pháp sử dụng phép biến đổi Laplace

$$ty'' - ty' + y = 2, y(0) = 2, y'(0) = -4$$

.

Câu 8 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

Ta đặt $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$.
Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của phương trình ta có:

$$\mathcal{L}\{ty''\} - \mathcal{L}\{ty'\} + Y(s) = \frac{2}{s} \tag{1}$$

Áp dụng công thức Laplace của đạo hàm ta có:
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s + 4$
- $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$

Áp dụng công thức đạo hàm của Laplace ta có:
- $\mathcal{L}\{ty''\} = (-1)^1(\mathcal{L}\{y''\})' = -2sY(s) - s^2Y'(s) + 2$
- $\mathcal{L}\{ty'\} = (-1)^1(\mathcal{L}\{y'\})' = -Y(s) - sY'(s)$

Thay vào phương trình (1) ta có:

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + 2 + Y(s) + sY'(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$\Rightarrow -s(s-1)Y'(s) - (2s-2)Y(s) = -2\frac{s-1}{s}$$
$$\Rightarrow Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp 1 với $p(s) = \frac{2}{s}; q(s) = \frac{2}{s^2}$ có công thức nghiệm tổng quát là:

$$Y(s) = e^{-\int p(s)ds}\left(\int q(s)e^{\int p(s)ds}ds + K\right) = e^{-\int \frac{2ds}{s}}\left(\int \frac{2}{s^2}e^{\int \frac{2ds}{s}}ds + K\right)$$
$$= \frac{1}{s^2}\left(\int 2ds + K\right) = \frac{1}{s^2}(2s + K) = \frac{2}{s} + \frac{K}{s^2}$$
$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^2}\right\} = 2 + Kt$$

Mà $y'(0) = -4 \Rightarrow K = -4$. Nên $y(t) = 2 - 4t$

6. Sử dụng phép biến đổi Laplace, giải phương trình vi phân:

$$x'' + 4x = \sin(2t); \quad x(0) = 0;\ x'(0) = 1.$$

Câu 7 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20222

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế của phương trình với $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$, ta có:

$$s^2X(s) - 1 + 4X(s) = \frac{2}{s^2+4} \Leftrightarrow X(s)(s^2+4) = \frac{2}{s^2+4} + 1 \Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2} + \frac{1}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)} \cdot \frac{1}{(s^2+4)}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}$$

Ta xét: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)} \cdot \frac{1}{(s^2+4)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{f.g\}$ với $\mathcal{L}\{f\} = \sin(2t)$, $\mathcal{L}\{g\} = \frac{1}{2}\sin(2t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)} \cdot \frac{1}{(s^2+4)}\} = \int_0^t \sin(2\tau) \cdot \frac{1}{2}\sin(2t - 2\tau)d\tau = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) = \frac{5}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $x(t) = \frac{5}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$

Chấm điểm:
- Biến đổi đúng đến $\mathcal{L}\{ty''\}, \mathcal{L}\{ty'\}$ (0.5đ)
- Thay vào phương trình, giải ra được nghiệm đúng của phương trình (0.5đ)

Bài tập tự làm:

7. Giải phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & \text{nếu } 0 \le t < 4\pi \\ 0, & \text{nếu } t \ge 4\pi \end{cases}$$

Câu 4b - Đề 4 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20222

8. Giải bài toán sau đây bằng biến đổi Laplace:

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0$.

Câu 5b - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 2022.2

9. Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace:

$$\begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} ; \quad f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

Câu 9 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20212

10. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'' - 4x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} ; \quad f(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t), & \text{nếu } t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 9 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20212

11. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân sau:

a) $x''' - 4x'' - 5x' = 2x, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 1.$

b) $x'' + 4x = f(t)$, với $x(0) = x'(0) = 0$ và $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & t \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Câu 5 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20181

12. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x' - 2y = 1 \\ y' + 2x = t \end{cases}$ biết rằng $x(0) = y(0) = 0$.

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

13. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân $y^{(3)} - 2y'' + y' = 4$, biết rằng $y(0) = 1; y'(0) = 2; y''(0) = -2$.

Câu 7 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20172

14. Tìm một nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân sau bằng phương pháp biến đổi Laplace:

$$ty'' + (1 - t)y' + y = 0.$$

Câu 6 - Đề 7 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20162

15. Giải phương trình vi phân $y'' + 4y = f(t)$ với $f(t) = \begin{cases} 3\sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$, biết $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Câu 7 - Đề 5 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20162

16. Sử dụng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân $y^{(4)} + 3y'' + 2y = t$, thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$.

Câu 6 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kỳ 20161

17. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân: $x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Câu 8 - Đề 1 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

18. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân: $tx'' + (4t - 3)x' + 4x = 0, x(0) = 0$.

Câu 8 - Đề 3 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

19. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân: $x^{(4)} + 5x'' - 36x = 0$, với $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 1$.

Câu 8 - Đề 6 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152

20. Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân: $x^{(3)} - 3x'' + 16x' + 20x = 0$, với $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1$.

Câu 8 - Đề 8 - Đề thi cuối kỳ GT3 - Học kì 20152