

ĐỀ 1-20191

Câu 1(1đ). Mệnh đề “Phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm nên $3 + 5 \geq 10$ đúng hay sai? Tại sao?

Giải: Mệnh đề A: “Phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm” là một mệnh đề sai ($A = 0$).

Mệnh đề B: “ $3 + 5 \geq 10$ ” cũng là một mệnh đề sai ($B = 0$).

Vậy mệnh đề kéo theo: $A \Rightarrow B$ là mệnh đề đúng.

Câu 2(1đ). Cho ánh xạ $f: E \rightarrow F$ và $\emptyset \neq B \subset F$. Chứng minh rằng:

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$$

Giải: Xét $y \in F \setminus B$ và $f(x) = y$

$$\text{Do } \begin{cases} y \in F \\ y \notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(F) = E \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \text{ hay } x \in E \setminus f^{-1}(B)$$

Vậy nên $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

Câu 3(1đ). Tìm tam thức bậc hai hệ số thực, $p(x)$ sao cho:

$$p(1) = 0; p(-1) = 4; p(2) = 1.$$

Giải: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{Do } p(1) = 0; p(-1) = 4; p(2) = 1 \text{ nên có hệ } \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

Câu 4(1,5đ). Tìm các nghiệm phức của phương trình $z^{10} + z^5 + 1 = 0$

Giải: $z^{10} + z^5 + 1 = 0$ (1)

Đặt $z^5 = t$ thì (1) trở thành: $t^2 + t + 1 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 = 1 \\ t \neq 1 \end{cases} \Rightarrow t = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k \in \{1; 2\}$$

$$\Rightarrow z = \cos \frac{\frac{2k\pi}{3} + 2k'\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2k\pi}{3} + 2k'\pi}{5}; k \in \{1; 2\}, k' \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{ \cos \frac{\frac{2k\pi}{3} + 2k'\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2k\pi}{3} + 2k'\pi}{5} \mid k = \overline{1; 2}; k' = \overline{0; 4} \right\}.$

(Cách 2: $\begin{cases} z^{15} = 1 \\ z^5 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow z = \cos \frac{2k\pi}{15} + i \sin \frac{2k\pi}{15}$ với $k = \overline{0; 17}$ và $k \not\equiv 0 \pmod{3}$) \rightarrow Cách này ngắn gọn hơn).

Câu 5 (1đ). Tập hợp $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ có lập thành nhóm với phép nhân số phức hay không? Tại sao?

Giải: $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ với phép nhân số phức là nhóm do:

- Tính kết hợp: $(u.v).w = u.(v.w) = u.v.w \quad \forall u, v, w \in G$
- Phần tử trung hòa là 1: $z.1 = 1.z = z \quad \forall z \in G$
- Phần tử đối xứng:

Với $z \in G$, do $|z| = 1$ nên $z \neq 0 \Rightarrow$ Tồn tại phân tử $\frac{1}{z}$

Rõ ràng $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ và $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$ nên $\frac{1}{z} \in G$

Vậy (G, \cdot) là nhóm.

Câu 6 (1đ). Ký hiệu $M_{1 \times 2}$ là tập hợp các ma trận thực có kích thước 1×2 .

Tìm m để ánh xạ $f : M_{1 \times 2} \rightarrow M_{1 \times 2}, f(X) = X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & m \end{pmatrix}$ là đơn ánh.

Giải: Xét $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 & -x_1 + mx_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$

Chọn $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \neq X$

Giả sử f là đơn ánh $\Rightarrow f(X) \neq f(Y) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \neq 2y_1 + 4y_2 \\ -x_1 + mx_2 \neq -y_1 + my_2 \end{cases} \quad (1)$

Nếu chọn y_1, y_2 thỏa $2x_1 + 4x_2 = 2y_1 + 4y_2$ thì $(1) \Rightarrow m \neq -2$

Dễ thấy với $m \neq -2$ thì $f(X) \neq f(Y) \quad \forall X \neq Y$ tùy ý hay f đơn ánh

Vậy $m \neq -2$.

Câu 7 (1,5đ). Tìm m để tồn tại ma trận X sao cho

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}$$

Giải: $\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & -2m-6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \quad (-2L_i - L_1 \rightarrow L_i, i = \overline{2;4})$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 20 & 12-2m \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right] \begin{pmatrix} L_3 - 3L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + L_2 \rightarrow L_4 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 20 & 12-2m \\ 0 & 0 & 0 & -80+4(12-2m) \end{array} \right] \quad (20L_4 + 4L_3 \rightarrow L_4)$$

Ma trận X tồn tại $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A})$

$$\Leftrightarrow -80 + 4(12 - 2m) = 0 \Leftrightarrow 12 - 2m = 20 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy $m = -4$.

Câu 8(1đ). Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\det(A - \lambda E) = 0$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

Giải: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Vậy $\lambda \in \{-1; 2\}$.

Câu 9 (1đ). Cho A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn: $A^{2019} = 0$ và $AB = A + B$. Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

Giải: • $A^{2019} = 0 \Rightarrow \det(A^{2019}) = 0 \Rightarrow (\det A)^{2019} = 0 \Rightarrow \det A = 0$

• $AB = A + B \Leftrightarrow (A - I) \cdot B = A$ (với I là ma trận bậc đơn vị cùng cấp A)

$$\Rightarrow \det(A - I) \cdot \det B = \det A = 0 \quad (1)$$

$$\bullet A^{2019} = 0 \Leftrightarrow A^{2019} - I = -I$$

$$\Leftrightarrow (A - I)(A^{2018} + A^{2017} + \dots + I) = -I$$

$$\Rightarrow \det(A - I) \cdot \det(A^{2018} + \dots + I) = \det(-I) \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A - I) \neq 0 \quad (2) \text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow \det B = 0 \text{ (đpcm)}$$

Có thể bạn đọc quan tâm

KHÓA HỌC GIẢI TÍCH 1 + ĐẠI SỐ

- ☒ Tổng quan lý thuyết & các công thức cần nhớ
- ☒ Chắt lọc các dạng bài tập, ví dụ quan trọng trích trong đề thi
- ☒ Nhóm kín thảo luận/ hỏi đáp/live stream
- ☒ Đề thi thử giữa kỳ/ cuối kỳ ôn tập lại các dạng bài
- ☒ Tổng hợp đề thi giữa kỳ và hướng dẫn giải (tặng bản cứng)
- ☒ Tổng hợp đề thi cuối kỳ và hướng dẫn giải (tặng bản cứng)
- ☒ Gợi ý giải đề cương
- ☒ Chính sách hoàn tiền 40k khi làm 60% BTVN
- ☒ Chính sách hoàn tiền 40k khi kết quả thi được từ B+ trở lên

bkkhongsotach.edu.vn

Mang lại giá trị thực cho sinh viên, gửi tâm huyết trong từng sản phẩm!

bkkhongsotach.edu.vn
Thảo luận thêm tại:
fb.com/groups/bkkhongsotach