ĐỀ CK ĐẠI SỐ

BỘ ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ

Dành cho sinh viên trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Biên soạn: Tài liệu HUST

DANH SÁCH ĐỀ THI

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho $z_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Tìm n nhỏ nhất để $\operatorname{Re}(z_n) = 0$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Chứng minh $W = \left\{ X \mid X = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian véctơ các ma trận vuông cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Tìm $\dim W$.

Câu 3 *(2,5 điểm)*. Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian véctơ các đa thức có bậc ≤ 2.

1. Hệ $\{u_1(x) = 2 + x + 3x^2, u_2(x) = -1 + 2x, u_3(x) = 1 + 8x + 6x^2\}$ có phải là cơ sở của $P_2(x)$ không? Vì sao?

2. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ được xác định bởi:

$$f\left(a + bx + x^2\right) = 6a - 2b - 2c + (2a - 3b)x + (4a + b - 2c)x^2$$

a) Viết ma trận của f theo cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2(x)$.

b) Tìm $\dim \operatorname{Ker} f$.

Câu 4 *(2,5 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^3$, tích vô hướng của $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ được xác định bởi $\langle a, b \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

1. Cho $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1)$. Tìm véctơ $v \ne (0,0,0)$ sao cho $\langle v, u \rangle = 0$ với mọi $u \in \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$.

2. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x - 2y - 2z, -2x + 5y + z, 2x + y + 5z)$$

Tìm cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Với $0 < a$, ký hiệu $C_{[-a,a]} = \{ f(x) \mid f(x)$ liên tục trên $[-a, a]\}$. Ánh xạ $\Phi : C_{[-a,a]} \to \mathbb{R}, \Phi(f) = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ có phải là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp thoả mãn $A^{2019} = 0$ và $AB = A + B$. Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho V là không gian véctơ hữu hạn chiều và toán tử tuyến tính $f : V \to V$. Chứng minh rằng $\dim\left(\operatorname{Ker} f^2\right) \le 2\dim(\operatorname{Ker} f)$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-1+i}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n nhỏ nhất để $\operatorname{Im}(z_n) = 0$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Chứng minh $W = \left\{ X \mid X = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian con của không gian véctơ các ma trận vuông cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Tìm $\dim W$.

Câu 3 (1 điểm). Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian véctơ các đa thức có bậc ≤ 2.

1. Hệ $\{u_1(x) = 1 - x + x^2, u_2(x) = 3 + 2x - 3x^2, u_3(x) = 1 + 3x - 5x^2\}$ có phải là cơ sở của $P_2(x)$ không? Vì sao?

2. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ được xác định bởi:

$$f\left(a + bx + x^2\right) = 2a - b + c + (a - 2b)x + (a + b + c)x^2$$

a) Viết ma trận của f theo cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2(x)$.

b) Tìm $\dim \operatorname{Ker} f$.

Câu 4 *(2,5 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^3$ tích vô hướng của $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ được xác định bởi $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

1. Cho $u_1 = (-2,1,1), u_2 = (1,1,-1)$. Tìm véctơ $v \ne (0,0,0)$ sao cho $\langle v, u \rangle = 0$ với mọi $u \in \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$.

2. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x, 5z)$$

Tìm cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Với $a < b$, ký hiệu $C_{[a,b]} = \{ f(x) \mid f(x)$ liên tục trên $[a,b]\}$. Ánh xạ $\Phi : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}, \Phi(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ có phải là toàn ánh không? Tại sao?

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp thoả mãn $B^{2020} = 0$ và $2AB = 2A + 3B$. Chứng minh rằng $\det(A) = 0$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho V là không gian véctơ hữu hạn chiều và toán tử tuyến tính $f : V \to V$. Chứng minh rằng $\dim\left(\operatorname{Ker} f^2\right) \le 2\dim(\operatorname{Ker} f)$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho $f(z)=z^3-(2+i)z^2+(2+2i)z-2i$. Tính $f(i)$ và giải phương trình $f(z)=0$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}, f(x,y)=\left(x^2+y\right)+(y-x)i$ có đơn ánh không? Vì sao?

Câu 3 *(1 điểm)*. Tìm $a,b\in\mathbb{R}$ để hệ $\begin{cases} x+2y+az=3 \\ 2x-y-az=1 \\ 2x+y+z=b \end{cases}$ có vô số nghiệm.

Câu 4 *(1,5 điểm)*. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V và phép biến đổi tuyến tính $f:V\to V$ có ma trận theo cơ sở E là $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm cơ sở trực chuẩn $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở của không gian véctơ V. Hệ các véctơ $F=\{f_1=2e_1+4e_2-e_3,\ f_2=e_1-2e_2+2e_3,\ f_3=e_1+6e_2-2e_3\}$ có phải là một cơ sở của V hay không? Vì sao?

Câu 6 *(2,5 điểm)*. Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian véctơ các đa thức có bậc ≤ 2.

1. Cho toán tử tuyến tính $f:P_2(x)\to P_2(x)$ xác định bởi:

$f\left(ax^2+bx+c\right)=(a-b)x^2+(3b+c)x+a+2b+c$. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$.

2. Trên $P_2(x)$ cho tích vô hướng $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ và $u_1(x)=1$;

$u_2(x)=x^2; v(x)=x$. Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $v(x)$ lên Span $\{u_1,u_2\}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch thoả mãn $A=4A^{-1}$. Tính $\det\left(A^{2019}-A\right)$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Trong không gian véctơ các hàm số liên tục trên [a, b], chứng minh hệ véctơ $\left\{u_k(x)=|x-\lambda_k|, k=\overline{1,n} \text{ với } \lambda_i\ne\lambda_j, i\ne j; i,j=\overline{1,n}\right\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho $f(z)=z^3+(1+2i)z^2+(1+2i)z+2i$. Tính $f(-2i)$ và giải phương trình $f(z)=0$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Anh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C},\ f(x,y)=\left(x^3+2y^2\right)+\left(3x^3+7y\right)i$ có toàn ánh không? Vì sao?

Câu 3 *(1 điểm)*. Tìm $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ để hệ $\begin{cases}2x+y+az=\beta-2\\ x+\lambda y+2z=3\\ 2x-\lambda y-z=1\end{cases}$ có vô số nghiệm.

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V và phép biến đổi tuyến tính $f:V\to V$ có ma trận theo cơ sở E là $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Tìm cơ sở trực chuẩn $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở của không gian véctơ V. Hệ các véctơ $F=\{f_1=e_1+2e_2-2e_3,\ f_2=2e_1-3e_2+e_3,\ f_3=3e_1-e_2-e_3\}$ có phải là một cơ sở của V hay không? Vì sao?

Câu 6 *(2,5 điểm)*. Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian véctơ các đa thức có bậc ≤ 2.

1. Cho toán tử tuyến tính $f:P_2(x)\to P_2(x)$ xác định bởi:

$f\left(a+bx+cx^2\right)=2a-b+(2b+c)x+(a+b+c)x^2$. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$.

2. Trên $P_2(x)$ cho tích vô hướng $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ và $u_1(x)=1$; $u_2(x)=x; v(x)=x^2$. Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $v(x)$ lên $\operatorname{Span}\{u_1,u_2\}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch thoả mãn $9A=A^{-1}$. Tính $\det\left(A-A^{2017}\right)$.

Câu 8 *(1 điểm)*. Trong không gian véctơ các hàm số liên tục trên [a, b], chứng minh hệ véctơ $\left\{u_k(x)=|x-\lambda_k|, k=\overline{1,n}\text{ với } \lambda_i\ne\lambda_j, i\ne j; i,j=\overline{1,n}\right\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Giải phương trình sau trong trường số phức: $z^3-(2+3i)z^2-(1-3i)z=0$.

Câu 2 *(1.5 điểm)*. Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}$, với c là một số thực cho trước.

a) Chứng minh rằng A luôn khả nghịch.

b) Tìm ma trận X thoả mãn phương trình: $A^3X\left(A^{-1}\right)^2=E$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 2

Câu 3 *(1.5 điểm)*. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo hệ số thực m :

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4=1\\ 2x_1-4x_2+x_3=5\\ x_1-2x_2+2x_3-3x_4=m\end{cases}$$

Trong trường hợp hệ vô số nghiệm, hãy biểu diễn nghiệm theo x_2,x_4.

Câu 4 *(2 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

a) Tìm các giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính f

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

Câu 5 *(3 điểm)*. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:
$V=\operatorname{Span}\{v_1=(1;0;1;0),v_2=(1;1;1;0),v_3=(1;1;0;0),v_4=(1;-1;3;0)\}$.

a) Hệ véctơ $\{v_j\}_{j=1}^4$ có phải là một hệ trực giao không?

b) Hãy tìm một hệ cơ sở của V.

c) Tìm hình chiếu của véctơ $\omega=(2;0;-1;3)$ lên V.

Câu 6 *(1 điểm)*. Giả sử rằng $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $A^{2019}=0$ và A chéo hoá được. Chứng minh rằng: A phải là ma trận không.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Giải phương trình trong trường số phức: $z^4-(2+3i)z^3-(1-3i)z^2=0$.

Câu 2 *(1.5 điểm)*. Cho $A=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, với c là một số thực cho trước.

a) Chứng minh rằng A luôn khả nghịch.

b) Tìm ma trận X thoả mãn phương trình: $A^5X\left(A^{-1}\right)^4=E$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 2

Câu 3 *(1 điểm)*.

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4=1\\ 4x_1-8x_2-x_3+6x_4=5\\ x_1-2x_2+2x_3-3x_4=a\end{cases}$$

Trong trường hợp hệ vô số nghiệm, hãy biểu diễn nghiệm theo x_2, x_4.

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x]\to P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1)=x+x^2,\ f(x)=1+x^2,\ f\left(x^2\right)=1+x.$$

a) Tìm các giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính f

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:
$V=\text{Span}\{v_1=(1;-1;0;1), v_2=(1;1;0;0), v_3=(1;1;0;1), v_4=(0;-2;0;-1)\}$.

a) Hệ véctơ $\{v_j\}_{j=1}^4$ có phải là một hệ trực giao không?

b) Hãy tìm một hệ cơ sở của V.

c) Tìm hình chiếu của véctơ $\omega=(2;0;3;1)$ lên V.

Câu 6 *(1 điểm)*. Giả sử rằng $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $A^{2019}=0$ và A chéo hoá được. Chứng minh rằng: A phải là ma trận không.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho các mệnh đề A, B, C. Các mệnh đề $A \vee (B \to C)$ và $(A \vee B) \to C$ có tương đương logic không? Vì sao?

Câu 2 *(1 điểm)*. Giải phương trình phức sau: $z^4 - (2+4i)z^2 - 3 - 4i = 0$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ và thực hiện đổi chỗ hàng 1 và hàng 2, ta thu được ma trận B. Chứng tỏ luôn tồn tại ma trận X để $XA = B$.

Câu 4 (*2 điểm*). Cho hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + mx_4 = n+1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = n \\ x_1 + mx_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ $(m, n$ là tham số).

a) Tìm m, n để hệ có một nghiệm là $(2;1;3;1)$.

b) Tìm điều kiện của m, n để hệ có nghiệm.

Câu 5 *(1 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các véctơ:

$$u_1 = (1;0;1), u_2 = (-3;2;1), u_3 = (2;-1;0), u_4 = (5;6;7).\$$$

Tìm số chiều của không gian $U = \text{Span}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ và kiểm tra xem u_4 có thuộc vào không gian U hay không?

Câu 6 *(2.5 điểm)*. Cho biến đổi tuyến tính $f: P_1[x] \to P_1[x]$ xác định bởi:

$$f\left(a_0 + a_1x\right) = \left(a_0 + a_1\right) + \left(3a_0 - a_1\right)x.$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_1[x]$ và kiểm tra f có đơn ánh không?

b) Tìm các trị riêng và các véctơ riêng của f.

Câu 7 *(1.5 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véctơ:

$$u_1 = (1;2;1;1), u_2 = (2;1;1;2).$$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn B của không gian $W = \text{Span}\left(u_1, u_2\right)$.

b) Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $u = 2u_1 + 3u_2$ lên không gian W.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20193 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x$ và tập A= {0, 1, 2}.

Xác định $f(A);\ f^{-1}(A)$

Câu 2 *(2 điểm)*. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4 & =2 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4 & =7 \\ -x_1-3x_2+2x_3 & =-2 \\ 3x_1+4x_2-4x_3+(m+3)x_4 & =m+6 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss với m=3.

b) Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Câu 3 *(3 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(6x_1-2x_2+5x_3, 2x_1-x_2+x_3, x_2+2x_3).$$

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm $\dim \operatorname{Im} f;\ \dim \operatorname{Ker} f$.

c) Véctơ u=(3, 2, 1) có thuộc $\operatorname{Im} f$ không? Tại sao?

Câu 4 *(2 điểm)*. Chéo hoá ma trận $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ -8 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ biết rằng 3; 6 là các trị riêng của nó.

Câu 5 *(1.5 điểm)*. Cho không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc.

Cho $W=\operatorname{Span}\{(1,1,1),(3,4,5),(6,7,8)\}$.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

b) Tìm hình chiếu trực giao của u=(4,2,6) lên W.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho A là một ma trận thực vuông. Chứng minh rằng $\det\left(A^2+I\right)\geq 0$, ở đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20193 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng nếu $A \subset C$ thì $A \times B \subset C \times B$.

Câu 2 *(2 điểm)*. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R};\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = x + 2, g(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4}.$$

a) Ánh xạ g có phải toàn ánh không? Tìm $\operatorname{Im} g$.

b) Xác định ánh xạ tích $g \circ f$.

Câu 3 *(2 điểm)*. Cho các véctơ
$u_1 = (-1, 4, -2, -5, 1),\quad u_2 = (5, 1, 7, 6, 2),\quad u_3 = (3, 2, 4, 6, 0),\quad u_4 = (2, -1, 3, 0, 2)$ trong không gian $\mathbb{R}^5$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian sinh bởi các véctơ này.

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_3[x] \to P_2[x]$ xác định bởi:

$$f\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = (a+b) + 2cx + dx^2 \text{ với mọi } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Xác định ma trận f theo cặp cơ sở chính tắc của các không gian $P_3[x],\ P_2[x]$.

Câu 5 *(2 điểm)*. Chéo hoá ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường, cho các véctơ u=(-2, 0, -1, 1) và v=(1, -2, 1, 0).

a) Tính khoảng cách giữa 2 véctơ u, v.

b) Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt hệ véctơ u, v.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho α là argument của số phức $1 + i\sqrt{2}$, và n là một số nguyên dương. Rút gọn số phức $z = (1 + i\sqrt{2})^n + (1 - i\sqrt{2})^n$ theo n và α.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A=[1;3]$ và $B=(m;m+3)$.

Tìm m để $(A\setminus B)\subset(A\cap B)$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm các số phức z thoả mãn $z^3=4\sqrt{3}-4i$, với i là đơn vị ảo.

Câu 3 *(1 điểm)*. Giải phương trình ma trận $\begin{bmatrix}3 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}-X$.

Câu 4 *(4 điểm)*. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4 & =0\\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4 & =0\\ -x_1+(m-3)x_2-3x_3+7x_4 & =m\end{cases}$ với m là tham số

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c) Khi $m=0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véctơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v=(4;\,5;\,-6;\,-9)$ lên không gian con của U ở câu c.

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(-2x_1+3x_2+x_3;-x_1-x_2+x_3;-3x_1+2x_2+2x_3).$$

a) Tìm m để véctơ $u=(1;3;m)\in\operatorname{Im}(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó, ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 *(1 điểm)*. Trong không gian véctơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véctơ $B=\{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ldots,\ \sin 10x,\ \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A=[2;4]$ và $B=(m;m+1)$.

Tìm m để $(B\setminus A)\subset(A\setminus B)$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tìm các số phức z thoả mãn $z^3=4\sqrt{3}+4i$, với i là đơn vị ảo.

Câu 3 *(1 điểm)*. Giải phương trình ma trận $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+X$.

Câu 4 *(4 điểm)*. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4 = m\\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4 = 0\\ -x_1+mx_2-2x_3-x_4 = 0\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

c) Khi $m=0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véctơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v=(5;\ 2;\ 4;\ -3)$ lên không gian con của U ở câu c.

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(2x_1-3x_2+x_3;x_1+x_2+x_3;3x_1-2x_2+2x_3).$$

a) Tìm m để véctơ $u=(3;5;m)\in\operatorname{Im}(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó, ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 *(1 điểm)*. Trong không gian véctơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véctơ $B=\{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\dots,\ \sin 10x,\ \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho cáo mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề: $(A \vee B) \to \overline{C}$.

Câu 2 *(1.5 điểm)*. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 - 1$. Ảnh xạ f có phải là đơn ánh không? Vì sao? Xác định tích các môđun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5+2i\})$.

Câu 3 *(2 điểm)*. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $\det(A+2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Câu 4 *(1.5 điểm)*. Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véctơ:

$$u_1 = 1 + 2x - x^3,\ u_2 = 2 - x + x^2 + 2x^3,\ u_3 = -1 + x - x^2 - x^3,\ u_4 = 4 + 2x^2$$

và các không gian véctơ con $V_1 = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}, V_2 = \operatorname{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1;2;-1) = (2;2;4),\quad f(2;1;3) = (1;2;-1),\quad f(1;1;2) = (2;3;1).$$

a) Xác định $\operatorname{Im}(f)$

b) Tìm các trị riêng của f

Câu 6 *(2 điểm)*. Cho dạng toàn phương:

$$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với a=2, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v\rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thoả mãn $\langle u, u\rangle = h(u)$.

Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hoá Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề: $\overline{A} \to (B \wedge C)$.$

Câu 2 *(1.5 điểm)*. Cho ánh xạ $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 + 1$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không? Vì sao? Xác định tích các môđun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5-2i\})$

Câu 3 *(2 điểm)*. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $\det(A-2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $XA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 4 *(1.5 điểm)*. Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véctơ:

$$u_1 = 1 - 2x - x^3,\ u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3,\ u_3 = -1 + x - x^2 - x^3,\ u_4 = 4 - 4x + 2x^2 + 2x^3$$

và các không gian véctơ con $V_1 = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}, V_2 = \operatorname{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(2;3;-1) = (6;2;-2),\ f(1;1;3) = (2;3;-1),\ f(3;1;-1) = (5;4;-2).$$

a) Xác định $\operatorname{Im}(f)$

b) Tìm các trị riêng của f

Câu 6 *(2 điểm)*. Cho dạng toàn phương:

$$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với a=2, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v\rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thoả mãn $\langle u, u\rangle = h(u)$.

Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hoá Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(1 điểm)*. Tìm các nghiệm phức của phương trình $z^4 = (\sqrt{3}+i)^6$ thoả mãn điều kiện $|z-2i|<3$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 14 & 11\end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X thoả mãn $AX = B - X$.

Câu 3 *(2 điểm)*. Trong không gian $P_2[x]$ cho các véctơ:

$$v_1 = 1 + x + x^2,\ v_2 = 2 + mx - x^2,\ v_3 = 4 + 5x + x^2,\ v = 10 + 11x - 5x^2.$$

a) Xác định m để hệ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Với $m=2$, chứng minh B lập thành cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm toạ độ của véctơ v đối với cơ sở B.

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thoả mãn:

$$f(1,1,0) = (3,3,9),\quad f(2,-1,1) = (-1,3,1),\quad f(0,1,1) = (1,1,3).$$

a) Lập ma trận của f đối vói cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Xác định $f(3,4,5)$.

c) Xác định số chiều và một cơ sở của ker f.

Câu 5 *(2 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véctơ:

$v_1 = (1,1,2,-1),\ v_2 = (1,2,1,1),\ v_3 = (3,4,5,-1)$. Cho $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Xác định số chiều và một cơ sở của V.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vecto v=(4,1,0,4) lên V.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho ma trận A cỡ $m\times n$ với $m \le n$, có hạng bằng m. Chứng minh tồn tại ma trận B cỡ $n\times m$ sao cho $AB = E$, với E là ma trận đơn vị.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20181 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho mệnh đề P: " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y < x$ ".

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Câu 3 *(2 điểm)*. Cho các vecto $v_1 = (2,1,0,-3), v_2 = (1,-1,2,5), v_3 = (5,3,1,2), v_4 = (8,5,6,1)$.

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm toạ độ của véctơ $u = (23,14,17,-5)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1,2,3) = (13,-7,-2), \quad f(1,2,0) = (4,2,-2), \quad f(2,0,0) = (4,0,4).$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, véctơ riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5 *(2 điểm)*. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véctơ:

$$v_1 = (1,-1,-1,1,1), \quad v_2 = (2,1,4,-4,2), \quad v_3 = (4,-3,-2,6,0).$$

Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gram-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $v = (0,2,4,6,8)$ lên V.

Câu 6 *(1 điểm)*. Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B, thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20183 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1. Xét xem mệnh đề sau đúng hay sai: "Nếu số thực x thoả mãn phương trình $x^2 - 2x + 10 = 0$ thì x phải là số âm".

Câu 2. Gọi $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức. Xét ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi công thức $f(z) = z^6 - 2z^3 - 2 + i$. Xác định tập hợp $f^{-1}(\{1+i\})$.

Câu 3. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X thoả mãn $XA = B$.

Câu 4. Gọi G là tập hợp các ma trận vuông cấp n với định thức khác 0. Chúng minh rằng G là một nhóm với phép nhân ma trận.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véctơ:

$$v_1 = (1;1;0;1), \quad v_2 = (2;1;-1;2), \quad v_3 = (-1;2;1;0), \quad v_4 = (1;2;-1;2).$$

Đặt $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}, V = \text{Span}\{v_3, v_4\}$.

a) Tìm giá trị m sao cho véctơ $\alpha = (11;5;m;12)$ thuộc không gian $U + V$.

b) Xác định số chiều và một cơ sở của $U \cap V$.

c) Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $v = (3;2;0;6)$ lên U.

Câu 6. Ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, với $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = 2 - x + x^2$.

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$. Tính $f\left(4 + 3x + 2x^2\right)$.

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

Câu 7. Cho A là ma trận thực vuông cấp 4. Biết rằng đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda E)$ nhận các số phức $\lambda_1 = 1 + 2i$ và $\lambda_2 = 3 - 2i$ làm nghiệm. Tính $\det(A)$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20171 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bờ $f(x)=x^2+2x-1$ và tập hợp $A=\{2;1;-3\}$. Xác định tập ảnh $f(A)$ và tập nghịch ảnh $f^{-1}(A)$.

Câu 2 *(1.5 điểm)*. Cho phương trình phức $z^4+16i=0$. Biểu diễn hình học các nghiệm của phương trình trên.

Câu 3 *(1 điểm)*. Giải phương trình ma trận $AX+A^T=2B$, với

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 8\end{bmatrix} \text{ và } B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Câu 4 *(1 điểm)*. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1+2x_2-x_3=3\\ x_1+mx_2+2x_3=4\\ 2x_1+3x_2+x_3=-m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Câu 5 *(1.5 điểm)*. Trong không gian $P_2[x]$, cho các véctơ $u_1=1+x-x^2, u_2=3x-x^2$, $u_3=2+3x,\ \ u_4=-1+x-2x^2$. Đặt $U_1=\text{span}\{u_1,u_2\}$ và $U_2=\text{span}\{u_3,u_4\}$. Xác định số chiều và một cơ sở của không gian $U_1\cap U_2$.

Câu 6 *(2 điểm)*. Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(1;2;-1)=(4;-2;-6);\quad f(1;1;2)=(5;5;0);\quad f(1;0;0)=(1;2;1)$$

a) Tìm m để $u=(6;-3;m)\in \text{Im}(f)$.

b) Tìm các giá trị riêng và véctơ riêng của f.

Câu 7 *(1.5 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc.

a) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ gồm 2 véctơ sau:

$$u_1=(1;1;1;0) \text{ và } u_2=(0;1;1;1).$$

b) Cho vecto v=(3;2 ;4 ;2). Xác định véctơ $u\in\text{Span}\{u_1,u_2\}$ sao cho $\| u-v\|$ nhỏ nhất.

Câu 8 *(0.5 điểm)*. Trong không gian $P_{2018}[x]$, tìm một cơ sở và số chiều của không gian $V=\{p(x)|\ p(1)=p(2)=0\}$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20171 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^7=(z-i)^7$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Câu 2 (1 diểm). Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1.5 điểm)*. Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 & =0\\ ax_2+(1-a)x_3+\left(a^2+1\right)x_4 & =0\\ x_1+(2-a)x_2-x_3-2a^2x_4 & =0\end{cases}$$

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(4x-2y+2z,\ \ -2x+y-z,\ \ 2x-y+z).$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$, hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm toạ độ của véctơ $\omega=(1,0,1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau, với điều kiện $x^2+y^2+z^2=9$:

$$\phi(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2-4xy+4xz-2yz,\ \ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Câu 5 *(1.5 điểm)*. Trong không ain vec to $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:

$$V_1=\text{Span}\{v_1=(1;2;3;1),v_2=(1;3;3;2)\}$$
$$V_2=\text{Span}\{v_3=(1;2;5;3),v_4=(1;3;4;3)\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của V_1+V_2. Tìm hình chiếu của $\omega=(1;1;2;0)$ lên V_1+V_2.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2, và ánh xạ $\varphi:P_2[x]\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(p(x))=(p(0),p(1),p(-1))$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1 điểm)*. Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n\times 1$. Giả sử rằng A, B là 2 ma trận vuông thực cấp $n,(0<n\in\mathbb{N})$ thoả mãn: $X^tAY=X^tBY,\forall X,Y\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Chứng minh rằng $A=B$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20171 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 *(1 điểm)*. Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^9=(z-i)^9$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Giaii phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1.5 điểm)*. Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-x_4 &=0\\ ax_2+(1-a)x_3+\left(a^2+1\right)x_4 &=0\\ 2x_1+(4-a)x_2-4x_3-2(a^2+1)x_4 &=0\end{cases}$$

Câu 4 *(31.5 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(x,y,z)=(4x+2y-2z,2x+y-z,-2x-y+z)$.

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$, hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm toạ độ của véctơ $\omega=(1,0,1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau, với điều kiện $x^2+y^2+z^2=16$:

$$\phi(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Câu 5 *(1.5 điểm)*. Trong không ain vec to $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:

$$V_1=\operatorname{Span}\{v_1=(1;2;3;1),v_2=(1;3;3;2)\}$$
$$V_2=\operatorname{Span}\{v_3=(1;2;5;3),v_4=(1;3;4;3)\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1\cap V_2$. Tìm hình chiếu của $\omega=(1;1;0;1)$ lên $V_1\cap V_2$.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 , và ánh xạ $\varphi:P_2[x]\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(p(x))=(p(0),p(-1),p(1))$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1 điểm)*. Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n\times 1$. Giả sử rằng A, B là 2 ma trận vuông thực cấp $n,(0<n\in\mathbb{N})$ thoả mãn: $X^tAY=X^tBY,\forall X,Y\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A=B$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20171 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)

Câu 1 *(2 điểm)*. Giải phương trình trong tập sồ phức:

a) $z^2-(\sqrt{3}+1)iz-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i=0$.   b) $\dfrac{1}{(2z+9)^{22}}-\dfrac{(\sqrt{3}+1)i}{(2z+9)^{11}}-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i=0$

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho các ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-3&1\\1&0&-2\\2&1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\2&3&-6\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X sao cho $AX-B=CX$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Tìm m và n sao cho không gian nghiệm của hệ phương trình sau có số chiều là 2

$$\begin{cases}x_1-2x_2+mx_3+3x_4=0\\2x_1-x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+2x_2-x_3+nx_4=0\end{cases}$$

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ với:

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-3x_3,\ 3x_1-x_2+2x_3,\ -7x_1+7x_2-12x_3,\ -5x_1+4x_2-7x_3)$
$\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$.

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}-6&-4&4\\4&4&-2\\-14&-7&9\end{pmatrix}$.

Hãy tính các giá trị riêng của A, sau đó chéo hoá ma trận A.

Câu 6 *(2 điểm)*. Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho ba vecto
$v_1=(1;0;-1;0),\ \ v_2=(1;-2m;m;1),\ \ v_3=(1;1;1;0)$.

a) Tìm m để hai véctơ v_1,v_2 trực giao với nhau, và với m tìm được đó, hãy chúmg minh rằng hệ vecto $\{v_1,v_2,v_3\}$ là độc lập tuyến tính.

b) Với m tìm được ở trên, hãy tính hình chiếu trực giao của vecto $u=(0;2;1;-1)$ lên không gian Span $\{v_1,v_2,v_3\}$.

Câu 7 *(1 điểm)*. Cho A là ma trận thực vuông cấp n chéo hoá được, và $p(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A (tức là $p(\lambda)=|A-\lambda I|$, với $\lambda\in\mathbb{R}$). Chứng minh rằng $p(A)=O$.

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20173 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(2 điểm)*.

1) Cho ánh xạ $f:[1;+\infty)\to(-2;+\infty)$ xác định bởi $f(x)=2x-2$. Ánh xạ f có phải là ánh xạ toàn ánh không? Vì sao?

2) Cho số phức $z=\dfrac{1+2i}{2-i}$, với $i^2=-1$. Tính $\sqrt[6]{z}$.

Câu 2 *(2 điểm)*.Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 15 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}, m$ là tham số.

1) Khi $m=1$, tìm ma trận X thoả mãn $AX=B$.

2) Tìm m để ma trận A có hạng nhỏ nhất.

Câu 3 *(3 điểm)*. Kí hiệu G là tập nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+3x_3+x_4=0\\ -2x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ -7x_1+2x_2+8x_3+2x_4=0\end{cases}$$

1) Chứng minh G là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của G.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $u=(1;-2;0;1)$ trên G.

Câu 4 *(2 điểm)*. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(2;1;-1)=(0;1;3),\quad f(1;2;1)=(3;2;3),\quad f(1;-1;2)=(1;3;0).$$

1) Tìm ma trận A của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (nếu có) để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng $\det\left(A^2+4E\right)\geq 0$..

ĐỀ CUỐI KỲ ĐẠI SỐ 20173 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 3)

Câu 1 *(2 điểm)*.

1) Cho ánh xạ $g:(-\infty;-1]\to[-2;+\infty)$ xác định bởi $g(x)=-2x-2$. Ánh xạ f có phải là ánh xạ đơn ánh không? Vì sao?

2) Cho số phức $z=\dfrac{5+i}{3-2i}$, với $i^2=-1$. Tính z^{2018}.

Câu 2 *(2 điểm)*. Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&n&2\\3&1&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}13&4&19\\4&1&6\end{pmatrix}, m$ là tham số.

1) Khi $n=0$, tìm ma trận X thoả mãn $XA=C$.

2) Tìm n để ma trận A có hạng lớn nhất.

Câu 3 *(3 điểm)*. Kí hiệu S là tập nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+3x_3+x_4=0\\-2x_1+x_2+x_3+x_4=0\\-7x_1+2x_2+8x_3+2x_4=0\end{cases}$$

1) Chứng minh G là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của S.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véctơ $u=(0;1;2;5)$ trên S.

Câu 4 *(2 điểm)*. Ký hiệu $P_2[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực, có bậc ≤ 2.

Cho toán tử tuyến tính $g:P_2[x]\to P_2[x]$ xác định bởi:

$$g\left(2+x-x^2\right)=x+3x^2, g\left(1+2x+x^2\right)=3+2x+3x^2, g\left(1-x+2x^2\right)=1+3x.$$

1) Tìm ma trận A của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ (nếu có) để ma trận của g theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 *(1 điểm)*. Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng $\det\left(A^2+9E\right)\ge 0$.