Chương 3: Không gian vector (tiếp)

1. **Cơ sở và số chiều của KGVT**

   a, Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính(ĐLTT và PTTT)

   - Hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ĐLTT nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$
   - Hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ PTTT nếu $\exists\ \lambda_i, i = \overline{1, n}$ không đồng thời bằng 0 mà $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$

     Chú ý:

     +, Hệ PTTT $\Leftrightarrow \exists$ 1 vector là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.

     +, Hệ quả: Hệ chứa vector θ luôn PTTT.

   b, Cơ sở, số chiều của KGVT

   - Hệ sinh: hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gọi là hệ sinh của KGVT V nếu $\forall$ v $\in V$, v đều là tổ hợp tuyến tính của các vector trong hệ.
   - Cơ sở: KGVT V trên trường K, hệ vector B được gọi là cơ sở của V nếu B là hệ sinh và B ĐLTT.
   - Nếu KGVT V có cơ sở B gồm n vector thì số chiều của V bằng n. Kí hiệu dimV= n (Nếu V= $\{\theta\}$ thì dimV= 0)

     Chú ý:

     B={(1, 0,..., 0);(0,1,...,0);...;(0,0,...,1)} (n vector) là hệ cơ sở chính tắc của R^n

   Định lý: V là KGVT n chiều, khi đó:

   +, Hệ n+1 vector bất kì đều PTTT.

   +, Hệ n vector ĐLTT bất kì đều lập thành cơ sở của V.

   +, Hệ n vector bất kì là hệ sinh đều lập thành cơ sở của V.

2. **Tọa độ của 1 vector đối với 1 cơ sở**

   Không gian vector n chiều có cơ sở B=$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

   Khi đó $\forall$ v $\in$ V có biểu diễn duy nhất v= $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Khi đó $x = (x_1, x_2, ...x_n)^T$ là tọa độ của vector v đối với sơ sở B,

kí hiệu $[v]_B = (x_1, x_2, ...x_n)^T$.

Ma trận tọa độ của hệ vector S theo cơ sở B:

- $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$

- $A = [S]_B = \big([v_1]_B, [v_2]_B, ...[v_n]_B\big)$ là m trận tọa độ cột của hệ vector S đối với cơ sở B .

- A^T là ma trận tọa độ hàng của hệ S đó với B.

3. **Công thức đổi cơ sở**

   KGVT V có 2 cơ sở $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ...e'_n\}$. Khi đó $P = [B']_B$ là ma trân tọa độ cột của B' đối với B cũng gọi là ma trân chuyển cơ sở từ B sang B'.

   Định lý: P khả nghịch và P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B. Với $v \in V$:

   + $[v]_B = P.[v]'_B$
   + $[v]'_B = P^{-1}.[v]_B$

4. **Hạng của hệ vector**

   - Là số vector của một bộ phận độc lập tuyến tính tối đa là tập con của hệ B. Kí hiệu $rankB, r(B)$.
   - **Định lý:** KGVT v có cơ sở $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, hệ vector S có ma trận P là ma trận tọa độ đối với cơ sở B. Khi đó $r(B) = r(P)$.

     Chú ý: Để tìm hạng của P ta chỉ thực hiện biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa về ma trận bậc thang.

     Hệ quả: Hệ vector S gồm n vector có ma trận tọa độ hàng đôi với B là p. Khi đó n vector của S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow r(S) = n \Leftrightarrow r(P) = n \Leftrightarrow detP \neq 0$.

* Một số ví dụ

1, xét xem hệ vector sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a, $A = \big\{(1; 0; 1), (1; -1; 2), (-2; 3; 5)\big\}$

b, $B = \big\{(2; 4; -1)\big\}$

Giải

a, ta có, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của hệ A đối với cơ sở chính tắc của R^3. Mà detP $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ nên hệ A là độc lập tuyến tính.

b, ta có $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của hệ B đối với cơ sở chính tắc của R^3.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow r(P) = 2 \Rightarrow$ hệ B là độc lập tuyến tính.

2, Cho hệ vector $B = \{(1;1;1),(1;1;2),(1;2;3)\}$

a, Chứng minh B là cơ sở của R^3.

b, Tìm tọa độ của $D = (6;9;14)$ đối với cở B.

Giải

a, Xét $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của B đối với cơ sở chính tắc của R^3. Mà $detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên hệ B độc lập tuyến tính.

Hệ B gồm 3 vector nên là cơ sở của R^3.

b, $-\ C_1 \quad v_1 = x_1(1;1;1) + x_2(1,1,2) + x_3(1,2,3) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1;2;3)$$

$-\ C_2$ Gọi E là cơ sở chính tắc của R^3

$[v]_B = S^{-1}[v]_E$, trong đó $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B $\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$