Bài tập chương 6

(Trường vô hướng)

Bài 1. Cho $u = x^2 + y^2 + z^2$. Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(1; 0; -1)$ với $\overrightarrow{\ell} = (1; -2; 2)$.

Bài 2. Cho hàm ẩn $z(x, y)$ xác định bởi $z^3 + 2xz - y = 0$ và $z(-1; -1) = 1$
Tính $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\ell}}(-1; -1)$ với $\overrightarrow{\ell} = (2; 1)$.

Bài 3. Cho $u = \sqrt[4]{x^4 + y^4 + z^4}$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u(1; 1; 1)$.

(Trường vector)

Bài 1. Tính thông lượng của trường vector $\overrightarrow{F} = x^4\overrightarrow{i} + y^4\overrightarrow{j} + z^4\overrightarrow{k}$ đi qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ hướng ra ngoài.

Bài 2. Tính thông lượng của trường vector $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j} + y^2(z+1)\overrightarrow{k}$ đi qua nửa mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ hướng ra ngoài.

Bài 3. Cho trường vector:

$$\overrightarrow{F} = (x^2y + y^2z)\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} + (yz^2 + xy^2)\overrightarrow{k}$$

Tìm những điểm trong trường vector không phải là điểm xoáy.

Bài 4. Các trường sau có phải trường thế ?

(a) $\overrightarrow{F} = -\dfrac{m}{r^3}\overrightarrow{r}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Trường hấp dẫn)

(b) $\overrightarrow{\text{grad}}u$; trong đó $u(x, y, z)$ là hàm có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục.

(c) $\overrightarrow{F} = \dfrac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{4}}}$

Bài 5. Tính hoàn lưu của trường vector $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ dọc theo đường cong C xác định bởi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ chiều dương trục Oz.

Bài 6. Cho trường vô hướng $u(x, y, z)$ và trường vector $\overrightarrow{F}$. Chứng minh rằng:

(a) $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}u) = \Delta u$

(b) $\overrightarrow{\text{rot}}(u\overrightarrow{F}) = u \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\text{grad}}u \wedge \overrightarrow{F}$