

CHƯƠNG III

Biến ngẫu nhiên hai chiều

Mục lục

1	Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều	1
1.1	Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc	1
1.2	Hàm phân phối xác suất, mật độ xác suất, mật độ xác suất có điều kiện	3
2	Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều	5
2.1	Kỳ vọng, phương sai	5
2.2	Hiệp phương sai (Covarian)	5

1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều

1.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

a) Với (X, Y) là biến ngẫu nhiên 2 chiều, rời rạc

$X \backslash Y$	y_1	...	y_n	Σ
x_1	p_{11}	...	p_{1n}	$P(X=x_1) = p_{11} + \dots + p_{1n}$
...
x_n	p_{n1}	...	p_{nn}	$P(X=x_n) = p_{n1} + \dots + p_{nn}$
Σ	$P(Y=y_1) = p_{11} + \dots + p_{n1}$...	$P(Y=y_n) = p_{1n} + \dots + p_{nn}$	1

Trong đó: $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$

Nếu X, Y độc lập $\Rightarrow P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j); E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

Nếu tồn tại một cặp (i, j) không thỏa mãn điều trên thì X, Y không độc lập.

b) Bảng phân phối xác suất biên

X	x_1	...	x_n
P	$P(X=x_1)$...	$P(X=x_n)$

Y	y_1	...	y_n
P	$P(Y=y_1)$...	$P(Y=y_n)$

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j)$$

c) Xác suất có điều kiện

$X Y=y_k$	x_1	...	x_n
P	$P(X=x_1 Y=y_k)$...	$P(X=x_n Y=y_k)$

$Y X=x_k$	y_1	...	y_n
P	$P(Y=y_1 X=x_k)$...	$P(Y=y_n X=x_k)$

$$E(X|Y = y_k) = \sum_i x_i P(X = x_i|Y = y_k)$$

$$E(Y|X = x_k) = \sum_j y_j P(Y = y_j|X = x_k)$$

Với $P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$

d) Kiểm tra tính độc lập:

Nếu X, Y là BNN rời rạc: Kiểm tra $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \forall (i, j)$

Bài tập:

Bài 1: Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2	3	4	5
P	0.15	0.3	0.25	0.2	0.08	0.02
Y	0	1	2	3	4	5
P	0.3	0.2	0.2	0.15	0.1	0.05

a) Tính $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$ (1.82; 1.7; 1.5676; 2.31)

b) Nếu X và Y độc lập, tính $P(X + Y \leq 2)$ (0.33)

Bài 2: Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập và có phân phối xác suất tương ứng là:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.3	0.2

Y	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

a) Tìm phân phối xác suất của $X^2, X + Y$

b) Tính kỳ vọng, phương sai của $X^2, X + Y$

Bài 3: Cho bảng phân phối xác suất:

	Y	1	2	3
X				
1		0.04	0.12	0.24
2		0.06	0.18	0.36

a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y

b) Chứng minh rằng X, Y độc lập

c) Lập bảng phân phối xác suất của $Z = X \cdot Y$

d) Tính kỳ vọng $E(Z)$

Bài 4: Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ một hộp gồm 3 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi vàng. Gọi X, Y lần lượt là số bi xanh, bi vàng trong 3 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất đồng thời cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y)

Bài 5: Từ kết quả phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (X) và chi phí cho quảng cáo (Y) (đơn vị triệu đồng) của một công ty, thu được bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

	Y	100	200	300
X				
1		0.15	0.1	0.14
1.5		0.05	0.2	0.15
2		0.01	0.05	0.15

a) Tính giá trị trung bình và phương sai của doanh số bán hàng.

- b) Tính giá trị trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo.
 c) Nếu chi phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng thì doanh số trung bình là bao nhiêu?
 d) Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo là?

1.2 Hàm phân phối xác suất, mật độ xác suất, mật độ xác suất có điều kiện

a) Hàm phân phối xác suất đồng thời:

$$F_{XY}(x, y) = P(X < x; Y < y) = \begin{cases} \sum_{x_i < x} \sum_{y_i < y} P(X = x_i; Y = y_i), & \text{nếu (X, Y) rời rạc} \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy, & \text{nếu (X, Y) liên tục} \end{cases}$$

Ta có:

$$0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1 \quad F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0 \quad F(+\infty, +\infty) = 1;$$

b) Hàm phân phối xác suất thành phần (biên):

$$F_X(x) = P(X < x) = F(x; +\infty) \quad F_Y(y) = P(Y < y) = F(+\infty; y)$$

Nếu (X, Y) độc lập thì: $F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

c) Hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f(u, v) : F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Tính chất:

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = 1$$

$$P((X, Y) \in D) = \iint_{D \cup S_{XY}} f(x, y) dx dy \text{ hay } P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

d) Hàm mật độ xác suất biên:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Nếu (X, Y) độc lập thì: $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

e) Hàm mật độ xác suất có điều kiện (ít ra, có thể bỏ qua)

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

f) Kiểm tra tính độc lập:

- Nếu X, Y là BNN rời rạc: kiểm tra $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$
- Nếu X, Y là BNN liên tục: kiểm tra $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- X, Y rời rạc hoặc liên tục: kiểm tra $F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Bài tập:

Bài 1: Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y)

X \ Y	1	2	3
1	0.1	0.25	0.1
2	0.15	0.05	0.35

Tính $F(1,2); F(2,3)$

Bài 2: Biến ngẫu nhiên liên tục X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{trái lại} \end{cases}$$

- Tính hệ số k
- Tính $P(2 \leq X < 3, 1 \leq Y < 3)$

Bài 3: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) có hàm mật độ xác suất là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kx^2, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ 0, & \text{trái lại} \end{cases}$$

- Tính hệ số k
- Tính $P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right)$

Bài 4: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kx, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{trái lại} \end{cases}$$

- Tính hệ số k
- Tìm các hàm mật độ xác suất của X, Y
- X, Y có độc lập không?

Dạng bài: Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên 2 chiều (ít ra)

Bài 1: Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & \text{nếu } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

- Tìm hằng số k
- Tìm hàm phân phối đồng thời F_{XY} của X, Y

Bài 2: Hai người A và B hẹn gặp nhau tại cổng trường trong khoảng từ 7h00 đến 8h00. Gọi X và Y lần lượt là thời gian đến điểm hẹn của người A và B trong khoảng thời gian trên. Giả sử X và Y độc lập và có cùng phân phối đều trên $[7; 8]$. Tìm hàm phân phối đồng thời F_{XY} của X, Y.

2 Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều

2.1 Kỳ vọng, phương sai

+) Nếu (X, Y) là BNN rời rạc

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i); \quad E(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j)$$
$$V(X) = \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij} - (E(X))^2; \quad V(Y) = \sum_j \sum_i y_j^2 p_{ij} - (E(Y))^2$$

\Rightarrow Lập bảng phân phối xác suất biên, sau đó làm như BNN một chiều

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$$

+) Nếu (X, Y) là BNN liên tục

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy; \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - (E(X))^2; \quad V(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - (E(Y))^2$$
$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$$

2.2 Hiệp phương sai (Covarian)

Hiệp phương sai: $cov(x, y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

Hệ số tương quan: $\rho_{XY} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

Ma trận hiệp phương sai: $\Gamma = \begin{bmatrix} V(X) & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & V(Y) \end{bmatrix}$

Bài tập:

Bài 1: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời là:

X \ Y	-1	0	1
-1	4/15	1/15	4/15
0	1/15	2/15	1/15
1	0	2/15	0

a) Tìm $E(X)$, $E(Y)$, $cov(X, Y)$

b) X và Y có độc lập không?

c) Tìm bảng phân phối xác suất của X, Y

Bài 2: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời là:

X \ Y	1	2	3
1	0.17	0.13	0.25
2	0.10	0.30	0.05

- a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y
- b) Lập ma trận Covarian của X, Y
- c) Tìm hệ số tương quan

Bài 3: Trọng lượng của những người chồng tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 70kg và độ lệch chuẩn 9kg, còn trọng lượng của những người vợ tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 55kg và độ lệch chuẩn 4kg. Hệ số tương quan trọng lượng giữa vợ và chồng là $\frac{2}{3}$. Tính xác suất vợ nặng hơn chồng.

