ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 20212

Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (1 điểm): Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 - xy^2 + x^2y - y = 1$. Tính $y'(0)$.

Câu 2. (1 điểm): Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2; 1; 0)$ của đường cong $x = \dfrac{t+2}{t+1}; y = \dfrac{1}{t^3+1}; z = t^2 + 2t$.

Câu 3. (1 điểm): Đổi thứ tự lấy tích phân $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x;y)dy$

Câu 4. (1 điểm): Tính tích phân $\displaystyle\iint_D ydxdy$ trong đó D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 4x \\ x = y;\ y = 0 \end{cases}$

Câu 5: (1 điểm) Tính tích phân đường $I = \displaystyle\int_C (xy + x + 2y^2)dS$, trong đó C là biên của hình $x^2 + y^2 \le 2x$

Câu 6: (1 điểm) Tính tích phân đường $I = \displaystyle\int_L (x^2 + y^2)dx + (2xy + x^2)dy$ với L là đường $x^2 + y^2 = 2x$ theo chiều ngược kim đồng hồ

Câu 7: (1 điểm) Cho trường vectơ $\vec{F} = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x+y} - ln\,(x+y)\right)\vec{i} + \dfrac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$
Chứng minh F là trường thế và tìm hàm thế vị.

Câu 8. (1 điểm): Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Câu 9. (1 điểm): Tìm α, β để tích phân đường: $\displaystyle\int_L \frac{y(1 - x^2 + \alpha y^2)dx + x(1 - y^2 + \beta x^2)dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân L. Tính tích phân ấy từ điểm $A(0,0)$ đến điểm $B(a,b)$ ứng với các giá trị α, β đã tìm được.

Câu 10. (1 điểm): Tính tích phân $I = \displaystyle\iint_D (|x| - |y| + 2y + \sin x)(x^2 + y^2)dxdy$ với miền $D : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ với $b \ge a \ge 0$.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

Giải câu 1. • *Xét hàm số* $F(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y - 1$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^3 - xy^2 + x^2y - y - 1 = 0 \\ \Rightarrow F'_x(x,y) &= 3x^2 - y^2 + 2xy \\ F'_y(x,y) &= -2xy + x^2 - 1 \end{aligned}$$

• *Với* $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \begin{cases} F'_x(0,-1) = -1 \\ F'_y(0,-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow y'(0) = -\dfrac{F'_x(0,1)}{F'_y(0,1)} = -1$

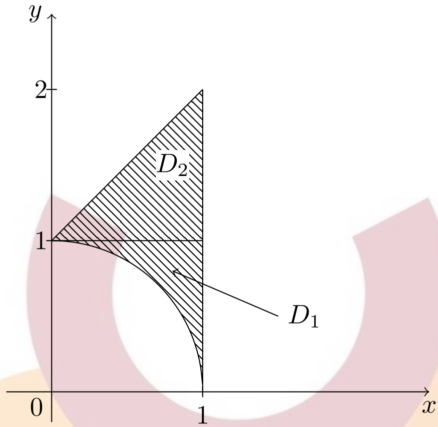
Giải câu 2.

Điểm $A(2;1;0)$ *ứng với* $t = t_0$ *thì* $\begin{cases} x_A = \dfrac{t+2}{t+1} \\ y_A = \dfrac{1}{t^3+1} \\ z_A = t^2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = 0$

Ta có: $\begin{cases} x' = \dfrac{-1}{(t+1)^2} \\ y' = \dfrac{-3t^2}{(t^3+1)^2} \\ z' = 2t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ *Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:* $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

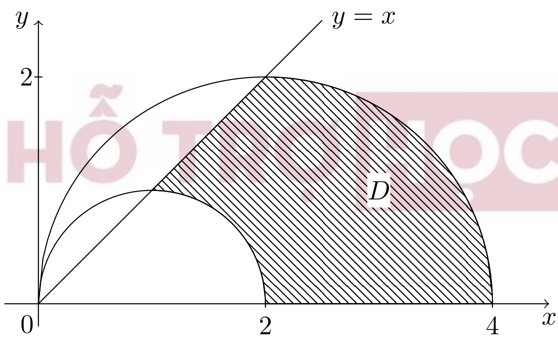
Giải câu 3. *Xét miền* $D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{1-x^2} \le y \le x + 1 \end{cases}$



Chia miền $D = D_1 \cup D_2$ *với* $D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{1-y^2} \le x \le 1 \end{cases}$ *và* $D_2 : \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ y-1 \le x \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x;y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{y-1} f(x;y)\,dx$$

Giải câu 4.



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$. *Miền D trở thành* $\begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Từ đó, ta có:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r\cdot r\sin\varphi\, dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^3}{3}\sin\varphi \Big|_{r=2\cos\varphi}^{r=4\cos\varphi} \right) d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{56}{3}\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi \\
&= -\frac{14}{3}\cos^4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Giải câu 5. *Tính tích phân đường* $I = \int_C (xy + x + 2y^2)dS$*, trong đó C là biên của hình* $x^2 + y^2 \leq 2x$

Ta có: $x^2 + y^2\ leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow C : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ *với* $0 \leq t \leq 2\pi$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} ((\cos t + 1)\sin t + \cos t + 1 + 2\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t\sin t + \sin t + \cos t + 1 + 2\sin^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 t)dt \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

Giải câu 6. *Tính tích phân đường* $I = \int\limits_L (x^2+y^2)dx + (2xy+x^2)dy$ *với L là đường* $x^2+y^2=2x$ *theo chiều ngược kim đồng hồ*

Đặt $\begin{cases} P = x^2+y^2 \\ Q = 2xy + x^2 \end{cases}$

Gọi D là miền được giới hạn bởi L $\Rightarrow D: (x-1)^2+y^2 \leq 1$ *Dễ thấy P, Q và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên D. Do đó áp dụng công thức Green ta có:*

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_L Pdx + Qdy \\ &= \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy \\ &= \iint\limits_D 2xdxdy \end{aligned}$$

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi + 1 \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |J| = r \\ 0 \leq r \leq 1 \\ \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ *Ta có:*

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 2(r\cos\varphi + 1)rdr \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (\frac{2}{3}\cos\varphi + 1)d\varphi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Giải câu 7. *Cho trường vectơ* $\vec{F} = e^{-x}\left(\frac{1}{x+y} - ln\,(x+y)\right)\vec{i} + \frac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$
Chứng minh F là trường thế và tìm hàm thế vị.

Đặt $\begin{cases} P = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x+y} - ln\,(x+y)\right) \\ Q = \dfrac{e^{-x}}{x+y} \end{cases}$

Ta có: $P'_y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{x+y}\right) = Q'_x$

$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = (Q'_x - P'_y)\vec{k} = 0$

$\Rightarrow \vec{F}$ *là một trường thế.*

Hàm thế vị của $\vec{F}$ *là:*

$u = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 1$ *Ta có:*

$$\begin{aligned} u &= \int\limits_0^x e^{-t}\left(\frac{1}{t+1} - ln(1+t)\right) + \int\limits_1^y \frac{e^{-x}}{x+t}dt \\ &= e^{-t}ln(t+1)\Big|_0^x + e^{-x}ln(t+1)\Big|_1^y + C \\ &= e^{-x}ln(x+y) + C \end{aligned}$$

Giải câu 8. *Hàm số* $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ *xác định* $\forall(x,y) \in R^2$. *Ta có:*

$$p = z'_x = 4x^3 - 4(x-y)$$

$$q = z'_y = 4y^3 + 4(x-y)$$

Cho p, q *đồng thời triệt tiêu, ta được hệ phương trình* $\begin{cases} x^3 - (x-y) = 0 \\ y^3 + (x-y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases}$

Rõ ràng $(0;0)$ *là một nghiệm của hệ ấy.*

Nếu $(x;y) \neq (0;0)$, *ta có:* $x^2 - xy + y^2 = \dfrac{(x-y)^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} > 0$

Vậy hệ phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases}$

Từ hệ này, ta suy ra:

$$x^3 - 2x = 0$$

Do đó với $x \neq 0$*, ta được* $x^2 = 2$*, vậy hệ có 2 nghiệm* $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *và* $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$*.*
Tóm lại ta có 3 điểm tới hạn $M_0(0;0)$*,*$M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$*,*$M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$*.*

Ta có:

$$r = 12x^2 - 4; s = 4; t = 12y^2 - 4$$

Tại các điểm M_1, M_2 *ta có* $r = 20, s = 4, t = 20$*, do đó:* $s^2 - rt = 16 - 400 < 0$*, hàm số đạt cực tiểu tại* M_1, M_2

$$z_{min} = z(M_1) = z(M_2) = -8$$

Tại điểm M_0*, ta có:* $r = -4, s = 4, t = -4, s^2 - rt = 0$*, ta chưa kết luận ngay được. Ta có:*

$$z(M_0) = z(0;0) = 0$$

Ta xét dấu của hiệu $z(M) - z(M_0)$ *khi* M *chạy trong một lân cận của* M_0*, ta có:*

$$z(x; -x) = 2x^3 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0 = z(M_0) \text{ với } 0 < |x| < 2$$
$$z(x; x) = 2x^4 > 0 = z(M_0) \text{ với } \forall x \neq 0$$

Vậy dấu của $z(M) - z(M_0)$ *thay đổi khi M chạy trong lân cận của* M_0*. Hàm số không đạt cực trị tại* M_0*.*

Giải câu 9. *Ta có:*

$$P(x, y) = \frac{y(1 - x^2 + \alpha y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{y - yx^2 + \alpha y^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{x(1 - y^2 + \beta x^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{x - xy^2 + \beta x^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Do đó:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - x^4 + 3(\alpha+1)x^2y^2 + 3(\alpha-1)y^2 - \alpha y^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 - y^4 + 3(\beta+1)x^2y^2 + 3(\beta-1)x^2 - \beta x^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Các hàm số $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *liên tục trên* R^2*. Do đó, muốn tích phân đường* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường L, thì điều kiện cần và đủ là:* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\Rightarrow$ *Đồng nhất hệ số* $\Rightarrow \alpha = \beta = 1$

Với $\alpha = \beta = 1$*, tích phân đường* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường đi. Để tích phân ấy từ* $A \to B$*, ta chọn đường lấy tích phân là đoạn thẳng nối* AB*:*

$$y = \frac{b}{a}x \Rightarrow dy = \frac{b}{a}dx$$

Đặt $k = \dfrac{b}{a}$ *suy ra* $dy = kdx$

Ta được:

$$I = \int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_0^a \frac{kx(1 - x^2 + k^2x^2)dx + x(1 - k^2x^2 + x^2)kdx}{(1+x^2+k^2x^2)^2}$$

$$= \int\limits_0^a \frac{2kxdx}{[1 + (1+k^2)x^2]^2}$$

$$= \frac{ka^2}{1 + (1+k^2)a^2} = \frac{ab}{1+a^2+b^2}$$

Giải câu 10.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D (|x| - |y| + 2y + \sin x)(x^2 + y^2)dxdy \\ &= \iint\limits_D (|x| - |y|)(x^2 + y^2)dxdy + 2\iint\limits_D y(x^2 + y^2)dxdy + \iint\limits_D \sin x(x^2 + y^2)dxdy \\ &= I_1 + 2I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Ta có: Miền D đối xứng qua trục Ox và trục Oy mà hàm $f(x, y) = y(x^2 + y^2)$ là hàm lẻ đối với y và $g(x, y) = \sin x(x^2 + y^2)$ là hàm lẻ đối với x nên $I_2 = I_3 = 0$.

Mặt khác: $h(x, y) = (|x| - |y|)(x^2 + y^2)$ là hàm chẵn đối với x và với y nên

$$I_1 = 4\iint\limits_{D^+} (x - y)(x^2 + y^2)dxdy \text{ với } D^+ : \begin{cases} a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và $D^+_{r,\varphi}$: $\begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_a^b (r\cos\varphi - r\sin\varphi)r^2.rdr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi \int\limits_a^b r^4 dr = 0$$

Vậy $I = 0$.