ĐỀ THI THỬ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành: CTTT **Thời gian làm bài: 60 phút**

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [3đ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(\ln n)^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+\sqrt{n}+1}{5n^2+\sin n}\right)^{n\ln n}$

Câu 2. [2đ] Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-\ln x)^p}$

Câu 3. [3đ] Giải các phương trình vi phân sau:

a) $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{x+y-3} = 0$

b) $(x^2+1).y' + y = x^2 + x + 1$

c) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$

Câu 4. [1đ].Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì 1 được xác định như sau

$$f(x) = min\{x, 1-x\}\ \forall x \in [0;1]$$

Câu 5. [1đ].Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy số dương và $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}}$ cũng hội tụ.

——— ***Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi*** ———

MIDTERM MOCK EXAM OF CALCULUS 3 - Semester 2022.2
Duration: 60 minutes

Note: Candidates are not allowed to use materials and the proctor must sign to confirm the exam code on the test assignment.

Q1. [3p] Test for convergence of the following series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(\ln n)^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+\sqrt{n}+1}{5n^2+\sin n}\right)^{n\ln n}$

Q2. [2p] Find the domain of convergence of the series of functions:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-\ln x)^p}$

Q3. [3p] Solve the problem:

a) $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{x+y-3} = 0$

b) $(x^2+1).y' + y = x^2 + x + 1$

c) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$

Q4. [1p] Find the Fourier transform of the function with period T = 1

$$f(x) = min\{x, 1-x\}\ \forall x \in [0;1]$$

Q5. [1p] Assume that $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ is a positive series and $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ is convergent. Prove that series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^{\frac{n-1}{n}}$ is convergent.

Good luck with your exam

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Thi thử Giữa kỳ 20222

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) Đặt $u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right), n \geq 1.$

+) Vì $\cos\frac{1}{n}, \forall n$ nên $u_n < 0, \forall n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi âm, tức là một chuỗi có số hạng không đổi dấu. Vậy có thể áp dụng được các tiêu chuẩn so sánh với chuỗi này.

+) Ta có: $u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n} - 1 + 1\right) = \ln\left(1 - \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - 2\sin^2\frac{1}{2n}\right)$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{1}{2n} \to 0$, do đó: $2\sin^2\frac{1}{2n} \sim 2.\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$

Suy ra $u_n \sim \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$ khi $n \to \infty$.

+) Chuỗi $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ vì $(\alpha = 2 > 1)$, do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. (Theo tiêu chuẩn so sánh)

b) Đặt $u_n = (-1)^n\frac{n^2}{(\ln n)^n}, n \geq 3$

+) Ta có: $|u_n| = \frac{n^2}{(\ln n)^n}$.

+) Ta có: $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{2}{n}\ln n}}{\ln n}$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{2}{n}\ln n \to 0$, $e^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1$.

+) Theo tiêu chuẩn Cauchy, áp dụng cho chuỗi dương, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 + \sin n}\right)^{n\ln n}$

Đặt $u_n = \left(\frac{4n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 + \sin n}\right)^{n\ln n}, n \geq 1.$

+) Ta có: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

+) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 + \sin n}\right)^{n\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2 + \sqrt{n} + 1}{5n^2 + \sin n}\right)^{\ln n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{4n^2+\sqrt{n}+1}{5n^2+\sin n}\right)\ln n}$

$= 0$ (Do $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{4n^2+\sqrt{n}+1}{5n^2+\sin n}\right) = \ln(\frac{4}{5}) < 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{4n^2+\sqrt{n}+1}{5n^2+\sin n}\right)\ln n = -\infty$)

+) Vậy chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Cauchy)

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)} \left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n$

+) Điều kiện: $x \neq 1$

Ta đặt $X = \frac{2x+1}{1-x}$ chuỗi đã cho có dạng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)} X^n$.

+) Đặt $a_n = \frac{n+2}{n(n-1)} \forall n \geq 2$

Xét $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+3}{n(n+1)} \frac{n(n-1)}{n+2}\right| = 1$

Suy ra với $X \in (-1; 1)$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

+) Với $X = 1$ thì $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)}$ là chuỗi số dương

Khi $n \to \infty$ thì $0 < \frac{n+2}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n}$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ $\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ (theo tiêu chuẩn so sánh)

+) Với $X = -1$ thì chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n-1)}$ là chuỗi đan dấu

Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n-1)} = 0$ (1) .

+) Đặt $b_n = \frac{n+2}{n(n-1)}$. Xét $f(x) = \frac{x+2}{x(x-1)} \forall x \geq 2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - x - (x+2)(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 2}{(x^2-x)^2}$

$\Rightarrow \forall x \geq 2$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ nghịch biến $\forall x \geq 2$

$\Rightarrow b_n$ là dãy giảm (2).

Từ (1), (2) $\to$ Chuỗi hội tụ (theo tiêu chuẩn Lebnitz)

Vậy $X \in [-1; 1)$ chuỗi $S_n(X)$ hội tụ.

$\Leftrightarrow -2 \leq x < 0$ và $x \neq 1$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-2; 0)$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \ln x)^p}$

+) Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$:

Tập xác định: $n - \ln x > 0, x > 0 \, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2 \leftrightarrow 0 < x < e^2$

Tại mỗi điểm $x_0 \in \mathbb{R}, 0 < x_0 < e^2$ xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n - \ln x)^{-p}$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n (n - \ln x)^{-p} = \infty \to$ Chuỗi đã cho phân kỳ (Vi phạm điều kiện cần)

+) Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$:

Tập xác định: $0 < x < e^2$

Tại mỗi điểm $x_0 \in \mathbb{R}, 0 < x_0 < e^2$ xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n - \ln x)^{-p}$ là chuỗi đan dấu

Đặt $a_n = (n - \ln x)^{-p}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{a_n\}$ là dãy giảm $\to$ Chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Leibnitz)
+) Với $p \in \mathbf{Z}, p \leq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(n-\ln x)^{-p} \neq 0 \to$ Chuỗi đã cho phân kỳ (Vi phạm điều kiện cần)
+) Với $p \in \mathbf{Z}, p > 0$:
Tập xác định: $n - \ln x \neq 0\, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2, x > 0 \leftrightarrow 0 < x \neq e^k,\ k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$
Tại mỗi điểm $x_0 \in (0;+\infty) \setminus \{e^k\,|k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2\}$ xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n-\ln x)^{-p}$
Đặt $b_n = (n-\ln x)^{-p}$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\{b_n\}$ là dãy giảm $\to$ Chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Leibnitz)
Vậy:

- Với $p \in \mathbf{Z}, p > 0$, MHT= $(0;+\infty) \setminus \{e^k\,|k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2\}$
- Với $p \notin \mathbf{Z}, p > 0$, MHT= $(0;e^2)$
- Với $p \in \mathbf{Z}, p < 0$, MHT= $\emptyset$
- Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$, MHT= $\emptyset$

Câu 3. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:
a)$\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{x+y-3} = 0$
+) Điều kiện: $x \neq 0, x+y-3 \neq 0$
+) Phương trình tương đương: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x} + 1$
Đặt $\dfrac{y-3}{x} = u \Rightarrow y = ux+3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = u'x + u$
$\Rightarrow u'x + u = u + 1 \Rightarrow \dfrac{xdu}{dx} = 1 \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + c\,(c \in \mathbb{R})$
+) Từ đó ta suy ra: $\dfrac{y-3}{x} = \ln|x| + c\,(c \in \mathbb{R})$
+) Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{y-3}{x} = \ln|x| + c\,(c \in \mathbb{R}, x \neq 0, x+y-3 \neq 0)$$

b) $(x^2+1).y' + y = x^2+x+1 \Rightarrow y' + \dfrac{y}{x^2+1} = \dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$
+) Đây là PTVP tuyến tính bậc nhất với $p(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ và $q(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$
+) Ta có: $e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{\arctan x}$
$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}.y\right) = e^{\arctan x}.\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$
$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\frac{x^2+x+1}{1+x^2}$
$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\left(1 + x.\frac{1}{1+x^2}\right)$
$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\left(x' + x.(\arctan x)'\right)$
$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = e^{\arctan x}.x + C$
$\Rightarrow y = \dfrac{e^{\arctan x}.x + C}{e^{\arctan x}} = x + \dfrac{C}{e^{\arctan x}}(C \in R)$

+)Vậy nghiệm tổng quát của phương trình : $y = x + \dfrac{C}{e^{\arctan x}} (C \in R)$

c) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$ (1)

Đặt $u = \ln(y)$. Phương trình (1) trở thành: $(x^2 + 3u)dx - xdu = 0$. (2)

Đặt $M = x^2 + 3u, N = -x$, ta có $Mdx + Ndu = 0$.

Thừa số tích phân: $\dfrac{I'(x)}{I(x)} = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\delta M}{\delta u} - \dfrac{\delta N}{\delta x}\right) = -\dfrac{4}{x} \Rightarrow I(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

Nhân cả 2 vế của phương trình (2) với $I(x)$, ta được $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3u}{x^4}\right)dx - \dfrac{du}{x^3} = 0$.

Gọi nghiệm cần tìm là $g(x,u) = C \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\delta g}{\delta x} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3u}{x^4} \text{ (*)} \\ \dfrac{\delta g}{\delta u} = -\dfrac{1}{x^3} \end{cases}$

(*) $\Rightarrow g(x,u) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{u}{x^3} + k(u) = C \Rightarrow \dfrac{\delta g}{\delta u} = -\dfrac{1}{x^3} + k'(u) \Rightarrow k'(u) = 0$.

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình (2) là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{u}{x^3} = C$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình vi phân (1) là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(y)}{x^3} = C$.

Câu 4. (1 điểm).

+) Nhận xét: $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \le x \le 0.5 \\ 1 - x & \text{khi } 0.5 < x \le 1. \end{cases}$

+) Xét hàm số $h(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ -x & \text{khi } -1 < x \le 0. \end{cases}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 1$.

+) Dễ thấy $h(x)$ là hàm chẵn trên $[-0.5; 0.5]$ nên $b_n = 0$ với mọi $n \ge 0$.

Ta có: $a_0 = 4\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \dfrac{1}{2}$.

Với mọi $n \ge 1$: $a_n = 4\displaystyle\int_0^{0.5} x\cos(2n\pi x)dx = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

+) Trên $[0; 1]$ thì $f(x) = h(x)$. Khi đó khai triển Fourier của hàm $f(x)$ sẽ tương ứng với khai triển Fourier của hàm $h(x)$, xét trong khoảng $[0; 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x).$$

+) Do $f(x)$ là hàm số liên tục nên theo định lí Dirichlet, chuỗi Fourier của nó hội tụ đều đến $f(x) = \dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)$ trên $\mathbb{R}$

Câu 5. (1 điểm).

+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, với mọi $n \ge 2$ ta có: $a_n^{\frac{n-1}{n}} = (a_n^{1/2}a_n^{1/2}a_n^{n-2})^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{2\sqrt{a_n} + (n-2)a_n}{n}$

+) Nhưng $\dfrac{2\sqrt{a_n}}{n} \le \dfrac{1}{n^2} + a_n$ (vì $2xy \le x^2 + y^2$) và $\dfrac{(n-2)a_n}{n} \le a_n \left(\text{vì } \dfrac{n-2}{n} \le 1\right)$

+) Do đó $0 < a_n^{\frac{n-1}{n}} \le \dfrac{1}{n^2} + 2a_n$, với mọi $n \ge 2$.

+) Chuỗi đã cho là chuỗi số dương và $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+2a_n\right)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có điều phải chứng minh.