

Đề thi thử cuối kì Giải tích III

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 60 phút
(Đề thi gồm 40 câu hỏi trắc nghiệm)

Câu 01. Phát biểu sau đây đúng hay sai ?

Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$. Người ta gọi tích của chúng là chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$ trong đó

$$W_n = \sum_{k=0}^n U_k V_{n-k}$$

- ☐ A Đúng
☐ B Sai

Câu 02. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân: $x^{(3)} - 2x'' + 16x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 20$.

- ☐ A $e^{2t} \cos 2t$ ☐ B $e^{-2t} \cos 2t$
☐ C $e^{2t} - e^{2t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$ ☐ D $e^{-2t} - e^{2t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$

Câu 03. Phát biểu nào dưới đây đúng?

- ☐ A Công thức Liouville có dạng:

$$y_2 = y_1^* \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}$$

Với phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. y_1, y_2 là 2 nghiệm độc lập tuyến tính

- ☐ B Hệ phương trình cuối cùng tìm được trong phương pháp biến thiên hằng số Lagrange là:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = f(x) \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' = f'(x) \end{cases}$$

- ☐ C Xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số $y'' + py' + qy = 0$. Phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ có hai nghiệm thực k_1, k_2 phân biệt. Nghiệm của phương trình là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

- ☐ D Hệ nghiệm cơ bản của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai là hệ hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính

Câu 04. Cho phương trình vi phân: $y'' - \frac{y'}{x} = 3x^3$. Nhận xét nào sau đây đúng

- ☐ A $y' = C_1 x^2 + \frac{x^5}{5} + C_2$ ☐ B $y' = x(C_1 + x^3)$
☐ C $y' = C_1 \ln x + \frac{3x^5}{25} + C_2$ ☐ D $y' = \frac{1}{x} \left(C + \frac{3x^5}{5} \right)$

Câu 05. Cho $h(x)$ là hàm số liên tục. Đây là nghiệm của phương trình vi phân: $y' + y = h(x)$. (Có thể có nhiều đáp án đúng)

- ☐ A $y = e^{-x}(C - \int h(x)e^x dx)$
- ☐ B $y = e^x(C + \int h(x)e^x dx)$
- ☐ C $y = e^{-x}(C + \int h(x)e^x dx)$
- ☐ D $y = e^x(C + \int h(x)e^{-x} dx)$
- ☐ E $y = e^{-x}(C + \int e^{\int dx} h(x)) dx$
- ☐ F $y = e^x(C + \int e^{\int dx} h(x)) dx$

Câu 06. Trong các chuỗi sau chuỗi nào hội tụ:

- ☐ A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^5}$
- ☐ B $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$
- ☐ C $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$
- ☐ D $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 5}$

Câu 07. Cho phương trình: $y'' - y' = 0$. Biết một nghiệm cơ sở là $y_1 = 1$, nghiệm cơ sở thứ hai là?

- ☐ A $y_2 = x^{-1}$
- ☐ B $y_2 = x^2$
- ☐ C $y_2 = e^{-x}$
- ☐ D $y_2 = e^x$

Câu 08. Cho phương trình $1 - y^2 = (y')^2$. Hàm nào dưới đây không phải là nghiệm của phương trình trên. (Có thể có nhiều đáp án đúng)

- ☐ A $\sin x + \cos x$
- ☐ B $\sin x$
- ☐ C $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- ☐ D $\cos x$
- ☐ E $\sin(x + 2\pi)$
- ☐ F $-\cos(x - 2\pi)$

Câu 09. Những nhận định nào là sai với chuỗi nhân $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} (a > 0)$

- ☐ A Với $|q| > 1$ thì $|q|^n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$. Chuỗi nhân phân kì
- ☐ B Với $|q| < 1$ thì $|q|^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Chuỗi nhân hội tụ
- ☐ C Với $q = 1$ chuỗi nhân phân kì
- ☐ D Chuỗi nhân hội tụ có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$

Câu 10. Bán kính hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n} x^n$ là:

- ☐ A $\frac{3}{e}$
- ☐ B $3e$
- ☐ C $\frac{1}{3}$
- ☐ D $\frac{e}{3}$

Câu 11. Đây là nghiệm của phương trình vi phân:

$$3y + y' \ln(y') = y'(3x + 1)$$

- A** $y = \frac{3xc + c - c \ln c}{3}$ hoặc $y = \frac{1}{3}e^{3x}$ **B** $y = 3xc - c + c \ln c$ hoặc $y = \frac{1}{3}e^{-3x}$
C $y = 3xc + c - c \ln c$ hoặc $y = \frac{1}{3}e^{-3x}$ **D** $y = \frac{3xc - c + c \ln c}{3}$ hoặc $y = \frac{1}{3}e^{3x}$

Câu 12. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số $G(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4s + 5}$

- A** $u(t + \pi)e^{-2t+2\pi} \sin(t - \pi)$ **B** $u(t - \pi)e^{-2t} \sin(t)$
C $u(t - \pi)e^{-2t+2\pi} \sin(t - \pi)$ **D** $e^{-2t} \sin(t)$

Câu 13. Phương trình : $e^{-y}(1 + y') = 1$ có nghiệm là:

- A** $y = \ln(e^x - 1) - x + C$
B $x = \ln(e^y - 1) - y + C$
C $x = \ln(e^y - 1) + y + C$
D $y = \ln(e^x - 1) + x + C$

Câu 14. Chọn phát biểu không đúng trong các phát biểu sau:

- A** Nếu $y = e^{ax}$ là 1 nghiệm của phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$ thì a là 1 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$
B Nếu phương trình đặc trưng $x^2 + px + q = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt $a_1 \neq a_2$ thì $y = e^{a_1 x}$ và $y = e^{a_2 x}$ là các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$
C Không có đáp án sai
D Nếu a là 1 nghiệm thực của $x^2 + px + q = 0$ thì $y = e^{ax}$ chưa chắc là nghiệm của phương trình $y'' + py' + qy = 0$

Câu 15. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $4y'' - 16y = 0$

- A** $y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ **B** $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
C $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ **D** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}$

Câu 16. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5}$

- A** Phân kì **B** Không kết luận được gì
C Hội tụ **D** Bán hội tụ

Câu 17. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' - 2y' + 5y = 0$

- A** $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ **B** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
C $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ **D** $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Câu 18. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi nào?

- ☐ A $\alpha > 1$
☐ C $\alpha < 1$

- ☐ B $\alpha \geq 1$
☐ D $\alpha \leq 1$

Câu 19. Cho phương trình vi phân cấp 1:

$$2021(y + x^{10})dx = xdy. \quad \text{Biết } y(1) = \frac{2001}{2011}$$

Biểu diễn $y(2021) = \frac{-2021^a}{2011} + 2.2021^b$. Hỏi $a + b$ nằm trong khoảng nào sau đây ?

- ☐ A (2015; 2020)
☐ B (2020; 2025)
☐ C (2025; 2030)
☐ D (2030; 2035)
☐ E (2035; 2040)

Câu 20. Tìm biến đổi Laplace của hàm số: $f(t) = e^{3t+1}$

- ☐ A $\frac{e}{s+3}$
☐ C $\frac{e}{s-3}$

- ☐ B $\frac{1}{s-3}$
☐ D $\frac{1}{s+3}$

Câu 21. Phương trình : $(x + 2y)dx - xdy = 0$ có nghiệm là:

- ☐ A $x = y^2 - cy$
☐ B $y = cx^2 - x$
☐ C $y = x^2 - cx$
☐ D $x = cy^2 - y$

Câu 22. Giả sử $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\mathcal{L}\{te^{2t} \sin 3t\} = \frac{6(s+2)}{[(s+2)^2 + 9]^2}$
☐ B $\mathcal{L}\left\{e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{s}{(s-1)^2 + 1} \right]$
☐ C $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{3t} - e^{-6t}}{t}\right\} = -\ln \frac{s-3}{s+6}$
☐ D $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 4t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{s}{4}$

Câu 23. Xét sự hội tụ của chuỗi số có số hạng tổng quát sau

- a) $U_{n1} = \frac{\sin n}{n^3}; n \geq 1$
b) $U_{n2} = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}; n \geq 1$
c) $U_{n3} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}; n \geq 1$

Những phát biểu nào sau đây là sai

- A** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} U_{n1}$ hội tụ
- B** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} U_{n3}$ phân kì vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi Riemann
- C** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ hội tụ vì $|U_{n2}| = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \rightarrow \infty$
- D** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; $n \geq 1$ không phải chuỗi đan dấu

Câu 24. Cho phương trình vi phân:

$$x^2 y'' - 10xy' + 6y = \sin(\ln x)$$

Bằng phép đặt $t = \ln x$ ta có phương trình tương đương là

- A** $y_t'' - 11y_t' + 6y = \cos t$
- B** $y_t'' + 11y_t' + 6y = \sin t$
- C** $y_t'' - 11y_t' + 6y = \sin t$
- D** $y_t'' + 11y_t' + 6y = 0$

Câu 25. Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{t \cos^3 t\}$ (s)

- A** $\frac{9-s^2}{4(s^2+9)^2} + \frac{3}{4} \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}$
- B** $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
- C** $\frac{s^2-9}{4(s^2+9)^2} + \frac{3}{4} \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
- D** $\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

Câu 26. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số $f(s) = \frac{3}{s^4}$

- A** $\frac{1}{2}t^4$
- B** $\frac{1}{2}t^3$
- C** t^3
- D** t^4

Câu 27. Tìm hàm $f(t)$ sao cho $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \arctan \frac{1}{s}$

- A** $\frac{\cos t}{t^2}$
- B** $\frac{\cos t}{t}$
- C** $\frac{\sin t}{t^2}$
- D** $\frac{\sin t}{t}$

Câu 28. Phương trình $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$ có nghiệm là:

- A** $x^2y + \frac{x^2}{2} = C$
- B** $xy^2 + x + y = C$
- C** $x^2y + x + y = C$
- D** $xy^2 + \frac{x^2}{2} = C$

Câu 29. Khai triển Maclaurin của $\frac{1}{4+x}$

- ☐ A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^{n+1}}$
☐ B $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n}$
☐ C $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{4^n}$
☐ D $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^{n+1}}$

Câu 30. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : $3x^2 y' = y^2(3xy' - y)$ là:

- ☐ A $x = \frac{y^3}{3y + c}$
☐ B $x = \frac{c + 3y}{y^3}$
☐ C $x = \frac{y^3}{c - 3y}$
☐ D $x = \frac{c - 3y}{y^3}$

Câu 31. Cho phương trình: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Biết nghiệm tổng quát của phương trình có dạng: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$. Tìm a và b?

- ☐ A $a = 1, b = 2$
☐ B $a = 2, b = 4$
☐ C $a = 2, b = 3$
☐ D $a = 1, b = 3$

Câu 32. Cho phương trình

$$y(x) = \int_0^x y(t) \cos^{2021} t dt + 1$$

Nhận xét đúng về $T = y(2) - e^2$

- ☐ A Không tồn tại hàm $y(x)$
☐ B $T = 0$
☐ C $T < 0$
☐ D $T > 0$

Câu 33. Phương trình $y' \tan y + 4x^3 \cos y = 2x$ có nghiệm:

- ☐ A $[Ce^{x^2} + 2(x^2 + 1)] \sin y = 1$
☐ B $Ce^{x^2} + 2(x^2 + 1) = \sin y$
☐ C $Ce^{x^2} + 2(x^2 + 1) = \cos y$
☐ D $[Ce^{x^2} + 2(x^2 + 1)] \cos y = 1$

Câu 34. Tìm biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{t \sin(kt)\}$

- ☐ A $\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
☐ B $\frac{2k}{s^2 + k^2}$
☐ C $\frac{k^2 s^2}{(s^2 + k^2)^2}$
☐ D $\frac{-2ks}{(s^2 + k^2)^2}$

Câu 35. Phương trình $\frac{x^2 dx + xy dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x} dx - dy$ và $y \geq 0$.

Biết $y(2) = 0$.

Vậy giá trị của $y(1)$ là:

- ☐ A $\frac{3}{8}$
☐ B $\frac{3}{4}$
☐ C 3
 ☐ D $\frac{3}{2}$

- Câu 36.** Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s - a^2}{[(s - a^2)^2 + (b - a^2)^2]^2} \right\}$
- ☐ A $e^{a^2 t} \frac{t \cos((b - a^2)t)}{2(b - a^2)}$
☐ B $e^{a^2 t} \frac{t \sin((b - a^2)t)}{2(b - a^2)}$
☐ C $e^{a^2 t} \frac{t \sin(bt)}{2b}$
☐ D $e^{at} \frac{t \sin(bt)}{2b}$
- Câu 37.** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau: $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n \left(|x| + \frac{n+1}{n} \right)$
- ☐ A $(-2e; 2e)$
☐ B $(e - 2; 2 + e)$
☐ C $(-2; 2)$
☐ D $(1 - e; e - 1)$
- Câu 38.** Giải bài toán giá trị ban đầu $y'' + 3ty' - 6y = 2, y(0) = 0, y'(0) = 0$.
- ☐ A $y = t^2$
☐ B $y = \frac{2}{t^3}$
☐ C $y = t^3$
☐ D $y = t^4$
- Câu 39.** Tính tổng $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)! \cdot 6^{2n}}$
- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$
☐ B $\frac{\sqrt{2}}{3}$
☐ C $\frac{\sqrt{3}}{4}$
☐ D $\frac{1}{4}$
- Câu 40.** (Có thể có nhiều đáp án đúng) Giải phương trình vi phân:
- $$yy'' = y'^2 - y'^3$$

Đáp án nào là nghiệm của phương trình vi phân trên ?

- ☐ A $y - C \ln y = x + C'$
☐ B $y = C$
☐ C $y^2 + x^3 - xy = 0$
☐ D $y + C \ln x = x + C'$

- Chúc các bạn thi tốt -