Giải:

1.

a) $x^2y" + xy' - 4y = x^2 \ln x, x > 0(1)$

- Vì $x > 0$ Đặt $x = e^t \to t = \ln x \to xy' = \dfrac{dy}{dt}, x^2y" = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$
  Thay vào (1) ta có
  $\to \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 4y = e^{2t}t$
  $\to \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4y = e^{2t}t(2)$ (2) có phương trình thuần nhất là: $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0(3)$
  Phương trình đặc trưng của (3) là $r^2 - 4 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 2 \\ r = -2 \end{array}\right.$ (4)
  Suy ra nghiệm tổng quát của (3) là"

$$\overline{y} = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Ta có: $f(t) = e^{2t}t$ có $\alpha = 2$ là một nghiệm của (4)
  $\to$ Nghiệm riêng của phương trình (2) có dạng $Y = t(at + b)e^{2t}$
  $Y' = \Big(2at^2 + (2a + 2b)t + b\Big)e^{2t}$
  $Y" = \Big(4at^2 + (8a + 4b)t + 2a + 4b\Big)e^{2t}$
  $-4Y = (= 4at^2 - 4bt)e^{2t}$
  Do đó $Y" - 4Y = (8at + 2a + 4b)e^{2t} = e^{2t}t, \forall t$
  $\leftrightarrow \begin{cases} 8a = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = \dfrac{-1}{16} \end{cases}$

$\to$ Nghiệm riêng của (2) là $Y = \Big(\dfrac{1}{8}t^2 - \dfrac{1}{16}t\Big)e^{2t} \to$ Nghiệm tổng quát của (2) là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \Big(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t\Big)e^{2t}$$

Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = 1e^{2\ln x} + C_2e^{-2\ln x} + \Big(\frac{1}{8}\ln 2x - \frac{1}{16}\ln x\Big)e^{2\ln x}$$

b. $x^2y" - 2y = x^3 \cos \ln x, x > 0$ (1)

Vì $x > 0 \to$ Đặt $x = e^t \to t = \ln x$

$\to x^2y" = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$

Thay vào (1) $\to \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} \cos t(2)$

Xét phương trình thuần nhất $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y = 0(3)$

Có phương trình đặc trưng là: $r^2 - r - 2 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 2 \end{array}\right.$

(3) có nghiệm tổng quát là $\overline{y} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Lại có: $f(t) = e^{3t}\cos t = e^{3t}(\cos t + 0\sin t)$ có $\alpha = 3, \beta = 1$
Ta có $3 \pm i$ không là nghiệm của (4)

$\rightarrow$Nghiệm riêng của (2) có dạng $Y = e^{3t}(a\cos t + b\sin t)$

$Y' = e^{3t}\Big((3a+b)cost + (3b-a)\sin t\Big)$

$Y" = e^{3t}\Big((8a+6b)cost + (8b-6a)\sin t\Big)$

$2Y = e^{3t}(2a\cos t + 2b\sin t)$

$Y' + 2Y = e^{3t}\Big((3a+5b)\cos t + (3b-5a)\sin t\Big)$

$\rightarrow e^{3t}\Big((3a+5b)\cos t + (3b-5a)\sin t\Big) = e^{3t}\cos t, \forall t$
$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ 3b - 5a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{34} \\ b = \dfrac{5}{34} \end{cases}$
Nghiệm riêng của (2) là:

$$Y = e^{3t}\Big(\frac{3}{34}\cos t + \frac{5}{34}\sin t\Big)$$

Nghiệm tổng quát của (2) là"

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + e^{3t}\Big(\frac{3}{34}\cos t + \frac{5}{34}\sin t\Big), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Nghiệm tổng quát của (1) là:
$y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^2 + x^3\Big(\dfrac{3}{34}\cos t + \dfrac{5}{34}\sin t\Big), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c.$x^2 y" - xy' + y = x^2, x < 0(1)$

Vì $x < 0$ Đặt $-x = e^t \rightarrow t = \ln x$

$\rightarrow xy' = \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt}$

Thay vào (1) $\rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{2t}$

$\leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^{2t}$ (2)

(2) có phương trình thuần nhất: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0(3)$có phương trình đặc trưng $r^2 + 2r + 1 = 0(4) \leftrightarrow r = \pm 1$

Nghiệm tổng quát của (3) là $\overline{y} = e^{-t}(C_1 t + C_2)$

- $f(t) = e^{2t}$có $\alpha = 2$không là nghiệm của (4)

Nghiệm riêng của (2) có dạng:

$Y = ae^{2t}$

$Y' = 2ae^{2t}$

$Y" = 4ae^{2t}$

$Y = ae^{2t}$

$\rightarrow Y" + 2Y' + Y = 9ae^{2t} = e^{2t}, \forall t$

$\rightarrow 9a = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{9}$

Nghiệm riêng của (2) là $Y = \frac{e^{2t}}{9}$

Nghiệm tổng quát của (2) là: $y = \overline{y} + Y = e^{-t}(C_1 t + C_2) + \frac{e^{2t}}{9}$

Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = -\frac{1}{x}\Big(C_1 \ln x + C_2\Big) + \frac{x^2}{9}, x < 0$$

d. $x^2 y" - xy' - 3y = 10 \sin \ln x, x > 0(1)$

- Vì $x > 0 \rightarrow$ Đặt $x = e^t \rightarrow t = \ln x$

  $\rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}, x^2 y" = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

  Thay vào (1) ta có

  $\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} - 3y = 10 \sin t$

  $\leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 10 \sin t(2)$

Xét phương trình thuần nhất $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0(3)$

có phương trình đặc trưng : $r^2 - 2r - 3 = 0(4) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 3 \end{array}\right.$ Nghiệm tổng quát của (3) là: $\overline{y} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow f(t) = 10 \sin t$ có $\pm i$ không là nghiệm của (4)

$\rightarrow$Nghiệm riêng của (2) có dạng:

$Y = a \cos t + v \sin t$

$Y' = b\cos t - a\sin t$

$y" = -a\cos t - b\sin t$

$\rightarrow Y" - 2Y' - 3Y = (-4a - 2b)\cos t + (2a - 4b)\sin t = 10\sin t, \forall t$

$\leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ 2a - 4b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Nghiệm riêng của (2) là $Y = \cos t - 2\sin t$

Nghiệm tổng quát của (2) là: $y = \overline{y} + Y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \cos t - 2\sin t$
Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 + \cos\ln x - 2\sin\ln x, x > 0$$

e. $y" - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}, x < 0$ (1)

(1) $\leftrightarrow x^2y" - xy' + y = 2x.x < 0(*)$

Do $x < 0 \rightarrow$ đặt $-x = e^t \rightarrow t = \ln -x \rightarrow xy' = -\frac{dy}{dt}, x^2y" = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}$
Thay vào (*) ta có

$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = -2e^t(2)$

(2) có phương trình thuần nhất: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$

(3) có phương trình đặc trưng là $r^2 + 2r + 1 = 0(4)$

$\leftrightarrow r = -1$

$\rightarrow$ (3) có nghiệm tổng quát là $\overline{y} = e^{-t}(C_1t + C_{2,}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- $f(t) = -2e^t \rightarrow \alpha = 1$ không là nghiệm của (4)
  $\rightarrow$ NGhiệm riêng của (2) có dạng: $Y = ae^t$
  Lại có: $Y = ae^t$
  $Y' = ae^t$
  $Y" = ae^t$

Do đó $Y" + 2Y' + Y = 4ae^t = -2e^t, \forall t$

$\leftrightarrow 4a = -2 \leftrightarrow a = \dfrac{-1}{2}$

Nghiệm riêng của (2) là $Y = \dfrac{-e^t}{2}$

Nghiệm tổng quát của (2) là :

$$y = \overline{y} + Y = e^{-t}(C_1 t + C_2 - \frac{e^t}{2}$$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = -\frac{1}{x}\Big(C_1 \ln -x + C_2\Big) + \frac{x}{2}, x < 0$$

2

a) $\begin{cases} y' = 4y - 2 \\ z' = y + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y" = 4y' - 2z' \\ z' = y + z \\ z\dfrac{4y - y'}{2} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y" = 4y' - 2\Big(y + \dfrac{4y - y'}{2}\Big) \\ \\ z = \dfrac{4y - y'}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y" - 5y' + 6y = 0(1) \\ z = \dfrac{4y - y'}{2}(2) \end{cases}$

(1) có phương trình đặc trưnglà $r^2 - 5r + 6 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 2 \\ r = 3 \end{array} \right.$

(1) có nghiệm tổng quát là: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$(2) có nghiệm tổng quát là $z = \dfrac{4y - y'}{2}$

$= \dfrac{4(C_1 e^2 x + C_2 e^{3x} - (2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{3x})}{2}$

$= C_1 e^{2x} + \dfrac{7}{2} C_1 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Vậy nghiệm tổng quát của (x) là $\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ \\ z = C_1 e^{2x} + \dfrac{7}{2} C_1 e^{3x} \end{cases}$

b.

$\begin{cases} y' = 3y - 2z(1) \\ z' = 2y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y" = 3y' - 2z' \\ z' = 2y - z \\ z = \dfrac{3y - y'}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y" = 3y' - 2(2y = \dfrac{3y - y'}{2}) \\ z = \dfrac{3y - y'}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y" - 2y' + y = 0(1) \\ z = \dfrac{3y - y'}{2}(2) \end{cases}$

(1) có phương trình đặc trưng là $r^2 - 2r + 1 = 0 \leftrightarrow r = 1$

$\rightarrow$Nghiệm tổng quát của (1) là :

$$y = e^x(C_1x + C_2), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow z = \dfrac{3y - y'}{2} = \dfrac{3e^x(C_1x + C_2) - e^x(C_1x + C_1 + C_2)}{2}$

$= \dfrac{e^x(2C_1x + 2C_2 - C_1)}{2}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát của (x) là } \begin{cases} y = e^x(C_1x + C_2), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{e^x(2C_1x + 2C_2 - C_1)}{2} \end{cases}$$

c.

$\begin{cases} y' = y + 8z + e^x \\ z' = 2y + z + e^{-3x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z" = 2y' + z' - 3e^{-3x} \\ y' = y + 8z + 3^x \\ y = \dfrac{1}{2}(z' - z - e^{-3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} z" = 2\Big(\dfrac{1}{2}(z' - z - e^{-3x}) + 8z + e^x\Big) + z' - 3e^{-3x} \\ y = \dfrac{1}{2}(z' - z - e^{-3x} \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} z" - 2z' - 15z = 2e^x - 4e^{-3x}(1) \\ y = \dfrac{1}{2}(z' - z - e^{-3x}(2) \end{cases}$

(1) có phương trình thuần nhất $z" - 2z' - 15z = 0(3)$

có phương trình đặc trưng $r^2 - 2r - 15 = 0(4) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 5 \\ r = -3 \end{array}\right.$

$\rightarrow$(3) có nghiệm tổng quát là $z = a_1e^{5x} + a_2e^{-3x}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow z_1 = e^{5x}, z_2 = e^{-3x}$

Giải hệ: $\begin{cases} C_1'e^{5x} + C_2'e^{-3x} = 0 \\ 5C_1'e^{5x} - 3C_2'e^{-3x} = 2e^x - 4e^{-3x} \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{2e^x - 4e^{-x}}{8e^{5x}} \\ C_2' = \dfrac{4e^{-3x} - 2e^x}{8e^{-3x}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{e^{-4x}}{4} - \dfrac{e^{-8x}}{2} \\ C_2' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{e^{-4x}}{16} + \dfrac{e^{-8x}}{16} + K_1 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{16}e^{4x} + K_2 \end{cases}$

Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$z = e^{5x}\Big(-\frac{e^{-4x}}{16} + \frac{e^{-8x}}{16} + K_1\Big) + e^{-5x}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}e^{4x} + K_2)$$
$$= - \frac{e^x}{8} + e^{-3x}(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}x) + K_1e^{5x} + K_2e^{-3x}$$

$$\to y = \frac{1}{2}\Big(-\frac{e^x}{8} + e^{3x}(\frac{5}{16} - \frac{3}{2}x - 3K_2) + 5K_1e^{5x}\Big) + \frac{e^x}{8} - e^{-3x}(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}x) - K_1e^{5x} - K_2e^{-3x} - e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(4K_1e^{5x} - (\frac{3}{4} + 2x + 4K_2)e^{-3x}\Big), K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Nghiệm tổng quát của (*) là: $\begin{cases} Y = \frac{1}{2}\Big(4k_1e^{5x} - (\frac{3}{4} + 2x + 4k_2)e^{-3x}\Big), k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{e^x}{8} + e^{-3x}(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}x) + K_1e^{5x} + K_2e^{-3x} \end{cases}$

d.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}(*) \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x" = y' \\ y' = -x + \frac{1}{\cos t} \\ y = x' \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} x" + x = \frac{1}{\cos t}(1) \\ y = x'(2) \end{cases}$$

(1) có phương trình thuần nhất $x" + x = 0(3)$có phương trình đặc trưng là $r^2 + 10(4) \leftrightarrow r = \pm i$

$\to$ Nghiệm tổng quát của (3) là:

$$\overline{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\to \begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases}$$

Ta giải hệ: $\begin{cases} a_1' \cos t + a_2' \sin t = 0 \\ -a_1' \sin t + a_2' \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a_2' = 1 \\ a_1' == \frac{-\cos t}{\sin t} \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} a_2 = t + K_1 \\ \\ a_1 = -\ln|\sin t| + K_2 \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của (1) là:

$x = \cos t(-\ln|\sin t| + K_2) + \sin t(t + K_1)$

$$\to y = -\sin t(\ln|\sin t| + K_2) + \frac{\cos t^2}{|\sin t|} + \cos t(t + K_1) + \sin t$$

Nghiệm tổng quát của (*) là: $\begin{cases} x = \cos t(-\ln|\sin t| + K_2) + \sin t(t + K_1) \\ y = -\sin t(\ln|\sin t| + K_2) + \dfrac{\cos t^2}{|\sin t|} + \cos t(t + K_1) + \sin t \end{cases}$

e.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y+3z} \\ z' = \dfrac{z}{2y+3z}, y(0) = 1, z(0) = 2(*) \end{cases}$$

Viết lại: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2y+3z}; \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{2y+3z}$

$\rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{2y+3z}(*)$

Từ $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} \rightarrow \ln z = \ln y + \ln C_1 \rightarrow z = C_1 y(**)$

Từ (*) $\rightarrow \dfrac{dx}{2y+3z} = \dfrac{2dy+3dz}{2y+3z} \rightarrow dx = 2dy + 3dz \rightarrow 2y + 3z - x = C_2$

Từ $y(0) = 1$ và $z(0) = 2 \rightarrow C_1 = 2, C_2 = 8$ Do đó $z = 2y \rightarrow 2y + 6y = x = 8 \rightarrow y = \dfrac{x}{8} + 1, z = \dfrac{x}{4} + 2$

$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{8} + 1 \\ z = \dfrac{x}{4} + 2 \end{cases}$ là nghiệm riêng của hệ (*)