BÀI 14

PHÂN TÍCH PHỔ CỦA TÍN HIỆU LIÊN TỤC

TS. Nguyễn Hồng Quang
PGS. TS. Trịnh Văn Loan
TS. Đoàn Phong Tùng
Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

1. Biểu diễn tín hiệu trên miền tần số.
2. Phân tích phổ của tín hiệu liên tục tuần hoàn.
3. Phân tích phổ của tín hiệu liên tục không tuần hoàn.

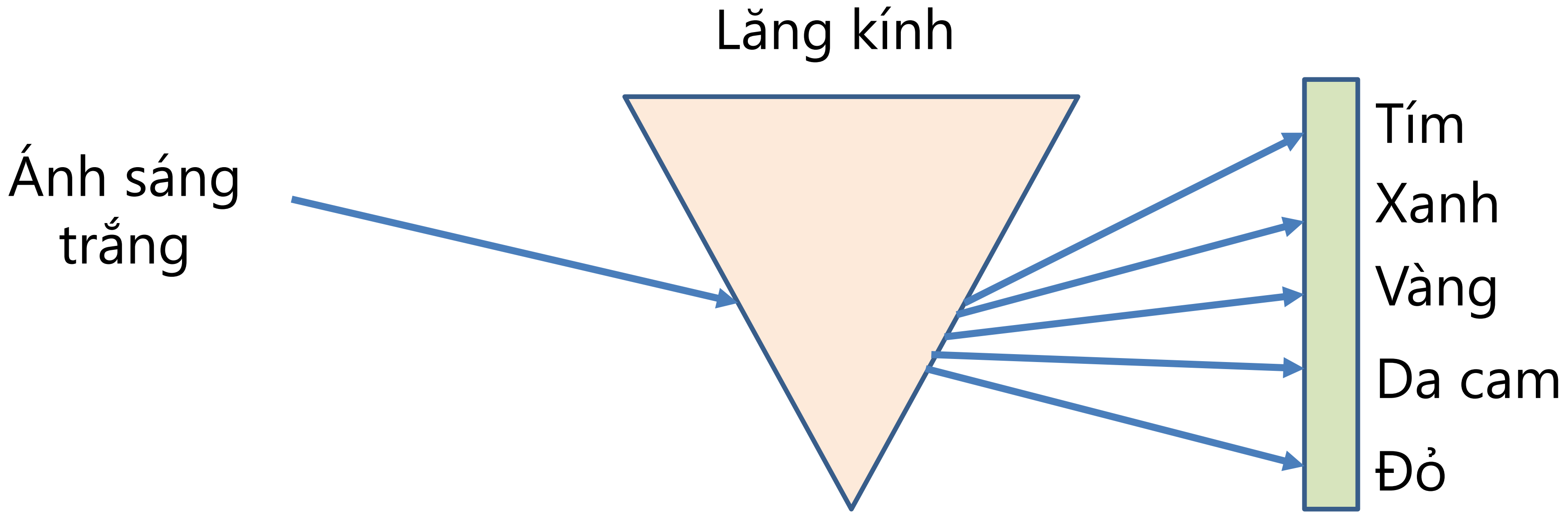
❑ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Phương pháp biểu diễn tín hiệu trên miền tần số.
- Phương pháp phân tích phổ của tín hiệu liên tục tuần hoàn.
- Phương pháp phân tích phổ của tín hiệu liên tục không tuần hoàn.

1. Biểu diễn tín hiệu trên miền tần số

- Phân tích ánh sáng trắng (sunlight) sử dụng lăng kính:



- Lăng kính được sử dụng để phân tích ánh sáng trắng thành các ánh sáng đơn sắc
- Dải màu tạo ra: *spectrum* [Isaac Newton]

Ý tưởng phân tích tín hiệu trên miền tần số

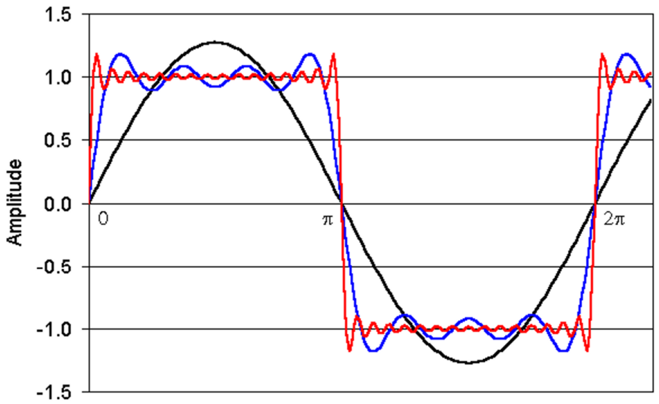
- Để nghiên cứu đáp ứng của hệ tuyến tính với một tín hiệu bất kỳ $x(n)$:
  - Đầu tiên cần phân tích tín hiệu $x(n)$ thành tổ hợp tuyến tính của các tin hiệu đơn giản.

$$x(n) = a_1.x_1(n) + a_2.x_2(n) + \ldots$$

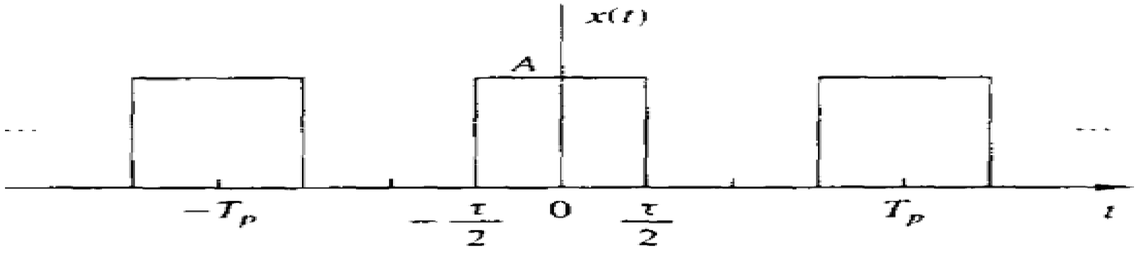
  - Các tín hiệu đơn giản $\delta(n)$; $\cos(\omega n + \varphi)$; $e^{j\omega n}$
- Phân tích tần số của một tín hiệu là phân tích tín hiệu thành các thành phần tần số (sinusoidal).
- Vai trò của lăng kính sẽ được thực hiện bởi các công cụ phân tích :
  - Chuỗi Fourier
  - Phép biết đổi Fourier

Một số thuật ngữ

- *Spectrum (phổ)*: đề cấp đến nội dung tần số của tín hiệu.
- *Phân tích tần số / phân tích phổ*: là quá trình thu được phổ của tín hiệu bằng các sử dụng các công cụ toán học.
- *Đánh giá phổ*: là quá trình xác định phổ của tín hiệu trong thực tế, dựa trên sự đo lường thực sự trên tín hiệu.
- *Bộ phân tích phổ*: là thiết bị phần cứng hoặc chương trình phần mềm sử dụng để xác định phổ tín hiệu



2. Phân tích phổ của tín hiệu liên tục tuần hoàn



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T_p, tần số $F_0 = 1/T_p$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$
- Hàm cơ bản: $e^{j\omega_k t} = e^{j2\pi k F_0 t}$ với $\omega_k = k\omega_0 = \frac{k2\pi}{T_p}$
- Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn:

Phương trình tổng hợp

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

Phương trình phân tích

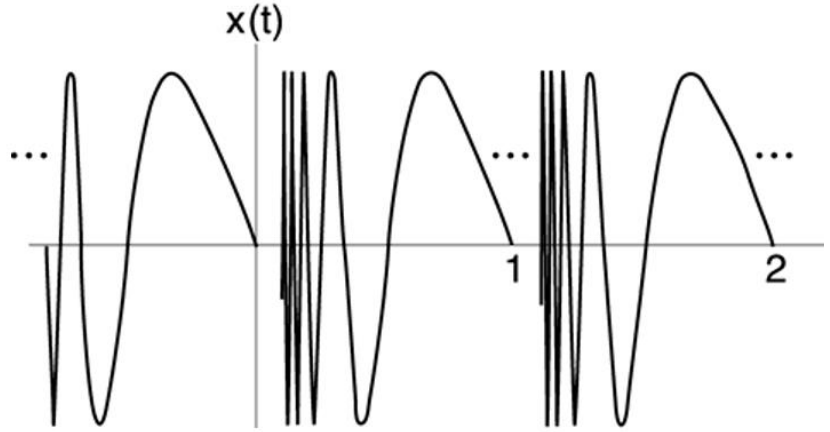
$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi k F_0 t}\,dt$$

Các điều kiện của Dirichlet

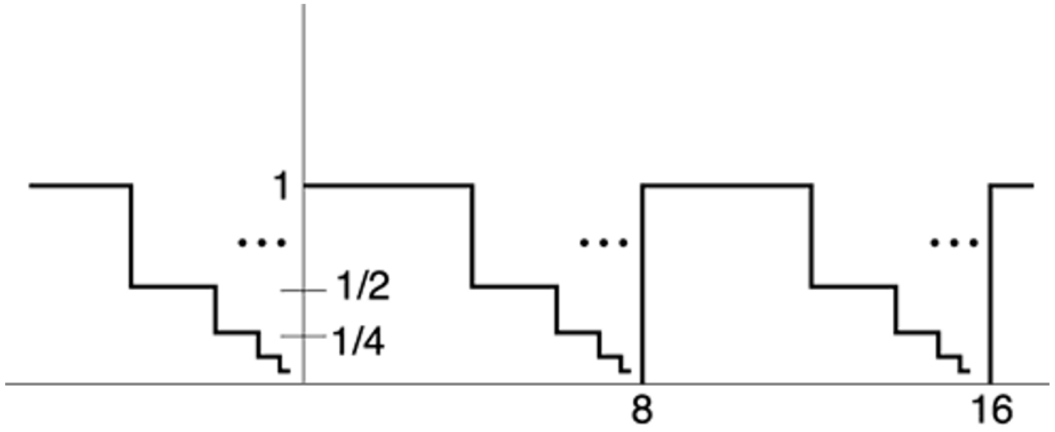
- Tín hiệu x(t) phải có tích phân tuyệt đối trong một chu kỳ.

$$\frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|\, dt < \infty$$

- Tín hiệu x(t) chứa số lượng hữu hạn các điểm cực đại và các điểm cực tiểu trong một chu kỳ.



- Tín hiệu x(t) có hữu hạn điểm không liên tục trong một chu kỳ.



Tín hiệu thực tuần hoàn

- c_k và c_{-k} là các số phức liên hợp: $c_k = |c_k|e^{j\theta_k}, c_{-k} = |c_k|e^{-j\theta_k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k)$$

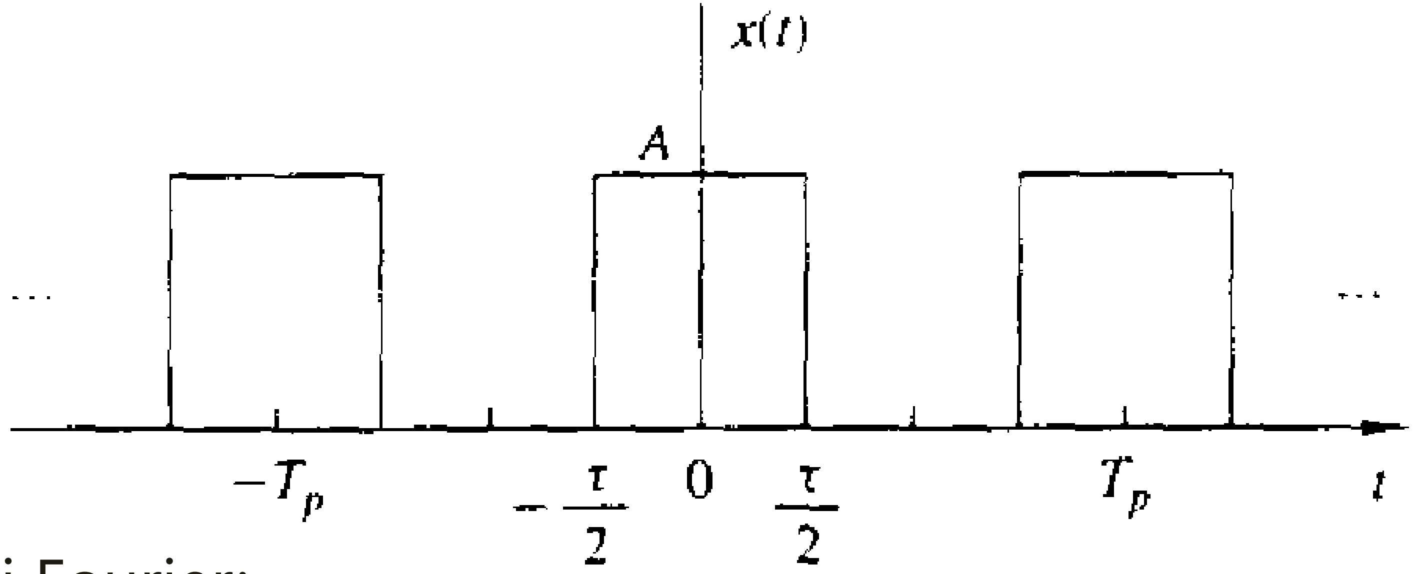
$$a_o = c_0$$

$$a_k = 2|c_k|\cos\theta_k \quad \Rightarrow \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t)$$

$$b_k = 2|c_k|\sin\theta_k$$

Ví dụ: phân tích phổ của tín hiệu xung vuông

- Tín hiệu xung vuông liên tục tuần hoàn chu kỳ T_p, độ rộng xung τ:



- Xác định chuỗi Fourier:
  - Các tần số ω_k
  - Biên độ A_k và góc pha φ_k ứng với tần số ω_k
- Vẽ phổ biên độ và phổ pha

Giải

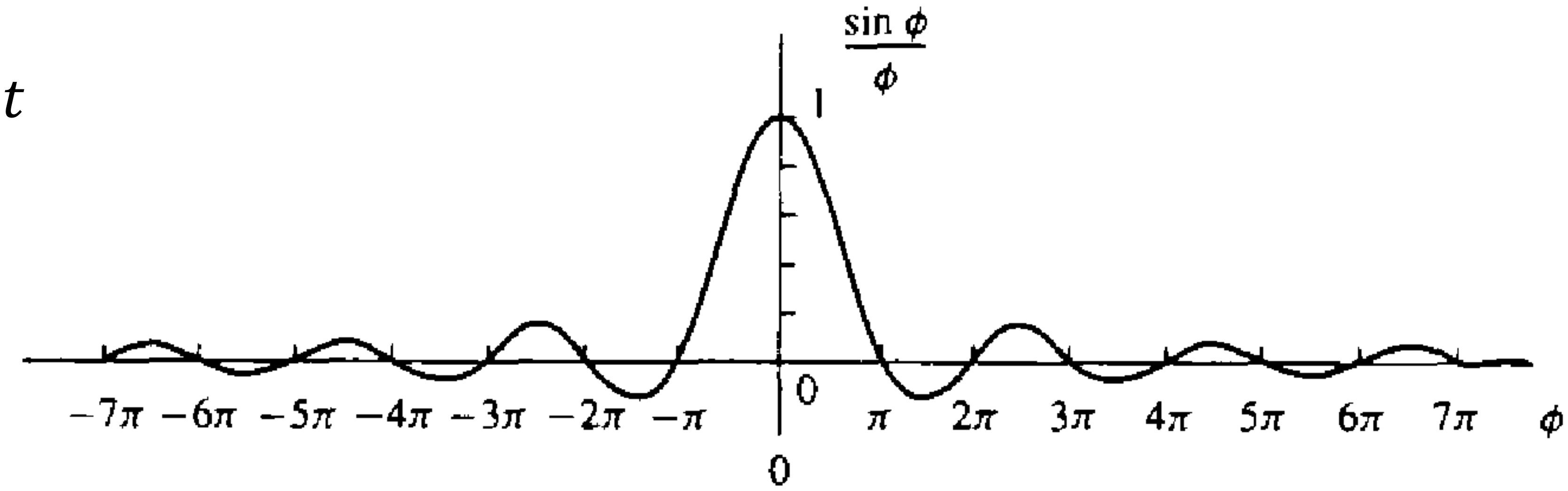
$$\omega_k = k\omega_0 = \frac{k2\pi}{T_p}$$

$$c_0 = \frac{A\tau}{T_p} \qquad c_k = \frac{A_\tau}{T_p}\frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau} \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi k F_0 t}\,dt$$

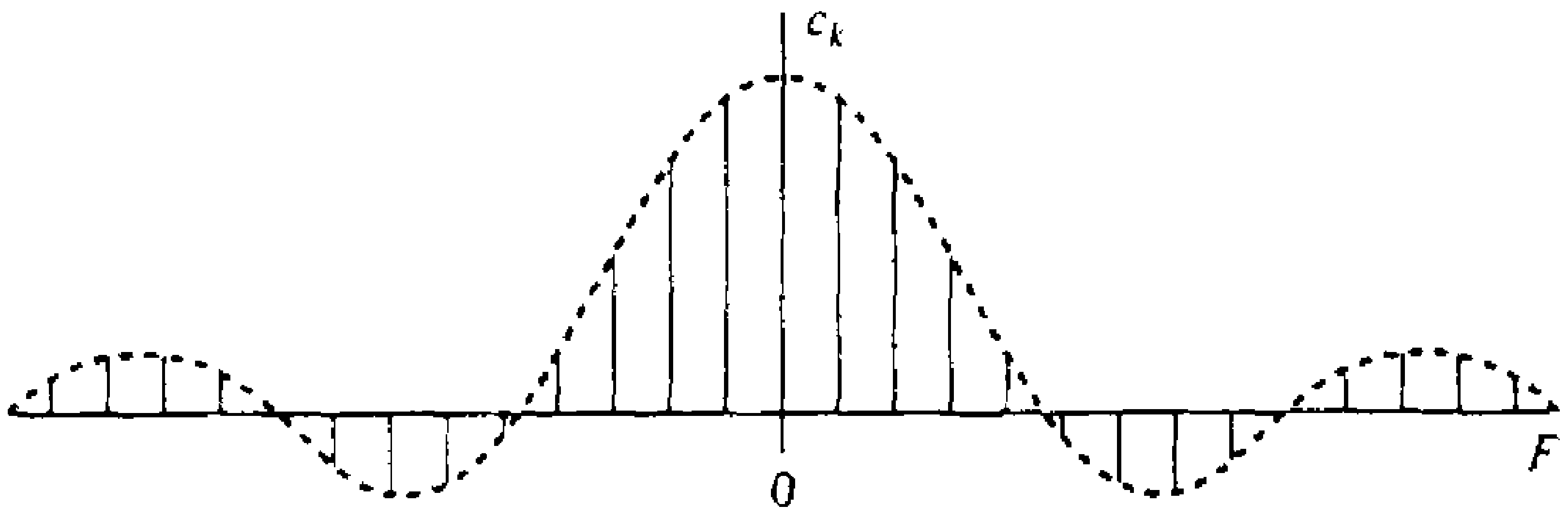
$$= \frac{1}{T_p}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi k F_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_p}\cdot\frac{e^{-j2\pi k F_0 t}}{-j2\pi k F_0}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$



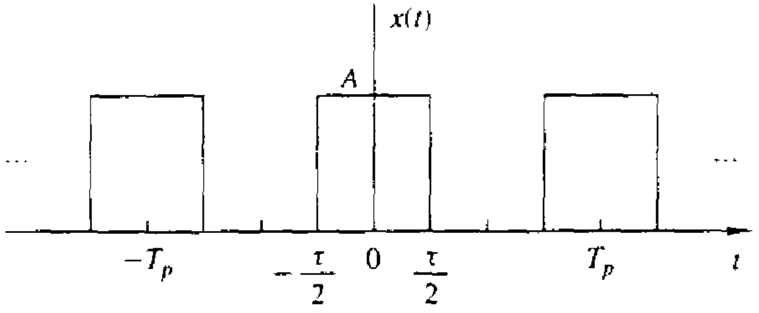
c_k là các mẫu của hàm $\frac{\sin\phi}{\phi}$

Nhận xét

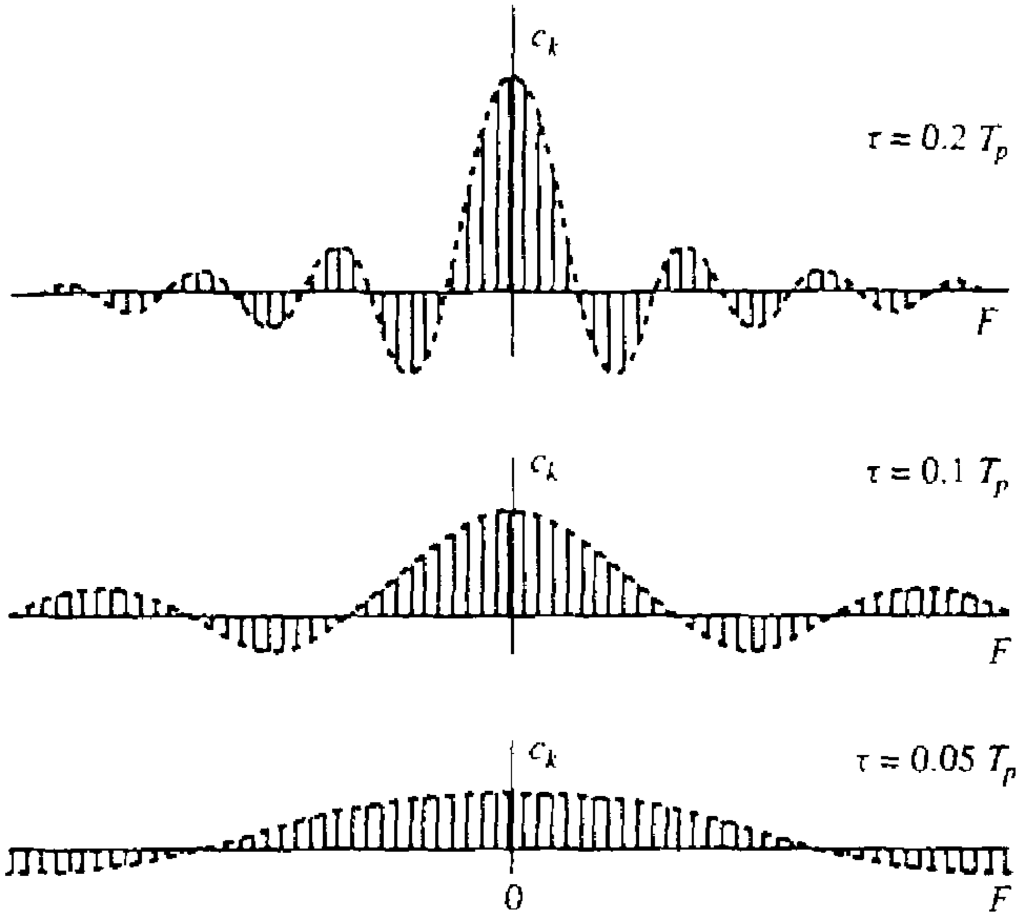


- Nhận xét:
  - Line spectrum (phổ vạch)
  - x(t) chẵn $\longrightarrow$ c_k là các giá trị thực $\longrightarrow$ phổ pha bằng 0 hoặc bằng π
- Do đó thay vì vẽ phổ biên độ và phổ pha riêng biệt, chỉ cần vẽ c_k trên một đồ thị

Cố định T_p, thay đổi τ

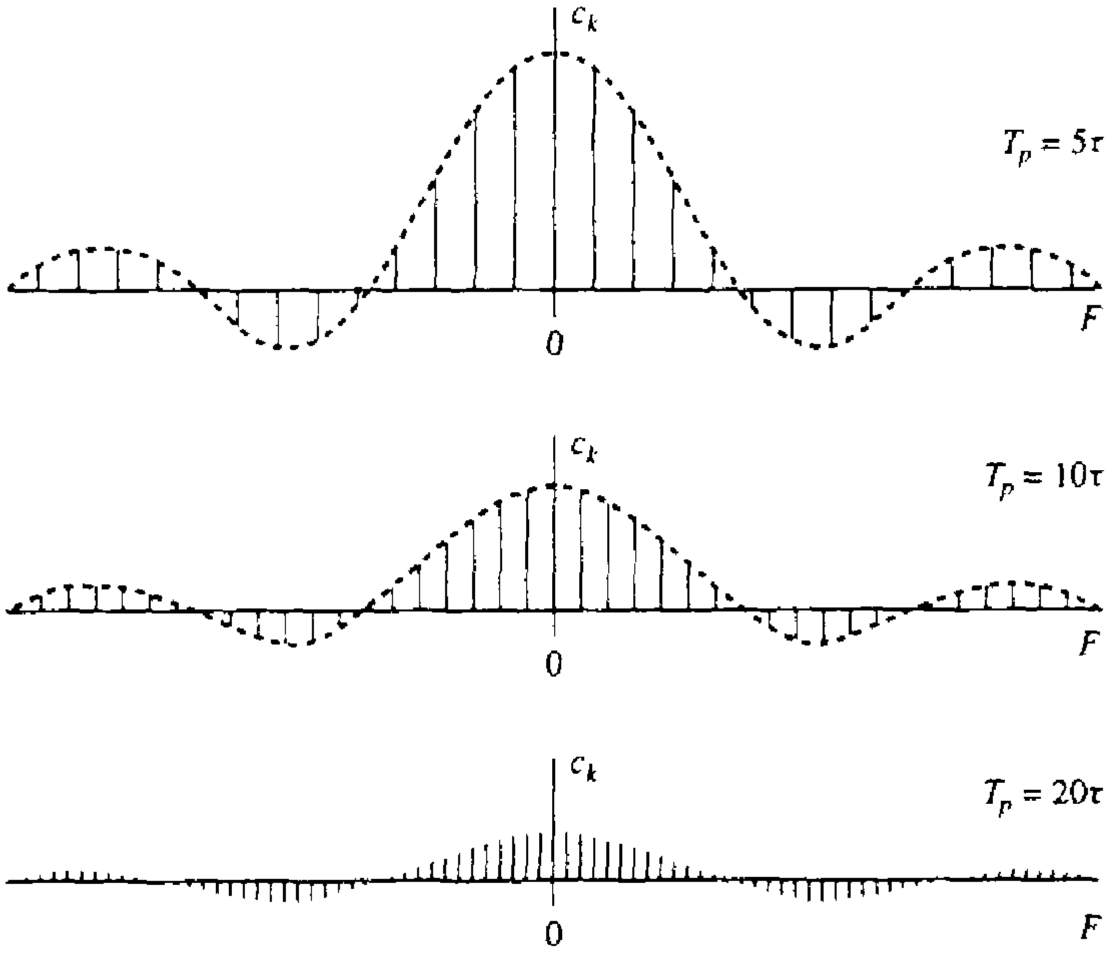


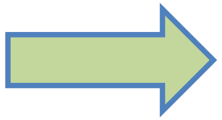
- Ảnh hưởng của việc giảm τ: trải rộng công suất tín hiệu trên dải tần số.
- Khoảng cách giữa hai vạch phổ gần nhau là $F_0 = {}^{1}/_{T_p}$ Hz, độc lập với giá trị của độ rộng xung τ.



Cố định τ và thay đổi chu kỳ tuần hoàn T_p

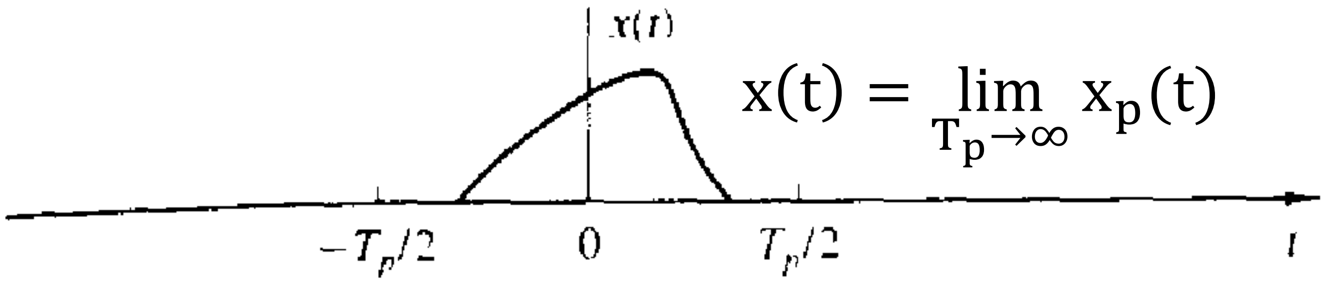
- Khoảng cách giữa các vạch phổ giảm khi tăng T_p.
- Biên độ của các vạch phổ giảm.
- Khi $T_p \to \infty$:
  - Tín hiệu trở thành không tuần hoàn
  - Khoảng cách giữa các vạch phổ dần tới 0, do đó phổ trở thành hàm liên tục



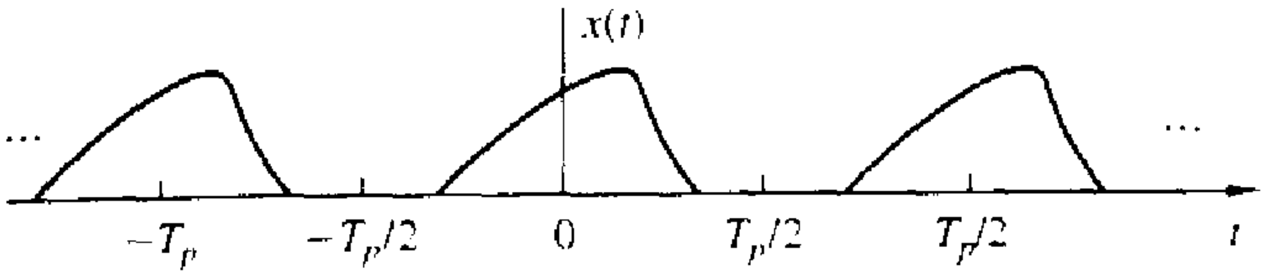


Phổ của tín hiệu không tuần hoàn chính là đường bao các vạch phổ của tín hiệu tuần hoàn tương ứng

3. Phân tích phổ của tín hiệu liên tục không tuần hoàn



$$x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$$



Xác định phổ của $x(t)$ từ phổ của $x_p(t)$ bằng cách tính giới hạn $T_p \longrightarrow \infty$

- Phương trình tổng hợp (Phép biến đổi Fourier ngược)

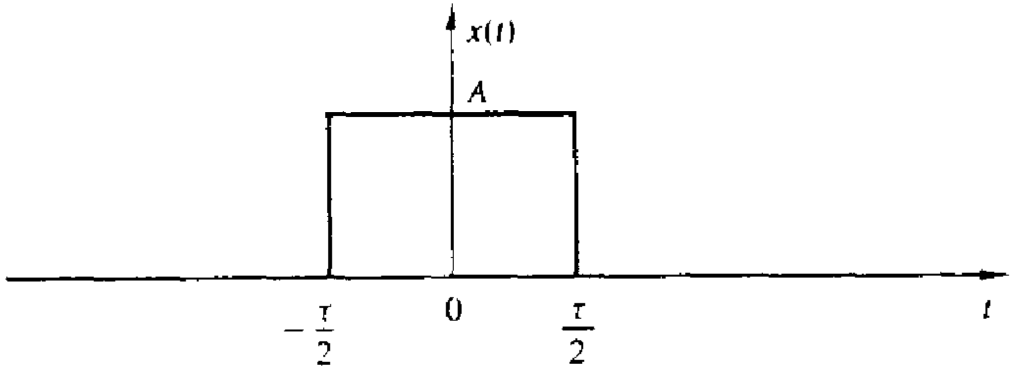
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF$$

- Phương trình phân tích (Phép biến đổi Fourier thuận)

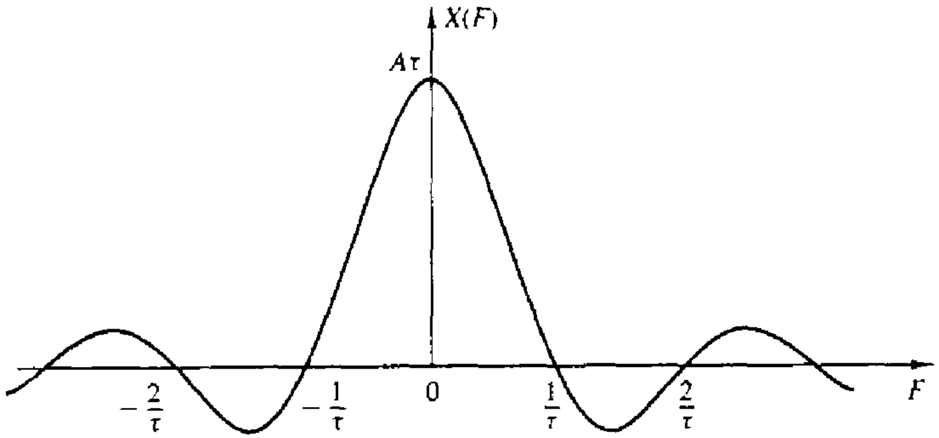
$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

Ví dụ

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



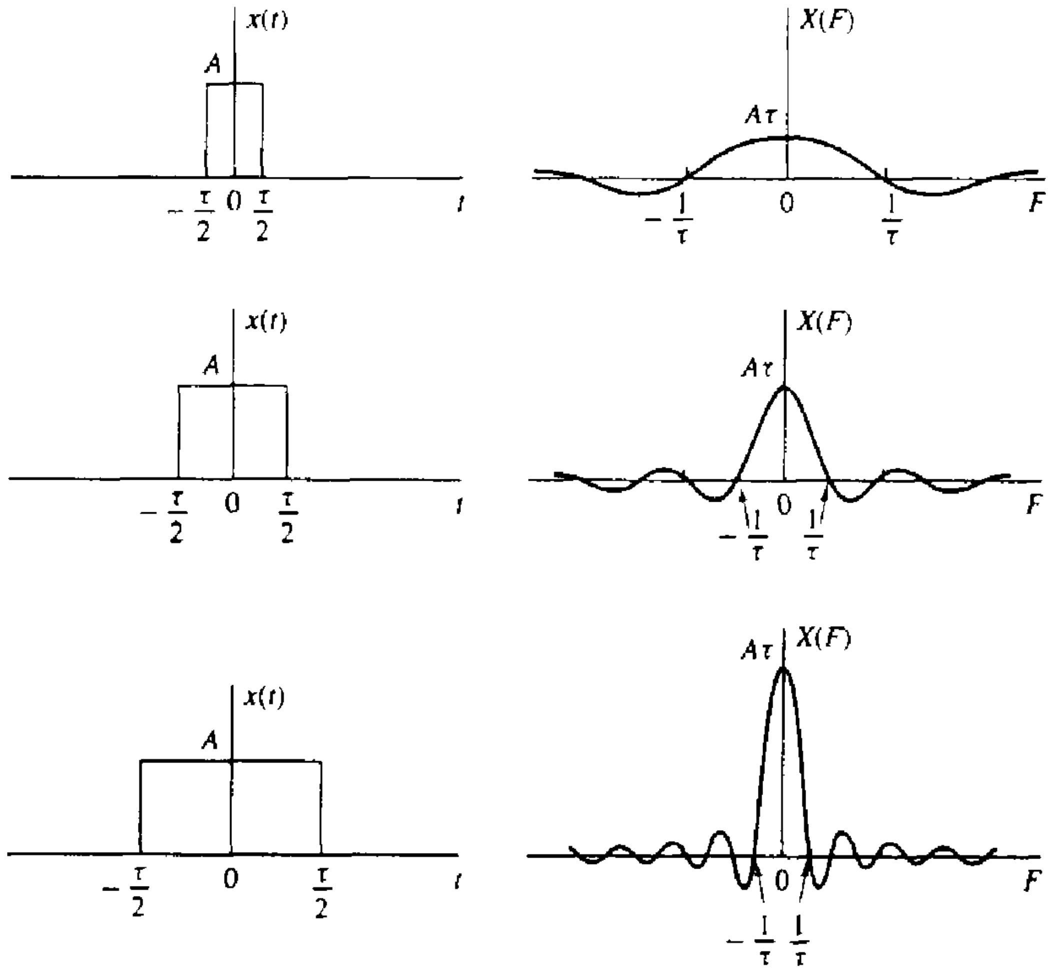
$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi Ft}dt = A\tau\frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau}$$



- Phổ của tín hiệu chữ nhật là đường bao của phổ vạch (các hệ số Fourier) của tín hiệu xung vuông tuần hoàn.
- Các lần qua điểm không (zero crossings) của X(F) xảy ra tại bội nguyên lần của $^{1}/_{\tau}$

Ảnh hưởng của độ rộng của xung chữ nhật τ

- Khi độ rộng xung **τ** tăng lên thì dạng biểu diễn trên miền tần số bị nén lại.
- Và ngược lại khi độ rộng xung **τ** giảm đi thì dạng biểu diễn trên tần số sẽ bị giãn ra, năng lượng sẽ chuyển dần về các tần số cao.

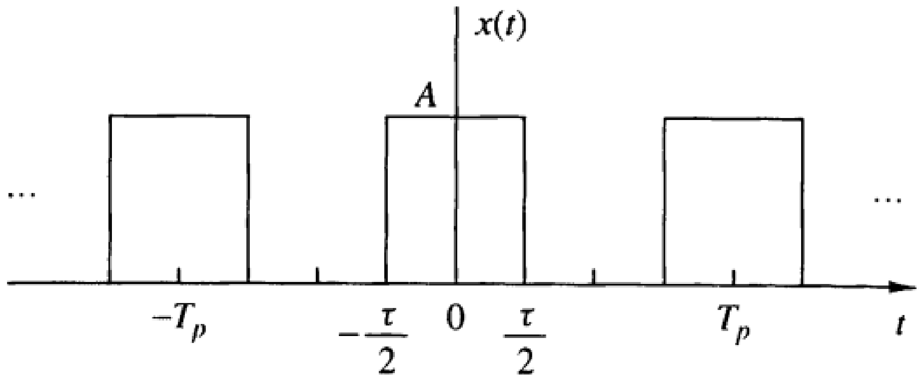


4. Tổng kết

- Tín hiệu có thể được phân tích thành hoặc tổng hợp từ các thành phần tần số sử dụng các công cụ phân tích của Fourier.
- Phổ của tín hiệu liên tục tuần hoàn là dạng phổ rời rạc (phổ vạch), còn tín hiệu liên tục không tuần hoàn có phổ liên tục.
- Phương trình phân tích và tổng hợp Fourier cho tín hiệu liên tục không tuần hoàn có thể suy ra từ tín hiệu liên tục tuần hoàn với chu kỳ T_p khi xét $T_p \to \infty$

5. Bài tập

- Bài tập 1
  - Cho tín hiệu $x_a(t)$ như hình sau:

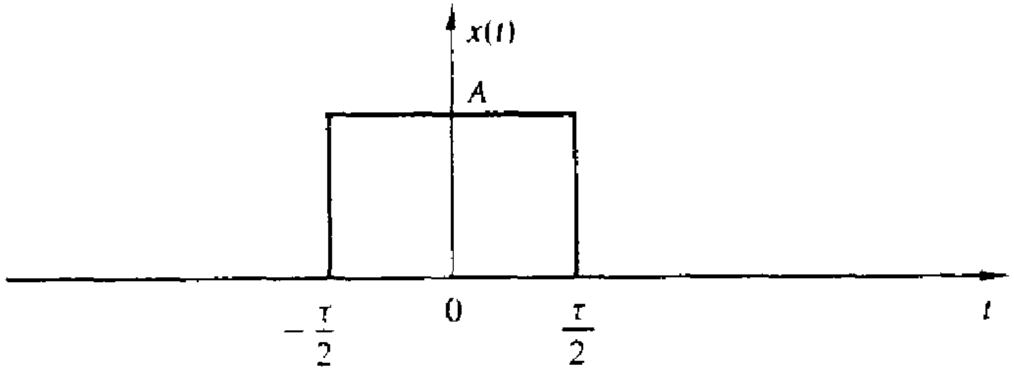


a. Xác định chuỗi Fourier c_k của tín hiệu này biết $T_p = 0.25$ giây, $\tau = 0.2T_p$

b. Vẽ hàm c_k trong các trường hợp $\tau = 0.2T_p, \tau = 0.1T_p, \tau = 0.05T_p$, từ đó nhận xét sự thay đổi của hình dạng phổ tín hiệu khi giảm độ rộng xung chữ nhật τ.

Bài tập về nhà

- Bài tập 2



a) Xác định và vẽ phổ của xung chữ nhật với $\tau = 0.25$ giây.

b) Xác định và vẽ phổ của xung chữ nhật với $\tau = 0.125$ giây. Từ đó nhận xét sự thay đổi của hình dạng phổ tín hiệu khi giảm độ rộng xung chữ nhật τ.

Bài học tiếp theo. BÀI 15

PHÂN TÍCH PHỔ CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC

Tài liệu tham khảo:

- ***Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.***
- ***J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4^{th} Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.***

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!