Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

TUẦN 1

Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ BÀI

Bài 1: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

tại điểm M (1, 1, 2)

Bài 2: Tính độ cong của đường $x = \mathrm{a}\cos^3 t\,, y = a\sin^3 t$ tại điểm ứng với $\mathrm{t} = \frac{\pi}{3}$

Bài 3: Hãy đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$$

Bài 4: Tính tích phân sau:

$$\iint_D (4x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$$

với $D: \begin{cases} 1 \le xy \le 4 \\ x \le y \le 4x \end{cases}$

Bài 5: Tính tích phân sau:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy$$

CLB Hỗ trợ học tập

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

ĐÁP ÁN

Bài 1: Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2-y^2+z^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=5 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5}\,cost \\ y=1 \\ z=\sqrt{5}\,sint \end{cases} \quad (t\in[0,2\pi])$$

Trong đó M(1,1,2) ứng với $\begin{cases} \cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin t_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{5}\,sint \\ y'=0 \\ z'=\sqrt{5}\,cost \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-2 \\ y'=0 \\ z'=1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến dạng tổng quát: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$

dạng tham số: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$

Phương trình pháp diện: $-2x+z=0$

Bài 2: Hướng dẫn giải:

$C(M) = \frac{|x'y''-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{|3asintcost|}$

Độ cong tại điểm ứng với $t=\frac{\pi}{3}$ là: $C = \frac{4\sqrt{3}}{9|a|}$

Bài 3: Hướng dẫn giải:

Đầu tiên ta viết tích phân dưới dạng:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{sinx} f(x,y)\,dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{sinx}^{0} f(x,y)\,dy$$

Sau đó, trong mỗi tích phân ta thay đổi thứ tự lấy tích phân. Khi y biến thiên từ 0 đến 1, x thay đổi từ arcsiny đến π – arcsiny, còn khi y thay đổi từ -1 đến 0, x biến thiên từ π – arcsiny đến 2π + arcsiny. Bởi vây, ta được hiệu các tích phân:

$$\int_0^{1} dy \int_{arcsiny}^{\pi-arcsiny} f(x,y)\,dx - \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi-arcsiny}^{2\pi+arcsiny} f(x,y)\,dx$$

Bài 4: Hướng dẫn giải:

Đặt $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$

$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{2v}$

$D': \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}$

$I = \iint_{D'} \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right)\frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right)dv = \ldots. = \frac{-45}{4}$

Bài 5: Hướng dẫn giải:

Chuyển sang tọa độ cực ρ, φ ta được:

$$\iint_{\substack{0\le\rho\le1 \\ 0\le\varphi\le2\pi}} \rho^2 \left|\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \rho\right| d\rho\, d\varphi$$

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

Tích phân theo miền D có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các tích phân theo tập hợp

$$D_1: 0 \leq \rho \leq 1, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$D_2: \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq \rho \leq 1, \frac{-\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$D_3: 0 \leq \rho \leq \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \frac{-\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$$

Trong các miền D_1 và D_2 hàm $\propto (\rho, \varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \rho$ là âm, còn trong miền D_3 nó dương. Như vậy, nếu chuyển từ tích phân hai lớp sang tích phân lặp, ta được:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 - p^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\rho + \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}^1 \rho^3 - p^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\rho -$$

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} \rho^3 - \rho^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\rho = \ldots = \frac{9}{16}\pi$$

CLB Hỗ trợ học tập