



ĐỀ CK GIẢI TÍCH 1

BỘ ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 1
Dành cho sinh viên trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Biên soạn: Tài liệu HUST

DANH SÁCH ĐỀ THI

ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)	2
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)	3
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)	4
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)	5
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)	6
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)	7
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)	8
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)	9
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)	10
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)	11
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)	12
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)	13
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)	14
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)	15
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)	16
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)	17
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)	18
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)	19
ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)	20

**I. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (2 điểm). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6 + 3y^2}.$

Câu 2 (1 điểm). Tính gần đúng nhờ vi phân $A = \sqrt{2,02^2 + 3,04^2 + 3}.$

Câu 3 (1 điểm). Chứng minh rằng $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0.$

Câu 4 (1 điểm). Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3x$ và $y = 0$ quanh trục Oy một vòng.

Câu 5 (1 điểm). Tính $\int \left(\sqrt{2x-3} + \left| 1-x^2 \right|^{\frac{-1}{2}} \right) dx.$

Câu 6 (1 điểm). Hàm số $f(x) = x^3 + x$ có hàm ngược là $y = g(x)$. Tính $g'(2).$

Câu 7 (1 điểm). Tính $P = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ với $z = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$

Câu 8 (1 điểm). Không khí được bơm vào một quả bóng bay hình cầu với tốc độ $100 \text{ cm}^3 / \text{s}.$ Tính tốc độ tăng lên của bán kính quả bóng khi bán kính quả bóng bằng $50 \text{ cm}.$

Câu 9 (1 điểm). Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot x} dx.$

**II. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (2 điểm). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{4x^2 + 3y^8}$

Câu 2 (1 điểm). Tính gần đúng nhờ vi phân $A = \sqrt{4,03^2 + 2,02^2 + 5}.$

Câu 3 (1 điểm). Chứng minh rằng $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0.$

Câu 4 (1 điểm). Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x$ và $y = 0$ quanh trục Oy một vòng.

Câu 5 (1 điểm). Tính $\int \left(\sqrt{-4-3x} + \left| 1-x^2 \right|^{\frac{-1}{2}} \right) dx.$

Câu 6 (1 điểm). Hàm số $f(x) = x^5 + x$ có hàm ngược là $y = g(x)$. Tính $g'(2).$

Câu 7 (1 điểm). Tính $P = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{5}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ với $z = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}.$

Câu 8 (1 điểm). Không khí được bơm vào một quả bóng bay hình cầu với tốc độ $200 \text{ cm}^3 / \text{s}.$ Tính tốc độ tăng lên của bán kính quả bóng khi bán kính quả bóng bằng $60 \text{ cm}.$

Câu 9 (1 điểm). Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx.$

**III. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (2 điểm). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin x}$.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2y^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$.

Câu 2 (1 điểm). Phương trình $x^3 + 3x^2y + y^5 - 5 = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$. Tính $y'(1)$.

Câu 3 (1 điểm). Tính đạo hàm của hàm số $y = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, $x \neq \pm 1$.

Câu 4 (1 điểm). Tìm khai triển Maclaurin của $y = \ln(1+2x)$ đến x^3 .

Câu 5 (1 điểm). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{e^x + 1}$.

Câu 6 (2 điểm). Tính các tích phân sau:

a) $\int \tan(2x) dx$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)(x^2-x+1)}$.

Câu 7 (1 điểm). Quay đường $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$ quanh trục Ox một vòng. Tính diện tích mặt tròn xoay được sinh ra.

Câu 8 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - (x+y)^2$.

**IV. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (2 điểm). Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x}.$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{2x^3 \ln y}{x^2 + (y-1)^2}.$

Câu 2 (1 điểm). Phương trình $x^4 + 4xy^3 + 3y^5 - 8 = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$. Tính $y'(1)$.

Câu 3 (1 điểm). Tính đạo hàm của hàm số $y = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), x > 1$.

Câu 4 (1 điểm). Tìm khai triển Maclaurin của $y = \ln(1-3x)$ đến x^3 .

Câu 5 (1 điểm). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2e^x + 1}$.

Câu 6 (2 điểm). Tính các tích phân sau:

a) $\int \cot(3x) dx.$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)(x^2+x+1)}$

Câu 7 (1 điểm). Quay đường $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 9$ quanh trục Ox một vòng. Tính diện tích mặt tròn xoay được sinh ra.

Câu 8 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 + (x+y)^2$.

**V. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)**

Câu 1 (1 điểm). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} \right)$.

Câu 2 (1 điểm). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = 2t^2 + 3t^4 \end{cases}$. Tính $f'(x), f''(x)$.

Câu 3 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

Câu 4 (1 điểm). Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, ta có $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) > \frac{2}{2+x}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^6 + 2^6 + \dots + n^6}{n^7} \right)$.

Câu 6 (2 điểm). Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sin x + \cos x}$.

b) $\int_2^3 \operatorname{arccot} \sqrt{3-x} dx$.

Câu 7 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(3x^4 - 2)}$.

Câu 8 (1 điểm). Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quanh trục Ox .

Câu 9 (1 điểm). Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \arctan \sqrt{3x}, & x \geq 0 \\ ae^{3x} + b \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

Tìm a và b để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x=0$.

**VI. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)**

Câu 1 (1 điểm). Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{e^{3x} - 1} \right)$.

Câu 2 (1 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi $\begin{cases} x = 3t + t^3 \\ y = 5t - t^5 \end{cases}$. Tính $f'(x), f''(x)$.

Câu 3 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$.

Câu 4 (1 điểm). Chứng minh rằng với mọi $x > 1$, ta có $\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) < \frac{2}{x-1}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6} \right)$.

Câu 6 (2 điểm). Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin x + \cos x}$.

b) $\int_1^2 \arctan \sqrt{3-x} \, dx$.

Câu 7 (1 điểm). Tính tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(2x^4 - 1)}$.

Câu 8 (1 điểm). Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $x^2 + (y+2)^2 = 1$ quanh trục Ox .

Câu 9 (1 điểm). Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \sqrt{3x}, & x \geq 0 \\ a2^x + b \arctan x, & x < 0 \end{cases}$$

Tìm a và b để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x=0$.

**VII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)**

Câu 1 (1 điểm). Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - x}{x - \sin x - 1}$.

Câu 2 (1 điểm). Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{7,988}$.

Câu 3 (1 điểm). Tính hoặc xét sự phân kỳ $\int_1^{+\infty} e^{-x} x dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính $\int_0^\pi e^{3x} \sin(2x) dx$.

Câu 5 (1 điểm). Cho $z(x, y) = e^{xy^2}$. Tính $d^2 z$.

Câu 6 (1 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số $z = 3x^2 - 4y^2$ trong miền đóng:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1.$$

Câu 7 (1 điểm). Tính $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, trong đó: $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0$.

Câu 8 (1 điểm). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\begin{cases} x = \frac{1}{t^3 - 8} \\ y = \frac{2t}{t^3 - 8} \end{cases}$

Câu 9 (1 điểm). Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \right) \sin^{18} x dx$.

Câu 10 (1 điểm) Tính $z'_x(x; y)$ biết $z(x; y) = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**VIII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20191 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)**

Câu 1 (1 điểm). Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - x}{x - \sin x + 1}$.

Câu 2 (1 điểm). Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{8,012}$.

Câu 3 (1 điểm) Tính hoặc xét sự phân kỳ $\int_1^{+\infty} e^x x dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính $\int_0^\pi e^{3x} \cos(2x) dx$.

Câu 5 (1 điểm). Cho $z(x, y) = e^{x^2 y}$. Tính $d^2 z$.

Câu 6 (1 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số $z = 4x^2 - 3y^2$ trong miền đóng:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Câu 7 (1 điểm). Tính $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, trong đó: $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0$.

Câu 8 (1 điểm). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\begin{cases} x = \frac{1}{8-t^3} \\ y = \frac{2t}{8-t^3} \end{cases}$

Câu 9 (1 điểm). Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+e^{|x|}}} \right) \sin^{18} x dx$.

Câu 10 (1 điểm). Tính $z'_x(x, y)$ biết $z(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**IX. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20192 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = x^2 + \arcsin x$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx$.

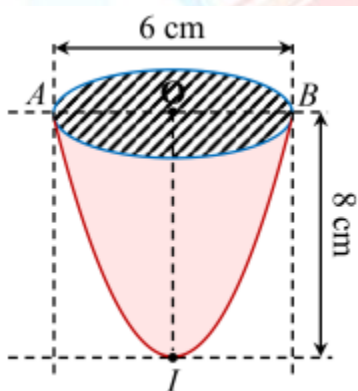
Câu 4 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x}{\sqrt{2x^2 + 3y^4}}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = (x+y)^2 + (x^2-1)^2 - 1$.

Câu 6 (1 điểm). Chứng minh rằng $x \arctan x \geq \ln \sqrt{1+x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 7 (1 điểm). Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x^5}} dx$.

Câu 8 (1 điểm). Có một vật thể tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 6cm và chiều cao là 8cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục OI cắt vật thể theo thiết diện là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.



Câu 9 (1 điểm). Biểu thức $z + \frac{1}{x} = \sqrt{y^2 - z}$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$.

Chứng minh rằng: $x^2 z'_x + \frac{z'_y}{2y} - 1 = 0$.

Câu 10 (1 điểm). Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thoả mãn:



$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với mọi $x \neq 0$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

X. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)

Câu 1 (1 điểm). Tìm chu kỳ của hàm số $y = 3\cos(5x) + 4\sin(5x)$.

Câu 2 (2 điểm). Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$

b) $\int \ln(x^2 + x + 2) dx$.

Câu 3 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1 - \cos \frac{x}{2}} dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^4}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 2y^2$.

Câu 6 (1 điểm). Tìm và phân loại điểm gián đoạn $y = \left(\arctan \frac{x+1}{x} \right)^{-1}$.

Câu 7 (1 điểm). Phương trình $(x+y)z + e^{xyz} = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$.

Tính $dz(0,1)$.

Câu 8 (1 điểm). Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[0,1]$, $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)} dx = \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2}$.

Câu 9 (1 điểm). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn điều kiện:

$f(x) = \sqrt{x+2} + x^2 f(x^3)$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

**XI. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20193 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Tìm chu kỳ của hàm số $y = 4\cos(5x) + 3\sin(5x)$.

Câu 2 (2 điểm). Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\tan^2 x}$

b) $\int \ln(x^2 - x + 2) dx$,

Câu 3 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1 - \cos \frac{x}{3}} dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^4 + y^2}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$.

Câu 6 (1 điểm). Tìm và phân loại điểm gián đoạn $y = \left(\arctan \frac{x}{x+1} \right)^{-1}$.

Câu 7 (1 điểm). Phương trình $(x+y)z - e^{xyz} = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$.

Tính $dz(0,1)$.

Câu 8 (1 điểm). Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[0,1]$, $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)} dx = \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2}$.

Câu 9 (1 điểm). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn điều kiện:

$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + x^2 f(x^3)$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

**XII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 1 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x - \arctan x}$.

Câu 2 (1 điểm). Cho $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$. Tính đạo hàm cấp cao $f^{(50)}(x)$

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^5 \sqrt{x^2 - 9} dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{4 \sin x + 3 \cos x} dx$.

Câu 5 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + \sin^2 y}$.

Câu 6 (1 điểm). Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái, trong trường hợp có hai loài, được xác định theo công thức: $H = -x \ln x - y \ln y$, ở đó x, y là tỷ lệ các loài, thoả mãn $\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của H .

Câu 7 (1 điểm). Chứng minh rằng $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 8 (1 điểm) Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - x e^{\frac{z}{y}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,02; 0,99)$.

Câu 9 (1 điểm). Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}} \right)$.

Câu 10 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}} dx$.

**XIII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 2 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x - \operatorname{arccot} x}$.

Câu 2 (1 điểm). Cho $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$. Tính đạo hàm cấp cao $f^{(50)}(x)$.

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^5 \sqrt{x^2 - 16} dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + 6 \cos x}{6 \sin x + 5 \cos x} dx$.

Câu 5 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^3 y}{\sin^2 x + \sin^2 y}$.

Câu 6 (1 điểm). Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái, trong trường hợp có hai loài, được xác định theo công thức: $H = -x \ln x - y \ln y$, ở đó x, y là tỷ lệ các loài, thoả mãn $\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của H .

Câu 7 (1 điểm). Chứng minh rằng $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 8 (1 điểm). Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,99; 0,02)$.

Câu 9 (1 điểm). Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right)$.

Câu 10 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$.

**XIV. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 3 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^x$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x \operatorname{arccot} x$.

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^1 \ln(x^2 + x + 1) \, dx$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} y \arctan\left(\frac{x}{y}\right)^2, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

a) Xét tính liên tục của $f(x, y)$ tại điểm $A(1, 0)$.

b) Tính $f'_y(1, 0)$.

Câu 7 (1 điểm). Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh $\tan \frac{x+y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}$.

Câu 8 (1 điểm). Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + 3^x} \, dx$.

Câu 9 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x \, dx}{x\sqrt{x+1} - \cos x}$.

**XV. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 4 (Nhóm ngành 1)**

Câu 1 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x \arctan x$.

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$.

Câu 4 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^1 \ln(x^2 - x + 1) \, dx$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = 4(y - x) - y^2 - x^2$.

Câu 6 (2 điểm). Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) Xét tính liên tục của $f(x, y)$ tại điểm $B(0, 1)$.

b) Tính $f'_x(0, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh $\cot \frac{x+y}{2} \leq \frac{\cot x + \cot y}{2}$.

Câu 8 (1 điểm). Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + 2^x} \, dx$.

Câu 9 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x \, dx}{x\sqrt{x} + x - \sin x}$.

**XVI. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 5 (Nhóm ngành 2)**

Câu 1 (1 điểm). Tìm a để hàm số sau liên tục tại điểm $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{a-x}, & \text{khi } x > 1 \\ \arccos x, & \text{khi } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 2 (1 điểm). Tìm hàm ngược của hàm số $y = 2^x - 2^{-x}$

Câu 3 (1 điểm). Cho hai hàm $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 3$. Tìm số $c \in (-1, 3)$

sao cho $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(-1)}{g(3) - g(-1)}$. Điều này có mâu thuẫn với định lý Cauchy hay không?

Giải thích?

Câu 4 (1 điểm). Cho hai hàm số $f(x), g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$ với mọi x . Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng thì $f(f(x)) \leq g(g(x))$.

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Câu 6 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(\frac{1+2\sin x}{1+\sin 2x} \right)$.

Câu 7 (1 điểm). Tính độ dài cung $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Câu 8 (1 điểm). Tìm tiệm cận xiên của đường cong $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1-t^3} \\ y = \frac{t^2}{1-t} \end{cases}$.

Câu 9 (1 điểm). Tính giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2+2^2}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt{4n^2+(n-1)^2}} \right)$$

Câu 10 (1 điểm). Cho hàm $f(x)$ lồi, khả tích trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

**XVII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 6 (Nhóm ngành 2)**

Câu 1 (1 điểm). Tìm a để hàm số sau liên tục tại điểm $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{a+x}, & \text{ khi } x > 1 \\ \arccos x, & \text{ khi } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 2 (1 điểm). Tìm hàm ngược của hàm số $y = 3^x - 3^{-x}$.

Câu 3 (1 điểm). Cho hàm số $f(x) = x^3, g(x) = x^2, -3 \leq x \leq 1$. Tìm số $c \in (-3, 1)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(-3) - f(1)}{g(-3) - g(1)}.$$

Điều này có mâu thuẫn với định lý Cauchy hay không? Giải thích?

Câu 4 (1 điểm). Cho hai hàm số $f(x), g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$ với mọi x . Chứng minh rằng nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng thì $f(f(x)) \leq g(g(x))$.

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Câu 6 (1 điểm). Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(\frac{1-2\sin x}{1-\sin 2x} \right)$.

Câu 7 (1 điểm). Tính độ dài cung $y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Câu 4 (1 điểm). Tìm tiệm cận xiên của đường cong $\begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t} \\ y = \frac{3t^3}{1-t^3} \end{cases}$.

Câu 9 (1 điểm). Tính giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{n-1}{\sqrt{4n^2-(n-1)^2}} \right)$$

Câu 4 (1 điểm). Cho hàm $f(x)$ lõm, khả tích trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

**XVIII. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 7 (Nhóm ngành 3)**

Câu 1 (1 điểm). Tính $\int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx$.

Câu 2 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x + 1} + \sqrt{x + 1}}$.

Câu 3 (1 điểm). Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi elip: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ quay quanh trục Ox .

Câu 4 (1 điểm). Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 4x}{x^2}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $y = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số $z = x^3 y^2 + x^2 y^2 - 3xy + 2$. Tính $dz(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = xy + (\alpha - x - y)(2x + 3y)$; α là tham số thực.

Câu 8 (1 điểm). Tính tích phân kép $\iint_D (x + y) dx dy$, với $D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$

Câu 9 (1 điểm). Tồn tại hay không hàm f sao cho:

$$f(1) = -f(1), f(0) = 0 \text{ và } f''(x) < 0, \forall x \in (-2, 2)$$

Câu 10 (1 điểm). Cho hàm số: $z = x \left[\sin(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)^{2018} + 100(x^2 - y^2)^{2019} \right]$.

Chứng minh $x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} = zy$.

**XIX. ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 1 20181 – ĐỀ 8 (Nhóm ngành 3)**

Câu 1 (1 điểm). Tính $\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx$.

Câu 2 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1} + \sqrt{x + 1}}$.

Câu 3 (1 điểm). Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi elip: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ quay quanh trục Ox .

Câu 4 (1 điểm). Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos x}{x^2}$.

Câu 5 (1 điểm). Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $y = \frac{x}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hàm số $z = x^2 y^3 + x^2 y^2 - 3xy + 2$. Tính $dz(1, 1)$.

Câu 7 (1 điểm). Tìm cực trị của hàm số $z = xy + (\alpha - x - y)(2x + 3y)$; α là tham số thực.

Câu 8 (1 điểm). Tính tích phân kép $\iint_D (x + y) dx dy$, với $D: \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x \end{cases}$

Câu 9 (1 điểm). Tồn tại hay không hàm f sao cho:

$$f(1) = -f'(1), f(0) = 0 \text{ và } f''(x) > 0, \forall x \in (-2, 2)$$

Câu 10 (1 điểm). Cho hàm số $z = x \left[\sin(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)^{2018} + 100(x^2 - y^2)^{2019} \right]$.

Chứng minh $x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} = zy$.