ĐỀ THI THỬ GIỮA KỲ GIẢI TÍCH II 20192

Nhóm ngành 2

Thời gian làm bài: 60 phút

ĐÁP ÁN

Câu 1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Giải

$I = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Ta có $f(x,y) = \left|\dfrac{3(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right| \leq \left|\dfrac{3(x-1)^2(y-2)}{2(x-1)(y-2)}\right| = \left|\dfrac{3(x-1)}{2}\right| \to 0$

Vậy $I = 0$

Câu 2. Tìm độ cong của đường $4y^2 = -x^2 - 12y - 8$ tại $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

Giải

Ta có $4y^2 = -x^2 - 12y - 8 \Leftrightarrow 4y^2 + x^2 + 12y + 9 = 1 \Leftrightarrow (2y+3)^2 + x^2 = 1$

Đặt $y = \dfrac{\sin t - 3}{2}, x = \cos t$

$\Rightarrow y' = \dfrac{\cos t}{2}, x' = -\sin t$

$\Rightarrow y'' = -\dfrac{\sin t}{2}, x'' = -\cos t$

Ta có $C = \dfrac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\dfrac{\sin t^2}{2} + \dfrac{\cos t^2}{2}}{\left(-\sin t^2 + \left(\dfrac{\cos t}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Lại có $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ứng với $t = \dfrac{\pi}{6}$

Do đó $C(M) = \dfrac{32}{7\sqrt{7}}$

Câu 3. Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nếu $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y + 8\right) - e^x \cos x \sin y$

Giải

Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2+y+8\right) - e^x\cos x\sin y + e^x\sin x\sin y$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -2x\sin\left(x^2+y+8\right) + \left(-e^x\cos x + e^x\sin x\right)\cos y$

Câu 4. Tính vi phân toàn phần

$$z = \int_{\sqrt{xy}}^{x^2+y^2} t\ln t dt$$

Giải

Đặt $u = \sqrt{xy}, v = x^2+y^2$

$$\Rightarrow z = \int_u^v t\ln t dt \Rightarrow dz = -u\ln u du + v\ln v dv$$

$\Leftrightarrow dz = -\sqrt{xy}\ln\sqrt{xy}\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}}dy\right) +$
$\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\left(2xdx+2ydy\right)$
$\Leftrightarrow dz = \left[\frac{-y\ln\sqrt{xy}}{2} + 2x\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]dx +$
$\left[\frac{-x\ln\sqrt{xy}}{2} + 2y\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]dy$

Câu 5. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của $z = e^{u+v^2}$ với $u = \tan(x+y); v = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Giải

Ta có $u = \tan(x+y), v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$z'_u = e^{u+v^2}, z'_v = 2v.e^{u+v^2}$
$u'_x = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} = u'_y$
$v'_x = \dfrac{-x}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}, v'_y = \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$
Ta có $z'_x = z'_u.u'_x + z'_v.v'_x = \dfrac{e^{\tan(x+y)+\frac{1}{x^2+y^2}}}{\cos^2(x+y)} + \dfrac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}.e^{\tan(x+y)+\frac{1}{x^2+y^2}}$

$$z'_y = z'_u.u'_y + z'_v.v'_y = \frac{e^{\tan(x+y)+\frac{1}{x^2+y^2}}}{\cos^2(x+y)} + \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}.e^{\tan(x+y)+\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Câu 6. Ứng dụng vi phân tính gần đúng $\sqrt[4]{(2,01)^2 + 12\cos 0,015}$

Giải

Xét hàm số $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + 12\cos y}$
Ta có $\sqrt[4]{(2,01)^2 + 12\cos 0,015} = f(2+\Delta x, 0+\Delta y)$
Với$\Delta x = 0,01, \Delta y = 0,015$
Ta có

$$f'_x = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+12\cos y)^3}}, f'_y = \frac{-3\sin y}{2\sqrt[4]{(x^2+12\cos y)^3}}$$

$$\Rightarrow f(2+\Delta x, 0+\Delta y) \simeq f(2,0) + f'_x(2,0)\Delta x + f'_y(2,0)\Delta y$$
$$= 2 + \frac{1}{8}.0,01 + 0 = 2,00125$$

Câu 7. Tìm khai triển Taylor của hàm $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + x + 2$ tại $M(4,1)$

Giải

Ta có $f'_x = 4x + 4y + 1, f'_y = 6y + 4x$
$f''_{xx} = 4, f''_{xy} = 4, f''_{yy} = 6$, các đạo hàm cấp cao của f có cấp ≥ 3 đều $= 0$
Từ đó, ta có khai triển Taylor của f tại $M(4,1)$ là:

$$f(x,y) = f(4,1) + f'_x(4,1).\Delta x + f'_y(4,1).\Delta y +$$
$$\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(4,1).\Delta^2 x + 2f''_{xy}(4,1).\Delta x\Delta y + f''_{yy}(4,1).\Delta^2 y\right]$$
$$= 57 + 21(x-4) + 22(y-1) + \frac{1}{2}\left[4(x-4)^2 + 8(x-4)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$

Câu 8. Tìm phương trình tiếp tuyến, pháp diện của đường cong $x = t - \sqrt{2}\cos t, y = 5\sin^2 t - 1, z = \cos 2t + 2$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}$

Giải

Ta có $x' = 1 + \sqrt{2}\sin t, y' = 10\sin t\cos t, z' = -2\sin 2t$
Tại $t = \dfrac{\pi}{4}$ ta có:
$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - 1, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{2}, z\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$
$x'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2, y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, z'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$

Phương trình tiếp tuyến là: $\dfrac{x - \left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right)}{2} = \dfrac{y - \dfrac{3}{2}}{5} = \dfrac{z-2}{-2}$

Phương trình pháp diện là: $2\left(x + 1 - \dfrac{\pi}{4}\right) + 5\left(y - \dfrac{3}{2}\right) - 2(z-2) = 0$

Câu 9. Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy$
2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Giải

1. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy$
Ta có:
$f'_x = 5x^4 - 5y, f'_y = 5y^4 - 5x$
Xét $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 - 5y = 0 \\ 5y^4 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = y \\ y^4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right.$
$\Rightarrow$ 2 điểm tới hạn là M(0,0) và N(1,1)
Ta có:
$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 20x^3, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5, c = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 20y^3$
Tại M(0,0): $a = 0, b = -5, c = 0$
Do $b^2 - ac > 0 \Rightarrow$ f không đạt cực trị tại M
Tại N(1,1): $a = 10, b = -5, c = 10$
Do $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - ac < 0 \end{cases} \Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại N
2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
Ta có:
$z'_x = 4x^3 - 4(x-y), z'_y = 4y^3 + 4(x-y)$
Xét $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=0 \\ x^3-(x-y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^3-2x=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2} \\ y=-x \end{cases}$

$\Rightarrow$ Các điểm tới hạn là $M(0,0), N(\sqrt{2},-\sqrt{2}), Q(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Ta có:

$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=12x^2-4, b=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=4, c=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}=12y^2-4$

Tại N, Q: $a=20, b=4, c=20$

Do $\begin{cases} a>0 \\ b^2-ac<0 \end{cases} \quad \Rightarrow$ f đạt cực tiểu tại N, Q

Tại M: $a=-4, b=4, c=-4$

Ở đây ta có $b^2-ac=0$

Ta xét dấu $f(M')-f(M)$ khi M' chạy trong lân cận M:

$f(x,-x)=2x^4-8x^2=-2x^2(4-x^2)<0, f(x,x)=2x^4>0$, với mọi x nằm trong $(-2,0)\cup(0,2)$

$\Rightarrow f(M')-f(M)$ đổi dấu tại lân cận M

$\Rightarrow f$ không đạt cưc trị tại M