Đáp án chi tiết đề thi thử giữa kỳ lần 2 môn Giải Tích 2 - Học kỳ 20202

Câu 1:

- **(0,5 điểm)**
  Đặt $F(x, y, c) = 3cx^2 - c^3 - 2y$

  Xét $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 6cx = 0 \\ F'_y(x, y, c) = -2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm nên không có điểm kì dị.

- **(0,5 điểm)**
  Xét $\begin{cases} F(x, y, c) = 3cx^2 - c^3 - 2y = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 3x^2 - 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = c^3 \\ x^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = x^6$

  $\Rightarrow$ Hình bao của họ đường cong: $y^2 - x^6 = 0$

Câu 2: (Do đề gõ bị nhầm nên câu này các bạn ghi điểm M không thuộc đường cong vẫn được điểm tối đa, đáp án dưới đây là đáp án của đề đúng)

- **(0,5 điểm)**
  Xét hàm số $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x - y - 4$ thì $F(x, y) = 0$ xác định đường cong.
  Khi đó:

$$\begin{cases} F'_x = 2x + y - 1 \\ F'_y = x + 2y - 1 \end{cases}$$

  Tại $M(2; 1)$ thì

$$\begin{cases} F'_x(M) = 4 \\ F'_y(M) = 3 \end{cases}$$

- **(0,5 điểm)**
  Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại M là :

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4}$$

  Phương trình pháp tuyến của đường cong tại M là:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3}$$

Câu 3:

- **(0.5 điểm)**
  $D: x^2+y^2 \le 2x+2y-1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1$ là hình chiếu của $z(x,y)$ lên Oy

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

  đều liên tục trên miền D.

$$\Rightarrow S = \iint\limits_D \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{2}dxdy$$

- **(0.5 điểm)**
  Đặt:

$$\begin{cases} x-1 = r.cos(\theta) \\ y-1 = r.sin(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D' = \{0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$\Rightarrow S = \iint\limits_{D'} \sqrt{2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{2}rdr = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Câu 4:

- **(0.5 điểm)**

$$I = \iint\limits_D 2x^2+5xy+y^2dxdy;$$

$$D: \begin{cases} u = x+2y \\ v = 2x+y \end{cases} \Rightarrow D': \begin{cases} -1 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases} ; |J| = \frac{1}{3}$$

- **(0.5 điểm)**

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D (x+2y)(y+2x)dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} uvdudv = \frac{1}{3}\int_0^2 dv \int_{-1}^4 uvdu$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 (\frac{u^2}{2})\Big|_{-1}^4 .vdv = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{15}{2}.vdv = \frac{1}{3}.\frac{15}{2}.\frac{v^2}{2}\Big|_0^2 = 5$$

Câu 5:

- **(0.25 điểm)**

  Ta thấy $f(x,n) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ liên tục trên miền $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ n \ge 1 \end{cases}$

- **(0.25 điểm)**

  $$L = \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{dx}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + \left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} \frac{dx}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

- **(0.5 điểm)**

  $$L = \int_1^2 \frac{dx}{e^{-x}+e^x} = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_1^2 \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1}$$
  $$= \arctan\left(e^x\right)\Big|_1^2 = \arctan\left(e^2\right) - \arctan\left(e\right)$$

Câu 6:

- **(0.5 điểm)**

  $$D \begin{cases} 1 \le x \le \ln 2 \\ e^x \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow D \begin{cases} \frac{1}{e} \le y \le 2 \\ -1 \le x \le \ln y \end{cases}$$
  $$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{e}}^2 dy \int_{-1}^{\ln y} y^y dx$$

- **(0.5 điểm)**

  $$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{e}}^2 \left(y^y x \Big|_{-1}^{\ln y} \right) dy = \int_{\frac{1}{e}}^2 y^y(\ln y + 1)dy = y^y \Big|_{\frac{1}{e}}^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 4 - e^{-\frac{1}{e}}$$

Câu 7:

- **(0.5 điểm)**

Thể tích của vật thể giới hạn bởi miền V là: $I = \iiint\limits_V dV$. Trong đó:

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \\ x^2 + y^2 + z^2 \ge 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \ge 1 \end{cases}$$

Ta đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Khi đó V trở thành: $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 - \sqrt{1-r^2} \le z \le r^2 \end{cases}$

- **(0.5 điểm)**

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(z \Big|_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2} \right) r\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^2 - 1 + \sqrt{1-r^2} \right) r\,dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Câu 8:

- **(0.5 điểm)**

Ta có $I = \iiint\limits_V x^2 + z^2 + 2y(x+y+z)\,dxdydz = \iiint\limits_V (x+y)^2 + (y+z)^2\,dxdydz$

Lại có miền $V: x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \le 2$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx \le 4$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2 \le 4$$

Đặt: $\begin{cases} x+y=z \\ y+z=v \\ z+x=w \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\iiint\limits_{V'} (u^2+v^2)\,dudvdw$ với $V': u^2+v^2+w^2 \le 4$

- **(0.5 điểm)**

Đặt: $\begin{cases} u = r\sin\varphi\sin\theta \\ v = r\cos\varphi\sin\theta \\ w = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad |J| = r^2\sin\theta$

Khi đó miền V' trở thành: $\begin{cases} r^2 \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} \left(r^2\sin^2\theta\right) r^2 \sin\theta\, dr$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} r^4\, dr$$
$$= \frac{128}{15}\pi$$

Câu 9:

- **(0.5 điểm)**

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2xy-1=0 \\ x^2+4y^2+4xy-2yz-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2+2xy-1=0 \\ x^2+4y^2+4xy-2yz-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sin t \\ y=\cos t \\ (x+2y)^2=2yz+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin t-\cos t \\ y=\cos t \\ (\sin t+\cos t)^2=2z\cos t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin t-\cos t \\ y=\cos t \\ z=\sin t \end{cases}$$

- **(0.5 điểm)**

$\Rightarrow$ Tham số hóa đường cong cong (C): $\overrightarrow{r}(t)=(\sin t-\cos t;\ \cos t;\ \sin t)$
$\Rightarrow \overrightarrow{r'}(t)=(\cos t+\sin t;\ -\sin t;\ \cos t)$
$\Rightarrow \overrightarrow{r''}(t)=(\cos t+-\sin t;\ -\cos t;\ -\sin t)$
$\Rightarrow \overrightarrow{r'}(t)\wedge\overrightarrow{r''}(t)=(1;1;-1)$
$\Rightarrow C_M=\dfrac{|\overrightarrow{r'}(t)\wedge\overrightarrow{r''}(t)|}{|\overrightarrow{r'}(t)|^3}=\dfrac{\sqrt{3}}{(2+\sin 2t)^{\frac{3}{2}}}\le\sqrt{3}$
Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2t=-1 \Leftrightarrow t=-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow (x;y;z)=\pm\left(-\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy $\max C_{M(C)}=\sqrt{3}$ khi $(x;y;z)=\pm\left(-\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 10:

- **Cách 1**

$$\text{I}=\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$$
$$=\iiint_V f(x)f(y)f(z)dxdydz,\ \text{Trong đó V}: 0\le x\le z\le y\le 1$$

Do hàm dưới dấu tích phân có các biến có vai trò như nhau nên ta có thể đổi chỗ các biến $x;y;z$ theo thứ tự tùy ý mà không thay đổi giá trị tích phân.

Đặt:
$V_{xyz}: 0\le x\le y\le z\le 1$
$V_{xzy}: 0\le x\le z\le y\le 1$
$V_{yxz}: 0\le y\le x\le z\le 1$
$V_{yzx}: 0\le y\le z\le x\le 1$
$V_{zxy}: 0\le z\le x\le y\le 1$

$V_{xyz} : 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$

Như vậy $\quad V_{xzy} \cup V_{xyz} \cup V_{yxz} \cup V_{yzx} \cup V_{zxy} \cup V_{zyx} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x, y \leq 1\right\}$

$$\Rightarrow 6I = \iiint\limits_{Vxyz} + \iiint\limits_{Vxzy} + \iiint\limits_{Vyxz} + \iiint\limits_{Vyzx} + \iiint\limits_{Vzxy} + \iiint\limits_{Vzyx}$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_x^y f(x)f(y)f(z)dz = \left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)\left(\int\limits_x^1 f(y)dy\right)\left(\int\limits_0^1 f(z)dz\right)$$
$$= \left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^3 \Rightarrow \text{đpcm}$$

- **Cách 2**

  +) Vì $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $(0; 1)$

  $\Rightarrow f(x)$ khả tích trên đoạn $(0; 1)$

  $\Rightarrow$ Đặt $g(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ với $x \in (0; 1)$ hay $f(x) = g'(x)$

$$+) \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_x^y f(x)f(y)f(z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \left(f(x)f(y)g(z)\Big|_{z=x}^{z=y}\right) dy$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \left[f(x)f(y)g(y) - f(x)f(y)g(x)\right] dy$$
$$= \int\limits_0^1 \left(f(x)\frac{g^2(y)}{2} - f(x)g(x)g(y)\Big|_{y=x}^{y=1}\right) dx$$
$$= \int\limits_0^1 \left[f(x)\frac{g^2(1)}{2} - f(x)\frac{g^2(x)}{2} - f(x)g(x)g(1) + f(x)g^2(x)\right] dx$$
$$= g(x)\frac{g^2(1)}{2} - \frac{g^3(x)}{6} - \frac{g^2(x)}{2}g(1) + \frac{g^3(x)}{3}\Big|_0^1$$
$$= \frac{g^3(1)}{2} - \frac{g^2(1)}{2}g(0) - \frac{g^3(1)}{6} + \frac{g^3(0)}{6} - \frac{g^3(1)}{2} + \frac{g^2(0)}{2}g(1) + \frac{g^3(1)}{3} - \frac{g^3(0)}{3}$$
$$= \frac{1}{6}\left[g^3(1) - 3g^2(1)g(0) + 3g(1)g^2(0) - g^3(0)\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[g(1) - g(0)\right]^3 = \frac{1}{6}\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^3$$