Tuần 3: Tích phân bội ba

1. Tính các tích phân bội ba sau

*(Từ câu **(a)** tới câu **(c)**, sử dụng phương pháp tính thông thường)*

(a) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ $\quad V: \begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases}$

(b) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{2x+z^2+1}}$ $\quad V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x \\ 0 \leq y \leq z \end{cases}$

(c)* $\iiint_V zdzdydz$ $\quad V: \begin{cases} (x+2y)^2 + 4y^2 \leq 1 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$

*(Từ câu **(d)** tới câu **(g)**, sử dụng phép biến đổi tọa độ trụ)*

(d) $\iiint\limits_V \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$ $\quad V: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2z \\ x^2+y^2+z^2 \leq 3 \end{cases}$

(e) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ $\quad V: \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

(f) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$ $\quad V: x^2+y^2+z^2 \leq 1$

(g)* $\iiint\limits_V |z|dxdydz$ $\quad V: 0 \leq x^2-y^2 \leq z \leq 1-x^2-y^2$

*(Từ câu **(h)** tới câu **(k)**, sử dụng phép biến đổi tọa độ cầu, hoặc tọa độ cầu suy rộng nếu cần thiết)*

(h) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ $\quad V: x^2+y^2+z^2 \leq x$

(i) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}dxdydz$ $\quad V: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

(j)* $\iiint\limits_V |xyz|dxdydz$ $\quad V: (x^2+y^2+z^2)^2 \leq 4(x^2+y^2-z^2)$

(k)* $\iiint\limits_V \left|x^2+y^2+z^2-x\right|dxdydz$ $\quad V: x^2+y^2+z^2 \leq 1$

*(Hai câu **(l)** và **(m)**, tận dụng tính đối xứng của miền V để tính tích phân)*

(l) $\iiint\limits_V \dfrac{x^2-2y^2+4z^2+1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ $\quad V: x^2+y^2+z^2 \leq 9$

(m) $\iiint\limits_V (x+y-2z)^2 dxdydz \qquad V: x^2+y^2+z^2 \le 4$

2. *(Ứng dụng của tích phân bội ba)* Thể tích $\boldsymbol{V}$ của miền V được tính bằng công thức

$$\boldsymbol{V} = \iiint\limits_V dxdydz$$

Áp dụng công thức trên để tính thể tích của các miền giới hạn bởi

(a) $V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 2z \\ x^2+y^2 \le z^2 \end{cases}$

(b) $V: \begin{cases} a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2 \\ x^2+y^2 \le z^2 \end{cases}$

(c) $V: \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \le x$

(d) $V: \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 \le 3xyz$

(e) $V: \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \le 1$

(f)* $V: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^4}{c^4} \le 1$

(g)* $V: \begin{cases} \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \le 2a^2\left(x^2+y^2-z^2\right) \\ x^2+y^2+z^2 \ge a^2 \end{cases}$

(h)* $V: \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^n + \dfrac{z^{2n}}{c^{2n}} = z\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$