GIẢI TÍCH I
BÀI 2.

(§6, §7, §8)

§6. Giới hạn hàm số

• Đặt vấn đề

a) $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = ?$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = ?$

I. Định nghĩa

– ĐN1. $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ là điểm tụ của $X \Leftrightarrow \exists\, x \in U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\},\ \forall\, \varepsilon > 0$.

– ĐN2. $f(x)$ xác định trên X, x_0 là điểm tụ của X. Ta bảo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\,(x_n) \subset X,\ x_n \ne x_0,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

– ĐN3. $f(x)$ xác định trên X, x_0 là điểm tụ của X. Ta bảo

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\,\delta(\varepsilon) > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Chú ý. ĐN2 ~ ĐN3.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$

II. Tính chất và phép toán

1) Tính chất

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \Rightarrow a = b$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - a) = 0$

c) $f(x) = c \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$

d) $f(x) \le h(x) \le g(x),\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0);\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$

e) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow |f(x)| \le c,\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\setminus\{x_0\}$

f) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ a > p \Rightarrow f(x) > p,\ \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\setminus\{x_0\}$

2. Phép toán

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x).g(x)\right) = a.b$ và $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b},\ (b \neq 0)$

3. Khử dạng vô định

a) Các dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty - \infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0

b) Khử dạng vô định. Sử dụng các phép biến đổi đại số và các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ ;\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 2} (2-x)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{2x+1}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$ $\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$

III. Giới hạn hàm hợp, một phía, vô cực

1. Giới hạn hàm hợp. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0,\ \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = a$

2. Giới hạn một phía.

Định nghĩa 4.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$: $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Định nghĩa 5.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$: $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

3. Giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực

Định nghĩa 6. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \to \infty$ có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$

Định nghĩa 7. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\ N(\varepsilon) > 0$: $|x| > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Chú ý. ĐN6 ~ ĐN7.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x}}{x+\sqrt[5]{x^4}+2x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin x-\sin\sqrt{1+x^2}\right)$ (0)

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x-1}-\cos\sqrt{x+1}\right)$ (0)

Định nghĩa 8. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\ (x_n)\to\infty$ có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$

Định nghĩa 9

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\ N>0$ lớn tuỳ ý, $\exists\ \delta(N)>0$: $|x-x_0|<\delta(N)\Rightarrow|f(x)|>N$.

§7. Vô cùng bé, vô cùng lớn

• Đặt vấn đề

I. Vô cùng bé

I. Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB, $x\to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

2. Tính chất.

a) $\alpha(x)$ là VCB, $x\to x_0$, $c=$ const $\Rightarrow c\alpha(x)$ là VCB khi $x\to x_0$.

b) $\alpha_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ là VCB khi $x\to x_0\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ là VCB khi $x\to x_0$

c) $\alpha(x)$ là VCB khi $x\to x_0$, $f(x)$ bị chặn trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)\Rightarrow\alpha(x)f(x)$ là VCB, $x\to x_0$

3. Liên hệ giữa VCB và giới hạn

Định lí. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow f(x)-L$ là VCB khi $x\to x_0$ (hay $f(x)=L+\alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB)

4. So sánh VCB. Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x\to x_0$.

Định nghĩa. $\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cùng cấp với VCB $\beta(x)$ khi $x\to x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn VCB $\beta(x)$ khi $x\to x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$

Ví dụ 1. a) $\sin x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ khi $x\to 0$

b) Cho $\alpha(x)=\dfrac{ex}{2}$, $\beta(x)=e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Chứng minh rằng $\alpha(x)\sim\beta(x)$ khi $x\to 0$.

c) Cho $\alpha(x) = e - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}$, $\beta(x) = ex$.

Chứng minh rằng $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to 0$.

5. Ứng dụng tìm giới hạn

a) $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \bar{\beta}(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^x - 1\right)\tan x}{\sin^2 x}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$ (– 4)

b) $\beta(x)$ là VCB cấp cao hơn $\alpha(x)$ khi $x \to x_0 \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

c) $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$;

$\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k(x)$, $\alpha_1(x)$ là VCB có cấp thấp nhất;

$\beta(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k(x)$, $\beta_1(x)$ là VCB có cấp thấp nhất

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin^3 x + \tan^4 x}{4x + x^4 + 5x^8}$

II. Vô cùng lớn

1. Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$ (có thể trừ x_0), $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Chú ý. Hàm là VCL $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ không bị chặn

Ví dụ 6. $f(x) = x\sin x$ là không bị chặn nhưng không phải là VCL.

2. Liên hệ giữa VCB và VCL

a) $f(x)$ là VCB, $x \to x_0$ và $f(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

b) $f(x)$ là VCL, $x \to x_0$ $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.

3. So sánh các VCL. Giả sử $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$,

a) $A(x)$ là VCL cấp cao hơn VCL $B(x)$, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty$

b) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL cùng cấp, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = a \neq 0$

c) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL tương đương, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = 1$.

4. Ứng dụng tìm giới hạn

a) Cho các VCL tương đương $A(x) \sim \bar{A}(x)$, $B(x) \sim \bar{B}(x)$, $x \to x_0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\bar{A}(x)}{\bar{B}(x)}$

b) Cho $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$;

$A(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(x)$, $A_1(x)$ là VCL có cấp cao nhất;

$B(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k(x)$, $B_1(x)$ là VCL có cấp cao nhất

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Ví dụ 7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^4 + x^3 + x + 2}{2009x^4 + 3x^2 + x + 1} = \dfrac{9}{2009}$

Ví dụ 8. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\cot(x^2 - 1)}$ $\quad \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (2 + x)^{\cot(1 - x^2)}$ $\quad \left(e^{\frac{1}{2}}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - 4^x)\ln(1 + 2x)}{x^2 + 2x^3}$ $\quad (-2\ln 4)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - 9^x)\ln(1 + 3x)}{3x^2 - 4x^3}$ $\quad (-2\ln 3)$

§ 8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

• Đặt vấn đề

I. Hàm liên tục

1. Định nghĩa. $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow$

+) $f(x)$ xác định trên $U_{\varepsilon_0}(x_0)$

+) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0\right)$

$f(x)$ liên tục trái tại $x_0 \Leftrightarrow$ +) $f(x)$ xác định trên $U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x < x_0\}$

+) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Tương tự ta có ĐN liên tục phải.

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $(a\,;b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $\forall\, x \in (a\,;b)$

$f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trong $(a\,;b)$, liên tục trái tại b và liên tục phải tại a.

Ví dụ 1. Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$: $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2. a) Tìm a để $y = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x-1}}{2^{\frac{1}{x-1}}+1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$. ($\nexists\ a$)

b) Tìm a để $y = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x+1}}{2^{\frac{1}{x+1}}+1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$

liên tục tại $x = -1$. ($\nexists\ a$)

Ví dụ 3. a) Tìm a để $y = \begin{cases} a\sin(\operatorname{arccot} x), & x \leq 0 \\ \cos\ln x - \cos\ln(x + x^2), & x > 0 \end{cases}$

liên tục tại $x = 0$. ($a = 0$).

b) Tìm a để $y = \begin{cases} a\cos(\arctan x), & x \leq 0 \\ \sin\ln(x + x^2) - \sin\ln x, & x > 0 \end{cases}$

liên tục tại $x = 0$. ($a = 0$).

2. Tính liên tục của các hàm sơ cấp. Mọi hàm số sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định.

3. Phép toán. Cho $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow f(x) \pm g(x)$ liên tục tại x_0, $f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 và $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

4. Ý nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Rightarrow$ đồ thị là đường liền nét.

5. Tính chất

Định lí 1. (Weierstrass 1) $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Rightarrow f(x)$ bị chặn trên $[a\,;b]$

Định lí 2. (Weierstrass 2) $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b] \Rightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên $[a\,;b]$

Định lí 3. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$, $M = \max\limits_{[a;\,b]} f$, $N = \min\limits_{[a;\,b]} f$, $\mu \in [m\,;M] \Rightarrow \exists\, c \in [a\,;b]$: $f(c) = \mu$.

Hệ quả. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;b)$: $f(c) = 0$.

6. Điểm gián đoạn

Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, gián đoạn tại $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ không liên tục tại x_0.

$f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$ thì ta bảo $f(x)$ gián đoạn tại x_0

Định nghĩa. Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ là điểm gián đoạn loại 1

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x), \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ 4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Ví dụ 5. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ 6. Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$ ($x = 1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3^{\frac{x+1}{x}}}$ ($x = -1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

II. Hàm số liên tục đều

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục đều trên $X \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý. $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Ví dụ 7. $y = x + 2$.

Định lí (Cantor). $f(x)$ liên tục trong $[a\,;b] \Rightarrow f(x)$ liên tục đều trong $[a\,;b]$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!