A. HÀM SỐ

1) Dạng 1: Bài tập tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm $y=\sqrt{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\ln(x-4)}$.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ 0<x-4\ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)\ge 0 \\ 4<x\ne 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 1 \end{array}\right. \\ 4<x\ne 5 \end{cases} \Rightarrow 4<x<5$ hoặc $x>5$.

Vậy TXĐ: $D=(4;+\infty)\setminus\{5\}$.

Ví dụ 2: Tìm tập giá trị của hàm $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

<u>**Note:**</u> Luôn xác định TXĐ trước khi tìm TGT.

Ta có: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ mà $x^2+x+1\ne 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Nên: $yx^2+yx+y=x^2-x+1 \Leftrightarrow (y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$ (*).

Bài toán tương ứng là tìm y để phương trình (*) có nghiệm. Khi đó:

- Nếu $y=1,\ x=0$.
- Nếu $y\ne 1$, ta có:

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2$$

$$\Delta=(y+1)^2-(2y-2)^2=(3y-1)(3-y)\ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\le y\le 3$$

Vậy TGT: $S=\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

2) Dạng 2: Hàm số chẵn, lẻ.

Tóm tắt lý thuyết:

1. Hàm số $f(x)$ được gọi là chẵn nếu $\begin{cases} x \in TXD, -x \in TXD \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua trục tung.

2. Hàm số $f(x)$ được gọi là lẻ nếu $\begin{cases} x \in TXD, -x \in TXD \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ 0.

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của hàm $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}.,\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ TXĐ đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)$ (liên hợp)

$= -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$.

Vậy y là hàm lẻ.

<u>**Note:**</u> TXĐ không đối xứng $\Rightarrow$ hàm không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: bất kì hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a;a)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Giải:

Giả sử: $f(x) = h(x) + g(x)$ (1)

Với $h(x)$, $g(x)$ lần lượt là hàm số chẵn, lẻ xác định trên $(-a;a)$. Khi đó:

$f(-x) = h(-x) + g(-x) = h(x) - g(x)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} h(x) + g(x) = f(x) \\ h(x) - g(x) = f(-x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình cho ta nghiệm duy nhất $\begin{cases} h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right] \\ g(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right] \end{cases}$ (chứng minh tính duy nhất)

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$.

(chẵn) (lẻ)

3) Dạng 3: Hàm tuần hoàn.

Định nghĩa: Một hàm số $f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu $\exists\, T(\in \mathbf{R})>0$ sao cho

$f(x)=f(x+T)\ \forall x\in TXD$.

Ví dụ: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì của hàm số sau (nếu có) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$.

Giải:

• Trường hợp 1: $A=B=0$

$\Rightarrow f(x)=0$, là hàm hằng nên tuần hoàn nhưng không có chu kì cơ sở.

• Trường hợp 2: $A^2+B^2\neq 0$

+ Trường hợp 2.1: Nếu $\lambda=0\Rightarrow f(x)=A$ là hàm hằng nhưng không có chu kì cơ sở.

+ Trường hợp 2.2: Nếu $\lambda\neq 0$. Giả sử T là số dương nhỏ nhất thỏa mãn

$f(x)=f(x+T),\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow A\sin\lambda x+B\cos\lambda x=A\sin\lambda(x+T)+B\cos\lambda(x+T)$

$\Leftrightarrow A\left[\sin\lambda(x+T)-\sin\lambda x\right]+B\left[\cos\lambda(x+T)-\cos\lambda x\right]=0$

$\Leftrightarrow 2A\cos\frac{\lambda(2x+T)}{2}\sin\frac{\lambda T}{2}-2B\sin\frac{\lambda(2x+T)}{2}\sin\frac{\lambda T}{2}=0$

$\Leftrightarrow\left[A\cos\frac{\lambda(2x+T)}{2}-B\sin\frac{\lambda(2x+T)}{2}\right]\sin\frac{\lambda T}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\lambda T}{2}=0\Leftrightarrow\frac{\lambda T}{2}=n\pi\,(n\in\mathbf{Z})$

$\Leftrightarrow T=\left|\frac{2\pi n}{\lambda}\right|(n\in\mathbf{Z})$

$\Rightarrow T_{\min} = \dfrac{2\pi}{|\lambda|}$ khi $n=1$

$\Rightarrow f(x)$ tuần hoàn với chu kì cơ sở $T = \dfrac{2\pi}{|\lambda|}$.

4) Dạng 4: Hàm hợp.

Cho hai hàm số f, g. Hàm hợp của f và g, kí hiệu fog là hàm số được định nghĩa:

$(fog)(x) = f\left[g(x)\right]$.

Ví dụ: Tìm $f(x)$ biết: $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Đặt: $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$ (cauchy)

$\Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \ge 2\sqrt{x^2 \dfrac{1}{x^2}} = 2$

$\Rightarrow t^2 \ge 4 \Rightarrow |t| \ge 2$

$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2$ với $|t| \ge 2$

Vậy $f(x) = x^2 - 2$ với $|x| \ge 2$.

5) Dạng 5: Hàm ngược.

Ví dụ cấp 3: $y = e^x$, $y = \ln(x)$ là 2 hàm ngược, đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm số sau: $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

Giải:

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ đơn điệu tăng trên

$\Rightarrow \exists f^{-1}(x)$ trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1$

$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0 \ (thoa\ man) \\ e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0 \ (loai) \end{array}\right.$

$\Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Đổi vai trò x, y ta được hàm ngược: $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

<u>**Chú ý:**</u> Chúng ta sẽ làm quen 4 hàm lượng giác ngược $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arccot} x$, $\arctan x$.

B. GIỚI HẠN

1. Dãy số

Ví dụ 1: $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+n}{n\left(n^2-1-n^2\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}+1}}{-1} = -2.$$

Ví dụ 2: $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$.

Ta có: $1 = \dfrac{n^n}{n^n} \le \dfrac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} \le \dfrac{n^1+n^2+\ldots+n^n}{n^n}$

$$= \frac{n^{n+1}-n}{(n-1)n^n} = \frac{n^n-1}{n^n}.\frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-1}$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1 \Rightarrow I = 1$ (Đ/l kẹp).

2. Hàm số

• Vô cùng bé (VCB): $\alpha(x) \to 0$ khi $x \to x_0$.

• Vô cùng lớn (VCL): $|\beta(x)| \to +\infty$ khi $x \to x_0$.

• 7 dạng vô định: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

$\Rightarrow$ khử dạng vô định.

Ví dụ 1: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}+x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2: $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sqrt{1+x^3}-\sin 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln\cos x}-1}$.

Khi $x\to0$, ta có:

- $\left[1-2x\ln(\cos x)\right]-1\sim\frac{1}{5}.(-2x\ln\cos x)$

$$=-\frac{2}{5}x\ln(1+\cos x-1)\sim-\frac{2x}{5}(\cos x-1)\sim-\frac{2x}{5}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{5}x^3.$$

- $\sin\sqrt{1+x^3}-\sin1=2\cos\dfrac{\sqrt{1+x^3}+1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}\sim2\cos1\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}\sim2\cos1\dfrac{\frac{x^3}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\cos1x^3$.

$$\Rightarrow I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cos1x^3}{\frac{1}{5}x^3}=\frac{5}{2}\cos1.$$

Ở đây vận dụng các VCB tương đương khi $x\to0$

- $x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$.
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, đặc biệt $\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\sim\dfrac{\alpha}{m}x$.
- $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

3. Hàm số liên tục

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận nào đó của x_0. Nó được gọi là:

(+) liên tục phải tại x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

(–) liên tục trái tại x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

(=) liên tục tại x_0: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Ví dụ: Tìm a để hàm số liên tục tại $x=0$: $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1, & neu\ x\ge0\\ a\cos x+b\sin x, & neu\ x<0\end{cases}$.

Ta có: $f(0)=a.0^2+b.0+1=1$

(+) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax^2+bx+1=1$

(−) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a\cos x+b\sin x=a$

Để hàm số liên tục tại $x=0$

$\Leftrightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\Rightarrow a=1$.

C. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Dạng 1: Đạo hàm theo định nghĩa.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Đặt: $\Delta x=x-x_0 \Leftrightarrow x=x_0+\Delta x$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại 1, biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+7x)-f(1+2x)}{x}=2$. Tính $f'(1)$.

Giải:

Ta có: $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+7x)-f(1+2x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[7\dfrac{f(1+7x)-f(1)}{7x}-2\dfrac{f(1+2x)-f(1)}{2x}\right]$

$=7f'(1)-2f'(1)=5f'(1)$

$\Rightarrow f'(1)=\dfrac{2}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x>0 \\ 0 \quad, x=0 \end{cases}$. Tính $f'_+(0)$.

Giải:

Ta có: $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} \overset{(L)}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$.

Dạng 2: Đạo hàm theo công thức.

Ví dụ: Cho $f(x) = x^{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xác định $f'(x)$.

Ta có: $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x.\ln(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{\sin x.\ln x}.(\sin x.\ln x)'$

$= x^{\sin x}\left[\cos x.\ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$.

Dạng 3: Đạo hàm cấp cao.

+ $(u \pm v)^{(n)} = (u)^{(n)} \pm (v)^{(n)}$

+ Công thức Leibniz: $(uv)^{(n)} = C_n^k.u^{(k)}.v^{(n-k)}$.

Đạo hàm cấp cao cơ bản:

1. $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha.(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2. $\left[(1+x)^2\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

3. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

4. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

5. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

6. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

7. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

8. $\ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

Ví dụ: Tính $y^{(n)}(x)$ với $y = \sin^3 x$.

Ta có: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$\Rightarrow y^{(n)}(x) = \frac{3}{4}(\sin x)^{(n)} - \frac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)}$

$= \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}3^n\left(\sin 3x + \frac{n\pi}{2}\right).$

D. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1: Định lý Rolle

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a;b]$

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở $(a;b)$

iii) Thỏa mãn $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists$ có ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Ví dụ: Cho 3 số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. CMR: $3ax^2 + 4bx + 5c = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(1;+\infty)$.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = cx^5 + bx^4 + ax^3$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle trong $[0;1]$. Do đó:

$\exists x_0 \in [0;1] \backslash f'(x_0) = 5cx_0^5 + 4bx_0^4 + 3ax_0^3 = 0$

$\Rightarrow 3x\left(\frac{1}{x_0}^2\right) + 4b\left(\frac{1}{x_0}\right) + 5c = 0$

Vậy phương trình $3ax^2 + 4bx + 5c = 0$ có nghiệm $\frac{1}{x_0} \in (1;+\infty)$.

Dạng 2. Định lý Lagrange

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a;b]$

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở $(a;b)$

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Ví dụ: Cho $0<a<b$. CMR: $\dfrac{a-b}{1+a^2}<\operatorname{arccot} b-\operatorname{arccot} a<\dfrac{a-b}{1+b^2}$.

Giải:

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x)=\operatorname{arccot} x$ trong $[a;b]$ ta có:

$\dfrac{\operatorname{arccot} b-\operatorname{arccot}}{b-a}=f'(c)=-\dfrac{1}{1+c^2}$ với $c\in(a;b)$, do đó:

$-\dfrac{1}{1+a^2}<\dfrac{\operatorname{arccot} b-\operatorname{arccot} a}{b-a}=-\dfrac{1}{1+c^2}<-\dfrac{1}{1+b^2}\Rightarrow$ ĐPCM.

E. KHAI TRIỂN MACLAURINT

1. Một số khai triển Maclaurint quan trọng

1) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+0(x^n)$

2) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+0(x^n)$

3) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+0(x^n)$

4) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+0(x^n)$

5) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0(x^{2n+1})$

6) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n})$

7) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+0(x^n)$

2. Ứng dụng

Ví dụ 1: Tìm khai triển Maclaurint của $f(x)=e^{\frac{x}{2}+2}$.

Ta có: $e^{\frac{x}{2}+2}=e^e.e^{\frac{x}{2}}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{e^2}{2^k.k!}x^k+0(x^n)$.

Ví dụ 2: $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$.

Giải: Khai triển Maclaurint của $\cos x$ tới bậc 4.

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

Ví dụ 3: Xác định $y^{(10)}(0)$ với $y=\sin\left(x^2\right)$.

Ta có: $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0\left(x^5\right)$

$$\Rightarrow \sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+0\left(x^{10}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sin x^2\right)^{(10)}(0)=\left(\frac{x^{10}}{5!}\right)^{(10)}_{(0)}=\frac{10!}{5!}=6.7.8.9.10=30240.$$

F. TIỆM CẬN

Dạng 1: $y=f(x)$

Ví dụ: Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y=x^2\sin\frac{1}{x}$.

Giải: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có: $0\le\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2\to 0$ khi $x\to 0\Rightarrow \lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

• Đường cong không có TCĐ

Ta lại có: $\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\infty$.

• Đường cong không có TCN

Gọi $y=ax+b\,(a\ne 0)$ là TCX khi đó

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)$$

$$t=\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^2}=0.$$

• Đường cong có TCX là $y = x$.

Dạng 2: $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2\arctan(t) \end{cases}$.

Ta có: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t + 2\arctan t}{t} = 1 \neq 0$

Khi đó:

$b_1 = \lim\limits_{t\to+\infty}(y - ax) = \lim\limits_{t\to+\infty}(t + 2\arctan t - 1) = \pi \Rightarrow y = x + \pi$ là TCX phải.

$b_2 = \lim\limits_{t\to\infty}(y - ax) = \lim\limits_{t\to-\infty}(2\arctan t) = -\pi \Rightarrow y = x - \pi$ là TCX trái.

G. TÍCH PHÂN

Dạng 1: Khai triển

Ví dụ: $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$.

$I_2 = \displaystyle\int\left(2x\sqrt{x} - 3x^2\right)dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^2 dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^3 + C$.

Dạng 2: Biến đổi biểu thức vi phân

$I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int\left(1 + \tan^2 x\right)d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C$.

$I_2 = \displaystyle\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int\sqrt{1+3x^2}\,d\left(1+3x^2\right) = \frac{1}{9}\left(\sqrt{1+3x^2}\right)^3 + C$.

Dạng 3: Đổi biến

$I = \displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$

Đặt: $x = 2\sin^2 t, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $dx = 4\sin t\cos t dt$

$$\sqrt{\frac{x}{2-x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2\left(1-\sin^2 t\right)}} = \tan t$$

$\Rightarrow I = 4\displaystyle\int\sin^2 t dt = 2t - \sin 2t + C$

Mà $x = 2\sin^2 t \Rightarrow t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

$$\Rightarrow I = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2} + C.$$

Dạng 4: Từng phần

$$I = \int x^2 \sin x dx = \int x^2 d\left(-\cos x\right) = -x^2 \cos x + 2\int x.\cos x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x d\left(\sin x\right) = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

Dạng 5: Hệ số bất định

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$$

Phân tích: $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-4}$

Đồng nhất thức ta giải được $\begin{cases} A = 3 \\ B = -7 \\ C = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 3\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-4} = 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$