ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN1 - HỌC KỲ 2021.2

Mã đề 1

Đề thi gồm 2 trang

Câu 1. Xác định phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong tại điểm $A(0,4)$

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 2t - 1 \\ y(t) = t^2 + 2t + 4 \end{cases}$$

Câu 2. Tính độ cong của $\begin{cases} x = \ln(\sqrt{t^2+1} - t) \\ y = t + 1 + \sqrt{t^2+1} \end{cases}$ tại điểm $(0,;2)$

Câu 3. Tìm hình bao của họ đường cong (L):

$$(L) : \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{4-c} = 1$$

Câu 4. Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy$ với miền D: $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

Câu 5. Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^3 dy \int_{\frac{\sqrt{3y}}{3}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx$

Câu 6. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z = 0, y = 0, z = 4$ và mặt cong $2x = \sqrt{5-2y}$

Câu 7. Tính $\iiint\limits_E z\, dV$, trong đó E là tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.

Câu 8. Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \frac{(z-1)^3 + 1}{x^2 + y^2} dxdydz$, với V là miền xác định bởi $-1 \leq z \leq 1$ và $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Câu 9. Tính $\iint\limits_D (|x|(1+siny) - |y|)dxdy$, với miền $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$

Câu 10. Tính $I(y) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\mathrm{d}x$ với $y \in (-1;1)$.

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN1 - HỌC KỲ 2021.2

Giải câu 1. • $A(0,4)$ ứng với $t = t_0$

$$\begin{cases} e^{t_0} - 2t_0 - 1 = 0 \\ t_0^2 + 2t_0 + 4 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow t_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x'_t(t_0) = x'_t(0) = -1 \\ y'_t(t_0) = y'_t(0) = 2 \end{cases}$$

• $\rightarrow$ Tiếp tuyến: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{2}$, Pháp tuyến: $-x + 2(y-4) = 0$

Giải câu 2.

$$x = \ln(\sqrt{t^2+1} - t) = -\ln(\sqrt{t^2+1} + t)$$
$$\rightarrow \sqrt{t^2+1} + t = e^{-x} = y - 1$$

$\rightarrow$ Đường cong: $y = f(x) = e^{-x} + 1$.

Tại điểm $(0;2)$:

$$C_M = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|e^{-x}|}{(1+e^{-2x})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Giải câu 3. +)Với hàm $f(x,y,c) = \dfrac{x^2}{c} + \dfrac{y^2}{4-c} - 1$ (ĐKXĐ: $c \neq 0, c \neq 4$), xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{c} = 0 \\ \dfrac{2y}{4-c} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Tuy nhiên $(0,0)$ không thuộc bất kì đường nào thuộc họ đường cong (L).

$\Rightarrow$ Họ đường cong (L) không có điểm kì dị.

+) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f = 0 \\ f'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{c} + \dfrac{y^2}{4-c} - 1 = 0(1) \\ -\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{(4-c)^2} = 0(2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có:

(2) $\Rightarrow x^2 = \dfrac{c^2}{(4-c)^2} y^2$

Từ đó,(1) $\Rightarrow \left(\dfrac{c}{(4-c)^2} + \dfrac{1}{4-c}\right) y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{(4-c)^2}{4} \Rightarrow x^2 = \dfrac{c^2}{4}$

Do $x^2 = \dfrac{c^2}{4}$ và $y^2 = \dfrac{(4-c)^2}{4} \Rightarrow$ 4 trường hợp y(x) lần lượt là:

+) y=2-x | +) y=x-2

+) y=2+x | +) y=-x-2

Do $c \neq 0, c \neq 4 \Rightarrow (x, y) \neq (0; \pm 2), (x, y) \neq (\pm 2; 0)$

Vậy hình bao (E) của họ đường cong (L) là hình gồm 4 đườngy=2-x,y=x-2,y=2+x,y=-x-2 trừ 4 điểm (0;2), (0;-2), (2;0), (-2;0).

Giải câu 4. Chia miền D thành hai miền: $\begin{cases} D_1 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 : y - x^2 \leq 0 \\ D_2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 : y - x^2 \leq 0 \end{cases}$

Do đó:

$$\text{I} = \iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2-y}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2-y}\,dx\,dy$$
$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y}\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y-x^2}\,dy$$
$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (|x|^3 + (2-x^2)^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Đặt: x = $\sqrt{2}\sin t$ trong tích phân sau ta được

$$I = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,dt = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t}{8}\right) dt$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$$

Giải câu 5. Miền $D: \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ \frac{\sqrt{3y}}{3} \le x \le 1 \end{cases} \leftrightarrow D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3x^2 \end{cases}$

Ta có:

$$I = \int_0^3 dy \int_{\frac{\sqrt{3y}}{3}}^{1} \sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^1 dx \int_0^{3x^2} \sqrt{x^3+1}\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(y\sqrt{x^3+1}\right)\Big|_{y=0}^{y=3x^2} dx = \int_0^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx^3 = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Giải câu 6. Ta có: $2x = \sqrt{5-2y}$, suy ra $\begin{cases} 0 \le x \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_V dxdydz \\
&= \iint\limits_D dxdy \int_0^4 dz \quad \text{với } D = \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \le y \le \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases} \\
&= 4 \iint\limits_D dxdy \\
&= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} dx \int_0^{\frac{5-4x^2}{2}} dy \\
&= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{5-4x^2}{2} dx \\
&= \frac{10\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

Giải câu 7. Từ đề bài ta xác định được miền E : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$

Từ đó, ta tính được:

$$
\iiint\limits_E zdV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} zdzdydx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{1-x-y} dydx
$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}$$

Giải câu 8. Ta có:

$$I = \iiint\limits_V \frac{z^3+3z}{x^2+y^2} dxdydz - \iiint\limits_V \frac{3z^2}{x^2+y^2} dxdydz$$

Vì V đối xứng qua Oxy và $\frac{z^3+3z}{x^2+y^2}$ là hàm lẻ với $z \Rightarrow \iiint\limits_V \frac{z^3+3z}{x^2+y^2} dxdydz = 0$

Do đó:

$$I = -\iiint\limits_V \frac{3z^2}{x^2+y^2} dxdydz$$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow$ V': $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$ v J=r.

$$\Rightarrow I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} dr \int_{-1}^1 3z^2 dz = -2\pi.(\ln 2).2 = -4\pi \ln 2$$

Giải câu 9. Đặt $I = \iint\limits_D (|x|(1+siny) - |y|)dxdy$

Ta chia I thành hai tích phân I_1 và I_2:
$I_1 = \iint\limits_D |x|sinydxdy$; $I_2 = \iint\limits_D (|x|-|y|)dxdy$

Xét $I_1 = \iint\limits_D |x| sin y dxdy$

Đặt $f(x,y) = |x| sin y$

Vì $f(x,y) = -f(x-y) \forall (x,y), (x,-y) \in D$ và D đối xứng qua trục Ox

$\Rightarrow I_1 = 0$

Xét $I_2 = \iint\limits_D (|x| - |y|) dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Khi đó miền D trở thành $D' \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 (|cos\varphi| - |sin\varphi|) dr = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (|cos\varphi| - |sin\varphi|) d\varphi = 0$$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0 + 0 = 0$

Giải câu 10. - Với mọi $y_0 \in (-1;1)$ luôn tồn tại đoạn $[c,d] \subset (-1;1)$ sao cho $y_0 \in (c,d)$

Xét $f(x,y) = \ln(1 - 2y\cos x + y^2)$ trên $[0;\pi] \times [c;d]$

Dễ thấy $f(x,y) = \ln(1 - 2y\cos x + y^2) = \ln\left((y - \cos x)^2 + \sin^2 x\right)$ liên tục trên $[0;\pi] \times [c;d]$

Tồn tại $f'_y(x,y) = \dfrac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2} \forall y \in [c,d]$ và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[0;\pi] \times [c;d]$

Do đó: $I(y) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2y\cos x + y^2) dx$ khả vi trên (c,d)

Mà $y_0 \in (c,d)$ nên $I(y)$ khả vi tại y_0

Do đó $\forall y_0 \in (-1;1), I(y)$ khả vi tại y_0 nên $I(y)$ khả vi trên $(-1;1)$

- Từ đó ta có: $I'(y) = \int\limits_0^{\pi} \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

+ Với $y = 0, I(0) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1) dx = 0$

+ Với $y \neq 0, I'(y) = \frac{1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{2y^2 - 2y\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

$= \frac{1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{1 - 2y\cos x + y^2}{1 - 2y\cos x + y^2} dx + \frac{1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{y^2 - 1}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

$= \frac{1}{y} \int\limits_0^{\pi} dx + \frac{y^2 - 1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

$= \frac{\pi}{y} + \frac{y^2 - 1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

Đặt $I_1 = \frac{y^2 - 1}{y} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1 - 2y\cos x + y^2} dx$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{2dt}{t^2 + 1} = dx, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Lúc này $I_1 = \frac{y^2 - 1}{y} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1 - 2y\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + y^2} \frac{2dt}{t^2 + 1}$

$= \frac{2y^2 - 2}{y} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(y^2 + 1)(t^2 + 1) - 2y(1 - t^2)} dt$

$= \frac{2y^2 - 2}{y} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(yt + t)^2 + (1 - y)^2} dt$

$$= \frac{2y^2-2}{y(y+1)^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2} dt$$
$$= \frac{2y^2-2}{y(y+1)^2} . \frac{1+y}{1-y} . \arctan\left(t . \frac{1+y}{1-y}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{-2}{y} . \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{-\pi}{y}$$

Vậy $I'(y) = \frac{\pi}{y} + I_1 = \frac{\pi}{y} + \frac{-\pi}{y} = 0$

$\Rightarrow I(y) = \int I'(y)dy = C$, do $I(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I(y) = 0$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP