Chương 5: Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương, không gian Euclide, đường và mặt bậc hai

Phần 1

Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương

1 Dạng song tuyến tính

1.1 Định nghĩa

Dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ là ánh xạ tuyến tính $f : V \times V \to \mathbb{R}$ sao cho:

1. $\varphi(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$

2. $\varphi(kx, y) = k.\varphi(x, y)$

3. $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$

4. $\varphi(x, ky) = k.\varphi(x, y)$

1.2 Ma trận và biểu thức tọa độ

φ là song tuyến tính trên V, $B = \{e_1; ...e_n\}$ là một cơ sở

$[x]_B = (x_1, ..., x_n)$

$[y]_B = (y_1, ...y_n)$

Đặt $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận cơ sở của φ đối với cơ sở B

$\varphi = [x]^T.A.[y]$

VD: $\varphi(x, y) = x_1.y_1 + 2x_1.y_2 + 3x_2.y_1 - 5x_2.y_2$. Tìm ma trận A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Mệnh đề 1: φ là dạng song tuyến tính trên U, có ma trận A đối với cơ sở B, ma trận B với cơ sở B'.

Gọi P là ma trận chuyển từ $B \to B'$

$$B = P^T.A.P$$

Mệnh đề 2: A là ma trận của dạng song tuyến tính φ trên V đối với cơ sở B, φ đối xứng khi và chỉ khi A đối xứng

2 Dạng toàn phương

2.1 Định nghĩa

Cho φ là dạng song tuyến tính đối xứng trên V. Lúc đó $\omega : V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\omega(x) = \varphi(x, x)$ gọi là dạng toàn phương

VD: Cho $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + 4x_3y_3$

$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2$

2.2 Ma trận và biểu thức tọa độ

ω toàn phương, tương ứng với dạng song tuyến tính φ trên V.

$A = [a_{ij}]_{nxn}$ là ma trận của φ đối với cơ sở B. Khi đó A gọi là ma trận của ω đối với cơ sở B.

VD: Cho $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

2.3 phương pháp Lagrange

TH1: Tồn tại $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$

Đổi tọa độ $\begin{cases} y_1 = a_{11}.x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 \\ y_n = x_n \end{cases}$

TH2: $a_{ii} = 0$ với mọi i, tồn tại $a_{ij} \neq 0$

Đổi tọa độ; $\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k (k \neq i, k \neq j) \end{cases}$ Ta đã đưa về TH1

2.4 Dạng toàn phương xác định dương

Định nghĩa:

a. ω được gọi là dạng toàn phương xác định dương nếu $\omega(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$

b. ω được gọi là dạng toàn phương nửa xác định dương nếu $\omega(x) \geq 0$ với mọi x.

c. ω được gọi là dạng toàn phương xác định âm nếu $\omega(x) < 0$ với mọi $x \neq 0$

d. ω được gọi là dạng toàn phương nửa xác định âm nếu $\omega(x) \leq 0$ với mọi x

Phần 2

Không gian Euclide

3 Không gian có tích vô hướng - tích vô hướng

- **Định nghĩa**: Cho V là không gian vectơ, một tích vô hướng trên V là một ánh xạ $< .,. >$: $V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

  1. $< u, v >$ xác định với mọi $u, v \in V$
  2. $< u, v >=< v, u >$
  3. $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$
  4. $< ku, v >= k < u, v >$
  5. $< u, u >\geq 0 \quad \forall u$ và $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$

- **Ví dụ**: Trong $\mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Chứng minh khi ta đặt $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$ thì $< x, y >$ trở thành tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$.

  Chứng minh:

  1. Có thể dễ nhận thấy $< x, y >$ xác định $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
  2. $< x, y > = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n =< y, x > \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
  3. $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$; $x' = (x'_1, x'_2, \ldots x'_n); y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$. Ta dễ thấy:
     $x + x' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots x_n + x'_n)$
     $$\begin{aligned} < x + x', y > &= (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) \\ &=< x, y > + < x', y > \end{aligned}$$
  4. Ta có: $kx = (kx_1, kx_2, \ldots kx_n)$
     $$\begin{aligned} < kx, y > &= kx_1y_1 + kx_2y_2 + \ldots kx_ny_n \\ &= k(x_1y_1 + x_2y_2 + ...x_ny_n) = k < x, y > \end{aligned}$$
  5. $< x, x >= x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \geq 0$
     và $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$

  Vậy điều phải chứng minh là đúng.

- **Độ dài và khoảng cách**

1. **Độ dài vectơ:** Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó độ dài(hay chuẩn) của vectơ $\alpha \in V$ là một số thực không âm $\|\alpha\| = \sqrt{<\alpha, \alpha>}$.

   Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng $<x, y>= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

   $\Rightarrow$ Độ dài vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ là $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$

   Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: Với 2 vectơ bất kỳ x, y trong không gian có tích vô hướng luôn có BĐT:

   $$\|<x, y>\| \leq \|x\| . \|y\|$$

   Tính chất:

   Trong không gian có tích vô hướng V:

   - $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
   - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
   - $\|kx\| = |k| . \|x\| \quad \forall k \in \mathbb{R}, x \in V$
   - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, \forall x, y \in V$

2. **Khoảng cách:** Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó khoảng cách giữa hai vectơ u và v là số thực không âm $d(u, v) = \|u - v\|$.

   Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng Euclide

   Khoảng cách giữa $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ là:

   $d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$

   Tính chất:

   Trong không gian có tích vô hướng V:

   - $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in V$
   - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in V$
   - $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in V$
   - $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z \in V$ (Bất đẳng thức tam giác)

- **Góc giữa 2 véctơ, sự vuông góc:** *Định nghĩa:* Giả sử x, y là 2 vectơ khác 0 trong không gian có tích vô hướng V. Số đo góc giữa x, y kí hiệu là $\alpha(x, y) \in [0, \pi]$ sao cho:

  $$\cos \alpha(x, y) = \frac{<x, y>}{\|x\| . \|y\|}$$

  Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng Euclide $\begin{cases} x &= (1, 1, 1, 1) \\ y &= (1, -1, 1, 1) \end{cases}$

  $\Rightarrow \cos \alpha(x, y) = \dfrac{<x, y>}{\|x\| . \|y\|} = \dfrac{2}{2.2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha(x, y) = \dfrac{\pi}{3}$

Định nghĩa: Hai vectơ u và v được gọi là vuông góc hay trực giao với nhau và được ký hiệu à $u \perp v$ nếu $< u, v >= 0$.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng Euclide:

$$x = (1, 2, 3, 4), \quad y = (7, -2, 3, -3)$$

Ta có: $< x, y >= 1.7 - 2.2 + 3.3 - 3.4 = 0 \Rightarrow x \perp y$

4 Hệ trực giao và cơ sở trực chuẩn

- **Định nghĩa:**

  (a) Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ trực giao nếu các vectơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là $< e_i, e_j >= 0$ với $i \neq j$

  (b) Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ trực chuẩn nếu nó là một hệ trực giao và mỗi vectơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là $< e_i, e_j >= 0$ nếu $i \neq j, < e_i, e_j >= 1$ nếu $i = j$

- **Ví dụ:**

  (a) Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclidean, xét hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$:

  $$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 0),\ v_3 = (1, 1, -2)$$

  Giải:

  Ta có thể thấy:

  - $< v_1, v_2 >= 1.1 + 1(-1) + 1.0 = 0$
  - $< v_1, v_3 >= 1.1 + 1.1 + 1.(-2) = 0$
  - $< v_2, v_3 >= 1.1 + (-1).1 + 0.(-2) = 0$

  $\Rightarrow$ Vậy hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ trực giao.

  (b) Trong $\mathbb{R}^3$, các hệ vectơ sau là hệ trực chuẩn với tích vô hướng Euclide.

  - $\{e_1, e_2, e_3\}, \quad e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
  - $\{u_1, u_2, u_3\}, \quad u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), u_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$

- **Cơ sở trực chuẩn**

  Định nghĩa: Trong không gian Euclide n chiều, 1 cơ sở $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn nếu B là 1 hệ trực chuẩn.

  $\Rightarrow$ Trong không gian Euclide n chiều, mọi hệ n vectơ trực chuẩn đều lập thành cơ sở.

  Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^n$, cơ sở chính tắc

  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ với $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ là 1 cơ sở trực chuẩn với tích vô hướng Euclide.

  Thật vậy, $\begin{cases} < e_i, e_j >= 0 & \forall i \neq j \\ \|e_i\| = 1 & i = \overline{1, n} \end{cases}$

  Tính chất: Cho không gian Euclide n chiều E với cơ sở $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

  Cho các vectơ x, y, $(x)_B = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $(y)_B = (y_1, y_2, \dots y_n)$

  1. $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$
  2. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
  3. $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots (y_n - x_n)^2}$

- **Trực chuẩn hóa Gram-Schimdt**

  Giả sử $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong không gian có tích vô hướng E. Hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ trực chuẩn được xây dựng như sau:

  – $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

  – $u_2 = \dfrac{\overline{u2}}{\|\overline{u2}\|}$ với $\overline{u_2} = v_2 - < v_2, u_1 > u_1$

  – $u_3 = \dfrac{\overline{u3}}{\|\overline{u3}\|}$ với $\overline{u_3} = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2$

  – $u_k = \dfrac{\overline{u_k}}{\|\overline{u_k}\|}$ với $\overline{u_k} = v_k - < v_k, u_1 > u_1 - < v_k, u_2 > u_2 - \dots - < v_k, u_{k-1} > u_{k-1}$

  với $k = 2, 3, \dots, n$

  $\Rightarrow$ Khi đó: $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là hệ trực chuẩn trong E và $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \text{span}\,\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

  Ví dụ: Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ với

  $$v_1 = (2, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (2, 1, 2)$$

  Ta có:

  $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{(2, 0, 0)}{2} = (1, 0, 0)$

$\overline{u_2} = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = v_2 - 1.v_1 = (0, 1, 1)$, $\quad u_2 = \frac{\overline{u_2}}{\|\overline{u_2}\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\overline{u_3} = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2 = v_3 - 2.u_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} u_2 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$u_3 = \frac{\overline{u_3}}{\|\overline{u_3}\|} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow$ Ta thu được hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ trực chuẩn với:

$$u_1 = (1, 0, 0)\,,\ u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,\ u_3 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Định lý: Nếu $\{e_1, e_2, \ldots, e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide n chiều E thì với mỗi $v \in V$ có biểu diễn:

$$v = < v, e_1 > e_1 + < v, e_2 > e_2 + \cdots + < v, e_n > e_n$$

5 Không gian con trực giao, phép chiếu trực giao

- **Không gian con trực giao**

  Định nghĩa: Trong không gian có tích vô hướng , cho 2 không gian con là U và W, U và W trực giao với nhau ($U \perp V$) nếu:

  $$< u, w >= 0, \forall\, u \in U\ w \in W$$

  Nhận xét: $U \perp V \Rightarrow U \cap V = \{\mathbf{0}\}$

  Định nghĩa: Trong không gian có tích vô hướng E, cho không gian vectơ con U: Tập $U^{\perp} = \{v \in E \,|\, < u, v >= 0 \quad \forall u \in U\}$ gọi là phần bù trực giao của U.

  Định lý: U là không gian vectơ con trong không gian có tích vô hướng E, khi đó:

  1. $U^{\perp}$ là không gian của E
  2. $\dim E = m$ thì $\quad U + U^{\perp} = E$ và $\dim U = \dim U^{\perp} = m$

- **Phép chiếu trực giao**

  Định nghĩa: Trong không gian có tích vô hướng E cho không gian vectơ con U. Với $v \in E$, nếu tồn tại $w_1 \in U$, $w_2 \in U^{\perp}$ sao cho $v = w_1 + w_2$ thì ta nói w_1 là hình chiếu trực giao của v lên không gian con U.

  Kí hiệu: $w_1 = pr_U(v)$

  Định lý: Giả sử E là không gian có tích vô hướng, $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian con U. Với v là vectơ bất kì của E. Khi đó:

  $$pr_U v = < v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 + \cdots + < v, u_n > u_n$$

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclilde, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,-2,1)$, $v = (3,1,-1)$. Tìm $pr_U(v)$ biết $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

Giải

Đầu tiên ta trực chuẩn hóa $\{v_1, v_2\}$ ta được: $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), u_2 = (0,-1,0)$

$$\Rightarrow \text{Hình chiếu: } pr_U(v) = <v, u_1> u_1 + <v, u_2> u_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} u_1 + (-1)u_2$$
$$= (1,0,1) + (0,1,0) = (1,1,1)$$

$\Rightarrow pr_U(v) = (1,1,1)$

6 Ma trận trực giao

- **Định nghĩa:** Ma trân vuông A gọi là ma trận trực giao nếu $A.A^T = I$, với A^T là ma trận chuyển vị của A và I là ma trận đơn vị.

- **Ví dụ:**

  (a) Ma trận đơn vị là ma trận trực giao $I.I^T = I$

  . Ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo là 1 hoặc -1 thì trực giao.

  (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ là các ma trận trực giao.

  Nhận xét: Nếu A trực giao thì $A.A^T = I \rightarrow A^T = A^{-1}$ và A^T cũng trực giao.

- **Mệnh đề:** Trong không gian Euclide n chiều, cho cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ và một cơ sở $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$.$P$ là ma trận chuyển từ $B \rightarrow B'$ nếu B' là cơ sở trực chuẩn thì P trực giao.

  $\rightarrow$ Hệ quả: P là ma trận vuông cấp n thì các khẳng định sau là tương đương:

  - P trực giao.
  - Hệ vectơ hàng của P là hệ trực chuẩn.
  - Hệ vectơ cột của P là hệ trực chuẩn.

  Ví dụ: $\quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

  Có mỗi vectơ hàng có chuẩn $= 1$, đôi một vuông góc với nhau nên P trực giao.

7 Giải bài toán chéo hóa trực giao ma trận A vuông

- **Bước 1:** Giải phương trình $\det(A - \lambda I) = O$ để tìm các trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ứng với bội tương ứng $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

- **Bước 2:** Mỗi không gian riêng E_λ, xác định m_i vectơ riêng độc lập tuyến tính. Trực chuẩn hóa Gram-Schimdt để nhận được m_i vectơ riêng trực chuẩn, tổng hợp lại được các vectơ riêng trực chuẩn của ma trận A

- **Bước 3:** P là ma trận các cột vectơ riêng trực chuẩn ở *Bước 3:*. Khi đó P là ma trận trực giao làm chéo hóa A và D là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là các trị riêng tương ứng với các vectơ riêng trực chuẩn. $D = P^{\perp}AP$

Ví dụ: Chéo hóa trực giao $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Xét $\det(A - \lambda I) = O \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)(1 - \lambda) = 0$

$\Rightarrow A$ có 3 trị riêng là : $\lambda_1 = 2\,,\ \lambda = -1\,,\ \lambda_3 = 1$

– Với $\lambda_1 = 2 \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Chuẩn hóa ta thu được: $U_1 = \dfrac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

– Với $\lambda_2 = -1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Chuẩn hóa ta thu được: $U_2 = \dfrac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

– Với $\lambda_3 = 1 \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Chuẩn hóa ta thu được: $U_1 = \dfrac{X_3}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Ta có: $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao làm chéo hóa ma trận A.

Và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ thỏa mãn $D = P^{\perp}AP$.

Phần 3

8 Rút gọn dạng toàn phương

8.1 Phương pháp Jacobi

- Trước hết ta định nghĩa các định thức con chính cấp K của ma trận

  Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (giả sử $m < n$)

  Với mỗi $k = 0, 1, 2, .., m$, kí hiệu $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ là định thức con chính cấp k của ma trận của ma trận A

  Ta qui ước $\delta_o = 1$

- Phương pháp Jacobi được xây dựng dựa trên định lí sau:
  Giả sử ma trận của dạng toàn phương ωđối với cơ sở U $(U = u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ là A sao cho tất cả các định thức con chính cấp k của A đều khác 0. Khi đó tồn tại cơ sở V để với cơ sở này ω có dạng chính tắc

$$\omega(y) = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + ... + \frac{\Delta n - 1}{\Delta_n}.y_n^2$$

8.2 Tiêu chuẩn Sylvester

- Trên không gian vec tơ n chiều cho dạng toàn phương ω có ma trận đối với cơ sở nào đó là A. Khi đó:
  Điều kiện cần và đủ đề ω xác định dương là

$$\Delta_k > 0(k = 0, 1, 2, ..., n)$$

  Điều kiện cần và đủ để ω xác định âm là

$$(-1)^k.\Delta_k > 0(k = 1, 2, .., n)$$

- Các bước rút gọn dạng toàn phương về chính tắc bằng phương pháp Jacobi

  Giả sử trong không gian V có cơ sở là U, cho một dạng toàn phương ω

  B1: Lập ma trận A của ω đối với cơ sở U

  B2: Tính các định thức con chính cấp K của ma trận A (lưu ý: nếu tồn tại k trong khoảng từ 1 đến n để $\Delta_k = 0$, ta đưa ra kết luận không thể dùng phương pháp Jacobi) B3: Nếu không tồn tại k trong khoảng từ 1 đến n để $\Delta_k = 0$, khi đó ta suy ra tồn tại cơ sở U' sao cho đối với cơ sở này, ω có dạng chính tắc

  B4: Tìm ma trận chuyển cơ sở P thỏa mãn:

  $a_{11}.p_{11} = 1$

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.3 Phương pháp chéo hóa trực giao để rút gọn một dạng toàn phương

- Giả sử ta có một dạng toàn phương ω có ma trận đối xứng A trong một cơ sở trực chuẩn nào đó B.

  Bước 1: Lập ma trận A nói trên

  Bước 2: Chéo hóa trực giao ma trận A, tìm ma trận trực giao P và ma trận chéo D.

  Bước 3: Gọi B' là cơ sở trực chuẩn của ω sao cho ma trận P là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'.

8.4 Định luật quán tính

Số hệ số dương, số hệ số âm, số hệ số bằng 0 trong dạng chính tắc của dạng toàn phương cho trước trên không gian vecto đã cho không phụ thuộc vào cơ sở.

9 Một số ví dụ

VD1: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Jacobi

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_3^2$$

Ma trận của ω với cơ sở chính tắc: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -2$

$\Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$

$\Rightarrow$ tồn tại cơ sở B để ω có dạng chính tắc.

$$\omega = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2$$

Gọi $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B

Ta có:

- $a_{11}p_{11} = 1 \Leftrightarrow p_{11} = 1$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{12} = \dfrac{1}{2} \\ p_{22} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{13} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ p_{33} = 1 \end{cases}$

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cơ sở $B = \left\{ u_1 = (1, 0, 0), u_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), u_3 = (0, 0, 1) \right\}$, với cơ sở này ω có dạng chính tắc

$$\omega(y) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2$$

VD2: Xét tính xác định dương, âm của dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Ma trận của ω đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Ta có

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$

$\Rightarrow \omega$ xác định dương.

VD3: Xác định m để dạng toàn phương xác định dương

$$\omega(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

Chúng ta sẽ thử làm theo 2 cách:

C1 Phương pháp Lagrange:

$$\begin{aligned}
\omega &= 5x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\
&= 5\left(x_1^2 + 2\cdot\frac{1}{5}x_1x_2 + \frac{x_2^2}{25}\right) + \frac{4x_2^2}{5} - 2x_2x_3 + mx_3^2 \\
&= 5\left(x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)^2 + \frac{4}{5}\left(x_2^2 - 2\cdot\frac{5}{4}x_2x_3 + \frac{25}{16}x_3^2\right) + \left(m - \frac{5}{4}\right)x_3^2 \\
&= 5\left(x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)^2 + \frac{4}{5}\left(x_2 - \frac{5}{4}x_3\right)^2 + \left(m - \frac{5}{4}\right)x_3^2
\end{aligned}$$

$$\omega \text{ xác định dương} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 > 0 \\ \dfrac{4}{5} > 0 \\ m - \dfrac{5}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{4}$$

C2 Tiêu chuẩn Sylvester:

Ma trận của ω theo cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}$

Ta có

$$\Delta_1 = 5$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -(-4m+5) = 4m-5.$$

$$\omega \text{ xác định dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 > 0 \\ 4 > 0 \\ 4m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{4}$$

Nhận xét: Phương pháp Lagrange khá đơn giản về mặt biến đổi trong việc rút gọn dạng toàn phương. Tuy nhiên ở dạng bài tìm tham số để một dạng toàn phương xác định dương (âm) thì sử dụng tiêu chuẩn Sylvester lại hiệu quả hơn.

VD4: Trong $\mathbb{R}^3$ cho dạng toàn phương có biểu thức tọa độ:

$$\omega(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

Gọi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$.

Ma trận của ω với cơ sở E là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ta chéo hóa ma trận A.

Xét phương trình

$$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1=2\,(k=1) \\ \lambda_2=-1\,(k=2) \end{array}\right.$$

- Với $\lambda_1=2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ với $\lambda_1=2$, ta có 1 vecto riêng trực chuẩn $p_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

- Với $\lambda_2=-1$ ta giải tương tự được

$$p_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } p_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ và $P^\top AP=D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Dạng chính tắc: $\omega(x)=\omega'(y)=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

Phần 4

Đường và mặt bậc hai

10 Đường bậc hai trong mặt phẳng

- **Định nghĩa:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descrates vuông góc đã cho, tập hợp tất cả những điểm $M(x_1, x_2)$ thỏa mãn phương trình

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0 \tag{1}$$

với $a_{ij}, b_j, c \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2; j = 1, 2$; gọi là đường bậc hai $\mathcal{T}$ và phương trình (1) gọi là phương trình của đường bậc hai $\mathcal{T}$.

Nhận xét: Có thể tập hợp các điểm thỏa mãn phương trình (1) là rỗng trong một số trường hợp. Chẳng hạn với phương trình $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$, không có điểm $M(x_1, x_2)$ thỏa mãn.

Nhằm phân loại các đường bậc hai trong mặt phẳng, ta có định lý sau.

- **Định lý:** Trong mặt phẳng cho đường bậc hai $\mathcal{T}$. Tồn tại hệ tọa độ Descartes vuông góc để phương trình $\mathcal{T}$ ở dạng chính tắc, tức là một trong các dạng sau:

1. Ellipse: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$
2. Hyperbol: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$
3. Parabol: $x_2^2 = 2px_1$
4. Một điểm: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 0$
5. Cặp đường thẳng cắt nhau: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 0$
6. Cặp đường thẳng song song nhau: $\dfrac{x_1^2}{a^2} = 1$
7. Cặp đường thẳng trùng nhau: $\dfrac{x_1^2}{a^2} = 0$
8. Không có điểm thực ($\mathcal{T} = \emptyset$):

a) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = -1$ (ellipse ảo); b) $\dfrac{x_1^2}{a^2} = -1$(cặp đường thẳng ảo)

- **Ví dụ**

11 Mặt bậc hai trong không gian

- **Định nghĩa:** Trong không gian với hệ tọa độ Descrates vuông góc đã cho, tập hợp tất cả các điểm $M(x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{3} b_ix_i + c = 0 \tag{2}$$

với $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in \mathbb{R}$,

gọi là phương trình mặt bậc hai với phương trình (2) gọi là phương trình của mặt bậc hai đó.

Tương tự như đường bậc hai trong mặt phẳng, mặt bậc hai trong không gian được nhận dạng nhờ dạng chính tắc của mặt bậc hai đó.

Sau đây là dạng chính tắc của các mặt bậc hai với tên gọi tương ứng.

1. Ellipsoid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$
2. Hyperboloid một tầng: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$
3. Hyperboloid hai tầng: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = -1$
4. Paraboloid - elliptic: $x_3 = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2}$
5. Paraboloid - hyperbolic: $x_3 = \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2}$
6. Trụ Elliptic: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$
7. Trụ hyperbol: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$
8. Trụ parabol: $px_2 = x_1^2$
9. Mặt nón: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 0$
10. Cặp mặt phẳng song song: $\dfrac{x_1^2}{a^2} = 1$
11. Cặp mặt phẳng trùng nhau: $x_1^2 = 0$
12. Đường thẳng thực: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 0$
13. Ellipsoid ảo: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = -1$
14. Trụ Elliptic ảo : $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = -1$
15. Cặp mặt phẳng song song: $\dfrac{x_1^2}{a^2} = -1$

- **Định lý:** Trong không gian cho một mặt bậc hai $\mathcal{T}$. Khi đó tồn tại hệ tọa độ Descartes vuông góc để phương trình của $\mathcal{T}$ có dạng chính tắc

- **Ví dụ**

12 Nhận dạng đường bậc hai (phương pháp chéo hóa trực giao)

- Xét phương trình một đường cong bậc 2 trong cơ sở $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tổng quát:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$$

Vế trái của phương trình là tổng của hai hàm, một hàm bậc nhất p và một dạng toàn phương $q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Để nhận dạng đường cong:

Bước 1: Đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

Bước 2: Giả sử $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ là cơ sở trực chuẩn để q có dạng chính tắc, ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' là P. Dùng công thức đổi cơ sở và biện luận theo kết quả thu được (đối chiếu công thức của đường cong nhận được với các dạng chính tắc):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$