Quiz Đại số 02

(Bài quiz gồm 20 câu hỏi trắc nghiệm)

Câu 01. Cho các vector $v_1 = (1,2,3,-1)$, $v_2 = (1,4,-2,3)$, $v_3 = (-2,-2,-11,6)$, $v_4 = (-1,3,6,1)$. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có mấy vector?

A) 3 B) 4 C) 1 D) 2

Câu 02. Cho hệ $\{v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (4,\alpha,6),\ v_3 = (7,8,\alpha)\}$. Tổng các giá trị α để hệ này **không** độc lập tuyến tính là?

A) 29 B) 32 C) 6 D) 12

Câu 03. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vector $\{u_1 = (3,2,1,0), u_2 = (2,1,1,1), u_3 = (4,3,-1,2),\ u = (m,3,1,m-2)\}$. Tìm m để $u \in span\,\{u_1, u_2, u_3\}$

A) $\dfrac{26}{5}$ B) $\dfrac{24}{5}$ C) 4 D) $\dfrac{16}{5}$

Câu 04. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 & = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \end{cases}$$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3

Câu 05. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vector sau $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (2,0,1)$, $v_3 = (0,2,1)$, $v_4 = (2,1,0)$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B' = \{v_2, v_3, v_4\}$. Biết $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $(v \in \mathbb{R}^3)$. $a+b+c$ có giá trị là

A) 1 B) 4 C) 2 D) 3

Câu 06. W và V là hai không gian vectơ khác nhau trên trường K. Cho g, f là các ánh xạ tuyến tính với
$g : W \to V$
$f : V \to V$
Có bao nhiêu ánh xạ là toán tử tuyến tính và bao nhiêu ánh xạ là ánh xạ tuyến tính.

(a) $g + f$
(b) $g \circ f$
(c) f^{-1}
(d) αf với $\alpha \in K$
(e) $f \circ g$

A) 3 và 1 B) 3 và 4 C) 2 và 1 D) 1 và 1

Câu 07. Với không gian vectơ V trên trường K. Cho ánh xạ $f : V \to V$ khẳng định nào sau đây là sai.

A. Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì f là toán tử tuyến tính
B. $f(\theta) \neq \theta \Leftrightarrow f$ không là ánh xạ tuyến tính và θ là vectơ 0 trong không gian V
C. Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì $f(\theta) = \theta$
D. Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì $f(-x) = -f(x)$

Câu 08. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (3x - 6y + z,\ -x + 2y - 4z)$ tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở B_3 của $\mathbb{R}^3$ và B_2 của $\mathbb{R}^2$. Biết $B_3 = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$ và $B_2 = \{(1, 1),\ (0, 1)\}$.

A. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

B. $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

C. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

D. $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Câu 09. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x + y - z, x - 4y + z)$ một cơ sở của Ker$f$ là

A. $\{(2, 2, 6)\}$
B. $\{(0, 0, 0)\}$
C. $\{(2, 2, 3)\}$
D. $\{(1, 1, 6)\}$

Câu 10. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn A, trong đó A có đa thức đặc trưng là $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$. Biết các vecto riêng của f ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là $v_1 = (0, u, t)$, $u^2 + t^2 > 0$; các vecto riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = 1$ là $v_2 = (t, t, t), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. f không chéo hóa được vì ứng với $\lambda = 1$, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính
B. f chéo hóa được vì f có hai trị riêng phân biệt
C. f chéo hóa được
D. f không chéo hóa được vì ứng với $\lambda = 0$, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính

Câu 11. Tính tổng các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

A. 3
B. 4
C. 1
D. -16

Câu 12. Tìm ma trận khả đảo D sao cho DAD^{-1} là ma trận chéo trong đó ma trận $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

A. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

B. $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. Không tồn tại

Câu 13. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ có ma trận với cơ sở chính tắc là
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Với $x, y, z \in \mathbb{R}^4$ và $x = (0, -1, 1, 0)$, $y = (2, 1, 2, -1)$, $z = (2, 0, 3, -1)$
Tính $\varphi(x, z) - \varphi(x, y)$

A. 5
B. 3
C. 7
D. 9

Câu 14. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có ma trận với cơ sở chính tắc là:
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ và hệ vector $B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (0,0,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$.
Ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở B có cột đầu tiên từ trái sang là:

Ⓐ $\begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 7 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ Ⓓ $\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Câu 15. Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$, $\omega(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2x_3$. Dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho có bao nhiêu hệ số dương?

Ⓐ 3 Ⓑ 2 Ⓒ 0 Ⓓ 1

Câu 16. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị tích vô hướng $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Gọi φ là góc giữa u, v với $u = (-1,1,1)$, $v = (2,0,2)$. Tính $\cos\varphi$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓓ 0

Câu 17. Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide cho các vector $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,0,1)$, $v_3 = (4,-2,4)$. Tìm $pr_U(v_3)$ với $U = span\{v_1, v_2\}$

Ⓐ $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Ⓓ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Câu 18. Xác định giá trị a để dạng toàn phương có biểu thức tọa độ dưới đây là xác định dương
$\omega(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

Ⓐ $20 - 2\sqrt{40} < x < 20 + 2\sqrt{40}$
Ⓑ Các đáp án đều sai
Ⓒ $20 - 2\sqrt{30} < x < 20 + 2\sqrt{30}$
Ⓓ $15 - 2\sqrt{30} < x < 15 + 2\sqrt{30}$

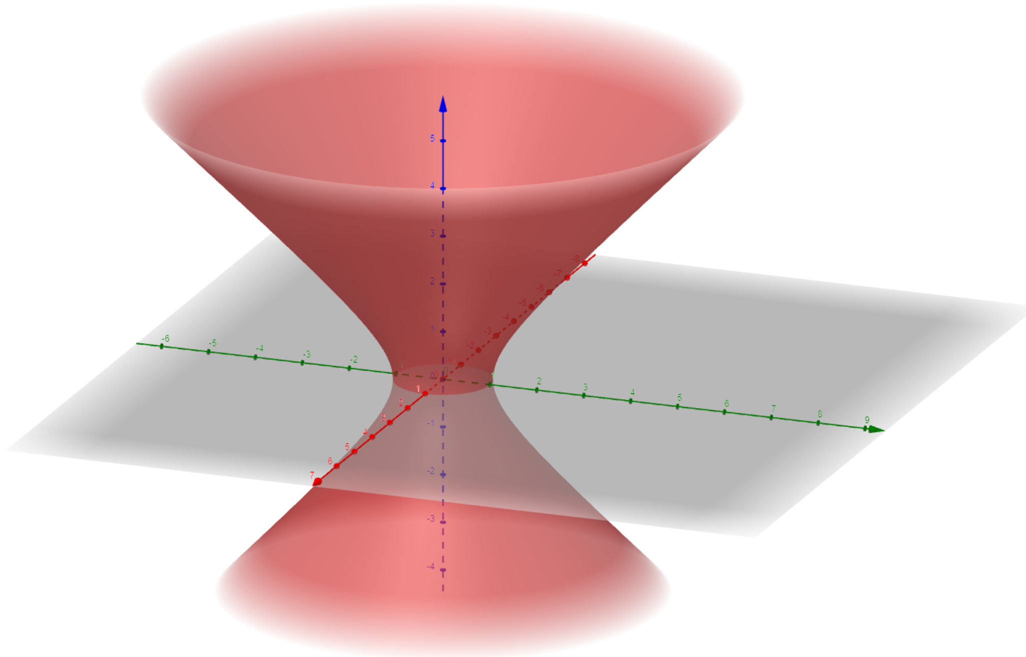
Câu 19. Biết biểu thức tọa độ của dạng toàn phương đối với cơ sở trực chuẩn không gian Euclid ba chiều là:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

Khi đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao, ta được dạng toàn phương chính tắc là:

Ⓐ $\omega(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ Ⓑ $\omega(y) = 3y_2^2 + 3y_3^2$
Ⓒ $\omega(y) = 2y_2^2 + 2y_3^2$ Ⓓ $\omega(y) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$

Câu 20. Mặt bậc hai sau có tên gọi là:



(A) Paraboloid - hyperbolic

(B) Elipsoid

(C) Paraboloid - Eliptic

(D) Hyperboloid 1 tầng

ĐÁP ÁN

01. A	05. C	09. A	13. A	17. A
02. A	06. C	10. C	14. A	18. B
03. A	07. B	11. A	15. B	19. B
04. A	08. D	12. C	16. B	20. D

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 01. Cho các vector $v_1 = (1, 2, 3, -1)$, $v_2 = (1, 4, -2, 3)$, $v_3 = (-2, -2, -11, 6)$, $v_4 = (-1, 3, 6, 1)$. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có mấy vector?

A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

Lời giải. Đáp án đúng A.

Ta xét ma trận tọa độ hàng của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -11 & 6 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, biến đổi trên hàng của ma trận A ta được $r(A) = 3$. Vậy hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có 3 vector. □

Câu 02. Cho hệ $\{v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (4, \alpha, 6),\ v_3 = (7, 8, \alpha)\}$. Tổng các giá trị α để hệ này **không** độc lập tuyến tính là?

A. 29 B. 32 C. 6 D. 12

Lời giải. Đáp án đúng A.

Ta xét ma trận tọa độ hàng của hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \alpha & 6 \\ 7 & 8 & \alpha \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \alpha & 6 \\ 7 & 8 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 29\alpha + 132.$

Để hệ trên không ĐLTT thì $\det A = \alpha^2 - 29\alpha + 132 = 0$. Theo định lí Viet, phương trình này có hai nghiệm có tổng là 29 □

Câu 03. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vector $\{u_1 = (3, 2, 1, 0), u_2 = (2, 1, 1, 1), u_3 = (4, 3, -1, 2),\ u = (m, 3, 1, m-2)\}$. Tìm m để $u \in span\{u_1, u_2, u_3\}$

A. $\frac{26}{5}$ B. $\frac{24}{5}$ C. 4 D. $\frac{16}{5}$

Lời giải. Đáp án đúng A.

$u \in span\{u_1, u_2, u_3\} \Leftrightarrow u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = m \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{26}{5}$$

□

Câu 04. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 & = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \end{cases}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) 3

Lời giải. Đáp án đúng (A).
Số ẩn của hệ phương trình là: $n = 5$.

Ma trận hệ số của hệ phương trình là $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

Số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $= n - r(A) = 5 - 3 = 2$ □

Câu 05. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vector sau $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 2, 1)$, $v_4 = (2, 1, 0)$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B' = \{v_2, v_3, v_4\}$. Biết $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $(v \in \mathbb{R}^3)$. $a + b + c$ có giá trị là

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

Lời giải. Đáp án đúng (C).

Ta có $[v_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[v_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[v_4]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' là $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$$[v]_B = P\,[v]_{B'} \Rightarrow [v]_{B'} = P^{-1}\,[v]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 1 = 2$$ □

Câu 06. W và V là hai không gian vectơ khác nhau trên trường K. Cho g, f là các ánh xạ tuyến tính với
$g : W \to V$
$f : V \to V$
Có bao nhiêu ánh xạ là toán tử tuyến tính và bao nhiêu ánh xạ là ánh xạ tuyến tính.

(a) $g + f$

(b) $g \circ f$

(c) f^{-1}

(d) αf với $\alpha \in K$

(e) $f \circ g$

A 3 và 1 B 3 và 4 C 2 và 1 D 1 và 1

Lời giải. Đáp án đúng C.

(a) Không phải ánh xạ. Vì hai ánh xạ đi từ không gian hai không gian khác nhau.

(b) Không phải ánh xạ. Vì tập đích của f và tập nguồn của g khác nhau.

(c) Không là ánh xạ tuyến tính. Vì f không là Đẳng cấu

(d) Là toán tử tuyến tính. Vì f là toán tử tuyến tính.

(e) Là ánh xạ tuyến tính

□

Câu 07. Với không gian vectơ V trên trường K. Cho ánh xạ $f : V \to V$ khẳng định nào sau đây là sai.

A Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì f là toán tử tuyến tính

B $f(\theta) \neq \theta \Leftrightarrow f$ không là ánh xạ tuyến tính và θ là vectơ 0 trong không gian V

C Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì $f(\theta) = \theta$

D Nếu f là ánh xạ tuyến tính thì $f(-x) = -f(x)$

Lời giải. Đáp án đúng B.

Ta có thể lấy ví dụ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, dễ thấy f không phải ánh xạ tuyến tính nhưng $f(0) = 0$. □

Câu 08. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (3x - 6y + z,\ -x + 2y - 4z)$ tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở B_3 của $\mathbb{R}^3$ và B_2 của $\mathbb{R}^2$. Biết $B_3 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ và $B_2 = \{(1,1),\ (0,1)\}$.

A $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ B $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

C $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ D $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng D. Ta có $\begin{cases} f(1,0,0) = (3,-1) \\ f(0,1,0) = (-6,2) \\ f(0,0,1) = (1,-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1,0,0) = 3(1,1) - 4(0,1) = (3,-4)_{B_2} \\ f(0,1,0) = -6(1,1) + 8(0,1) = (-6,8)_{B_2} \\ f(0,0,1) = (1,1) - 5(0,1) = (1,-5)_{B_2} \end{cases}$

Ma trận của f đối với cặp cơ sở B_3 và B_2 là

$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$ □

Câu 09. Cho $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x,y,z)=(2x+y-z,x-4y+z)$ một cơ sở của Ker$f$ là

(A) $\{(2,2,6)\}$ (B) $\{(0,0,0)\}$ (C) $\{(2,2,3)\}$ (D) $\{(1,1,6)\}$

Lời giải. Đáp án đúng (A).

$$\text{Ker}f=\{(x,y,z):f(x,y,z)=\theta_{R^2}=(0,0)\}=\left\{(x,y,z):\begin{cases}2x+y-z=0\\x-4y+z=0\end{cases}\right\}=\{(t,t,3t)\,,\ t\in\mathbb{R},t\neq 0\}$$

Chọn $t=2$ ta được một cơ sở của Ker$f$ là $\{(2,2,6)\}$ □

Câu 10. Cho phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn A, trong đó A có đa thức đặc trưng là $\phi(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$. Biết các vecto riêng của f ứng với giá trị riêng $\lambda=0$ là $v_1=(0,u,t)$, $u^2+t^2>0$; các vecto riêng của f ứng với trị riêng $\lambda=1$ là $v_2=(t,t,t),t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) f không chéo hóa được vì ứng với $\lambda=1$, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính
(B) f chéo hóa được vì f có hai trị riêng phân biệt
(C) f chéo hóa được
(D) f không chéo hóa được vì ứng với $\lambda=0$, f chỉ có một vector độc lập tuyến tính

Lời giải. Đáp án đúng (C).
Ta có: $v_1=(0,u,t)=u(0,1,0)+t(0,0,1)$; $v_2=t(1,1,1)$,
Dễ thấy hệ 3 vector $u_1=(0,1,0),u_2=(0,0,1),u_3=(1,1,1)$ độc lập tuyến tính
Mặt khác: $u^2+t^2>0,t\neq 0\Rightarrow f$ có 3 vector riêng độc lập tuyến tính $\Rightarrow f$ chéo hóa được □

Câu 11. Tính tổng các giá trị riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&5&-1\end{bmatrix}$

(A) 3 (B) 4 (C) 1 (D) -16

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Xét $det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&3-\lambda&1\\0&5&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=1;\lambda_2=4;\lambda_3=-2\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$ □

Câu 12. Tìm ma trận khả đảo D sao cho DAD^{-1} là ma trận chéo trong đó ma trận $A=\begin{bmatrix}5&-3&1\\-3&5&1\\0&0&8\end{bmatrix}$

(A) $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{bmatrix}$ (B) $D=\begin{bmatrix}\frac12&\frac12&-\frac16\\-\frac12&\frac12&\frac16\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C) $D=\begin{bmatrix}1&-1&\frac13\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) Không tồn tại

Lời giải. Đáp án đúng (C).

Xét $det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad (\text{bội } 1); \lambda_2 = 8 \quad (\text{bội } 2)$

+) Với $\lambda_1 = 2$, giải hệ phương trình $(A-\lambda_1 E)X = 0$ ta được: $\begin{bmatrix} 5-2 & -3 & 1 \\ -3 & 5-2 & 1 \\ 0 & 0 & 8-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \\ 6x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Chọn 1 vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là $u_1 = (1,1,0)$
+) Tương tự: với $\lambda_2 = 8$, giải hệ phương trình $(A-\lambda_2 E)X = 0$ ta được nghiệm
$X = (-t + \frac{s}{3}, t, s) = t(-1,1,0) + s(\frac{1}{3}, 0, 1); t^2 + s^2 > 0, t, s \in \mathbb{R}$

Chọn 2 vecto độc lập tuyến tính ứng với $\lambda_2 = 8$ là $u_2 = (-1,1,0); u_3 = (\frac{1}{3}, 0, 1)$

$\rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận khả đảo chéo hóa A □

Câu 13. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ có ma trận với cơ sở chính tắc là
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Với $x, y, z \in \mathbb{R}^4$ và $x = (0,-1,1,0)$, $y = (2,1,2,-1)$, $z = (2,0,3,-1)$
Tính $\varphi(x,z) - \varphi(x,y)$

(A) 5 (B) 3 (C) 7 (D) 9

Lời giải. Đáp án đúng (A).
Vì φ là dạng song tuyến tính nên ta có:

$$\varphi(x,z) - \varphi(x,y) = \varphi(x, z-y) = \varphi(x,x)$$
$$= x^T A x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$$

□

Câu 14. Cho dạng song tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ có ma trận với cơ sở chính tắc là:
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ và hệ vector $B = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (0,0,1), v_3 = (1,1,0)\}$.
Ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở B có cột đầu tiên từ trái sang là:

(A) $\begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 7 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B là: $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở B là:

$$A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

□

Câu 15. Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$, $\omega(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2x_3$. Dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho có bao nhiêu hệ số dương?

(A) 3 (B) 2 (C) 0 (D) 1

Lời giải. Đáp án đúng (B).
Ta đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + 4x_2)^2 - (4x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{4}x_3^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 \end{aligned}$$

Theo định luật quán tính, số hệ số dương và âm của mỗi dạng chính tắc của cùng một dạng toàn phương là như nhau nên dạng chính tắc của dạng toàn phương đã cho có 2 hệ số dương. □

Câu 16. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị tích vô hướng $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Gọi φ là góc giữa u, v với $u = (-1, 1, 1)$, $v = (2, 0, 2)$. Tính $\cos\varphi$.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 0

Lời giải. Đáp án đúng (B).

$$\cos\varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}} = \frac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

□

Câu 17. Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide cho các vector $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (4, -2, 4)$. Tìm $pr_U(v_3)$ với $U = span\{v_1, v_2\}$

(A) $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng (A). Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{v_1, v_2\}$:

- $v_1 \to u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $v_2 \to \overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (1, -1, 0) \to u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$pr_U(v_3) = u_1\langle v_3, u_1\rangle + u_2\langle v_3, u_2\rangle = (5, -1, 2)$$

□

Câu 18. Xác định giá trị a để dạng toàn phương có biểu thức tọa độ dưới đây là xác định dương $\omega(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

(A) $20 - 2\sqrt{40} < x < 20 + 2\sqrt{40}$
(B) Các đáp án đều sai
(C) $20 - 2\sqrt{30} < x < 20 + 2\sqrt{30}$
(D) $15 - 2\sqrt{30} < x < 15 + 2\sqrt{30}$

Lời giải. Đáp án đúng (B).

Ma trận của dạng toàn phương với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 5 \\ a & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ a & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 30a - 105$

Để ω xác định dương thì $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0,$ hay:

$$\begin{cases} 4 - a^2 > 0 \\ -a^2 + 30a - 105 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2 \\ 15 - 2\sqrt{30} < a < 15 + 2\sqrt{30} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không có giá trị a để ω xác định dương □

Câu 19. Biết biểu thức tọa độ của dạng toàn phương đối với cơ sở trực chuẩn không gian Euclid ba chiều là:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

Khi đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao, ta được dạng toàn phương chính tắc là:

A $\omega(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

B $\omega(y) = 3y_2^2 + 3y_3^2$

C $\omega(y) = 2y_2^2 + 2y_3^2$

D $\omega(y) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$

Lời giải. Đáp án đúng B.

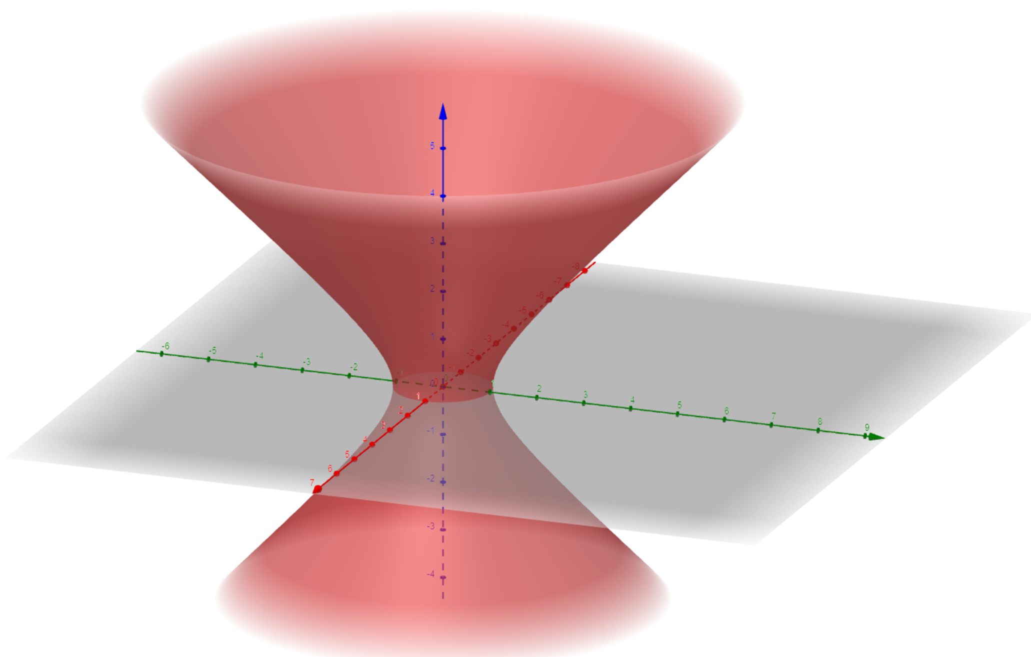
Ma trận của dạng toàn phương trên đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Xét phương trình: $det(A - \lambda I) = 0$ hay $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-3)^2 = 0$

Ta tìm được hai trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ (bội 2)

$\Rightarrow$ Dạng toàn phương chính tắc: $\omega(y) = 3y_2^2 + 3y_3^2$ □

Câu 20. Mặt bậc hai sau có tên gọi là:



A Paraboloid - hyperbolic

B Elipsoid

C Paraboloid - Eliptic

D Hyperboloid 1 tầng

Lời giải. Đáp án đúng D.

Dễ thấy phương trình của mặt bậc hai đó là: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$. Đây là dạng chính tắc của mặt Hyperboloid 1 tầng □
