CÔNG THỨC CƠ BẢN GT2 NN2

Phần 1: Hàm nhiều biến số

1. Giới hạn

- Đặt y = kx. Nếu $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x;kx)$ có giá trị phụ thuộc vào k thì giới hạn này không tồn tại.

- Sử dụng n.lí kẹp: Nếu$\begin{cases} a \le f(x;y) \le F(x;y) \\ F(x;y) \to a \end{cases}$ thì $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f\,(x;y) = a$

2. Tính liên tục

$\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0) \to f(x;y)\ liên\ tục\ tại\ (x_0;y_0)$

3. Đạo hàm riêng

- Tổng quát:

$$f'_x(x_0;y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x;y_0) - f(x_0;y_0)}{x - x_0}$$

$$f'_y(x_0;y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0;y) - f(x_0;y_0)}{y - y_0}$$

- Đạo hàm riêng theo x ta cứ coi các biến còn lại là hằng số và đạo hàm bình thường.

4. Vi phân toàn phần

- Tổng quát: z = f(x;y)

$$d^{(n)}z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial x}dy\right)^n f$$

VD: Vi phân cấp 1: $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Vi phân cấp 2: $d^2z = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2$

- Ứng dụng phép tính vi phân tính gần đúng:

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y$$

5. Đạo hàm hàm ẩn

- F(x;y) xác định hàm ẩn y = y(x) thì:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

- F(x;y;z) xác định hàm ẩn z=z(x;y) thì

$$\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \end{cases}$$

6. Khai triển Taylor tại (x_0;y_0)

- Tổng quát:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0;y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^{(n)}f(x_0;y_0)$$

Thường thì đề bài sẽ chỉ cho đến vi phân cấp 2, từ vi phân cấp 3 trở đi = 0

$$\rightarrow f(x;y) = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy$$
$$+\frac{1}{2}\left(f''_{x^2}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + f''_{y^2}(x_0;y_0)\right)$$

Thay dx = $(x-x_0)$; dy=$(y-y_0)$; $dx^2=(x-x_0)^2$; $dy^2=(y-y_0)$

$$\rightarrow f(x;y) = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}f''_{x^2}(x_0;y_0)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}f''_{y^2}(x_0;y_0)(y-y_0)$$

Rút gọn => Kết luận

Note: Khai triển Maclaurin = Khai triển Taylor tại (0;0)

7. Cực trị hàm nhiều biến

$z = z(x;y).\text{ Đặt } \begin{cases} A = z''_{x^2} \\ B = z''_{xy} \\ C = z''_{y^2} \end{cases}$

- B1: Tính $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \textit{Các điểm tới hạn } M_i$

- B2: Tại các điểm M_i đó tính $B^2 - AC$

$+ \textit{ Nếu } B^2 - AC < 0 \textit{ thì } z(x;y) \textit{ đạt cực trị tại } M_i \textit{ đang xét}$

$\begin{cases} A > 0 \rightarrow z(x;y) \textit{ đạt cực tiểu tại } M_i \textit{ đang xét} \\ A < 0 \rightarrow z(x;y) \textit{ đạt cực đại tại } M_i \textit{ đang xét} \end{cases}$

$+ \textit{ Nếu } B^2 - A > 0 \textit{ thì } z(x;y) \textit{ không đạt cực trị tại } M_i \textit{ đang xét}$

$+ \textit{ Nếu } B^2 - AC = 0 \textit{ thì chưa kết luận được gì}$

Trường hợp này phải sử dụng đến định nghĩa. Cụ thể:

$\textit{Tính } d^2z(M_i) \textit{ tại } M_i \textit{ đang xét.} \begin{cases} d^2z(M_i) < 0 \textit{ trong lân cận } M_i \rightarrow M_i \textit{ là điểm cực đại} \\ d^2z(M_i) > 0 \textit{ trong lân cận } M_i \rightarrow M_i \textit{ là điểm cực tiểu} \\ d^2z(M_i) \textit{ đổi dấu trong lân cận } M_i \rightarrow M_i \textit{ ko là cực trị} \end{cases}$

- B3: Kết luận

8. Cực trị hàm ẩn

Tương tự như cực trị hàm nhiều biến nhưng xét thêm F = 0

Hàm ẩn z=z(x;y) xác định từ F(x;y;z)=0

- B1: Tính $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F = 0 \end{cases} \rightarrow \textit{Được các điểm dừng } M_i \textit{ ứng với } z_i$

- B2: Tương tự cực trị hàm nhiều biến tính vi phân cấp 2
- B3: Kết luận

9. Cực trị có điều kiện

Bài toán: Tìm cực trị của hà z=z(x;y) với x;y là các biến thỏa mãn g(x;y)=0

- Nếu từ g(x;y) rút y=y(x) dễ dàng thì chỉ cần thay vào hàm z=z(x;y) => Bài toán trở thành cực trị hàm 1 biến
- Phương pháp Lagrange: Sử dụng khi không rút y=y(x) từ g(x;y)

Ở đây lấy một ví dụ sẽ dễ hình dung hơn

VD: Tìm cực trị hàm số z=x+y với đk $x^2+y^2=1$

- Xét hàm Lagrange:

$$g(x;y;\lambda) = x + y + \lambda\,(x^2 + y^2 - 1)$$

$g'_x = 1 + 2\lambda x \rightarrow x = -\dfrac{1}{2\lambda}$

$g'_y = 1 + 2\lambda y \rightarrow y = -\dfrac{1}{2\lambda}$

$Có\ x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$Ta\ được\ 2\ điểm\ dừng \begin{cases} M_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ứng\ với\ \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ M_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ứng\ với\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$Ta\ có\ d^2g = .. = 2\lambda\,(dx^2 + dy^2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow d^2g > 0 \rightarrow M_1\ là\ cực\ tiểu\ có\ đk, z_{CT} = -\sqrt{2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow d^2g > 0 \rightarrow M_2\ là\ cực\ đại\ có\ đk, z_{CĐ} = \sqrt{2} \end{cases}$$