

**GIẢI TÍCH I****BÀI 6****§11. CÁC LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ****• Đặt vấn đề****I. Hàm số  $y = f(x)$** **1) Điểm uốn**

**Định nghĩa.** Điểm  $I(c; f(c))$  là điểm uốn của đồ thị hàm số  $y = f(x) \Leftrightarrow$  là điểm phân chia phần lồi, lõm của đồ thị hàm số

**Cách tìm.** Tìm  $(c; f(c))$  sao cho  $f''(x)$  đổi dấu khi  $x$  biến thiên qua  $x = c$ .

**2) Tiệm cận**

**Định nghĩa.** •  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị  $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

•  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị  $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \rho(f(x), ax + b) = 0$ .

Khi đó ta có  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

Khi  $a = 0$  ta có tiệm cận ngang

**Ví dụ 1.** Tìm các tiệm cận

a)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ,

b)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$ ,

c)  $y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right)$ ,

d)  $y = x e^{\frac{2}{x}} + 1$

e)  $y = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}, & |x| > 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$

**Ví dụ 2.** Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$  ( $x = \pm 2$ ,  $y = 3x$  phải ;  $y = -3x$  trái)

b)  $y = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$  ( $x = \pm 1$ ,  $y = 2x$  phải ;  $y = -2x$  trái)

c)  $y = \frac{x^2 \operatorname{arccot} x}{x + 1}$  ( $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $y = \pi x + 1 - \pi$ )

d)  $y = \frac{x^2 \operatorname{arccot} x}{1 - x}$  ( $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $y = -\pi x - 1 - \pi$ )

**3. Lược đồ khảo sát đồ thị.**

a) Tập xác định

b) Chiều biến thiên: tăng giảm, cực trị, lồi lõm, tiệm cận, bảng biến thiên

c) Đồ thị

**Ví dụ 3.**  $y = \frac{4x^3 + 1}{x^4}$

**Ví dụ 4.**  $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

**Ví dụ 5.**  $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

**Ví dụ 6.**  $y = \ln(1 + e^{-x})$

## II. Đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$

Tương tự như  $y = f(x)$ , chỉ khác là khảo sát gián tiếp  $y$  theo  $x$  qua biến trung gian  $t$ , và chú ý

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

**Ví dụ 1.**  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

**Ví dụ 2.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$

**Ví dụ 3.**  $x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0$

**Ví dụ 4. a)** Cho  $y = f(x)$ , ở đó  $\begin{cases} x = 3t + 2t^3 \\ y = te^{t^2} \end{cases}$ , tính  $f'(x), f''(x)$

$$(f' = \frac{e^{t^2}}{3}, f'' = \frac{2 + e^{t^2}}{9(1 + 2t^2)})$$

**b)** Cho  $y = f(x)$ , ở đó  $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$ , tính  $f'(x), f''(x)$

$$(f' = 2(1 - e^t), f'' = \frac{-2e^t}{1 + e^t})$$

**c** Cho  $y = f(x)$ , ở đó  $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 3t^4 + 2t^2 \end{cases}$ , tính  $f'(x), f''(x)$

$$(f' = 4t, f'' = \frac{4}{3t^2 + 1})$$

**d** Cho  $y = f(x)$ , ở đó  $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$ , tính  $f'(x), f''(x)$

$$(f' = \frac{5(t^2 - 1)}{3}, f'' = \frac{10t}{9(t^2 + 1)})$$

**Ví dụ 5 .** Tìm các tiệm cận

$$a) \begin{cases} x = \frac{t}{t^3 - 1} \\ y = \frac{-2t^2}{t^3 - 1} \end{cases} \quad (y = -2x - \frac{2}{3})$$

$$b) \begin{cases} x = \frac{-t}{t^3 + 1} \\ y = \frac{3t^2}{t^3 + 1} \end{cases} \quad (y = 3x - 1)$$

**III. Đường cong cho trong hệ tọa độ cực**

**1) Hệ tọa độ cực.** Hệ gồm điểm  $O$ , trục  $Ox$  gọi là hệ tọa độ cực

$$M(r; \varphi), r = |\overline{OM}|, 0 \leq r < \infty, \varphi = (Ox; \overline{OM}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

**Ví dụ 1.**

$$a) \varphi = \frac{\pi}{2} \quad b) r = \cos \varphi \quad c) r = \sin \varphi \quad d) r = \frac{1}{\cos \varphi} \quad e) r = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Liên hệ với hệ tọa độ Descartes:

$$(r; \varphi) \rightarrow (x; y), x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

$$(x; y) \rightarrow (r; \varphi), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \text{ lấy } \varphi: \sin \varphi \text{ cùng dấu với } y.$$

**Chú ý.** Trong hệ tọa độ cực suy rộng ta có  $-\infty < r < \infty, -\infty < \varphi < +\infty$ , khi  $r_1 < 0$  thì định nghĩa  $(r_1; \varphi) = (-r_1; \varphi + \pi)$

**2. Luyện đề khảo sát đường cong  $r = f(\varphi)$** 

a) Tìm tập xác định

b) Chiều biến thiên: Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn, chiều biến thiên, cực trị, bảng biến thiên,  $\tan V = \frac{r}{r'}$ , ở đó  $V$  là góc dương giữa  $\overline{OM}$  và vector chỉ phương của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm  $M$ .

c) Đồ thị

**Ví dụ 1.**  $r = a(1 + \cos \varphi), a > 0$

**Ví dụ 2.**  $r = a \sin 3\varphi, a > 0$

**Ví dụ 3.**  $r = a \sin 2\varphi, a > 0$

**Ví dụ 4.**  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0.$

**Ví dụ 5.**  $r = a(1 + 2\cos \varphi), a > 0$

**Ví dụ 6.**  $r = a \sin n\varphi, n \in \mathbb{N}, a > 0$

**Ví dụ 7.**  $r = a \cos n\varphi, n \in \mathbb{N}, a > 0$

**HAVE A GOOD UNDERSTANDING!**