GIẢI TÍCH I
BÀI 11

§4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (TT)

II. Ứng dụng hình học

1. Tính diện tích hình phẳng

a) Đường cong cho trong toạ độ Descarter

+) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$

$$S = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$$

+) $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$

$$S = \int_c^d \left| g_1(y) - g_2(y) \right| dy$$

Ví dụ 1. Tính diện tích giới hạn bởi các đường:

a) $y = x(x-1)(x-2)$ và trục Ox

b) $y = x^2$ và $y = \dfrac{x^3}{3}$

c) $x = y^2(y-1)$ và trục Oy

d) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$

e) $x^2 + y^2 \le 8$, $y \ge \dfrac{x^2}{2}$

f) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$

b) Đường cong cho dưới dạng tham số

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, không kín. Khi đó $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left| y(t)\, x'(t) \right| dt$

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $0 \le t \le T$, kín, giới hạn miền nằm bên trái. Khi đó

$$S = -\int_0^T y(t)\, x'(t)\, dt = \int_0^T x(t)\, y'(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x(t)\, y'(t) - x'(t)\, y(t) \right] dt$$

Ví dụ 2. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

b) Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $y \ge 0$

c) Astroide: $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$

d) Cardioide: $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

e) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$

f) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$

g) Lá Descarter: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

c) Đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

Khi đó có $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$

Ví dụ 3. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $r = R$

b) $r = a\cos 2\varphi$ (hoa hồng 4 cánh)

c) $r = a\sin 3\varphi$ (hoa hồng 3 cánh)

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (cardioide)

e) $r^2 = a^2\sin 4\varphi$

f) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, miền chứa điểm $\left(\dfrac{a}{2}; 0\right)$

g) $r = 2a\cos 3\varphi$, $r \geq a$

2. Tính thể tích

a) Thể tích vật thể có tiết diện thẳng góc với Ox với diện tích $S(x)$ là hàm liên tục, $a \leq x \leq b$ là $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,dx$

Tương tự nếu vật thể có tiết diện thẳng góc với Oy với diện tích $S(y)$, $c \leq y \leq d$ thì ta có $V = \displaystyle\int_c^d S(y)\,dy$

b) Vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox có thể tích là $V = \pi\displaystyle\int_a^b y^2(x)\,dx$

Tương tự khi quay hình $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy có thể tích là $V = \pi\displaystyle\int_c^d x^2(y)\,dy$

– Khi quay $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Oy tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = 2\pi\displaystyle\int_a^b xy(x)\,dx$

c) Khi quay $r = r(\varphi)$, $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$ quanh trục cực tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$

Ví dụ 4. Tính thể tích vật thể

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

c) Quay $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ quanh trục Ox

d) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}$, $z = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 2$

f) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$

g) $z = x^2 + 2y^2$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$

h) Quay một nhịp của đường xicloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ quanh trục Oy; Ox và $y = 2a$.

i) Khi quay hình $y = \sqrt{x}\,\text{arccot}\, x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi \ln 2}{2}\right)$$

k) Khi quay hình $y = \sqrt{x}\arctan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$$\left(\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi \ln 2}{2}\right)$$

3. Tính độ dài cung

a) $\overset{\frown}{AB}$: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, $y'(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, khi đó có $s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$

b) $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, khi đó có $s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$

c) $\overset{\frown}{AB}$: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, khi đó có $s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$

Ví dụ 5. Tính độ dài đường cong

a) $x^2 + y^2 = R^2$

b) $y^2 = x^3$ từ $(0\,;\,0)$ đến điểm có hoành độ $x = 4$.

c) $r = a(1 + \cos\varphi)$

d) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$

e) $y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$

f) Tìm chu vi của tam giác cong giới hạn bởi Ox, $y = \ln\cos x$ và $y = \ln\sin x$

g) $x = t + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$ $\quad(8 - 4\sqrt{2})$

h) $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \le x \le \ln 2$ $\quad(\ln(2 + \sqrt{3}))$

i) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^6 \\ y = 4 - \dfrac{1}{2}t^4 \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt[4]{8}$ $\quad\left(\dfrac{26}{3}\right)$

k) $\begin{cases} x = 2t - \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ $\quad$ **(8)**

l) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2t + \cos 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ $\quad$ **(8)**

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

a) $y = f(x)$, $a \le x \le b$ quay quanh trục Ox, $f'(x)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

+) Tương tự, $x = x(y)$, $c \le y \le d$ quay quanh trục Oy, $x'(y)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

b) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$ quay quanh trục Ox

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

Tương tự, nếu quay quanh trục Oy

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

c) $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ quay quanh trục cực

$$\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Ví dụ 6. Tính diện tích tròn xoay

a) $y = \tan x$, $0 \le x \le \pi/4$ quay quanh trục Ox

b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

c) $r = 2R\sin\varphi$ quay quanh trục cực

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ quay quanh trục cực

e) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ quay quanh trục Ox ; Oy

f) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a$ quay quanh trục Ox

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

h) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ quay quanh Oy; quay quanh $y = x$

i) Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ quay quanh trục Oy

($12\pi^2$)

Have a good understanding!