Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$ (1)

Giải: +) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ (1) là chuỗi số dương.

+) Có: $0 < \frac{2n+1}{n^2+1} \sim \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ khi $n \to \infty$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ phân kì (do $\alpha = 1$) $\Rightarrow$ (1) phân kì theo tiêu chuẩn so sánh.

Câu 2: giải PTVP: $ydx - (x+1)dy = 0$ (1)

+) Xét $x \neq -1;\ y \neq 0$ ta có: $ydx = (x+1)dy$

$\Rightarrow \frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dy}{dy}$

$\Rightarrow \ln|x+1| = \ln|y| + \ln C \quad (C>0)$

$\Rightarrow x+1 = C.y$ là NTQ của (1)

+) Xét $x = -1$; $y = 0$ là nghiệm kì dị của (1)

Câu 3: Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n^2+1}$ (1)

Giải: +) (1) là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{n+1}{2n^2+1} > 0 \quad \forall n \geq 1$

+) Xét $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}$ có $f'(x) = \frac{-2x^2-4x+1}{(2x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x \geq 1$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$

Mà $f(n) = a_n \Rightarrow \{a_n\}$ dương giảm về 0

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2+1}$ hội tụ theo định lí Leibnitz

Câu 4: giải PTVP: $2xydx + (x^2-3y^2)dy = 0$ (1)

Giải: Xét $\begin{cases} P(x,y) = 2xy \\ Q(x,y) = x^2-3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2x \\ Q'_x = 2x \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x$

$\Rightarrow$ (1) là PTVP tuyến tính có nghiệm tổng quát là:

$$\int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = C$$

$$\Rightarrow \int_0^x 0\,dt + \int_0^y (x^2-3t^2)\,dt = C \Rightarrow (x^2t - t^3)\Big|_0^y = C \Rightarrow x^2y - y^3 = C$$

Câu 5: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ (1)

+) TXĐ: $x \in R$

giải: +) (1) là chuỗi luỹ thừa với $a_n = \frac{n!}{n^n}$

+) BKHT: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\Rightarrow$ Chuỗi hội tụ với $|x| < e \Rightarrow -e < x < e$

+) Tại $x = e$ thì (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} . e^n$ (2)

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{e^n . n!} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > 1$

Vì $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ và $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \dots > u_1 = \frac{1!}{1^1} e^1 = e \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ (2) phân kì (vi phạm điều kiện cần)

+) Tại $x = -e$ thì (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(-1)^n . e^n$ (3)

Do $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} e^n \neq 0$ (theo ý trên) $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$

$\Rightarrow$ (3) phân kì (vi phạm điều kiện cần)

+) MHT của (1) là: $(-e;e)$

Câu 6: giải PTVP: $\frac{1}{y'} - \frac{3}{y}x = -y$ (1)

giải: +) Ta có: $\frac{1}{y'} - \frac{3}{y}x = -y \Rightarrow x' - \frac{3}{y}x = -y$ (2) là PTVP tuyến tính có $p(y) = \frac{-3}{y}$; $q(y) = -y$

+) (2) có NTQ là: $x = e^{-\int p(y)dy}\left[C + \int q(y) e^{\int p(y)dy} dy\right]$

$\Rightarrow x = e^{-\int \frac{-3}{y}dy}\left[C + \int (-y) . e^{\int \frac{-3}{y}dy} dy\right]$

$= y^3\left[C + \int -y . \frac{1}{y^3} dy\right] = y^3\left(C + \frac{1}{y}\right) = Cy^3 + y^2$

Câu 7: Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin:

$$y = \frac{\arctan(x^2)}{x}$$

Giải: Ta có: $\arctan(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{4n-2}}{2n-1}$ $|x| \leq 1$

$$\Rightarrow y = \frac{\arctan(x^2)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{4n-3}}{2n-1} \quad |x| \leq 1;\ x \neq 0$$

Câu 8: Tính tổng của chuỗi hàm số: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!} = S$

Giải: +) Với $x = 0 \Rightarrow S = 0$.

+) Với $x > 0$:

Ta có: $\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y \in R$

$$\Rightarrow \frac{\sin y}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \quad y \in R \setminus \{0\}.$$

Đặt $y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{(2n+1)!} = S$

+) Với $x < 0$:

Ta có: $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$$e^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} = 1 - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \dots - \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad y \in R$$

$$\Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n+1)!} \quad y \in R \setminus \{0\}$$

Đặt $y = \sqrt{-x} \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{-x}} - e^{-\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{(2n+1)!} = S$

Như vậy: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & , x > 0 \\ \frac{e^{\sqrt{-x}} - e^{-\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} & , x < 0 \end{cases}$$

Câu 9: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{x}$

Giải: Đặt $a_n(x_0) = \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{x_0}$

+) $x_0 \le 0$: $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0)$ nếu có tồn tại thì khác 0

$\Rightarrow$ chuỗi phân kì (vi phạm ĐK cần)

+) $x_0 > 0$:

Ta có: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e \Rightarrow a_n(x_0) > 0 \ \forall n \ge 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ là CS dương

Lại có: $a_n(x_0) = \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{x_0} = \left(e - e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\right)^{x_0}$

$$\Rightarrow a_n(x_0) = \left[e\left(1 - e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n - 1}\right)\right]^{x_0} \sim e^{x_0}\cdot\left[-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n + 1\right]^{x_0} \text{ khi } n\to\infty$$

$$\Rightarrow a_n(x_0) \sim e^{x_0}\left[\left(\frac{-1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot n + 1\right]^{x_0} \sim \frac{e^{x_0}}{(2n)^{x_0}} \text{ khi } n\to\infty$$

Theo tiêu chuẩn so sánh: để $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ hội tụ thì

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{(2n)^{x_0}}$ hội tụ $\Leftrightarrow x_0 > 1$

+) Vậy MHT của chuỗi hàm là: $(1; +\infty)$

Câu 10: Tìm $\lim_{x\to\infty} y(x)$ biết $y' + \frac{1}{x}\cdot y = e^{-x^4}$ (1)

giải: (1) là PTVP tuyến tính với $p(x) = \frac{1}{x}$; $q(x) = e^{-x^4}$ có NTQ

$$y(x) = e^{-\int_1^x p(t)\,dt}\left[y(1) + \int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt\right]$$

Do $\int_1^\infty p(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_1^{t\to\infty} = \lim_{t\to\infty}\ln t - \ln 1 = \infty$

$\Rightarrow e^{-\int_1^x p(t)\,dt} \to 0$ khi $x\to\infty$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\int_1^x p(t)\,dt}\left[y(1) + \int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt}{e^{\int_1^x p(t)\,dt}}$$

- Nếu $\lim_{x\to\infty} \int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt = \text{const} \Rightarrow L = 0$

- Nếu $\lim_{x\to\infty} \int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt = \infty$

$$\Rightarrow L \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\int_1^x q(t)e^{\int_1^t p(u)\,du}\,dt\right]'}{\left(e^{\int_1^x p(t)\,dt}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{q(x)\cdot e^{\int_1^x p(u)\,du}}{e^{\int_1^x p(t)\,dt}\cdot p(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{q(x)}{p(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^4}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^4}} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$