Chương 3
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2024

Chương 3: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Chương 3 giới thiệu cho các bạn sinh viên về một dạng cấu trúc đại số rất phổ biến là không gian véc tơ, một tập hợp với 2 phép toán cộng và nhân ngoài với "đủ tốt" xung quanh chúng ta như các ma trận, đa thức, hàm số,....

Nội dung Chương 3 bao gồm:

1. Khái niệm không gian véc tơ
2. Không gian véc tơ con
3. Hệ véc tơ
4. Cơ sở và tọa độ

1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Không gian véc có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực như toán học, vật lý, khoa học máy tính và kỹ thuật. Dưới đây là một vài các ứng dụng của không gian véc tơ:

Ứng dụng

- Trong ngành điều khiển tự động và robot, không gian véc tơ được sử dụng để mô tả các trạng thái và hành động của robot, thiết lập các khái niệm như không gian trạng thái và không gian hành động.
- Xử lý ảnh và âm thanh: Trong xử lý ảnh và âm thanh, không gian véc tơ được sử dụng để biểu diễn dữ liệu như hình ảnh và tín hiệu âm thanh. Các phép toán trong không gian véc tơ giúp xử lý, nén và trích xuất thông tin từ dữ liệu này.
- Máy học và học máy: Trong các thuật toán máy học và học máy, không gian véc tơ thường được sử dụng để biểu diễn dữ liệu đầu vào và các mô hình học máy. Véc tơ đặc trưng của dữ liệu thường được sử dụng để huấn luyện các mô hình dự đoán và phân loại.
- Mật mã học: Trong mật mã học, không gian véc tơ được sử dụng để biểu diễn các khái niệm như không gian khóa và không gian văn bản mã hóa.
- Kinh tế học: Trong lý thuyết kinh tế và tài chính, không gian véc tơ có thể được sử dụng để mô hình hóa các biến số và mối quan hệ giữa chúng.

Khái niệm không gian véc tơ

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu các khái niệm của không gian véc tơ, mô hình toán học trong thực tế.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra khái niệm của các đối tượng là không gian véc tơ

Các nội dung chính gồm:

1.1 Định nghĩa không gian véc tơ

1.2 Các ví dụ

1.3 Tính chất của không gian véc tơ

1.1. Định nghĩa không gian véc tơ

Cho K là tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ hoặc tập hợp các số phức $\mathbb{C}$. Ta nói tập hợp V là một không gian véc tơ trên trường K, hay một K-không gian véc tơ, nếu V được trang bị một phép toán hai ngôi (gọi là phép cộng), ký hiệu $(+)$ và một phép nhân vô hướng của K, ký hiệu (.) thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. Tính giao hoán của phép cộng:$\forall u, v \in V$ ta có $u + v = v + u$;
2. Tính kết hợp của phép cộng:$\forall u, v, w \in V$ ta có $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. Tồn tại trong V một phần tử không, ký hiệu là θ (gọi là véc tơ không) thỏa mãn:$\forall u \in V$ ta có $u + \theta = \theta + u = u$;
4. $\forall u \in V$ luôn tồn tại một phần tử đối (gọi là véc tơ đối), ký hiệu là $-u$ thỏa mãn: $u + (-u) = (-u) + u = \theta$;
5. $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in K$ ta có $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
6. $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$ ta có $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$ ta có $(\alpha.\beta)u = \alpha.(\beta u)$;
8. $\forall u \in V$ ta có $1.u = u$.

Các nhận xét

- Các phần tử θ trong điều kiện (3) và phần tử $-u$ trong điều kiện (4) là duy nhất.
- Các phần tử của V được gọi là véc tơ được ký hiệu bởi các chữ La tinh nhỏ như $u, v, w, \ldots$ Các phần tử của trường K được gọi là các vô hướng và ký hiệu là $h; k; \ldots$ hoặc các chữ Hy Lạp nhỏ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- Nếu $K = \mathbb{R}$ thì ta gọi V là không gian véc tơ thực, còn nếu $K = \mathbb{C}$ thì ta gọi V là không gian véc tơ phức.
- Ta định nghĩa phép trừ véc tơ bằng công thức sau:$u - v = u + (-v)$.
- Luật phân phối đối với hiệu:$(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.
- **Quy ước:** Nếu nói đơn thuần là không gian véc tơ, ta hiểu là không gian véc tơ thực.

1.2. Các ví dụ

1. Cho $V = K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in K\}$ với các phép toán như sau: $\forall u = (x_1, x_2, ..., x_n), v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thì $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ và $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ là một K-không gian véc tơ.
2. Tập hợp những véc tơ tự do trong mặt phẳng với những phép toán cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với một số thực mà chúng ta đã biết trong chương trình toán phổ thông là một không gian véc tơ thực.
3. Tập hợp $M(m, n, K)$ với các phép toán cộng ma trận và nhân ma trận với một số tạo thành một không gian véc tơ trên K.
4. Tập hợp $K[x]$ các đa thức một biến với hệ số trên trường K cùng với phép toán cộng đa thức và nhân đa thức với một số K tạo thành một không gian véc tơ trên K.
5. Với n là một số nguyên dương, ta đặt tập hợp $P_n[x] = \{f = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n|a_i \in \mathbb{R}\}$ là tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n . Trong đó 2 phép toán là cộng hai đa thức (cộng các hệ số cùng bậc) và nhân đa thức với một số thực (nhân số đó vào tất cả các hệ số của đa thức). Kiểm tra dễ dàng các điều kiện ta thu được là không gian véc tơ thực.
6. Gọi $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn$[a, b]$. Định nghĩa các phép toán trong như sau: Nếu $f(t), g(t) \in C[a, b]$ thì ta đặt $(f + g)(t) = f(t) + g(t); (k.f)(t) = k.f(t)$. và cũng thu được một không gian véc tơ thực

1.3. Các tính chất cơ bản của không gian véc tơ

1. $\forall$ véc tơ $v \in V$ ta luôn có $0.v = \theta$.
2. $\forall$ véc tơ $v \in V$ ta luôn có $-v = (-1).v$.
3. $\forall$ véc tơ $v \in V$ và $k \in K$ ta luôn có $(-k).v = k.(-v) = -kv$.
4. $\forall$ véc tơ $k \in K$ ta luôn có $k.\theta = \theta$.
5. Nếu $ku = kv$ và $k \neq 0$ thì $u = v$.
6. Nếu $ku = hu$ và $u \neq \theta$ thì $h = k$.

2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

Cho trước một không gian véc tơ V, ta xét các tập hợp con U của V mà các phép toán trên V có thể được coi là phép toán trên U (phép toán cảm sinh) và khi đó ta sẽ có khái niệm không gian véc tơ con.

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm không gian véc tơ con.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một tập là không gian véc tơ con hay không.

Nội dung

2.1 Định nghĩa không gian véc tơ con

2.2 Ví dụ về không gian véc tơ con

2.1. Định nghĩa không gian véc tơ con

- Cho V là một K-không gian véc tơ và W là một tập con khác rỗng của V. Ta nói tập hợp W đóng kín đối với các phép toán trên V nếu thỏa mãn: $\forall w_1, w_2 \in W; k \in K$ ta luôn có $w_1 + w_2 \in W; kw_1 \in W$.
- Khi đó các phép toán trên V sẽ trở thành các phép toán trên W, gọi là các phép toán cảm sinh từ V lên W.
- Nếu W cùng hai phép toán cảm sinh tạo thành một K-không gian véc tơ thì W gọi là K không gian véc tơ con của V.

Một câu hỏi đặt ra là các phép toán cảm sinh này trên V thì thỏa mãn 8 điều kiện, nhưng trên W thì sao?. Ta có thể chứng minh rằng khi đó các phép toán cảm sinh sẽ thỏa mãn cả 8 điều kiện của khái niệm không gian véc tơ. Nên ta có định lý sau:

Định lý (tiêu chuẩn không gian véc tơ con): W là không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi W đóng kín đối với hai phép toán của V.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 1: Cho không gian véc tơ $V = \mathbb{R}^3$.Khi đó

- $U_1 = \{(x; y; z) | x + y + z = 0\} \subset V$. Khi đó U_1 đóng kín với hai phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_1 là không gian véc tơ con của V.
- $U_2 = \{(x; y; z) | x + y + z = 1\} \subset V$. Khi đó U_2 không đóng kín với hai phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như $2.(1; 0; 0) = (2; 0; 0) \notin U_2$ nên U_2 không là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{(x; y; z) | x.y.z = 0\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với hai phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như $(1; 0; 0) + (0; 1; 1) = (1; 1; 1) \notin U_3$ nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.
- Cho trước A là ma trận kích thức $m \times 3$ và $U_4 = \{u = (x; y; z) | A.u^T = 0\} \subset V$. Khi đó U_4 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_4 là không gian véc tơ con của V. Tổng quát cho A là ma trận kích thức $m \times n$ ta luôn có tập nghiệp của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A.x = 0$ luôn là một không gian véc tơ con của không gian $\mathbb{R}^n$.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 2: Cho không gian véc tơ $V = \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$.Khi đó

- $U_1 = \{A \in V | \det(A) = 0\} \subset V$. Khi đó U_1 không đóng kín với 2 phép toán trên V, ví dụ như

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_1; A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

  Nên U_1 không là không gian véc tơ con của V.

- $U_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a = 0\} \subset V$. Khi đó U_2 đóng kín với 2 phép toán trên V nên U_2 là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{A \in V | \det(A) \neq 0\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với 2 phép toán trên V, ví dụ như

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_3; 0.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3.$$

  Nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.

2.2. Các ví dụ về không gian véc tơ con

Ví dụ 3: Cho không gian véc tơ $V = P_n[x], n \geq 3$. Khi đó

- $U_1 = P_2[x] \subset V$. Khi đó U_1 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ nên U_1 là không gian véc tơ con của V.
- $U_2 = \{p(x) \in V | p(1) = 0\} \subset V$ ($p(x)$ có nghiệm $x_0 = 1$). Khi đó U_2 đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên V nên U_2 là không gian véc tơ con của V.
- $U_3 = \{\text{các đa thức bậc 2}\} \subset V$. Khi đó U_3 không đóng kín với 2 phép toán cộng, nhân với vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ ví dụ như
$$(-x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 5x - 3) = 7x - 2 \notin U_3$$
nên U_3 không là không gian véc tơ con của V.

Không gian véc tơ con

Nhận xét:

- Véc tơ không θ của V luôn nằm trong mọi không gian con. Tập chỉ gồm duy nhất véc tơ không là không gian con bé nhất của mọi không gian véc tơ.
- Cho trước các không gian véc tơ con $W_1, W_2, ...$, khi đó ta có:
- Giao $W_1 \cap W_2$ của hai không gian con lại là không gian con. Đây là không gian con lớn nhất nằm trong W_1 và W_2. Nhận xét này cũng đúng cho giao tùy ý các không gian con.
- Hợp $W_1 \cup W_2$ của hai không gian con chưa chắc đã là không gian con. Ví dụ $W_1 = \{(x;0)|x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $W_2 = \{(0;y)|y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ thì $(1,0);(0;1) \in W_1 \cup W_2$ nhưng $(1;0)+(0;1) \notin W_1 \cup W_2$.
- Tổng $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ của các không gian con lại là không gian véc tơ con, *tổng các không gian con*. Đây là không gian con bé nhất chứa W_1 và W_2 (Nhận xét vẫn đúng cho trường hợp nhiều các không gian véc tơ). Đặc biệt khi có thêm điều kiện $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, ta có khái niệm tổng trực tiếp của 2 không gian con, ký hiệu $W_1 \oplus W_2$.

3. HỆ VÉC TƠ

Cho trước một không gian véc tơ V, ta xét các tập hợp con S của V là một số các véc tơ, có thể chưa là không gian véc tơ con. Ta thực hiện các phép toán trên các véc tơ của S và thu được các tổ hợp tuyến tính của S. Có điều gì đặc biệt với các tổ hợp này?

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, hệ sinh, ...của hệ các véc tơ.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một hệ véc tơ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính, là hệ sinh hay không.

Nội dung

3.1 Tổ hợp tuyến tính

3.2 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

3.3 Hệ sinh

3.4 Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa: Cho V là một K-không gian véc tơ và $u_1, u_2, ..., u_n$ là các véc tơ của V và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các vô hướng của K. Khi đó véc tơ $w = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$ gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$.

Ví dụ: Cho $V = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1; 0; 2; 1), u_2 = (3; 1; 0; -1), u_3 = (4; 1; 1; 2) \in V$. Khi đó $w = u_1 + 2u_2 - u_3 = (3; 1; 1; -3)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.
Nếu xét véc tơ $u = (1; 1; 1; 1) = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ thì tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases}$$

Do hệ vô nghiệm nên u không phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.
Nhận xét:

- Véc tơ không θ luôn là một tổ hợp tuyến tính của các hệ véc tơ khác (hệ số biểu diễn là 0).
- Tổng của hai hay nhiều tổ hợp tuyến tính lại thu được một tổ hợp tuyến tính.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

- **Định nghĩa:** Hệ véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ của không gian véc tơ V trên trường K được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các vô hướng $x_1, x_2, ..., x_n$ của K thỏa mãn không phải tất cả đều bằng 0 sao cho: $x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = \theta$.
  Hệ véc tơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính.
- **Mở rộng:** Cho S là tập các véc tơ của V (có thể hữu hạn hoặc vô hạn). Hệ S gọi là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu trong S có hệ các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ phụ thuộc tuyến tính. Hệ S không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính.
- **Nhận xét:**
  - Hệ các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại ít nhất một hệ số x_i nào đó trong số $x_1, x_2, ..., x_n$ khác không. Giả sử đó là x_n. Khi đó,

$$u_n = -\frac{x_1}{x_n}u_1 - \frac{x_2}{x_n}u_2 - \cdots - \frac{x_{n-1}}{x_n}u_{n-1}.$$

    Suy ra, nếu các véc tơ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại ít nhất một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.
  - Các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu khi $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n = \theta$ sẽ kéo theo $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Nói cách khác, hệ phương trình véc tơ $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdot + x_nu_n = \theta$ có nghiệm duy nhất tầm thường là $(0, 0, \ldots, 0)$.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ: Trong không gian véc tơ $V = \mathbb{R}^4$, xem xét hệ véc tơ $B = \{u_1 = (1;2;3;4),$ $u_2 = (-1;2;-2;1), u_3 = (0;4;1;5)\}$ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?
Lời giải Xét $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \theta$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ta có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Do $r(A) = 2 < 3$ (số ẩn) nên hệ có nghiệm không tầm thường. Do đó hệ phụ B phụ thuộc tuyến tính.
Chú ý: Khi có các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, ta thành lập ma trận A từ các véc tơ (có thể theo hàng hoặc cột vì đều có hạng như nhau), so sánh hạng ma trận $r(A)$ và số véc tơ:

$r(A) <$ số véc tơ, thì hệ phụ thuộc tuyến tính.

$r(A) =$ số véc tơ, thì hệ độc lập tuyến tính.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

1. Điều kiện cần và đủ để hệ các véc tơ phụ thuộc tuyến tính là một trong các véc tơ đó là tổ hợp của các véc tơ còn lại.
2. Trong hệ véc tơ nếu có chứa véc tơ θ thì hệ véc tơ này phụ thuộc tuyến tính.
3. Nếu một phần của họ các véc tơ phụ thuộc tuyến tính thì tất cả các véc tơ của hệ đó đều phụ thuộc tuyến tính.
4. Một hệ độc lập tuyến tính thì một phần của hệ đó cũng độc lập tuyến tính.
5. Hệ một véc tơ $\{v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq \theta$.

3.3. Hệ sinh

Các định nghĩa:

- Cho S là một tập con của không gian véc tơ V. Ta có tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính tạo thành một không gian véc tơ con của V. Ta gọi không gian con này là bao tuyến tính của S và ký hiệu là $span(S)$.
- Hệ S được gọi là hệ sinh của V nếu $span(S) = V$.
- Ta gọi S là hệ sinh tối tiểu nếu nó không chứa tập con thực sự cũng là hệ sinh.
- Không gian véc tơ có một hệ sinh hữu hạn được gọi là không gian hữu hạn sinh.
- Quy ước khi $S = \emptyset$ thì $span(S) = \{\theta\}$

3.3. Hệ sinh

Ví dụ:

- Cho $V=\mathbb{R}^n$ thì hệ B gồm các véc tơ $e_1=(1;0;0;\ldots,0), e_2=(0;1;0;\ldots,0),\ldots,\ e_n=(0;0;\ldots,0;1)$ làm thành một hệ sinh của V
- Cho $V=P_n[x]$ thì hệ $B_1=\{1,x,x^2,...,x^n\}$ và B_2 gồm các véc tơ $u_1=1, u_2=1+x, u_3=1+x+x^2,\ldots, u_{n+1}=1+x+\cdots+x^n$ là các hệ sinh của V.
- Chứng minh rằng hệ 3 vectơ $u_1=(1;1;2), u_2=(2;1;0), u_3=(3;-1;2)$ là hệ sinh của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$.
  Lời giải: Lấy véc tơ $u=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ bất kỳ và xét $u=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$ tương đương với hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_4 & =b_1\\ x_1 & +x_2 & -x_3 & =b_2\\ 2x_1 & & +2x_3 & =b_3. \end{cases}$$
  Ta có ma trận hệ số $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ khả nghịch. Nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó hệ $\{u_1,u_2,u_3\}$ là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

3.3. Hệ sinh

Nhận xét:

- Khi có hệ véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, ta thành lập ma trận A từ các véc tơ trong hệ (có thể theo hàng hoặc cột vì đều có hạng như nhau), so sánh hạng ma trận $r(A)$ và n:

  $r(A) < n$, thì hệ không phải là hệ sinh.
  $r(A) = n$, thì hệ là hệ sinh.

- $Span(S)$ là không gian véc tơ con bé nhất của V chứa hệ véc tơ S.
- S là hệ sinh, $S \subset S'$ thì S' cũng là hệ sinh.
- S là hệ sinh, thực hiện biến đổi sơ cấp trên hệ S để thu được hệ S' thì S' cũng là hệ sinh. Lưu ý rằng ta luôn có $Span(S) = Span(S')$
- S là hệ sinh tối tiểu của $Span(S)$ khi và chỉ khi S là hệ độc lập tuyến tính.

4. CƠ SỞ VÀ TỌA ĐỘ

Khái niệm cơ sở có thể được hiểu với nhiều định nghĩa tương đương như hệ sinh độc lập tuyến tính, hệ độc lập tối đại, hệ sinh tối tiểu. Chúng đều được hiểu như là một "hệ quy chiếu" trong không gian véc tơ để mỗi véc tơ khi đối chiếu vào đều cho một tọa độ duy nhất.

Mục tiêu

- Kiến thức: Nắm được khái niệm cơ sở và tọa độ.
- Kĩ năng: Thao tác kiểm tra một hệ véc tơ là cơ sở hay không? Tính toán tọa độ của các véc tơ theo cơ sở, công thức đổi tọa độ khi thay đổi cơ sở.

Nội dung

4.1 Khái niệm cơ sở và tọa độ

4.2 Ma trận tọa độ của hệ véc tơ theo cơ sở

4.3 Ma trận chuyển sơ sở và công thức đổi tọa độ

4.1. Khái niệm cơ sở và tọa độ

Cho V là không gian véc tơ và S là một hệ các tơ của V. Khi đó các khẳng định tương đương:

1. S là hệ sinh độc lập tuyến tính.
2. S là hệ sinh tối tiểu (S không có tập con thực sự nào là hệ sinh).
3. S là hệ độc lập tuyến tính tối đại (S không là tập con thực sự của một hệ độc lập tuyến tính nào khác).
4. Mọi véc tơ của V đều biểu diễn một cách duy nhất qua hệ S.

Hệ S thỏa mãn một trong các khẳng định tương đương trên gọi là một cơ sở của không gian véc tơ V .

Nhận xét:

- Bất kỳ hệ sinh nào của V cũng chứa một cơ sở của V.
- Bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào cũng có thể bổ sung các vectơ để trở thành cơ sở.
- Cho V là không gian véc tơ hữu hạn sinh với $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ là một hệ sinh của V và $T = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính của V. Khi đó $n \le m$.
- Cho V là không gian véc tơ hữu hạn sinh. Khi đó mọi cơ sở S của V đều có số phần tử hữu hạn.
- Cho V là không gian véc tơ với $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $T = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là hai cơ sở của V. Khi đó $m = n$.
- **Định nghĩa:** Số phần tử của một cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn chiều gọi là chiều của không gian V, ký hiệu $\dim(V)$.

Các ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^n$, khi đó E gồm các véc tơ $e_1 = (1; 0; 0; \ldots, 0), e_2 = (0; 1; 0; \ldots, 0), \ldots, e_n = (0; 0; \ldots, 0; 1)$ làm thành một cơ sở của V. Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Ta có $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. Cho $V = P_n[x]$ thì hệ E gồm các véc tơ $u_1 = 1; u_2 = x; u_3 = x^2; \ldots; u_{n+1} = x^n$ là một cơ sở của V. Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của $P_n[x]$,do đó ta có $\dim(P_n[x]) = n + 1$.
3. Cho $V = \mathbf{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$, khi đó hệ B gồm các véc tơ $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\dim(\mathbf{Mat}(2, 2, \mathbb{R})) = 4$. làm thành một cơ sở của V. Do đó
4. Cho $V = \mathbb{R}^n$ và hệ B gồm m véc tơ $u_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), u_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots,$ $u_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$. Do $dim(\mathbb{R}^n) = n$ nên B là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $m = n$ và ma trận $A = (a_{ij})$ là một ma trận khả nghịch.

Chú ý: Cho V là một không gian hữu hạn chiều, $dim(V) = n$. Khi đó:

- Mọi hệ vectơ có nhiều hơn n vectơ đều phụ thuộc tuyến tính.
- Mọi hệ có n vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của V.
- Mọi hệ có n vectơ là hệ sinh của V đều là cơ sở của V.
- Mọi hệ độc lập tuyến tính có k vectơ đều có thể bổ sung thêm $(n - k)$ vectơ để lập thành một cơ sở của V.

Tọa độ của véc tơ theo cơ sở

- **Định nghĩa:** Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V (có tính thứ tự các véc tơ trong cơ sở). Khi đó mọi véc tơ v bất kỳ của V đều biểu diễn duy nhất qua B là: $v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$. Ta định nghĩa bộ hệ số biểu diễn có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gọi là tọa độ của véc tơ v theo cơ sở B. Nếu viết bộ tọa độ này dưới dạng cột ta dùng ký hiệu $[v]_B$ hay

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- **Chú ý:** Khi xem xét tọa độ của véc tơ theo cơ sở B, thì cơ sở B có xét đến tính thứ tự của các véc tơ trong cơ sở. Khi đổi thứ tự các véc tơ trong cơ sở ta được cơ sở khác, và tọa độ các véc tơ khi đó cũng sẽ thay đổi theo.

Ví dụ về tọa độ

1. Cho $V = \mathbb{R}^n$ và E cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Véc tơ $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ có tọa độ cũng vẫn là bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hay
$$[v]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
2. Cho $V = P_n[x]$ và E cơ sở chính tắc của $P_n[x]$. Véc tơ $v = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ có tọa độ với cơ sở E là bộ $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ hay
$$[v]_E = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ddots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
3. Cho $V = Mat(2, 2, \mathbb{R})$ và cơ sở B gồm các véc tơ $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$
$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Véc tơ $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ có tọa độ đối với cơ sở B là bộ (a, b, c, d).

Ví dụ về tọa độ

4. Cho $V = \mathbb{R}^3$ và hệ B gồm 3 véc tơ $u_1 = (1;1;2), u_2 = (2;-1;3), u_3 = (0;2;1)$. Do
$v = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ nên B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Với véc tơ $v = (7;3;13)$, ta xét hệ phương trình $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ thu được $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ nên

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cho $V = P_3[x]$ và hệ B gồm 4 véc tơ $u_1 = 1, u_2 = 1 + x, u_3 = 1 + x + x^2, u_4 = 1 + x + x^2 + x^3$ là một cơ sở của V. Với véc tơ $v = 3 + 5x - 3x^2 + 4x^3$, ta xét hệ phương trình $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ thu được $x_1 = -2, x_2 = 8, x_3 = -7, x_4 = 4$ nên

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- **Chú ý:** Trong trường hợp tổng quát, việc tìm tọa độ của một véc tơ theo một cơ sở luôn đưa đến việc xem xét một hệ Crame (có nghiệm duy nhất).

4.2. Ma trận tọa độ của hệ véc tơ theo một cơ sở, hạng của hệ véc tơ

Cho V là một không gian véc tơ với $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V.

- **Định nghĩa:**
  - Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của V, khi đó ma trận $A = (a_{ij})$ kích thước $n \times m$ xác định bởi các cột lần lượt là $[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_m]_B$ gọi là ma trận của hệ véc tơ S đối với cơ sở B, ký hiệu là $[S]_B$.
  - Hạng của ma trận A được gọi là hạng của hệ véc tơ S, đây cũng chính là số véc tơ độc lập tuyến tính nhiều nhất của hệ S, ký hiệu $r(S)$. Do đó $r(S) = r(A) = \dim(Span(S))$.
- **Ví dụ:** Trong không gian $P_3[x]$, tìm hạng của hệ véc tơ sau
  $B = \{u_1 = 2 + x + x^2, u_2 = x - x^2 + 2x^3, u_3 = 4 + x + 3x^2 - 2x^3\}$.
  Lời giải: Xét $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ là cơ sở chính tắc của $P_3[x]$. Ta có

$$[B]_E = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Do đó ta có $r(B) = r(A) = 2$ (sinh viên tìm hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp trên hàng, cột của ma trận A). Đây cũng chính là số chiều của không gian $Span(B)$.

4.3. Ma trận chuyển cơ sở và công thức đổi tọa độ

- **Định nghĩa:** Giả sử trong không gian vectơ V, ngoài cơ sở $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ còn có một cơ sở khác là $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Khi đó ma trận tọa độ $[B_2]_{B_1}$ của hệ B_2 theo cơ sở B_1 được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2, ký hiệu $C_{B_1 \to B_2}$.
- **Tính chất:**
  - Ma trận chuyển cơ sở $C_{B_1 \to B_2}$ luôn là một ma trận khả nghịch.
  - Ma trận chuyển cơ sở $C_{B_2 \to B_1} = (C_{B_1 \to B_2})^{-1}$.
  - Với 3 cơ sở của V là B_1, B_2, B_3 ta có

$$C_{B_1 \to B_3} = C_{B_1 \to B_2}.C_{B_2 \to B_3}$$

- **Công thức đổi tọa độ**

  Cho không gian vectơ V, với hai cơ sở là $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ và $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Khi đó với véc tơ v bất kỳ của V ta có công thức sau

$$[v]_{B_2} = (C_{B_1 \to B_2})^{-1}.[v]_{B_1}$$

hay

$$[v]_{B_2} = C_{B_2 \to B_1}.[v]_{B_1}.$$

4.3. Ma trận chuyển cơ sở và công thức đổi tọa độ

Ví dụ: Cho $V = \mathbb{R}^3$ và hai cơ sở $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$ và $B = \{v_1 = (1;2;1), v_2 = (-1;1;3), v_3 = (3;2;-1)\}$.

(a) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ E sang B.

(b) Áp dụng công thức đổi tọa độ để tìm tọa độ của véc tơ $w = (2;9;10)$ đối với cơ sở B.

Lời giải

(a) Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là

$$C_{E\to B} = [B]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$[w]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} .[w]_E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$