Hàm số nhiều biến số

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

16/03/2020

Nội dung

1. Các định nghĩa
2. Giới hạn và liên tục của hàm số nhiều biến số
3. Đạo hàm và vi phân
4. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Nội dung

Các khái niệm cơ bản

Không gian $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \; x_i \in \mathbb{R}\}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ứng với điểm M hay vectơ, viết

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Cho hai điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $N(y_1, y_2, ..., y_n)$. Khoảng cách

$$d(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \text{khoảng cách Euclide.}$$

Định nghĩa

Cho điểm $M_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. ε-lân cận của M_0 là

$$S_\varepsilon(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n : d(M, M_0) < \varepsilon\}.$$

Lân cận của điểm M_0 là một tập chứa một ε-lân cận nào đó của M_0.

Các khái niệm cơ bản

Cho tập A, điểm M là điểm trong của A nếu tồn tại $S_\varepsilon(M) \subset A$.

Điểm M là điểm biên của A nếu với mọi $\varepsilon > 0$ thì $S_\varepsilon(M)$ chứa điểm thuộc A và chứa điểm không thuộc A.

Khái niệm tập đóng, tập mở, tập bị chặn.

Định nghĩa

Miền là một tập mở và liên thông.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng.

Định nghĩa

Ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

là một hàm số của n biến số xác định trên D. D gọi là miền xác định của hàm số f, các biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là các biến số độc lập.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng.

Định nghĩa

Ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

là một hàm số của n biến số xác định trên D. D gọi là miền xác định của hàm số f, các biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là các biến số độc lập.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tương ứng với một điểm $M \in \mathbb{R}^n$ có các tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Hàm số $f(x)$ có thể viết dưới dạng $u = f(M)$.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$, khác rỗng.

Định nghĩa

Ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

là một hàm số của n biến số xác định trên D. D gọi là miền xác định của hàm số f, các biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là các biến số độc lập.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ tương ứng với một điểm $M \in \mathbb{R}^n$ có các tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Hàm số $f(x)$ có thể viết dưới dạng $u = f(M)$.

Với hàm số hai biến số $n = 2$, hoặc hàm số ba biến số $n = 3$, ta dùng ký hiệu $z = f(x, y)$, hay $u = f(x, y, z)$, tương ứng.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Ví dụ Hàm số

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{hàm số hai biến số,}$$

$$u = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^4 + z^6}} + \sin(x - y) + 1 \quad \text{hàm số ba biến số.}$$

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Ví dụ Hàm số

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{hàm số hai biến số,}$$
$$u = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^4 + z^6}} + \sin(x - y) + 1 \quad \text{hàm số ba biến số.}$$

Miền xác định Cho hàm số $u = f(M)$. Miền xác định của u là tập hợp tất cả các điểm M sao cho biểu thức $f(M)$ có nghĩa.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Ví dụ Hàm số

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{hàm số hai biến số},$$
$$u = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^4 + z^6}} + \sin(x - y) + 1 \quad \text{hàm số ba biến số}.$$

Miền xác định Cho hàm số $u = f(M)$. Miền xác định của u là tập hợp tất cả các điểm M sao cho biểu thức $f(M)$ có nghĩa.

Ví dụ

- Miền xác định của hàm số $z = (x + 2y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là hình tròn đóng tâm $O(0; 0)$ bán kính 1.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Ví dụ Hàm số

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{hàm số hai biến số,}$$
$$u = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^4 + z^6}} + \sin(x - y) + 1 \quad \text{hàm số ba biến số.}$$

Miền xác định Cho hàm số $u = f(M)$. Miền xác định của u là tập hợp tất cả các điểm M sao cho biểu thức $f(M)$ có nghĩa.

Ví dụ

- Miền xác định của hàm số $z = (x + 2y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là hình tròn đóng tâm $O(0; 0)$ bán kính 1.
- Hàm số $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^4 + z^6}} + \arctan(x + z)$ có miền xác định là $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R.
- Hàm số $z = x^2 + y^2$ biểu diễn mặt paraboloit.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R.
- Hàm số $z = x^2 + y^2$ biểu diễn mặt paraboloit.
- Hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ biểu diễn mặt nón, phía trên mặt phẳng Oxy.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R.
- Hàm số $z = x^2 + y^2$ biểu diễn mặt paraboloit.
- Hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ biểu diễn mặt nón, phía trên mặt phẳng Oxy.
- Hàm số $z = x^2 + 3y^2$ biểu diễn mặt paraboloit eliptic.

Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, f(x, y))$, với $(x, y) \in D$. Đó là một mặt cong trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

- Đồ thị của hàm số $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là nửa trên mặt cầu tâm O, bán kính R.
- Hàm số $z = x^2 + y^2$ biểu diễn mặt paraboloit.
- Hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ biểu diễn mặt nón, phía trên mặt phẳng Oxy.
- Hàm số $z = x^2 + 3y^2$ biểu diễn mặt paraboloit eliptic.
- Hàm số $z = 3x^2 - y^2$ biểu diễn mặt paraboloit hypebolic.

Nội dung

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0,$$

tức là $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ (hội tụ theo từng tọa độ).

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0,$$

  tức là $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ (hội tụ theo từng tọa độ).

- Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là ℓ khi M dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận V, dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \ell.$$

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0,$$

  tức là $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ (hội tụ theo từng tọa độ).

- Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là ℓ khi M dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận V, dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \ell.$$

  Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = \ell.$$

Định nghĩa tương đương

- Hàm số $f(M)$ có giới hạn ℓ khi M dần tới M_0 nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \quad \text{sao cho } |f(M) - \ell| < \varepsilon \quad \text{với} \quad d(M_0, M) < \delta.$$

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa tương đương

- Hàm số $f(M)$ có giới hạn ℓ khi M dần tới M_0 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sao cho } |f(M) - \ell| < \varepsilon \quad \text{với} \quad d(M_0, M) < \delta.$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa tương đương

- Hàm số $f(M)$ có giới hạn ℓ khi M dần tới M_0 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sao cho } |f(M) - \ell| < \varepsilon \quad \text{với} \quad d(M_0, M) < \delta.$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

  Ví dụ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty, \qquad \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \arctan(x-2y) = \frac{\pi}{2}.$$

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa tương đương

- Hàm số $f(M)$ có giới hạn ℓ khi M dần tới M_0 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sao cho } |f(M) - \ell| < \varepsilon \quad \text{với} \quad d(M_0, M) < \delta.$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

  Ví dụ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty, \qquad \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \arctan(x-2y) = \frac{\pi}{2}.$$

- Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số.

Định nghĩa tương đương

- Hàm số $f(M)$ có giới hạn ℓ khi M dần tới M_0 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sao cho } |f(M) - \ell| < \varepsilon \quad \text{với} \quad d(M_0, M) < \delta.$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

  Ví dụ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty, \qquad \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \arctan(x-2y) = \frac{\pi}{2}.$$

- Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số.

Ví dụTìm giới hạn $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (Đề thi 2010).

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2}.$$

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ và $(x'_n, y'_n) \to (x_0, y_0)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n)$

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ và $(x_n', y_n') \to (x_0, y_0)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n')$
- Hoặc chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Đưa về các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số.
- Phương pháp đánh giá, dùng nguyên lý kẹp.

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ và $(x'_n, y'_n) \to (x_0, y_0)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n)$
- Hoặc chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

Ví dụ Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ với $f(x, y) = \ln(x^2) - \ln(x^2 + 2y^2)$.

Chú ý

Các giới hạn lặp

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\ln\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)=0,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\ln\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)=-\infty.$$

Chú ý

Các giới hạn lặp

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\ln\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)=0,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\ln\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)=-\infty.$$

Bài tậpTìm các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\arctan y}{x^2+2y^2},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\ln(2y+1)-y\arctan x}{y\sin x}.$$

Hàm số liên tục

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Hàm số liên tục

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

Hàm số liên tục

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

- Hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \to 0 \quad \text{khi} \quad \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$$

Hàm số liên tục

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

  Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

- Hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \to 0 \quad \text{khi} \quad \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$$

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Hàm số liên tục

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon \text{ với mọi cặp điểm } M, M' \in D \text{ mà } d(M, M') < \delta.$$

Hàm số liên tục

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sao cho

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon \text{ với mọi cặp điểm } M, M' \in D \text{ mà } d(M, M') < \delta.$$

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục.

Hàm số liên tục

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon \text{ với mọi cặp điểm } M, M' \in D \text{ mà } d(M, M') < \delta.$$

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục.

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2 \neq 0, \\ a & \text{khi } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Hàm số liên tục

Ví dụ 2 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y)}{x^4+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hàm số liên tục

Ví dụ 2 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y)}{x^4+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Với mọi a, hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$, hàm f không liên tục tại điểm $(0,0)$.

Hàm số liên tục

Ví dụ 2 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y)}{x^4+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Với mọi a, hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$, hàm f không liên tục tại điểm $(0,0)$.

Ví dụ 3 Xét tính liên tục của hàm số

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ví dụ 2 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y)}{x^4+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Với mọi a, hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$, hàm f không liên tục tại điểm $(0,0)$.

Ví dụ 3 Xét tính liên tục của hàm số

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hàm số $g(x,y)$ liên tục tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$. Hàm g liên tục tại điểm $(0,0)$ nếu $\alpha > 1$ và gián đoạn (không liên tục) tại điểm $(0,0)$ nếu $\alpha \leq 1$.

Nội dung

Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền D, điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền D, điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.
Đạo hàm riêng của f đối với biến x tại M_0, ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, được định nghĩa như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x f}{\triangle x},$$

trong đó $\triangle_x f = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$ gọi là số gia riêng của hàm $f(x, y)$ theo x tại điểm (x_0, y_0).

Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền D, điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.
Đạo hàm riêng của f đối với biến x tại M_0, ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, được định nghĩa như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x f}{\triangle x},$$

trong đó $\triangle_x f = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$ gọi là số gia riêng của hàm $f(x, y)$ theo x tại điểm (x_0, y_0).
Tương tự, *đạo hàm riêng của f đối với biến y*,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y f}{\triangle y}.$$

Đạo hàm riêng

Chú ý

Khi tính đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số theo biến số nào thì xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số ấy, các biến khác xem như không đổi, rồi tính đạo hàm theo biến ấy, như tính đối với hàm số một biến số.

Đạo hàm riêng

Chú ý

Khi tính đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số theo biến số nào thì xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số ấy, các biến khác xem như không đổi, rồi tính đạo hàm theo biến ấy, như tính đối với hàm số một biến số.

Ví dụ 1 Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^3 + 1)$, $g(x, y, z) = x^2 y + y^z \arctan(x + y)$.

Chú ý

Khi tính đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số theo biến số nào thì xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến số ấy, các biến khác xem như không đổi, rồi tính đạo hàm theo biến ấy, như tính đối với hàm số một biến số.

Ví dụ 1 Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x,y) = x\ln(x^2+y^3+1)$, $g(x,y,z) = x^2y + y^z\arctan(x+y)$.

Ví dụ 2 Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \in D$. Biểu thức

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0.

Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \in D$. Biểu thức

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0.
Nếu như $\triangle f$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\triangle f = A \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle x + \beta \triangle y$$

trong đó A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, tức là khi $\triangle x \to 0$, $\triangle y \to 0$, thì ta nói hàm số z *khả vi* tại M_0.

Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \in D$. Biểu thức

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0.
Nếu như $\triangle f$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\triangle f = A \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle x + \beta \triangle y$$

trong đó A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, tức là khi $\triangle x \to 0$, $\triangle y \to 0$, thì ta nói hàm số z *khả vi* tại M_0.
Biểu thức $A \triangle x + B \triangle y$ được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x, y)$ tại M_0 và được kí hiệu là dz hay df

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Vi phân toàn phần

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Vi phân toàn phần

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú ý

Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì ta suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, tức là hàm số $f(x, y)$ liên tục tại M_0.

Vi phân toàn phần

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú ý

Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì ta suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, tức là hàm số $f(x, y)$ liên tục tại M_0.

Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vi phân toàn phần

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú ý

Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì ta suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, tức là hàm số $f(x, y)$ liên tục tại M_0.

Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hàm số có các đạo hàm riêng tại điểm $(0, 0)$, nhưng không liên tục tại điểm $(0, 0)$ và do đó không khả vi tại điểm $(0, 0)$.

Vi phân toàn phần

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại M_0.

Vi phân toàn phần

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại M_0.

Định lý

Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x, y)$ khả vi tại M_0 và

$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y.$$

Vi phân toàn phần

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại M_0.

Định lý

Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x, y)$ khả vi tại M_0 và

$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y.$$

Nếu x, y là các biến số độc lập thì $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, do đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Vi phân toàn phần

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại M_0.

Định lý

Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x, y)$ khả vi tại M_0 và

$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y.$$

Nếu x, y là các biến số độc lập thì $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, do đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Ví dụ Tìm vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$. Tính $df(1; 0)$.

Vi phân toàn phần

Công thức tính xấp xỉ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Vi phân toàn phần

Công thức tính xấp xỉ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ 1 (Đề thi 2010) Dùng vi phân toàn phần của hàm số để tính giá trị gần đúng của biểu thức

$$A = \sqrt{(3,04)^2 + (2,02)^3 - 1}.$$

Vi phân toàn phần

Công thức tính xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Ví dụ 1 (Đề thi 2010) Dùng vi phân toàn phần của hàm số để tính giá trị gần đúng của biểu thức

$$A = \sqrt{(3,04)^2 + (2,02)^3 - 1}.$$

Lời giải Xét hàm số $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3-1}$. Lấy điểm $(x_0,y_0) = (3;2)$ và $\Delta x = 0,04,\ \Delta y = 0,02$.

Vi phân toàn phần

Công thức tính xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Ví dụ 1 (Đề thi 2010) Dùng vi phân toàn phần của hàm số để tính giá trị gần đúng của biểu thức

$$A = \sqrt{(3,04)^2 + (2,02)^3 - 1}.$$

Lời giải Xét hàm số $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3-1}$. Lấy điểm $(x_0,y_0) = (3;2)$ và $\Delta x = 0,04,\ \Delta y = 0,02$.

Ví dụ 2 (Đề thi 2010) Tính giá trị gần đúng của các biểu thức

$$\text{a)}\quad A = e^{0,01}\sin(0,02) \qquad\qquad \text{b)}\quad B = (1,02)^{1,01}.$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Giả sử $F = f \circ \varphi$ là hàm số hợp của hai hàm số f và φ

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Định lý

Nếu f có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì tồn tại các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ và

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Giả sử $F = f \circ \varphi$ là hàm số hợp của hai hàm số f và φ

$$\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), \quad z = F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

Định lý

Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ và

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ta không phân biệt giữa F và f. Chẳng hạn có thể viết

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Ma trận Jacobi

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Ma trận Jacobi

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Xét ví dụ Cho hàm số hợp $z = (u^2 + 1)\sin(v)$, với $u = e^{x-y}$, $v = x^2 + y^2$.

Đạo hàm của hàm số hợp

Ma trận Jacobi

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Xét ví dụ Cho hàm số hợp $z = (u^2 + 1)\sin(v)$, với $u = e^{x-y}$, $v = x^2 + y^2$.

Nếu hàm $z = f(x, y)$ và $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của x (hàm một biến số đối với x), $z = f(x, y(x))$. Đạo hàm của hàm số này là

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Ma trận Jacobi

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Xét ví dụ Cho hàm số hợp $z = (u^2+1)\sin(v)$, với $u = e^{x-y}$, $v = x^2 + y^2$.

Nếu hàm $z = f(x,y)$ và $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của x (hàm một biến số đối với x), $z = f(x, y(x))$. Đạo hàm của hàm số này là

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Nếu hàm $z = f(x,y)$ và $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì z là hàm số hợp của t thông qua hai biến trung gian x, y, $z = f(x(t), y(t))$. Đạo hàm của hàm số này là

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t).$$

Vi phân toàn phần

Tính bất biến của vi phân cấp 1

Vi phân toàn phần

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Tính bất biến của vi phân cấp 1

Vi phân toàn phần

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Từ công thức đạo hàm của hàm số hợp

$$\begin{aligned}
dz &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.
\end{aligned}$$

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$.

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$.

Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một.

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$.

Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một.

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f''_{y^2}(x, y).$$

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$.

Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một.

Các đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f''_{y^2}(x, y).$$

Ví dụTính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số

$$z = \arctan(x^2 + y) + e^{x+2y} + xy^2.$$

Đạo hàm cấp cao

Định lý (Schwarz)

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ *hàm số* $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng* f''_{xy}, f''_{yx} *và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại* M_0 *thì* $f''_{xy} = f''_{yx}$ *tại* M_0*.*

Định lý (Schwarz)

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Ví dụ 1 Cho hàm số $z = y \sin \dfrac{y}{x}$. Tính

$$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}.$$

Đạo hàm cấp cao

Định lý (Schwarz)

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Ví dụ 1 Cho hàm số $z = y \sin \dfrac{y}{x}$. Tính

$$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}.$$

Ví dụ 2 Cho hàm số $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Tính $\Delta u := z''_{xx} + z''_{yy} + z''_{zz}$.

Định lý (Schwarz)

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Ví dụ 1 Cho hàm số $z = y \sin \dfrac{y}{x}$. Tính

$$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}.$$

Ví dụ 2 Cho hàm số $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Tính $\Delta u := z''_{xx} + z''_{yy} + z''_{zz}$.

Ví dụ 3 Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin^3 y}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Tính $f'_x(x, y)$ và $f''_{xy}(0, 0)$.

Vi phân cấp cao

Xét hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần

$$dz = f'_x dx + f'_y dy \quad \text{gọi là vi phân cấp 1 - là một hàm số hai biến số.}$$

Vi phân cấp cao

Xét hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần

$$dz = f'_x dx + f'_y dy \quad \text{gọi là vi phân cấp 1 - là một hàm số hai biến số.}$$

Vi phân toàn phần của hàm số dz nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của hàm z và được ký hiệu là d^2z. Vậy

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{yy}(dy)^2. \end{aligned}$$

Với giả thiết các hàm số f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, và do đó chúng bằng nhau, suy ra

$$d^2z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2 =: \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f.$$

Vi phân cấp cao

Xét hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Vi phân cấp n

$$d^n z = d(d^{n-1}x) =: \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

Vi phân cấp cao

Xét hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Vi phân cấp n

$$d^n z = d(d^{n-1}x) =: \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

Ví dụTìm vi phân cấp hai của các hàm số sau

$$z = \sqrt{x^2 + y}, \quad z = \arctan(x + 2y), \quad z = \frac{x^2}{x + y^2}.$$

Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

Cho phương trình liên hệ giữa hai biến số x, y

$$F(x, y) = 0,$$

xác định một hay nhiều hàm số ẩn của y theo x.

Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

Cho phương trình liên hệ giữa hai biến số x, y

$$F(x, y) = 0,$$

xác định một hay nhiều hàm số ẩn của y theo x.

Ví dụ

- $x^3 + y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^3}$.
- $x^5 + \cos x - 3 + e^{3y} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{3} \ln\left(3 - \cos x - x^5\right)$.
- $x^2 y^3 + \ln(x^2 + y^2 + 1) - \arctan(x + y) - y^2 = xy \Longrightarrow y = ?$

Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

Cho phương trình liên hệ giữa hai biến số x, y

$$F(x,y) = 0,$$

xác định một hay nhiều hàm số ẩn của y theo x.

Ví dụ

- $x^3 + y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^3}$.
- $x^5 + \cos x - 3 + e^{3y} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{3}\ln\left(3 - \cos x - x^5\right)$.
- $x^2y^3 + \ln(x^2 + y^2 + 1) - \arctan(x + y) - y^2 = xy \Longrightarrow y = ?$

Tương tự, phương trình

$$F(x,y,z) = 0$$

có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn z của các biến số x và y: $z = f(x,y)$.

Cho phương trình liên hệ giữa hai biến số x, y

$$F(x, y) = 0,$$

xác định một hay nhiều hàm số ẩn của y theo x.

Ví dụ

- $x^3 + y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^3}$.
- $x^5 + \cos x - 3 + e^{3y} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{3}\ln(3 - \cos x - x^5)$.
- $x^2y^3 + \ln(x^2 + y^2 + 1) - \arctan(x + y) - y^2 = xy \Longrightarrow y = ?$

Tương tự, phương trình

$$F(x, y, z) = 0$$

có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn z của các biến số x và y: $z = f(x, y)$.

Ví dụ

- $x^2y + xy^2 + \sin x + z^3 = 1 \Longrightarrow z = \sqrt[3]{1 - x^2y - xy^2 - \sin x}$.
- $\ln(x^2 + 1) + x\sin y + \sin(y + z) - z^2 = xyz \Longrightarrow z = ?$

Đạo hàm của hàm số ẩn

Định lý

Giả sử $F(x_0, y_0) = 0$. *Nếu hàm số* $F(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục ở lân cận điểm* $M_0(x_0, y_0)$ *và nếu* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Khi đó phương trình* $F(x, y) = 0$ *xác định một hàm số ẩn* $y = f(x)$ *trong một lân cận nào đó của* x_0 *thỏa mãn* $f(x_0) = y_0$ *và có đạo hàm*

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Đạo hàm của hàm số ẩn

Định lý

Giả sử $F(x_0, y_0) = 0$. *Nếu hàm số* $F(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục ở lân cận điểm* $M_0(x_0, y_0)$ *và nếu* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Khi đó phương trình* $F(x, y) = 0$ *xác định một hàm số ẩn* $y = f(x)$ *trong một lân cận nào đó của* x_0 *thỏa mãn* $f(x_0) = y_0$ *và có đạo hàm*

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Định lý

Giả sử $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. *Nếu hàm số* $F(x, y, z)$ *có các đạo hàm riêng liên tục ở lân cận điểm* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *và nếu* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. *Khi đó phương trình* $F(x, y, z) = 0$ *xác định một hàm số ẩn* $z = f(x, y)$ *trong một lân cận nào đó của* (x_0, y_0) *thỏa mãn* $f(x_0, y_0) = z_0$ *và có các đạo hàm riêng*

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Đạo hàm của hàm số ẩn

Ví dụ 1 (Đề thi 2005) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 + \ln y = x^2 e^y$. Tính $y'(0)$.

Đạo hàm của hàm số ẩn

Ví dụ 1 (Đề thi 2005) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 + \ln y = x^2 e^y$. Tính $y'(0)$.

Ví dụ 2 (Đề thi K55) Phương trình $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính dz(1;-1).

Ví dụ 1 (Đề thi 2005) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 + \ln y = x^2 e^y$. Tính $y'(0)$.

Ví dụ 2 (Đề thi K55) Phương trình $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính dz(1;-1).

Ta có

$$F(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + 3z^3 - (x + y)z = 0.$$

Đạo hàm của hàm số ẩn

Ví dụ 1 (Đề thi 2005) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 + \ln y = x^2 e^y$. Tính $y'(0)$.

Ví dụ 2 (Đề thi K55) Phương trình $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính dz(1;-1).

Ta có

$$F(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + 3z^3 - (x + y)z = 0.$$

Ví dụ 3 (Đề thi K52) Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z^3 - x^2 y + 2yz = 2xye^z$. Tính $z'_x(0; 2)$ và $z''_{xx}(0; 2)$.

Đạo hàm của hàm số ẩn

Ví dụ 1 (Đề thi 2005) Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $x^3 + \ln y = x^2 e^y$. Tính $y'(0)$.

Ví dụ 2 (Đề thi K55) Phương trình $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính dz(1;-1).

Ta có

$$F(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + 3z^3 - (x + y)z = 0.$$

Ví dụ 3 (Đề thi K52) Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z^3 - x^2 y + 2yz = 2xye^z$. Tính $z'_x(0; 2)$ và $z''_{xx}(0; 2)$.

Ví dụ 4 Phương trình $xe^{yz} = y + z + 1$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính $dz(0; 0)$.

Công thức khai triển Taylor

Công thức Taylor đối với hàm số $z = f(x, y)$

Công thức khai triển Taylor

Công thức Taylor đối với hàm số $z = f(x, y)$

Định lý

Giả sử hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n+1)$ liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Nếu điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n (x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y),$$

trong đó $0 < \theta < 1$.

Công thức khai triển Taylor

Công thức Taylor đối với hàm số $z = f(x, y)$

Định lý

Giả sử hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n+1)$ liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Nếu điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),$$

trong đó $0 < \theta < 1$.

Chứng minh

Chứng minh của định lý dựa trên công thức khai triển Taylor của hàm một biến số

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \le t \le 1.$$

Công thức khai triển Taylor

Chú ý

Nếu dùng cách biểu diễn tượng trưng vi phân cấp cao, ta có thể viết công thức Taylor như sau:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^k f(M_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^{n+1} f(M_1),$$

trong đó M_1 nằm trên đoạn thẳng nối M_0 với M.

Công thức khai triển Taylor

Chú ý

Nếu dùng cách biểu diễn tượng trưng vi phân cấp cao, ta có thể viết công thức Taylor như sau:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^k f(M_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^{n+1} f(M_1),$$

trong đó M_1 nằm trên đoạn thẳng nối M_0 với M.

Công thức số gia giới nội

Trong công thức Taylor ta cho $n = 1$, thu được **công thức số gia giới nội** sau

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y).$$

Nội dung

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Cực trị tự do

Cực trị tự do

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ *xác định trong một miền* D *và* $M_0(x_0, y_0) \in D$. *Ta nói rằng hàm số* $f(x, y)$ *đạt* cực trị *tại* M_0 *nếu với mọi điểm* M *trong lân cận nào đó của* M_0 *nhưng khác* M_0, *hiệu số* $f(M) - f(M_0)$ *có dấu không đổi.*

- *Nếu* $f(M) - f(M_0) > 0$ *trong một lân cận nào đó của* M_0 *thì* M_0 *được gọi là* điểm cực tiểu *của hàm số* f.
- *Nếu* $f(M) - f(M_0) < 0$ *trong một lân cận nào đó của* M_0 *thì* M_0 *được gọi là* điểm cực đại *của hàm số* f.

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Chúng ta dùng các ký hiệu sau

$$p = f'_x(M), q = f'_y(M), A = f''_{xx}(M), B = f''_{xy}(M), C = f''_{yy}(M).$$

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Chúng ta dùng các ký hiệu sau

$$p = f'_x(M), q = f'_y(M), A = f''_{xx}(M), B = f''_{xy}(M), C = f''_{yy}(M).$$

Điều kiện cần của cực trị

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Chúng ta dùng các ký hiệu sau

$$p = f'_x(M), q = f'_y(M), A = f''_{xx}(M), B = f''_{xy}(M), C = f''_{yy}(M).$$

Điều kiện cần của cực trị

Định lý

Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M_0)$, $q = f'_y(M_0)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không:

$$p = 0, \quad q = 0 \quad \text{tại } M_0.$$

Chúng ta dùng các ký hiệu sau

$$p = f'_x(M), q = f'_y(M), A = f''_{xx}(M), B = f''_{xy}(M), C = f''_{yy}(M).$$

Điều kiện cần của cực trị

Định lý

Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0 và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M_0),\ q = f'_y(M_0)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không:

$$p = 0, \quad q = 0 \quad \textit{tại } M_0.$$

Điểm tới hạn Điểm mà tại đó hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một p và q triệt tiêu hoặc tại đó p hoặc q không tồn tại được gọi là *điểm tới hạn*.

Định lý

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của* $M_0(x_0, y_0)$. *Giả sử tại* M_0 *ta có* $p = q = 0$. *Khi đó*

1. *Nếu* $B^2 - AC < 0$ *tại* M_0 *thì* $f(x, y)$ *đạt cực trị tại* M_0. *Đó là cực tiểu nếu* $A > 0$, *là cực đại nếu* $A < 0$.
2. *Nếu* $B^2 - AC > 0$ *tại* M_0 *thì* $f(x, y)$ *không đạt cực trị tại* M_0.

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Định lý

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của* $M_0(x_0, y_0)$*. Giả sử tại* M_0 *ta có* $p = q = 0$*. Khi đó*

1. *Nếu* $B^2 - AC < 0$ *tại* M_0 *thì* $f(x, y)$ *đạt cực trị tại* M_0*. Đó là cực tiểu nếu* $A > 0$*, là cực đại nếu* $A < 0$*.*
2. *Nếu* $B^2 - AC > 0$ *tại* M_0 *thì* $f(x, y)$ *không đạt cực trị tại* M_0*.*

Chú ý

Nếu $B^2 - AC = 0$ *thì chưa kết luận được điều gì về điểm* M_0*, nó có thể là cực trị, cũng có thể không. Trong trường hợp đó ta sẽ dùng định nghĩa để xét xem* M_0 *có phải là cực trị hay không bằng cách xét hiệu* $f(M) - f(M_0)$*, nếu nó xác định dấu trong một lân cận nào đó của* M_0 *thì nó là cực trị và ngược lại.*

Ví dụ 1 (Đề thi K55) Tìm cực trị của hàm số

$$z = xy(3 - x - y).$$

Ví dụ 1 (Đề thi K55) Tìm cực trị của hàm số

$$z = xy(3 - x - y).$$

Các điểm tới hạn: $(0;0), (0;3), (3;0), (1;1)$, trong đó $(0;0), (0;3), (3;0)$ không là điểm cực trị. Điểm $(1;1)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 1 (Đề thi K55) Tìm cực trị của hàm số

$$z = xy(3 - x - y).$$

Các điểm tới hạn: $(0;0), (0;3), (3;0), (1;1)$, trong đó $(0;0), (0;3), (3;0)$ không là điểm cực trị. Điểm $(1;1)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2 Tìm cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy.$$

Ví dụ 1 (Đề thi K55) Tìm cực trị của hàm số

$$z = xy(3 - x - y).$$

Các điểm tới hạn: $(0;0), (0;3), (3;0), (1;1)$, trong đó $(0;0), (0;3), (3;0)$ không là điểm cực trị. Điểm $(1;1)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2 Tìm cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy.$$

Ví dụ 3 Tìm cực trị của hàm số

$$z = 4xy - 2x^2 - y^4.$$

Ví dụ 1 (Đề thi K55) Tìm cực trị của hàm số

$$z = xy(3 - x - y).$$

Các điểm tới hạn: $(0;0), (0;3), (3;0), (1;1)$, trong đó $(0;0), (0;3), (3;0)$ không là điểm cực trị. Điểm $(1;1)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 2 Tìm cực trị của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy.$$

Ví dụ 3 Tìm cực trị của hàm số

$$z = 4xy - 2x^2 - y^4.$$

Ví dụ 4 (Đề thi TC hè 2010) Tìm cực trị của hàm số

$$z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$$