GIẢI ĐỀ CƯƠNG
ĐẠI SỐ

nhóm ngành 1

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn tài liệu "*Giải đề cương Đại số*" được sưu tầm và biên soạn lại với mục đích hỗ trợ các bạn sinh viên trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có nguồn tài liệu học tập chất lượng, phục vụ cho việc ôn tập cũng như luyện thi dễ dàng hơn ở học phần Đại số tuyến tính.

Cuốn tài liệu này được biên soạn lại bởi đội ngũ Tài Liệu HUST với các nguồn tài liệu:

- ✓ Đề cương Đại số tuyến tính – Viện toán ứng dụng và tin học
- ✓ Các tài liệu được chia sẻ trên group Hỗ trợ học tập đại cương – ĐHBKHN
- ✓ Các tài liệu được chia sẻ trên group BCORN – Hỗ trợ sinh viên Bách Khoa

Để có thể học tập hiệu quả hơn và có định hướng học tập rõ ràng hơn bạn có thể tham khảo khóa học Đại số hoặc các khóa học khác tại website: **Bcorn.org** (Trực thuộc phòng CTSV)

Trong quá trình nhóm biên soạn tài liệu cũng không thể tránh được hết tất cả những sai sót hay nhầm lẫn nên nhóm rất mong nhận được phản hồi của các bạn để tài liệu này càng hoàn thiện hơn, có ích hơn với các bạn sinh viên. Mọi đóng góp bạn có thể gửi cho nhóm qua các địa chỉ email: tailieuhustgroup@gmail.com

MỘT SỐ KÊNH THÔNG TIN CỦA TÀI LIỆU HUST

- Website: https://tailieuhust.com/

- Facebook: https://www.facebook.com/tailieuhust

- Discord: https://discord.com/invite/GKkhW3D9pq

- Telegram: https://t.me/+72guyAp_ewQwYTY1

- Youtube: https://www.youtube.com/channel/UCy4RUTy_FzQ1UhiklR9PVdw

MỤC LỤC

GIẢI ĐỀ CƯƠNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH NHÓM NGÀNH 1

CHƯƠNG I. TẬP HỢP – LOGIC – ÁNH XẠ - SỐ PHỨC

Bài 1: Lập bảng giá trị chân lý của các biểu thức mệnh đề sau

a) $[A \wedge (B \vee C)] \to C$

b) $[\bar{A} \wedge (B \vee C)] \wedge B$

Lời giải

a. Ta có bảng giá trị chân lý

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$[A \wedge (B \vee C)] \to C$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

b. Ta có bảng giá trị chân lý

A	B	C	$\bar{A}$	$B \vee C$	$\bar{A} \wedge (B \vee C)$	$[\bar{A} \wedge (B \vee C)] \wedge B$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Bài 2. (CK 20152) Cho p, q là các mệnh đề. Hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ có tương đương logic không? Vì sao?

Lời giải

Ta có bảng giá trị chân lý

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Từ bảng giá trị chân lý ta có thể kết luận hai mệnh đề trên là tương đương logic.

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.

b) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ và $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ không tương đương logic.

c) $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Lời giải

a. Ta có bảng giá trị chân lý

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(A \wedge B)$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$A \leftrightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

Vậy hai mệnh đề trên là tương đương logic

b. Giả sử A = B = C = 0. Khi đó

$A \rightarrow B$ = 1; $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ = 0

$B \rightarrow C$ = 1; $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ = 1

Vậy nên hai mệnh đề trên không tương đương logic.

c. Ta có bảng giá trị chân lý

A	B	$\overline{A}$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A \leftrightarrow B}$	$\overline{A} \leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Vậy hai mệnh đề trên tương đương logic.

Bài 4 (GK 20171). Cho các mệnh đề A, B và C thỏa mãn $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh rằng $A \rightarrow B$ là mệnh đề đúng.

Lời giải

Ta có: $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. (1)

Giả sử $A \rightarrow B$ là mệnh đề sai thì không mất tính tổng quát ta có: $A=1$ và $B=0$

$C=0 \Rightarrow A \vee C = 1$ và $B \vee C = 0 \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ sai (2)

$C=1 \Rightarrow A \wedge C = 1$ và $B \wedge C = 0 \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$ sai (3)

Từ (1), (2) và (3) ta thấy rằng giả sử trên là sai nên $A \rightarrow B$ là mệnh đề đúng.

Bài 5. Cho mệnh đề logic "Nếu 2020 là số lẻ thì nó chia hết cho 3". Hỏi mệnh đề là đúng hay sai? Giải thích?

Lời giải

Do 2020 chẵn nên 2020 là số lẻ là mệnh đề sai (giá trị chân lý bằng 0)

2020 chia hết cho 3 là mệnh đề sai (giá trị chân lý bằng 0)

Mà mệnh đề logic "Nếu 2020 là số lẻ thì nó chia hết cho 3" là một mệnh đề kéo theo nên đây là một mệnh đề đúng.

Bài 6. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số f là đơn ánh có thể được xác định bởi mệnh đề: "Với mọi x_1, x_2 thuộc tập R, nếu $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$ thì $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$". Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một hàm số không phải là đơn ánh.

Lời giải

Mệnh đề ban đầu: "$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ "

Mệnh đề phủ định: "$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2$ "

Như vậy để chứng minh 1 hàm số không là đơn ánh ta chỉ cần chỉ ra $\exists x_1, x_2$ mà $x_1 \neq x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$.

Bài 7. Giả sử $\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{g}(\mathrm{x})$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu các tập hợp sau: $\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \ \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0\}$, $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | \ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0\}$.Biểu diễn tập nghiệm phương trình sau qua hai tập hợp A, B :

a) $f(x).g(x) = 0$

b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

Lời giải

a. $f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $C = A \cup B$

b. $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $D = A \cap B$

Bài 8 (GK20141). Cho các tập hợp $A = [3;6), B = (1;5), C = [2;4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus C$.

Lời giải

$A = [3;6); B = (1;5); C = [2;4]$

$\Rightarrow A \cap B = [3;5) \Rightarrow (A \cap B) \setminus C = (4;5)$

Bài 9. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

b) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

c) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$ **(GK20151)**

Lời giải

a. $A\cap(B\setminus C)=A\cap(B\cap\bar{C})=A\cap B\cap\bar{C}$

$=(A\cap B)\setminus(A\cap C)=A\cap B\cap\overline{A\cap C}$
$=A\cap B\cap(\bar{A}\cup\bar{C})=(A\cap B\cap\bar{A})\cup(A\cap B\cap\bar{C})$
$=A\cap B\cap\bar{C}$ (do $A\cap\bar{A}=\varnothing$)

Vậy $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

b. $A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\bar{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})=A\cup B$.

Vậy $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

c. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}$

$(A\cap C)\setminus(B\cup D)=A\cap C\cap\overline{B\cup D}=A\cap C\cap(\bar{B}\cap\bar{D})=A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}.$

Vậy $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$.

Bài 10. Cho hai ánh xạ

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{x}\quad;\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{2x}{1+x^2}$$

a. Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, Tìm $g(\mathbb{R})$

b. Xác định ánh xạ h = $g\circ f$

Lời giải

a) + $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\ (\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\Rightarrow f$ là đơn ánh.

Do $\nexists x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ để $f(x)=\frac{1}{x}=0\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ không là toàn ánh.

$+g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow\frac{2x_1}{1+x_1^2}=\frac{2x_2}{1+x_2^2}$

Mà $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(2)=\frac{4}{5}$ nên $g(x)$ không là đơn ánh.

$g(3)\Leftrightarrow 2x=3x^2+3\Leftrightarrow 3x^2-2x+3=0$ (vô nghiệm) nên $g(x)$ không là toàn ánh.

+ Tìm $g(R)$

Ta có: $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{|2x|}{x^2+1}\le\frac{|2x|}{2|x|}=1$ (Cauchy)

Và $\forall a\in[-1;1]$: phương trình $2x=a\left(x^2+1\right)$ có nghiệm thực $\left(\Delta=4-4a^2\ge 0\right)$ nên $g(R)=[-1;1]$.

b. $g\circ f=g(f(x))=\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2x}{x^2+1}$

Bài 11. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f:X\to Y$

a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B); A,B\subset X$.

b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B); A,B\subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B); A,B\subset Y$

d) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B); A,B\subset Y$

e) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B); A,B\subset Y$

Lời giải

a) $+y\in f(A\cup B), f(x)=y$ thì $x\in A\cup B$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in A\\ x\in B\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y\in f(A)\\ y\in f(B)\end{array}\right.\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$ **(1)**

$+f(A)\subset f(A\cup B), f(B)\subset f(A\cup B)$

$\Rightarrow f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$ **(2)**

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(A)\cup f(B)=f(A\cup B)\forall A,B\subset X$.

b) + Ta có $A\cap B\subset A\Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)$

Tương tự $f(A\cap B)\subset f(B)$

Do đó $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

+ Ví dụ điều ngược lại là không đúng

Xét $f(x)=x^2, A=\{2\}, B=\{-2\}$

Khi đó $f(A \cap B) = \varnothing; f(A) \cap f(B) = \{4\}$.

c) $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \forall A, B \subset Y.$

d) $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$

e) $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Bài 12. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$, và $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \le x \le 3\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Lời giải

$f(x) = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	-3	-2	3
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	$+\infty$ ↘ -8	-9	↗ 16 $+\infty$

- $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

- $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$.

Nhìn vào bảng biến thiên $\Rightarrow f^{-1}(A) = [-2 - 2\sqrt{3}; -2 - \sqrt{6}] \cup [-2 + \sqrt{6}; -2 + 2\sqrt{3}]$.

Bài 13 (CK 20161). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$ và tập $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Lời giải

Ta xét $(x; y) \in A \Rightarrow f(x; y) = (x + y; x - y)$

Va $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 18$

Mặt khác, nếu $u^2 + v^2 = 18$ thì $\left(\dfrac{u + v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u - v}{2}\right)^2 = 9$

$\Rightarrow f(A)=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,||\, x^2+y^2=18\}$

Xét $f(u;v)=(u+v;u-v)\in A$

$\Rightarrow (u+v)^2+(u-v)^2=9 \Leftrightarrow u^2+v^2=4,5$

Và $u^2+v^2=4,5$ thì $f(u;v)\in A$

Do vậy nên $f^{-1}(A)=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2=4,5\}$.

Bài 14 (GK 20171). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x;y)=\left(x^2-y;x+y\right)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Lời giải

Xét $f\left(x_1;y_1\right)=f\left(x_2;y_2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2-y_1=x_2^2-y_2\\ x_1+y_1=x_2+y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\ x_1^2+x_1=x_2^2+x_2\end{cases}$

Ta có thể thấy $f(0;-1)=f(-1;0)=(1;-1)\Rightarrow f$ không là đơn ánh.

Bài 15. Cho tập $\mathbb{Z}_4=\{0;1;2;3\}$ được trang bị luật hợp thành như sau: với $a,b\in\mathbb{Z}_4$ ta có $a*b=(a+b)$ mod 4.

a) Chứng minh rằng * là một phép toán đóng trên $\mathbb{Z}_4$.

b) Hỏi $\left(\mathbb{Z}_4{}^*\right)$ có phải là một nhóm không?

Lời giải

a) Ta có $\forall a,b\in\mathbf{Z}_4$ thì $(a+b)\bmod 4\in\{1;2;3;0\}=\mathbf{Z}_4$

$\to$ * là một phép toán đóng trên $\mathbf{Z}_4$.

b) $\left(\mathbb{Z}_4,*\right)$ là một nhóm vì:

+ Tính kết hợp: $(a*b)=c=[(a+b)\bmod 4+c]\bmod 4=(a+b+c)\bmod 4\ =a*(b*c)$

+ Tính: có phần tử trung hòa là $0:a*0=0*a=a \quad \forall a\in\mathbf{Z}_4$

+ $\forall a\in\mathbf{Z}_4$ đều có phần tử đối xứng: $1*3=2*4=0$.

Bài 16. Cho $\mathrm{G}=\{\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2,\mathrm{f}_3,\mathrm{f}_4,\mathrm{f}_5,\mathrm{f}_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ xác định như sau:

$f_1(x)=x;\ f_2(x)=\dfrac{1}{1-x};\ f_3(x)=1-\dfrac{1}{x};\ f_4(x)=\dfrac{1}{x};\ f_5(x)=1-x;\ f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}.$

a. Tính $f_1\circ f_2$

b. Lập bảng để biểu diễn giá trị $f_1\circ f_2$ với mọi $i,j=\overline{1..6}$.

c) Chứng minh G cùng với phép toán là phép tích ánh xạ lập thành một nhóm không Abel.

Lời giải

a) $f_1 \circ f_2 = f_1\left(f_2(x)\right) = \dfrac{1}{1-x}$

b)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

c) Do $(G,\circ)$ là phép toán đóng

+ Phép hợp có tính chất kết hợp

+ Phần tử trung hòa: f_1

+ Phần tử đối xứng: $f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_3 = f_4 \circ f_4 = f_5 \circ f_5 = f_6 \circ f_1 = f_1$

Mà $f_4 \circ f_2 = f_5 \neq f_6 = f_2 \circ f_4 \Rightarrow (G,\circ)$ là một nhóm không Abel.

Bài 17. Nêu rõ các tập sau với các phép toán cộng và nhân thông thường có lập thành một vành, trường không?

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

e) $Y = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Lời giải

a) Không là vành, trường (vì phép toan + không đóng kín)

b) Là vành, không trường ($(G,\bullet)$) không là nhóm, chẳng hạn $\left.\dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}\right)$

c) Là trường

d) là vành, không là trường ($(G,\bullet)$) không là nhóm, chẳng hạn $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{\sqrt{2}}{5} \notin X$

c) Là trường $\left(\dfrac{1}{a+b\sqrt{3}}=\dfrac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=\dfrac{a}{a^2-3b^2}-\dfrac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\in Y,\forall(a;b)\neq(0;0)\right)$.

Bài 18. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1+i\sqrt{3})^9$

b) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$

c) $(2+\mathrm{i}\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-1)^{11}$.

Lời giải

a) $(1+i\sqrt{3})^9=\left[2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^9=-2^9$

b) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}=\dfrac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{21}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)\right]^{13}}=2^4\cdot\dfrac{\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+i\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=2^4.i$

c) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11}=\left[4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^5\cdot\left[2\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)\right]^{11}$

$=2^{21}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\dfrac{1}{2}\right)=2^{19}(2\sqrt{3}-2i)$

Bài 19. Tìm các căn bậc 8 của số phức: $\mathrm{z}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Lời giải

$z=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Các căn bậc 8 của z là:

$\sqrt[3]{2}.\left(\cos\dfrac{\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi}{8}\right),k\in\overline{0,7}.$

Bài 20. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2+z+1=0$ b) $z^2+2iz-5=0$ c) $z^4-3iz^2+4=0$

d) $z^6-7z^3-8=0$ e) $\overline{z^7}=\dfrac{1024}{z^3}$ f) $z^8(\sqrt{3}+i)=1-i$

g) $iz^2-(1+8i)z+7+17i=0$ (GK20171)

Lời giải

a) $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^3=1 \\ z\neq 1 \end{cases} \Rightarrow z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}; k=1;2$

b) $z^2+2iz-5=0 \Rightarrow (z+i)^2=4 \Rightarrow z=-i\pm 2$

c) $z^4-3iz^2+4=0$. Đặt $z^2=u \Rightarrow u^2+3iu+4=0$

$$\Rightarrow \left(u-\frac{3}{2}i\right)^2=\left(\frac{5}{2}i\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=4i \\ u=-i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=4i \\ z^2=-i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) \\ z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$$

d) $z^6-7z^3-8=0$. Đặt $z^3=u \Rightarrow u^2-7u-8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=8 \\ u=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-1 \end{array}\right.$

e) $\overline{z^7}=\frac{1024}{z^3} \Rightarrow \overline{z^7}\cdot z^3=1024 \Rightarrow |z|^{10}=1024 \Rightarrow |z|=2$

$$\Rightarrow \overline{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{4}{z} \;\Rightarrow \frac{4^7}{z^7}=\frac{1024}{z^3} \Rightarrow z^4=2^4 \Rightarrow z=2\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right), k=\overline{0,3}$$

f) $z^8(\sqrt{3}+i)=1-i$

$$\Rightarrow z^8=\frac{1-i}{i+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-7\pi}{12}+i\sin\frac{-7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{\frac{-7\pi}{12}+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\frac{-7\pi}{12}+2k\pi}{8}\right), k=\overline{0,7}$$

g) $iz^2-(1+8i)z+7+17i=0$

$$\Leftrightarrow z^2+(i-8)z+(17-7i)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{i-8}{2}\right)^2=7i-17+\frac{63}{4}-4i=3i-\frac{5}{4}=\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=5+i \\ z=3-2i \end{array}\right.$$

Bài 21. (GK 20141). Cho $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị 1. Tính $A=\sum_{i=1}^{2014}\epsilon_i^2$.

Lời giải

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{2014}$ là 2014 căn bậc của 2014 của 1. $A=\sum_{k=1}^{2014}\varepsilon_k{}^2$.

Ta có $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2014}+i\sin\frac{2k\pi}{2014}, k=\overline{0,2013}$ (Quy ước $\varepsilon_{2014}=\varepsilon_0$)

$$\Rightarrow A=\sum_{k=1}^{2014}\left(\cos\frac{2k\pi}{1007}+i\sin\frac{2k\pi}{1007}\right)$$

$$=2\cdot\sum_{k=1}^{1007}\left(\cos\frac{2k\pi}{1007}+i\sin\frac{2k\pi}{1007}\right)\left(\text{do }\frac{2(k+1007)\pi}{1007}=2\pi+\frac{2k\pi}{1007}\right)$$

$$=2\cdot\sum_{k=1}^{1007}\alpha_k$$

Với $\alpha_k, k=\overline{1,1007}$ là các căn bậc 1007 của 1 . Mà $\alpha_k^{1007}=1$ nên theo Viete: $\sum_{k=1}^{1007}\alpha_k=0\Rightarrow A=0$.

Bài 22. Cho phương trình $\frac{(x+1)^9-1}{x}=0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}$.

Lời giải

a) $x_k=-1+\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}, k=\overline{1,8}$ (Đặt $x+4=t$)

b) $|x_k|=\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{9}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{9}\right)^2}=2\sin\frac{k\pi}{9}$

c) $\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\prod_{k=1}^{k}\frac{|x_k|}{2}=\frac{1}{2^8}\left|\prod_{k=1}^{8}x_k\right|$

Mà $x_k, k=\overline{1,8}$ là nghiệm của $\frac{(x+1)^9-1}{x}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{9}C_9^i-x^{i-1}=0$ nên theo Viete $\Rightarrow\prod_{k=1}^{8}x_k=9$

$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{2^8}$$

Bài 23 (CK 20161). Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=iz^2+(4-i)z-9i$ với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$

Lời giải

Ta có: $iz^2+(4-i)z-9i=7$

$\Leftrightarrow z^2-(1+4i)z+(7i-9)=0$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1+4i}{2}\right)^2 = 9-7i+2i-\frac{15}{4} = \frac{21}{4}-5i = \left(i-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2+3i \\ z=3+i \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(\{7\}) = \{-2+3i;3+i\}$$

Bài 24 (GK 20171). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $\left|z_1^2 - z_2^2\right| = 1$.

Lời giải

$$z^2 - z + ai = 0 \Rightarrow z_1^2 = z_1 - ai; z_2^2 = z_2 - ai$$

$$\Rightarrow \left|z_1^2 - z_2^2\right| = \left|z_1 - z_2\right| = 1$$

$$\left|z_1^2 - z_2^2\right| = \left|(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)\right| = \left|z_1 - z_2\right| \cdot \left|z_1 + z_2\right| \Rightarrow \left|z_1 + z_2\right| = 1$$

Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = 1.i \end{cases}$.

Đặt $z_1 = u + i.v \Rightarrow z_2 = 1 - u - i.v$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u+i.v)(1-i-i.v) = ai \\ \left|z_1 - z_2\right| = 1 \Leftrightarrow (2u-1)^2 + 4v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(1-u) + v^2 = 0 \\ (2u-1)^2 + 4v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, v = 0 \\ u = 1, v = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a = v(1-u) - vu = 0.$$

CHƯƠNG II. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1&1&2\\2&4&-2\end{bmatrix}$.

Trong các phép toán sau: $BC^T,\ A+BC,\ A^\top B-C,\ A(BC),\ (A+3B).C^T$,phép toán nào thực hiện được. Nếu thực hiện được cho biết kết quả.

Lời giải

Các phép toán có thể thực hiện được là: $B.C^T$; $(A+3B).C^T$

$$B.C^T=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\1&4\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\5&8\\9&2\end{bmatrix}$$

$$A+3B=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&5\\-4&10&-1\\3&9&10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+3B).C^T=\begin{bmatrix}7&0&5\\-4&10&-1\\3&9&10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\1&4\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\12&34\\26&22\end{bmatrix}$$

Bài 2 (CK 20152). Cho $A=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2

a) Tính $F=A^2-3A$

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $\left(A^2+5E\right)X=B^T\left(3A-A^2\right)$

Lời giải

a) $A^2=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-2&9\\-3&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-3A=\begin{bmatrix}-5&0\\0&-5\end{bmatrix}=-5E$

b) Theo câu a ở trên ta có: $A^2-3A+5E=0\Rightarrow A^2+5E=3A,\ 3A-A^2=5E$

$\Rightarrow$ Cần tìm X thỏa mãn: $3AX=B^T.5E\Rightarrow X=\dfrac{5}{3}A^{-1},B^T$ (do det $A\neq 0$)

$$\Rightarrow X=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Bài 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&3\end{bmatrix}$ và đa thức $f(x)=3x^2-2x+5$. Tính $f(A)$.

Lời giải

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}6&-9&10\\-3&-7&5\\2&-1&13\end{bmatrix}\Rightarrow f(A)=3A^2-2A+5E=\begin{bmatrix}21&-23&24\\-13&34&13\\0&7&38\end{bmatrix}$$

Bài 4. Tính A^n với

a) $A=\begin{bmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos a\end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix}$.

Lời giải

a) $A=\begin{bmatrix}\cos ka&-\sin ka\\\sin ka&\cos ka\end{bmatrix}$. Quy nạp $A^n=\begin{bmatrix}\cos na&-\sin na\\\sin na&\cos na\end{bmatrix}$

$+n=1$. Đúng.

+ Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\in\mathbb{R}^*$

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos ka&-\sin ka\\\sin ka&\cos ka\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)a&-\sin(k+1)a\\\sin(k+1)a&\cos(k+1)a\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Mệnh đề đúng với $k+1$.

Vậy $A^n=\begin{bmatrix}\cos na&-\sin na\\\sin na&\cos na\end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix}=a.I_3+B, I_3$ là ma trận đơn vị cấp 3, $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

Nhận xét $B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}; B^{-k}=0\forall k\geq 3$

$$\Rightarrow A^n=\left(B+a.I_3\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i.B^{n-1}.a^i=I.C_n^0.a^n+C_n^1.B.a^{n-1}+C_n^2.B^2.a^{n-2}$$

$$=a^n.I+n.a^{n-1}.B+C_n^2.a^{n-2}.B^2=\begin{bmatrix}(n+1)a^n&n.a^{n-1}&C_n^2.a^{n-2}\\0&(n+1)a^n&n.a^{n-1}\\0&0&(n+1)a^n\end{bmatrix}$$

Bài 5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ b) $X^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Lời giải

a) $A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}, A^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=0\\ab+bd=0\\ac+cd=0\\bc+d^2=0\end{cases}$

$+bc=0\Rightarrow a=d=0$

$+bc\neq 0\Rightarrow a+d=0$

Vậy các ma trận thỏa mãn là: $\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\c&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}\left(a^2+bc=0\right)$

b) $A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}, A^2=I\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=d^2+bc=1\\b(a+d)=c(a+d)=0\end{cases}$

+ $(a+d)=0\Rightarrow a^2+bc=1$

+ $(a+d)\neq 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=d=1\ \ \&\ \ b=c=0\\a=d=-1\ \ \&\ \ b=c=0\end{array}\right.$

Vậy các ma trận thỏa mãn là: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}\left(a^2+bc=1\right)$

Bài 6.

a) Chứng minh rằng ma trận $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k=0(k>2)\Leftrightarrow A^2=0$

Lời giải

a) $A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&d^2+bc\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)I$

$$=\begin{bmatrix}a^2+bc-(a+d)a+ad-bc&ab+bd-(a+d)b\\ac+cd-(a+d)c&d^2+bc-(a+d)d+ad-bc\end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow A$ thỏa mãn phương trình $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Rõ ràng $A^2=0$ thì $A^2=0\ \forall k>2$.

Giả sử $A^k=0$ với $k>2$. Ta chứng minh $A^2=0$

$A^2=0\Rightarrow\det A=0\Rightarrow ad-bc=0\Rightarrow A^2-(a+d)A=0$ (theo câu a)

$+(a+d)=0\Rightarrow A^2=0$

$+(a+d)\neq 0\Rightarrow A^{k-2}\left[A^2-(a+d)A\right]=0\Rightarrow A^{k-1}=0.$

Tương tự cách làm ở trên

$\Rightarrow A^2=0$

Bài 7. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

Lời giải

a) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+b_1x & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix}\left(C_2+C_1\to C_2\right)$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=2x\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\left(C_1-C_2\to C_1\right)$$

$$=-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a(b+c+c)bc \\ 1 & b & b(a+b+c)ac \\ 1 & c & c(a+b+c)ab \end{vmatrix}\left(C_2\times(a+b+c)+C_3\to C_3\right)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}\left(-C_1\times(ab+bc+ca)+C_3\to C_3\right)$$

Bài 8. Tính các định thức sau:

a) $A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ b) $B=\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$ c) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

Lời giải

a) $A=\begin{vmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-11&6\\-14&-26&12\\-14&-26&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-11&6\\-14&-26&12\\0&0&-4\end{vmatrix}$

$=-4\begin{vmatrix}-7&-11\\-14&-26\end{vmatrix}=-112$

b) $B=\begin{vmatrix}a+b&ab&a^2+b^2\\b+c&bc&b^2+c^2\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-c&b(a-c)&(a-c)(a+c)\\b-a&c(b-a)&(b-a)(b+a)\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}\left(L_1-L_2\to L_1;L_2-L_3\to L_2\right)$

$=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&b&a+c\\1&c&b+a\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&b&a+c\\0&c-b&b-c\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}\left(L_2-L_1\to L_2\right)$

$=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&a+b+c&a+c\\0&0&b-c\\c+a&a^2+c^2+ac&c^2+a^2\end{vmatrix}=(a-c)(b-a)(c-b)\left[a^2+c^2+ac-(a+c)(a+b+c)\right]$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$

c) $D=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\0&0&0&4-x^2\end{vmatrix}\left(L_4-L_3\to L_4\right)$

$=\left(4-x^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2-x^2&2\\2&3&1\end{vmatrix}=\left(4-x^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1-x^2&0\\2&3&1\end{vmatrix}\left(L_2-L_1\to L_2\right)$

$=\left(4-x^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)$

Bài 9.

a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A)=0$.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh $\det\left(\mathrm{A}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)=0$.

Lời giải

a) $\det A=\det A^T=\det(-A)\left(\text{do } A^T=-A\right)$

Giả sử A cấp n lẻ $\Rightarrow \det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$

Do vậy $\det A=-\det A\Rightarrow \det A=0$.

b) Ta có: $(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$

$\Rightarrow A-A^T$ là ma trận phản xứng cấp lẻ (cấp 2019) $\Rightarrow \det(A-A^T)=0$

Bài 10. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}$

Lời giải

a)

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-2L_1\to L_2\\L_3-5L_1\to L_3\\L_4-7L_1\to L_4\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&0&-4&0\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_3-2L_2\to L_3\\L_4-2L_2\to L_4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}.\text{ Vậy } r(A)=4.$$

<u>Cách 2:</u> det $A=-112\neq 0, A$ là ma trận vuông cấp $4\Rightarrow \operatorname{rank} A=4$.

b) $$B=\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&-3&0&4\\0&0&6&0&-8\\0&0&9&0&-12\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-2L_1\to L_2\\L_3-L_1\to L_3\\L_4-L_4\to L_4\\L_5-2L_4\to L_5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&6&0&0\\0&0&9&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_3+L_2\to L_3\\L_4-2L_2\to L_4\\L_5-3L_2\to L_5\end{pmatrix}.\text{ Vậy } r(B)=2$$

Bài 11 (GK20141). Tìm m để hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\-1&2&2&1\\1&0&4&m\end{bmatrix}$ bằng 2.

Lời giải

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4 & m\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 3 & m-2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2+L_1\to L_2\\ L_3-L_1\to L_3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & m-5\end{bmatrix}(L_3-L_2\to L_3).$$

Vậy $r(A)=2\Leftrightarrow m=5$

Bài 12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Lời giải

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}^T=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{\det B},\tilde{B}^T=\dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix}2 & -21 & 11\\ 1 & -12 & 7\\ -1 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/3 & 7 & -11/3\\ -1/3 & 4 & -7/3\\ 1/3 & -1 & 1/3\end{bmatrix}$.

c) Cách 1: $C=\begin{bmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Ta có: det $C=1.\text{Tìm}\tilde{C}^r\to C^{-1}=\tilde{C}^r$

Cách 2: Phương pháp Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right](L_3+aL_4\to L_3)$$

$$\xrightarrow{L_2+aL_3\to L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 1 & a & a^2\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Bài 13(GK 20151). Tìm a để ma trận $A=\begin{bmatrix} a+1 & -1 & a \\ 3 & a+1 & 3 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Lời giải

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a \\ 3 & a+1 & 3 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix} -1 & a \\ a+1 & 3 \end{vmatrix}+(a-1)\begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-1)\left[-3-a^2-a+a^2+2a+4\right]=(a-1)(a+1)$$

A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \pm 1$.

Bài 14. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0$ với $a_0\neq 0$ thì A là ma trận khả nghịch.

Lời giải

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$A khả nghịch và $A^{-1}=-B$

Bài 15. Cho $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix};\mathrm{B}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 6 & 16 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX+B=C^T$.

Lời giải

$$AX=C^T-B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}=D$$

Mà det $A=28\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}\cdot D=\dfrac{1}{\det A}\cdot \tilde{A}^T\cdot D=\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{28} & \frac{5}{28} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 16. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3=1 \\ -4x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2+4x_3=4 \\ 10x_1-5x_2-6x_3=-10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ 3x_1-x_2+x_3=2 \\ 5x_1+2x_2+5x_3=3 \\ x_1-4x_2-3x_3=1 \end{cases}$.

Lời giải

a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 3L_2-7L_1\to L_2 \\ 3L_3-5L_1\to L_3 \end{pmatrix}$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] (L_3-2L_2\to L_3)$$

Do $r(\bar{A}) \neq r(A)$ nên hệ vô nghiệm.

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 10 & -5 & -6 & -10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -10 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 3L_2+4L_1\to L_2 \\ 3L_3+2L_1\to L_3 \\ 3L_4-10L_1\to L_4 \end{pmatrix}$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 13 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & -21 & -15 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 2L_3-L_2\to L_3 \\ 2L_4+5L_1\to L_4 \end{pmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 13 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r(A)=r(\tilde{A})=3$$

Hệ có duy nhất 1 nghiệm thỏa mãn: $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3=1 \\ 2x_2+15x_3=13 \\ 21x_3=15 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\left(0;\frac{8}{7};\frac{5}{7}\right)$

c) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A)=r(\tilde{A})=2<3\to$ Hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ -11x_2-10x_3=1 \end{cases}$

Đặt $x_3=t \Rightarrow x_2=\frac{-10t-1}{11} \Rightarrow x_1=\frac{-3x_2-4x_3}{2}=\frac{3-14t}{22}$

Vậy $(x_1;x_2;x_3)=\left(\frac{3-14t}{22};\frac{-1-10t}{11};t\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x+2y-z+3t=12 \\ 2x+5y-z+11t=49 \\ 3x+6y-4z+13t=49 \\ x+2y-2z+9t=33 \end{cases}$ **(GK 20171)**

b) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=-4 \\ 3x+7y+10z+11t=-11 \\ x+2y+4z+2t=-3 \\ x+2y+2z+7t=-6 \end{cases}$ **(GK20151)**

Lời giải

a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 11 & 49 \\ 3 & 6 & 4 & 13 & 49 \\ 1 & 2 & -1 & 9 & 33 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right] \begin{pmatrix} L_2-2L_1 \to L_2 \\ L_3-3L_1 \to L_3 \\ L_4-L_1 \to L_4 \end{pmatrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] (L_4-L_3 \to L_4) \Rightarrow r(A)=r(\tilde{A})=4$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=12 \\ x_2+x_3+5x_4=25 \\ -x_3+4x_4=13 \\ 2x_4=8 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4)=(-1;2;3;4)$

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 7 & 10 & 11 & -11 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$r(A)=r(\tilde{A})=4 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-4 \\ x_2+x_3-x_4=1 \\ x_3-2x_4=1 \\ x_4=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4)=(1;1;-1;-1)$

Bài 18(GK 20171). Tìm a để hệ $\begin{cases} (a+5)x+3y+(2a+1)z=0 \\ ax+(a-1)y+4z=0 \\ (a+5)x+(a+2)y+5z=0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Lời giải

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (do hệ thuần nhất)

Với $A=\begin{bmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ a+5 & a+2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ a+5 & a+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ 0 & a-1 & 4-2a \end{vmatrix}$

$= (a+5)[(a-1)(4-2a)-4(a-1)] - a.[3.(4-2a)-(2a-1)(a-1)]$

$= (a+5)\left(-2a^2+2a\right) - a\left(-2a^2-5a+13\right)$

$= -2a^3-8a^2+10a+2a^3+5a^2-13a$

$= -3a^2-3a = -3a(a+1)$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}.$

Bài 19(CK 20172). Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1+2x_2-x_3=3 \\ x_1+mx_2+2x_3=4 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

$\overline{A} = \begin{bmatrix} m & 2 & -1 & 3 \\ 1 & m & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -m \end{bmatrix}$ Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow m^2+8-3-(2m+6m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m^2+5-4m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2-4m+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$

Bài 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+mx_4=4 \\ -x_1-x_2+3x_3+2x_4=k \\ 2x_1-x_2-3x_3+(m-1)x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+2mx_4=5 \end{cases}.$

a) Giải hệ phương trình khi $m=2, k=5$.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Lời giải

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & k \\ 2 & -1 & -3 & m-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2m & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & -5 & -1 & -m-1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & m & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & 0 & 9 & 4m+9 & 5k+15 \\ 0 & 0 & 4 & 2m+2 & k+5 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & 0 & 9 & 4m+9 & -11k+15 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-18 & \end{array}\right]$$

a) $m=2, k=5$ hệ có nghiệm duy nhất $\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)=(-9;-1;-5;5)$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m-18 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

c) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-18=0 \\ 11k+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ k=\dfrac{-15}{11} \end{cases}$.

CHƯƠNG III. KHÔNG GIAN VECTOR

Bài 1. Tập V với các phép toán có phải là không gian véc tơ không?

a) $V=\{(x,y,z)|\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau:

$$(x,y,z)+\left(x',y',z'\right)=\left(x+x',y+y',z+z'\right)$$
$$k(x,y,z)=(k\,|\,x,|\,k\,|\,y,|\,k|\ z)$$

b) $V=\left\{x=\left(x_1,x_2\right)|\ x_1>0,x_2>0\right\}\subset\mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$\left(x_1,x_2\right)+\left(y_1,y_2\right)=\left(x_1y_1,x_2y_2\right)\ \&\ k\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1{}^k,x_2{}^k\right)$ trong đó k là số thực bất kỳ.

Lời giải

a) Nhận xét $\left(k_1+k_2\right)\cdot(x;y;z)=\left(\left|k_1+k_2\right|x;\left|k_1+k_2\right|y;\left|k_1+k_2\right|z\right)$

$\neq\left(\left|k_1\right|x+\left|k_2\right|x;\left|k_1\right|y+\left|k_2\right|y;\left|k_1\right|z+\left|k_2\right|z\right)=k_1(x;y;z)+k_2(x;y;x)$

$\Rightarrow V$ không là không gian vector.

b)

$+(V,+)$ là một nhóm giao hoán

$$+k\left[\left(x_1,x_2\right)+\left(y_1,y_2\right)\right]=\left(x_1^ky_1^k,x_2^ky_2^k\right)=k\left(x_1,x_2\right)+k\left(y_1,y_2\right)$$
$$+\left(k_1+k_2\right)\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1^{k_1+k_2},x_2^{k_1+k_2}\right)=k_1\left(x_1,x_2\right)+k_2\left(x_1,x_2\right)n$$
$$+k_1\left(k_2\left(x_1,x_2\right)\right)=\left(k_1k_2\right).\left(x_1,x_2\right)$$
$$+1.\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1,x_2\right)$$

$\Rightarrow V$ là một không gian vector.

Bài 2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E=\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{R}^3|\ 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của KGVT $P_n[x]$

c) Tập các ma trận tam giác trên của các ma trận vuông cấp n

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n $\left(a_{ij}=-a_{ji}\right)$

Lời giải

a) Xét $u_1=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in E,u_2=\left(y_1,y_2,y_3\right)\in E$

$\Rightarrow u_1+u_2=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right)\in E$

Do $2(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=[2x_1-5x_2+3x_3]+[2y_1-5y_2+3y_3]=0$

$k\in\mathbf{R}$ thì $ku_1\in E$ do $k(2x_1-5x_2+3x_3)=0$

$\Rightarrow E$ là KGVT con của $\mathbf{R}^3$.

b)

P_1, P_2 có hệ số bậc nhất bằng 0 $\Rightarrow\begin{cases} P_1+P_2 \text{ có hsbn} = 0 \\ kP_1 \text{ có hsbn} = 0 \quad \forall k\in\mathbf{R}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 của $P_n[x]$ là KGVT con của $P_n[x]$.

c, d, e) CMTT giống a, b. $\begin{cases} p+q\in W;\forall p,q\in W \\ kp\in W;\forall k\in\mathbf{R},\, p\in W\end{cases}$ thì W là KGVT con sinh bởi V

Bài 3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $\mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2$ là KGVT con của V.

b) $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2:=\{\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2 |\ \mathrm{u}_1\in\mathrm{V}_1,\mathrm{u}_2\in\mathrm{V}_2\}$ là KGVT con của V.

Lời giải

a) $u,v\in V_1\cap V_2\Rightarrow\begin{cases}u,v\in V_1\\u,v\in V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v\in V_1\\u+v\in V_2\end{cases}\Rightarrow u+v\in V_1\cap V_2$

$u\in V_1, k\in\mathbf{R}\Rightarrow ku\in V_1$, tương tự $ku\in V_2\Rightarrow ku\in V_1\cap V_2$

Do đó $V_1\cap V_2$ là KGVT con của V.

b) $u,v\in V_1+V_2\Rightarrow\begin{cases}u=u_1+u_2\\v=v_1+v_2\end{cases}(u_1+v_2\in V_1, u_2+v_2\in V_2)$

$\Rightarrow u+v=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\in V_1+V_2$

- $ku=ku_1+ku_2\in V_1+V_2$ do $ku_1\in V_1, ku_2\in V_2$ $\Rightarrow V_1+V_2$ là KGVT con của V

Bài 4. Cho $\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2$ là hai không gian véc tơ con của KGVTV. Ta nói $\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2$ là bù nhau nếu $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2=\mathrm{V}, \mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2=\{\theta\}$. Chứng minh rằng $\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2$ bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $\mathrm{u}=\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2, (\mathrm{u}_1\in\mathrm{V}_1,\mathrm{u}_2\in\mathrm{V}_2)$.

Lời giải

V_1, V_2 bù nhau $\Rightarrow V_1+V_2=V; V_1\cap V_2=\{0\}$

$\Rightarrow\forall v\in V$ thì $v=v_1+v_2\,(v_1\in V_1, v_2\in V_2)$

Giả sử biểu diễn này không duy nhất $\Rightarrow v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \left(v_1' \neq v_1 \right) \Rightarrow v_1 - v_1' = v_2' - v_2$

Mà $v_1 - v_1' \in V_1, v_2' - v_2 \in V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ biểu diễn duy nhất.

Do mỗi vector $u \in V$ đều biểu diễn được dưới dạng $u = u_1 + u_2 \left(u_1 \in V_1, u_2 \in V_2 \right) \Rightarrow V = V_1 + V_2$

Giả sử $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x = 0 + x = x + 0$ (mẫu thuẫn tính duy nhất) $\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Vậy ta có đpcm.

Bài 5. Trong KGVTV, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Lời giải

$\left(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \right)$ phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow \exists k_i, i = \overline{1, n+1}$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n+1} k_i u_i = 0$

Nếu $k_{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} k_t u_i = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính (mâu thuẫn)

$\Rightarrow k_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{-ki}{k_{n+1}} u_i = u_{n+1}$ \$

Tức là u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Bài 6. Cho $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của $W_1, \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của W_2 với W_1, W_2 và là các không gian con của V. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Lời giải

Xét $u \in W_1 + W_2 \Rightarrow u = u_1' + u_2' \left(u_1' \in W_1, u_2' \in W_2 \right)$

Mà $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hệ sinh của $W_1 \Rightarrow \exists k_i : u_1' = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \quad \left(\sum k_i^2 \neq 0 \right)$

Tương tự $\exists g_j : u_2' = \sum_{j=1}^{n} g_j u_j \quad \left(\sum g_j^2 \neq 0 \right)$

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i + \sum_{j=1}^{n} g_j u_j \quad \left(\sum k_i^2 + \sum g_j^2 \neq 0 \right)$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Bài 7. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1=(4;-2;6), v_2=(-6;3;-9)$.

b) $v_1=(2;3;-1), v_2=(3;-1;5), v_3=(-1;3;-4)$.

c) $v_1=(1;2;3), v_2=(3;6;7), v_3=(-3;1;3), v_4=(0;4;2)$.

Lời giải

a) $v_2=\frac{-3}{2}v_1 \Rightarrow \{v_1,v_2\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-9\neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập tuyến tính.

c) Do v_1,v_2,v_3,v_4 đều thuộc không gian vector $\mathbf{R}^3$.

Mà dim $\mathbf{R}^3=3$ nên hệ 4 vector bất kỳ luôn phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 8. Trong không gian $P_2[x]$, xét xem hệ véc tơ $B=\{u_1=1+2x,\ u_2=3x-x^2, u_3=2-x+x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Lời giải

Gọi A là ma trận của B đối với cơ sở chính thức $\{1;x;x^2\}$ của $P_x[x]$ $\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

det $A=-2\neq 0 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính.

Bài 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1=(1;1;1), v_2=(1;1;2), v_3=(1;2;3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x=(6;9;14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Lời giải

Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ hệ vector $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập tuyến tính

Mà $\dim \mathbb{R}^3=3 \Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang $\{v_1,v_2,v_3\}$ là: $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

*) Tìm tọa độ của $x=(6;9;14)$ đối với cơ sở $\{v_1,v_2,v_3\}=\mathbf{B}$

Cách 1: $x=av_1+bv_2+cv_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ a+b+2c=9 \\ a+2b+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c)=(1,2,3) \qquad \Rightarrow [x]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

Cách 2: $[x]_E=C^{-1}\cdot[x]_E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}6\\9\\14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, chứng minh $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

a) $\mathrm{v}_1=(2;1;1),\mathrm{v}_2=(6;2;0),\mathrm{v}_3=(7;0;7),\mathrm{v}=(15;3;1)$.

b) $\mathrm{v}_1=(0;1;1),\mathrm{v}_2=(2;3;0),\mathrm{v}_3=(1;0;1),\mathrm{v}=(2;3;0)$.

Lời giải

a) $\begin{vmatrix}2&6&7\\1&2&0\\1&0&7\end{vmatrix}=-28\neq 0\Rightarrow B$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow B$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$

$[v]_B=[B]_E^{-1}\cdot[v]_E$ (E là cơ sở chính tắc, $[B]_E$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B)

$=\begin{bmatrix}2&6&7\\1&2&0\\1&0&7\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}15\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/2\\11/4\\1/2\end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}0&2&1\\1&3&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-5\neq 0\Rightarrow B$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

$[v]_B=[B]_E^{-1}\cdot[v]_E=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

Bài 11. Trong $\mathrm{P}_3[\mathrm{x}]$ cho các véc tơ $\mathrm{v}_1=1,\mathrm{v}_2=1+\mathrm{x},\mathrm{v}_3=\mathrm{x}+\mathrm{x}^2,\mathrm{v}_4=\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3$.

a) Chứng minh $\mathrm{B}=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4\}$ là một cơ sở của $\mathrm{P}_3[\mathrm{x}]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v=2+3x-x^2+2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm tọa độ của véc tơ $\mathrm{v}=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\mathrm{x}+\mathrm{a}_2\mathrm{x}^2+\mathrm{a}_3\mathrm{x}^3$ đối với cơ sở trên.

Lời giải

a) Ma trận tọa độ của B đối với cơ sở chính tắc E là $B_0=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

do det $B_0=1 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow B$ là cơ sở của $P_3[x]$

b) $[v]_E=B_0^{-1}\cdot[v]_E=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\6\\-3\\2\end{bmatrix}$

c) $[v]_E=B_0^{-1}\cdot[v]_E=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0-a_1+a_2-a_3\\a_1-a_2+a_3\\a_2-a_3\\a_3\end{bmatrix}$

Bài 12(CK 20151). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ sau:

$u_1=(1;3;-2;1), u_2=(-2;3;1;1), u_3=(2;1;0;1), u=(1;-1;-3;m).$

Tìm m để $u\in \operatorname{Span}\{u_1,u_2,u_3\}$.

Lời giải

$u\in \operatorname{span}\{u_1,u_2,u_3\} \Leftrightarrow \exists x_1,x_2,x_3$ thỏa mãn $u=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=1\\3x_1+3x_2+x_3=-1\\-2x_1+x_2+0x_3=-3\\x_1+x_2+x_3=m\end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Xét $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\3&3&1&-1\\-2&1&0&-3\\1&1&1&m\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&9&-5&-4\\0&-3&4&-1\\0&3&-1&m-1\end{array}\right]\begin{pmatrix}L_2-3L_1\to L_2\\L_3+2L_1\to L_3\\L_4-L_1\to L_4\end{pmatrix}$

$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&9&-5&-4\\0&0&21&-21\\0&0&6&9m+3\end{array}\right]\begin{pmatrix}9L_3+3L_2\to L_3\\9L_4-3L_2\to L_4\end{pmatrix}$

$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&1\\0&9&-5&-4\\0&0&21&-21\\0&0&0&21(9m+3)+216\end{array}\right](21L_4-6L_2\to L_4)$

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow 21(9m+9)=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Bài 13. Cho $KGVTP_3[x]$ và hệ véc tơ sau:

$v_1=1+x^2+x^3, v_2=x-x^2+2x^3, v_3=2+x+3x^3, v_4=-1+x-x^2+2x^3$.

a) Tìm hạng của hệ véc tơ

b) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

Lời giải

a) Ma trận A của hệ $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ đối với cơ sở chính tắc là

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&1&1\\1&-1&0&-1\\1&2&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&1&1\\0&-1&-2&0\\0&2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy $r(A)=3$ hay hạng của hệ vectơ $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ là 3.

b) Xét ma trận tọa độ hàng:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&2\\2&1&0&3\\-1&1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&2\\0&1&-2&1\\0&1&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Một cơ sở của $\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ là $\{(1+x^2+x^3);(x-x^2+2x^3);(-x^2-x^3)\}$.

Bài 14. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $=(2\,;1\,;\,3\,;\,4),\ v_2=(1\,;\,2\,;\,0\,;\,1),\ v_3=(-1\,;\,1\,;-3\,;\,0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $\mathrm{v}_1=(2;0;1;3;-1), \mathrm{v}_2=(1;1;0;-1;1), \mathrm{v}_3=(0;-2;1;5;-3), \mathrm{v}_4=(1;-3;2;9;-5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Lời giải

a) Ma trận tọa độ hàng

$$\begin{bmatrix}2&1&3&4\\1&2&0&1\\-1&1&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&1&3&4\\-1&1&-3&0\end{bmatrix}(L_1\leftrightarrow L_2)\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-3&3&2\\0&3&-3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-2L_1\to L_2\\L_3+L_1\to L_3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-3&3&2\\0&0&0&3\end{bmatrix}(L_3+L_2\to L_3)$$

$\Rightarrow \dim V=3$, có cs $\{(1;2;0;1);(0,-3;3;2);(0;0;0;3)\}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 2L_4 - L_1 \to L_4 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_3 + L_2 \to L_3 \\ L_4 + 3L_2 \to L_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V = 2$, có cs $\{(2;0;1;3;-1);(0;2;-1;-5;3)\}$.

Bài 15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ: $u_1 = (1;0;1;0), u_2 = (0;1;-1;1)$, $u_3 = (1;1;1;2), u_4 = (0;0;1;1)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\}, V_2 = \text{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Lời giải

a) $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = V_1 + V_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \dim V_1 + V_2 = 3, cs\{(1;0;1;0);(0;1;-1;1);(0;0;1;1)\}$.

b) Xét $u \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \exists x_1; x_2; x_3; x_4 : u = x_1u_1 + x_2u_2 = x_3u_3 + x_4u_4$

$\Rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3 - x_4u_4 = 0$ \$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -x_4$$

$\Rightarrow u = x_1(u_1 + u_2) = x_1.(1;1;0;-1) \Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 1, cs\{(1;1;0;1)\}$.

Bài 16 (CK 20151). Cho không gian $P_{2015}[x]$ - các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_1 = \{p \in P_{2015}[x] \| \ p(-x) = p(x), \forall x \in R\}$. Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Lời giải

$W_1 = \{p \in P_{2015}[x] p(x) = p(-x)\}$

+ Xét $p_1, p_2 \in W_1, q = p_1 + p_2$. Ta có $q(-x) = p_1(-x) + p_2(-x) = p_1(x) + p_2(x) = q(x)$

$\Rightarrow p_1 + p_2 \in W_1$

$+ p_1 \in W_1, k \in \mathbf{R} \Rightarrow kp_1(-x) = kp_1(x) \Rightarrow kp_1 \in W_1$

Vậy W_1 là KCVT con của $P_{2015}[x]$

Do $p(-x) = p(x) \Rightarrow$ Đa thức $p(x)$ chỉ gồm các hạng tử bậc chẵn của x

Hay $p(x) = \sum_{i=0}^{1007} a_i \cdot x^{2i} \Rightarrow \dim W_1 = 1008$, một cơ sở là $B = \{1; x^2; x^4; \ldots; x^{2014}\}$.

Bài 17. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Lời giải

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 3L_1 \rightarrow L_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 23 \\ 0 & 0 & -6 & -13 & 16 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + 2L_2 \rightarrow L_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -13 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 23 \end{bmatrix} (L_3 \leftrightarrow L_4)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ -6x_3 - 13x_4 + 16x_5 = 0 \\ -12x_4 + 23x_5 = 0. \end{cases}$ Đặt $x_5 = t \Rightarrow x_4 = \frac{23}{12}t; x_3 = \frac{-107}{72}t; x_2 = \frac{-89}{12}t; x_1 = \frac{-79}{72}t$

$\Rightarrow X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = \left(\frac{-79}{72}; \frac{-89}{72}; \frac{-107}{72}; \frac{23}{12}; 1\right)t$

$\Rightarrow$ Không gian nghiệm có $\dim = 1$, cơ sở $\left\{\left(\frac{-79}{72}; \frac{-89}{72}; \frac{-107}{72}; \frac{23}{12}; 1\right)\right\}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (L_3 - 2L_2 \to L_3)$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} x_4 = a, x_5 = b \\ x_1 = c \end{cases} \Rightarrow x_3 = 5a - b, x_2 = 2c + 8a + b$

$\Rightarrow X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = a(0;8;5;1;0) + b(0;1;-1;0;1) + c(1;2;0;0;0)$

$\Rightarrow$ Không gian nghiệm có dim 3, cơ sở $\{(0;8;5;1;0);(0;1;-1;0;1);(1;2;0;0;0)\}$

Bài 18. Cho U, V là các không gian con hữu hạn chiều của không gian véc tơ W..

Chứng minh $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

Lời giải

Cơ sở U, V lần lượt là $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}; \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

+ Nếu $U \cap V = \{0\} \Rightarrow \{u_1; u_2; \ldots, u_m; v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ độc lập tuyến tính và là cơ sở của $(U+V)$

$\Rightarrow \dim(U+V) = m + n = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

+ Nếu $\dim(U \cap V) = p$, cơ sở $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\} = A$

Bổ sung $m-p$ vector $r_{p+1}, \ldots, r_m$ vào A để được cơ sở của U.

Bổ sung $n-p$ vector $r_{m+1}; \ldots, r_{n-p+m}$ vào A để được cơ sở của V.

Ta chứng minh $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_p, r_{p+1}, \ldots, r_m, r_{m+1}, \ldots, r_{n-p+m}\}$ là cơ sở của $U+V$

$w \in U+V$ thì $w = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{m} k_i r_i + \underbrace{\left(\sum_{j=m+1}^{n-p+m} k_j r_j + \sum_{j=1}^{p} g_j r_j \right)}_{w_i} = \sum_{j=1}^{p} (k_i + q_i) r_i + \sum_{i=m+1}^{n-p+m} k_i r_i + \sum_{i=r+1}^{m} k_i r_i$

$\Rightarrow \{r_1, r_2, \ldots, r_p, r_{p+1}, \ldots, r_m, r_{m+1}, \ldots, r_{n-p+m}\}$ là hệ sinh của $U+V$

$\sum_{i=m+1}^{n-p+m} \lambda_i r_i = 0$ thì $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i = \sum_{i=m+1}^{n-p+m} \lambda_i r_i \in U \cap V \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i r_i \in V \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = \overline{p+1, m}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i r_i + \sum_{i=m+n}^{n-p+m} \lambda_i r_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i = \overline{1, p}, i = \overline{m+1, n+\overline{p}+m} \Rightarrow$ Hệ S ĐLTT $\Rightarrow S$ là cơ sở.

CHƯƠNG IV. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của kerf.

Lời giải

a) Xét $u_1,u_2\in\mathbb{R}^3\Rightarrow f(u_1+u_2)=(3(x_1+y_1))+(x_2+y_2)-(x_3+y_3),2(x_1+y_1)+(x_3+y_3)$

$=(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)+(3y_1+y_2-y_3,2y_1+y_3)$

$=f(u_1)+f(u_2)$

Xét $u_1\in\mathbb{R}^3,k\in\mathbb{R}\Rightarrow f(ku_1)=(3kx_1+kx_2-kx_3,2kx_1+kx_3)=k(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)=kf(u_1)$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

b) Ta có: $f(1,0,0)=(3,2);\ f(0;1;0)=(1;0);\ f(0;0;1)=(-1;1)$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tác là $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$

c) $x\in\operatorname{Ker} f\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\2x_1+x_3=0\end{cases}$

Đặt $x_3=t\Rightarrow x_1=\dfrac{-t}{2},x_2=\dfrac{5t}{2}\Rightarrow x=t\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$

$\Rightarrow\dim\operatorname{Ker} f=1$, cơ sở $\left\{\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2};1\right)\right\}$.

Bài 2. Cho ánh xạ $f:P_2[x]\to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p)=p+x^2p,\forall p\in P_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1=\{1,x,x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1'=\{1+x,2x,1+x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

Lời giải

a) Dễ thấy $\begin{cases} p_1, p_2 \in P_2[x] \text{ thì } f\left(p_1+p_2\right)=f\left(p_1\right)+f\left(p_2\right); f\left(kp_1\right)=kf\left(p_1\right) \\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ là ánh xạ tuyến tính.

b) Ta có $f(1)=1+x^2, f(x)=x+x^3, f\left(x^2\right)=x^2+x^4$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở E_1, E_2 là $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5\times 3}$

c) $f(1+x)=1+x+x^2+x^3, f(2x)=2x+2x^3, f\left(1+x^2\right)=1+2x^2+x^4$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1^{'}, E_2$ là $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 3 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $\mathrm{f}: \mathrm{P}_2[\mathrm{x}] \to \mathrm{P}_2[\mathrm{x}]$ thỏa mãn:

$f\left(1-x^2\right)=-3+3x-6x^2, f\left(3x+2x^2\right)=17+x+16x^2, f\left(2+6x+3x^2\right)=32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f\left(1+x^2\right)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf

Lời giải

a) Đề $\Rightarrow \left[\left[f(1)\right]_E \left[f(x)\right]_E \left[f\left(x^2\right)\right]_E\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 17 & 32 \\ 3 & 1 & 7 \\ -6 & 16 & 25 \end{bmatrix}$ (E là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$)

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với E là $A=\begin{bmatrix} -3 & 17 & 32 \\ 3 & 1 & 7 \\ -6 & 16 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \\ -7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\left[f\left(1+x^2\right)\right]_E = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \\ -7 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow f\left(1+x^2\right)=-13-5x-8x^2$

c)

$v=1+x+mx^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 : v=x_1\left(-8-x-7x^2\right)+x_2\left(9+3x+6x^2\right)+x_3\left(-5-4x-x^2\right)\left(\sum x_i^2>0\right)$

$\Leftrightarrow$ Xét hệ $\begin{cases} -8x_1+9x_2-5x_3=1 \\ -x_1+3x_2-4x_3=1 \\ -7x_1+6x_2-x_3=m \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -7 & 6 & -1 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & 27 & -7 \\ 0 & 15 & -27 & 7-8m \end{array}\right] \begin{pmatrix} 8L_2 - L_1 \to L_2 \\ 8L_3 - 7L_1 \to L_3 \end{pmatrix}$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & 27 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8m \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ thì $v \in \operatorname{Im} f$.

Bài 4. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)$ Tìm ma trân của f đối với cơ sở
$B=\{v_1=(1;0;0),v_2=(1;1;0),v_2=(1;1;1)\}$.

Lời giải

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là $S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với B là $S^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 5 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn:
$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2$, $f(3x+2x^2)=17+x+16x^2$, $f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2$.

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf

Lời giải

Cách làm tương tự bài số 3.

Bài 6. Cho $A=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&5\\6&-2&4\end{bmatrix}$ là ma trận của axtt $f:P_2[x]\to P_2[x]$ đối với cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3\}$

trong đó: $v_1=3x+3x^2, v_2=-1+3x+2x^2, v_3=3+7x+2x^2$

a) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.

b) Tìm $f(1+x^2)$.

Lời giải

a) $f(v_1)=v_1+2v_2+6v_3=3x+3x^2+2(-1+3x+2x^2)+6(3+7x+2x^2)=19x^2+51x+16$

$f(v_2)=3v_1-2v_3=3(3x+3x^2)-2(3+7x+2x^2)=5x^2-5x-6$

$f(v_3)=-v_1+5v_2+4v_3=-3x-3x^2+5(-1+3x+2x^2)+4(3+7x+2x^2)=15x^2+40x+7$

b) Gọi B_0 là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc E

S là ma trận chuyển cơ sở từ B sang $E \Rightarrow S^{-1}$ là ma trận chuyển từ E sang B)

$$.\Rightarrow B_0=S^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{bmatrix}0&-1&3\\3&3&7\\3&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&5\\6&-2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&3\\3&3&7\\3&2&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}239/24&-161/24&289/24\\201/8&-111/8&247/8\\61/12&-31/12&107/12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left[f\left(x^2+1\right)\right]_E=B_0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\56\\14\end{bmatrix}.$$

Bài 7. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}3&-2&1&0\\1&6&2&1\\-3&0&7&1\end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó:

$v_1=(0;1;1;1), v_2=(2;1;-1;-1), v_3=(1;4;-1;2), v_4=(6;9;4;2)$ và
$u_1=(0;8;8), u_2=(-7;8;1), u_3=(-6;9;1)$

a) Tìm $\left[f(v_1)\right]_{B'}\left[f(v_2)\right]_{B'},\left[f(v_3)\right]_{B^*},\left[f(v_4)\right]_{B'}$.

b) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$.

c) Tìm $f(2;2;0;0)$.

Lời giải

a) $\left[f\left(v_1\right)\right]_{E'}=\begin{bmatrix}3\\1\\-3\end{bmatrix};\left[f\left(v_2\right)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}-2\\6\\0\end{bmatrix};\left[f\left(v_3\right)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix};\left[f\left(v_4\right)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

b) $f\left(v_1\right)=3u_1+u_2-3u_3=(11;5;22)$

$f\left(v_2\right)=-2u_1+6u_2=(-42;32;-10)$

$f\left(v_3\right)=u_1+2u_2+7u_3=(-56;87;17)$

$f\left(v_4\right)=u_2+u_3=(-13;17;2).$

c) Giả sử (2 ; 2 ; 0 ; 0) $=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4\Rightarrow\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)=(1;1;0;0)$

$\Rightarrow f(2;2;0;0)\ =1.f\left(v_1\right)+1.f\left(v_2\right)+0.f\left(v_3\right)+0.f\left(v_4\right)=(-31;37;12).$

Bài 8. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$f(1+2x)=-19+12x+2x^2;\ f(2+x)=-14+9x+x^2;\ f\left(x^2\right)=4-2x-2x^2$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm rank (f).

Lời giải

Từ đề bài $\Rightarrow\begin{cases}f(1)+2f(x)=-19+12x^2+2x^2\\2f(1)+f(x)=-14+9x+x^2\\f\left(x^2\right)=4-2x-2x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=\dfrac{2\left(x^2+9x-14\right)-\left(2x^2+12x-19\right)}{3}=2x-\\f(x)=x^2+9x-14-2(2x-3)=x^2+5x-8\\f\left(x^2\right)=-2x^2-2x+4\end{cases}$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}-3&-8&4\\2&5&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}-3&-8&4\\2&5&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-3&-8&4\\0&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-3&-8&4\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(f)=\operatorname{rank}A=2$.

Bài 9. Cho V,V' là $2\mathrm{KGVT}n$ chiều và $\mathrm{f}:\mathrm{V}\rightarrow\mathrm{V}'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đuong:

a) f là đơn ánh.

b) f là toàn ánh.

c) f là song ánh.

Lời giải

+ Giả sử f đơn ánh$\Rightarrow \ker f=\{\theta\}$. Mà $\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f=-\dim V' \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f=\dim V'$

Mà $\operatorname{Im} f$ là KGVT con của $V' \Rightarrow \operatorname{Im} f \equiv V' \Rightarrow f$ toàn ánh.

Giả sử f toàn ánh$\Rightarrow \operatorname{Im} f \equiv V' \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f=\dim V'$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f=\dim V'-\dim \operatorname{Im} f=0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f=\{\theta\} \Rightarrow f$ đơn ánh

$\Leftrightarrow f$ toàn ánh hay các mệnh đề sau tương đương:

a) f đơn ánh

b) f toàn ánh

c) f song ánh.

Bài 10 (CK 20141). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-2x_2+x_3;x_1+x_2-x_3;mx_1-x_2+x_3)$, với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Lời giải

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A: A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & -1 & 1 \end{bmatrix}$

f là toàn ánh $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f=\dim \mathbb{R}^3=3 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A=3$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2m-1 & 1-m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2-L_1 \to L_2 \\ L_3-mL_1 \to L_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3(1-m)+2(2m-1) \end{bmatrix} (3L_3-(2m-1)L_2 \to L_3)$$

Vậy $r(A)=3 \Leftrightarrow 3(1-m)+2(2m-1) \neq 0 \Leftrightarrow 1+m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$

Bài 11. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

Lời giải

a) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=3\\ \lambda=-1\end{array}\right.$

$+\lambda=3\cdot v_A(3)$ là KG riêng của A, là KG nghiệm của $(A-3I)x=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0x_1+0x_2=0\\ 8x_1-4x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow x_2=2x_1\Rightarrow v_A(3)=\text{span}(\{1;2\}).$

$+\lambda=-1, v_A(-1)$ là KGN $(A+I)x=0\Leftrightarrow \begin{cases}4x_1+0x_2=0\\ 8x_1+0x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow (x_1;x_2)=(0;0)\Rightarrow v_A(-1)=\{\theta\}$

b) Cách làm tương tự câu a: $\lambda=4, v_B(4)=\text{span}\left(\left\{\frac{3}{2};1\right\}\right)$

c) $\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)\cdot\left(\lambda^2+4\lambda+5\right)\Rightarrow \det(C-\lambda I)=0\Leftrightarrow \lambda=1$

Với trị riêng $\lambda=1, v_C(1)$ là KG nghiệm của hệ $\begin{cases}x_1-x_2=0\\ 5x_1-4x_2+3x_3=0\\ -x_1-3x_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1;x_2;x_3)=t(-3;-3;1)\Rightarrow v_C(1)=\text{span}\{(-3;-3;1)\}$

d) $\det(D-I\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3\Rightarrow \det(C-\lambda I)=0\Leftrightarrow \lambda=2$

Với $\lambda=2, v_D(2)$ là nghiệm hệ $\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\ -4x_1+2x_2=0\\ -2x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow v_D(2)=\text{span}\left\{\left(\frac{1}{2};1;0\right);(0;0;0)\right\}.$

e) $\det(E-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-1)\Rightarrow$ Giá trị riêng $\lambda=0,\lambda=1$.

$+\lambda=0, v_E(0)$ là KGN $\begin{cases}4x_1-5x_2+2x_3=0\\ 5x_1-7x_2+3x_3=0\\ 6x_1-9x_2+4x_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\Rightarrow v_E(0)=\text{span}\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

$+\lambda=1, v_E(1)$ là KGN $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-8x_2+3x_3=0 \\ 6x_1-9x_2+3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1;x_2;x_3)=t(1;1;1) \Rightarrow v_E(1)=\text{span}((1;1;1)\}$

Bài 12. Cho biến đổi tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau:

$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(5a_0+6a_1+2a_2)-(a_1+8a_2)x+(a_0-2a_2)x^2.$

a) Tìm các trị riêng của f.

b) Tìm các vector riêng tương ứng của các trị riêng tìm được.

Lời giải

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\$ \Rightarrow |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-3)(\lambda+4)(\lambda-3)=-(\lambda-3)^2(\lambda+4)\ \$$

$\Rightarrow$ Các trị riêng $\lambda=3, \lambda=-4$

$+\lambda=3, v_A(3)$ là KGN $\begin{cases} 2x_1+6x_2+2x_3=0 \\ \quad -4x_2-9x_3=0 \\ x_1 \qquad +5x_3=0 \end{cases} \Rightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.(5;-2;1)$

$\Rightarrow v_A(3)=\text{span}\{(5;-2;1)\}.$

$+\ \lambda=-4, v_A(-4)$ là KGN $\begin{cases} 9x_1+6x_2+2x_3 & =0 \\ 3x_2-8x_3 & =0 \\ x_1+2x_3 & =0 \end{cases} \Rightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.\left(-2;\frac{8}{3};1\right)$

$\Rightarrow v_A(-4)=\text{span}\{(-2;{}^8\!/_3;1)\}.$

Bài 13. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với

a) $A=\begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vận dụng tính A^n

Lời giải

a) $\begin{vmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow$ trị riêng $\lambda = 1, \lambda = 2$

$+\lambda = 1 \Rightarrow v_f(1)$ là KGN $\begin{cases} -15x_2 + 12x_2 = 0 \\ -20x_1 + 16x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1; x_2) = t\left(\frac{4}{5};1\right) \Rightarrow v_f(1) = \text{span}\left\{\left(\frac{4}{5};1\right)\right\}$.

$+\lambda = 2 \Rightarrow v_f(2) = \text{span}\left\{\left(\frac{3}{4};1\right)\right\} n \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1} \cdot A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1} \cdot B \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C - \lambda I| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$\Rightarrow$ Các trị riêng $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2$

$+\lambda = 1, v_C(1) = \text{span}\{(1;0;0)\}$

$+\lambda = 0, v_C(0) = \text{span}\{(0;-1;1)\}$

$+\lambda = 2, v_C(2) = \text{span}\{(0;1;1)\}$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1} \cdot C \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$

$+\lambda = 3, v_D(3) = \text{span}\{(1;1;0)\}$
$+\lambda = 2, v_D(2) = \text{span}\{(1;0;0)\}$

Do D chỉ có tối đa 2 vector riêng ĐLTT nên D không chéo hóa được.

($D^{-1}AD = S$ có dạng chéo hóa $\Rightarrow A = D.S.D^{-1} \Rightarrow A^n = D.S^n.D^{-1}, S^n$ dang chéo).

Bài 14. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lời giải

a) $|A-\lambda I| = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$+\lambda = 1 \Rightarrow v_A(1) = \text{span}\{(1;1;1)\}$

$+\lambda = 2 \Rightarrow v_A(2) = \text{span}\left\{\left(\frac{2}{3};1;1\right)\right\}$

$+\lambda = 3 \Rightarrow v_A(3) = \text{span}\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};1\right)\right\}$

$\Rightarrow A$ chéo hóa được, ma trận chéo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $|B-\lambda I| = -(\lambda-5)^3 \Rightarrow \lambda = 5, v_B(5) = \text{span}\{(0;0;1)\}$

$\Rightarrow B$ không chéo hóa được, tức không tồn tại ma trận chéo đồng dạng với B.

c) $|C-\lambda I| = -\lambda^2(\lambda-1)$

$+\lambda = 0, v_C(0) = \text{span}\left\{(0;1;0);\left(\frac{-1}{3};0;1\right)\right\}$

$+\lambda = 1, v_C(1) = \text{span}\{(0;0;1)\}$

$\Rightarrow$ C chéo hóa được, ma trận chéo hóa $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 15. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

a) $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, x_1+x_2+2x_3)$.

b) $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1-x_2-x_3, x_1-x_2, -x_1+x_2+2x_3)$

Lời giải

a) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Chéo hóa $A: D^{-1} \cdot A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ với $D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở cần tìm $\{(-1;1;0);(-1;0;1);(1;1;1)\}$.

b) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

Chéo hóa $B: D^{-1}\cdot B\cdot D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3}\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$Cơ sở cần tìm $\{(2;1;1):(-2;-2-\sqrt{3};1);(-1;-2+\sqrt{3};1)\}$.

Bài 16 (CK 20172). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(1;2;-1)=(4;-2;-6),\ f(1;1;2)=(5;5;0),\ f(1;0;0)=(1;2;1)$

a) Tìm m để $\mathrm{u}=(6;-3;\mathrm{m})\in \mathrm{Im}(\mathrm{f})$.

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Lời giải

a) $u\in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u\in \operatorname{span}\{(4;-2;-6);(5;5;0);(1;2;1)\}$

$\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases}4x_1+5x_2+x_3=6\\ -2x_1+5x_2+2x_3=-3\\ -6x_1+x_3=m\end{cases}$ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{ccc|c}4 & 5 & 1 & 6\\ -2 & 5 & 2 & -3\\ -6 & 0 & 1 & m\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}4 & 5 & 1 & 6\\ 0 & 30 & 10 & 0\\ 0 & 30 & 10 & 4m+36\end{array}\right]\begin{pmatrix}4L_2+2L_1\to L_2\\ 4L_3+6L_1\to L_3\end{pmatrix}$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}4 & 5 & 1 & 6\\ 0 & 30 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4m+36\end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 4m+36=0\Leftrightarrow m=-9$ hay $u\in \operatorname{Im} f\Leftrightarrow m=-9$.

b) Ta có $\left[\left[f(e_1)\right]_E\ \ \left[f(e_2)\right]_E\ \ \left[f(e_3)_E\right]\right]\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ -2 & 5 & 2\\ -6 & 0 & 1\end{bmatrix}$ trong đó E là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, E=\{e_1;e_2;e_3\}$.

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với E là $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ -2 & 5 & 2\\ -6 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$

Ta có $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-1) \Rightarrow$ Trị riêng $\lambda = 0, \lambda = 1$

$+\lambda = 0, v_A(0) = \text{span}\{(-1;0;1)\}$

$+\lambda = 1, v_A(1) = \text{span}\left\{\left(\frac{-3}{2};\frac{-1}{2};1\right)\right\}$

Bài 17. Cho $f: V \to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f : V \to V$ có giá trị riêng λ^2.

Chứng minh rằng một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Lời giải

Đưa bải toán về: Ma trận A biết A^2 có trị riêng là λ^2.

Cần chứng minh A có trị riêng λ hoặc $-\lambda$.

Ta có: $\det\left(A^2 - \lambda^2 I\right) = 0 \quad \Leftrightarrow |A-\lambda I|.|A+\lambda I| = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |A-\lambda I| = 0 \\ |A+\lambda I| = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A$ có trị riêng λ hoặc $-\lambda$.(đpcm)

Bài 18 (CK 20161). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f\left(1+x+x^2\right)$. Tìm m để $v = 1-x+mx^2$ thuộc Ker f.

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Lời giải

a) $\left[f\left(1+x+x^2\right)\right]_E = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow f\left(1+x+x^2\right) = 3x - 2x^2$

$v = 1-x+mx^2 \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f\left(1-x+mx^2\right) = \theta \Leftrightarrow A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{bmatrix} = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4=0 \\ -3m+6=0 \\ 6m-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$

b) Chéo hóa A: $D^{-1} \cdot A \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ với $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & -3/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở cần tìm là $\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};1\right);\left(\frac{1}{2};0;1\right);\left(\frac{1}{4};\frac{-3}{4};1\right)\right\}$.

Bài 19. Cho A là ma trận kích thước $m\times n, B$ là ma trận kích thước $n\times p$. Chứng minh rằng $\text{rank}(AB)\le \min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}$, vor i $\text{rank}(A)=$ hạng của ma trận A.

Lời giải

$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W;$

A, B là ma trận của f, $ đối với cặp cơ sở tương ứng

$+\operatorname{Im}(f\circ g)\subset \operatorname{Im} f \Rightarrow r(AB)=\dim\operatorname{Im}(f\bullet g)\le \dim\operatorname{Im} f=r(A)$

$+\operatorname{Ker} g\subset \operatorname{Ker}(f\circ g)\Rightarrow \dim\operatorname{Im}(f\circ g)\le \dim\operatorname{Im} g$

(do $\dim U=\dim\operatorname{Im} g+\dim\operatorname{Ker} g=\dim\operatorname{Im}(f\circ g)+\dim\operatorname{Ker}(f\circ g)$)
$\Rightarrow r(AB)\le r(B)$

CHƯƠNG V. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG, KHÔNG GIAN EUCLIDE, ĐƯỜNG MẶT BẬC HAI

Bài 1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\mathbf{B}=\{u_1,u_2,\ u_3\}$ là $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-2&0&-2\\3&4&5\end{bmatrix}$. Cho $\mathrm{h}:\mathrm{V}\to\mathrm{V}$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathbf{B}$ là $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-3&-4&2\\1&-2&-3\end{bmatrix}$.

a) Xác định $f(u_1;u_3); f(u_1-u_2+u_3,2u_1+3u_2-u_3)$

b) Chứng minh ánh xạ $g(u,v)=f(u,h(v))$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở $\mathbf{B}$,

Lời giải

a) $f(u_1,u_3)=0$

$$f(u_1-u_2+u_3,2u_1+3u_2-u_3)=2f(u_1,u_1)+3f(u_1,u_2)-f(u_1,u_3)-2f(u_2,u_1)-3f(u_2,u_3)$$
$$+f(u_2,u_3)+2f(u_3,u_1)+3f(u_3,u_2)-f(u_3,u_3)=14$$

b)Kiểm chứng $g(\alpha u_1+\beta u_2,av_1+bv_2)=\alpha ag(u_1,v_1)+\alpha\beta g(u_1,v_2)+\beta ag(u_2,v_1)+\beta bg(u_2,v_2)$

$$g(u,v)=f(u,h(v))=h[u]_\beta^T\cdot A\cdot[h(v)]_\beta=[u]_\beta^T\cdot A\cdot B\cdot|v|_\beta\ g\beta AB$$

$\Rightarrow$ Ma trận của g đối với cơ sở β là AB.

Bài 2. Cho dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi $f(p(x),q(x))=p(1)q(2)$. Tìm ma trận và biểu thức của f đối với cơ sở chính tắc.

Lời giải

$f(1,1)=1;\ f(1,x)=2;\ f(1,x^2)=4$

$f(x,1)=1;\ f(x,x)=2;\ f(x,x^2)=4$

$f(x^2,1)=1;\ f(x^2,x)=2;\ f(x^2,x^2)=4$

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $\begin{bmatrix}1&2&4\\1&2&4\\1&2&4\end{bmatrix}$

$$f(a_1x^2+b_1x+c_1,a_2x^2+b_2x+c_2)=4a_1a_2+2a_1b_2+a_1c_2+4b_1a_2+2b_1b_2+b_1c_2+4c_1a_2+2c_1b_2+c_1c_2.$$

Bài 3. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ:

$\omega_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$. $\omega_2(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$.

a) Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

b) Xét xem các dạng toàn phương xác định dương, xác định âm không?

Lời giải

+ $w_1=x_1^2+5x_2^2-4x_3^20+2x_1x_2-4x_1x_3$

$=\left[x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2\right]+\left[5x_2^2-4x_3^2-(x_2-2x_3)^2\right]$

$=(x_1+x_2-2x_3)^2+(4x_2^2-8_3^2+4x_2x_3)=(x_1+x_2-2x_3)^2+(2x_2+x_3)^2-9x_3^2=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$y_1=x_1+x_2-2x_3, y_2=2x_2+x_3, y_3=3x_3$

$\rightarrow w_1$ không xác định dương, không xác định âm

+ $w_2=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$

Đặt $x_1=y_1-y_2, x_2=y_1+y_2, x_3=y_3 \Rightarrow w_2=y_1^2-y_2^2+4(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)\cdot y_3$

$=y_1^2+y_1(4y_3+y_3)-y_2^2-4y_2y_3+y_2y_3=y_1^2+5y_1y_3-y_2^2-3y_2y_3$

$=\left(y_1+\dfrac{5}{2}y_3\right)^2-\left(y_2+\dfrac{3}{2}y_3\right)^2-4y_3^2$

$=u_1^2-u_2^2-u_3^2\left(u_1=y_1+\dfrac{5}{3}y_3;u_2=y_2+\dfrac{3}{2}y_3;u_3=4y_3\right)$

$\rightarrow w_2$ không có dấu xác định.

Bài 4. Xác định a đề các dạng toàn phương xác định dương:

a) $5x_1^2+x_2^2+ax_3{}^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $2x_1{}^2+x_2{}^2+3x_3{}^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$.

c) c) $x_1{}^2+x_2{}^2+5x_3{}^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

Lời giải

a) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$

$\Delta_1=5, \Delta_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1, \Delta_3=|A|=a-2$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow a>2$

b) Ma trận của f đối với cơ sở chỉnh tắc là $B=\begin{bmatrix}2 & a & 1\\ a & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$\Delta_1=2;\Delta_2=2-a^2;\Delta_3=3\cdot\left(2-a^2\right)-1=5-3a^2$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow \begin{cases}2-a^2>0\\ 5-3a^2>0\end{cases} \Leftrightarrow a^2<\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{15}}{3}<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

c) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $C=\begin{bmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$

$\Delta_1=1;\Delta_2=1-a^2;\Delta_3=-5a^2-4a$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow \begin{cases}1-a^2>0\\ -5a^2-4a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<a<1\\ -\dfrac{4}{3}<a<0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}<a<0.$

Bài 5. Cho dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$<\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(y_1,y_2,y_3\right)>=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+ax_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_2+3x_3y_3$

(a là tham số). Tìm ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm điều kiện của a để dạng song tuyến tính là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Lời giải

Ma trận của dạng song tuyến tính đã cho đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$ là $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & a & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$

Dạng song tuyến tính trên là tích vô hướng nếu nó xác định dương
$\left(\Delta_1=2;\Delta_2=2a-1;\Delta_3=6a-11\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-1>0\\ 6a-11>0\end{cases} \Leftrightarrow a>\dfrac{11}{6}$

Bài 6. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị một dạng song tuyến tính như sau:

$f(x,y)=\left(x_1,x_2,x_3\right)A\left(y_1,y_2,y_3\right)^t$ với: $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & a^2 & 2a\end{bmatrix}$ và $x=\left(x_1,x_2,x_3\right),y=\left(y_1,y_2,y_3\right)$. Xác định a để $f(x,y)$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Lời giải

$f(x;y)$ là 1 tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f$ xác định dương (1)

Mà $\Delta_1 = 4; \Delta_2 = 8; \Delta_3 = -18a^2 + 16a - 11$

Nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ -18a^2 + 16a - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing$

Vậy không tồn tại a thỏa mãn.

Bài 7. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $\mathrm{B} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n; v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Đặt $t\langle u,v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

a) Chứng minh $< u,v >$ là một tích vô hướng trên V .

b) Áp dụng cho trường hợp $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, với $\mathrm{e}_1 = (1;0;1), \mathrm{e}_2 = (1;1;-1), \mathrm{e}_3 = (0;1;1), \mathrm{u} = (2;-1;-2), \mathrm{v} = (2;0;5)$. Tính $< u, \mathrm{v} >$.

c) Áp dụng cho trường hợp $\mathrm{V} = \mathrm{P}_2[\mathrm{x}]$, với $\mathrm{B} = \{1; \mathrm{x}; \mathrm{x}^2\}, \mathrm{u} = 2 + 3\mathrm{x}^2, \mathrm{v} = 6 - 3\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.

d) Áp dụng cho trường hợp $\mathrm{V} = \mathrm{P}_2[\mathrm{x}]$, với $\mathrm{B} = \{1+\mathrm{x}; 2\mathrm{x}; \mathrm{x} - \mathrm{x}^2\}, \mathrm{u} = 2 + 3\mathrm{x}^2, \mathrm{v} = 6 - 3\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2$. Tính $\langle u, v\rangle$.

Lời giải

a) Kiểm chứng: $\cdot\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

- $\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle = \alpha\langle u_1, v\rangle + \beta\langle u_2, v\rangle$

- $\langle u,u\rangle \geq 0 \forall u$ và $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$.

b) $B_0 = \{(1;0;1);(1;1;-1);(0;1;1)\}$ là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$[u]_{R_0} = B_0^1 \cdot [u]_E$ (B_0^1 là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B_0)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (a_1; a_2; a_3) = (1;-3;1)$$

Tương tự $(b_1; b_2; b_3) = (2;5;7) \Rightarrow \langle u,v\rangle = -6$

c) $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; [v]_B = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle u,v\rangle = 2 \cdot 6 + 0.(-3) + 3 \cdot (-3) = 3$

d) $[u]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, [v]_n = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle u,v\rangle = 2.6 + 5\cdot(-3) + (-3)^2 = 6$.

Bài 8. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $<p,q>$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $<p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $<p,q>= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $<p,q>$ với $p = 2-3x+5x^2-x^3 . q = 4+x-3x^2+2x^3$

Lời giải

a) $\langle p,p\rangle = p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) \ge 0$

$\langle p,p\rangle = 0 \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0$

Chọn $p = x(x-1)(x-2) \in P_3[x]$ thì $p \ne 0$ và $\langle p,p\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle p,q\rangle$ không là tích vô hướng

b) Có là tích vô hướng $\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle$

$\langle \alpha p_1 + \beta p_2, q\rangle = \alpha\langle p_1,q\rangle + \beta\langle p_2,q\rangle$
$\langle p,p\rangle \ge 0; = khi \Leftrightarrow \text{p=0)}$

c) Có là tích vô hướng ($\int_{-1}^{1} p^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$)

Với $p = 2-3x+5x^2-x^3; q = 4+x-3x^2+2x^3$

$\langle p,q\rangle = 8+12+80+374 = 474$

$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1}\left(2-3x+5x^2-x^3\right)\left(4+x-3x^2+2x^3\right)dx = \dfrac{1466}{105}$.

Bài 9. Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:

a) $\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2\left(\| u \|^2 + \| v \|^2\right)$.

b) $u \perp v \Leftrightarrow \| u+v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2, \forall u,v \in V$.

Lời giải

a) $\| u+v \|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle$

$= \| u \|^2 + \| v \|^2 + 2\langle u,v\rangle \; \| u-v \|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2\langle u,v\rangle$

$\Rightarrow \| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = 2(=\| u \|^2 + \| v \|^2)$

b) $\| u+v \| = \| u \|^2 + \| v \|^2 + 2\langle u,v \rangle$

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u,v \rangle = 0 \Leftrightarrow \| u+v \| = \| u \|^2 + \| v \|^2$: đpcm

Bài 10. Cho cơ sở $B = \{(1;1;-2),(2;0;1),(1;2;3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của véc tơ $u = (5;8;6)$ đối với cơ sở B'.

Lời giải

$v_1 = (1;1;-2); v_2 = (2;0;1); v_3 = (1;2;3)$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (2;0;1) - 0u_1 = (2;0;1) \Rightarrow u_2 = \frac{\overline{u_2}}{\|u_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\overline{u_3} = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = (1;2;3) - \frac{-3}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) - \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}};0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2};\frac{5}{2};3\right) \Rightarrow u_3 = \frac{\overline{u_3}}{\|u_3\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{62}};\frac{5}{\sqrt{62}};\frac{6}{\sqrt{62}}\right)$$

$$\Rightarrow B' = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$[u]_{z'} = \left(\langle u,u_1 \rangle \quad \langle u,u_2 \rangle \quad \langle u,u_3 \rangle\right)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{16}{\sqrt{5}} \quad \frac{71}{\sqrt{62}}^T\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 16/\sqrt{5} \\ 71/\sqrt{62} \end{bmatrix}$$

Bài 11. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $\mathrm{u}_1 = (6;3;-3;6), \mathrm{u}_2 = (5;1;-3;1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Lời giải

$u_1 = (6;3;-3;6); u_2 = (5;1;-3;1)$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\overline{v_2} = v_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (5,1,-3,1) - \frac{16}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{5},\frac{-3}{5},\frac{-7}{5},\frac{-11}{5}\right) \Rightarrow v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|v_2\|} = \left(\frac{9}{2\sqrt{65}},\frac{-3}{2\sqrt{65}},\frac{-7}{2\sqrt{65}},\frac{-11}{2\sqrt{65}}\right)$$

$$\Rightarrow B=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{9}{2\sqrt{65}},\frac{-3}{2\sqrt{65}},\frac{-7}{2\sqrt{65}},\frac{-11}{2\sqrt{65}}\right)\right\}$$

$\Rightarrow \operatorname{span} B=\operatorname{span}\{u_1,u_2\}$.

Bài 12. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $<p,q>=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$ với $p,q\in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở $B=\{1;x;x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn A.

b) Tìm $[r]_A$ biết $r=2-3x+3x^2$

Lời giải

a) Đặt $v_1=1,v_2=x,v_3=x^2$

- $u_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- $\overline{u_2}=v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1=x=0.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=x\Rightarrow u_2=\dfrac{\overline{u_2}}{\|u_2\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$

- $\overline{u_3}=v_3-\langle v_3,u_1\rangle u_1-\langle v_3,u_2\rangle u_2=x^2-\dfrac{1}{3}\Rightarrow u_3=\dfrac{\overline{u_3}}{\|u_3\|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)$

b) $[r]_A=\left[\langle r,u_1\rangle\quad\langle r,u_2\rangle\quad\langle r,u_3\rangle\right]^T\left(A=\{u_1,u_2,u_3\}\right)=\begin{bmatrix}3\sqrt{2}\\-\sqrt{6}\\2\sqrt{10}/5\end{bmatrix}$

Bài 13. Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian sinh bởi véc tơ v:

a) $u=(1;3;-2;4),v=(2;-2;4;5)$

b) $u=(4;1;2;3;-3),v=(-1;-2;5;1;4)$

Lời giải

a) $w_1=\dfrac{\langle u,v\rangle\cdot v}{\langle v,v\rangle}=\dfrac{8}{49}(2,-2,4,5)=\left(\dfrac{16}{49},\dfrac{-16}{49},\dfrac{32}{49},\dfrac{40}{49}\right)$

b) $w_2=\dfrac{\langle u,v\rangle\cdot v}{\langle v,v\rangle}=\dfrac{-5}{47}(-1,-2,5,1,4)=\left(\dfrac{5}{47},\dfrac{10}{47},\dfrac{-25}{47},\dfrac{-5}{47},\dfrac{-20}{47}\right)$.

Bài 14. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véc tơ $u=(3;-2;1),v_1=(2;2;1),v_2=(2;5;4)$. Đặt $W=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian W.

Lời giải

+ Trực chuẩn hóa $\{v_1,v_2\}$

$$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overline{u_2}=v_2-\langle v_2,u_1\rangle u_1=(2,5,4)-6\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=(-2,1,2)\Rightarrow u_2=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

+ Gọi w là hình chiếu của u lên $W=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$

$$\Rightarrow w=\langle u,u_1\rangle u_1+\langle u,u_2\rangle u_2=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+(-2)\cdot\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=(2,0,-1)$$

Bài 15 (CK20161). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véc tơ $u=(1;2;-1)$, $\mathrm{v}=(3;6;3)$ và đặt $\mathrm{H}=\{\mathrm{w}\in\mathbb{R}^3 |\ \mathrm{w}\perp\mathrm{u}\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Lời giải

a) $w\in H\Leftrightarrow w_1+2w_2-w_3=0(\langle w,u\rangle=0)$

$\Leftrightarrow w=a(1,0,1)+b(-2,1,0)\Rightarrow H=\operatorname{span}\{(1,0,1);(-2,1,0)\}$

$$v_1=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$

$$\overline{v_2}=(-2,1,0)-\sqrt{2}(-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(-2,1,0)+(1,0,1)=(-1,1,1)$$

$\Rightarrow v_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow B=\{v_1,v_2\}$ là 1 cơ sở trực chuẩn của H

b) u là hình chiếu trực giao của v lên $H(v=(3,6,3))$

$$u=\langle v,v_1\rangle v_1+\langle v,v_2\rangle v_2=3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=(1,2,5).$$

Bài 16. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ $\mathrm{v}_1=(1;1;0;0;0),\mathrm{v}_2=(0;1;-1;2;1),\mathrm{v}_3=(2;3;-1;2;1)$. Gọi $\mathrm{V}=\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^5 |\ \mathrm{x}\perp\mathrm{v}_i,\mathrm{i}=1;2;3\}$

a) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm dimV.

Lời giải

Ta có: $x\in V\Leftrightarrow\langle x,v_i\rangle=0,i=\overline{1,3}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_3+2x_4+x_5=0\\2x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=0\end{cases}$

$\Rightarrow x=\left(-x_2,x_2,x_3,x_4,-x_2+x_3-2x_4\right)$

$=x_2(-1,1,0,0,-1)+x_3(0,0,1,0,1)+x_4(0,0,0,1,-2)$

$\Rightarrow \dim V=3$.

Gọi V là KGVT con của $\mathbb{R}^5$: $\begin{cases} v_1',v_2'\in V\Rightarrow\left\langle v_1',v_i\right\rangle=\left\langle v_2',v_i\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle v_1'+v_2',v_i\right\rangle=0\Rightarrow v_1'+v_2'\in V\\ kv_1'\in V,k\in\mathbb{R}.\end{cases}$

Bài 17. Cho V là không gian Euclide n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $\mathrm{V}_2=\left\{\mathrm{x}\in\mathrm{V}|\ \mathrm{x}\perp\mathrm{v},\quad\forall\mathrm{v}\in\mathrm{V}_1\right\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véc tơ con của V .

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$.

Lời giải

a) Chứng minh: $a,b\in V_2\Rightarrow\langle a,V\rangle=\langle b,V\rangle=0\forall v\in V_1\Rightarrow\langle a+b,v\rangle=0\Rightarrow a+b\in V_2$

$a\in V_2,k\in\mathbb{R}\Rightarrow\langle ka,V\rangle=k\langle a,V\rangle=0\forall v\in V_1\Rightarrow ka\in V_2$

$\Rightarrow V_2$ là KGVT con của V

b) Xét $B_1=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_m\right\}$ là cơ sở trực chuẩn của V_1

Bổ sung $n-m$ vector để được co sở trực chuẩn của V là $\left\{x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n\right\}$

Đặt $W=\operatorname{span}\left\{x_{m+1},\ldots,x_n\right\}$

- $w\in W\Rightarrow w=\sum_{i=m+n}^{n}\lambda_i x_i\Rightarrow\left\langle w,x_i\right\rangle=0\forall i=\overline{1,m}\Rightarrow w\in V_2\Rightarrow W\subset V_2$

$v\in V_2\Rightarrow v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$. Mà $\left\langle v,x_i\right\rangle=0\forall i=\overline{1,m}\Rightarrow\alpha_i=0\forall i=\overline{1,m}$

$\Rightarrow v=\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i\cdot x_i\Rightarrow v\in W\Rightarrow V_2\subset W$

Do vậy $W=V_2$, nên V_1,V_2 bủ nhau

Khi đó dễ thấy $\dim V_2=n-m$.

Bài 18. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}7&-2&0\\-2&6&2\\0&2&5\end{bmatrix}$

Lời giải

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A-\lambda I|=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

- $\lambda=0\Rightarrow v_A(0)=\text{span}\{(0;-1;1)\}\Rightarrow$ vector riêng: $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- $\lambda=1\Rightarrow v_A(1)=\text{span}\{(1;0;0)\}\Rightarrow$ vector riêng: $(1;0;0)$

- $\lambda=2\Rightarrow v_A(2)=\text{span}\{(0,1,1)\}\Rightarrow$ vector riêng: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có 3 vector riêng trực chuẩn $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);(1;0;0);\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ úng với các trị riêng 0,1,2

$\Rightarrow P^TAP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ vói $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}\Rightarrow [B-\lambda I]=(\lambda-25)(\lambda+25)$

- $\lambda=25$ ta có vector riêng trực chuẩn: $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

- $\lambda=-25$ ta có vector riêng trực chuẩn $\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow P^TBP=\begin{bmatrix}25&0\\0&-25\end{bmatrix}$ với $P=\begin{bmatrix}3/5&-1/5\\4/5&3/5\end{bmatrix}$

c) $P^TCP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ với $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$

d) $P^TDP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{bmatrix}$ với $P=\begin{bmatrix}-1/3&2/3&-2/3\\-2/3&1/3&2/3\\2/3&2/3&1/3\end{bmatrix}$

Bài 19. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+2x_1x_2$

b) $7{x_1}^2+6{x_2}^2+5{x_3}^2-4x_1x_2+4x_2x_3$

Lời giải

a) Đặt $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$ là $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Ta có $|A-\lambda I|=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$+\lambda=0\Rightarrow v_A(0)=\text{span}\{(-1,1,0)\}$, trực chuẩn hóa được $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

$+\lambda=1\Rightarrow v_A(1)=\text{span}\{0,0,1\}$, trực chuẩn hóa được $(0,0,1)$

$+\lambda=2\Rightarrow v_A(2)=\text{span}\{1,1,0\}$, truục chuẩn hóa được $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

Do vậy $P^rAP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ vói $P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$

Hay $f(x)=y_2^2+2y_3^2[x]_B=[y_1\quad y_2\quad y_3]^T$, $B=\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);(0,0,1);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$

b) Tương tự câu a

$f(x)=3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2[x]_B=[y_1,y_2,y_3]^T$, $B=\left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right);\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right);\left(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Bài 20. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

a) $2x^2-4xy-y^2+8=0$.

b) $x^2+2xy+y^2+8x+y=0$.

c) $11x^2+24xy+4y^2-15=0$.

d) $2x^2+4xy+5y^2=24$.

Lời giải

a) Dạng toàn phương $w=2x^2-4xy-y^2$ có ma trận $A=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&-1\end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^TAP=\begin{bmatrix}-2&0\\0&3\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

Đặt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $-2x'^2 + 3y'^2 = 8 \Rightarrow$ hyperbol

b) Dạng toàn phương $w = x^2 + 2xy + y^2$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Đặt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $x'^2 + \frac{9}{2}x' - \frac{7}{2}y' = 0 \Rightarrow$ parabol

c) $A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$ có 2 tụ riêng $20, -5$

$\Rightarrow$ có thể đưa dạng toàn phương $11x^2 + 24xy + 4y^2$ về $20x'^2 - 5y'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $20x'^2 - 5y'^2 - 15 = 0 \Rightarrow$ hyperbol

d) $(31\sqrt{8})x'^2 + (3 - \sqrt{8})y'^2 = 24 \Rightarrow$ elipse.

Bài 21. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4$.

b) $5x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2xy = 1$.

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 16$.

Lời giải

a) Ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = x_2'^2 + 2x_3'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong: $x_2'^2 + 2x_3'^2 = 4 \Rightarrow$ ellipsoid.

b) Ma trận của dạng toàn phương $w=5x^2+y^2+z^2-6xy+2xz-2yz=1$ là $A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Có 2 trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ là nghiệm của $-\lambda^3+7\lambda^2-4=0$

Chéo hóa trực giao A đưa dạng toàn phương về dạng $w=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2=1\Rightarrow$ Hyperboloid 1 tầng $(\lambda_1,\lambda_2>0,\lambda_3<0)$.

c) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$ có 3 trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ là nghiệm $-\lambda^3+7\lambda^2-14\lambda+7=0$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2=16\Rightarrow$ ellipsoid.

Bài 22. Cho $Q(x_1,x_2,x_3)=9x_1^2+7x_2^2+11x_3^2-8x_1x_2+8x_1x_3$. Tìm

$\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{\text{Max}} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+Mx_2^2+x_3^2=16}{\text{Min}}(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1,x_2,x_3)$ đạt max, min.

Lời giải

$A=\begin{bmatrix}9 & -4 & 4\\ -4 & 7 & 0\\ 4 & 0 & 11\end{bmatrix}$ là ma trận của Q đối với cơ sở chính tắc

Chéo hóa trực giao $A: P^r AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}2/3 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & -1/3\\ -1/3 & -2/3 & 2/3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q=3y_1^2+9y_2^2+15y_3^2$ vs $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

Mà P trực giao $\langle x,x\rangle=\langle Py,Py\rangle=(Py)^T.Py=y^T.P^T.P.y=y^T.y=\langle y,y\rangle\Rightarrow\sum x_i^2=\sum y_i^2=16$

$\Rightarrow 3.16\le Q\le 15.16$

$\min Q=3.16\Leftrightarrow x=P.\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \max Q=15.16\Leftrightarrow x=P.\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$

Bài 23. Cho A,B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có tất cả các giá trị riêng đều dương. Chứng minh $A+B$ cũng có tất cả các giá trị riêng đều dương.

Lời giải

Xét f; g là 2 dạng toàn phương ứng với ma trận A,B (đối với cơ sở chính tắc)

Do A, B vuông, đối xứng cấp n có tất cả trị riêng đều dương $\Leftrightarrow$ Dạng toàn phương f, g tương ứng xác định dương.

$\Rightarrow f+g$ xác định đương. Mà $A+B$ là ma trận của $f+g$ đối với cơ sở chính tắc

$\Rightarrow A+B$ có tất cả trị riêng dương (đpcm).