Đề thi Giải tích 3 – CK 20193 – nhóm ngành 2
Lời giải: Nguyễn Tiến Được

Câu 1:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n}.\,Dễ\ thấy\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-3}.\left(-\frac{3n}{n+3}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3n}{n+3}}=e^{-3}\neq 0$$

$\to Chuỗi\ phân\ kỳ$

$b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}.\ \ Dễ\ thấy\ \frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\geq 0\ \forall n\geq 1$$

$$\frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2}.\frac{1}{n}.\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\ khi\ n\to\infty$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\ là\ chuỗi\ Riemann\ hội\ tụ$$

$\to Chuỗi\ đã\ cho\ hội\ tụ$

Câu 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^{2}+2}\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)^{n}.\,Đặt\ t=\frac{4x+1}{4x-1}\to Chuỗi\ trở\ thành\ chuỗi\ lũy\ thừa$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^{2}+2}\ t^{n}\ có\ bán\ kính\ hội\ tụ\ là$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n^{2}+2}.\frac{(n+1)^{2}+2}{n+1}\right|=1$$

$$+)\ Tại\ t=1\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^{2}+2}\ là\ chuỗi\ đan\ dấu\ hội\ tụ\ theo\ TC\ Leibnitz$$

$+)\ Tại\ t=-1$

$$\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{2}+2}\ là\ chuỗi\ dương\ phân\ kỳ\ theo\ TCSS\ với\ chuỗi\ điều\ hòa$$

$$\to Miền\ hội\ tụ-1<t\leq 1\to -1<\frac{4x+1}{4x-1}\leq 1\ \ \left(x\neq\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{8x}{4x-1} > 0 \\ \dfrac{2}{4x-1} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{4} \text{ hoặc } x < 0 \\ x < \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy miền hội tụ cần tìm là $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$

Câu 3:

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $(x-1)$

Đặt $t = x - 1 \rightarrow f(t) = \dfrac{t^2+2t}{t+3} = (t+2)\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{t}}\right)$

$\rightarrow f(t) = (t+2).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3}{t}\right)^n$ *với* $\left|\dfrac{3}{t}\right| < 1$

hay $f(x) = (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.3^n.(x-1)^{-n}$ *với* $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| < \dfrac{1}{3}$

Câu 4:

$L\{(e^{-t}-t)^2\} = L\{e^{-2t} - 2e^{-t}t + t^2\} = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{2}{(s+1)^2} + \dfrac{2}{s^3}$

Câu 5:

$a)\ y' - \tan x\, y = \dfrac{1}{\cos x}$

PT có nghiệm $y = e^{\int \tan x\, dx}\left(\int \dfrac{1}{\cos x} e^{\int -\tan x dx} dx + C\right)$

$\rightarrow y = e^{-\ln|\cos x|}\left(\int \dfrac{1}{\cos x} e^{\ln|\cos x|} dx + C\right) = \dfrac{1}{\cos x}(x + C)$

Vaayj PT đã cho có nghiệm $y = \dfrac{x}{\cos x} + \dfrac{C}{\cos x}$

$b)\ y'' + 4y = 3\sin x$

Xét PT thuần nhất $y'' + 4y = 0$ *có PT đặc trưng* $k^2 + 4 = 0 \rightarrow k = \pm 2i$

$\rightarrow \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$f(x) = 3\sin x$ *có* $\pm\, i$ *ko là nghiệm của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^* = A\sin x + B\cos x \rightarrow (y^*)' = A\cos x - B\sin x$

$\rightarrow (y^*)'' = -A\sin x - B\cos x$

Thay vào PT ban đầu ta được

$-A\sin x - B\cos x + 4A\sin x + 4B\cos x = 3\sin x$

$\rightarrow \begin{cases} -A + 4A = 3 \\ -B + 4B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow y^* = \sin x$

$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$

$c)\ y' + \frac{1}{x} y = 3x^2 y^3$

$+)\ y = 0\ là\ nghiệm\ kỳ\ dị$

$+)\ y \neq 0 \rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{x} . \frac{1}{y^2} = 3x^2$

$Đặt \frac{1}{y^2} = t \rightarrow t' = -2. \frac{y'}{y^3} \rightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{t'}{-2}$

$\rightarrow \frac{t'}{-2} + \frac{1}{x} t = 3x^2 \rightarrow t' - \frac{2}{x} t = -6x^2$

$PT\ này\ có\ nghiệm\ t = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int -6x^2 e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x^2(-6x + C)$

$= -6x^3 + Cx^2$

$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{-6x^3 + Cx^2}}$

$d)\ xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \rightarrow y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = 0$

$AD\ CT\ Lioville$:

$y_2(x) = y_1(x). \int \frac{1}{y_{1(x)}^2} . e^{\int -p(x) dx} dx$

$\rightarrow y_2(x) = \sin(x^2) \int \frac{1}{\sin^2(x^2)} . e^{\int \frac{1}{x} dx} dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) \int \frac{1}{\sin^2(x^2)} d(x^2)$

$\rightarrow y_2(x) = \frac{1}{2} \sin(x^2) [-\cot(x^2) + C] = -\frac{1}{2} \sin(x^2) . \cot(x^2) + \frac{C}{2} \sin(x^2)$

$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = C_1 \sin(x^2) + C_2 \sin(x^2) . \cot(x^2) + \frac{C}{2} \sin(x^2)$

Câu 6: Lời giải Nguyễn Đức Dương

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0; y^{(3)}(0) = 1 \end{cases}$$

$Tác\ động\ toán\ tử\ Laplace\ vào\ 2\ vế\ của\ PT\ ta\ được$:

$s^4 Y(s) - s^2 - 1 - 4s^3 Y(s) - 4 + 6s^2 Y(s) - 6 - 4sY(s) + Y(s) = 0$

$\rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 7}{s^4 - 4s^3 + 6s^2 - 4s + 1} = \frac{s^2 - 2s + 1 + 6(s-1) + 12}{(s-1)^4}$

$\rightarrow y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{6}{(s-1)^3} + \frac{12}{(s-1)^4} \right\} = e^t t + 3e^t t^2 + 2e^t t^3$