BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

ĐẠI HỌC THĂNG LONG

Học kỳ I, năm học 2005 - 2006

MỤC LỤC

Trang

Bài 1

Khái niệm trường

1.1 Các tính chất cơ bản của số thực

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$. Ta đã biết hai phép toán cộng (+) và nhân (.) thông thường trên $\mathbb{R}$ có các tính chất sau:

- Phép cộng có tính chất kết hợp: $(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$,
- Có số $0 \in \mathbb{R}$ sao cho: $0+a = a+0 = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$,
- Với mỗi số thực a có số thực đối của a là $-a$ sao cho: $a+(-a) = (-a)+a = 0$,
- Phép cộng có tính chất giao hoán: $a+b = b+a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$,
- Phép nhân có tính chất kết hợp: $(a.b).c = a.(b.c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$,
- Phép nhân có tính chất giao hoán: $a.b = b.a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$,
- Có số 1 sao cho với mọi số thực a ta có: $a.1 = 1.a = a$,
- Với mỗi số thực $a \neq 0$ luôn có số thực $\frac{1}{a}$ sao cho $a.\frac{1}{a} = 1$,
- Phép nhân phân phối đối với phép cộng: $a.(b+c) = a.b+a.c$ và $(b+c).a = b.a+c.a$ với mọi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Tập các số thực với hai phép toán có các tính chất nói trên đủ để cho phép ta tiến hành các tính toán trong thực tế và nhìn chung, một tập hợp nào đó được trang bị hai phép toán thỏa mãn các tính chất nói trên có thể coi là "đủ mạnh" để chúng ta xem xét một cách cụ thể.

1.2 Định nghĩa trường

Định nghĩa 1.2.1
Cho tập hợp $\mathbb{K}$ có ít nhất hai phần tử. Trên $\mathbb{K}$ có hai phép toán là phép cộng (ký hiệu là $+$) và phép nhân (ký hiệu là $.$ hoặc $\times$). $\mathbb{K}$ cùng với hai phép toán đó được gọi là một trường nếu thỏa mãn 9 tính chất sau:

1. *Phép cộng có tính chất kết hợp:* $(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$.
2. *Có phần tử* $0 \in \mathbb{K}$ *sao cho:* $0 + a = a + 0 = a,\ \forall a \in \mathbb{K}$. *Phần tử* 0 *được gọi là phần tử trung lập.*
3. *Với mỗi phần tử* $a \in \mathbb{K}$ *luôn tồn tại một phần tử* $a' \in \mathbb{K}$ *sao cho:* $a + (a') = (a') + a = 0$. *Phần tử* a' *được gọi là phần tử đối của* a *và được ký hiệu là* $-a$.
4. *Phép cộng có tính chất giao hoán:* $a + b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$.
5. *Phép nhân có tính chất kết hợp:* $(a.b).c = a.(b.c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$.
6. *Có phần tử* $1 \in \mathbb{K}$ *sao cho với mọi phần tử* a *ta có:* $a.1 = 1.a = a$. *Phần tử* 1 *được gọi là phần tử đơn vị của phép nhân trên* $\mathbb{K}$.
7. *Với mỗi phần tử* $a \neq 0$ *luôn có phần tử* $a' \in \mathbb{K}$ *sao cho* $a.a' = a'.a = 1$. *Phần tử* a' *được gọi là phần tử nghịch đảo của* a *và được ký hiệu là* a^{-1}.
8. *Phép nhân có tính chất giao hoán:* $a.b = b.a,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$.
9. *Phép nhân phân phối đối với phép cộng:* $a.(b+c) = a.b + a.c$ *và* $(b+c).a = b.a + c.a,\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$.

Các tính chất trên còn được gọi là các tiên đề của trường.

Ví dụ:

- Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ với phép toán cộng và nhân thông thường là một trường.

Xét các tập hợp số $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ cùng hai phép toán cộng và nhân thông thường.

- Phần tử $4 \in \mathbb{N}$ nhưng không có phần tử $a \in \mathbb{N}$ sao cho $4 + a = 0$ nên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ không phải là một trường (tiên đề 3 không được thoả mãn).
- Số nguyên $2 \neq 0$ nhưng không có một số nguyên x nào thỏa mãn $2.x = 1$, do đó tập số nguyên $\mathbb{Z}$ không phải là một trường (tiên đề 7 không được thoả mãn).

- Tập hợp số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ với các phép toán cộng và nhân thông thường là một trường vì nó thỏa mãn cả 9 tiên đề của trường. Số 0 chính là phần tử trung lập, số 1 chính là phần tử đơn vị của trường $\mathbb{Q}$. Nếu $a \in \mathbb{Q}$ thì đối của a là $-a$, nghịch đảo của $a \neq 0$ là $\dfrac{1}{a}$.

1.3 Một số tính chất của trường

Cho $\mathbb{K}$ là một trường, $a, b, c \in \mathbb{K}$, khi đó:

Tính chất 1.3.1 (Luật giản ước đối với phép cộng)
Nếu $a + b = a + c$ (1) *thì* $b = c$.

Chứng minh: Do $\mathbb{K}$ là một trường, $a \in \mathbb{K}$ nên a có đối là $-a \in \mathbb{K}$. Cộng về phía bên trái của đẳng thức (1) với $-a$, ta được:

$$
\begin{aligned}
& (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) && \\
\Rightarrow\quad & [(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c && \text{(theo tiên đề 1)} \\
\Rightarrow\quad & 0 + b = 0 + c && \text{(theo tiên đề 3)} \\
\Rightarrow\quad & b = c && \text{(theo tiên đề 2).}
\end{aligned}
$$

□

Tính chất 1.3.2 (Quy tắc chuyển vế)
Định nghĩa $a - b = a + (-b)$. *Khi đó nếu* $a + b = c$ (2) *thì* $a = c - b$.

Chứng minh: Cộng cả hai vế của (2) với $-b$, ta được:

$$
\begin{aligned}
& (a + b) + (-b) = c + (-b) && \\
\Rightarrow\quad & a + [b + (-b)] = c + (-b) && \text{(theo tiên đề 1)} \\
\Rightarrow\quad & a + 0 = c + (-b) && \text{(theo tiên đề 3)} \\
\Rightarrow\quad & a = c + (-b) && \text{(theo tiên đề 2)} \\
\Rightarrow\quad & a = c - b && \text{(theo định nghĩa).}
\end{aligned}
$$

□

Tính chất 1.3.3

$$a.0 = 0.a = 0.$$

Chứng minh: Ta có: $a.0 = a.(0 + 0) = a.0 + a.0$. Mặt khác: $a.0 = a.0 + 0$. Do đó: $a.0 + a.0 = a.0 + 0$. Giản ước cho $a.0$ ta được $a.0 = 0$. Tương tự ta được: $0.a = 0$. □

Tính chất 1.3.4
Nếu $a.b = 0$ *thì* $a = 0$ *hoặc* $b = 0$.

Chứng minh: Giả sử $a.b = 0$ (3) và $a \neq 0$. Ta sẽ chứng minh $b = 0$. Thật vậy, từ $a \neq 0$, nhân hai vế của (3) với a^{-1}, ta được:

$$\begin{array}{rll} & a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.0 & \\ \Rightarrow & [a^{-1}.a].b = a^{-1}.0 & \text{(theo tiên đề 5)} \\ \Rightarrow & 1.b = a^{-1}.0 & \text{(theo tiên đề 7)} \\ \Rightarrow & b = a^{-1}.0 & \text{(theo tiên đề 6)} \\ \Rightarrow & b = 0 & \text{(theo tính chất 1.3.3).} \end{array}$$

□

Tính chất 1.3.5

$$a.(-b) = (-a).b = -(a.b).$$

Chứng minh: Ta có: $a.(-b) + a.b = a.[(-b) + b] = a.0 = 0$ và $(-a).b + a.b = [(-a) + a].b = 0.b = 0$. Do đó: $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$. □

Tính chất 1.3.6

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Chứng minh: Ta có $a.(b - c) = a.[b + (-c)] = a.b + a.(-c) = a.b + [-(ac)] = a.b - a.c$. □

Tính chất 1.3.7
Nếu $a.b = a.c$ *và* $a \neq 0$ *thì* $b = c$.

Chứng minh: Từ $a \neq 0$, ta nhân hai vế của biểu thức $a.b = a.c$ với a^{-1}, ta được:

$$\begin{array}{rll} \Rightarrow & a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.(a.c) & \\ \Rightarrow & (a^{-1}.a).b = (a^{-1}.a).c & \text{(theo tiên đề 5)} \\ \Rightarrow & 1.b = 1.c & \text{(theo tiên đề 7)} \\ \Rightarrow & b = c & \text{(theo tiên đề 6).} \end{array}$$

□

1.4 Trường số hữu tỷ

Định nghĩa 1.4.1
Số thực r được gọi là một số hữu tỷ nếu tồn tại hai số nguyên $m, n (n \neq 0)$ sao cho $r = \frac{m}{n}$.

Nhận xét: Một số hữu tỷ có thể biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn.
Ví dụ:

- $\frac{23}{8} = 2,875$.
- $\frac{40}{13} = 3,0769230769230...$ (được viết gọn lại thành $3,\overline{076923}$).

Ngược lại, một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn có thể viết được dưới dạng một phân số.

- Trường hợp số thập phân hữu hạn: nếu phần thập phân của số đó có k chữ số thì nhân và chia số đó với 10^k.
  Ví dụ:
  $$x = 15,723 = \frac{15723}{1000}.$$
- Trường hợp số thập phân vô hạn tuần hoàn:
  Ví dụ:

  $a.$ $x = 12,\overline{357}$. Ta có $1000x = 12357,\overline{357}$, nên
  $$1000x - x = 999x = 12345. \text{ Vậy } x = \frac{12345}{999} = \frac{4115}{333}.$$

  $b.$ $y = 7,2\overline{6}$. Ta có $100y = 726,\overline{6}$ và $10y = 72,\overline{6}$ nên $90y = 654$.
  Vậy $y = \frac{654}{90} = \frac{109}{15}$.

1.5 Trường các số nguyên modulo p

Cho p là một số nguyên. Đặt $\mathbb{Z}_p = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Trên $\mathbb{Z}_p$ xác định hai phép toán cộng $(+)$ và nhân $(.$ hoặc $\times)$ như sau:

$$\begin{aligned} a + b &= (a+b) \bmod p, \\ a.b &= (a.b) \bmod p. \end{aligned}$$

Ví dụ:

Phép cộng và nhân trong $\mathbb{Z}_7$ được cho trong bảng sau:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

.	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Mệnh đề 1.5.1
$\mathbb{Z}_p$ là một trường khi và chỉ khi p là số nguyên tố.

Việc chứng minh mệnh đề trên coi như bài tập dành cho các bạn sinh viên. Phần tử trung lập của phép cộng là 0 và phần tử đơn vị của phép nhân là 1. Đối của 0 là 0, nếu $0 < a < p$ thì đối của a là $-a = p - a$. Nếu $0 < a < p$ thì nghịch đảo của a là phần tử b $(0 < b < p)$ sao cho $a.b \equiv 1 \pmod{p}$.

Ví dụ:

- Trong $\mathbb{Z}_7$ ta có: $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 4, 3^{-1} = 5, 4^{-1} = 2, 5^{-1} = 3$, $6^{-1} = 6$.
- Trường $\mathbb{Z}_{29}$ là một trường hữu hạn quan trọng thường được sử dụng trong việc mã hóa (29 là số nguyên tố nhỏ nhất không nhỏ hơn số chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh (26 chữ)).
  Ta có:

$$20 + 13 = (20 + 33) \bmod 29 = 33 \bmod 29 = 4.$$

$$20.13 = (20.13) \bmod 29 = 260 \bmod 29 = 28.$$

$$-7 = 22, \ -12 = 17.$$

Ta có nghịch đảo của một số phần tử trong $\mathbb{Z}_{29}$ như sau:

$$1^{-1} = 1 \text{ vì } 1.1 = 1 \bmod 29 = 1,$$

$$2^{-1} = 15 \text{ vì } 2.15 = 30 \bmod 29 = 1.$$

Tương tự $3^{-1} = 10, \ 4^{-1} = 22, \ 12^{-1} = 17.$

BÀI TẬP I

I.1. Chứng minh $\mathbb{Z}_p$ là một trường khi và chỉ khi p là một số nguyên tố.

I.2. Lập bảng cộng và nhân trong trường $\mathbb{Z}_5$.

I.3. Tìm phần tử đối và phần tử nghịch đảo của các phần tử khác 0 trong trường $\mathbb{Z}_{29}$.

I.4. Cho $\mathbb{K}$ là một trường, $n \in \mathbb{N}^*$, ta định nghĩa $a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{\text{n lần}}$. Quy ước $a^0 = 1$. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{C}_n^k a^{n-k} b^k$,

b. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \ldots + a.b^{n-2} + a^{n-1})$.

I.5. Chuyển những phân số sau về số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn

a. $x = \dfrac{125}{8}$,

b. $y = \dfrac{379}{110}$,

c. $z = \dfrac{462}{13}$.

I.6. Chuyển những số thập phân sau về phân số:

a. $x = 17,\overline{522}$,

b. $y = 12,5\overline{36}$,

c. $z = 23,6\overline{7}$.

Bài 2

Không gian vectơ và không gian con

2.1 Định nghĩa không gian vectơ

Định nghĩa 2.1.1
Cho $\boldsymbol{V}$ *là một tập hợp mà các phần tử được ký hiệu là:* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma \ldots,$ $\mathbb{K}$ *là một trường mà các phần tử được ký hiệu là* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \ldots$. *Trên* $\boldsymbol{V}$ *ta có hai phép toán*

- *Phép cộng hai phần tử của* $\boldsymbol{V}$*:*

$$\begin{aligned} + : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} &\to \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &\mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

- *Phép nhân một phần tử của* $\boldsymbol{V}$ *với một phần tử của* $\mathbb{K}$*:*

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times \boldsymbol{V} &\to \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) &\mapsto \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

Giả sử đối với mọi $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma \in \boldsymbol{V}$*, mọi* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}$ *các điều kiện sau được thỏa mãn:*

1. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \gamma = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \gamma)$,
2. *Tồn tại vectơ* $\boldsymbol{\theta}$ *sao cho* $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}$,
3. *Với mỗi* $\boldsymbol{\alpha}$ *có một phần tử* $\boldsymbol{\alpha}'$ *sao cho* $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$,
4. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$,
5. $\boldsymbol{x}.(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\beta}$,
6. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}.\boldsymbol{\alpha}$,
7. $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}).\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}.(\boldsymbol{y}.\boldsymbol{\alpha})$,
8. $\mathbf{1}.\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, *trong đó* $\mathbf{1}$ *là phần tử đơn vị của trường* $\mathbb{K}$.

cuu duong than cong. com

Khi đó ta nói rằng V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$ (hoặc V là $\mathbb{K}-$ không gian vectơ). Ta cũng nói V là không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$.

Chú ý:

- Các phần tử của V được gọi là các vectơ. Phần tử θ được gọi là vectơ không, α' được gọi là phần tử đối của α và được ký hiệu là $(-\alpha)$. Ta sẽ viết $\alpha + (-\beta)$ là $\alpha - \beta$ và gọi là hiệu của hai vectơ α, β.
- Khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (tương ứng $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ta nói V là không gian vectơ thực (tương ứng không gian vectơ phức).
- Khi ta nói V là một không gian vectơ, ta ngầm hiểu rằng ta đang nói đến V cùng với hai phép toán là phép cộng hai phần tử của V và phép nhân một phần tử của V với một phần tử của $\mathbb{K}$.
- Để đơn giản trong cách viết, từ đây trở đi ta sẽ ký hiệu phép nhân một phần tử x thuộc trường $\mathbb{K}$ với một vectơ α thuộc V là $x\alpha$ thay vì viết $x.\alpha$.

2.2 Ví dụ về không gian vectơ

1. Trong không gian cho trước một điểm O cố định. Tập tất cả các vectơ hình học trong không gian, có gốc tại O cùng với phép cộng các vectơ và phép nhân một số thực với một vectơ là một không gian vectơ thực. Không gian vectơ này được gọi là không gian vectơ hình học và được ký hiệu là $\mathbb{E}_3$.

2. Xét trường số thực $\mathbb{R}$ và trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Đối với $\mathbb{R}$, tổng của hai số thực là một số thực và nếu $x \in \mathbb{Q}, \alpha \in \mathbb{R}$ thì $x\alpha \in \mathbb{R}$. Tám điều kiện trong định nghĩa một không gian vectơ chính là các tính chất quen thuộc của số thực. Vì vậy $\mathbb{R}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên $\mathbb{Q}$ không là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ vì $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Q}$ thì nói chung $x\alpha \notin \mathbb{Q}$.

3. Cho $\mathbb{R}$ là trường số thực. Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tích Descartes của n bản $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}.$$

Với $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là hai phần tử tùy ý thuộc $\mathbb{R}^n$ và x là một phần tử tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta định nghĩa:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),\end{aligned}$$

$$x\alpha = x(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (xa_1, xa_2, \ldots, xa_n).$$

Khi đó $\mathbb{R}^n$ cùng với phép toán cộng và nhân như trên là một không gian vectơ thực.

4. Xét $\mathcal{C}[a,b]$ là tập hợp tất cả các hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Tổng của hai hàm số $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ là hàm số $f+g \in \mathcal{C}[a,b]$ được định nghĩa bởi
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
và tích của của một số thực $r \in \mathbb{R}$ với hàm số $f \in \mathcal{C}[a,b]$ là hàm số $rf \in \mathcal{C}[a,b]$ được định nghĩa bởi
$$(rf)(x) = rf(x).$$
Khi đó $\mathcal{C}[a,b]$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ đối với phép cộng và phép nhân được định nghĩa trên.

5. $\mathbb{K}$ là một trường. Với mỗi bộ hữu hạn các phần tử thuộc $\mathbb{K}$: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, ta lập biểu thức hình thức:
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$
$p(x)$ được gọi là một đa thức của ẩn x (hay biến x) với hệ số trên trường $\mathbb{K}$.
Với $n = 0$ mọi phần tử bất kỳ của trường $\mathbb{K}$ đều là đa thức.
Đa thức có tất cả các hệ số bằng không được gọi là đa thức không, ký hiệu là θ.
Nếu $a_n \neq 0$ thì số n gọi là bậc của đa thức $p(x)$, ký hiệu $n = \deg p(x)$. Ta quy ước $\deg \theta = -\infty$ (hoặc có thể xem như θ không có bậc).
Ta ký hiệu $\mathbb{K}[x]$ là tập hợp tất cả các đa thức ẩn x với hệ số trên $\mathbb{K}$. Ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân vô hướng trên $\mathbb{K}[x]$ như sau: Với mỗi cặp đa thức $p(x), q(x)$,
$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$q(x) = b_m x^m + \ldots + b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0.$$
   - Giả sử $m > n$. Khi đó:
   $$p(x)+q(x) = b_m x^m + \ldots + b_{n+1}x^{n+1} + (a_n+b_n)x^n + \ldots + (a_0+b_0).$$
   Giả sử $m = n$. Khi đó:
   $$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0).$$
   - $ap(x) = (aa_n)x^n + (aa_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (aa_1)x + (aa_0).$

Với hai phép toán định nghĩa như trên, $\mathbb{K}[x]$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Trường hợp đặc biệt, khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ta có $\mathbb{R}[x]$ là một không gian vectơ thực.

Trong suốt quyển sách này nếu không lưu ý gì thêm thì ta ngầm hiểu rằng $\mathcal{C}[a, b], \mathbb{K}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{R}^n$ là các không gian vectơ được định nghĩa trong các ví dụ trên.

2.3 Một số tính chất của không gian vectơ

Mệnh đề 2.3.1
Giả sử V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$, khi đó

1. *Vectơ không θ là duy nhất.*
2. *Với mỗi $\alpha \in V$, vectơ đối của α là duy nhất.*
3. $0\alpha = \theta, \ \forall \alpha \in V$.
4. $x\theta = \theta, \ \forall x \in \mathbb{K}$.
5. $x\alpha = \theta$ *khi và chỉ khi* $x = 0$ *hoặc* $\alpha = \theta$.
6. $x(-\alpha) = -(x\alpha) = (-x)\alpha, \ \forall x \in \mathbb{K}, \alpha \in V$.
7. $x(\alpha - \beta) = x\alpha - x\beta, \ \forall x \in \mathbb{K}, \alpha, \beta \in V$.
8. $(x - y)\alpha = x\alpha - y\alpha, \ \forall x, y \in \mathbb{K}, \alpha \in V$.
9. *Nếu* $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ *thì* $\alpha = \beta, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ *(Luật giản ước).*
10. *Nếu* $\alpha + \beta = \gamma$ *thì* $\alpha = \gamma - \beta, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ *(Quy tắc chuyển vế).*

Chứng minh:

1. Giả sử tồn tại $\theta_1 \in V$ cũng thỏa mãn điều kiện: $\theta_1 + \alpha = \alpha + \theta_1 = \alpha$ với mọi $\alpha \in V$. Ta có
$$\theta = \theta + \theta_1 = \theta_1.$$
Vậy vectơ không θ là duy nhất.

2. Giả sử tồn tại $\alpha_1 \in V$ sao cho $\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha = \theta$. Ta có
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 + \theta = \alpha_1 + [\alpha + (-\alpha)] \\ &= (\alpha_1 + \alpha) + (-\alpha) \\ &= \theta + (-\alpha) = -\alpha. \end{aligned}$$
Suy ra vectơ đối của α là duy nhất.

3. $0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha$.
   Cộng -0α vào cả hai vế của đẳng thức trên ta được
   $$0\alpha + (-0\alpha) = (0\alpha + 0\alpha) + (-0\alpha).$$
   Hay tương đương
   $$\begin{aligned}\theta &= 0\alpha + (0\alpha + (-0\alpha))\\ &= 0\alpha + \theta = 0\alpha.\end{aligned}$$

4. $x\theta = x(\theta + \theta) = x\theta + x\theta$. Cộng $-x\theta$ vào cả hai vế của đẳng thức trên ta được
   $$x\theta + (-x\theta) = (x\theta + x\theta) + (-x\theta).$$
   Đẳng thức này tương đương với
   $$\begin{aligned}\theta &= x\theta + [x\theta + (-x\theta)]\\ &= x\theta + \theta = x\theta.\end{aligned}$$

5. Theo tính chất **3.** và **4.** ta có: nếu $x = 0$ hoặc $\alpha = \theta$ thì $x\alpha = \theta$.
   Ngược lại, giả sử $x\alpha = \theta$. Nếu $x \neq 0$ thì

   $$\begin{aligned}\alpha &= 1\alpha = (\frac{1}{x}x)\alpha\\ &= \frac{1}{x}(x\alpha) = \frac{1}{x}\theta\\ &= \theta.\end{aligned}$$
   Vậy $x\alpha = \theta$ kéo theo $x = 0$ hoặc $\alpha = \theta$.

6. Để chứng minh tính chất này, chúng ta nhận thấy rằng
   $$\begin{aligned}\theta &= 0\alpha = [x + (-x)]\alpha\\ &= x\alpha + (-x)\alpha.\end{aligned}$$
   Cộng $-(x\alpha)$ vào biểu thức đầu tiên và cuối cùng của đẳng thức trên. Ta suy ra: $-(x\alpha) = (-x)\alpha$. Mặt khác,
   $$\begin{aligned}\theta &= x\theta = x[\alpha + (-\alpha)]\\ &= x\alpha + x(-\alpha).\end{aligned}$$
   Cộng $-(x\alpha)$ vào cả hai vế của đẳng thức trên ta được
   $$-(x\alpha) = x(-\alpha).$$
   Từ các lập luận trên, tính chất được chứng minh.

7. Ta có
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) &= \boldsymbol{x}[\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})] = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta})(\text{theo tính chất 6.}) \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

8. Ta có
$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\alpha} &= [\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\alpha} \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{y}\boldsymbol{\alpha}) \text{ (theo tính chất 6.)} \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{y}\boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

   Còn luật giản ước và quy tắc chuyển vế được chứng minh tương tự phần trường sẽ dành cho các bạn như bài tập.

□

2.4 Không gian vectơ con

Định nghĩa 2.4.1
Giả sử $\boldsymbol{V}$ là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Tập con $\boldsymbol{W}$ khác rỗng của $\boldsymbol{V}$ được gọi là không gian vectơ con (hay không gian con) của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

1. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W} : \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$.
2. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W} : \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{K})$.

Ta có một số nhận xét sau

1. Vì $\boldsymbol{W} \neq \varnothing$ nên $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$. Theo điều kiện **2.** ta có: $\mathbf{0}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{W}$. Vậy mọi không gian con đều chứa $\boldsymbol{\theta}$.
2. Giả sử $\boldsymbol{W}$ là không gian con của $\boldsymbol{V}$. Dễ thấy tám điều kiện trong định nghĩa một không gian vectơ được thỏa mãn, do đó $\boldsymbol{W}$ là một $\mathbb{K}-$ không gian vectơ. Ngược lại, nếu $\boldsymbol{W}$ là một tập con của $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{W}$ là một $\mathbb{K}-$ không gian vectơ đối với hai phép toán xác định trên $\boldsymbol{V}$ thì $\boldsymbol{W}$ là một không gian con của $\boldsymbol{V}$.

Mệnh đề 2.4.2
Tập $\boldsymbol{W}$ khác rỗng của $\boldsymbol{V}$ là không gian con của $\mathbb{K}-$ không gian vectơ $\boldsymbol{V}$ khi và chỉ khi với mọi $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$, mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}$ ta có: $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$.

Chứng minh:
$(\Rightarrow)$ Giả sử $\boldsymbol{W}$ là không gian con của $\boldsymbol{V}$. Theo điều kiện 2. ta có $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{y}\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$. Lại theo điều kiện 1. ta được $\boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$.

($\Leftarrow$) Giả sử $x\alpha + y\beta \in W$ với mọi $\alpha, \beta \in W,\ x, y \in \mathbb{K}$. Lấy $x = 1, y = 1$ ta có

$$x\alpha + y\beta = 1\alpha + 1\beta = \alpha + \beta \in W.$$

Lấy $y = 0$ ta có: $x\alpha + y\beta = x\alpha + 0\beta = x\alpha + \theta = x\alpha \in W$.
Như vậy W thỏa mãn hai điều kiện trong định nghĩa một không gian con do đó W là một không gian con của V. □

Ví dụ:

1. Không gian vectơ V bất kỳ đều có hai không gian con là bản thân tập V và tập $\{\theta\}$ gồm chỉ một vectơ không. Các không gian con này được gọi là các không gian con tầm thường.
2. Trong không gian vectơ hình học $\mathbb{E}_3$, tập W gồm các vectơ gốc tại gốc tọa độ O và nằm trên cùng một mặt phẳng (P) cho trước đi qua O là một không gian con của $\mathbb{E}_3$.
3. $W = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ là một không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.
4. Với $n \geq 0$, đặt

$$\mathbb{P}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n\}.$$

Khi đó $\mathbb{P}_n[x]$ là một không gian con của $\mathbb{R}[x]$.

2.5 Giao của một số không gian con

Mệnh đề 2.5.1
Giả sử $W_1, W_2, \ldots, W_m$ là những không gian con của một không gian vectơ V trên trường $\mathbb{K}$. Khi đó $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_i$ là một không gian con của V.

Chứng minh: Vì $\theta \in W_i,\ i = \overline{1, m}$ nên $\theta \in W$, do đó $W \neq \varnothing$. Giả sử α, β là hai vectơ tùy ý thuộc W, mà $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_i$ suy ra $\alpha, \beta \in W_i,\ i = \overline{1, m}$. Hơn nữa W_i là những không gian con của V nên theo mệnh đề 2.5.1 với mọi $x, y \in \mathbb{K}$ ta có $x\alpha + y\beta \in W_i,\ i = \overline{1, m}$. Từ đây suy ra $x\alpha + y\beta \in W$ và như vậy theo mệnh đề 2.5.1 ta có W là một không gian con của V. □

2.6 Tổng hai không gian con

Mệnh đề 2.6.1
Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V trên trường $\mathbb{K}$. Ta định nghĩa

$$W = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}.$$

Khi đó W là một không gian con của V và được gọi là tổng của hai không gian con W_1, W_2.

Chứng minh: Vì $\theta = \theta + \theta$ nên $\theta \in W$, do đó $W \neq \varnothing$.
Giả sử α, β là hai vectơ tùy ý thuộc W. Khi đó

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2, \text{ với } \alpha_1, \beta_1 \in W_1;\ \alpha_2, \beta_2 \in W_2.$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{K}$ ta có

$$x\alpha + y\beta = x(\alpha_1 + \alpha_2) + y(\beta_1 + \beta_2) = (x\alpha_1 + y\beta_1) + (x\alpha_2 + y\beta_2).$$

Đặt $\gamma_1 = x\alpha_1 + y\beta_1, \gamma_2 = x\alpha_2 + y\beta_2$, theo mệnh đề 2.5.1 ta có $\gamma_1 \in W_1, \gamma_2 \in W_2$. Vậy theo định nghĩa của W thì $x\alpha + y\beta = \gamma_1 + \gamma_2 \in W$. Lại theo mệnh đề 2.5.1 ta có W là một không gian con của V. □

2.7 Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa 2.7.1
Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$.

1. *Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là m vectơ thuộc V $(m \geq 1)$. Nếu $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m,\ x_i \in \mathbb{K},\ i = \overline{1, m}$ thì ta nói α là tổ hợp tuyến tính của m vectơ đã cho hay α biểu diễn tuyến tính qua hệ m vectơ đã cho.*

2. *Giả sử S là tập con của V (số phần tử của S có thể hữu hạn hoặc vô hạn). Ta nói α biểu diễn tuyến tính qua tập S nếu α biểu diễn tuyến tính qua một hệ hữu hạn vectơ thuộc S.*

Dễ thấy nếu α biểu diễn tuyến tính qua tập S và mỗi vectơ thuộc S lại biểu diễn tuyến tính qua tập T (S,T là hai tập con của $\mathbb{K}-$ không gian vectơ V) thì α biểu diễn tuyến tính qua tập T.
Ví dụ:

1. Nếu $\alpha \in S$ thì α biểu diễn tuyến tính qua S, θ biểu diễn tuyến tính qua tập con bất kỳ của V.

2. Trong không gian vectơ $V = \mathbb{R}^2$ xét các véc tơ

$$\alpha = (2,3),\ \alpha_1 = (0,1),\ \alpha_2 = (1,1)$$

Tính toán ta thấy $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2$. Vậy α là tổ hợp tuyến tính của hai vectơ α_1, α_2.

3. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}[x]$ xét ba đa thức với hệ số thực:

$$\beta_1 = x + 3,\ \beta_2 = 2x^2 + 2x + 1,\ \beta = x^2 + 4x + 9,5.$$

Trong trường hợp này $\beta = 3\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2$. Suy ra β là tổ hợp tuyến tính của hai vectơ β_1, β_2.

2.8 Không gian con sinh bởi một số vectơ

Mệnh đề 2.8.1
Cho hệ gồm m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ của không gian vectơ V trên trường $\mathbb{K}$. Ta định nghĩa

$$W = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = \overline{1,m}\}.$$

Khi đó

1. *W là một không gian con của V.*
2. *W chứa α_i, $i = \overline{1,m}$.*
3. *W là không gian con nhỏ nhất của V chứa α_i, $i = \overline{1,m}$.*

Chứng minh: Ta chứng minh khẳng định đầu còn hai khẳng định sau được coi như bài tập.
Vì $\theta = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m \in W$ nên $W \neq \varnothing$. Mặt khác lấy hai vectơ α, β tùy ý thuộc W, khi đó

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m,$$

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m$$

và $x, y \in \mathbb{K}$ tùy ý. Ta có ‘

$$\begin{aligned} x\alpha + y\beta &= x(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) + y(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m) \\ &= (xa_1 + yb_1)\alpha_1 + (xa_2 + yb_2)\alpha_2 + \cdots + (xa_m + yb_m)\alpha_m \in W. \end{aligned}$$

Vậy W là một không gian con của V. □

Định nghĩa 2.8.2
W xác định như trong mệnh đề 2.8.1 được gọi là không gian con sinh bởi hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ và được ký hiệu là: $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ được gọi là hệ sinh của W.

BÀI TẬP II

Bài tập về không gian vectơ

II.1. Chứng minh rằng các tập $\mathcal{C}[a, b]$, $\mathbb{R}\,[a, b]$ cùng với các phép toán được định nghĩa trong mục 2.2 là không gian vectơ thực.

II.2. Trong các tập sau đây tập nào là không gian vectơ

1. Tập các số phức $\mathbb{C}$ với phép toán cộng hai số phức và phép nhân một số phức với một số thực thông thường.
2. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép cộng hai số nguyên và phép nhân một số nguyên với một số thực thông thường.
3. Tập các các đa thức hệ số hữu tỷ với phép cộng hai đa thức và phép nhân một đa thức với một số hữu tỷ.

II.3. Chứng minh rằng các tập sau đây không là không gian vectơ trên trường số thực với phép cộng và phép nhân là các phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{R}^2$

1. $V = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
2. $V = \{(x_1, x_2) | x_1 x_2 \geq 0\}$.
3. $V = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

II.4. Chứng minh rằng tập $\mathbb{R}^2$ không là không gian vectơ đối với phép cộng và phép nhân được định nghĩa như sau

1. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ và $a(x_1, x_2) = (ax_1, x_2)$.
2. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ và $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.
3. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ và $a(x_1, x_2) = (a^2 x_1, a^2 x_2)$.

II.5. Cho U, V là hai không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Trên $X = U \times V$ ta xác định phép cộng hai phần của X

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

và phép nhân một phần tử của X với một phần tử của trường $\mathbb{K}$

$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2).$$

Chứng minh rằng X là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

II.6. Cho $\mathbb{R}$ là trường số thực. Ký hiệu

$$(\mathbb{R}^+)^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0, i = \overline{1, n}\}.$$

Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bất kỳ thuộc $(\mathbb{R}^+)^n$ và $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ ta định nghĩa

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n), ax = (x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a).$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{R}^+)^n$ là một không gian vectơ thực.

Bài tập về không gian con

II.7. Chứng minh rằng

1. $\mathbb{Q}$ là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}$ trên $\mathbb{Q}$.
2. Tập $\mathbb{P}_n[x]$ gồm các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá n là một không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}[x]$.

II.8. Tập con nào trong các tập con sau đây là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$?

1. $W_1 = \{(x_1, 0, x_3)\}$.
2. $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
3. $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
4. $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2x_3\}$.

II.9. Tập nào trong những tập sau đây là không gian con của không gian vectơ $\mathcal{C}[0, 1]$?

1. $W_1 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(0) = 1\}$.
2. $W_2 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(0) = 0\}$.
3. $W_2 = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f$ khả vi trên $[0, 1]\}$.

II.10. Tập nào trong những tập sau đây là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}[x]$?

1. Tập tất cả các đa thức hệ số thực p thỏa mãn $p(0) = 0$.
2. Tập tất cả các đa thức hệ số thực có dạng $p(x) = ax$, trong đó $a \in \mathbb{R}$.

3. Tập tất cả các đa thức hệ số thực có dạng $p(x) = ax^2 + 1$, trong đó $a \in \mathbb{R}$.

II.11.

1. Cho W_1 là tập hợp tất cả các vectơ có dạng $(2a, 0, 3a)$, trong đó a là số thực tùy ý. Tìm một vectơ $\alpha \in \mathbb{R}^3$ sao cho $W_1 = \mathcal{L}(\alpha)$.
2. Cho W_2 là tập hợp tất cả các vectơ có dạng $(3a + b, a, b)$, trong đó a,b là các số thực tùy ý. Tìm vectơ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ sao cho $W_2 = \mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

II.12. Cho hệ gồm m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ của không gian vectơ V trên trường $\mathbb{K}$. Ta ký hiệu

$$W = \left\{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m \middle| \, x_i \in \mathbb{K}, \; i = \overline{1, m}\right\}.$$

Chứng minh rằng W là không gian con nhỏ nhất trong các không gian con của V chứa hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

II.13. Cho $\{W_i, i \in I\}$ là một họ tùy ý những không gian con của một không gian vectơ V. Chứng minh rằng $W = \bigcap\limits_{i \in I} W_i$ là một không gian của V.

II.14. Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $W_1 + W_2$ là giao của tất cả các không gian con của V chứa W_1 và W_2.

Bài 3

Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

3.1 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.1.1
Cho m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ của không gian vectơ V trên trường $\mathbb{K}$, $m \geqslant 1$.

1. *Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại m phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \theta$.*

2. *Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, hay một cách tương đương $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \theta$ kéo theo $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.*

3. *Tập $S \subset V$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu mọi hệ con hữu hạn của S đều độc lập tuyến tính.*

Ví dụ:

1. Trong không gian hình học $\mathbb{E}_3$
   - Hai vectơ cùng phương là phụ thuộc tuyến tính.
   - Hai vectơ không cùng phương là độc lập tuyến tính.
   - Ba vectơ đồng phẳng là phụ thuộc tuyến tính.
   - Ba vectơ không đồng phẳng là độc lập tuyến tính.
   - Bốn vectơ bất kỳ là phụ thuộc tuyến tính.

2. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1, -2, 0),\ \alpha_2 = (0, 1, 2),\ \alpha_3 = (-1, 4, 4)$$

là phụ thuộc tuyến tính vì:

$$\begin{aligned}1(1,-2,0)-2(0,1,2)+1(-1,4,4)&\\ &=(1,-2,0)+(0,-2,-4)+(-1,4,4)\\ &=(1+0-1,-2-2+4,0-4+4)=(0,0,0).\end{aligned}$$

Hệ vectơ

$$\beta_1=(1,0,0),\ \beta_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(1,1,1)$$

là độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\theta$$

thì $x_1(1,0,0)+x_2(1,1,0)+x_3(1,1,1)=\theta$.
hay $(x_1+x_2+x_3, x_2+x_3, x_3)=(0,0,0)$.
Từ đó suy ra

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ \quad\ \ x_2 + x_3 = 0\\ \qquad\quad\ \ x_3 = 0\end{cases}$$

Do đó $x_1=x_2=x_3=0$.

3. Trong $\mathbb{R}-$ không gian vectơ $\mathbb{P}_n[x]$ các đa thức hệ số thực một biến gồm đa thức không và các đa thức có bậc không vượt quá n, hệ các đa thức $1, x, x^2, \ldots, x^n$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\theta,$$

trong đó θ là đa thức không của $\mathbb{P}_n[x]$. Bằng cách đồng nhất hệ số ở hai vế ta được $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

3.2 Một số tính chất độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Mệnh đề 3.2.1

1. *Hệ gồm một vectơ α độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\alpha\neq\theta$.*

2. *Mọi hệ vectơ chứa vectơ θ đều phụ thuộc tuyến tính.*

3. *Mọi hệ vectơ chứa hai vectơ tỉ lệ với nhau thì phụ thuộc tuyến tính.*

4. *Một hệ gồm m vectơ $(m>1)$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại.*

Chứng minh:

1. ($\Rightarrow$) Giả sử hệ α độc lập tuyến tính. Nếu $\alpha = \theta$ ta có $1.\alpha = \theta$ từ đó hệ α phụ thuộc tuyến tính. Mâu thuẫn này suy ra $\alpha \neq \theta$.
($\Leftarrow$) Nếu $\alpha \neq \theta$ thì từ $x\alpha = \theta$ suy ra $x = 0$. Vậy hệ α độc lập tuyến tính.

2. Giả sử đã cho hệ vectơ $\theta, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Chọn $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_m = 0$, ta có:
$$1.\theta + 0.\alpha_2 + \cdots + 0.\alpha_m = \theta.$$

3. Giả sử hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ có hai vectơ α_i, α_j $(i \neq j)$ tỉ lệ, tức là
$$\alpha_i = x\alpha_j,\ x \in \mathbb{K}.$$
Khi đó ta có
$$0.\alpha_1 + \cdots + 1.\alpha_i + \cdots + (-x)\alpha_j + \cdots + x_m\alpha_m = \theta.$$
Vậy hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ phụ thuộc tuyến tính.

4. ($\Rightarrow$) Giả sử hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_m$ thuộc $\mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_i\alpha_i + \cdots + x_m\alpha_m = \theta,$$
Do $x_1, x_2, \ldots, x_m$ không đồng thời bằng 0 nên tồn tại i để $x_i \neq 0$. Khi đó
$$-x_i\alpha_i = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_m\alpha_m.$$
Nhân cả hai vế của đẳng thức này với $\dfrac{-1}{x_i}$ ta được:
$$\alpha_i = -\frac{x_1}{x_i}\alpha_1 - \frac{x_2}{x_i}\alpha_2 - \cdots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\alpha_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{x_m}{x_i}\alpha_m.$$
Như vậy α_i biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại.
($\Leftarrow$) Giả sử có vectơ α_i biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại, tức là
$$\alpha_i = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_m\alpha_m.$$
Khi đó
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} - 1.\alpha_i + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_m\alpha_m = \theta.$$
Vậy hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

$\square$

Mệnh đề 3.2.2
Nếu hệ gồm các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ độc lập tuyến tính và β là một vectơ không biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ đã cho thì hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ cũng độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m + x\beta = \theta$. Nếu $x \neq 0$ thì từ đó suy ra

$$\beta = (-\frac{x_1}{x})\alpha_1 + (-\frac{x_2}{x})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{x_m}{x})\alpha_m.$$

Điều này trái với giả thiết β không biểu thị tuyến tính được qua các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Do đó $x = 0$ và khi ấy

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \theta.$$

Vì hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính nên $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$. kết hợp với $x = 0$ suy ra hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ độc lập tuyến tính. □

Mệnh đề 3.2.3

1. *Nếu ta thêm một số vectơ bất kỳ vào một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì được một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.*
2. *Nếu bớt đi một số vectơ bất kỳ của một hệ vectơ độc lập tuyến tính thì được một hệ vectơ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh:

1. Giả sử hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại m phần tử $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

   $$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \theta.$$

   Nếu thêm vào hệ đã cho r vectơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ thì với

   $$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_{m+r} = 0$$

   ta cũng có

   $$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m + 0.\beta_1 + 0.\beta_2 + \cdots + 0.\beta_r = \theta.$$

   Vậy hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ phụ thuộc tuyến tính.

2. Suy ra từ mệnh đề 3.2.2.

□

3.3 Khái niệm cơ sở của một không gian vectơ

Định nghĩa 3.3.1
Giả sử V *là* $\mathbb{K}-$ *không gian vectơ. Một hệ vectơ trong* V *được gọi là một hệ sinh của* V *nếu mọi vectơ của* V *đều biểu thị tuyến tính qua hệ đó. Nếu* V *có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử thì* V *được gọi là* $\mathbb{K}-$ *không gian véctơ hữu hạn sinh.*

Định nghĩa 3.3.2
Một hệ sinh độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V *được gọi là một cơ sở của* V.

Ví dụ:

1. Trong không gian vectơ hình học $\mathbb{E}_3$ tập ba vectơ không đồng phẳng tùy ý lập thành một cơ sở.
2. Trong $\mathbb{R}$ - không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, hệ gồm các vectơ
   $$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$
   là một cơ sở. Thật vậy, mỗi vectơ $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ đều viết được dưới dạng
   $$\begin{aligned}\alpha &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n)\\ &= a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n.\end{aligned}$$
   Hơn nữa, hệ vectơ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ độc lập tuyến tính vì nếu
   $$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = \theta$$
   thì $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$
   Cơ sở $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.
3. Trong $\mathbb{R}^3$ hệ 4 vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1), \varepsilon_4 = (1, 1, 1)$ là hệ sinh nhưng không độc lập tuyến tính vì $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
4. Không gian vectơ $\mathbb{P}_n[x]$ gồm đa thức không và các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ với $\deg f(x) \leqslant n$ có một cơ sở là
   $$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n$$
   Thật vậy, mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ đều có dạng
   $$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$
   nên $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$ là hệ sinh của $\mathbb{P}_n[x]$.
   Mặt khác theo ví dụ 3 mục 3.1 lại có $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$ độc lập tuyến tính.

3.4 Sự tồn tại cơ sở

Định lý 3.4.1
Cho V là $\mathbb{K}-$ không gian vectơ. Giả sử $\mathcal{C}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong V, $\mathcal{S}$ là một hệ sinh của V và $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. Khi đó tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$.

Chúng ta công nhận định lý này.

Hệ quả 3.4.2
Cho $\mathcal{C}$ là một hệ vectơ của không gian vectơ V.

1. *Nếu $\mathcal{C}$ là hệ độc lập tuyến tính thì có thể bổ sung thêm một số vectơ vào hệ $\mathcal{C}$ để được một cơ sở của V.*

2. *Nếu $\mathcal{C}$ là hệ sinh của V thì có thể bớt đi một số vectơ của hệ $\mathcal{C}$ để được một cơ sở của V.*

Chứng minh:

1. Hệ $\mathcal{C}$ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V, V lại là một hệ sinh của chính nó nên theo định lý 3.4.1 có một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho
$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset V.$$

2. Lấy một vectơ $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{C}$. Khi đó hệ α độc lập tuyến tính nằm trong hệ sinh $\mathcal{C}$ của V. Theo định lý 3.4.1 có một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho
$$\{\alpha\} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}.$$

□

Hệ quả 3.4.3
Mọi không gian vectơ V khác $\{\theta\}$ đều có cơ sở.

Chứng minh: Lấy $\alpha \in V$, $\alpha \neq \theta$, ta có hệ $\{\alpha\}$ độc lập tuyến tính. V là hệ sinh của V nên áp dụng định lý 3.4.1 có một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho
$$\{\alpha\} \subset \mathcal{B} \subset V.$$

Vậy không gian vectơ V có một cơ sở. □

3.5 Khái niệm số chiều của không gian vectơ hữu hạn sinh

Bổ đề 3.5.1
Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \tag{1}$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s. \tag{2}$$

Nếu hệ (1) độc lập tuyến tính và mỗi vectơ của hệ (1) là tổ hợp tuyến tính của hệ (2) thì $r \leqslant s$.

Chứng minh: Theo giả thiết ta có

$$\alpha_1 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_s\beta_s.$$

Do hệ (1) độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 \neq \theta$ từ đó suy ra các vô hướng x_i không đồng thời bằng không. Giả sử $x_1 \neq 0$ khi đó

$$\beta_1 = \frac{1}{x_1}\alpha_1 - \frac{x_2}{x_1}\beta_2 - \cdots - \frac{x_s}{x_1}\beta_s. \tag{3}$$

Thay β_1 trong (2) bởi α_1, ta được hệ

$$\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_s. \tag{4}$$

Theo giả thiết mọi vectơ của hệ (1) đều biểu thị tuyến tính qua các vectơ của hệ (2), theo công thức (3) mỗi vectơ của hệ (2) đều biểu thị tuyến tính qua các vectơ của hệ (4). Từ đó mỗi vectơ của hệ (1) đều biểu thị tuyến tính qua các vectơ của hệ (4). Do đó

$$\alpha_2 = y_1\alpha_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_s\beta_s.$$

Hệ (1) độc lập tuyến tính nên trong số các hệ số $y_2, \ldots, y_s$ phải có một số khác không, giả sử $y_2 \neq 0$. Khi đó

$$\beta_2 = -\frac{y_1}{y_2}\alpha_1 + \frac{1}{y_2}\alpha_2 - \frac{y_3}{y_2}\beta_3 - \cdots - \frac{y_s}{y_2}\beta_s. \tag{5}$$

Ta lại thay β_2 trong hệ (4) bởi α_2 và được hệ

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_s. \tag{6}$$

Từ (3) và (5) suy ra mọi vec tơ của hệ (1) đều biểu thị tuyến tính qua hệ (6).

Nếu $r > s$ thì tiếp tục quá trình trên sau một số hữu hạn bước, hệ (2) sẽ được thay thế bởi hệ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s, \tag{7}$$

trong đó mọi vectơ của hệ (1) đều biểu thị tuyến tính qua hệ (7). Điều này trái với giả thiết hệ (1) độc lập tuyến tính.

Do đó $r \leqslant s$. □

Định lý 3.5.2
Nếu V là một không gian vectơ hữu hạn sinh thì V có một cơ sở hữu hạn và số phần tử của các cơ sở trong V đều bằng nhau.

Chứng minh: Giả sử tập hữu hạn $\mathcal{S}$ là một hệ sinh của V. Theo hệ quả 3.4.2, ta có thể bớt đi một số vectơ của $\mathcal{S}$ để được một cơ sở $\mathcal{B}$ của V, $\mathcal{B}$ hữu hạn. Giả sử $\mathcal{B}'$ cũng là một cơ sở của V. Do $\mathcal{B}'$ độc lập tuyến tính và $\mathcal{B}$ là một hệ sinh nên theo bổ đề 3.5.1 ta có $|\ \mathcal{B}'\ | \leq |\ \mathcal{B}\ |$. Đổi vai trò của hai cơ sở này cho nhau ta có $|\ \mathcal{B}\ | \leq |\ \mathcal{B}'\ |$. Vậy mọi cơ sở của V có số phần tử bằng nhau. □

Định nghĩa 3.5.3
Số các vectơ của một cơ sở của không gian vectơ hữu hạn sinh V được gọi là số chiều của V, ký hiệu là $\dim V$.
Nếu $\dim V = n$ thì V được gọi là không gian vectơ n chiều.
Không gian chỉ gồm có một vectơ θ không có cơ sở, quy ước $\dim\{\theta\} = 0$.

Ví dụ:

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$ vì $\mathbb{K}^n$ có một cơ sở là

   $$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

2. $\dim \mathbb{P}_n[x] = n + 1$ vì $\mathbb{P}_n[x]$ có một cơ sở là

   $$1, x, x^2, \dots, x^n$$

3. $\dim \mathbb{E}_2 = 2$ vì $\mathbb{E}_2$ có một vectơ cơ sở là hai vectơ đơn vị $i = (1, 0)$ và $j = (0, 1)$.
   $\dim \mathbb{E}_3 = 3$ vì $\mathbb{E}_3$ có một vectơ cơ sở là ba vectơ đơn vị
   $i = (1, 0, 0)$,
   $j = (0, 1, 0)$ và $k = (0, 0, 1)$.

3.6 Cơ sở trong không gian vectơ n chiều

Mệnh đề 3.6.1
Cho V là một không gian vectơ n chiều và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là hệ gồm m vectơ trong V.

1. *Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính thì $m \leqslant n$.*

2. *Nếu* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *là hệ sinh của* V *thì* $m \geqslant n$.

Chứng minh:

1. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ độc lập tuyến tính nên có thể bổ sung thêm một số vectơ để được một cơ sở của V. Do đó $m \leqslant n$.

2. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là hệ sinh của V nên có thể bớt đi một số vectơ để được một cơ sở của V. Do đó $m \geqslant n$.

□

Hệ quả 3.6.2
Trong không gian vectơ chiều V *có số chiều* $n, \quad (n > 1)$

1. *Mỗi hệ gồm* n *vectơ độc lập tuyến tính đều là một cơ sở của* V.

2. *Mỗi hệ sinh gồm* n *vectơ đều là một cơ sở của* V.

Chứng minh: Áp dụng hệ quả 3.4.2 ta có ngay điều phải chứng minh. □
Ví dụ:

Hệ vectơ sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha_1 = (1, 2, 1), \quad \alpha_2 = (0, 1, 2), \quad \alpha_3 = (1, 2, 0)$$

Thật vậy, do $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên ta chỉ cần chứng minh $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ độc lập tuyến tính.
Giả sử $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \theta$. Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ra ta được $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Vậy hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ độc lập tuyến tính.

3.7 Tọa độ của một vectơ

Mệnh đề 3.7.1
Giả sử hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *độc lập tuyến tính. Nếu*

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

thì cách biểu thị tuyến tính này của β *qua hệ vectơ đã cho là duy nhất.*

Chứng minh: Giả sử β còn có cách biểu diễn

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_m\alpha_m.$$

Khi đó

$$(y_1 - x_1)\alpha_1 + (y_2 - x_2)\alpha_2 + \cdots + (y_m - x_m)\alpha_m = \theta.$$

Vì hệ gồm các vectơ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ độc lập tuyến tính nên

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \cdots = y_m - x_m = 0.$$

hay $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_m = x_m$. □

Từ mệnh đề trên, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.7.2

Cho cơ sở $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ của không gian vectơ V. Khi đó mỗi $\alpha \in V$ có cách biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,\ a_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}.$$

Bộ n số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ được gọi là tọa độ của α đối với cơ sở $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ và a_i được gọi là tọa độ thứ i của α đối với cơ sở đó.

Ví dụ:

Trong $\mathbb{R}^3$ xét hai hệ cơ sở

$$(\varepsilon):\ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

$$(\varepsilon'):\ \varepsilon'_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon'_2 = (1, 1, 0), \quad \varepsilon'_3 = (1, 1, 1)$$

và $\alpha = (-2, -1, 1)$.

Ta có

$$\alpha = (-2, -1, 1) = -2(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = -2\varepsilon_1 - 1\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

như vậy tọa độ của α đối với cơ sở (ε) là $(-2, -1, 1)$.

Mặt khác,

$$\alpha = -1(1, 0, 0) - 2(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1) = -1\varepsilon'_1 - 2\varepsilon'_2 + \varepsilon'_3,$$

nên tọa độ của α đối với cơ sở (ε') là $(-1, -2, 1)$.

Từ đó ta thấy tọa độ của một vectơ phụ thuộc vào cơ sở, trong các cơ sở khác nhau thì tọa độ là khác nhau.

Mệnh đề 3.7.3
Giả sử đối với một cơ sở của không gian vectơ V, α có tọa độ là $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, β có tọa độ là $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Khi đó

1. $\alpha + \beta$ *có tọa độ là* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.
2. $x\alpha$ *có tọa độ là* $(xa_1, xa_2, \ldots, xa_n)$.

Chứng minh:

1. Gọi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là cơ sở đang xét của V. Theo giả thiết ta có:
$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n \text{ và } \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n.$$
Do đó $\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + \cdots + (a_n + b_n)\varepsilon_n$.
Vậy $\alpha + \beta$ có tọa độ là $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ đối với cơ sở $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.
2. Từ $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ ta cũng có
$$x\alpha = xa_1\varepsilon_1 + xa_2\varepsilon_2 + \cdots + xa_n\varepsilon_n.$$
Vậy $x\alpha$ có tọa độ là $(xa_1, xa_2, \ldots, xa_n)$ đối với cơ sở $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

□

3.8 Số chiều của không gian con

Định lý 3.8.1
Cho V là một $\mathbb{K}$ − không gian vectơ n chiều, W là một không gian vectơ con của V. Khi đó ta có

1. $\dim W \leqslant n$.
2. *Nếu* $\dim W = n$ *thì* $W = V$.

Chứng minh:

1. Nếu $W = \{\theta\}$ thì $\dim W = 0 \leqslant \dim V$.
Nếu $W \neq \{\theta\}$ khi đó W là một không gian vectơ khác $\{\theta\}$ nên theo hệ quả 3.4.3 trong W có một cơ sở $\mathfrak{B}$. Ta có $\mathfrak{B}$ là một hệ vectơ trong V, độc lập tuyến tính. Theo mệnh đề 3.6.1, số vectơ trong $\mathfrak{B}$ không vượt quá n. Do đó $\dim W \leqslant n$.
2. Nếu $\dim W = \dim V$ thì trong W có một cơ sở gồm n vectơ. Theo mệnh đề 3.6.2 thì đây cũng chính là một cơ sở của V. Vậy $W = V$.

□

Định lý 3.8.2
Cho U và W là hai không gian con của không gian vectơ hữu hạn chiều V. Khi đó

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Chứng minh: Nếu một trong hai không gian con bằng $\{\theta\}$, chẳng hạn $U = \{\theta\}$ thì $\dim U = 0$ và ta có

$$U + W = W, \; U \cap W = \{\theta\}.$$

Do đó,

$$\dim(U + W) = \dim W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Nếu cả hai không gian con đều khác $\{\theta\}$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ là một cơ sở của $U \cap W$ (trong trường hợp $U \cap W = \{\theta\}$ thì coi $r = 0$.)
Vì $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ độc lập tuyến tính nên theo hệ quả 3.4.2 có thể bổ sung để được cơ sở $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m$ của U và cơ sở $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ của W.
Ta sẽ chứng minh $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ là cơ sở của $U + W$.
Xét $\gamma \in U + W$, khi đó $\gamma = \alpha + \beta$ với $\alpha \in U, \; \beta \in W$. Ta có

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_m\beta_m,$$

$$\beta = a'_1\alpha_1 + \cdots + a'_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_k\gamma_k.$$

Do đó

$$\gamma = \alpha+\beta = (a_1+a'_1)\alpha_1+\cdots+(a_r+a'_r)\alpha_r+b_1\beta_1+\cdots+b_m\beta_m+c_1\gamma_1+\cdots+c_k\gamma_k$$

có nghĩa là

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \text{ là một hệ sinh của } U + W. \qquad (1)$$

Giả sử

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + \cdots + y_m\beta_m + z_1\gamma_1 + \cdots + z_k\gamma_k = \theta \qquad (2)$$

Khi đó

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + \cdots + y_m\beta_m = -z_1\gamma_1 - \cdots - z_k\gamma_k$$

vế trái là một vectơ thuộc U, vế phải là một vectơ thuộc W nên chúng thuộc vào $U \cap W$. Do đó

$$-z_1\gamma_1 - \cdots - z_k\gamma_k = t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r$$

Từ đó suy ra

$$t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r + z_1\gamma_1 + \cdots + z_k\gamma_k = \theta.$$

Do $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ độc lập tuyến tính nên

$$t_1 = \cdots = t_r = z_1 = \cdots = z_k = 0.$$

Thay vào hệ thức (2) ta được

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y_1\beta_1 + \cdots + y_m\beta_m = \theta.$$

Lại có hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m$ độc lập tuyến tính nên

$$x_1 = \cdots = x_r = y_1 = \cdots = y_m = 0.$$

Như vậy

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \text{ độc lập tuyến tính} \tag{3}$$

Từ (1) và (3) ta được

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$$

là cơ sở của $U + W$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= r + m + k = (r + m) + (r + k) - r \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned} \tag{3.1}$$

□

Ví dụ:

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, xét các không gian vectơ con U sinh bởi
$\alpha_1 = (1, 0, 0, 2), \alpha_2 = (0, 2, 1, -1), \alpha_3 = (-1, 1, 0, 1)$ và W sinh bởi
$\alpha_4 = (3, 2, 0, 1), \alpha_5 = (1, 2, 1, 1)$. Hãy tìm số chiều của $U, W, U + W, U \cap W$.
Từ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ ta được

$$x_1(1, 0, 0, 2) + x_2(0, 2, -1, 1) + x_3(-1, 1, 0, 1) = \theta$$

Hay $(x_1 - x_3, 2x_2 + x_3, x_2, 2x_1 - x_2 + x_3) = (0, 0, 0, 0)$ và ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Vậy hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ độc lập tuyến tính do đó $\dim U = 3$.
Tương tự ta cũng có hệ $\{\alpha_4, \alpha_5\}$ và hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ độc lập tuyến tính.
Do đó $\dim W = 2$ và $\dim(U + W) \geq 4$. Lại có $U + W$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ nên

$$\dim(U + W) \leqslant \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Từ đó $\dim(U + W) = 4$.
Áp dụng định lý về số chiều của giao và tổng các không gian con ta có

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

3.9 Hạng của một hệ vectơ

Định nghĩa 3.9.1
Hạng của một hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ trong không gian vectơ V là số chiều của không gian vectơ con sinh bởi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Nhận xét: Ký hiệu W là không gian con sinh bởi hệ vectơ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m. \tag{1}$$

ta có thể tìm được một hệ con của hệ (1) mà là cơ sở của W. Đó là một hệ con độc lập tuyến tính có tính chất mọi vectơ của hệ (1) đều biểu thị tuyến tính qua nó. Một hệ con như thế được gọi là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (1). Như vậy, để tìm hạng của một hệ vectơ, ta tìm số vectơ độc lập tuyến tính tối đại của hệ đó.
Ví dụ:

Tìm hạng của hệ vectơ:

$$\alpha_1 = (-1, 3, 4), \quad \alpha_2 = (0, 2, 5), \quad \alpha_3 = (-2, 4, 3), \quad \alpha_4 = (1, -1, 1)$$

trong không vectơ $\mathbb{R}^3$.
Nhận thấy hệ α_1, α_2 độc lập tuyến tính. Thật vậy, từ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \theta$, ta có

$$\begin{cases} -x_1 & & = 0 \\ 3x_1 & + \; 2x_2 & = 0 \\ 4x_1 & + \; 5x_2 & = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = x_2 = 0$.
Mặt khác $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ và $\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2$ nên α_1, α_2 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Do đó hạng của hệ này bằng 2.

BÀI TẬP III

III.1. Xét xem trong các hệ vectơ sau trong $\mathbb{R}^3$ hệ nào độc lập tuyến tính?

$a.\ \varepsilon_1 = (1,1,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,1),\ \varepsilon_3 = (1,0,1).$

$b.\ \alpha_1 = (2,0,3),\ \alpha_2 = (5,-1,7),\ \alpha_3 = (-1,2,-1).$

$c.\ \beta_1 = (0,-2,3),\ \beta_2 = (3,2,-1),\ \beta_3 = (3,0,2).$

$d.\ \gamma_1 = (-1,2,3),\ \gamma_2 = (2,0,-1),\ \gamma_3 = (-5,6,11).$

III.2. Hệ nào trong $\mathbb{P}_2[x]$ dưới đây phụ thuộc tuyến tính?

$a.\ 1, x, x^2.$

$b.\ 1, x, x^2, 2x^2+3.$

$c.\ x^2+x+3, 5x^2-x+2, -3x^2+3x+4.$

$d.\ 1, 4x^2+x+1, -x^2+6.$

III.3. Hãy biểu diễn vectơ ε thành tổ hợp tuyến tính của α, β, γ.

$a.\ \varepsilon = (1,2,0), \alpha = (1,2,-3), \beta = (2,5,-1), \gamma = (0,1,2).$

$b.\ \varepsilon = (0,0,0), \alpha = (2,3,3), \beta = (4,9,1), \gamma = (1,3,-1).$

III.4. Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của:
$P_1 = 4x^2+x+2,\ P_2 = -3x^2-x+1,\ P_3 = 5x^2+2x+3$

$a.\ 0.$

$b.\ 2x^2-2.$

$c.\ 3x^2+6x-1.$

$d.\ 5x^2+x+13.$

III.5. Tìm số thực r để các véctơ sau phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = (r, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}), \beta = (\frac{-1}{2}, r, \frac{-1}{2}), \gamma = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, r).$$

III.6. Hãy xác định r sao cho ε là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

$a.\ \varepsilon = (9,12,r), \alpha = (3,4,2),\ \beta = (6,8,7).$

$b.\ \varepsilon = (7,-2,r), \alpha = (2,3,5),\ \beta = (3,7,8).$

c. $\varepsilon = (4, -1, -3), \alpha = (2, -3, r),\ \beta = (-1, 4, 2)$.

d. $\varepsilon = (5, 3, r), \alpha = (1, 2, 3),\ \beta = (-1, 0, 1), \gamma = (1, 2, 0)$.

e. $\varepsilon = (1, 3, 5), \alpha = (3, 2, 5), \beta = (2, 4, 7), \gamma = (5, 6, r)$.

III.7. Cho $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}-$ không gian vectơ V. Chứng minh hệ $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$ được xác định sau đây cũng độc lập tuyến tính:

a. $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,

b. $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_3,\ \beta_4 = \alpha_3 + k\alpha_4, \quad k \in \mathbb{K},\ k \neq 0$,

c. $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_4,\ \beta_4 = \alpha_3 + \alpha_4$.

III.8. Các hệ vectơ sau có phải là cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ không?

a. $\alpha_1 = (0, 0, 1),\ \alpha_2 = (0, 1, 1),\ \alpha_3 = (1, 1, 1)$.

b. $\beta_1 = (4, 1, -5),\ \beta_2 = (-3, 2, 1),\ \beta_3 = (-2, 5, -3)$.

III.9. Với giá trị nào của x thì hệ vectơ $\alpha_1 = (x, 1, 0),\ \alpha_2 = (1, x, 1),\ \alpha_3 = (0, 1, x)$ lập thành cơ sở của không gian vectơ R^3.

III.10. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ vectơ sau:

a. $\alpha_1 = (1, -1, 2),\ \alpha_2 = (2, -1, 3),\ \alpha_3 = (-1, 5, -6)$.

b. $\alpha_1 = (2, 4, 1),\ \alpha_2 = (3, 6, -2),\ \alpha_3 = (-1, 2, \frac{-1}{2})$.

III.11. Cho W là không gian vectơ sinh bởi các đa thức

$$\begin{aligned} &P_1 = x^3 - 2x^2 + 4x + 1, &&P_2 = x^3 + 6x - 5,\\ &P_3 = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1, &&P_4 = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5. \end{aligned}$$

Tìm một cơ sở và số chiều của W.

III.12. Xác định cơ sở của các không gian con của $\mathbb{R}^3$.

a. Mặt phẳng $3x - 2y + 5z = 0$.

b. Mặt phẳng $x - y = 0$.

c. Đường thẳng

$$\begin{cases} x = 3t\\ y = t\\ x = 5t \end{cases}$$

$d.$ Các vectơ có dạng (a, b, c), trong đó $b = a + c$.

III.13. Trong không gian vectơ $\mathbb{P}_3[x]$ các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $f(x) \leqslant 3$.

$a.$ Chứng minh hai hệ vectơ

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = x,\ \alpha_3 = x^2,\ \alpha_4 = x^3,$$

$$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = (x-2),\ \beta_3 = (x-2)^2,\ \beta_4 = (x-2)^3$$

là hai cơ sở của $\mathbb{P}_3[x]$.

$b.$ Hãy tìm tọa độ của các vectơ trong cơ sở thứ nhất đối với cơ sở thứ hai.

III.14. Cho hai hệ vectơ:

$$\alpha_1 = (0,1,0,2),\ \alpha_2 = (1,1,0,1),\ \alpha_3 = (1,2,0,1),\ \alpha_4 = (-1,0,2,1),$$

$$\beta_1 = (1,0,2,-1),\ \beta_2 = (0,3,0,2),\ \beta_3 = (0,1,3,1),\ \beta_4 = (0,-1,0,1)$$

trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$.

$a.$ Chứng minh rằng chúng là hai cơ sở của R^4.

$b.$ Tìm tọa độ của $\alpha = (2,0,4,0)$ đối với từng cơ sở trên.

III.15. Trong R^4 xét tập: $W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$.

$a.$ Chứng minh rằng W là không gian vectơ con của R^4.

$b.$ Chứng minh rằng các vectơ $\alpha_1 = (1,0,0,-1)$, $\alpha_2 = (0,1,0,-1)$, $\alpha_3 = (0,0,1,-1)$, $\alpha_4 = (1,1,-1,-1)$ thuộc W.

$c.$ Tìm cơ sở và số chiều của W.

III.16. Trong $\mathbb{R}$ − không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng các tập sau:

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\} \\ V &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 0\} \\ W &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

là những không gian vectơ con. Hãy tìm số chiều của $U + V$ và $U + V + W$.

III.17. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ xét các không gian vectơ con W sinh bởi $(1,0,0,2), (6,2,1,-1), (-1,6,3,7)$ và Z sinh bởi $(2,2,0,-1), (1,3,2,1)$. Tìm số chiều của $W, Z, W+Z, W \cap Z$.

III.18. Trong $\mathbb{R}$ − không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, tính hạng của các hệ vectơ sau:

a. $\alpha_1 = (1,2,1,3)$, $\alpha_2 = (0,-1,1,3)$, $\alpha_3 = (0,0,2,6)$, $\alpha_4 = (8,7,3,9)$.

b. $\alpha_1 = (-1,4,8,12)$, $\alpha_2 = (2,1,3,1)$, $\alpha_3 = (-2,8,16,24)$, $\alpha_4 = (1,1,2,3)$.

c. $\alpha_1 = (0,0,0,0)$, $\alpha_2 = (1,0,-1,3)$, $\alpha_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$.

d. $\alpha_1 = (0,-3,12,3)$, $\alpha_2 = (3\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\alpha_3 = (6,-1,4,1)$.

III.19. Trong $\mathbb{R}-$ không gian vectơ $\mathbb{R}[x]$ xét hệ vectơ

$P_0 = 5,\ P_1 = 2x+3,\ P_2 = x^2+x+1,\ P_3 = 8x+7,\ P_4 = 2x^2+4x+20.$

Tìm hạng của hệ vectơ trên.

Bài 4

Ánh xạ tuyến tính

4.1 Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Như ta đã biết trong không gian véc tơ có hai phép toán cộng và nhân vô hướng. Bài này sẽ nghiên cứu những ánh xạ bảo toàn hai phép toán đó.

Định nghĩa 4.1.1
Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ $f : U \to V$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in U,$
- $f(t\alpha) = tf(\alpha), \qquad \forall \alpha \in U, t \in \mathbb{K}.$

Ánh xạ tuyến tính $f : U \to U$ được gọi là phép biến đổi tuyến tính hay tự đồng cấu của U.

Điều kiện thứ nhất trong định nghĩa trên là tính bảo toàn phép cộng, còn điều kiện thứ hai là tính bảo toàn phép nhân. Tuy nhiên ta có thể kết hợp hai điều kiện đó lại thành một điều kiện được phát biểu trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.1.2
Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi :

$$f(s\alpha + t\beta) = sf(\alpha) + tf(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in U, \ \forall s, t \in \mathbb{K}.$$

Chứng minh:
($\Rightarrow$): Theo định nghĩa của ánh xạ tuyến tính ta có:

$$f(s\alpha + t\beta) = f(s\alpha) + f(t\beta) = sf(\alpha) + tf(\beta).$$

($\Leftarrow$): Từ đẳng thức $f(s\alpha + t\beta) = sf(\alpha) + tf(\beta)$
thay $s = t = 1$ ta được $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, (1)
thay tiếp $t = 0$ ta được $f(s\alpha) = sf(\alpha) + 0f(\beta) = sf(\alpha)$. (2)
Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 4.1.3
Giả sử U *và* V *là hai không gian véc tơ trên trường* $\mathbb{K}$ *và* $f: U \to V$ *là một ánh xạ tuyến tính.*

1. f *được gọi là đơn cấu nếu nó là đơn ánh,*
2. f *được gọi là toàn cấu nếu nó là toàn ánh,*
3. f *được gọi là đẳng cấu nếu nó là song ánh. Trong trường hợp này ta nói không gian* U *và* V *đẳng cấu với nhau, ký hiệu là* $U \cong V$.

4.2 Ví dụ về ánh xạ tuyến tính

1. Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, θ_V là véc tơ "không" của V. Ánh xạ $\vartheta: U \to V$ xác định bởi $\vartheta(\alpha) = \theta_V$ với mọi $\alpha \in U$ là ánh xạ tuyến tính và được gọi là đồng cấu không.

2. Cho V là một $\mathbb{K}$ −không gian véc tơ, t là một phần tử cố định của $\mathbb{K}$.
   Ánh xạ $D_t: V \to V$
   $$\alpha \mapsto t\alpha$$
   là một ánh xạ tuyến tính, gọi là phép vị tự tỉ số t.

   - Khi $t = 0$, D_t là đồng cấu "không".
   - Khi $t \neq 0$, D_t là một tự đẳng cấu.

3. Phép quay góc φ trong $\mathbb{R}^2$.
   Ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $$(x, y) \mapsto (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$
   là ánh xạ tuyến tính và là đẳng cấu.

4. Ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:
   $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$ là ánh xạ tuyến tính.

5. Giả sử $\mathbb{P}_n[x]$ là không gian véc tơ gồm đa thức không và các đa thức ẩn x có bậc không vượt quá n trên trường $\mathbb{R}$.
   Ánh xạ $d: \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_{n-1}[x]$ xác định bởi $d(f(x)) = f'(x)$ là ánh xạ tuyến tính.

6. Ánh xạ $f: K^n \to K^m$ $(n \geq m)$ xác định bởi:
   $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ là một toàn cấu.

7. Cho A là một không gian con của $\mathbb{K}$ −không gian véc tơ V
   Ánh xạ $i: A \to V$

$\alpha \mapsto \alpha$

là ánh xạ tuyến tính và là đơn cấu.

Nói riêng, khi $A = V$ thì ta có ánh xạ tuyến tính $id_V : V \longrightarrow V$, đó là một tự đẳng cấu của V và được gọi là ánh xạ đồng nhất trên V.

4.3 Một số tính chất của ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề 4.3.1

Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : U \longrightarrow V$ là ánh xạ tuyến tính thì:

a. $f(\theta_U) = \theta_V$.

b. $f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_n\alpha_n) = t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + \ldots + t_n f(\alpha_n)$.

Chứng minh: Theo định nghĩa của ánh xạ tuyến tính và tính chất của không gian véc tơ ta có:

a. $f(\theta_U) = f(0\alpha) = 0f(\alpha) = \theta_V, \quad \alpha \in U$.

b. $f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_n\alpha_n) = f(t_1\alpha_1) + f(t_2\alpha_2) + \ldots + f(t_n\alpha_n)$

$$= t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + \ldots + t_n f(\alpha_n).$$

□

Mệnh đề 4.3.2

Giả sử U, V và W là ba không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, $f : U \longrightarrow V$ và $g : V \longrightarrow W$ là hai ánh xạ tuyến tính. Khi đó ánh xạ hợp thành $g \circ f : U \longrightarrow W$ cũng là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh: Từ định nghĩa của ánh xạ hợp thành và ánh xạ tuyến tính f và g , $\forall \alpha, \beta \in U,\ t \in \mathbb{K}$, ta có:

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha + \beta) &= g(f(\alpha + \beta)) = g(f(\alpha) + f(\beta)) \\ &= g(f(\alpha)) + g(f(\beta)) = g \circ f(\alpha) + g \circ f(\beta), \end{aligned}$$

$$g \circ f(t\alpha) = g(f(t\alpha)) = g(tf(\alpha)) = tg(f(\alpha)) = tg \circ f(\alpha).$$

Vậy $f \circ g$ là ánh xạ tuyến tính. □

Mệnh đề 4.3.3

Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : U \longrightarrow V$ là đẳng cấu. Khi đó $f^{-1} : V \longrightarrow U$ cũng là đẳng cấu.

Chứng minh: Ta đã biết rằng khi f là song ánh thì f^{-1} cũng là song ánh do vậy ta chỉ cần chứng minh f^{-1} là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, giả sử $\alpha, \beta \in V,\ t \in \mathbb{K}$.
Đặt $\alpha' = f^{-1}(\alpha),\ \beta' = f^{-1}(\beta)$
ta có $f(\alpha') = \alpha$, $f(\beta') = \beta$ và

$$f^{-1}(\alpha+\beta) = f^{-1}(f(\alpha') + f(\beta')) \\ = f^{-1}(f(\alpha'+\beta')) = \alpha' + \beta' = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta),$$

$$f^{-1}(t\alpha) = f^{-1}(tf(\alpha')) = f^{-1}(f(t\alpha')) = t\alpha' = tf^{-1}(\alpha).$$

Vậy f^{-1} là ánh xạ tuyến tính. □

4.4 Ảnh và nhân của ánh xạ tuyến tính

Nhắc lại rằng nếu $f : X \to Y$ là một ánh xạ, A là một bộ phận của X, B là một bộ phận của Y.
Tập hợp $\{y \mid \exists a \in A, f(a) = y\}$ được gọi là ảnh của A qua f và ký hiệu là $f(A)$.
Tập hợp $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ gọi là ảnh ngược của B qua f và ký hiệu là $f^{-1}(B)$.

Định lý 4.4.1
Cho U và V là hai $\mathbb{K}$ −không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính, khi đó:

1. *Nếu U' là không gian con của U thì $f(U')$ là không gian con của V.*
2. *Nếu V' là không gian con của V thì $f^{-1}(V')$ là không gian con của U.*

Chứng minh:

1. Do U' là không gian con nên $U' \neq \emptyset$, từ đó $f(U') \neq \emptyset$. Giả sử $\alpha, \beta \in f(U')$ và $s, t \in \mathbb{K}$. Khi đó tồn tại $\alpha_1, \beta_1 \in U'$ sao cho $\alpha = f(\alpha_1),\ \beta = f(\beta_1)$. Suy ra $s\alpha + t\beta = sf(\alpha_1) + tf(\beta_1) = f(s\alpha_1 + t\beta_1)$. Do U' là không gian con và $\alpha_1, \beta_1 \in U'$ nên $s\alpha_1 + t\beta_1 \in U'$. Từ đó $f(s\alpha_1 + t\beta_1) \in f(U')$. Vậy $f(U')$ là không gian con của V.

2. Vì V' là không gian con nên $\theta_V \in V'$ mà $f(\theta_U) = \theta_V$ nên $\theta_U \in f^{-1}(V')$, từ đó $f^{-1}(V') \neq \emptyset$. Giả sử $\alpha, \beta \in f^{-1}(V')$ và $s, t \in \mathbb{K}$. Xét $s\alpha + t\beta$, ta có $f(s\alpha + t\beta) = sf(\alpha) + tf(\beta) \in V'$ do $f(\alpha) \in V', f(\beta) \in V'$. Suy ra $s\alpha + t\beta \in f^{-1}(V')$. Điều đó chứng tỏ $f^{-1}(V')$ là không gian véc tơ con của U.

□

Áp dụng mệnh đề trên cho trường hợp $U' = U$ và trường hợp $V' = \{\theta_V\}$ ta được kết quả:

- $f(U)$ là không gian con của V và $f^{-1}(\{\theta_V\})$ là không gian con của U.
- $f(U)$ được gọi là ảnh của ánh xạ tuyến tính f và được ký hiệu là $\mathrm{Im}\, f$.
- $f^{-1}(\{\theta_V\})$ được gọi là nhân của ánh xạ tuyến tính f và được ký hiệu là $\mathrm{Ker}\, f$.

Mệnh đề 4.4.2
Giả sử $f : U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó f là đơn cấu khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}\, f = \{\theta_U\}$.

Chứng minh: ($\Rightarrow$): Giả sử f là đơn cấu và $\alpha \in \mathrm{Ker}\, f$. Khi đó $f(\alpha) = \theta_V = f(\theta_U)$. Do f là đơn ánh nên từ $f(\alpha) = f(\theta_U)$ suy ra $\alpha = \theta_U$. Vậy $\mathrm{Ker}\, f \subset \{\theta_U\}$. Bao hàm thức $\{\theta_U\} \subset \mathrm{Ker}\, f$ cũng đúng vì $f(\theta_U) = \theta_V$. Vậy ta có $\mathrm{Ker}\, f = \{\theta_U\}$.
($\Leftarrow$): Giả sử $\mathrm{Ker}\, f = \{\theta_U\}$ và $f(\alpha) = f(\beta)$ khi đó $f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha - \beta) = \theta_V$ suy ra $\alpha - \beta \in \mathrm{Ker}\, f$. Mà $\mathrm{Ker}\, f = \{\theta_U\}$, vậy $\alpha - \beta = \theta_U$, hay $\alpha = \beta$. Vậy f là đơn cấu. □

Bổ đề 4.4.3
Giả sử U và V là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (1) là một hệ véc tơ trên U. Khi đó nếu hệ $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ (2) là độc lập tuyến tính hệ (1) cũng độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử có $t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_n\alpha_n = \theta_U$ thế thì:
$f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_n\alpha_n) = f(\theta_U) = \theta_V$. Suy ra
$t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + \ldots + t_n f(\alpha_n) = \theta_V$.
Mà hệ (2) độc lập tuyến tính, vậy ta có $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$. Điều đó chứng tỏ hệ (1) độc lập tuyến tính. □

Định lý 4.4.4
Cho U và V là hai $\mathbb{K}$ −không gian véc tơ và $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

$$\dim U = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

Chứng minh: Trường hợp $\mathrm{Im}\, f = \{\theta_V\}$, tức là f là ánh xạ không, ta có $\mathrm{Ker}\, f = U$ và $\dim \mathrm{Im}\, f = 0$, đẳng thức đã nêu là đúng.
Khi $\mathrm{Im}\, f \neq \{\theta_V\}$ giả sử $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (1) là một cơ sở của $\mathrm{Im}\, f$. Do $\beta_i \in \mathrm{Im}\, f$

nên tồn tại $\alpha_i \in U$ sao cho $f(\alpha_i) = \beta_i,\ (i = 1, \dots, n)$. Hệ (1) độc lập tuyến tính nên theo bổ đề 4.4.3 hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (2) cũng độc lập tuyến tính. Đặt W là không gian sinh bởi hệ (2). Thế thì $\dim W = n$. Ta hãy chứng minh $U = \operatorname{Ker} f + W$ và $\operatorname{Ker} f \cap W = \{\theta_U\}$.
Với mọi $\alpha \in U$ ta có $f(\alpha) \in \operatorname{Im} f$ suy ra tồn tại $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \text{sao cho} \quad f(\alpha) &= t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \dots + t_n\beta_n \\ \text{từ đó} \quad f(\alpha) &= t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + \dots + t_n f(\alpha_n) \\ &= f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \dots + t_n\alpha_n). \end{aligned}$$

Đặt $\alpha' = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \dots + t_n\alpha_n$ ta có
$f(\alpha) = f(\alpha')$ suy ra $f(\alpha - \alpha') = \theta_U$.
Điều đó có nghĩa là: $\alpha - \alpha' \in \operatorname{Ker} f$. Đặt $\alpha - \alpha' = \alpha''$, ta có
$\alpha = \alpha'' + \alpha' \in \operatorname{Ker} f + W$ mà $W, \operatorname{Ker} f \subset U$ nên suy ra $U = \operatorname{Ker} f + W$.
Để chứng minh $\operatorname{Ker} f \cap W = \{\theta_U\}$ ta giả sử $\alpha \in \operatorname{Ker} f \cap W$. Do $\alpha \in \operatorname{Ker} f$ nên $f(\alpha) = \theta_V$. Do $\alpha \in W$ nên nó có dạng $\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_n\alpha_n$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad \theta_V = f(\alpha) &= f(s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_n\alpha_n) \\ &= s_1 f(\alpha_1) + s_2 f(\alpha_2) + \cdots + s_n f(\alpha_n) \\ &= s_1\beta_1 + s_2\beta_2 + \cdots + s_n\beta_n. \end{aligned}$$

Mà hệ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ độc lập tuyến tính, vậy ta phải có $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0$. Suy ra $\alpha = \theta_U$. Như vậy ta đã chứng minh được $U = \operatorname{Ker} f + W$ và $\operatorname{Ker} f \cap W = \{\theta_U\}$. Từ định lý 3.8.2 suy ra $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim W$. Mà $\dim W = n = \dim \operatorname{Im} f$. Vậy ta đã chứng minh được

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

□

BÀI TẬP IV

IV.1. Trong các ánh xạ sau đây ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

$a.\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_3)$

$b.\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 2x_2, -x_1)$

$c.\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_3 + x_2 + 1)$

$d.\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1 + x_2)$

$e.\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x^2, x, 0)$

f. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2xy, 6x + y - z)$

IV.2. Chứng minh các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính:

a. $\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f(x)) = f(0)\ \forall f \in \mathbb{R}[x]$
($\mathbb{R}[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực).

b. $\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{P}_1[x], \quad \varphi(f(x)) = r(x)$ trong đó $r(x)$ là phần dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x^2 + 1$.($\mathbb{P}_1[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực bậc không vượt quá 1 và đa thức không).

IV.3. Cho $f: U \to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng

a. f là đơn cấu khi và chỉ khi f biến mỗi hệ độc lập tuyến tính của U thành một hệ độc lập tuyến tính của V.

b. f là toàn cấu khi và chỉ khi f biến mỗi hệ sinh của U thành một hệ sinh của V.

c. f là đẳng cấu khi và chỉ khi f biến mỗi cơ sở của U thành một cơ sở của V.

IV.4. Cho U và V là hai không gian vectơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng U và V đẳng cấu khi và chỉ khi $\dim U = \dim V$.

IV.5. Chứng minh các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính.

a. Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm đối xứng với nó qua trục Ox.

b. Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian thành điểm đối xứng với nó qua mặt phẳng Oxy.

IV.6. Tìm $\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, f$ và $\dim \mathrm{Im}\, f, \dim \mathrm{Ker}\, f$ của ánh xạ tuyến tính f sau:

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2),$

b. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3),$

c. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0).$

Bài 5

Định thức

5.1 Phép thế

Định nghĩa 5.1.1
Cho n là một số tự nhiên khác 0. Một song ánh σ từ tập $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ đến chính nó được gọi là một phép thế bậc n. Phép thế σ bậc n được biểu diễn dưới dạng:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Tập hợp các phép thế bậc n được kí hiệu bởi $\mathbb{S}_n$. Vì mỗi phép thế bậc n là một hoán vị của tập có n phần tử nên tập $\mathbb{S}_n$ có $n!$ phần tử.
Ví dụ:

- $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ là phép thế và nó được gọi là phép thế đồng nhất.
- $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ là một phép thế bậc 3.
- $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ không phải là một phép thế.

Định nghĩa 5.1.2
Cho σ và τ là hai phép thế bậc n. Khi đó hợp thành của hai song ánh τ và σ (kí hiệu $\sigma \circ \tau$) cũng là một phép thế bậc n và được gọi là tích của hai phép thế τ và σ. Nó được xác định như sau:

$$\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i)) \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ánh xạ ngược của σ ký hiệu là σ^{-1} cũng là một phép thế bậc n, được gọi là nghịch đảo của σ

Ví dụ:

Cho σ và τ là hai phép thế bậc 4.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có:

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ và } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chú ý:

- Do phép hợp thành các ánh xạ (và do đó tích các phép thế) có tính chất kết hợp nên bằng qui nạp người ta cũng có thể mở rộng định nghĩa cho tích của nhiều phép thế. Đặc biệt, ta có định nghĩa $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma$.
- Cũng do phép hợp thành các song ánh không có tính chất giao hoán nên tích các phép thế cũng không có tính chất giao hoán.

Ví dụ:

Cho $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ là một phép thế bậc 5. Khi đó ta có:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 5.1.3
Cho σ là một phép thế bậc n. Nếu với $1 \leq i < j \leq n$ mà ta có $\sigma(i) > \sigma(j)$ thì ta gọi cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ là một nghịch thế của σ.

Dấu của phép thế σ, ký hiệu là $s(\sigma)$ và được tính bởi công thức $s(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$, trong đó $N(\sigma)$ là số các nghịch thế của σ.

Ta gọi σ là phép thế chẵn nếu như $s(\sigma) = 1$ và là phép thế lẻ nếu như $s(\sigma) = -1$.
Ví dụ:

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ có 4 nghịch thế là $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$.
  Suy ra $N(\sigma) = 4$. Vậy dấu của σ là $s(\sigma) = (-1)^4 = 1$.
- Phép thế đồng nhất $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ không có nghịch thế nào.
  Suy ra $N(\iota) = 0$. Dấu của ι là $s(\iota) = (-1)^0 = 1$.

- $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có 2 nghịch thế là $(3,1),(3,2)$. Vậy $N(\tau) = 2$.
  Suy ra dấu của τ là $s(\tau) = (-1)^2 = 1$.
- $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ có các nghịch thế là

$$\begin{aligned} (n,n-1),(n,n-2),(n,n-3),\dots,(n,1),\\ (n-1,n-2),(n-1,n-3),\dots,(n-1,1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (3,2),(3,1),\\ (2,1). \end{aligned}$$

  Vậy tổng số các nghịch thế của φ là: $N(\varphi) = (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Dấu của φ là $s(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Ta công nhận mệnh đề sau:

Mệnh đề 5.1.4
Cho σ và τ là hai phép thế bậc n. Khi đó ta có:
$s(\sigma \circ \tau) = s(\sigma).s(\tau)$.

Từ mệnh đề trên ta có thể chứng minh được:

Mệnh đề 5.1.5
Nếu σ là một phép thế và $t \in \mathbb{N}$ thì:

1. $s(\sigma^t) = s(\sigma)^t$,
2. $s(\sigma^{-1}) = s(\sigma)$.

Mệnh đề 5.1.6
Nếu $n > 1$ thì trong số $n!$ phép thế bậc n, có $\dfrac{n!}{2}$ phép thế chẵn và $\dfrac{n!}{2}$ phép thế lẻ.

Chứng minh: Cố định một phép thế lẻ τ. Ánh xạ:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{S}_n \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{array}$$

là một song ánh, biến một phép thế chẵn thành phép thế lẻ và biến một phép thế lẻ thành phép thế chẵn. Vậy trong $\mathbb{S}_n$ có một nửa phép thế chẵn, một nửa phép thế lẻ.
$\square$

5.2 Khái niệm định thức

Định nghĩa 5.2.1
Ma trận cỡ $m \times n$ trên trường $\mathbb{K}$ là một bảng có $m \times n$ phần tử ký hiệu a_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ thuộc trường $\mathbb{K}$ và được viết thành m dòng, n cột

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

- *Các ma trận thường được kí hiệu bởi các chữ cái $A, B, C, \dots$. Ta thường viết ma trận (5.1) còn được kí hiệu bởi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hoặc $A = (a_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.*

- *Tập các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu là $Mat(m, n, \mathbb{K})$.*

- *Nếu $m = n$ thì ta gọi A là ma trận vuông cấp n. Khi đó các phần tử $a_{ii}(i = \overline{1,n})$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận và $a_{i,n+1-i}(i = \overline{1,n})$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo phụ của ma trận.*

- *Nếu $m = 1$ thì ta gọi A là ma trận dòng. Nếu $n = 1$ thì ta gọi A là ma trận cột*

- *a_{ij} gọi là phần tử trên dòng i và cột j của ma trận. Các số $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ gọi là các phần tử trên dòng i. Các số $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ gọi là các phần tử trên cột j.*

- *Ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách chuyển dòng thành cột (và cột thành dòng) được gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A và được kí hiệu là A^t.*

Ví dụ:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ là một ma trận cỡ 3×4.

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -8 \\ 0 & 24 & 41 \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3.

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là một ma trận dòng.

- $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ là một ma trận cột.

Vậy nếu A là ma trận (5.1) thì

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

- Với A và B là hai ma trận ở ví dụ trên thì ta có:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ và } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 24 \\ 4 & -8 & 41 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 5.2.2
Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{K}$. Định thức của ma trận A là một phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$, ký hiệu bởi $\det A$ hay $|A|$ được tính bởi công thức sau: $\det A = \sum\limits_{\sigma \in \mathbb{S}_n} s(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$.

Định thức của một ma trận vuông cấp n được gọi là định thức cấp n.
Ví dụ:

1. Định thức cấp một: Cho ma trận vuông cấp 1: $A = (a_{11})$. Vì $\mathbb{S}_1$ chỉ có một phép thế duy nhất là $\iota = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ và ta đã có $s(\iota) = 1$ nên $\det A = s(\iota).a_{11} = a_{11}$.

2. Định thức cấp hai: Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Vì $\mathbb{S}_2$ có hai phần tử là $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $s(\iota) = 1, s(\varphi) = -1$.
Vậy $\det A = s(\iota)a_{11}a_{22} + s(\varphi)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Vậy định thức cấp hai bằng tích các phần tử trên đường chéo chính trừ tích các phần tử trên đường chéo phụ.

3. Định thức cấp ba: Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Tập $\mathbb{S}_3$ có 6

phần tử trong đó có 3 phép thế chẵn là:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

và có 3 phép thế lẻ là:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Vậy $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

4. Tính định thức của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Ta thấy rằng trong công thức tính định thức của ma trận A có 4! = 24 số hạng tương ứng với 24 phép thế nhưng hầu hết các số hạng đều bằng 0, chỉ còn một số hạng khác không ứng với phép thế sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Do $s(\sigma) = 1$ nên $\det A = 1.2.1.5.3 = 30.$

5. Định thức của các ma trận dạng tam giác:
Các ma trận có dạng sau được gọi là ma trận dạng tam giác:

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta sẽ tính định thức của các ma trận dạng tam giác trên:
Xét ma trận dạng tam giác A và B. Ta nhận thấy rằng trong $n!$ số hạng tương ứng với $n!$ phép thế thì chỉ có số hạng ứng với phép thế đồng nhất ι là khác 0. Vậy định thức của ma trận tương ứng trong trường hợp này là:

$$\det A = \det B = a_{11}a_{12}\dots a_{nn}.$$

Xét ma trận dạng tam giác C và D. Ta nhận thấy rằng trong $n!$ số hạng tương ứng với $n!$ phép thế chỉ có số hạng tương ứng với phép thế sau là khác 0:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta đã biết rằng $s(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Vậy định thức trong trường hợp này là:

$$\det C = \det D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

5.3 Các tính chất cơ bản của định thức

Trong mục này ta sẽ công nhận một số tính chất cơ bản của định thức mà không chứng minh.

Tính chất 5.3.1
Nếu đổi chỗ hai dòng của định thức thì định thức đổi dấu. Tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 5.3.2
Nếu các phần tử trên cùng một dòng có cùng thừa số chung k thì ta có thể đặt thừa số chung k ra ngoài định thức. Cụ thể:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tính chất 5.3.3
Nếu các phần tử trên cùng một dòng của ma trận viết thành tổng của 2 phần tử thì định thức cũng viết được thành tổng của 2 định thức tương ứng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 5.3.4
Định thức của ma trận A bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó. Tức là $\det A = \det A^t$.

Từ những tính chất cơ bản của định thức ta có thể suy ra các tính chất sau của định thức.

5.4 Các tính chất của định thức suy ra từ các tính chất cơ bản

Tính chất 5.4.1
Nếu định thức có hai dòng giống nhau thì định thức bằng không.

Chứng minh: Giả sử ma trận A có dòng i và dòng j giống nhau.Theo tính chất 5.3.1 khi đổi chỗ hai dòng i và j cho nhau thì định thức đổi dấu. Vậy ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\det A.$$

Vậy $\det A = 0$. □

Tính chất 5.4.2
Nếu định thức có một dòng là tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại thì định thức bằng không.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể coi dòng cuối là tổ hợp tuyến tính của i dòng đầu. Tức là: $a_{nj} = \sum_{m=1}^{i} k_m a_{mj},\ j = \overline{1,n}$. Theo tính chất 5.3.3 ta có thể viết định thức thành tổng các định thức tương ứng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1.a_{11} & k_1.a_{12} & \dots & k_1 a_{1n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_i.a_{i1} & k_i.a_{i2} & \dots & k_i a_{in} \end{vmatrix}$$

$$= k_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} + \dots + k_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}.$$

Vì số hạng thứ nhất trong tổng là định thức có dòng 1 và dòng n giống nhau, ..., số hạng thứ i trong tổng là định thức có dòng i và dòng n giống nhau nên theo tính chất 5.4.1 vừa chứng minh ở trên tất cả các số hạng trong tổng trên đều bằng 0. Vậy $D = 0$. □

Tính chất 5.4.3

Nếu định thức có một dòng bằng không thì định thức bằng không.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 5.3.2 với $k = 0$ ta có điều phải chứng minh. □

Tính chất 5.4.4

Nếu nhân các phần tử của một dòng với cùng một phần tử của $\mathbb{K}$ rồi cộng vào các phần tử tương ứng của một dòng khác thì ta được một định thức bằng định thức đã cho. Tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} + & \dots & a_{jn} + ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Chứng minh: Kí hiệu vế trái là D_1, vế phải là D_2. Áp dụng tính chất cơ bản 5.3.2 và 5.3.3 ta có:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Lại áp dụng tính chất 5.4.1 ta có: $D_2 = D_1 + 0 = D_1$. □

Chú ý:

- Theo tính chất 5.3.4 của định thức ta có $\det A = \det A^t$. Vì vậy tất cả các tính chất của định thức trên vẫn còn đúng nếu thay từ "dòng" bằng từ "cột".

Ta nhận thấy rằng trong công thức tính định thức cấp n có $n!$ số hạng trong tổng tương ứng với $n!$ phép thế. Như vậy, việc tính định thức cấp 4 trở lên bằng cách sử dụng trực tiếp định nghĩa gặp rất nhiều khó khăn. Ta sẽ sử dụng các tính chất của định thức ở phần trên để xây dựng các phương pháp tính định thức đơn giản và thuận tiện hơn.

5.5 Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác

Ta gọi các phép biến đổi sau là các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng hay cột của định thức:

1. Đổi chỗ hai dòng hay hai cột của định thức.

2. Nhân một dòng (hay một cột) của định thức với một phần tử t của trường $\mathbb{K}$ rồi cộng vào một dòng (hay một cột) khác.

Các phép biến đổi loại thứ nhất làm thay đổi dấu của định thức theo 5.3.1, còn các phép biến đổi loại thứ hai giữ nguyên định thức theo 5.3.2.
Từ một định thức cho trước, ta luôn có thể sử dụng một số phép biến đổi sơ cấp để đưa về dạng tam giác, từ đó dễ dàng tính được.
Ví dụ:

1. Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ nhất với 2 rồi cộng vào dòng 2, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lấy dòng 1 cộng với dòng thứ 3 ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng 2 với -2 rồi cộng với dòng 3 ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 1.3.(-21) = -63.$$

2. Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Đổi chỗ cột thứ nhất và cột thứ hai cho nhau ta được:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ nhất với -1 rồi cộng vào dòng thứ 3, nhân dòng thứ nhất với 2 rồi cộng vào dòng thứ 4:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Đổi dòng thứ hai và ba cho nhau ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ 2 với 8 cộng vào dòng thứ 4 và đưa thừa số 15 ra ngoài:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Lấy dòng 3 cộng vào dòng 4,

$$D = 15 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15.1.(-1).(-1).5 = 75.$$

5.6 Khai triển định thức theo một dòng hoặc cột

Định nghĩa 5.6.1

Cho định thức D cấp n. Nếu chọn k dòng và k cột của định thức $(1 < k < n)$ thì định thức M của ma trận vuông cấp k gồm các phần tử nằm ở giao của k dòng và k cột này được gọi là một định thức con cấp k của D. Định thức M' của ma trận thu được sau khi xoá đi k dòng và k cột này được gọi là định thức con bù của định thức con M. Nếu đã chọn các dòng thứ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ và các cột thứ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ thì biểu thức

$$(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M'$$

được gọi là phần bù đại số của định thức con M.

Ví dụ:

Cho định thức cấp 5

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Nếu chọn dòng thứ hai và cột thứ nhất thì ta có định thức con cấp một:

$M = 2$. Định thức con bù của M là:

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Phần bù đại số của M là $(-1)^{1+2}M' = -M'$. Tổng quát ta có thể coi mỗi phần tử a_{ij} của một định thức là một định thức con cấp một của định thức đó.

- Nếu chọn dòng 1 và 2, cột 2 và 3, ta có định thức con cấp hai là:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Phần bù đại số của M là:

$$M' = (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Định lý 5.6.2
Cho định thức D cấp n, kí hiệu A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}. Khi đó:

1. *Với mỗi i cố định, $1 \leq i \leq n$*

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

Công thức khai triển định thức theo dòng i

2. *Với mỗi j cố định, $1 \leq j \leq n$*

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Công thức khai triển định thức theo cột j

Nhận xét: Định lý trên cho phép ta tính định thức cấp n thông qua việc tính một số định thức cấp $n-1$. Do ta đã biết cách tính định thức cấp hai và ba, nên ta có thể tính được định thức cấp bất kì.
Ví dụ:

Tính định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ta nhận thấy cột thứ nhất có nhiều phần tử không nên khai triển theo cột thứ nhất sẽ có nhiều thuận lợi. Cụ thể:

$$\begin{aligned} D &= 0.A_{11} + (-4).A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} \\ &= (-4)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 4(54 + 8 + 24 + 6) = 4.92 = 368. \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong công thức có n số hạng trong tổng. Vậy khi khai triển ta sẽ chọn dòng hoặc cột có nhiều phần tử không thì việc tính toán sẽ được rút gọn. Nếu như trong định thức có sẵn các dòng hoặc cột như vậy thì ta khai triển luôn. Nếu trong định thức chưa có, ta có thể dùng tính chất của định thức để biến đổi đưa về trường hợp trên.
Ví dụ:

Tính định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lời giải: Lấy dòng thứ nhất cộng vào dòng thứ hai và ba, nhân dòng thứ nhất với 3 rồi cộng vào dòng thứ tư ta có:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 10 & 16 \end{vmatrix} \\ &= (-1).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ 6 & -3 & 5 \\ 12 & 10 & 16 \end{vmatrix} \\ &= -(300 + 660 + 396 - 480) = -876. \end{aligned}$$

Hoặc ta có thể tính

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ 6 & -3 & 5 \\ 12 & 10 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ 6 & -3 & 5 \\ 0 & 16 & 6 \end{vmatrix} = 6.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = -876.$$

5.7 Định lý Laplace

Trong mục này, ta phát biểu định lý cho phép khai triển một định thức theo nhiều dòng và nhiều cột cùng một lúc.

Định lý 5.7.1 (Định lý Laplace)
Giả sử trong định thức D cấp n đã chọn k dòng (cột) cố định $(1 \leq k \leq n)$ và $M_1, M_2, .., M_r$ $(r = C_n^k)$ là tất cả các định thức con cấp k có thể thiết lập được từ k dòng (cột) này. A_i là phần bù đại số của $M_i, i = \overline{1, r}$. Khi đó:

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_rA_r.$$

Ví dụ:

Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ta chọn cố định cột 2 và cột 4. Từ hai cột này ta thiết lập được $C_4^2 = 6$ định thức cấp hai nhưng chỉ có duy nhất 1 định thức con khác không. Đó là:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -9.$$

Gọi A là phần bù đại số của M, ta có:

$$A = (-1)^{1+4+2+4}. \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-15) = 15.$$

Vậy $D = -9.15 = -135.$

Ngoài các định lý và phương pháp trên ta cũng có thể dùng các tính chất của định thức để tính định thức.

BÀI TẬP V

V.1. Tính dấu của các phép thế sau:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

V.2.

1. Cho $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$. Tìm n để σ là phép thế chẵn.

2. Cho $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Tìm n để τ là phép thế lẻ.

V.3.

1. Cho phép thế $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Tính σ^{100} và từ đó suy ra dấu của σ mà không cần tính $N(\sigma)$.

2. Cho $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ có k nghịch thế. Hãy tính dấu của phép thế sau:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

V.4. Tính các định thức sau:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$,

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 12 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 24 \end{vmatrix}$.

V.5. Dùng định nghĩa để tính các định thức sau:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

V.6. Bằng cách khai triển theo dòng hoặc cột hãy tính định thức của các ma trận sau:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$,

3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$,

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

V.7. Tính định thức sau bằng cách đưa về dạng tam giác:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$,

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$,

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix} a & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & a & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & a & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & a \end{vmatrix}$,

7. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$, 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

9. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & x+2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & x+3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x+5 \end{vmatrix}$, 10. $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & \\ 0 & \dots & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

V.8. Tính định thức sau bằng cách áp dụng định lý Laplace:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$.

V.9. Dùng công thức truy hồi để tính các định thức sau:

1. $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$,

2. $D_n = \begin{vmatrix} cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2cos\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2cos\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2cos\alpha \end{vmatrix}$.

V.10.

1. Cho $m = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Tính các định thức sau:

$a.$ $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$, $b.$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

2. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

V.11. Giải các phương trình sau:

1. $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ x^2 & 1+2x \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0.$

3. $\begin{vmatrix} x^2+1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x^2+1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x^2+1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x^2+1 \end{vmatrix} = 0.$

Bài 6

Ma trận

6.1 Các phép toán ma trận

Định nghĩa 6.1.1
Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ *cùng cỡ* $m \times n$. *Tổng của hai ma trận A và B là một ma trận được ký hiệu là* $A + B$ *và được xác định như sau:*

$$A + B = (c_{ij})_{m\times n}, \text{ ở đó } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ví dụ: Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 31 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \end{pmatrix}.$$

Tổng của hai ma trận này là

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 34 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 24 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 6.1.2
Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *cỡ* $m \times n$, *và* $k \in \mathbb{K}$. *Tích của* k *và ma trận* A *là ma trận cỡ* $m \times n$ *ký hiệu* kA *xác định bởi*

$$kA = (b_{ij})_{m\times n}, \text{ ở đó } b_{ij} = ka_{ij}.$$

Ví dụ: Cho

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 31 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 62 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & 10 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 44 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 6.1.3

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times n}$. Tích AB của A và B là ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$, ở đó các phần tử c_{ij} được xác định như sau:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 7 & -1 \\ 10 & 11 & 12 \\ 21 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

6.2 Tính chất của các phép toán ma trận

Ký hiệu tập các ma trận cỡ $m \times n$ với các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$ là $Mat(m \times n, \mathbb{K})$.

1. $A + B = B + A, \forall A, B \in Mat(m \times n, \mathbb{K}).$
2. $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in Mat(m \times n, \mathbb{K})$.
3. $\exists O \in Mat(m \times n, \mathbb{K})$ thỏa mãn $A + O = A, \forall A \in Mat(m \times n, \mathbb{K}).$
4. $\forall A \in Mat(m \times n, \mathbb{K})$ tồn tại ma trận $-A \in Mat(m \times n, \mathbb{K})$ sao cho $A + (-A) = O.$
5. $k(A + B) = kA + kB, \forall A, B \in Mat(m \times n, \mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{K}.$
6. $(k + l)A = kA + lA, \forall A \in Mat(m \times n, \mathbb{K}), \forall k, l \in \mathbb{K}.$
7. $k(lA) = (kl)A, \forall A \in Mat(m \times n, \mathbb{K}), \forall k, l \in \mathbb{K}.$
8. $1A = A, \forall A \in Mat(m \times n, \mathbb{K})$, ở đó 1 là đơn vị của $\mathbb{K}$.

   (Tám tính chất trên cho thấy $Mat(m \times n, \mathbb{K})$ cùng với phép cộng hai ma trận và phép nhân một phần tử của $\mathbb{K}$ với một ma trận tạo thành một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$.)

9. $(AB)C = A(BC)$, với mọi ma trận A, B, C sao cho các phép toán ở hai vế xác định.

10. $(A+B)C = AC + BC$ và $C(A+B) = CA + CB$, với mọi ma trận A, B, C sao cho các phép toán ở hai vế xác định.

11. $k(AB) = (kA)B = A(kB), \forall k \in \mathbb{K}$, với mọi ma trận A, B sao cho $A.B$ xác định.

12. Với $n \geq 1$, ký hiệu $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n, ở đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j, \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

Với mọi ma trận A, B, nếu $A.I_n$ xác định thì $A.I_n = A$, nếu $I_n.B$ xác định thì $I_n.B = B$. (I_n được gọi là ma trận đơn vị cấp n)

Chú ý: Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

6.3 Định thức của tích hai ma trận vuông cùng cấp

Định lý 6.3.1
Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n, khi đó ta có $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

Chứng minh: Giả sử $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Ta xét định thức cấp $2n$ sau:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Khai triển Laplace định thức trên theo n dòng đầu ta được:

$$D = (-1)^{n+1+n+2+\ldots+2n+1+2+\ldots+n}|A|.|B| = (-1)^{n^2}|A|.|B|.$$

Nhân lần lượt các dòng thứ $n+1, n+2, \ldots, 2n$ tương ứng với $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ rồi cộng vào dòng thứ i ta được:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}$$

trong đó

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Đặt C là ma trận (c_{ik}) ta có $C = AB$.
Khai triển Laplace định thức D theo n dòng đầu ta được:

$$\begin{aligned} D =& (-1)^{2(1+2+\ldots+n)} |C| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \\ =& (-1)^{n(n+1)}.|C|.(-1)^n = (-1)^{n^2}|C|. \end{aligned}$$

Vậy

$$|C| = |A|.|B|$$

hay

$$|AB| = |A|.|B|.$$

□

6.4 Nghịch đảo của ma trận vuông

Định nghĩa 6.4.1
Cho A là một ma trận vuông cấp n. Ma trận vuông B cấp n được gọi là ma trận nghịch đảo của A nếu $AB = BA = I_n$.
Nếu A có ma trận nghịch đảo thì A được gọi là ma trận khả nghịch.

Định lý 6.4.2
Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A có nghịch đảo là $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh:
($\Rightarrow$) Giả sử ma trận vuông A cấp n khả nghịch tức là tồn tại B để $AB = BA = I_n$. Theo định lý 6.3.1 ta có $1 = \det(I_n) = \det(AB) = \det(A).\det(B)$. Do đó $\det(A) \neq 0$.
($\Leftarrow$) Giả sử $\det(A) \neq 0$ ta sẽ chứng minh ma trận B xác định theo công thức sau là nghịch đảo của A.

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}).
Thật vậy, giả sử $A.B = (c_{ij})_{n\times n}$. Khi đó $c_{ij} = \dfrac{1}{\det(A)}.c'_{ij}$, ở đó

$$c'_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Ta có c'_{ii} là khai triển theo dòng i định thức của ma trận A, do đó $c'_{ii} = \det(A)$.
c'_{ij} với $i \neq j$ là khai triển theo dòng j của định thức nhận được từ định thức của ma trận A khi thay hàng j bởi hàng i. Định thức này bằng không do có hai dòng giống nhau. Do đó $c'_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Tóm lại ta có

$$c'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j, \\ \det(A) & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

Suy ra

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j, \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

Điều đó chứng tỏ $AB = I_n$. Tương tự ta chứng minh được $BA = I_n$.
Vậy B là ma trận nghịch đảo của A. □

Ví dụ: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = 1.3.2 + 2.1.3 + 3.2.1 - 3.3.3 - 1.1.1 - 2.2.2 = -18 \neq 0$. Do đó ma trận A khả nghịch. Ta có:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -1,\\
A_{13} &= -1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -7,\\
A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -7,\\
A_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 5,\\
A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 5,\\
A_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1.
\end{aligned}$$

Ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{-1}{18}\begin{pmatrix}5 & -1 & -7\\ -1 & -7 & 5\\ -7 & 5 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/18 & 1/18 & 7/18\\ 1/18 & 7/18 & -5/18\\ 7/18 & -5/18 & 1/18\end{pmatrix}.$$

Ta có một phương pháp khác để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông khả nghịch A, đó là phương pháp Gauss-Jordan. Phương pháp này gồm các bước như sau:

- Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A.
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng để đưa ma trận A về ma trận đơn vị I, đồng thời cũng dùng các phép biến đổi đó với ma trận phía bên phải.
- Khi ma trận A được biến đổi thành ma trận đơn vị I thì ma trận I cũng được biến đổi thành ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

Ví dụ:

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Viết ma trận đơn vị vào bên phải của A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Cộng dòng 3 và dòng 2 vào dòng 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nhân dòng 1 với $\dfrac{1}{5}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 1 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nhân dòng 1 với -1 rồi cộng vào dòng 2 và dòng 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 1 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 2 & 0 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 2 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{array}\right).$$

Nhân dòng 2 với $\dfrac{1}{2}$, dòng 3 với $\dfrac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 1 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 2/5 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & -1/10 & 2/5 \end{array}\right).$$

Nhân dòng 2 với -1, dòng 3 với -1 rồi cộng vào dòng 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 2/5 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & -1/10 & 2/5 \end{array}\right).$$

Vậy ta đã tìm được ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/5 & -1/10 \\ -1/10 & -1/10 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

6.5 Một ứng dụng vui: mã hóa

Mục này nêu một ứng dụng của phép nhân ma trận vào việc mã hóa. Cho $A = (a_{ij})_3$ là một ma trận vuông cấp 3 với hệ số thuộc trường $\mathbb{Z}_{29}$ và $\det(A) \neq 0$ (trong $\mathbb{Z}_{29}$). Chia các chữ cái của từ cần mã hóa thành các nhóm 3 chữ cái. Nếu nhóm cuối cùng chỉ có 1 chữ cái thì ta thêm 2 dấu $+$ và $-$, nếu nhóm cuối cùng chỉ có 2 chữ cái thì ta thêm dấu $*$. Sau đó thay các ký tự này bởi các số từ $0 \longrightarrow 28$ theo tương ứng sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

U	V	W	X	Y	Z	$+$	$-$	$*$
20	21	22	23	24	25	26	27	28

Mỗi nhóm 3 ký tự được chuyển thành một nhóm 3 số trong $\mathbb{Z}_{29}$, được xem như một ma trận cỡ 1×3. Chẳng hạn ta có ma trận $(x_1\ x_2\ x_3)$. Nhân với A ta được ma trận

$$(x_1\ x_2\ x_3)A = (y_1\ y_2\ y_3).$$

Chuyển các nhóm số này thành những nhóm ký tự theo tương ứng nêu trên và sắp xếp theo đúng thứ tự các nhóm ban đầu ta được mã hóa của từ đã cho bởi ma trận A.

Ví dụ: Mã hóa từ "Student" bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = 41 \bmod 29 = 12 \neq 0$.
Nhóm từ trên thành 3 nhóm (S T U) (D E N) (T + -).
$(S \quad T \quad U) \longrightarrow (18 \quad 19 \quad 20) \longrightarrow$

$$(18 \quad 19 \quad 20)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = (133 \bmod 29 \quad 81 \bmod 29 \quad 72 \bmod 29)$$

$$= (17 \quad 23 \quad 14) \longrightarrow (R \quad X \quad O).$$

$(D \quad E \quad N) \longrightarrow (3 \quad 4 \quad 13) \longrightarrow$

$$(3 \quad 4 \quad 13)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = (36 \bmod 29 \quad 53 \bmod 29 \quad 4 \bmod 29)$$

$$= (7 \quad 24 \quad 4) \longrightarrow (H \quad Y \quad E).$$

$(T \quad + \quad -) \longrightarrow (19 \quad 26 \quad 27) \longrightarrow$

$$(19 \quad 26 \quad 27)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = (176 \bmod 29 \quad 115 \bmod 29 \quad 82 \bmod 29)$$

$$= (2 \quad 28 \quad 24) \to (C \quad * \quad Y).$$

Vậy "STUDENT" được mã hóa thành "RXOHYEC*Y".

Quá trình giải mã được thực hiện tương tự như quá trình mã hóa nhưng thay ma trận A bởi ma trận A^{-1}.

Ví dụ: Giải mã từ đã được mã hóa bởi ma trận A thành "L X C - F L".

Trước tiên ta tìm ma trận A^{-1} (trong $\mathbb{Z}_{29}$).

Ta có $\det(A) = 12$ nên $(\det(A))^{-1} = 12^{-1} = 17$.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix} = -9, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 7,\\
A_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 19,\\
A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix} = 11, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -7,\\
A_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -5,\\
A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix} = 13,\\
A_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix} = 6.
\end{aligned}$$

Ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1}\begin{pmatrix}-9 & 11 & -5\\ 7 & -4 & 13\\ 19 & -5 & 6\end{pmatrix}$$

$$= 17\begin{pmatrix}-9 & 11 & -5\\ 7 & -4 & 13\\ 19 & -5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 13 & 2\\ 3 & -10 & -11\\ 4 & 2 & 15\end{pmatrix}.$$

Ta nhóm "LXC-FL" thành hai nhóm (L X C) và (- F L).

$$(L \quad X \quad C) \to (11 \quad 23 \quad 2)$$

$$\to (11 \quad 23 \quad 2)\begin{pmatrix}-8 & 13 & 2\\ 3 & -10 & -11\\ 4 & 2 & 15\end{pmatrix}$$

$$= (-11 \bmod 29 \quad -83 \bmod 29 \quad -201 \bmod 29)$$

$$= (18 \quad 4 \quad 2) \to (S \quad E \quad C).$$

$$\begin{aligned}(- \quad F \quad L) &\to (27 \quad 5 \quad 11)\\ &\to (27 \quad 5 \quad 11)\begin{pmatrix}-8 & 13 & 2\\ 3 & -10 & -11\\ 4 & 2 & 15\end{pmatrix}\\ &= (-157 \bmod 29 \quad 323 \bmod 29 \quad 164 \bmod 29)\\ &= (17 \quad 4 \quad 19) \to (R \quad E \quad T).\end{aligned}$$

Vậy từ cần tìm là "SECRET".

6.6 Hạng của một ma trận

Định nghĩa 6.6.1
Cho ma trận A cỡ $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Coi mỗi dòng của ma trận A như một véc tơ trong không gian $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})\\ \alpha_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})\end{aligned}$$

Hạng của hệ véc tơ dòng $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gọi là hạng dòng của ma trận A.
Coi mỗi cột của ma trận A như một véc tơ trong không gian $\mathbb{K}^m$:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})\\ \beta_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_m &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\end{aligned}$$

Hạng của hệ véc tơ cột $\beta_1, \dots, \beta_m$ gọi là hạng cột của ma trận A.

Ta công nhận định lý sau:

Định lý 6.6.2
Hạng dòng của ma trận A bằng hạng cột của A và bằng cấp cao nhất của các định thức con khác không của nó.

Định nghĩa 6.6.3
Hạng của ma trận A là hạng dòng của ma trận A (và cũng bằng hạng cột của ma trận A). Ký hiệu hạng của ma trận A là $\text{rank}(A)$ hoặc $r(A)$.

Tìm hạng của một ma trận bằng cách đưa về dạng hình thang:
Các phép biến đổi sơ cấp sau không làm thay đổi hạng của ma trận
- Đổi chỗ 2 dòng (hoặc hai cột) của ma trận.
- Nhân 1 dòng (hay cột) với một phần tử $t \neq 0$ của trường $\mathbb{K}$.
- Nhân 1 dòng (hay 1 cột) với $t \in \mathbb{K}$ rồi cộng vào một dòng (hay một cột) khác.
Từ một ma trận cho trước luôn có thể sử dụng một số phép biến đổi sơ cấp để đưa về một ma trận có dạng hình thang, tức là một ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ có tính chất: $\exists r \leq \min(m, n)$ để $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$ thỏa mãn $i < j$ hay $i > r$ và $a_{11}.a_{22}\dots a_{rr} \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng hạng của ma trận hình thang này là r.

Ví dụ: Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Biến đổi ma trận A về dạng hình thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} = B$$

Các bước biến đổi:

- nhân dòng 1 với (-2) rồi cộng vào dòng 2; nhân dòng 1 với (-2) rồi cộng vào dòng 3,

- đổi vị trí dòng 2 và dòng 3,
- nhân dòng 2 với (-3) rồi cộng vào dòng 3.

Ma trận B có dạng hình thang và có hạng là 3. Từ đó $r(A) = 3.$

6.7 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 6.7.1
Cho V và V' là hai $\mathbb{K}$ không gian véc tơ hữu hạn chiều, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (1) là một cơ sở của V, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (2) là một cơ sở của V' và f là một ánh xạ tuyến tính từ V đến V'. Giả sử các $f(\varepsilon_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ biểu thị tuyến tính qua cơ sở (2) như sau:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= a_{11}.\xi_1 + \ldots + a_{m1}.\xi_m, \\ f(\varepsilon_2) &= a_{12}.\xi_1 + \ldots + a_{m2}.\xi_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\varepsilon_n) &= a_{1n}.\xi_1 + \ldots + a_{mn}.\xi_m. \end{aligned}$$

Khi đó ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với 2 cơ sở (1) và (2). Ký hiệu $A = M_{(1)}^{(2)} f.$
Khi $V = V'$ và (1) trùng với (2), ta gọi A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở (1).

Ví dụ:

1. Cho không gian véc tơ V, có số chiều là n. Ma trận của ánh xạ tuyến tính đồng nhất id_V đối với một cơ sở bất kỳ là ma trận cấp n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Trong $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$ xét các cơ sở chính tắc:
   $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ (1) và

$\xi_1 = (1,0,0,0), \xi_2 = (0,1,0,0), \xi_3 = (0,0,1,0), \xi_4 = (0,0,0,1)$ (2).
Ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi:
$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1) &= (1,2,0,1) = \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_4, \\ g(\varepsilon_2) &= (3,-2,1,2) = 3\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4, \\ g(\varepsilon_3) &= (0,1,4,3) = \xi_2 + 4\xi_3 + 3\xi_4. \end{aligned}$$

Vậy ma trận của ánh xạ tuyến tính g đối với 2 cơ sở đã nêu là

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mệnh đề 6.7.2
Cho V và V' là hai $\mathbb{K}$ không gian véc tơ hữu hạn chiều, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (1) và $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (2) lần lượt là hai cơ sở của V và V'. Giả sử $f : V \longrightarrow V'$ là một ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với hai cơ sở (1) và (2) là $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi đó nếu $\alpha \in V$ có tọa độ trong cơ sở (1) là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì $f(\alpha)$ có tọa độ trong cơ sở (2) là $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, ở đó

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Chứng minh: *Ta có*

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\xi_j) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji})\xi_j \end{aligned}$$

Suy ra

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

□

Định nghĩa 6.7.3
Giả sử $(\varepsilon) = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}, (\varepsilon') = \{\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'\}$ *là hai cơ sở của không gian véc tơ* V *và*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \ldots + a_{n1}\varepsilon_n \\
\varepsilon_2' &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \ldots + a_{n2}\varepsilon_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n' &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \ldots + a_{nn}\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Khi đó ma trận

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) *sang cơ sở* (ε').

Nhận xét: Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε') của V chính là ma trận của ánh xạ tuyến tính id_V đối với 2 cơ sở (ε') và (ε).
Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ xét hai cơ sở:

$$(1) : \varepsilon_1 = (0,1,0), \varepsilon_2 = (2,0,0), \varepsilon_3 = (0,0,-1),$$

$$(2) : \varepsilon_1' = (2,1,1), \varepsilon_2' = (1,2,1), \varepsilon_3' = (1,1,2).$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\
\varepsilon_2' &= 2\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\
\varepsilon_3' &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2) là:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6.8 Tính chất của ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định lý 6.8.1
Cho ba K*-không gian véc tơ* V_1, V_2, V_3. *Giả sử* (1), (2), (3) *lần lượt là những cơ sở của* V_1, V_2, V_3. *Cho hai ánh xạ tuyến tính* $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$. *Khi đó*

$$M_{(1)}^{(3)} gf = M_{(2)}^{(3)} g . M_{(1)}^{(2)} f.$$

Hệ quả 6.8.2

(i) Nếu $f : V_1 \longrightarrow V_2$ đẳng cấu và (1) là 1 cơ sở của V_1, (2) là 1 cơ sở của V_2 thì:

$$M_{(2)}^{(1)} f^{-1} = (M_{(1)}^{(2)} f)^{-1}.$$

(ii) Cho $f : V_1 \longrightarrow V_2$ là một ánh xạ tuyến tính, (1) và $(1')$ là 2 cơ sở của V_1, (2) và $(2')$ là 2 cơ sở của V_2, S là ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở $(1')$, T là ma trận chuyển từ cơ sở (2) sang cơ sở $(2')$. Khi đó:

$$M_{(1)}^{(2)} f = S.M_{(1')}^{(2')} f.T^{-1}.$$

BÀI TẬP VI

VI.1. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính:

$a.$ $A + B - C$

$b.$ $2A - 5B + C$

$c.$ $A + 2B - 3C$

VI.2. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X sao cho:

$a.$ $A - 2X = B$

$b.$ $3B - X = A$

VI.3. Cho đa thức $f(x) = x^2 - 2x + 3$ và ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính: $f(A)$

VI.4. Chứng minh rằng mọi ma trận cấp 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

đều thỏa mãn phương trình $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I = 0$

VI.5. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

VI.6. Giải các phương trình ma trận sau:

$$a. \quad X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

VI.7. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n

1. Cho $\det(A) = 2$ hãy tính $\det(A^3)$ và $\det(A^5)$.
2. Cho biết A khả nghịch và $\det(A) = 5$, tính $\det(A^{-1})$.
3. Cho $\det(A) = 4$ và $B^3 = A$, tính $\det(B)$.
4. Cho $\det(A) = 6$, tính $\det(A^2 A^t A)$.

VI.8. Dùng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hãy mã hóa các từ sau:

1. "HOUSEHOLD ".
2. "VIETNAM".
3. "QUESTION ".
4. "TIMESCALE ".

VI.9. Các từ dưới đây đã được mã hóa bởi ma trận A trong bài tập trên, hãy giải mã các từ đó.

1. "FZJWGP ".
2. "GMPHSC".
3. "YCINQIOQR".

VI.10. Tìm hạng của các ma trận sau

$$a.\quad A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 3 & -2 & 4\\ 4 & -6 & 12\end{pmatrix}\qquad b.\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$c.\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\qquad d.\quad D=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 6\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

VI.11. Tìm hạng của các ma trận sau

$$a.\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\qquad b.\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

$$c.\quad C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\qquad d.\quad D=\begin{pmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

VI.12. Tìm x để hạng của ma trận sau bằng 2

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & x & 6\end{pmatrix}$$

VI.13. Tìm ma trận chuẩn tắc tương ứng với các ánh xạ tuyến tính sau:

1. $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\quad f(x,y)=x+y.$
2. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}\quad f(x,y,z)=2x-3y+z.$
3. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2\quad f(x,y,z)=(2x-y,x+y-2z).$

4. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = (2x+y, x-2y, y)$.
5. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad f(x,y) = (-x-2y, 3x, 0, -x+y)$.
6. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = (2x+z, x-z, y)$.
7. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = x-y$.
8. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (0, y, -2z)$.
9. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (x, 0, 0)$.
10. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (x, -x, 2z)$.
11. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x) = (3x, -x, 2x)$.

VI.14. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - x_3)$.

$a.$ Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính

$b.$ Chứng minh rằng hệ véc tơ sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$: $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (0,1,2), \varepsilon_3 = (0,0,1)$.

$c.$ Chứng minh rằng $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (1,1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

$d.$ Tìm ma trận của ánh xạ f đối với hai cơ sở (ε) của $\mathbb{R}^3$ và (α) của $\mathbb{R}^2$.

VI.15. Cho V là không gian véc tơ có $\dim V = 2$. Gọi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. là cơ sở của V. Cho f là phép biến đổi tuyến tính của V có ma trận trong cơ sở (ε) là $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3)$ với:

$a.$ $\alpha_1 = -3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$.

$b.$ $\alpha_2 = \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2$.

$c.$ $\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2$.

VI.16. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_3, x_2 + x_1, x_1)$.

$a.$ Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở $\varepsilon_1 = (1,1,0), \varepsilon_2 = (0,1,1), \varepsilon_3 = (1,0,1)$.

$b.$ Tìm ánh xạ tuyến tính g biết rằng ma trận biểu diễn g trong cơ sở ở câu (a) là
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

VI.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, -x - y)$. Tìm một cơ sở trong $\mathbb{R}^2$ sao cho f có ma trận biểu diễn trong cơ sở đó là $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

VI.18. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa mãn

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$.

VI.19. Gọi P_3 là không gian véc tơ gồm đa thức O và các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc không vượt quá 3.

$a.$ Chứng minh rằng hai hệ véc tơ
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2, \alpha_4 = x^3;$
$\beta_1 = 1, \beta_2 = (x - 2), \beta_3 = (x - 2)^2, \beta_4 = (x - 2)^3$
là hai cơ sở của P_3.

$b.$ Tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai.

$c.$ Tìm tọa độ của véc tơ $\alpha = x^3 - 2x + 1$ đối với cơ sở thứ hai.

VI.20. Cho hai hệ véc tơ:
(1) $\alpha_1 = (0, 1, 0, 2),\ \alpha_2 = (1, 1, 0, 1),\ \alpha_3 = (1, 2, 0, 1),$
$\alpha_4 = (-1, 0, 2, 1);$
(2) $\beta_1 = (1, 0, 2, -1),\ \beta_2 = (0, 3, 0, 2),\ \beta_3 = (0, 1, 3, 1),$
$\beta_4 = (0, -1, 0, 1);$
trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$.

$a.$ Chứng minh (1) và (2) là hai cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

$b.$ Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2).

$c.$ Tìm tọa độ của $\alpha = (2, 0, 4, 0)$ đối với cơ sở (2).

$d.$ Tìm tọa độ của α đối với cơ sở (1).

Bài 7

Hệ phương trình tuyến tính

7.1 Khái niệm

Định nghĩa 7.1.1
Cho $\mathbb{K}$ *là một trường. Hệ* m *phương trình* n *ẩn* $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ *dạng:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \ldots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = & & b_m \end{cases} \tag{7.1}$$

trong đó các $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ *được gọi là một hệ phương trình tuyến tính .*
Một phần tử $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ *gọi là một nghiệm của hệ phương trình đã cho nếu khi thay* x_i *bởi* c_i *thì các phương trình trong hệ trở thành những đẳng thức đúng.*
Hệ (7.1) *có thể viết gọn dưới dạng:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Các phần tử b_i *gọi là các hệ số tự do.*
Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận các hệ số của hệ phương trình (7.1).
Ma trận

$$A_{bs} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình (7.1).

Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *thì* (7.1) *có thể viết dưới dạng ma trận:* $AX = B$.
Nếu coi các vectơ cột của ma trận A_{bs} *như những vectơ trong* $\mathbb{K}^m$*:*
$\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, $j = \overline{1, n}$
$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.
thì hệ (7.1) *có thể viết dưới dạng vectơ như sau:*

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta.$$

7.2 Tiêu chuẩn có nghiệm

Định lý 7.2.1
Hệ phương trình (7.1) *có nghiệm khi và chỉ khi* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_{bs}$.

Chứng minh:
$(\Rightarrow)$Giả sử hệ (7.1) có nghiệm là $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ tức là:

$$c_1\alpha_1 + c_1\alpha_1 + \dots + c_1\alpha_1 = \beta.$$

Như vậy, β là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Suy ra $\mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.
Điều đó chứng tỏ rằng $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_{bs}$.
$(\Leftarrow)$ Giả sử $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_{bs}$. Điều đó có nghĩa là hạng của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ bằng hạng của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Suy ra $\dim \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = \dim \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$
Từ đó $\mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và do đó $\beta \in \mathrm{L}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ hay tồn tại các phần tử $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = \beta.$$

Vậy hệ (7.1) có nghiệm. □

7.3 Hệ Cramer

Định nghĩa 7.3.1
Hệ phương trình (7.1) được gọi là hệ Cramer nếu ma trận hệ số A là một ma trận vuông khả nghịch tức là $m = n$ và định thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Định lý 7.3.2 (Quy tắc Cramer)
Hệ phương trình Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \dots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+ & \dots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2+ & \cdots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được xác định như sau:

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

trong đó D là định thức của ma trận hệ số và

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Chứng minh: Viết hệ phương trình dưới dạng ma trận $AX = B$. Do $\det A \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Nhân A^{-1} vào hai vế của phương trình trên ta được $X = A^{-1}B$. Như vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Thay $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n b_i$ ta được:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \dots & a_{1j+1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \dots & a_{2j+1} & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & \dots & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Do tính chất của định thức ta có thể viết

$$D_j = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ x_j \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ j ở vế phải bằng D còn các định thức khác bằng 0 cho nên $D_j = x_j D$. Do đó

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

□

Ví dụ:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x & & + & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 3. \end{cases}$$

Lời giải: Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Do đó hệ đã cho là hệ Cramer.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Áp dụng công thức nghiệm cho hệ Cramer ta có:

$$\begin{cases} x &= D_1/D &= 1, \\ y &= D_2/D &= 1, \\ z &= D_3/D &= 1. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(1, 1, 1)$.

7.4 Phương pháp Gauss

Các phép biến đổi sau không làm thay đổi tập nghiệm của một hệ phương trình:

1. Đổi chỗ hai phương trình của hệ cho nhau.
2. Nhân hai vế của một phương trình của hệ với một phần tử $k \neq 0$ của $\mathbb{K}$.
3. Nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số $k \in \mathbb{K}$ rồi cộng vế với vế vào một phương trình khác của hệ.

Từ một hệ phương trình tuyến tính bất kỳ cho trước bao giờ cũng có thể sử dụng một số phép biến đổi sơ cấp để đưa được về một hệ phương trình mà ma trận hệ số của nó có dạng hình thang.

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots a'_{rr} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ký hiệu $b'_1, b'_2, \dots, b'_m$ là các hệ số tự do của hệ phương trình mới. Nếu $\exists i > r$ để $b'_i \neq 0$ thì hệ vô nghiệm. Nếu $b'_i = 0, \forall i > r$, từ r dòng đầu tiên của ma trận trên ta luôn được một định con dạng chéo cấp r khác 0. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr} \neq 0$ thì hệ (7.1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \dots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a'_{rr}x_r & + & \dots & + & a'_{rn}x_n & = & b'_r \end{cases}$$

Để giải hệ này ta chuyển ta chuyển các số hạng chứa các x_i với $i > r$ qua vế phải (các ẩn này được gọi là các ẩn tự do). Từ phương trình cuối, tính được x_r (qua các ẩn tự do). Thay x_r vào phương trình thứ $r-1$ ta tính được x_{r-1}. Tiếp tục quá trình đó ta tính được $x_{r-2},\ldots,x_2,x_1$

Ví dụ:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12 \end{cases}$$

Lời giải:

$$A_{bs} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right)$$

Đổi chỗ dòng thứ nhất cho dòng thứ tư:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ ba với -2 cộng vào dòng 1, nhân dòng thứ tư với -1 rồi cộng vào dòng thứ ba, nhân dòng thứ nhất với -2 rồi cộng vào dòng thứ tư ta được:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ ba với -1 rồi cộng vào dòng thứ tư, nhân dòng thứ hai với $-2/3$ rồi cộng vào dòng thứ ba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & -9 & 3 & -15 \end{array}\right)$$

Nhân dòng thứ hai với -3 rồi cộng vào dòng thứ tư, nhân dòng thứ ba với

3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vậy ta được hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \\ \quad - 3x_2 + x_3 = -5 \\ \quad\quad 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối rút ra được $x_3 = 1$ thay lên hai phương trình trên ta có $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ (Phương trình cuối luôn đúng).
Vậy nghiệm của hệ là: $(3, 2, 1)$ (Không có ẩn tự do).

7.5 Biện luận về số nghiệm

Cho hệ phương trình tuyến tính n ẩn với ma trận hệ số là A và ma trận bổ sung là A_{bs}

- Nếu hạng $A \neq$ hạng A_{bs} thì hệ vô nghiệm.
- Giải sử hạng $A =$ hạng $A_{bs} = r$, có hai trường hợp: $r = n$ và $r < n$.

1. Trường hợp hạng $A =$ hạng $A_{bs} = r = n$. Hệ phương trình tương đương với hệ có dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

trong đó $(a'_{11},\ a'_{22},\ a'_{nn} \neq 0)$.
Hệ này có nghiệm duy nhất.

2. Trường hợp hạng $A =$ hạng $A_{bs} = r < n$, Hệ phương trình(7.1) tương đương với hệ có dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad a'_{rr}x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases}$$

Cho các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ (các ẩn tự do) những giá trị tùy ý ta tính được $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qua các ẩn tự do đó. Điều đó chứng tỏ hệ phương trình có vô số nghiệm.

Tóm lại:

- Nếu hạng $A \neq$ hạng A_{bs}: hệ phương trình vô nghiệm.
- hạng $A =$ hạng $A_{bs} = n$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- hạng $A =$ hạng $A_{bs} < n$: hệ phương trình có vô số nghiệm.

7.6 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 7.6.1
Hệ phương trình tuyến tính trong đó các hệ số tự do đều bằng 0 *được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Như vậy hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = \overline{1, m} \tag{7.2}$$

Nhận xét: Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn nhận $(0, 0, \ldots, 0)$ làm một nghiệm. Nghiệm đó gọi là nghiệm tầm thường của hệ.

Mệnh đề 7.6.2
Điều kiện cần và đủ để hệ n *phương trình tuyến tính thuần nhất* n *ẩn có nghiệm không tầm thường là* $\det A = 0$.

Chứng minh: Hệ (7.2) có nghiệm không tầm thường tương đương hệ có vô số nghiệm, theo phần biện luận về số nghiệm, mục 7.5. Điều này tương đương với $\operatorname{rank} A = r < n$ tức là $\det A = 0$. □

7.7 Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Mệnh đề 7.7.1
Gọi $\mathcal{G}$ *là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* (7.2). *Ta có:*

1. $\mathcal{G}$ *là một không gian con của* $\mathbb{K}^n$.
2. $\dim \mathcal{G} = n - \operatorname{rank} A$.

Chứng minh:

1. Vì (7.2) luôn có nghiệm tầm thường nên $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
   Giả sử $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và $\eta = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ thuộc $\mathcal{G}$; $k,\ l \in \mathbb{K}$; ta chứng minh $k\gamma + l\eta \in \mathcal{G}$.
   Viết hệ (7.2) dưới dạng vectơ:
   $$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = \theta$$
   Vì $\gamma,\ \eta$ là nghiệm của (7.2) nên $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = \theta$ và $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = \theta$
   Suy ra:
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(lc_i + kd_i)\alpha_i &= \sum_{i=1}^{n}(lc_i)\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}(kd_i)\alpha_i\\ &= l\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + k\sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i\\ &= \theta + \theta = \theta\end{aligned}$$
   Điều đó chứng tỏ $k\gamma + l\eta$ là nghiệm của hệ (2), hay $k\gamma + l\eta \in \mathcal{G}$. Và do đó $\mathcal{G}$ là không gian con của $\mathbb{K}^3$.

2. Xét ánh xạ tuyến tính:
   $$\varphi: \quad \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
   cho bởi:$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j)$ Tập nghiệm $\mathcal{G}$ của hệ phương trình chính là $\ker\varphi$. Theo định lý $(4.4.4)$ ta có:
   $\dim\mathcal{G} = \dim\mathbb{K}^n - \dim\operatorname{Im}\varphi = n - \dim\operatorname{Im}\varphi$.
   Ta có $\operatorname{Im}\varphi$ được sinh bởi $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ ở đó:
   $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.
   Mà $\varphi(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, \varphi(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$.
   Vậy $\dim\operatorname{Im}\varphi =$ rank$\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)\}$ rank $(a_{ij})_{m\times n}$.
   Suy ra $\dim\mathcal{G} = n -$rank $(a_{ij})_{m\times n}$.

□

Định nghĩa 7.7.2
Mỗi cơ sở của không gian nghiệm $\mathcal{G}$ của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được gọi là một hệ nghiệm cơ bản của hệ đó.

Để tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, trước tiên ta giải hệ (chẳng hạn bằng phương pháp Gauss) để tìm nghiệm tổng quát của nó. Giả sử hạng của ma trận là r và số ẩn là n.

Nếu $r = n$ thì không gian nghiệm là $\{\theta\}$ và không có cơ sở.
Nếu $r < n$ thì $n - r$ ẩn được chọn làm ẩn tự do. Cho các ẩn tự do này nhận các bộ giá trị: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$ …, $(0, 0, \ldots, 1)$ và tính các nghiệm $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ ứng với các giá trị đó. Khi đó hệ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ là một cơ sở của không gian nghiệm hay là một hệ nghiệm cơ bản Chú ý rằng một không gian véc tơ có nhiều cơ sở khác nhau nên một hệ phương trình tuyến tính có thể có nhiều hệ nghiệm cơ bản khác nhau.
Ví dụ:

Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Lời giải: Đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Chọn hai ẩn tự do $x_4,\ x_5$.
Cho $x_4 = 1,\ x_5 = 0$ ta tìm được nghiệm $\varepsilon_1 = (-2, 2, 1, 1, 0)$.
Cho $x_4 = 0,\ x_5 = 1$ ta tìm được nghiệm $\varepsilon_2 = (-1, -2, -1, 0, 1)$.
Ta tìm được một hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho là
$\{\varepsilon_1 = (-2, 2, 1, 1, 0),\ \varepsilon_2 = (-1, -2, -1, 0, 1)\}$.

7.8 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết

Định nghĩa 7.8.1
Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7.3}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = & 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

gọi là hệ phương trình liên kết với hệ (7.3).

Mệnh đề 7.8.2
Cho α_0 là một nghiệm nào đó (cố định) của hệ (7.3). *Khi đó α là nghiệm của* (7.3) *khi và chỉ khi α có dạng $\alpha_0 + \varepsilon$ ở đó ε là một nghiệm của hệ phương trình thuần nhất liên kết* (7.3).

Chứng minh: Viết hệ dưới dạng vec tơ, vì $\alpha_0 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là một nghiệm của (7.3) nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = \beta$$

Khi đó $\eta = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ là một nghiệm nào đó của (7.3) khi và chỉ khi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = \beta.$$

Tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)\alpha_i = \theta$$

tức là $\eta - \alpha \in \mathcal{G}$. □

Nhận xét: Mệnh đề trên thường được áp dụng trong hai trường hợp:

- Vì một lí do nào dó ta biết trước một nghiệm riêng của hệ (7.3).
- Cần phải giải nhiều hệ phương trình tuyến tính mà chúng có chung một hệ thuần nhất liên kết.

BÀI TẬP VII

VII.1. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm:

a. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 2 \\ 4x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$

VII.2. Tìm điều kiện để hệ sau có nghiệm

$a.\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$ $\qquad b.\ \begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$

VII.3. Giải các hệ phương trình sau:

$$a.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$b.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$c.\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$$

$$d.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 7x_3 - 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$e.\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

VII.4. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo tham số a:

$$a.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = a \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$b.\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$$

$$c.\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 2 \\ 2x - 2y + 7z + t = 3 \\ x - 2y + (a+3)z + 2t = 4 \\ (a-3)x - (2a-6)y - 9z + (a^2-6)t = 3a-13 \end{cases}$$

$$d.\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + at = 9 \end{cases}$$

VII.5. Tìm đa thức $f(x)$ bậc nhỏ hơn hay bằng 4 thỏa mãn:
$f(-1) = 3$, $f(1) = -3$, $f'(1) = -3$, $f^{(2)}(1) = 12$, $f^{(3)}(1) = 42$.

VII.6. Tìm đa thức $f(x)$ bậc 2 thỏa mãn: $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

VII.7. Tìm đa thức $f(x)$ bậc 3 thỏa mãn: $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 16$.

VII.8. Áp dụng định lý Cramer giải các hệ sau:

$$a. \begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

VII.9. Tìm điều kiện để hệ sau có nghiệm không tầm thường:

$$a. \begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} (1-a)x + 2y = 0 \\ 2x + (4-a)y = 0 \end{cases}$$

VII.10. Chứng minh rằng một đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng n hoàn toàn xác định nếu biết $n+1$ giá trị $y_i = f(x_i)$ với $i = 0, 1, \ldots, n, \quad x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j$. Tức là tồn tại đa thức duy nhất $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x_i) = y_i, \;\; i = \overline{0, n}$$

VII.11. * Giải hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_1^{n-1} x_1 + a_1^n = 0 \\ x_n + a_2 x_{n-1} + \ldots + a_2^{n-1} x_1 + a_2^n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ldots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ x_n + a_n x_{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} x_1 + a_n^n = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

$$b. \begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_1^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_2^{n-1} x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ldots \quad\quad \vdots \\ x_1 + a_n x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_n = b_n \end{cases}$$

(a_i đôi một khác nhau)

VII.12. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ véc tơ sau trong $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{\alpha_1} = (1, 2, 0, -1); \;\; \vec{\alpha_2} = (0, 1, 3, -2); \;\; \vec{\alpha_3} = (-1, 0, 2, 4); \;\; \vec{\alpha_4} = (1, 1, 2, 3)$$

VII.13. Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của mỗi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây:

a. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - 12x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + \quad + x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

VII.14. Cho hệ vectơ trong không gian $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_1 = (-1, 2, -4);\ \alpha_2 = (2, 1, 5);\ \alpha_3 = (12, 1, 33)$$

Hãy tìm các số x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$.
Từ đó kết luận hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ có độc lập tuyến tính hay không?

VII.15. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1),\ \alpha_1 = (2, 2, 2, 2),\ \alpha_3 = (3, 0, -1, 1)$$

Hãy biểu thị $\alpha_4 = (-12, 3, 8, -2)$ qua hệ vectơ đã cho.

VII.16. Chứng minh hệ phương trình sau có nghiệm khác 0:

$$\begin{cases} 0x_1 + 2002x_2 - 2003x_3 + 2004x_4 - 155x_5 = 0 \\ -2002x_1 + 0x_2 + 324x_3 - 534x_4 - 723x_5 = 0 \\ 2003x_1 - 324x_2 + 0x_3 + 723x_4 - 71x_5 = 0 \\ -2004x_1 + 534x_2 - 723x_3 + 0x_4 + 231x_5 = 0 \\ 155x_1 + 723x_2 + 71x_3 - 231x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh, Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân, Nguyễn Doãn Tuấn, *Giáo trình Toán Đại cương*, Phần I, *Đại số tuyến tính và Hình học Giải tích*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 6 - 1997.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học Cao cấp*, Tập I, *Đại số và Hình học Giải tích*, NXB Giáo Dục, 2003.

[3] Nguyễn Duy Thuận, *Toán Cao cấp A1 - Phần Đại số tuyến tính*, NXB Giáo Dục, 2000.

[4] Phan Huy Phú, Nguyễn Doãn Tuấn, *Bài tập Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 3 - 2001.

[5] Ngô Thúc Lanh, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1970.

[6] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2000.

[7] Hoàng Hiền Quang, *Linear algebra*, McGraw - Hill Book Company, 1968.

Chỉ mục