GIẢI TÍCH I
BÀI 7

CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN
§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

• Đặt vấn đề

I. Định nghĩa.

1. Định nghĩa.

$f(x)$ trên $(a\,;\,b)$, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x),\ \forall\ x \in (a\,;\,b)$

Ví dụ

a) $f(x) = 2010$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sin x$ **e)** $f(x) = \ln x$ **f)** $y = x^2 e^x$

g) $f(x) = x^2 \ln x$ **h)** $f(x) = x\cos x$ **i)** $f(x) = x^3 \sin x$

Định lí. $F'(x) = f(x)$, $x \in (a\,;\,b)$, khi đó tập tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) + C$

Định nghĩa. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

2. Tính chất

a) $f(x)$ liên tục trên $(a\,;\,b) \Rightarrow \exists \int f(x)\,dx$

b) Tuyến tính. $\exists \int f(x)\,dx,\ \exists \int g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Toán tử $\int$ *có khả nghịch trái, không có khả nghịch phải*

c) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ **d)** $\int \left(\dfrac{d}{dx} f(x)\right) dx = f(x) + C$

3. Bảng một số tích phân thông dụng

$$\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

II. Các phương pháp tính

1. Đổi biến số

Mệnh đề 1. Nếu $\int g(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow \int g(w(x))\,w'(x)\,dx = G(w(x)) + C$

Mệnh đề 2. Nếu $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x) + C \Rightarrow \int g(t)\,dt = G(\varphi^{-1}(t)) + C$, ở đó $t = \varphi(x)$ có hàm ngược là $x = \varphi^{-1}(t)$

Ví dụ 1

a) $\int x(x+4)^{12}\,dx$ b) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

d) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ e) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ h) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ i) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx$ $\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}+C\right)$

m) $\int \frac{\cot x}{1+\sin^2 x}dx$ $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}+C\right)$

2. Tích phân từng phần. Các hàm u, v khả vi, có $\int udv = uv - \int vdu$

Ví dụ 2

a) $\int \ln^2 x dx$ b) $\int (5x+6)\cos 3x dx$ c) $\int \sin(\ln x)\,dx$

d) $\int (\arcsin x)^2\,dx$ e) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ f) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

g) $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ h) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$ i) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

k) $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Ví dụ 3.

a) $\int \frac{xdx}{e^x(x-1)^2}$ $\left(-\frac{e^{-x}}{x-1}+C\right)$ b) $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2e^x}$ $\left(-\frac{e^{-x}}{x}+C\right)$

c) $\int \operatorname{arccot}\sqrt{2x-1}\,dx$ $\left(\frac{1}{2}\left[2x\operatorname{arccot}\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1}\right]+C\right)$

d) $\int \arctan\sqrt{2x+1}\,dx$ $\left(\frac{1}{2}\left[2(x+1)\arctan\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1}\right]+C\right)$

3. Sử dụng các lớp hàm có tính chất đặc biệt

Ví dụ

a) $\int x^8e^xdx$ b) $\int x^9\cos xdx$ c) $\int x^{10}\sin xdx$

d) $\int x^ne^xdx$ e) $\int x^n\cos xdx$ f) $\int x^n\sin xdx$

4. Tích phân của một vài lớp hàm khác

a) Hàm hữu tỉ $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc m, n của x.

Định lí. Nếu $Q_n(x) = a_n(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\gamma}$, ở đó $\alpha, \beta, \ldots, \mu \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $l^2-4s<0$, $\alpha+\beta+\ldots+2(\mu+\ldots+\gamma) = n$. Khi đó

$$R(x) = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$

$$+\frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}$$

$$+ \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\gamma}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{P_{\gamma-1}x+Q_{\gamma-1}}{x^2+lx+s},$$

các hệ số nêu trên được tính theo phương pháp hệ số bất định.

Từ đó, để tính $\int R(x)\,dx$ ta sẽ dẫn đến tính các tích phân sau

1°) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$; **2°)** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$; **3°)** $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$;

ở đó $p^2-4q<0$.

Ví dụ.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^5}$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+3x+4}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^4+4}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$