Bộ môn KTMT	**ĐỀ THI XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ** *Thời gian 90 phút. Không sử dụng tài liệu và thiết bị nghe nhìn. Sinh viên đề nghị cán bộ coi thi và ký vào bài làm đề A hoặc B. Nếu không bài thi sẽ không điểm. Nộp lại đề cùng bài làm.*	A

Câu 1: **a)** Có 3 hệ mắc nối tiếp nhau và đáp ứng xung lần lượt của 3 hệ là $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1), h_2(n) = h(n), h_3(n) = u(n)$. Không dùng biến đổi Z, hãy tính toán trong miền thời gian để xác định đáp ứng xung của toàn hệ $h_c(n)$.

b) Cho $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$. Hãy tính $X(e^{j\omega})$.

Câu 2: Cho hàm truyền đạt của 2 bộ lọc như sau:

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}, H_2(z) = \frac{1-a}{2}.\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

a) Hãy tính $\left|H_1(e^{j\omega})\right|^2, \left|H_2(e^{j\omega})\right|^2$.

b) Giả thiết $a = 0{,}8$ và $\left|H_1(e^{j\omega_1})\right|^2 = \left|H_2(e^{j\omega_2})\right|^2 = \frac{1}{2}$. Tính ω_1 và ω_2. Nếu $\omega_1 > \omega_2$ ta nói rằng bộ lọc thứ nhất có dải thông lớn hơn bộ lọc thứ hai, còn nếu $\omega_1 < \omega_2$ thì bộ lọc thứ hai có dải thông lớn hơn. Vậy so sánh dải thông của 2 bộ lọc trong trường hợp này như thế nào?

Câu 3: Cho PT-SP $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ với $a = e^{j\omega_0}$. Giả thiết $x(n)$ là thực. Như vậy $y(n)$ sẽ là phức và được biểu diễn theo phần thực và phần ảo như sau: $y(n) = y_R(n) + jy_I(n)$.

a) Xác định phương trình mô tả hệ với một đầu vào $x(n)$ và 2 đầu ra $y_R(n)$ và $y_I(n)$.

b) Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ.

c) Chứng minh rằng nếu $x(n) = \delta(n)$ thì $y_R(n) = (\cos\omega_0 n)u(n), y_I(n) = (\sin\omega_0 n)u(n)$

d) Hệ này có thể được sử dụng để làm gì?

Câu 4: Cho PT-SP $y(n) = x(n) + x(n-10)$

a) Xác định và vẽ đáp ứng biên độ của hệ

b) Tính tín hiệu ra $y(n)$ nếu $x(n) = \cos\frac{\pi}{10}n + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right), -\infty < n < \infty$

Câu 5: Xét bộ lọc có quan hệ vào-ra $y(n) = 0{,}9y(n-1) + 0{,}1x(n)$

a) Xác định tần số ω sao cho $\left|H(e^{j\omega})\right| = 1/\sqrt{2}$

b) Đây là bộ lọc thông thấp hay thông cao? Vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

a) Do 3 hệ mắc nối tiếp nhau nên đáp ứng xung toàn hệ là:

$$h_c(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n) = h_2(n) * [h_1(n) * h_3(n)]$$

Ta có:

$$h_1(n) * h_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1(k).h_3(n-k)$$

Do $h_1(k) = \delta(n) - \delta(n-1) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$, nên ta có:

$$h_1(n) * h_3(n) = h_1(0).h_3(n-0) + h_1(1).h_3(n-1) = h_3(n) - h_3(n-1) = u(n) - u(n-1)$$

Lại vì $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$; $u(n-1) = \begin{cases} 1, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$ nên ta có:

$$h_1(n) * h_3(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} = \delta(n)$$

Vì vậy: $h_c(n) = h_2(n) * \delta(n) = h_2(n) = h(n)$

Kết luận: đáp ứng xung toàn hệ là $h_c(n) = h(n)$

b) Ta có $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$.

Vì $u(n+3) = \begin{cases} 1, & n \geq -4 \\ 0, & n < -4 \end{cases}$ nên $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 4 \\ 0, & n < 4 \end{cases}$

Từ đây có biến đổi Fourier của tín hiệu *x(n)* là:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n \qquad (*)$$

Do $\left|\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right| = \frac{1}{4} < 1$ nên chuỗi (*) hội tụ, vì thế tồn tại biến đổi Fourier.

Ta có:

$$\sum_{n=-4}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{-4}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{256e^{j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Kết luận:

$$\boldsymbol{X(e^{j\omega}) = \frac{256e^{j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}}$$

Câu 2:

a) Ta có:

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{1-a}{2}.\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Suy ra:

$$H_1(e^{j\omega}) = H_1(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-a}{1-ae^{-j\omega}},$$

$$H_2(e^{j\omega}) = H_2(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-a}{2}.\frac{1+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

Từ đây có:

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{1-a}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{|1-a|}{|1-ae^{-j\omega}|}$$

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{1-a}{2}.\frac{1+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{|1-a|}{2}.\frac{|1+e^{-j\omega}|}{|1-ae^{-j\omega}|}$$

Ta có:

$$1 + e^{-j\omega} = 1 + \cos\omega - j\sin\omega$$

$$\Rightarrow |1+e^{-j\omega}| = \sqrt{(1+\cos\omega)^2 + (-\sin\omega)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\omega}$$

$$1 - ae^{-j\omega} = 1 - a(\cos\omega - j\sin\omega) = 1 - a\cos\omega + ja\sin\omega$$

$$\Rightarrow |1-ae^{-j\omega}| = \sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

Vì thế:

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \frac{|1-a|}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\left|H_1(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{(1-a)^2}{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \frac{|1-a|}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+2\cos\omega}}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\Rightarrow \left|H_2(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{(1-a)^2}{4} \cdot \frac{2+2\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega} = \frac{(1-a)^2(1+\cos\omega)}{2(1+a^2-2a\cos\omega)}$$

b) Với $a = 0{,}8$; $\left|H_1(e^{j\omega_1})\right|^2 = \left|H_2(e^{j\omega_2})\right|^2 = \frac{1}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{(1-0{,}8)^2}{1+0{,}8^2-1{,}6\cos\omega_1} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(1-0{,}8)^2(1+\cos\omega_2)}{2(1+0{,}8^2-1{,}6\cos\omega_2)} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\cos\omega_2}{1{,}64-1{,}6\cos\omega_2} = \dfrac{1}{0{,}04} \\ 1{,}64-1{,}6\cos\omega_1 = 0{,}08 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega_1 = \dfrac{39}{40} \\ \cos\omega_2 = \dfrac{40}{41} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 \approx 0{,}2241 + k2\pi \\ \omega_2 \approx 0{,}2213 + k2\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Ta chỉ xét trong đoạn $[0; 2\pi]$, do đó $\omega_1 \approx 0{,}2241$; $\omega_2 \approx 0{,}2213$. Dễ thấy $\omega_1 > \omega_2$

Kết luận: Bộ lọc thứ nhất có dải thông lớn hơn.

Câu 3:

a) Ta có: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$; $a = e^{j\omega_0}$, do đó:

$$y(n) = e^{j\omega_0}y(n-1) + x(n)$$

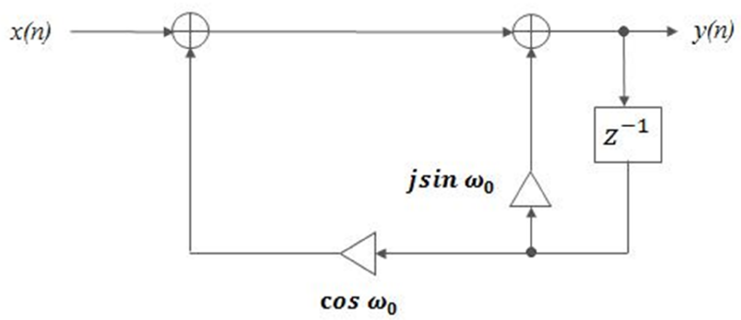
Theo công thức Euler: $e^{j\omega_0} = \cos\omega_0 + j\sin\omega_0$, nên:

$$y(n) = (\cos\omega_0 + j\sin\omega_0)y(n-1) + x(n) = x(n) + \cos\omega_0\, y(n-1) + j\sin\omega_0\, y(n-1)$$

Từ đây ta có: $y(n) = y_R(n) + jy_I(n)$ với

$$\begin{cases} y_R(n) = x(n) + \cos\omega_0\, y(n-1) \\ y_I(n) = \sin\omega_0\, y(n-1) \end{cases}$$

b) Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ



c) Chứng minh …

d) Hệ này được dùng để:

<u>**Câu 4**</u>: PT-SP: $y(n) = x(n) + x(n-10)$

a) Thực hiện biến đổi Fourier cả 2 vế của PT-SP ta được:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j10\omega}X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 + e^{-j10\omega})$$

Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 + e^{-j10\omega} = e^{-j5\omega}(e^{j5\omega} + e^{-j5\omega}) = 2\cos(5\omega)\, e^{-j5\omega}$$

Từ đây suy ra đáp ứng biên độ: $\boldsymbol{|H(e^{j\omega})| = 2|\cos(5\omega)|}$

Vẽ đáp ứng biên độ: <tự vẽ>

b) Ta có:

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right)$$

Mà theo giả thiết: $y(n) = x(n) + x(n-10)$, do đó tín hiệu ra y(n) là:

$$y(n) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}(n-10)\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}(n-10) + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}n - \pi\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$
$$+ 3\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right).\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right).\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) - \frac{3}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{30}\right)$$

Kết luận: Tín hiệu ra *y(n)* là:

$$\boldsymbol{y(n) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{30}\right)}$$

<u>**Câu 5**</u>: Bộ lọc có quan hệ vào-ra: $y(n) = 0{,}9y(n-1) + 0{,}1x(n)$

a) Thực hiện biến đổi Fourier cả 2 vế của phương trình sai phân:

$$Y(e^{j\omega}) = 0{,}9e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + 0{,}1X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}9e^{-j\omega}) = 0{,}1X(e^{j\omega})$$

Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9e^{-j\omega}}$$

Đáp ứng biên độ:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{0{,}1}{|1 + 0{,}9e^{-j\omega}|} = \frac{0{,}1}{\sqrt{1 + 0{,}9^2 - 1{,}8\cos\omega}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{1{,}81 - 1{,}8cos\omega}}$$

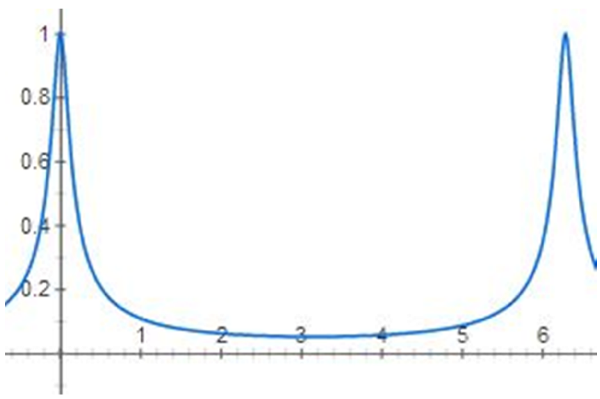
Để $|H(e^{j\omega})| = 1/\sqrt{2}$ thì:

$$\frac{0{,}1}{\sqrt{1{,}81 - 1{,}8cos\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 181 - 180\cos\omega = 2 \Leftrightarrow \cos\omega = \frac{179}{180}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega \approx 0{,}10546 + k2\pi \quad (k \in Z)}$$

b) Xác định tính chất bộ lọc

Vẽ đáp ứng biên độ:



Theo định lí Shannon: $f_{Max} \le \frac{F_s}{2}$, với F_s là tần số lấy mẫu, suy ra: $\omega_{Max} \le \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Do đó ta chỉ xét đáp ứng biên độ trong đoạn $[0;\pi]$

Dễ dàng thấy được từ 0 đến pi thì đáp ứng biên độ giảm, nên đây là bộ lọc thông thấp

Kết luận: Bộ lọc thông thấp