

BÀI 9

PHÉP BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

TS. Nguyễn Hồng Quang

PGS. TS. Trịnh Văn Loan

TS. Đoàn Phong Tùng

Khoa Kỹ thuật máy tính

□ Nội dung bài học

- Phép biến đổi Z ngược
- Phương pháp tìm tín hiệu rời rạc trên miền thời gian thông qua dạng biểu diễn trên miền Z .

❏ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

1. Phép biến đổi Z ngược theo phương pháp phân tích thành các biểu thức hữu tỷ đơn giản
2. Phép biến đổi Z ngược theo phương pháp phân tích thành chuỗi lũy thừa

Tính tuyến tính

Nếu

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

Thì

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Nhận xét: Tính chất tuyến tính cho phép phân tách $X(z)$ thành tổ hợp tuyến tính của các thành phần đã biết tín hiệu rời rạc tương ứng ở miền thời gian.

1. Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản

- Phép biến đổi Z ngược: $X(z)$, miền hội tụ $\rightarrow x(n)$?

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)}$$

- $P(z), Q(z)$ là các đa thức bậc M, N .
- $S(z)$ đa thức bậc $M - N$ ($M < N \rightarrow S(z) = 0$). Bậc của $P_0(z)$ nhỏ hơn bậc của $Q(z)$

$$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{z - z_i}$$

- z_i : điểm không đơn của $Q(z)$: $A_i = (z - z_i) \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \Big|_{z=z_i}$

Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)}$$

- Nếu các điểm không z_n của $Q(z)$ có bậc q

$$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \frac{A_i}{z - z_i} + \sum_{j=1}^q \frac{B_j}{(z - z_n)^j}$$

$$B_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{d^{q-j}}{dz^{q-j}} \left[(z - z_n)^q \frac{P_0(z)}{Q(z)} \right] \bigg|_{z=z_n}$$

Ví dụ

- Cho $X(z)$ với $|z| > 2$. Tìm $x(n)$?

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

- Mẫu số có hai nghiệm: $z = 1$ và $z = 2$

$$X(z) = a \frac{z}{z - 1} + b \frac{z}{z - 2}$$

$$\Rightarrow a = -1, \quad b = 2$$

$$\Rightarrow x(n) = 2 \cdot 2^n u(n) - u(n) = (2^{n+1} - 1) u(n)$$

2. Khai triển theo chuỗi lũy thừa

- $X(z)$ có dạng là tỷ số của 2 đa thức theo z^{-1} . Tiến hành phép chia đa thức để có từng mẫu của $x(n)$

- Ví dụ:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r} z^{-1} \overline{) 1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}} \\ \underline{z^{-1} - 1,414z^{-2} + z^{-3}} \\ 1,414z^{-2} - z^{-3} \\ \underline{1,414z^{-2} - 2z^{-3} + 1,414z^{-4}} \\ z^{-3} - 1,414z^{-4} \\ \underline{z^{-3} - 1,414z^{-4} + z^{-5}} \\ - z^{-5} \\ \underline{- z^{-5} + 1,414z^{-6} - z^{-7}} \\ - 1,414z^{-6} + z^{-7} \end{array}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, x(1) = 1, x(2) = 1,414, \\ x(3) &= 1, x(4) = 0, x(5) = -1 \dots \\ n < 0, x(n) &= 0 \end{aligned}$$

Một số biến đổi Z thông dụng (1/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn mf z
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta(n - m)$	z^{-m}	Toàn mf z trừ 0 nếu $m > 0$, trừ ∞ nếu $m < 0$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $

7

Một số biến đổi Z thông dụng (2/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\Omega n) u(n)$	$\frac{1 - (\cos \Omega)z^{-1}}{1 - 2(\cos \Omega)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\Omega n) u(n)$	$\frac{1 - (\sin \Omega)z^{-1}}{1 - 2(\sin \Omega)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$

4. Tổng kết

- Biến đổi Z ngược nhằm tìm tín hiệu rời rạc trên miền thời gian từ biểu diễn trên miền phức.
- Biểu diễn trên miền Z thường được phân tách thành các thành phần cơ bản thông qua khai triển thành các phân thức hữu tỷ hoặc khai triển theo chuỗi lũy thừa. Từ các thành phần cơ bản này kết hợp với tính chất tuyến tính của biến đổi Z cho phép tính biến đổi Z ngược dễ dàng hơn.

5. Bài tập

- Bài tập 1

□ Tính biến đổi Z ngược:

a. $X(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^2 - 3z + 2}, |z| > 2$

b. $X(z) = \frac{z + 5}{z^2 - 3z + 2}, |z| > 2$

Bài tập về nhà

- Bài tập 2

□ Tính biến đổi Z ngược của các tín hiệu sau:

a. $X(z) = \frac{1}{z-a}, |z| > a$

b. $X(z) = \frac{1}{(z-a)^2}, |z| > a$

c. $X(z) = \frac{1}{(z-a)^M}, |z| > a$

Bài tập về nhà

- Bài tập 3
 - Tính tổng chập của hai tín hiệu sau:

$$x_1(n) = 2^n u(n) \quad x_2(n) = 3^n u(n)$$

Bài học tiếp theo. BÀI 10

THỰC HIỆN HỆ THỐNG TRÊN MIỀN Z

Tài liệu tham khảo:

- **Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.**
- **J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.**



TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG
TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!