Đáp án chi tiết đề thi thử lần 1 môn GT2 giữa kỳ 20202

Câu 1.

- **(0.5 điểm)**
Xét hàm số $F(x,y,z) = x^3 - y^2 - 4e^z x + yz$. Khi đó

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 3x^2 - 4e^z \\ F'_y(x,y,z) = -2y + z \\ F'_z(x,y,z) = -4e^z x + y \end{cases}$$

Tại $M(2,0,0)$ thì

$$\begin{cases} F'_x(2,0,0) = 8 \\ F'_y(2,0,0) = 0 \\ F'_z(2,0,0) = -8 \end{cases}$$

- **(0.5 điểm)**
Phương trình tiếp diện của mặt $F(x,y,z) = 0$ tại M là

$$8(x-2) + 0(y-0) - 8(z-0) = 0 \ \text{ hay } \ x - z - 2 = 0$$

Phương trình pháp tuyến của mặt $F(x,y,z) = 0$ tại M là

$$\begin{cases} x = 8t + 2 \\ y = 0 \\ z = -8t \end{cases} \quad \text{với } t \in \mathbb{R}$$

Câu 2.

- **(0.5 điểm)**
Xét hàm số $F(x,y,c) = (x+c)^4 + (y-c)^4 - 4$
Ta giải hệ phương trình sau để tìm điểm kỳ dị

$$\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+c)^3 = 0 \\ 4(y-c)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c \\ y = c \end{cases}$$

Tập các điểm $(x,y) = (-c,c)$ không thuộc họ đường cong $F(x,y,c) = 0$ nên không có điểm kỳ dị.

- **(0.5 điểm)**

Ta giải hệ phương trình sau để tìm hình bao

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+c)^4+(y-c)^4-4=0 \\ 4(x+c)^3-4(y-c)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+c=y-c \\ (y-c)^4=2 \end{cases} \Leftrightarrow |x+y|=2\sqrt[4]{2}$$

Vậy hình bao của họ đường cong đã cho là $|x+y|=2\sqrt[4]{2}$

Câu 3.

- **(0.5 điểm)**

Đặt $\begin{cases} x=-1+a\cos^3 t \\ y=1+a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$. Khi đó $\begin{cases} x'=-3a\sin t\cos^2 t \\ x''=-3a\left(\cos^3 t-2\cos t\sin^2 t\right) \\ y'=3a\cos t\sin^2 t \\ y''=3a\left(-\sin^3 t+2\cos^2 t\sin t\right) \end{cases}$

- **(0.5 điểm)**

Như vậy độ cong tại một điểm $M(x_0,y_0)$ (ứng với $t=t_0$) bất kỳ trên đường cong là

$$C(M)=\left.\frac{\left|\det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\right|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=t_0}=\frac{9a^2\sin^2 t_0\cos^2 t_0}{|27a^3\sin^3 t_0\cos^3 t_0|}=\frac{1}{|3a\sin t_0\cos t_0|}$$

Câu 4.

- **(0.5 điểm)**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_2^3 dy\int_1^2 \ln(xy)dx &= \int_2^3 dy\int_1^2 (\ln x+\ln y)dx \\ &= \left(\int_2^3 dy\right)\left(\int_1^2 \ln x dx\right)+\left(\int_1^2 dx\right)\left(\int_2^3 \ln y dy\right) \\ &= \int_1^2 \ln x dx+\int_2^3 \ln y dy\end{aligned}$$

- **(0.5 điểm)**

Hơn nữa

$$\int \ln x dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x$$

Vậy

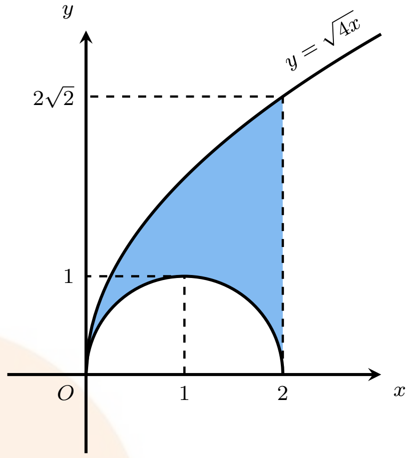
$$\int_2^3 dy \int_1^2 \ln(xy)dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 + (y\ln y - y)\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2$$

Câu 5.

- **(0.5 điểm)**

Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4x} \end{cases} = D_1 \setminus D_2$$



Trong đó

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{4x} \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \le y \le 2\sqrt{2} \\ \dfrac{y^2}{4} \le x \le 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2} \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 1 - \sqrt{1 - y^2} \le x \le 1 + \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

- **(0.5 điểm)**

Như vậy

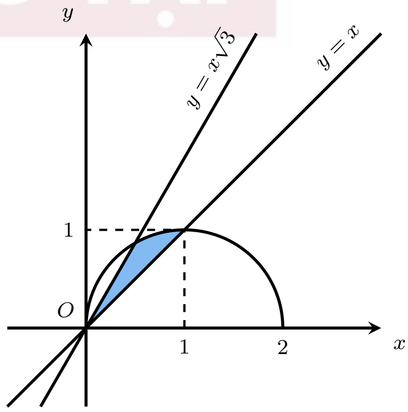
$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy = \int_0^{2\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2} f(x,y)dx - \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx$$

Câu 6.

- **(0.5 điểm)**

Chuyển về hệ tọa độ cực, khi đó

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ x \le y \le x\sqrt{3} \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



Như vậy

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^4\varphi d\varphi$$

- **(0.5 điểm)**

Hơn nữa

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 \varphi d\varphi &= \int \cos^2 \varphi \left(1 - \sin^2 \varphi\right) d\varphi \\
&= \int \cos^2 \varphi d\varphi - \int \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int (\cos 2\varphi + 1) d\varphi - \frac{1}{4} \int \sin^2 2\varphi d\varphi \\
&= \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \\
&= \frac{3\varphi}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 4 \left(\frac{3\varphi}{8} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3} - 16}{64}$$

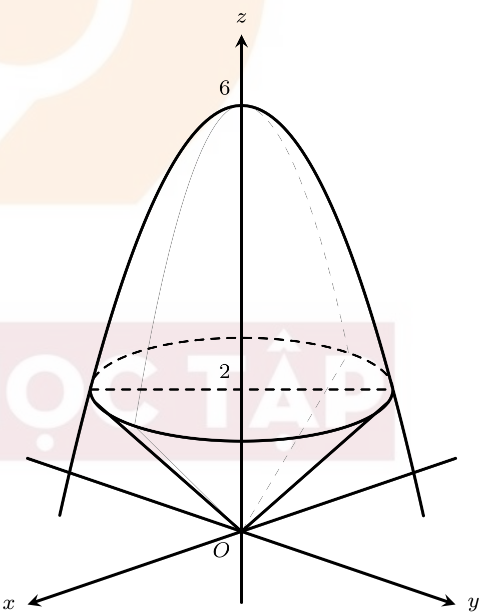
Câu 7.

- **(0.5 điểm)**

  Giao tuyến giữa mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt paraboloid $z = 6 - x^2 - y^2$ là đường $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$.

  Do đó hình chiếu của V lên mặt phẳng (Oxy) là miền $D : x^2 + y^2 \leq 4$

  $$\Rightarrow \mathbf{V} = \iint\limits_D \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$$



- **(0.5 điểm)**

  Chuyển về hệ tọa độ cực. Khi đó

  $$D : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

  Vậy

$$\mathbf{V} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr = \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int\limits_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr\right) = 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

Câu 8.

- **(0.5 điểm)**

Sử dụng hệ tọa độ trụ suy rộng $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ ta được

$$V \equiv \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \dfrac{1}{2} \\ 4r^2 \le z \le \sqrt{2-4r^2} \end{cases} \quad , \quad |J| = 2r$$

Khi đó

$$\iiint\limits_V z\sqrt{xy}(x+2y)dxdydz = 4\underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi\right)}_{I_1}\underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} r^3dr \int\limits_{4r^2}^{\sqrt{2-4r^2}} zdz\right)}_{I_2}$$

- **(0.5 điểm)**

Với I_1, đặt $t = \sin\varphi - \cos\varphi$. Khi đó $\begin{cases} \sin 2\varphi = 1 - t^2 \\ dt = (\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi \end{cases}$. Như vậy

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Với I_2, ta có

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} r^3\left(2 - 4r^2 - 16r^4\right)dr = \frac{5}{768}$$

Vậy

$$\iiint\limits_V z\sqrt{xy}(x+2y)dxdydz = 4I_1I_2 = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{768} = \frac{5\pi}{384}$$

Câu 9.

- **(0.5 điểm)**

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$. Khi đó

$$D \equiv 4u^2 + v^2 \le 4 \quad , \quad |J| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|^{-1} = \frac{1}{2}$$

Tích phân cần tính trở thành

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_D u^2 dudv$$

- **(0.5 điểm)**

Chuyển qua hệ tọa độ cực suy rộng $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = 2r\sin\varphi \end{cases}$. Khi đó

$$D \equiv \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, \quad |J'| = 2r$$

Như vậy

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Câu 10.

- **(0.5 điểm)**

Đặt $\dfrac{1}{x} = t$. Khi đó $x = \dfrac{1}{t}$ và $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$. Như vậy

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{b}{x}\right) - f\left(\frac{a}{x}\right)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f\left(\frac{b}{x}\right) - f\left(\frac{a}{x}\right)}{x} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\varepsilon} \frac{f(bt) - f(at)}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{dt}{t^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt \end{aligned} \tag{10.1}$$

- **(0.5 điểm)**

Hơn nữa, do $f'(x)$ liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ nên

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt &= \int_0^{+\infty} dt \int_a^b f'(\xi t) d\xi = \int_a^b d\xi \int_0^{+\infty} f'(\xi t) dt \\ &= \int_a^b \frac{L - f(0)}{\xi} d\xi = (L - f(0)) \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{10.2}$$

Từ (10.1) và (10.2), ta được đpcm.