

BÀI 16

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN TÀN SỐ

TS. Nguyễn Hồng Quang

PGS. TS. Trịnh Văn Loan

TS. Đoàn Phong Tùng

Khoa Kỹ thuật máy tính

□ Nội dung bài học

1. Đáp ứng tần số của hệ thống.
2. Xác định đáp ứng tần số từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

❏ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Khái niệm, ý nghĩa và các tham số của đáp ứng tần số của hệ thống rời rạc.
- Phương pháp xác định đáp ứng tần số từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

1. Đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

- Tín hiệu kích thích là tín hiệu mũ phức:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$x(n) = Ae^{j\omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[Ae^{j\omega_0(n-k)}]$$
$$= A \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega_0 k} \right] e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow y(n) = AH(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

Các dạng biểu diễn của Đáp ứng tần số

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cos \omega k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sin \omega k \\ &= H_R(\omega) + jH_I(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

Đáp ứng biên độ
Magnitude Response

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}$$

Đáp ứng pha
Phase Response

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$$

$$x(n) = Ae^{j\omega_0 n} \quad \longrightarrow \quad y(n) = A \cdot H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 n} = A \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega))}$$

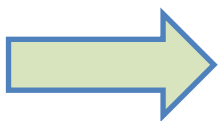
Ví dụ: xác định đáp ứng $y(n)$

$$x(n) = Ae^{-j\pi n/2}$$

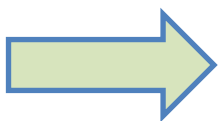
$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Tại $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^\circ}$$



$$y(n) = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^\circ}\right)e^{-j\pi n/2}$$



$$y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}}Ae^{j\left(\frac{\pi n}{2} - 26.6^\circ\right)}$$

Đáp ứng của hệ thống thực với hàm lượng giác

$$h(n) \text{ thực} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |H(\omega)| &= |H(-\omega)| \\ \theta(\omega) &= -\theta(-\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x_1(n) &= Ae^{j\omega n} \rightarrow y_1(n) = A \cdot H(\omega) \cdot e^{j\omega n} = A \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega n + \theta(\omega))} \\ x_2(n) &= Ae^{-j\omega n} \rightarrow y_2(n) = A \cdot H(-\omega) \cdot e^{-j\omega n} = A \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega n - \theta(\omega))} \end{aligned}$$

$$x(n) = \frac{1}{2} [x_1(n) + x_2(n)] = A \cos \omega n \rightarrow y(n) = A |H(\omega)| \cos[\omega n + \theta(\omega)]$$

$$x(n) = \frac{1}{j2} [x_1(n) - x_2(n)] = A \sin \omega n \rightarrow y(n) = A |H(\omega)| \sin[\omega n + \theta(\omega)]$$

- Đáp ứng của hệ thống với tổng các hàm lượng giác

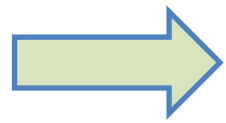
$$x(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cos(\omega_i n + \varphi_i) \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{i=1}^L A_i |H(\omega_i)| \cos[\omega_i n + \varphi_i + \theta(\omega_i)]$$

2. Xác định đáp ứng tần số từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

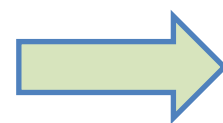
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- Lấy biến đổi Z cả hai vế của PT-SP

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \right] z^{-n}$$



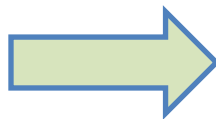
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

- Biểu diễn $H(z)$ qua các điểm không z_r và các điểm cực p_k

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$



$$H(e^{j\omega}) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

4. Tổng kết

- Đáp ứng tần số của hệ thống biểu diễn quan hệ trên miền tần số giữa tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra của hệ thống, đặc trưng cho sự thay đổi (về mặt biên độ và pha) của các thành phần tần số của tín hiệu khi đi qua hệ thống.
- Từ phương trình sai phân biểu diễn hệ thống, đáp ứng tần số có thể được xác định thông qua mối quan hệ với hàm truyền đạt.

5. Bài tập 1

□ Một hệ thống LTI mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \quad 0 < a < 1$$

- Xác định đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.
- Chọn tham số b để $|H(\omega)| = 1$. Khi đó hãy vẽ phổ biên độ và phổ pha với $a = 0.9$
- Xác định đầu ra của hệ thống với tín hiệu đầu vào:

$$x(n) = 5 + 12 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20 \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Bài tập 2

□ Xác định đáp ứng tần số của các hệ thống nhân quả sau:

a. $y(n) = 2 \cdot x(n) + 3 \cdot x(n - 1)$

b. $y(n) - 0.5y(n - 1) = x(n)$

Bài tập 3

□ Xác định $y(n)$, biết

$$x(n) = 2 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2 \cdot \cos(\pi n)$$

a. $h(n) = \text{rect}_2(n)$

b. $h(n) = \{1, -1\}$

c. So sánh kết quả của câu a và câu b

Bài học tiếp theo. BÀI **17**

KHÁI NIỆM BỘ LỌC SỐ

Tài liệu tham khảo:

- **Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.**
- **J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.**



TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG
TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!