Đề thi cuối kì GT3 kì 20192 – nhóm ngành 2
Lời giải: Trần Bá Hiếu & Nguyễn Tiến Được

Câu 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}$$

$$u_n=\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}.\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}>0\ \forall\, n\geq 1$$

$$Khi\ n\to\infty: u_n\sim\frac{2}{\sqrt{n}\,.2n}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\ \text{là chuỗi Riemann hội tụ}$$

$\to$ *Chuỗi đã cho hội tụ*

Câu 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^n$$

$$Đặt\ t=\frac{1-2x}{1+x}\to \text{Chuỗi đã cho trở thành}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.t^n$$

$$Xét\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1\to R=1$$

$Taij\ t=1\to$ *Chuỗi phân kì do là chuỗi điều hòa*

$$Tại\ t=-1\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\ \text{là chuỗi hội tụ theo Leibnitz}$$

$$\to \text{Miền hội tụ} -1\leq t<1\to\ -1<\frac{1-2x}{1+x}<1\ (\,x\neq -1)$$

$$\to\begin{cases}\dfrac{1-2x}{1+x}+1=\dfrac{2-x}{1+x}>0\\ \dfrac{1-2x}{1+x}-1=-\dfrac{3x}{1+x}<0\end{cases}\to\begin{cases}-1<x<2\\ x<-1\cup x>0\end{cases}\to\begin{cases}x<2\\ x\neq -1\end{cases}$$

*Vậy miền hội tụ cần tìm là* $(-\infty;2)/\{-1\}$

Câu 3:

*Khai triển Fourier* $f(x)=-x$ *khi* $-2\leq x\leq 2$ *và tuần hoàn* $T=4$

*Dễ thấy* $f(x)=-f(-x)\to f(x)$ *là hàm lẻ* $\to a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}-x.\sin\frac{n\pi x}{2}dx\to b_n=\int_0^2 x\ d\left(\frac{2}{\text{n}\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\rightarrow b_n = \frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ |_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)|_0^2$$

$$\rightarrow b_n = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi = \frac{(-1)^n}{n\pi}\ với\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$Vậy\ khai\ triển\ Fourier\ của\ f(x)\ là\ \sum_{n=1}^{\infty} 4.\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Câu 4:

a) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

$+)\ y = 0\ là\ nghiệm\ kỳ\ dị$

$$+)\ y \neq 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{\frac{4}{x}y}{\sqrt{y}} - 2x = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y} = t \rightarrow 2t' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$$

$$\rightarrow 2t' - \frac{4}{x}t = 2x \rightarrow t' - \frac{2}{x}t = x$$

$$Pt\ có\ nghiệm\ t = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(lnC + \int x.e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right) = x^2(\ln C + \ln|x|)$$

$$= x^2\ln Cx$$

$Vậy\ nghiệm\ PT$ đã $cho$ là $y = (x^2\ln Cx)^2 = x^4\ln^2 Cx$

b) $y'' + y = 2\sin^2 x$

Xét PT thuần nhất $y'' + y = 0$

Có PT đặc trưng là $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = 0 \pm i$

$\rightarrow \bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$

$Sd\ phương\ pháp\ biến\ thiên\ hằng\ số\ Lagrange$

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2{}'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 - \cos 2x & \cos x \end{vmatrix} = -2\sin^3 x \\ C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 - \cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos x.\sin^2 x \end{cases}$$

$$\rightarrow C_1(x) = \int 2 - 2\cos^2 x\, d(\cos x) = 2\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + K_1$$

$$\rightarrow C_2(x) = \int 2\sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + K_2$$

$Vậy\ PT$ đã $cho\ có\ nghiệm\ là$

$$y = 2\cos^2 x - \frac{2}{3}\cos^4 x + K_1\cos x + \frac{2}{3}\sin^4 x + K_2\sin x$$

c) $xy'' - y' = x^2e^x$

$$\to \frac{xy''-y'}{x^2} = e^x \to \left(\frac{y'}{x}\right)' = e^x \to \frac{y'}{x} = e^x + C_1 \to y' = xe^x + C_1x$$

$$\to y = (x-1)e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

Câu 5:

$$L^{-1}\left\{\frac{7s+13}{(s-1)^2(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{1}{9(s+2)} + \frac{20}{3(s-1)^2} + \frac{1}{9(s-1)}\right\}$$
$$= -\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{20}{3}e^t.t + \frac{1}{9}e^t$$

Câu 6:

$y^{(4)} - y = 0$

Với $y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) - 0; y^{(3)}(0) = 0$

*Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT ta đc:*

$s^4X(s) - s^2 - X(s) = 0$

$$\to X(s) = \frac{s^2}{s^4-1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}$$
$$= -\frac{1}{4(s+1)} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}$$
$$\to x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{4}e^{-t} + \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{2}\sin t$$

Câu 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n ; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \; HTTĐ \to \lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}|v_n| = 0$$

$$Xét \; \lim_{n\to\infty}\frac{|u_n||v_n|}{|v_n|} = 0$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}|u_n||v_n| \text{ hội tụ theo TCSS}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}u_n.v_n \text{ hội tụ tuyệt đối (đpcm)}$$

Câu 8:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)n!}$$

$$Xét\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = x.e^{x}\ \forall x \in R$$

$$\rightarrow S(x) = \int x.e^{x} dx = e^{x}(x-1) + C$$

$$S(0) = 0 = -1 + C \rightarrow C = 1$$

$$\rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = e^{x}(x-1) + 1$$

$$S(3) = 2e^{3} + 1\ là\ tổng\ cần\ tìm$$