

Bài tập chương 1: Hàm số nhiều biến số

§1. Giới hạn hàm nhiều biến

1. Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + xy}, (x, y) \rightarrow (0, 0)$

b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \rightarrow (0, 0)$

c) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$

d) $f(x, y) = \frac{\ln(2x^2 + 2y + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \rightarrow (0, 0)$ (20201-CK)

2. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x+y}}{\ln(1 + x + y)} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + y^4}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (20172-GK)

3. Tìm a để hàm số sau liên tục tại (0,0)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

§2. Đạo hàm và vi phân

1. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = y^2 \sin \frac{y}{x}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \cos x}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2.(GK-20172) Cho hàm số $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

3. Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$

b) $z = x^2 + y^2 + xy + 2x + 3y + 1$

c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

d) $z = 2^{x^y}$

4. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1.02)^2 + (0.05)^2}$

b) $B = \ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$

c) $C = \sqrt{(3.97)^2 + (3.02)^2}$ (20172-CK)

5. Tính đạo hàm riêng của các hàm hợp sau:

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$

c) $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$

6. Đạo hàm và vi phân cấp cao:

a) Tính:

$$P = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{5\partial z}{y\partial y}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$$

b) Tính

$$Q = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ khi } u = xy \ln xy$$

c) Tính vi phân cấp 2 của hàm số sau:

1. $z = \ln(x^3 + y^2)$

2. $z = x^2 \ln(x + y)$

7. Tính đạo hàm của các hàm ẩn sau:

a) $x + y + z = e^{xyz}$. Tính z'_x và z'_y

b) $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2 y^2 z^2$. Tính z'_x và z'_y

c) Cho $u = \frac{xz}{y+z}$, tính u'_x và u'_y biết z là hàm ẩn của (x, y) xác định bởi phương trình

$$ze^{xyz} = xe^{x+1} + ye^{y+1}$$

§3. Cực trị hàm nhiều biến

1. Tìm và phân loại điểm cực trị của hàm số sau:

a) $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$

b) $f(x, y) = e^{-x}(2x - 3y + y^3)$

c) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

d) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$

2. Tìm cực trị có điều kiện của:

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $z = \frac{e^x}{y+1}$ với điều kiện $e^x y = 1$

c) $u = xy + xz$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2, x + z = 2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$)

3. Tìm khoảng cách nhỏ nhất của điểm $(1, 0, -2)$ tới mặt phẳng $x + 2y + z = 4$

4. Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y$ trên miền $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$

b) $f(x, y) = xy^2$ trên miền $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\}$

c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ trên miền $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP