CÁC DẠNG BÀI TẬP CHƯƠNG 5

TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

DẠNG 1: KHI S CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Câu 1: Tính $I = \iint\limits_S (x + yz)dS$, với S được xác định bởi $\begin{cases} x = uv \\ y = u + v \\ z = u - v \end{cases}$ và $\begin{cases} u^2 + v^2 \le 1 \\ u \ge 0; v \ge 0 \end{cases}$.

Câu 2: Tính tích phân $\iint\limits_S zdS$, ở đó S là phần của mặt Helicoid $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le u \le a \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$.

Câu 3: Tính tích phân $\iint\limits_S z^2dS$, ở đó S là phần của mặt nón $\begin{cases} x = r.\cos\varphi.\sin\alpha \\ y = r.\sin\varphi.\sin\alpha \\ z = r.\cos\alpha \end{cases}$

với $(0 \le r \le \alpha; 0 \le \varphi \le 2\pi)$ và α là hằng số $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$.

DẠNG 2: KHI S CHO BỞI $z = z(x; y)$

Câu 1: Tính các tích phân sau:

a) $I = \iint\limits_S xydS$ với S là mặt $z = 2\sqrt{6}.x + 3y^2; \quad 0 \le x \le 2; \quad 0 \le y \le 2.$

b) $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$ với S là mặt $z = x^2 + y^2; \quad x^2 + y^2 \le 4.$

c) $I = \iint\limits_S xdS$ với S là mặt $y = x^2 + 4z; \quad 0 \le x \le 2; \quad 0 \le z \le 2.$

Câu 2: Tính tích phân $I = \iint\limits_S (6x+4y+3z)dS$, trong đó S là phần mặt phẳng $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1 \\ x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0 \end{cases}$.

Câu 3: Tính tích phân $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, trong đó S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 0; z = 3$.

Câu 4: Tính tích phân $I = \iint\limits_S \dfrac{1}{r^2}dS$, ở đó S là mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$, bị chắn bởi các mặt phẳng $z = 0; z = h$ còn r là khoảng cách từ một điểm của mặt trụ tới gốc tọa độ.

TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

Tính các tích phân sau:

1) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt cầu $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2) $\iint\limits_S (y + z)dxdy$, trong đó S là phía trên mặt $z = 4 - 4x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

3) $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, trong đó S là mặt trên của nửa mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$.

4) $\iint\limits_S ydzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt ellipsoid: $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

5) $\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydzdx$, trong đó S là phía ngoài của miền $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$.

6) Dùng công thức Stokes tính tích phân:

$$\int\limits_C (x + y^2)dx + (y + z^2)dy + (z + x^2)dz$$

Trong đó C là biên của tam giác với các đỉnh $(1; 0; 0)$; $(0; 1; 0)$; $(0; 0; 1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

7) $\iint\limits_S (3x + 2y + z)^3(dydz + dzdx + dxdy)$, trong đó S là mặt $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

8) Tính $\iint\limits_S (x - y + 2z)^3(dydz + dzdx + dxdy)$, trong đó S là mặt ellipsoid $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

9) Cho $O(0; 0; 0)$; $A(1; 0; 0)$; $B(0; 1; 0)$; $C(0; 0; 1)$. Tính tích phân mặt:

$$\iint\limits_S xydydz + yzdydx + zxdxdy$$

Trong đó S là mặt ngoài của tứ diện $OABC$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Tích phân mặt loại I

Dạng 1

Câu 1:

Ta có: $\begin{cases} x = uv \\ y = u + v \\ z = u - v \end{cases}$

$\rightarrow \overrightarrow{r}(u;v) = < uv; u+v; u-v >$

$\rightarrow |\overrightarrow{r}_U \Lambda \overrightarrow{r}_V| = \sqrt{2(u^2+v^2)+4}.$

Ta có: $I = \iint\limits_S (x+yz)dS = \iint\limits_D (uv + u^2 - v^2)\sqrt{2(u^2+v^2)+4}dudv$

Đặt $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r \rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\rightarrow I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\sqrt{2r^2+4}rdr$$
$$= \frac{16-3\sqrt{6}}{30}$$

Câu 2: Làm tương tự, chỉ áp dụng công thức thôi

$x = r\cos\varphi\sin\alpha; y = r\sin\varphi\sin\alpha; z = r\cos\alpha$

Câu 3: Ta có: $\begin{cases} x'_{r_t} = \cos\varphi\sin\alpha; y'_r = \sin\varphi\sin\alpha; z'_r = \cos\alpha \\ x'_\varphi = -r\sin\varphi\sin\alpha; y'_\varphi = r\cos\varphi\sin\alpha, z'_\varphi = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \overrightarrow{r_r}\Lambda\overrightarrow{r}_\varphi = -\frac{r}{2}\sin 2\alpha\cos\varphi\overrightarrow{i} + \frac{r}{2}\sin 2\alpha\sin\varphi\overrightarrow{j} + (r\cos^2\varphi\sin^2\alpha + r\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\overrightarrow{k}$

$\rightarrow |\overrightarrow{r_r}\Lambda\overrightarrow{r}_\phi| = r\sin\alpha$

Ta có: I = $\iint\limits_D r^4\cos^2\alpha.r.\sin\alpha drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^3\cos^2\alpha\sin\alpha dr = \sin\alpha\cos^2\alpha.2\pi.\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^4 = \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha.\pi a^4}{2}$

Dạng 2

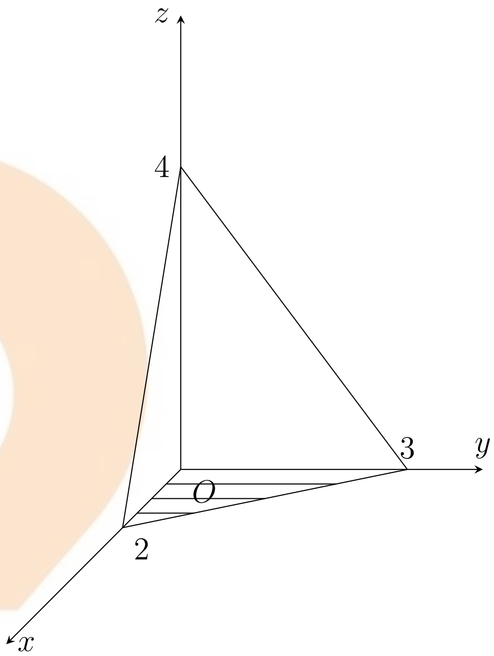
Câu 1:

(a) $I = \iint\limits_S xydS = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^2 y\sqrt{1+24+36y^2}dy = \dfrac{1036}{27}$

(b) $I = \iint\limits_P (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \dfrac{1+391\sqrt{17}}{60}\pi$

(c) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 x\sqrt{1+(2x)^2+4^2}dz = \dfrac{1}{6}(33\sqrt{33}-17\sqrt{17})$

Câu 2:



$S: \begin{cases} z = 4-2x-\dfrac{4}{3}y \\ (x,y) \in \mathbb{D} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z'_x = -2 \\ z'_y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$. Ta có:

$$I = \iint\limits_D \left[6x+4y+3\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^2}dxdy$$

$$= \iint\limits_D 4\sqrt{61}dxdy = 4\sqrt{61}\iint\limits_D dxdy = 4\sqrt{61}S_D = 4\sqrt{61}.3 = 12\sqrt{61}$$

Câu 3:

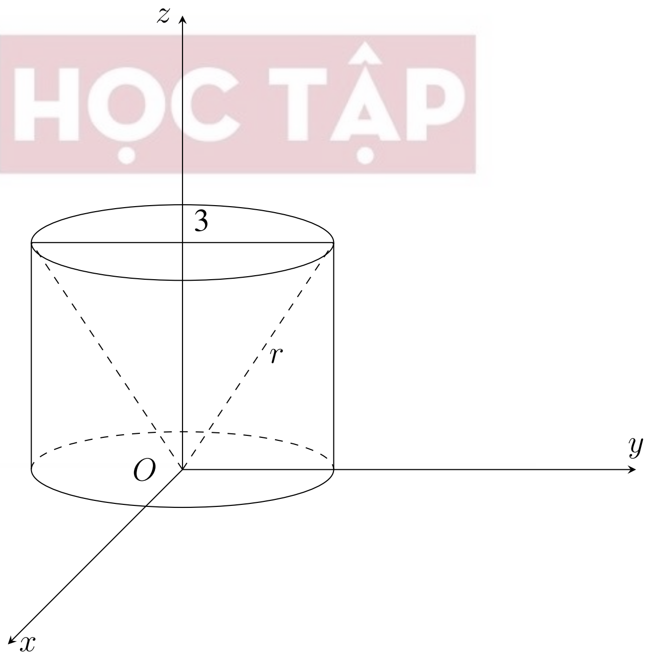
Ta có: $S: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ (x,y) \in \mathbb{D}, x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

$\rightarrow dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

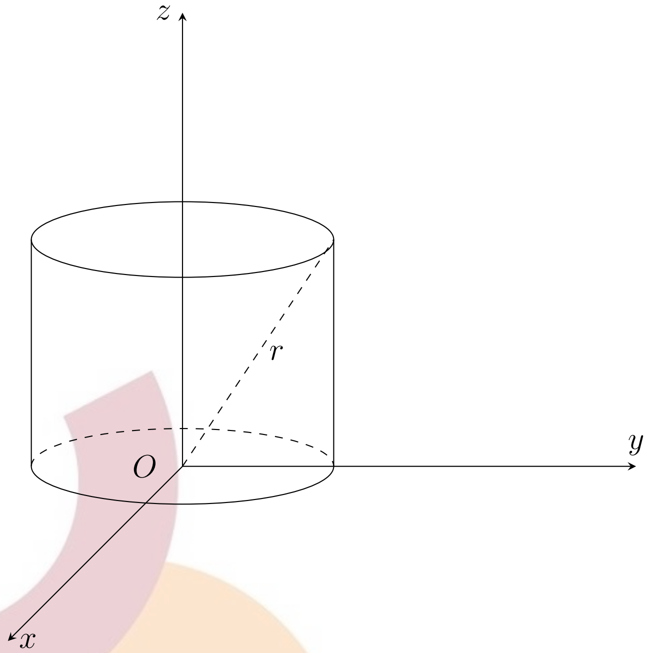
Do đó: $I = \iint\limits_D 2\sqrt{2}(x^2+y^2)dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$; $|J| = r$



Ta có: $I = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^3dr = 81\sqrt{2}\pi$

Câu 4:



$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_\varphi = (-R\sin\varphi; R\cos\varphi; 0) \\ r'_z = (0;0;1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{r'_\varphi} \times \vec{r'_z}| = R$$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS = \iint\limits_D \frac{1}{R^2+z^2}.Rd\varphi dz$$

Với $D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le h \end{cases}$

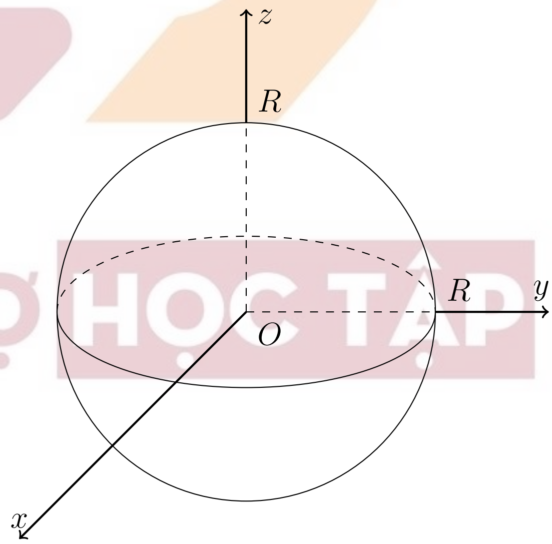
$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{R}{R^2+z^2} dz = 2\pi.\arctan\left(\frac{z}{R}\right)\Big|_0^h$$

$$= 2\pi \arctan\left(\frac{h}{R}\right)$$

ĐÁP ÁN TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

1.

$S: x^2+y^2+z^2 = R^2$ là mặt kín



Áp dụng công thức Ostrogradsky

$$I = \iiint\limits_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$J = r^2\sin\theta$

$$\Rightarrow I = 3\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{R} r^4 \sin\theta \mathrm{d}r = \frac{12\pi R^5}{5}.$$

2. Ta có: $z = 4 - 4x^2 - y^2$. Hình chiếu S lên Oxy: $4x^2+y^2 \le 4$

$(\vec{\mathrm{n}}, Oz) < 90^\circ \Rightarrow I = \iint\limits_D \left(y + 4 - 4x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Đặt $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$, $J = 2r$.

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left(r\sin\varphi + 4 - 4r^2\right) 2r\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{2r^3}{3}\sin\varphi + 4r^2 - 2r^4\right)\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\sin\varphi + 2\right) \mathrm{d}\varphi = 4\pi$$

3.

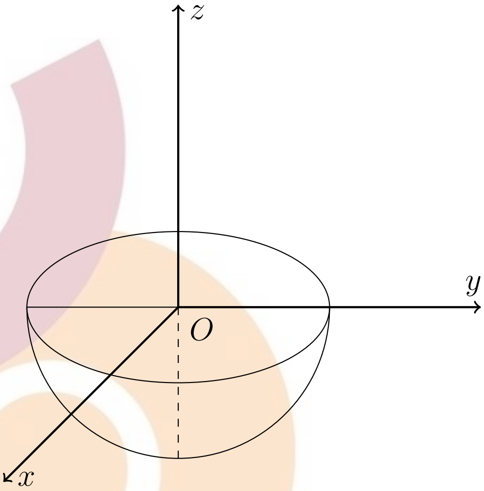
$S : 4 = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Hình chiếu của S lên Oxy là $x^2 + y^2 \leq R^2$,

$(\widehat{\vec{n}, Oz}) < \dfrac{\pi}{2}$

$$\rightarrow I = -\iint x^2y^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}, |J| = r$



$$\rightarrow I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2 - r^2}.r^5dr$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)^2 d\varphi \int_0^R r^5\sqrt{R^2 - r^2}dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int_0^R r^5\sqrt{R^2 - r^2}dr = \frac{-2\pi R^7}{105} \quad (\text{Đặt } r = R\sin t)$$

4.

$I_1 = \iint\limits_S z^2dxdy$ với $S : z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$

Hình chiếu của S lên Oxy là $D_1 \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$

Do $(\widehat{\vec{n}, Oz}) < \dfrac{\pi}{2} \rightarrow I_1 = \iint\limits_{D_1} (1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}, |J| = 2r$

$$\rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (1 - r^2).2r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$

$I_2 = \iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ với $S : y = \sqrt{4 - 4x^2 - 4z^2}$

Hình chiếu S lên Oxz là $D_2 \begin{cases} x \geq 0; z \geq 0 \\ x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$

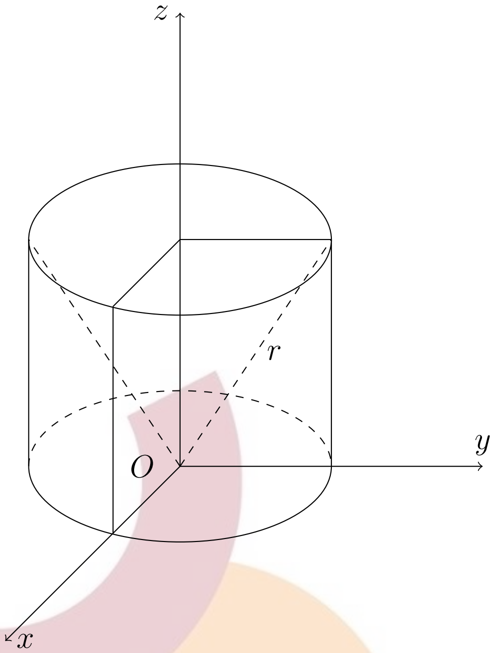
Do $(\widehat{\vec{n}, Oy}) < \dfrac{\pi}{2} \rightarrow I_2 = \iint\limits_{D_2} 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}, |J| = r$

$$\rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{7\pi}{12}$

5.



Áp dụng công thức Ostrogradsky

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}, |J| = r$

$$\longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{r^2} (r^2 + z) r \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (r^5 + \frac{r^5}{2}) \mathrm{d}r$$

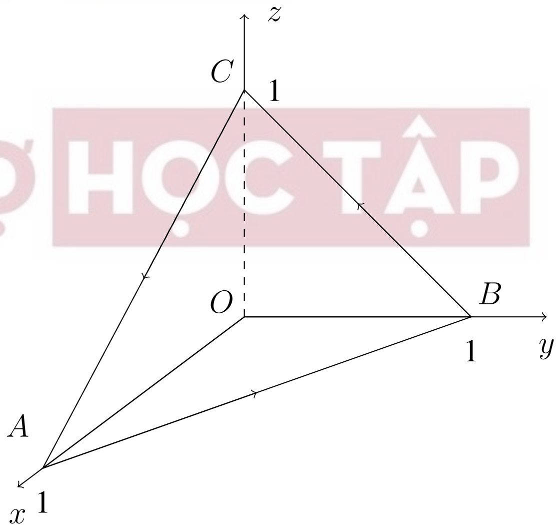
$$= \frac{\pi}{8}$$

6.
Áp dụng công thức Stokes:

$$I = \iint\limits_S -2(z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

Với S là mặt phẳng (ABC) hướng lên trên.

$S : z = 1 - x - y$



Hình chiếu của S lên Oxy là $\begin{cases} 0 \le x, 0 \le y \\ x + y \le 1 \end{cases}$

Do $(\widehat{\vec{n}, Oz}) < \dfrac{\pi}{2} \to \vec{n} = (-z'_x; -z'_y; 1) = (1; 1; 1)$

$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Suy ra:

$$I = -2 \iint\limits_D (x + y + 1 - x - y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2 \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\mathrm{S}_D = -1$$

7.

S là mặt kín hướng ra ngoài.

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iint\limits_S (3x+2y+z)^3(dydz+dzdx+dxdy) = \iiint\limits_V 3.6.(3x+2y+z)^2 dxdydz$$
$$= 18\iiint\limits_V (9x^2+4y^2+z^2+12xy+6xz+4yz)dxdydx$$

Vì $f_1(x,y,z)=12xy$; $f_2(x,y,z)=6xz$; $f_3(x,y,z)=4yz$ là hàm lẻ đối với z,y,x

Mặt khác: miền V đối xứng qua các mặt phẳng Oxy, Oxz, Oyz

$\Rightarrow \iiint\limits_V 12xydxdydz = \iiint\limits_V 6xzdxdydz = \iiint\limits_V 4yzdxdydz = 0$

$\Rightarrow \iiint\limits_V (12xy+6xz+4yz)dxdydz = 0$

$\Rightarrow I = 18\iiint\limits_V (9x^2+4y^2+z^2)dxdydz$

Đặt $\begin{cases} x = \frac{1}{3}r\cos\varphi.\sin\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\varphi.\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{1}{6}r^2\sin\theta\,, \qquad V \to V' \begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$

$$I = 18\iiint\limits_V (9x^2+4y^2+z^2)dxdydz = 18\iiint\limits_{V'} r^2.\frac{1}{6}r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$$
$$= 3\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta.\int\limits_0^{2\pi} d\varphi.\int\limits_0^1 r^4dr = 3.2.2\pi.\frac{1}{5} = \frac{12\pi}{5}$$

8.

$S: x^2+y^2+4z^2 \le 1$ giới hạn bởi miền kín

Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta có:

$$I = \iint\limits_S (x-y+2z)^3(dydz+dzdx+dxdy) = \iiint\limits_V 3.2.(x-y+2z)^2dxdydz$$
$$= 6\iiint\limits_V (x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx)dxdydx$$
$$= 6\iiint\limits_V (x^2+y^2+4z^2)dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi.\sin\theta \\ y = r\sin\varphi.\sin\theta \\ z = \dfrac{1}{2}r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{1}{2}r^2\sin\theta\,,\qquad V \to V' \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = 6\iiint\limits_V (x^2+y^2+4z^2)dxdydz = 6\iiint\limits_{V'} r^2.\frac{1}{2}r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$$

$$= 3\int_0^\pi \sin\theta d\theta.\int_0^{2\pi} d\varphi.\int_0^1 r^4 dr = 3.2.2\pi.\frac{1}{5} = \frac{12\pi}{5}$$

9.

Mặt phẳng $(ABC): x+y+z=1$

Tứ diện $OABC$ giới hạn bởi $V: \begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \\ x+y+z \le 1 \end{cases}$

Hình chiếu miền đã cho lên Oxy là $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$

Áp dụng công thức Ostrogradsky :

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(z(x+y)+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1-(x+y)^2}{2}dy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}$$