ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN2 - HỌC KỲ 2021.2

Mã đề 1

Đề thi gồm 2 trang

Câu 1. Tính $L = \lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{x^4}{2x^6+y^8}$

Câu 2. Tính gần đúng $A = \sqrt[3]{(2,02)^2+3,99}$

Câu 3. Tính $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ với $u = x^2 y cos(x+y)$

Câu 4. Cho đạo hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\sin(x-z) = e^{y-z}$$

Tính z'_x, z'_y, $A = z'_x + z'_y$

Câu 5. Tìm cực trị của hàm số: $z = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}xy^2 + y^3 - \dfrac{5}{4}x$

Câu 6. Tìm khai triển Taylor đến cấp 2 hàm số $f(x,y) = x^2+y^2-x(y+2)-5y$ tại $M(1,2)$.

Câu 7. Tính độ cong của đường $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 1$

Câu 8. Tìm phương trình các tiếp diện của mặt $x^2+2y^2+3z^2 = 21$ sao cho chúng song song với mặt phẳng $x+4y+6z = 0$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x,y) = e^{xy}$ với điều kiện $x^3+y^3 = 16$

Câu 10. Cho hàm ẩn $u = f(x,y)$ có:

- đạo hàm riêng cấp 1 và 2 liên tục
- $\begin{cases} x = e^s \cos t \\ y = e^s \sin t \end{cases}$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right]$$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN2 - HỌC KỲ 2021.2

Giải câu 1. Ta có: $0 \leq \left|\dfrac{x^4}{2x^6+y^8}\right| \leq \left|\dfrac{x^4}{2x^6}\right| = \dfrac{1}{2x^2}$

Mà $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

Suy ra $L = \lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{x^4}{2x^6+y^8} = 0$ (Theo nguyên lý kẹp)

Giải câu 2. Xét hàm $z = \sqrt[3]{x^2+y}, x_0 = 2, y_0 = 4$, $\Delta x = 0,02, \Delta y = -0,01$

Ta có: $z'_x = \dfrac{2x}{3(x^2+y)^{\frac{2}{3}}}, z'_y = \dfrac{1}{3(x^2+y)^{\frac{2}{3}}}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ &\approx z(x_0,y_0) + z'_x(x_0,y_0)\Delta x + z'_y(x_0,y_0)\Delta y \\ &= 2 + \frac{1}{3}.0,02 + \frac{1}{12}(-0,01) \\ &= \frac{2407}{1200} \end{aligned}$$

Giải câu 3. Có $u = x^2 y cos(x+y)$

$\Rightarrow \quad u'_x = 2xycos(x+y) - x^2 ysin(x+y)$

$\Rightarrow \quad u"_{xy} = 2xcos(x+y) - 2xysin(x+y) - x^2 sin(x+y) - x^2 ycos(x+y)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2xcos(x+y) - 2xysin(x+y) - x^2 sin(x+y) - x^2 ycos(x+y)$

Giải câu 4. +) Đặt $\mathrm{F}(x,y,z) = \sin(x-z) - e^{y-z} = 0$

+) Ta có:

$$F'_x = \cos(x-z)$$
$$F'_y = -e^{y-z}$$
$$F'_z = -\cos(x-z) + e^{y-z} (F'_z \neq 0)$$

+) $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{\cos(x-z)}{-\cos(x-z)+e^{y-z}}$

$z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = \dfrac{e^{y-z}}{-\cos(x-z)+e^{y-z}}$

A$= z'_x + z'_y = \dfrac{-\cos(x-z)+e^{y-z}}{-\cos(x-z)+e^{y-z}} = 1.$

Giải câu 5. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}xy^2 + y^3 - \dfrac{5}{4}x$

+) Ta có:

$$z'_x = x - \frac{3}{4}y^2 - \frac{5}{4}$$
$$z'_y = -\frac{3}{2}xy + 3y^2$$

+) Tìm điểm tới hạn: $\begin{cases} z'_x = x - \dfrac{3}{4}y^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \\ z'_y = -\dfrac{3}{2}xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4};\ y = 0 \\ x = \dfrac{10}{3};\ y = \dfrac{5}{3} \\ x = 2;\ y = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Ta có 3 điểm tới hạn: $M\left(\dfrac{5}{4};0\right); N\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{5}{3}\right); P(2;1)$

+) Ta có:

$$z''_{xx} = 1 = A$$
$$z''_{xy} = -\frac{3}{2}y = B$$

$z"_{yy} = -\frac{3}{2}x + 6y = C$

$\Rightarrow \Delta(x,y) = B^2 - AC = \frac{9}{4}y^2 - 6y + \frac{3}{2}x$

Thay từng điểm tới hạn, ta được:

* $\Delta(M) = \frac{15}{8} > 0 \Rightarrow$ M không là điểm cực trị
* $\Delta(N) = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow$ N không là điểm cực trị
* $\Delta(P) = \frac{-3}{4} < 0$, lại có: $A = 1 > 0$
  $\Rightarrow$ P là điểm cực tiểu của hàm số và ta có: $z(P) = -1$

Giải câu 6. Ta có:

- f(N) = -9
- $f'_x = 2x - y - 2 \Rightarrow f'_x(M) = -2$
- $f'_y = 2y - x - 5 \Rightarrow f'_y(M) = -2$
- $f'_{xx} = 2; f''_{xy} = -1; f''_{yy} = 2$

Các đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ từ cấp 3 trở đi đều bằng 0.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x,y) =& f(M) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(M)(x-1) + f'_y(M)(y-2)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(M)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(x-1)(y-2) + f''yy(M)(y-2)^2\right] \\ =& -9 + [-2(x-1) - 2(y-2)] \\ &+ \frac{1}{2}[2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2] \\ =& -9 - 2(x-1) - 2(y-2) + (x-1)^2 - (x-1)(y-2) + (y-2)^2\end{aligned}$$

Giải câu 7. Ta có: $\begin{cases} x' = (e^t\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t \\ y' = (e^t\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t \end{cases}$

$+)x" = (e^t\sin t + e^t\cos t)'$

$\Rightarrow \quad x" = \quad e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t - e^t\sin t$

$\Rightarrow \quad x" = \quad 2e^t\cos t$

$+)y" = (e^t\cos t - e^t\sin t)'$

$\Rightarrow \quad y" = \quad e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t$

$\Rightarrow \quad y" = \quad -2e^t\sin t$

$x'y" - x"y' = -2e^t\sin t.e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t).2e^t\cos t = -2e^{2t}$

$+) \quad (x')^2 + (y')^2 = e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\sin t - \cos t) = 2e^{2t}$

Độ cong của đường cong đã cho ứng với t=1 là

$$C(M) = \frac{x'y" - x"y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2e^{2t}}{(2e^{2t})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$$

Giải câu 8. Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P):$x + 4y + 6z = 0$ là $\vec{u} = (1;4;6)$

Gọi $M_0(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt (S):$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$

Xét $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ ta có

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2x \\ f'_y(x,y,z) = 4y \\ f'_z(x,y,z) = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) = 2x_0 \\ f'_y(M_0) = 4y_0 \\ f'_z(M_0) = 6z_0 \end{cases}$$

Phương trình tiếp diện của mặt (S) tại điểm M_0là:

$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 3z_0(z - z_0) = 0$(Q)

Vecto pháp tuyến của (Q) là $\vec{u_0} = (x_0;2y_0;3z_0)$

Vì (Q) song song với (P) nên ta có: $\vec{u_0}$ song song với $\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_0;2y_0;3z_0) = n(1;4;6) \\ (x_0;2y_0;3z_0) = -n(1;4;6)\end{array}\right.$$

Lại có $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$

Do đó $\left[\begin{array}{l}x_0 = 1; y_0 = 2; z_0 = 2 \\ x_0 = -1; y_0 = -2; z_0 = -2\end{array}\right.$

Vậy 2 phương trình tiếp diện cần tìm là:$x + 4y + 6z = 21$ hoặc $x + 4y + 6z = -21$

Giải câu 9. Ta có hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = e^{xy} + \lambda(x^3 + y^3 - 16)$.

Tìm điểm dừng của L:

$$\begin{cases} L'_x &= ye^{xy} + 3\lambda x^2 &= 0 \quad (1) \\ L'_y &= xe^{xy} + 3\lambda y^2 &= 0 \quad (2) \\ L'_\lambda &= x^3 + y^3 - 16 &= 0 \quad (3) \end{cases}$$

+) Nếu $x = 0$:

$$(3) \Rightarrow y = \sqrt[3]{16}$$
$$(1),(2) \Rightarrow y = 0, \lambda = 0 \quad \text{(vô lý)}$$

$\Rightarrow x = 0, y = 0$

+) Nếu $\lambda = 0 : (1),(2) \Rightarrow x = 0, y = 0$ (loại) $\Rightarrow \lambda \neq 0$

+) Với $x \neq 0, y \neq 0, \lambda \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{llll}(1) & \Leftrightarrow & -e^{xy} & = \dfrac{3\lambda x^2}{y} \\ (2) & \Leftrightarrow & -e^{xy} & = \dfrac{3\lambda y^2}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3\lambda x^2}{y} = \frac{3\lambda y^2}{x} \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$$

Thay vào (3) $\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = y = 2 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{e^4}{6}$

Vì hàm $f(x,y) = e^{xy}$ tiến tới 0 khi x hoặc y tiến tới vô cùng và không có giá trị nào của (x,y) để $e^{xy} <= 0$ nên suy ra $f(x,y)$ không có giá trị nhỏ nhất.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $f(2,2)$ là GTLN của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $x^3 + y^3 = 16$
với $xy < 0 \Rightarrow e^{xy} < 1 \Rightarrow GTLN$ của hàm số sẽ đạt tại miền $xy \geqslant 0$, tứ là $x \geqslant 0$ và $y \geqslant 10$

$f(x,y)$ liên tục trên miền đóng : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 16 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ Áp dụng định lý về giá trị cực trị :
$max f(x,y) = \max\{f(2,2), f(0, 2\sqrt[3]{2})\, f(2\sqrt[3]{2}, 0)\}$
$= f(2,2)$
. Vậy với $x^3 + y^3 = 16$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng e^4 tại điểm $(2,2)$.

Giải câu 10. +) Xét:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}.(e^s \cos t) + \frac{\partial u}{\partial y}.(e^s \sin t) = \frac{\partial u}{\partial x}.x + \frac{\partial u}{\partial y}.y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.x + \frac{\partial u}{\partial y}.y\right)$$

$$= x.\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= x.\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial x} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

+) Xét:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}.(-e^s \sin t) + \frac{\partial u}{\partial y}.(e^s \cos t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}.e^s \sin t + \frac{\partial u}{\partial y}.e^s \cos t\right)$$

$$= (-e^s \sin t).\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + (-e^s \cos t).\frac{\partial u}{\partial x} + (e^s \cos t).\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - (e^s \sin t).\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= -y.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - x\frac{\partial u}{\partial x} + x.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - y\frac{\partial u}{\partial y}$$

Do đó : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\right) + y\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)$

+) Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.x + \frac{\partial u}{\partial y}.y\right)\\ &= x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

+) Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.(-e^s \sin t) + \frac{\partial u}{\partial y}.(e^s \cos t)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.(-y) + \frac{\partial u}{\partial y}.x\right)\\ &= -y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

+) Tương tự ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= x\left(x.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - y.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\\ &\quad + y\left(y.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + x.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} - x.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\\ &= x\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + y\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ &= (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

Mà: $x^2 + y^2 = e^{2s}$

$\Rightarrow e^{2s}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = e^{-2s}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ (đpcm)

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP