GIẢI TÍCH I

BÀI 13

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

2. Vi phân toàn phần

Định nghĩa. $f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0 ; y_0) \in D$. Nếu $\exists A, B$ không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$ để có $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, ở đó $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$

thì ta bảo hàm f khả vi tại M_0 và có $df(M_0) = A\Delta x + B\Delta y$ là vi phân toàn phần của hàm f tại M_0.

Hàm f được gọi là khả vi trong miền $D \Leftrightarrow f$ khả vi tại $\forall M \in D$.

Chú ý. $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0 ; y_0) \Rightarrow f(x, y)$ liên tục tại $M_0(x_0 ; y_0)$.

Ví dụ 1. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại (0 ; 0)

a) $u = x + 2y$

b) $u = 2x + \sqrt[3]{y}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ (f không liên tục tại (0 ; 0) $\Rightarrow$ không khả vi)

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \tan y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(f không liên tục tại (0 ; 0) $\Rightarrow$ không khả vi)

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (không khả vi)

Định lí 1. $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận $M_0(x_0 ; y_0)$

$\Rightarrow f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0 ; y_0)$ và có $dz = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$

Ví dụ 2. Tính vi phân toàn phần

a) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ b) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $du(3, 4, 5)$

c) $z = \arctan xy$ d) $u = x^{y^z}$

Chú ý. Dựa vào vi phân để tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Ví dụ 3. Tính gần đúng

a) $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$ b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$ c) $(1{,}04)^{2{,}02}$

d) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$ e) $\sin 32° \cos 59°$

f) Tính gần đúng sự biến thiên của hàm số $z = \dfrac{x+3y}{y-3x}$ khi x biến thiên từ $x_1 = 2$ đến $x_2 = 2{,}5$ còn y từ $y_1 = 4$ đến $y_2 = 3{,}5$.

g) Hình chữ nhật có hai cạnh $a = 10$cm và $b = 24$cm. Đường chéo l thay đổi như thế nào nếu cạnh a dài thêm 4mm còn cạnh b ngắn đi 1mm? Tính giá trị gần đúng và so sánh với giá trị đúng của nó.

h) Chiều cao của một hình nón $h = 30$cm, bán kính đáy $R = 10$cm. Thể tích của nó thay đổi như thế nào nếu tăng h thêm 3mm và giảm R đi 1mm?

i) $\ln\left(0{,}02 + \sqrt[3]{1{,}03}\right)$ (0,03) k) $\sqrt[3]{(1{,}97)^2 + 4e^{0{,}06}}$ (2,01)

l) $A = \sqrt[3]{(1{,}04)^3 + (2{,}03)^2 + 3}$ (2,02)

m) $A = \sqrt[4]{(3{,}04)^2 + (2{,}02)^3 - 1}$ (2,015)

3. Vi phân hàm hợp, tính bất biến, các dạng vi phân

Cho hàm f: $B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, φ: $D \subset \mathbb{R}^2 \to B$

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (u(x, y), v(x, y)) \xrightarrow{f} f(u(x, y), v(x, y))$$

Định lí 2. f có các đạo hàm riêng liên tục trên B, còn u, v có các đạo hàm riêng liên tục trên D thì $f \circ \varphi$ có các đạo hàm riêng và

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

Chú ý.

1°/ $z = f(x, y)$, $y = y(x)$ thì có $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(x)$

2°/ $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì có $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(t)$

Ví dụ 4. Tính

a) $\dfrac{dz}{dt}$, $z = \dfrac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$

b) $\dfrac{dz}{dx}$, $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos x$

c) $z'(x)$ và $\dfrac{dz}{dx}$, $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, $y = x^2$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $z = \arctan\dfrac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$

e) $u = \dfrac{e^{zx(y-z)}}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$, tính $\dfrac{du}{dx}$.

Tính bất biến của vi phân cấp 1:

$z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y) \Rightarrow dz = \dfrac{\partial f}{\partial u}du + \dfrac{\partial f}{\partial v}dv$

Phép toán: u, v là các hàm khả vi, khi đó ta có

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = udv + vdu,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0$$

4. Đạo hàm của hàm ẩn

Khái niệm về hàm ẩn: Hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn y theo x.
Tương tự, hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định một hay nhiều hàm ẩn z theo các biến số x và y.

Hệ hai phương trình $\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0 \\ G(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0 \end{cases}$ xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của ba biến số x, y, z.

Định lí 3. $F(x_0, y_0) = 0$, $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0)$ và $F'_y(M_0) \neq 0$ thì hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định hàm ẩn $y = f(x)$ trong lân cận nào đó của điểm x_0, thoả mãn $y(x_0) = y_0$ và khả vi liên tục trong lân cận này, và có

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}$$

Định lí 4. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và $F'_z(M_0) \neq 0$, khi đó hệ thức $F(x, y, z) = 0$ xác định hàm ẩn $z = f(x, y)$ trong lân cận nào đó của (x_0, y_0) thoả mãn $z(x_0, y_0) = z_0$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này, và có

$$z'_x(x_0\ ;\ y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}(M_0),\ z'_y(x_0\ ;\ y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}(M_0)$$

Định lí 5. $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, các hàm $F(x, y, z, u, v)$, $G(x, y, z, u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận $M_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ và định thức

$$D \equiv \frac{D(F,\ G)}{D(u,\ v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

khi đó hệ thức $\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0 \\ G(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0 \end{cases}$ xác định hai hàm ẩn $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ trong lân cận nào đó của (x_0, y_0, z_0), thoả mãn $u(x_0, y_0, z_0) = u_0$, $v(x_0, y_0, z_0) = v_0$, các hàm u, v liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này và có

$$u'_x(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0) = -\frac{1}{D}.\frac{D(F,\ G)}{D(x,\ v)}(M_0)\ ;\ v'_x(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0) = -\frac{1}{D}.\frac{D(F,\ G)}{D(u,\ x)}(M_0).$$

Tương tự có $u'_y(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $v'_y(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $u'_z(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$, $v'_z(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$

Ví dụ 5.

a) $z^3 - 3xyz = a^3$, tính dz

b) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, tính dy.

c) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{y}{z} + 10$, tính dz

d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, tính dy, dz.

e) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$, tính vi phân toàn phần dz.

f) $x = v\cos u - u\cos v + \sin u$, $y = v\sin u - u\sin v - \cos u$, $z = (u - v)^2$, tính dz.

g) Phương trình $x.e^{yz} = y + z + 1$ xác định hàm ẩn $z(x, y)$. Tính $dz(0\ ;\ 0)$

$(dx - dy)$

h) Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z - ye^{x/z} = 0$. Tính $dz(0\ ;\ 1)$

$(dx + dy)$

i) Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $xe^{y/z} - z = 0$. Tính $dz(1\ ;\ 0)$

$(dx - dy)$

k) Phương trình $x + 2y + z = ye^{xz}$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Tính $dz(0\ ;\ 1)$

$(-2dx - dy)$

l) Phương trình $xe^{yz} = 2x - y - z$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Tính $dz(1\ ;\ 0)$

$(dx - 2dy)$

m) Phương trình $y\left(z - \sqrt{x^2 - z}\right) = -2$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}z'_x + y^2 z'_y = 2$

n) Phương trình $x\left(z - \sqrt{y^2 - z}\right) = 3$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x - \frac{1}{y^2}z'_y = -3$

o) $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$. Tính $dz(1\ ;\ -1)$ $\quad (-\frac{4}{9}dx + \frac{5}{9}dy)$

p) $3x^3 + 2y^3 + z^3 = (x + y)z$. Tính $dz(-1\ ;\ 1)$ $\quad (-\frac{8}{3}dx - \frac{5}{3}dy)$

Have a good understanding!