Bài tập tuần 5

1. Trong không gian $P_3[x]$ cho các vector

$$u_1 = 1 - 2x - x^3$$

$$u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3$$

$$u_3 = -1 + x - x^2 - x^3$$

$$u_4 = 4 - 4x + 2x^2 + 2x^4$$

và các không gian vector con

$$V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\} \quad , \quad V_2 = \text{span}\{u_3, u_4\}$$

Tìm số chiều và một cơ sở của các không gian $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$

2. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian sinh bởi

$$S = \big\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 5, 6), v_3 = (7, 8, 9)\big\}$$

3. Trong không gian $P_4[x]$ cho các vector

$$u_1 = 1 + x^2 + x^3$$

$$u_2 = x - x^3 + 2x^4$$

$$u_3 = -2 + x + 3x^3$$

$$u_4 = -1 + x - x^3 + 2x^4$$

a) Tìm hạng của họ vector

b) Tìm một cơ sở của span $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

4. Chứng minh rằng

$$B = \big\{v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (6, 2, 0), v_3 = (7, 4, 1)\big\}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $\big[(15, 3, 1)\big]_B$

5. Cho hệ vector

$$B = \big\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3)\big\}$$

a) Chứng minh rằng B là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B

c) Tìm $\big[(15, 3, 1)\big]_B$ theo 2 cách: Trực tiếp và đổi cơ sở

6. Trong không gian $P_2[x]$ cho các vector

$$u_1 = 1 + x + x^2$$

$$u_2 = 2 + mx - x^2$$

$$u_3 = 4 + 5x + x^2$$

$$u = 10 + 11x - 5x^2$$

a) Xác định m để hệ $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính

b) Với $m = 2$, chứng minh rằng B lập thánh một cơ sở của không gian $P_2[x]$ và tìm tọa độ của vector u đối với cơ sở B

7. Cho hệ vector

$$B = \Big\{v_1 = (2, 1, 0, -3), v_2 = (1, -1, 2, 5), v_3 = (5, 3, 1, 2), v_4 = (8, 5, 4, 1)\Big\}$$

a) Chứng minh B là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$

b) Tìm tọa độ của vector $u = (23, 14, 17, -5)$ theo cơ sở B

8. Tìm m và n để không gian nghiệm của hệ phương trình sau có số chiều là 2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + mx_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + nx_4 = 0 \end{cases}$$

9. Trong không gian $P_2[x]$ cho các vector

$$v_1 = 1 + x + 2x^2 \quad , \quad v_2 = 1 - x^2 \quad , \quad v_3 = 3 + x$$

Tìm m để $u = 3 - 2x + mx^2 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

10. Cho không gian $P_{2021}[x]$ gồm các đa thức bậc không quá 2021 và

$$W = \Big\{p(x) \in P_{2021}[x] \,\Big|\, p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\Big\}$$

Chứng minh rằng W là một không gian con của $P_{2021}[x]$, tìm số chiều và một cơ sở của W

11. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình thuần nhất sau

a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

12. Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ phương trình sau có số chiều là 1

$$\begin{cases} bx + 3y + z = 0 \\ (1 + 2b)x + (a + 5)y + 2z = 0 \\ (2b - 1)x + (a + 2)y + z = 0 \end{cases}$$

13. Trong không gian vector V, cho hai hệ vector

$$\{u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}\} \text{ là phụ thuộc tuyến tính}$$

$$\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\} \text{ là độc lập tuyến tính}$$

Chứng minh rằng u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các vector $u_1, u_2, ..., u_n$

14. Cho v_1, v_2 là các không gian vector con của không gian vector V. Ta gọi V_1 và V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V$ và $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Chứng minh rằng V_1 và V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi vector của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2$ $(u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$