Tuần 3
Chương 2: Ma trận - Định thức - Hệ PTTT
Ma trận, Định thức, Hạng ma trận, Ma trận nghịch đảo

1 Định nghĩa

Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng, n cột có dạng

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với các phần tử ma trận $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$)

Khi $m = 1$, ma trận được gọi là ma trận hàng: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$

Khi $n = 1$, ma trận được gọi là ma trận cột: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Khi $a_{ij} = 0, \forall i, j$, ma trận được gọi là ma trận không, kí hiệu $\mathcal{O}$

Khi $m = n$, ma trận được gọi là ma trận vuông cấp n

▶ **Hai ma trận bằng nhau**

Cho hai ma trận cùng kích thước $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$. Nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ thì $A = B$

▶ **Ma trận chuyển vị**

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Ma trận chuyển vị của A là $A^T = \left[a'_{ij}\right]_{n\times m}$ sao cho $a_{ij} = a'_{ji}$

VD Ma trận A có ma trận chuyển vị là A^T ở bên dưới

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

▶ **Đường chéo chính của ma trận vuông**

Cho ma trận vuông cấp n. Các phần tử $a_{ii}\,(i = \overline{1, n})$ được gọi là các phần tử trên đường chéo chính của ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

▶ **Các dạng của ma trận**

(1) A gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0\,(i > j)$, là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0\,(i < j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên　　　　Ma trận tam giác dưới

(2) A được gọi là ma trận chéo nếu $a_{ij} = 0\,(i \neq j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(3) A là ma trận đơn vị nếu nó là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1

Ký hiệu E (Hoặc I)

(4) A là ma trận đối xứng nếu $A = A^T$, là ma trận phản đối xứng nếu $A = -A^T$

2 Các phép toán với ma trận

2.1 Phép cộng

Cho hai ma trận **cùng cỡ** $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$. Khi đó

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$

▶ **Tính chất**

(1) (Giao hoán) $A + B = B + A$

(2) (Kết hợp) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) (Tồn tại phần tử trung hòa) $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$. Dễ thấy phần tử đối xứng của A là $-A$

(4) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Gọi $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận kích thước $m \times n$ với các phần tử thực, khi đó $\big(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), +\big)$ lập thành một nhóm Abel

VD Xét hai ma trận cùng cỡ A và B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+4 & 5+2 \\ 4+3 & 9+0 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2 Nhân một số với ma trận

Cho $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ trên trường $\mathbb{K}$ và một số $k \in \mathbb{K}$. Khi đó

$$kA = \big[ka_{ij}\big]_{m\times n}$$

VD

$$2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Ta có một số tính chất sau

(1) (Phân phối) $k(A + B) = kA + kB \quad , \quad (k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

(2) (Kết hợp) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

(3) $1.A = A$, $(-1)A = -A$

(4) $(kA)^T = kA^T$

2.3 Nhân 2 ma trận

Cho hai ma trận $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ và $B = \big[b_{ij}\big]_{n\times p}$. Tích hai ma trận A và B là

$$AB = C = \big[c_{ij}\big]_{m\times p}$$

Với

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

VD

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có một số tính chất sau

(1) (Kết hợp) $(AB)C = A(BC) \quad , \quad k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(2) (Tồn tại phần tử trung hòa) $EA = AE = A$

(3) (Phân phối) $A(B + C) = AB + AC$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

Lưu ý Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán

I Định thức

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ vuông cấp n. Gọi M_{ij} là ma trận vuông cấp $n - 1$ tạo bởi ma trận A nhưng bỏ đi hàng i và cột j. Định thức của A (Ký hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$) xác định bởi

$$|A| = a_{i1}\,|M_{11}| - a_{i2}|M_{12}| + ... + (-1)^{n+1} a_{in}|M_{1n}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|M_{1j}|$$

Ta gọi $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ là phần phụ đại số của a_{ij}

Ta có một số tính chất sau

(1) $\det A = \det A^T$

(2) Nếu đổi chỗ 2 hàng (cột) của ma trận thì định thức đổi dấu

(3) Nếu ma trận A có 2 hàng (cột) bằng nhau thì định thức bằng 0

(4) Có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo hàng bất kỳ

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (Cố định } i)$$

Tương tự, ta cũng có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo cột bất kỳ

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ (Cố định } j)$$

(6) Ma trận A' xác định bằng cách nhân một hàng (cột) bất kỳ của A với một số λ. Khi đó

$$\det A' = \lambda \det A$$

Khi đó, ta có

$$\det(kA) = k^n \det A$$

với n là cấp của ma trận vuông A

(7) Nếu ta cộng một hàng (cột) với một hàng (cột) khác của A thì định thức của A không đổi

(8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(9) Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính

(10) $\det(AB) = \det A.\det B$, với A và B là hai ma trận cùng cỡ

VD Tính $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

<u>Giải</u>

Biến đổi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{(Cộng hàng 1 vào hàng 2)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \text{(Nhân hàng 1 với -2 rồi cộng vào hàng 3)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{(Đổi hàng 2 và hàng 3)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{(Nhân hàng 2 với 3 rồi cộng vào hàng 2)}$$

$$= -1.(-1)(-1) = -1$$

II Hạng của ma trận

1 Định nghĩa

▶ Định thức con

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Bỏ đi $m-k$ hàng và $n-k$ cột của ma trận A, ta được ma trận vuông cấp k, định thức của ma trận đó được gọi là định thức con cấp k của ma trận A

▶ Hạng của ma trận

Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của A. Ký hiệu rank$A$

2 Ma trận bậc thang

A gọi là ma trận bậc thang nếu như nó thỏa mãn các điều kiện sau

(1) Nếu có hàng chứa toàn số 0 thì nó phải nằm ở dưới cùng

(2) Phần tử khác 0 đầu tiền (Từ bên trái) nằm ở cột bên phải của phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên đó

VD

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận bậc thang

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận "không" bậc thang

Hạng của ma trận chính là số hàng khác 0 của ma trận

3 Cách tính hạng của ma trận

Ta có một số chú ý sau

(1) rank$A$ = rank $\left(A^T\right)$

(2) Hạng của ma trận khong đổi nếu áp dụng các phép biến đổi sơ cấp

VD Tính rank$A$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

<u>*Giải*</u>

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 - 2h_1 \to h_4]{\substack{h_2 - 2h_1 \to h_2 \\ h_3 - 3h_1 \to h_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 - h_2 \to h_3 \\ h_4 - h_3 \to h_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó rank$A = 3$

III Ma trận nghịch đảo

1 Định nghĩa

Cho ma trận A vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận B cùng cỡ thỏa mãn $AB = BA = E$ thì A gọi là ma trận khả nghịch, và B là ma trận nghịch đảo của A

Ký hiệu $B = A^{-1}$

VD Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ta có $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Do đó $B = A^{-1}$

2 Tính chất

(1) E khả nghịch và $E^{-1} = E$

(2) A khả nghịch khi và chỉ khi det$A \neq 0$ và $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

(3) A và B là hai ma trận cùng cỡ và khả nghịch thì AB khả nghịch

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

3.1 Phương pháp sử dụng phần phụ đại số

B_1 Tính $\det A \begin{cases} \text{Nếu } \det A \neq 0 \text{ thì ma trận khả nghịch} \\ \text{Nếu } \det A = 0 \text{ thì ma trận không nghịch} \end{cases}$

B_2 Lập ma trận phụ đại số $\widetilde{A} = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$, với A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}

B_3 Sử dụng công thức

$$A^{-1} = \frac{\left(\widetilde{A}\right)^T}{\det A}$$

VD Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>*Giải*</u>

Ta có $\det A = 1$ nên ma trận A khả nghịch

Lập ma trận phụ đại số

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $A^{-1} = \dfrac{\left(\widetilde{A}\right)^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Phương pháp biến đổi sơ cấp

B_1 Lập ma trận bổ sung $\overline{A} = \left[A|E\right]_{n\times 2n}$

B_2 Biến đổi sơ cấp trên các **hàng** để đưa ma trận A trở thành ma trận đơn vị. Khi đó phần bổ sung ở bên trái sau khi biến đổi sẽ là ma trận nghịch đảo của A

$$\left[A|E\right]_{n\times 2n} \xrightarrow{\text{Biến đổi sơ cấp theo } \textbf{hàng}} \left[E|A^{-1}\right]_{n\times 2n}$$

VD Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>*Giải*</u>

Xét ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 - 2h_1 \to h_3]{h_2 - h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_2 - h_3 \to h_2]{h_1 - h_2 \to h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tuần 4
Chương 2: Ma trận - Định thức - Hệ PTTT
Hệ phương trình tuyến tính

I Tổng quát

Hệ m phương trình, n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{1n} & = b_1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + ... + a_{2n} & = b_2 \\ ... \\ a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + ... + a_{mn} & = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Hệ (1) còn có thể được viết là

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$$AX = B$$

II Hệ Cramer

Hệ (1) là hệ Cramer khi $m = n$ và $\det A \neq 0$

▶ **Định lí**

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$ hay $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}, \forall i = \overline{1, n}$

(Trong đó A_i là ma trận thay cột i của A bằng vecto cột B)

III Giải HPTTT bằng phương pháp Gauss

$\mathbf{B_1}$ Viết ma trận A cạnh vecto cột B được ma trận $\overline{A}$

$\mathbf{B_2}$ Biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về ma trận bậc thang

$\mathbf{B_3}$ Biện luận theo rank$A$

▶ **Định lí Kronecker - Capelli**

Nếu rank$A \neq$ rank$\overline{A}$ thì hệ (1) vô nghiệm

Nếu rank$A =$ rank$\overline{A} = n$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất

Nếu rank$A =$ rank$\overline{A} < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm

IV Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ (1) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nếu $B = \mathcal{O}$. Có hai trường hợp

Nếu rank$A = n$: hệ có nghiệm duy nhất $X = \mathcal{O}$

Nếu rank$A < n$: hệ có vô số nghiệm

Hệ quả Nếu A là ma trận vuông cấp n, hệ $AX = \mathcal{O}$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

V Các ví dụ

1. Giải các hệ phương trình sau bằng hệ *Cramer*

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 13 \end{cases}$

<u>*Giải*</u>

a) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ta có $\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ đã cho là hệ *Cramer*

Ta có $\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3$

Vậy $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{\det A_1}{\det A}, \dfrac{\det A_2}{\det A}, \dfrac{\det A_3}{\det A}\right) = (1, 0, 1)$ là nghiệm duy nhất của hệ

b) Xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, ta có $\det B = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ đã cho là hệ *Cramer*

Ta có $\det B_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 13 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \det B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -12$

Vậy $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{\det B_1}{\det B}, \dfrac{\det B_2}{\det B}, \dfrac{\det B_3}{\det B}\right) = (1, 0, 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = -2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 & = 8 \end{cases}$

Giải

a) Xét ma trận bổ sung $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

$$\overline{A} \xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nhận thấy $\text{rank}A = \text{rank}\overline{A} = 3$ nên hệ phương trình có duy nhất nghiệm

Từ ma trận sau khi biến đổi sơ cấp, ta được hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ x_2 - 3x_3 & = -3 \\ x_3 & = 1 \end{cases}$

Giải hệ, ta được nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

b) Xét ma trận bổ sung $\overline{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

$$\overline{B} \xrightarrow[h_3 - 2h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3h_3 - 2h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 18 \end{array}\right)$$

Do đó hệ có vô số nghiệm thỏa mãn. Đặt $x_4 = t$, khi đó từ ma trận bổ sung sau khi biến đổi sơ cấp, ta được nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1 + \dfrac{4t}{3}, 2 - \dfrac{16t}{3}, 6 - \dfrac{11t}{3}, t\right)$

3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= b \\ mx_1 + x_2 + x_3 &= c \end{cases}$$

trong đó $a, b, c, m \in \mathbb{R}$.

a) a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Cho $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Giải

a) Xét ma trận tạo bởi các hệ số của các ẩn $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -3m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

b) Với $m \neq -2$ thì $\det A \neq 0$ nên hệ phương trình là hệ *Cramer*, do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

Với $m = -2$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thấy hệ này có vô số nghiệm