GIẢI ĐỀ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20142

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Chuỗi số này là chuỗi số dương $\forall n > 1$

Khi $n \to +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ

$\rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu

$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ là một dãy số dương, đơn điệu giảm dần về 0

$\rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-1)^n$

Đặt $x - 1 = t$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ với $a_n = \frac{1}{n+1}$

Bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1$

Xét $t = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ là chuỗi phân kỳ

Xét $t = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

$\rightarrow -1 \le t < 1$

$\rightarrow -1 \le x - 1 < 1$

$\rightarrow 0 \leq x < 2$

$\rightarrow$ miền hội tụ là $x \in [0; 2)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^x}$

Chuỗi đã cho là chuỗi số dương $\forall n \geq 1$

Khi $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n-1}{n^x} \sim \frac{1}{n^{x-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$ hội tụ $\leftrightarrow x - 1 > 1$

$\rightarrow x > 2$

$\rightarrow$ miền hội tụ là $x \in (2; +\infty)$

Câu 3: Giải các phương trình vi phân :

a) $y'.\cos^2 x = y$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}.\cos^2 x = y$

$\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Tích phân 2 vế :

$\rightarrow \ln|y| = \tan x + C$

$\rightarrow y = e^{\tan x + C}$

Nghiệm tổng quát của ptvp đã cho là $y = e^{\tan x + C}$,

ngoài ra còn có $y = 0$ là nghiệm kì dị

b) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$

(Đây là phương trình bernoulli)

Đặt $v = y^{-2}$, phương trình đã cho trở thành:

$v' + \frac{-2}{x}.v = -2.x^2$

Thừa số tích phân của ptvp trên là: $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$:

$$\rightarrow \frac{1}{x^2}.v' + \frac{-2}{x^3}v = -2$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2}.v\right)' = -2$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2}.v = -2x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2y^2} = -2x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2y^2} + 2x + C = 0$$

Vậy tích phân tổng quát của ptvp đã cho là $u(x, y, C) = \frac{1}{x^2y^2} + 2x + C = 0$

Ngoài ra có $y = 0$ là nghiệm kì dị

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 3$

Đặt $t = x + 3 \rightarrow x = t - 3$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{(t-3)^2 - 3(t-3) + 2} = \frac{1}{t^2 - 9t + 20} = \frac{1}{(t-4)(t-5)}$$

$$= \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-4} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\frac{t}{5} - 1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{t}{4} - 1} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1 - \frac{t}{4}} - \frac{1}{5}.\frac{1}{1 - \frac{t}{5}}$$

Khai triển maclaurin của f(t) là :

$$f(t) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^n}$$

Vậy khai triển f(x) thành chuỗi lũy thừa của $x + 3$ là :

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n}$$

Câu 5: Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số

$$f(x) = x, \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \text{tuần hoàn chu kì } 2 \end{cases}$$

Nhận xét: $f(x) = x$ là hàm số lẻ, suy ra hệ số a_0 và a_n đều bằng 0

$$b_n = \int_{-1}^{1} x.\sin n\pi x\,dx = 2\int_{0}^{1} x.\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\left(-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}$$

Vậy khai triển thành chuỗi Fourier của f(x) là

$$\to F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$$

Tại $x = -1, x = 1$ hàm không liên tục, theo định lí Dirichlet :

$$\to F(-1) = \frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = 0$$

$$F(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = 0$$

$$\to F(x) = \begin{cases} 0\,, & x = -1 \\ x\,, & -1 < x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

Câu 6: Tính tổng

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$$

Ta có $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$

$$\to \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{6}$$

Câu 7: Giải phương trình vi phân

$$\left(x + \frac{1}{y^2}\right)dy + \left(y + \frac{1}{x^2}\right)dx = 0$$

Ta thấy $\frac{\partial\left(x + \frac{1}{y^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(y + \frac{1}{x^2}\right)}{\partial y} = 1$

→ thỏa mãn điều kiện phương trình vi phân toàn phần

Giả sử $du(x,y) = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)dy + \left(y + \frac{1}{x^2}\right)dx$

Xuất phát từ $u'_y = x + \frac{1}{y^2}$

$\rightarrow u(x,y) = \int \left(x + \frac{1}{y^2}\right) dy = xy + \frac{-1}{y} + g(x)$

$\rightarrow\ u'_x = y + g'(x) = y + \frac{1}{x^2}$

$\rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Chọn $g(x) = -\frac{1}{x}$

Ta có tích phân tổng quát của ptvt đã cho là :

$u(x,y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C$