Moon.vn
Học để khẳng định mình

GIẢI TÍCH

Chuyên đề 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

Bài 01.01.1.001 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2n-1}{n}$

b) $\lim \frac{3n-1}{2n+1}$

c) $\lim \frac{3n^2+2n+5}{7n^2+n-8}$

d) $\lim \frac{3n^3-2n+5}{1+2n^3}$

e) $\lim \left(\frac{2n-3n^3+1}{n^3+n^2}\right)$

f) $\lim \frac{4n^2-n-1}{3+2n^2}$

g) $\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$

h) $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-n}{1+2n}$

i) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{3n-2}$

k) $\lim(n-\frac{n^2+3n-7}{n+1})$

Bài 01.01.1.002 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2n\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

b) $\lim \frac{(2-3n)^3(n+1)^2}{1-4n^5}$

c) $\lim \frac{n^2+2n+2}{2(n+1)^2}$

d) $\lim \frac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2+1}}$

e) $\lim \sqrt{\frac{n^5-n^2+1}{n^5-2n^3-1}}$

Bài 01.01.1.003 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^n+\frac{3^n}{4^n}\right]$

b) $\lim\frac{3^n-4^n+1}{4^n+2^n+1}$

c) $\lim\frac{5.2^n-cos5n}{2^n}$

d) $\lim\frac{7.2^n+4^n}{2.3^n+4^n}$

e) $\lim\frac{5.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

Bài 01.01.1.004 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left(3+\frac{n\cos n}{n^2}\right)$

b) $\lim\left(5+\frac{n^2\cos 5n}{n^3}\right)$

c) $\lim(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n})$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$

e) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$

f) $\lim n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}\right)$

Bài 01.01.1.005 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{4n^2-2}}{n+3}$

b) $\lim n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}\right)$

c) $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$

Bài 01.01.1.006 [NĐT]

Chứng minh các dãy số có số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0

a) $u_n = \dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}$

d) $u_n = \dfrac{1+\cos n^2}{2n+1}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^2}{n+2}$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$

c) $u_n = \dfrac{1}{n!}$

Bài 01.01.1.007 [NĐT]

Chứng minh các dãy số có số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0

a) $u_n = \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n}$

d) $u_n = \dfrac{n+cos5n}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n^2 + \cos n}{2\sqrt[3]{n}+1}$

e) $u_n = 2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$

f) $u_n = \sqrt{n+1}-n$

Bài 01.01.1.008 [NĐT]

Tìm giới hạn của dãy số u_n với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}.$$

Bài 01.01.1.009 [NĐT]

Cho dãy số u_n được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{u_n}{2} \ \forall n \end{cases}$$

CMR

a) $0 < u_n \le \frac{1}{4} (1)$

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{3}{4}$

Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$

Bài 01.01.1.010 [NĐT]

Cho dãy số u_n được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

CMR

a) $u_n > 1$, $\forall n (1)$

b) $u_{n+1} - 1 < \frac{u_n - 1}{2}$

c) Tìm $\lim u_n$

Bài 01.01.1.011 [NĐT]

Cho dãy số u_n được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n - 6 \end{cases}$$

Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = u_n + 18$

a) CMR (v_n) là cấp số nhân lùi vô hạn.

b) Tìm $\lim u_n$.

Bài 01.01.1.012 [NĐT]

Cho dãy số xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \ (\forall n \geq 1) \end{cases}$$

Tính $\lim u_n$.

Bài 01.01.1.013 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim(2n^3+3n-1)$

b) $\lim(-2n^2+n\sqrt{n}-n+4)$

c) $\lim\sqrt[3]{5n-n^3}$

d) $\lim\sqrt{n^2-n+1}$

e) $\lim\sqrt{2n^3+n^2+1}$

f) $\lim\left(-n^2+n\sqrt{n}+1\right)$

Bài 01.01.1.014 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{3n-n^3}{2n+15}$

b) $\lim\dfrac{n^2-n+11}{\sqrt{3n^2-n+1}}$

c) $\lim\left(2^n+\dfrac{1}{n}\right)$

d) $\lim\dfrac{3n^3-5n+1}{n^2+4}$

e) $\lim\left(n^2-\dfrac{2}{n+1}\right)$

f) $\lim\dfrac{n^3-2n+1}{2n^2-n+3}$

Bài 01.01.1.015 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(n^2-\dfrac{2}{n+1}\right)$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)$

b) $\lim \dfrac{(2n-1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3+7n^2-5}}$

e) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

c) $\lim \dfrac{5^n+2.3^n}{4^n+1}$

f) $\lim\left(2^n-4^{n-1}+1\right)$

Bài 01.01.1.016 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{5^n-2}{1+2.2^n}$

b) $\lim \dfrac{2^{n+1}-3.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}$

c) $\lim \dfrac{2n-3^n}{n+2^n}$

Bài 01.01.1.017 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(n^3+2n^2-n+1\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$

b) $\lim\left(-n^2+5n-2\right)$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)$

Bài 01.01.1.018 [NĐT]

Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{3u_n-1}{u_n+1}$

b) $\lim \dfrac{v_n+2}{v_n-1}$

Bài 01.01.1.019 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) (n = 1, 2, …) được xác định như sau:

$x_1 = 1$ và $x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$ với n = 1, 2, …

Đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i+2}$ (n = 1, 2, ….). Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Bài 01.01.1.020 [NĐT]

Cho dãy (x_n) (n = 1, 2, …) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad (n = 2,3,\ldots) \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) (n = 1, 2, …) với $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.021 [NĐT]

Xét dãy số (x_n) (n = 1, 2, 3, …) xác định bởi:

$x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$ với mọi n = 1, 2,3, ….

Đặt $S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Bài 01.01.1.022 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \frac{(2x_n+1)^{2012}}{2012} + x_n$. Với n là số nguyên dương.

Đặt $u_n = \frac{(2x_1+1)^{2011}}{2x_2+1} + \frac{(2x_2+1)^{2011}}{2x_3+1} + \frac{(2x_3+1)^{2011}}{2x_3+1} + \ldots + \frac{(2x_n+1)^{2011}}{2x_{n+1}+1}$

Tìm $\lim u_n$

Bài 01.01.1.023 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) với n = 1, 2, … được xác định bởi:

$x_1 = a$, $(a > 1)$, $x_2 = 1$.

$x_{n+2} = x_n - \ln x_n$ $(n \in N^*)$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\ln\sqrt{x_{2k-1}}$ $(n \geq 2)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$

Bài 01.01.1.024 [NĐT]

Cho dãy số $\left(a_n\right)$ xác định bởi: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n\left(n+1\right)}$.

Chứng minh rằng dãy $\left(a_n\right)$ có giới hạn.

Bài 01.01.1.025 [NĐT]

Tìm giới hạn sau

a. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

b. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n$

Bài 01.01.1.026 [NĐT]

Cho dãy số $\left(S_n\right)$ với $S_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ tồn tại và tính giới hạn đó

Bài 01.01.1.027 [NĐT]

Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \quad ; n = 0,1,2... \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^3}{n}$.

Bài 01.01.1.028 [NĐT]

Cho 2 dãy số $\left(a_n\right)$ và $\left(b_n\right)$ có:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2005}{2006} \\ b_1 = \dfrac{2007}{2006} \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{b_n} \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \quad \text{Voi } \left(n = 1,2,3,...\right)$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1001}{a_n+b_n}$.

Bài 01.01.1.029 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots \frac{k}{(k+1)!}$. Tính $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n}$.

Bài 01.01.1.030 [NĐT]

Chứng minh rằng không tồn tại $\lim_{x\to+\infty} \sin n$.

Bài 01.01.1.031 [NĐT]

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện sau với mọi $n \ge 1$

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.032 [NĐT]

Cho dãy số (u_n) với mọi n=1,2,... xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1.u_2 ... u_n \end{cases} \text{với mọi n=1,2,...}$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. Tìm $\lim_{x\to+\infty} S_n$.

Bài 01.01.1.033 [NĐT]

Cho dãy số (u_n) (n=1,2,…) được xác định bởi u_1=2 và u_{n+1}= $-u_n$+1.Tìm $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}$

Bài 01.01.1.034 [NĐT]

Cho dãy (x_n) (n=1,2,…) được xác định bởi x_1=1 và x_{n+1}=2008$x^2{}_n + x_n$.

Tìm $\lim \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} ... + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$.

Bài 01.01.1.035 [NĐT]

Cho dãy (x_n) (n=1,2,…) được xác định bởi x_1=1 và $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$

Tìm lim $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i+2}}$.

Bài 01.01.1.036 [NĐT]

Cho dãy số $(x n)$ xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2\cos\frac{\pi}{9} \\ x_{n+1} = 3x_n - 1 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

Bài 01.01.1.037 [NĐT]

Cho dãy số (b_n) được xác định bởi: $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n{}^2 + \frac{1}{4^n}}\right) \end{cases}$.

Bài 01.01.1.038 [NĐT]

Cho $a > 1$ và dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 (n \geq 1) \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n})$.

Bài 01.01.1.039 [NĐT]

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1999} \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}})$.

Bài 01.01.1.040 [NĐT]

Cho dãy số (a_n) và (b_n) xác định bởi $\begin{cases} a_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + ... + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}} \\ b_n = (\frac{a_n}{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}} \end{cases} (n = 1, 2, ...)$

Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} b_n$

Bài 01.01.1.041 [NĐT]

Cho $(a\,n)$ xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n{}^3 - 2a_n{}^2 - 2}{3a_n{}^2 - 4a_n - 1} \end{cases}$

Chứng minh rằng nếu $|a| \geq 2$ thì dãy số (a_n) hội tụ. Tìm giới hạn của dãy trong trường hợp đó.

Bài 01.01.1.042 [NĐT]

Cho $0 < a < 1$và dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}\arccos^2 x_{n-1} \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$và tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.043 [NĐT]

Cho số thực $a \geq 1$. Xét dãy số (x_n) xác định: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 1 + \ln\left(\dfrac{x_n^2}{1 + \ln x_n}\right) \end{cases}$ với n=1,2,...

Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.044 [NĐT]

Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$ (n dấu căn). Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 u_2 ... u_n}{2^n}$.

Bài 01.01.1.045 [NĐT]

Cho dãy (u_n) xác định bởi: $u_n = 2^n\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$ (n dấu căn). Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.1.046 [NĐT]

Cho dãy (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} -1 < u_n < 1 \\ u_n = \sqrt{\dfrac{1 + u_{n-1}}{2}} \end{cases}$, với n = 1, 2….

Hai dãy $(v_n), (w_n)$ được xác định như sau: $v_n = 4^n(1 - u_n)$ và $w_n = u_1 u_2 ... u_n$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$

Bài 01.01.1.047 [NĐT]

Chứng minh các dãy số sau đều có giới hạn hữu hạn:

a) $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

b) $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$

c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{1!}\right)\left(1 + \frac{1}{2!}\right)\left(1 + \frac{1}{3!}\right)...\left(1 + \frac{1}{n!}\right)$

Bài 01.01.1.048 [NĐT]

Cho a là một số thực. Xét dãy $(U_n): \begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \left|U_n - 2^{1-n}\right| \end{cases}$ với n = 0,1,2, ...Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Bài 01.01.1.049 [NĐT]

Đặt *f(n)* = $(n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xây dựng dãy (U_n) như sau : $U_n = \frac{f(1)f(3)...(f\,2n-1)}{f(2)f(4)...f(2n)}$ với n=1,2,3... .Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{U_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 01.01.1.050 [NĐT]

Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

Bài 01.01.1.051 [NĐT]

Cho dãy (x_n) (n = 0, 1, 2…) được xác định như sau:

x_0, x_1, x_2 là các số dương cho trước

$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy

Bài 01.01.1.052 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$x_1 = 0$, $x_{n+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x_n}$ với mọi $n \in N^*$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.053 [NĐT]

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2007 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \dfrac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

1/ Chứng minh dãy số (x_n) bị chặn.

2/ Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.1.054 [NĐT]

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, \quad a > 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a - \sqrt{a + x_n}} \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn

Bài 01.01.1.055 [NĐT]

Giả sử x_n thuộc khoảng (0; 1) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n} = 0$$

Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.056

Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \dfrac{-1}{3 + u_{n-1}}, \text{ với } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và hãy tìm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Bài 01.01.057

Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1 \,;\, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hãy tìm giới hạn sau : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Bài 01.01.058

Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_1 = 1$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2005} + u_n \,;\text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

Tìm giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \cdots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Bài 01.01.059

Dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn các điều kiện sau :

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}(1 - u_n) > \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Tìm giới hạn sau : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Bài 01.01.060

Dãy số $\{u_n\}$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \ldots u_n \,;\text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Bài 01.01.061

Giả sử $a > b > 0$. Lập hai dãy số sau đây $\{u_n\}, \{v_n\}$:

$$u_1 = a \; ; \; v_1 = b \; ;$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \; ; \; v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{với } n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{ab}$.

Bài 01.01.062

Cho trước 3 số a, b, c. Xác định 3 dãy $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ như sau :

$$u_1 = a \; ; \; v_1 = b \; ; \; w_1 = c$$

$$u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2} \; ; \; v_{n+1} = \frac{w_n + u_n}{2} \; ; \; w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(khi $n = 1, 2, \ldots$).

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Bài 01.01.063

Cho trước ba số dương a, b, c. Xác định ba dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ như sau :

$$u_1 = a \; ; \; v_1 = b \; ; \; w_1 = c$$

$$u_{n+1} = \sqrt{v_n w_n} \; ; \; v_{n+1} = \sqrt{w_n u_n} \; ; \; w_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Bài 01.01.064

Cho hai dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$ sao cho :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \ ; \ \lim_{n\to+\infty} v_n = b.$$

Dãy số $\{w_n\}$ được xây dựng như sau :

$$w_n = \frac{u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1}{n}.$$

Chứng minh rằng $\lim_{n\to+\infty} w_n = ab.$

Bài 01.01.065

Cho trước hai số α, β. Lập hai dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

như sau : $u_0 = \alpha$; $v_0 = \beta$;

Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, thì $u_n = Au_{n-1} - Bv_{n-1}$; $v_n = Bu_{n-1} + Av_{n-1}$,

ở đây A và B là hai số cố định sao cho $A^2 + B^2 < 1$.

Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$

Bài 01.01.066

Cho hai dãy số dương $\{u_n\}$; $\{v_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2}, \end{cases}$$

Với $n = 1, 2, \ldots$ Tìm các giới hạn $\lim_{n\to\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Bài 01.01.067

Hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \; ; \; v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \end{cases}$$

Với $n = 1, 2, \ldots$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{v_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$.

Bài 01.01.068

Cho dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 1 \\ u_n = \sqrt{\dfrac{1 + u_{n-1}}{2}} \; ; \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hai dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ xác định như sau :

Hai dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ xác định như sau :

$$v_n = 4^n (1 - u_n) \; ; \; w_n = u_1 u_2 \ldots u_n \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm các giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Bài 01.01.069

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0. Dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_n (a u_{n-1} + b) + c = 0, \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.070

Dãy số $\{u_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ được xác định như sau :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \ n=1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và hãy tìm giới hạn đó.

Bài 01.01.071

Xét phương trình (với $n>2$) : $x^n - x^2 - x - 1 = 0$.

1) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n>2$, thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất x_n.

2) Xét dãy số sau đây : $u_n = n(x_n - 1)$, $n = 2, 3, \ldots$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.072

Dãy số $\{u_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + \sin u_n \ \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.073

1) Cho phương trình : $x^{2n+1} = x + 1$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực gọi là u_n.

2) Xét dãy $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ với u_n được xác định trong câu 1.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.074

Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \ ; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn và hãy tính : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Bài 01.01.075

Cho a là số thực cho trước. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \left|u_n - 2^{-n}\right| ; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ và hãy tìm giới hạn này.

Bài 01.01.076

Cho u_1 là số thực cho trước. Dãy $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \ ; n = 1, 2, \ldots$$

Tìm các giá trị của u_1 sao cho tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Bài 01.01.077

a, b là các số cho trước. Dãy $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = b \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2 \ ; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Với những điều kiện gì với các hằng số a, b thì dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Bài 01.01.078

Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_1 = a$$
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2\{u_n\}^2}{[u_n]^2},$$

ở đây $a \geq 1$ cho trước và qua $[\alpha], \{\alpha\}$ tương ứng để chỉ phần nguyên và phần lẻ của số α.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.079

Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3, có duy nhất một số $x_n \in [0\,;\,n]$ sao cho : $x_n^n = e^{x_n}$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$, $n \geq 3$ là dãy số có giới hạn khi $n \to \infty$.

Bài 01.01.080

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình

$$\cos x = x^n$$

có duy nhất nghiệm trên $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Gọi nghiệm đó là u_n. Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.081

Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

Chứng minh rằng phương trình có nghiệm dương duy nhất x_n. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 01.01.082

Cho phương trình $x^n - nx + 1 = 0$. Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm α_n và β_n sao cho $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

Bài 01.01.083

Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ xác định như sau : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$.

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn (khi $n \to \infty$) và giới hạn đó là số vô tỉ.

Bài 01.01.084

Dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ được xây dựng như sau :

$$u_1 = a.$$

$$u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{u_n^2}{2}\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

ở đây $1 < a < 2$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.085

Các dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + \cdots + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}},\ n = 1, 2, \ldots$$

$$v_n = \left(\frac{u_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}},\ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Bài 01.01.086

Xét dãy số $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 2004 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right) - 2005,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 01.01.087

Dãy số $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{\sqrt{3}}{u_n^2}\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hỏi có tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ hay không ?

Bài 01.01.088

Giả sử $x \geq 1$ là số hữu tỉ mà tồn tại dãy số nguyên $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ và hằng số $c \neq 0$ sao cho : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(c\,x^n - u_n\right) = 0$.

Chứng minh rằng x là số nguyên.

Bài 01.01.089

Cho ba dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ xác định như sau :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n w_n}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{w_n u_n}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{u_n v_n}$$

u_0, v_0, w_0 là các số dương cho trước

Tìm tất cả các số thực a sao cho $u_n > a\sqrt[3]{n}$ với mọi n.

Bài 01.01.090

Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau :

$$u_1 = a$$
$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

ở đây $a > 1$ là số cho trước.

Tìm giới hạn sau : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)$.

Bài 01.01.091

Chứng minh $\lim \frac{\sin(2n+3)}{5^n} = 0$.

Bài 01.01.092

Tìm các giới hạn sau đây:

a. $\lim \frac{2n^3+n^2-7}{9n^3-3n^2+n+1}$, b. $\lim \frac{13n^2-3n+2}{n^5+4n^2+1}$.

Bài 01.01.093

Tìm $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}$.

Bài 01.01.094

Tính tổng $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$

Bài 01.01.095

Cho $|q| < 1$, $|Q| < 1$. Biết rằng:

$a = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$
$b = 1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1} + \dots$

Tính tổng $S = 1 + qQ + q^2Q^2 + \dots + q^nQ^n + \dots$

Bài 01.01.096

Tính các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

b. $\lim\left(\dfrac{1}{n-\sqrt{n^2+1}}-\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)$

Bài 01.01.097

Tìm $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{2n.\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}$.

Bài 01.01.098

Tìm $\lim\sqrt{2.3^n-n+5}$.

Bài 01.01.099

Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 3, \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$ (1)

a. Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 6$ là một cấp số nhân.
b. Tìm $\lim u_n$.

Bài 01.01.100

Chứng minh:

a. $\lim\dfrac{3.2^n-(1)^n}{2^n}=3$; b. $\lim\dfrac{\sin\pi n+4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}=4$

c. $\lim(u_n)=c$ với $u_n=c$ (c là hằng số).