Lời giải bài tập chương 5

I 5.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Bài 1:

Ma trận của dạng song tuyến tính đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{e_1'(1,1,0),\ e_2'(1,0,1),\ e_3'(0,1,1)\}$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Khi đó ma trận của dạng song tuyến tính đối với cơ sở mới là

$B = P^T.A.P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 2 & -10 & -10 \\ -6 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

Bài 2:

a) •

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_3 - 2x_2)^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = 2x_2 - x_3 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$. Thay lại ta được

$$\omega_1(x) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$$

•

$$\begin{aligned} \omega_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ x_2 = \dfrac{y_2 + y_3}{2} \\ x_3 = \dfrac{y_2 - y_3}{2} \end{cases}$. Thay lại ta được

$$\omega_2(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

b) Từ phần a) dễ thấy ω_1 xác định dương và ω_2 không xác định dấu.

Bài 3:

Ma trận của dạng toàn phương với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B là $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận của dạng toàn phương với cơ sở B là $A' = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 7 \\ 14 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

Khi đó ta có $A' = P^T.A.P$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 14 & 7 \\ 14 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 14 & 7 \\ 14 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+17 & \lambda+11 & \lambda+4 \\ \lambda+11 & \lambda+7 & \lambda+5 \\ \lambda+4 & \lambda+5 & \lambda-4 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = 3$

Bài 4

a) $\omega_1(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

Ma trận của dạng toàn phương ω_1 với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- **Cách 1:** Đưa về dạng chính tắc.
- **Cách 2:** Tiêu chuẩn Sylvester
  Ta tính các định thức con chính:
  - $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 14$

- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$

Ta có $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$. Vậy dạng toàn phương ω_1 xác định dương.

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 - 2x_4x_1$

Phương pháp Lagrange:

$$\begin{aligned}
\omega_2(x) &= x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 - 2x_4x_1 \\
&= (x_1 - 2x_2 - x_4)^2 + 4x_4^2 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 - x_4)^2 + (2x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3 \\
&= (x_1 - 2x_2 - x_4)^2 + (2x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - (\frac{1}{2}x_2 - x_3)^2
\end{aligned}$$

Vậy dạng toàn phương ω_2 không xác định dấu.

II 5.2 KHÔNG GIAN EUCLIDE

Bài 1 Cho không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc $W = \text{span}\{(1,1,1),(3,4,5),(6,7,8)\}$

a) Tìm 1 cơ sở trực chuẩn của W

b) Tìm hình chiếu trực giao của $u = (4,2,6)$ lên W

Giải

a) Xét ma trận hàng tọa độ của hệ vectơ $\{(1,1,1),(3,4,5),(6,7,8)\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{r}(A) = 2$

$\rightarrow W = \text{span}\{(1,1,1);(0,1,2)\} = \text{span}\,\mathcal{B}$

Trực chuẩn hóa hệ $\mathcal{B} = \{(1,1,1);(0,1,2)\}$

Đặt $u_1 = (1,1,1) \quad ; \quad u_2 = (0,1,2)$

$v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\overline{u_2} = u_2 - < u_2, v_1 > v_1 = (0,1,2) - \sqrt{3}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (-1,0,1)$

$v_2 = \dfrac{\overline{u_2}}{\|\overline{u_2}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

$\Rightarrow W$ có cơ sở trực chuẩn là $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

b) Vậy hình chiếu trực giao của $u = (4,2,6)$ lên W:

$\text{pr}_W(u) = < u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2 = (4,4,4) + (-1,0,1) = (3,4,5)$

Bài 2 Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho các vectơ:

$$u = (-2,0,-1,1) \quad ; \quad v = (1,-2,1,0)$$

a) Tính khoảng cách giữa u và v

b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{u, v\}$

Giải

a) Khoảng cách giữa u và v:

$$d_{uv} = \|u - v\| = \|(-3,2,-2,1)\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{u, v\}$:

$u' = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-2, 0, -1, 1)$

$\overline{v} = v - < v, u' > u' = (1, -2, 1, 0) + \dfrac{1}{2}(-2, 0, -1, 1) = \left(0, -2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$\to v' = \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{18}}(0, -4, 1, 1)$

$\Rightarrow$ Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{u, v\}$ ta được hệ $\{u', v'\}$ với

$$u' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 0, -1, 1) \quad , \quad v' = \frac{1}{\sqrt{18}}(0, -4, 1, 1)$$

Bài 3 Cho $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V và phép biến đổi tuyến tính:

$f : V \to V$ có ma trận theo cơ sở E là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm cơ sở trực chuẩn $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận chéo.

Giải

Xét $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = -1 \\ \lambda_2 & = 2 \end{cases}$

Với $\lambda = -1$, ta có 2 vectơ riêng $(-1, 1, 0); (-1, 0, 1)$

Với $\lambda = 2$, ta có 1 vectơ riêng $(1, 1, 1)$

Trực chuẩn hóa hệ $\{(-1, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$ ta được hệ trực chuẩn $\left\{\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

Trực chuẩn hóa hệ $\{(1, 1, 1)\}$ ta thu được hệ trực chuẩn $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

Khi đó với $F = \left\{\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right); \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ thì ma trận của f cơ sở F là ma trận chéo.

Bài 4 Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ có tích vô hướng chính tắc, cho

$$V = \text{span}\{v_1 = (1, -1, 0, 1); v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (0, -2, 0, -1)\}$$

a) Hệ $\{v_j\}_{j=1}^4$ có là hệ trực giao không ?

b) Tìm 1 hệ cơ sở của V

c) Tìm hình chiếu của $w = (2, 0, 3, 1)$ lên V

Giải

a) Ta thấy $< v_3, v_4 >= 1.0 + 1(-2) + 0.0 + 1(-1) = -3 \neq 0$

$\Rightarrow \{v_j\}_{j=1}^4$ không là hệ trực giao

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow V$ có 1 cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\}$

c) Trực chuẩn hóa cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ theo Gram-Schmidt ta thu được

$$\mathcal{B}' = \left\{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1); v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0); v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 0, 2) \right\}$$

$\Rightarrow \text{pr}_V(w) =< w, v_1 > v_1 + < w, v_2 > v_2 + < w, v_3 > v_3$

$= (1, -1, 0, 1) + (1, 1, 0, 0) + (0, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 1)$

III 5.3 RÚT GỌN DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Bài 1:

a) $\omega_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$

Ma trận của ω_1 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 \neq 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Tồn tại cơ sở B để ω_1 có dạng chính tắc:

$$\omega_1 = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Tiếp theo, ta xác định cơ sở B

Gọi $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B. Ta có:

- $a_{11}p_{11} = 1 \Leftrightarrow p_{11} = 1$
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{12} &= 0 \\ p_{22} &= 1 \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{13} &= 0 \\ p_{23} &= -1 \\ p_{33} &= 1 \end{cases}$

Suy ra, ma trận P cần tìm là: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vậy, cơ sở B cần tìm là: $B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,-1,1)\}$, và với cơ sở đó, ta có dạng chính tắc của ω_1

$$\omega_1(x) = \omega_1^{'}(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \qquad (y)_B = (y_1, y_2, y_3)$$

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

Ma trận của ω_2 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 \neq 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

$\Rightarrow$ Tồn tại cơ sở B để ω_2 có dạng chính tắc:

$$\omega_2 = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{5}y_3^2$$

Tiếp theo, ta xác định cơ sở B

Gọi $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B. Ta có:

- $a_{11}p_{11} = 1 \Leftrightarrow p_{11} = 1$
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{12} &= -1 \\ p_{22} &= \dfrac{-1}{2} \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{13} &= \dfrac{-2}{5} \\ p_{23} &= \dfrac{-1}{5} \\ p_{33} &= \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Suy ra, ma trận P cần tìm là: $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{-2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Vậy, cơ sở B cần tìm là: $B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (-1, \frac{-1}{2}, 0), u_3 = (\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5})\}$, và với cơ sở đó, ta có dạng chính tắc của ω_2

$$\omega_2(x) = \omega_2{}'(y) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{5}y_3^2 \qquad (y)_B = (y_1, y_2, y_3)$$

Bài 2:

a) $\omega_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

Ma trận của ω_1 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 2 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0$

$\Rightarrow \omega_1$ không xác định dấu

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

Ma trận của ω_1 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$\Rightarrow \omega_2$ xác định dương

Bài 3:

a) $\omega_1(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

Ma trận của ω_1 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 6 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 > 0$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 6 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1-2a \\ 1-2a & 1-a^2 \end{vmatrix} = -6a^2 + 4a + 1$

Để ω_1 xác định dương thì $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0$ hay $-6a^2 + 4a + 1 > 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{10}}{6} < a < \dfrac{2+\sqrt{10}}{6}$

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2x_3$

Ma trận của ω_2 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 5a^2$

Để ω_2 xác định dương thì $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$

Điều này tương đương với $\begin{cases} 1 - a^2 > 0 \\ 1 - 5a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}})$

c) $\omega_3(x) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

Ma trận của ω_3 đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Ta có:

- $\Delta_1 = 1 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a - 1$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 8$

Để ω_1 xác định dương thì $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$

Điều này tương đương với $\begin{cases} a-1>0 \\ 4a-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$

d) $\omega_4(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

Ma trận của dạng toàn phương ω_1 với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & a \end{bmatrix}$

Ta tính các định thức con chính của ω_1

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & a \end{vmatrix} = 16a - 16$

Để ω_1 xác định dương thì $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \Leftrightarrow 16a - 16 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

e) $\omega_5(x) = ax_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$

Ma trận của dạng toàn phương ω_2 với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ta tính các định thức con của ω_2

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & -a \\ -a & 2 \end{vmatrix} = 2a - a^2$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3a^2 + 5a$

Để ω_1 xác định dương thì $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a - a^2 > 0 \\ -3a^2 + 5a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{5}{3}$

Bài 4:

a) $\omega_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2$

Gọi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ thì E là cơ sở trực chuẩn

Ma trận của ω_1 đối với cơ sở E là: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Tìm trị riêng của ma trận A. Xét phương trình:

$$det(A - \lambda I) = 0 \text{ hay } \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ hoặc } \lambda = 1 \text{ hoặc } \lambda = 3$$

Xét các trị riêng

- Với $\lambda_1 = 6$, ta có:
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = t \ (t \in \mathbb{R})$$
$\Rightarrow$ Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 6$, ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Với $\lambda_2 = 1$, ta có:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 = t, \ x_3 = 0 \ (t \in \mathbb{R})$$
$\Rightarrow$ Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$, ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

- Tương tự, với trị riêng $\lambda_3 = 3$ ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

Vậy, ma trận $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $P^TAP = D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dạng toàn phương chính tắc của $\omega_1$là: $\omega_1(x) = \omega_1^{'}(y) = 6y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$

b) $\omega_2(x) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$

Gọi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ thì E là cơ sở trực chuẩn

Ma trận của ω_2 đối với cơ sở E là: $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Tìm trị riêng của ma trân A. Xét phương trình:

$$det(A - \lambda I) = 0 \text{ hay } \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -3 \\ -6 & 9-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (9-\lambda)\lambda(\lambda-14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ hoặc } \lambda = 9 \text{ hoặc } \lambda = 14$$

Xét các trị riêng

- Với $\lambda_1 = 0$, ta có:
$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 3t,\ x_2 = 2t,\ , x_3 = t\ (t \in \mathbb{R})$$
$\Rightarrow$ Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$, ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$

- Với $\lambda_2 = 9$, ta có:
$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -3 \\ -6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = t,\ x_3 = -2t\ (t \in \mathbb{R})$$
$\Rightarrow$ Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 9$, ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

- Tương tự, với trị riêng $\lambda_3 = 14$, ta xác định được vectơ riêng sau khi chuẩn hóa là: $p_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} \\ \frac{-3}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$

Vậy, ma trận $P = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{70}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{14}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{-6}{\sqrt{70}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{14}} & \dfrac{-2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-3}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$ và $P^TAP = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

Dạng toàn phương chính tắc của $\omega_1$là: $\omega_2(x) = \omega_2'(y) = 9y_2^2 + 14y_3^2$

IV 5.4 ĐƯỜNG VÀ MẶT BẬC HAI

Bài 1: Nhận dạng các đường cong phẳng sau:

a) $5x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 = 0$
Sử dụng phương pháp chéo hóa trực giao để đưa dạng toàn phương $\omega(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$ về dạng chính tắc ta có.

- Ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
- Ma trận của dạng chính tắc là $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.
- Ma trận làm chéo hóa trực giao ma trận A là $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Công thức đổi tọa độ từ hệ tọa độ $\{O, e_1, e_2\}$ sang hệ tọa độ có cơ sở gồm các vector riêng của A, hệ $\{O, e_1', e_2'\}$ là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Phương trình của đường cong phẳng trong hệ tọa độ$\{O, e_1', e_2'\}$ là :

$$4y_1^2 + 6y_2^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

Vậy đường cong phẳng này là một ellipse.

b) $-7x_1^2 + 2x_2^2 + 12x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 - 4 = 0$
Làm tương tự phần trên ta có:

- $A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Phương trình của đường cong phẳng trong hệ tọa độ$\{O, e_1', e_2'\}$ là

$$5y_1^2 + 10y_1 - 10y_2^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5(y_1+1)^2 - 10y_2^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{(y_1+1)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)} = 1$$

Vậy đường cong phẳng này là một Hyperbol.

c) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 3\sqrt{6}x_2 + 2 = 0$
Làm tương tự phần trên ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Phương trình của đường cong phẳng trong hệ tọa độ$\{O, e_1', e_2'\}$ là

$$3(y_1 - 1)^2 - 3\sqrt{2}y_2 = 1$$

Vậy đường cong phẳng này là một Parabol.

d) $17x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 + 1 = 0$
Làm tương tự phần trên ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

Phương trình của đường cong phẳng trong hệ tọa độ$\{O, e_1', e_2'\}$ là

$$8y_1^2 + 18y_2^2 = -1$$

Vậy đường cong phẳng này là một ellipse ảo.

Bài 2:

a)

Ma trận của ω đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

Ta đi tìm các trị riêng: xét phương trình:

$$det(A - \lambda I) = 0 \text{ hay } \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ 6 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 = 0$$

Ta tìm được hai trị riêng: $\lambda_1 = 0$ (bội 2), $\lambda_2 = 14$

Xét từng trị riêng:

- $\lambda_1 = 0$
  $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= 2t + 3v \\ x_3 &= v \end{cases}$$
  $\Rightarrow$ với $\lambda_1 = 0$, ta có hệ gồm hai vector riêng độc lập tuyến tính: $u_1 = (1, 2, 0)$ và $u_2 = (0, 3, 1)$
  Trực chuẩn hệ trên, ta được $p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), p_2 = \left(\frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)$

- $\lambda_2 = 14$
  Làm tương tự, ta được $p_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$
  $\Rightarrow$ Ma trận $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao và $P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = D$

Lấy cơ sở $B = \{e_1', e_2', e_3'\}$ trong $\mathbb{R}^3$ sao cho P là ma trận chuyển. Khi đó:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$e_2' = \frac{-6}{\sqrt{70}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{70}}e_2 + \frac{5}{\sqrt{70}}e_3 = \left(\frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$
$$e_3' = \frac{-2}{\sqrt{14}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{14}}e_2 + \frac{-3}{\sqrt{14}}e_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$$

b)Từ kết quả phần a) ta thấy mặt bậc hai này là một mặt phẳng trong không gian.

Bài 3: Nhận dạng các mặt cong sau:

a) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$
   Giải tương tự như bài 2, ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Phương trình của mặt bậc hai trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e'_1, e'_2, e'_3\}$ là:

$$4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2 = 1$$

Vậy mặt bậc hai này có dạng Ellipsoid.

b) $24x_1^2 + 24x_2^2 - 12x_3^2 - 12x_1x_2 + 24x_1x_3 - 24x_2x_3 - 25 = 0$
Giải tương tự như bài 2, ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 24 & -6 & 12 \\ -6 & 24 & -12 \\ 12 & -12 & -12 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Phương trình của mặt bậc hai trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e'_1, e'_2, e'_3\}$ là:

$$18x_1^2 - 18x_2^2 + 36x_3^2 = 25$$

Vậy mặt bậc hai này có dạng Hyperboloid một tầng.

c) $13x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 + 16x_1x_2 - 20x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
Giải tương tự như bài 2, ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 13 & 8 & -10 \\ 8 & 7 & -2 \\ -10 & -2 & 16 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Phương trình của mặt bậc hai trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e_1', e_2', e_3'\}$ là:

$$9y_1^2 - 3y_2 + 27y_3^2 = 0$$

Vậy mặt bậc hai này có dạng Paraboloid - elliptic.

d) $5x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - 6 = 0$ Giải tương tự như bài 2, ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{30}}{6} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Phương trình của mặt bậc hai trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e_1', e_2', e_3'\}$ là:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 = 6$$

Vậy mặt bậc hai này có dạng trụ Elliptic.

Bài 4: Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
Trước hết ta nhận xét với P là một ma trận trực giao thì P^{-1} cũng là ma trận trực giao và

$$< P^{-1}x, P^{-1}x >=< x, x > \qquad (\star)$$

Ta đưa dạng toàn phương $Q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ về dạng chính tắc.

Làm tương tự như các bài tập trên, ta có:

- $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Biểu thức của dạng toàn phương trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e_1', e_2'\}$ là:

$$Q(y) = 4y_1^2 + 12y_2^2 + 9y_3^2$$

Trong đó: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = P^{-1}x$

$P,\ P^{-1}$ là các ma trận trực giao nên theo $(\star)$ ta có $< y, y >=< x, x >= 9 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 9$.

Khi đó

$$4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \leq Q(y) \leq 12(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \Leftrightarrow 36 \leq Q \leq 108$$

Dấu $" = "$ xảy ra lần lượt tại $y^1 = (3, 0, 0)$ và $y^2 = (0, 3, 0)$.

Bài 5 (CK 20161): Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + \alpha x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

a) $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid $\Leftrightarrow \omega$ là dạng toàn phương xác định dương.

Ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -4 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$. Ta dùng tiêu chuẩn Sylvester.

Các định thức con chính của A là

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -4 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -15\alpha - 48 > 0 \Leftrightarrow \alpha < -\dfrac{16}{5}$

Vậy để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid thì $\alpha < -\dfrac{16}{5}$

b) Khi $\alpha = 1, \omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3$

Ta chéo hóa trực giao bằng phương pháp đã trình bày ở các bài trên:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Biểu thức của dạng toàn phương trong hệ tọa độ có cơ sở là các vector riêng của A, $\{O, e_1', e_2'\}$ là:

$$\omega(y_1, y_2, y_3) = -7y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$$

Bài 6:

Với $A,\ B$ là các ma trận trực giao ta có: $\begin{cases} A \cdot A^T = I \\ B \cdot B^T = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det A^2 = 1 \\ \det B^2 = 1 \end{cases}$.

Lại có $\det A + \det B = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \det A = 1 \\ \det B = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \det A = -1 \\ \det B = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

TH1: $\begin{cases} \det(A+B) \cdot \det A^T = \det(AA^T + BA^T) = \det(I + BA^T) \\ \det(A+B) \cdot \det B^T = \det(AB^T + BB^T) = \det(AB^T + I) = \det\left(AB^T + I\right)^T = \det(I + BA^T) \end{cases}$

$\Rightarrow \det(A+B) \cdot 1 = \det(A+B) \cdot (-1) = \det(I + BA^T) \Leftrightarrow \det(A+B) = 0$

TH2: Trình bày tương tự.

Vậy $\det(A+B) = 0$.