Chương 1: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Khoa Toán-Tin, HUST

Tháng 2, 2025

Nội dung

1.1.1. Vectơ pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến

Bài toán:

Trong hệ tọa độ Descartes Oxy, cho đường cong L và một điểm $M \in L$. Tìm phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến của đường cong L tại điểm M.

Nhắc lại: Nếu L cho bởi $y = f(x)$ và $M(x_0, y_0) \in L$, thì phương trình tiếp tuyến của L tại M là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Đường cong cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ (cho một cách ẩn)

Định nghĩa (Điểm chính quy - Điểm kỳ dị)

Cho đường cong L xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm riêng $F'_x(M), F'_y(M)$ không đồng thời bằng 0.
Điểm không chính quy còn được gọi là điểm kỳ dị.

(Giả sử $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của M.)
Vì $M(x_0, y_0)$ chính quy, nên ta có thể giả sử $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó theo định lý về hàm ẩn, phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trong một lân cận của x_0 và $f(x_0) = y_0$. Hơn nữa $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

- Phương trình tiếp tuyến của L là $M(x_0, y_0)$ là

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

  hay tương đương

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.}$$

- Một vectơ pháp tuyến của L tại M là $\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$.
  Phương trình pháp tuyến của L tại M là

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.}$$

Đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Điểm chính quy

Điểm $M(x(t_0), y(t_0)) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.

- Phương trình tiếp tuyến của L là $M(x(t_0), y(t_0))$ là

$$\boxed{\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.}$$

- Một vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của L tại M là $(x'(t_0), y'(t_0))$.
  Một vectơ pháp tuyến của L tại M là $\vec{n} = (-y'(t_0), x'(t_0))$.
- Phương trình pháp tuyến của L tại M là

$$\boxed{x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.}$$

Ví dụ (GK20192)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $x^3 + y^3 = 9xy$ tại điểm $(2, 4)$.

Giải:

- $x^3 + y^3 = 9xy \Leftrightarrow F(x, y) := x^3 + y^3 - 9xy$.
- $F'_x(x, y) = 3x^2 - 9y$ và $F'_y(x, y) = 3y^2 - 9x$.
- Tại điểm $(2, 4)$:
  $F'_x(2, 4) = 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 4 = -24,\ F'_y(2, 4) = 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 30.$
- Phương trình tiếp tuyến của đường cong lại tại (2,4):

$$-24(x - 2) + 30(y - 4) = 0 \text{ hay } 4x - 5y + 12 = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến của đường cong lại tại (2,4):

$$\frac{x - 2}{-24} = \frac{y - 4}{30} \text{ hay } 5x + 4y - 26 = 0.$$

Ví dụ (GK20181)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường $x = (t^2 - 1)e^{2t}$, $y = (t^2 + 1)e^{3t}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

Giải:

- Với $t = 0$, điểm tương ứng $M(-1, 1)$.
- $x' = 2te^{2t} + 2(t^2 - 1)e^{2t}$, $y' = 2te^{3t} + 3(t^2 + 1)e^{3t}$.
- Với $t = 0$: $x' = -2$, $y' = 3$.
- Phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} \text{ hay } 3x + 2y + 1 = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến

$$-2(x+1) + 3(y-1) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + 5 = 0$$

1.1.2. Độ cong: Định nghĩa

L đường cong đơn, có tiếp tuyến tại mọi điểm. Trên L chọn một chiều dương. Trên tiếp tuyến của L tại M, chọn một hướng ứng với hướng dương của L, gọi là tiếp tuyến dương.

Cho M, M' là hai điểm trên L, và $\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{M'T'}$ là hai tiếp tuyến dương. Ta gọi độ cong trung bình, ký hiệu $C_{tb}(\widehat{MM'})$ của cung $\widehat{MM'}$ là tỉ số giữa góc α của hai tiếp tuyến tuyến dương $MT, M'T'$ và độ dài cung $\widehat{MM'}$:

$$C_{tb}(\widehat{MM'}) = \frac{\alpha}{\widehat{MM'}}.$$

Độ cong của L tại M, ký hiệu $C(M)$ là giới hạn (nếu có)

$$C(M) = \lim_{M' \to M} C_{tb}(\widehat{MM'}).$$

Ví dụ

Độ cong của đường thẳng tại mọi điểm đều bằng 0.

Ví dụ

Độ cong của đường tròn bán kính R tại mọi điểm đều bằng $1/R$.

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình $y = f(x)$ và $M(x, y)$ thuộc L.
[Gọi φ (tương ứng, $\varphi + \Delta\varphi$) là góc của MT (tương ứng, $M'T'$) với trục hoành. Khi M di chuyển đến M', tiếp tuyến quay được một góc $|\Delta\varphi|$, và độ dài cung $\overset{\frown}{MM'}$ bằng $|\Delta s|$, và

$$C(M) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

Vì $\tan\varphi = y'$, nên $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{y''}{1 + y'^2}$. Mặt khác $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$. Vậy
$C(M) = \left| \dfrac{d\varphi}{ds} \right| = \left| \dfrac{d\varphi/dx}{ds/dx} \right| = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$.]
Công thức

$$\boxed{C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.}$$

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$. Khi đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ và $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$. Ta được

$$\boxed{C(M) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.}$$

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình phương trình trong tọa độ cực $r = f(\varphi)$. Khi đó $x = f(\varphi)\cos\varphi$ và $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Ta có

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad x'' = r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi$$
$$y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi, \quad y'' = r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi.$$

Ta được

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Ví dụ (GK20201)

Tính độ cong của đường $y = x^3 + x$ tại $M(1.2)$.

Giải:

- $y' = 3x^2 + 1,\ y'' = 6x$.
- Tại $M(1, 2)$: $y' = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4,\ y'' = 6$.
- Độ cong của đường tại $M(1, 2)$ là

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|6|}{(1 + 4^2)^{3/2}} = \frac{6}{17\sqrt{17}}.$$

Ví dụ (GK20192)

Tính độ cong của đường $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, tại điểm ứng với $t = -\pi/2$.

Giải:

- $x' = 2(1 - \cos t)$, $x'' = 2\sin t$, $y' = 2\sin t$, $y'' = 2\cos t$.
- Tại $t = -\pi/2$: $x' = 2(1 - \cos(-\pi/2)) = 2$, $x'' = 2\sin(-\pi/2) = -2$, $y' = 2\sin(-\pi/2) = -2$, $y'' = 2\cos(-\pi/2) = 0$.
- Độ cong cần tìm:

$$C = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|2 \cdot 0 - (-2)(-2)|}{(2^2 + (-2)^2)^{3/2}} = \frac{4}{8\sqrt{8}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Một số bài tập

- (GK20213) Tính độ cong của đường tròn có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ tại điểm $M(4,2)$.
- (GK20212) Tính độ cong tại điểm $A(1,1,2)$ của đường cong xác định bởi $z=x^2+y^2$, $z=2x$.
- (CK20212) Cho (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$. Tính độ cong của (E) tại điểm $A(4,0)$.
- (CK20212) Tính độ cong tại điểm $M(3,-1,1)$ của đường cong cho bởi $x=1+2\cos t$, $y=-1+2\sin t$, $z=2\sin t+2\cos t-1$.
- (GK20192) Tính độ cong của đường $y=e^{2x}$ tại điểm $A(0;1)$.
- (GK20182) Tính độ cong của đường $x=t^2$, $y=t\ln t$, $t>0$, tại điểm ứng với $t=e$.

1.1.3. Hình bao của một họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho họ đường cong $\mathcal{L}$ phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Đường E được gọi là hình bao của họ đường cong $\mathcal{L}$ nếu

- mỗi đường cong trong họ $\mathcal{L}$ đều tiếp xúc với đường E và
- với mỗi điểm thuộc E đều tồn tại một đường cong của họ $\mathcal{L}$ tiếp xúc với E tại điểm đó.

Ví dụ

Xét họ đường tròn $\mathcal{C}$ với tham số c: $(x-c)^2 + y^2 = R^2$. Hình bao của họ đường tròn này là hai đường thẳng $y = \pm R$.

Quy tắc tìm hình bao

Định lý

Cho họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc một tham số c. Nếu các đường của họ này không có điểm kỳ dị thì hình bao của họ được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0. \end{cases}$

Chú ý: Nếu họ đường cong đã cho có điểm kỳ dị thì tập nghiệm của hệ phương trình trên, ngoài chứa hình bao E, thì có thể chứa những điểm kỳ dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Ý tưởng chứng minh:

- Với mỗi c, gọi L_c là đường cong cho bởi $F(x, y, c) = 0$. Giả sử L_c tiếp xúc với E tại $M_c(x(c), y(c))$.
- Vì M_c thuộc L nên $F(x(c), y(c), c) = 0$.
- Lấy đạo hàm hai vế theo c:

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) + F'_c(x(c), y(c), c) = 0.$$

- Phương trình tiếp tuyến của E tại M_c là

$$\frac{x - x(c)}{x'(c)} = \frac{y - y(c)}{y'(c)}.$$

- Phương trình tiếp tuyến của L_c tại M_c là

$$F'_x(x(c), y(c), c)(x - x(c)) + F'_y(x(c), y(c), c)(y - y(c)) = 0.$$

- Hai tiếp tuyến này trùng nhau, nên

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) = 0.$$

- Vậy $F'_c(x(c), y(c), c) = 0$.

Ví dụ (GK20201)

Tìm hình bao của họ đường (Γ_c): $2x\cos c + y\sin c = 1$.

Giải:

- $2x\cos c + y\sin c = 1 \Leftrightarrow F(x,y,c) := 2x\cos c + y\sin c - 1 = 0$.
- $F'_x = 2\cos c$, $F'_y = \sin c$. Hệ $F'_x = F'_y = 0$ vô nghiệm. Họ (Γ_c) không có điểm kỳ dị.
- $$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cos c + y\sin c = 1 \\ -2x\sin c + y\cos c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos c \\ y = \sin c \end{cases}$$

  Hình bao của họ là đường elip (ellipse) $4x^2 + y^2 = 1$.

Một số bài tập

- (GK20213) Tìm hình bao của họ đường cong $\dfrac{x}{c^4} + \dfrac{y}{(1-c)^4} = 1$, với c là tham số.
- (GK20212) Tìm hình bao của họ đường cong $y = 2cx^2 + c^2 + 1$, với $c \leq 0$ là tham số.
- (GK20192) Tìm hình bao của họ đường cong $x^2 + y^2 - 4yc + 2c^2 = 0$, c tham số, $c \neq 0$.
- (GK20192) Tìm hình bao của họ đường cong $y = 4cx^3 + c^4$, c là tham số.
- (GK20182) Tìm hình bao của họ đường cong $(x+c)^2 + (y-c)^2 = 2$.
- (GK20181) Tìm hình bao của họ đường cong $x = 2cy^2 + 3c^2$.

1.2.1. Hàm vectơ

Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $\vec{r}\colon I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t)$, được gọi là hàm vectơ của biến t xác định trên I.
- Ta xét $n = 3$ và viết $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Quỹ tích $M(x(t), y(t), z(t))$ khi t biến thiên trong I được gọi là tốc đồ của hàm véctơ r. Ta cũng nói rằng đường L có các phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.
- Giới hạn: Ta nói hàm vectơ $\vec{r}(t)$ có giới hạn là $\vec{a}$ khi t dần tới t_0 nếu $\lim\limits_{t \to t_0} ||\vec{r}(t) - \vec{a}|| = 0$, ký hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.
- Liên tục: Hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$. (Tương đương với tính liên tục của các hàm thành phần $x(t), y(t), z(t)$ tại t_0.)

Hàm vectơ: Đạo hàm

- Giới hạn (nếu có)
$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$$
được gọi là đạo hàm của $\vec{r}(t)$ tại t_0, ký hiệu $\vec{r}'(t_0)$ hay $\dfrac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$.
- Khi $\vec{r}(t)$ có đạo hàm tại t_0, ta cũng nói hàm $\vec{r}(t)$ khả vi tại t_0.
- Nhận xét rằng nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\vec{r}(t)$ cũng khả vi tại t_0 và $\vec{r}'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$.

1.2.2. Đường: Tiếp tuyến của đường cong tại một điểm

- Cho L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Hàm vectơ tương ứng là $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Cho $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$ là một điểm chính quy, tức là các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.
- Khi đó $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ là một vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của L tại M. (Gọi tắt là vectơ tiếp tuyến.)
- Phương trình tiếp tuyến của L tại M là

$$\boxed{\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.}$$

Đường: Pháp diện của đường cong tại một điểm

- Cho L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Hàm vectơ tương ứng là $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Cho $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$ là một điểm chính quy.
- Mặt phẳng đi qua M vuông góc với tiếp tuyến của L tại M được gọi là *pháp diện* của đường cong L tại M.
- Như vậy mặt phẳng pháp diện của L tại M gồm các điểm P sao cho $\overrightarrow{MP}$ vuông góc với vectơ $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Do vậy phương trình của mặt phẳng pháp diện của đường L tại M là

$$\boxed{x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.}$$

Đường: Độ cong

Tương tự như trong mặt phẳng, ta có thể định nghĩa được độ cong trong không gian (ba chiều). Cho đường cong L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ và $M(x(t), y(t), z(t))$ thuộc L. Khi đó độ cong của L tại M được tính theo công thức

$$\boxed{C(M) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

Chú ý: Nếu $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ thì $C(M) = \dfrac{||\vec{r}' \wedge \vec{r}''||}{||\vec{r}'||^3}$.

Ví dụ (CK20182)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = t\cos 2t$, $y = t\sin 2t$, $z = 3t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$.

Giải:

- Ứng với $t = \pi/2$, điểm $M(-\pi/2, 0, 3\pi/2)$.
- $x' = \cos 2t - 2t\sin 2t$, $y' = \sin 2t + 2t\cos 2t$, $z' = 3$.
- Với $t = \pi/2$: $x' = -1$, $y' = -\pi$, $z' = 3$.
- Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x + \pi/2}{-1} = \frac{y}{-\pi} = \frac{z - 3\pi/2}{3}.$$

- Phương trình pháp diện:

$$(-1)(x + \pi/2) - \pi y + 3(z - 3\pi/2) = 0 \text{ hay } -x - \pi y + 3z - 5\pi = 0.$$

1.2.3. Mặt: Tiếp diện và pháp tuyến

- Cho mặt S và $M \in S$. Đường thẳng MT được gọi là tiếp tuyến của S tại M nếu nó là tiếp tuyến tại M của một đường cong nào đó nằm trên S.
- Cho mặt S có phương trình $f(x, y, z) = 0$. Điểm $M \in S$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm riêng $f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)$ không đồng thời bằng 0.

Định lý

Các đường tiếp tuyến của S tại điểm chính quy M đều nằm trong một mặt phẳng.

- Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của S tại điểm M chính quy được gọi là *tiếp diện* của S tại M.
- Đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng tiếp diện được gọi là *pháp tuyến* của mặt S tại M.

Công thức

Cho mặt S có phương trình $f(x, y, z) = 0$ và $M(x_0, y_0, z_0) \in S$ chính quy.

- Phương trình của mặt tiếp diện của S tại M là

$$\boxed{f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) + f'_z(M)(z - z_0) = 0.}$$

- Phương trình của đường pháp tuyến của S tại M là

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}.}$$

Ví dụ (GK20201)

Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $z = \ln(2x + y)$ tại điểm $M(-1, 3, 0)$.

Giải:

- Đặt $F(x, y, z) = \ln(2x + y) - z$.
- $F'_x = 2/(2x + y)$, $F'_y = 1/(2x + y)$, $F'_z = -1$.
- Tại $M(-1, 3, 0)$: $F'_x(M) = 2$, $F'_y(M) = 1$, $F'_z(M) = -1$.
- Phương trình tiếp diện:

$$2(x + 1) + (y - 3) - z = 0 \text{ hay } 2x + y - z - 1 = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Một số bài tập

- (GK20213) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $M(1, 1, 3)$.
- (GK20212) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\arctan(x + y^2) + z = 0$ tại điểm $M(-1, 1, 0)$.
- (CK20193) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 - 2y^3 + 3z^2 = 11$ tại $A(1; 1; 2)$.
- (GK20192) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến đường cong $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, tại điểm ứng với $t = \pi/2$.
- (GK20182) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = e^{2t}$ tại điểm $M(0; 1; 1)$.
- (GK20182) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + y^2 - e^z - 2xyz = 0$ tại $M(1; 0; 0)$.
- (CK20182) Viết phương trình tiếp diện của mặt $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$, biết nó song song với mặt phẳng $x - 3y + z = 0$.
- (GK20172) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\ln(2x + y^2) + 3z^3 = 3$ tại $M(0; -1; 1)$.
- (CK20171) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $z = \ln(4 - x^2 - 2y^2)$ tại $A(-1; 1; 0)$.

Đường cong cho dưới dạng giao hai mặt cong

- (CK20181) Tìm vectơ tiếp tuyến tại $M(1; -1; 1)$ của đường

$$\begin{cases} x + y + 2z - 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

- (CK20142) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm $A(1; -2; 5)$ của đường cong xác định bởi $z = x^2 + y^2$, $z = 2x + 3$.