Lời giải đề thi cuối kì Giải tích 2 - Học kì: 20192 Đề 2

Câu 1:

Xét $f(x,y,z) = 4x^3 + 2y^2 - z^4 - 3$

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$ là phương trình mặt cong đã cho

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 \\ f'_y = 4y \\ f'_z = -4z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(A) = 12 \\ f'_y(A) = 8 \\ f'_z(A) = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow (12, 8, 4)$ là 1 vector pháp tuyến tại điểm A của mặt cong đã cho.

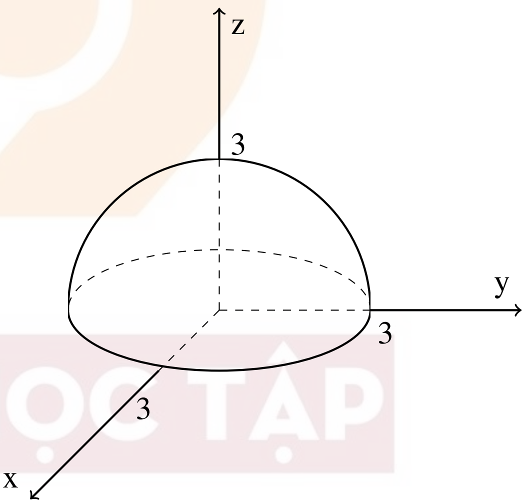
Phương trình pháp tuyến tại điểm A của mặt cong là:

$$\frac{x+1}{12} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-1}{-4}$$

Phương trình tiếp diện tại điểm A của mặt cong là:

$$12(x+1) + 8(y-2) - 4(z-1) = 0$$
$$\text{hay} \quad 3x + 2y - z = 0$$

Câu 2:



Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$

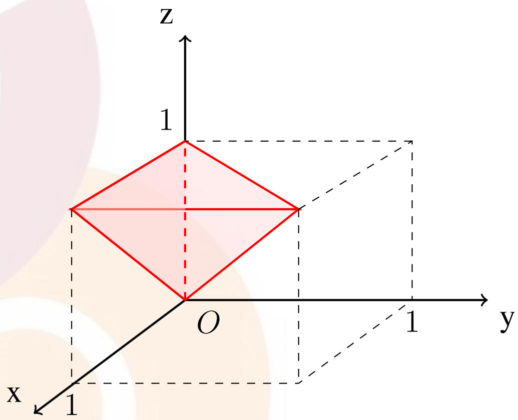
Ta có $V' \begin{cases} 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 < r \le 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{V'} r \cdot r^2 \cdot \sin\theta dr d\phi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi \cdot \int_0^3 r^3 dr$$
$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$$

Câu 3:

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}} \quad \text{trong đó } V \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le x \le z \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}} dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}}.xdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}} d(x^2+4z+4) \\ &= \int_0^1 z+2-2\sqrt{z+1}dz \\ &= \left(\frac{z^2}{2}+2z-\frac{4}{3}.(z+1)\sqrt{z+1}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{23}{6}-\frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



Miền V là phần màu đỏ trong hình vẽ

Câu 4:

Ta có $V : 2 \le z \le \sqrt{8-4x^2-y^2}$.

$\Rightarrow$ thể tích của miền giới hạn trên là:

$$V = \iint\limits_D (\sqrt{8-4x^2-y^2}-2)dxdy$$

Trong đó D là miền :$\sqrt{8-4x^2-y^2} \ge 2 \quad \Rightarrow D : 4x^2+y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow |J| = 2r \quad$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$
$$= 2\pi \int_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$

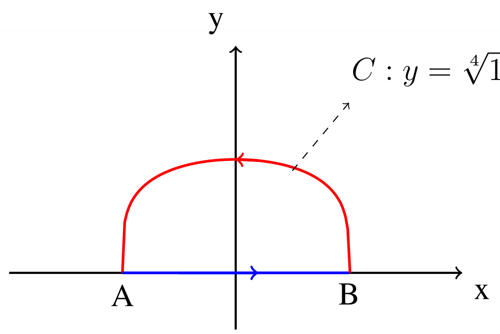
$$= 2\pi(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}) \quad = \quad \frac{16\pi\sqrt{2}-20\pi}{3}$$

Câu 5:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5} dx \qquad \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = e^t dt$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}} \cdot e^t}{e^5} dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-4t} dt \quad \text{Đặt } a = 4t \Rightarrow dt = \frac{da}{4}$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \left[(\frac{a}{4})^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-a} \right] \frac{da}{4}$$
$$= \frac{1}{32}\Gamma(\frac{5}{2}) \quad = \quad \frac{1}{32}\Gamma(\frac{2\cdot 2+1}{2})$$
$$= \frac{1}{32}\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{3}{128}\sqrt{\pi}$$

Câu 6:
$I = \int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx + (x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$

Bổ sung thêm đoạn thẳng BA, hướng từ B tới A ta có: $C \cup BA$ là đường cong kín, hướng âm:



$$\Rightarrow I = \int\limits_{C} (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{C \cup BA} (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy - \int\limits_{BA} (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy = I_1 - I_2$$

Áp dụng định lí Green cho I_1, ta có:

$$I_1 = -\iint\limits_{D} (4x^3 - 2y)dxdy \quad (\text{vì } C \cup BA \text{ là đường cong kín , hướng âm})$$

Trong đó $D \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt[4]{1 - x^2} \end{cases}$

Mà D là miền đối xứng qua trục Oy và $4x^3$ là hàm lẻ theo x

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_{D} 2y\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 2y\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{\pi}{2}$$

Ta có: $BA \begin{cases} y = 0 \to dy = 0 \\ x : 1 \to -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int\limits_{BA} (e^{2x} + y^2)dx = \int\limits_{1}^{-1} (e^{2x} + 0^2)dx = -\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2} = \frac{\pi + e^2 - e^{-2}}{2}$$

Câu 7:

$$I = \iint\limits_{S} dS$$

Trong đó S là phần mặt $z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)$ với $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3$

Có $\begin{cases} z'_x = x^{\frac{1}{2}} \\ z'_y = y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{x + y + 1} \Rightarrow I = \iint\limits_{D} \sqrt{x + y + 1}dxdy$

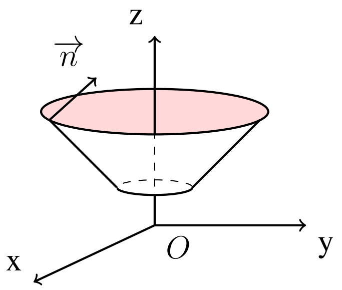
Với D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy với $D : \begin{cases} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{0}^{3}\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x + y + 1}dxdy = \int\limits_{0}^{3} \left[\frac{2}{3}(y + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(y + 1)^{\frac{3}{2}}\right] dy = \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{124}{15}$$

Vậy $I = \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{124}{15}$

Câu 8:

$I = \iint\limits_S x^2 z dxdy$



Với S: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và $1 \leq x \leq 3$, ta thấy vectơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n}$ tạo với tia $\overrightarrow{Oz}$ một góc nhọn. $\Rightarrow I = \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

Với miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy với $D: 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ miền D trở thành: $\begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int\limits_1^3 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \dfrac{242\pi}{5}$

Vậy $I = \dfrac{242\pi}{5}$

Câu 9:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= (2ye^{2x}+3)\overrightarrow{i} + (e^y z^2 + e^{2x} - 2yz^3)\overrightarrow{j} + (2ze^y - 3y^2z^2)\overrightarrow{k} \\
&= \langle P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\rangle \\
\text{rot}\overrightarrow{F} &= \langle R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\rangle \\
&= (2ze^y - 6yz^2 - 2ze^y + 6yz^2)\overrightarrow{i} + (0-0)\overrightarrow{j} + (2e^{2x} - 2e^{2x})\overrightarrow{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy trường vectơ $\overrightarrow{F}$ là trường thế.

Ta tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$, chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0;0;0)$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int\limits_0^x P(x,0,0)dx + \int\limits_0^y Q(x,y,0)dy + \int\limits_0^z R(x,y,z)dz + C \\
&= 3x + ye^{2x} + z^2e^y - y^2z^3 + C
\end{aligned}$$

Câu 10:

$I = \iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{u}{\sqrt{2}} + \dfrac{v}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{u}{\sqrt{2}} - \dfrac{v}{\sqrt{2}} \end{cases}$, $|J| = 1 \implies$ Miền D trở thành miền D': $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{3v^2}{2} \leqslant 1$

Khi đó:

$$I = \iint\limits_{D'} \left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 + uv\right) dudv$$

Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot r \cdot \cos\theta \\ v = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot r \cdot \sin\theta \end{cases}$ $, |J| = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot r$

Miền D' trở thành miền D'': $\{0 \leqslant r \leqslant 1; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$
Khi đó:

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2} \cdot 2r^2cos^2\theta + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}r^2sin^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}r^2 \sin\theta\cos\theta\right) \frac{2}{\sqrt{3}}r\, dr d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(1 + 2cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right) r^3 dr d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1 r^3 dr \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \left(\theta + \theta + \frac{sin2\theta}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{cos\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4\pi$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$