BÁCH KHOA ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

BỘ TÀI LIỆU ÔN TẬP TRẮC NGHIỆM

GIẢI TÍCH II

Biên soạn bởi: Team GT2 – BKĐCMP

Hà Nội, tháng 9 năm 2021

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay, với hình thức thi đổi mới từ thi tự luận sang thi trắc nghiệm, chinh vì vậy nhiều bạn sinh viên sẽ gặp khó khăn trong việc ôn tập. Trong tinh hình đó, nhôm "BK – Đại cương môn phai" đã biên soạn "BỘ TÀI LIỆU ÔN TẬP TRẮC NGHIỆM MÔN GIẢI TÍCH II" để giúp các bạn thuận tiện hơn trong việc ôn tập.

Nhóm tác giả: Team Giải Tích II BK- Đại cương môn phái

(Đỗ Tuấn Cường, Đinh Tiến Long, Phạm Thanh Tùng, Trần Trung Dũng, Đỗ Ngọc Hiếu, Nguyễn Thu Hiền, Nguyễn Minh Hiếu)

Chịu trách nhiệm nội dung: Phạm Thanh Tùng

Do quá trình soạn bộ tài liệu gấp rút cùng với những hạn chế nhất định về kiến thức, dù đã cố gắng hết sức nhưng chắc chắn không thể tránh khỏi những sai sót về tính toán, lỗi đánh máy, mọi ý kiến góp ý của bạn đọc xin gửi qua đường link fb "fb.com/tungg810" hoặc email tungcrossroad@gmail.com.

Tài liệu chỉ mang tính chất tham khảo, không có tác dụng thay thế các giáo trình, sách giáo khoa chính thống. Xin chân thành cảm ơn!

I. Bài tập trắc nghiệm Tích phân Euler

Câu 1: Kết quả của tích phân $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$ là:

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$ **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$ **D.** $\frac{\pi}{6}$

Câu 2: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$ là:

A. $\frac{7\pi}{512}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{512}$ **C.** $\frac{\pi}{512}$ **D.** $\frac{3\pi}{512}$

Câu 3: Biết $\int_0^{+\infty} x^6 3^{-x^4} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{b(\ln 3)^{7/2}}$, chọn khẳng định đúng:

A. $a - b = -1$ **B.** $a + b = 10$ **C.** $a > b$ **D.** $a.b < 100$

Câu 4: Biểu diễn tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^4} dx$ theo hàm Gamma:

A. $\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{6.\Gamma(4)}$ **C.** $\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{4.\Gamma(4)}$

B. $\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4.\Gamma(4)}$ **D.** $\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{4.\Gamma(4)}$

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[30]{1-x^{30}}} dx$

A. $\frac{\pi}{30\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)}$ **B.** $\frac{\pi}{30\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}$ **C.** $\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}$ **D.** $\frac{\pi}{50\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}$

Câu 6: Tính tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)^2}dx$

A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **B.** $\frac{4\sqrt{2}\pi}{27}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{27}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$

Câu 7: Tính tích phân $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{10} dx$

A. $11!$ **B.** $10!$ **C.** $12!$ **D.** $9!$

Câu 8: Tính tích phân $\int_0^1 x^5(\ln x)^{10}dx$

A. $\frac{10!}{5^{11}}$ **B.** $\frac{10!}{6^{11}}$ **C.** $\frac{11!}{5^{11}}$ **D.** $\frac{11!}{6^{11}}$

Câu 9: Biểu diễn tích phân $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\sqrt[3]{1-e^{3x}}dx$ theo hàm Gamma:

A. $\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{2.\Gamma(2)}$ **C.** $\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{9.\Gamma(2)}$

B. $\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3.\Gamma(2)}$ **D.** $\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{3.\Gamma(2)}$

Câu 10: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x\cos^5 x}dx$

A. $\frac{5\pi}{128\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{3\pi}{256\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{\pi}{256\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{7\pi}{256\sqrt{2}}$

II. Bài tập trắc nghiệm Tích phân đường

1. Tích phân đường loại I:

Câu 11: Tính tích phân $\int_L (x+y)ds$ với L là đoạn thẳng nối điểm $O(0;0)$ và $A(4;3)$

A. $\dfrac{35}{2}$ **B.** $\dfrac{35}{4}$ **C.** $\dfrac{35}{3}$ **D.** $\dfrac{35}{6}$

Câu 12: Tính $\int_L (x+y)ds$ với L là nửa đường tròn $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

A. $4+8\pi$ **B.** $8+4\pi$ **C.** 4π **D.** $2+4\pi$

Câu 13: Tìm m để $\int_C (mx-y)ds = -18$ với $C: y = \sqrt{9-x^2}$

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Câu 14: Với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, tính $\int_C (x-y)ds$

A. π **B.** 2π **C.** 3π **D.** 6π

Câu 15: Tính $\int_C (x+y)ds$ với cung $C: r^2 = \cos 2\varphi$, $\dfrac{-\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\sqrt{10}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 16: Với C là đường cong $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối $A(1,0)$ và $B(0,1)$, tính $\int_C (y^2+1)ds$

A. $\dfrac{15}{8}$ **B.** $\dfrac{15}{9}$ **C.** $\dfrac{15}{7}$ **D.** $\dfrac{15}{4}$

Câu 17: Tính $\int_C yds$ với C là đường $x = y^2$ đi từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$

A. $\dfrac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$ **B.** $\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$ **C.** $\dfrac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$ **D.** $\dfrac{1}{2}(5\sqrt{5}-1)$

Câu 18: Tính $\int_L xyds$ với L là chu tuyến của hình chữ nhật $ABCD$ với $A(0,0); B(4,0)$, $C(4,2), D(0,2)$

A. 20 **B.** 25 **C.** 24 **D.** 18

Câu 19: Tính $\oint_C xyds$ với C là biên của miền $|x| + |y| \leq 1$

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 20: Tính $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}ds$ với $L: x^2 + y^2 = 2x$

A. 8 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 10

2. Tích phân đường loại II:

Câu 21: Tính $\int_{AB} (x-3y)dx + 2ydy$ với $\widehat{AB}$ là cung $y = 1 - x^2, A(1,0), B(-1,0)$

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 22: Tính $\int_{ABC} 5y^4dx - 4x^3dy$ với ABC là đường gấp khúc đi qua các điểm $A(0,1); B(1,0); C(0,-1)$

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 23: Tìm m để $\int_C (x + xy)dx + m.x^2dy = \frac{-10}{3}$ với C là cung bé trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ đi từ $A(-2,0)$ đến $B(0,2)$

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 24: Tính $\oint_L (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (-xy + e^{-y} - x + \sin y)dy$ với L là đường $x^2 + y^2 = 2x$ theo chiều dương.

A. -3π **B.** 3π **C.** -2π **D.** 4π

Câu 25: Tính $\oint\limits_{L} 2xdx - \left[x^2 + 2y + e^{y^2+1} + \sin(y^2) \right] dy$ với L là chu tuyến của tam giác ABC có $A(-1,0), B(0,2), C(2,0)$ chiều cùng chiều kim đồng hồ.

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 26: Tính $\int\limits_{AB} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy$ với $\overset{\frown}{AB}$ là cung $y = \sqrt{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

A. $\dfrac{e^2 - 1}{2e}$ **B.** $\dfrac{e^2 - 1}{e}$ **C.** $\dfrac{e^2 - 2}{2e}$ **D.** $\dfrac{e^2}{3}$

Câu 27: Tính $\int\limits_{C} (2e^x + y^2)dx + (x^4 + e^y)dy$ với $C: y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ đi từ $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

A. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{e} + 2e$ **B.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{e} - e$ **C.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{e}$ **D.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{e} + 3e$

Câu 28: Tính tích phân $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3 \right) dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

A. 61 **B.** 62 **C.** 63 **D.** 64

Câu 29: Tìm m để tích phân $\int\limits_{L} e^{x^2+y} \left[2xy^2dx + (y^2 + m.y)dy \right] = e$ với L là đường $x = 1 - y^2$ đi từ $A(1,0)$ đến $B(0,1)$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 30: Tính tích phân $\int\limits_{L} \dfrac{-y + 2xy - x^2 + 1}{(y - x^2 - 1)^2} dx + \dfrac{x - x^2 - 1}{(y - x^2 - 1)^2} dy$ với $L: y = 2x + 2$ đi từ $A(0,2)$ đến $B(2,6)$

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 31: Tìm a, b để tích phân $\int\limits_{L} e^x \left[\left(2x + ay^2 + 1 \right) dx + \left(bx + 2y \right) dy \right]$ không phụ thuộc vào đường đi

A. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Câu 32: Tìm hằng số a, b để biểu thức $[y^2 + axy + y\sin(xy)]dx + [x^2 + bxy + x\sin(xy)]dy$ là vi phần toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó

A. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Câu 33: Tính $\int_L \frac{xe^{x^2+y^2}dx + ye^{x^2+y^2}dy}{(x-1)^2 + y^2}$ với $L: y = \sqrt{2x - x^2}$ đi từ $O(0,0)$ đến $A(2,0)$

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 34: Cho tích phân $I = \oint_C \frac{(2x-5y)dx + (5x+2y)dy}{x^2 + y^2}$ với C là biên của hình phẳng $D: x^2 + y^2 \le 9$, theo chiều dương, bạn A lập luận "Ta đặt $P = \frac{2x-5y}{x^2+y^2}$ và $Q = \frac{5x+2y}{x^2+y^2}$, $Q'_x - P'_y = 0$, C là đường cong kín, chiều dương, giới hạn miền D nên $I = 0$". Hỏi bạn A làm vậy có đúng không? Nếu sai, thì sửa lại đáp án chính xác

A. Đúng **B.** Sai, $I = 10\pi$ **C.** Sai, $I = \pi$ **D.** Sai, $I = 5\pi$

Câu 35: Tìm m để tích phân $\int_{AB} (x - 3y)dx + 2ydy = 4$ với $AB: y = m - x^2$ và hai điểm $A(1,0), B(-1,0)$

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -2

Câu 36: Tính $\int_C ydx + zdy + xdz$ với $C: x = \cos t, y = \sin t, z = 2t, 0 \le t \le 2\pi$ theo chiều tăng của t

A. 2π **B.** π **C.** $-\pi$ **D.** 3π

Câu 37: Tính tích phân $\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$

A. $4e^5 + 6e^6 - e^2 - 3e^3$ **B.** $4e^4 + 6e^6 - e^2 - 3e^3$

C. $4e^4 + 6e^6 - 2e^2 - 3e^3$

D. $4e^5 + 6e^6 - 2e^2 - 3e^3$

Câu 38: Tìm hàm thế vị của biểu thức $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

A. $\frac{1}{5}x^2 + 2x^2y^3 - y^5$

C. $\frac{2}{5}x^2 + x^2y^3 - y^5$

B. $\frac{2}{5}x^2 + 2x^2y^3 - y^5$

D. $\frac{1}{5}x^2 + x^2y^3 - y^5$

Câu 39: Tính $\int_L (2xy - 5)dx + (2x + 3y)dy$ với L là biên của miền D xác định bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 1$, chiều dương

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 40: Tính $\int_C \left(3x^2y^2 + \frac{2}{4x^2+1}\right)dx + \left(3x^3y + \frac{2}{y^3+4}\right)dy$ với C là đường cong $y = \sqrt{1 - x^4}$ đi từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$.

A. $\frac{4}{7} - \arctan 2$

C. $\frac{4}{7} - 3\arctan 2$

B. $\frac{4}{7} - 2\arctan 2$

D. $\frac{4}{7} + 2\arctan 2$

3. Ứng dụng của tích phân đường

Câu 41: Tính diện tích của miền D giới hạn bởi L: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ với trục Ox biết rằng t đi từ 2π dến 0

A. 13π (đvdt) **B.** 12π (đvdt) **C.** 11π (đvdt) **D.** 10π (đvdt)

Câu 42: Tính công của lực $\vec{F} = (x + 2y)\vec{\imath} + (3x + 4y)\vec{\jmath}$ làm dịch chuyển một chất điểm từ $A(1,3)$ đến $B(2,4)$ dọc theo đoạn thẳng AB. (đvc: đơn vị công)

A. 21 (đvc) **B.** 21,5 (đvc) **C.** 26 (đvc) **D.** 27 (đvc)

Câu 43: Tính khối lượng của đường cong vật chất L có phương trình $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \le t \le \pi/2 \end{cases}$ biết hàm mật độ là $p(x, y) = y$

A. 1 (đvkl) **B.** 2 (đvkl) **C.** 3 (đvkl) **D.** 5 (đvkl)

Câu 44: Tính công làm dịch chuyển một chất điểm từ $\mathrm{A}(0,1)$ đến $\mathrm{B}(1,0)$ của lực $\vec{F} = [8x^3 - 2y\ln(1 + x^2y^2)]\vec{i} + [5y^4 - 2x\ln(1 + x^2y^2)]\vec{j}$

A. 1 (đvc) **B.** 2 (đvc) **C.** 5 (đvc) **D.** 4 (đvc)

Câu 45: Tính khối lượng của đường cong vật chất L có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ biết hàm mật độ là $p(x, y) = x^2$

A. 3π (đvkl) **B.** 4π (đvkl) **C.** 2π (đvkl) **D.** π (đvkl)

III. Bài tập trắc nghiệm Tích phân mặt

1. Tích phân mặt loại I:

Câu 46: Tính $\iint_S xydS$ với S là mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \le 1, x \ge 0$

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 47: Tính $\iint_S x^2 dS$ với S là biên của miền giới hạn bởi mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1$

A. $\frac{\pi(2+\sqrt{2})}{4}$ **B.** $\frac{\pi(2+\sqrt{3})}{4}$ **C.** $\frac{\pi(1+\sqrt{2})}{4}$ **D.** $\frac{\pi(1+\sqrt{3})}{4}$

Câu 48: Tìm m để $\iint_S (x+y+mz)dS = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ với S là mặt $2x + 4y + 2z = 4$ và điều kiện $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

A. $m = 0$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 2$

Câu 49: Tính $\iint_S xyzdS$ với S là mặt $x - 2y + 3z - 4 = 0$ giới hạn trong mặt trụ có phương trình $2x^2 + 3y^2 = 6$

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 50: Biết $\iint_S xdS = \left(\frac{a\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{b}\right)\pi$ biết S là phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \le 1$. Kết luận nào sau đây là chính xác?

A. $a + b < 70$ **B.** $a - b > 0$ **C.** $a.b < 70$ **D.** $a/b > 1$

Câu 51: Tính $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$ với S là phần mặt $2z = x^2 + y^2, 0 \le x, y \le 1$. Chọn đáp án gần với kết quả của tích phân nhất.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Câu 52: Biết $\iint_S dS = \frac{4}{15}(33 - a\sqrt{3} - b\sqrt{2})$ với S là mặt $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ với điều kiện $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$. Tìm khẳng định đúng?

A. $a < b$ **B.** $a + b = 10$ **C.** $a - b = 5$ **D.** $a.b = 10$

Câu 53: Tính $\iint_S zy^2 dS$ với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt $z = 1$ và $z = 2$

A. $\frac{31\sqrt{2}\pi}{3}$ **B.** $\frac{31\sqrt{2}\pi}{10}$ **C.** $\frac{31\sqrt{2}\pi}{4}$ **D.** $\frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$

Câu 54: Tính $\iint_S yx^2 dS$ với S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2 + z^2}, 1 \leq y \leq 2$

A. $\frac{32\sqrt{2}\pi}{5}$ **B.** $\frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$ **C.** $\frac{33\sqrt{2}\pi}{5}$ **D.** $\frac{34\sqrt{2}\pi}{5}$

Câu 55: Tính $\iint_S xdS$ với S là mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ nằm giữa hai mặt $z = 0$ và $z = 6$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

2. Tích phân mặt loại II:

Câu 56: Tính $\iint_S (1 - x - z)dzdx$ với S là mặt trên của mặt $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 57: Tính $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$ với S là mặt nửa cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ phía trên Oxy, mặt S hướng lên trên.

A. π **B.** $-\pi$ **C.** 2π **D.** 3π

Câu 58: Cho $I = \iint_S ydzdx + z^2dxdy$, S là phía ngoài mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Chọn đáp án gần nhất với kết quả của I

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 59: Tính $I = \iint_S xdzdx + z^2dxdy$ với S là phía ngoài mặt $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $0 \leq z \leq 2, y \geq 0$

A. $\frac{-4\pi}{5}$ **B.** $\frac{-7\pi}{3}$ **C.** $\frac{-5\pi}{3}$ **D.** $\frac{-4\pi}{3}$

Câu 60: Tính $\iint_S xz^2dydz+4yx^2dzdx+9zy^2dxdy$ với mặt $S: 4x^2+9y^2+z^2=1$, hướng ra ngoài.

A. $\frac{4\pi}{15}$ **B.** $\frac{2\pi}{15}$ **C.** $\frac{2\pi}{13}$ **D.** $\frac{2\pi}{19}$

Câu 61: Biết $I=\iint_S 2xydydz+(x+y^2)dzdx+(4x+y^2)dxdy=\frac{a}{b}$ với mặt S là biên của miền $V: x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ hướng ra ngoài. Tìm khẳng định đúng

A. $a-b=7$ **B.** $a.b=7$ **C.** $a+b=7$ **D.** $a/b=7$

Câu 62: Tính $I=\iint_S (xy^2+2z^3)dydz+(z^3+2y)dzdx+x^2zdxdy$ với S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$ hướng ra ngoài mặt cầu.

A. $\frac{8\pi}{5}$ **B.** $\frac{8\pi}{3}$ **C.** $\frac{6\pi}{7}$ **D.** $\frac{8\pi}{7}$

Câu 63: Tính $I=\iint_S (x^3+2yz)dydz+(3x^2y+y)dzdx+(6y^2z+xy)dxdy$ với S là mặt $z=x^2+y^2$ với $z\le 1$, hướng xuống dưới.

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 8

Câu 64: Tính $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-xdydz-ydzdx+dxdy)$ với S là mặt $2z=x^2+y^2$, $z\le 2$ theo chiều âm của trục Ox

A. $\frac{(2+10\sqrt{5})\pi}{3}$ **C.** $\frac{(-2+10\sqrt{5})\pi}{3}$

B. $\frac{(2+\sqrt{5})\pi}{3}$ **D.** $\frac{(-2+\sqrt{5})\pi}{3}$

Câu 65: Biết $\iint\limits_S xdydz + zdxdy = \frac{a}{b}\pi$ với S là phần trên của mặt nón có phương trình $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $-1 \le z \le 0$ khi nhìn từ chiều dương trục Oz. Tính $2a + b$

A. 1 **B.** 9 **C.** 0 **D.** 5

Câu 66: Tính $\oint\limits_C x^2y^3dx + dy + zdz$ dọc theo đường tròn $C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ chiều dương giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{-\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{7}$ **D.** $\frac{-\pi}{8}$

Câu 67: Tính tích phân $I = \iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2xdydz - 2ydzdx + dxdy)$ với S là mặt có phương trình $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 4$ theo chiều $z \ge 0$

A. $\frac{(17\sqrt{17}-1)\pi}{7}$

C. $\frac{(17\sqrt{16}-1)\pi}{6}$

B. $\frac{(17\sqrt{17}-1)\pi}{6}$

D. $\frac{(17\sqrt{17}+1)\pi}{6}$

Câu 68: Tính tích phân $I = \iint\limits_S (6z^3 - 9y)dydz + (3x - 2z^3)dzdx + (3y - 3x)dxdy$ với S là mặt $x^2 + 3y^2 + z^4 = 1, z \ge 0$, hướng lên trên.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 69: Tính $\iint\limits_S (2x + xy)dydz + (y + 2xz)dzdx + (1 + 6z + z^2)dxdy$ với S là mặt nằm trong của nửa cầu $z = -\sqrt{16 - (x^2 + y^2 + z^2)}$

A. $\left(80 - 190\sqrt{2}\right)\pi$

C. $\left(80 - 193\sqrt{2}\right)\pi$

B. $\left(80 - 192\sqrt{2}\right)\pi$

D. $\left(80 - 194\sqrt{2}\right)\pi$

Câu 70: Tính $\iint\limits_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$ biết S là mặt ngoài của tứ diện $OABC$ với $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$

A. $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{10}$

Câu 71: Biết $\iint\limits_S 2x^2 dydz + y^2 dzdx - z^2 dxdy = a\pi + b$, S là mặt ngoài của miền giới hạn bởi $y = 0, y = \sqrt{1 - z^2}, x = 0, x = 2$ chọn khẳng định đúng

A. $a + 3b = 12$ **C.** $-a + 3b = 0$

B. $3a + 6b = 16$ **D.** $a + b = 4$

Câu 72: Biết $I = \iint\limits_S (x+z)dydz + (y+x)dzdx + (z+y)dxdy = \frac{a}{b}\pi$ với S là mặt trong của parabol $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt $x + z = 2$. Tính $a - b$

A. 50 **B.** 49 **C.** 52 **D.** 47

3. Ứng dụng của tích phân mặt:

Câu 73: Tính diện tích mặt S: $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$

A. $\sqrt{7}\pi$ (đvdt) **B.** $\sqrt{3}\pi$ (đvdt) **C.** $\sqrt{2}\pi$ (đvdt) **D.** $\sqrt{5}\pi$ (đvdt)

Câu 74: Tính diện tích mặt cong S với S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ với điều kiện $1 \leq y \leq 2, z \geq 0$

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ (đvdt) **B.** $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ (đvdt) **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ (đvdt) **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ (đvdt)

Câu 75: Tính diện tích mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt Oxy là $\frac{(a\sqrt{17} - 1)\pi}{b}$, tính $a + b$

A. 20 **B.** 23 **C.** 19 **D.** 15

Câu 76: Tính diện tích phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$

A. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{6}(3\sqrt{6} - 1)$ **D.** $\frac{\pi}{6}(\sqrt{6} - 1)$

Câu 77: Tính diện tích mặt S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$

A. $9\pi\sqrt{2}$ **B.** $8\pi\sqrt{5}$ **C.** $9\pi\sqrt{8}$ **D.** $7\pi\sqrt{3}$

IV.Bài tập trắc nghiệm Lý thuyết trường

1. Trường vô hướng:

Câu 78: Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l} = (1,2,-2)$ của $u = e^x(y^2 + z) - 2xyz^3$ tại $A(0,1,2)$

A. $\frac{-11}{4}$ **B.** $\frac{-11}{3}$ **C.** $\frac{-15}{4}$ **D.** $\frac{-15}{2}$

Câu 79: Cho $u(x,y,z) = x^3 + 3yx^2 + 2yz^2$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(A)$ với $\vec{n}$ là vecto pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3, z \le 0$ tại điểm $A(1,1,-1)$

A. $-6\sqrt{3}$ **B.** $-6\sqrt{2}$ **C.** $-2\sqrt{3}$ **D.** $-2\sqrt{6}$

Câu 80: Biết nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trong không gian được cho bởi hàm

$$T(x,y,z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

ở đó T có đơn vị là ℃ và x, y, z là mét. Theo hướng nào thì nhiệt độ tăng nhanh nhất tại điểm $A(1,1,-2)$

A. $\left(\frac{5}{8};\frac{5}{4};\frac{15}{4}\right)$ **C.** $\left(\frac{-5}{8};\frac{-5}{4};\frac{15}{4}\right)$

B. $\left(\frac{5}{8};\frac{15}{4};\frac{15}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{8};\frac{-5}{4};\frac{15}{4}\right)$

Câu 81: Tính góc giữa hai vecto $\overrightarrow{grad} z$ (đơn vị: radian) của các trường vô hướng sau $z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$ (Chọn đáp án gần đúng nhất)

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 82: Cho $u(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + e^{y-z})$, $O(0,0,0), A(1,-2,2)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O)$ theo hướng $\overrightarrow{OA}$

A. $\frac{-2}{5}$ **B.** $\frac{-2}{3}$ **C.** $\frac{-1}{3}$ **D.** $\frac{-1}{5}$

Câu 83: Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm $u = x\sin z - y\cos z$ tại gốc tọa độ là lớn nhất

A. $\vec{l} = (0,1,0)$ **B.** $\vec{l} = (0,-1,0)$ **C.** $\vec{l} = (0,-2,0)$ **D.** $\vec{l} = (0,-3,0)$

Câu 84: Cho điểm $A(2,-1,0), B(1,1,3)$. Tính đạo hàm của hàm $u = x^3 + 3y^2 + e^z + xyz^2$ tại điểm A theo hướng $\overrightarrow{AB}$

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ **C.** $\dfrac{-3\sqrt{14}}{2}$ **D.** $\dfrac{-2\sqrt{14}}{3}$

Câu 85: Tính góc giữa $\overrightarrow{grad u}$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ tại điểm $A(1,2,2)$ và $B(-3,1,0)$

A. $\arccos\left(\dfrac{-8}{9}\right)$ **B.** $\arccos\left(\dfrac{-1}{9}\right)$ **C.** $\arccos\left(\dfrac{1}{9}\right)$ **D.** $\arccos\left(\dfrac{-7}{9}\right)$

2.Trường Vecto:

Câu 86: Cho $\vec{F} = x^2yz\vec{i} + 3xy^2z\vec{j} + mxyz^2\vec{k}$ với m là tham số thực. Tìm m để $\vec{F}$ là trường ống.

A. $m = 4$ **B.** $m = -4$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = -5$

Câu 87: Xác định những điểm không phải điểm xoáy trong trường vecto

$$\vec{F} = (z^2 + 2xy)\vec{i} + (3x^2 - 2yz)\vec{j} - z^2\vec{k}$$

A. (1,0,0) **B.** (0,0,1) **C.** (0,0,0) **D.** (0,1,0)

Câu 88: Biết $\vec{F} = e^{x^2+y^2+z^2}\left[(2x^2yz + yz)\vec{i} + (2y^2xz + xz)\vec{j} + (2z^2yx + xy)\vec{k}\right]$ là trường thế. Tìm hàm thế vị.

A. $u = e^{x^2+y^2+z^2}xyz + C$ **C.** $u = e^{x+y^2+z^2}xy + C$

B. $u = e^{x^2+y^2+z^2}xy + C$ **D.** $u = e^{y^2+z^2}xyz + C$

Câu 89: Biết $\vec{F} = (3x^2 - 3y^2z)\vec{i} + (\arctan z - 6xyz)\vec{j} + \left(\frac{y}{1+z^2} + 3xy^2\right)\vec{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị.

A. $u = x + y\arctan z + 3xy^2z + C$ **C.** $u = y\arctan z + 3xy^2z + C$

B. $u = 3x + y\arctan z + 3xy^2z + C$ **D.** $u = x^3 + y\arctan z + 3xy^2z + C$

Câu 90: Biết $\vec{F} = (3x^2 + yz)\vec{i} + (6y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy + e^z)\vec{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị

A. $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

C. $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xy + C$

B. $u = x^3 + 3y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

D. $u = x^3 + 2y^3 + \dfrac{z^3}{3} + e^{xz} + xyz + C$

Câu 91: Tính thông lượng của $\vec{F} = x\vec{i} + (y^3 + 2z)\vec{j} + (3x^2z - x)\vec{k}$ qua mặt cầu $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

A. $\dfrac{54\pi}{15}$ **B.** $\dfrac{57\pi}{15}$ **C.** $\dfrac{47\pi}{15}$ **D.** $\dfrac{44\pi}{15}$

Câu 92: Tính thông lượng của $\vec{F} = xy^2\vec{i} - ze^x\vec{j} + (x^2z + \sin y)\vec{k}$ qua S là mặt $z = x^2 + y^2, z \leq 4$, hướng ra ngoài. (Chọn kết quả gần đúng nhất)

A. -17 **B.** -15 **C.** -10 **D.** -14

Câu 93: Tính thông lượng của $\vec{F} = (x^2 - 2y + z)\vec{i} - (z^2 + 2xy)\vec{j} + x\vec{k}$ qua phía trên mặt nón $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ cắt bởi hai mặt phẳng $z = 2, z = 5$

A. 25 **B.** 16 **C.** 0 **D.** 20

Câu 94: Tính thông lượng của trường vecto $\vec{F} = 2x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ qua S là mặt ngoài của miền giới hạn bởi $y = 0, y = \sqrt{1 - z^2}, x = 0, x = 2$

A. $4\pi + \dfrac{8}{3}$ **B.** $3\pi + \dfrac{8}{3}$ **C.** $\pi + \dfrac{8}{3}$ **D.** $4\pi + \dfrac{8}{5}$

Câu 95: Tính thông lượng của trường vecto $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j} + \frac{z^2}{2}\vec{k}$ qua S là biên ngoài của miền $V: |x - y| \leq 1, |y - z| \leq 1, |z + x| \leq 1$

A. 5 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

Câu 96: Cho trường vô hướng $u = xy + yz + xz$. Tính lưu số của trường vecto $\overrightarrow{grad u}$ dọc theo đoạn thẳng nối từ $A(-1, -1, -1)$ đến $B(2,4,1)$

A. 11 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 14

Câu 97: Tính lưu số của $\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ dọc theo đường tròn có phương trình

$C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

A. $\frac{-\pi}{6}$ **B.** $\frac{-\pi}{8}$ **C.** $\frac{-\pi}{7}$ **D.** $\frac{-\pi}{9}$

Câu 98: Tính lưu số của $\vec{F} = (ye^{xy} + 3y + z)\vec{i} + (xe^{xy} + y - 5z)\vec{j} + (1 + 2x)\vec{k}$ dọc theo đường cong L là giao của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt $x - y + z = 0$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương trục Oz.

A. $3\sqrt{3}\pi$ **B.** $6\sqrt{3}\pi$ **C.** $4\sqrt{3}\pi$ **D.** $\sqrt{3}\pi$

Câu 99: Tính lưu số của $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ dọc theo đường cong C trong đó C là giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt nón có phương trình $z = -\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 5

Câu 100: Tính thông lượng của $\vec{F} = (6z - 2y^3)\vec{i} + (2x - 3z)\vec{j} + (2y^3 - 4x)\vec{k}$ qua mặt cong S: $2x^2 + y^4 + 3z^2 = 1, z \geq 0$ hướng lên trên.

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

V.Lời giải tham khảo

Tích phân Euler:

Câu 1: Kết quả của tích phân $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$ là:

Đáp án: **A.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{8}$

Giải:

Đặt $x^4 = u \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 dx = du \Rightarrow x^3 dx = \dfrac{du}{4} \\ x^2 = u^{1/2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^5\, e^{-x^4} dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

Câu 2: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$ là:

Đáp án: **D.** $\dfrac{3\pi}{512}$

Giải:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2.\frac{7}{2}-1}.(\cos x)^{2.\frac{5}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right).\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{45}{32}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

Câu 3: Biết $\int_0^{+\infty} x^6 3^{-x^4} dx = \dfrac{a\sqrt{\pi}}{b(\ln 3)^{7/2}}$, chọn khẳng định đúng:

Đáp án: **A.** $a - b = -1$

Giải:

Đặt $\ln 3.x^2 = u \Rightarrow \begin{cases} 2\ln 3.xdx = du \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2\sqrt{\ln 3.u}} \\ x^6 = \dfrac{u^3}{(\ln 3)^3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^6 . 3^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u^3}{(\ln 3)^3} . \frac{e^{-u}}{2\sqrt{\ln 3 . u}} du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln 3)^{-\frac{7}{2}} . u^{\frac{5}{2}} . e^{-u} du$$

$$= \frac{(\ln 3)^{-7/2}}{2} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\frac{7}{2}-1} . e^{-u} du = \frac{(\ln 3)^{-7/2}}{2} . \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{16(\ln 3)^{\frac{7}{2}}}$$

$\Rightarrow a = 15, b = 16$

Câu 4: Biểu diễn tích phân $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^4)^4} dx$ theo hàm Gamma:

Đáp án: **C.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{4.\Gamma(4)}$

Giải:

Đặt $x^4 = u \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 dx = du \Rightarrow x^2 dx = \dfrac{du}{4u^{1/4}} \\ x = u^{1/4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^4} dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{-1}{4}} du}{(1+u)^4} = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right) = \frac{1}{4} . \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) . \Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{\Gamma(4)}$$

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[30]{1-x^{30}}} dx$

Đáp án: **B.** $\dfrac{\pi}{30\sin\left(\dfrac{\pi}{30}\right)}$

<u>Giải:</u>

Đặt $u = x^{30} \Rightarrow \begin{cases} du = 30x^{29}dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{30.u^{29/30}} \\ x = u^{1/30} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[30]{1-x^{30}}}dx = \frac{1}{30}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{29}{30}}}{\sqrt[30]{1-u}}du = \frac{1}{30}\int_0^1 u^{\frac{1}{30}-1}.(1-u)^{\frac{29}{30}-1}du = \frac{1}{30}B\left(\frac{1}{30},\frac{29}{30}\right)$$

$$= \frac{1}{30}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}$$

Câu 7: Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{10}dx$

Đáp án: **B.** $10!$

<u>Giải:</u>

Đặt $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = u \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{x}dx = du \Rightarrow dx = \dfrac{-1}{e^u}du \\ \dfrac{1}{x} = e^u \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{10}dx = -\int_{+\infty}^0 u^{10}.e^{-u}du = \int_0^{+\infty} u^{11-1}.e^{-u}du = \Gamma(11) = 10!$$

Câu 8: Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 x^5(\ln x)^{10}dx$

Đáp án: **B.** $\dfrac{10!}{6^{11}}$

<u>Giải:</u>

Đặt $\ln x = u \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}dx = du \Rightarrow dx = e^u du \\ x^5 = e^{5u} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^5(\ln x)^{10}dx = \int_{-\infty}^0 e^{6u}.u^{10}du$$

Đặt $6u = -t \Rightarrow du = \dfrac{-dt}{6}, u^{10} = \dfrac{t^{10}}{6^{10}}$

Đổi cận: $u = 0 \Rightarrow -t = 0, u \to -\infty \Rightarrow -t \to +\infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{6u}.u^{10}du = \frac{1}{6^{11}}\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{10}dt = \frac{1}{6^{11}}.\Gamma(11) = \frac{10!}{6^{11}}$$

Câu 9: Biểu diễn tích phân $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\sqrt[3]{1-e^{3x}}dx$ theo hàm Gamma:

Đáp án: **C.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{9.\Gamma(2)}$ và **D.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{3.\Gamma(2)}$

Giải:

Đặt $I = \int_{-\infty}^0 e^{2x}\sqrt[3]{1-e^{3x}}dx$

Đặt $u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3e^{3x}} = \dfrac{u^{-1}du}{3}$

Với $x = 0 \Rightarrow u = 1, x = -\infty \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{\frac{2}{3}}(1-u)^{\frac{1}{3}}u^{-1}du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{-\frac{1}{3}}(1-u)^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$

Mà $\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow I = \dfrac{1}{9}\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \dfrac{1}{9}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}{1!} = \dfrac{2}{9\sqrt{3}}\pi$

Câu 10: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x \cos^5 x}dx$

Đáp án: **A.** $\dfrac{5\pi}{128\sqrt{2}}$

Giải:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{7}{2}}(\cos x)^{\frac{5}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2.\frac{9}{4}-1}(\cos x)^{2.\frac{7}{4}-1}dx = \frac{1}{2}.B\left(\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(4)}$$

Mà $\begin{cases} \Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \\ \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow TP = \frac{1}{2}.B\left(\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{15}{64}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{15}{128}\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\pi}{3!} = \frac{5\pi}{128\sqrt{2}}$$

Tích phân đường

Câu 11: Tính tích phân $\int_L (x+y)ds$ với L là đoạn thẳng nối điểm $O(0;0)$ và $A(4;3)$

Đáp án: A. $\dfrac{35}{2}$

Giải:

Phương trình đoạn OA là $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow ds = \sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{4}dx$

$$\Rightarrow \int_L (x+y)ds = \int_0^4 \left(x+\frac{3}{4}x\right)\frac{5}{4}dx = \frac{35}{2}$$

Câu 12: Tính $\int_L (x+y)ds$ với L là nửa đường tròn $\begin{cases} x = 2+2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

Đáp án: **B.** $8+4\pi$

Giải:

Đường C: $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2dt$

$$\Rightarrow \int_C (x+y)ds = 2\int_0^{\pi} (2 + 2\cos t + 2\sin t)dt = 8 + 4\pi$$

Câu 13: Tìm m để $\int_C (mx-y)ds = -18$ với $C: y = \sqrt{9-x^2}$

Đáp án: **C.** $m = 3$

Giải:

Nửa đường tròn C: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Tham số hóa C

Đặt $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -3\sin t \\ y'(t) = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 3$

$$\Rightarrow \int_C (mx-y)ds = 3\int_0^{\pi} (3m\cos t - 3\sin t)dt = -18 \Rightarrow m = 3$$

Câu 14: Với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, tính $\int_C (x-y)ds$

Đáp án: **B.** 2π

Giải:

$C: x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = dt$

$$\int_C (x-y)ds = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)dt = 2\pi$$

Câu 15: Tính $\int_C (x+y)ds$ với cung $C: r^2 = \cos 2\varphi,\ \frac{-\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

Đáp án: D. $\sqrt{2}$

Giải:

Cung C: $\begin{cases} r^2 = \cos 2\varphi \\ \frac{-\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\cos 2\varphi} \\ \frac{-\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow r' = \frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi = \sqrt{\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}d\varphi = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}d\varphi = \sqrt{2}$$

Câu 16: Với C là đường cong $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối $A(1,0)$ và $B(0,1)$, tìm m để $\int_C (y^2+1)ds$

Đáp án: A. $\frac{15}{8}$

Giải:

Ta có $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$

Tham số hóa: $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = \cos t \\ y^{\frac{1}{3}} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -3\sin t\cos^2 t \\ y'(t) = 3\cos t\sin^2 t \end{cases}$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\cos^2 t\sin^4 t}\,dt = 3\sin t\cos t\,dt$$

Tại $A(1,0)$: $\begin{cases} x = \cos^3 t = 1 \\ y = \sin^3 t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$, tại $B(0,1)$: $\begin{cases} x = \cos^3 t = 1 \\ y = \sin^3 t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \pi/2$

$$\Rightarrow \int_C (y^2+1)\,ds = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 t + 1)\sin t \cos t\,dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t + \sin t)\,d(\sin t)$$

$$= 3\int_0^1 (u^7 + u)\,du = \frac{15}{8}$$

Câu 17: Tính $\int_C yds$ với C là đường $x = y^2$ đi từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$

Đáp án: **B.** $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$

Giải:

Đường C: $\begin{cases} x = y^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow x'(y) = 2y \Rightarrow ds = \sqrt{1+x'^2(y)}dy = \sqrt{1+4y^2}dy$

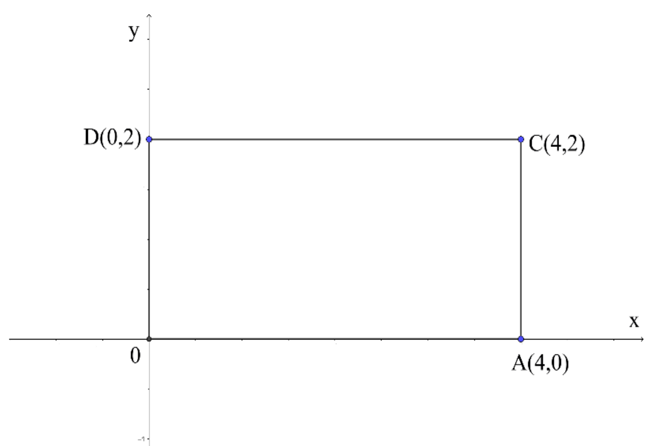
$$\Rightarrow \int_C yds = \int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4y^2}d(y^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4u}du$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

Câu 18: Tính $\int_L xyds$ với L là chu tuyến của hình chữ nhật $ABCD$ với $A(0,0)$; $B(4,0)$; $C(4,2)$, $D(0,2)$

Đáp án: **C.** 24

Giải:



Ta có: $\int\limits_{L} xyds = \int\limits_{AB} xyds + \int\limits_{BC} xyds + \int\limits_{CD} xyds + \int\limits_{DA} xyds$

Phương trình AB: $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow ds = \sqrt{1+0}dx = dx \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$

Phương trình BC $\begin{cases} x = 4 \Rightarrow ds = \sqrt{1+0}dy = dy \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Phương trình CD $\begin{cases} y = 2 \Rightarrow ds = \sqrt{1+0}dx = dx \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$

Phương trình DA: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow ds = \sqrt{1+0}dy = dy \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int\limits_{AB} xyds = \int\limits_{0}^{4} x.0dx = 0 \\ \int\limits_{BC} xyds = \int\limits_{0}^{2} 4ydy = 8 \\ \int\limits_{CD} xyds = \int\limits_{0}^{4} 2xdx = 16 \\ \int\limits_{DA} xyds = \int\limits_{0}^{2} 0.ydy = 0 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{L} xyds = 24$$

Câu 19: Tính $\oint\limits_{C} xyds$ với C là biên của miền $|x| + |y| \le 1$

Đáp án: **D.** 0

Giải:

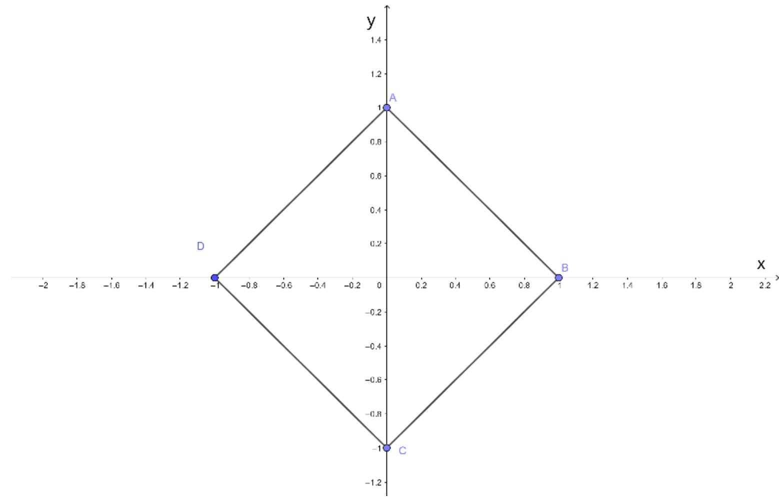
Đường C: $|x| + |y| = 1$

Phương trình AB: $\begin{cases} y = 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Phương trình BC: $\begin{cases} y = x - 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Phương trình CD: $\begin{cases} y = -x - 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$

Phương trình DA: $\begin{cases} y = x + 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$



$$\oint_C xyds = \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{CD} xyds + \int_{DA} xyds$$

Xét $\int_{AB} xyds$, ta có $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \sqrt{2}dx \Rightarrow \int_{AB} xyds = \sqrt{2}\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Xét $\int_{BC} xyds$, ta có $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \sqrt{2}dx \Rightarrow \int_{BC} xyds = \sqrt{2}\int_0^1 x(x-1)dx = \frac{-\sqrt{2}}{6}$

Xét $\int_{CD} xyds$, ta có $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \sqrt{2}dx \Rightarrow \int_{CD} xyds = \sqrt{2}\int_{-1}^0 x(-1-x)dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Xét $\int_{AB} xyds$, ta có $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \sqrt{2}dx \Rightarrow \int_{DA} xyds = \sqrt{2}\int_{-1}^0 x(x+1)dx = \frac{-\sqrt{2}}{6}$

$$\Rightarrow \oint_C xyds = \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{CD} xyds + \int_{DA} xyds = 0$$

Câu 20: Tính $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}ds$ với L: $x^2 + y^2 = 2x$

Đáp án: **A.** 8

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$ Đường cong L: $\begin{cases} r = 2\cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi = \sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2d\varphi$$

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2}.2d\varphi = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} rd\varphi = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\, d\varphi = 8$$

Câu 21: Tính $\int_{AB} (x-3y)dx + 2ydy$ với $\widehat{AB}$ là cung $y = 1 - x^2, A(1,0), B(-1,0)$

Đáp án: **C.** 4

Giải:

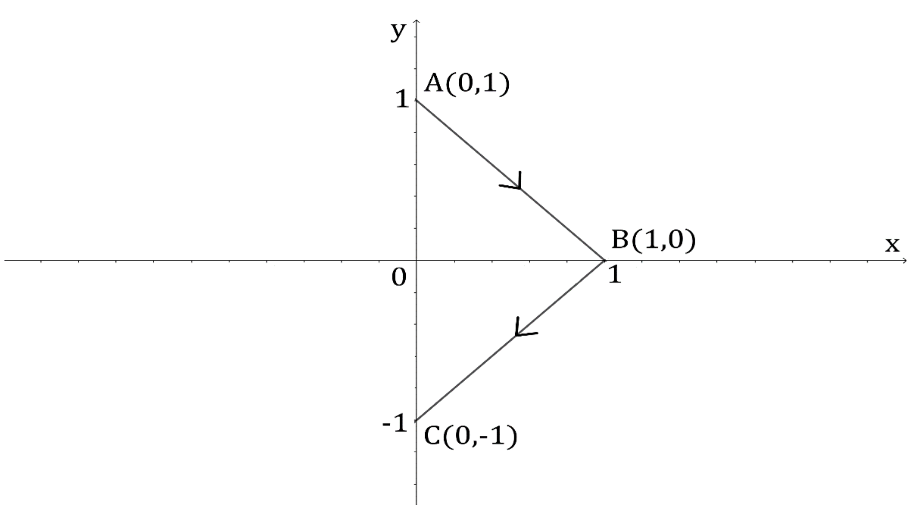
Cung $\widehat{AB}$: $\begin{cases} y = 1 - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx \\ \text{Đi từ } A(1,0) \to B(-1,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\widehat{AB}} (x-3y)dx + 2ydy = \int_1^{-1} [x - 3(1-x^2)]\, dx + \int_1^{-1} 2(1-x^2).(-2x)dx = 4$$

Câu 22: Tính $\int_{ABC} 5y^4dx - 4x^3dy$ với ABC là đường gấp khúc đi qua các điểm $A(0,1); B(1,0); C(0,-1)$

Đáp áp: **A.** 2

Giải:



$$\int_{ABC} 5y^4dx - 4x^3dy = \int_{AB} 5y^4dx - 4x^3dy + \int_{BC} 5y^4dx - 4x^3dy = I_1 + I_2$$

Đoạn thẳng AB: $\begin{cases} y = 1 - x \Rightarrow dy = -dx \\ \text{Đi từ } A(0,1) \text{ đến } B(1,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 5(1-x)^4dx + \int_0^1 (-4x^3).(-dx) = 2$$

Đoạn thẳng BC: $\begin{cases} y = x - 1 \Rightarrow dy = dx \\ \text{Đi từ } B(1,0) \text{ đến } C(0,-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^0 5(x-1)^4dx + \int_1^0 (-4x^3).dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{ABC} 5y^4dx - 4x^3dy = I_1 + I_2 = 2$$

Câu 23: Tìm m để $\int_C (x+xy)dx + m.x^2dy = \dfrac{-10}{3}$ với C là cung bé trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ đi từ $A(-2,0)$ đến $B(0,2)$

Đáp án: D. 1

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ với t chạy từ π đến $\pi/2$. Đặt $I = \int_C (x+xy)dx + m.x^2dy$

$$I = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} [(2\cos t + 4\cos t\sin t)(-2\sin t) + m.(\cos t)^2(2\cos t)]dt$$

$$= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} (-4\cos t\sin t - 8\cos t\sin^2 t + 2m\cos^3 t)dt$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-4\sin t - 8\sin^2 t + 2m\cos^2 t)\cos t\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-4\sin t - 8\sin^2 t + 2m - 2m\sin^2 t)\cos t\, dt$$

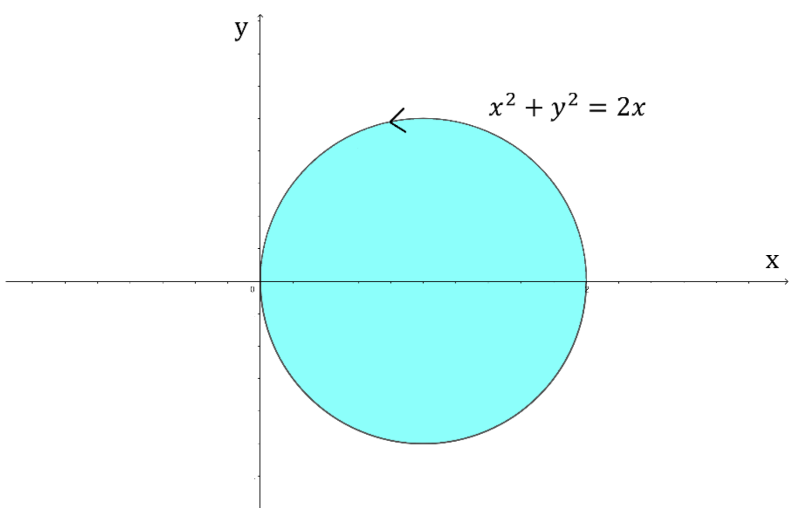
$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} [-4\sin t - (8+2m)\sin^2 t + 2]d(\sin t) = \int_{0}^{1} [-4u - (8+2m)u^2 + 2]du = \frac{-10}{3}$$

$\Rightarrow m = 1$

Câu 24: Tính $\oint_L (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (-xy + e^{-y} - x + \sin y)dy$ với L là đường $x^2 + y^2 = 2x$ theo chiều dương.

Đáp án: **A.** -3π

<u>Giải:</u>



Đặt $I = \oint_L (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (-xy + e^{-y} - x + \sin y)dy$

Đặt: $P = xy + e^x \sin x + x + y, Q = -xy + e^{-y} - x + \sin y$

$\Rightarrow P'_y = x + 1, Q'_x = -y - 1$. P'_y, Q'_x liên tục với $x, y \in R$.

Đường cong L kín hướng dương, giới hạn miền $D: x^2 + y^2 \leq 2x$

Áp dụng công thức Green, ta có:

$$I = \iint\limits_D (-y - x - 2)dxdy$$

Nhận xét: hàm số $f(x, y) = -y$ là hàm lẻ với biến y, miền D đối xứng qua trục Ox

$$\Rightarrow \iint\limits_D -ydxdy = 0 \Rightarrow I = \iint\limits_D (-x - 2)dxdy$$

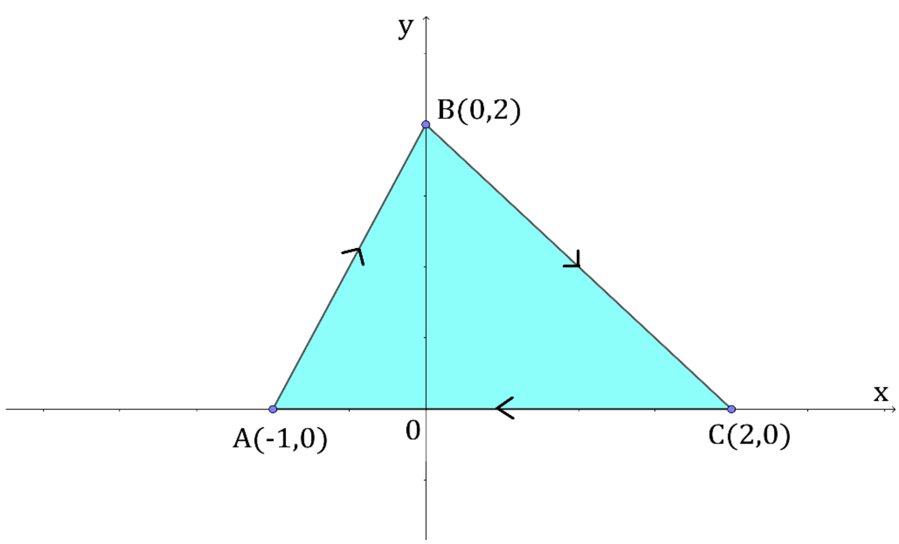
Đặt: $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$. Miền (D): $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-r\cos\varphi - 3)rdr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{3}\cos\varphi - \frac{3}{2}\right)d\varphi = -3\pi$$

Câu 25: Tính $\oint\limits_L 2xdx - \left[x^2 + 2y + e^{y^2+1} + \sin(y^2)\right]dy$ với L là chu tuyến của tam giác ABC có $A(-1,0), B(0,2), C(2,0)$ chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Đáp án: **B.** 2

Giải:



Đặt $I = \oint\limits_L 2xdx - \left[x^2 + 2y + e^{y^2+1} + \sin(y^2)\right]dy$

Đặt $\begin{cases} P = 2x \\ Q = -[x + 2y + e^{y^2+1} + \sin(y^2)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 0 \\ Q'_x = -2x \end{cases}$, P'_y, Q'_x liên tục với $x, y \in R$

Gọi D là miền được giới hạn bởi chu tuyến ΔABC

D được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} AB: y = 2x + 2 \\ BC: y = -x + 2 \\ CA: y = 0 \end{cases} \Rightarrow (D): \begin{cases} (y-2)/2 \le x \le 2 - y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

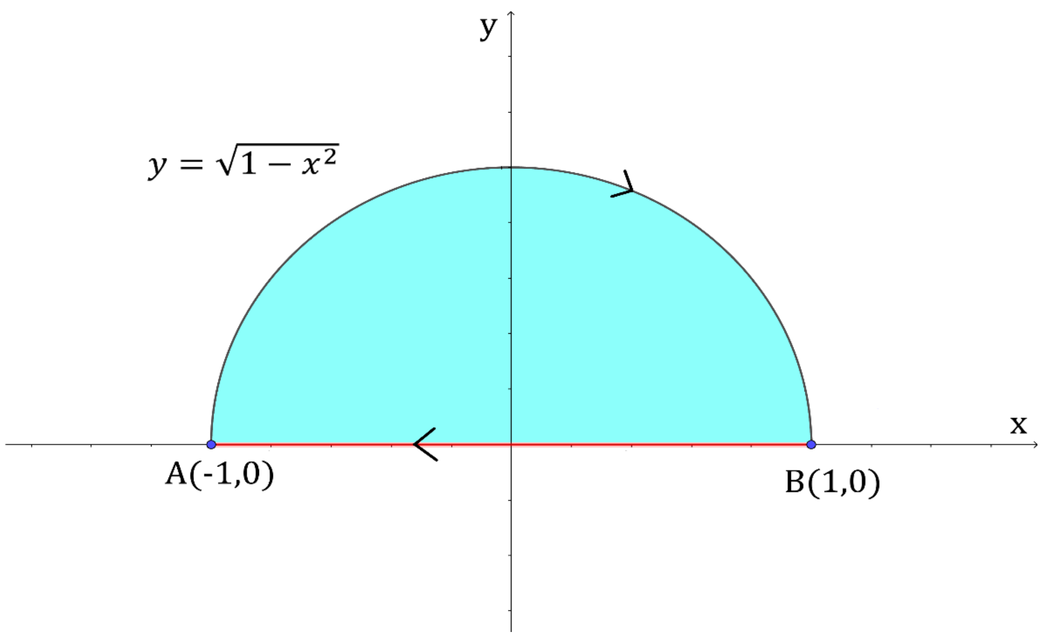
L là đường cong kín, hướng âm, giới hạn miền D. Áp dụng công thức Green:

$$I = -\iint_D -2x dx dy = \iint_D 2x dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y-2}{2}}^{2-y} 2x dx = 2$$

Câu 26: Tính $\int_{AB} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy$ với $\overset{\frown}{AB}$ là cung $y = \sqrt{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

Đáp án: **B.** $\dfrac{e^2 - 1}{e}$

Giải:



Đặt $I = \int_{AB} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy$

Cung $\overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ đi từ $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

Bổ sung thêm đoạn BA $\begin{cases} y = 0 \\ \text{đi từ } B(1,0) \text{ đến } A(-1,0) \end{cases}$

Ta có: đường $\widehat{AB} \cup BA$ là đường cong kín giới hạn miền (D): $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$, có chiều âm

Đặt $\begin{cases} P = xy + e^x \\ Q = y^{10} - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = x \\ Q'_x = -2x \end{cases} \Rightarrow P'_y, Q'_x$ liên tục với $x, y \in R$

$$I = \oint_{\widehat{AB} \cup BA} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy - \int_{BA} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Green cho I_1 ta có:

$$I_1 = -\iint_D -3x\, dxdy = \iint_D 3x\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$. Miền (D): $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 3r\cos\varphi\, rdr = \int_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

(Hoặc có thể sử dụng tính đối xứng để ra giá trị bằng 0 ngay)

$$I_2 = \int_{BA} (xy + e^x)dx + (y^{10} - x^2)dy$$

Đoạn BA $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{đi từ } B(1,0) \text{đến } A(-1,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^{-1} (x.0 + e^x)dx = e^x \Big|_1^{-1} = e^{-1} - e = \frac{1 - e^2}{e}$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = 0 - \frac{1 - e^2}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

Câu 27: Tính $\int_C (2e^x + y^2)dx + (x^4 + e^y)dy$ với $C: y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ đi từ $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

Đáp án: **A.** $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{e}+2e$

<u>Giải:</u>

$C: y=\sqrt[4]{1-x^2}$ là đường cong hở đi từ $A(-1,0)$ đến $B(1,0)$

Bổ sung thêm đoạn BA: $\begin{cases} y=0 \\ \text{Đi từ } B(1,0)\to A(-1,0) \end{cases}$

$$I=\int\limits_{C\cup BA}(2e^x+y^2)dx+(x^4+e^y)dy-\int\limits_{BA}(2e^x+y^2)dx+(x^4+e^y)dy=I_1-I_2$$

Áp dụng công thức Green cho I_1

Đặt $\begin{cases} P(x,y)=2e^x+y^2 \\ Q(x,y)=x^4+e^y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P'_y=2y \\ Q'_x=4x^3 \end{cases}$ liên tục với $\forall x,y\in R$

Ta có $C\cup BA$ là đường cong kín, có chiều âm, giới hạn miền D: $\begin{cases} 0\le y\le\sqrt[4]{1-x^2} \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=-\iint\limits_D(4x^3-2y)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^{\sqrt[4]{1-x^2}}(-4x^3+2y)dy$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(-4x^3.\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

Hàm $f(x)=-4x^3.\sqrt[4]{1-x^2}$ là hàm số lẻ $\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}-4x^3.\sqrt[4]{1-x^2}dx$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t\,dx$

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos t\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}$$

Đoạn BA: $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{đi từ } B(1,0) \text{ đến } A(-1,0) \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_{1}^{-1} 2e^x dx = 2(e^{-1} - e)$

Vậy $I = \pi/2 - 2(e^{-1} - e)$

Câu 28: Tính tích phân $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

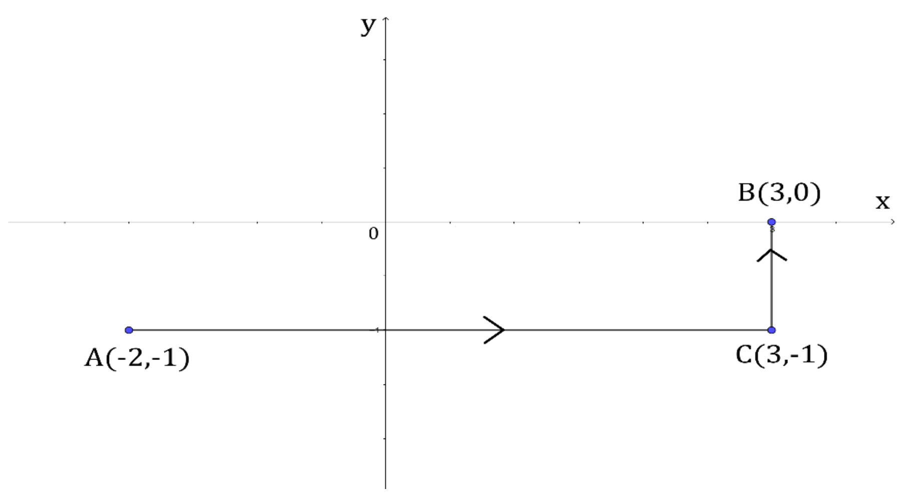
Đáp án: **B.** 62

Giải:

Đặt $I = \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Đặt $P = (x^4 + 4xy^3), Q = (6x^2y^2 - 5y^4) \Rightarrow P'_y = Q'_x = 12xy^2 \Rightarrow I$ không phụ thuộc đường đi

Cách 1: Dùng đường thay thế là đường gấp khúc:



Chọn đường đi là đường gấp khúc ACB

$$I = \int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = I_1 + I_2$$

Đoạn AC: $\begin{cases} y = -1 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{đi từ } A(-2,-1) \text{ đến } C(3,-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-2}^{3} (x^4 - 4x)dx = 45$$

Đoạn CB: $\begin{cases} x = 3 \Rightarrow dx = 0 \\ \text{đi từ } C(3,-1) \text{ đến } B(3,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \; I_2 = \int_{-1}^{0} (6.9.\, y^2 - 5y^4)dy = 17$$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 62$

Cách 2: Dùng đường thay thế là đường thẳng

Phương trình đường thẳng đi qua A, B là $y = x/5 - 3/5$

Đoạn AB: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{5} \Rightarrow dy = \dfrac{dx}{5} \\ \text{Đi từ } A(-2,-1) \rightarrow B(3,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{3} \left[x^4 + 4x\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^3\right]dx + \left[6x^2\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^4\right].\frac{dx}{5}$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[x^4 + 4x\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^3 + \frac{6x^2}{5}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\right)^4\right]dx = \cdots = 62$$

Cách 3: Dùng hàm thế vị

Đặt $P = (x^4 + 4xy^3), Q = (6x^2y^2 - 5y^4) \Rightarrow P'_y = Q'_x = 12xy^2 \Rightarrow I$ không phụ thuộc đường đi

$\Rightarrow Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

Chọn $x_0 = y_0 = 0$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{0}^{x} (t^4 + 4t.\, 0^3)dt + \int_{0}^{y} (6x^2t^2 - 5t^4)dt$$

$$u(x,y) = \frac{1}{5}t^5 \Big|_0^x + \left(6x^2.\frac{1}{3}t^3 - t^5\right)\Big|_0^y = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5$$

$$\Rightarrow I = u(3,0) - u(-2,-1) = \frac{243}{5} - \left(\frac{-67}{5}\right) = 62$$

Câu 29: Tìm m để tích phân $\int_L e^{x^2+y}\left[2xy^2dx + (y^2 + m.y)dy\right] = e$ với L là đường $x = 1 - y^2$ đi từ $A(1,0)$ đến $B(0,1)$

Đáp án: **B.** 2

<u>Giải:</u>

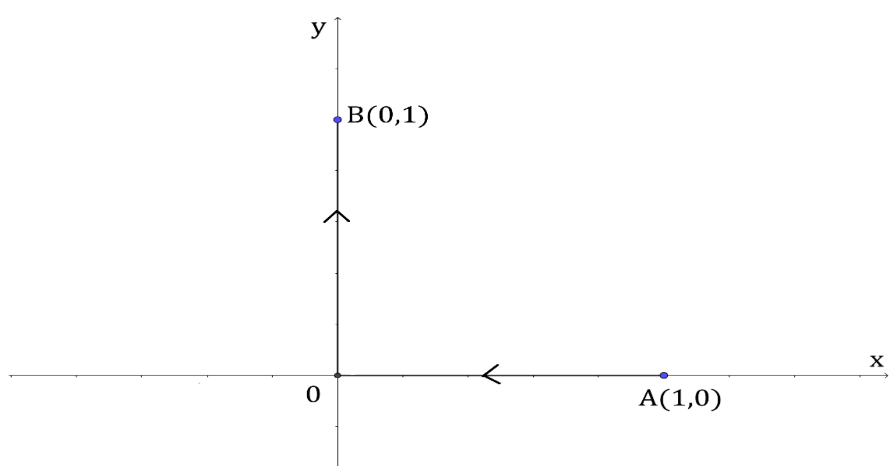
Đặt $I = \int_L e^{x^2+y}\left[2xy^2dx + (y^2 + m.y)dy\right] = e$

Đặt $P = e^{x^2+y}.2xy^2, Q = e^{x^2+y}.(y^2 + 2y) \Rightarrow P'_y = Q'_x = (4xy + 2xy^2)e^{x^2+y}$

$\Rightarrow$ Tích phân không phụ thuộc đường đi

Cách 1: Chọn đường đi là đường gấp khúc

Chọn đường đi là đường gấp khúc AOB



$$I = \int_{AO} e^{x^2+y}[2xy^2dx + (y^2 + my)dy] + \int_{OB} e^{x^2+y}[2xy^2dx + (y^2 + my)dy]$$

$$= I_1 + I_2$$

Đoạn AO: $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{Đi từ } A(1,0) \to O(0,0) \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int_1^0 0dx = 0$

Đoạn OB: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ \text{Đi từ } O(0,0) \to B(0,1) \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_0^1 e^y(y^2 + my)dy = I = e \Rightarrow m = 2$

Tích phân trên phải dùng tích phân từng phần hai lần, tương đối dài.

Cách 2: Chọn đường đi là một đường cong

Nhận xét: Tích phân I phức tạp là do biểu thức e^{x^2+y} vì để làm đơn giản tích phân I cần khử biểu thức này $\Rightarrow$ Biến $e^{x^2+y} = C \Rightarrow x^2 + y = C$ (C là hằng số)

Do tích phân I không phụ thuộc đường đi nên sẽ chọn đường đi mới thỏa mãn

$$x^2 + y = C$$

Để tìm C, ta dựa vào điểm đầu $A(1,0)$ và điểm cuối $B(0,1)$

Đường cong mới $L': x^2 + y = C$ đi qua $A, B \Rightarrow \begin{cases} 1^2 + 0 = C \\ 0^2 + 1 = C \end{cases} \Rightarrow C = 1$

Chọn đường đi $L': y = 1 - x^2$ đi từ $A(1,0)$ đến $B(0,1) \Rightarrow dy = -2xdx$

$$\Rightarrow I = e\left(\int_1^0 [2x(1-x^2)^2]dx + \int_1^0 [(1-x^2)^2 + m(1-x^2)](-2x)dx\right) = e \Rightarrow m = 2$$

Câu 30: Tính tích phân $\int_L \frac{-y+2xy-x^2+1}{(y-x^2-1)^2}dx + \frac{x-x^2-1}{(y-x^2-1)^2}dy$ với $L: y = 2x + 2$ đi từ $A(0,2)$ đến $B(2,6)$

Đáp án: C. 2

<u>Giải:</u>

Đặt $I = \int_L \frac{-y+2xy-x^2+1}{(y-x^2-1)^2}dx + \frac{x-x^2-1}{(y-x^2-1)^2}dy$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{-y + 2xy - x^2 + 1}{(y - x^2 - 1)^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{x - x^2 - 1}{(y - x^2 - 1)^2} \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x = \dfrac{-2x^3 + 3x^2 - 2xy - 2x + y - 1}{(y - x^2 - 1)^3}$

$\Rightarrow I$ không phụ thuộc vào đường đi

Tích phân phức tạp do biểu thức $(y-x^2-1)^2 \Rightarrow$ Chọn đường đi mới khử biểu thức này

Chọn đường đi mới dạng $L': y - x^2 - 1 = C$ (C là hằng số)

L' đi qua $A(0,2), B(2,6) \Rightarrow \begin{cases} 2 - 0^2 - 1 = C \\ 6 - 2^2 - 1 = C \end{cases} \Rightarrow C = 1$

Chọn đường đi L': $\begin{cases} y = x^2 + 2 \Rightarrow dy = 2xdx \\ \text{Đi từ } A(0,2) \to B(2,6) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{-(x^2+2) + 2x(x^2+2) - x^2 + 1}{1^2} dx + \int_0^2 \frac{x - x^2 - 1}{1^2} . 2xdx = \frac{26}{3} - \frac{20}{3} = 2$$

Câu 31: Tìm a, b để tích phân $\int_L e^x\left[\left(2x + ay^2 + 1\right)dx + \left(bx + 2y\right)dy\right]$ không phụ thuộc vào đường đi

Đáp án: **A.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Đặt $P = e^x(2x + ay^2 + 1), Q = e^x(bx + 2y)$

Để tích phân không phụ thuộc đường đi $\Leftrightarrow P'_y = Q'_x$

$\Leftrightarrow 2ae^x y = e^x . 2y + e^x . bx + be^x \Leftrightarrow a = 1, b = 0$

Câu 32: Tìm hằng số a, b để biểu thức $[y^2 + axy + y\sin(xy)]dx + [x^2 + bxy + x\sin(xy)]dy$ là vi phần toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó

Đáp án: **B.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Đặt $P = [y^2 + axy + y\sin(xy)], Q = x^2 + bxy + x\sin(xy)$

Để biểu thức $[y^2 + axy + y\sin(xy)]dx + [x^2 + bxy + x\sin(xy)]dy$ là vi phần toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó $\Leftrightarrow P'_y = Q'_x$

$\Leftrightarrow 2y + ax + \sin(xy) + xy\cos(xy) = 2x + by + \sin(xy) + xy\cos(xy)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Câu 33: Tính $\int\limits_L \dfrac{xe^{x^2+y^2}dx + ye^{x^2+y^2}dy}{(x-1)^2 + y^2}$ với $L: y = \sqrt{2x - x^2}$ đi từ $O(0,0)$ đến $A(2,0)$

Đáp án: B. 0

Giải:

$L: y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow dy = \dfrac{2 - 2x^2}{2\sqrt{2x - x^2}}dx = \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{2x - x^2}}dx$

$$\int\limits_L \frac{xe^{x^2+y^2}dx + ye^{x^2+y^2}dy}{(x-1)^2 + y^2} = \int_0^2 \frac{xe^{2x}}{1}dx + \int_0^2 \frac{\sqrt{2x - x^2}e^{2x}}{1}\frac{1 - x^2}{\sqrt{2x - x^2}}dx$$

$$= \int_0^2 xe^{2x}\,dx + \int_0^2 e^{2x}(1 - x^2)\,dx = 0$$

Câu 34: Cho tích phân $I = \oint\limits_C \dfrac{(2x - 5y)dx + (5x + 2y)dy}{x^2 + y^2}$ với C là biên của hình phẳng $D: x^2 + y^2 \leq 9$, theo chiều dương, bạn A lập luận "Ta đặt $P = \dfrac{2x - 5y}{x^2 + y^2}$ và $Q = \dfrac{5x + 2y}{x^2 + y^2}$, $Q'_x - P'_y = 0$, C là đường cong kín, chiều dương, giới hạn miền D nên $I = 0$". Hỏi bạn A làm vậy có đúng không? Nếu sai, thì sửa lại đáp án chính xác

Đáp án: B. Sai, $I = 10\pi$

Giải:

Ta có: $\begin{cases} P_y^{'} = \dfrac{-5(x^2+y^2)-2y(2x-5y)}{(x^2+y^2)^2} \\ Q_x^{'} = \dfrac{5(x^2+y^2)-2x(5x+2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $O(0,0) \in D: x^2+y^2 \leq 9$

$\Rightarrow$ Không sử dụng được công thức Green

Đặt $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, t chạy từ 0 đến $2\pi \Rightarrow \begin{cases} dx = -3\sin t\, dt \\ dy = 3\cos t\, dt \end{cases}$

$$\oint_C \frac{(2x-5y)dx+(5x+2y)dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(2.3\cos t - 5.3\sin t)(-3\sin t)+(5.3\cos t+2.3\sin t)(3\cos t)}{9}dt$$

$$= 10\pi$$

Câu 35: Tìm m để tích phân $\int_{AB}(x-3y)dx+2ydy = 4$ với $AB: y = m - x^2$ và hai điểm $A(1,0), B(-1,0)$

Đáp án: **A.** 1

<u>Giải:</u>

Cung $\overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} y = m - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx \\ \text{Đi từ } A(1,0) \to B(-1,0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{AB}} (x-3y)dx + 2ydy = \int_1^{-1} [x - 3(m-x^2)]\, dx + \int_1^{-1} 2(m-x^2).(-2x)dx = 4$$

$\Rightarrow m = 1$

Câu 36: Tính $\int_C ydx+zdy+xdz$ với $C: x = \cos t, y = \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ theo chiều tăng của t

Đáp án: **C.** $-\pi$

<u>Giải:</u>

$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 2 \end{cases}$

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} (-\sin t \,.\, \sin t + 2t.\cos t + \cos t \,.\, 2)dt = \cdots = -\pi$$

Câu 37: Tính tích phân $\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$

Đáp án: A. $4e^5 + 6e^6 - e^2 - 3e^3$

Giải:

Đặt $\begin{cases} P = e^y \\ Q = xe^y \\ R = (z+1)e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_z = 0, P'_y = e^y \\ Q'_z = 0, Q'_x = e^y \\ R'_x = 0, R'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow R'_y - Q'_z = P'_z - R'_x = Q'_x - P'_y = 0$

$\Rightarrow$ Tích phân $\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$ không phụ thuộc vào đường đi

Cách 1: Dùng hàm thế vị

Hàm thế vị

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$$

Chọn $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$u = \int_0^x 1dt + \int_0^y xe^t dt + \int_0^z (t+1)e^t dt + C$$

$$= x + xe^y - x + e^z - 1 + ze^z - (e^z - 1) + C = xe^y + ze^z + C$$

$$\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz = u(4,5,6) - u(1,2,3) = 4e^5 + 6e^6 - e^2 - 3e^3$$

Cách 2: Chọn đường đi là đường thẳng

Đặt $A(1,2,3), B(4,5,6)$

Đoạn AB: $\begin{cases} \text{vecto chỉ phương } \overrightarrow{AB} = (3,3,3) \\ \text{Đi qua } A(1,2,3) \end{cases} \Rightarrow AB: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{3} = t$

$$\Rightarrow AB: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases}, \text{với } t \text{ đi từ } 0 \text{ đến } 1 \Rightarrow x' = y' = z' = 3$$

$$\Rightarrow \int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$$

$$= 3\int_0^1 [e^{3t+2} + (3t+1)e^{3t+2} + (3t+4)e^{3t+3}]dt = \cdots = 4e^5 + 6e^6 - e^2 - 3e^3$$

Câu 38: Tìm hàm thế vị của biểu thức $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Đáp án: **A.** $\frac{1}{5}x^2 + 2x^2y^3 - y^5$

Giải:

Đặt $P = (x^4 + 4xy^3), Q = (6x^2y^2 - 5y^4) \Rightarrow P'_y = Q'_x = 12xy^2$

$\Rightarrow Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

Chọn $x_0 = y_0 = 0$

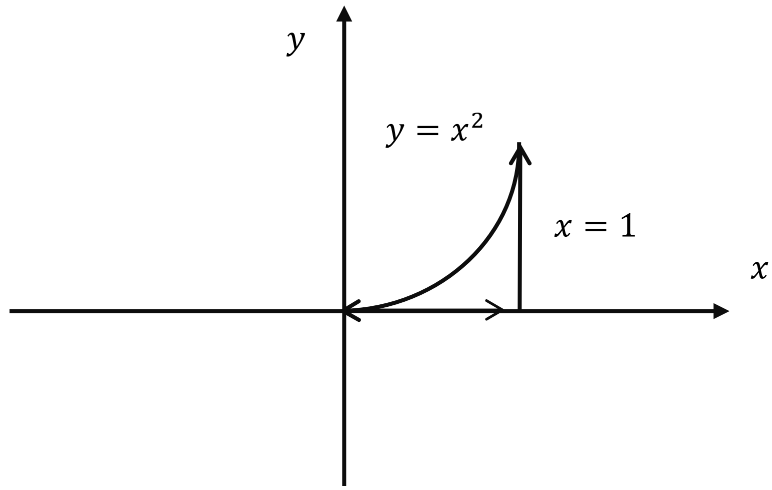
$$\Rightarrow u(x,y) = \int_0^x (t^4 + 4t.0^3)dt + \int_0^y (6x^2t^2 - 5t^4)dt$$

$$u(x,y) = \frac{1}{5}t^5\Big|_0^x + \left(6x^2.\frac{1}{3}t^3 - t^5\right)\Big|_0^y = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5$$

Câu 39: Tính $\int_L (2xy-5)dx + (2x+3y)dy$ với L là biên của miền D xác định bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 1$, chiều dương

Đáp án: **D.** $\frac{1}{6}$

Giải:



Đặt $\begin{cases} P = 2xy - 5 \\ Q = 2x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2x \\ Q'_x = 2 \end{cases}$ liên tục

Ta có L là đường cong kín, chiều dương, giới hạn miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$

Áp dụng công thức Green:

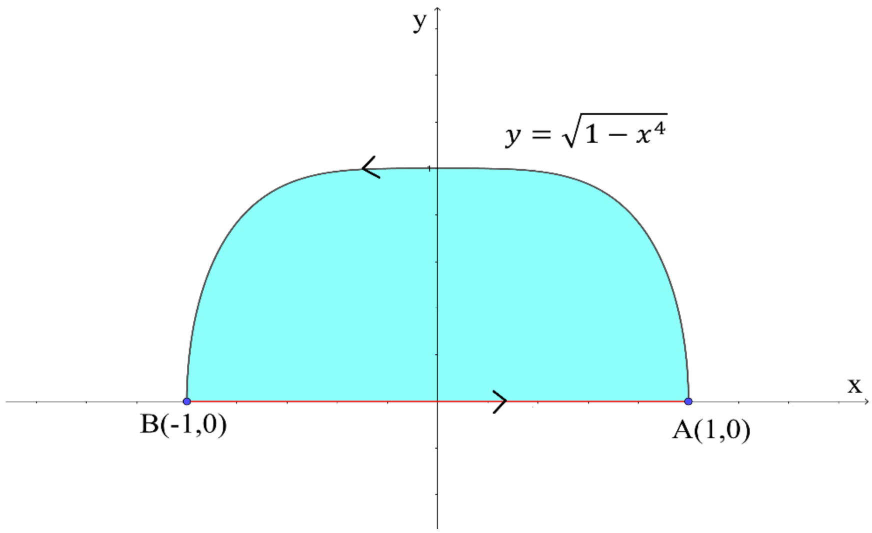
$$\int_L (2xy - 5)dx + (2x + 3y)dy = \iint_D (2 - 2x)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (2 - 2x)dy = \frac{1}{6}$$

Câu 40: Tính $\int_C \left(3x^2y^2 + \frac{2}{4x^2+1}\right)dx + \left(3x^3y + \frac{2}{y^3+4}\right)dy$ với C là đường cong

$y = \sqrt{1 - x^4}$ đi từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$.

Đáp án: **B.** $\frac{4}{7} - 2\arctan 2$

Giải:



Đặt $I = \int\limits_C \left(3x^2y^2 + \frac{2}{4x^2+1}\right)dx + \left(3x^3y + \frac{2}{y^3+4}\right)dy$

$L: y = \sqrt{1 - x^4}$ là đường cong hở đi từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$

Bổ sung thêm đoạn BA: $\begin{cases} y = 0 \\ \text{Đi từ } B(-1,0) \to A(1,0) \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 3x^2y^2 + \dfrac{2}{4x^2+1} \\ Q(x,y) = 3x^3y + \dfrac{2}{y^3+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 6x^2y \\ Q'_x = 9x^2y \end{cases}$ liên tục với $\forall x, y \in R$

$$I = \oint\limits_{L\cup BA} Pdx + Qdy - \int\limits_{BA} Pdx + Qdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Green cho I_1

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 3x^2y^2 + \dfrac{2}{4x^2+1} \\ Q(x,y) = 3x^3y + \dfrac{2}{y^3+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 6x^2y \\ Q'_x = 9x^2y \end{cases}$ liên tục với $\forall x, y \in R$

Ta có $L \cup BA$ là đường cong kín, có chiều dương, giới hạn miền

$D: \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1 - x^4} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_D 3x^2ydxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^4}} 3x^2ydy = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^4)dx = \frac{4}{7}$$

Đoạn BA: $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{đi từ } B(-1,0) \text{ đến } A(1,0) \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{2}{4x^2+1}dx = 2\arctan 2$

Vậy $I = 4/7 - 2\arctan 2$

Câu 41: Tính diện tích của miền D giới hạn bởi L: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ với trục Ox biết rằng t đi từ 2π đến 0

Đáp án: **B.** 12π (đvdt)

Giải:

Ta có: $\partial D = L \cup Ox$

$$\Rightarrow S_{(D)} = \int\limits_{L\cup Ox} xdy = \int\limits_{L} xdy + \int\limits_{Ox} xdy = \int\limits_{L} xdy = \int_{2\pi}^{0} 2(t - \sin t).2\sin t\, dt = 12\pi$$

Câu 42: Tính công của lực $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (3x+4y)\vec{j}$ làm dịch chuyển một chất điểm từ $A(1,3)$ đến $B(2,4)$ dọc theo đoạn thẳng AB. (đvc: đơn vị công)

Đáp án: **D.** 27 (đvc)

Giải:

Công của lực $\vec{F}$ là: $W = \int\limits_L (x+2y)dx + (3x+4y)dy$

Đoạn thẳng AB: $\begin{cases} y = x + 2 \Rightarrow dy = dx \\ \text{đi từ } A(1,3) \text{ đến } B(2,4) \end{cases}$

$$\Rightarrow W = \int_{1}^{2} (x + 2x + 4 + 3x + 4x + 8)dx = 27 \text{ (đơn vị công)}$$

Câu 43: Tính khối lượng của đường cong vật chất L có phương trình $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \le t \le \pi/2 \end{cases}$ biết hàm mật độ là $p(x,y) = y$

Đáp án: **A.** 1 (đvkl)

Giải:

Khối lượng của đường cong vật chất L được tính theo công thức:

$$m = \int_L p(x,y)ds = \int_L yds$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \le t \le \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ 0 \le t \le \pi/2 \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = dt$$

$$\Rightarrow m = \int_L yds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = 1 \text{ (đvkl)}$$

Câu 44: Tính công làm dịch chuyển một chất điểm từ A(0,1) đến B(1,0) của lực $\vec{F} = [8x^3 - 2y\ln(1+x^2y^2)]\vec{\imath} + [5y^4 - 2x\ln(1+x^2y^2)]\vec{\jmath}$

Đáp án: **A.** 1 (đvc)

Giải:

Công của lực $\vec{F}$

$$W = \int_L [8x^3 - 2y\ln(1+x^2y^2)]dx + [5y^4 - 2x\ln(1+x^2y^2)]dy$$

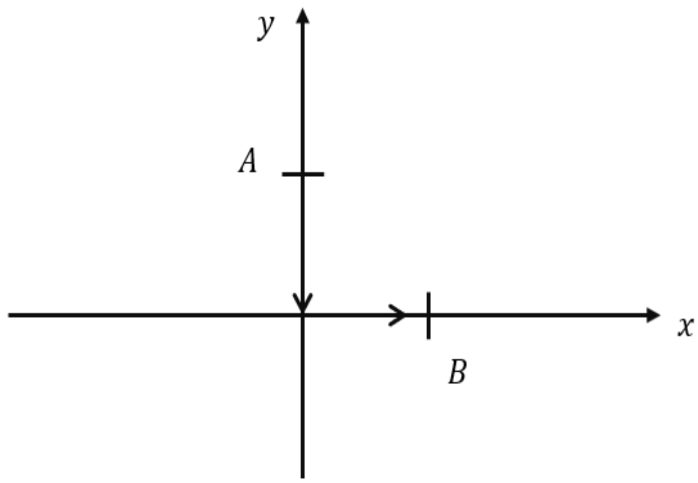
Với L là đường đi từ A đến B (chưa biết hình dạng)

Đặt $\begin{cases} P = [8x^3 - 2y\ln(1+x^2y^2)] \\ Q = [5y^4 - 2x\ln(1+x^2y^2)] \end{cases}$

$$\Rightarrow P'_y = Q'_x = -2\ln(1+x^2y^2) - \frac{4x^2y^2}{1+x^2y^2}$$

$\Rightarrow$ Tích phân W không phụ thuộc vào đường đi

Chọn đường đi là đường gấp khúc AOB với $A(0,1)$ và $B(1,0), O(0,0)$



$$W = \int_{AOB} Pdx + Qdy = \int_{AO} Pdx + Qdy + \int_{OB} Pdx + Qdy$$

$$AO: \begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ \text{Đi từ A}(0,1) \rightarrow O(0,0) \end{cases} \Rightarrow \int_{AO} Pdx + Qdy = \int_1^0 5y^4 dy = -1$$

$$OB: \begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ \text{Đi từ O}(0,0) \rightarrow B(1,0) \end{cases} \Rightarrow \int_{OB} Pdx + Qdy = \int_0^1 8x^3 dx = 2$$

$$\Rightarrow W = \int_{AOB} Pdx + Qdy = \int_{AO} Pdx + Qdy + \int_{OB} Pdx + Qdy = 1(\text{đvc})$$

Câu 45: Tính khối lượng của đường cong vật L chất có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ biết hàm mật độ là $p(x, y) = x^2$

Đáp án: **D.** π

<u>**Giải:**</u>

Khối lượng: $m = \int_L xds$

Tham số hóa: $\begin{cases} x = cost \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = dt$

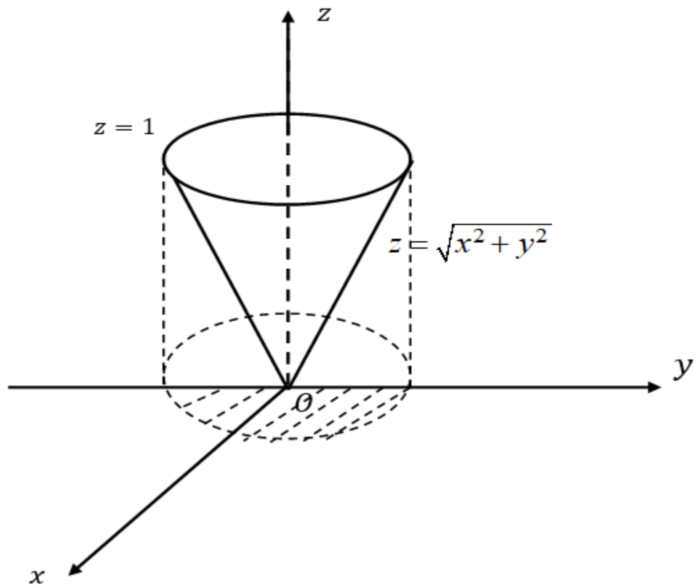
$$\Rightarrow m = \int_L x^2 ds = \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 dt = \pi \text{ (đvkl)}$$

Tích phân mặt

Câu 46: Tính $\iint\limits_S xydS$ với S là mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \le 1, x \ge 0$

Đáp án: **A.** 0

Giải:



Ta có: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$

$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là: $D: x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$

$$\Rightarrow \iint\limits_S xydS = \sqrt{2} \iint\limits_D xydxdy$$

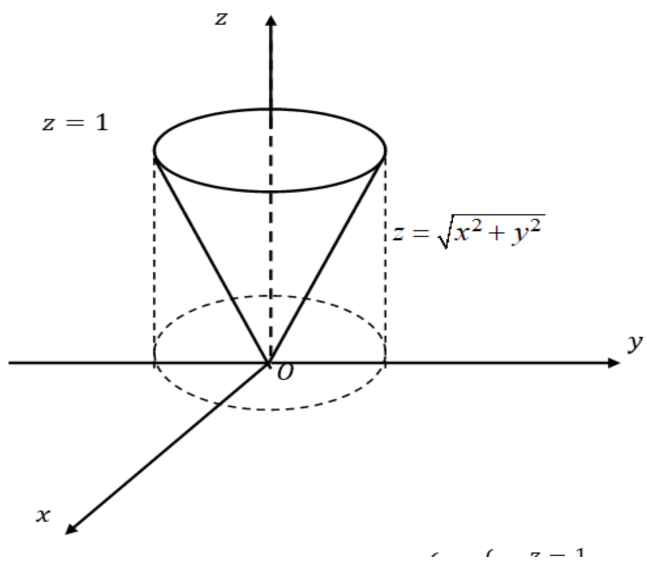
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_S xy dS = \sqrt{2} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos\varphi \sin\varphi \,.\, r dr = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = 0$$

Câu 47: Tính $\iint_S x^2 dS$ với S là biên của miền giới hạn bởi mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1$

Đáp án: **C.** $\dfrac{\pi(1+\sqrt{2})}{4}$

<u>Giải:</u>



S là biên của miền $V: \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 \Rightarrow S$ gồm hai mặt $\begin{cases} S_1: \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \\ S_2: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_S x^2 dS = \iint_{S_1} x^2 dS + \iint_{S_2} x^2 dS$$

Xét mặt $S_1: \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow z'_x = z'_y = 0 \Rightarrow dS = dxdy$

Hình chiếu của mặt S_2 lên Oxy là: $D: x^2 + y^2 \le 1$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_1} x^2 dS = \iint\limits_{D} x^2 dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iint\limits_{D} x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2\varphi\, r dr = \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Xét mặt S_2:

Có: $z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy$

Hình chiếu của mặt S_2 lên Oxy là: $D: x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_2} x^2 dS = \sqrt{2} \iint\limits_{D} x^2 dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

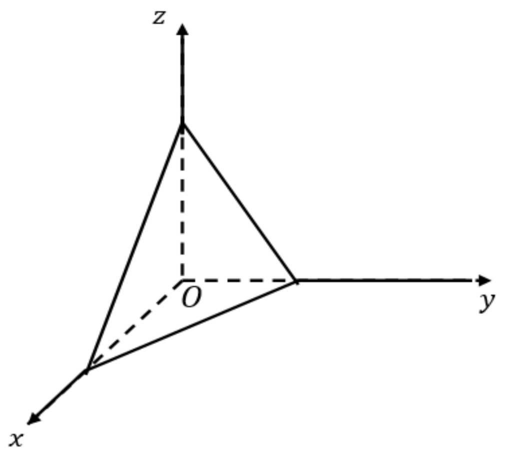
$$\Rightarrow \iint\limits_{S_2} x^2 dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2\varphi\,.\, r dr = \cdots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S} x^2 dS = \iint\limits_{S_1} x^2 dS + \iint\limits_{S_2} x^2 dS = \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$$

Câu 48: Tìm m để $\iint\limits_{S} (x+y+mz) dS = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ với S là mặt $2x + 4y + 2z = 4$ và điều kiện $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

Đáp án: **B.** $m = 1$

Giải:



Mặt S: $\begin{cases} z = 2 - 2y - x \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = -1 \\ z'_y = -2 \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{6}dxdy$

Hình chiếu của S lên Oxy là miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 - x/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint\limits_S (x + y + mz)dS = \sqrt{6}\iint\limits_D (x + y + 2m - 2my - mx)dxdy$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} (x + y + 2m - 2my - mx)dy = \frac{5\sqrt{6}}{3} \Rightarrow m = 1$$

Câu 49: Tính $\iint\limits_S xyzdS$ với S là mặt $x - 2y + 3z - 4 = 0$ giới hạn trong mặt trụ có phương trình $2x^2 + 3y^2 = 6$

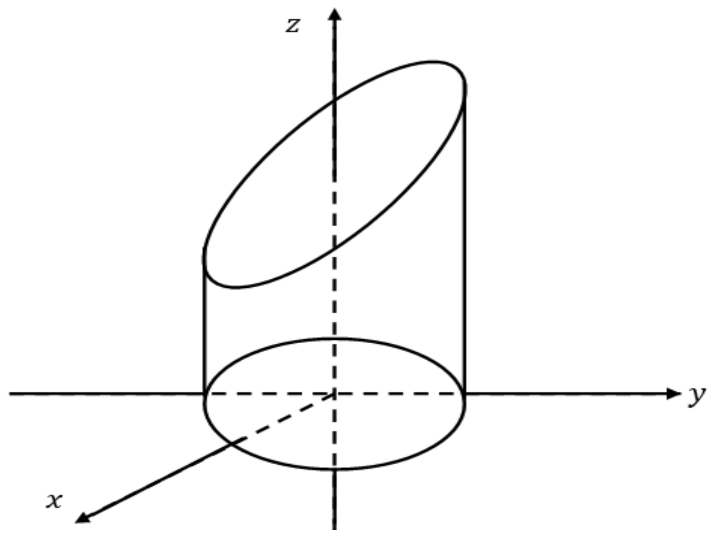
Đáp án: **B.** 0

Giải:

Mặt $z = \dfrac{4 - x + 2y}{3} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \dfrac{\sqrt{14}}{3}dxdy$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là $D: 2x^2 + 3y^2 \leq 6$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_S xyzdS = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_D xy\frac{4 - x + 2y}{3}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{9}\iint\limits_D xy(4 - x + 2y)dxdy$$



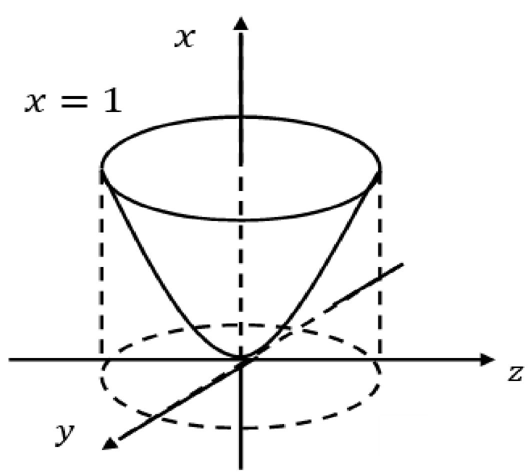
$$\begin{cases} \text{Miền } D \text{ đối xứng qua } Ox, Oy \\ f(x,y,z) = 4xy \text{ lẻ với biến } x \\ g(x,y,z) = -x^2y \text{ lẻ với biến } y \\ h(x,y,z) = 2xy^2 \text{ lẻ với biến } x \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_D 4xydxdy + \iint\limits_D -x^2ydxdy + \iint\limits_D 2xy^2dxdy = 0$$

$\Rightarrow I = 0$

Câu 50: Biết $\iint\limits_S xdS = \left(\frac{a\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{b}\right)\pi$ biết S là phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$. Kết luận nào sau đây là chính xác?

Đáp án: **A.** $a + b < 70$

Giải:



Mặt $x = y^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} x'_y = 2y \\ x'_z = 2z \end{cases}$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + (x'_z)^2}dxdz = \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}dydz$$

Hình chiếu của S lên Oyz là $D: y^2 + z^2 \leq 1$

$$I = \iint_S xdS = \iint_D (y^2 + z^2)\sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}dydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sqrt{1 + 4r^2}.rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sqrt{1 + 4r^2}d(r^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 u\sqrt{1 + 4u}du$$

Đặt $t = \sqrt{1 + 4u} \Rightarrow dt = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 4u}}du = \dfrac{2}{t}du \Rightarrow du = \dfrac{t}{2}dt$

$$\Rightarrow \int_0^1 u\sqrt{1 + 4u}du = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{t^2 - 1}{4}.t.\frac{t}{2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}.\left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60}\right).\int_0^{2\pi} d\varphi = \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60}\right)\pi \Rightarrow a = 5, b = 60$$

Câu 51: Tính $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$ với S là phần mặt $2z = x^2 + y^2, 0 \leq x, y \leq 1$. Chọn đáp án gần với kết quả của tích phân nhất.

Đáp án: **A.** 2

Giải:

Mặt $S: z = \dfrac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$

Hình chiếu của S lên Oxy là $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS = \iint_D (1+x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (1+x^2+y^2)dy = \cdots = \frac{5}{3}$$

Câu 52: Biết $\iint_S dS = \frac{4}{15}(33 - a\sqrt{3} - b\sqrt{2})$ với S là mặt $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ với điều kiện $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$. Tìm khẳng định đúng?

Đáp án: **C.** $a - b = 5$

Giải:

Hình chiếu của mặt $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ với $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ lên Oxy là miền $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

Ta có: $z'_x = \sqrt{x}, z'_y = \sqrt{y} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{1+x+y}dxdy$

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+x+y}dxdy = \int_0^1 dy \int_0^2 \sqrt{1+x+y}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[(3+y)^{\frac{3}{2}} - (1+y)^{\frac{3}{2}}\right]dy = \frac{4}{15}\left(33 - 9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right)$$

$\Rightarrow a = 9, b = 4$

Câu 53: Tính $\iint_S zy^2 dS$ với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt $z = 1$ và $z = 2$

Đáp án: **D.** $\frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$

Giải:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iint\limits_S zy^2 dS = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}.y^2 dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r.r^2.\sin^2\varphi.rdr = \frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$$

Câu 54: Tính $\iint\limits_S yx^2 dS$ với S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2+z^2}, 1 \le y \le 2$

Đáp án: B. $\frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$

Giải:

$$y = \sqrt{x^2+z^2} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ y'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}dxdz = \sqrt{2}dxdz$$

Hình chiếu của mặt S lên Oxz là $D: 1 \le x^2+z^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iint\limits_S yx^2 dS = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+z^2}.x^2 dxdz = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r.r^2.\sin^2\varphi.rdr = \frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$$

Câu 55: Tính $\iint\limits_S xdS$ với S là mặt trụ $x^2+y^2 = 4$ nằm giữa hai mặt $z = 0$ và $z = 6$

Đáp án: A. 0

Giải:

Chia mặt trụ thành hai mặt $S_1: \begin{cases} x = \sqrt{4-y^2} \\ 0 \le z \le 6 \end{cases}$ và $S_2: \begin{cases} x = -\sqrt{4-y^2} \\ 0 \le z \le 6 \end{cases}$

Hình chiếu của S_1 và S_2 lên Oyz là $D: \begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 6 \end{cases}$

$$\iint\limits_S xdS = \iint\limits_{S_1} xdS + \iint\limits_{S_2} xdS$$

Xét mặt $S_1:\begin{cases} x=\sqrt{4-y^2} \\ 0\le z\le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-y^2}} \\ x'_z=0 \end{cases} \Rightarrow dS=\sqrt{(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz=\dfrac{|y|dydz}{\sqrt{4-y^2}}$

$$\iint\limits_{S_1} xdS = \iint\limits_{D} \sqrt{4-y^2}.\frac{|y|}{\sqrt{4-y^2}}dydz = \int\limits_0^6 dz \int\limits_{-2}^{2} |y|\,dy = 24$$

Xét mặt $S_2:\begin{cases} x=-\sqrt{4-y^2} \\ 0\le z\le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_y=\dfrac{y}{\sqrt{4-y^2}} \\ x'_z=0 \end{cases} \Rightarrow dS=\sqrt{(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz=\dfrac{|y|dydz}{\sqrt{4-y^2}}$

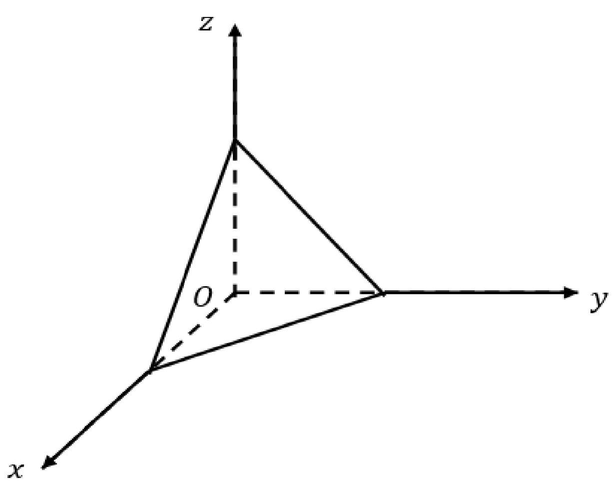
$$\iint\limits_{S_2} xdS = \iint\limits_{D} -\sqrt{4-y^2}.\frac{|y|}{\sqrt{4-y^2}}dydz = -\int\limits_0^6 dz \int\limits_{-2}^{2} |y|\,dy = -24$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S} xdS = \iint\limits_{S_1} xdS + \iint\limits_{S_2} xdS = 0$$

Câu 56: Tính $\iint\limits_S (1-x-z)dzdx$ với S là mặt trên của mặt $x+y+z=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

Đáp án: **C.** $\dfrac{1}{6}$

Giải:



Mặt $S: y=1-x-z, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, (\widehat{\vec{n},Oy})<\pi/2$

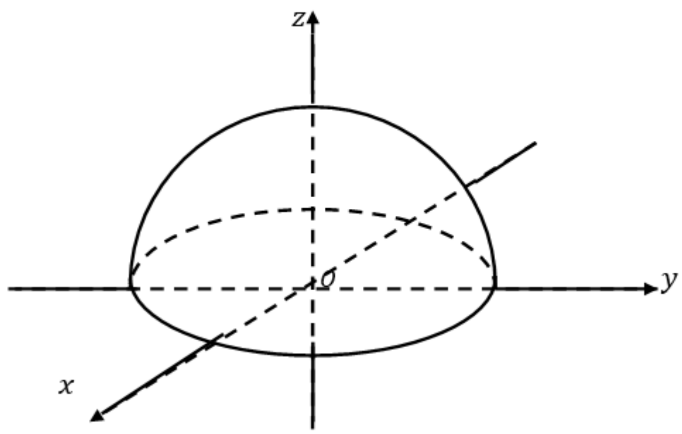
Hình chiếu của mặt S lên Oxz là $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - x \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_S (1 - x - z)dzdx = +\iint_D (1 - x - z)dzdx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - z)dz = \cdots = \frac{1}{6}$$

Câu 57: Tính $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$ với S là mặt nửa cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ phía trên Oxy, mặt S hướng lên trên.

Đáp án: **A.** π

Giải:



Mặt $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, hướng lên trên, $(\vec{n}, Oz) < \pi/2$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là $(D): x^2 + y^2 \le 1$

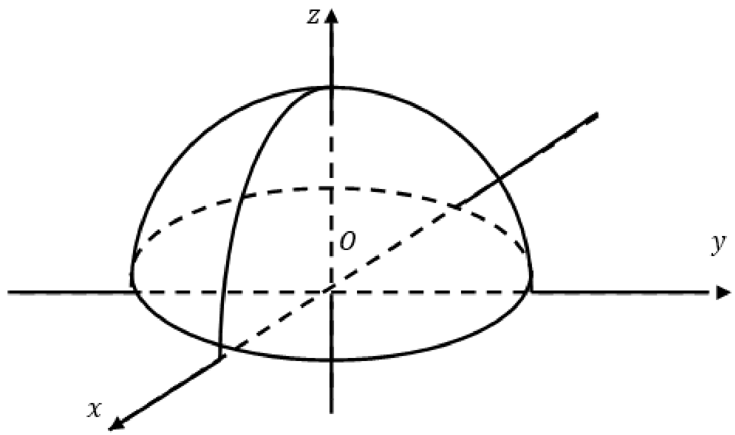
$$\Rightarrow \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy = +\iint_D (x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2)dxdy = \iint_D 1dxdy$$

$$= S_{(D)} = \pi R^2 = \pi$$

Câu 58: Cho $I = \iint_S ydzdx + z^2dxdy$, S là phía ngoài mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với điều kiện $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. Chọn đáp án gần nhất với kết quả của I

Đáp án: **A.** 1

Giải:



$$I = \iint\limits_S ydzdx + \iint\limits_S z^2dxdy = I_1 + I_2$$

Xét I_1, mặt $S: y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, x \geq 0, z \geq 0, (\vec{n}, Oy) < \pi/2$

Hình chiếu của mặt S lên Oxz là $D_{xz}: x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_S ydzdx = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^2 - z^2}dxdz$$

Đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases} J = r$. Miền $D_{xz}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}.rdr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}.d(r^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - u}.du = \frac{1}{6}\pi$$

Xét I_2, mặt $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0, (\vec{n}, Oz) < \pi/2$

Hình chiếu của mặt S lên Oxz là $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

$$\Rightarrow I_2 = \iint\limits_S z^2dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (1 - x^2 - y^2)dxdy$$

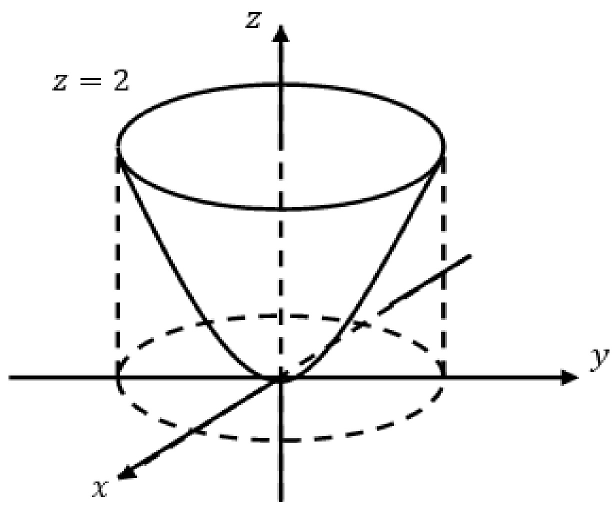
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} J = r$. Miền $D_{xy}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2).rdr = \frac{1}{8}\pi$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{24}\pi$

Câu 59: Tính $I = \iint\limits_S xdzdx + z^2dxdy$ với S là phía ngoài mặt $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $0 \le z \le 2, y \ge 0$

Đáp án: **D.** $\frac{-4\pi}{3}$

Giải:



$$I = \iint\limits_S xdzdx + z^2dxdy = \iint\limits_S xdzdx + \iint\limits_S z^2dxdy = I_1 + I_2$$

Xét I_1, mặt $S: z = x^2 + y^2, (\vec{n}, Oy) < \pi/2$

Hình chiếu của S lên Oxz là $D_{xz}: \begin{cases} x^2 \le z \le 2 \\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_S xdzdx = \iint\limits_{D_{xz}} xdzdx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} x\, dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x(2 - x^2)dx = 0$$

Xét I_2, mặt $S: z = x^2 + y^2, (\vec{n}, Oz) > \pi/2$

Hình chiếu của S lên Oxy là $D_{xy}: x^2 + y^2 \le 2, y \ge 0$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $J = r$. Miền (D): $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_S z^2 dxdy = -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)^2 dxdy = -\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^4.rdr = \frac{-4}{3}\pi$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{-4\pi}{3}$

Câu 60: Tính $\iint_S xz^2dydz + 4yx^2dzdx + 9zy^2dxdy$ với mặt $S: 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Đáp án: B. $\dfrac{2\pi}{15}$

<u>Giải:</u>

Mặt S là mặt trơn kín giới hạn miền $V: 4x^2 + 9y^2 + z^2 \le 1$, hướng pháp tuyến ngoài.

Đặt $\begin{cases} P = xz^2 \\ Q = 4yx^2 \\ R = 9zy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = z^2 \\ Q'_y = 4x^2 \\ R'_z = 9y^2 \end{cases}$, P'_x, Q'_y, R'_z liên tục

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$I = \iint_S xz^2dydz + 4yx^2dzdx + 9zy^2dxdy = \iiint_V (4x^2 + 9y^2 + z^2)dxdydz$$

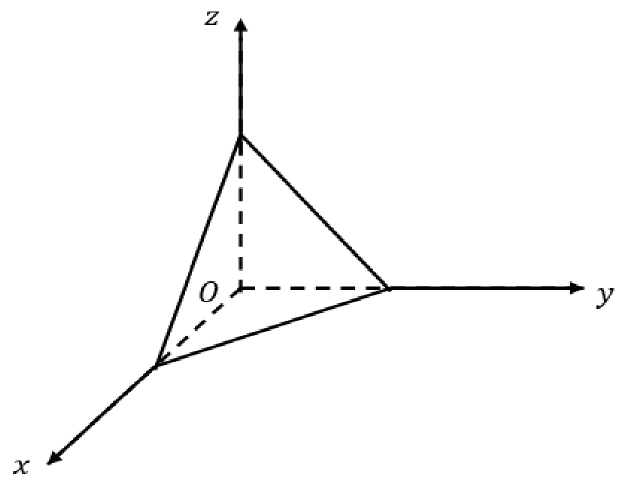
Đặt $\begin{cases} 2x = r\sin\theta\cos\varphi \\ 3y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \dfrac{1}{3}r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $|J| = \dfrac{1}{6}r^2\sin\theta$. Miền $V: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.r^2\sin\theta\, dr = \frac{2}{15}\pi$$

Câu 61: Biết $I = \iint_S 2xydydz + (x+y^2)dzdx + (4x+y^2)dxdy = \dfrac{a}{b}$ với mặt S là biên của miền $V: x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ hướng ra ngoài. Tìm khẳng định đúng

Đáp án: C. $a + b = 7$

Giải:



Mặt S kín giới hạn miền $V: x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$\Leftrightarrow V: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$ hướng ra ngoài.

Đặt $\begin{cases} P = 2xy \\ Q = x + y^2 \\ R = 4x + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 2y \\ Q'_y = 2y \\ R'_z = 0 \end{cases}, P'_x, Q'_y, R'_z$ liên tục.

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$I = \iiint\limits_V 4ydxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 4ydz = \cdots = \frac{1}{6} \Rightarrow a = 1, b = 6$$

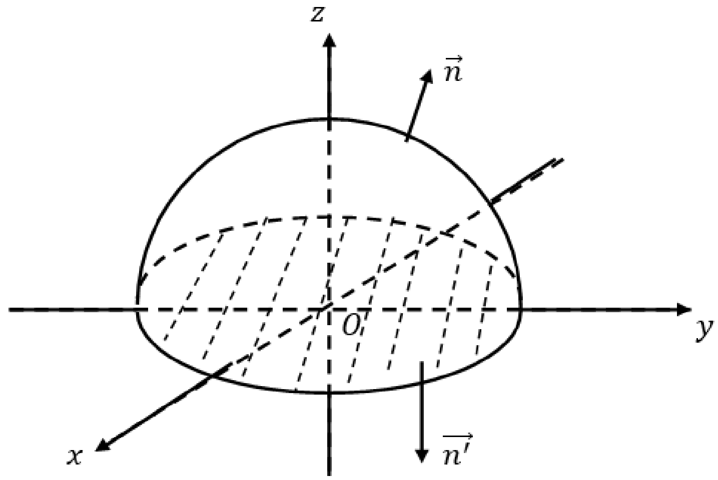
Câu 62: Tính $I = \iint\limits_S (xy^2 + 2z^3)dydz + (z^3 + 2y)dzdx + x^2zdxdy$ với S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ hướng ra ngoài mặt cầu.

Đáp án: **A.** $\dfrac{8\pi}{5}$

Giải:

Bổ sung thêm mặt $S': \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ hướng xuống dưới

Mặt $S \cup S'$ là mặt cong kín, giới hạn miền $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ hướng pháp tuyến ngoài.



Đặt $\begin{cases} P = xy^2 + 2z^3 \\ Q = z^3 + 2y \\ R = x^2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = y^2 \\ Q'_y = 2 \\ R'_z = x^2 \end{cases}$, P'_x, Q'_y, R'_z liên tục

$$I = \oiint\limits_{S \cup S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1

$$\Rightarrow I_1 = \iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + 2)dxdydz = \iiint\limits_{V} (x^2 + y^2)dxdydz + 2V_{(V)}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $|J| = r^2\sin\theta$. Miền (V): $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2(\sin\theta)^2 . r^2 \sin\theta\, dr = \frac{4}{15}\pi$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{4}{15}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{5}\pi$$

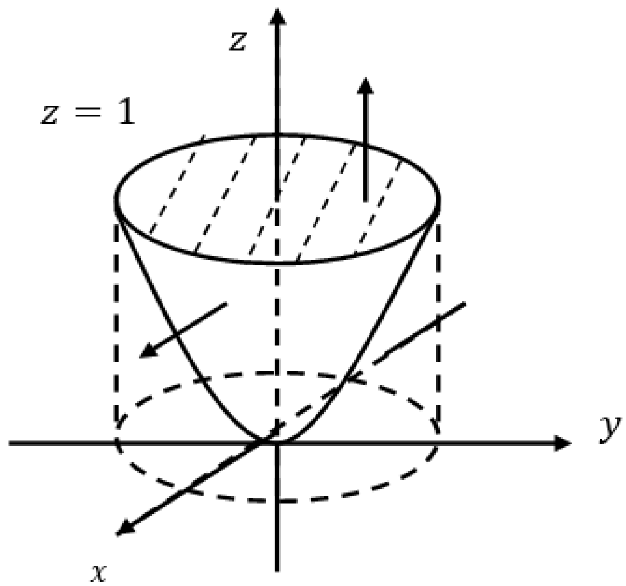
Mặt S': $\begin{cases} z = 0 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$, $(\vec{n}, Oz) > \frac{\pi}{2}$, có hình chiếu lên Oxy là D: $x^2 + y^2 \le 1$

$$\Rightarrow I_2 = -\iint\limits_{D} x^2 . 0dxdy = 0 \Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{8}{5}\pi$$

Câu 63: Tính $I = \iint\limits_S (x^3+2yz)dydz+(3x^2y+y)dzdx+(6y^2z+xy)dxdy$ với S là mặt $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$, hướng xuống dưới.

Đáp án: **B.** 0

<u>Giải:</u>



Bổ sung thêm mặt S': $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$, hướng lên trên

Mặt $S \cup S'$ là mặt cong trơn kín, giới hạn miền $V: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, hướng pháp tuyến ngoài

Đặt $\begin{cases} P = x^3 + 2yz \\ Q = 3x^2y + y \\ R = 6y^2z + xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 3x^2 \\ Q'_y = 3x^2 + 1 \\ R'_z = 6y^2 \end{cases}$, P'_x, Q'_y, R'_z liên tục

$$I = \oiint\limits_{S \cup S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint\limits_{S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1

$$\Rightarrow I_1 = \iiint\limits_V (6x^2 + 6y^2 + 1)dxdydz$$

Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $J = r$. Miền V: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 (6r^2 + 1) r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(6r^2 + 1)(1 - r^2) dr = \frac{3\pi}{2}$$

Mặt S': $\begin{cases} z = 1 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$, $(\vec{n}, Oz) < \pi/2$.

Hình chiếu của S' lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 1$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{S'} (6y^2 + xy) dxdy = \iint_D (6y^2 + xy) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \left[6r^2 (\sin\varphi)^2 + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right] dr$$

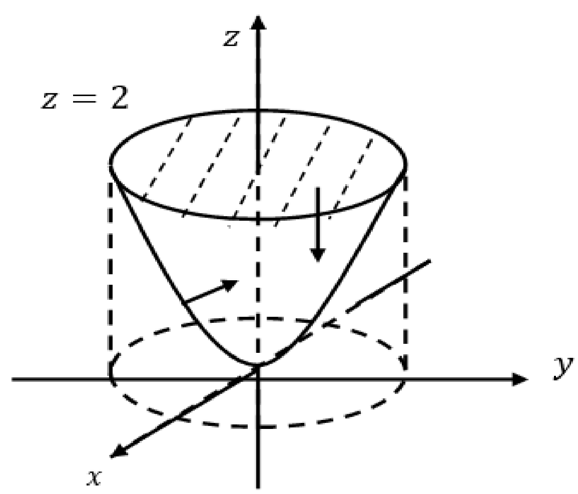
$$= \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = 0$$

Câu 64: Tính $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} (-xdydz - ydzdx + dxdy)$ với S là mặt $2z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ theo chiều âm của trục Ox

Đáp án: **C.** $\frac{(-2 + 10\sqrt{5})\pi}{3}$

Giải:



Bổ sung thêm mặt S': $\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$, hướng lên xuống dưới

Mặt $S \cup S'$ là mặt cong trơn kín, giới hạn miền $V: (x^2 + y^2)/2 \le z \le 2$, hướng pháp tuyến trong

Đặt $\begin{cases} P = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ Q = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ R = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = \dfrac{-y^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ Q'_y = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ R'_z = 0 \end{cases}, P'_x, Q'_y, R'_z$

$$I = \oiint_{S \cup S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint_{S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1

$$\Rightarrow I_1 = -\iiint_V \frac{-x^2 - y^2 - 2}{(x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dxdydz$$

Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, J = r \Rightarrow V: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r^2/2 \le z \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 \frac{-r^2 - 2}{(r^2 + 1)\sqrt{r^2 + 1}} . rdz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{(r^2 + 2)r}{(r^2 + 1)\sqrt{r^2 + 1}} . \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{(r^2 + 2)r}{(r^2 + 1)\sqrt{r^2 + 1}} . \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \pi \int_0^2 \frac{(r^2 + 2)}{(r^2 + 1)\sqrt{r^2 + 1}} . \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) d(r^2)$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{(u + 2)}{(u + 1)\sqrt{u + 1}} . \left(2 - \frac{u}{2}\right) du = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \frac{(u + 2)(4 - u)}{(u + 1)\sqrt{u + 1}} du$$

Đặt $\sqrt{u+1} = t \Rightarrow u + 1 = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{\sqrt{5}} \frac{(t^2+1)(5-t^2)}{t^3} 2tdt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8\sqrt{5}}{3} + \frac{8}{3}\right) = \pi\left(\frac{4\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

Mặt S': $\begin{cases} z = 2 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}, (\vec{n}, Oz) > \pi/2.$

Hình chiếu của S' lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \le 4$

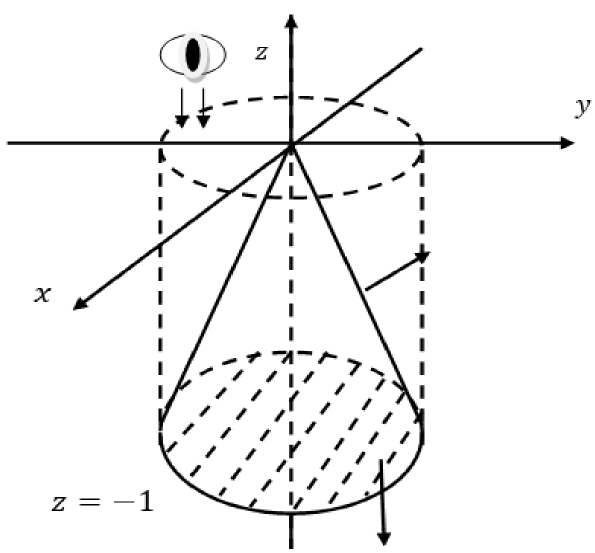
$$\Rightarrow I_2 = \iint\limits_{S'} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \iint\limits_{D} \frac{-dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \cdots = -2\pi(\sqrt{5}-1)$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{(-2+10\sqrt{5})\pi}{3}$$

Câu 65: Biết $\iint\limits_S xdydz + zdxdy = \frac{a}{b}\pi$ với S là phần trên của mặt nón có phương trình $z = -\sqrt{x^2+y^2}, -1 \le z \le 0$ khi nhìn từ chiều dương trục Oz. Tính $2a + b$

Đáp án: **A.** 1

__**Giải:**__



Bổ sung thêm mặt S': $\begin{cases} z = -1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$ hướng xuống dưới

Mặt kín $S \cup S'$ giới hạn miền V: $-1 \le z \le -\sqrt{x^2+y^2}$

Đặt $\begin{cases} P = x \\ Q = 0 \\ R = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 1 \\ Q'_y = 0 \\ R'_z = 1 \end{cases}$. P'_x, Q'_y, R'_z liên tục.

$$\iint_S xdydz + ydxdy = \oiint_{S\cup S'} xdydz + zdxdy - \iint_{S'} xdydz + zdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1

$$I_1 = \iiint_V 2dxdydz = 2V_{(V)} = 2.\frac{1}{3}\pi R^2.h = \frac{2\pi}{3}$$ (Thể tích hình nón)

Mặt S': $\begin{cases} z = -1 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$, $(\vec{n}, Oz) > \pi/2$ có hình chiếu lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \le 1$

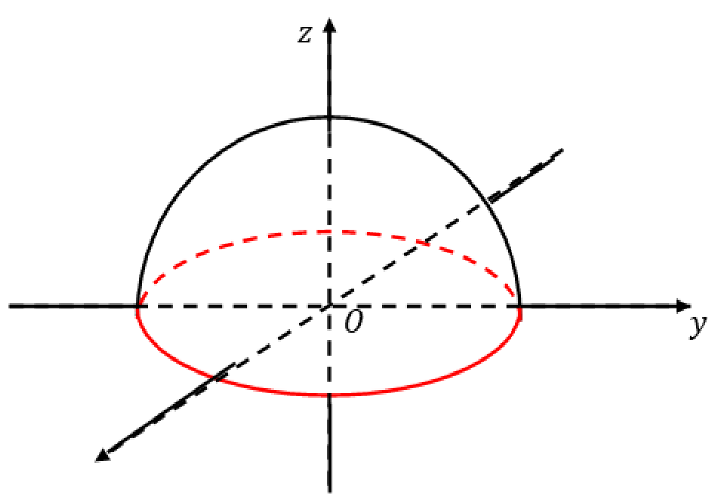
$$I_2 = -\iint_D -1dxdy = \iint_D dxdy = S_{(D)} = \pi R^2 = \pi$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{2\pi}{3} - \pi = \frac{-\pi}{3} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

Câu 66: Tính $\oint_C x^2y^3dx + dy + zdz$ dọc theo đường tròn $C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ chiều dương giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Đáp án: **D.** $\frac{-\pi}{8}$

Giải:



Đường cong C giới hạn phần mặt cầu $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ hướng lên trên

Áp dụng công thức Stoke:

$$\oint_C x^2y^3dx + dy + zdz = \iint_S -3x^2y^2dxdy$$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 1$

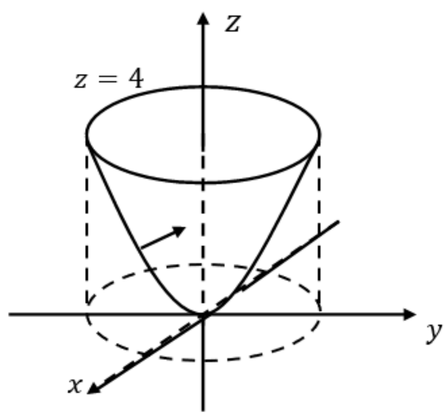
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_S -3x^2y^2dxdy = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sin^2\varphi\, r^2\cos^2\varphi\,.rdr = \cdots = \frac{-\pi}{8}$$

Câu 67: Tính tích phân $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2xdydz - 2ydzdx + dxdy)$ với S là mặt có phương trình $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4$ theo chiều $z \geq 0$

Đáp án: **B.** $\frac{(17\sqrt{17}-1)\pi}{6}$

Giải:



Đặt $F(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

Do $\widehat{(\vec{n}, Oz)} < \pi/2$ nên $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-2x, -2y, 1) \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$I = \iint_S (P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma)dS = \cdots = \iint_S 1.dS$$

Mặt $S: z = x^2 + y^2 \Rightarrow z'_x = 2x, z'_y = 2y \Rightarrow dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$

Hình chiếu của S lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 4$

$$\Rightarrow I = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2}.rdr = \frac{2\pi}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2}d(r^2) = \pi\int_0^4 \sqrt{1 + 4u}du$$

$$= \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6}$$

Câu 68: Tính tích phân $I = \iint_S (6z^3 - 9y)dydz + (3x - 2z^3)dzdx + (3y - 3x)dxdy$ với S là mặt $x^2 + 3y^2 + z^4 = 1, z \geq 0$, hướng lên trên.

Đáp án: **C.** 0

Giải:

Đặt $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^4 - 1$ **C.** 0

Vecto pháp tuyến $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2x, 6y, 4z^3)$ (do $\widehat{(\vec{n}, Oz)} < \pi/2$)

$$|\vec{n}| = \sqrt{4x^2 + 36y^2 + 16z^6} = 2\sqrt{x^2 + 9y^2 + 4z^6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{n_x}{|\vec{n}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 4z^6}} \\ \cos\beta = \dfrac{n_y}{|\vec{n}|} = \dfrac{3y}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + 4z^6}} \\ \cos\gamma = \dfrac{n_z}{|\vec{n}|} = \dfrac{2z^3}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + 4z^6}} \end{cases}$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma)dS$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \frac{x(6z^3 - 9y) + 3y(3x - 2z^3) + 2z^3(3y - 3x)}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + 4z^6}} dS = 0$$

Câu 69: Tính $\iint_S (2x+xy)dydz+(y+2xz)dzdx+(1+6z+z^2)dxdy$ với S là mặt nằm trong của nửa cầu $z = -\sqrt{16 - (x^2 + y^2 + z^2)}$

Đáp án: **B.** $\left(80 - 192\sqrt{2}\right)\pi$

Giải:

Bổ sung thêm mặt $S': \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$ hướng theo chiều âm trục Oz.

Mặt $S \cup S'$ tạo thành mặt cong kín, hướng pháp tuyến trong giới hạn miền

$$V: -\sqrt{\frac{16 - x^2 - y^2}{2}} \leq z \leq 0$$

Đặt $I = \iint_S (2x+xy)dydz+(y+2xz)dzdx+(1+6z+z^2)dxdy$

Đặt $\begin{cases} P = 2x + xy \\ Q = y + 2xz \\ R = 1 + 6z + z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 2 + y \\ Q'_y = 1 \\ R'_z = 6 + 2z \end{cases}$ liên tục

$$I = \oiint_{S \cup S'} Pdyz + Qdzdx + Rdxdy - \iint_{S'} Pdyz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrgradsky cho tích phân I_1

$$I_1 = -\iiint_V (2 + y + 1 + 6 + 2z)dxdydz = -\iiint_V (9 + y + 2z)dxdydz$$

Do $f(x, y, z) = y$ là hàm lẻ với biến y, miền V đối xứng qua Oxz

$$\Rightarrow \iiint_V ydxdydz = 0 \Rightarrow I_1 = -\iiint_V (9 + 2z)dxdydz$$

Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 16$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, J = r \Rightarrow V: \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\sqrt{(16 - r^2)/2} \leq z \leq 0 \end{cases}$

$$I_2 = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 dr \int_{-\sqrt{\frac{(16-r^2)}{2}}}^{0} (9+2z) = \cdots = -192\sqrt{2}\pi + 64\pi$$

Xét tích phân I_2

Mặtn S': $\begin{cases} z = 0 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$ hướng theo chiều âm trục $Oz, (\vec{n}, Oz) > \pi, 2$ có hình chiếu lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 16$

$$\Rightarrow I_2 = -\iint_D 1dxdy = -16\pi$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = \left(80 - 192\sqrt{2}\right)\pi$$

Câu 70: Tính $\iint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$ biết S là mặt ngoài của tứ diện $OABC$ với $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$

Đáp án: **B.** $\frac{1}{8}$

Giải:

S là mặt giới hạn miền kín V: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$,vecto pháp tuyến hướng ra ngoài.

Đặt $\begin{cases} P = xy \\ Q = yz \\ R = zx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = y \\ Q'_y = z \\ R'_z = x \end{cases}$ liên tục

Áp dụng công thức Ostrogradsky

$$\iint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy = \iiint_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \frac{1}{8}$$

Câu 71: Biết $\iint_S 2x^2dydz + y^2dzdx - z^2dxdy = a\pi + b$, chọn khẳng định đúng

Đáp án: **A.** $a + 3b = 12$

Giải:

Mặt S kín giới hạn miền $V: 0 \le y \le \sqrt{1-z^2}, 0 \le x \le 2$, hướng pháp tuyến ngoài

Đặt $P = 2x^2, Q = y^2, R = -z^2 \Rightarrow P'_x = 4x, Q'_y = 2y, R'_z = -2z$ liên tục.

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$I = \iint\limits_S 2x^2dydz + y^2dzdz - z^2dxdy = \iiint\limits_V (4x + 2y - 2z)dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases}, J = r \Rightarrow$ Miền V: $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

$$I = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 (2x + r\cos\varphi).rdx = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (4r + 2r^2\cos\varphi)dr = 4\pi + \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = \frac{8}{3}$$

Câu 72: Biết $I = \iint\limits_S (x+z)dydz + (y+x)dzdx + (z+y)dxdy = \frac{a}{b}\pi$ với S là mặt trong của parabol $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt $x + z = 2$. Tính $a - b$

Đáp án: **B.** 49

<u>Giải:</u>

Bổ sung thêm mặt $S': x + z = 2$ hướng theo chiều âm trục Oz nằm trong mặt parabol $z = x^2 + y^2$

Ta có mặt $S \cup S'$ là mặt kín, hướng pháp tuyến trong, giới hạn miền

$$V: x^2 + y^2 \le z \le 2 - x$$

Đặt $\begin{cases} P = x + z \\ Q = y + x \\ R = z + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 1 \\ Q'_y = 1 \\ R'_z = 1 \end{cases}$ liên tục

$$I = \oiint\limits_{S\cup S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho tích phân I_1

$$I_1 = -\iiint_V 3dxdydz$$

Hình chiếu của V lên Oxy là D: $(x+1/2)^2 + y^2 = 9/4$

$$\Rightarrow I_1 = -3\iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{2-x} dz = -3\iint_D (2 - x - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= 3\iint_D (-2 + x + x^2 + y^2)dxdy = 3\iint_D \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4}\right]dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = -1/2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 3/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$I_1 = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(r^2 - \frac{9}{4}\right).rdr = \cdots = \frac{-243\pi}{32}$$

Xét tích phân I_2

Mặt S': $x + z = 2$ hướng theo chiều âm trục Oz có hình chiếu lên Oxy là D: $(x+1/2)^2 + y^2 = 9/4$, vecto pháp tuyến $\vec{n} = (-1,0,-1), |\vec{n}| = 1/\sqrt{2}$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S'} [-1.(x+z) + 0.(y+x) - 1.(z+y)]dS = \frac{-1}{\sqrt{2}}\iint_{S'} (x + y + 2z)\, dS$$

Với S': $z = 2 - x \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

$$\Rightarrow I_2 = -\iint_D (x + y + 4 - 2x)\, dxdy = \iint_D (x - y - 4)\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} + r\cos\varphi - r\sin\varphi - 4\right).rdr = \cdots = \frac{-81\pi}{8}$$

$I = I_1 - I_2 = \dfrac{81\pi}{32} \Rightarrow a = 81, b = 32$

Câu 73: Tính diện tích mặt S: $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$

Đáp án: C. $\sqrt{2}\,\pi$ (đvdt)

<u>Giải:</u>

Mặt $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow\ dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

Hình chiếu của S lên Oxy là D: $x^2 + y^2 \leq 1$

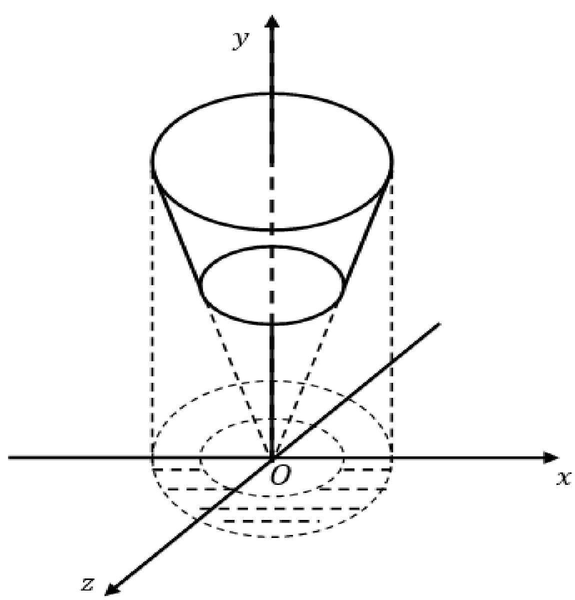
Diện tích mặt S là:

$$S_{(S)} = \iint\limits_S dS = \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}.S_{(D)} = \sqrt{2}\pi$$

Câu 74: Tính diện tích mặt cong S với S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ với điều kiện $1 \leq y \leq 2, z \geq 0$

Đáp án: A. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ (đvdt)

<u>Giải:</u>



Mặt S: $y = \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}dxdz = \sqrt{2}dxdz$

Hình chiếu của S lên Oxz là D: $1 \le x^2 + z^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$

Diện tích mặt cong S là:

$$S_{(S)} = \iint\limits_S dS = \sqrt{2}\iint\limits_D dxdz = \sqrt{2}\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^2 rdr = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi \text{ (đvdt)}$$

Câu 75: Tính diện tích mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt Oxy là $\dfrac{(a\sqrt{17} - 1)\pi}{b}$, tính $a + b$

Đáp án: **B.** 23

<u>Giải:</u>

Mặt $z = 4x - x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 4 - 2x \\ z'_y = -2y \end{cases}$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là D: $(x - 2)^2 + y^2 \le 4$

Diện tích mặt

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x - 2)^2 + 4y^2}dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r.\sqrt{1 + 4r^2}dr = \frac{\left(17\sqrt{17} - 1\right)\pi}{6} \Rightarrow a = 17, b = 6$$

Câu 76: Tính diện tích phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \le 1$

Đáp số: **A.** $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

Giải:

Mặt $x = y^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} x'_y = 2y \\ x'_z = 2z \end{cases}$

Hình chiếu của mặt S lên Oyz là $D: y^2 + z^2 \leq 1$

Diện tích mặt

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + (x'_z)^2}dydz = \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}dydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r.\sqrt{1 + 4r^2}dr = \frac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi}{6}$$

Câu 77: Tính diện tích mặt S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3$

Đáp án:

Giải:

Mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow\ dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

Hình chiếu của S lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 9$. Diện tích mặt S là:

$$S_{(S)} = \iint_S dS = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}.S_{(D)} = 9\sqrt{2}\pi$$

Lý thuyết trường:

Câu 78: Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l} = (1,2,-2)$ của $u = e^x(y^2 + z) - 2xyz^3$ tại $A(0,1,2)$

Đáp án: **B.** $\frac{-11}{3}$

Giải:

Ta có: $u = e^x(y^2+z) - 2xyz^3 \Rightarrow \begin{cases} u'_x = e^x(y^2+z) - 2yz^3 \\ u'_y = 2e^x y - 2xz^3 \\ u'_z = e^x - 6xyz^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x(A) = -13 \\ u'_y(A) = 2 \\ u'_z(A) = 1 \end{cases}$

$\vec{l} = (1,2,-2) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{3}, \cos\beta = \dfrac{2}{3}, \cos\gamma = \dfrac{-2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = (-13).\dfrac{1}{3} + 2.\dfrac{2}{3} + 1.\dfrac{-2}{3} = \dfrac{-11}{3}$

Câu 79: Cho $u(x,y,z) = x^3 + 3yx^2 + 2yz^2$. Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(A)$ với $\vec{n}$ là vecto pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 3, z \le 0$ tại điểm $A(1,1,-1)$

Đáp án: **A.** $-6\sqrt{3}$

Giải:

Xét $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$

$\Rightarrow$ Vecto pháp tuyến hướng ra ngoài của nửa cầu $x^2+y^2+z^2 = 3$ phía dưới Oxy tại $A(1,1,-1)$ là $\vec{n} = -\left(F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A)\right) = -(2,2,-2) = (-2,-2,2)$

$u(x,y,z) = x^3 + 3yx^2 + 2yz^2 \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 3x^2 + 6yx \\ u'_y = 3x^2 + 2z^2 \\ u'_z = 4yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x(A) = 9 \\ u'_y(A) = 5 \\ u'_z(A) = -4 \end{cases}$

$\vec{n} = (-2,-2,2) \Rightarrow |\vec{n}| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(A) = 9.\dfrac{-1}{\sqrt{3}} + 5.\dfrac{-1}{\sqrt{3}} + (-4)\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -6\sqrt{3}$

Câu 80: Biết nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trong không gian được cho bởi hàm

$$T(x,y,z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

ở đó T có đơn vị là °C và x, y, z là mét. Theo hướng nào thì nhiệt độ tăng nhanh nhất tại điểm $A(1,1,-2)$

Đáp án: **C.** $\left(\frac{-5}{8};\frac{-5}{4};\frac{15}{4}\right)$

Giải:

Xét vecto $\vec{l}$, đạo hàm của T theo hướng $\vec{l}$ tại $A(1,1,-2)$ là:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{l}}(A) = \overrightarrow{gradu}(A).\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$$

Để nhiệt độ tăng nhanh nhất $\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \vec{l}}(A)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \vec{l} \upuparrows \overrightarrow{gradu}(A) \Leftrightarrow \vec{l} = \overrightarrow{gradu}(A)$

$$\overrightarrow{gradu} = \left(\frac{-160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, \frac{-320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, \frac{-480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{gradu}(A) = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{15}{4}\right) \Rightarrow \vec{l} = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{15}{4}\right)$

Vậy theo nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng $\vec{l} = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-5}{4}, \frac{15}{4}\right)$

Câu 81: Tính góc giữa hai vecto $\overrightarrow{gradz}$ (đơn vị: radian) của các trường vô hướng sau $z_1 = \sqrt{x^2+y^2}, z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$ (Chọn đáp án gần đúng nhất)

Đáp án: **A.** 2

Giải:

$$z_1 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_{1x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z'_{1y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{gradz_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{gradz_1}(M) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$$z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy} \Rightarrow \begin{cases} z'_{2x} = 1 + \dfrac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}} \\ z'_{2y} = -3 + \dfrac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{gradz_2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3 + \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}z_2(M) = \left(2, \frac{-9}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{grad}z_1(M), \overrightarrow{grad}z_2(M)\right) = \frac{\overrightarrow{grad}z_1(M).\overrightarrow{grad}z_2(M)}{\left|\overrightarrow{grad}z_1(M)\right|.\left|\overrightarrow{grad}z_2(M)\right|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{grad}z_1, \overrightarrow{grad}z_2\right) \approx 1{,}77 \text{ (radian)}$$

Câu 82: Cho $u(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + e^{y-z})$, $O(0,0,0), A(1,-2,2)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O)$ theo hướng $\overrightarrow{OA}$

Đáp án: **B.** $\frac{-2}{3}$

Giải:

$$u(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + e^{y-z}) \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \dfrac{2x}{1 + x^2 + e^{y-z}} \\ u'_y = \dfrac{e^{y-z}}{1 + x^2 + e^{y-z}} \\ u'_z = \dfrac{-e^{y-z}}{1 + x^2 + e^{y-z}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x(O) = 0 \\ u'_y(O) = \dfrac{1}{2} \\ u'_z(A) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA} = (1,-2,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right| = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{-2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{OA}}(O) = 0.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{-2}{3} - \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$$

Câu 83: Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm $u = x\sin z - y\cos z$ tại gốc tọa độ là lớn nhất

Đáp án: **B.** $\vec{l} = (0,-1,0)$

Giải:

$$u(x,y,z) = x\sin z - y\cos z \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \sin z \\ u'_y = -\cos z \\ u'_z = x\cos z + y\sin z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}u = (\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z)$$

Để tốc độ biến thiên của u tại $O(0,0,0)$ là lớn nhất thì cần theo hướng

$\vec{l} = \overrightarrow{gradu}(O) = (0, -1{,}0)$

Câu 84: Cho điểm $A(2, -1{,}0), B(1{,}1{,}3)$. Tính đạo hàm của hàm $u = x^3 + 3y^2 + e^z + xyz^2$ tại điểm A theo hướng $\overrightarrow{AB}$

Đáp án: **C.** $\dfrac{-3\sqrt{14}}{2}$

Giải:

$$u(x,y,z) = x^3 + 3y^2 + e^z + xyz^2 \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 3x^2 + yz^2 \\ u'_y = 6y + xz^2 \\ u'_z = e^z + 2xyz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x(A) = 12 \\ u'_y(A) = -6 \\ u'_z(A) = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1{,}2{,}3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}(A) = 12.\frac{-1}{\sqrt{14}} + (-6).\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{-3\sqrt{14}}{2}$$

Câu 85: Tính góc giữa $\overrightarrow{gradu}$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ tại điểm $A(1{,}2{,}2)$ và $B(-3{,}1{,}0)$

Đáp án: **A.** $\arccos\left(\dfrac{-8}{9}\right)$

Giải:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \dfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ u'_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ u'_z = \dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{gradu} = \left(\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{gradu}(A) = \left(\frac{7}{81}, \frac{-4}{81}, \frac{-4}{81}\right); \overrightarrow{gradu}(B) = \left(\frac{-2}{25}, \frac{3}{50}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{gradz_2}(M) = \left(2, \frac{-9}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{gradu}(A), \overrightarrow{gradu}(B)\right) = \frac{\overrightarrow{grad}z_1(M).\overrightarrow{grad}z_2(M)}{\left|\overrightarrow{grad}z_1(M)\right|.\left|\overrightarrow{grad}z_2(M)\right|} = \frac{-8}{9}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{grad}z_1, \overrightarrow{grad}z_2\right) = \arccos\frac{-8}{9}$$

Câu 86: Cho $\vec{F} = x^2yz\vec{\imath} + 3xy^2z\vec{\jmath} + mxyz^2\vec{k}$ với m là tham số thực. Tìm m để $\vec{F}$ là trường ống.

Đáp án: B. $m = -4$

<u>Giải:</u>

Đặt $\begin{cases} P = x^2yz \\ Q = 3xy^2z \\ R = mxyz^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 2xyz \\ Q'_y = 6xyz \\ R'_z = 2mxyz \end{cases} \Rightarrow div\vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = (8+2m)xyz$

Để $\vec{F}$ là trường ống $\Leftrightarrow div\vec{F} = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Câu 87: Xác định những điểm không phải điểm xoáy trong trường vecto

$$\vec{F} = (z^2 + 2xy)\vec{\imath} + (3x^2 - 2yz)\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$$

Đáp án: C. $(0,0,0)$

<u>Giải:</u>

Đặt $\begin{cases} P = z^2 + 2xy \\ Q = 3x^2 - 2yz \\ R = -z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2y, P'_z = 2z \\ Q'_x = 6x, Q'_z = -2y \\ R'_x = 0, R'_y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (2y; 2z; 6x - 2y)$$

Điểm xoáy M trong trường vecto thỏa mãn

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy điểm không xoáy là $M(0,0,0)$

Câu 88: Biết $\vec{F} = e^{x^2+y^2+z^2}\left[(2x^2yz + yz)\vec{\imath} + (2y^2xz + xz)\vec{\jmath} + (2z^2yx + xy)\vec{k}\right]$ là trường thế. Tìm hàm thế vị.

Đáp án: **A.** $u = e^{x^2+y^2+z^2}xyz + C$

Giải:

Hàm thế vị

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$$

Chọn $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$\Rightarrow u = \int_0^x e^{t^2}.0dt + \int_0^y e^{x^2+t^2}.0dt + \int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}(2xyt^2 + xy)dt + C$$

$$= xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}(2t^2+1)dt + C$$

$$= 2xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}.t^2dt + xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}dt + C$$

Đặt $\begin{cases} t = u \\ e^{x^2+y^2+t^2}.tdt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+t^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}.t^2dt = 2xy\left(\frac{t}{2}e^{x^2+y^2+t^2}\Big|_0^z - \int_0^z \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+t^2}dt\right)$$

$$= xyze^{x^2+y^2+t^2} - xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}dt$$

$$\Rightarrow u = xyze^{x^2+y^2+t^2} - xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}dt + xy\int_0^z e^{x^2+y^2+t^2}dt = xyze^{x^2+y^2+t^2} + C$$

Câu 89: Biết $\vec{F} = (3x^2 - 3y^2z)\vec{i} + (\arctan z - 6xyz)\vec{j} + \left(\frac{y}{1+z^2} + 3xy^2\right)\vec{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị.

Đáp án: **D.** $u = x^3 + y\arctan z + 3xy^2z + C$

Giải:

Hàm thế vị

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$$

Chọn $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$\Rightarrow u = \int_0^x 3t^2 dt + \int_0^y 0dt + \int_0^z \frac{y}{1+t^2} + 3xy^2 dt + C = x^3 + y \arctan z + 3xy^2 + C$$

Câu 90: Biết $\vec{F} = (3x^2 + yz)\vec{i} + (6y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy + e^z)\vec{k}$ là trường thế, tìm hàm thế vị

Đáp án: A. $u = x^3 + 2y^3 + \frac{z^3}{3} + e^z + xyz + C$

<u>Giải:</u>

Hàm thế vị

$$u = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$$

Chọn $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$\Rightarrow u = \int_0^x 3t^2 t + \int_0^y 6t^2 dt + \int_0^z (t^2 + xy + e^t)dt + C$$

$$= t^3 \Big|_0^x + 2t^3 \Big|_0^y + \left(\frac{t^3}{3} + xyt + e^t\right)\Big|_0^z + C$$

$$= x^3 + 2y^3 + \frac{z^3}{3} + xyz + e^z - 1 + C$$

$$= x^3 + 2y^3 + \frac{z^3}{3} + xyz + e^z + C$$

Vậy hàm thế vị là $u = x^3 + 2y^3 + \frac{z^3}{3} + xyz + e^z + C$

Câu 91: Tính thông lượng của $\vec{F} = x\vec{i} + (y^3 + 2z)\vec{j} + (3x^2 z - x)\vec{k}$ qua mặt cầu

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

Đáp án: **D.** $\dfrac{44\pi}{15}$

Giải:

Đặt $P = x, Q = y^3 + 2z, R = 3x^2z - x$

Thông lượng cần tính là:

$$\Phi = \iint_S xdydz + (y^3 + 2z)dzdx + (3x^2z - x)dxdy$$

Mặt S là mặt cong kín giới hạn miền (V) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ hướng pháp tuyến ra ngoài.

$P'_x = 1, Q'_y = 3y^2, R'_z = 3x^2$ liên tục với $x, y, z \in R$

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V (1 + 3x^2 + 3y^2)dxdydz = \iiint_V (3x^2 + 3y^2)dxdydz + V_{(V)} = I + V_{(V)}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Miền (V): $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ $|J| = r^2\sin\theta$

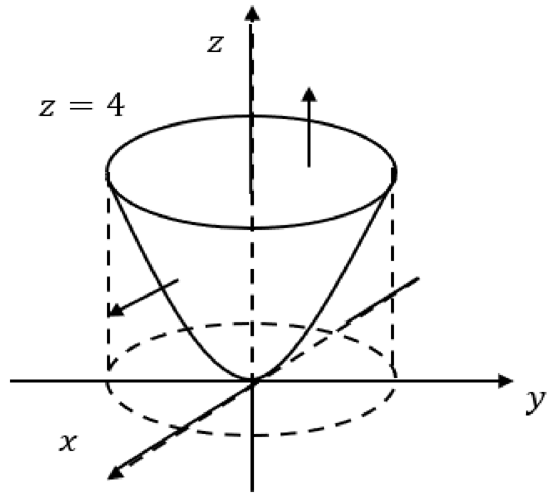
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 3r^2(\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta \, dr = \frac{3}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{8}{5}\pi$$

$$\Rightarrow \Phi = I + V_{(V)} = \frac{8}{5}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{44}{15}\pi$$

Câu 92: Tính thông lượng của $\vec{F} = xy^2\vec{i} - ze^x\vec{j} + (x^2z + \sin y)\vec{k}$ qua S là mặt $z = x^2 + y^2, z \leq 4$, hướng ra ngoài. (Chọn kết quả gần đúng nhất)

Đáp án: **A.** -17

Giải:



Thông lượng cần tính:

$$\Phi = \iint_S xy^2dydz - ze^xdzdx + (x^2z + \sin y)dxdy$$

Bổ sung thêm mặt S': $\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$ hướng lên trên

Mặt $S \cup S'$ là mặt cong kín, hướng pháp tuyến ngoài giới hạn miền

$$(V): x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

Đặt $P = xy^2, Q = -ze^x, R = x^2z + \cos y \Rightarrow P'_x = y^2, Q'_y = 0, R'_z = x^2$ liên tục với $x, y, z \in R$

Ta có:

$$\Phi = \oiint_{S\cup S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy - \iint_{S'} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I_1 - I_2$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1, ta có:

$$I_1 = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$$

Hình chiếu của V lên Oxy là D: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $J = r$. Miền (V): $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r^2 \le z \le 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 r^2.rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3(4-r^2)dr = \frac{32}{3}\pi$$

S': $\begin{cases} z = 4 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$, $(\vec{n}, Oz) < \pi/2$, hình chiếu của S' lên Oxy là D: $x^2 + y^2 \le 4$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{S'} (x^2z + \sin y)dxdy = \iint_D (4x^2 + \sin y)dxdy = \iint_D 4x^2dxdy$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2(\cos\varphi)^2 rdr = 16\int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2 d\varphi = 16\pi$$

$\left(\iint_D \sin y\, dxdy = 0 \text{ do tính chất đối xứng của miền } D, \text{hàm } f(x,y) = \sin y \text{ lẻ với } y\right)$

$$\Rightarrow \Phi = I_1 - I_2 = \frac{-16}{3}\pi$$

Câu 93: Tính thông lượng của $\vec{F} = (x^2 - 2y + z)\vec{\imath} - (z^2 + 2xy)\vec{\jmath} + x\vec{k}$ qua phía trên mặt nón $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ cắt bởi hai mặt phẳng $z = 2, z = 5$

Đáp án: C. 0

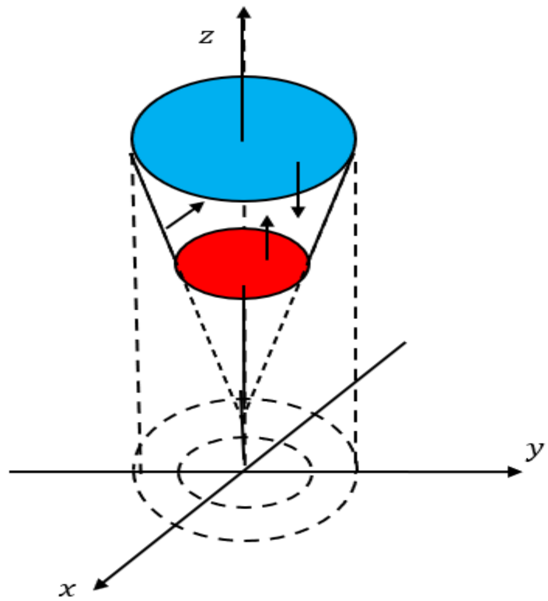
<u>Giải:</u>

Thông lượng cần tính:

$$\Phi = \iint_S (x^2 - 2y + z)dydz - (z^2 + 2xy)dzdx + xdxdy$$

Bổ sung thêm hai mặt:

S': $\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$ hướng lên trên, S'': $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 \le 16 \end{cases}$ hướng xuống dưới



Mặt $S \cup S' \cup S''$ là mặt cong kín, hướng pháp tuyến trong, giới hạn miền

$V: \begin{cases} z \geq 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2 \leq z \leq 5 \end{cases}$

Đặt $P = x^2 - 2y + z, Q = -(z^2 + 2xy), R = x \Rightarrow P'_x = 2x, Q'_y = -2x, R'_z = 0$ liên tục.

$$\Phi = \oiint_{S \cup S' \cup S''} \dots - \iint_{S'} \dots - \iint_{S''} \dots = I_1 - I_2 - I_3$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky cho I_1

$\Rightarrow I_1 = -\iiint_V (2x - 2x + 0)dxdydz = 0$

$S': \begin{cases} z = 2 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}, (\vec{n}, Oz) < \pi/2$, hình chiếu của S' lên Oxy là $D': x^2 + y^2 \leq 1$

$\Rightarrow I_2 = \iint_{S'} xdxdy = \iint_D xdxdy = 0$ (Dùng tính chất đối xứng)

$S'': \begin{cases} z = 5 \Rightarrow dz = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}, (\vec{n}, Oz) > \pi/2$, hình chiếu của S'' lên Oxy là $D'': x^2 + y^2 \leq 16$

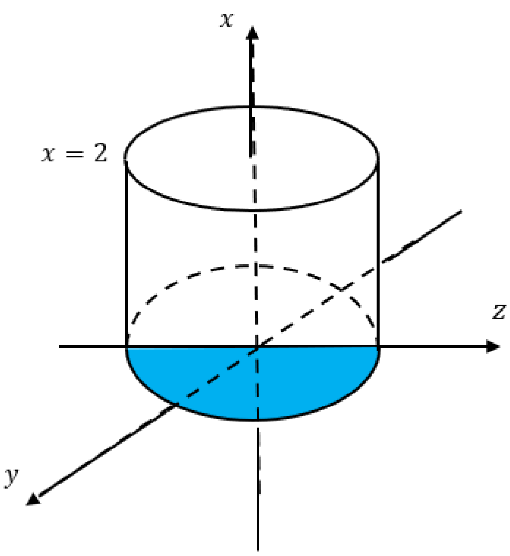
$\Rightarrow I_3 = \iint_{S''} xdxdy = \iint_D xdxdy = 0$ (Dùng tính chất đối xứng)

Vậy $\Phi = I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Câu 94: Tính thông lượng của trường vecto $\vec{F} = 2x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$ qua S là mặt ngoài của miền giới hạn bởi $y = 0, y = \sqrt{1 - z^2}, x = 0, x = 2$

Đáp án: **A.** $4\pi + \dfrac{8}{3}$

Giải:



Thông lượng cần tính là:

$$\Phi = \iint\limits_S 2x^2dydz + y^2dzdx - z^2dxdy$$

Mặt S kín giới hạn miền $V: 0 \leq y \leq \sqrt{1 - z^2}, 0 \leq x \leq 2$, hướng pháp tuyến ngoài

Đặt $P = 2x^2, Q = y^2, R = -z^2 \Rightarrow P'_x = 4x, Q'_y = 2y, R'_z = -2z$ liên tục.

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\Phi = \iint\limits_S 2x^2dydz + y^2dzdz - z^2dxdy = \iiint\limits_V (4x + 2y - 2z)dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases}, J = r \Rightarrow$ Miền $V: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$\Phi = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 (2x + r\cos\varphi).rdx = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (4r + 2r^2\cos\varphi)dr = 4\pi + \frac{8}{3}$$

Câu 95: Tính thông lượng của trường vecto $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j} + \frac{z^2}{2}\vec{k}$ qua S là biên ngoài của miền V: $|x - y| \le 1, |y - z| \le 1, |z + x| \le 1$

Đáp án: **D.** 3

<u>Giải:</u>

Thông lượng cần tính

$$\Phi = \iint_S x^3dydz + y^2dzdz + \frac{z^2}{2}dxdy$$

Mặt S kín giới hạn miền V: $|x - y| \le 1, |y - z| \le 1, |z + x| \le 1$ hướng pháp tuyến ngoài

Đặt $P = x^3, Q = y^2, R = z^2/2 \Rightarrow P'_x = 3x^2, Q'_y = 2y, R'_z = z$ liên tục.

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V (3x^2 + 2y + z)dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = y - z \\ w = z + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (u + v + w)/2 \\ y = (v + w - u)/2, J = 1/2 \\ z = (w - u - v)/2 \end{cases}$

Miền V_{uvw}: $-1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1, -1 \le w \le 1$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}\iiint_{V_{uvw}} \left[\frac{3(u + v + w)^2}{4} + (v + w - u) + \frac{w - u - v}{2}\right] dudvdw = \cdots = 3$$

Câu 96: Cho trường vô hướng $u = xy + yz + xz$. Tính lưu số của trường vecto $\overrightarrow{grad}u$ dọc theo đoạn thẳng nối từ $A(-1, -1, -1)$ đến $B(2,4,1)$

Đáp án: **A.** 11

<u>Giải:</u>

$\overrightarrow{gradu} = (u'_x, u'_y, u'_z) = (y+z, x+z, x+y) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

Đoạn AB: $\begin{cases} \text{vecto chỉ phương } \overrightarrow{AB} = (3,5,2) \\ \text{đi qua } A(-1,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow AB: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z+1}{2} = t$

$\Rightarrow AB: \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 5t-1 \\ z = 2t-1 \end{cases}$ với t chạy từ 0 đến 1.

Lưu số cần tìm:

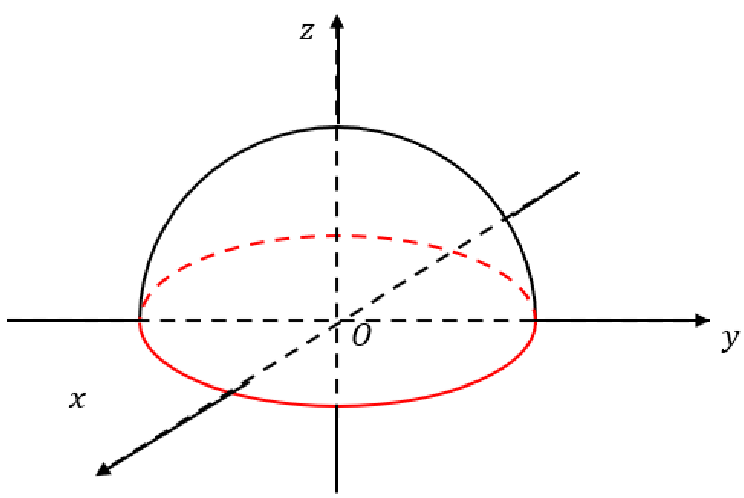
$$C = \int_{AB} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

$$= \int_0^1 [(5t-1+2t-1).3 + (3t-1+2t-1).5 + (3t-1+5t-1).2]dt = 11$$

Câu 97: Tính lưu số của $\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ dọc theo đường tròn có phương trình $C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$ giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Đáp án:

<u>**Giải:**</u>



Lưu số cần tính là:

$$C = \oint_C x^2y^3dx + dy + zdz$$

Đường cong C giới hạn phần mặt cầu $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ hướng lên trên

(Đề bài không nói gì về chiều thì hiểu là đường cong cho chiều dương).

Áp dụng công thức Stoke:

$$C = \iint_S -3x^2y^2dxdy$$

Hình chiếu của mặt S lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \leq 1$

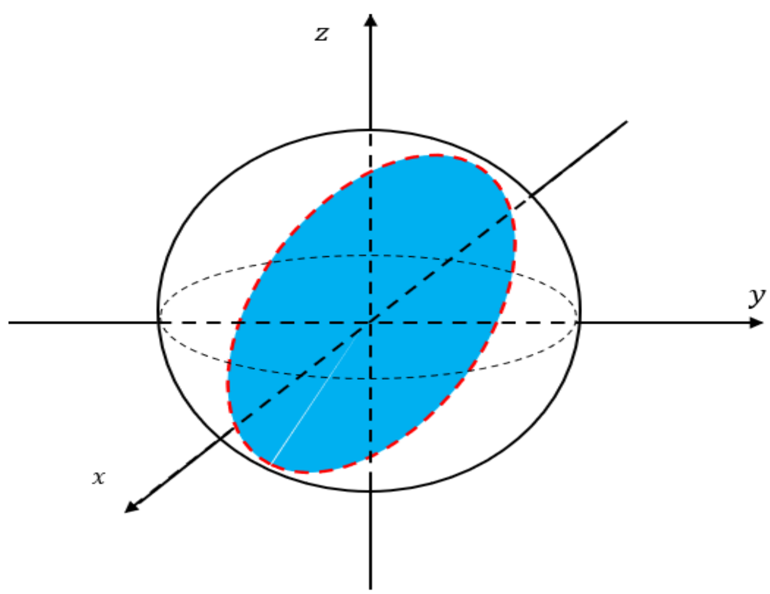
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow C = \iint_S -3x^2y^2dxdy = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sin^2\varphi\, r^2\cos^2\varphi\, .rdr = \cdots = \frac{-\pi}{8}$$

Câu 98: Tính lưu số của $\vec{F} = (ye^{xy} + 3y + z)\vec{\imath} + (xe^{xy} + y - 5z)\vec{\jmath} + (1 + 2x)\vec{k}$ dọc theo đường cong L là giao của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt $x - y + z = 0$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương trục Oz.

Đáp án: **C.** $4\sqrt{3}\pi$

<u>Giải:</u>



Lưu số cần tính là:

$$C = \oint_L (ye^{xy} + 3y + z)dx + (xe^{xy} + y - 5z)dy + (1 + 2x)dz$$

Đường cong kín L chiều dương giới hạn phần mặt phẳng $S: x - y + z = 0$ nằm trong cầu, mặt hướng lên, có vecto pháp tuyến hợp trục $Oz < \pi/2$

Áp dụng công thức Stoke:

$$C=\iint\limits_S 5dydz-dzdx-3dxdy$$

Vecto pháp tuyến của S là $\vec{n}=(1,-1,1)\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow C=\iint\limits_S\left(5.\frac{1}{\sqrt{3}}+1.\frac{1}{\sqrt{3}}-3.\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS=\sqrt{3}\iint\limits_S dS=\sqrt{3}S_S=4\sqrt{3}\pi$$

(S là hình tròn qua tâm cầu)

Câu 99: Tính lưu số của $\vec{F}=(y^2+z^2)\vec{\imath}+(x^2+z^2)\vec{\jmath}+(x^2+y^2)\vec{k}$ dọc theo đường cong C trong đó C là giao của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ và mặt nón có phương trình $z=-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

Đáp án: **B.** 0

<u>Giải:</u>

Lưu số cần tính:

$$C=\oint\limits_C(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

Đường cong kín C chiều âm là biên của phần mặt cong của cầu nằm trong nón $S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le 4\\ z\le 0\end{cases}$ hướng xuống theo chiều âm Oz

Áp dụng công thức Stoke:

$$C=-\iint\limits_S(2y-2z)dydz+(2z-2x)dzdx+(2x-2y)dxdy$$

Vecto pháp tuyến của mặt S là $\vec{n}=-(2x,2y,2z)$

$\Rightarrow|\vec{n}|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}=4$

(Dấu " $-$ " do $(\widehat{\vec{n},Oz})>\pi/2$)

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2},\cos\beta=\frac{-2y}{4}=\frac{-y}{2},\cos\gamma=\frac{-2z}{4}=\frac{-z}{2}$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại II và tích phân mặt loại I:

$$\Rightarrow C = \iint_S \left[\frac{x}{2}(2y - 2z) + \frac{y}{2}(2z - 2x) + \frac{z}{2}(2x - 2y)\right] dS = 0$$

Câu 100: Tính thông lượng của $\vec{F} = (6z - 2y^3)\vec{i} + (2x - 3z)\vec{j} + (2y^3 - 4x)\vec{k}$ qua mặt cong S: $2x^2 + y^4 + 3z^2 = 1, z \geq 0$ hướng lên trên.

Đáp án:

<u>Giải:</u>

Thông lượng cần tính:

$$\Phi = \iint_S (6z - 2y^3)dydz + (2x - 3z)dzdz + (2y^3 - 4x)dxdy$$

Đặt $F(x, y, z) = 2x^2 + y^4 + 3z^2 - 1$

Vecto pháp tuyến $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (4x, 4y^3, 6z)$ (do $(\widehat{\vec{n}, Oz}) < \pi/2$)

$|\vec{n}| = \sqrt{4x^2 + 16y^6 + 36z^2} = 2\sqrt{x^2 + 4y^4 + 9z^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{n_x}{|\vec{n}|} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^4 + 9z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{n_y}{|\vec{n}|} = \dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2 + 4y^4 + 9z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{n_z}{|\vec{n}|} = \dfrac{3z}{\sqrt{x^2 + 4y^4 + 9z^2}} \end{cases}$$

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma)dS$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_S \frac{2x(6z - 2y^3) + 2y^3(2x - 3z) + 3z(2y^3 - 4x)}{\sqrt{x^2 + 4y^4 + 9z^2}} dS = 0$$

Tài liệu tham khảo:

- Bài giảng môn Giải tích II, thầy Bùi Xuân Diệu.
- Bài tập giải sẵn Giải tích 2 (Tóm tắt lý thuyết và chọn lọc), thầy Trần Bình.
- Bài tập Toán học cao cấp, tập hai: Giải tích, GS.TS Nguyễn Đình Trí (chủ biên), PGS.TS. Trần Việt Dũng, PGS.TS. Trần Xuân Hiền, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo.
- Bộ đề cương Giải tích II, Viện Toán ứng dụng và Tin học.
- Bộ đề thi Giữa kì và Cuối kì môn Giải tích II Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.