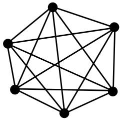
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

# Toán Rời Rạc

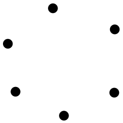
## Định lý Ramsey

## Khẳng định

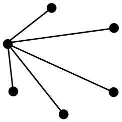
Trong số $6$ người luôn có ba người đôi một *quen* nhau hoặc ba người đôi một *lạ* nhau.



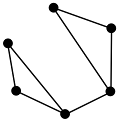
party 50 years after graduation



lonely hearts party



party of admirers



meeting of two mafia bosses

## Bài tập

Hãy chứng minh rằng trong $9$ người luôn có $3$ người đôi một quen nhau hoặc $4$ người đôi một không quen nhau.

# Lý thuyết Ramsey

Nhà toán học người Anh Frank Plumpton Ramsey.

## Khẳng định

Trong sáu người bất kỳ luôn tồn tại ba người sao cho hoặc là họ quen nhau từng đôi một hoặc họ không quen nhau từng đôi một.

Viết lại khẳng định trên một cách ngắn gọn dùng ký hiệu "mũi tên" như sau:

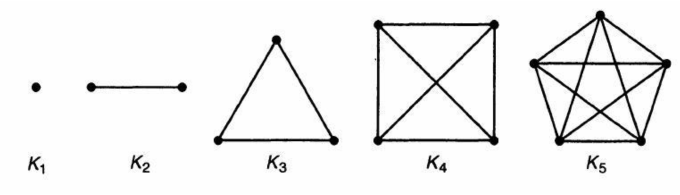
$$K_6 \to K_3, K_3$$

với ý nghĩa

- $K_6$= "6 đối tượng và $15$ cặp không thứ tự để thể hiện quan hệ (quen hoặc lạ) giữa các đối tượng này"
- $K_3, K_3$ = "Ba đối tượng quen nhau từng đôi một", "Ba đối tượng không quen nhau từng đôi một"

# Ký hiệu $K_n$

$K_n$ = *"một tập n đối tượng và mọi cặp không thứ tự (cạnh) các đối tượng này"*



# Ký hiệu mũi tên

- Nếu ta xem mỗi cặp không thứ tự như một cạnh. Cặp đối tượng quen nhau xem như cạnh tô màu xanh. Cặp đối tượng không quen nhau như các cạnh tô màu đỏ.
- Vậy

$$K_6 \to K_3, K_3$$

có nghĩa là

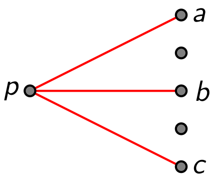
> *"Dù có tô xanh đỏ các cạnh của $K_6$ thế nào, ta luôn tìm được một $K_3$ có toàn cạnh đỏ hoặc một $K_3$ toàn cạnh xanh"*

# Chứng minh $K_6 \to K_3, K_3$

- Xét một đối tượng $p$ của $K_6$. Vì có $5$ cạnh liên quan đến $p$ có màu đỏ hoặc xanh nên có ít nhất $3$ cạnh cùng màu, ví dụ màu đỏ.

  Có ba đối tượng $a, b, c$ nối với $p$ qua ba cạnh màu đỏ này.

  - Nếu tồn tại một cạnh $a - b$ hoặc $a - c$ hoặc $b - c$ màu đỏ, vậy ta được một $K_3$ đỏ.
  - Nếu không thì ta được $K_3$ xanh liên quan đến $a, b, c$.

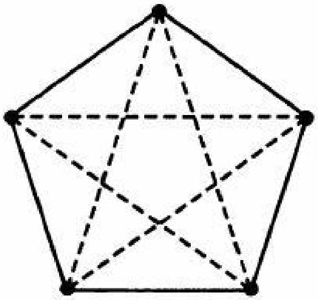


## $K_5 \not\to K_3, K_3$

Khẳng định

$$K_5 \to K_3, K_3$$

là sai vì có cách tô màu cạnh $K_5$ không tạo ra $K_3$ đỏ hoặc $K_3$ xanh.



### Câu hỏi

Giả sử $K_n \to K_a, K_b$. Giải thích tại sao $K_p \to K_a, K_b$ với mọi $p > n$.

## Câu hỏi

- Chứng minh rằng $K_b \to K_2, K_b$.
- Chứng minh rằng $K_{b-1} \not\to K_2, K_b$.

Câu hỏi

Chứng minh rằng $K_{11} \to K_3, K_4$.

## Định lý (Ramsey)

Với hai số nguyên $m \geq 2$ và $n \geq 2$, luôn tồn tại một số nguyên dương $p$ sao cho

$$K_p \to K_m, K_n.$$

*Cho trước số nguyên m và n, luôn có số nguyên dương p sao cho, nếu tô màu xanh hoặc đỏ lên cạnh của $K_p$ thì luôn tìm được hoặc một $K_m$ đỏ hoặc một $K_n$ xanh.*

Rõ ràng, với mọi $q \geq p$ ta luôn có

$$K_p \to K_m, K_n \quad \Rightarrow \quad K_q \to K_m, K_n.$$

- Số nguyên $p$ nhỏ nhất sao cho $K_p \to K_m, K_n$ gọi là ***số Ramsey***.
- Số Ramsey $p$ này được ký hiệu là $r(m, n)$.

Ví dụ

Ta có $r(3,3) = 6$ vì

$$K_6 \to K_3, K_3 \quad \text{và} \quad K_5 \not\to K_3, K_3.$$

### Câu hỏi

Giải thích tại sao ta luôn có $r(a, b) = r(b, a)$.

## Bài tập

Tính các số Ramsey sau

1. $r(2, n) = r(n, 2)$
2. $r(3, 4) = r(4, 3)$
3. $r(3, 5) = r(5, 3)$

### Định lý (Ramsey, dạng đơn giản)

Với hai số nguyên $m \geq 2$ và $n \geq 2$, luôn tồn tại một số nguyên dương $p$ sao cho

$$K_p \to K_m, K_n$$

# Chứng minh định lý Ramsey

Ta chỉ ra sự tồn tại của $r(m, n)$ bằng quy nạp theo cả $m$ và $n$.

Bước cơ sở:

- Nếu $m = 2$ thì $r(2, n) = n$,
- nếu $n = 2$ thì $r(m, 2) = m$.

# Bước quy nạp

- Giả sử rằng $m \geq 3$ và $n \geq 3$ và tồn tại cả

$$r(m, n-1) \qquad \text{và} \qquad r(m-1, n).$$

- Đặt $p = r(m-1, n) + r(m, n-1)$.
- Ta sẽ chỉ ra rằng $K_p \to K_m, K_n$.

# Chứng minh $K_p \to K_m, K_n$

- Xét một điểm $x$ của $K_p$. Đặt $R_x$ là tập điểm nối với $x$ bằng một cạnh màu đỏ, và $B_x$ là tập điểm nối với $x$ bởi một cạnh màu xanh.
- Vậy

$$\begin{aligned} |R_x| + |B_x| &= p - 1 \\ &= r(m-1, n) + r(m, n-1) - 1 \end{aligned}$$

chỉ ra rằng

1. $|R_x| \geq r(m-1, n)$, hoặc
2. $|B_x| \geq r(m, n-1)$.

## Trường hợp 1: Nếu $|R_x| \geq r(m-1, n)$

Ta đặt $q = |R_x|$, khi đó ta có $q \geq r(m-1, n)$.

Xét $K_q$ trên các điểm của $R_x$, ta thấy rằng

- hoặc $m-1$ điểm của $K_q$ (cũng thuộc $K_p$) có toàn cạnh màu đỏ. Ta có $K_{m-1}$ đỏ, và tất cả $m-1$ điểm này đều nối với $x$ bằng cạnh màu đỏ. Vậy ta có $K_m$ đỏ.
- hoặc $n$ điểm của $K_q$ toàn cạnh màu xanh. Vậy ta có một $K_n$ xanh.

# Trường hợp 2: Nếu $|B_x| \geq r(m, n-1)$

Lập luận tương tự Trường hợp 1, Ta kết luận bằng quy nặp rằng số $r(m, n)$ tồn tại với mọi $m, n \geq 2$.

## Cận trên của số Ramsey

- Chứng minh định lý Ramsey cũng chỉ ra rằng

$$r(m,n) \le r(m-1,n) + r(m,n-1) \quad \text{với } m,n \ge 3. \qquad (1)$$

- Xét

$$f(m,n) = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Dùng đẳng thức Pascal ta được

$$\binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2}$$

Vậy ta được công thức tương tự như (1):

$$f(m,n) = f(m-1,n) + f(m,n-1).$$

# Chặn trên của số Ramsey (tiếp)

Vì

$$r(2, n) = n = f(2, n)$$

và

$$r(m, 2) = m = f(m, 2),$$

ta có

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$$

# Một vài số Ramsey

$$r(3,3) = 6,$$
$$r(3,4) = r(4,3) = 9,$$
$$r(3,5) = r(5,3) = 14,$$
$$r(3,6) = r(6,3) = 18,$$
$$r(3,7) = r(7,3) = 23,$$
$$r(3,8) = r(8,3) = 28,$$
$$r(3,9) = r(9,3) = 36,$$
$$40 \leq r(3,10) = r(10,3) \leq 43,$$
$$r(4,4) = 18,$$
$$r(4,5) = r(5,4) = 25,$$
$$35 \leq r(4,6) \leq 49,$$
$$43 \leq r(5,5) \leq 48,$$
$$58 \leq r(5,6) = r(6,5) \leq 87,$$
$$102 \leq r(6,6) \leq 165.$$

## Tính Số Ramsey có khó không?

Số Ramsey khá gần đây người ta tính được là $r(4,5) = 25$.

- 1955: Chặn trên đầu tiên cho $r(4,5) \leq 31$.
- 1965: Chặn dưới đầu tiên và cải thiện chặn trên $25 \leq r(4,5) \leq 30$.
- 1968: Cải thiện chặn trên $r(4,5) \leq 29$.
- 1971: Cải thiện chặn trên $r(4,5) \leq 28$.
- 1991: Cải thiện chặn trên $r(4,5) \leq 27$.
- 1992: Cải thiện chặn trên $r(4,5) \leq 26$.
- 1993: Cải thiện chặn trên $r(4,5) \leq 25$ và chứng minh $r(4,5) = 25$.

Năm 2017, Vigleik Angeltveit và Brendan D. McKay chứng minh:

$$43 \leq r(5,5) \leq 48.$$

# Tổng quát hoá

- Nếu $n_1, n_2$ và $n_3$ là ba số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng hai, vậy có tồn tại số nguyên $p$ sao cho

$$K_p \to K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}$$

  Có nghĩa rằng nếu mỗi cạnh của $K_p$ tô bởi xanh, đỏ, hoặc vàng thì có $K_{n_1}$ tô màu xanh hoặc có $K_{n_2}$ tô màu vàng hoặc $K_{n_3}$ tô màu đỏ.
- Ví dụ

$$r(3, 3, 3) = 17.$$

- Mở rộng tự nhiên cho $m$ màu

$$K_p \to K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots, K_{n_m}.$$