

GIẢI TÍCH 2

BÀI 10

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. Tích phân mặt loại 1

1. Đặt vấn đề

- Ta biết công thức tính diện tích mặt cong $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ là

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

- Tính diện tích mặt cong không tròn xoay ?
- Tính khối lượng mặt cong vật chất không đồng chất ?

2. Định nghĩa.

- Cho hàm số $f(M)$ xác định trên mặt S nào đó $\subset \mathbb{R}^3$
- Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i , $i = \overline{1, n}$.
- Lấy điểm tùy ý $M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i.$$

- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$ sao cho $d \rightarrow 0$, $d = \max_{i=\overline{1, n}} d_i$, \forall cách chia S và cách chọn M_i thì ta gọi I là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ trên mặt S và kí hiệu

$$I = \iint_S f(M) dS \text{ hoặc } I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

Ví dụ 1. Tính

$$\iint_S 2^{3(x^2+y^2+z^2)} dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$$

GIẢI

- +) •** Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i , $i = \overline{1, n}$.
- Lấy điểm tùy ý $M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng

$$\begin{aligned}
 I_n &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n 2^{3(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)} \Delta S_i \\
 &= \sum_{i=1}^n 2^3 \Delta S_i = 8 \times 2\pi = 16\pi.
 \end{aligned}$$

\forall cách chia S và cách chọn M_i nên có

$$\iint_S 2^{3(x^2 + y^2 + z^2)} dS = 16\pi.$$

Chú ý. $\iint_S dS$ chính là diện tích của mặt S .

2. Tính chất. Có các tính chất giống như tích phân đường loại một

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S

$$\Rightarrow \exists \iint_S f(x, y, z) dS$$

4. Cách tính. $z = z(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, khi đó có

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, S là mặt bán cầu
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

GIẢI

$$+) z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow z'_x = -\frac{x}{z}, z'_y = -\frac{y}{z} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{z^2}} = \frac{R}{z} \Rightarrow$$

$$I = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy$$

$$+) x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R,$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R \int_0^R \frac{r^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

$$= 2\pi R \int_0^R \left(-\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) dr$$

$$= 2\pi R \left[-\left(\frac{r}{2} \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{r}{R} \right) \right]_0^R$$

$$2\pi R \left(R^2 \arcsin \frac{r}{R} \right) \Big|_0^R$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi R \left[0 - \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} \right] + 2\pi R^3 \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \pi^2 R^3 + \pi^2 R^3 \\
&= \frac{1}{2} \pi^2 R^3.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

GIẢI

$$+) \ z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \left[xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \right] dx dy$$

$$+) \quad x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \cos \varphi \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} [r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)] r dr$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos \varphi \sin \varphi + (\cos \varphi + \sin \varphi)] \frac{r^4}{4} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{a^4 \sqrt{2}}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^5 \varphi \sin \varphi + \cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi \sin \varphi] d\varphi$$

$$= \frac{a^4 \sqrt{2}}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{a^4 \sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^4 \sqrt{2}}{2} \frac{4!!}{5!!} = \frac{4\sqrt{2}}{15} a^4.$$

Ví dụ 3. a (K60) Tính $\iint_S xyz dS$, $S : x - 2y + 3z - 4 = 0$
giới hạn trong mặt trụ $2x^2 + 3y^2 = 6$. (0)

§2. Tích phân mặt loại hai

1. Đặt vấn đề

+) Lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian ?

+) một Mối liên hệ giữa lượng chất lỏng nêu trên với lượng chất lỏng chảy trên biên của mặt S ?

2. Định nghĩa.

a) Định nghĩa. Cho mặt S giới hạn bởi một đường trơn từng khúc C . Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến \vec{N} của S tại M_0 , nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường cong kín bất kì L trên S không cắt đường biên C trở lại vị trí M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía. Trường hợp ngược lại thì S được gọi là mặt một phía.

Mặt S được gọi là định hướng từng phần nếu nó liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng bởi các đường trơn từng khúc.

Cho mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C . Ta gọi hướng dương trên C ứng với phía đã chọn của S xác định theo quy tắc bàn tay phải.

b) Định nghĩa tích phân mặt loại hai.

- Cho hàm vectơ $\vec{F} = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ xác định trên mặt hai phía S

- Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\vec{N}(M) = \vec{i} \cos \alpha(M) + \vec{j} \cos \beta(M) + \vec{k} \cos \gamma(M)$$

- Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm $\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ trên mặt S :

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ (hay của các hàm P, Q, R) lấy trên phía đã chọn của mặt S .

Ví dụ 1. Tính

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, S: x^2 + y^2 = 1, z = 2,$$

hướng lên trên trong đó

$$P = z^{x^{zy}}, Q = e^{y^2} \sin x^2, R = (x^2 + y^2)^z$$

GIẢI

$$\text{+) } \alpha = \frac{\pi}{2} = \beta; \gamma = 0 \Rightarrow \vec{N}(M) = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) \\ = (0; 0; 1)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (P \times 0 + Q \times 0 + (x^2 + y^2)^2 \times 1) dS$$

$$\text{+) } = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^2 \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 r dr = 2\pi \times \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Chú ý. Gọi hình chiếu của ΔS_i lên các mặt phẳng Oyz , Ozx , Oxy lần lượt là $\Delta S_i^{(1)}$, $\Delta S_i^{(2)}$, $\Delta S_i^{(3)}$, khi đó có

$$\begin{aligned} \cos \alpha(M_i) \Delta S_i &= \Delta S_i^{(1)}, \quad \cos \beta(M_i) \Delta S_i = \Delta S_i^{(2)}, \\ \cos \gamma(M_i) \Delta S_i &= \Delta S_i^{(3)}. \end{aligned}$$

Do đó ta cùng kí hiệu tích phân mặt loại hai là

$$I = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

3. Tính chất. Có các tính chất tương tự như tích phân đường loại hai

4. Định lý tồn tại. Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

5. Cách tính.

• Ta có

$$\begin{aligned} \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ = \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R dxdy \end{aligned}$$

- Ta tính một tích phân trong về phải, chẳng hạn

$$I_1 = \iint_S R \, dx \, dy$$

Cho mặt không kín $S : z = f(x, y)$ xác định trên D .

Tích phân lấy theo phía trên của mặt S (véc tơ pháp tuyến tạo với oz góc nhọn) là

$$I_1 = \iint_D R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

Tích phân lấy theo phía dưới của mặt S (véc tơ pháp tuyến tạo với oz góc tù) là

$$I = - \iint_D R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

Ví dụ 1.

$\iint_S z \, dx \, dy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

GIẢI

$$+) I = \iint_{S_1} z \, dx \, dy + \iint_{S_2} z \, dx \, dy;$$

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0; S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$$

$$+) \Rightarrow I = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$- \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left(-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \, dx \, dy$$

$$= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow$$

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = 4\pi \frac{-1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} d(1-r^2)$$

$$= -2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} d(1-r^2) = 2\pi \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_1^0 = \frac{4}{3} \pi.$$

Ví dụ 2. $\iint_S x^3 dydz$, S là phía trên của nửa trên

($z \geq 0$) của mặt Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

GIẢI

$$+) I = \iint_{S_1} x^3 dydz + \iint_{S_2} x^3 dydz;$$

$$S_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0; S_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \leq 0$$

$$\begin{aligned}
+) \Rightarrow I &= \iint_D \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right)^3 dydz \\
&\quad - \iint_D \left(-a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right)^3 dydz \\
&= 2 \iint_D \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \right)^3 dydz ; \quad D : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,
\end{aligned}$$

$$y = br \cos \varphi, z = cr \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I &= 2a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} bcrdr \\ &= 2a^3 \times bc\pi \frac{-1}{2} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} d(1-r^2) = -\pi a^3 bc \frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{5} \pi a^3 bc. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính

$$\iint_S (x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy),$$

S là $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$, hướng theo chiều dương của z .

GIẢI

$$+) I = \sum_{k=1}^3 I_k, \text{ ở đó}$$

$$I_1 = \iint_S x^2 dydz; I_2 = \iint_S y^2 dzdx; I_3 = \iint_S z^2 dxdy$$

$$\begin{aligned} +) I_1 &= \iint_S x^2 dydz = \iint_{S, x \geq 0} x^2 dydz + \iint_{S, x \leq 0} x^2 dydz \\ &= \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dydz - \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dydz = 0, \end{aligned}$$

$$D_1 : y^2 + z^2 \leq 1.$$

$$\begin{aligned} +) I_2 &= \iint_S y^2 dzdx = \iint_{S, y \geq 0} y^2 dzdx + \iint_{S, y \leq 0} y^2 dzdx \\ &= \iint_{D_2} (a^2 - x^2 - z^2) dx dz - \iint_{D_2} (a^2 - x^2 - z^2) dx dz = 0, \end{aligned}$$

$$D_2 : x^2 + z^2 \leq 1.$$

$$+) I_3 = \iint_S z^2 dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = 2\pi \frac{-1}{2} \int_0^a (a^2 - r^2) d(a^2 - r^2)$$

$$= -\pi \frac{(a^2 - r^2)^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a^4.$$

Ví dụ 4.

a (K58) $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} (-xdydz - ydzdx + dxdy)$, S là mặt $2z = x^2 + y^2, z \leq 2$, hướng theo chiều dương của z .

$(\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1))$

b (K59) $\iint_S z\sqrt{x^2+y^2} dxdy$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, hướng ra ngoài mặt cầu.

$(\frac{\pi^2}{8})$

c (K60) 1) $\iint_S x dy dz$, S là phía trên mặt

$$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)$$

2) $\iint_S (x + z) dx dy$, S là phía trên mặt

$$z = x^2 + 4y^2, z \leq 4.$$

$$(4\pi)$$

§3. Công thức Stokes

1. Đặt vấn đề :

- Ta biết công thức Green cho đường cong phẳng :
Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc, có hướng dương C , thì có

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dxdy$$

- Có thể mở rộng công thức Green cho đường cong gồ ghề ?

- Đã có Định lý 4 mệnh đề tương đương cho đường cong phẳng.
- Có thể mở rộng Định lý 4 mệnh đề tương đương cho đường cong gồ ghề ?

2. Công thức Stokes

Định lý 1. Các hàm P, Q, R cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên mặt định hướng từng phần S , giới hạn bởi đường cong kín, hướng dương, trơn từng khúc C , $\vec{T} = (\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma')$ - vecteur tiếp tuyến với C , $\vec{N} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - vecteur pháp tuyến với S , thì ta có công thức :

$$\oint_C (P \cos \alpha' + Q \cos \beta' + R \cos \gamma') ds =$$

$$= \iint_S [(R'_y - Q'_z) \cos \alpha + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (Q'_x - P'_y) \cos \gamma] dS$$

hay

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Chú ý.

1°/ Trong mặt phẳng thì công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

2°/ Công thức Stokes còn viết dưới dạng sau

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$

$$\oint_C (P \cos \alpha' + Q \cos \beta' + R \cos \gamma') ds = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

3°/ Khi C có hướng âm, ta có thể dùng công thức Stokes bằng đổi dấu tích phân

▪

Ví dụ 1. Tính $\oint_C y dx + z dy + x dz$, $C: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

$x + y + z = 0$, lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Oz .

GIẢI

+) Gọi S là phần mặt phẳng $x+y+z=0$, có biên C hướng dương, $P=y$, $Q=z$, $R=x$, vận dụng công thức Stokes, ta có :

$$I = \iint_S (R'_y - Q'_z) dydz + (P'_z - R'_x) dzdx + (Q'_x - P'_y) dxdy$$

$$= \iint_S (0 - 1) dydz + (0 - 1) dzdx + (0 - 1) dxdy$$

$$= - \iint_S dydz + dzdx + dxdy \text{ là tích phân mặt loại 2.}$$

+) Chuyển sang tích phân mặt loại 1, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$ làm với oz góc nhọn, nên có :

$$I = \iint_S \left[(R'_y - Q'_z) \cos \alpha + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (Q'_x - P'_y) \cos \gamma \right] dS$$

$$= - \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS$$

$$= - \iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\pi a^2.$$

Ví dụ 2. $\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, ở đó

$C: x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$) hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox .

GIẢI

+) Gọi S là phần mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, có biên C là ellip hướng dương :

$$C : x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1.$$

Vận dụng công thức Stokes, ta có :

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (R'_y - Q'_z) dydz + (P'_z - R'_x) dzdx + (Q'_x - P'_y) dxdy \\ &= \iint_S (-1 - 1) dydz + (-1 - 1) dzdx + (-1 - 1) dxdy \\ &= -2 \iint_S dydz + dzdx + dxdy \end{aligned}$$

$$= -2 \left(\iint_S dydz + \iint_S dzdx + \iint_S dxdy \right)$$

$$+) = -2 \left(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dxdy \right),$$

ở đó D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S lên các mặt phẳng Oyz , Ozx , Oxy tương ứng. Do đó

$$D_3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0; \quad D_2 = \emptyset;$$

$$D_1 : x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \Rightarrow D_1 : \left[a \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right]^2 + y^2 \leq a^2 \Rightarrow$$

$$D_1 : \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-h)^2}{h^2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{D_3} dx dy = \pi a^2, \iint_{D_2} dz dx = 0, \iint_{D_1} dy dz = \pi ah.$$

+) Cuối cùng ta có :

$$I = -2(\pi a^2 + 0 + \pi ah) = 2\pi a(a + h).$$

3. Định lí bốn mệnh đề tương đương.

Từ công thức Stokes có thể chứng minh được định lí bốn mệnh đề tương đương cho tích phân đường trong không gian.

Định lí 1. Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền V đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

$$1) \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

2) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0, \forall$ đường cong kín, hướng dương $L \subset V$.

3) $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường

nối các điểm $A, B \in V$ mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B .

$$4) \exists U(x, y, z): du = Pdx + Qdy + Rdz$$

Ví dụ 1. $\oint_C yz dx + zx dy + xy dz$, ở đó C là đường cong kín bất kì.

GIẢI

$$+) \quad d(xyz) = yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz$$

$$+) \Rightarrow \oint_C yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz = 0$$

(ĐL 4 MĐ tương đương)

4. Ý nghĩa vật lí.

a) Lưu số (hoàn lưu) của trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo chu tuyến kín C là

$$T = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} \, ds = \oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

b) Vectơ xoáy

Định nghĩa. Vector xoáy ($\text{rot} \vec{F}(M)$, hoặc $\text{curl} \vec{F}(M)$) tại M trong trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ là

$$\text{rot} \vec{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ví dụ 1. Tìm vector xoáy của điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$.

GIẢI

$$+) \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} = \frac{qx}{r^3} \vec{i} + \frac{qy}{r^3} \vec{j} + \frac{qz}{r^3} \vec{k}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$+) \operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{qz}{r^4} (-3) \frac{y}{r} - \frac{qy}{r^4} (-3) \frac{z}{r} \right) \vec{i} +$$

$$\left(\frac{qx}{r^4} (-3) \frac{z}{r} - \frac{qz}{r^4} (-3) \frac{x}{r} \right) \vec{j} + \left(\frac{qy}{r^4} (-3) \frac{x}{r} - \frac{qx}{r^4} (-3) \frac{y}{r} \right) \vec{k}$$

$$+) = 0.$$

Vector xoáy có các tính chất sau:

- Tuyến tính
- $\text{rot}(u\vec{c}) = \overrightarrow{\text{grad}u} \wedge \vec{c}$, \vec{c} là hằng số
- $\text{rot}(u\vec{F}) = u \text{rot} \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad}u} \wedge \vec{F}$

c) Công thức Stokes dưới dạng vector.

$$\oint_C \vec{F} \vec{\tau} ds = \iint_S \text{rot} \vec{F} \vec{N} dS$$

Do đó có: lưu số của trường vector \vec{F} theo một đường cong kín C bằng thông lượng của vector $\text{rot} \vec{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường cong C .

§ 4. Công thức Ostrogradsky

- Đặt vấn đề

- +) Công thức Green

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc, có hướng dương C , thì có

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dxdy$$

- +) $\iiint_S Pdydz + Qdzdx + R dxdy = ?$

1. Công thức

Định lí 1. (Công thức Ostrogradsky). Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền compact $V \subset \mathbb{R}^3$ giới hạn bởi mặt cong kín trơn từng phần S , thì ta có công thức

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S .

Ví dụ 1. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

GIẢI

$$+) \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy = \iiint_V (1+1+1) dxdydz$$

$$+) = 3 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3.$$

Ví dụ 2. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

GIẢI

$$\begin{aligned} +) I &= \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \end{aligned}$$

$$+) x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \Rightarrow$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^2 r^2 \sin \theta dr$$

$$= 3 \times 2\pi \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^a r^4 dr = 0$$

Ví dụ 3. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, ở đó S là phía
ngoài mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b$.

GIẢI

+) $S_1 : z = b, x^2 + y^2 \leq a^2$, hướng lên trên, nên có

$$I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$= \iint_{S \cup S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$- \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = I_1 - I_2$$

$$+) I_2 = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} b^2 dxdy = \pi a^2 b^2$$

$$+) I_1^{\text{Ostr}} = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

Đổi sang tọa độ trụ :

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a,$$

$$\frac{b}{a}r \leq z \leq b \Rightarrow$$

$$I_1 = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{b}{a}r}^b [r(\cos \varphi + \sin \varphi) + z] dz$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \left[r(\cos \varphi + \sin \varphi)z + \frac{z^2}{2} \right] \Big|_{z=\frac{b}{a}r}^b dr$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \left[r(\cos \varphi + \sin \varphi) \left(b - \frac{b}{a} r \right) + \frac{b^2 - \left(\frac{b}{a} r \right)^2}{2} \right] dr \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left\{ \left(br^2 - \frac{b}{a} r^3 \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{b^2}{2} r - \frac{b^2}{2a^2} r^3 \right\} dr \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left[\left(b \frac{r^3}{3} - \frac{b}{a} \frac{r^4}{4} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{b^2}{2} \frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2a^2} \frac{r^4}{4} \right] \Bigg|_0^a d\varphi \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{ba^3}{3} - \frac{ba^3}{4} \right) (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{b^2 a^2}{4} - \frac{b^2 a^2}{8} \right] d\varphi
\end{aligned}$$

$$= 2 \left[\left(\frac{ba^3}{3} - \frac{ba^3}{4} \right) (\sin \varphi - \cos \varphi) + \left(\frac{b^2 a^2}{4} - \frac{b^2 a^2}{8} \right) \varphi \right] \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2 \left[\left(\frac{ba^3}{3} - \frac{ba^3}{4} \right) \times 0 + \left(\frac{\pi b^2 a^2}{2} - \frac{\pi b^2 a^2}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{2} a^2 b^2.$$

$$+) \quad I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} a^2 b^2 - \pi a^2 b^2 = -\frac{\pi}{2} a^2 b^2.$$

Ví dụ 4.

a (K58) $\iint_S \frac{xy^2}{4} dydz + \frac{yz^2}{9} dzdx + x^2z dx dy$, ở đó S là

phía ngoài mặt elipsoid $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. $(\frac{24\pi}{5})$

b (K59) $\iint_S xz^2 dydz + 4yx^2 dzdx + 9zy^2 dx dy$, ở đó S

là mặt elipsoid $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.
 $(\frac{2\pi}{15})$

c (K60) $\iint_S (x^2 + y^2) dydz + (x + 3z^2) dzdx + 4xzdxdy,$

ở đó mặt kín S là biên của miền V :

$$x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \text{ hướng ra ngoài. } \left(\frac{1}{4}\right)$$

2. Ý nghĩa Vật lí.

a) Dive của trường vectơ

• **Định nghĩa.** Cho trường vô hướng u , vectơ gradient của trường vô hướng u là

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ là các vectơ đơn vị}$$

trên các trục

• **Tính chất.**

+) Tuyến tính

$$+) \overrightarrow{\text{grad}}(u_1 u_2) = u_1 \overrightarrow{\text{grad}} u_2 + u_2 \overrightarrow{\text{grad}} u_1.$$

CM

$$+) \overrightarrow{\text{grad}}(u_1 u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_2) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 u_2) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 u_2) \vec{k}$$

$$+) = (u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}) \vec{i} + (u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y}) \vec{j} +$$

$$+ (u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z}) \vec{k}$$

$$+) = u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \vec{k} \right) + u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$= u_1 \overrightarrow{\text{grad}} u_2 + u_2 \overrightarrow{\text{grad}} u_1.$$

$$+) \overrightarrow{\text{grad}} f(u) = f'(u) \overrightarrow{\text{grad}} u.$$

$$+) \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = ch_{\vec{l}} \overrightarrow{\text{grad}} u$$

Ví dụ 1 (Bài toán con muỗi). Nhiệt độ của không khí tại các điểm trong không gian được xác định bởi hàm $u = x^2 - y + z^2$. Một con muỗi đậu tại điểm $M(1; 2; 1)$ trong không gian. Hỏi con muỗi cần bay theo hướng nào để được mát nhanh nhất ?

GIẢI

$$+) \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad } u} \cdot \vec{l} \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right| = \left| \overrightarrow{\text{grad } u} \right| \left| \vec{l} \right| \cos \varphi \leq \left| \overrightarrow{\text{grad } u} \right|$$

+) Nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng $\overrightarrow{\text{grad } u}$

mà

$$\overrightarrow{\text{grad } u}(M) = 2x \vec{i} - \vec{j} + 2z \vec{k} \Big|_M = 2 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k}.$$

+) Do đó để được mát nhanh nhất, con muỗi cần bay theo hướng

$$-\overrightarrow{\text{grad } u}(M) = -2 \vec{i} + \vec{j} - 2 \vec{k}.$$

Ví dụ 2 (K58). Cho trường vô hướng

$u = xy + yz + zx$. Tính lưu số của trường vecto $\overrightarrow{\text{grad} u}$ dọc đoạn thẳng từ A(-1 ; -1 ; -1) đến B(2 ; 4 ; 1). (11)

• **Định nghĩa.** Cho trường vector $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

, div của trường vector \vec{F} là $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

b) Công thức Ostrogradsky dưới dạng vectơ

$$\iint_S \vec{F} \vec{N} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV, \text{ ở đó}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

\vec{N} là vecteur pháp tuyến của mặt S .

c) Điểm nguồn, điểm rò, trường vectơ có thông lượng bảo toàn

- Cho $\operatorname{div} \vec{F}$ liên tục tại $M \in V$ và $\operatorname{div} \vec{F}(M) > 0$. Gọi V' là miền giới hạn bởi mặt kín S' trong lân cận đủ nhỏ của M . Từ công thức ở mục b) \Rightarrow thông lượng qua mặt S' từ trong ra ngoài là số dương, hay thông

lượng vào mặt S' ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó. Khi đó điểm M được gọi là điểm nguồn của trường.

Ngược lại nếu $\operatorname{div} \vec{F}(M) < 0$ thì M được gọi là điểm rò của trường.

- Nếu $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ thì trường không có các điểm nguồn và điểm rò. Khi đó ta bảo \vec{F} là trường ống.
- Nếu $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ thì \vec{F} là trường thế (còn gọi là trường bảo toàn). Hàm u là hàm thế vị nếu có $\operatorname{grad} u = \vec{F}$.
- Nếu trường \vec{F} vừa là trường ống và là trường thế thì ta bảo \vec{F} là trường điều hòa.

Ví dụ 1. Tính thông lượng của trường

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt toàn phần của hình trụ

$x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq x \leq h$, hướng ra ngoài và qua phía ngoài mặt xung quanh hình trụ.

GIẢI a)

$$+) \Phi = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$+) \Phi = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\pi a^2 h.$$

b)

$$+) \Phi_b = \Phi - \Phi_t - \Phi_s,$$

$$\Phi = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

$$\Phi_t = \iint_{S_t} xdydz + ydzdx + zdx dy,$$

$S_t : x^2 + y^2 \leq a^2, z = h$, hướng lên trên, nên có

$$\Phi_t = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} h dx dy = h\pi a^2,$$

$$\Phi_d = \iint_{S_d} xdydz + ydzdx + zdx dy,$$

$S_d : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$, hướng xuống dưới,
nên có

$$\Phi_d = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} 0 dx dy = 0.$$

$$\begin{aligned} +) \Phi_b &= \Phi - \Phi_t - \Phi_s = 3h\pi a^2 - h\pi a^2 - 0 \\ &= 2h\pi a^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính thông lượng của điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phía ngoài mặt kín bao quanh gốc tọa độ (Định luật Gauss)

Ví dụ 3. Tìm hàm thế vị của trường véc tơ sau :

$$\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

GIẢI

+) Ta có

$$P = yz(2x + y + z), Q = zx(x + 2y + z), R = xy(x + y + 2z)$$

$$\Rightarrow R'_y - Q'_z = x^2 + 2xy + 2xz - (x^2 + 2xy + 2xz) = 0,$$

Tương tự có

$$P'_z - R'_x = 0, Q'_x - P'_y = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$$

là trường thế.

+) Tìm u sao cho

$$du = yz(2x + y + z)dx + zx(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz$$

+) Từ ĐL 4 Mệnh đề tương đương, ta có

$$u = \int_0^x 0dt + \int_0^y 0dt + \int_0^z xy(x + y + 2t)dt$$

$$= xy(x + y)\Big|_0^z + xyt^2\Big|_0^z = xyz(x + y + z)$$

+) Hàm thế vị là $u = xyz(x + y + z) + C$.

Ví dụ 4 a (K59). 1) CMR :

$$\vec{F} = (3x^2y + 2z^2)\vec{i} + (x^3 + 6y)\vec{j} + (4xz + e^z)\vec{k} \quad \text{là trường}$$

thế. Tìm hàm thế vị.

$$(u = x^3y + 2xz^2 + 3y^2 + e^z + C)$$

2) CMR trường vecto:

$$\vec{F} = (\arccot(y - z), \frac{-x}{1 + (y - z)^2}, \frac{x}{1 + (y - z)^2}) \text{ là trường thế.}$$

$$(P'_z = R'_x, Q'_x = P'_y, R'_y = Q'_z)$$

3) Tính thông lượng của trường vecto

$$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k} \text{ qua mặt kín } S \text{ là biên của}$$

miền $V : 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$, $0 \leq x \leq 2$, hướng ra ngoài.
 $(2\pi + \frac{8}{3})$

4) Tính thông lượng của trường vectơ

$$\vec{F} = (\cos z + xy^2)\vec{i} + xe^{-z}\vec{j} + (x^2z + y)\vec{k}$$

qua mặt kín S là biên của miền $V : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$, hướng ra ngoài.
 $(\frac{16\pi}{5})$

b (K60). 1) Tính $\iint_S (x^3 + y)dydz + (y^3 + 2z)dzdx + zdx dy$,
 trong đó S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 , $z \geq 0$, hướng ra ngoài mặt cầu.

$$\left(\frac{22\pi}{15} \right)$$

2) CMR :

$$\vec{F} = (2xe^z + y^2)\vec{i} + (2xy + 3z^2)\vec{j} + (x^2e^z + 6yz)\vec{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị.

$$(\overrightarrow{\text{rot}F} = \vec{0}, u = xy^2 + x^2e^z + 3yz^2 + C)$$

3) Tính thông lượng của trường vecto

$$\vec{F} = (x^3 - z)\vec{i} - y\vec{j} + (3y^2z + 2y)\vec{k} \quad \text{qua mặt cầu } S :$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \text{hướng ra ngoài mặt cầu.} \quad \left(\frac{4\pi}{15} \right)$$

4) Tính thông lượng của trường vecto

$$\vec{F} = (6z^3 - 9y)\vec{i} - (3x - 2z^3)\vec{j} + (3y - 3x)\vec{k}$$

$$\text{qua mặt cong } S : x^2 + 3y^2 + z^4 = 1, \quad z \geq 0,$$

$$\text{hướng lên trên.} \quad (0)$$

3. Toán tử Haminton

a) Định nghĩa. $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$

b) Tính chất

• $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u$

• $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$

• $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F}$

• $\vec{\nabla}^2 = \Delta$, ở đó Δ là toán tử Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} u) = \Delta u$
- $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = 0$

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$

Chứng minh $\vec{\nabla} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}$

$$+) \vec{\nabla} \vec{F} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} P + \vec{j} Q + \vec{k} R)$$

$$+) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Chứng minh $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} u) = 0$

$$\begin{aligned} +) \operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) &= \operatorname{rot} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \\ +) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \vec{k} = 0 \end{aligned}$$

Thank you and Good bye!

PHỤ LỤC

- **Định nghĩa.** Cho trường vô hướng u , vector đơn vị $\vec{l}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, $M(x, y, z)$. Nếu tồn tại

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\rho}, \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - u(x, y, z)}{\rho} \end{aligned}$$

thì được gọi là đạo hàm của hàm u theo hướng

$\vec{\ell}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ và được ký hiệu là $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$.

Chú ý. Khi $\vec{\ell} = (1; 0; 0)$ thì có $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Tương

tự khi $\vec{\ell} = (0; 1; 0)$ thì có $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial y}$, khi $\vec{\ell} = (0; 0; 1)$

thì có $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial z}$

• **Định lí.** Cho hàm $u(x ; y ; z)$ khả vi tại $M(x ; y ; z)$,
 vectơ $\vec{\ell}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, khi đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Ví dụ 1. a (K58). Tính đạo hàm của hàm
 $u = x^2 + 2y^3 - 3xz$

theo hướng \overrightarrow{AB} tại điểm A, biết A(1 ; 1 ; 2) và
 B(2 ; 0 ; 4).

$$\left(-\frac{16}{\sqrt{6}} \right)$$

b)(K59). 1) Cho $u = x^3 + 2yz^2 + 3xyz$.

Tính đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{A})$, trong đó \vec{n} là vecto pháp

tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
 tại điểm $A(1 ; 1 ; 1)$. ($6\sqrt{3}$)

2) Cho trường vô hướng $u = \ln(1 + e^{x-y} + z^2)$
 và $O(0 ; 0 ; 0)$, $A(2 ; 1 ; -2)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(O)$ theo
 hướng OA . ($\frac{1}{6}$)

c)(K60). 1) Tính đạo hàm của hàm
 $u = x^3 + y^3 + z^2 + 2xy$ theo hướng $\vec{\ell} = (5; 5; 2)$ tại
điểm $P(1; 1; 1)$. $(3\sqrt{6})$.