Bài 1: Cho bt

$$\min \quad f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$
$$\text{vđk} \quad x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

Kiểm tra $x^0 = (2,2)^T$ có là ngh t.ư
của bt trên κ^0

Bài 2: Cho bt

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$$
$$\text{vđk} \quad x \in D = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$$

Kiểm tra : $x^1 = (0,0)^T, \ x^2 = (0,4)^T$

$x^3 = (4,0)^T$ có phải là ngh t.ư của bt
trên κ^0 ?

Bài 3: Xét bài toán

$$\min f(x) \qquad (P_3)$$
$$\text{vđk} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ khả vi

lt $\mathbb{R}^n_+$. CMR: $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$ là điểm

dừng của (P_3)

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \begin{cases} 0, & x_i^0 > 0 \\ \geq 0, & x_i^0 = 0 \end{cases}$$

Bài 4: Xét bài toán

$$(P_4) \quad \min_{n} f(x)$$
$$\text{vđk} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

f khả vi liên tục / $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$
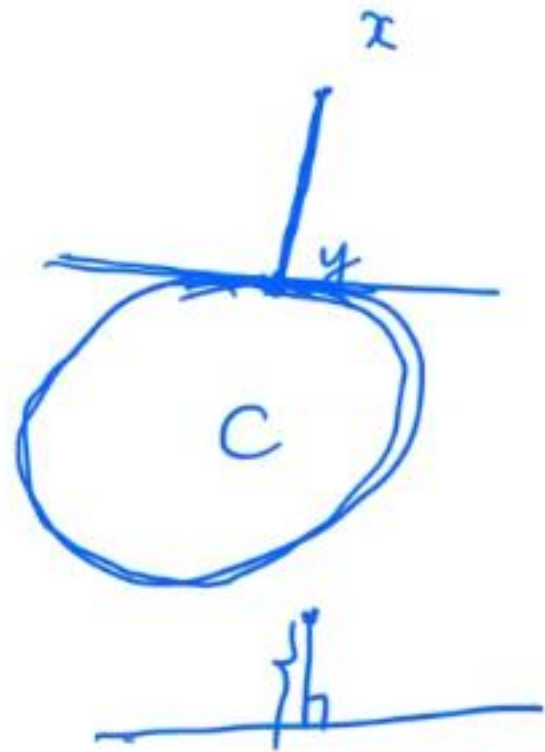
CMR: $x^0 \in X$ là điểm dừng của bài toán (P_4)

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)$$

Bài 5: Cho C là 1 tập lồi đóng trong $\mathbb{R}^n$

Với $x \in \mathbb{R}^n$, kí hiệu

$$\boxed{P_C(x)} = \underset{y \in C}{\arg\min} \, \|y - x\|$$

là hình chiếu của x lên tập C. Giá trị $\|P_C(x) - x\|$ đgl khoảng cách từ x lên tập C.

CMR: $z = P_C(x)$

$\iff (x - z)^T (y - z) \leq 0 \quad \forall y \in C.$

Bài 6: Cho f lồi khả vi trên tập lồi đóng C. Cho $s > 0$. Khi đó x^0 là đ' dừng của

$$\min f(x)$$
$$\text{vđk} \quad x \in C$$

Khi và chỉ khi

$$x^0 = P_C\left(x^0 - s \, \nabla f(x^0)\right)$$