Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

Giảng viên: PGS.TS. Nguyễn Duy Tân
tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Nội dung

3.1.1. Định nghĩa

Cho hàm $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Giả sử với mỗi $t \in [c,d]$ cố định, hàm số $f(x,t)$ khả tích trên $[a,b]$. Ta định nghĩa hàm $I\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ như sau

$$I(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Ta gọi $I(t)$ là tích phân phụ thuộc tham số t.

3.1.2. Tính liên tục, khả vi, khả tích

Định lý

Nếu $f(x, t)$ liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(t)$ liên tục $[c, d]$.

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b \lim_{t \to t_0} f(x, t)dx = \int_a^b f(x, t_0)dx.$$

(Có thể đưa lim vào trong tích phân.)

Sơ lược chứng minh

- Xét $t_0 \in [c, d]$ bất kỳ, và $\epsilon > 0$ cho trước.

$$|I(t) - I(t_0)| = \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0)) \right| dx \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)| dx.$$

- Vì $f(x,t)$ liên tục trên hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ nên nó liên tục đều trên R.
- Với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t_0)| < \frac{\epsilon}{b-a+1}, \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta, |t - t_0| < \delta.$$

- Nói riêng, với $|t - t_0| < \delta$,

$$|I(t) - I(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)| \leq (b-a)\frac{\epsilon}{b-a+1} < \epsilon.$$

- I liên tục tại t_0.

Ví dụ (GK20201)

Cho hàm số $I(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^4 + x^2 + y^4}dx$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y \to 0} I(y)$.

- Hàm $f(x, y) = \sqrt{x^4 + x^2 + y^4}$ liên tục trên mọi hình chữ nhật $[-1, 1] \times [c, d]$.
- Do vậy $I(y)$ liên tục trên mọi đoạn đóng $[c, d]$. Do đó $I(y)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $$\lim_{y \to 0} I(y) = I(0) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^4 + x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^4 + x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}d(1 + x^2) = \frac{2}{3}\left.(1 + x^2)^{3/2}\right|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Tính khả tích

Định lý

Nếu hàm $f(x,t)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(t)$ khả tích trên $[c,d]$ và

$$\int_c^d I(t)dt = \int_c^d dt \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,t)dt.$$

Tính khả vi

Định lý

Nếu hàm $f(x,t)$ và đạo hàm riêng $f'_t(x,t)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$, thì $I(t)$ có đạo hàm trên $[c,d]$ và

$$I'(t) = \int_a^b f'_t(x,t)dx.$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Có thể đưa dấu đạo hàm vào trong tích phân.

Sơ lược chứng minh

- Đặt $J(t) = \int_a^b f_t'(x,t)dx$. Khi đó $J(t)$ là hàm liên tục trên $[c,d]$
- Với mọi $y \in [c,d]$ ta có

$$\begin{aligned} VT &= \int_c^y J(t)dt = \int_c^y \int_a^b f_t'(x,t)dxdt = \int_a^b \int_c^y f_t'(x,t)dtdx \\ &= \int_a^b \left(f(x,t)\Big|_c^y \right) dx = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,c)dx = VP. \end{aligned}$$

- Lấy đạo hàm VT và VP.
- Đạo hàm của VT bằng $J(y)$.
- Đạo hàm của VP bằng $I'(y)$.
- Vậy $I'(t) = J(t)$.

Ví dụ

$\int\limits_0^1 x^t dx = \dfrac{1}{t+1}$ $(t > -1)$. $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\int\limits_0^1 x^t dx = \int\limits_0^1 \dfrac{\partial}{\partial t}(x^t)dx \Rightarrow$
$\int\limits_0^1 x^t \ln x dx = -\dfrac{1}{(t+1)^2}$.

- (Putnam 2005, A5) Tính $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$.
- Tính $\int\limits_0^{\pi} e^{\cos(x)} \cos(\sin x)dx$.

Ví dụ (GK20162)

Cho hàm số $f(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 \sin^2 x + \cos^2 x)dx$. Tính $f'(1)$.

- Hàm $F(x,y) = \ln(y^2 \sin^2 x + \cos^2 x)$ và đạo hàm riêng $F'_y(x,y) = \dfrac{2y\sin^2 x}{y^2\sin^2 x + \cos^2 x}$ liên tục trên $[0,\pi/2] \times [1/2, 2]$.
- Do vậy hàm $f(y)$ khả vi trên $[1/2, 2]$ và

$$f'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{2y\sin^2 x}{y^2\sin^2 x + \cos^2 x} dx.$$

- $f'(1) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{2\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x))dx = \pi/2.$

Tích phân phụ thuộc tham số với cận biến thiên

Cho hàm $f(x,t)$ khả tích trên $[a,b]\times[c,d]$. Cho hai hàm $\alpha(t),\beta(t)$ xác định trên $[c,d]$ với $a\le\alpha(t),\beta(t)\le b$, $\forall t\in[c,d]$. Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến thiên $I(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu f liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, các hàm $\alpha(t),\beta(t)$ liên tục trên $[c,d]$ và nhận giá trị trong $[a,b]$, thì $I(t)$ liên tục trên $[c,d]$.

Định lý (Tính khả vi) (Công thức Leibniz)

Nếu hàm $f(x,t)$ và đạo hàm riêng $f'_t(x,t)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, và các hàm $\alpha(t)$, $\beta(t)$ khả vi trên [c,d], thì $I(t)$ có đạo hàm trên $[c,d]$ và

$$I'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(x,t)dx+f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t).$$

Ví dụ (GK20192)

Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{y}^{\pi/2} \sin(x^2y + 2x + y^2)dx$.

- Hàm lấy tích phân và các cận là các hàm liên tục.
- Do vậy $I(y) = \int\limits_{y}^{\pi/2} \sin(x^2y + 2x + y^2)dx$ liên tục.
- $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{y}^{\pi/2} \sin(x^2y + 2x + y^2)dx = I(0) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(2x)dx =$
  $-\left.\dfrac{\cos(2x)}{2}\right|_0^{\pi/2} = 1.$

Ví dụ (GK20192)

Cho hàm số $I(y) = \int_y^1 \sin(x^2 + xy + y^2)dx$. Tính $I'(0)$.

- Hàm số lấy tích phân $f(x, y) = \sin(x^2 + xy + y^2)$ và đạo hàm riêng f'_y là các hàm liên tục. Các cận lấy tích phân là các hàm khả vi.
- Do vậy $I(y)$ khả vi và

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_y^1 f'_y(x, y)dx - f(y, y) \\ &= \int_y^1 (x + 2y)\cos(x^2 + xy + y^2)dx - \sin(3y^2). \end{aligned}$$

- $I'(0) = \int_0^1 x\cos(x^2)dx - \sin 0 = \dfrac{1}{2}\sin 1.$

Một số bài tập

- (GK20152) Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x^{2015}\cos(xy)}{1+x^2+2y^2}dx$.
- (CK20182) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\dfrac{1}{x^4+\sin^2 y}dy$.
- (GK20181) Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\frac{1}{2}+y^2}^{\sin y}\dfrac{\arcsin(x+3y)}{\sqrt{1-x^2+3y^2}}dx$.

3.2.1. Định nghĩa

- Cho hàm $f\colon [a, +\infty] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Giả sử với mỗi $t \in [c, d]$ cố định, tích phân suy rộng
$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$
hội tụ. Ta gọi $I(t)$ là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số t.
- Ta nói tích phân suy rộng $I(t)$ hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $A \geq a$ sao cho:
$$b \geq A \Rightarrow \left| I(t) - \int_a^b f(x, t)dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| < \epsilon, \quad \forall t \in [c, d].$$
- Nhận xét: (Giả sử với mỗi $t \in [c, d]$, hàm $f(x, t)$ khả tích trên $[a, b]$ với mọi $b > a$.) Khi đó tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu và chỉ nếu tích phân suy rộng $\int_u^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$, với $u > a$.

3.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ đều

Tiêu chuẩn Weierstrass

- Cho hàm $f(x,t)$ xác định trên $R = [a,+\infty] \times [c,d]$ và với mỗi $t \in [c,d]$ hàm $f(x,t)$ khả tích trên mỗi đoạn $[a,b]$, $b \geq a$.
- Giả sử tồn tại hàm số $\varphi(x)$ xác định trên $[a,+\infty]$ sao cho
  $|f(x,t)| \leq \varphi(x)$ với mọi $(x,t) \in R$ và $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$.
- Khi đó tích phân $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c,d]$.

Ví dụ

Xét sự hội tụ đều của $I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx$ trên đoạn $[0, a]$, a là số dương cho trước.

- Ta có $|e^{-x}x^t| = e^{-x}x^t \leq e^{-x}x^a$ với mọi $x \geq 1$, $t \in [0, a]$.
- Tích phân $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}x^a dx$ hội tụ.
- Theo dấu hiệu Weierstrass, tích phân $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}e^t dx$ hội tụ đều trên [0,a].
- Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}e^t dx$ hội tụ đều trên [0,a].

3.2.3. Tính liên tục, khả vi, khả tích

Định lý (Tính liên tục)

Nếu f liên tục trên $[a, +\infty) \times [c, d]$, và tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \text{ hội tụ đều trên } [c, d],$$

thì $I(t)$ liên tục trên $[c, d]$.

Định lý (Tính khả tích)

Nếu hàm $f(x,t)$ liên tục trên $[a,+\infty)\times[c,d]$ và

$$I(t)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)dx \text{ hội tụ đều trên } [c,d],$$

thì $I(t)$ khả tích trên $[c,d]$ và

$$\int_c^d I(t)dt=\int_c^d dt\int_a^{+\infty} f(x,t)dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,t)dt.$$

Định lý (Tính khả vi)

Cho hàm $f(x,t)$ và đạo hàm riêng $f'_t(x,t)$ liên tục trên $[a,+\infty)\times[c,d]$. Giả sử

$$I(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)dx \text{ hội tụ và } J(t)=\int_a^{+\infty} f'_t(x,t)dx \text{ hội tụ đều trên } [c,d].$$

Khi đó $I(t)$ có đạo hàm trên $[c,d]$ và

$$I'(t)=\int_a^{+\infty} f'_t(x,t)dx.$$

$$\frac{d}{dt}I(t)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Ví dụ (GK20193)

Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2} dx$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

- Ta chỉ cần chứng minh hàm số $I(y)$ liên tục và có đạo hàm trên mọi đoạn đóng $[c,d]$.
- Hàm $f(x,y) = \frac{\sin(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2}$ liên tục trên $[0,+\infty] \times [c,d]$.
- $\left|\frac{\sin(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^6}$, với mọi $x \geq 0, c \leq y \leq d$.
- Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$ hội tụ.
- Do vậy tích phân $I(t)$ hội tụ đều trên $[c,d]$.
- Suy ra $I(t)$ liên tục trên $[c,d]$.

- Hàm $f'_y(x,y) = \dfrac{3\cos(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2} - \dfrac{2y\sin(x^6+3y+2)}{1+x^6+y^2}$ liên tục trên $[0,+\infty] \times [c,d]$.
- $\left|f'_y(x,y)\right| \leq \dfrac{3}{1+x^6} + \dfrac{M}{1+x^6} := \varphi(x)$, với mọi $x \geq 0, c \leq y \leq d$, ở đây $M = 2\max\{|c|,|d|\}$.
- Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)$ hội tụ.
- Do vậy $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều.
- Như vậy $I(t)$ khả vi.

Ví dụ (CK20172)

Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$, với $a, b > 0$.

- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_a^b x e^{-x^2 y} dy \right) dx.$
- Tích phân $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2 y} dx$ hội tụ đều trên $[a, b]$:
- Vì $x e^{-x^2 y} \leq x e^{-x^2 a}$ với mọi $x \geq 0$ và $y \in [a, b]$ và $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2 a} dx$ hội tụ.
- Ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_a^b x e^{-x^2 y} dy \right) dx = \int\limits_a^b \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2 y} dx dy = \int\limits_a^b \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2} (\ln b - \ln a).$$

Bài tập

- Đọc lại các ví dụ trong giáo trình.
- Làm bài tập trong giáo trình.
- Đọc trước phần kiến thức tiếp theo (Tích phân Euler, tích phân đường,...).

3.3.1. Hàm Gamma

- Với n nguyên dương, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.
- Lý thuyết hàm gamma được phát triển khi giải quyết bài toán mở rộng hàm giai thừa cho cả biến giá trị thực (dương).
- $n! = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ (Euler, khoảng 1730).

Định nghĩa

Hàm gamma là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số t

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Xét $t > 0$ cố định.

- $\int\limits_a^1 e^{-x}x^{t-1}dx < \int\limits_a^1 x^{t-1}dx = \frac{1}{t} - \frac{a^t}{t} < \frac{1}{t}$.
- Suy ra tồn tại $\int\limits_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 e^{-x}x^{t-1}dx$.
- $e^x > \frac{x^n}{n!}$, với mọi n tự nhiên. Chọn $n > t+1$.
- $e^{-x}x^{t-1} < \frac{n!}{x^{n+1-t}}$.
- $\int\limits_1^b e^{-x}x^{t-1}dx < \int\limits_1^b \frac{n!}{x^{n+1-t}}dx = n!\left(\frac{1}{n-t} - \frac{1}{b^{n-t}}\right) < \frac{n!}{n-t}$.

  Suy ra tồn tại $\int\limits_1^\infty e^{-x}x^{t-1}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b e^{-x}x^{t-1}dx$.

Tính chất

- $\Gamma(t)$ xác định và có đạo hàm mọi cấp tại mọi $t > 0$.
- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t),\ t > 0$.
- $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
- $\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}}$, $(0 < p < 1)$. (Euler's reflection formula.)

Định lý Bohr-Mollerup

Định lý Bohr-Mollerup (1922)

Hàm $\Gamma(x)$ là hàm duy nhất f trên $(0, +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $f(1) = 1$,
- $f(x+1) = xf(x)$.
- $\log f(x)$ là hàm lồi.

3.3.2. Hàm Beta

Định nghĩa

Hàm Beta là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số p, q:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

Tính chất

- Hàm $B(p,q)$ xác định và khả vi mọi cấp, với $p>0,\ q>0$.
- $B(p,q)=B(q,p)$.
- $B(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}B(p,q)$.
- $B(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$.
- $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(p,1-p)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{t^{p-1}}{1+t}dt=\dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$.

Ví dụ (CK20171)

Tính $I = \int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$.

- Đổi biến $t = x^2$. Khi đó $dt = 2xdx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.
- $I = \int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt = \dfrac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{3/2} dt = \dfrac{1}{2}\Gamma(5/2) =$
  $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2}\Gamma(3/2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\Gamma(1/2) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{8}$.

Ví dụ (CK20192)

Tính $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{3/2}}{x^4} dx$.

- Đổi biến $t = \ln x$. Khi đó $x = e^t$ và $dx = e^t dt$.
- $I = \int\limits_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-4t} e^t dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-3t} dt$.
- Đổi biến $u = 3t \Leftrightarrow t = u/3$.
- $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{3^{3/2}} u^{3/2} e^{-u} \frac{1}{3} du = \frac{1}{9\sqrt{3}} \int\limits_0^{+\infty} u^{3/2} e^{-u} du = \frac{1}{9\sqrt{3}} \Gamma(5/2) = \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{3}}$.

Một số bài tập

- Xem ví dụ và bài tập trong giáo trình.
- (CK20161) Tính $\int\limits_0^1 x^5(\ln x)^{10}dx$.
- (CK20182) Tính $\int\limits_0^{+\infty} x^6 3^{-x^2}dx$.
- (CK20152) Tính $\int\limits_0^{+\infty} x^{25}e^{-x^2}dx$.
- (CK20152) Tính $\int\limits_0^{+\infty} x^6 e^{-\sqrt{x}}dx$.
- (CK20142) Tính $\int\limits_0^{+\infty} x^9 e^{-x^4}dx$.

Ví dụ (CK20152)

Tính tích phân $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}\sqrt[3]{1-e^{3x}}dx$.

- Đặt $t = e^{3x}$, $t\colon 0 \to 1$. Khi đó $x = \dfrac{1}{3}\ln t$ và $dx = \dfrac{1}{3t}dt$.
- $I = \int\limits_0^1 t^{2/3}(1-t)^{1/3}\dfrac{1}{3t}dt = \dfrac{1}{3}B(2/3,4/3) = \dfrac{1}{3}\dfrac{\Gamma(2/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma(2)} = \dfrac{1}{3}\Gamma(2/3)\dfrac{1}{3}\Gamma(1/3) = \dfrac{1}{9}\Gamma(2/3)\Gamma(1/3) = \dfrac{1}{9}\dfrac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Ví dụ (CK20182)

Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^4} dx$.

- Đặt $t = x^4 \to x = t^{1/4} \to dx = \frac{t^{-3/4}}{4} dt$.
- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{(1+t)^4} \frac{t^{-3/4}}{4} dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-1/4}}{(1+t)^4} = \frac{1}{4} B(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}) =$
  $\frac{1}{4} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(13/4)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{3!} \Gamma(3/4) \frac{9}{4} \frac{5}{4} \frac{1}{4} \Gamma(1/4) =$
  $\frac{15}{512} \Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{15}{512} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{15\pi}{256\sqrt{2}}$.

Một số bài tập

- (CK20152) Tính tích phân $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{\frac{x^3}{(1-\sqrt{x})^2}}dx$.
- (CK20162) Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[5]{x^4}}dx$.
- (CK20171) Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+4x^4)^2}dx$.
- (CK20192) Tính tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/4}}{(1+e^x)^2}dx$.
- (CK20193) Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^5}{1+x^{2000}}dx$.
- CMR: $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $(p, q > 0)$.