ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Toán Rời Rạc

Ghép cặp trên đồ thị hai phần

Ghép cặp trên đồ thị hai phần

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Albert R Meyer's slides

Tìm bạn nhảy

- Tối thứ bảy, hội sinh viên tổ chức tiệc.
- Có 300 sinh viên tham gia.
- Họ không quen hết nhau!
- Trong 6 người luôn có ba người đôi một quen nhau hoặc ba người đôi một lạ nhau!

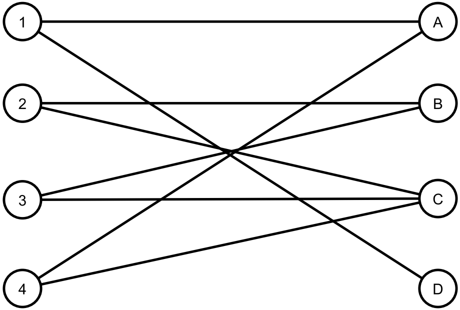
Tìm bạn nhảy

- Tối thứ bảy, hội sinh viên tổ chức tiệc.
- Có 300 sinh viên tham gia.
- Họ không quen hết nhau!
- Nhưng mỗi cô gái quen đúng 50 chàng trai, và mỗi chàng trai quen đúng 50 cô gái!
- Liệu mọi sinh viên có thể nhảy đồng thời sao cho hai người nhảy cùng nhau phải biết nhau?

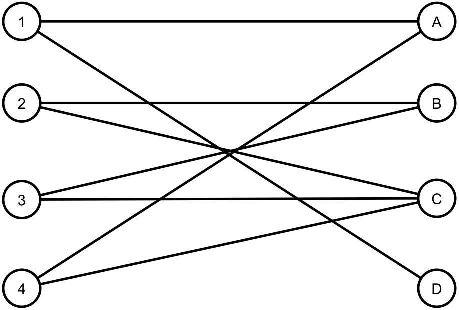
Nội dung

1. Ghép cặp Nam & Nữ
2. Định lý Hall
3. Làm thế nào để tìm ghép cặp lớn nhất?

Đồ thị Nam & Nữ

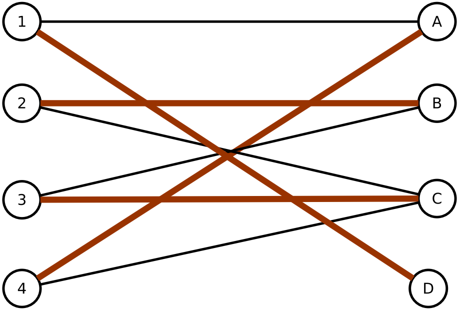


Đồ thị Nam & Nữ



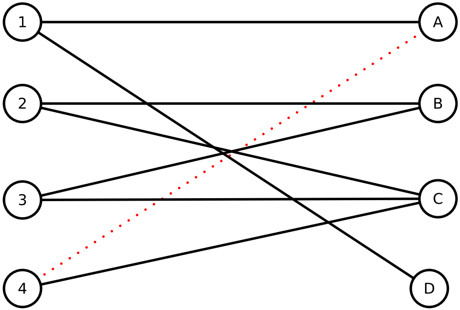
Hãy tìm cách ***ghép cặp*** mỗi cô gái với chỉ một chàng trai phù hợp.

Đồ thị Nam & Nữ



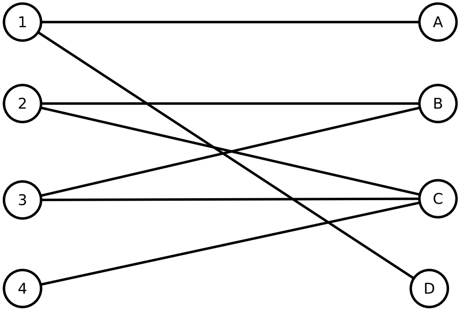
Hình: Một ghép cặp

Đồ thị Nam & Nữ



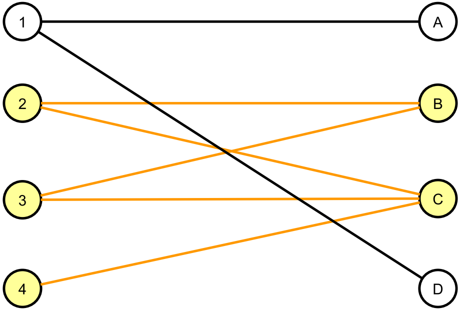
Hình: Giả sử không có cạnh nét đứt.

Đồ thị Nam & Nữ



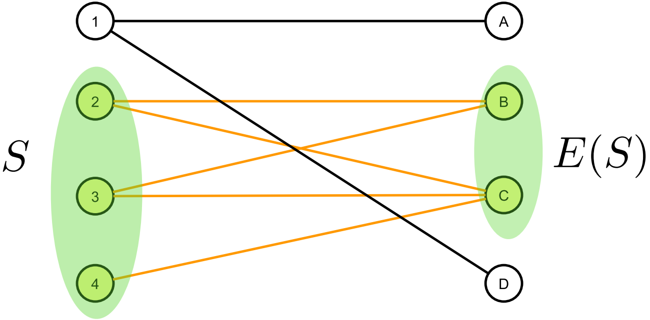
Hình: Liệu ta có thể ghép cặp nam nữ?

Không đủ số Nam



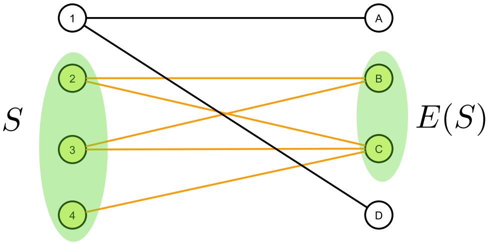
Hình: Có 3 cô gái nhưng chỉ có 2 chàng trai phù hợp.

Tắc nghẽn



Hình: Tắc nghẽn là một tập Nữ S không có đủ số Nam phù hợp.

Tắc nghẽn



- Ta ký hiệu

$$E(S) = \{w \mid w \text{ kề với ít nhất một cô gái trong } S\}.$$

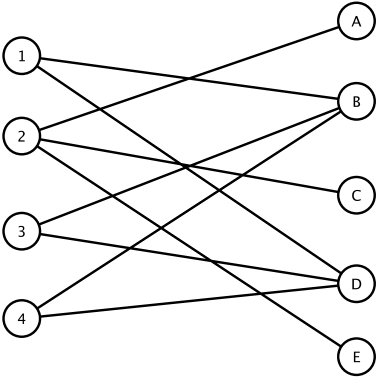
- Tập S là tắc nghẽn nếu $|S| > |E(S)|$.

Bổ đề (Tắc nghẽn)

Nếu tồn tại tắc nghẽn, vậy không tồn tại cặp ghép.

Bài tập

Tại sao đồ thị dưới đây không có ghép cặp cho các cô gái $\{1, 2, 3, 4\}$?



Định lý (Hall)

Ngược lại, nếu không có tắc nghẽn, vậy có tồn tại cặp ghép.

Nội dung

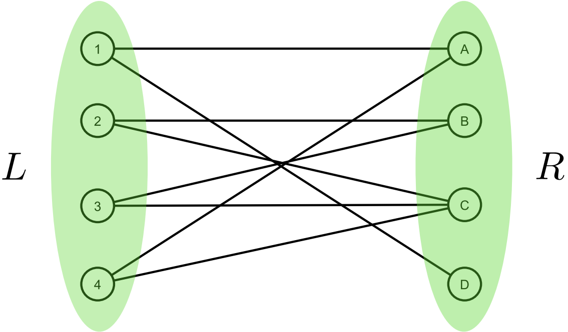
1. Ghép cặp Nam & Nữ
2. Định lý Hall
3. Làm thế nào để tìm ghép cặp lớn nhất?

Định nghĩa

Một ***cặp ghép*** là một hàm **đơn ánh**

$$m : L \longrightarrow R$$

thoả mãn: Nếu $m(g) = b$ thì $\{g, b\}$ là một cạnh của đồ thị.

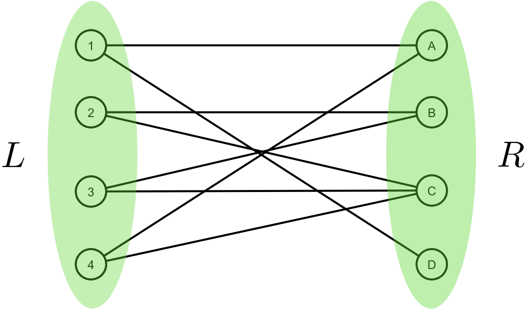


Định lý (Hall)

Nếu với mọi tập $S \subseteq L$ ta đều có

$$|S| \leq |E(S)|$$

vậy có tồn tại một cặp ghép.

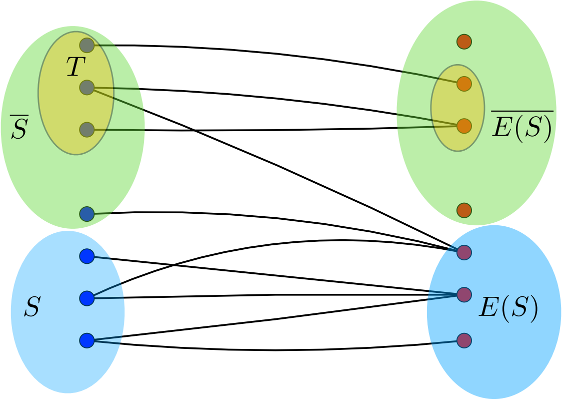


Chứng minh định lý Hall

Bổ đề

Giả sử không có tắc nghẽn. Hơn nữa, nếu S là một tập những cô gái thoả mãn $|S| = |E(S)|$. Vậy không có tắc nghẽn giữa $\overline{S}$ và $\overline{E(S)}$.

Chứng minh bổ đề

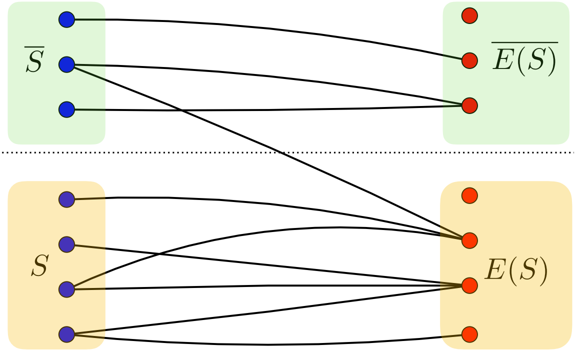


Hình: Vậy $S \cup T$ là một tắc nghẽn. ✗

Chứng minh định lý Hall

- Chứng minh bằng quy nạp mạnh theo số Nữ.
- Nếu chỉ có 1 Nữ. Định lý hiển nhiên đúng.
- Với số Nữ nhiều hơn 1. Ta xét hai trường hợp.

TH1: Có một tập con S mà $|S| = |E(S)|$



- Theo bổ đề trước, không có tắc nghẽn trong cả hai đồ thị hai phần: $(S, E(S))$ và $(\overline{S}, \overline{E(S)})$
- Theo quy nạp, ta có thể ghép cặp hai đồ thị này riêng biệt. ✓.

TH2: mọi S đều thỏa mãn $|S| < |E(S)|$

- Nếu với mọi tập không rỗng những cô gái S ta đều có

$$|S| < |E(S)|$$

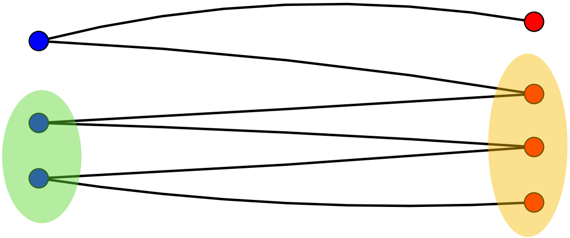
- Chọn lấy một cô gái g. Cô ấy phải hợp với một chàng trai b nào đó. Tại sao?
- Ghép cặp g với b.
- Loại bỏ g và b.
- Ta vẫn không có tắc nghẽn đối với các cô gái và chàng trai còn lại. Tại sao?
- Theo quy nạp, ta có thể ghép cặp cho những người còn lại. ✓

Kiểm tra tắc nghẽn?

Mệnh đề

Nếu mỗi cô gái đều thích $\geq d$ chàng trai, và mỗi chàng trai đều thích $\leq d$ cô gái, vậy không có tắc nghẽn.

Chứng minh



Xét tập các cô gái S và e là số cạnh liên thuộc với S. Ta có

$$e = \sum_{g \in S} \deg(g) \geq \sum_{g \in S} d = d \cdot |S|$$

$$e \leq \sum_{b \in E(S)} \deg(b) \leq \sum_{b \in E(S)} d = d \cdot |E(S)|$$

Chứng minh.

Xét tập các cô gái S và e là số cạnh liên thuộc với S. Ta có

$$e = \sum_{g \in S} \deg(g) \geq \sum_{g \in S} d = d \cdot |S|$$

$$e \leq \sum_{b \in E(S)} \deg(b) \leq \sum_{b \in E(S)} d = d \cdot |E(S)|$$

Vậy ta có

$$d \cdot |S| \leq e \leq d \cdot |E(S)|.$$

Ta kết luận

$$|S| \leq |E(S)|.$$

□

Tìm bạn nhảy

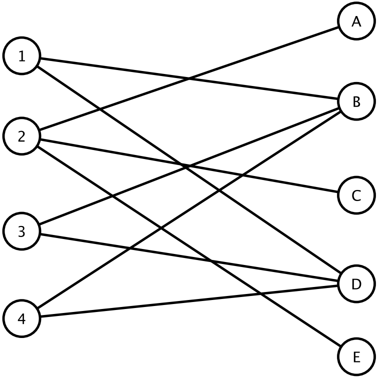
- Tối thứ bảy, hội sinh viên tổ chức tiệc.
- Có 300 sinh viên tham gia.
- Họ không quen hết nhau!
- Nhưng mỗi cô gái quen đúng 50 chàng trai, và mỗi chàng trai quen đúng 50 cô gái!
- Liệu mọi sinh viên có thể nhảy đồng thời sao cho hai người nhảy cùng nhau phải biết nhau?

Nội dung

1. Ghép cặp Nam & Nữ
2. Định lý Hall
3. Làm thế nào để tìm ghép cặp lớn nhất?

Bài tập

Hãy tìm ghép cặp lớn nhất cho đồ thị sau.

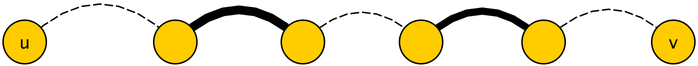


Đường mở

Định nghĩa

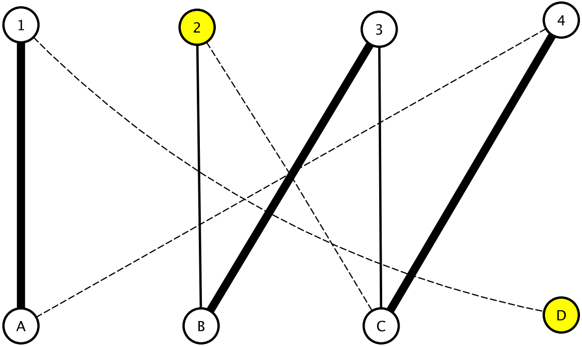
Xét đồ thị hai phần G và M là một ghép cặp trong G. Ta nói rằng đường đi P là một ***đường mở*** (cho M) nếu:

- P bắt đầu và kết thúc ở hai đỉnh u, v nào đó chưa được ghép cặp; và
- Các cạnh trong P luân phiên thuộc M và không thuộc M.

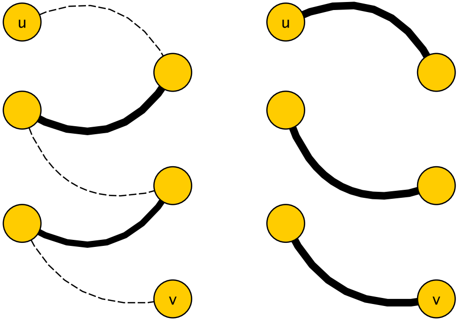


Tính chất của đường mở

- đường mở luôn chứa một số lẻ cạnh.
- Số cạnh không thuộc M lớn hơn 1 so với số cạnh trong M.



Tăng kích thước ghép cặp dùng đường mở



Hình: Nếu tìm được một đường mở P, ta có thể xóa các cạnh trong M và thay bằng các cạnh P không thuộc M.

Chiến lược tìm ghép cặp lớn nhất

1. Bắt đầu với một ghép cặp M bất kỳ (có thể chỉ dùng 1 cạnh).
2. Tìm một đường mở cho M.
3. Nếu tìm thấy một đường mở, xây dựng một ghép cặp lớn hơn M'.
4. Nếu không tìm thấy đường mở nào, thì ***dừng***; M là ghép cặp lớn nhất.

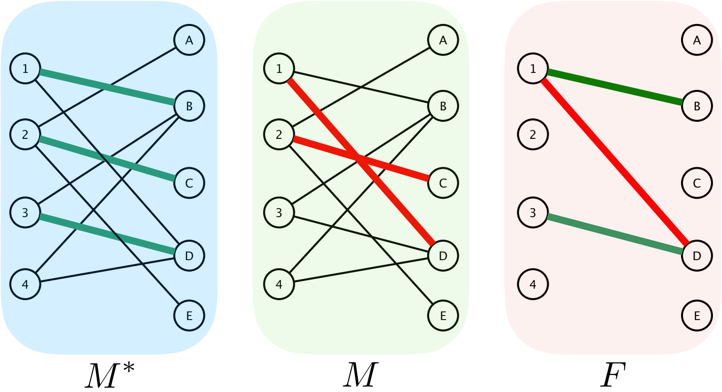
Tại sao chiến lược này đúng?

Định lý

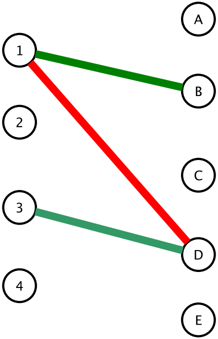
Nếu ghép cặp M trong đồ thị hai phần G không phải ghép cặp lớn nhất, thì G chứa một đường mở cho M.

Chứng minh

- Xét M^* là một ghép cặp lớn nhất;
- đặt F là tập mọi cạnh thuộc M hoặc M^*, nhưng không thuộc cả hai.



Chứng minh (tiếp)



- Tập cạnh F và các đỉnh tạo thành đồ thị với các đỉnh chỉ có bậc 1 hoặc 2. Tại sao?
- Vậy mỗi thành phần liên thông của đồ thị chỉ là đường đi hoặc chu trình;
- và trong mỗi đường đi hoặc chu trình này, các cạnh thuộc M luân phiên với các cạnh không thuộc M.

Chứng minh (tiếp)

- Vậy thì, trong các chu trình, số cạnh thuộc M bằng với số cạnh không thuộc M.
- Vì $|M^*| > |M|$, phải có ít nhất một thành phần liên thông là đường đi,
- và đây chính là đường mở.

Bài tập

Hãy tìm ghép cặp lớn nhất cho cho đồ thị hai phần sau và chứng minh nó là ghép cặp lớn nhất.