TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÀI TẬP

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

NGUYỄN THỊ THU THỦY
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

HÀ NỘI–2022

MỤC LỤC

Chương 1

Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất

Ví dụ tổng hợp Chương 1

Ví dụ 1.1. Một người có ba chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở mỗi chỗ tương ứng là 0,6, 0,7 và 0,8. Biết rằng đến một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tính xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất.

Lời giải Ví dụ 1.1 Gọi A là sự kiện "câu được cá", A_i là sự kiện "người đó chọn chỗ thứ i", $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $\{A_1, A_2, A_3\}$ tạo thành một hệ đầy đủ. Ta cần tính $P(A_1|A)$.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$$

với

$$\begin{aligned}
&P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3},\\
&P(A|A_1) = P_3(1) = C_3^1 \times (0,6)^1 \times (0,4)^2 = 0,288,\\
&P(A|A_2) = P_3(1) = C_3^1 \times (0,7)^1 \times (0,3)^2 = 0,189,\\
&P(A|A_3) = P_3(1) = C_3^1 \times (0,8)^1 \times (0,2)^2 = 0,096.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$P(A) = 0,191.$$

Từ đây, áp dụng công thức Bayes

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)P(A|A_2)}{P(A)}$$

ta nhận được

$$P(A_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \times 0,288}{0,191} \simeq 0,5026.$$

Ví dụ 1.2. Người ta dùng một thiết bị để kiểm tra một loại sản phẩm nhằm xác định sản phẩm có đạt yêu cầu không. Biết rằng sản phẩm có tỷ lệ phế phẩm là 0,01. Thiết bị có khả năng phát hiện đúng sản phẩm là phế phẩm với xác suất 0,85 và phát hiện đúng sản phẩm đạt chất lượng với xác suất 0,9. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm, tìm xác suất sao cho sản phẩm này:

(a) Được kết luận là phế phẩm.

(b) Được kết luận là đạt chất lượng thì lại là phế phẩm.

(c) Được kết luận đúng với thực chất của nó.

Lời giải Ví dụ 1.2 Gọi A là sự kiện "sản phẩm được chọn là phế phẩm". Khi đó, $P(A) = 0,01$ và $P(\overline{A}) = 0,99$.

(a) Gọi B là sự kiện "sản phẩm được kết luận là phế phẩm", khi đó $\overline{B}$ là sự kiện "sản phẩm được kết luận là đạt chất lượng". Theo đầu bài, $P(B|A) = 0,85$, $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,9$. Suy ra

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,1 = 0,1075.$$

(b) $P(\overline{B}) = 1 - 0,1075 = 0,8925$. Suy ra

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})} = \frac{0,01 \times 0,15}{0,8925} = 0,0017.$$

(c) $P(AB) + P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,9 = 0,8995.$

Ví dụ 1.3. Một hãng hàng không cho biết rằng 5% số khách đặt trước vé cho các chuyến đã định sẽ hoãn không đi chuyến bay đó. Do đó hãng đã đưa ra một chính sách là sẽ bán 52 ghế cho một chuyến bay mà trong đó mỗi chuyến chỉ trở được 50 khách hàng. Tìm xác suất để tất cả các khách đặt chỗ trước và không hoãn chuyến bay đều có ghế. Biết rằng xác suất bán được 51 vé hoặc 52 vé là như nhau và bằng 10%.

Lời giải Ví dụ 1.3 Gọi A là sự kiện "bán được 52 vé", B là sự kiện "bán được 51 vé", C là sự kiện "bán được ≤ 50 vé". Khi đó A, B, C tạo thành một nhóm đầy đủ, $P(A) = P(B) = 0,1$ và $P(C) = 0,8$.

Gọi H là sự kiện "tất cả các khách hàng đặt chỗ trước và không hoãn chuyến bay đều đủ chỗ", suy ra $\overline{H}$ là sự kiện "khách hàng không đủ chỗ". Khi đó,

$$P(\overline{H}) = P(A)P(\overline{H}|A) + P(B)P(\overline{H}|B) + P(C)P(\overline{H}|C),$$

trong đó

$$\begin{aligned}
P(\overline{H}|A) &= P_{52}(0) + P_{52}(1) = (0,95)^{52} + 52 \times (0,95)^{51} \times (0,05)^{1},\\
P(\overline{H}|B) &= P_{51}(0) = (0,95)^{51},\\
P(\overline{H}|C) &= 0.
\end{aligned}$$

Từ đó $P(\overline{H}) = 0,0333$, suy ra $P(H) = 0,9667$.

Ví dụ 1.4. Ba người thợ cùng may một loại áo với xác suất may được sản phẩm chất lượng cao tương ứng là 0,9, 0,9 và 0,8. Biết một người khi may 8 áo thì có 6 sản phẩm chất lượng cao, tìm xác suất để người đó may 8 áo nữa thì có 6 áo chất lượng cao.

Lời giải Ví dụ 1.4 Gọi A là sự kiện "trong 8 áo đầu tiên có 6 áo chất lượng cao", A_i là sự kiện "8 áo đầu tiên do người thợ thứ i may", $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $\{A_1, A_2, A_3\}$ tạo thành một hệ đầy đủ và $P(A_i) = \dfrac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ (**??**) và công thức Bernoulli (**??**),

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) \\
&= \frac{1}{3} \times \left[C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2 + C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2 + C_8^6 \times (0,8)^6 \times (0,2)^2 \right] \simeq 0,1971.
\end{aligned}
$$

Gọi B là sự kiện "người đó may 8 áo nữa thì có 6 áo chất lượng cao". Khi đó,

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i|A)P(B|A_i \cap A) \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2}{0,1971} \times C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2 \\
&\quad + \frac{\frac{1}{3} \times C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2}{0,1971} \times C_8^6 \times (0,9)^6 \times (0,1)^2 \\
&\quad + \frac{\frac{1}{3} \times C_8^6 \times (0,8)^6 \times (0,2)^2}{0,1971} \times C_8^6 \times (0,8)^6 \times (0,2)^2 \\
&= 0,2207,
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.5 (Đề thi MI2020 kỳ 20151). Ra khỏi phòng khách, 6 người cùng xỏ ngẫu nhiên vào một đôi giày trong bóng tối. Mỗi người chỉ có thể phân biệt chiếc giày phải với chiếc giày trái, còn không thể phân biệt được giày của mình với giày của người khác. Tính xác suất để

(a) Mỗi người khách xỏ vào đúng đôi giày của mình.

(b) Mỗi người khách xỏ vào đúng hai chiếc giày của cùng một đôi nào đó.

Lời giải Ví dụ 1.5

(a) Gọi A là sự kiện "mỗi người khách đều xỏ đúng đôi giày của mình", A_i là sự kiện "người thứ i xỏ đúng đôi giày của mình", $i = 1, 2, \ldots, 6$. Khi đó,

$$A = A_1A_2A_3A_4A_5A_6.$$

Áp dụng công thức nhân xác suất

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_6|A_1A_2A_3A_4A_5)$$

ta nhận được

$$P(A) = \frac{1}{6^2} \times \frac{1}{5^2} \times \cdots \times \frac{1}{1^2} = \frac{1}{(6!)^2}.$$

(b) Gọi B là sự kiện "mỗi người khách đều xỏ đúng 2 chiếc giày của cùng một đôi", B_i là sự kiện "người thứ i xỏ đúng 2 chiếc giày của cùng một đôi", $i = 1, 2, \ldots, 6$. Khi đó

$$B = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$$

và

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6!}.$$

Ví dụ 1.6 (Đề thi MI2020 kỳ 20161)**.** Biết từ vị trí A đến B có hai đường đi với xác suất bị ngập của mỗi con đường là p, từ B đến C cũng có hai đường đi với xác suất bị ngập của mỗi con đường cũng là p. Biết đường đi từ A đến C bị ngập, tính xác suất để đường đi từ A đến B không bị ngập.

Lời giải Ví dụ 1.6 Gọi E_{AB} là sự kiện "đường đi từ A đến B không ngập", khi đó, $\overline{E}_{AB}$ là sự kiện "đường đi từ A đến B bị ngập". Xác suất cần tìm là

$$P(E_{AB}|\overline{E}_{AC}) = \frac{P[(E_{AB})(\overline{E}_{AC})]}{P(\overline{E}_{AC})} = \frac{P[(E_{AB})(\overline{E}_{BC})]}{P(\overline{E}_{AC})}.$$

Đường đi từ B đến C bị ngập nếu cả hai đường đi đều bị ngập, do đó xác suất để đường đi từ B đến C bị ngập là $P(\overline{E}_{BC}) = p^2$ và xác suất để đường đi từ A đến B không ngập là $P(E_{AB}) = 1 - p^2$.

Đường đi từ A đến C không ngập nếu đường đi từ A đến B không ngập và đường đi từ B đến C cũng không ngập, nên xác suất để đường đi từ A đến C bị ngập là $P(\overline{E}_{AC}) = 1 - (1 - p^2)^2$.

Vậy

$$P(E_{AB}|\overline{E}_{AC}) = \frac{(1 - p^2)p^2}{1 - (1 - p^2)^2}.$$

Ví dụ 1.7 (Đề thi MI2020 kỳ 20171)**.** Một phân xưởng có hai máy sản xuất cùng một loại sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm của các máy tương ứng là 0,2% và 0,5%. Từ kho chung chứa 10 sản phẩm của máy I và 8 sản phẩm của máy II chọn ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để trong 2 sản phẩm được chọn có đúng 1 phế phẩm.

(b) Biết trong 2 sản phẩm được chọn có đúng 1 phế phẩm, tính xác suất để 2 sản phẩm đó do máy II sản xuất.

Lời giải Ví dụ 1.7

(a) Gọi A_1, A_2, A_3 là các sự kiện "2 sản phẩm lấy ra do máy I, máy II, 1 sản phẩm của máy I và 1 sản phẩm của máy II sản xuất". H là sự kiện "trong 2 sản phẩm được chọn có đúng 1 phế phẩm". Khi đó,

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2) + P(A_3)P(H|A_3),$$

trong đó

$$P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{18}^2},\ P(A_2) = \frac{C_8^2}{C_{18}^2},\ P(A_3) = \frac{C_{10}^1 C_8^1}{C_{18}^2},$$
$$P(H|A_1) = C_2^1(0,002)(0,998),\ P(H|A_2) = C_2^1(0,005)(0,995),$$
$$P(H|A_3) = (0,002)(0,995) + (0,005)(0,998).$$

Từ đây suy ra $P(H) = 6,6447 \times 10^{-3}$.

(b) Cần tính $P(A_2|H) = \dfrac{P(A_2)P(H|A_2)}{P(H)} \simeq 0,274$.

Ví dụ 1.8 (Đề thi MI2020 kỳ 20173). Một lô hàng có 15 sản phẩm gồm 6 sản phẩm loại A, 5 sản phẩm loại B và 4 sản phẩm loại C. Chọn ngẫu nhiên ra 4 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại B.

(b) Biết trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại A, tính xác suất để trong 4 sản phẩm đó có đúng 1 sản phẩm loại C.

Lời giải Ví dụ 1.8

(a) Gọi D là sự kiện "trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại B". Khi đó,

$$P(D) = \frac{C_5^2 C_{10}^2}{C_{15}^4} \simeq 0,3297.$$

(b) Gọi H là sự kiện "trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại A", E là sự kiện "trong 4 sản phẩm đó có đúng 1 sản phẩm loại C". Ta cần tính $P(E|H) = \dfrac{P(EH)}{P(H)}$. Trong đó,

$$P(H) = \frac{C_6^2 C_9^2}{C_{15}^4} \simeq 0,3956 \text{ và } P(EH) = \frac{C_6^2 C_4^1 C_5^1}{C_{15}^4} \simeq 0,2918.$$

Vậy $P(E|H) = \dfrac{P(EH)}{P(H)} \simeq 0,5556$.

Ví dụ 1.9 (Đề thi MI2020 kỳ 20182). Cho ba sự kiện A, B, C độc lập từng đôi thỏa mãn $P(A) = P(B) = P(C) = p$ và $P(ABC) = 0$.

(a) Tính $P(AB\overline{C})$; $P(A\overline{B}\,\overline{C})$; $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

(b) Tìm giá trị p lớn nhất có thể có.

Lời giải Ví dụ 1.9

(a) Vì $AB\overline{C} + ABC = AB$; $AB\overline{C}$ và ABC xung khắc; A và B độc lập, nên

$$P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = P(A)P(B) - 0 = p^2.$$

Vì $A = A\overline{B}\,\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$, sử dụng tính xung khắc của các sự kiện,

$$P(A\overline{B}\,\overline{C}) = P(A) - P(ABC) - P(A\overline{B}C) - P(AB\overline{C}) = p - 2p^2.$$

Vì $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}\,\overline{C}$ nên $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{B}\,\overline{C}) - P(A\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - 3p + 3p^2$.

(b) Từ ý (a) và đầu bài ta có

$$\begin{aligned}
&P(ABC) = 0,\ P(AB\overline{C}) = P(A\overline{B}C) = P(\overline{A}BC) = p^2,\\
&P(A\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{A}\,\overline{B}C) = p - 2p^2,\\
&P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - 3p + 3p^2.
\end{aligned}$$

Khi đó, p thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 0 \le p^2 \le 1,\\ 0 \le p - 2p^2 \le 1,\\ 0 \le 1 - 3p + 3p^2 \le 1. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với $0 \le p \le 0,5$. Vậy giá trị p lớn nhất là $0,5$.

Ví dụ 1.10 (Đề thi MI2020 kỳ 20183). Có một nhóm 4 sinh viên, mỗi người có một chiếc mũ giống hệt nhau để trên giá. Khi ra khỏi phòng, mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ để đội. Tính xác suất để:

(a) Sinh viên thứ nhất và sinh viên thứ hai lấy đúng mũ của mình.

(b) Có ít nhất một sinh viên lấy đúng mũ của mình.

Lời giải Ví dụ 1.10 Gọi A là sự kiện "có ít nhất một sinh viên lấy đúng mũ của mình"; A_i là sự kiện "sinh viên thứ i lấy đúng mũ của mình", $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \dfrac{1}{12} \simeq 0,0833$.

(b) Ta có $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Do đó,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\\
&= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3)\\
&\quad - P(A_2A_4) - P(A_3A_4) + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4)\\
&\quad + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)\\
&= 4 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = 0,625.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.11 (Đề thi MI2020 kỳ 20191). Lớp MI2020 có 80 sinh viên trong đó có 20 sinh viên thuộc tổ I, 25 sinh viên thuộc tổ II và 35 sinh viên thuộc tổ III. Chọn ngẫu nhiên 10 sinh viên trong lớp tham dự trại hè. Tính xác suất để mỗi tổ có ít nhất 1 sinh viên được chọn.

Lời giải Ví dụ 1.11 Gọi A là sự kiện "Mỗi tổ có ít nhất một sinh viên được chọn", A_i là sự kiện "tổ i có ít nhất một sinh viên được chọn", $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $A = A_1A_2A_3$ và

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = 1 - P(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3).$$

Sử dụng công thức cộng xác suất

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3) &= P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_3) - P(\overline{A}_1\overline{A}_2) - P(\overline{A}_1\overline{A}_3) - P(\overline{A}_2\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \\ &= \frac{1}{C_{80}^{10}}\Big[(C_{60}^{10} + C_{55}^{10} + C_{45}^{10}) - (C_{35}^{10} + C_{25}^{10} + C_{20}^{10}) + 0\Big] \simeq 0,06538. \end{aligned}$$

Vậy, $P(A) \simeq 1 - 0,06538 = 0,93462$.

Ví dụ 1.12 (Đề thi MI2020 kỳ 20192). Cho biết xác suất để một sinh viên mượn một cuốn sách Kỹ thuật ở thư viện là 0,8, còn xác suất mượn một cuốn sách Văn học là 0,2. Một ngày có 5 sinh viên đến mượn sách tại thư viện, mỗi người mượn 2 cuốn sách.

(a) Tính xác suất để trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học.

(b) Biết trong 5 người có ít nhất 2 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật, tính xác suất để trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học.

Lời giải Ví dụ 1.12

(a) Xác suất để trong hai người có một người mượn một sách kỹ thuật, một người mượn một sách văn học là $p = C_2^1(0,8)(0,2) = 0,32$.

Gọi B là sự kiện "trong 5 người có đúng 2 người, mỗi người mượn một sách kỹ thuật, một người mượn sách văn học". Khi đó,

$$P(B) = C_5^2(0,32)^2(0,68)^3 \simeq 0,3220.$$

(b) Gọi H là sự kiện "trong 5 người có ít nhất 2 người, mỗi người mượn 2 sách kỹ thuật", A là sự kiện "trong 5 người có đúng 2 người, mỗi người mượn một sách kỹ thuật và một sách văn học". Ta có

$$P(H) = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_5^k(0,64)^k(0,36)^{5-k} \simeq 0,9402.$$

Suy ra xác suất cần tìm là

$$P(A|H) = \frac{P(AH)}{P(H)} = \frac{0,3188}{0,9402} \simeq 0,3391.$$

Ví dụ 1.13. Giả sử đặt ngẫu nhiên n bức thư vào n chiếc phong bì có ghi sẵn địa chỉ. Tính xác suất để không có bức thư nào đặt đúng phong bì.

Lời giải Ví dụ Ví dụ 1.13 Gọi A là sự kiện "không có bức thư nào đặt đúng phong bì", A_i là sự kiện "bức thư thứ i đặt đúng phong bì". Khi đó, $P(A) = 1 - P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$. Sử dụng công thức cộng xác suất

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_2) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} A_iA_jA_k + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n),$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{1 \times (n-1)!}{n!}, \quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1,\\
P(A_1A_2) &= \frac{1 \times (n-2)!}{n!}, \quad \sum_{i<j} P(A_iA_j) = \frac{1}{2!},\\
P(A_1A_2A_3) &= \frac{1 \times (n-3)!}{n!}, \quad \sum_{i<j<k} A_iA_jA_k \sum_{i<j<k} A_iA_jA_k = \frac{1}{3!},\\
&\ldots\\
P(A_1A_2\ldots A_n) &= \frac{1}{n!},
\end{aligned}$$

ta nhận được

$$P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Bài tập Chương 1

Sự kiện. Mối quan hệ giữa các sự kiện

Bài tập 1.1. Liệt kê các phần tử của mỗi không gian mẫu sau:

(a) Tập hợp các số nguyên từ 1 đến 30 chia hết cho 3;

(b) Tập $S = \{x \mid x^2 - 8x + 16 = 0\}$;

(c) Tập hợp các kết quả khi tung một đồng xu liên tiếp cho đến khi xuất hiện hai mặt sấp.

Bài tập 1.2. Tung đồng thời hai con xúc xắc cân đối đồng chất, một con màu xanh, một con màu đỏ và ghi lại số chấm ở mặt trên hai con xúc sắc.

(a) Mô tả không gian mẫu;

(b) Liệt kê các phần tử của sự kiện A "tổng số chấm ở mặt trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 8";

(c) Liệt kê các phần tử của sự kiện B "một trong hai con xuất hiện mặt 2 chấm";

(d) Liệt kê các phần tử của sự kiện C "con xúc xắc màu xanh xuất hiện mặt lớn hơn 4";

(e) Liệt kê các phần tử của $A \cap C$, $A \cap B$ và $B \cap C$.

(f) Xây dựng sơ đồ Venn biểu diễn các sự kiện $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ và $A \cup B \cup C$.

Bài tập 1.3. Cho A, B và C là các sự kiện trong không gian mẫu S. Sử dụng sơ đồ Venn tô bóng các miền của các sự kiện sau:

(a) $\overline{(A \cap B)}$.

(b) $\overline{(A \cup B)}$.

(c) $(A \cap C) \cup B$.

Phương pháp đếm

Bài tập 1.4. Có 10 vận động viên thi chạy 100m trong một Thế vận hội. Có bao nhiêu cách trao các huy chương Vàng, Bạc và Đồng cho nhóm vận động viên này?

Đáp số. 720

Bài tập 1.5. Cho phương trình $x + y + z = 100$. Phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm:

(a) Nguyên dương;

(b) Nguyên không âm.

Đáp số. (a) 4851 (b) 5151

Bài tập 1.6. Một hộp có 10 quả cầu cùng kích cỡ được đánh số từ 0 đến 9. Từ hộp người ta lấy ngẫu nhiên một quả ra và ghi lại số của quả đó, sau đó trả lại vào trong hộp. Làm như vậy 5 lần ta thu được một dãy số có 5 chữ số.

(a) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó?

(b) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho các chữ số trong đó là khác nhau?

Đáp số. (a) 10^5 (b) 30240

Bài tập 1.7. Có 6 bạn Hoa, Trang, Vân, Anh, Thái, Trung ngồi quanh một bàn tròn để uống cà phê, trong đó bạn Trang và Vân không ngồi cạnh nhau.

(a) Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn này trên bàn tròn nếu tất cả các ghế là không phân biệt?

(b) Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn này trên bàn tròn nếu tất cả các ghế có phân biệt?

Đáp số. (a) 72 (b) 432

Bài tập 1.8. Từ một bộ bài tú lơ khơ 52 cây rút ngẫu nhiên và không quan tâm đến thứ tự 4 cây. Có bao nhiêu khả năng xảy ra trường hợp trong 4 cây đó:

(a) Đều là át;

(b) Có duy nhất một cây át;

(c) Có ít nhất một cây át;

(d) Có đủ bốn loại rô, cơ, bích, nhép.

Đáp số. (a) 1 (b) 69184 (c) 76145 (d) 28561

Bài tập 1.9. Có 20 sinh viên. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 sinh viên (không xét tới tính thứ tự) tham gia câu lạc bộ Văn và 4 sinh viên tham gia câu lạc bộ Toán trong trường hợp:

(a) Một sinh viên chỉ tham gia nhiều nhất một câu lạc bộ;

(b) Một sinh viên có thể tham gia cả hai câu lạc bộ.

Đáp số. (a) 8817900 (b) 23474025

Định nghĩa xác suất

Bài tập 1.10. Số lượng nhân viên của công ty A được phân loại theo lứa tuổi và giới tính như sau:

Tuổi \ Giới tính	Nam	Nữ
Dưới 30	120	170
Từ 30 – 40	260	420
Trên 40	400	230

Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên một người của công ty thì được:

(a) Một nhân viên trong độ tuổi 30 – 40;

(b) Một nam nhân viên trên 40 tuổi;

(c) Một nữ nhân viên từ 40 tuổi trở xuống.

Đáp số. (a) 0,425 (b) 0,25 (c) 0,36875

Bài tập 1.11. Một kiện hàng có 24 sản phẩm, trong số đó có 14 sản phẩm loại I, 8 sản phẩm loại II và 2 sản phẩm loại III. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất trong 4 sản phẩm đó:

(a) Có 3 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II;

(b) Có ít nhất 3 sản phẩm loại I;

(c) Có ít nhất 1 sản phẩm loại III.

Đáp số. (a) 0,274 (b) 0,4368 (c) 0,3116

Bài tập 1.12. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 tới 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để:

(a) Tất cả tấm thẻ đều mang số chẵn;

(b) Có đúng 5 số chia hết cho 3;

(c) Có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có một số chia hết cho 10.

Đáp số. (a) $9,995 \times 10^{-5}$ (b) 0,13 (c) 0,1484

Bài tập 1.13. Một đoàn tàu có 4 toa được đánh số I, II, III, IV đỗ ở sân ga. Có 6 hành khách từ sân ga lên tàu. Mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để:

(a) Toa I có 3 người, toa II có 2 người và toa III có 1 người;

(b) Một toa có 3 người, một toa 2 người, một toa có 1 người;

(c) Mỗi toa có ít nhất một người.

Đáp số. (a) 0,0146 (b) 0,3516 (c) 0,3809

Bài tập 1.14. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Một con xúc xắc có số chấm các mặt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, con xúc xắc còn lại có số chấm các mặt là 2, 3, 4, 5, 6, 6. Tính xác suất:

(a) Có đúng 1 con xúc xắc ra mặt 6 chấm;

(b) Có ít nhất 1 con xúc xắc ra mặt 6 chấm;

(c) Tổng số chấm xuất hiện bằng 7.

Đáp số. (a) 0,3889 (b) 0,4444 (c) 0,1667

Bài tập 1.15. Trong một thành phố có 5 khách sạn. Có 3 khách du lịch đến thành phố đó, mỗi người chọn ngẫu nhiên một khách sạn. Tìm xác suất để:

(a) Mỗi người ở một khách sạn khác nhau;

(b) Có đúng 2 người ở cùng một khách sạn.

Đáp số. (a) 0,48 (b) 0,48

Bài tập 1.16. Một lớp có 3 tổ sinh viên: tổ I có 12 người, tổ II có 10 người và tổ III có 15 người. Chọn hú họa ra một nhóm sinh viên gồm 4 người.

(a) Tính xác suất để trong nhóm có đúng một sinh viên tổ I.

(b) Biết trong nhóm có đúng một sinh viên tổ I, tính xác suất để trong nhóm đó có đúng một sinh viên tổ III.

Đáp số. (a) 0,4179 (b) 0,2933

Bài tập 1.17. Ba nữ nhân viên phục vụ A, B và C thay nhau rửa đĩa chén và giả sử ba người này đều "khéo léo" như nhau. Trong một tháng có 4 chén bị vỡ. Tìm xác suất để:

(a) Chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén;

(b) Một trong ba người đánh vỡ 3 chén;

(c) Một trong ba người đánh vỡ cả 4 chén.

Đáp số. (a) 0,0494 (b) 0,2963 (c) 0,037

Bài tập 1.18. Đội A có 3 người và đội B có 3 người tham gia vào một cuộc chạy thi, 6 người có khả năng như nhau và xuất phát cùng nhau. Tính xác suất để 3 người đội A về vị trí Nhất, Nhì, Ba.

Đáp số. 0,05

Bài tập 1.19. Phân phối ngẫu nhiên n viên bi vào n chiếc hộp (biết rằng mỗi hộp có thể chứa cả n viên bi). Tính xác suất để:

(a) Hộp nào cũng có bi;

(b) Có đúng một hộp không có bi.

Bài tập 1.20. Hai người hẹn gặp nhau ở công viên trong khoảng thời gian từ 5h00 đến 6h00 để cùng đi tập thể dục. Hai người quy ước ai đến không thấy người kia sẽ chỉ chờ trong vòng 10 phút. Giả sử rằng thời điểm hai người đến công viên là ngẫu nhiên trong khoảng từ 5h00 đến 6h00. Tính xác suất để hai người gặp nhau.

Đáp số. 0,3056

Bài tập 1.21. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Lấy một điểm C bất kỳ trên đoạn thẳng đó. Tính xác suất chênh lệch độ dài giữa hai đoạn thẳng AC và CB không vượt quá 4cm.

Đáp số. 0,4

Bài tập 1.22. Cho đoạn thẳng AB độ dài 10cm. Lấy hai điểm C, D bất kỳ trên đoạn AB (C nằm giữa A và D). Tính xác suất độ dài AC, CD, DB tạo thành 3 cạnh một tam giác.

Đáp số. 0,25

Xác suất có điều kiện. Công thức cộng, nhân xác suất, công thức Bernoulli

Bài tập 1.23. Cho các sự kiện A, B với $P(A) = P(B) = 1/2$; $P(A\overline{B}) = 1/8$. Tìm:

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$;

(b) $P(\overline{A} \cap B)$;

(c) $P(A \cup \overline{B})$.

Đáp số. (a) 5/8 (b) 1/8 (c) 7/8

Bài tập 1.24. Cho ba sự kiện A, B, C độc lập từng đôi thỏa mãn $P(A) = P(B) = P(C) = p$ và $P(A \cap B \cap C) = 0$.

(a) Tính $P(A \cap B \cap \overline{C})$; $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$; $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

(b) Tìm giá trị p lớn nhất có thể có.

Đáp số. (a) p^2; $p(1-2p)$; $3p^2 - 3p + 1$ (b) $p = 0,5$

Bài tập 1.25. Trong cùng một phép thử, A và B là các sự kiện thỏa mãn $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$. Tính xác suất để A không xảy ra nhưng B xảy ra trong các trường hợp sau:

(a) A và B xung khắc;

(b) A suy ra B;

(c) $P(A \cap B) = 1/8$.

Đáp số. (a) 1/2 (b) 3/4 (c) 3/8

Bài tập 1.26. Cho hai sự kiện A và B trong đó $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7$. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P(A \cap B)$ và $P(A \cup B)$ và điều kiện đạt được các giá trị đó.

Bài tập 1.27. Ba người A, B và C lần lượt tung một đồng xu. Giả sử rằng A tung đồng xu đầu tiên, B tung thứ hai và thứ ba C tung. Quá trình lặp đi lặp lại cho đến khi ai thắng bằng việc trở thành người đầu tiên thu được mặt ngửa. Xác định khả năng mà mỗi người sẽ giành chiến thắng.

Đáp số. 4/7 2/7 1/7

Bài tập 1.28. Trong một thùng kín có 6 quả cầu đỏ, 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả cầu cho đến khi lấy được cầu đỏ thì dừng lại. Tính xác suất để:

(a) Lấy được 2 cầu trắng, 1 cầu vàng.

(b) Không có quả cầu trắng nào được lấy ra.

Đáp số. (a) $4/91$ (b) $6/11$

Bài tập 1.29. Ba xạ thủ A, B, C độc lập với nhau cùng bắn súng vào bia. Xác suất bắn trúng bia của 3 người A, B và C tương ứng là 0,7, 0,6 và 0,9. Tính xác suất để:

(a) Có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia;

(b) Có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia;

(c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia;

(d) Xạ thủ A bắn trúng bia biết rằng có hai xạ thủ bắn trúng bia.

Đáp số. (a) 0,154 (b) 0,456 (c) 0,998 (d) 0,6447

Bài tập 1.30. Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm 4 bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 3 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thắp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập. Tính xác suất để trong 18 giờ thắp sáng liên tục:

(a) Cả hai hệ thống bị hỏng;

(b) Chỉ có một hệ thống bị hỏng.

Đáp số. (a) 0,0003439 (b) 0,3442

Bài tập 1.31. Có 6 khẩu súng cũ và 4 khẩu súng mới, trong đó xác suất trúng khi bắn bằng súng cũ là 0,8, còn súng mới là 0,95. Bắn hú họa bằng một khẩu súng vào một mục tiêu thì thấy trúng. Điều gì có khả năng xảy ra lớn hơn: bắn bằng khẩu súng mới hay bắn bằng khẩu súng cũ?

Bài tập 1.32. Theo thống kê xác suất để hai ngày liên tiếp có mưa ở một thành phố vào mùa hè là 0,5; còn không mưa là 0,3. Biết các sự kiện có một ngày mưa, một ngày không mưa là đồng khả năng. Tính xác suất để ngày thứ hai có mưa, biết ngày đầu không mưa.

Đáp số. 0,25

Bài tập 1.33. Một hộp chứa a quả bóng màu đỏ và b quả bóng màu xanh. Một quả bóng được chọn ngẫu nhiên và quan sát màu sắc của nó. Sau đó bóng được trả lại cho vào hộp và k bóng cùng màu cũng được thêm vào hộp. Một quả bóng thứ hai sau đó được chọn một cách ngẫu nhiên, màu sắc của nó được quan sát, và nó được trả lại cho vào hộp với k bóng bổ sung cùng một màu. Quá trình này được lặp đi lặp lại 4 lần. Tính xác suất để ba quả bóng đầu tiên sẽ có màu đỏ và quả bóng thứ tư có màu xanh.

Bài tập 1.34. Một cửa hàng sách ước lượng rằng: trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này:

(a) Không thực hiện cả hai điều trên;

(b) Không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Đáp số. (a) 0,65 (b) 0,5

Bài tập 1.35. Một cuộc khảo sát 1000 người về hoạt động thể dục thấy có 80% số người thích đi bộ và 60% thích đạp xe vào buổi sáng và tất cả mọi người đều tham gia ít nhất một trong hai hoạt động trên. Chọn ngẫu nhiên một người hoạt động thể dục. Nếu gặp được người thích đi xe đạp thì xác suất mà người đó không thích đi bộ là bao nhiêu?

Đáp số. $1/3$

Bài tập 1.36. Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi. Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ:

(a) Được vào đội tuyển;

(b) Bị loại ở vòng thứ ba;

(c) Bị loại ở vòng thứ hai, biết rằng thí sinh này bị loại.

Đáp số. (a) 0,252 (b) 0,308 (c) 0,3209

Bài tập 1.37. Theo thống kê ở các gia đình có hai con thì xác suất để con thứ nhất và con thứ hai đều là trai là 0,27 và hai con đều là gái là 0,23, còn xác suất con thứ nhất và con thứ hai có một trai và một gái là đồng khả năng. Biết sự kiện khi xét một gia đình được chọn ngẫu nhiên có con thứ nhất là gái, tìm xác suất để con thứ hai là trai.

Đáp số. 0,5208

Bài tập 1.38. Một tổ có 15 sinh viên trong đó có 5 sinh viên học giỏi môn "Lý thuyết xác suất". Cần chia làm 5 nhóm, mỗi nhóm 3 sinh viên. Tính xác suất để nhóm nào cũng có một sinh viên học giỏi môn "Lý thuyết xác suất".

Đáp số. 0,0809

Bài tập 1.39. Một hộp có n áo trắng và $2n$ áo xanh. Chia ngẫu nhiên các áo trong hộp thành n nhóm mỗi nhóm 3 áo.

(a) Tính xác suất để trong mỗi nhóm đều có áo trắng;

(b) Áp dụng cho $n = 5$.

Đáp số. (b) 0,0809

Bài tập 1.40. Hai vận động viên bóng bàn A và B đấu một trận gồm tối đa 5 ván (không có kết quả hòa sau mỗi ván và trận đấu sẽ dừng nếu một người nào đó thắng trước 3 ván). Xác suất để A thắng được ở một ván là 0,7.

(a) Tính các xác suất để A thắng sau x ván ($x = 3, 4, 5$).

(b) Tính xác suất để trận đấu kết thúc sau 5 ván.

Đáp số. (a) 0,343; 0,3087; 0,18522 (b) 0,2646

Bài tập 1.41. Một bài thi trắc nghiệm (multiple-choice test) gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Giả sử một câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hú họa câu trả lời. Tìm xác suất để:

(a) Học sinh đó được 13 điểm;

(b) Học sinh đó bị điểm âm.

Đáp số. (a) 0,2023 (b) 0,9757

Bài tập 1.42. Một nhân viên bán hàng mỗi ngày đi chào hàng ở 10 nơi với xác suất bán được hàng ở mỗi nơi là 0,2. Tìm xác suất để:

(a) Người đó bán được hàng ở 2 nơi;

(b) Người đó bán được hàng ở ít nhất một nơi.

Đáp số. (a) 0,3019 (b) 0,8926

Bài tập 1.43. Xác suất trúng đích của một lần bắn là 0,4. Cần phải bắn bao nhiêu phát đạn để xác suất có ít nhất một viên bắn trúng sẽ lớn hơn 0,95?

Đáp số. $n \geq 6$

Bài tập 1.44. Hai cầu thủ bóng rổ, mỗi người ném bóng hai lần vào rổ. Xác suất ném trúng rổ của mỗi cầu thủ theo thứ tự lần lượt là 0,6 và 0,7. Tìm xác suất để

(a) Số lần ném trúng rổ của hai người bằng nhau;

(b) Số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ nhất nhiều hơn số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ hai.

Đáp số. (a) 0,3924 (b) 0,2268

Bài tập 1.45. Xác suất sản xuất ra phế phẩm của một máy là 0,005. Tìm xác suất để trong 800 sản phẩm của máy đó có đúng 3 phế phẩm.

Đáp số. 0,1954

Bài tập 1.46. Một công nhân đứng máy 1000 ống sợi. Xác suất mỗi ống bị đứt trong vòng một giờ là 0,005. Tính xác suất để trong vòng một giờ:

(a) Có 40 ống sợi bị đứt;

(b) Có không quá 40 ống sợi bị đứt.

Bài tập 1.47. Xác suất ném trúng rổ của một cầu thủ là 0,8. Tìm xác suất để trong 100 lần cầu thủ đó:

(a) Ném trúng 75 lần;

(b) Ném trúng không ít hơn 75 lần.

Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

Bài tập 1.48. Một phân xưởng có 3 máy tự động: máy I sản xuất 25%, máy II sản xuất 30%, máy III sản xuất 45% số sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm tương ứng của các máy lần lượt là 0,1%, 0,2% và 0,3%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm của phân xưởng.

(a) Tìm xác suất để sản phẩm được chọn là phế phẩm.

(b) Biết sản phẩm được chọn là phế phẩm, tính xác suất để sản phẩm đó do máy I sản xuất.

Đáp số. (a) 0,002075 (b) 0,1205

Bài tập 1.49. Có 3 hộp đựng bi: hộp thứ nhất có 3 bi đỏ, 2 bi trắng; hộp thứ hai có 2 bi đỏ, 2 bi trắng; hộp thứ ba không có viên nào. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất và một viên bi từ hộp thứ hai bỏ vào hộp thứ ba. Sau đó từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên ra một viên bi.

(a) Tính xác suất để viên bi đó màu đỏ.

(b) Biết rằng viên bi lấy ra từ hộp thứ ba màu đỏ, tính xác suất để lúc đầu ta lấy được viên bi đỏ từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ ba.

Bài tập 1.50. Hộp I có 4 viên bi đỏ, 2 viên bi xanh; hộp II có 3 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh. Bỏ ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lại bỏ ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II sang hộp I. Cuối cùng rút ngẫu nhiên từ hộp I ra một viên bi.

(a) Tính xác suất để viên bi rút ra sau cùng màu đỏ.

(b) Nếu viên rút ra sau cùng màu đỏ, tìm xác suất lúc ban đầu rút được viên bi đỏ ở hộp I cho vào hộp II.

Đáp số. (a) $11/20$ (b) $9/11$

Bài tập 1.51. Trong một kho rượu, số lượng rượu loại A và loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai và đưa cho 5 người nếm thử. Biết xác suất đoán đúng của mỗi người là 0,8. Có 3 người kết luận rượu loại A, 2 người kết luận rượu loại B. Hỏi khi đó xác suất chai rượu đó thuộc loại A là bao nhiêu?

Đáp số. 0,8

Bài tập 1.52. Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm 3 phế phẩm; lô II có 6 chính phẩm 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I sang lô II, sau đó từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm được 2 chính phẩm. Tính xác suất để 2 chính phẩm lấy ra sau cùng là của lô I.

Bài tập 1.53. Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm, 3 phế phẩm; lô II có 8 chính phẩm, 2 phế phẩm. Từ lô I lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm, từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Sau đó từ số sản phẩm này lại lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để trong 2 sản phẩm lấy ra sau cùng có ít nhất 1 chính phẩm.

Bài tập 1.54. Có ba kiện hàng (mỗi kiện hàng có 20 sản phẩm) với số sản phẩm tốt tương ứng của mỗi kiện là 18, 16, 12. Lấy ngẫu nhiên một kiện hàng, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm thì được sản phẩm tốt. Trả sản phẩm này lại kiện hàng vừa lấy, sau đó lại lấy ngẫu nhiên một sản phẩm thì được sản phẩm tốt. Tính xác suất để các sản phẩm tốt đó được lấy từ kiện hàng thứ nhất.

Bài tập 1.55. Tỷ lệ người nghiện thuốc là ở một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%.

(a) Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

(b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

Đáp số. (a) 0,3913 (b) 0,2222

Bài tập 1.56. Một công nhân đi làm ở thành phố khi trở về nhà có 2 cách: hoặc đi theo đường ngầm hoặc đi qua cầu. Biết rằng ông ta đi lối đường ngầm trong $1/3$ các trường hợp, còn lại đi lối cầu. Nếu đi lối đường ngầm 75% trường hợp ông ta về đến nhà trước 6 giờ tối; còn nếu đi lối cầu chỉ có 70% trường hợp (nhưng đi lối cầu thích hơn). Tìm xác suất để công nhân đó đã đi lối cầu biết rằng ông ta về đến nhà sau 6 giờ tối.

Đáp số. 0,7059

Bài tập 1.57. Tại một phòng khám chuyên khoa tỷ lệ người đến khám có bệnh là 0,8. Người ta áp dụng phương pháp chẩn đoán mới thì thấy nếu khẳng định có bệnh thì đúng 9 trên 10 trường hợp; còn nếu khẳng định không bệnh thì đúng 5 trên 10 trường hợp. Tính xác suất để

(a) Chẩn đoán có bệnh;

(b) Chẩn đoán đúng.

Đáp số. (a) 0,75 (b) 0,8

Bài tập 1.58. Một hãng hàng không cho biết rằng 5% số khách đặt trước vé cho các chuyến đã định sẽ hoãn không đi chuyến bay đó. Do đó hãng đã đưa ra một chính sách là sẽ bán 52 ghế cho một chuyến bay mà trong đó mỗi chuyến chỉ trở được 50 khách hàng. Tìm xác suất để tất cả các khách đặt chỗ trước và không hoãn chuyến bay đều có ghế. Biết rằng xác suất bán được 51 vé hoặc 52 vé là như nhau và bằng 10%.

Đáp số. 0,9667

Bài tập 1.59. Một trạm chỉ phát hai loại tín hiệu A và B với xác suất tương ứng là 0,84 và 0,16. Do có nhiễu trên đường truyền nên $1/6$ tín hiệu A bị méo và được thu như là tín hiệu B, còn $1/8$ tín hiệu B bị méo thành tín hiệu A.

(a) Tìm xác suất thu được tín hiệu A;

(b) Giả sử thu được tín hiệu A, tìm xác suất để thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Đáp số. (a) 0,72 (b) 0,97222

Bài tập 1.60. Một người có ba chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở mỗi chỗ tương ứng là 0,6; 0,7 và 0,8. Biết rằng đến một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tính xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất.

Đáp số. 0,5026

Bài tập 1.61. Trong học kỳ II năm học 2021–2022, một sinh viên phải thi 4 học phần. Xác suất để sinh viên thi đạt một học phần trong mỗi lần thi đều là 0,8. Nếu thi không đạt học phần nào phải thi lại học phần đó. Tính xác suất để một sinh viên thi đạt cả 4 học phần trong đó không có học phần nào thi quá 2 lần.

Một số đề thi

Bài tập 1.62 (Đề thi MI2020 giữa kỳ 2020.1)**.** Có hai lô sản phẩm. Lô I có 6 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B, lô II có 7 sản phẩm loại A, 3 sản phẩm loại B. Lấy hú họa từ lô I ra hai sản phẩm rồi bỏ vào lô II, sau đó từ lô II lại lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để hai sản phẩm lấy ra sau cùng đều là loại A.

(b) Biết rằng hai sản phẩm lấy ra sau cùng đều là loại A, tính xác suất để trong 2 sản phẩm đó có một sản phẩm của lô I và một sản phẩm của lô II.

Bài tập 1.63 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2020.1). Bạn chơi 2 ván cờ với một đối thủ mà bạn chưa từng đối đầu trước đây. Đối thủ của bạn có thể là người mới bắt đầu chơi hoặc có trình độ trung bình hoặc có trình độ bậc thầy với khả năng như nhau. Tùy thuộc vào đó mà cơ hội chiến thắng của bạn ở mỗi ván đấu tương ứng là 90%, 50% hoặc 30%.

(a) Chúc mừng bạn đã thắng ở ván đấu thứ nhất. Với thông tin này, xác suất để bạn tiếp tục thắng ở ván đấu thứ hai là bao nhiêu? Biết rằng với điều kiện về trình độ của đối thủ thì kết quả của các ván đấu là độc lập nhau.

(b) Giải thích sự khác nhau giữa giả thiết "kết quả của các ván đấu là độc lập" và giả thiết "kết quả của các ván đấu là độc lập với điều kiện về trình độ của đối thủ". Giả thiết nào có vẻ hợp lý hơn? Tại sao?

Bài tập 1.64 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1). Từ 6 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, chọn ngẫu nhiên ra 3 nam và 3 nữ để ghép cặp (mỗi cặp gồm một nam và một nữ). Hỏi có thể ghép được bao nhiêu cặp?

Đáp số. 6720

Bài tập 1.65 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1). Trong một phép thử cho ba sự kiện A, B và C độc lập trong tổng thể với $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ và $P(C) = 0,8$. Biết có đúng một trong ba sự kiện xảy ra, tính xác suất để sự kiện B không xảy ra.

Đáp số. 0,809

Bài tập 1.66 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1). Xếp ngẫu nhiên 10 người (trong đó có A và B) thành một hàng dọc. Tính xác suất để A và B đứng cách nhau một người.

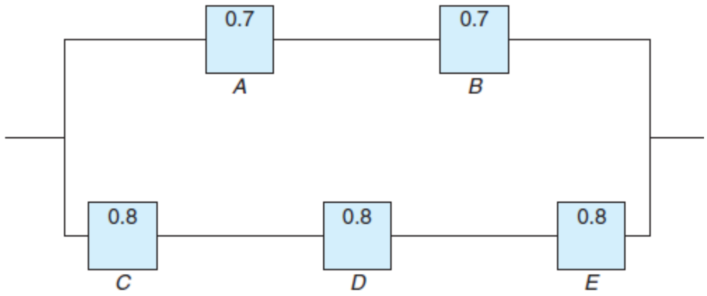
Đáp số. 0,1778

Bài tập 1.67 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1). Một thiết bị điện tử có 10 linh kiện hoạt động độc lập nhau. Xác suất để trong một tháng mỗi linh kiện bị hỏng đều bằng 0,2. Giả sử trong một tháng thiết bị điện tử đó có ít nhất một linh kiện bị hỏng, tính xác suất để trong tháng đó có ít nhất 2 linh kiện bị hỏng.

Đáp số. 0,699

Bài tập 1.68 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1). Một hệ thống mạch điện cho trong hình vẽ sau. Xác suất để mỗi thiết bị hoạt động được hiển thị trên đồ thị. Giả sử rằng các thiết bị bị lỗi một cách độc lập nhau và hệ thống mạch điện hoạt động, tính xác suất để thiết bị A không hoạt động.

Đáp số. 0,20449



Bài tập 1.69 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Trong một phép thử cho A và B là hai sự kiện thỏa mãn $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A\overline{B}) = 0,3$. Tính $P(B|(\overline{A} + \overline{B}))$.

Đáp số. 0,444

Bài tập 1.70 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Tung một cặp xúc xắc cân đối đồng chất cho tới khi tổng số chấm xuất hiện trên mặt cặp xúc sắc này là 7. Tính xác suất để cần số chẵn lần tung.

Đáp số. 0,4545

Chương 2

Biến ngẫu nhiên và luật phân phối xác suất

Ví dụ tổng hợp Chương 2

Ví dụ 2.1 (Đề thi MI2020 kỳ 20183)**.** Một kiện hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Tiền lãi khi bán được mỗi sản phẩm loại I là 50 nghìn đồng, mỗi sản phẩm loại II là 20 nghìn đồng.

(a) Ngày thứ nhất lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 3 sản phẩm và đã bán hết cả 3 sản phẩm đó. Tìm kỳ vọng của số tiền lãi thu được.

(b) Ngày thứ hai lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 2 sản phẩm. Tính xác suất để thu được 100 nghìn đồng tiền lãi khi bán 2 sản phẩm này.

Lời giải Ví dụ 3.1

(a) Gọi X là "số tiền lãi thu được", X nhận các giá trị 60, 90, 120, 150. Khi đó,

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{120} + 90 \times \frac{21}{120} + 120 \times \frac{63}{120} + 150 \times \frac{35}{120} = 123.$$

(b) Gọi A là sự kiện "ngày thứ hai thu được 100 nghìn đồng tiền lãi khi bán 2 sản phẩm"; A_i là sự kiện "ngày thứ nhất lấy được i sản phẩm loại I", $i = 0,1,2,3$; A_0, A_1, A_2, A_3 lập thành hệ đầy đủ và $P(A) = P(A_0)P(A|A_0) + P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$. Khi đó,

$$P(A) = \frac{1}{120} \times \frac{21}{21} + \frac{21}{120} \times \frac{15}{21} + \frac{63}{120} \times \frac{10}{21} + \frac{35}{120} \times \frac{6}{21} = \frac{7}{15} \simeq 0,4667.$$

Ví dụ 2.2 (Đề thi MI2020 giữa kỳ 20191)**.** Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2(1-x), & \text{nếu} \quad x \in [0,1], \\ 0, & \text{nếu} \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Tính xác suất để sau 3 lần quan sát biến ngẫu nhiên X một cách độc lập, có đúng một lần X nhận giá trị trong khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải Ví dụ 3.2

(a) Sử dụng tính chất của hàm mật độ $f_X(x) \geq 0$ với mọi x và $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ tính được $k = 12$.

(b) $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 12(x^2 - x^3)dx = \frac{5}{16} = 0,3125.$

Vậy, $P_3(1) = C_3^1 \times p^1 \times (1-p)^2 = C_3^1 \times (0,3125)^1 \times (0,6875)^2 = \frac{1815}{4096} \simeq 0,44312.$

Ví dụ 2.3 (Đề thi MI2020 kỳ 20191). Cho hàm mật độ xác suất $f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ của biến ngẫu nhiên liên tục X và định nghĩa $Y = [X]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá X (nghĩa là $[x] = 0$ nếu $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ nếu $1 \leq x < 2\ldots$).

(a) Tính $P(Y = 0)$.

(b) Tính $E(Y)$.

Lời giải Ví dụ 2.3 (a) $P(Y = 0) = P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-3}$.

(b) Với $k \geq 0$, $P(Y = k) = e^{-3k}(1 - e^{-3})$ và $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k) = \frac{1}{e^3 - 1}$.

Ví dụ 2.4 (Đề thi MI2020 kỳ 20191). Số khách hàng đến một cửa hàng bán lẻ là một biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với trung bình 6 khách hàng đến trong vòng một giờ. Nếu có đúng 5 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:00 thì xác suất để có ít nhất 8 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:30 là bao nhiêu?

Lời giải Ví dụ 2.4 Gọi X là "số khách hàng đến cửa hàng bán lẻ trong vòng 30 phút". Khi đó $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, với $\lambda = 3$. Xác suất cần tìm $P(X \geq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\Big] \\ &= 1 - e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right] \\ &= 1 - 0,42319 = 0,57681. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5 (Đề thi MI2021 kỳ 20193). Số máy D bán được trong ngày của một siêu thị là biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối Poisson tham số λ. Biết rằng, xác suất bán được máy D trong một ngày là 39,35%.

(a) Tính số máy D bán được trung bình trong một ngày của siêu thị đó.

(b) Nếu khảo sát 30 ngày thì số ngày bán được máy D có khả năng xảy ra cao nhất là bao nhiêu?

Lời giải Ví dụ 2.5

(a) (a) Gọi X là "số máy D bán được trong một ngày", $X \sim P(\lambda)$.

$P(X \geq 1) = 0,3935 \Rightarrow 0,6065 = P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

Trung bình số máy D bán được trong ngày là $\lambda = -\ln(0,6065) = 0,5$.

(b) Gọi Y là "số ngày bán được máy D (trong 30 ngày)"; $Y \sim B(n; p)$ với $n = 30$; $p = 0,3935$.

Vì $(n+1) \times p - 1 \leq \mathrm{mod}(Y) \leq (n+1) \times p$ nên $11,1985 \leq \mathrm{mod}(Y) \leq 12,1985$ hay $\mathrm{mod}(Y) = 12$.

Bài tập Chương 2

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài tập 2.1. Một chùm chìa khóa gồm 4 chiếc giống nhau, trong đó chỉ có một chiếc mở được cửa. Người ta thử ngẫu nhiên từng chiếc cho đến khi mở được cửa. Gọi X là số lần thử.

(a) Tìm phân phối xác suất của X. Mô tả phân phối xác suất của X bằng đồ thị.

(b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

(c) Viết hàm phân phối xác suất của X.

Đáp số. (a)

X	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$0,25$	$0,25$	$0,25$	$0,25$

(b) 2,5 và 1,25

Bài tập 2.2. Một xạ thủ có 5 viên đạn. Anh ta phải bắn vào bia với quy định khi nào có 2 viên trúng bia hoặc hết đạn thì dừng. Biết xác suất bắn trúng bia ở mỗi lần bắn là 0,4 và gọi X là số đạn cần bắn.

(a) Tìm phân phối xác suất của X.

(b) Tìm kỳ vọng, phương sai của X.

(c) Viết hàm phân phối xác suất của X và vẽ đồ thị hàm phân phối.

Đáp số. (a)

X	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$0,16$	$0,192$	$0,1728$	$0,4752$

(b) 3,9632 và 1,3059

Bài tập 2.3. Biến ngẫu nhiên rời rạc X chỉ có 2 giá trị x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Xác suất để X nhận giá trị x_1 là 0,2. Tìm x_1 và x_2, biết kỳ vọng $E(X) = 2,6$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = 0,8$.

Đáp số. 1 và 3

Bài tập 2.4. Mỗi khách uống cà phê tại quán cà phê mỗi ngày đều được phát ngẫu nhiên một vé bốc thăm, xác suất khách hàng bốc được thăm trúng thưởng là 0,1. Nếu khách hàng trúng thưởng liên tục trong 5 ngày (từ thứ hai đến thứ sáu) sẽ nhận được 100 USD, nếu không sẽ không được gì. An uống cà phê liên tục tại quán này 4 tuần liên tiếp. Gọi X (USD) là số tiền An được thưởng khi bốc thăm trong 4 tuần đó.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

(b) Xác định kỳ vọng và phương sai của X.

Đáp số. (b) 0,004 và 0,399996

Bài tập 2.5. Tung đồng xu cân đối đồng chất 10 lần. Biến ngẫu nhiên X được định nghĩa như sau: $(X = 1)$ nếu trong 10 lần tung có đúng 3 lần xuất hiện mặt sấp và $(X = 0)$ trong trường hợp còn lại. Tính kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $V(X)$.

Đáp số. 0,1172 và 0,1035

Bài tập 2.6. Có 5 sản phẩm trong đó có 4 chính phẩm và 1 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại ra hai sản phẩm.

(a) Gọi X là "số chính phẩm gặp phải". Lập bảng phân phối xác suất của X. Tính $E(X)$ và $V(X)$.

(b) Gọi Y là "số phế phẩm gặp phải". Lập hệ thức cho mối quan hệ giữa X và Y.

Đáp số. (a) 1,6 và 0,24 (b) $X + Y = 2$

Bài tập 2.7. Người ta đặt ngẫu nhiên 10 thẻ (trong đó có 5 thẻ màu đỏ và 5 thẻ màu xanh) vào 10 phong bì (5 phong bì có màu đỏ và 5 phong bì có màu xanh), mỗi phong bì một thẻ. Gọi X là số phong bì có chứa một thẻ cùng màu.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

(b) Tính $E(X)$.

Đáp số. 5

Bài tập 2.8. Có 2 kiện hàng. Kiện I có 3 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu. Kiện II có 2 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ kiện I ra 2 sản phẩm và từ kiện II ra 1 sản phẩm.

(a) Lập bảng phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm lấy ra.

(b) Tính kỳ vọng và phương sai của X.

Đáp số. (a)

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,06$	$0,4$	$0,42$	$0,12$

(b) 1,6 và 0,6

Bài tập 2.9. Từ một hộp có 5 bóng đèn màu đỏ, 10 bóng đèn màu xanh và 15 bóng đèn màu vàng, chọn ngẫu nhiên ra 3 bóng đèn. Gọi X là số màu bị thiếu trong 3 bóng đèn được chọn ra.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

(b) Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $Y = X^2 - 1$.

Đáp số. 0,24754

Bài tập 2.10. Một lô hàng chứa 7 sản phẩm loại A, 8 sản phẩm loại B và 9 sản phẩm loại C. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ lô hàng để kiểm tra.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm loại B có trong 3 sản phẩm được lấy ra.

(b) Tính số sản phẩm trung bình mỗi loại có trong 3 sản phẩm được lấy ra.

Đáp số. (b) 1; 1,125 và 0,875

Bài tập 2.11. Có hai hộp bi. Hộp I có 2 bi trắng, 3 bi đỏ. Hộp II có 2 bi trắng, 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lại lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp II bỏ vào hộp I.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số bi trắng có mặt ở hộp I, hộp II sau khi đã chuyển xong.

(b) Tính kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên chỉ số bi trắng có mặt ở hộp I sau khi đã chuyển xong.

Đáp số. (b) 2,6 và 0,52

Bài tập 2.12. Một người đi làm từ nhà đến cơ quan phải qua 3 ngã tư. Xác suất để người đó gặp đèn đỏ ở các ngã tư tương ứng là 0,2; 0,4 và 0,5. Gọi X là số đèn đỏ mà người đó gặp phải trong một lần đi làm (giả sử 3 đèn giao thông ở ngã tư hoạt động độc lập với nhau).

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X. Tính kỳ vọng, phương sai của X. Tìm hàm phân phối xác suất của X.

(b) Hỏi thời gian trung bình phải ngừng trên đường là bao nhiêu biết rằng mỗi khi gặp đèn đỏ người ấy phải đợi khoảng 3 phút.

Đáp số. (a) 1,1 và 0,65 (b) 3,3

Bài tập 2.13. Một người chơi trò chơi tung con xúc sắc cân đối đồng chất ba lần. Nếu cả ba lần đều xuất hiện mặt 6 thì thu về 36 USD, nếu hai lần xuất hiện mặt 6 thì thu về 2,8 USD, nếu một lần xuất hiện mặt 6 thì thu về 0,4 USD. Biết rằng khi chơi người đó phải nộp x USD.

(a) Tìm x sao cho trò chơi là vô thưởng vô phạt.

(b) x bằng bao nhiêu thì trung bình mỗi lần chơi, người chơi mất 1 USD?

Đáp số. (a) 0,5055 (b) 1,5055

Bài tập 2.14. Một kiện hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Tiền lãi khi bán được mỗi sản phẩm loại I là 50 nghìn đồng, mỗi sản phẩm loại II là 20 nghìn đồng.

(a) Ngày thứ nhất lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 3 sản phẩm và đã bán hết cả 3 sản phẩm đó. Lập bảng phân phối xác suất và tính kỳ vọng của số tiền lãi thu được.

(b) Ngày thứ hai lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 2 sản phẩm. Tính xác suất để thu được 100 nghìn đồng tiền lãi khi bán 2 sản phẩm này.

Đáp số. (a) 123 (b) 0,4667

Bài tập 2.15. Một cửa hàng máy tính đã mua 3 máy tính cùng loại với giá 500 USD một chiếc. Cửa hàng sẽ bán chúng với giá 1000 USD một chiếc và dự định bán trong một quý. Nếu hết thời hạn này, cửa hàng sẽ trả lại nhà sản xuất và sẽ được nhà sản xuất mua lại với giá 200 USD/chiếc. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số máy tính cửa hàng này bán được trong thời hạn trên và giả thiết X có bảng phân phối xác suất sau

X	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Lợi nhuận trung bình cửa hàng nhận được là bao nhiêu?

Đáp số. 700 USD

Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập 2.16. Gọi biến ngẫu nhiên liên tục X là cường độ dòng điện đo được trong một sợi dây đồng mỏng tính bằng miliampe (mA). Giả sử X nhận giá trị trong đoạn $[0;30\text{ mA}]$ và hàm mật độ xác suất của X là

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;30], \\ k, & x \in [0;30]. \end{cases}$$

(a) Tìm k? Vẽ đồ thị hàm mật độ.

(b) Tìm hàm phân phối xác suất tương ứng. Vẽ đồ thì hàm phân phối.

(c) Xác suất để phép đo đo được cường độ dòng điện nhỏ hơn 15 miliampe là bao nhiêu? Mô tả bằng đồ thị.

Bài tập 2.17. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}, & \text{khi} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{khi} \quad x < 0. \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Tính $P(X \geq 5)$.

(c) Xác định hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = -2X + 5$.

Đáp số. (a) 1 (b) $0,00674$

Bài tập 2.18. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x), & \text{nếu} \quad x \in [0,1], \\ 0, & \text{nếu} \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Tính xác suất để trong 3 lần quan sát độc lập biến ngẫu nhiên X có đúng 1 lần X nhận giá trị trong khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Đáp số. (a) 12 (b) $0,44312$

Bài tập 2.19. Cho hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và định nghĩa $Y = [X]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá X (nghĩa là $[x] = 0$ nếu $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ nếu $1 \leq x < 2\ldots$).

(a) Tính $P(Y = 0)$.

(b) Tính $E(Y)$.

Đáp số. (a) 0,9502 (b) 0,0524

Bài tập 2.20. Gọi X là đường kính của lỗ được khoan trên một sản phẩm kim loại. Kích thước tiêu chuẩn của đường kính được đặt ra là 13,5 mm. Các tác động ngẫu nhiên trong quá trình khoan dẫn đến đường kính luôn lớn hơn quy định. Dữ liệu lịch sử cho thấy phân phối của X có thể được mô hình hóa bằng hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 13,5, \\ 20e^{-20(x+k)}, & x > 13,5 \end{cases}$$

(a) Xác định hằng số k.

(b) Tìm hàm phân phối xác suất tương ứng.

(c) Nếu một sản phẩm có đường kính lớn hơn 13,6 mm sẽ bị loại bỏ thì tỷ lệ sản phẩm bị loại bỏ là bao nhiêu?

Đáp số. (a) $-13,5$

Bài tập 2.21. Biên độ dao động của một vật là một biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất là

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } x \ge 0, \\ 0, & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

trong đó σ là tham số đã biết. Tính xác suất để biên độ giao động đó lớn hơn trị trung bình của nó.

Đáp số. $e^{-\pi/4}$

Bài tập 2.22. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ là $f_X(x) = ae^{-|x|}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

(a) Xác định a.

(b) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.

(c) Tìm $E(X)$, $V(X)$.

(d) Tính xác suất để trong ba quan sát độc lập biến ngẫu nhiên X có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(0; \ln 3)$.

Đáp số. (a) $1/2$ (c) 0 và 2 (d) 0,2222

Bài tập 2.23. Nhu cầu hàng năm của người dân một thành phố về loại hàng A (ngàn sản phẩm) là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau

$$f_X(x) = \begin{cases} k(30 - x), & x \in (0, 30), \\ 0, & x \notin (0, 30). \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tìm hàm phân phối $F_Y(x)$ với $Y = 2X + 5$.

(c) Tìm nhu cầu trung bình hàng năm về loại hàng đó.

Đáp số. (a) $1/450$ (c) 10

Bài tập 2.24. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} - k\cos x, & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tìm $P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) Tìm $E(X)$.

Đáp số. (a) $1/2$ (b) $1/2$ (c) $\pi/2$

Bài tập 2.25. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a, \\ A + B\arcsin\dfrac{x}{a}, & x \in (-a, a), \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

(a) Tìm A và B.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

Đáp số. (a) $1/2$ và $1/\pi$

Bài tập 2.26. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng

$$F_X(x) = a + b\arctan x, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(a) Tìm hệ số a và b.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

(c) Tìm xác suất để khi quan sát độc lập 3 lần biến ngẫu nhiên X thì có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(-1; 1)$.

Đáp số. (a) $1/2$ và 1π (c) 0,375

Bài tập 2.27. Biến ngẫu nhiên X liên tục trên toàn trục số và có hàm phân phối xác suất $F_X(x) = 1/2 + 1/\pi \arctan x/2$. Tìm giá trị có thể có của x_1 thỏa mãn điều kiện $P(X > x_1) = 1/4$.

Đáp số. 2

Bài tập 2.28. Thu nhập của dân cư tại một vùng là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq x_0,\ \alpha > 0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Hãy xác định mức thu nhập sao cho lấy ngẫu nhiên một người ở vùng đó thì thu nhập của người này vượt quá mức trên với xác suất 0,5.

Bài tập 2.29. Thời gian đợi xe buýt (phút) tại điểm dừng xe buýt là một biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ như sau

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1/2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

(a) Tính $P(0,5 < X < 2)$.

(b) Tìm hàm phân phối xác suất tương ứng.

(c) Tính kỳ vọng và phương sai của X.

(d) Tìm khoảng thời gian mà với xác suất ít nhất là $3/4$ thời gian chờ đợi nằm trong khoảng này.

Đáp số. (a) 0,875 (c) $13/12$ và $35/144$

Bài tập 2.30. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} k(30 - x), & x \in (0, 30), \\ 0, & x \notin (0, 30). \end{cases}$$

Đặt $Y := \max\{20, X\}$. Tìm kỳ vọng của Y.

Một số phân phối xác suất thông dụng

Bài tập 2.31. Hệ thống liên lạc bằng giọng nói của một doanh nghiệp có 48 đường truyền. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số đường truyền đang được sử dụng tại thời điểm quan sát. Giả sử X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều rời rạc.

(a) Vẽ đồ thị phân phối của X.

(b) Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X, cho nhận xét về tình hình quan sát thực tế.

Đáp số. (b) 24; 200; 1,1421

Bài tập 2.32. Giả sử cường độ dòng điện (miliampe, viết tắt là mA) đo được trên một sợi dây đồng mỏng là biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối đều liên tục trên đoạn $[0;20]$ mA.

(a) Vẽ đồ thị hàm mật độ xác suất của X.

(b) Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Đáp số. (b) 10; 33,3333; 5,7735

Bài tập 2.33. Xét một phần tư hình tròn tâm $O(0,0)$ bán kính bằng a, ký hiệu là OAB, với tọa độ tương ứng là $A(a,0)$ và $B(0,a)$.

(a) Trên đoạn OA lấy ngẫu nhiên một điểm C. Tìm phân phối xác suất của độ dài đoạn OC.

(b) Dựng một đường thẳng đi qua C, vuông góc với OA và cắt cung tròn tại điểm D. Tính kỳ vọng và phương sai của độ dài đoạn CD.

Đáp số. (a) Phân phối đều (b) $a\pi/4$ và $\left(2/3 - \pi^2/4\right)a^2$

Bài tập 2.34. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trên nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2a$. Biết rằng xác suất điểm M rơi vào cung CD bất kỳ của nửa đường tròn AMB chỉ phụ thuộc vào độ dài cung CD.

(a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y chỉ diện tích tam giác AMB.

(b) Tìm giá trị trung bình của diện tích tam giác ấy.

Đáp số. (b) $2a^2/\pi$

Bài tập 2.35. Một trò chơi đưa ra một số bất kỳ, trong đó số được đưa ra tuân theo luật phân phối đều liên tục trên đoạn $[0;5]$. A chơi trò chơi này theo nguyên tắc, nếu nhận được số nhỏ hơn hoặc bằng k thì anh ta sẽ mất 1 USD, nếu nhận được số lớn hơn k thì A sẽ kiếm được 1 USD.

(a) Tìm lợi nhuận trung bình của trò chơi khi $k = 2$.

(b) Tìm phương sai của lợi nhuận khi $k = 2$.

(c) Tìm giá trị của k làm cực tiểu phương sai lợi nhuận của trò chơi này.

(d) Nếu bạn chơi trò chơi này 10 lần thì xác suất bạn kiếm được 2 USD với $k = 2$ là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 0,2 (b) 0,96 (c) 0 hoặc 5 (d) 0,2508

Bài tập 2.36. Có 10 máy sản xuất sản phẩm độc lập nhau, mỗi máy sản xuất ra 2% phế phẩm.

(a) Từ mỗi máy sản xuất lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số phế phẩm lấy được. X có phân phối gì? Vẽ đồ thị phân phối xác suất của X.

(b) Từ mỗi máy sản xuất lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Tính xác suất lấy được nhiều nhất 2 phế phẩm.

(c) Trung bình có bao nhiêu sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra phế phẩm đầu tiên (giả sử các sản phẩm sản xuất ra là độc lập)?

Đáp số. (b) 0,9991 (c) 49

Bài tập 2.37. (a) Một máy bay bốn động cơ có thể bay an toàn nếu ít nhất hai động cơ làm việc. Giả sử các động cơ hoạt động độc lập và mỗi động cơ bị trục trặc có xác suất p. Tìm xác suất để máy bay sẽ bay an toàn.

(b) Một máy bay hai động cơ có thể bay an toàn nếu ít nhất một động cơ hoạt động và giả sử hai động cơ hoạt động độc lập và xác suất để một động cơ gặp trục trặc là p. Tìm xác suất máy bay sẽ bay an toàn.

(c) Máy bay nào an toàn hơn?

Đáp số. (a) $1 - 4p^3 + 3p^4$ (b) $1 - p^2$

Bài tập 2.38. Cho X là biến ngẫu nhiên chỉ tỷ lệ sinh viên trong một lớp MI2020 có điểm dưới C. Giả sử X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x), & \text{nếu } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{nếu } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tính $E(X)$ và $V(X)$.

(c) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.

(d) Một lớp được xem như không đạt yêu cầu nếu tỷ lệ sinh viên có điểm dưới C lớn hơn $0,5$. Tính xác suất lớp không đạt yêu cầu.

(e) Giả sử năm học 2020–2021 có 20 lớp MI2020 và việc không đạt yêu cầu của các lớp là độc lập nhau. Số lớp không đạt yêu cầu trung bình là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 6 (b) 0,5 và 0,05 (d) 0,5 (e) 10

Bài tập 2.39. Số lỗi in trên một trang sách của một cuốn sách dày được giả thiết là biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối Poisson tham số λ. Biết rằng xác suất có lỗi in trong mỗi trang sách là 39,35%.

(a) Tính số lỗi in trung bình có trong một trang sách của cuốn sách đó.

(b) Đọc ngẫu nhiên một trang sách, tính xác suất để trang sách đó có ít nhất 3 lỗi in.

(c) Nếu đọc 10 trang sách thì số trang có lỗi in có khả năng xảy ra cao nhất là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 0,5 (b) 0,0144 (c) 4

Bài tập 2.40. Số lượt truy cập vào một trang Web có khối lượng lớn lượt truy cập được giả thiết là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối Poisson với mức trung bình là 10.000 lượt truy cập mỗi ngày.

(a) Tính xác suất có hơn 20.000 lượt truy cập trong một ngày.

(b) Tính xác suất có ít hơn 9900 lượt truy cập trong một ngày.

(c) Tìm x_1 sao cho xác suất số lần truy cập trong một ngày vượt quá giá trị x_1 là 0,01.

(d) Ước tính số ngày dự kiến trong một năm (365 ngày) có nhiều hơn 10.200 lượt truy cập.

(e) Tính xác suất để mỗi năm (365 ngày) có trên 15 ngày với hơn 10.200 lượt truy cập.

Đáp số. (a) 0 (b) 0,156 (c) 13.300 (d) 8,3 (e) 0,0052

Bài tập 2.41. Một ga ra cho thuê ôtô thấy rằng số người đến thuê ôtô vào thứ bảy cuối tuần là một biến ngẫu nhiên có phân bố Poisson với tham số $\lambda = 2$. Giả sử gara có 4 chiếc ôtô.

(a) Tìm xác suất để tất cả 4 ôtô đều được thuê vào thứ 7.

(b) Tìm xác suất gara không đáp ứng được yêu cầu (thiếu xe cho thuê) vào thứ 7.

(c) Trung bình có bao nhiêu ôtô được thuê vào ngày thứ 7?

Đáp số. (a) 0,1429 (b) 0,0527 (c) 2

Bài tập 2.42. Số khách hàng đến một cửa hàng bán lẻ là một biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với trung bình 6 khách hàng đến trong vòng một giờ.

(a) Nếu có đúng 5 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10h00 đến 11h00 thì xác suất để có ít nhất 8 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10h00 đến 11h30 là bao nhiêu?

(b) Nếu có ít hơn 6 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10h00 đến 12h00 thì cửa hàng được xem như là không có lợi nhuận. Tìm xác suất để cửa hàng có đúng 1 ngày có lãi trong một tuần (giả sử cửa hàng mở cửa 6 ngày trong tuần).

Đáp số. (a) 0,5768 (b) $2,026 \times 10^{-8}$

Bài tập 2.43. Số tai nạn giao thông trong một ngày ở một thành phố là biến ngẫu nhiên X theo luật phân phối Poisson với tham số $\lambda = 4$.

(a) Tính xác suất để có một ngày hạnh phúc về tai nạn giao thông.

(b) Để nghiên cứu khả năng xảy ra ít nhất 2 tai nạn giao thông trong 1 ngày tại thành phố này, người ta khảo sát ngẫu nhiên 50 ngày. Nếu xét theo kết quả khảo sát này thì số ngày có ít nhất 2 tai nạn giao thông với xác suất xảy ra lớn nhất là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 0,0183 (b) 46

Bài tập 2.44. Một động cơ điện có thời gian làm việc liên tục (giờ) cho đến khi có hỏng hóc đầu tiên được giả thiết là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\lambda = 0,001$.

(a) Tính xác suất để động cơ này làm việc liên tục không hỏng hóc được ít nhất 900 giờ.

(b) Được biết động cơ này đã làm việc liên tục không hỏng hóc được ít nhất 900 giờ. Xác suất để động cơ này làm việc liên tục không hỏng hóc đến ít nhất 1200 giờ là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 0,4066 (b) 0,7408

Bài tập 2.45. Giả sử thời gian (phút) giữa các cuộc điện thoại gọi đến một doanh nghiệp cung cấp hệ thống ống nước là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối mũ với thời gian trung bình giữa các cuộc gọi là 15 phút.

(a) Xác suất để không có cuộc gọi nào trong khoảng thời gian 30 phút là bao nhiêu?

(b) Xác suất để có ít nhất một cuộc gọi đến trong khoảng thời gian 10 phút là bao nhiêu?

(c) Xác suất cuộc gọi đầu tiên đến trong vòng 5 đến 10 phút sau khi mở máy là bao nhiêu?

(d) Xác định khoảng thời gian sao cho xác suất có ít nhất một cuộc gọi trong khoảng thời gian đó là 0,90.

Đáp số. (a) 0,1353 (b) 0,4866 (c) 0,2031 (d) 34,54

Bài tập 2.46. Giả sử thời gian (phút) giữa các lượt taxi đến một ngã tư đông đúc là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối mũ với trung bình là 10 phút.

(a) Xác suất bạn đợi taxi lâu hơn một giờ là bao nhiêu?

(b) Giả sử bạn đã đợi taxi một giờ. Xác suất để taxi đến trong vòng 10 phút tới là bao nhiêu?

(c) Xác định x sao cho xác suất bạn chờ hơn x phút là 0,10.

(d) Xác định x sao cho xác suất bạn đợi ít hơn x phút là 0,90.

(e) Xác định x sao cho xác suất bạn đợi ít hơn x phút là 0,50.

Đáp số. (a) 0,0025 (b) 0,6321 (c) 23,03 (d) như ý (c) (e) 6,93

Bài tập 2.47. Giả sử tuổi thọ của một loại bóng đèn tuân theo luật phân phối mũ với tham số $\lambda = 0,5$ năm.

(a) Nếu bóng đèn bị hỏng sẽ được thay thế bằng một bóng mới thì trung bình số bóng đèn dự kiến sử dụng trong 10 năm là bao nhiêu?

(b) Nếu bóng đèn vẫn hoạt động thì sau 2 năm nó cũng sẽ được thay bằng một bóng đèn mới. Gọi Y là thời gian hoạt động của bóng đèn. Hãy biểu diễn Y và tìm hàm phân phối xác suất của Y.

(c) Tính $E(Y)$.

Đáp số. (a) 5 (c) 1,2642

Bài tập 2.48. Đường kính của một loại chi tiết do một máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn, với kỳ vọng là 20 mm và độ lệch chuẩn là 0,2 mm. Tính xác suất để lấy ngẫu nhiên một chi tiết có đường kính trong khoảng 19,9 mm đến 20,3 mm.

Đáp số. 0,62465

Bài tập 2.49. Giả sử X là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình là 3 và phương sai là 0,16.

(a) Vẽ đồ thị hàm mật độ xác suất của X.

(b) Tính $P(X > 3,784)$.

(c) Tìm c sao cho $P(3 - c < X < 3 + c) = 0,9$.

Đáp số. (b) 0,025 (c) 0,658

Bài tập 2.50. Lãi suất (%) đầu tư vào một dự án trong năm 2019 được coi như một biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn. Theo đánh giá của ủy ban đầu tư thì với xác suất 0,1587 cho lãi suất lớn hơn 20% và với xác suất 0,0228 cho lãi suất lớn hơn 25%. Vậy khả năng đầu tư mà không bị lỗ là bao nhiêu?

Đáp số. 0,99865

Bài tập 2.51. Một công ty kinh doanh mặt hàng A dự định sẽ áp dụng một trong hai phương án kinh doanh: Phương án 1: Gọi X_1 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_1 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(140; 2500)$. Phương án 2: Gọi X_2 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_2 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(200; 3600)$. Biết rằng công ty tồn tại và phát triển thì lợi nhuận thu được từ mặt hàng A phải đạt ít nhất 80 triệu đồng/tháng. Hỏi nên áp dụng phương án nào để rủi ro thấp hơn.

Đáp số. Phương án 2

Bài tập 2.52. Trọng lượng của một loại sản phẩm tuân theo luật phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 250 gam, độ lệch chuẩn là 5 gam. Sản phẩm loại A là sản phẩm có trọng lượng không nhỏ hơn 260 gam.

(a) Một người lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ một thùng hàng. Tính xác suất người này lấy được sản phẩm loại A.

(b) Nếu lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ một thùng hàng được sản phẩm loại A thì sẽ mua thùng hàng đó. Một người kiểm tra 100 thùng hàng, tính xác suất người này mua được 6 thùng.

Đáp số. (a) 0,02275 (b) 0,019

Bài tập 2.53. Trong một kỳ thi điểm số trung bình của các sinh viên là 80 và độ lệch chuẩn là 10. Giả sử điểm thi của sinh viên tuân theo luật phân phối chuẩn.

(a) Nếu giáo viên muốn 25% số sinh viên đạt điểm A (nhóm điểm cao nhất) thì điểm số thấp nhất để đạt điểm A là bao nhiêu?

(b) Chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên, tính xác suất trong đó có nhiều hơn 10 sinh viên đạt điểm A, trong đó điểm A được lấy ở ý (a).

Đáp số. (a) 86,8 (b) 0,7378

Bài tập 2.54. Giả sử tốc độ truyền tệp từ máy chủ trong khuôn viên trường sang máy tính cá nhân tại nhà của sinh viên vào buổi tối các ngày trong tuần là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với mức trung bình là 60 kilobit mỗi giây và độ lệch chuẩn là 4 kilobit mỗi giây.

(a) Xác suất để tệp đó truyền với tốc độ 70 kilobit/ giây trở lên là bao nhiêu?

(b) Xác suất để tệp đó truyền với tốc độ nhỏ hơn 58 kilobit/ giây là bao nhiêu?

(c) Nếu tệp là 1 megabyte, thì thời gian trung bình để chuyển tệp đó là bao nhiêu? (Giả sử tám bit mỗi byte.)

Đáp số. (a) 0,00621 (b) 0,308538 (c) 133,33

Bài tập 2.55. Giả sử tuổi thọ (giờ) của một loại bóng đèn là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với giá trị trung bình là 7000 giờ và độ lệch chuẩn là 600 giờ.

(a) Xác suất để bóng đèn bị hỏng trước 5000 giờ là bao nhiêu?

(b) Tuổi thọ (tính bằng giờ) của trên 95% bóng đèn là bao nhiêu?

(c) Nếu ba bóng đèn được sử dụng trong một sản phẩm và giả thiết chúng hỏng độc lập nhau, thì xác suất để cả ba bóng đèn vẫn hoạt động sau 7000 giờ là bao nhiêu?

Đáp số. (a) 0,00043 (b) 6016 (c) 1/8

Bài tập 2.56. Một nhà máy sản xuất một số lượng lớn sản phẩm. Xác suất để một sản phẩm do nhà máy sản xuất ra phù hợp với sự mong đợi của khách hàng là 0,98. Kiểm tra ngẫu nhiên 1000 sản phẩm loại này, xác suất để trong đó có nhiều hơn 26 sản phẩm phù hợp với sự mong đợi của khách hàng là bao nhiêu?

Đáp số. 0,07078

Một số đề thi

Bài tập 2.57 (Đề thi MI2020 giữa kỳ 2019.3)**.** Kiểm tra 5 bóng đèn điện (hoạt động độc lập với nhau). Xác suất bị hỏng tại thời điểm kiểm tra của 5 bóng tương ứng là 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05. Tính trung bình số bóng đèn bị hỏng tại thời điểm kiểm tra trong 5 bóng đèn đó.

Đáp số. 0,15

Bài tập 2.58 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Giả sử số khách hàng đến một cửa hàng tuân theo phân phối Poisson với trung bình 5 khách hàng đến trong một ngày. Nếu có ít nhất 3 khách hàng đến trong ngày thì cửa hàng được xem là có lãi. Xác suất để có ít nhất 5 ngày cửa hàng có lãi trong một tuần là bao nhiêu? Giả sử cửa hàng đó mở cửa 7 ngày trong tuần.

Đáp số. 0,9540

Bài tập 2.59 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Trong một hộp gồm 10 quả bóng, có 6 quả bóng mới. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên 2 quả ra đánh, đánh xong lại trả về hộp. Lần thứ hai lấy ngẫu nhiên ra 2 quả. Gọi X là số quả bóng mới trong 2 quả bóng lấy ra lần hai. Tính $E(X)$.

Đáp số. 0,96

Bài tập 2.60 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4
P	$2x-y$	x	x	$x+y$

trong đó, x và y là các số thực thỏa mãn $0,2 \leq y \leq x < 1$. Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $Y = X + 5$.

Đáp số. 7,8

Bài tập 2.61 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất được cho như sau

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Với giá trị nào của a và b thì $E(X) = 1/2$.

Đáp số. $a = 1, b = 0$

Bài tập 2.62 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Số lỗi in trong một trang sách của một cuốn sách dày được giả thiết là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối Poisson. Biết rằng 10% số trang có lỗi. Tính số lỗi trung bình có trên một trang sách.

Đáp số. 0,105

Bài tập 2.63 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Một trạm có 2 xe taxi để cho thuê theo ngày và mỗi chiếc xe được thuê với giá 500 nghìn đồng/ngày. Hằng ngày, trạm phải nộp thuế 50 nghìn đồng/xe/ngày. Giả sử yêu cầu thuê xe của trạm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối Poisson với trung bình 2 yêu cầu/ngày. Tiền lãi trung bình (nghìn đồng) trạm thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Đáp số. 629

Bài tập 2.64 (Đề thi MI2020 cuối kỳ 2021.1)**.** Một thiết bị điện tử A có thời gian làm việc liên tục (giờ) cho đến khi có hỏng hóc đầu tiên được giả thiết là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối mũ với tham số $\lambda = 0,0001$, thời gian bảo hành của thiết bị điện này là 800 giờ.

(a) Tính thời gian làm việc trung bình của thiết bị điện tử A.

(b) Tìm xác suất để thiết bị điện tử A được khách hàng mang tới trạm bảo hành để sửa chữa.

Đáp số. (a) 10000 (b) 0,07688

Chương 3

Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Ví dụ tổng hợp Chương 3

Ví dụ 3.1 (Đề thi cuối kỳ 20183). Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2, & \text{nếu} \quad -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tính $P\left(Y \leq \dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải Ví dụ 3.1 (a) Sử dụng tính chất của hàm mật độ hai chiều

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

suy ra $k \geq 0$ và

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_D kx^2dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2} kx^2dxdy = k\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2k}{5},$$

trong đó $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ (xem Hình 3.1). Vậy $k = 5/2$.

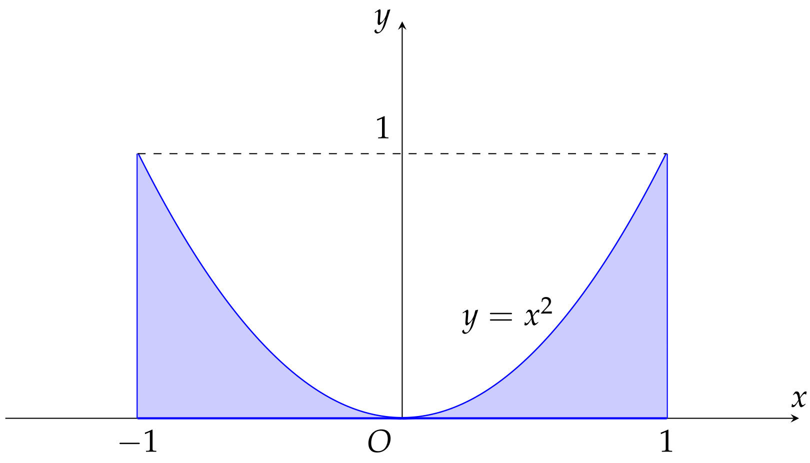
(b) Sử dụng tính chất của hàm mật độ, ta tính

$$P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) = \iint_{D_1} \frac{5}{2}dxdy = 2\left[\int_0^{1/2} dx \int_0^{x^2} \frac{5}{2}x^2dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_0^{1/4} \frac{5}{2}x^2dy\right] = \frac{19}{48} \simeq 0,3958.$$

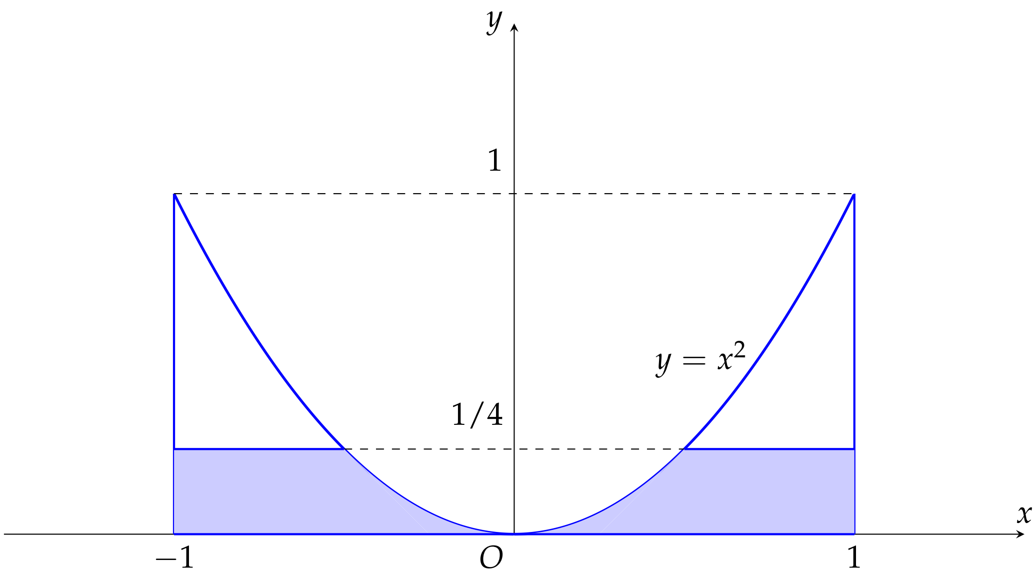
Hoặc

$$P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) = \iint_{D_1} \frac{5}{2}dxdy = 2\int_0^{1/4} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{5}{2}x^2dx = \frac{19}{48} \simeq 0,3958.$$

Ở đây $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2,\ y \leq 1/4\}$ (xem Hình 3.2)



Hình 3.1: Miền D của Ví dụ 3.1(a)



Hình 3.2: Miền D_1 của Ví dụ 3.1(b)

Ví dụ 3.2 (Đề thi cuối kỳ 20191)**.** Cho U và V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, độc lập với nhau và có cùng phân phối đều trên $[10; 30]$.

(a) Tìm hàm mật độ xác suất $f_{U,V}(u, v)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (U, V).

(b) Tính $P(|U - V| < 10)$.

Lời giải Ví dụ 3.2

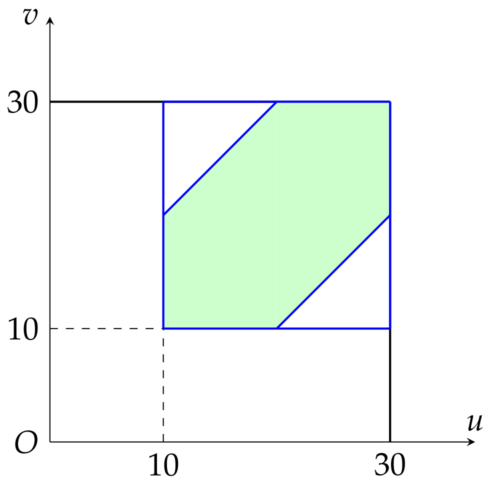
(a) Vì U, V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, có phân phối đều trên $[10; 30]$ nên

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & u \in [10; 30], \\ 0, & u \notin [10; 30], \end{cases} \quad f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & v \in [10; 30], \\ 0, & v \notin [10; 30]. \end{cases}$$

Mặt khác vì U và V độc lập nên $f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{400}, & (u,v) \in [10;30]^2, \\ 0, & (u,v) \notin [10;30]^2. \end{cases}$

(b) $P(|U-V| < 10) = \displaystyle\int\int_{D\cap S_{U,V}} f_{U,V}(u,v)dudv$ với $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u-v| < 10\}$. Sử dụng tính chất của tích phân hai lớp suy ra

$$P(|U-V| < 10) = \frac{1}{400}(20^2 - 10^2) = \frac{3}{4} = 0,75.$$



Hình 3.3: Miền $D \cap S_{U,V}$ trong Ví dụ 3.2(b)

Ví dụ 3.3 (Đề thi cuối kỳ 20192)**.** Thời gian hoạt động X_i, $i = 1,2,3$, của linh kiện điện tử I, II, III là các biến ngẫu nhiên độc lập, tuân theo luật phân phối mũ với hàm mật độ xác suất tương ứng là $f_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$, $x > 0$, $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,3$. (a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của một hệ thống gồm 3 linh kiện trên mắc nối tiếp. (b) Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của hệ thống đó.

Lời giải Ví dụ 3.3 (a) Gọi X : "thời gian hoạt động của hệ thống", $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X < x) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq x) = 1 - \Pi_{i=1}^3 P(X_i \geq x) \\ &= 1 - \Pi_{i=1}^3 \Big[1 - P(X_i < x)\Big] = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x},\ x > 0. \end{aligned}$$

(b) Sử dụng công thức tính kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối mũ,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \quad V(X) = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}.$$

Ví dụ 3.4 (Đề thi cuối kỳ 20201)**.** Khi Ba đến trạm xe buýt D, có thể có một trong hai tuyến xe buýt độc lập đi qua (cả hai tuyến đều đưa anh ta về nhà). Các chuyến của công ty xe buýt **E**

đến trạm D cách nhau chính xác 15 phút, trong khi thời gian đến trạm D từ chuyến xe buýt này đến chuyến xe buýt tiếp theo của công ty xe buýt **F** là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ xác suất là $f(x) = \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}$, $x > 0$. Một ngày Ba đến trạm D vào một thời điểm ngẫu nhiên. (a) Xác suất để xe buýt của công ty **F** đến trước là bao nhiêu? (b) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian chờ xe buýt của Ba.

Bài tập Chương 3

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài tập 3.1. Cho hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

(a) Chứng minh rằng X và Y độc lập.

(b) Lập bảng phân phối xác suất biên của X và Y.

(c) Tìm quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên W với $W = XY$.

(d) Tính $E(W)$ bằng hai cách và kiểm tra $E(W) = E(X)E(Y)$.

Bài tập 3.2. Cho hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời

X \ Y	-1	0	1
-1	$4/15$	$1/15$	$4/15$
0	$1/15$	$2/15$	$1/15$
1	0	$2/15$	0

(a) Tìm hiệp phương sai $\operatorname{cov}(X, Y)$, ma trận hiệp phương sai và hệ số tương quan $\rho_{X,Y}$.

(b) X và Y có độc lập không?

Bài tập 3.3. Cho hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân phối xác suất đồng thời

X \ Y	1	2	3
1	0,17	0,13	0,25
2	0,10	0,30	0,05

(a) Lập ma trận covarian của (X, Y).

(b) Tìm hệ số tương quan $\rho_{X,Y}$.

(c) X và Y có độc lập không?

Đáp số. (a) $\begin{pmatrix} 0,2475 & -0,0635 \\ -0,0635 & 0,5691 \end{pmatrix}$ (b) $-0,1692$ (c) Không độc lập

Bài tập 3.4. Thống kê về giá thành sản phẩm X (triệu đồng) và sản lượng Y (tấn) của một ngành sản xuất thu được bảng phân phối xác suất sau:

X \ Y	30	50	80	100
6	0,05	0,06	0,08	0,11
7	0,06	0,15	0,04	0,08
8	0,07	0,09	0,10	0,11

(a) Tìm giá thành sản phẩm trung bình và mức độ phân tán của nó.

(b) Tìm sản lượng trung bình khi giá thành bằng 8.

(c) X và Y có độc lập không?

(d) X và Y có tương quan không?

Đáp số. (a) 7,07 0,8155 (b) 69,1892 (c) Không độc lập (d) Có tương quan

Bài tập 3.5. Trong quá trình truyền thông tin kỹ thuật số, xác suất để một bít có độ méo cao, trung bình và thấp trong quá trình tin lần lượt là 0,01; 0,04 và 0,95. Giả sử rằng bít được truyền đi và lượng biến dạng của mỗi bít được giả thiết là độc lập. Gọi X và Y lần lượt là các biến ngẫu nhiên chỉ số bít có độ méo cao và trung bình trong số ba bít được truyền đi.

(a) Tìm hàm xác suất đồng thời $P_{X,Y}(x,y)$.

(b) Tìm $P_X(x)$ và $E(X)$.

(c) Tìm $P_{Y|1}(y)$ và $E(Y|X=1)$.

(d) X và Y có độc lập không?

Đáp số. (a) $P_X(0) = 0,970299$, $P_X(1) = 0,029403$, $P_X(2) = 0,000297$, $P_X(3) = 0,000001$ $E(X) = 0,03$ (c) $P_{Y|1}(0) = 0,920824$, $P_{Y|1}(1) = 0,077543$, $P_{Y|1}(2) = 0,001632$ $E(Y|X = 1) = 0,080807$ (d) Không độc lập

Bài tập 3.6. Cho X_1, X_2, X_3 là các biến ngẫu nhiên độc lập theo luật phân phối Poisson với tham số $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Tính xác suất của các sự kiện sau:

(a) Số lớn nhất trong các số X_1, X_2, X_3 không nhỏ hơn 1.

(b) Số lớn nhất trong các số X_1, X_2, X_3 bằng 1.

(c) Số nhỏ nhất trong các số X_1, X_2, X_3 không nhỏ hơn 1.

(d) Số nhỏ nhất trong các số X_1, X_2, X_3 bằng 1.

Đáp số. (a) 0,9975 (b) 0,0595 (c) 0,5194 (d) 0,3937

Bài tập 3.7. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,08	0,02

Y	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

(a) Tính $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$.

(b) Nếu X và Y độc lập, tính $P(X+Y \leq 2)$ và lập bảng phân phối xác suất của $X+Y$.

Đáp số. (a) 1,82 1,7 1,5676 2,31 (b) 0,33

Bài tập 3.8. Một lớp Xác suất thống kê có 40 sinh viên trong đó 60% là sinh viên chuyên ngành kỹ thuật điện, 10% là sinh viên chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp và 30% là sinh viên chuyên ngành kỹ thuật cơ khí. Một mẫu gồm bốn sinh viên được chọn ngẫu nhiên, lần lượt, không hoàn lại, tham gia một dự án. Gọi X và Y lần lượt là số sinh viên chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp và kỹ thuật cơ khí trong 4 sinh viên được chọn. Tìm

(a) $P_{X,Y}(x,y)$.

(b) $P_X(x)$ và $E(X)$.

(c) $P_{Y|3}(y)$, $E(Y|X=3)$ và $V(Y|X=3)$.

(d) X và Y có độc lập không?

Đáp số. (b) $P_X(0) = 0,2511$, $P_X(1) = 0,0405$, $P_X(2) = 0,0063$, $P_X(3) = 0,0009$, $P_X(4) = 0,0001$ $E(X) = 0,0562$ (c) $P_{Y|3}(0) = 2/3$, $P_{Y|3}(1) = 1/3$, $P_{Y|3}(2) = P_{Y|3}(3) = P_{Y|3}(4) = 0$ $E(Y|X=3) = 0,0003$ $V(Y|X=3) = 0,0741$ (d) Không độc lập

Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập 3.9. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k

(b) X và Y có độc lập không?

Đáp số. (a) 3 (b) Không độc lập

Bài tập 3.10. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\left(x^2 + \dfrac{xy}{2}\right), & \text{nếu } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Tìm hàm phân phối đồng thời của X và Y.

Đáp số. (a) 6/7

Bài tập 3.11. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & \text{nếu } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất biên của X, của Y.

(b) Tìm xác suất để (X, Y) nằm trong hình chữ nhật $OABD$ với $O(0,0)$; $A(0,1)$; $B(2,1)$; $D(2,0)$.

Đáp số. (b) $1/3\pi$

Bài tập 3.12. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2, & \text{nếu } -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất biên $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(c) Tính $P\left(Y \le \dfrac{1}{4}\right)$.

Đáp số. (a) $5/2$ (c) $0,3959$

Bài tập 3.13. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất biên của X, của Y.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_{X|y}(x)$, $f_{Y|x}(y)$.

Bài tập 3.14. Một linh kiện điện tử có thời gian hoạt động X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ xác suất là $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$.

(a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của một mạng gồm 2 linh kiện loại trên được mắc song song/mắc nối tiếp.

(b) Tính kỳ vọng, phương sai của thời gian hoạt động của mạng đó.

Bài tập 3.15. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập với nhau có cùng phân phối đều trên $[0;2]$.

(a) Tìm hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên $Z = X + Y$; $T = XY$; $U = X - Y$.

(b) Tính $P(-1 \leq Y - X \leq 1)$.

Đáp số. (b) $3/4$

Bài tập 3.16. Hai người A và B hẹn gặp nhau tại cổng trường trong khoảng từ 7h00 đến 8h00. Gọi X và Y lần lượt là thời gian đến điểm hẹn của người A và B trong khoảng thời gian trên. Giả sử X và Y độc lập và có cùng phân phối đều trên [7;8].

(a) Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của X và Y.

(b) Với quy ước chỉ đợi nhau trong vòng 10 phút, tìm xác suất để hai người được gặp nhau.

Đáp số. (b) $11/36$

Bài tập 3.17. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, $X \sim \mathcal{N}(5; 1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(3; 0,2^2)$.

(a) Tìm $P(X + Y < 5,5)$.

(b) Tìm $P(X < Y)$; $P(X > 2Y)$.

(c) Tìm $P(X < 1; Y < 1)$.

Đáp số. (a) 0,0072 (b) 0,8212 (c) $9,6 \times 10^{-13}$

Bài tập 3.18. Trọng lượng của những người chồng tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 70kg và độ lệch chuẩn 9kg, còn trọng lượng của những người vợ tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 55kg và độ lệch chuẩn 4kg. Hệ số tương quan trọng lượng giữa vợ và chồng là 2/3. Tính xác suất vợ nặng hơn chồng.

Đáp số. 0,0162

Bài tập 3.19. Giả sử tại một trường đại học, một sinh viên đạt được điểm X trong bài kiểm tra năng khiếu toán học và điểm Y trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc là một số trong khoảng từ 0 đến 1. Giả sử X và Y được phân phối theo hàm mật độ sau

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}(2x+3y) & 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

(a) Tính tỷ lệ sinh viên đại học đạt điểm cao hơn 0,8 trong bài kiểm tra năng khiếu toán.

(b) Giả sử điểm số của một sinh viên trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc là 0,3. Tính xác suất để điểm của anh ấy trong bài kiểm tra năng khiếu toán học sẽ lớn hơn 0,8.

(c) Giả sử điểm số của một sinh viên trong bài kiểm tra năng khiếu toán là 0,3. Tính xác suất để điểm của anh ấy trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc sẽ lớn hơn 0,8.

Đáp số. (a) 0,264 (b) 0,216 (c) 0,264

Bài tập 3.20. Một mảnh đất bằng phẳng có hình tam giác vuông với một bờ phía nam dài 200m, bờ phía đông dài 100m. Ta quan tâm đến điểm mà một hạt giống rơi từ trên cao xuống tiếp đất. Giả sử rằng hạt giống nằm trong ranh giới của mảnh đất với tọa độ X và Y của nó được phân bố đều trên bề mặt của tam giác vuông.

(a) Tìm c với c là giá trị của hàm mật độ xác suất của điểm nằm trong ranh giới mảnh đất.

(b) Tìm các hàm mật độ xác suất biên của X và Y.

(c) Tìm hàm mật độ xác suất của Y biết $X = x$ và tính $P(0,1 \le Y \le 0,7 \mid X = 0,5)$.

Đáp số. (a) $1/10000$ (c)

Luật số lớn

Bài tập 3.21. Một biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mu = 10$ và phương sai $\sigma^2 = 4$. Sử dụng Định lý Chebyshev tính

(a) $P(|X - 10| \ge 3)$.

(b) $P(|X - 10| < 3)$.

(c) $P(5 < X < 15)$.

(d) Giá trị của hằng số c sao cho $P(|X-10| \geq c) \leq 0,04$.

Đáp số. (a) Nhiều nhất là $4/9$ (b) Ít nhất là $5/9$ (c) Ít nhất là $21/25$ (d) 10

Bài tập 3.22. Tính $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, trong đó μ và σ lần lượt là kỳ vọng và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

và so sánh với kết quả cho bởi Định lý Chebyshev.

Bài tập 3.23 (Đề thi cuối kỳ 20201)**.** Khi Ba đến trạm xe buýt D, có thể có một trong hai tuyến xe buýt độc lập đi qua (cả hai tuyến đều đưa anh ta về nhà). Các chuyến của công ty xe buýt **E** đến trạm D cách nhau chính xác 15 phút, trong khi thời gian đến trạm D từ chuyến xe buýt này đến chuyến xe buýt tiếp theo của công ty xe buýt **F** là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ xác suất là $f(x) = \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}$, $x > 0$. Một ngày Ba đến trạm D vào một thời điểm ngẫu nhiên. (a) Xác suất để xe buýt của công ty **F** đến trước là bao nhiêu? (b) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian chờ xe buýt của Ba.

Chương 4

Thống kê. Ước lượng tham số

Bài tập Chương 4

Phân phối mẫu và ước lượng cho kỳ vọng

Bài tập 4.1. Một phân xưởng sản xuất một loại sản phẩm với trọng lượng trung bình là 225 gam và độ lệch chuẩn là 25 gam. Giả sử trọng lượng sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phối chuẩn với tham số μ và σ^2, tìm xác suất để một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 49$ sản phẩm của phân xưởng được kiểm tra có trọng lượng trung bình nhỏ hơn 215 gam.

Bài tập 4.2. Giả sử tuổi thọ của một loại bóng đèn do một dây chuyền công nghệ sản xuất ra có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 305 giờ. Người ta khảo sát ngẫu nhiên 45 bóng đèn loại này thấy tuổi thọ trung bình là 2150 giờ. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn nói trên.

Đáp số. $(2060,885;\ 2239,115)$

Bài tập 4.3. Một kỹ sư cho biết trọng lượng tạp chất trong một sản phẩm có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn bằng 3,8 gam. Kiểm tra ngẫu nhiên 9 sản phẩm và thấy lượng tạp chất như sau (đơn vị tính là gam):

$$18{,}2 \quad 13{,}7 \quad 15{,}9 \quad 17{,}4 \quad 21{,}8 \quad 16{,}6 \quad 12{,}3 \quad 18{,}8 \quad 16{,}2$$

(a) Tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình tạp chất của sản phẩm với độ tin cậy 99%.

(b) Không cần tính toán, nếu độ tin cậy 95% thì khoảng ước lượng trung bình sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

Đáp số. (a) $(14,550;\ 18,984)$ (b) rộng hơn

Bài tập 4.4. Giả sử chiều dài của một chi tiết sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0,2 m. Người ta sản xuất thử nghiệm 35 sản phẩm loại này và tính được chiều dài trung bình là 25 m. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng khoảng cho chiều dài trung bình của chi tiết sản phẩm đang được thử nghiệm.

Đáp số. $(24,944;\ 25,056)$

Bài tập 4.5. Giả sử tuổi thọ X (giờ) của một loại thiết bị điện tử là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với tham số μ và σ^2. Lấy một mẫu ngẫu nhiên 50 thiết bị điện tử loại này kiểm tra thấy tuổi thọ trung bình là $\overline{x} = 1050$ giờ và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là $s = 5,252$ giờ.

(a) Tìm khoảng tin cậy đối xứng của tuổi thọ trung bình của thiết bị điện tử nói trên với độ tin cậy 95%.

(b) Nếu yêu cầu độ tin cậy 99% và sai số của ước lượng ở ý (a) nhỏ hơn 1,2 giờ thì cần kiểm tra thêm ít nhất bao nhiêu thiết bị điện tử nữa?

Bài tập 4.6. Giả sử tuổi thọ X (giờ) của loại bóng đèn 75W là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 16$ giờ. Lấy một mẫu ngẫu nhiên 25 bóng đèn kiểm tra thấy tuổi thọ trung bình là $\overline{x} = 1015$ giờ.

(a) Tìm khoảng tin cậy đối xứng của tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn trên với độ tin cậy 99%.

(b) Nếu yêu cầu độ tin cậy 95% và sai số của ước lượng ở ý (a) nhỏ hơn 2 giờ thì cần kiểm tra tối thiểu bao nhiêu bóng đèn?

Bài tập 4.7. Để xác định trọng lượng trung bình của các bao gạo được đóng gói bằng máy tự động, người ta chọn ngẫu nhiên ra 20 bao gạo và thấy trọng lượng trung bình là 49,2 kg và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 1,8 kg. Biết rằng, trọng lượng các bao gạo là biến ngẫu nhiên có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn. Hãy tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của một bao gạo với độ tin cậy 99%.

Đáp số. $(48,0485;\ 50,3515)$

Bài tập 4.8. Giả sử thời gian đợi được phục vụ tại một cửa hàng ăn nhanh là một biến ngẫu nhiên có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn. Người ta khảo sát ngẫu nhiên 16 người thì thấy thời gian đợi trung bình là 4 phút và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 1,8 phút. Với độ tin cậy 99% hãy tìm khoảng tin cậy cho thời gian chờ đợi trung bình của một khách hàng tại cửa hàng ăn nhanh này.

Đáp số. $(2,8291;\ 5,1709)$

Bài tập 4.9. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 thùng hàng được chọn ra từ tất cả các thùng hàng do một nhà máy sản xuất trong một tháng. Trọng lượng của 16 thùng hàng lần lượt như sau (đơn vị tính là kg):

18,6	18,4	19,2	19,8	19,4	19,5	18,9	19,4
19,7	20,1	20,2	20,1	18,6	18,4	19,2	19,8

Tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của tất cả các thùng hàng của nhà máy với độ tin cậy 95%, biết rằng, trọng lượng thùng hàng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Đáp số. $(19,0168;\ 19,6457)$

Bài tập 4.10. Để định mức thời gian gia công một chi tiết máy, người ta theo dõi ngẫu nhiên quá trình gia công 35 chi tiết máy và thu được số liệu:

Thời gian (phút)	(16; 17]	(17; 18]	(18; 19]	(19; 20]	(20; 21]	(21; 22]
Số chi tiết máy	3	4	10	9	5	4

Giả sử thời gian gia công chi tiết máy là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng khoảng cho thời gian gia công trung bình một chi tiết máy nói trên.

Đáp số. $(18,6552;\ 19,5569)$

Bài tập 4.11. Đo áp lực X (tính bằng kg/cm^2) của 18 thùng chứa ta được bảng kết quả sau:

Áp lực (kg/cm^2)	19,6	19,5	19,9	20,0	19,8	20,5	21,0	18,5	19,7
Số thùng	1	2	2	4	2	3	2	1	1

Với độ tin cậy 99% hãy tìm khoảng ước lượng đối xứng của áp lực trung bình của các thùng chứa trên. Biết rằng áp lực là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Đáp số. $(19,5828;\ 20,3839)$

Bài tập 4.12. Một bài báo trong "Nuclear Engineering International" (tháng 2 năm 1988, trang 33) mô tả một số đặc điểm của các thanh nhiên liệu được sử dụng trong một lò phản ứng hạt nhân của một công ty điện lực ở Na Uy. Người ta đo tỷ lệ làm giàu của 12 thanh nhiên liệu và có được dữ liệu sau:

2,94 3,00 2,90 2,90 2,75 2,95 2,75 3,00 2,95 2,82 2,81 3,05

Giả sử tỷ lệ làm giàu của các thanh nhiên liệu là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Hãy ước lượng khoảng cho tỷ lệ làm giàu trung bình của các thanh nhiên liệu với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $(2,8502;\ 2,9532)$

Bài tập 4.13. Trọng lượng những viên gạch trong một quá trình sản xuất gạch được giả sử là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 25 viên gạch vừa sản xuất ra trong ngày có trọng lượng trung bình 2,45 kg và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 0,15 kg.

(a) Tìm khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch trong ngày với độ tin cậy 99%.

(b) Không cần tính toán, với độ tin cậy 95% thì khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng với kết quả ý (a)?

(c) Một mẫu ngẫu nhiên gồm 20 viên gạch sẽ được chọn ra trong ngày mai. Không cần tính toán, với độ tin cậy 99% thì khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch sản xuất ra trong ngày mai sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

(d) Sự thật rằng, độ lệch chuẩn mẫu của các viên gạch sản xuất trong ngày mai là 0,10 kg. Không cần tính toán, với độ tin cậy 99% thì khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch sản xuất ra trong ngày mai sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

Đáp số. (a) $(2,3698;\ 2,5302)$ (b) hẹp hơn (c) rộng hơn (d) hẹp hơn

Bài tập 4.14. Đại học Bách khoa Hà Nội đang quan tâm về lượng thời gian sinh viên của Trường tự nghiên cứu mỗi tuần. Phòng Quản lý nghiên cứu tiến hành khảo sát một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 sinh viên, dữ liệu cho thấy thời gian nghiên cứu trung bình của một sinh viên là 15,26 giờ/tuần và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 6,43 giờ. Giả sử thời gian nghiên cứu của sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

(a) Tìm khoảng tin cậy cho lượng thời gian tự nghiên cứu trung bình mỗi tuần cho tất cả sinh viên của Trường với độ tin cậy 95%.

(b) Không cần tính toán, khoảng tin cậy cho lượng thời gian tự nghiên cứu trung bình mỗi tuần của sinh viên sẽ rộng hơn hay hẹp hơn với ba điều kiện sau:

(b1) Mẫu gồm 30 sinh viên được chọn ra, với tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

(b2) Độ lệch chuẩn mẫu là 4,15 giờ, tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

(b3) Độ tin cậy 99%, tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

Đáp số. (a) $(11,8344;\ 18,6856)$ (b) hẹp hơn

Bài tập 4.15. Một kỹ sư nghiên cứu về cường độ nén của bê tông đang được thử nghiệm. Anh ta tiến hành kiểm tra 12 mẫu vật và có được các dữ liệu sau đây:

2216	2234	2225	2301	2278	2255	2249	2204	2286	2263	2275	2295

Giả sử cường độ nén của bê tông đang thử nghiệm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

(a) Hãy ước lượng khoảng với độ tin cậy 95% cho cường độ nén trung bình của bê tông đang được thử nghiệm.

(b) Cường độ nén trung bình của bê tông đang được thử nghiệm tối thiểu là bao nhiêu với độ tin cậy 99%?

Đáp số. (a) $(2236,537; 2276,9627)$ (b) $\geq 2240,257$

Bài tập 4.16. Người ta đo ngẫu nhiên chiều cao của 49 sinh viên của Đại học Bách khoa Hà Nội thấy chiều cao trung bình là 163 cm và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 12 cm. Hãy tìm khoảng ước lượng với độ tin cậy 99% cho chiều cao trung bình của sinh viên của Đại học Bách khoa Hà Nội.

Đáp số. $(158,5771;\ 167,4229)$

Bài tập 4.17. Đại học Bách khoa Hà Nội tiến hành một nghiên cứu xem trung bình một sinh viên tiêu hết bao nhiêu tiền điện thoại trong một tháng. Trường cho khảo sát 60 sinh viên và thấy số tiền điện thoại trung bình là 95 nghìn đồng và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 36 nghìn đồng. Hãy ước lượng khoảng với độ tin cậy 95% cho số tiền điện thoại trung bình trong một tháng của mỗi sinh viên của Trường.

Đáp số. $(85,8907;\ 104,1093)$

Bài tập 4.18. Người ta điều tra 35 người nghiện thuốc lá được chọn ngẫu nhiên từ số lượng người nghiện hút thuốc lá của một thành phố thấy số điếu thuốc hút trong 5 ngày của họ là:

31	37	48	40	59	97	98	87	80	68	64	45
48	62	74	76	79	85	83	81	93	82	85	79
34	57	95	49	59	63	48	79	50	55	63	

Hãy tìm khoảng ước lượng cho số điếu thuốc lá được hút trung bình trong 5 ngày của những người nghiện thuốc lá của thành phố đó với độ tin cậy 99%.

Đáp số. $(62,5178;\ 70,7965)$

Bài tập 4.19. Để nghiên cứu về thời gian xem ti vi của một thanh niên từ 18 đến 35 tuổi trong vòng một tuần, người ta tiến hành khảo sát trên 40 người và cho ta bảng số liệu sau:

39	02	43	35	15	54	23	21	25	07	24	33	17	
23	24	43	11	15	17	15	19	06	43	35	25	37	
15	14	08	11	29	12	13	25	15	28	24	06	16	7

Hãy tìm khoảng ước lượng cho thời gian xem ti vi trung bình của thanh niên trong độ tuổi trên trong vòng một tuần với độ tin cậy 99%.

Đáp số. $(16,968;\ 27,232)$

Bài tập 4.20. Để điều tra tiền điện phải trả trong một tháng của một hộ gia đình khu vực nông thôn A, người ta kiểm tra ngẫu nhiên 200 hộ gia đình ở phường này và được kết quả sau (đơn vị tính là nghìn đồng):

Số tiền	[80; 180)	[180; 280)	[280; 380)	[380; 480)	[480; 580)	[580; 680)	[680; 780]
Số hộ gia đình	14	25	43	46	39	23	10

Ước lượng khoảng cho số tiền điện trung bình một hộ gia đình phải trả ở khu vực nông thôn A với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $(400,611;\ 439,389)$

Bài tập 4.21. Để ước lượng số lượng xăng hao phí trên một tuyến đường của một hãng xe khách, người ta tiến hành chạy thử nghiệm 55 lần liên tiếp trên tuyến đường này và có được số liệu:

Lượng xăng hao phí	[10,5; 11)	[11; 11,5)	[11,5; 12)	[12; 12,5)	[12,5; 13)	[13; 13,5)
Tần số	5	12	15	13	6	4

Hãy ước lượng lượng xăng hao phí trung bình cho một xe với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $(11,7532; 12,0352)$

Bài tập 4.22. Để xác định giá trung bình đối với một loại hàng hóa trên thị trường, người ta điều tra ngẫu nhiên tại 100 cửa hàng thu được số liệu sau:

Giá (nghìn đồng)	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
Số cửa hàng	5	8	13	14	30	11	8	6	4	1

Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng giá trung bình của loại hàng đó tại thời điểm đang xét. Biết rằng giá hàng hóa là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Đáp số. $(89,8513;\ 91,4287)$

Bài tập 4.23. Điểm thi giữa kỳ môn Xác suất thống kê là biến ngẫu nhiên X. Khảo sát kết quả thi của 100 sinh viên thi môn học này ta thu được bảng thực nghiệm sau:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số sinh viên	1	2	5	8	14	25	20	15	6	3	1

(a) Từ số liệu thực nghiệm, hãy xây dựng khoảng tin cậy đối xứng cho điểm thi trung bình của một sinh viên với độ tin cậy 95%.

(b) Nếu giữ nguyên độ tin cậy 95% và muốn sai số ước lượng khoảng (là $1/2$ độ dài khoảng tin cậy đối xứng) không vượt quá 0,23 thì cần lấy mẫu có kích thước tối thiểu là bao nhiêu?

Bài tập 4.24. Để điều tra doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta khảo sát 200 gia đình kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng của năm 2022, tính được doanh thu trung bình 45,2 triệu đồng và độ lệch chuẩn mẫu 9,12 triệu đồng.

(a) Với độ tin cậy 99%, hãy ước lượng doanh thu trung bình của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B.

(b) Nếu yêu cầu sai số của ước lượng trong ý (a) là 1,5 thì độ tin cậy đạt được là bao nhiêu?

Phân phối mẫu và ước lượng cho tỷ lệ hay xác suất

Bài tập 4.25. Xác suất để một sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội đạt điểm B môn Xác suất thống kê là $p \in (0;1)$. Một mẫu kích thước n lớn sinh viên được lựa chọn ngẫu nhiên và ký hiệu X là số sinh viên đã đạt điểm B môn Xác suất thống kê trong mẫu.

(a) Giải thích tại sao có thể sử dụng $\frac{X}{n}$ để ước lượng cho p?

(b) Trình bày cách tính xấp xỉ xác suất sự sai khác giữa $\frac{X}{n}$ và p nhỏ hơn $0,01$? Áp dụng cho $n = 500$ và $p = 0,2$.

Bài tập 4.26. Để ước lượng cho tỷ lệ những sản phẩm đạt chuẩn quy định của một nhà máy, người ta tiến hành cân ngẫu nhiên trọng lượng của 135 sản phẩm và thấy có 36 sản phẩm nặng từ 7,5 kg trở lên. Hãy ước lượng khoảng cho tỷ lệ các sản phẩm có trọng lượng trên 7,5 kg với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $(0,212;\ 0,322)$

Bài tập 4.27. Để ước lượng số cá có trong hồ người ta bắt từ hồ lên 100 con đánh dấu rồi thả lại vào hồ. Sau đó, người ta bắt lên 300 con thì thấy có 32 con bị đánh dấu. Hãy ước lượng khoảng cho số cá có trong hồ với độ tin cậy 99%.

Đáp số. $(694;\ 1429)$

Bài tập 4.28. Để điều tra thị phần xe máy, người ta chọn ngẫu nhiên ra 450 người mua xe máy trong một tháng ở các địa bàn ở một thành phố thì có 275 người mua xe Honda. Tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ người mua xe Honda với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $(0,573; 0,649)$

Bài tập 4.29. Kiểm tra ngẫu nhiên 400 sản phẩm do một hệ thống máy mới sản xuất thì thấy có 387 chính phẩm. Hãy ước lượng tỷ lệ chính phẩm tối thiểu của hệ thống máy mới với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $\geq 0,955$

Bài tập 4.30. Thử nghiệm 560 bóng đèn điện tử do một nhà máy sản xuất thì thấy 10 bóng có lỗi kỹ thuật. Hãy tìm ước lượng cho tỷ lệ bóng có lỗi kỹ thuật tối đa với độ tin cậy 95%.

Đáp số. $\leq 0,0217$

Bài tập 4.31. Mở thử 200 hộp của kho đồ hộp thấy có 10 hộp bị biến chất. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng tỷ lệ hộp bị biến chất tối đa của kho.

Đáp số. $\leq 0,0628$

Bài tập 4.32. Chọn ngẫu nhiên ra 1000 trường hợp điều trị bệnh ung thư phổi, các bác sĩ thống kê thấy có 823 bệnh nhân bị chết trong vòng 10 năm.

(a) Ước lượng khoảng cho tỷ lệ tử vong của bệnh nhân điều trị bệnh ung thư phổi với độ tin cậy 99%.

(b) Cần phải lấy số lượng mẫu là bao nhiêu để với độ tin cậy 95% các sai số khi dự đoán tỷ lệ bệnh nhân điều trị ung thư phổi tử vong 10 năm là ít hơn 0,03?

Đáp số. (a) $(0,7929;\ 0,8511)$ (b) ≥ 622

Bài tập 4.33. Cần phải lập một mẫu ngẫu nhiên với kích thước là bao nhiêu để tỷ lệ phế phẩm của mẫu là 0,2 và độ dài khoảng tin cậy đối xứng là 0,05 và độ tin cậy của ước lượng là 95%.

Bài tập 4.34. Để kiểm tra trọng lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất, người ta cân ngẫu nhiên 100 sản phẩm loại này của nhà máy và thu được dữ liệu sau:

Trọng lượng (kg)	(5,0; 5,5]	(5,5; 6,0]	(6,0; 6,5]	(6,5; 7,0]	(7,0; 7,5]	(7,5; 8,0]	(8,0; 8,5]	(8,5; 9,
Số sản phẩm	5	10	15	20	29	10	6	5

Giả sử nhà máy sản xuất được 1000 sản phẩm, hãy ước lượng số sản phẩm có trọng lượng lớn hơn $6,0$ kg với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.35. Nghiên cứu về năng suất của loại hoa màu A, người ta kiểm tra năng suất của 64 điểm trồng loại hoa màu này thu được bảng số liệu

Năng suất (tạ/ha)	(40; 45]	(45; 50]	(50; 55]	(55; 60]	(60; 65]	(65; 70]
Số điểm	2	5	15	30	8	4

(a) Hãy ước lượng năng suất trung bình của loại hoa màu A với độ tin cậy 95%; Nếu muốn sai số của ước lượng giảm đi 2 lần thì cần kiểm tra bao nhiêu điểm để đảm bảo yêu cầu nêu trên?

(b) Biết rằng trên toàn miền Bắc có 10.000 điểm trồng loại hoa màu A. Hãy cho biết có khoảng bao nhiêu điểm đạt năng suất trên 60 tạ/ha? Hãy kết luận với độ tin cậy 99%.

(c) Hãy cho biết tỷ lệ những điểm có năng suất trên 60 tạ/ha của loại hoa màu A tối thiểu là bao nhiêu? Hãy kết luận với độ tin cậy 95%?

Chương 5

Kiểm định giả thuyết thống kê

Bài tập Chương 5

Kiểm định giả thuyết về tham số của một mẫu

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Bài tập 5.1. Với các thử nghiệm về nhiệt độ nước ở một bình nước sử dụng năng lượng mặt người ta chỉ ra rằng độ lệch tiêu chuẩn là $2^o F$. Người ta chọn ra ngẫu nhiên 9 ngày để tiến hành đo đạc thì thấy trung bình mẫu là $98^o F$. Giả sử nhiệt độ nước tuân theo luật phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận rằng nhiệt độ trung bình sử dụng năng lượng mặt trời là bằng $99^o F$ hay không?

Đáp số. $z_0 = -1,5$, chưa có cơ sở đề bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.2. Người ta tiến hành thử nghiệm một cải tiến kỹ thuật trong bộ chế hòa khí của một loại xe ô tô với hy vọng sẽ tiết kiệm được xăng hơn. Họ thử nghiệm 16 xe ô tô với bộ hòa khí có cải tiến kỹ thuật và thu được kết quả sau về số km chạy được cho một lít xăng:

$$\begin{array}{cccccccc} 20,5 & 20,9 & 20,3 & 20,2 & 20,6 & 20,6 & 20,5 & 21,0 \\ 21,1 & 21,2 & 20,8 & 20,7 & 20,6 & 20,9 & 20,3 & 20,2 \end{array}$$

Giả thiết số km chạy được cho một lít xăng tuân là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Nếu trước khi cải tiến một lít xăng trung bình chạy được 20,1 km thì có thể kết luận rằng cải tiến trên đã mang lại hiệu quả đáng kể hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.3. Một nhà máy đưa ra định mức thời gian hoàn thành sản phẩm là 24 phút. Khi khảo sát thời gian hoàn thành sản phẩm của 22 công nhân, ta tính được thời gian trung bình hoàn thành sản phẩm là 25,2 phút, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 2,6 phút. Với mức ý nghĩa 5% người quản lý nhà máy có cần phải đổi định mức không? Giả sử rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Đáp số. $t_0 = 2,165$, bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.4. Một dây dây chuyền sản xuất dầu gội đầu, mỗi thùng dầu gội có trọng lượng trung bình là 20 kg. Chọn ngẫu nhiên 10 thùng để cân và thu được trọng lượng như sau (đơn vị tính là kg):

$$21,4 \quad 19,7 \quad 19,9 \quad 20,6 \quad 20,8 \quad 20,1 \quad 19,7 \quad 20,3 \quad 20,9 \quad 20,8$$

Giả sử rằng trọng lượng của mỗi thùng dầu gội là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 5% với giả thuyết cho rằng quá trình sản xuất hoạt động một cách chính xác.

Bài tập 5.5. Các bao gạo được đóng gói bằng máy tự động có trọng lượng đóng bao theo quy định là 25 kg. Người ta chọn ngẫu ngẫu nhiên 25 bao được đóng bằng máy tự động trên ra kiểm tra, trọng lượng của chúng được cho trong bảng số liệu sau (đơn vị tính là kg):

Trọng lượng	(24,6; 24,8]	(24,8; 25,0]	(25,0; 25,2]	(25,2; 25,4]	(25,4; 25,6]
Tần suất	3	7	8	5	2

Giả sử trọng lượng của các bao gạo là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Hỏi trọng lượng trung bình của các bao gạo được đóng gói tự động giống như yêu cầu hay phải dừng máy để điều chỉnh với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.6. Định mức thời gian hoàn thành một sản phẩm là 14 phút. Có cần thay đổi định mức không, nếu theo dõi thời gian hoàn thành một sản phẩm ở 25 công nhân ta thu được bảng số liệu sau:

Thời gian sản xuất 1 sản phẩm (phút)	10-12	12-14	14-16	16-18	20-22
Số công nhân tương ứng	3	6	10	4	2

Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%, biết rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Bài tập 5.7. Trọng lượng đóng gói bánh loại 250 gam một gói trên một máy tự động là một biến ngẫu nhiên. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 gói bánh loại này thu được kết quả sau:

Trọng lượng (gam)	245	247	248	250	252	253	2544
Số gói	8	12	20	32	16	8	4

Có thể coi trọng lượng trung bình của các gói bánh là bằng 250 gam theo quy định hay không với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.8. Kiểm tra lượng điện áp đầu vào của một loại máy tính bảng, người ta tiến hành thử nghiệm 100 lần đo và thu được điện áp trung bình 5,04 V với độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 0,064 V. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định lượng điện áp trung bình đầu vào của loại máy tính bảng có đúng bằng 5 V hay không?

Đáp số. $z_0 = 6,25$, bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.9. Gọi X là thời gian sản xuất một sản phẩm (phút). Định mức cũ để sản xuất một sản phẩm là 20 phút. Nay do cải tiến kỹ thuật, người ta sản xuất thử 100 sản phẩm và thu được số liệu:

Thời gian sản xuất sản phẩm (phút)	16-17	17-18	18-19	10-20	20-21	21-22
Số sản phẩm tương ứng	6	10	24	30	18	12

Với mức ý nghĩa 5% có thể nói rằng việc cải tiến kỹ thuật giảm bớt thời gian sản xuất một sản phẩm hay không? Biết rằng thời gian sản xuất một sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Đáp số. $z_0 = -5,18$, bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.10. Hàm lượng đường trung bình của một loại trái cây lúc đầu là 5%. Người ta chăm bón bằng một loại NPK mới và sau một thời gian kiểm tra một số trái cây được kết quả sau:

Hàm lượng (%)	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	37-41
Số trái	51	47	39	36	32	8	7	3	2

Hãy cho kết luận về loại NPK trên trên với mức ý nghĩa 5%. Giả thiết hàm lượng đường của loại trái là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Bài tập 5.11. Một nhà phân phối sữa trong một thành phố khẳng định rằng: bằng cách quảng cáo và cách tiếp cận khách hàng mới ở các cửa hàng, mỗi tuần trong các cửa hàng bán trung bình tăng thêm 20 hộp sữa. Người ta tiến hành chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 40 cửa hàng để xác định lời khẳng định trên thì thấy trung bình mỗi cửa hàng chỉ bán thêm được 16,4 hộp sữa và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu là 7,2. Kiểm định giả thuyết cho rằng mỗi tuần bán thêm được 20 hộp sữa ở mỗi cửa hàng với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.12. Doanh số bán hàng của một siêu thị là biến ngẫu nhiên X (tỷ VNĐ/ngày). Điều tra về doanh số bán hàng của siêu thị này trong 50 ngày thu được bảng số liệu sau:

Doanh số	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18]
Số ngày	5	12	21	8	4

Kiểm tra xem doanh số bán hàng trung bình một ngày của siêu thị có hơn 12 tỷ VNĐ hay không với mức ý nghĩa 5%.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Bài tập 5.13. Người ta quan tâm tới việc lây lan dịch sốt xuất huyết ở một phường. Theo số liệu năm ngoái tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của vùng này là 8%. Người ta tiến hành kiểm tra sức khỏe ngẫu nhiên 200 người ở phường này thì thấy có 17 người mang vi trùng sốt xuất huyết. Tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của phường có tăng lên hay không với mức ý nghĩa 5%.

Đáp số. $z_0 = 0,2606$, chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.14. Một hãng xà phòng A tuyên bố rằng 64% số các bà nội trợ thích sử dụng bột giặt của hãng. Người ta chọn ra một mẫu gồm 100 bà nội trợ và hỏi thì có 58 bà tỏ ra là thích sử dụng bột giặt của hãng A. Với mức ý nghĩa 1%, số liệu trên có chứng tỏ là tuyên bố của hãng xà phòng A là đúng hay không?

Đáp số. $z_0 = -1,25$, chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0

Bài tập 5.15. Tỷ lệ phế phẩm do một máy tự động sản xuất là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 300 sản phẩm thấy có 24 phế phẩm. Từ đó có ý kiến cho rằng tỷ lệ phế phẩm do máy đó sản xuất có chiều hướng tăng lên. Hãy kết luận ý kiến nêu trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.16. Tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh T khi điều trị bằng thuốc A là 85%. Thí nghiệm dùng loại thuốc B để chữa bệnh thì trong số 900 người mắc bệnh T có 810 người được chữa khỏi. Như vậy có thể kết luận thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.17. Một loại sản phẩm của công ty A sản xuất vỏ xe ô tô đã chiếm được 42% thị trường. Hiện tại, trước sự cạnh tranh của nhiều đối thủ và những điều kiện thay đổi của môi trường kinh doanh, người ta chọn ngẫu nhiên 560 ô tô trên đường, kết quả cho thấy có 222 xe sử dụng sản phẩm đó của công ty. Hãy cho biết thị phần công ty có bị giảm sút không với mức ý nghĩa 1%?

Kiểm định giả thuyết về tham số của hai tổng thể

So sánh hai kỳ vọng

Bài tập 5.18. Hai công thức khác nhau về nhiên liệu động cơ oxy hóa được tiến hành thử nghiệm để đưa ra chỉ số octan. Phương sai của công thức I là $\sigma_1^2 = (1,5)^2$ và của công thức II là $\sigma_2^2 = (1,3)^2$. Người ta chọn ngẫu nhiên $n_1 = 15$ mẫu của công thức I và $n_2 = 18$ mẫu của công thức II thì thấy $\overline{x}_1 = 89,7$ và $\overline{x}_2 = 91,5$. Giả sử rằng chỉ số octan của công thức I và II là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng công thức I có chỉ số octan ít hơn so với công thức II hay không?

Bài tập 5.19. Chọn ngẫu nhiên 100 thiết bị điện tử của nhà máy I thấy tuổi thọ trung bình là 1658 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 123 giờ. Chọn ngẫu nhiên 110 thiết bị điện tử của nhà máy II thấy tuổi thọ trung bình là 1717 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 107 giờ. Với mức ý nghĩa 1%, hãy cho biết có phải thực sự tuổi thọ trung bình thiết bị điện tử của nhà máy II là lớn hơn nhà máy I hay không?

Bài tập 5.20. Hai máy tự động dùng để cắt những thanh thép do cùng một kỹ thuật viên phụ trách và căn chỉnh. Từ mỗi máy lấy ra 35 thanh thép để kiểm tra thu được kết quả sau:

- Máy 1: Trung bình mẫu 11,7 m, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu 0,12 m.
- Máy 2: Trung bình mẫu 11,6 m, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu 0,14 m.

Giả sử chiều dài thanh thép do các máy sản xuất là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và được giả thiết là có phương sai như nhau. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng chiều dài của các thanh thép do hai máy sản xuất là khác nhau hay không?

Bài tập 5.21. Hai công ty I và II cùng sản xuất ra một loại sản phẩm và cạnh tranh nhau trên thị trường. Người ta chọn ngẫu nhiên ra $n_1 = 11$ ngày và $n_2 = 18$ ngày để khảo sát số lượng sản phẩm được bán ra trong ngày của hai công ty I và II tương ứng và có được kết quả:

- Công ty I: trung bình mẫu 237, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 23;
- Công ty II: trung bình mẫu 247, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 27.

Giả sử số lượng hàng bán ra trong một ngày của hai công ty là tuân theo luật phân phối chuẩn, có cùng phương sai. Phải chăng lượng hàng bán ra của công ty II là nhiều hơn so với công ty I với mức ý nghĩa 1%?

Bài tập 5.22. Người ta nghiên cứu trọng lượng của loại trái cây A ở 2 vùng với hai chế độ canh tác khác nhau. Kiểm tra ngẫu nhiên trong lượng 25 trái ở vùng I, 22 trái ở vùng II ở thời điểm thu hoạch thu được kết quả sau (đơn vị tính là kg):

- Vùng I: $2,0$; $2,0$; $1,8$; $1,9$; $1,7$; $1,5$; $1,9$; $2,0$; $1,8$; $1,6$; $1,8$; $1,7$; $1,6$; $1,7$; $2,1$; $1,5$; $1,7$; $2,0$; $1,8$; $1,7$; $1,5$; $1,6$; $1,6$; $1,7$; $1,7$.
- Vùng II: $1,5$; $1,4$; $1,5$; $1,6$; $1,1$; $1,7$; $1,4$; $1,7$; $1,4$; $1,4$; $1,7$; $1,1$; $1,5$; $1,2$; $2,0$; $1,6$; $1,2$; $1,3$; $1,5$; $1,7$; $1,9$; $1,0$.

Hỏi có sự khác nhau đáng kể giữa các trọng lượng trung bình của loại trái cây A của hai vùng trên không? Kết luận với mức ý nghĩa 5%. Giả thiết rằng trọng lượng trái cây A ở hai vùng là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai bằng nhau.

Bài tập 5.23. Thời gian tự học trong một tuần của 12 sinh viên lớp A và 15 sinh viên lớp B được thống kê lại như sau (đơn vị tính là giờ):

- Lớp A: 18; 15; 24; 23; 30; 12; 15; 24; 35; 30; 18 ;20
- Lớp B: 19; 18; 24; 25; 30; 36; 28; 25; 30; 12; 14; 28; 22; 28; 20.

Với mức ý nghĩa 5%, xét xem thời gian tự học của sinh viên hai lớp thực chất là như nhau không? Giả thiết rằng thời gian tự học trong tuần của sinh viên hai lớp là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai bằng nhau.

Bài tập 5.24. Hai máy tự động A và B cùng sản xuất một loại sản phẩm. Người ta khảo sát ngẫu nhiên trọng lượng 8 sản phẩm ở mỗi máy và thu được kết quả:

Máy A: trung bình mẫu $\overline{x}_1 = 92,733$(kg), độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu $s_1 = 2,98$(kg);

Máy B: trung bình mẫu $\overline{x}_2 = 92,255$(kg), độ lệch chuẩn hiệu chỉnh mẫu $s_2 = 2,39$(kg).

Giả sử trọng lượng sản phẩm do hai máy sản xuất là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai bằng nhau. Hãy xác định xem có sự khác nhau giữa trọng lượng trung bình của sản phẩm do hai máy sản xuất hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.25. Người ta muốn so sánh 2 chế độ bón phân cho một loại cây trồng, họ đã chia 10 mảnh ruộng sao cho mỗi mảnh thành 2 nửa có điều kiện trồng trọt tương đối như nhau. Nửa thứ nhất áp dụng phương pháp bón phân I, nửa thứ hai theo phương pháp bón phân II (các chế độ chăm sóc khác nhau). Sau khi thu hoạch ta được số liệu về năng suất như sau (đơn vị tính là kg/sào)

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Năng suất nửa thứ I	24	14	18	20	21	19	16	18	20	23
Năng suất nửa thứ II	16	20	24	23	25	15	22	24	25	29

Giả sử năng suất của hai chế độ phân bón là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Đánh giá xem hai chế độ bón phân có giống nhau không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.26. Quan sát 12 lọ chất hóa học do hai cân khác nhau cân, ta có số liệu (đơn vị tính là gam):

Cân I	0,5	1	2,5	3	4	5	0,7	0,9	1,5	2,3	3,4	4,5
Cân II	1	1,5	2	2	2,5	3	1,8	1,7	2,2	2,4	4,5	3,1

Giả sử cân nặng của lọ hóa chất là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Kiểm định giả thiết hai cân có cân khác nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

So sánh hai tỷ lệ

Bài tập 5.27. Một hãng nước giải khát A muốn đưa vào sản xuất một công thức mới để cải tiến sản phẩm của mình. Người ta tiến hành một cuộc khảo sát với công thức cũ cho 600 người uống thử thì thấy có 132 người thích nó và công thức mới cho 400 người uống thử thì thấy có 91 người thích nó. Hãy kiểm định xem liệu với công thức mới có làm tăng tỉ lệ những người ưa thích nước uống của hãng A hay không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.28. Từ kho đồ hộp I, lấy ngẫu nhiên 1000 hộp để kiểm tra thấy có 20 hộp bị hỏng. Từ kho II lấy ngẫu nhiên 900 hộp thấy 30 hộp bị hỏng. Hỏi chất lượng bảo quản của 2 kho có thực sự giống nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.29. Bệnh A được điều trị theo hai phương pháp. Sau một thời gian thấy kết quả như sau:

- Trong 102 bệnh nhân điều trị phương pháp I có 82 bệnh nhân khỏi bệnh.
- Trong 98 bệnh nhân điều trị phương pháp II có 69 bệnh nhân khỏi bệnh.

Hỏi có phải phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II hai hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.30. Để đánh giá hiệu quả của hai dây chuyền sản xuất người ta tiến hành kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền I sản xuất có 10 sản phẩm hỏng, kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền II sản xuất thấy có 8 sản phẩm hỏng. Với mức ý nghĩa 5%, có kết luận gì về tỷ lệ sản phẩm hỏng từ hai dây chuyền trên.

Bài tập 5.31. Bệnh T được điều trị bằng hai loại thuốc A và B. Sau một thời gian thấy kết quả như sau: trong 900 bệnh nhân mắc bệnh T khi điều trị bằng thuốc A thì có 810 người khỏi bệnh; nếu dùng loại thuốc B để chữa bệnh thì trong số 1000 người mắc bệnh T có 850 người được chữa khỏi. Như vậy có thể kết luận thuốc A hiệu quả hơn thuốc B hay không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$.

Bài tập 5.32. Một công ty có hai phân xưởng I và II sản xuất cùng loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên 1000 sản phẩm do phân xưởng I sản xuất thấy 35 sản phẩm loại **B**; kiểm tra 900 sản phẩm do phân xưởng II sản xuất thấy 20 sản phẩm loại **B**.

(a) Có thể xem tỷ lệ sản phẩm loại **B** do phân xưởng I sản xuất cao hơn tỷ lệ sản phẩm loại **B** do phân xưởng II sản xuất hay không với mức ý nghĩa 1%?

(b) Giả sử phân xưởng **I** sản xuất 10000 sản phẩm. Hãy ước lượng số sản phẩm loại B do phân xưởng này sản xuất với độ tin cậy 99%?

Một số bài tập tổng hợp

Bài tập 5.33. Để kiểm tra trọng lượng một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất trong quý III năm 2022, người ta cân thử 100 sản phẩm loại này thu được bảng số liệu sau đây

Trọng lượng (gam)	(5; 6]	(6; 7]	(7; 8]	(8; 9]	(9; 10]	(10; 11]	(11; 12]	(12; 13]
Số sản phẩm	5	10	15	20	29	10	6	5

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng trọng lượng trung bình của loại sản phẩm nói trên do nhà máy sản xuất tại thời điểm kiểm tra.

(b) Nếu yêu cầu sai số của ước lượng ở ý (a) là $0,24$ thì cần phải cân thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

Bài tập 5.34. Nghiên cứu về năng suất của một loại hoa màu, người ta kiểm tra năng suất của 64 điểm trồng loại hoa màu này thu được bảng số liệu

Năng suất (tạ/ha)	(40; 45]	(45; 50]	(50; 55]	(55; 60]	(60; 65]	(65; 70]
Số điểm	2	5	15	30	8	4

(a) Giả sử theo tính toán lý thuyết, năng suất trung bình của loại hoa màu nói trên là 55 tạ/ha. Theo anh chị năng suất trung bình loại hoa màu đó có xu hướng tăng không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%?

(b) Một tài liệu thống kê cho biết tỷ lệ những điểm có năng suất trên 60 tạ/ha của loại hoa màu này là 15%. Hãy cho kết luận về tài liệu nói trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.35. Hai máy M_1 và M_2 của một công ty sản xuất cùng loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên 1500 sản phẩm do máy M_1 sản xuất thấy 60 sản phẩm lỗi; kiểm tra 1300 sản phẩm do máy M_2 sản xuất thấy 26 sản phẩm lỗi.

(a) Tỷ lệ sản phẩm lỗi do máy M_1 và M_2 sản xuất có như nhau không ở mức ý nghĩa 1%?

(b) Tìm một ước lượng khoảng cho tỷ lệ sản phẩm lỗi do máy M_1 sản xuất với độ tin cậy 95%.

(c) Cần phải kiểm tra bao nhiêu sản phẩm để sai số khi dự đoán tỷ lệ sản phẩm lỗi do máy M_1 sản xuất nhỏ hơn 0,01 với độ tin cậy 99%?

Bài tập 5.36. Điều tra thu nhập hàng tháng của 100 gia đình ở một khu đô thị, thu được bảng số liệu sau:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	14,0	14,5	15,0	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5
Số gia đình	5	10	15	20	29	10	6	5

Biết rằng thu nhập của các gia đình là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

(a) Hãy ước lượng thu nhập bình quân của các gia đình ở khu đô thị nói trên với độ tin cậy 95%.

(b) Nếu trước đó 2 năm thu nhập bình quân của các gia đình ở khu đô thị này là 15,5 triệu đồng/tháng thì với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng thu nhập bình quân của các gia đình ở khu vực này đã được nâng lên hay không?

(c) Giả sử khu đô thị này có 10000 gia đình. Hãy ước lượng số gia đình có thu nhập $\geq 15,5$ triệu đồng/tháng với độ tin cậy 95%.

Bài tập 5.37. Giá trị đo X của một đại lượng vật lý được cho trong bảng sau

Giá trị đo (x_i)	21,8	22,0	22,2	22,4	22,6	22,8
Số lần đo (n_i)	4	18	33	35	9	1

(a) Hãy ước lượng giá trị đo trung bình với độ tin cậy 99%.

(b) Tính xác suất để giá trị đo X lớn hơn 22,5.

Bài tập 5.38. Hai dây chuyền của một công ty sản xuất cùng loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên 1000 sản phẩm do dây chuyền I sản xuất thấy 30 sản phẩm hỏng; kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền II sản xuất thấy 20 sản phẩm hỏng.

(a) Có phải dây chuyền II hiệu quả hơn dây chuyền I hay không với mức ý nghĩa 5%?

(b) Ước lượng khoảng cho tỷ lệ sản phẩm hỏng do dây chuyền II sản xuất với độ tin cậy 99%.

(c) Cần phải kiểm tra bao nhiêu sản phẩm để sai số khi dự đoán tỷ lệ sản phẩm hỏng do dây chuyền II sản xuất nhỏ hơn 0,008 với độ tin cậy 95%?

Bài tập 5.39. Để đánh giá doanh thu của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta điều tra 100 hộ kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng năm 2022 thu được bảng số liệu

Doanh thu (triệu đồng)	20	24	28	32	36	40	44	48	52
Số hộ gia đình	5	10	17	25	20	10	8	3	2

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng nói trên. Để độ sai số của ước lượng nhỏ hơn 2 triệu đồng thì cần điều tra ít nhất bao nhiêu hộ?

(b) Theo số liệu điều tra năm 2021 thì tỷ lệ những hộ gia đình đạt doanh thu dưới 28 triệu đồng là 20%. Theo anh chị tỷ lệ này năm 2022 có giảm đi hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

(c) Hãy ước lượng tỷ lệ những hộ có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%? Nếu yêu cầu độ tin cậy 95%, độ chính xác của ước lượng là 0,02 thì cần điều tra ngẫu nhiên bao nhiêu hộ gia đình?

(d) Một tài liệu báo cáo cho biết doanh thu trung bình của các hộ kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B là 30 triệu đồng trên tháng. Tài liệu báo cáo này có làm giảm doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh mặt hàng A để giảm thuế hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 5%.

(e) Theo điều tra cách đây 2 năm thì doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng này là 30 triệu đồng/tháng, hãy đánh giá xem doanh thu trung bình sau 2 năm có thay đổi không với mức ý nghĩa 5%.

(f) Điều tra doanh thu của 200 hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A ở địa phương C năm 2022 người ta tính được doanh thu trung bình/tháng là 37 triệu đồng và độ lệch chuẩn mẫu là 1,1 triệu đồng. Doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương C và B có như nhau hay không? Hãy kết luận với độ tin cậy 95%.

Bài tập 5.40. Để đánh giá doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta điều tra 100 gia đình kinh doanh loại mặt hàng này trong tháng 6/2022 thu được bảng số liệu:

Doanh thu (triệu đồng)	20	24	28	32	36	40	44	48	52
Số gia đình	5	10	17	25	20	10	8	3	2

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A. Để độ chính xác của ước lượng là $0,02$ triệu đồng thì cần điều tra ít nhất bao nhiêu gia đình kinh doanh loại mặt hàng này?

(b) Theo số liệu điều tra 6/2021 thì tỷ lệ những gia đình kinh doanh mặt hàng A đạt doanh thu dưới 25 triệu đồng là 20%. Theo anh chị tỷ lệ này năm 2022 có giảm đi hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

(c) Hãy ước lượng tỷ lệ những gia đình kinh doanh mặt hàng A tại địa phương B có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%? Nếu yêu cầu độ tin cậy 95%, độ chính xác của ước lượng là 0,02 thì cần điều tra ngẫu nhiên bao nhiêu gia đình? Giả sử địa phương B có 3000 gia đình kinh doanh loại mặt hàng A, hỏi có bao nhiêu gia đình có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%.

(d) Điều tra doanh thu của 300 gia đình kinh doanh mặt hàng A tại địa phương C trong tháng 6/2022 thấy 35 gia đình có doanh thu trên 40 triệu đồng và tính được doanh thu trung bình là 38 triệu đồng, độ lệch tiêu chuẩn mẫu là 7,895 triệu đồng.

(d1) Hỏi doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương B và C có như nhau hay không với mức ý nghĩa 1%?

(d2) Có thể xem tỷ lệ những gia đình có doanh thu trên 40 triệu ở địa phương B cao hơn địa phương C hay không với mức ý nghĩa 5%.