Ôn tập cuối kì Caculus II

Ngu Ba Ly – IoT – K65

Lớp bài toán "không khó lắm"

Phần 1 : Tích phân Euler :

Dạng 1 : Hàm Gamma

Dạng tổng quát của hàm Gamma :

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}dx$$

Tính chất của hàm Gamma :

• Hàm số Gamma xác định và liên tục với mọi $p>0 \to$ Hàm số Gamma hội tụ đều với mọi $p>0 \to$ Hàm số Gamma hội tụ với mọi $p>0$.

Xét trường hợp $p>0$ ta có được các kết quả sau :

$\bullet\Gamma(1)=1$

$\bullet\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)!$

$\bullet\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

$\bullet\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}.\sqrt{\pi}\,(p\in N)$

$\bullet\Gamma^{(k)}(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}.(\ln x)^k.e^{-x}dx$

$\bullet\Gamma(p).\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}(p<1)$

$$\Rightarrow\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)=\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(1-\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{\pi}{\cos(p\pi)}$$

$$\bullet \Gamma(p).\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2p}.\sqrt{\pi}.\Gamma(2p)$$

Dạng 2 : Hàm Beta :

Dạng đa thức của hàm Beta :

$$B(m;n)=\int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx$$

Dạng phân thức của hàm Beta : $B(m;n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}}dx$

Dạng lượng giác của hàm Beta : $B(m;n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x.\cos^{2n-1}xdx$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x.\cos^n xdx=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2}\right)$$

1 số tính chất và kết quả :

- Tính đối xứng :

$$B(m;n)=B(n;m)\Rightarrow\begin{cases} B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx=\int_0^1 x^{n-1}.(1-x)^{m-1}dx \\ B(m,n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(x+1)^{m+n}}dx \\ B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x.\cos^{2n-1}xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x.\cos^{2m-1}xdx \end{cases}$$

- Công thức hạ bậc :

$$-\begin{cases} B(m+1;n)=\dfrac{m}{m+n}.B(m;n) \\ B(m;n+1)=\dfrac{n}{m+n}.B(m;n) \end{cases} \Rightarrow B(m;n)=B(m+1;n)+B(m;n+1)$$

$$-\begin{cases} B(m;n)=\dfrac{m-1}{m+n-1}B(m-1;n) \\ B(m;n)=\dfrac{n-1}{m+n-1}B(m;n-1) \end{cases}$$

$$\bullet\ B(1;1)=\int_0^1 x^0.(1-x)^0\,dx=1$$

Khi đó dùng công thức hạ bậc liên tiếp ta có được :

$$B(m;n)=\frac{(m-1)!.(n-1)!}{(m+n-1)!}.B(1;1)=\frac{(m-1)!.(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

$$\bullet\ B(m;m+1)=\frac{1}{m.C_{2m}^{m}}$$

$$\bullet\ B(m;-m)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m-m}}dx=\int_0^{+\infty}x^{m-1}dx$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{l} if\ : m>1\rightarrow tich\ phan\ phan\,ki \\ if\ : m<1\rightarrow B(m;-m)=0 \end{array}\right.$$

Liên hệ hàm Beta và hàm Gamma :

$$B(m;n)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\Rightarrow B(m;1-m)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(1-m)}{\Gamma(1)}=\Gamma(m).\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin(m\pi)}$$

$$\Rightarrow B(m;n).B(m+n;1-n)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.\frac{\Gamma(m+n).\Gamma(1-n)}{\Gamma(m+1)}=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)}.\Gamma(n).\Gamma(1-n)=\frac{1}{m}.\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$\Rightarrow B(m;n)=\frac{1}{B(m+n;1-n)}.\frac{1}{m}.\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

Thường để xử lí hàm Beta ta đều đưa về xử lí hàm Gamma

1 số ví dụ :

Ví dụ 1 : Tính : $I=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2019}.e^{-x^2}dx$

Ta liên tưởng tới dạng tổng quát của hàm Gamma : $\Gamma(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}dx$

Vì thế nên ta sẽ chuyển tích phân cần tính về dạng của hàm Gamma :

Đặt : $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$

Khi đó tích phân cần tính trở thành :

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2019}.e^{-x^2}dx=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2018}.e^{-x^2}.xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{1009}.e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(1010)=\frac{1009!}{2}$$

Ví dụ 2 : Tính tích phân : $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^5}{\left(x^4+1\right)^2}dx$

Đây nà hàm Beta dạng phân thức : $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}}dx$

Như vậy mẫu số phải có dạng lũy thừa của đa thức bậc nhất $g(x)=x+1$, vì thế nên ta sử dụng phép đổi biến :

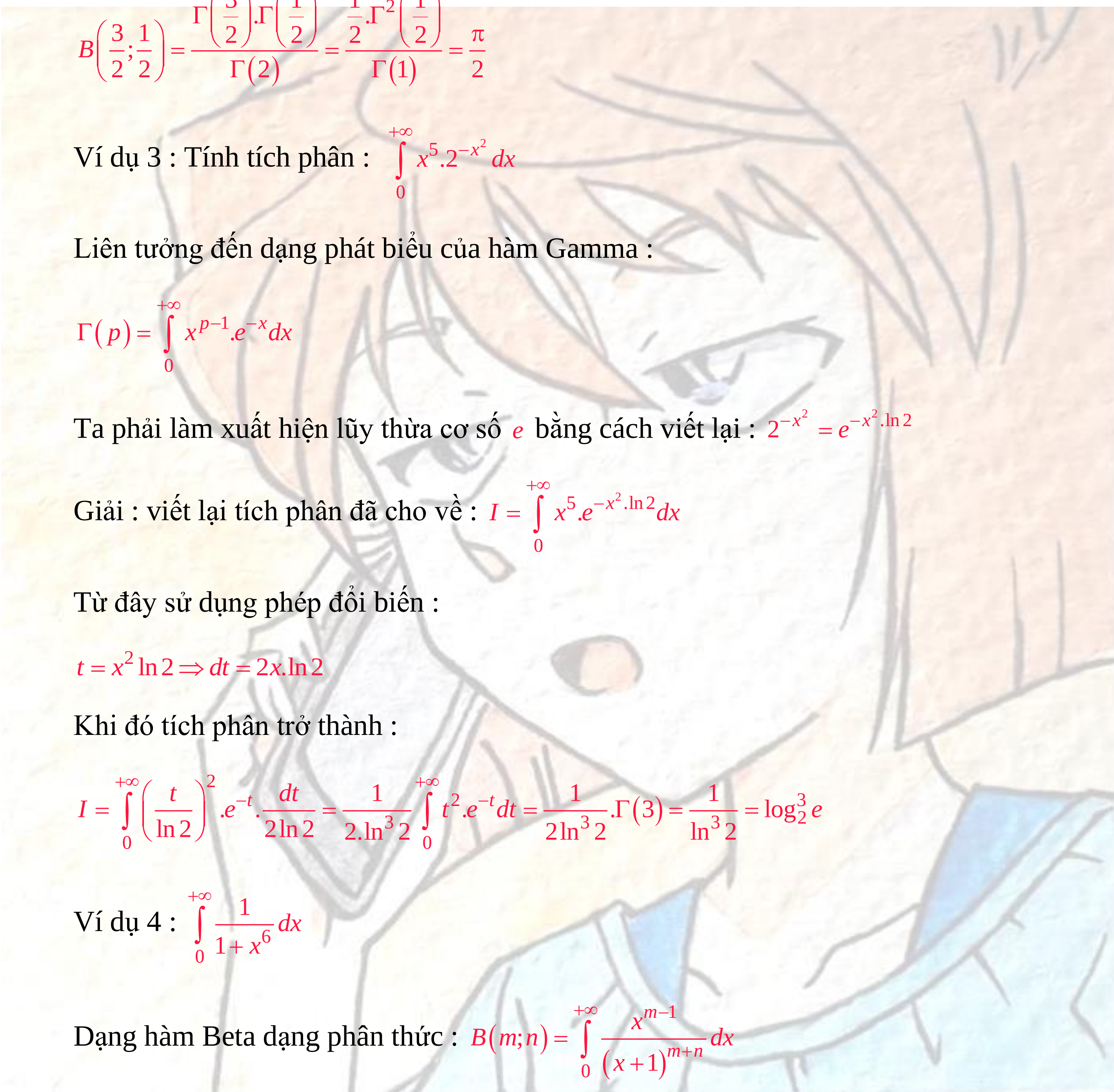
$$t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx$$

Khi đó tích phân trên được viết lại :

$$I=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2.4x^3dx}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}.dt}{(t+1)^2}=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}-1}.dt}{(t+1)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Để tính $B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ ta sẽ chuyển về hàm gamma thông qua đẳng thức :

$$B(m;n)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$



$$B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\frac{1}{2}.\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 3 : Tính tích phân : $\int_0^{+\infty} x^5.2^{-x^2}dx$

Liên tưởng đến dạng phát biểu của hàm Gamma :

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}dx$$

Ta phải làm xuất hiện lũy thừa cơ số e bằng cách viết lại : $2^{-x^2}=e^{-x^2.\ln 2}$

Giải : viết lại tích phân đã cho về : $I=\int_0^{+\infty} x^5.e^{-x^2.\ln 2}dx$

Từ đây sử dụng phép đổi biến :

$$t=x^2\ln 2 \Rightarrow dt=2x.\ln 2$$

Khi đó tích phân trở thành :

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\ln 2}\right)^2.e^{-t}.\frac{dt}{2\ln 2}=\frac{1}{2.\ln^3 2}\int_0^{+\infty} t^2.e^{-t}dt=\frac{1}{2\ln^3 2}.\Gamma(3)=\frac{1}{\ln^3 2}=\log_2^3 e$$

Ví dụ 4 : $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx$

Dạng hàm Beta dạng phân thức : $B(m;n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}}dx$

Ta phải đưa mẫu số về lũy thừa của hàm bậc nhất $(x+1)$:

Đổi biến : $t = x^6 \Rightarrow dt = 6x^5dx = 6.t^{\frac{5}{6}}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{6}.t^{-\frac{5}{6}}dt$

Khi đó tích phân trên trở thành :

$$\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{5}{6}}dt}{1+t} = \frac{1}{6}.\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{6}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}}dt = \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}.B(m;1-m) = \frac{1}{6}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

Ví dụ 5: Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[30]{1-x^{30}}}dx$

Để ý cận tích phân là cận từ $0 \to 1$ nên dạng tích phân ở đây phải là hàm beta dạng đa thức : $B(m;n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx$

Viết lại tích phân đã cho về thành :

$$I = \int_0^1 \left(1-x^{30}\right)^{-\frac{1}{30}}dx$$

Đổi biến : $t = x^{30} \Rightarrow dt = 30x^{29}dx = 30t^{\frac{29}{30}}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{30}.t^{-\frac{29}{30}}.dt$

Khi đó tích phân đã cho trở thành :

$$\frac{1}{30}.\int_0^1 t^{-\frac{29}{30}}.(1-t)^{-\frac{1}{30}}dt = \frac{1}{30}.B\left(\frac{1}{30};\frac{29}{30}\right) = \frac{1}{30}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}$$

Ví dụ 6: Tính tích phân : $\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}dx$

Dạng hàm Beta dạng đa thức : $B(m;n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}dx$

Sử dụng phép đổi biến :

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx = 2.t^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}.t^{-\frac{1}{2}}.dt$

Viết lại tích phân :

$$\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}.t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}.\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}.(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{4!} = \frac{5\pi}{256}$$

Ví dụ 7: Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x.\cos^5 x}dx$

Đây là dạng hàm Beta dạng lượng giác :

$$B(m;n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}x.\cos^{2n-1}xdx$$

Hay : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n xdx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\frac{n+1}{2}\right)$

Viết lại tích phân đã cho thành :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{7}{2}}x.\cos^{\frac{5}{2}}xdx = \frac{1}{2}B\left(\frac{9}{4};\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right).\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3!} = \frac{5}{256}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{5\pi}{128\sqrt{2}}$$

Ví dụ 8 : Tính tích phân : $I = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5}dx$

Với bài này để ý có cận vô cực nên phải đổi biến thích hợp để đưa cặp cận về $[0;+\infty)$ để xem xem nó ở dạng nào ?

Đặt $t=\ln x \Rightarrow x=e^t \Rightarrow dx=e^t.dt$

Viết lại tích phân đã cho thành :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}.e^t dt}{e^{5t}}=\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}}.e^{-4t}dt=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.e^{-x}dx=\frac{1}{32}\int_0^{+\infty}x^{\frac{5}{2}-1}.e^{-x}dx=\frac{1}{32}.\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{32}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}=\frac{3\sqrt{\pi}}{128}$$

Ví dụ 9 : Tính giới hạn : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}$

Biểu thức tích phân có thể đưa được về dạng hàm Beta dạng phân thức

$$B(m;n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(x+1)^{m+n}}dx$$

Đổi biến : $t=x^n \Rightarrow dt=n.x^{n-1}dx \to dx=\frac{1}{n}.dt.t^{\frac{1-n}{n}}$ khi đó viết lại giới hạn cần tính :

$$\Rightarrow I=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}=1\,(L'hospital)$$

Ví dụ 10 : Tính : $\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x.e^{-\left(x^3+y^3\right)}dx$

Ta sẽ liên tưởng đến hàm Gamma : $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}.e^{-x}dx$

Viết lại tích phân đã cho thành :

$$I=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x.e^{-\left(x^3+y^3\right)}dx=\int_0^{+\infty}e^{-y^3}dy\int_0^{+\infty}x.e^{-x^3}dx=\int_0^{+\infty}e^{-y^3}dy.\int_0^{+\infty}x.e^{-x^3}dx=I_1.I_2$$

Xử lí tích phân : $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^3}dy$:

Đặt $t = y^3 \Rightarrow dt = 3y^2dy = 3t^{\frac{2}{3}}dt \Rightarrow dy = \frac{1}{3}.t^{-\frac{2}{3}}dt \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{2}{3}}.e^{-t}dt = \frac{1}{3}.\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

Xử lí tích phân $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^3}dx$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx = 3t^{\frac{2}{3}}dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}.t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{3}}.t^{-\frac{2}{3}}.e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{3}}.e^{-t}dt = \frac{1}{3}.\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

Khi đó : $I = I_1.I_2 = \frac{1}{9}.\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$

** Xây dựng 1 số bài toán tính nhanh:*

$$i)\int\limits_0^{+\infty} x^m.e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$ii)\int\limits_0^{+\infty} x^m.a^{-x^n}dx = \frac{1}{n.(\ln a)^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

Việc chứng minh hai công thức này nhường cho các bạn dzay :>

Phần 2 : Lý thuyết trường

– Trường vô hướng :

Xét không gian V là 1 tập con mở của R^3 . 1 ánh xạ u cho bởi :

$$\begin{aligned} u: \quad & V \longrightarrow R \\ (x;y;z) & \longrightarrow u = u(x;y;z) \end{aligned}$$ được gọi là 1 trường vô hướng trên V .

Ví dụ : Cho hàm số ba biến số : $u = u(x;y;z)$

– Trường vector :

Xét không gian V là 1 tập con mở của R^3 . 1 ánh xạ $\vec{F}$ cho bởi :

$$\vec{F}: \begin{array}{l} V \longrightarrow R^3 \\ \vec{M} \longrightarrow \vec{F}(M) \end{array}$$ được gọi là 1 trường vector trên V .

Ví dụ : Cho hàm vector ba thành phần tọa độ : $\vec{F}(x;y;z) = (P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z))$

Như vậy mỗi tọa độ của trường vector là 1 trường vô hướng

– Vector Rota :

Xét trường vector $\vec{F}(x;y;z) = (P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z))$

Vector Rota (vector xoáy) của trường $\vec{F}(x;y;z)$ là vector có tọa độ :

$\vec{R} = (R'_y - Q'_z;P'_z - R'_x;Q'_x - P'_y)$ kí hiệu : $\overrightarrow{rot}(\vec{F})$ (từ kí hiệu này ta thấy : ẩn của $\overrightarrow{rot}$ phải là 1 trường vector)

Dạng định thức cấp 3 : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

Nếu : $\overrightarrow{rot}(\vec{F})_M > 0$: M là điểm xoáy thuận và ngược lại .

– Mặt đồng mức của trường vô hướng u là quỹ tích những điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn phương trình : $u = u(x;y;z) = C$ trong đó C là hằng số

– Đạo hàm theo hướng

Xét trường vô hướng $u = u(x;y;z)$ trên R^3 ; $M_o(x_o;y_o;z_o) \in R^3$; $\vec{l} = (l_x;l_y;l_z)$ là 1 vector pháp tuyến đơn vị trong R^3 .

Nếu tồn tại giới hạn :

$$\lim_{t\to 0}\frac{u\left(M_o+t\vec{l}\right)-u\left(M_o\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{u\left(x_o+tl_x;y_o+tl_y;z_o+tl_z\right)-u\left(x_o;y_o;z_o\right)}{t}$$

Thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại M_o của trường u

Kí hiệu : $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\left(M_o\right)$

Với $\vec{l}$ là 1 vector bất kì khác vector 0 $\Rightarrow$ Trực chuẩn hóa $\vec{l}$ thành :

$$\vec{l}_e=\left(\frac{l_x}{\|\vec{l}\|};\frac{l_y}{\|\vec{l}\|};\frac{l_z}{\|\vec{l}\|}\right)=\left(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\right);\begin{cases}\alpha=\left(\overrightarrow{Ox};\vec{l}\right)\\ \beta=\left(\overrightarrow{Oy};\vec{l}\right)\\ \gamma=\left(\overrightarrow{Oz};\vec{l}\right)\end{cases}$$

Khi đó ta viết lại giới hạn trên thành :

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{u\left(x_o+t.\cos\alpha;y_o+t.\cos\beta;z_o+t.\cos\gamma\right)-u\left(x_o;y_o;z_o\right)}{t}$$

- Biểu thức đạo hàm theo hướng vector pháp tuyến $\vec{l}$ bất kì tại M_o của trường u :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\left(M_o\right)=u'_x\left(M_o\right).\cos\alpha+u'_y\left(M_o\right).\cos\beta+u'_z\left(M_o\right).\cos\gamma$$

Trong đó : $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{l_x}{\|\vec{l}\|}\\ \cos\beta=\dfrac{l_y}{\|\vec{l}\|}\\ \cos\gamma=\dfrac{l_z}{\|\vec{l}\|}\end{cases}$

Ý nghĩa của đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ tại 1 điểm của trường vô hướng : biểu hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng tại điểm đó theo hướng $\vec{l}$

Đặc biệt : nếu hướng lấy đạo hàm trùng với hướng của các trục tọa độ thì đạo hàm theo hướng sẽ là các đạo hàm riêng .

Lưu ý : khi tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của trường vô hướng thì cần kiểm tra xem vector $\vec{l}$ đã là vector đơn vị hay chưa ? Nếu không thì phải trực chuẩn hóa vector $\vec{l}$

• Gradient : giả sử trường vô hướng u khả vi tại điểm M_o , khi đó : Gradient của trường vô hướng u tại điểm M_o là một vector có tọa độ là các đạo hàm riêng của trường vô hướng u . Kí hiệu vector gradient của trường u tại M_o : $\overrightarrow{gradu}(M_o)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{gradu}(M_o) = \left(u'_x(M_o);u'_y(M_o);u'_z(M_o)\right)$$

Khi đó ta có thể viết lại biểu thức đạo hàm theo hướng vector pháp tuyến $\vec{l}$ bất kì tại M_o của trường u :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{gradu}(M_o).\vec{l}$$

Khai triển tích vô hướng , ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{gradu}(M_o).\vec{l} = \left\|\overrightarrow{gradu}(M_o)\right\|.\left\|\vec{l}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{gradu}(M_o);\vec{l}\right)$$

$$= \left\|\overrightarrow{gradu}(M_o)\right\|.\cos\left(\overrightarrow{gradu}(M_o);\vec{l}\right) = \sqrt{\left[u'_x(M_o)\right]^2 + \left[u'_y(M_o)\right]^2 + \left[u'_z(M_o)\right]^2}.\cos\left(\overrightarrow{gradu}(M_o);\vec{l}\right)$$

Do $\cos\left(\overrightarrow{gradu}(M_o);\vec{l}\right) \in [-1;1]$, thế nên theo hướng $\vec{l}$

Trường u biến thiên tại M_o tăng nhanh nhất nếu $\overrightarrow{gradu}(M_o)$ song song cùng hướng với $\vec{l}$. $\Rightarrow \overrightarrow{gradu}(M_o) = k.\vec{l}\,(k>0)$

Trường u biến thiên tại M_o giảm nhanh nhất nếu $\overrightarrow{gradu}(M_o)$ song song ngược hướng với $\vec{l}$. $\Rightarrow \overrightarrow{gradu}(M_o) = k.\vec{l}\,(k<0)$

Tính chất của vector gradient :

Từ định nghĩa của vector gradient ta thấy vector gradient chính là 1 trường vector .

Xét trường u có các đạo hàm riêng liên tục

Khi đó ta có 1 số phép toán sau :

$\bullet \overrightarrow{grad}\left(C_1u + C_2v\right) = C_1\overrightarrow{gradu} + C_2.\overrightarrow{gradv}$

$\bullet \overrightarrow{grad}\left(u.v\right) = u\overrightarrow{gradv} + v.\overrightarrow{gradu}$

$\bullet \overrightarrow{grad}\left(f\left(u\right)\right) = f'\left(u\right).\overrightarrow{gradu}$

$\bullet \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overrightarrow{gradu} - u\overrightarrow{gradv}}{v^2}$

1 số tính chất của vector gradient với vector rota

$\bullet\ \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{gradu}\right) = 0$

$\bullet \overrightarrow{rot}\left(u.\vec{a}\right) = u.\overrightarrow{rot\vec{a}} + \left[\overrightarrow{gradu};\vec{a}\right]$ (trong đó : $\vec{a} = \vec{a}\left(x;y;z\right) = \left(P;Q;R\right)$ là 1trường vector)

Sử dụng định nghĩa của vector rota kết hợp với phép toán đạo hàm của tích vô hướng :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u.P\left(x,y,z\right)\right) = \frac{\partial u}{\partial x}.P\left(x;y;z\right) + \frac{\partial P\left(x;y;z\right)}{\partial x}.u$$

– Thông lượng : Cho S là một mặt phẳng định hướng có diện tích , $\vec{F}$ là 1 trường vector không đổi , $\vec{n}$ là 1 vector pháp tuyến đơn vị (hoặc vector pháp tuyến được trực chuẩn hóa) của mặt S ; khi đó thông lượng của trường $\vec{F}$ đi qua mặt cong S là đại lượng có giá trị bằng :

$$\phi = S.\left|\vec{F}\right|.\cos\left(\vec{n};\vec{F}\right) = S.\left(\vec{F}.\vec{n}\right)$$

Chia mặt S thành các mảnh nhỏ rồi lấy tổng vô hạn ta được 1 dạng khác:

$\phi = \iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}.dS$ (tích phân mặt loại 1)

Khai triển tích vô hướng : $\phi = \iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iint\limits_S \left(P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma\right)dS$

Trong đó : $\begin{cases} \alpha = \left(\overrightarrow{Ox};\vec{n}\right) = \left((Oyz);(S)\right) \\ \beta = \left(\overrightarrow{Oy};\vec{n}\right) = \left((Ozx);(S)\right) \\ \gamma = \left(\overrightarrow{Oz};\vec{n}\right) = \left((Oxy);(S)\right) \end{cases}$

Theo công thức hình chiếu : $\frac{S'}{S} = \cos\varphi$ ta có được :

$$\begin{cases} \cos\alpha.dS = \delta_{yz} = dydz \\ \cos\beta.dS = \delta_{zx} = dzdx \\ \cos\gamma.dS = \delta_{xy} = dxdy \end{cases}$$

(trong đó $dydz;dzdx;dxdy$ là diện tích của các mảnh chữ nhật : là hình chiếu của mảnh dS trên các mặt phẳng tương ứng $(Oyz);(Ozx);(Oxy)$)

Khi đó ta viết lại biểu thức thông lượng :

$\phi = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ (đây nà dạng tích phân mặt loại 2)

• Lưu số (hoàn lưu) : Lưu số của trường vector $\vec{F}$ dọc theo đường kín L (có phương trình vector: $\vec{r} = \vec{r}(t)$) là tích phân đường loại 2 : $\oint\limits_L \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$

Theo công thức Stokes : Lưu số của của trường vector $\vec{F}$ dọc theo đường kín L bằng thông lượng của vector $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)$ đi qua mặt S có đường giới hạn là L :

$$\oint\limits_L \vec{F}.d\vec{r} = \iint\limits_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right).\vec{n}.dS$$

$$\Leftrightarrow \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + \left(P'_z - R'_x\right)dzdx + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$

Chú ý 1: Hướng của vector pháp tuyến đơn vị của S và hướng của đường cong khép kín L tuân theo quy tắc bàn tày phải : nếu $\vec{n}$ hướng lên thì hướng của đường cong là hướng ngược chiều kim đồng hồ và ngược lại :>

Như vậy đề bài phải cho biết hướng của 1 loại để biết được hướng của loại còn lại!

Thường thì bài toán sẽ cho đường L hướng dương tức nà hướng ngược chiều kim đồng hồ thì từ đây mình có thể biết được vector pháp tuyến đơn vị hướng lên ~

Chú ý 2 (king nghiệm) : Vậy thì L là phần biên giao của 2 mặt đã biết rồi vậy thì nên chọn mặt S là mặt nào ?? Theo kinh nghiệm của tớ với bài toán mặt phẳng giao mặt cong thì chọn phương trình của S là phương trình mặt phẳng , còn khó hơn là giao của 2 mặt cong thì có thể phương trình của S phải lấy theo phương trình của 1 trong 2 mặt !

Điều kiện cần và đủ để lưu số không phụ thuộc đường đi :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}R'_y=Q'_z\\P'_z=R'_x\\Q'_x=P'_y\end{cases}$$

Khi đó biểu thức $Pdx+Qdy+Rdz$ sẽ là 1 vi phân toàn phần của 1 hàm số $u=u(x;y;z)$, và hàm này được xác định qua biểu thức :

$$u(x;y;z)=\int_{x_o}^{x}P(x;y_o;z_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x;y;z_o)dy+\int_{z_o}^{z}R(x;y;z)dz$$

– Trường thế :

Xét trường vector : $\vec{F}=(P;Q;R)$. Nếu tồn tại một hàm số : $u=u(x;y;z)$ sao cho :

$\overrightarrow{gradu}=\vec{F}$ thì : trường vector $\vec{F}$ được gọi là trường thế và hàm $u=u(x;y;z)$ được gọi là hàm thế vị (thế vô hướng)

$$\Rightarrow\left(u'_x(M);u'_y(M);u'_z(M)\right)=\left(P(M);Q(M);R(M)\right)\Rightarrow\begin{cases}P=u'_x\\Q=u'_y\\R=u'_z\end{cases}$$

Từ đó suy ra biểu thức : $Pdx+Qdy+Rdz$ là 1 biểu thức vi phân toàn phần của hàm số $u=u(x;y;z)$. Điều này chỉ xảy ra khi : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}R'_y=Q'_z\\P'_z=R'_x\\Q'_x=P'_y\end{cases}$ như đã nói ở trên

Và khi đó việc xác định hàm thế vị cũng như trên :

$$u(x;y;z)=\int_{x_o}^{x} P(x;y_o;z_o)dx+\int_{y_o}^{y} Q(x;y;z_o)dy+\int_{z_o}^{z} R(x;y;z)dz+C$$

Như vậy việc xác định điều kiện để lưu số khôgn phụ thuộc đường đi cũng là điều kiện để trường vector $\vec{F}$ là 1 trường thế , đều là $\overrightarrow{rot}(\vec{F})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} R'_y = Q'_z \\ P'_z = R'_x \\ Q'_x = P'_y \end{cases}$

– Đive của 1 vector : Đive của 1 vector : $\vec{F}=(P;Q;R)$, trong đó các biểu thức $P;Q;R$ có các đạo hàm riêng liên tục , là đại lượng tổng các đạo hàm riêng :

$S=P'_x+Q'_y+R'_z$. Kí hiệu là $div(\vec{F})$

- 1 số tính chất của $div(\vec{F})$

$\bullet\, div(C_1.\vec{F_1}+C_2.\vec{F_2})=C_1.div(\vec{F_1})+C_2.div(\vec{F_2})$

$\bullet\, div(u.\vec{F})=\vec{F}.\overrightarrow{gradu}+u.div(\vec{F})$

$\bullet\, div(\overrightarrow{rot}(\vec{F}))=0$

$\bullet\, div(u.\vec{a})=u.div\vec{a}+\vec{a}.\overrightarrow{gradu}$ ($\vec{a}=\vec{a}(x;y;z)=(P;Q;R)$ là 1 trường vector)

$\bullet\, div(\vec{F})_M=0;\forall M\in R^3$ thì trường $\vec{F}$ được gọi là trường ống

$\bullet\, div(\vec{F})_M>0$: M là điểm nguồn

$\bullet\, div(\vec{F})_M<0$: M là điểm rò (điểm hút)

Phát biểu lại công thức Ostrogradsky :

Thông lượng của trường vector $\vec{F}$ đối với mặt cong kín định hướng S hướng ra ngoài sẽ bằng tích phân bội 3 của $div(\vec{F})$ trong miền V giới hạn bởi S

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}dS = \pm\iiint_V div(F)\,dxdydz$$

(dấu $+$ nếu $\vec{n}$ hướng ra ngoài , dấu $-$ nếu $\vec{n}$ hướng vào trong)

Nhớ nà mún sử dụng công thức Ostrogradsky thì mặt S đã cho phải làm mặt kín !

Nếu mặt S chưa kín thì cần bổ sung rồi tí nhớ mà bù trừ !

1 số bài tập ví dụ :

Pro.1 : Tìm vector xoáy và div của trường vector sau : $\vec{F}(x;y;z) = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+z};\frac{\sqrt{y}}{1+x};\frac{\sqrt{z}}{1+y}\right)$

Điều kiện xác định $x;y;z \geq 0$, như vậy các biểu thức tọa độ của trường $\vec{F}$ là các hàm khả vi mọi cấp , khi đó :

Vector xoáy của trường vector đã cho :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \left(R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\right) = \left(\frac{-\sqrt{z}}{(y+1)^2};-\frac{\sqrt{x}}{(z+1)^2};-\frac{\sqrt{y}}{(x+1)^2}\right)$$

Đive của trường vector đã cho :

$$div\left(\vec{F}\right) = P'_x + Q'_y + R'_z = \frac{1}{2\sqrt{x}(z+1)} + \frac{1}{2\sqrt{y}(x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{z}(y+1)}$$

Pro.2 : Trường sau có phải trường thế không ? Tìm hàm thế vị .

$$a)\vec{F}(x;y;z) = xyz^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + x^2y^2z\vec{k}$$

Để kiểm tra 1 trường vector là trường thế hay không thì chỉ cần kiểm tra vector rota của trường vector đó .

Tọa độ trường vector đã cho : $\vec{F}(x;y;z) = \left(xyz^2;x^2yz^2;x^2y^2z\right)$

Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là :

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \left(R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\right)$$

$$= \left(2x^2yz - 2x^2yz; 2xyz - 2xy^2z; 2xyz^2 - xz^2\right) = \left(0; 2xyz - 2xy^2z; 2xyz^2 - xz^2\right) \neq (0;0;0)$$

Như vậy trường vector đã cho không phải trường thế !

$b)\vec{F}(x;y;z) = \vec{i} + \sin z.\vec{j} + y\cos z.\vec{k}$

Tọa độ của trường vector đã cho $\vec{F} = (1; \sin z; y\cos z)$

Các biểu thức tọa của trường vector đã cho khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \left(R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\right) = (\cos z - \cos z; 0; 0) = (0;0;0)$$

Như vậy trường vector đã cho là trường thế

Khi đó hàm thế vị được xác định như sau :

$$u(x;y;z) = \int_0^x P(x;0;0)dx + \int_0^y Q(x;y;0)dy + \int_0^z R(x;y;z)dz + C$$

$$= \int_0^x dx + \int_0^z y\cos z dz + C = x + y\sin z\Big|_0^z + C = x + y\sin z + C$$

Như vậy hàm thế vị là : $u(x;y;z) = x + y\sin z + C$

Pro.3 : Tính lưu số của trường vector : $\vec{F} = \left(x^2y^3; 1; z\right)$ dọc theo đường tròn $x^2 + y^2 = R^2; z = 0$ giới hạn bởi mặt cầu : $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ theo chiều dương

Đầu tiên : Xác định hướng của đường cong kín L : bài ni L đi theo chiều dương nên nà hướng L là hướng ngược chiều kim đồng hồ , theo quy tắc nắm tay phải ta có được hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt S bị giới hạn bởi đường L nà hướng lên trên ! Mặt S ở đây là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ có phương trình mặt phẳng: $z = 0$ (tức L là giao của mặt phẳng và mặt cong)

Áp dụng công thức Stokes :

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + \left(P'_z - R'_x\right)dzdx + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$

$$\Rightarrow \oint_L x^2y^3dx + dy + zdz = \iint_S (0-0)dydz + (0-0)dzdx + \left(0 - 3x^2y^2\right)dxdy = -\iint_S 3x^2y^2dxdy$$

Do vector pháp tuyến đơn vị của mặt $S: z=0$ hướng lên thế nên chọn vector pháp tuyến đơn vị của mặt S được xác định :

$$\vec{n} = (0;0;1)$$

Ở đây mình trực chuẩn hóa nó về vector đơn vị để phòng bị cho việc tính tích phân mặt loại 2 kia bằng cách chuyển về tích phân mặt loại 1 , chứ nếu tích phân mặt loại 2 kia dạng đơn cụm nên chúng mình chỉ cần đưa về tích phân kép và chỉ cần biết hướng của $\vec{n}$ thôi , không cần biết chính xác tọa độ của nó !

Xử lí tích phân mặt loại 2 :

$$I = \iint_S 3x^2y^2dxdy$$

Do vector pháp tuyến đơn vị hướng lên (tức nà hợp với chiều dương trục Oz 1 góc nhọn) nên dấu tích phân là dấu dương .

Chuyển tích phân về tích phân kép :

$I = 3\iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy$ với miền : $D_{xy} := x^2 + y^2 \le R^2$

Sử dụng đổi biến trong tọa độ cực :

$$\Rightarrow I = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^R r.r^4 d = \frac{\pi R^6}{8}$$

Thay lại biểu thức lưu số :

$$\Rightarrow \oint_L x^2y^3dx + dy + zdz = -\iint_S 3x^2y^2dxdy = -\frac{\pi R^6}{8}$$

Pro.4 : Tìm hàm thế vị nếu có : $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

Tọa độ của trường vector đã cho : $\vec{F} = (y+z; z+x; x+y)$

Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho đều là các hàm khả vi tại mọi cấp

Khi đó vector rota của trường vector đã cho là :

$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = (R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y) = (1-1;1-1;1-1) = (0;0;0)$

Như vậy trường vector đã cho là 1 trường thế ~

Xác định hàm thế vị :

$$u(x;y;z) = \int_0^x P(x;0;0)\,dx + \int_0^y Q(x;y;0)\,dy + \int_0^z R(x;y;z)\,dz + C = \int_0^y x\,dy + \int_0^z (x+y)\,dz + C$$

$$= xy + (x+y)z + C$$

Vậy hàm thế vị tìm được nà : $u(x,y,z) = xy + yz + zx + C$

Pro.5 : Tính lưu số của trường vector $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ dọc theo chu tuyến kín C :

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$, hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương Oy.

$\rightarrow$ chu tuyến kín C giới hạn mặt S có vector pháp tuyến đơn vị dương hướng lên về phía dương trục Oy

Áp dụng công thức Stokes :

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S (0-1)\,dydz + (0-1)\,dzdx + (0-1)\,dxdy = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

Xác định vector pháp tuyến đơn vị của mặt $(S): y = x + z$:

$$\vec{n} = (1;-1;1) \xrightarrow{truc\,chuan\,hoa} \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

$$I=\iint_S dydz+dzdx+dxdy=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}dzdx$$

$$=\iint_{D_{xy}} dzdx=S\left(D_{xy}\right)=2\pi a^2$$

$$\Rightarrow\oint_C ydx+zdy+xdz=-2\pi a^2$$

Pro.6 : Cho trường vector $\vec{F}=\left(x^2y+y^2z\right)\vec{i}+xyz\,\vec{j}+\left(yz^2+xy^2\right)\vec{k}$. Tìm những điểm trong trường đã cho là điểm xoáy .

Điều kiện để 1 điểm $M\left(x;y;z\right)$ trong trường vector là 1 điểm xoáy là :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\left(M\right)\neq\vec{0}$$

Tọa độ của trường vector đã cho : $\vec{F}=\left(x^2y+y^2z;xyz;yz^2+xy^2\right)$

Khi đó vector rota của trường vector đã cho tại điểm $M\left(x;y;z\right)$ bất kì thuộc trường vector đó là : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\left(z^2+2xy-xy;y^2-y^2;yz-x^2-2yz\right)=\left(z^2+xy;0;-x^2-yz\right)$

Để trường điểm M là điểm không xoáy thì :

$$\begin{cases}z^2+xy=0\\x^2+yz=0\end{cases}\rightarrow\left(x-z\right)\left(x+z-y\right)=0$$

$$\bullet\, x=z=k\Rightarrow k^2+yk=0$$
$$TH1: x=z=0\Rightarrow y\in R$$
$$TH2: xz\neq0\Rightarrow y=-k\Rightarrow\left(x;y;z\right)=\left(k;-k;k\right)\left(k\neq0\right)$$
$$\bullet\, y=x+z\Rightarrow\begin{cases}z^2+x\left(x+z\right)=0\\x^2+z\left(x+z\right)=0\end{cases}\Rightarrow x^2+z^2+\left(x+z\right)^2=0\Rightarrow x=y=z=0$$

Gộp bộ nghiệm ta được bộ $\left[\begin{array}{l}\left(x;y;z\right)=\left(k;-k;k\right)\left(k\in R\right)\\\left(x;y;z\right)=\left(k;l;k\right)\left(k;l\in R\right)\end{array}\right.$

Như vậy để M là điểm xoáy thì tọa độ của M phải thuộc tập bù 2 họ nghiệm trên đối với R^3 .

Pro.7 : Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}=(2;-1;2)$ của hàm số : $u(x;y;z)=e^y\left(x+z^2\right)+2xy^3z$ tại điểm $A(1;0;2)$.

Trực chuẩn hóa vector $\vec{l}=(2;-1;2)$ thành : $\vec{l}=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Khi đó biểu thức đạo hàm theo hướng của hàm số đã cho tại điểm $M(x;y;z)$ bất kì:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\overrightarrow{gradu}.\vec{l}=u'_x.l_x+u'_y.l_y+u'_z.l_z$$

Trong đó : $\overrightarrow{gradu}(A)=\left(u'_x(A);u'_y(A);u'_z(A)\right)=(1;5;4)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A)=\overrightarrow{gradu}(A).\vec{l}=\frac{5}{3}$$

Pro.8 : Tính lưu số của $\vec{F}=\left(ye^{xy}+3y+z\right)\vec{i}+\left(xe^{xy}+y-5z\right)\vec{j}+(1+2x)\vec{k}$ dọc theo đường cong L là giao của mặt $x^2+y^2+z^2=4$ và mặt $x-y+z=0$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục Oz.

Tọa độ của trường vector đã cho là

$$\vec{F}=\left(ye^{xy}+3y+z;xe^{xy}+y-5z;1+2x\right)$$

Các biểu thức tọa độ của trường vector đã cho là các hàm khả vi tại mọi cấp trên R^3.

Áp dụng công thức Stokes :

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(R'_y-Q'_z\right)dydz+\left(P'_z-R'_x\right)dzdx+\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy$$

$$\Leftrightarrow \oint_L \left(ye^{xy}+3y+z\right)dx+\left(xe^{xy}+y-5z\right)dy+\left(2x+1\right)dz$$

$$=\iint_S (0+5)dydz+(1-2)dzdx+\left(e^{xy}+xy.e^{xy}-e^{xy}-xy.e^{xy}-3\right)dxdy \;=\iint_S 5dydz-dzdx-3dxdy$$

Xử lí tích phân $I=\iint_S 5dydz-dzdx-3dxdy$

Do đường cong L có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục Oz thế nên hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt S bị giới hạn bởi đưởng cong L sẽ hướng lên trên , về phía dương trục Oz .

Xác định vector pháp tuyến đơn vị dương của $S: z=y-x$:

$$\vec{n}=(-1;1;-1)\xrightarrow{truc\,chuan\,hoa}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (5-1-3)dS \;=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S dS \;=\iint_{D_{xy}} dxdy=S\left(D_{xy}\right)=4\pi$$

Với : $D_{xy}: x^2+y^2\le 4$

Pro.9 : Tính tích phân đường : $\oint_L \left(y^2+z^2\right)dx+\left(z^2+x^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, trong đó L là giao của mặt cầu : $x^2+y^2+z^2=4$ với mặt nón $z=-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O .

Áp dụng công thức Stokes :

$$\oint_L \left(y^2+z^2\right)dx+\left(z^2+x^2\right)dy+\left(z^2+y^2\right)dz= \iint_S (2y-2z)dydz+(2z-2x)dzdx+(2x-2y)dxdy$$

$$=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=2I$$

Trong đó S là giao của 2 mặt cong , xác định từ hệ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=-\sqrt{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$ 😊 và cái hệ này khó giải được , nhưng để ý rằng nón kia có dạng "âm" và để ý nốt phần mặt giao là phần mặt cầu nằm trong nón nên ta sẽ chọn phương trình S phương trình cầu dưới (không nằm trên mặt phẳng $z=0$) $S: z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

Khi đó khi nhìn từ O từ hướng đường cong theo chiều kim đồng hồ nên vector pháp tuyến hướng xuống dưới , tức tạo với chiều dương trục Oz 1 góc tù

Xử lý tích phân : $I=\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$

Khi đó ta chọn vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt đã cho là :

$$\vec{n}=\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}};-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}};-1\right)\xrightarrow{truc\,chuan\,hoa}\vec{n}=\left(-\frac{x}{2};-\frac{y}{2};-\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}\right)$$

Chuyển tích phân cần tính về tích phân mặt loại 1 :

với $I=\iint\limits_S\left[(y-z).\left(-\frac{x}{2}\right)+(z-x)\left(-\frac{y}{2}\right)-(x-y).\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2}\right]dS$

$$=\iint\limits_S\left[\frac{xz-xy}{2}+\frac{xy-yz}{2}+\frac{(y-x)z}{2}\right]dS=\iint\limits_S 0dS=0$$

Vậy cách làm 1 bài lưu số :

Hướng 1 : Biết được phương trình tham số của L trong không gian $\Rightarrow$ Xử lý như xử lý tích phân đường loại 2 trong không gian bằng cách tham số hóa hoy !

Hướng 2 : Sử dụng công thức Stokes :

Khi sử dụng công thức Stokes mình sẽ phải tính lưu số thông qua tích phân mặt loại 2 của vector rota của trường vector đã cho . Và để tính tích phân mặt loại 2 này mình cũng có khá nhiều hướng : Chuyển về tích phân kép trực tiếp ; chuyển về tích phân mặt loại 1 ; Sử dụng công thức Ostrogradsky ; …

Nhưng thường sẽ sử dụng 2 cách đó là chuyển về tích phân kép trực tiếp (xử lí từng cụm tọa độ của vector rota) hoặc chuyển về tích phân mặt loại 1.

Cả 2 cách đều phải sử dụng hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt S có đường biên L , việc xác định hướng của pháp vector này sẽ dựa trên quy tắc nắm tay phải : L ngược chiều kim đồng hồ thì vector pháp hướng lên và ngược lại.

Với cách chuyển về tích phân kép trực tiếp ta chỉ cần biết hướng của vector pháp mà không cần biết hẳn tọa độ của nó để xác định được dấu tích phân : $\iint\limits_S ... = \pm\iint\limits_D ..$

Với cách chuyển về tích phân mặt thì cần phải biết hẳn được tọa độ vector pháp tuyến đơn vị dương của mặt S . Cách để lấy chính xác tọa độ vector pháp tuyến đơn vị dương : Đưa mặt S về dạng $z = z(x;y)$, xác định vector "giả" :

$\vec{n} = \pm(z'_x; z'_y; -1)$

Nếu từ giả thiết ta có được hướng của vector pháp tuyến đơn vị dương là hướng lên trên khi nhìn về chiều dương Oz tức tạo với chiều dương Oz 1 góc nhọn thì chọn vector giả là : $\vec{n} = (-z'_x; -z'_y; 1)$

Còn nếu là hướng xuống khi nhìn về chiều dương Oz tức tạo với chiều dương Oz 1 góc tù thì chọn vector giả là $\vec{n} = (z'_x; z'_y; -1)$

Bước thứ 2 : Trực chuẩn hóa vector giả !

Bước 3 : chuyển về tích phân mặt loại 1 thôi :>

Pro.10 : Cho trường vector : $\vec{F} = (2x - y^2)\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + (y + 2xz)\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt ngoài: $|x + y| + |x - 2z| + |x + z| = 1$.

Để tính thông lượng thì viêc đầu tiên là phải xác định được nên đưa nó về dạng gì :

Dạng tích phân mặt loại 1 : $\phi = \iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}dS$

Hay là dạng tích phân mặt loại 2 : $\phi = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

Ở bài này thì mặt S cho ở dạng thế kia vẫn chưa định hình được vector pháp tuyến nên tớ chuyển về tích phân mặt loại 2 đã nha .

$$I = \iint_S \left(2x - y^2\right)dydz + \left(x + y + z\right)dzdx + \left(y + 2zx\right)dxdy$$

Đặt : $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2z \\ w = x + z \end{cases} \Rightarrow J_{uvw} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \begin{cases} x = \dfrac{v + 2w}{3} \\ y = \dfrac{3u - v - 2w}{3} \\ z = \dfrac{w - v}{3} \end{cases} \Rightarrow J_{xyz} = \dfrac{-1}{3}$

Xác định miền vật thể xác định bởi $u;v;w : S' := |u| + |v| + |w| = 1$. Đó chính là miền vật thể V' được giới hạn bởi 8 mặt (theo cách phá trị tuyệt đối) nên nà miền kín !

Do miền vật thể V' bị giới hạn bởi S' là miền kín nên miền V giới hạn bởi mặt S đã cho cũng phải là 1 miền kín !

Xác định miền vật thể V': với cách phá trị đối thì phương trình của S' sẽ được tách làm 8 trường hợp phương trình con là các mặt cùng với mặt phẳng (Ouv) tạo thành biên của các vật thể như nhau .Tức vật thể V' được giới hạn bởi S' được chia thành 8 phần bằng nhau.

Áp dụng công thức Ostrogradsky với mặt S hướng ra ngoài

$$I = \iint_S \left(2x - y^2\right)dydz + \left(x + y + z\right)dzdx + \left(y + 2zx\right)dxdy = \iiint_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dxdydz$$

$$= \iiint_V (2 + 1 + 2x)dxdydz = \iiint_V (3 + 2x)dxdydz = \iiint_{V'} \left(3 + \frac{2}{3}(v + 2w)\right).\frac{1}{3}dudvdw$$

$$= \iiint_{V'} dudvdw + \iiint_{V'} \frac{2}{9}vdudvdw + \iiint_{V'} \frac{4}{9}wdudvdw = \iiint_{V'} dudvdw = V_{V'} = 8V_{V_1'} = \frac{4}{3}$$

Trong đó miền con V_1' đơn giản nhất : $V_1' : \begin{cases} u \ge 0; v \ge 0; w \ge 0 \\ u + v + w \le 1 \end{cases}$