ĐỀ THI THỬ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 2022.2

Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1: (1 điểm) Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+x^2y^2}{x^4+y^2}$

Câu 2: (1 điểm) Cho hàm số ẩn $z=z(x,y)$ xác định bởi phương trình:

$$z^3+x^2+y^2+e^{(x+y)z}-2=0$$

Tính $z'_x(0,1), z'_y$.

Câu 3: Tính gần đúng giá trị biểu thức sau: $A=e^{1,99^3-3,02^2+1}$

Câu 4:Tính độ cong của của đường $y=\ln\left(x^2+x+1\right)$ tại điểm $M\left(1,\ln 3\right)$

Câu 5: Tính các đạo hàm riêng z'_x, z'_y của hàm số hợp sau:

$$z=e^{\frac{u^2}{2v}}, u=\ln\left(xy\right), v=\sqrt{x+2y-2}$$

Câu 6: Tìm khai triển Taylor đến cấp 2 của hàm số $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+3y}$ tại $M(0;1)$

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong:

$\begin{cases} z-\ln\left(2x+y\right)=0 \\ x^2-4y^2+2z^2=-3 \end{cases}$ tại điểm $M\left(1;-1,0\right)$

Câu 8: Tìm cực trị của hàm số: $z=5x^2-\ln x-2xy-x+2\arctan y$.

Câu 9: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong: $4x^3+y^2+2z=7$ tại điểm $M(1,-1,1)$.

Câu 10: Tìm cực trị của hàm số: $z=\left(2x+4\right)^2+2\left(y+1\right)^2$ với $2x^2+y^2=4$.

— ***Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi*** —

Câu 1: (1 điểm):

Ta có:

$\left|\dfrac{x^3y+x^2y^2}{x^4+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{x+y}{2}\right|$ do $\left(\left|x^4+y^2\right| \geq 2|x^2y|\right)$

Lại có: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x+y}{2}\right| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+x^2y^2}{x^4+y^2} = 0$ (theo Định lý kẹp).

Câu 2: (1 điểm):

- Đặt $F(x,y,z) = z^3+x^2+y^2+e^{(x+y)z}-2$

- Ta có: $\begin{cases} F'_x = 2x+ze^{(x+y)z} \\ F'_y = 2y+ze^{(x+y)z} \\ F'_z = 3z^2+(x+y)e^{(x+y)z} \end{cases}$

- Ta có:

+) $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{2x+ze^{(x+y)z}}{3z^2+(x+y)e^{(x+y)z}}$

+) $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{2y+ze^{(x+y)z}}{3z^2+(x+y)e^{(x+y)z}}$

- Tại $x=0, y=1 \Rightarrow z^3+e^z-1=0 \Rightarrow z=0$

$\Rightarrow z'_x(0,1) = -\dfrac{2.0+0.e^{(0+1).0}}{3.0^2+(0+1)e^{(0+1).0}} = 0$

Câu 3: (1 điểm):

- Xét $f(x,y) = e^{x^3-y^2+1}$ trên $\mathbb{R}^2, \Rightarrow f(2,3) = 1$

- Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2e^{x^3-y^2+1} \\ f'_y(x,y) = -2ye^{x^3-y^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,3) = 12 \\ f'_y(2,3) = -6 \end{cases}$

- Với $x_0 = 2, y_0 = 3, \Delta x = -0.01, \Delta y = 0.02$, áp dụng công thức tính gần đúng ta có:

$$\begin{aligned} f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) &\approx f\left(x_0,y_0\right) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta y \\ \Rightarrow f(1.99, 3.02) &\approx f(2,3) + f'_x(2,3).\Delta x + f'_y(2,3).\Delta y \\ &= 1 + 12(-0.01) - 6(0.02) \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

Vậy $e^{1,99^3-3,02^2+1} \approx 0.76$.

Câu 4: (1 điểm)

Ta có: $\begin{cases} y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \\ \\ y'' = \dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(1) = 1 \\ y''(1) = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại điểm $M(1, \ln 3)$ là:

$$C_M = \frac{|y''(1)|}{(1+[y'(1)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\dfrac{-1}{3}\right|}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

Câu 5: (1 điểm)

- TXĐ: $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0, x+2y > 2\}$

- Ta có:

$$\begin{aligned}
+)\quad z'_x &= z'_u.u'_x + z'_v.v'_x \\
&= \frac{u}{v}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\frac{1}{x} - \frac{u^2}{2v^2}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\frac{1}{2\sqrt{x+2y-2}} \\
&= \frac{u}{v}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\left(\frac{1}{x} - \frac{u}{2v}.\frac{1}{2\sqrt{x+2y-2}}\right) \\
&= \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+2y-2}}.e^{\frac{\ln^2(xy)}{2\sqrt{x+2y-2}}}.\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(xy)}{4(x+2y-2)}\right), \forall (x,y) \in \mathbb{D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+)\quad z'_y &= z'_u.u'_y + z'_v.v'_y \\
&= \frac{u}{v}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\frac{1}{y} - \frac{u^2}{2v^2}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\frac{1}{\sqrt{x+2y-2}} \\
&= \frac{u}{v}.e^{\frac{u^2}{2v}}.\left(\frac{1}{y} - \frac{u}{2v}.\frac{1}{\sqrt{x+2y-2}}\right) \\
&= \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+2y-2}}.e^{\frac{\ln^2(xy)}{2\sqrt{x+2y-2}}}.\left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(xy)}{2(x+2y-2)}\right), \forall (x,y) \in \mathbb{D}
\end{aligned}$$

Câu 6: (1 điểm)

Hàm số: $f(x,y) = \dfrac{1}{2x+3y} \Rightarrow f(M) = f(0;1) = \dfrac{1}{3}$

Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{-2}{(2x+3y)^2} \\ f'_y(x,y) = \dfrac{-3}{(2x+3y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M) = \dfrac{-2}{9} \\ f'_y(M) = \dfrac{-3}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow dz = f'_x(x,y).dx + f'_y(x,y).dy \Rightarrow dz(M) = \dfrac{-2}{9}dx + \dfrac{-3}{9}dy$

Hơn nữa, ta có: $\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = \dfrac{8}{(2x+3y)^3} \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{12}{(2x+3y)^3} \\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{18}{(2x+3y)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(x,y) = \dfrac{8}{27} \\ f''_{xy}(x,y) = \dfrac{4}{9} \\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d^2z(M) &= f''_{xx}(x,y).dx^2 + 2f''_{xy}(x,y).dxdy + f''_{yy}(x,y).dy^2 \\ &= \frac{8}{27}dx^2 + \frac{8}{9}dxdy + \frac{2}{3}dy^2 \end{aligned}$$

Vậy khai triển Taylor của hàm số đến cấp 2 của hàm số tại $M(0;1)$ là:

$$\begin{aligned} f(M) &= \frac{1}{3} + \frac{\frac{-2}{9}x + \frac{-3}{9}(y-1)}{1!} + \frac{\frac{8}{27}x^2 + \frac{8}{9}x(y-1) + \frac{2}{3}(y-1)^2}{2!} + o\left(\sqrt{x^4 + (y-1)^4}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{(y-1)}{3} + \frac{4x^2}{27} + \frac{4x(y-1)}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} + o\left(\sqrt{x^4 + (y-1)^4}\right) \end{aligned}$$

Câu 7: (1 điểm)

- Xét $f(x,y,z) = z - \ln(2x+y), g(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 + 3$

- Ta có: $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{-2}{2x+y} \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{-1}{2x+y} \\ f'_z(x,y,z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,-1,0) = -2 \\ f'_y(1,-1,0) = -1 \\ f'_z(1,-1,0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vector pháp tuyến của mặt f tại $M(1,-1,0)$ là: $\overrightarrow{\mathrm{n_f}} = (-2,-1,1)$

- Ta có: $\begin{cases} g'_x(x,y,z) = 2x \\ g'_y(x,y,z) = -8y \\ g'_z(x,y,z) = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'_x(1,-1,0) = 2 \\ g'_y(1,-1,0) = 8 \\ g'_z(1,-1,0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vector pháp tuyến của mặt g tại $M(1,-1,0)$ là: $\overrightarrow{\mathrm{n_g}} = (2,8,0)$

$\Rightarrow$ Vector tiếp tuyến của đường cong tại $M(1,-1,0)$ là:

$$\overrightarrow{\mathrm{u_t}} = \overrightarrow{\mathrm{n_f}} \times \overrightarrow{\mathrm{n_g}} = (-8,2,-14)$$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(1,-1,0)$ là:

$$\frac{x-1}{-8}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-14}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{-4}=y+1=\frac{z}{-7}$$

Phương trình pháp diện của đường cong tại $M(1,-1,0)$ là:

$$-8(x-1)+2(y+1)-14z=0 \Leftrightarrow -4x+y-7z+5=0$$

Câu 8: (1 điểm)

Tập xác định: $\mathbb{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0\}$

Xét hệ: $\begin{cases} z'_x=10x-\dfrac{1}{x}-2y-1=0 \\ z'_y=-2x+\dfrac{2}{1+y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-\dfrac{1}{x}-2y-1=0 \\ x=\dfrac{1}{1+y^2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{y^2+1}-y^2-1-2y-1=0 \\ x=\dfrac{1}{y^2+1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được các điểm tới hạn $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{5};-2\right)$

Ta có: $\begin{cases} z''_{xx}=10+\dfrac{1}{x^2} \\ z''_{xy}=-2 \\ z''_{yy}=\dfrac{-4y}{(1+y^2)^2} \end{cases}$

1. Xét điểm $A\left(\frac{1}{2};1\right)$, ta được: $\begin{cases} r=z''_{xx}(A)=14 \\ s=z''xy(A)=-2 \\ t=z''_{yy}(A)=-1 \end{cases}$

   Do $s^2-rt>0$ nên A không phải là cực trị của hàm số.

2. Xét điểm $B\left(\frac{1}{5};-2\right)$, ta được: $\begin{cases} r=z''_{xx}(B)=35 \\ s=z''xy(B)=-2 \\ t=z''_{yy}(B)=\dfrac{8}{25} \end{cases}$.

   Do $s^2-rt<0$ và $r>0$ nên B là cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số có duy nhất một điểm cực trị là $\left(\frac{1}{5}; -2\right)$.

Câu 9 (1 điểm)

- Xét $F(x, y, z) = 4x^3 + y^2 + 2z - 7$

- Ta có: $\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 12x^2 \\ F'_y(x,y,z) = 2y \\ F'_z(x,y,z) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(1,-1,1) = 12 \\ F'_y(1,-1,1) = -2 \\ F'_z(1,-1,1) = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vector pháp tuyến của mặt cong tại điểm $M(1,-1,1)$ là:

$$\overrightarrow{\mathrm{n_p}} = (12, -2, 2)$$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $M(1,-1,1)$ là:

$$12(x-1) - 2(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 6x - y + z - 8 = 0$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $M(1,-1,1)$ là:

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

Câu 10: (1 điểm)

- Xét hàm:

$$L(x, y, \lambda) = (2x+4)^2 + 2(y+1)^2 - \lambda(2x^2 + y^2 - 4)$$

- Ta có:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x+4) - 4\lambda x = 0 \\ 4(y+1) - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = \lambda x \quad (1) \\ 2y + 2 = \lambda y \quad (2) \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

+ Với $\lambda = 2 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

+ Với $\lambda \neq 2$: Từ $(1), (2) \Rightarrow x = \dfrac{4}{\lambda - 2}, y = \dfrac{2}{\lambda - 2}$

Thay vào (3) ta được:

$$2\left(\frac{4}{\lambda-2}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda-2}\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=5 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}, y=\dfrac{2}{3}(TM) \\ \lambda=-1 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{3}, y=\dfrac{-2}{3}(TM) \end{array}\right.$$

- Ta có: $\begin{cases} L''_{xx}=8-4\lambda \\ L''_{xy}=0 \\ L''_{yy}=4-2\lambda \end{cases} \Rightarrow d^2L(x,y,\lambda)=(8-4\lambda)dx^2+(4-2\lambda)dy^2$

- Tại $\lambda=5: d^2L=-12dx^2-6dy^2<0$
  $\Rightarrow \left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ là cực đại của hàm số

- Tại $\lambda=-1: d^2L=12dx^2+6dy^2>0$
  $\Rightarrow \left(\dfrac{-4}{3},\dfrac{-2}{3}\right)$ là cực tiểu của hàm số