ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20172 KSTN K62

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt – K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Dalembert, ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{2^n.n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} 2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left|1-\frac{1}{n+1}\right|.n} = 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{2^{n^2}}$

Đặt $x^2 - 1 = t$, ($t \geq -1$) chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n^2}}$

Đặt $a_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, suy ra bán kính hội tụ là :

$$R = 1 \div \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = 1 \div \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \infty$$

mà $t \geq -1$, suy ra chuỗi hội tụ $\forall t \geq -1$

$\to x^2 - 1 \geq -1$

$\to x^2 \geq 0$

$\to x \in (-\infty; +\infty)$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là $x \in R$

Câu 3: Khai triển hàm số $f(x) = \ln(x^2+1)$ thành chuỗi lũy thừa của x

Đặt $x^2 = t, (t > 0)$

Ta có khai triển Maclaurin của $\ln(1+t)$ là

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{t^n}{n} \quad , R = 1$$

Thay $t = x^2$, ta có:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n}}{n}, R = 1$$

Vậy khai triển f(x) thành chuỗi lũy thừa của x là $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n}}{n}, R = 1$

Câu 4: Giải phương trình vi phân $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -2$

$$2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -2 \qquad (x \neq 0)$$

$$\rightarrow y' = \frac{-2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} \quad (*)$$

Đặt $\frac{y}{x} = u(x) \rightarrow y = ux \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} \rightarrow y' = u'x + u$

Thay vào $(*)$, ta có :

$$u'x + u = -1 - \frac{u^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx}.x = -1 - \frac{u^2}{2} - u$$

$$\rightarrow \frac{du}{-1 - \frac{u^2}{2} - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \frac{-2du}{(u+1)^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow -2\arctan(u+1) = \ln|x| + C$$

$$\rightarrow -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C = \ln|x|$$

$$\rightarrow -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C - \ln|x| = 0$$

Phương trình không có nghiệm kì dị

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$u(x, y, C) = -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C - \ln|x| = 0$$

Câu 5: Giải phương trình vi phân $xy'' + 4y' = 0$

$xy'' + 4y' = 0$

$\rightarrow y'' + \frac{4}{x}.y' = 0$, với $x \neq 0$

Đặt $y'(x) = u(x)$, ta có : $u' + \frac{4}{x}.u = 0$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln|x|} = x^4$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$:

$\rightarrow x^4.u' + 4x^3.u = 0$

$\rightarrow (x^4.u)' = 0$

$\rightarrow x^4.u = C_1$

$\rightarrow u = \frac{C_1}{x^4}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^4}$

$\rightarrow dy = \frac{C_1 dx}{x^4}$

$\rightarrow y = \frac{-C_1}{3x^3} + C_2$. Với $x = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = C$. Nên $x = 0$ không phải nghiệm kì dị

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{-C_1}{3x^3} + C_2$

Câu 6: Giải phương trình vi phân

$$y'' - 2y' - 3 = -14\cos x - 8\sin x$$

Xét phương trình : $y'' - 2y' - 3 = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân trên là :

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -1 \end{cases}$

$\rightarrow$ Phương trình $y'' - 2y' - 3 = 0$ có nghiệm là

$\bar{y} = C_1.e^{3x} + C_2.e^{-x}$

Để tìm nghiệm riêng $y^*(x) = C_1(x).e^{3x} + C_2(x).e^{-x}$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'(x).e^{3x} + C_2'(x).e^{-x} = 0 & (1) \\ 3C_1'(x).e^{3x} - C_2'(x).e^{-x} = -14\cos x - 8\sin x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) $\rightarrow 4C_1'(x).e^{3x} = -14\cos x - 8\sin x$

$$\rightarrow C_1'(x) = -\frac{7}{2}.e^{-3x}.\cos x - 2.e^{-3x}.\sin x$$

$$\rightarrow C_2'(x) = \frac{7}{2}.e^{x}.\cos x + 2.e^{x}.\sin x$$

NOTE: CÔNG THỨC TÍNH NHANH

$$\int e^{ax}.\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}.(a.\cos bx + b.\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}.(a.\sin bx - b.\cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$C_1(x) = -\frac{7}{2}.\frac{e^{-3x}.(-3.\cos x - \sin x)}{10} - 2.\frac{e^{-3x}.(\cos x + 3\sin x)}{10}$$
$$= \frac{e^{-3x}.(5\cos x + \sin x)}{4}$$

$$C_2(x) = \frac{7}{2}.\frac{e^{x}.(\cos x + \sin x)}{2} + 2.\frac{-e^{x}.(\sin x - \cos x)}{2} = \frac{e^{x}.(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

$$\rightarrow y^*(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{e^{-3x}.(5\cos x + \sin x)}{4} + \frac{e^{x}.(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

Vậy nghiệm của phương trình vi phân ban đầu là

$$y = \bar{y} + y^*(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{e^{-3x}(5\cos x + \sin x)}{4} + \frac{e^{x}(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

Câu 7: Tìm biến đổi Laplace ngược của $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^3}$

Từ công thức : $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(x)dx$ (với $F(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$)

$$\rightarrow f(t) = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(x)dx\right\}(t)$$

Ta có:

$$\int_s^{+\infty} F(x)dx = \int_s^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{(x^2+1)^2}\Bigg|_s^{+\infty} = \frac{1}{4(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{8}.(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\rightarrow f(t) = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}.\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right)\right\}(t) = \frac{1}{8}.t.(\sin t - t\cos t)$$

$$= \frac{1}{8}.(t\sin t - t^2\cos t)$$

Vậy biến đổi Laplace ngược của $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^3}$ là $f(t) = \frac{1}{8}.(t\sin t - t^2\cos t)$

Câu 8: Giải bài toán giá trị ban đầu $y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < \pi \\ t, & \text{nếu } t \geq \pi \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

Biểu diễn phương trình theo hàm heaviside là :

$y'' + y = 0 + t.u(t-\pi) = t.u(t-\pi)$

Ta có :

$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0) = s^2.F(s)$

$\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s)$

$\mathcal{L}\{t.u(t-\pi)\}(s) = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2}$

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế, suy ra :

$$s^2.F(s) + F(s) = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)} = e^{-\pi s}.\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\rightarrow y(t) = 0 + (t - \sin t).u(t-\pi)$$

Vậy $y(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ nếu } t < \pi \\ t - \sin t, & \text{nếu } t \geq \pi \end{cases}$

Bài 9: Cho hàm số f(x) tuần hoàn với chu kì 2π thỏa mãn

$f(x) = \begin{cases} -2x & , \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ 2 & , \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$

Khai triển Fourier hàm số f(x) và áp dụng tính $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2xdx + \int_{0}^{\pi} 2dx\right) = 2 + \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2x.\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2.\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}.\left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x.\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}.\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi}.\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2x.\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2.\sin nx\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}.\left(\frac{-x.\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}.\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2.(-1)^n}{n} + \frac{2.(1-(-1)^n)}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{nếu n chẵn} \\ -\frac{2}{n} + \frac{4}{\pi n}, & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

Khai triển Fourier của f(x) là

$$f(x) = \frac{2+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n}\sin 2nx + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \left(\frac{-2}{2n+1} + \frac{4}{\pi(2n+1)}\right)\sin(2n+1)x$$

Theo định lí Dirichlet, tổng của chuỗi tại $x = 0$ là:

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

Thay $x = 0$, suy ra :

$$f(0) = \frac{2+\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$$

$$\rightarrow 1 = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1-1-\frac{\pi}{2}}{-\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Bài 10: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}}$$

Xét $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$

Đặt $\ln n = t \to \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(\ln t)^2}{t} = (\text{Lopitan}) \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{2 \ln t}{t} = (\text{Lopitan}) \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{2}{t} = 0$

$\to (\ln \ln n)^2 < \ln n$ kể từ một n nào đó trở đi

$\to \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ $\to$ chuỗi đã cho phân kỳ