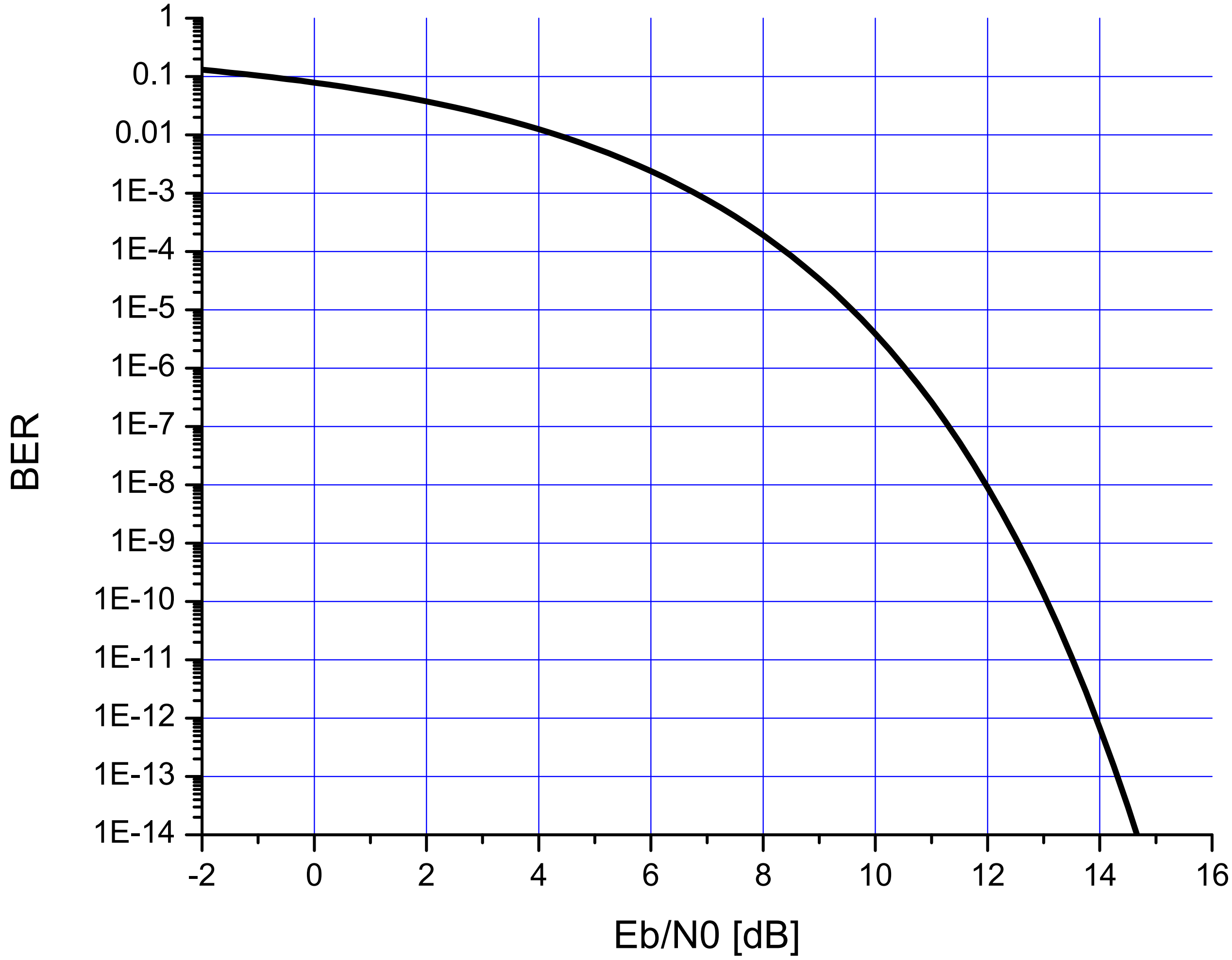
Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 6: Tính toán, đánh giá phổ tín hiệu

PGS. Tạ Hải Tùng

Tính toán SER/BER cho các tín hiệu đối cực nhị phân (binary antipodal signal)

$$P_b(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



Các không gian tín hiệu khác nhau (khác dạng song truyền) nhưng có cùng không gian vector thì có BER như nhau!

Như ví dụ, BER không phụ thuộc vào tín hiệu trực chuẩn như hai loại tín hiệu trực chuẩn dưới đây.

$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Ví dụ so sánh BER

So sánh giữa không gian tín hiệu đối cực và không gian tín hiệu trực giao:

$$P_b(e)\big|_{antipodal} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\big|_{orthogonal} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

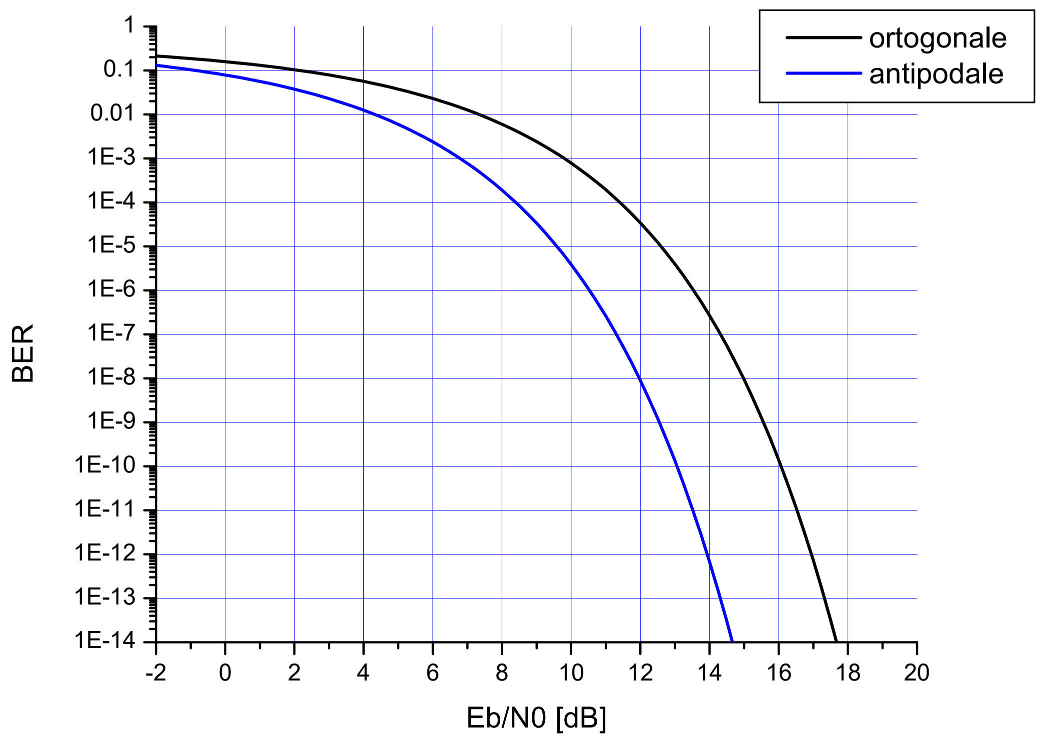
Không gian đối cực có hiệu năng tốt hơn

- Cố định BER, hệ thống với không gian tín hiệu đối cực sẽ yêu cầu E_b/N_0 thấp hơn

- Cố định E_b/N_0, hệ thống sẽ có BER nhỏ hơn

So sánh BER

$$P_b(e)\big|_{antipodal} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\big|_{orthogonal} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



So sánh BER

Cố định E_b/N_0 =12 dB:

- Không gian đối cực đạt được hiệu năng $P_b(e)$ =1e-8
- Trong khi không gian trực giao $P_b(e)$ =5e-5 (giá trị cao hơn → hiệu năng kém hơn)

Để đạt được $P_b(e)$=1e-6:

- Không gian đối cực yêu cầu: E_b/N_0 = 10.6 dB;
- Trong khi, không gian trực giao yêu cầu E_b/N_0 =13.6 dB

(Không gian đối cực lợi 3 dB, lưu ý rằng: tỷ số này tương ứng với công suất tín hiệu nhận được)

So sánh BER

Ví dụ: đường truyền thẳng có công suất tín hiệu nhận được như sau:

$$P_R = P_T \frac{G_T G_R}{\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2}$$

Không gian đối cực có $P_b(e)$=1e-6 với công suất tín hiệu nhận được chỉ cần là ½ công suất đó của không gian trực giao.

Cùng công suất truyền, khoảng cách truyền với không gian đối cực sẽ lớn hơn không gian trực giao $\sqrt{2}$

Hay ta có thể trong cùng một khoảng cách truyền, giảm đi ½ công suất truyền nếu sử dụng không gian đối cực (hoặc lợi hơn do sử dụng ăng-ten truyền nhỏ hơn).

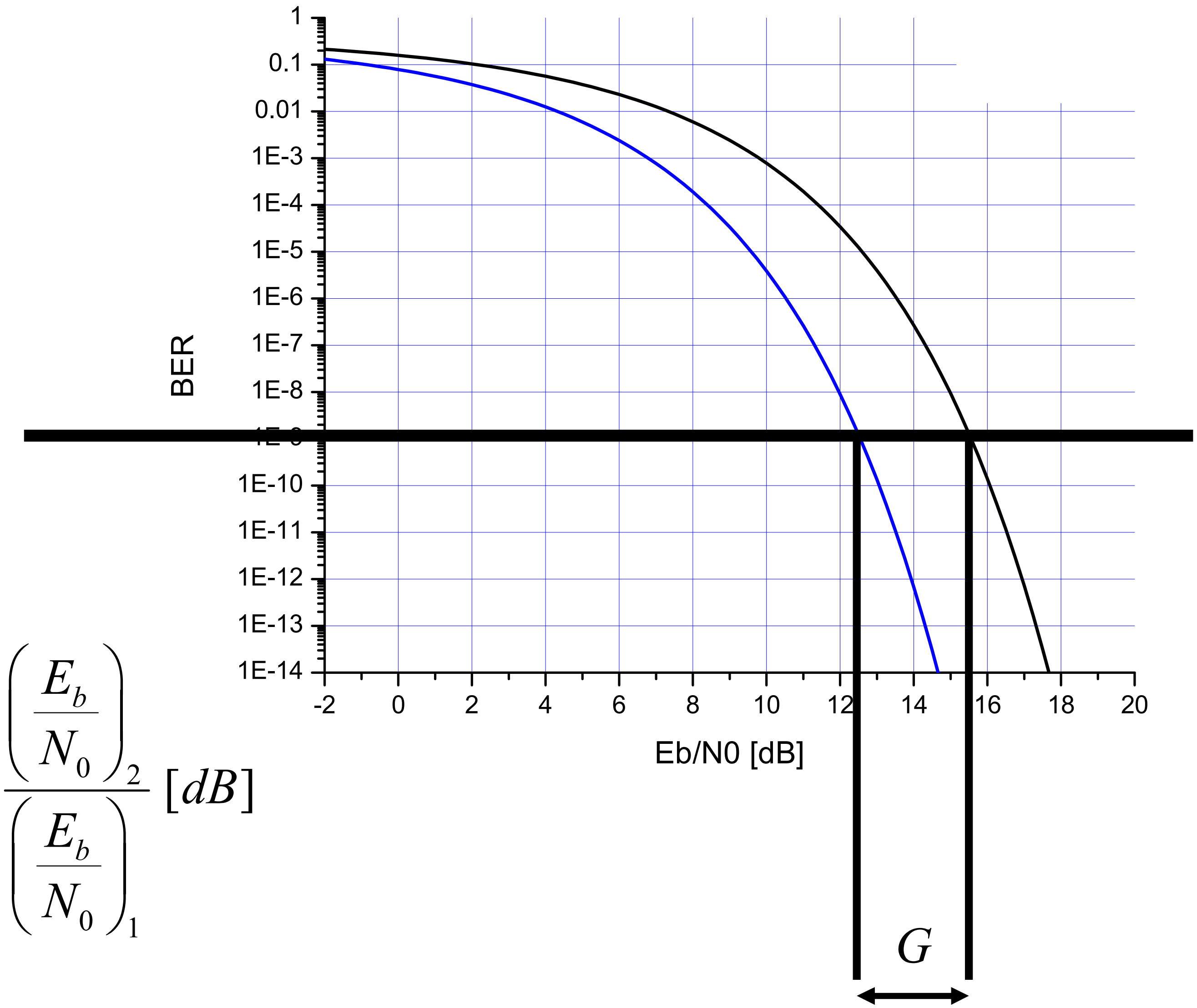
So sánh BER

Tổng quát cho 2 không gian M_1 và M_2 với hiệu năng:

$$P_b(e)\,|_1 \approx erfc\left(\sqrt{y_1 \frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\,|_2 \approx erfc\left(\sqrt{y_2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nếu $y_1 > y_2$ không gian M_1 có hiệu năng tốt hơn (BER thấp hơn)

BER comparison



$$G = 10\log_{10}\frac{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_2}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_1}\ [dB]$$

Hiệu năng tiệm cận (Asymptotic performance)

Giả thiết tiệm cận (E_b/N_o → ∞) với phương sai của tạp âm rất nhỏ.
Most of the received signal belongs to the correct Voronoi region.
Khi lỗi xảy ra, gần như chỉ có thể xảy ra ở vùng Voronoi kế bên (của các tín hiệu có khoảng cách nhỏ nhất).
Ta có thể chứng mình rằng xác xuất loixi ký hiệu trong trường hợp tiệm cận được tính xấp xỉ như sau:

$$\boxed{P_S(e) \approx \frac{1}{2} A_{\min} erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)}$$

$$\boxed{d_{\min} = \min_{\underline{s}_1\ \underline{s}_j \in M} d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j)}$$

$$\boxed{A_{\min} = \text{multiplicity=number of signals } \underline{s}_j \text{ with } d_{\mathrm{E}}(\underline{s}_j\ \underline{s}_1) = d_{\min}}$$

Tương tự với BER:

$$\boxed{P_b(e) \approx \frac{1}{2}\frac{w_{\min}}{k}\, erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)}$$

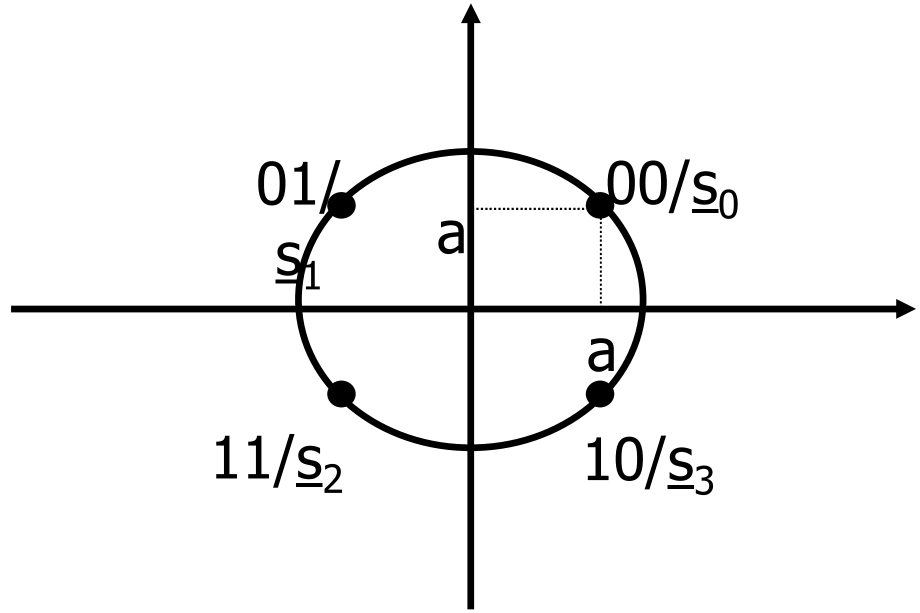
Trong đó:

$$\boxed{w_{\min} = \text{input multiplicity} = \sum_{\underline{s}_j : d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j) = d_{\min}} d_H(\underline{v}_1, \underline{v}_j)}$$

Các công thức này không chỉ là giới hạn trên, mà có thể coi là giá trị xấp xỉ của các xác suất thực, trong trường hợp SNR cao.

Ví dụ

Không gian 4-PSK



$$d_{\min} = 2a \qquad A_{\min} = 2 \qquad w_{\min} = 2$$

$$P_S(e) \approx erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right) = erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_b(e) \approx \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Phương pháp gán nhãn Gray (Gray labelling)

Xét xấp xỉ tiệm cận BER:

$$P_b(e) \approx \frac{1}{2}\frac{w_{\min}}{k}\,erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)$$

Ta có $A_{\min} \leq w_{\min}$

$$\boxed{A_{\min} = \text{multiplicity=number of signals } \underline{s}_j \text{ with } d_{\mathrm{E}}(\underline{s}_j\ \underline{s}_1) = d_{\min}}$$

$$\boxed{w_{\min} = \text{input multiplicity=} \sum_{\underline{s}_j : d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j) = d_{\min}} d_H(\underline{v}_1, \underline{v}_j)}$$

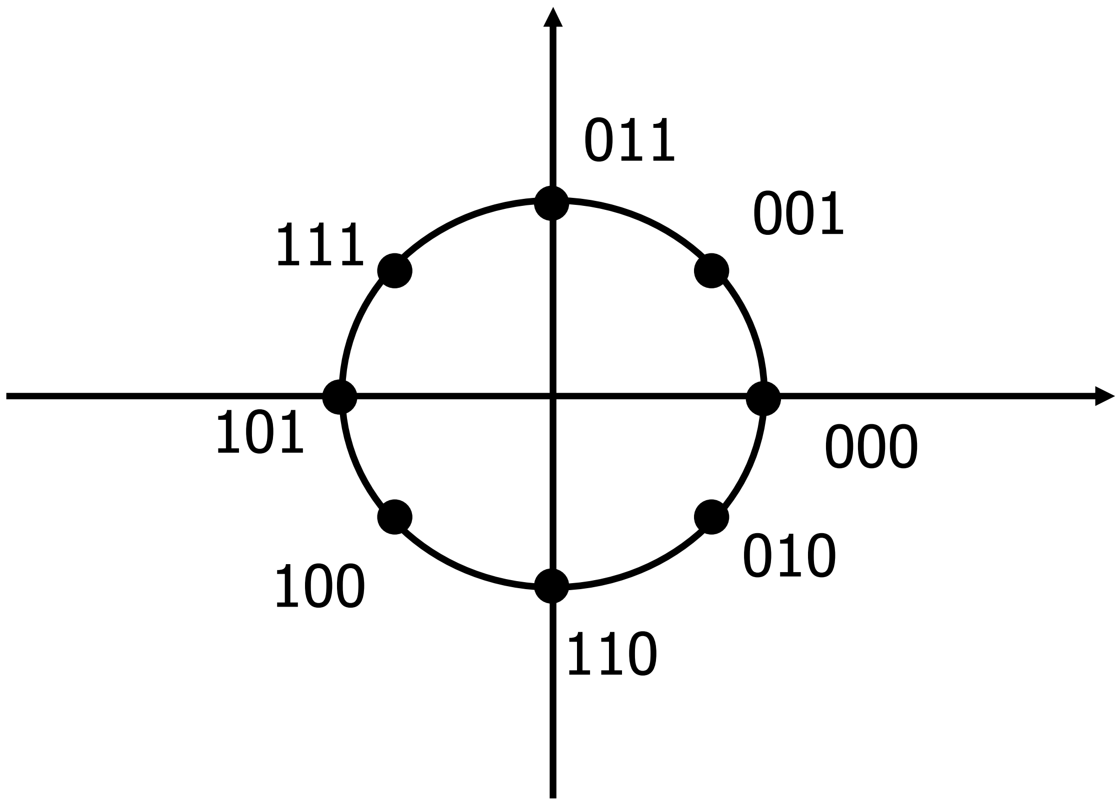
Trong trường hợp tối ưu: $A_{\min} = w_{\min}$

Cho tín hiệu $\underline{s}_i$ liên kết với vector qua ánh xạ $\underline{v}_i = e^{-1}(\underline{s}_i)$.

Tất cả các tín hiệu liền kề "***adjacent***" $\underline{s}_i$ (có d_{min} nhỏ nhất với $\underline{s}_i$) được liên kết với các vector nhị phân có khoảng cách Hamming là 1 so với $\underline{v}_i$ ..

Theo cách này BER tiệm cận được tối thiểu hóa

Ví dụ:



Tính toán, ước lược phổ tín hiệu

Các thuộc tính phổ

Chúng ta muốn tính nghiên cứu các đặc tính tần số của tín hiệu truyền $s(t)$ thông qua tính mật đổ phổ công suất (power spectral density) $G_s(f)$ và định nghĩa băng thông phù hợp của tín hiệu truyên: vùng tần số chứa (một phần lớn giá trị của) $G_s(f)$.

Không gian tín hiệu lưỡng cực một chiều

Xem xét không gian tín hiệu sau:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\,,\, s_2(t) = -AP_T(t)\}$$

Đây là không gian tín hiệu một chiều với (d=1) , với cơ sở trực chuẩn:

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Do vậy, các tín hiệu trong M có biểu diễn dạng vector như sau:

$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = (-\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Xem xét tín hiệu được truyền:

Trong chu kỳ đầu tiên $[0,T[$ ta truyền

$$s_1(t) = +\alpha b_1(t) \quad \text{Hoặc} \quad s_2(t) = -\alpha b_1(t)$$

Trong chu kỳ bất kỳ $[nT,(n+1)T[$ ta truyền

$$s_1(t-nT) = +\alpha b_1(t-nT) \quad \text{Hoặc} \quad s_2(t-nT) = -\alpha b_1(t-nT)$$

Ta có thể biểu diễn dạng thức toán học của tín hiệu truyền như sau:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)}$$

$$\boxed{a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}}$$

$$\boxed{p(t) = b_1(t)}$$

Đối với mọi không gian tín hiệu một chiều:

$$M = \{\underline{s}_1 = (\alpha_1), \underline{s}_2 = (\alpha_2), \ldots, \underline{s}_m = (\alpha_m)\} \subseteq R$$

với tín hiệu trực chuẩn: $b_1(t)$

Tín hiệu truyền sẽ có dạng:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)}$$

$$\boxed{a[n] \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m\}} \qquad \boxed{p(t) = b_1(t)}$$

Chuỗi $a[n]$ là một chuỗi có tính chất dừng của các biến ngẫu nhiên, gồm các ký hiệu độc lập thống kê và có phân bố xác xuất đều:

$$P\left(a[n]=\alpha_i\right)=\frac{1}{m}$$

Trung bình

Phương sai

$$\mu_a=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

$$\sigma_a^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu_a\right)^2$$

Dạng sóng truyền:

Trong phần tớ đây, chúng ta sẽ tính mật độ phổ công suất của tín hiệu truyền đi được tạo ra bởi không gian vector một chiều:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

$s(t)$ là một tiến trình ngẫu nhiên, mà ta muốn tính mật độ phổ công suất của nó:

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Giá trị này cung cấp thông tin về việc phân bố công suất của tín hiệu trên miền tần số:

$$P(s) = R_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_s(f)\, df$$

Lý thuyết về mật độ phổ công suất

Cho một tiến trình ngẫu nhiên $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$

Với

- $a[n]$ là một chuỗi có tính chất dừng của các biến ngẫu nhiên, với

$$M_a(i)=E[a[n]a[n+i]]$$

- $p(t)$ is là tín hiệu thực với giá trị sau biến đổi Fourier là $P(f)$

Mật độ phổ công suất được tính:

$$\boxed{G_s(f) = S_a(f)\frac{|P(f)|^2}{T}}$$

Với $$S_a(f) = \sum_i M_a(i)e^{-j2\pi fiT}$$

Chứng minh (tự tham khảo)

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Tiến trình ngẫu nhiên là một tiến trình dừng vòng. Ta tính:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T M_{SS}(t+\tau, t)\, dt$$

$$M_{SS}(t+\tau,t)=E[S(t+\tau)S(t)]=E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a[m]p(t+\tau-mT)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a[n]p(t-nT)\right]=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E\big[a[m]a[n]\big]p(t+\tau-mT)\ p(t-nT)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(m-n)p(t+\tau-mT)p(t-nT)=$$

Với $i=(m\text{-}n)$ $[\ m=n+i\ ]$

$$\boxed{M_{SS}(t+\tau,t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)p(t+\tau-nT-iT)p(t-nT)}$$

$$M_{SS}(t+\tau,t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\,p(t+\tau-nT-iT)\,p(t-nT)$$

$$R_s(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T M_{SS}(t+\tau,t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\,p(t+\tau-nT-iT)\,p(t-nT)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[p(t+\tau-nT-iT)\,p(t-nT)\right]dt=$$

Với $t'=(t-nT)$

$$=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{-(n-1)T}\left[p(t'+\tau-iT)\,p(t')\right]dt'$$

$$\boxed{R_s(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[p(t'+\tau-iT)\,p(t')\right]dt'}$$

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau - iT)\, p(t') \right] dt'$$

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau - iT)\, p(t') \right] dt' \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau - iT)\, p(t') e^{-j2\pi f\tau} \right] dt'\, d\tau =$$

$$t'' = t' + \tau - iT \qquad\qquad \tau = t'' - t' + iT$$

$$e^{-j2\pi f\tau} = e^{-j2\pi ft''}\, e^{j2\pi ft'}\, e^{-j2\pi fiT}$$

$$G_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'')\, p(t') e^{-j2\pi ft''}\, e^{j2\pi ft'}\, e^{-j2\pi fiT} \right] dt'\, dt'' =$$

$$G_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'')p(t')e^{-j2\pi f t''}\ e^{j2\pi f t'}\ e^{-j2\pi f iT} \right] dt'\, dt'' =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i)e^{-j2\pi f iT}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t'')\ e^{-j2\pi f t''}dt''\int_{-\infty}^{+\infty} p(t')\ \ e^{j2\pi f t'}\ dt' =$$

$$= \frac{1}{T} S_a(f)P(f)P^*(f)$$

$$\boxed{G_v(f) = S_a(f)\,\frac{\left|P(f)\right|^2}{T}}$$

Các ký hiệu động lập thống kê vời trị TB bằng 0

Trường hợp điển hình:

Giả thiết chooĩi $a[n]$ có đặc trưng:

- Độc lập thống kê
- Trung bình bằng 0: $\mu_a = 0$

Tương ứng với không gian tín hiệu (vector) 1 chiều đối cực qua gốc tọa độ

Ta có

$$\text{for } i \neq 0 \quad M_a(i) = E(a[n+1]a[n]) = E(a[n+1])E(a[n]) = 0$$

$$\text{for } i = 0 \quad M_a(i) = E\left(a[n]^2\right) = \sigma_a^2$$

Với:

$$S_a(f) = \sum_i M_a(i) e^{-j2\pi f iT} = \sigma_a^2$$

Mật độ phổ công suất:

$$G_s(f) = S_a(f) \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Giản lược như sau:

$$\boxed{G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}}$$

Đối với không gian tín hiệu một chiều đối cực qua gốc tọa độ centre-of-mass in the origin), mật độ phổ công suất của tín hiệu truyền tỷ lệ với $|P(f)|^2$

Ví dụ không gian 1

Giả thiết:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\,,\ s_2(t) = -AP_T(t)\,\}$$

Đây là không gian một chiều (d=1) , với tín hiệu trực chuẩn

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Không gian tín hiệu được biểu diễn dưới dạng vector như sau:

$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\ \underline{s_2} = (-\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Dạng tín hiệu truyền: $$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

Với $$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$ $$p(t) = b_1(t)$$

Với chuỗi *a[n]* có

TB $$\mu_a = 0.5\,(-\alpha + \alpha) = 0$$

Phương sai $$\sigma_a^2 = 0.5\,(\alpha^2 + \alpha^2) = \alpha^2 = A^2 T$$

Chuỗi *a[n]* gồm các ký hiệu độc lập thống ke với TB bằng 0

Mật độ phổ công suất như sau:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Ta có:

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

Ta định nghĩa hàm: *sinc(x):*

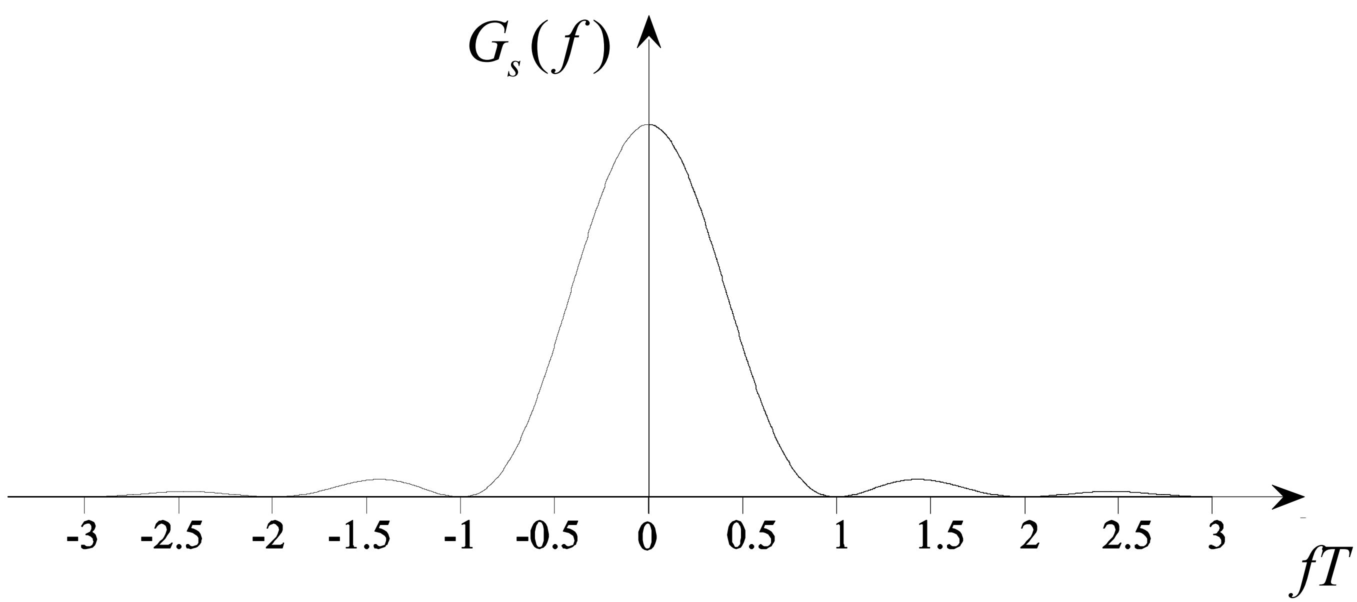
Biến đổi Fourier của *s(t)* là:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$$

$$P(f) = \sqrt{T}\,\text{sinc}(fT)e^{-j\pi f \mathrm{T}} = \sqrt{T}\,\frac{\sin(\pi fT)}{(\pi fT)}e^{-j\pi f \mathrm{T}}$$

Do vậy PSD của không gian tín hiệu này là:

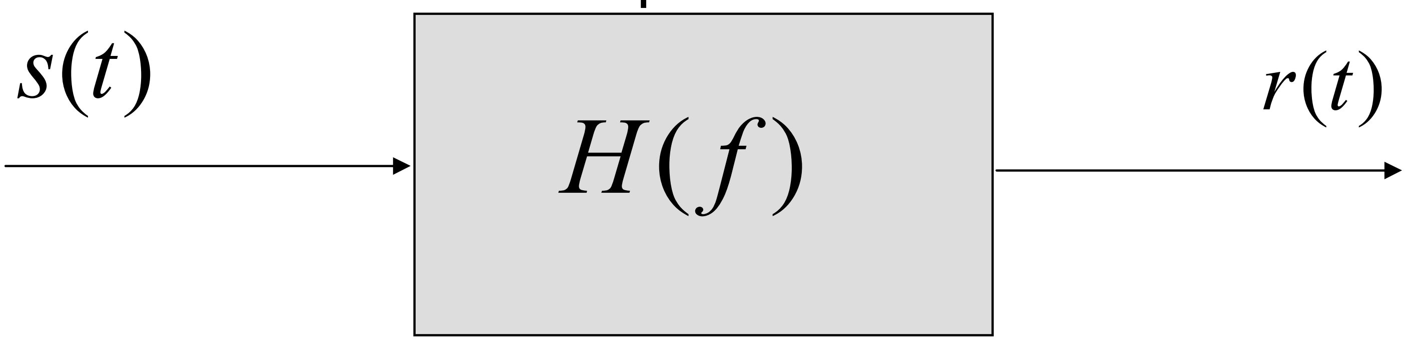
$$\boxed{G_s(f) = A^2 T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)} \right)^2}$$



Kết luận

- Đây là phổ ở băng tần cơ sở (tập trung quanh gốc tọa độ "centred around the origin = DC")
- Phổ bằng 0 khi các tần số là bội của $1/T$
- Búp chính "main lobe" có độ rộng $2/T$, từ $-1/T$ đến $+1/T$
- Tất cả các búp bên có độ rộng $1/T$ với cường độ giảm dần

Không gian tín hiệu này phù hợp với kênh có đáp ứng tần số thấp “low-pass response”

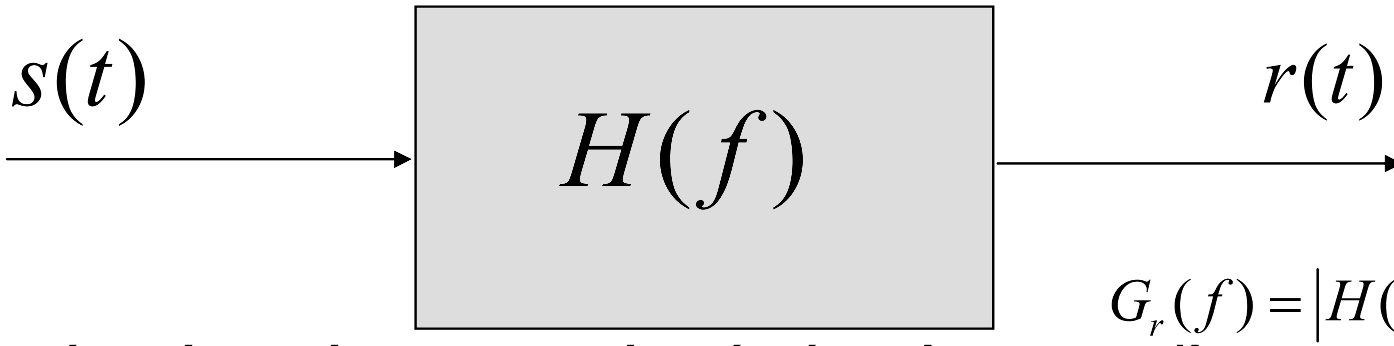


Tín hiệu nhận được có phổ (ko tính tạp âm) như sau:

Vì $G_s(f)$ là không giới hạn trong trục tần số, do đó chỉ kênh lý tưởng với đáp ứng tần số $H(f)=1$ mới không tạo ra méo tín hiệu

$$G_r(f) = \left|H(f)\right|^2 G_s(f)$$

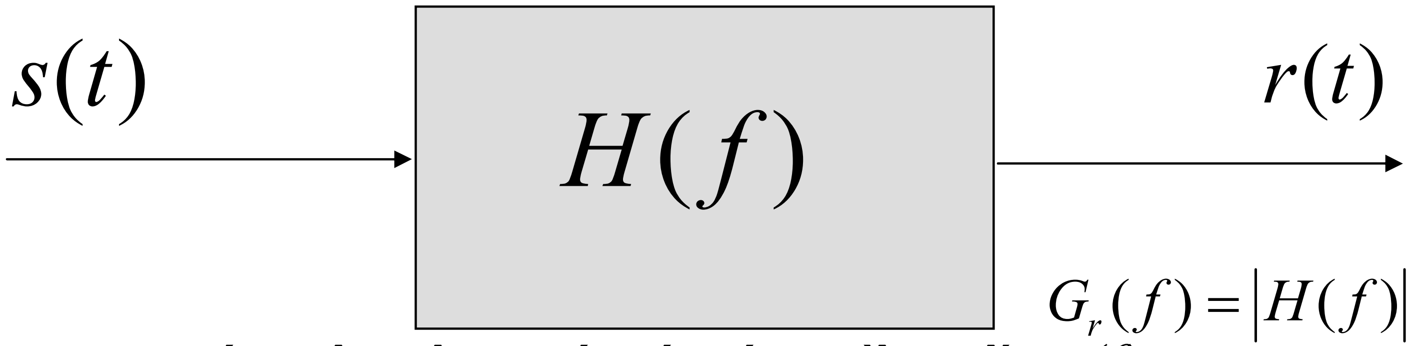
Constellation 1



$$G_r(f) = \left|H(f)\right|^2 G_s(f)$$

Nếu $H(f) \neq 1$, tín hiệu nhận được khác với tín hiệu đã truyền. Tuy nhiên, nếu bang thông tín hiệu đủ lớn, tín hiệu nhận được sẽ không quá khác (độ méo không cao) so với tín hiệu truyền.

Để giảm độ méo → kênh cơ cở với tần số "cut-off" cao.



$$G_r(f) = \left|H(f)\right|^2 G_s(f)$$

Với một kênh có đáp ứng tần số $H(f)$

Ta phải thiết kế một tín hiệu truyền sao cho phổ $G_s(f)$ tập trung quanh khu vực tần số mà $H(f)$ là “good” .

Theo cách này, tín hiệu nhận được sẽ xấp xỉ tín hiệu truyền