GIẢI TÍCH I

BÀI 1

(§1 – §5)

• Tổng quan

• Phương pháp học

§1. Các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

• Đặt vấn đề

I. Sơ lược về các yếu tố logic

1. Điều kiện cần và đủ

• $P \Rightarrow Q$

• $P \Leftrightarrow Q$

2. Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$

3. Chứng minh logic

a) Phương pháp bắc cầu: $(P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

b) Phương pháp phủ định: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

c) Phương pháp chỉ ra phản ví dụ

4. Phương pháp quy nạp. Cần chứng minh mệnh đề $T(n)$ đúng $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Giả sử có +) $T(1)$ đúng

+) $T(k)$ đúng $\Rightarrow T(k + 1)$ đúng, $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó $T(n)$ đúng $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

II. Các tập hợp số

1. Sự cần thiết mở rộng tập hợp số $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Hệ tiên đề của tập hợp số thực

a) $\mathbb{R}$ (+, .): $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ có $a + b \in \mathbb{R}$, $a.b \in \mathbb{R}$

giao hoán, kết hợp

b) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!\ x \in \mathbb{R} : a + x = b$.

c) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow \exists!\ x \in \mathbb{R} : a.x = b$.

d) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \le b$ hoặc $b \le a$

quan hệ thứ tự có tính chất phản đối xứng, bắc cầu.

e) Tiên đề supremum

- $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, A bị chặn trên đều có supremum $\in \mathbb{R}$
- $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, A bị chặn dưới đều có infimum $\in \mathbb{R}$

Chú ý

Từ trên nhận được các tính chất đã biết ở phổ thông, chẳng hạn

- T/c Archimede: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$: $na > b$.
- $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow \exists\ r \in \mathbb{Q}$: $a < r < b$.

§ 2. TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

2. Tính chất

a) $|x| < a$, $a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$.

b) $|x| > b$, $b > 0 \Leftrightarrow x > b$ hoặc $x < -b$.

c) $|a + b| \leq |a| + |b|$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

§ 3 HÀM SỐ

• Đặt vấn đề

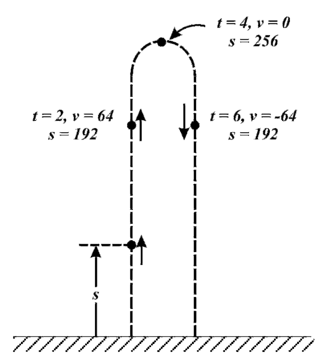
1. Định nghĩa. $X \subset \mathbb{R}$, tương ứng f: $X \to \mathbb{R}$ là hàm số nếu thoả mãn:

+) $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

+) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Khi đó X là tập xác định, còn $\{f(x),\ x \in X\}$ là tập giá trị.

Ví dụ 1. Một tên lửa phóng thẳng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 128ft/s. Tên lửa này chuyển động lên hoặc xuống theo đường thẳng. Bằng thực nghiệm, độ cao của tên lửa được cho bởi công thức $f(t) = 128t - 16t^2$



Ví dụ 2. $x \to x^2 + y^2 = 1$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos \pi x}$

Ví dụ 4. Tìm tập giá trị $y = \sin x + \cos x$

Ví dụ 5. Tìm $f(x)$ biết $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x > 0$.

2. Một số khái niệm

a) Đồ thị của hàm $y = f(x)$ là $\{(x, f(x)), x \in$ TXĐ$\}$

b) $y = f(x)$ chẵn $\Leftrightarrow \forall\ x \in$ MXĐ có $f(x) = f(-x)$

Ví dụ. $y = \sqrt[3]{(1-x)} + \sqrt[3]{(1+x)}$

c) $y = f(x)$ lẻ $\Leftrightarrow \forall\ x \in$ MXĐ có $f(x) = -f(-x)$

Ví dụ. $y = a^x - a^{-x}$, $a > 0$.

d) Hàm $y = f(x)$ tuần hoàn $\Leftrightarrow \exists\ T \neq 0$: $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in$ TXĐ.

Số $T > 0$ bé nhất để $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x$ được gọi là chu kì.

Ví dụ. $y = \sqrt{\tan x}$

đ) Hàm hợp: $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, có hàm hợp $y = f \circ \varphi \equiv f(\varphi(t))$

e) Hàm ngược: $y = f(x)$, TXĐ X, TGT: Y có hàm ngược $x = \varphi(y)$

$\Leftrightarrow$ +) $(f \circ \varphi)(y) = y$, $\forall\ y \in Y$

+) $(\varphi \circ f)(x) = x$, $\forall\ x \in X$

Ví dụ. $y = \sqrt{1-x^2}$ với $-1 \le x \le 0$, có $x = -\sqrt{1-y^2}$, $y \in [0\ ;\ 1]$

§ 4. HÀM SỐ SƠ CẤP

1. Định nghĩa. Các hàm số sơ cấp cơ bản là x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, và các hàm lượng giác ngược.

2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

a) $y = x^\alpha$, TXĐ: phụ thuộc α, đồ thị $\ni (1\ ;\ 1)$, $\forall\ \alpha$.

b) $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, TXĐ: $\mathbb{R}$, TGT: $y > 0$, đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $a < 1$

$$a^{x+y} = a^x\ a^y,\ a^{x-y} = a^x\ /\ a^y$$

c) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, TXĐ: $x > 0$, TGT: $\mathbb{R}$, đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $a < 1$

$\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a|x|$;

$y = \log_a x$ có hàm ngược là $x = a^y$.

d) Các hàm lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

e) Các hàm lượng giác ngược

+) $y = \arcsin x$: $[-1\ ;\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ là hàm ngược của hàm $y = \sin x$

+) $y = \arccos x$: $[-1\ ;\ 1] \to [0\ ;\ \pi]$ là hàm ngược của hàm $y = \cos x$

+) $y = \arctan x$: $(-\infty\ ;\ \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm ngược của hàm $y = \tan x$

+) $y = \text{arccot} x$: $(-\infty\ ;\ \infty) \to (0\ ;\ \pi)$ là hàm ngược của hàm $y = \cot x$

3. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa. Tạo nên từ các hàm số sơ cấp cơ bản bởi số hữu hạn các phép tổng, hiệu, tích, thương, phép lấy hàm hợp và các hằng số

Ví dụ 1. $y = \sqrt[3]{x + \sin x}$

Ví dụ 2. $y = |x|$

Ví dụ 3. $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

§ 5. DÃY SỐ

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,\ x_i \in \mathbb{R}$.

2. Giới hạn.

a) Định nghĩa

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon \geq 0$, bé tuỳ ý, $\exists\ N(\varepsilon)$: $\forall\ n > N(\varepsilon)$ thì có $|x_n - a| < \varepsilon$.

Định nghĩa.

Khi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0$, lớn tuỳ ý, $\exists\ N$: $\forall\ n > N$ có $|x_n| > M$, ta nói dãy số phân kì

b) Tính chất

1°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a > p$ $(a < p) \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$ có $x_n > p$ $(x_n < p)$

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \leq p$ $(x_n \geq p) \Rightarrow a \leq p$ $(a \geq p)$

3°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$.

4°) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists M > 0$: $|x_n| \leq M$, $\forall n$.

c) Phép toán

Có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, khi đó ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$; $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, $\forall\ n$.

d) Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

1°) Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn. $\forall$ dãy đơn điệu tăng (giảm) bị chặn trên (dưới) $\Rightarrow$ có giới hạn.

2°) Tiêu chuẩn kẹp. Có $x_n \le y_n \le z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

3°) Tiêu chuẩn Cauchy. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon): \forall m, n > N$ có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Ví dụ 1. Cho dãy x_n: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn.

Ví dụ 2. Cho dãy x_n: $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!