ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Toán Rời Rạc

Đồ thị có hướng

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Ngô Đắc Tân, *Lý thuyết Tổ hợp và Đồ thị*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.
- Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd Edition, 2000.

Nội dung

1. Định nghĩa và ví dụ

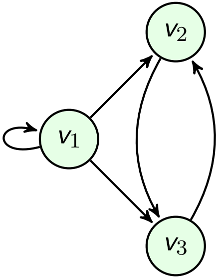
2. Đồ thị thi đấu

Định nghĩa

Một đồ thị có hướng là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, ở đây V là một tập, còn E là một tập con của tích đề các $V \times V$, tức E là một quan hệ hai ngôi trên V.

- Các phần tử của V thường được gọi là các ***đỉnh***.
- Các phần của E gọi là các ***cung***.
- Cụ thể hơn, nếu $(a, b) \in E$ thì (a, b) được gọi là cung của G với ***đỉnh đầu*** là a và ***đỉnh cuối*** là b,
- và ta viết $a \to b$

Đồ thị có hướng

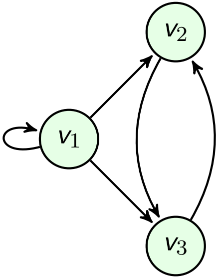


Đồ thị có hướng $G = (V, E)$:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{v_1 \to v_1, v_1 \to v_2, v_1 \to v_3, v_2 \to v_3, v_3 \to v_2\}$$

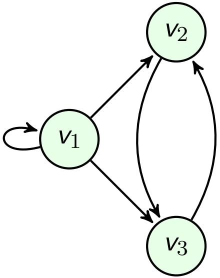
Bậc vào & bậc ra



Đỉnh	indeg	outdeg
v_1	1	3
v_2	2	1
v_3	2	1
	5	5

Mệnh đề

$$\sum_{v \in V} \operatorname{indeg}(v) = \sum_{v \in V} \operatorname{outdeg}(v) = |E|$$



Hành trình có hướng và đường đi có hướng

	Hành trình	*Hành trình đơn*	*Đường đi*
Lặp cạnh	✓	✗	✗
Lặp đỉnh	✓	✓	✗

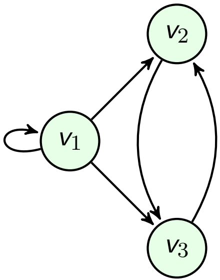
Định nghĩa

Xét $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng với $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ma trận kề $A = (a_{ij})$ của G định nghĩa bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } v_i \to v_j \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Ví dụ



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Định lý

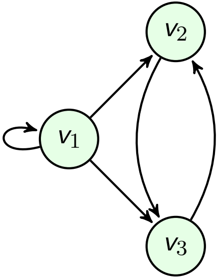
Xét $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng với n đỉnh

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

và $A = (a_{ij})$ là ma trận kề của G. Xét $(p_{ij}^{(k)})$ là số hành trình có hướng từ v_i tới v_j. Khi đó

$$A^k = (p_{ij}^{(k)}).$$

Ví dụ



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chứng minh

- Bằng quy nạp theo độ dài hành trình.
- Ta ký hiệu $a_{ij}^{(k)}$ là phần tử ở hàng i cột j của ma trận A^k.
- Ta đặt

$$P(k) := \forall i, j \quad a_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)}$$

- Bước cơ sở: $k = 1$. ✓ Tại sao?

Chứng minh: Bước quy nạp

- Giả sử $P(k)$ ✓
- Hành trình độ dài $k+1$ từ v_i đến v_j có thể tách thành

$$v_i \overset{k}{\rightsquigarrow} v_h \to v_j$$

- với $v_i \overset{k}{\rightsquigarrow} v_h$ là một hành trình độ dài k từ v_i tới v_h
- và $h : v_h \to v_j$ là một cạnh trong G.

Chứng minh: Bước quy nạp (tiếp)

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(k+1)} = \sum_{h:\ v_h \to v_j} p_{ih}^{(k)} &= \sum_{h=1}^{n} p_{ih}^{(k)} \cdot a_{hj} \\
&= \sum_{h=1}^{n} a_{ih}^{(k)} \cdot a_{hj} && \text{(giả thiết quy nạp)} \\
&= a_{ij}^{(k+1)} && \text{(quy tắc nhân ma trận)}
\end{aligned}
$$

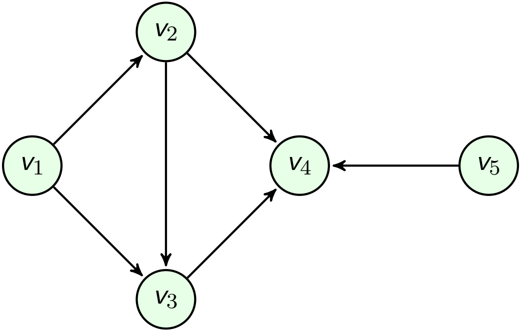
✓

Định nghĩa

Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là ***liên thông mạnh*** nếu với mọi $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ u tới v trong G.

Định nghĩa

Một đồ thị có hướng được là ***phi chu trình*** (DAG) nếu nó không chứa chu trình có hướng.



Nội dung

Định nghĩa

- Một ***đồ thị định hướng*** của một đồ thị (vô hướng) $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng thu được từ G bằng cách chọn một hướng

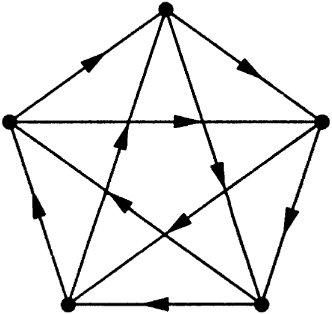
$$x \to y \quad \text{hoặc} \quad y \to x$$

  cho mỗi cạnh $xy \in E$.
- ***Đồ thị thi đấu*** là một đồ thị định hướng của một đồ thị đầy đủ nào đó.

Ví dụ

- Đồ thị định hướng của đồ thị đầy đủ cho phép mô hình hóa các giải đấu thể thao kiểu "round-robin".
- Giải đấu gồm n đội và mỗi đội thi đấu với tất cả các đội khác.
- Với mỗi cặp u, v, ta có cạnh $u \to v$ nếu u thắng v.
- Cuối giải ta có một đồ thị định hướng của K_n.
- "Điểm số" của mỗi đội chính là bậc ra của đội đó, là số lần thắng.

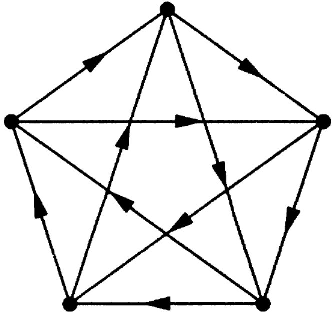
Đội nào vô địch?



Định nghĩa

Một ***đường đi Hamilton*** có hướng là hành trình đi qua mỗi đỉnh của G đúng một lần.

Đồ thị thi đấu luôn có đường Hamilton?



Định lý

Mọi đồ thị thi đấu đều chứa một đường đi Hamilton.

Chứng minh

- Bằng quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị. Đặt

$$P(n) := \text{"Mọi đồ thị thi đấu với } n \text{ đỉnh đều chứa đường đi Hamilton."}$$

- Bước cơ sở: $n = 1$ ✓
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng.
- Xét đồ thị thi đấu $n + 1$ đỉnh.
- Bỏ đi một đỉnh v bất kỳ, ta còn đồ thị thi đấu n đỉnh:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

- Theo quy nạp ta có đường đi

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n.$$

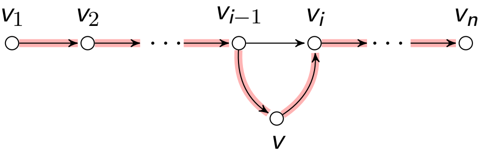
Trường hợp 1

Nếu $v \to v_1$, vậy ta có đường Hamilton

$$v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$$

Trường hợp 2

Nếu $v_1 \to v$ và tồn tại i nhỏ nhất sao cho $v \to v_i$.



Trường hợp 3

Nếu $v_1 \to v$ và với mọi i, $v_i \to v$. Vậy ta có đường Hamilton

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v \qquad \checkmark$$

Trò chơi chọi gà

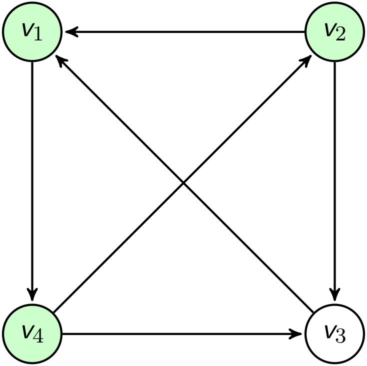
- Hoặc con gà u thắng con gà v: $u \to v$
- Hoặc con gà v thắng con gà u: $v \to u$
- Con gà u gọi là ***gần thắng*** con gà v nếu

$$u \to v \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} u \to w \\ w \to v \end{cases}$$

- Một ***vua gà*** là con gà gần thắng mọi con gà khác.

Ví dụ

Hãy tìm các vua gà.



Câu hỏi

Có phải mọi đồ thị thi đấu đều có vua gà?

Định lý

Con gà với bậc ra cao nhất là một vua.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Xét u có bậc ra cao nhất và u không là vua. Vậy tồn tại v thỏa mãn:

1. $v \to u$, và
2. Với mọi w: $\underbrace{\neg(u \to w)}_{w \to u}$ hoặc $\underbrace{\neg(w \to v)}_{v \to w}$

Chứng minh (tiếp)

Ta chứng minh bằng phản chứng. Xét u có bậc ra cao nhất và u không là vua. Vậy tồn tại v thỏa mãn:

1. $v \to u$, và
2. Với mọi w: $\underbrace{\neg(u \to w)}_{w \to u}$ hoặc $\underbrace{\neg(w \to v)}_{v \to w}$

Khẳng định 2 tương đương với

Nếu $u \to w$ vậy $v \to w$.

Kết hợp với khẳng định 1 ta được

$$\mathrm{outdeg}(v) \geq \mathrm{outdeg}(u) + 1 \qquad ✗.$$