MI1142 **ĐẠI SỐ (nhóm ngành 2)**

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ bản về đại số tuyến tính như ma trận, định thức hệ phương trình, không gian véc tơ, không gian Euclide, … làm cơ sở để cho việc học tiếp các học phần sau về toán cũng như các môn kỹ thuật khác, từ đó sinh viên có khả năng vận dụng kiến thức của môn học vào việc giải quyết một số mô hình bài toán thực tế.

Nội dung: Logic, Tập hợp, Ánh xạ, Số phức, Ma trận định thức, hệ phương trình; Không gian véc tơ, Ánh xạ tuyến tính, Không gian Euclide.

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Đại số
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI1142
Khối lượng:	3(2-2-0-6) - Lý thuyết: 30 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về logic và đại số tuyến tính như logic, tập hợp, ánh xạ, số phức, ma trận, định thức hệ phương trình, không gian véc tơ, không gian Euclide,…

Ngoài ra môn học cũng rèn luyện cho sinh viên kỹ năng giải quyết vấn đề bằng tư duy logic chặt chẽ, kỹ năng làm việc độc lập, sự tập trung cùng thái độ làm việc nghiêm túc.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	**Nắm vững được các kiến thức cơ bản của logic và đại số tuyến tính**	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của logic và đại số tuyến tính như: mệnh đề, tập hợp, ma trận, hệ phương trình tuyến tính, không gian véc tơ, không gian Euclide, ánh xạ tuyến tính.	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U
M2	**Có thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để làm việc có hiệu quả**	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015), ***Toán học cao cấp tập 1: Đại số và hình học giải tích*** , NXB Giáo dục VN.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Bài tập Toán học cao cấp, tập 1: Đại số và hình học giải tích*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

Tài liệu tham khảo

[1] Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh Lương (2015), *Đại số tuyến tính*, NXB Bách Khoa HN.

[2] Trần Xuân Hiển, Lê Ngọc Lăng, Tống Đình Quỳ, Nguyễn Cảnh Lương (2007), *Phương pháp giải toán cao cấp, Phần đại số*, NXB Đại học kinh tế quốc dân, Hà Nội.

[3] Nguyễn Tiến Quang, Lê Đình Nam (2016), *Cơ sở đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Đánh giá quá trình**			**30%**
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Kiểm tra giữa kỳ	Thi tự luận		
A2. Điểm cuối kỳ	**A2.1. Thi cuối kỳ**	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ –2 đến +2, theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	• **Giới thiệu về môn học** - Thông tin giảng viên - Các vấn đề liên quan đến môn học - Cách thức dạy, học và hình thức đánh giá. **Chương 1. Ánh xạ, số phức (6 LT + 6 BT)** **1.1** Một số vấn đề về tập hợp - Một số kí hiệu, các phép toán trên tập hợp - Tích Descarte của các tập hợp. **1.2** Ánh xạ - Định nghĩa, ví dụ - Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, tập ảnh, tập nghịch ảnh	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3	**Giảng viên:** - Tự giới thiệu. - Giới thiệu đề cương môn học. - Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học. - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng giải các bài tập phù hợp nội dung và tiến độ	A1.1 A1.2 A2.1

			môn học.	
2	- Tích ánh xạ, ánh xạ ngược **1.3** Số phức - Số phức - Biểu diễn hình học và dạng lượng giác của số phức	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	**Giảng viên:** - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1 A1.2 A2.1
3	- Phép toán luỹ thừa, khai căn - Giải phương trình đại số trên C	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
4	**Chương 2. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính (8LT+ 8BT)** **2.1** Ma trận - Định nghĩa ma trận (MT), các kiểu MT: chữ nhật, vuông, không, tam giác trên, tam giác dưới, chéo, đơn vị, chuyển vị - Các phép toán: cộng MT, nhân một số với MT, nhân MT với MT	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
5	**2.2** Định thức của ma trận vuông - Định thức cấp 1, cấp 2, cấp 3, định thức cấp n (định nghĩa qua cấp n-1) - Các tính chất cơ bản của định thức, định thức của tích hai MT (không chứng minh) - Tính định thức bằng phương pháp biến đổi sơ cấp	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
6	**2.3** Hạng ma trận, ma trận nghịch đảo - Hạng MT, hạng của MT bậc thang - Tính hạng MT bằng phương pháp biến đổi sơ cấp - MT nghịch đảo, tính chất, điều kiện khả đảo	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1

	- Tìm MT nghịch đảo bằng phần phụ đại số và bằng biến đổi sơ cấp			
7	**2.4** Hệ phương trình tuyến tính - Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính, nghiệm, hệ thuần nhất, không thuần nhất, dạng MT - Hệ Crame, định lý tồn tại duy nhất nghiệm, công thức nghiệm (chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm và dạng MT) - Hệ thuần nhất m-phương trình, n-ẩn - Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát, định lý Kronecker – Capelli, phương pháp Gauss giải hệ phương trình	M1.1 M1.2 M2.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
8	**Chương 3. Không gian véctơ trên R (6LT + 6BT)** **3.1** Khái niệm không gian véctơ - Định nghĩa không gian véc tơ trên R, ví dụ - Những tính chất cơ bản **3.2** Không gian véctơ con - Định nghĩa, tiêu chuẩn nhận biết, ví dụ: không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất - Không gian con sinh bởi hệ véctơ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
9	**3.3** Cơ sở và toạ độ trong không gian véctơ hữu hạn chiều - Hệ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, hệ sinh, cơ sở, số chiều của không gian véctơ, định lý bổ sung vào một hệ độc lập tuyến tính trong không gian véctơ hữu hạn chiều để được cơ sở	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
10	- Toạ độ của véctơ đối với một cơ sở, công thức đổi toạ độ khi đổi cơ sở	M1.1 M1.2		A1.1 A2.1

	- Hạng của hệ véctơ, cách tính hạng khi biết toạ độ của chúng, chiều của không gian con sinh bởi hệ véctơ	M2.1 M2.3		
11	**Chương 4. Ánh xạ tuyến tính (6LT + 6BT)** **4.1** Khái niệm ánh xạ tuyến tính - Định nghĩa, ví dụ, các phép toán - Khái niệm hạt nhân, ảnh, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu - MT của cùng một phép biến đổi tuyến tính đối với hai cơ sở; MT đồng dạng	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
12	**4.2** Ma trận của ánh xạ tuyến tính - MT của ánh xạ tuyến tính f: E⟶ F đối với cặp cơ sở của E, F tương ứng - MT của phép biến đổi tuyến tính đối với một cơ sở. Quan hệ của hai MT của cùng một phép biến đổi tuyến tính đối với hai cơ sở - MT đồng dạng	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
13	**4.3** Trị riêng và véctơ riêng - Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính (biến đổi tuyến tính), ví dụ. Cách tìm trị riêng và véctơ riêng trong không gian n chiều, dẫn đến định nghĩa trị riêng và véctơ riêng của MT - Chéo hoá MT: điều kiện cần và đủ để MT chéo tìm được, tìm MT làm chéo hoá và kết quả của chéo hoá (không chứng minh)	M1.1 M1.2 M2.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
14	**Chương 5. Không gian Euclide (4LT + 4BT)** - Tích vô hướng, không gian có tích vô hướng, độ dài véctơ, sự vuông góc, góc giữa hai véctơ, bất đẳng thức Cauchy – Schwarz	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1

	- Không gian Euclide, cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn, biểu diễn tích vô hướng qua toạ độ trực chuẩn			
15	- Thuật toán Gram-Schmidt - Phép chiếu trực giao - MT trực giao (MT chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là MT trực giao) **Tổng kết**	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 15/7/2020

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI ★ VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

==========***==========

BÀI TẬP THAM KHẢO

HỆ ĐÀO TẠO: CHÍNH QUY

HỌC PHẦN: ĐẠI SỐ - MÃ HỌC PHẦN: MI1142

==============================***==============================

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung kiểm tra: Chương 1, chương 2.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

==============================***==============================

CHƯƠNG I.
TẬP HỢP – ÁNH XẠ - SỐ PHỨC

Bài 1. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên R. Kí hiệu $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$. Biểu diễn tập nghiệm phương trình sau qua A, B:

a) $f(x)g(x) = 0$ b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

Bài 2 (GK20141). Cho các tập hợp $A = [3; 6), B = (1; 5), C = [2; 4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B) \backslash C$.

Bài 3. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3\}, B = \{2; 4; 6\}, C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Xác định tập hợp $[(A \backslash B) \cap (B \backslash C)] \cup (C \backslash A)$.

Bài 4 (CK 20151). Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh

$$[(A \cup B) \backslash C] \subset [(A \backslash B) \cup (B \backslash C)].$$

Bài 5 (CK 20142). Cho các tập hợp A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh: $[(A \cup B) \backslash (C \cup D)] \subset [(A \backslash C) \cup (B \backslash D)]$. Đưa ra ví dụ để cho thấy hai vế của bao hàm tập hợp trên có thể không bằng nhau.

Bài 6. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.

c) $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D)$ **(GK20151)**

Bài 7. Cho hai ánh xạ

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Bài 8. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ f: $X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $A, B \subset X$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; $A, B \subset X$.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$; $A, B \subset Y$

Bài 9. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 4x - 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$, và $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 3\}$. Xác định các tập hợp f(A), $f^{-1}(A)$.

Bài 10 (CK 20161). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$ và tập $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 11 (GK 20171). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x; y) = (x^2 - y;\ x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Bài 12. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1+i\sqrt{3})^9$ c) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$ c) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11}$.

Bài 13. Khai căn bậc 8 của số phức: $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Bài 14. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$ c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ e) $\overline{z^7} = \dfrac{1024}{z^3}$ f) $z^8(\sqrt{3}+i) = 1 - i$. g) $iz^2 - (1+8i)z + 7 + 17i = 0$ **(GK20171)**

Bài 15 (GK 20141). Cho $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị 1. Tính $A = \sum_{i=1}^{2014} \epsilon_i^2$.

Bài 16. Cho phương trình $\dfrac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod_{k=1}^{8} \sin\dfrac{k\pi}{9}$.

Bài 17 (CK 20161). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{f(z) = iz^2 + (4-i)z - 9i}$, với $\boldsymbol{i}$ là đơn vị ảo. Xác định $\boldsymbol{f^{-1}}(\{7\})$.

==========***==========

Bài 18 (GK 20171). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $|z_1^2 - z_2^2| = 1$.

==========***==========

CHƯƠNG II.

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1 Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Phép tính nào sau đây thực hiện được? $(A+C)$; $B(A+C^t)$; C^tB. Hãy thực hiện phép tính đó.

Bài 2 (CK 20152). Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2

a) Tính $F=A^2-3A$

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2+5E)X=B^T(3A-A^2)$

Bài 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}$ và đa thức $f(x)=3x^2-2x+5$. Tính f(A).

Bài 4. a) Cho $A=\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$. Tính A^n. b) Cho $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$. Tính A^n.

Bài 5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn: a) $X^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $X^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Bài 6 Giải phương trình ma trận: $X^2-2X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

Bài 7. a) Chứng minh rằng ma trận $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 2, chứng minh rằng $A^k=0,(k>2) \Leftrightarrow A^2=0$.

Bài 8. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ac\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$.

Bài 9. Tính các định thức sau:

a) $A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{vmatrix}$ b) $B=\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ b+c & bc & b^2+c^2\\ c+a & ca & a^2+c^2\end{vmatrix}$ c) $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$

Bài 10. a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì det(A)=0.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh $\det(A-A^T)=0$.

Bài 11. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}$

Bài 12 (GK20141). Tìm m để hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\-1&2&2&1\\1&0&4&m\end{bmatrix}$ bằng 2.

Bài 13. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 14. Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$.

Bài 15(GK 20151). Tìm a để ma trận $A=\begin{bmatrix}a+1&-1&a\\3&a+1&3\\a-1&0&a-1\end{bmatrix}$ khả nghịch.

Bài 16. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0,(a_0\neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 17. Cho $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&3&4\\3&1&-1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\\0&3\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}2&12&10\\6&16&7\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX+B=C^T$.

Bài 18. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2\\7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5\\5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3=1\\-4x_1+2x_2+x_3=3\\-2x_1+x_2+4x_3=4\\10x_1-5x_2-6x_3=-10\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1\\3x_1-x_2+x_3=2\\5x_1+2x_2+5x_3=3\\x_1-4x_2-3x_3=1\end{cases}$

Bài 19. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 4z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$ **(GK 20171)** b) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -4 \\ 3x + 7y + 10z + 11t = -11 \\ x + 2y + 4z + 2t = -3 \\ x + 2y + 2z + 7t = -6 \end{cases}$ **(GK20151)**

Bài 20(GK 20171). Tìm a để hệ $\begin{cases} (a+5)x + 3y + (2a+1)z = 0 \\ ax + (a-1)y + 4z = 0 \\ (a+5)x + (a+2)y + 5z = 0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 21(CK 20172). Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 22. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = k \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + (m-1)x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2mx_4 = 5 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$, $k = 5$.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

=========***=========

CHƯƠNG III.
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Một vài ký hiệu sử dụng trong Chương III:

Không gian $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$

Không gian đa thức có bậc không vượt quá n: $P_n[x] = \left\{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}\right\}$

$M_{m\times n}$ ***là tập các ma trận kích thước*** $m \times n$. ***Đặc biệt*** M_n ***là tập các ma trận vuông cấp*** n.

Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ ***là:*** $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, ***ở đó***

$e_1=(1;0;...;0), e_2=(0;1;0;...;0), ..., e_i=(0;...;1;...;0), e_n=(0;...;0;1),\ \forall i=\overline{1,n}$

Cơ sở chính tắc của không gian $P_n[x]$ ***là:*** $E = \{e_1; e_2; ...; e_{n+1}\}$ ***với*** $e_1=1; e_2=x; ...; e_{n+1}=x^n$

Bài 1. Tập V với các phép toán có phải là không gian véc tơ không?

a) $V=\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$k(x,y,z)=(|k|x,|k|y,|k|z)$$

b) $V=\{x=(x_1,x_2) \mid x_1>0, x_2>0\} \subset \mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$ và $k(x_1,x_2)=(x_1^k,x_2^k)$ trong đó k là số thực bất kỳ

Bài 2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E=\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x)của KGVT $P_n[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n ($a_{ij}=-a_{ji}$).

Bài 3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) $V_1+V_2 := \{u_1+u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ là KGVT con của V.

Bài 4. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. Chứng minh rằng V_1, V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$.

Bài 5. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Bài 6. Cho $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của W_1, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của W_2 với W_1, W_2 và là các không gian con của V. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Bài 7. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (4;-2;6), v_2 = (-6;3;-9)$.

b) $v_1 = (2;3;-1), v_2 = (3;-1;5), v_3 = (-1;3;-4)$.

c) $v_1 = (1;2;3), v_2 = (3;6;7), v_3 = (-3;1;3), v_4 = (0;4;2)$.

Bài 8. Trong không gian $P_2[x]$, xét xem hệ véc tơ $B = \{u_1 = 1 + 2x, u_2 = 3x - x^2, u_3 = 2 - x + x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

Bài 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1;1;1), v_2 = (1;1;2), v_3 = (1;2;3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6;9;14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

a) $v_1 = (2;1;1), v_2 = (6;2;0), v_3 = (7;0;7), v = (15;3;1)$.

b) $v_1 = (0;1;1), v_2 = (2;3;0), v_3 = (1;0;1), v = (2;3;0)$.

Bài 11. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2;1;3;4), v_2 = (1;2;0;1), v_3 = (-1;1;-3;0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2;0;1;3;-1), v_2 = (1;1;0;-1;1), v_3 = (0;-2;1;5;-3), v_4 = (1;-3;2;9;-5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 12. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ : $v_1 = (1;0;1;0), v_2 = (0;1;-1;1), v_3 = (1;1;1;2), v_4 = (0;0;1;1)$. Đặt $W_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}, W_2 = \text{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$.

Bài 13(CK 20151). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u_1 = (1;3;-2;1), u_2 = (-2;3;1;1), u_3 = (2;1;0;1), u = (1;-1;-3;m)$. Tìm m để $u \in Span\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 14. Trong $P_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 15 (CK 20151). Cho không gian $P_{2015}[x]$- các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_1 = \{p \in P_{2015}[x] | p(-x) = p(x), \forall x \in R\}$. Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Bài 16. Cho KGVT $P_3[x]$ và hệ véc tơ $v_1 = 1 + x^2 + x^3$, $v_2 = x - x^2 + 2x^3$, $v_3 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

a) Tìm hạng của hệ véc tơ.

b) Tìm một cơ sở của không gian $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Bài 17. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Bài 18. Cho U,V là các không gian con hữu hạn chiều của không gian véc tơ W.
Chứng minh $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

==========***==========

CHƯƠNG IV.
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của kerf.

Bài 2. Cho ánh xạ $f:P_2[x]\to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p)=p+x^2p, \forall p\in P_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1=\{1,x,x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1'=\{1+x,2x,1+x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài 3 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn:

$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2, f(3x+2x^2)=17+x+16x^2,\ f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf.

Bài 4. Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & -2 & 4\end{bmatrix}$ là ma trận của axtt $f:P_2[x]\to P_2[x]$ đối với cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó: $v_1=3x+3x^2, v_2=-1+3x+2x^2, v_3=3+7x+2x^2$.

a) Tìm $f(v_1),f(v_2),f(v_3)$. b) Tìm $f(1+x^2)$.

Bài 5. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B=\{v_1=(1;0;0),v_2=(1;1;0),v_3=(1;1;1)\}$.

Bài 6 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn:

$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2, f(3x+2x^2)=17+x+16x^2,\ f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf.

Bài 7. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó :

$v_1=(0;1;1;1), v_2=(2;1;-1;-1), v_3=(1;4;-1;2), v_4=(6;9;4;2)$ và $u_1=(0;8;8), u_2=(-7;8;1), u_3=(-6;9;1)$.

a) Tìm $[f(v_1)]_{B'},[f(v_2)]_{B'},[f(v_3)]_{B'},[f(v_4)]_{B'}$.

b) Tìm $f(v_1),f(v_2),f(v_3),f(v_4)$.

c) Tìm $f(2;2;0;0)$.

Bài 8. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1+2x)=-19+12x+2x^2; f(2+x)=-14+9x+x^2; f(x^2)=4-2x-2x^2$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm $rank(f)$.

Bài 9. Cho V,V' là 2 KGVT có dim V= dim V', ánh xạ $f:V\to V'$ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh. b) f là toàn ánh. c) f là song ánh.

Bài 10 (CK 20141). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-2x_2+x_3; x_1+x_2-x_3; mx_1-x_2+x_3)$, với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Bài 11. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$

Bài 12. Cho biến đổi tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ xác định như sau:

$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(5a_0+6a_1+2a_2)-(a_1+8a_2)x+(a_0-2a_2)x^2$.

a) Tìm các trị riêng của f.

b) Tìm các véc tơ riêng ứng với các trị riêng tìm được.

Bài 13. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A=\begin{bmatrix}-14 & 12\\ -20 & 17\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Vận dụng tính A^n

Bài 14. Các ma trận sau có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 15. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$

Bài 16 (CK 20172). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$f(1;2;-1) = (4;-2;-6), f(1;1;2) = (5;5;0), f(1;0;0) = (1;2;1)$

a) Tìm m để $u = (6;-3;m) \in \mathrm{Im}(f)$.

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Bài 17. Cho $f : V \to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f : V \to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài 18 (CK 20161). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc Ker$f$.

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Bài 19. Cho A là ma trận kích thước $m \times n$, B là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$, với rank(A) = hạng của ma trận A.

==========***==========

CHƯƠNG V.
KHÔNG GIAN EUCLIDE

Bài 1. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n; v=b_1e_1+b_2e_2+\cdots+b_ne_n$. Đặt $<u,v>=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

a) Chứng minh $<u,v>$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V=\mathbb{R}^3$, với $e_1=(1;0;1), e_2=(1;1;-1), e_3=(0;1;1), u=(2;-1;-2), v=(2;0;5)$. Tính $<u,v>$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1;x;x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$.

Tính $<u,v>$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1+x;2x;x-x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$. Tính $<u,v>$.

Bài 2. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $<p,q>$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $<p,q>=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$

b) $<p,q>=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)+p(3)q(3)$

c) $<p,q>=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $<p,q>$ với $p=2-3x+5x^2-x^3, q=4+x-3x^2+2x^3$

Bài 3. Cho V là không gían Euclide. Chứng minh:

a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$.

b) $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2, \forall u,v\in V$.

Bài 4 (CK 20143). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f[(x_1;x_2),(y_1;y_2)]=x_1y_1+ax_1y_2-x_2y_1+bx_2y_2$. Tìm điều kiện của a,b để đây là một tích vô hướng trên không gian vectơ $\mathbb{R}^2$. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng kể trên với $b=2$, tìm góc tạo bởi hai vectơ $u=(3;4), v=(4;-3)$.

Bài 5. Cho cơ sở $B=\{(1;1;-2),(2;0;1),(1;2;3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của véc tơ $u=(5;8;6)$ đối với cơ sở B'.

Bài 6. Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian sinh bởi véc tơ v:

a) $u=(1;3;-2;4), v=(2;-2;4;5)$

b) $u=(4;1;2;3;-3), v=(-1;-2;5;1;4)$

Bài 7. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véc tơ $u = (3;-2;1), v_1 = (2;2;1), v_2 = (2;5;4)$. Đặt $W = span\{v_1, v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian W.

Bài 8 (CK 20172). Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc.

a) Trực chuẩn hóa Gram – Smith hệ gồm 2 véc tơ sau : $u_1 = (1;1;1;0), u_2 = (0;1;1;1)$

b) Cho véc tơ $v = (3;2;4;2)$. Xác định véc tơ $u \in Span\{u_1, u_2\}$ sao cho $||u - v||$ nhỏ nhất.

Bài 9 (CK 20161). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véc tơ $u = (1;2;-1)$, $v = (3;6;3)$ và đặt $H = \{w \in \mathbb{R}^3 | w \perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Bài 10. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6;3;-3;6), u_2 = (5;1;-3;1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{u_1, u_2\}$.

Bài 11. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $<p,q>= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram – Schmidt cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn A.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ B sang A

c) Tìm $[r]_A$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$

Bài 12. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ $v_1 = (1;1;0;0;0), v_2 = (0;1;-1;2;1), v_3 = (2;3;-1;2;1)$. Gọi $V = \{x \in \mathbb{R}^5 | x \perp v_i, i = 1;2;3\}$

a) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm dimV.

Bài 13. Cho V là không gian Euclide n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2 = \{x \in V | x \perp v, \quad \forall v \in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véc tơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$.

==============================HẾT==============================

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy