ĐỀ 2

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2- HỌC KÌ 20201

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1 (1đ): Tính độ cong của đường $x = 2\cos t, y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Câu 2 (1đ): Tính tích phân $\displaystyle\iint\limits_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, x = 1$ và $y = 0$.

Câu 3 (1đ): Tính tích phân $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)dxdy$, với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$.

Câu 4 (1đ): Tính tích phân $\displaystyle\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, với V là miền xác định bởi $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \end{cases}$.

Câu 5 (1đ): Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = 1 + x^2 + y^2$ và mặt $4x^2 + y^2 = 4$.

Câu 6 (1đ): Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{30}e^{-x^2}dx$.

Câu 7 (1đ): Tính $\displaystyle\int\limits_L 2(x^3+y^5)dx + 5x(2y^4-1)dy$, với L là đường gấp khúc ABCA nối các điểm $A(0;0), B(1;1), C(0;2)$.

Câu 8 (1đ): Tính $\displaystyle\int\limits_C \left(e^x\sin y + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy + e^x\cos y\right)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y - y^2}$, đi từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(0;2)$.

Câu 9 (1đ): Tính tích phân mặt $\displaystyle\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + \left(x^2+y^2+z^3\right)dxdy$, với S là phía ngoài mặt ellipsoid $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 10 (1đ): Tính thông lượng của trường vecto $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j} + y^2(z+1)\overrightarrow{k}$ qua nửa mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$, hướng ra ngoài.

LỜI GIẢI ĐỀ SỐ 2 - GT2 - CK20201

Thực hiện bởi đội ngũ CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1.

Ta có $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t; x''(t) = -2\cos t \\ y'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t; y''(t) = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$

Tại $t = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sqrt{3}; x'' = -1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; y'' = -1 \end{cases}$

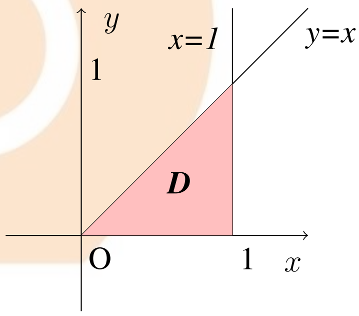
Độ cong của đường cong tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{3}$ là:

$$C = \frac{\left|x'(\frac{\pi}{3})y''(\frac{\pi}{3}) - x''(\frac{\pi}{3})y'(\frac{\pi}{3})\right|}{\left(x'(\frac{\pi}{3})^2 + y'(\frac{\pi}{3})^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|(-\sqrt{3}).(-1) - (-1).\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\left[(-\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{10}}{25}$$

Câu 2.

$I = \displaystyle\iint\limits_D xydxdy$ với D $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{8}$$



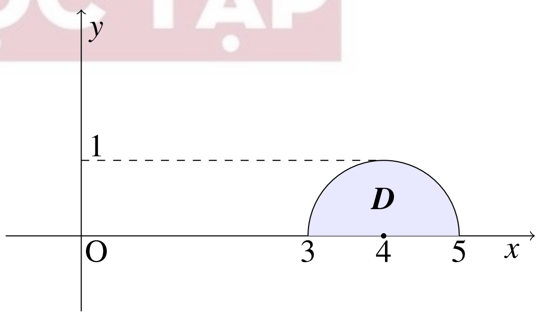
Câu 3.

$I = \displaystyle\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \le 1; y \ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} x = 4 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, D \to D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left(4r + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)dr$$

$$= \int_0^\pi \left(2 + \frac{1}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)d\varphi = 2\pi + \frac{2}{3}$$



Câu 4.

$I = \displaystyle\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$ với $V \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \end{cases}$

Xét giao của 2 mặt cong $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z^2 = 9 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ r \le z \le \sqrt{9-r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dr \int_r^{\sqrt{9-r^2}} r^3 dz = 2\pi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{9-r^2} - r\right)dr$$

$$= 2\pi\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}(9-r^2)\sqrt{9-r^2} - \frac{9}{2}\sqrt{9-r^2}\right)d(9-r^2) - \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^4 dr\right]$$

$$= 2\pi\left[\left(\frac{1}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{9}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{243}{20\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{162}{5} - \frac{81\sqrt{2}}{4}\right)$$

Câu 5.

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{r}{2}, V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r \le z \le 1 + \dfrac{r^2}{4}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \iiint_{V'} \frac{1}{2} r d\varphi dr dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{1+\frac{r^2}{4}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} rdz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r + \frac{r^3}{4}\cos^2\varphi + r^3\sin^2\varphi)dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{16}\cos^2\varphi + \frac{r^4}{4}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2 + \cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

Câu 6.

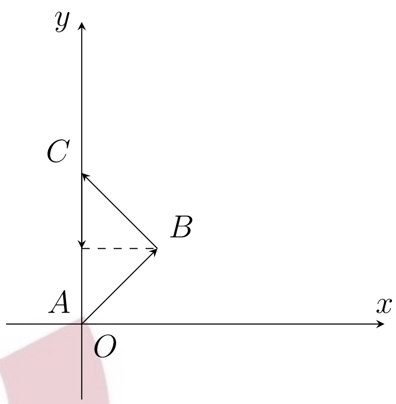
$$I = \int_0^{+\infty} x^{30}.e^{-x^2}dx$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx = 2\sqrt{t}dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{15}.e^{-t}}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{29}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{31}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(15 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{29!!}{2^{15}}\sqrt{\pi}$$

Câu 7.

$$I=\int_L 2(x^3+y^5)dx+5x(2y^4-1)dy$$



$$\begin{cases} P(x,y)=2(x^3+y^5) \\ Q(x,y)=5x(2y^4+1) \end{cases}$$

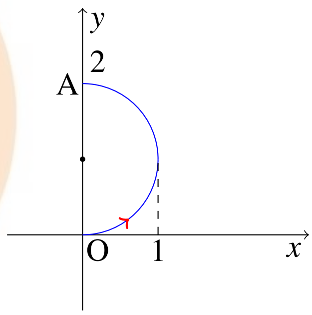
$$\longrightarrow \begin{cases} P'_y=10y^4 \\ Q'_x=10y^4-5 \end{cases}$$

Áp dụng Green:

$$I=\iint_D -5dxdy=-5S_D=-5.\frac{1}{2}.2.1=-5$$

Câu 8.

$$I=\int_C \left(e^x\sin y+y^2\right)dx+\left(2xy+e^x\cos y\right)dy+\int_C x^2dy=I_1+I_2$$



+) Xét I_1 : Đặt $\begin{cases} P(x,y)=e^x\sin y+y^2 \\ Q(x,y)=2xy+e^x\cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=e^x\cos y+2y \\ Q'_x=2y+e^x\cos y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tích phân I_1 không phục thuộc vào đường đi

Chọn đường đi là $OA: x=0 \Rightarrow I_1=\int_0^2 \cos ydy=\sin(2)$

+) $I_2=\int_C x^2dy=\int_0^2 \left(2y-y^2\right)dy=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow I=I_1+I_2=\sin(2)+\frac{4}{3}$

Câu 9:

S là mặt cong kín, hướng dương ra ngoài, theo Ostrogradsky:

$$I=\iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{dxdydz}$$

Với V : $9x^2+y^2+z^2\le 9$

Đặt $\begin{cases} y=r\sin\theta\cos\varphi \\ z=r\sin\theta\sin\varphi \\ x=\frac{1}{3}r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 3 \end{cases} \quad |J|=\frac{1}{3}r^2\sin\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3\mathrm{dr}\int_0^\pi \frac{1}{3}r^2\sin\theta.3\left[\frac{1}{9}r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\int_0^3\mathrm{dr}\int_0^\pi \frac{1}{9}r^4\cos^2\theta\sin\theta+r^4\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

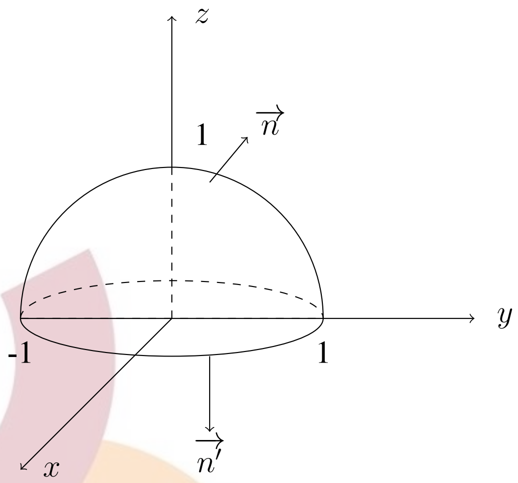
$$=2\pi\int_0^3 \frac{2}{27}r^4+\frac{4}{3}r^4\mathrm{dr}=\frac{684\pi}{5}$$

Câu 10.

Thông lượng của trường vecto:

$$\phi = \iint\limits_{S} xz^2dydz + x^2ydzdx + y^2(z+1)dxdy$$

Bổ sung thêm mặt $S' : z = 0$, véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}$ hướng xuống dưới.



$$\Rightarrow \iint\limits_{S\cup S'} = \iint\limits_{S} + \iint\limits_{S'} \Leftrightarrow I = \phi + I'$$

Do $S \cup S'$ kín, theo Ostrogradsky:

$$I = \iiint\limits_{V} (z^2 + x^2 + y^2)dxdydz$$

Với $D : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2 sin\theta$

$$\Rightarrow V \to V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta = 2\pi.\frac{1}{5}.1 = \frac{2\pi}{5}$$

Tính I': Mặt $S' : z = 0$ có $\overrightarrow{n'} = (0, 0, -1)$ do $(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{Oz}) > \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I' = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} -y^2(z+1)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} -y^2dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$\Rightarrow I' = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 -r^3 sin^2\varphi dr = \frac{-\pi}{4}$$

Vậy $\phi = I - I' = \dfrac{13\pi}{20}$