ĐỀ 3

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2-HỌC KÌ 20192

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;0)$ của đường $\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases}$.

Câu 2. Tính $\iiint\limits_V (z+1)dxdydz$, với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$.

Câu 3. Tính $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{x^2+y^2+2}$, với V là miền xác định bởi $\sqrt{x^2+y^2-1} \leq z \leq 1$

Câu 4. Tính diện tích phần mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy.

Câu 5. Tính tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}dx$

Câu 6. Tính $\oint\limits_C (e^x+y^2)dx + x^2e^ydy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = 1-x^2$ và $y = 0$ có chiều dương.

Câu 7. Tính $I = \iint\limits_S y^2zdS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1; z = 2$.

Câu 8. Tính $I = \iint\limits_S xy^3dydz + (x^2+z^2)dxdy$, với S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4, z \leq 0$, hướng ra phía ngoài mặt cầu.

Câu 9. Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l} = (1;2;-2)$ của hàm $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$ tại điểm $A(0;1;2)$

Câu 10. Tính tích phân kép $\iint\limits_{\mathbf{D}} (y^2-x^4)dxdy$, với **D** là miền xác định bởi $2|x| + |x^2+y| \leq 1$

Mỗi câu: 1 điểm

LỜI GIẢI ĐỀ SỐ 3 - GT2 - CK20192

Thực hiện bởi đội ngũ CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1:

$$\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 + \sin t \\ y'(t) = 3e^{3t} \\ z'(t) = 2t + \cos t \end{cases}$$

Điểm $A(-1;2;0)$ ứng với $t = 0 \Rightarrow x'(0) = 2; y'(0) = 3; z'(0) = 1$

$$\longrightarrow \begin{cases} \textbf{Phương trình tiếp tuyến: } \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1} \\ \textbf{Phương trình pháp diện: } 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu 2:

$$I = \iiint\limits_V (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \to \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases} \quad |J| = r^2\sin\theta$

$$\begin{aligned} \to I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi (2 + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 4r^2 \mathrm{d}r \\ &= 2\pi.\frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Câu 3:

$$I = \iiint\limits_V \frac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + 2}$$

$V : \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$. Xét giao điểm của hai mặt: $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1$

$\Rightarrow D : x^2 + y^2 \leq 2$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq 1 \end{cases} \quad |J| = r$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\sqrt{r^2-1}}^{1}\frac{zr}{r^2+2}\mathrm{d}z=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\frac{[1-(r^2-1)]r}{2(r^2+2)}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2-r^2}{2+r^2}\mathrm{d}r^2=\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}}(\frac{4}{2+r^2}-1)\mathrm{d}r^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[4ln(x+r^2)-r^2\right]\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(4\ln\frac{4}{3}-1)$$

Câu 4:

$z=4x-x^2-y^2\geq 0,(\mathrm{D}):(x-2)^2+y^2\leq 4$

$$\Rightarrow\begin{cases}z'_x=4-2x\\ z'_y=-2y\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Diện tích phần mặt paraboloid nằm trên Oxy :

$$\sigma=\iint\limits_{\mathrm{D}}\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\mathrm{D}}\sqrt{1+4[(x-2)^2+y^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Đặt $\begin{cases}x=2+r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\to \mathrm{D}'\begin{cases}0\leq\varphi\leq 2\pi\\ 0\leq r\leq 2\end{cases}\quad |J|=r$

$$\Rightarrow\sigma=\iint\limits_{\mathrm{D}'}\sqrt{1+4r^2}.r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}(1+4r^2)=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

Câu 5:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $e^x=t\to\mathrm{d}t=t\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{-3}{4}}}{(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow I=\beta(\frac{1}{4};\frac{7}{4})=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{7}{4})}{\Gamma(2)}=\frac{\frac{3}{4}.\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)}=\frac{3}{4}.\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}}{1!}=\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

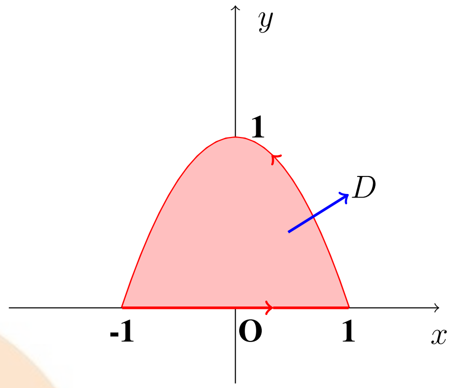
Câu 6:

$I = \oint\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2 e^y dy$

Đặt $P = e^x + y^2, Q = x^2 e^y$

Nhận xét: C là đường cong kín, giới hạn miền $D : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

C lấy theo chiều dương, áp dụng Green ta có:



$$I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (2xe^y - 2y)dxdy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} (2xe^y - 2y)dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (2xe^y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left[2xe^{1-x^2} - 2x - (1-x^2)^2\right] dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2xe^{1-x^2} dx - \int\limits_{-1}^{1} \left[2x + (1-x^2)^2\right] dx = (-e^{1-x^2})\Big|_{-1}^{1} - \frac{16}{15} = \frac{-16}{15}$$

Câu 7:

Ta có : $I = \iint\limits_S y^2 z dS$

$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}dxdy$

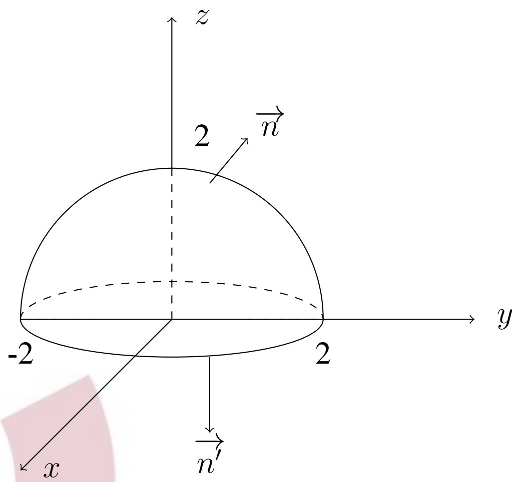
$\Rightarrow I = \sqrt{2} \iint\limits_D y^2 \sqrt{x^2+y^2} dxdy$

Với $D : 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow I = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^3 sin^2\varphi .rdr = \sqrt{2}.\pi.\dfrac{31}{5} = \dfrac{31\pi\sqrt{2}}{5}$

Câu 8:



$I = \iint\limits_S xy^3dydz + (x^2+z^2)dxdy$ Bổ sung thêm mặt $S': z=0$, véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}$ hướng xuống dưới .

$\Rightarrow S \cup S'$ là mặt cong kín, hướng ra ngoài.

Ta có: $\iint\limits_{S\cup S'} = \iint\limits_S + \iint\limits_{S'}$ hay $I_1 = I + I_2$

Tính I_1: Theo Ostrogradsky:

$I_1 = \iiint\limits_V (y^3+2z)dxdydz = \iiint\limits_V 2zdxdydz$

(do $f(x,y,z) = y^3$ là hàm lẻ đối với y, miền V đối xứng qua $y=0$)

Với V: $\begin{cases} z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2sin\theta \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin\theta cos\theta d\theta = 2\pi.4.1 = 8\pi$

Tính I_2: Mặt $S': z=0$. Do $(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{Oz}) > \frac{\pi}{2}$ nên mặt S' có véc tơ pháp tuyến đơn vị $\overrightarrow{n'} = (0,0,-1)$

$\Rightarrow I_2 = -\iint\limits_D x^2dxdy$ với $D: x^2+y^2 \leq 4$

$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3cos^2\varphi dr = -4\pi$

Vậy : $I = I_1 - I_2 = 12\pi$

Câu 9:

Ta có: $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$

$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = e^x(y^2+z) - 2yz^3 \\ u'_y = 2e^xy - 2xz^3 \\ u'_z = e^x - 6xyz^2 \end{cases}$ Tại $A(0;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{gradu}(A) = (-13;2;1)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = \overrightarrow{gradu}(A).\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = -13.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} + 1.\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-11}{3}$

Câu 10:

$I = \int\limits_D (y^2 - x^4)dxdy$

D đối xứng qua $x = 0$ và $f(x, y) = y^2 - x^4$ là hàm chẵn đối với x

$\Rightarrow I = 2 \iint\limits_{D^+} (y^2 - x^4)dx$ với $D^+ : \begin{cases} 2|x| + |x^2 + y| \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + |v| \leq 1 \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq \dfrac{1}{2} \\ 2u - 1 \leq v \leq 1 - 2u \end{cases}$

$\Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_{2u-1}^{1-2u} (v - 2u^2)vdv = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{v^3}{3} - u^2v^2)\Big|_{v=2u-1}^{v=1-2u} du$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^3}{3} - u^2(1-2u)^2 - \frac{(2u-1)^3}{3} + u^2(2u-1)^2 du$$

$$= \frac{1}{6}$$