GIẢI TÍCH 2
BÀI 10

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. Tích phân mặt loại 1

1. Đặt vấn đề

- Ta biết công thức tính diện tích mặt cong $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ là

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

- Tính diện tích mặt cong không tròn xoay ?
- Tính khối lượng mặt cong vật chất không đồng chất ?

2. Định nghĩa.

• Cho hàm số $f(M)$ xác định trên mặt S nào đó $\subset \mathbb{R}^3$

• Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i, $i = \overline{1, n}$.

• Lấy điểm tuỳ ý $M_i(x_i; y_i; z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng

$$I_n = \sum_{n=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i .$$

• Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ sao cho $d \to 0$, $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$, $\forall$ cách chia S và cách chọn M_i thì ta gọi I là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ trên mặt S và kí hiệu

$$I = \iint\limits_S f(M)\,dS \text{ hoặc } I = \iint\limits_S f(x, y, z)\,dS$$

Ví dụ 1. Tính

$$\iint_S 2^{3(x^2+y^2+z^2)}dS, S: x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$$

GIẢI

+) • Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i, $i = \overline{1, n}$.

• Lấy điểm tuỳ ý $M_i(x_i\,;y_i\,;z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng

$$I_n = \sum_{n=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{n=1}^{n} 2^{3(x_i^2+y_i^2+z_i^2)}\Delta S_i$$

$$= \sum_{n=1}^{n} 2^3 \Delta S_i = 8 \times 2\pi = 16\pi.$$

$\forall$ cách chia S và cách chọn M_i. nên có

$$\iint_S 2^{3(x^2+y^2+z^2)} dS = 16\pi.$$

Chú ý. $\iint\limits_S dS$ chính là diện tích của mặt S.

2. Tính chất. Có các tính chất giống như tích phân đường loại một

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S

$$\Rightarrow \exists \iint\limits_S f(x, y, z)dS$$

4. Cách tính. $z = z(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, khi đó có

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Ví dụ 1. Tính $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, S là mặt bán cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0.$$

GIẢI

+) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow z'_x = -\dfrac{x}{z}, z'_y = -\dfrac{y}{z} \Rightarrow$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{z^2}} = \frac{R}{z} \Rightarrow$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dxdy$$

+) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R,$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R \int_0^R \frac{r^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

$$= 2\pi R \int_0^R \left(-\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) dr$$

$$= 2\pi R \left[-\left(\frac{r}{2}\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{r}{R}\right)\Big|_0^R \right]$$

$$2\pi R \left(R^2 \arcsin\frac{r}{R}\right)\Big|_0^R$$

$$= 2\pi R[0-\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}]+2\pi R^3\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\pi^2 R^3 + \pi^2 R^3$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 R^3.$$

Ví dụ 2. Tính $\iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$, S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

GIẢI

+) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \iint\limits_{x^2 + y^2 \le ax} \left[xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \right] dxdy$$

+) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le a\cos\varphi \Rightarrow$

$$I = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} [r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)]rdr$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos\varphi\sin\varphi + (\cos\varphi + \sin\varphi)]\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{a^4\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^5\varphi\sin\varphi + \cos^5\varphi + \cos^4\varphi\sin\varphi]d\varphi$$

$$= \frac{a^4\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{a^4\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^4\sqrt{2}}{2}\frac{4!!}{5!!} = \frac{4\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Ví dụ 3. a (K60) Tính $\iint\limits_S xyzdS,\ S: x - 2y + 3z - 4 = 0$

giới hạn trong mặt trụ $2x^2 + 3y^2 = 6.$ (0)

§2. Tích phân mặt loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa.

a) Định nghĩa. Cho mặt S giới hạn bởi một đường trơn từng khúc C. Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{N}$ của S tại M_0, nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường cong kín bất kì L trên S không cắt đường biên C trở lại vị trí M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía. Trường hợp ngược lại thì S được gọi là mặt một phía.

Mặt S được gọi là định hướng từng phần nếu nó liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng bởi các đường trơn từng khúc.

Cho mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C. Ta gọi hướng dương trên C ứng với phía đã chọn của S xác định theo quy tắc bàn tay phải.

b) Định nghĩa tích phân mặt loại hai.

• Cho hàm vectơ $\vec{F} = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ xác định trên mặt hai phía S

• Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\vec{N}(M) = \vec{i}\cos\alpha(M) + \vec{j}\cos\beta(M) + \vec{k}\cos\gamma(M)$$

• Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm $\vec{F}.\vec{N} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ trên mặt S:

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{N}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ (hay của các hàm P, Q, R) lấy trên phía đã chọn của mặt S.

Ví dụ 1. Tính

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,\ S: x^2 + y^2 = 1,\ z = 2,$$

hướng lên trên trong đó

$$P = z^{x^{zy}},\ Q = e^{y^2}\sin x^2,\ R = \left(x^2 + y^2\right)^z$$

GIẢI

+) $\alpha = \frac{\pi}{2} = \beta; \gamma = 0 \Rightarrow \vec{N}(M) = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

$= (0;0;1)$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{S} \left(P \times 0 + Q \times 0 + (x^2 + y^2)^2 \times 1\right) dS$$

+) $= \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)^2 \sqrt{1+0+0}\, dxdy$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1 \Rightarrow$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 r dr = 2\pi \times \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Chú ý. Gọi hình chiếu của ΔS_i lên các mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là $\Delta S_i^{(1)}$, $\Delta S_i^{(2)}$, $\Delta S_i^{(3)}$, khi đó có

$$\cos\alpha\left(M_i\right)\Delta S_i = \Delta S_i^{(1)},\ \cos\beta\left(M_i\right)\Delta S_i = \Delta S_i^{(2)},$$

$$\cos\gamma\left(M_i\right)\Delta S_i = \Delta S_i^{(3)}.$$

Do đó ta cùng kí hiệu tích phân mặt loại hai là

$$I = \iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

3. Tính chất. Có các tính chất tương tự như tích phân đường loại hai

4. Định lí tồn tại. Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

5. Cách tính.

- Ta có

$$\iint_S P dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy$$

$$= \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R\, dxdy$$

- Ta tính một tích phân trong vế phải, chẳng hạn

$$I_1 = \iint_S R\, dxdy$$

Cho mặt không kín $S : z = f(x, y)$ xác định trên D.

Tích phân lấy theo phía trên của mặt S (véc tơ pháp tuyến tạo với oz góc nhọn) là

$$I_1 = \iint_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

Tích phân lấy theo phía dưới của mặt S (véc tơ pháp tuyến tạo với oz góc tù) là

$$I = -\iint_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

Ví dụ 1.

$\iint_S z\,dxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

GIẢI

+) $I = \iint\limits_{S_1} zdxdy + \iint\limits_{S_2} zdxdy;$

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0; S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$

+) $\Rightarrow I = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$

$$- \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(-\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) dxdy$$

$$= 2 \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow$

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr = 4\pi \frac{-1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, d(1-r^2)$$

$$= -2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, d(1-r^2) = 2\pi \left.\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0 = \frac{4}{3}\pi.$$

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3 dydz$, S là phía trên của nửa trên $(z \geq 0)$ của mặt Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

GIẢI

+) $I=\iint\limits_{S_1} x^3 dydz+\iint\limits_{S_2} x^3 dydz;$

$S_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, x\geq 0; S_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, x\leq 0$

+) $\Rightarrow I=\iint\limits_{D}\left(a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\right)^3 dydz$

$-\iint\limits_{D}\left(-a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\right)^3 dydz$

$$= 2\iint\limits_D \left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \right)^3 dydz \; ; \qquad D: \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1,$$

$$y = br\cos\varphi, z = cr\sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1 \Rightarrow$$

$$I = 2a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} bcrdr$$

$$= 2a^3 \times bc\pi \frac{-1}{2} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} d(1-r^2) = -\pi a^3 bc \left. \frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2} \right|_0^1$$

$$= \frac{2}{5}\pi a^3 bc.$$

Ví dụ 3. Tính

$$\iint_S (x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy),$$

S là $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0,$ hướng theo chiều dương của z.

GIẢI

+) $I = \sum_{k=1}^{3} I_k$, ở đó

$$I_1 = \iint_S x^2 dydz; I_2 = \iint_S y^2 dzdx; I_3 = \iint_S z^2 dxdy$$

+) $I_1 = \iint_S x^2 dydz = \iint_{S, x \geq 0} x^2 dydz + \iint_{S, x \leq 0} x^2 dydz$

$$= \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dydz - \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dydz = 0,$$

$D_1 : y^2 + z^2 \leq 1.$

+) $I_2 = \iint_S y^2 dzdx = \iint_{S, y \geq 0} y^2 dzdx + \iint_{S, y \leq 0} y^2 dzdx$

$$= \iint\limits_{D_2} (a^2 - x^2 - z^2)dxdz - \iint\limits_{D_2} (a^2 - x^2 - z^2)dxdz = 0,$$

$D_2 : x^2 + z^2 \le 1.$

+) $I_3 = \iint\limits_S z^2 dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} (a^2 - x^2 - y^2)dxdy$

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a \Rightarrow,$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2)rdr = 2\pi \frac{-1}{2} \int_0^a (a^2 - r^2)d(a^2 - r^2).$$

$$= -\pi \left. \frac{(a^2 - r^2)^2}{2} \right|_0^a = \frac{\pi}{2}a^4.$$

Ví dụ 4.

a (K58) $\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-xdydz - ydzdx + dxdy)$, S là mặt $2z = x^2 + y^2, z \le 2$, hướng theo chiều dương của z. $\left(\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)\right)$

b (K59) $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1, z \ge 0$, hướng ra ngoài mặt cầu. $\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$

c (K60) 1) $\iint\limits_S x\,dydz$, S là phía trên mặt

$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$ $\left(\frac{1}{6}\right)$

2) $\iint\limits_S (x+z)\,dxdy$, S là phía trên mặt

$z = x^2 + 4y^2, z \leq 4.$ (4π)

§3. Công thức Stokes

1. Đặt vấn đề :

- Ta biết công thức Green cho đường cong phẳng :

Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc, có hướng dương C, thì có

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$$

- Có thể mở rộng công thức Green cho đường cong ghềnh ?

- Đã có Định lý 4 mệnh đề tương đương cho đường cong phẳng.
- Có thể mở rộng Định lý 4 mệnh đề tương đương cho đường cong ghềnh ?

2. Công thức Stokes

Định lí 1. Các hàm *P*, *Q*, *R* cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên mặt định hướng từng phần *S*, giới hạn bởi đường cong kín, hướng dương, trơn từng khúc *C*, $\overrightarrow{T} = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ - vecteur tiếp tuyến với C, $\overrightarrow{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - vecteur pháp tuyến với S, thì ta có công thức :

$$\oint_C \left(P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma'\right)ds =$$

$$= \iint_S \left[\left(R'_y - Q'_z\right)\cos\alpha + \left(P'_z - R'_x\right)\cos\beta + \left(Q'_x - P'_y\right)\cos\gamma\right]dS$$

hay

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + \left(P'_z - R'_x\right)dzdx + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$

Chú ý.

1°/ Trong mặt phẳng thì công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

2°/ Công thức Stokes còn viết dưới dạng sau

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$

$$\oint_C \left(P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma'\right) ds = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

3°/ Khi C có hướng âm, ta có thể dùng công thức Stokes bằng đổi dấu tích phân

.

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Oz.

GIẢI

+) Gọi S là phần mặt phẳng x+y+z=0, có biên C hướng dương, P=y, Q=z, R=x, vận dụng công thức Stokes, ta có :

$$I=\iint_S \left(R'_y-Q'_z\right)dydz+\left(P'_z-R'_x\right)dzdx+\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy$$

$$=\iint_S (0-1)dydz+(0-1)dzdx+(0-1)dxdy$$

$=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy$ là tích phân mặt loại 2.

+) Chuyển sang tích phân mặt loại 1, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ làm với oz góc nhọn, nên có :

$$I=\iint\limits_S\left[\left(R'_y-Q'_z\right)\cos\alpha+\left(P'_z-R'_x\right)\cos\beta+\left(Q'_x-P'_y\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=-\iint\limits_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

$$=-\iint\limits_S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS=-\sqrt{3}\iint\limits_S dS=-\pi a^2.$$

Ví dụ 2. $\oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, ở đó $C: x^2 + y^2 = a^2, \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\, (a > 0, h > 0)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

GIẢI

+) Gọi S là phần mặt phẳng $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, có biên C là ellip hướng dương :

$$C: x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1.$$

Vận dụng công thức Stokes, ta có :

$$I=\iint\limits_S \left(R'_y-Q'_z\right)dydz+\left(P'_z-R'_x\right)dzdx+\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_S (-1-1)dydz+(-1-1)dzdx+(-1-1)dxdy$$

$$=-2\iint\limits_S dydz+dzdx+dxdy$$

$$= -2\left(\iint_S dydz + \iint_S dzdx + \iint_S dxdy \right)$$

$$+) = -2\left(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dxdy \right),$$

ở đó D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S lên các mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy tương ứng. Do đó

$D_3 : x^2 + y^2 \le a^2, z = 0;\ \ D_2 = 0;$

$D_1 : x^2 + y^2 \le a^2, \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1 \Rightarrow D_1 : [a(1\text{-}\dfrac{z}{h}]^2 + y^2 \le a^2 \Rightarrow$

$$D_1 : \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-h)^2}{h^2} \le 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{D_3} dxdy = \pi a^2, \iint_{D_2} dzdx = 0, \iint_{D_1} dydz = \pi ah.$$

+) Cuối cùng ta có :

$$I = -2(\pi a^2 + 0 + \pi ah) = 2\pi a(a+h).$$

3. Định lí bốn mệnh đề tương đương.

Từ công thức Stokes có thể chứng minh được định lí bốn mệnh đề tương đương cho tích phân đường trong không gian.

Định lí 1. Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền V đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

2) $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$, $\forall$ đường cong kín, hướng dương $L \subset V$.

3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường nối các điểm $A, B \in V$ mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B.

4) $\exists\, U(x, y, z)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$

Ví dụ 1. $\oint\limits_C yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, ở đó C là đường cong kín bất kì

4. Ý nghĩa vật lí.

a) Lưu số (hoàn lưu) của trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo chu tuyến kín C là

$$T = \int\limits_C \vec{F}.\vec{\tau}\,ds = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

b) Vectơ xoáy

Định nghĩa. Vectơ xoáy ($\operatorname{rot}\vec{F}(M)$, hoặc $curl\vec{F}(M)$) tại M trong trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ là

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ví dụ 1. Tìm vectơ xoáy của điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$.

Vectơ xoáy có các tính chất sau:

- Tuyến tính
- $\operatorname{rot}(u\vec{c}) = \overrightarrow{\operatorname{grad} u} \wedge \vec{c}$, $\vec{c}$ là hằng số
- $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \overrightarrow{\operatorname{grad} u} \wedge \vec{F}$

c) Công thức Stokes dưới dạng vectơ.

$$\oint_C \vec{F}\vec{\tau}\,ds = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\vec{N}\,dS$$

Do đó có: lưu số của trường vectơ $\vec{F}$ theo một đường cong kín C bằng thông lượng của vectơ $\operatorname{rot}\vec{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường cong C.

§ 4. Công thức Ostrogradsky

• Đặt vấn đề

1. Công thức

Định lí 1. (Công thức Ostrogradsky). Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền compact $V \subset \mathbb{R}^3$ giới hạn bởi mặt cong kín trơn từng phần S, thì ta có công thức

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Ví dụ 1. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ví dụ 3.

a (K58) $\iint\limits_S \frac{xy^2}{4}dydz + \frac{yz^2}{9}dzdx + x^2zdxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt elipsoid $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. $\left(\frac{24\pi}{5}\right)$

b (K59) $\iint\limits_S xz^2dydz + 4yx^2dzdx + 9zy^2dxdy$, ở đó S là mặt elipsoid $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

$\left(\dfrac{2\pi}{15}\right)$

c (K60) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dydz + (x + 3z^2)dzdx + 4xzdxdy$,

ở đó mặt kín S là biên của miền V :

$x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, hướng ra ngoài. $\left(\dfrac{1}{4}\right)$

2. Ý nghĩa Vật lí.

a) Dive của trường vectơ

• **Định nghĩa.** Cho trường vô hướng u, vectơ gradient của trường vô hướng u là

$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục

• **Tính chất.**

+) Tuyến tính

+) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1u_2) = u_1\overrightarrow{\text{grad}}\, u_2 + u_2\overrightarrow{\text{grad}}\, u_1$.

+) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(u) = f'(u)\overrightarrow{\text{grad}}\, u$.

+) $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = ch_{\vec{l}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u$

Ví dụ 1 (Bài toán con muỗi). Nhiệt độ của không khí tại các điểm trong không gian được xác định bởi hàm $u = x^2 - y + z^2$. Một con muỗi đậu tại điểm M(1 ;2 ;1) trong không gian. Hỏi con muỗi cần bay theo hướng nào để được mát nhanh nhất ?

Ví dụ 2 (K58). Cho trường vô hướng

$u = xy + yz + zx$. Tính lưu số của trường vecto $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$ dọc đoạn thẳng từ A(-1 ;-1 ;-1) đến B(2 ;4 ;1). (11)

• **Định nghĩa.** Cho trường vector $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, div của trường vector $\vec{F}$ là $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

b) Công thức Ostrogradsky dưới dạng vectơ

$\iint\limits_S \vec{F}\vec{N}\,dS = \iiint\limits_V \text{div}\,\vec{F}\,dV$, ở đó

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$\vec{N}$ là vecteur pháp tuyến của mặt S.

c) Điểm nguồn, điểm rò, trường vectơ có thông lượng bảo toàn

• Cho $\operatorname{div}\vec{F}$ liên tục tại $M \in V$ và $\operatorname{div}\vec{F}(M) > 0$. Gọi V' là miền giới hạn bởi mặt kín S' trong lân cận đủ nhỏ của M. Từ công thức ở mục b) $\Rightarrow$ thông lượng qua mặt S' từ trong ra ngoài là số dương, hay thông lượng vào mặt S' ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó. Khi đó điểm M được gọi là điểm nguồn của trường.

Ngược lại nếu $\operatorname{div}\vec{F}(M) < 0$ thì M được gọi là điểm rò của trường.

• Nếu $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ thì trường không có các điểm nguồn và điểm rò. Khi đó ta bảo $\vec{F}$ là trường ống.

• Nếu $rot\,\vec{F} = 0$ thì $\vec{F}$ là trường thế (còn gọi là trường bảo toàn). Hàm u là hàm thế vị nếu có $\overrightarrow{\text{grad}\,u} = \vec{F}$.

• Nếu trường $\vec{F}$ vừa là trường ống và là trường thế thì ta bảo $\vec{F}$ là trường điều hòa.

Ví dụ 1. Tính thông lượng củatrường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt xung quanh và mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le x \le h$.

Ví dụ 2. Tính thông lượng của điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (Định luật Gauss)

Ví dụ 3 a (K59). 1) CMR :

$\vec{F} = (3x^2y + 2z^2)\vec{i} + (x^3 + 6y)\vec{j} + (4xz + e^z)\vec{k}$ là trường thế. Tìm hàm thế vị.

$\left(u = x^3y + 2xz^2 + 3y^2 + e^z + C\right)$

2) CMR trường vecto:

$\vec{F} = \left(\operatorname{arccot}(y - z), \dfrac{-x}{1 + (y - z)^2}, \dfrac{x}{1 + (y - z)^2}\right)$ là trường thế.

$\left(P'_z = R'_x, Q'_x = P'_y, R'_y = Q'_z\right)$

3) Tính thông lượng của trường vecto $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua mặt kín S là biên của miền V : $0 \le z \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le x \le 2$, hướng ra ngoài. $\left(2\pi + \dfrac{8}{3} \right)$

4) Tính thông lượng của trường vecto

$$\vec{F} = (\cos z + xy^2)\vec{i} + xe^{-z}\vec{j} + (x^2 z + y)\vec{k}$$

qua mặt kín S là biên của miền V : $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$, hướng ra ngoài. $\left(\dfrac{16\pi}{5} \right)$

b (K60). 1) Tính $\iint\limits_S (x^3 + y)dydz + (y^3 + 2z)dzdx + zdxdy$,

trong đó S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

, $z \geq 0$, hướng ra ngoài mặt cầu.

$$\left(\frac{22\pi}{15}\right)$$

2) CMR :

$$\vec{F} = (2xe^z + y^2)\vec{i} + (2xy + 3z^2)\vec{j} + (x^2e^z + 6yz)\vec{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị.

$(rot\overrightarrow{F = 0}, u = xy^2 + x^2e^z + 3yz^2 + C)$

3) Tính thông lượng của trường vecto

$\vec{F} = (x^3 - z)\vec{i} - y\vec{j} + (3y^2z + 2y)\vec{k}$ qua mặt cầu S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \le x \le 2$, hướng ra ngoài mặt cầu. $\left(\dfrac{4\pi}{15}\right)$

4) Tính thông lượng của trường vecto

$\vec{F} = (6z^3 - 9y)\vec{i} - (3x - 2z^3)\vec{j} + (3y - 3x)\vec{k}$

qua mặt cong S : $x^2 + 3y^2 + z^4 = 1$, $z \ge 0$, hướng lên trên. (0)

3. Toán tử Haminton

a) Định nghĩa. $\vec{\nabla} = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

b) Tính chất

- $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}}\, u$
- $\vec{\nabla} \vec{F} = \text{div}\, \vec{F}$
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}\, \vec{F}$
- $\vec{\nabla}^2 = \Delta$, ở đó Δ là toán tử Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, u\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} u\right) = \Delta u$

- $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right) = 0$
- $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) = 0$

Thank you and Good bye!

• **Định nghĩa.** Cho trường vô hướng u, vectơ đơn vị $\vec{\ell}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $M(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, $M(x, y, z)$. Nếu tồn tại `

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{\rho},$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{u(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma)-u(x,y,z)}{\rho}$$

thì được gọi là đạo hàm của hàm u theo hướng $\vec{\ell}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và được ký hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$.

Chú ý. Khi $\vec{\ell} = (1;0;0)$ thì có $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Tương tự khi $\vec{\ell} = (0;1;0)$ thì có $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, khi $\vec{\ell} = (0;0;1)$ thì có $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

• **Định lí.** Cho hàm *u(x ;y ;z) khả vi tại M(x ;y ;z)*, vectơ $\vec{\ell}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, khi đó

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Ví dụ 1. a (K58). Tính đạo hàm của hàm

$$u = x^2 + 2y^3 - 3xz$$

theo hướng $\overrightarrow{AB}$ tại điểm A, biết A(1 ;1 ;2) và B(2 ;0 ;4).

$$\left(-\frac{16}{\sqrt{6}}\right)$$

b)(K59). 1) Cho $u = x^3 + 2yz^2 + 3xyz$.

Tính đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(A)$, trong đó $\vec{n}$ là vecto pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm A(1 ;1 ;1). $(6\sqrt{3})$

2) Cho trường vô hướng $u = \ln(1 + e^{x-y} + z^2)$ và O(0 ;0 ;0), A(2 ;1 ;-2). Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(O)$ theo hướng OA. $(\dfrac{1}{6})$

c)(K60). 1) Tính đạo hàm của hàm $u = x^3 + y^3 + z^2 + 2xy$ theo hướng $\vec{\ell} = (5;5;2)$ tại điểm P(1 ;1 ;1). $(3\sqrt{6}\quad)$.