ĐỀ 3

♣♣
♣

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH III - Học kỳ 2022.2

Mã HP: MI 1132, Khóa: K67, Nhóm 2 (đợt 1), Thời gian: 60′

Thí sinh không được sử dụng tài liệu

Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (4 Điểm).

a) Đánh giá sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)2^n}{(4n-1)!} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}$$

b) Đánh giá sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^4 \left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right) \qquad 2)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[5]{(\ln n)^4}}$$

Câu 2. (4 Điểm). **a)** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9n^2+2n)}{(-7)^n(n^3+1)} \left(\frac{7x-5}{x+1}\right)^n.$$

b) Chứng minh rằng chuỗi hàm số sau đây hội tụ đều trên $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2\sin(3nx)}{n^{\frac{3}{2}}(1+x^4)}.$$

c) Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ 2 và thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{với } 0 \le x \le 1 \\ 3x-2 & \text{với } 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Hãy khai triển f thành chuỗi Fourier.

Câu 3. (2 Điểm). **a)** Giải bài toán

$$xy' + (x+3)y = 4xe^{-x};\ x > 0; y(1) = a.$$

Sau đó, tìm giá trị của a sao cho $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$.

b) Giải phương trình

$$(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + (2x^2 - 4xy - 2x)dy = 0$$

bằng cách tìm một thừa số tích phân có dạng $I(x,y) = e^{ax+by}$, trong đó a, b là các hằng số.

Đề giữa kì GT3 2022.2 Nhóm 2 Đề 3

Câu 1:

a, Đánh giá sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2).2^n}{(4n-1)!}$ (1)

+) $a_n = \frac{(n+2).2^n}{(4n-1)!} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ (1) là CS dương

+) xét $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3).2^{n+1}}{(4n+3)!} \cdot \frac{(4n-1)!}{(n+2).2^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3).2}{(n+2).4n.(4n+1)(4n+2)(4n+3)} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ (1) hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}$ (2)

+) $a_n = 3^n \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ (2) là CS dương

+) xét $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3.\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{3}{3n+4}\right)^n = 3e^{-1} > 1$

$\Rightarrow$ (2) phân kì theo tiêu chuẩn Cauchy

b, Đánh giá sự hội tụ tuyệt đối, bán HT hay phân kì.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^4 \left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right)$ (1)

+) Xét $a_n = (-1)^n n^4\left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow |a_n| = \left|n^4\left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right)\right|$

+) Ta có: $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} - \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^3}{3!} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6}$ khi $n\to\infty$

$\Rightarrow n^4\left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right) \sim n^4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6n^6}\right) = \frac{1}{6n^2}$ khi $n\to\infty$

. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^2}$ HT (do $\alpha = 2 > 1$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^4\left(\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2}\right)\right|$ hội tụ theo TCSS

$\Rightarrow$ (1) hội tụ tuyệt đối.

2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt[5]{(\ln n)^4}}$ (2)

+) Xét $a_n = \frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt[5]{(\ln n)^4}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{(\ln n)^4}} \geq 0 \ \forall n \geq 3 \Rightarrow$

Có: $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{(\ln x)^4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{4}{5}(\ln x)^{-\frac{1}{5}} - (\ln x)^{\frac{4}{5}}}{x^2(\ln x)^{\frac{8}{5}}} < 0 \ \forall x \geq 3$

$\Rightarrow f(x)$ dương giảm và có $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $(\forall x \geq 3)$

$\Rightarrow \int_3^{\infty} f(x)dx$ và $\sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ cùng hội tụ hoặc phân kì

Mà $\int_3^{\infty} f(x)\,dx = \int_3^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}dx = \int_3^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\sqrt[5]{(\ln x)^4}} =$

$= \lim_{t\to\infty} 5(\ln x)^{\frac{1}{5}}\Big|_3^t = \lim_{t\to\infty} 5\left((\ln t)^{\frac{1}{5}} - (\ln 3)^{\frac{1}{5}}\right) = \infty$

$\Rightarrow \int_3^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{(\ln n)^4}}$ phân kỳ theo TC tích phân (3)

+) Chuỗi (2) có $b_n = \frac{1}{n\sqrt[5]{(\ln n)^4}} > 0 \ \forall n \geq 3 \Rightarrow$ (2) là chuỗi đan dấu

Có $b_n > 0$ và $\{b_n\}$ giảm (cm như trên), $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\Rightarrow$ (2) HT theo định lí Leibnitz (4)

Từ (3) và (4) thì $\sum_{n=3}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ và $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ HT $\Rightarrow$ (2) bán hội tụ

Câu a: a) Tìm MHT của chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+2n}{(-7)^n(n^3+1)}\left(\frac{7x-5}{x+1}\right)^n$ (1)

giải: +) TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

+) Đặt $y = \frac{7x-5}{x+1} \Rightarrow$ (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+2n}{(-7)^n(n^3+1)}y^n$ là chuỗi

luỹ thừa với $a_n = \frac{9n^2+2n}{(-7)^n(n^3+1)}$

$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(9n^2+2n)((n+1)^3+1)}{(9(n+1)^2+2(n+1)).(n^3+1)} = 7$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của (2) là: $|y| < 7$

$\Rightarrow \left|\frac{7x-5}{x+1}\right| < 7 \Rightarrow x > \frac{-1}{7}$

+) Tại $y = 7 \Rightarrow \frac{7x-5}{x+1} = 7 \Rightarrow$ ko có x TM

+) Tại $y = -7 \Rightarrow x = \frac{-1}{7}$ thì (1) trở thành: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2+2n}{n^3+1}$ (3)

Có $\frac{9n^2+2n}{n^3+1} > 0 \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ (3) là chuỗi số dương

$0 < \frac{9n^2+2n}{n^3+1} \sim \frac{9n^2}{n^3} = \frac{9}{n}$ khi $n \to \infty$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n}$ phân kì $\Rightarrow$ (3) phân kì theo TCSS

Vậy MHT của (1) là: $\left(-\frac{1}{7}; +\infty\right)$

b, CMR chuỗi hàm số sau HTĐ trên R: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2 \sin(3nx)}{n^{\frac{3}{2}}(1+x^4)}$ (1)

+) TXĐ: R

+) Có: $|u_n(x)| = \left| \frac{2x^2 \sin(3nx)}{n^{\frac{3}{2}}(1+x^4)} \right| \leq \frac{2x^2}{n^{\frac{3}{2}}(1+x^4)}$

Mà $(x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^4 \geq 2x^2 \Rightarrow \frac{2x^2}{1+x^4} \leq 1$

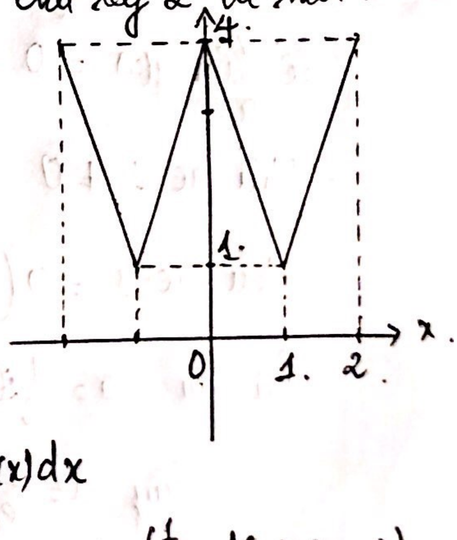
$\Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{2x^2}{n^{\frac{3}{2}}(1+x^4)} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \ \forall n \geq 1, \forall x \in R$

+) Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ do $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$

$\Rightarrow$ (1) HTĐ trên R theo tiêu chuẩn Weierstrass

c, Cho hàm số f xác định trên R, tuần hoàn chu kỳ 2 và thoả mãn:

$f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{với } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x-2 & \text{với } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



giải: +) $f(x)$ tuần hoàn $T = 2 \Rightarrow l = 1$

$f(x)$ là hàm chẵn $\rightarrow b_n = 0$

+) $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{1} \int_0^1 (4-3x)\,dx = 5$

+) $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{l}\right) dx = 2 \int_0^1 (4-3x) \cos(n\pi x)\,dx$

$= 2 \int_0^1 4\cos(n\pi x)\,dx - 6 \int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = 0 - 6 \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^1 x\,d(\sin(n\pi x))$

$= \frac{-6}{n\pi} \left[x\sin(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx \right] = \frac{6}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx = \frac{-6}{(n\pi)^2} \left[(-1)^n - 1 \right]$

⇒ Chuỗi Fourier của hàm số đã cho là:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6-6(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) \ \forall x$$

Theo định lí Dirichlet, giá trị của chuỗi Fourier này tại những điểm liên tục của $f(x)$ là: $\frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6-6(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x)$ $(\forall x)$

Câu 3: a, giải PT: $xy' + (x+3)y = 4xe^{-x}$; $x>0$; $y(1) = a$

Tìm a để $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$

giải: Do $x>0 \Rightarrow y' + \frac{x+3}{x}y = 4e^{-x}$ (1) là pt VP tuyến tính cấp 1 với

$p(x) = \frac{x+3}{x}$; $q(x) = 4e^{-x}$ có NTQ:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{x+3}{x}dx}\left[C + \int 4e^{-x}.e^{\int \frac{x+3}{x}dx}dx\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^3}\left[C + \int 4e^{-x}.e^{x}.x^3 dx\right] = \frac{e^{-x}}{x^3}\left(C + \int 4x^3 dx\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^3}(C + x^4)$$

Do $y(1) = a$ nên $a = \frac{e^{-1}}{1}(C+1) \Rightarrow C = ae - 1$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{-x}}{x^3}(ae - 1 + x^4) = \frac{x^4 + ae - 1}{x^3e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{ae-1}{x^3e^x}$$

Để $\lim_{x\to 0} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} + \frac{ae-1}{x^3e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae-1}{x^3e^x}$

- Nếu $ae - 1 \neq 0$ thì $\lim_{x\to 0} \frac{ae-1}{x^3e^x} = \infty$
- Nếu $ae - 1 = 0 \left(a = \frac{1}{e}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ae-1}{x^3e^x} = 0$

Thử lại: $a = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0$ (TM)

Vậy $a = \frac{1}{e}$ thì $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$

6. Giải PT: $(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + (2x^2 - 4xy - 2x)dy = 0$ bằng cách tìm một thừa số tích phân có dạng $I(x,y) = e^{ax+by}$, a, b const

Giải: Nhân hai vế PT với $e^{ax+by} \neq 0$ ta có:

$$e^{ax+by}(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + e^{ax+by}(2x^2 - 4xy - 2x) = 0 \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = e^{ax+by}(2x - 2y - x^2 + 2xy) \\ Q(x,y) = e^{ax+by}(2x^2 - 4xy - 2x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_y = e^{ax+by}(-bx^2 + 2bxy + (2b+2)x - 2by - 2) \\ Q'_x = e^{ax+by}(2ax^2 - 4axy + (4-2a)x - 4y - 2) \end{cases}$$

Để $P'_y = Q'_x \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2 = 4 - 2a \\ -b = 2a \\ -2b = 4 \\ 2b = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

(1) trở thành: $e^{-x+2y}(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + e^{-x+2y}(2x^2 - 4xy - 2x) = 0$

có TPTQ là: $\int_0^x P(t,y)\,dt + \int_0^y Q(0,t)\,dt = C$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t+2y}(2t - 2y - t^2 + 2ty)\,dt + \int_0^y 0\,dt = C$$

$$\Rightarrow -2ye^{2y}\int_0^x e^{-t}dt - e^{2y}\int_0^x e^{-t}.t^2dt + (2y+2)e^{2y}\int te^{-t}dt = C$$

$$\Rightarrow -2ye^{2y}(1 - e^{-x}) - e^{2y}[2 - (2x + 2 + x^2)e^{-x}] + (2y+2)e^{2y}[1 - (x+1)e^{-x}] = C$$

$$\Rightarrow e^{-x+2y}(x^2 - 2xy) = C$$