TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

GIẢI TÍCH I

(lưu hành nội bộ)

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - TÍCH PHÂN - HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và Lời giải

Hà Nội- 2023

(bản cập nhật Ngày 27 tháng 3 năm 2023)

Tập Bài giảng này vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về địa chỉ “dieu.buixuan@hust.edu.vn”.

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos. Use at your own risk!

Hà Nội, Ngày 27 tháng 3 năm 2023.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ (13LT+13BT)

§1. SƠ LƯỢC VỀ CÁC YẾU TỐ LÔGIC; CÁC TẬP SỐ: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

1. Phần Lôgic không dạy trực tiếp (phần này Đại số đã dạy) mà chỉ nhắc lại những phép suy luận cơ bản thông qua bài giảng các nội dung khác nếu thấy cần thiết.
2. Giới thiệu các tập số; cần nói rõ tập $\mathbb{Q}$ tuy đã rộng hơn $\mathbb{Z}$ nhưng vẫn chưa lấp đầy trục số còn tập $\mathbb{R}$ đã lấp đầy trục số và chứa tất cả các giới hạn của các dãy số hội tụ, ta có bao hàm thức
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

§2. TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ TÍNH CHẤT

Nhắc lại định nghĩa và nêu các tính chất sau

- $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, |x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|x - y| \geq ||x| - |y||\,, \quad |x| \geq A \Longleftrightarrow x \geq A$ hoặc $x \leq -A$
- $|x| \leq B \Longleftrightarrow -B \leq x \leq B$.

§3. HÀM SỐ

3.1 Định nghĩa hàm số

Định nghĩa 1.1. *Một hàm số đi từ tập X vào tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.*

Một hàm số có thể được cho dưới dạng biểu thức giải tích $y = f(x)$, chẳng hạn như hàm số $y = x^2$. Khi đó, cần phải xác định rõ miền xác định (hay tập xác định), tập hợp tất cả các phần tử $x \in X$ sao cho biểu thức $f(x)$ được xác định, của hàm số.

Tập giá trị của hàm số: là tập tất cả các phần tử $y \in Y$ sao cho tồn tại $x \in X, f(x) = y$.

Ví dụ 3.1 (Giữa kì, K61). *Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số*

a) $y = \arcsin(\cos 2x)$.

b) $y = \arcsin(2\cos x)$.

c) $y = \arccos(\sin 2x)$.

d) $y = \arccos(2\sin x)$.

e) $y = \sin(\pi \cos 3x)$.

f) $y = \cos(\pi \sin 3x)$.

3.2 Hàm số đơn điệu

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là đơn điệu tăng trên khoảng (a, b) nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là đơn điệu giảm trên khoảng (a, b) nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Chú ý 1.1. *Trong Bài giảng này chúng ta chỉ quan tâm đến tính đơn điệu của hàm số trên mỗi khoảng mà hàm số đó xác định. Chẳng hạn như, hàm số* $f(x) = \frac{1}{x}$ *có* $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \in \text{TXD} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *nhưng nếu nói* $f(x)$ *đơn điệu giảm trên* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *thì sẽ dẫn đến nghịch lý là* $-1 < 1$ *nhưng* $-1 = f(-1) < f(1) = 1$*. Thay vì đó, ta nói hàm số* $f(x)$ *đơn điệu giảm trên mỗi khoảng* $(-\infty, 0)$ *và* $(0, +\infty)$*.*

3.3 Hàm số bị chặn

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số $M \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in \text{TXD}$.

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số $m \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq M$ với mọi $x \in \text{TXD}$.

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

3.4 Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là chẵn nếu $\begin{cases} x \in \mathrm{TXD} \Rightarrow -x \in \mathrm{TXD} \\ f(-x) = f(x). \end{cases}$

  Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

- Một hàm số $f(x)$ được gọi là lẻ nếu $\begin{cases} x \in \mathrm{TXD} \Rightarrow -x \in \mathrm{TXD} \\ f(-x) = -f(x). \end{cases}$

  Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 3.2. *Chứng minh rằng bất kì hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.*

[Gợi ý] Với mỗi $f(x)$ bất kì ta luôn có

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{g(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{h(x)}$$

trong đó $g(x)$ là một hàm số chẵn, còn $h(x)$ là một hàm số lẻ. Các bạn độc giả được khuyến khích tự chứng minh tính duy nhất của phân tích này.

3.5 Hàm số tuần hoàn

Định nghĩa 1.2. *Một hàm số $f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu như tồn tại số thực $T > 0$ sao cho*

$$f(x) = f(x+T)\ \forall x \in \mathrm{TXD}\,.$$

Ví dụ như các hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ đã học ở phổ thông là các hàm số tuần hoàn. Trong phạm vi Bài giảng này, chúng ta quan tâm chủ yếu là xem có số $T > 0$ nào đó thỏa mãn $f(x+T) = f(x)$ mà không đi sâu vào việc tìm chu kỳ (số $T > 0$ bé nhất).

Các câu hỏi sau đây tuy phát biểu đơn giản (và tưởng chừng như dễ trả lời) nhưng câu trả lời sẽ rất thú vị:

- Tổng (hiệu) của hai hàm số tuần hoàn có tuần hoàn không?
- Tích của hai hàm số tuần hoàn có tuần hoàn không?

- Thương của hai hàm số tuần hoàn có tuần hoàn không?
- Đạo hàm của hàm số tuần hoàn (nếu có) có tuần hoàn không?
- Nếu hàm số $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $F'(x)$ là một hàm số tuần hoàn thì $F(x)$ có tuần hoàn không? Nói cách khác, nếu $f(x)$ là một hàm số tuần hoàn thì $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ có tuần hoàn không?

3.6 Hàm hợp

Cho hai hàm số f, g. Hàm hợp của f và g, kí hiệu là $f \circ g$, là hàm số được định nghĩa bởi

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

3.7 Hàm ngược

Định nghĩa 1.3. *Một hàm số $f : X \to Y$ được gọi là ánh xạ $1-1$ (hay còn gọi là đơn ánh) nếu:*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Định nghĩa 1.4. *Cho f là một đơn ánh với miền xác định A và miền giá trị B. Khi đó hàm ngược f^{-1}, có miền xác định B và miền giá trị A, được định nghĩa bởi*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Miền xác định của f = Miền giá trị của f^{-1}
Miền giá trị của f = Miền xác định của f^{-1}

Chú ý 1.2. *Đồ thị của hàm ngược đối xứng với đồ thị của hàm $y = f(x)$ qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.*

Để tìm hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ ta làm như sau:

- Viết $y = f(x)$,
- Từ phương trình này giải x theo y, giả sử được $x = g(y)$,
- Đổi vai trò của x và y để được hàm số ngược $f^{-1}(x) = g(x)$.

Ví dụ, tìm hàm ngược của hàm số $y = 2x+3$, ta rút x theo y thì được $x = \frac{y-3}{2}$, sau đó đổi vai trò của x và y để được hàm ngược là $y = \frac{x-3}{2}$. Tuy nhiên, cũng có nhiều khi hàm số không phải là đơn ánh trên toàn trục số $\mathbb{R}$, khi đó chúng ta phải xét hàm số trên các khoảng mà hàm số đó là đơn ánh và tìm hàm ngược trên các khoảng tương ứng.

Định lý 3.1. *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (hoặc giảm) trên khoảng (a, b) thì tồn tại hàm số ngược f^{-1} của f trên khoảng đó.*

3.8 Hàm số sơ cấp

Năm loại hàm số sơ cấp cơ bản

1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$. TXĐ của hàm số này phụ thuộc vào α.

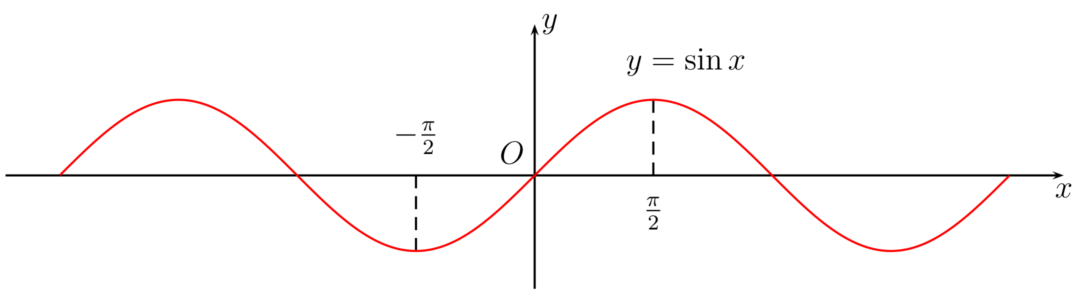
   - Nếu α nguyên dương, ví dụ hàm $y = x^2$, hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$,
   - Nếu α nguyên âm, ví dụ hàm $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, hàm số $y = y^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   - Nếu $\alpha = \frac{1}{p}, p$ nguyên dương chẵn, ví dụ $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}_{\geq 0}$,
   - Nếu $\alpha = \frac{1}{p}$, nguyên dương lẻ, ví dụ $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$,
   - Nếu α là số vô tỉ thì quy ước chỉ xét hàm số tại $x > 0$.

2. Hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}_{>0}$. Hàm này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$.

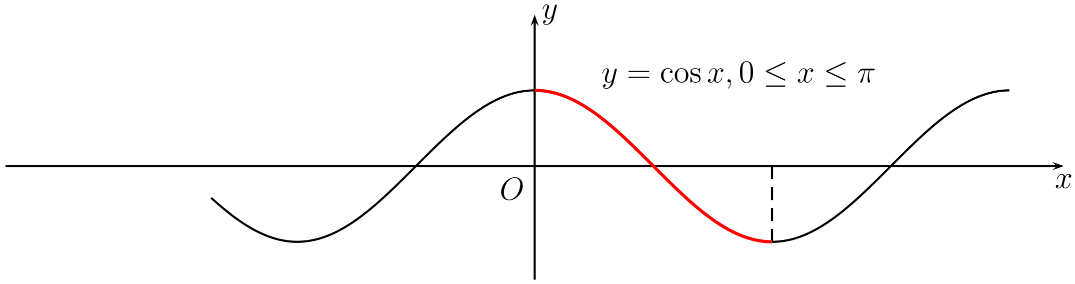
3. Làm số logarit $y = \log_a(x)$ $(0 < a \neq 1)$, ngược với hàm số mũ, hàm số này có TXĐ là $\mathbb{R}_{>0}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$. Hàm số này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $0 < a < 1$. Nó là hàm số ngược của hàm số mũ, do đó đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x$ qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Logarit cơ số 10 của x được kí hiệu là $\lg x$. Logarit cơ số e của x được kí hiệu là $\ln x$.

4. Các hàm lượng giác:

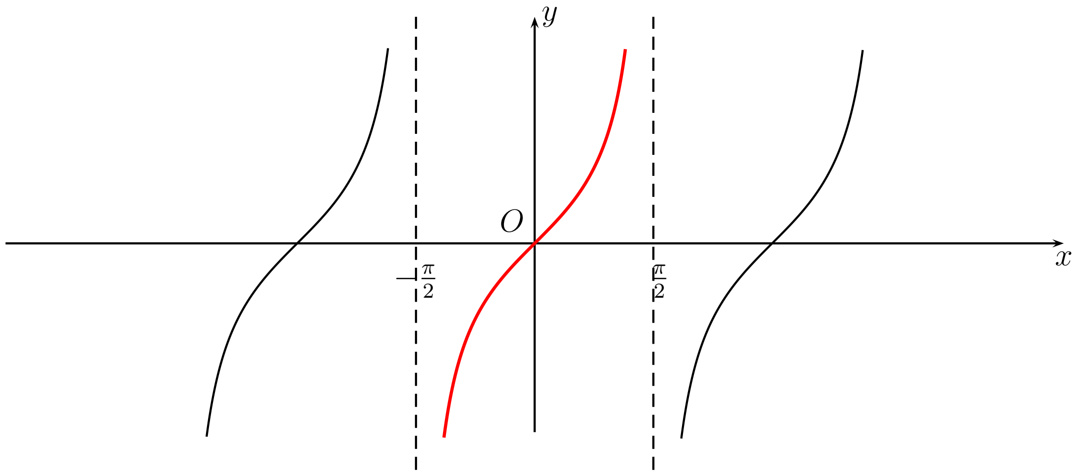
   - Hàm số $y = \sin x$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì 2π.



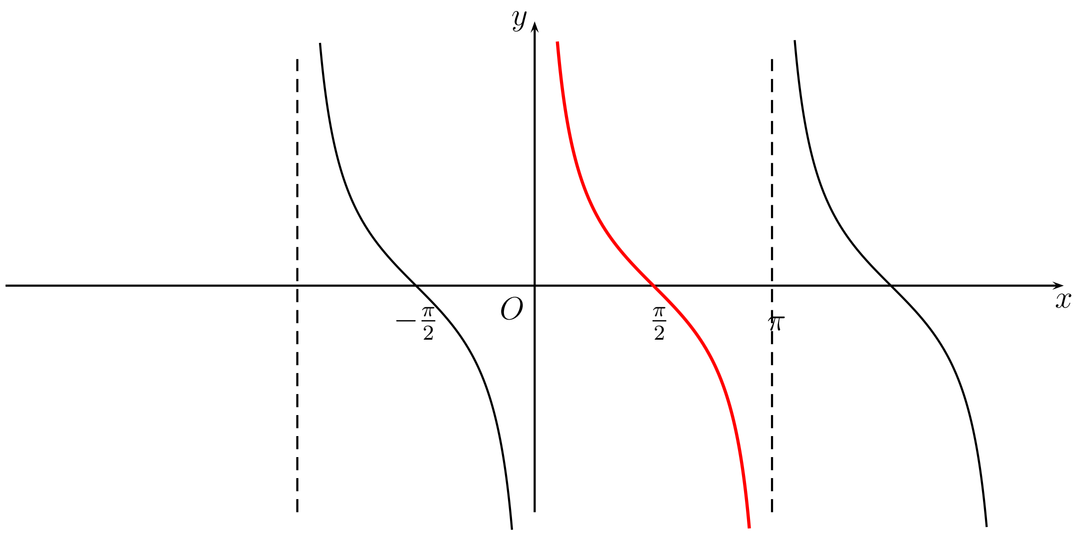
   - Hàm số $y = \cos x$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn chu kì 2π.



- **Hàm số** $y = \tan x$ **xác định** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$**, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì** π**.**



- **Hàm số** $y = \cot x$ **xác định** $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$**, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì** π**.**



Ví dụ 3.1 (Ngụy biện toán học). *Chứng minh rằng* $0 = 2$*.*

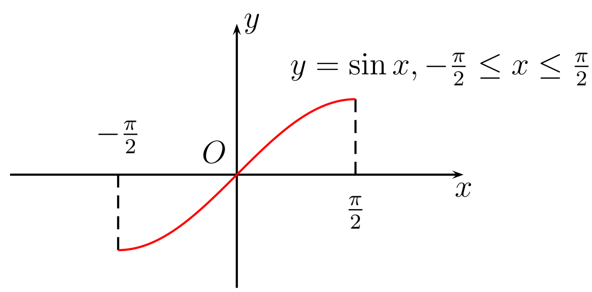
Chứng minh. Ta có

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cos x = 1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Thay $x = \pi$ vào đẳng thức $1 + \cos x = 1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ta được $0 = 2$. ∎

5. Các hàm lượng giác ngược:

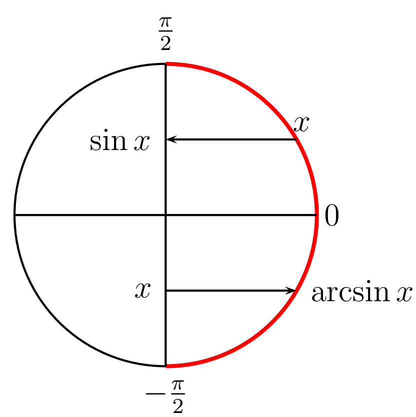
Muốn tìm hàm ngược của một hàm số, một yêu cầu đặt ra là hàm số đó phải là đơn ánh. Tuy nhiên, các hàm lượng giác đều là các hàm số tuần hoàn (do đó, không phải là đơn ánh). Chẳng hạn như, hàm số $y = \sin x$ không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Để vượt qua khó khăn này, người ta hạn chế các hàm số lượng giác trên các khoảng mà nó là đơn ánh. Chẳng hạn như, hàm số $f(x) = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là một đơn ánh.



- Hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$, kí hiệu là $\arcsin x$, xác định như sau:

$$\arcsin : [0, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

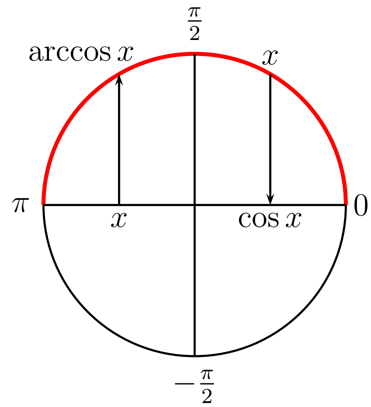
Hàm số $y = \arcsin x$ xác định trên $[-1, 1]$, nhận giá trị trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



- Hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$, kí hiệu là $y = \arccos x$, được xác định như sau:

$$\arccos : [0, 1] \to [0, \pi]$$
$$x \mapsto y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

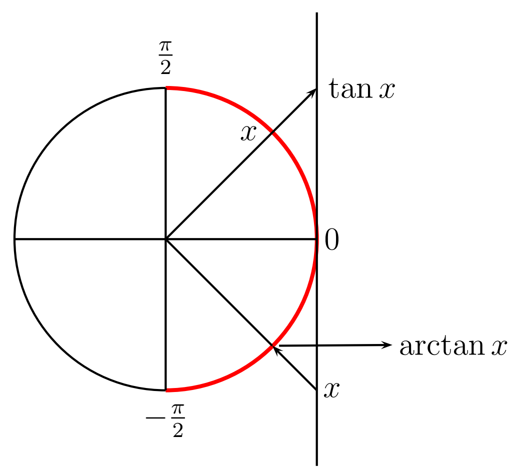
Hàm số $y = \arccos x$ xác định trên $[-1, 1]$, nhận giá trị trên $[0, \pi]$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



• Hàm số ngược của hàm số $y = \tan x$, kí hiệu là $y = \arctan x$, được xác định như sau:

$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x \mapsto y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

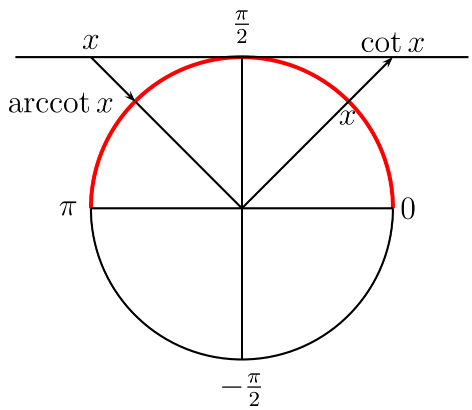
Hàm số $y = \arctan x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



• Hàm số ngược của hàm số $y = \cot x$, kí hiệu là $y = \operatorname{arccot} x$, được xác định như sau:

$$\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$$
$$x \mapsto y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

Hàm số $y = \text{arccot}x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $(0, \pi)$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



Hàm số sơ cấp

Người ta gọi hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, phép lập hàm số đối với các hàm số sơ cấp cơ bản. Các hàm số sơ cấp được chia thành hai loại.

- Hàm số đại số: là những hàm số mà khi tính giá trị của nó ta chỉ phải làm một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Ví dụ: các đa thức, phân thức hữu tỉ, ...
- Hàm số siêu việt: là những hàm số sơ cấp nhưng không phải là hàm số đại số, như $y = \ln x, y = \sin x, \ldots$

3.9 Bài tập

Tìm TXĐ, MGT của hàm số

Bài tập 3.1. Tìm TXĐ của hàm số

a) $y = \sqrt[4]{\lg(\tan x)}$,

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$,

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$,

d) $y = \arccos(2\sin x)$.

[Đáp số]

a) $\{\pi/4 + k\pi \le x < \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

b) $\{-1/3 \le x \le 1\}$,

c) $\{x \ge 0, x \notin \mathbb{Z}\}$,

d) $\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Bài tập 3.2. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \lg(1 - 2\cos x)$ b) $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

[Đáp số]

a) $\{-\infty < y \le \lg 3\}$ b) $\{-\pi/2 \le y \le \pi/2\}$

Tìm hàm ngược.

Bài tập 3.3. Tìm hàm ngược của hàm số (trên miền mà hàm số có hàm ngược)

a) $y = 2x + 3$, b) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, c) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

[Đáp số]

a) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

b) $y = y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

c) Ta có $y' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ không xác định dấu, nên hàm số đã cho có thể không phải là một đơn ánh. Trước hết,

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

Ta phải xét trên 2 miền:

- Trên miền $x > 0$, ta có song ánh:

$$\begin{aligned} (0, +\infty) &\to (1, +\infty) \\ x &\mapsto y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) &\leftarrow y \end{aligned}$$

  Vậy hàm ngược trên miền $x > 0$ là $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x > 1$.

- Trên miền $x < 0$, tương tự ta có hàm ngược là $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), x > 1$.

Ví dụ 3.2 (Giữa kì, K61). *Tìm hàm ngược của hàm số sau*

a) $y = \frac{x+1}{2x+1}$. *b)* $y = \frac{x-1}{2x-1}$.

Xét tính chẵn lẻ của hàm số

Bài tập 3.4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$ b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 - x^2})$ c) $f(x) = \sin x + \cos x$

[Đáp số]

a) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 3.3 (Giữa kì, K61). *Xét tính chẵn lẻ của hàm số*

a) $y = \tan(\sin x)$*.* *b)* $y = \sin(\tan x)$*.*

Ví dụ 3.4. *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định và có đạo hàm trên* $\mathbb{R}$*. Chứng minh rằng*

a) nếu $f(x)$ *là một hàm số lẻ thì* $f'(x)$ *là một hàm số chẵn.*

b) nếu $f(x)$ *là một hàm số chẵn thì* $f'(x)$ *là một hàm số lẻ.*

Xét tính tuần hoàn của hàm số

Bài tập 3.5. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$, c) $f(x) = \sin^2 x$,

b) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$, d) $f(x) = \sin(x^2)$.

Chứng minh. a) Giả sử $T > 0$ là một chu kì của hàm số đã cho. Khi đó

$$\begin{aligned}
& f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & A\cos\lambda(x+T) + B\sin\lambda(x+T) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & A[\cos\lambda x - \cos\lambda(x+T)] + B[\sin\lambda x - \sin\lambda(x+T)] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & 2\sin\frac{-\lambda T}{2}[A\sin(\lambda x + \frac{\lambda T}{2}) + B\cos(\lambda x + \frac{\lambda T}{2})] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & \sin\frac{\lambda T}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow & T = \left|\frac{2k\pi}{\lambda}\right|.
\end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|\lambda|}$.

b) Theo câu a) thì hàm số $\sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π, hàm số $\sin 3x$ tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{3}$. Vậy $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

c) $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

d) Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T > 0$.Khi đó

$$\sin(x+T)^2 = \sin(x^2)\forall x.$$

(a) Cho $x = 0 \Rightarrow T = \sqrt{k\pi}, k \in \mathbb{Z}, k > 0.$

(b) Cho $x = \sqrt{\pi} \Rightarrow k$ là số chính phương. Giả sử $k = l^2, l \in Z, l > 0.$

(c) Cho $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ta suy ra điều mâu thuẫn.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn. ■

Nhận xét: Muốn chứng minh một hàm số không tuần hoàn, chúng ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng như đã trình bày ở trên. Giả sử hàm số đó tuần hoàn với chu kì $p > 0$ sau đó cho một vài giá trị đặc biệt của x để suy ra điều mâu thuẫn. Ngoài phương pháp phản chứng thì chúng ta cũng có thể sử dụng một số tính chất của hàm số tuần hoàn để chứng minh. Chẳng hạn như:

- một hàm số tuần hoàn và liên tục thì bị chặn (tại sao?),
- một hàm số tuần hoàn và không phải là hàm hằng thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (tại sao?),
- đạo hàm của một hàm số tuần hoàn (nếu có) thì cũng tuần hoàn (tại sao?).

Bài tập 3.6. Chứng minh các hàm số sau không tuần hoàn

(a) $y = \cos x + \cos x\sqrt{2}$,

(b) $y = \sin x + \sin x\sqrt{2}$,

(c) $y = \sin x^2$,

(d) $y = \cos x^2$,

(e) $y = \sin\sqrt{x}$,

(f) $y = \cos\sqrt{x}$.

Chứng minh. a) Giả sử hàm số $y = \cos x + \cos x\sqrt{2}$ tuần hoàn với chu kì $T > 0$. Khi đó,

$$\cos x + \cos x\sqrt{2} = \cos(x+T) + \cos(x+T)\sqrt{2}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = 0$ ta được $2 = \cos T + \cos T\sqrt{2}$. Vì $\cos T \le 1, \cos T\sqrt{2} \le 1$ nên

$$2 = \cos T + \cos T\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos T\sqrt{2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = k2\pi, 0 \ne k \in \mathbb{N} \\ T\sqrt{2} = l2\pi, 0 \ne l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Khi đó $\sqrt{2} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$, điều này là vô lý vì $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Như vậy, chúng ta đã trả lời một câu hỏi trong Mục 3.5, rằng tổng của hai hàm số tuần hoàn có thể không phải là một hàm số tuần hoàn. Hàm số $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$ là một hàm số hầu tuần hoàn (almost periodic). Tương tự như vậy, tích của hai hàm số tuần hoàn cũng không phải là một hàm số tuần hoàn, vì

$$2\cos\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\cos\frac{1-\sqrt{2}}{2}x = \cos x + \cos x\sqrt{2}.$$

■

Bài tập 3.7. [Giữa kì, K61] Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì lần lượt là $T_1 > 0, T_2 > 0$. Biết tỉ số $\frac{T_1}{T_2}$ là một số hữu tỉ. Chứng minh rằng $f(x)+g(x)$ và $f(x)g(x)$ cũng là các hàm số tuần hoàn.

Các dạng toán khác

Bài tập 3.8. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$,

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$.

[Đáp số]

a) $f(x) = x^2 - 2$ với $|x| \geq 2$.

b) $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \forall x \neq 1$.

Bài tập 3.9. Cho $f(x) = ax + b, f(0) = -2, f(3) = -5$. Tìm $f(x)$.

[Đáp số] $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$.

Bài tập 3.10. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c, f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$. Tìm $f(x)$.

[Đáp số] $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$.

Bài tập 3.11. Cho $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}), a > 0$. Chứng minh rằng :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Bài tập 3.12. Giả sử $f(x) + f(y) = f(z)$. Xác định z nếu:

a) $f(x) = ax, a \neq 0$,

b) $f(x) = \arctan x$,

c) $f(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

[Đáp số]

a) $z = x + y$,

b) $z = \dfrac{x+y}{1-xy}$,

c) $z = \dfrac{xy}{x+y}$,

d) $z = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

§4. DÃY SỐ

4.1 Dãy số và giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1. *Một dãy số là một hàm số* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. *Kí hiệu* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Một dãy số được gọi là:

- đơn điệu tăng nếu $a_n < a_{n+1} \forall n$, đơn điệu giảm nếu $a_n > a_{n+1} \forall n$.
- bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $a_n \leq M \ \forall n$, bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $a_n \geq m \ \forall n$.

Định nghĩa 1.2. *Một dãy số* $\{a_n\}$ *được gọi là có giới hạn là* L *và viết*

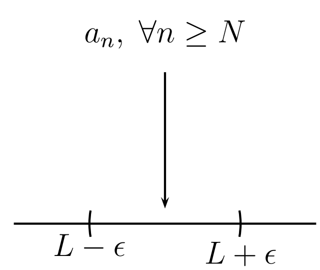
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ hay } a_n \to L \text{ khi } n \to \infty,$$

nếu

- *(nói một cách nôm na) có thể làm cho các số hạng* a_n *gần* L *với một giá trị tùy ý bằng cách chọn* n *đủ lớn.*
- *(nói một cách chính xác) với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho*

$$\text{nếu } n > N \text{ thì } |a_n - L| < \epsilon.$$

Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\{a_n\}_{n \geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.



Hình 1.2

Một dãy số $\{a_n\}$ có $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ hữu hạn được gọi là hội tụ. Ngược lại, nó được gọi là phân kì (nghĩa là $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ hoặc là không tồn tại).

Định nghĩa 1.3 (Giới hạn vô cùng). *Ta nói* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *nếu với mọi số thực dương* M*, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho*

$$\text{nếu } n > N \text{ thì } a_n > M.$$

Hãy phát biểu cho trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Định lý 4.1 (Các tính chất của giới hạn của dãy số).

- *Giới hạn của một dãy số, nếu tồn tại, là duy nhất.*
- *Mọi dãy số hội tụ đều bị chặn.*

Định lý 4.2 (Các phép toán trên giới hạn). *Giả sử* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$*, ở đó* a, b *là các số thực hữu hạn. Khi đó:*

- *Tổng:* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B$*,*
- *Hiệu:* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = A - B$*,*
- *Tích:* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n.b_n) = AB$*,*
- *Thương:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ *nếu* $B \neq 0$.

Chú ý 1.1. *Các phép toán trên giới hạn sau không thực hiện được, chúng còn được gọi là các dạng vô định:*

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}.$$

4.2 Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Định lý 4.3 (Tiêu chuẩn kẹp). *Giả sử*

i) $a_n \leq b_n \leq c_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *hoặc với mọi* $n \geq K$ *nào đó,*

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

Định lý 4.4 (Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn). *Mọi dãy số đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) và bị chặn trên (tương ứng, bị chặn dưới) đều hội tụ.*

Ví dụ 4.1. *Xét* $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$*.Chứng minh rằng* $\{u_n\}$ *là một dãy số tăng và bị chặn.*

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$1 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ số hạng}} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Hơn nữa ta có

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.\frac{1}{n^k}$$

$$k! = 1.2\ldots k \geq 2^{k-1}\ \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow C_n^k.\frac{1}{n^k} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Chú ý 1.1. *Giới hạn* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *là một số vô tỉ, được kí hiệu là* e*. Nó có giá trị xấp xỉ* 2.71.

Ví dụ 4.2 (Giữa kì, 20173). *Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy số*

$$\{x_n\} : x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), n \geq 1.$$

[Lời giải] Từ $x_1 > 0$ ta có $x_n > 0$ với mọi n.

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \geq 1.$$

Do đó, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leq x_n$ với mọi n. Như vậy, $\{x_n\}$ là một dãy số giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Định nghĩa 1.1. *Dãy số* $\{a_n\}$ *được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *với mọi* $m, n > N$*.*

Định lý 4.5 (Tiêu chuẩn Cauchy). *Dãy số* $\{a_n\}$ *là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy số Cauchy.*

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng dãy số* $\{a_n\}$ *với*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

là một dãy số phân kỳ.

Ví dụ 4.2 (Ngụy biện toán học). *Cho x là một số thực và $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n$. Đổi biến số $n = m+1$ ta có*

$$L = \lim_{m+1\to+\infty} x^{m+1} = \lim_{m\to+\infty} x.x^m = x.\lim_{m\to+\infty} x^m = xL.$$

Vậy $L = xL \Rightarrow L(x-1) = 0$. Nếu $x \neq 1$ thì $L = 0$. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0 \;\forall x \neq 1.$$

Điều này dẫn đến, chẳng hạn,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = 0 \text{ thật vô lý!.}$$

Giải thích tại sao lại dẫn đến mâu thuẫn trên?

4.3 Bài tập

Về bài tập tìm giới hạn của dãy số, về cơ bản cho đến thời điểm hiện tại chúng ta chưa có nhiều công cụ để xử lý. Chủ yếu vẫn là các phương pháp nhân liên hợp để khử dạng vô định ở phổ thông, sử dụng tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn, tiêu chuẩn kẹp và tiêu chuẩn Cauchy. Sau này, khi học đến giới hạn của hàm số, các công cụ sẽ phong phú hơn. Khi đó các bài toán về giới hạn của dãy số có thể đưa về giới hạn của hàm số và tính toán dễ dàng.

Bài tập 4.1. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$,

b) $x_n = \sqrt{n(n+a)} - n$,

c) $x_n = n + \sqrt[3]{1 - n^3}$,

d) $x_n = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$,

e) $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

[Đáp số]

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{a}{2}$ c) 0 d) phân kì e) 0

Bài tập 4.2. Xét dãy số $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, x_0 = 1$.

a) Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Bài tập 4.3. Cho $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.Chứng minh rằng $\{s_n\}$ tăng và bị chặn.

Chú ý : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e$.

Bài tập 4.4. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}$, $|a|<1, |b|<1$.

Chứng minh.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.\frac{1-b}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}$$

Bài tập 4.5. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n dấu căn).

Chứng minh. Đặt $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ ta có $u_{n+1}^2 = 2+u_n$. Trước hết chứng minh $\{u_n\}$ là một dãy số tăng và bị chặn, $0 \le u_n \le 2$. Theo tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn, $\{u_n\}$ là một dãy số hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, 0<a<2$ thì từ phương trình $u_{n+1}^2 = 2+u_n$, cho $n\to\infty$ ta có

$$a^2 = a+2$$

Vậy $a=2$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2$ ∎

Bài tập 4.6. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-\sqrt{n^2-1})\sin n$.

[Gợi ý] $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-\sqrt{n^2-1})\sin n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n+\sqrt{n^2-1}} = 0$ (theo tiêu chuẩn kẹp)

Bài tập 4.7. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} [\cos(\ln n) - \cos(\ln(n+1))]$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\cos(\ln n) - \cos(\ln(n+1)) &= -2\sin\left(\frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}\right).\sin\left(\frac{\ln n - \ln(n+1)}{2}\right) \\ &= -2\sin\frac{\ln n(n+1)}{2}\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}\end{aligned}$$ ∎

nên

$$0 \le |\cos(\ln n) - \cos(\ln(n+1))| \le 2\left|\sin\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{2}\right|$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\ln\frac{n}{n+1}}{2} = 0$ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp

$$\lim_{n\to+\infty} [\cos(\ln n) - \cos(\ln(n+1))] = 0$$

Bài tập 4.8. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

[Gợi ý]

$$2^n = (1+1)^n > \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}.$$

Dùng nguyên lý kẹp ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4.9. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$

[Gợi ý] Ta có

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}.\frac{2}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n} < 2.\frac{2}{n}\ \forall n \geq 2.$$

Bài tập 4.10. Tính

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)$

[Gợi ý]

a. Tính $S_n - \frac{1}{2}S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2.$

b. Tính $S_n - \frac{1}{3}S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}.$

Bài tập 4.11. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ với mọi $a > 0$.

[Gợi ý]

a) Đặt $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1+\alpha_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}$. Áp dụng nguyên lý giới hạn kẹp ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

b) Xét $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}$.

- Nếu $a = 1$, xong.
- Nếu $a > 1, 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}\ \forall n > a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$
- Nếu $a < 1$, đặt $a' = \frac{1}{a} \Rightarrow \lim\sqrt[n]{a'} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$

Bài tập 4.12. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, ở đó $x_n = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots+\frac{1}{2}}}$ (n phép chia).

[Lời giải]

1) Trước hết ta chứng minh $0 < x_{2n} < -1+\sqrt{2}$ và $x_{2n+1} > -1+\sqrt{2}$. Thật vậy,

$$\text{Nếu } x_n > -1+\sqrt{2} \text{ thì } x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} < \frac{1}{2+(-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}.$$

$$\text{Nếu } x_n < -1+\sqrt{2} \text{ thì } x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} > \frac{1}{2+(-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}.$$

Như vậy, dãy $\{x_n\}$ này có quy luật là, cứ một số hạng nào đó nhỏ hơn $-1+\sqrt{2}$ thì số hạng đứng ngay sau nó lớn hơn $-1+\sqrt{2}$, và ngược lại. Do đó,

$$x_1 = \frac{1}{2} > -1+\sqrt{2} \Rightarrow x_2 < -1+\sqrt{2} \Rightarrow x_3 > -1+\sqrt{2} \Rightarrow \cdots$$

dẫn đến việc $\begin{cases} 0 < x_{2n} < -1+\sqrt{2}, \\ x_{2n+1} > -1+\sqrt{2}. \end{cases}$

2) Tiếp theo, ta đi chứng minh dãy $\{x_{2n}\}$ là một dãy số tăng, thật vậy,

$$x_{2n+2} = \frac{1}{2+x_{2n+1}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x_{2n}}} = \frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}.$$

$$x_{2n+2} > x_{2n} \Leftrightarrow \frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}} > x_{2n} \Leftrightarrow 2x_{2n}^2 + 4x_{2n} - 2 < 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2} < x_{2n} < -1+\sqrt{2}$$

Điều này luôn đúng, vì ta đã chứng minh ở trên, rằng dãy các số hạng chẵn thỏa mãn $x_{2n} < -1+\sqrt{2}$.

Dãy số này tăng và bị chặn trên bởi $-1+\sqrt{2}$ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = a$. Phương trình $x_{2n+2} = \frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$ dẫn đến $a = \frac{2+a}{5+a} \Rightarrow a = -1+\sqrt{2}$.

3) Tương tự như vậy, dãy $\{x_{2n+1}\}$ sẽ là một dãy số giảm. Thật vậy,

$$x_{2n+3} = \frac{1}{2+x_{2n+2}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x_{2n+1}}} = \frac{2+x_{2n+1}}{5+2x_{2n+1}}.$$

$$x_{2n+3} < x_{2n+1} \Leftrightarrow 2x_{2n+1}^2 + 4x_{2n+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow x_{2n+1} > -1+\sqrt{2} \text{ hoặc } x_{2n+1} < -1-\sqrt{2}$$

Điều này luôn đúng, vì ta đã chứng minh ở trên, rằng dãy các số hạng lẻ thỏa mãn $x_{2n+1} > -1+\sqrt{2}$.

Dãy số này giảm và bị chặn dưới, nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = b$. Phương trình $x_{2n+3} = \frac{2+x_{2n+1}}{5+2x_{2n+1}}$ dẫn đến $b = \frac{2+b}{5+2b} \Rightarrow b = -1+\sqrt{2}$.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1+\sqrt{2}$.

Bài tập 4.13. Dùng tiêu chuẩn Cauchy chứng minh rằng dãy số $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ phân kì.

Bài tập 4.14. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

Bài tập 4.15. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, a_n > 0 \forall n$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

§5. Giới hạn hàm số

5.1 Định nghĩa

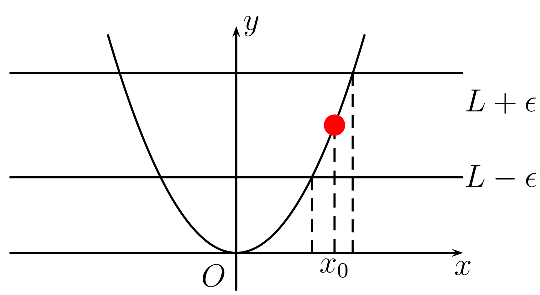
Định nghĩa 1.1. *Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- *(nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.*
- *(nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số thực $\delta > 0$ sao cho*

$$\textit{nếu } |x - x_0| < \delta \textit{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Hình dung rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho đồ thị của hàm số trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sẽ nằm hoàn toàn trong dải $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.



Hình 1.1

Các giới hạn một phía $\lim\limits_{x \to x_0^+} = L$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = L$ và giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ được định nghĩa một cách tương tự.

Định lý 5.1 (Tính duy nhất của giới hạn). *Giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, nếu tồn tại, là duy nhất.*

5.2 Các phép toán trên giới hạn

Định lý 5.2 (Các phép toán trên giới hạn). *Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, ở đó a, b là các số thực hữu hạn. Khi đó,*

- *Tổng:* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$,

- *Hiệu:* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$,
- *Tích:* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = ab$,
- *Thương:* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, *nếu* $b \neq 0$.

Chú ý 1.1. *Các phép toán trên giới hạn sau không thực hiện được, chúng còn được gọi là các dạng vô định:*

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}.$$

5.3 Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_o$, $\lim\limits_{u \to u_o} f(u) = f(u_o)$ và có hàm hợp $f(u(x))$ thì

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f(u_o).$$

Áp dụng $\lim\limits_{x \to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} B(x) \ln A(x)}$.

5.4 Giới hạn vô cùng

Định nghĩa 1.1. *Giả sử rằng hàm số* $f(x)$ *được xác định tại mọi điểm* $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$*. Ta nói giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* x *tiến đến* x_0 *bằng vô cùng và viết*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

nếu với mọi số $M > 0$*, tồn tại số thực* $\delta > 0$ *sao cho*

$$\textit{nếu } |x - x_0| < \delta \textit{ thì } |f(x)| > M.$$

Các giới hạn một phía $\lim\limits_{x \to x_0^+} = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = \infty$ và giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ được định nghĩa một cách tương tự.

5.5 Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Định lý 5.3. *Nếu* $f(x) \leq g(x)$ *với mọi* x *trong một lân cận nào đó của* a*, và tồn tại các giới hạn* $\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *thì*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Hệ quả 5.1 (Tiêu chuẩn kẹp). *Nếu* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *trong một lân cận nào đó của* a*, và tồn tại các giới hạn* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$*. Khi đó tồn tại* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$*, và*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

5.6 Mối liên hệ giữa giới hạn của dãy số và giới hạn của hàm số

Nhiều bài toán giới hạn của dãy số có thể được chuyển về giới hạn của hàm số và lợi dụng các công cụ của giới hạn của hàm số để tính toán một cách dễ dàng. Chúng thể hiện qua mối liên hệ sau.

Định lý 5.4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ ***khi và chỉ khi với mọi dãy số*** $\{x_n\}$ ***sao cho*** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ ***thì*** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$, ***ở đó (chỉ riêng trong Định lý này)*** x_0 ***và*** L ***có thể là một số thực hữu hạn hoặc bằng vô cùng.***

Chẳng hạn như, muốn chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ta có thể đưa về $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

5.7 Bài tập

Bài tập 5.1. Tính

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử. Nếu $P_n(x_0) = Q_m(x_0) = 0$ thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0).P_{n-1}(x)}{(x-x_0).Q_{m-1}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

[Đáp số]

a) $\dfrac{49}{24}$

b) $\dfrac{n(n-1)}{2}.a^{n-2}$

Bài tập 5.2. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} \quad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x) \quad (\infty - \infty).$

Chứng minh. a) Chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ ta được

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}}{\sqrt{1+1/x}} = 1.$$

b) Sử dụng phương pháp **nhân liên hợp** ta được

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2-1} + x^2} = \frac{1}{3}.$$

§6. VÔ CÙNG LỚN, VÔ CÙNG BÉ

6.1 Vô cùng bé (VCB)

Định nghĩa 1.1. *Hàm số $f(x)$ được gọi là một* vô cùng bé *(viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Mối liên hệ giữa giới hạn và VCB

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow f(x) = \ell + \alpha(x);$$

trong đó $\alpha(x)$ là một VCB trong quá trình $x \to a$.

Một số tính chất của VCB

1. Tổng hai VCB (đối với một VCB người ta không quan tâm đến dấu của nó) là một VCB.

2. Tích của VCB với một đại lượng bị chặn là một VCB.

3. Tích các VCB là một VCB.

Chú ý: Thương của hai VCB là một dạng vô định $\frac{0}{0}$.

So sánh các VCB

Định nghĩa 1.2 (VCB cùng bậc, tương đương). *Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$.*

i) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB cùng bậc.

ii) Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương và viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Một số VCB tương đương hay dùng trong quá trình $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \dfrac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$,
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$. Đặc biệt, $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,

- $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Định nghĩa 1.3 (VCB bậc cao). *Nếu* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$*, ta nói rằng* $\alpha(x)$ *là VCB bậc cao hơn* $\beta(x)$ *và kí hiệu* $\alpha(x)=o(\beta(x))$*.*

Định lý 6.1.

a) Hiệu hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn VCB đó.

b) Tích hai VCB là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ứng dụng của VCB để tìm giới hạn

Định lý 6.2 (Quy tắc thay tương đương). *Nếu* $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$ *khi* $x\to a$ *thì*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)},\quad \lim_{x\to a}\alpha_1(x)\gamma(x)=\lim_{x\to a}\alpha_2(x)\gamma(x).$$

Định lý 6.3 (Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao). *Nếu* $\alpha_1(x)=o(\alpha_2(x)),\beta_1(x)=o(\beta_2(x))$ *khi* $x\to a$ *thì*

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\sim\alpha_2(x) \text{ và } \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Chú ý 1.1. *Sai lầm hay mắc: Thay tương đương khi có hiệu hai VCB. Chẳng hạn như, với VCB* $\alpha(x)=\sin x-\tan x+x^3$ *khi* $x\to 0$ *ta có*

i) Thay tương đương $\alpha(x)\sim x^3$*,* *ii) Thực tế,* $\alpha(x)\sim\frac{x^3}{2}$*.*

Thật vậy,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x+x^3}{x^3}=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=1+\lim_{x\to0}\frac{-\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6.1 (Giữa kì, K61). *So sánh cặp vô cùng bé sau đây khi* $x\to 0$

a) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2+x^3},\quad \beta(x)=e^{\sin x}-1$.

b) $\alpha(x)=\sqrt[5]{x^4+x^5},\quad \beta(x)=e^{\tan x}-1$.

c) $\alpha(x)=\sqrt[5]{x^4-x^5},\quad \beta(x)=\ln(1+\tan x)$.

d) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3},\quad \beta(x)=\ln(1+\sin x)$.

e) $\alpha(x)=e^{\sqrt{x}}-1,\quad \beta(x)=\sqrt{x+x^2}$.

f) $\alpha(x)=e^{x^2}-1,\quad \beta(x)=x^2+x^3$.

6.2 Vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa 1.1. *Hàm số $f(x)$ được gọi là một* vô cùng lớn *(viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty.$$

Nghịch đảo của một VCB là một VCL, và ngược lại.

So sánh các VCL

Định nghĩa 1.2 (VCL cùng bậc, tương đương). *Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL khi $x \to a$.*

i) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL cùng bậc.

ii) Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL tương đương và viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Định nghĩa 1.3 (VCL bậc cao). *Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCL bậc cao hơn $\beta(x)$.*

Ứng dụng VCL khử dạng $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Định lý 6.4 (Quy tắc thay tương đương). *Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ là các VCL khi $x \to a$ thì*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}, \quad \lim_{x\to a} \alpha_1(x)\gamma(x) = \lim_{x\to a} \alpha_2(x)\gamma(x).$$

Định lý 6.5 (Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp). *Nếu $\alpha_1(x)$ là VCL bậc cao hơn $\alpha_2(x)$ và $\beta_1(x)$ là VCL bậc cao hơn $\beta_2(x)$ khi $x \to a$ thì*

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_1(x) \text{ và } \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Chú ý 1.1. *Còn tồn đọng một số dạng vô định mà phương pháp sử dụng các VCB-VCL chưa xử lý được, ví dụ*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}, \ldots$$

Các giới hạn này sẽ được xử lý khi chúng ta học đến công thức L'Hospital và khai triển Maclaurin.

Ví dụ 6.1 (Giữa kì, K61). *Tính giới hạn* *a)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2+x^3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1-3x)}$.

6.3 Bài tập

Như vậy ngoài các phương pháp **phân tích đa thức thành nhân tử** và **nhân liên hợp** đã trình bày ở trên, bài học hôm nay cung cấp cho chúng ta một công cụ mới để tìm giới hạn, đó là các quy tắc thay tương đương và ngắt bỏ các VCB bậc cao. Đây có lẽ là một trong những công cụ rất tốt của Giải tích để tính giới hạn.

Bài tập 6.1. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Chứng minh. a.

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x} - \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

Vì $\sqrt[m]{1+\alpha x}-1 \sim \dfrac{\alpha}{m}x$, $\sqrt[n]{1+\beta x}-1 \sim \dfrac{\beta}{n}x$, nên

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$$

b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}.\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} + \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\right) = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

Chú ý 1.2.

i) Lưu ý kĩ thuật thêm bớt 1 *ở trong các biểu thức có chứa* $\cos\alpha(x), e^{\alpha(x)}$ *và* $\ln(\alpha(x)),\ \sqrt[m]{1+\alpha(x)}$.

ii) Với nhiều bài toán nhìn qua tưởng rất phức tạp vì công thức rất cồng kềnh, thực chất nếu dùng quy tắc thay tương đương và ngắt bỏ các VCB bậc cao thì sẽ thấy rất đơn giản. Ví dụ, tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x}.$$

Với tử số ta có $\sin 2x \sim 2x, \arcsin^2 x \sim x^2, \arctan^2 x \sim x^2$. *Như vậy giới hạn đã cho bằng* $\frac{2}{3}$. *Hoặc ví dụ như tính*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\tan^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}.$$

Trông biểu thức này rất phức tạp nhưng thực chất chúng ta có thể nhìn thấy ngay giới hạn này bằng $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x} = 2$ *với nhận xét là* $2\sin x \sim 2x$ *là VCB bậc thấp nhất ở tử số và* x *là VCB bậc thấp nhất ở mẫu số.*

Bài tập 6.2. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

[Đáp số]

a) $\cos a$ b) 0 c) $\dfrac{-1}{12}$ d) 14

Bài tập 6.3. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\ (1^\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x>0.$

Chứng minh. a) Đây không phải là dạng vô định, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1.$

b) Áp dụng công thức $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x)}.}$ Vì

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

nên

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

c) Đáp số: 0.

d)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}), x>0\\
=&\lim_{n\to\infty} n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})\\
=&\lim_{n\to\infty} n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)\\
=&\lim_{n\to\infty} n^2x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}.\frac{1}{n(n+1)}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}.x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\\
=&\ln x
\end{aligned}$$

■

So sánh các VCB-VCL.

Chú ý 1.3.

i) So sánh 2 VCB: Nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$, nhưng

ii) So sánh 2 VCL: Nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCL bậc cao hơn $\beta(x)$.

iii) Cùng một biểu thức $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ chẳng hạn, thì nếu trong quá trình $x\to 0^+$ thì nó là VCB nên theo quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao, $\alpha(x)\sim\sqrt{\sqrt{x}}=x^{1/4}$, còn nếu xét trong quá trình $x\to\infty$ thì nó là VCL nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp, $\alpha(x)\sim\sqrt{x}$.

Bài tập 6.4. Khi $x\to 0$ cặp VCB sau có tương đương không ?

$$\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}} \text{ và } \beta(x)=e^{\sin x}-\cos x$$

[Đáp số] $\beta(x)=o(\alpha(x))$

Bài tập 6.5. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ (1^∞),

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (1^∞),

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (1^∞),

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ (1^∞),

[Gợi ý] Áp dụng $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}A(x)^{B(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}B(x)\ln A(x)}}$

[Đáp số]

a) e^{-2} b) 1 c) 1 d) e

Bài tập 6.6. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$.

[Gợi ý] Sử dụng phương pháp thay tương đương.
[Đáp số]

a) $\alpha - \beta$ b) 1 c) $a^a(\ln a - 1)$

§7. HÀM SỐ LIÊN TỤC

7.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận nào đó của x_0. Nó được gọi là*

i) liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} = f(x_0)$,

ii) liên tục trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} = f(x_0)$,

iii) liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$. Nói cách khác,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \text{ ta có} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó liên tục phải và liên tục trái tại x_0.

Ví dụ 7.1. *Tất cả các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.*

Ví dụ 7.2 (Giữa kì, K61). *Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = 1$:*

a) $f(x) = \begin{cases} (x-m)(x^2+x+1), & \text{nếu } x \neq 1, \\ 1+m, & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x+m)(x^2+x+1), & \text{nếu } x \neq 1, \\ 1-m, & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$

Định nghĩa 1.2. *Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$. Nó được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$, đồng thời liên tục phải tại a và liên tục trái tại b.*

7.2 Các phép toán số học đối với hàm số liên tục

Định lý 7.1. *Giả thiết các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 nào đó. Khi đó các hàm số $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ cũng liên tục tại x_0. Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

Điều tương tự cũng đúng đối với các hàm số liên tục trái (phải) tại x_0.

7.3 Sự liên tục của hàm ngược

Định lý 7.2. *(Sự liên tục của hàm ngược)*
Nếu X là một khoảng, $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) liên tục trên X. Khi đó có hàm ngược $y = g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) và liên tục trên $f(X)$.

Ví dụ: Các hàm số lượng giác ngược là liên tục trên tập xác định của chúng.

7.4 Sự liên tục của hàm hợp

Định lý 7.3. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại b và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = b$. Nói cách khác,*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Hệ quả 7.1. *Nếu $g(x)$ liên tục tại a và $f(x)$ liên tục tại $g(a)$ thì hàm số $f \circ g$ liên tục tại a.*

7.5 Các định lý về hàm liên tục

Định lý 7.4. *Nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) mà giá trị $f(x_0), x_0 \in (a, b)$ dương (hay âm) thì tồn tại một lân cận $U(x_0)$ sao cho $\forall x \in U(x_0)$, $f(x)$ cũng dương hay âm. Hình ảnh hình học.*

Định lý 7.5. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó. Hình ảnh hình học.*

Định lý 7.6. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó đạt được GTLN, NN trên đoạn này. Hình ảnh hình học.*

* Liên tục đều, hình ảnh hình học của liên tục đều.

Định lý 7.7. *(Định lý Cantor)*
Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó liên tục đều trên đó (thay $[a, b]$ bằng khoảng (a, b) thì định lý không còn đúng). Mô tả hình học.

Định lý 7.8. *(Định lý Cauchy)*
Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists \alpha \in (a, b)$ để $f(\alpha) = 0$.

Ví dụ 7.1 (Giữa kì, 20173). *Cho hàm số $f : [1, 3] \to [1, 3]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [1, 3]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.*

[Lời giải] Xét $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g(1) = f(1) - 1 \geq 0, \quad g(3) = f(3) - 3 \leq 0$. Theo Định lý Cauchy, phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm x_0 nào đó trong khoảng $[1, 3] \Rightarrow f(x_0) = x_0$.

Hệ quả 7.1. *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $A = f(a) \neq B = f(b)$ thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B.*

Hệ quả 7.2. *Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, m, M lần lượt là các GTNN, LN của hàm số trên đoạn này thì $[m; M]$ là tập giá trị của hàm số.*

7.6 Điểm gián đoạn và phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Định nghĩa 1.1. *Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói nó gián đoạn tại x_0.*

Hình ảnh hình học: đồ thị không liền nét tại điểm gián đoạn.

Theo định nghĩa, hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- $f(x)$ xác định tại x_0,
- tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Như vậy nếu x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ thì

- hoặc $x_0 \notin$ TXĐ,
- hoặc $x_0 \in$ TXĐ và $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
- hoặc $x_0 \in$ TXĐ và $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, ở đây $x \to x_0$ theo nghĩa cả hai phía hay một phía.

Nếu $x_0 \notin$ TXĐ của $f(x)$ thì có thể có rất nhiều điểm gián đoạn, nên ta chỉ quan tâm đến những điểm gián đoạn thuộc tập xác định hay là những điểm đầu mút của khoảng xác định.

Phân loại điểm gián đoạn

Giả sử x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$.

1. Điểm gián đoạn loại 1:
   Nếu $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f\left(x_0^+\right)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f\left(x_0^-\right)$ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số $f(x)$. Khi đó, có thể xảy ra hai trường hợp:

- Nếu $f\left(x_0^+\right) \neq f\left(x_0^-\right)$ thì giá trị $\left|f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)\right|$ gọi là bước nhảy của hàm số.
- Đặc biệt: nếu $f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right)$ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số. Khi đó nếu hàm số chưa xác định tại x_0 thì ta có thể bổ sung thêm giá trị của hàm số tại x_0 để hàm số liên tục tại điểm x_0. Còn nếu hàm số xác định tại điểm x_0 thì ta có thể thay đổi giá trị của hàm số tại điểm này để hàm số liên tục tại x_0.

2. Điểm gián đoạn loại 2:
   Nếu x_0 không là điểm gián đoạn loại 1 thì ta nói nó là điểm gián đoạn loại 2.

Chú ý 1.1. *Với quan điểm xem điểm gián đoạn bỏ được là trường hợp đặc biệt của điểm gián đoạn loại 1, nếu x_0 là điểm đầu mút của khoảng hay đoạn xác định của $f(x)$, mà có $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ hữu hạn thì ta cũng xem x_0 là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số.*

Ví dụ 7.2 (Giữa kì, K61).

a) Điểm $x = \frac{\pi}{2}$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2^{\tan x}}$.

b) Điểm $x = -\frac{\pi}{2}$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2^{\tan x}}$.

Ví dụ 7.3 (Cuối kì, K61-Viện ĐTQT). *Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số*

a) $y = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}}$. *b)* $y = e^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\frac{1}{x}}$.

7.7 Bài tập

Xét tính liên tục của hàm số. Muốn kiểm tra xem $f(x)$ có liên tục tại x_0 hay không chúng ta đi kiểm tra $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ có bằng $f(x_0)$ hay không? Đôi khi phải xét $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ nếu biểu thức của $f(x)$ ở hai phía của x_0 được cho dưới các công thức khác nhau. Thậm chí cũng có khi biểu thức của $f(x)$ ở hai phía của x_0 được cho cùng một công thức nhưng giới hạn trái và giới hạn phải của $f(x)$ tại x_0 vẫn khác nhau. Ví dụ, xét sự liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2^{\cot x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Hàm số này có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ (tại sao?). Do đó nó liên tục trái tại 0 và không liên tục phải tại 0.

Bài tập 7.1. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

[Đáp số]

a) $a = \frac{1}{2}$

b) $a = 1$

Bài tập 7.2. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a) $y = \dfrac{8}{1 - 2^{\cot x}}$,

b) $y = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$,

c) $y = \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (a \neq b)$.

[Đáp số]

a) Loại I

b) Loại II

c) Bỏ được

Bài tập 7.3. Xét sự liên tục của các hàm số sau

a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{nếu x vô tỉ} \\ 0, & \text{nếu x hữu tỉ} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

[Đáp số]

a) liên tục

b) liên tục

c) gián đoạn

Bài tập 7.4. Chứng minh rằng nếu f, g là các hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(x) = g(x)$ với mọi x là số hữu tỉ trong đoạn $[a, b]$ thì $f(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$.

Bài tập 7.5. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x - 1$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(1, 2)$.

Bài tập 7.6. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài tập 7.7. Chứng minh rằng nếu $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Bài tập 7.8. Chứng minh rằng mọi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm thực.

§8. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

8.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Giới hạn, nếu có, của tỉ số*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$. Khi đó ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Nếu quá trình $\Delta x \to 0$ trong định nghĩa trên được thay bằng

- $\Delta x \to 0^+$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm phải của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$.
- $\Delta x \to 0^-$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm trái của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0^-)$.

Đương nhiên, một hàm số có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại x_0.
Nếu tồn tại $f'(x_0)$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng, chẳng hạn như hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại 0 nhưng không có đạo hàm tại đó.

Ví dụ 8.1 (Giữa kì, K61). *Tính $f'(0)$, biết*

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \textit{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \textit{nếu } x < 0. \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \tan x, & \textit{nếu } x \geq 0, \\ -x^2 + x, & \textit{nếu } x < 0. \end{cases}$

Ví dụ 8.2 (Giữa kì, K61). *Hãy chỉ ra một hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại các điểm $x_0 = 1, x_1 = 2$ nhưng không có đạo hàm tại các điểm này.*

Ví dụ 8.3 (Giữa kì, K59). *Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại 1 và biết rằng*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1 + 7x) - f(1 + 2x)}{x} = 2.$$

Tính $f'(1)$.

[Lời giải] Ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1 + 7x) - f(1 + 2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[7. \frac{f(1 + 7x) - f(1)}{7x} - 2. \frac{f(1 + 2x) - f(1)}{2x} \right]$$
$$= 7f'(1) - 2f'(1) \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{5}.$$

Ví dụ 8.4 (Giữa kì, 20173). *Cho hàm số* $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

Tính $f'_+(0)$.

[Lời giải] Ta có

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow f'_+(0) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$ (L'Hospital)

8.2 Các phép toán trên đạo hàm

Định lý 8.1. *Cho* $u(x)$ *và* $v(x)$ *là các hàm số có đạo hàm tại* x_0. *Khi đó,*

i) $(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$,

ii) $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$,

iii) $\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$ *nếu* $v(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 8.1 (Giữa kì, K61-Viện ĐTQT). *Tính đạo hàm của hàm số*

a) $f(x) = x^{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = (\sin x)^x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c) $f(x) = x^{\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d) $f(x) = (\cos x)^x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

e) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

f) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8.3 Đạo hàm của hàm hợp

Định lý 8.2. *Nếu* u *có đạo hàm tại* x *và* f *có đạo hàm tại* $u(x)$ *thì hàm số hợp* $F = f \circ u$ *có đạo hàm tại* x *và*

$$F'(x) = f'(u(x)).u'(x).$$

Ý tưởng chứng minh: ta có

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$f[u(x_0 + \Delta x)] - f[u(x_0)] = f\left[u_o + \underbrace{u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}_{\delta_y}\right] - f(x_0) = f'_u(u_o).\delta_y + o(\delta_y)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f[u(x_0 + \Delta x)] - f[u(x_0)]}{\Delta x}$$

8.4 Đạo hàm của hàm ngược

Định lý 8.3. *Giả thiết*

i) $x = \varphi(y)$ *có đạo hàm tại* y_0 *và* $\varphi'(y_0) \neq 0$*,*

ii) $x = \varphi(y)$ *có hàm ngược* $y = f(x)$ *liên tục tại* $x_0 = \varphi(y_0)$*.*

Khi đó hàm ngược này có đạo hàm tại điểm x_0 *và* $f'(x_0) = \dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$*.*

Định lý 8.4. *Giả thiết*

i) $x = \varphi(y)$ *có đạo hàm tại* y_0 *và* $\varphi'(y_0) \neq 0$*,*

ii) $x = \varphi(y)$ *biến thiên đơn điệu trong lân cận điểm* y_0*.*

Khi đó nó tồn tại hàm ngược $y = f(x)$*, hàm ngược này cũng có đạo hàm tại điểm* x_0 *và* $f'(x_0) = \dfrac{1}{\varphi'(y_o)}$*.*

Từ đó xây dựng công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược.

8.5 Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

8.6 Vi phân của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Do đó, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, trong đó $\alpha(\Delta x)$ là một VCB khi $\Delta x \to 0$. Vậy

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha.\Delta x.$$

Số hạng $\alpha.\Delta x$ là một VCB bậc cao hơn Δx. Do đó, Δy và $f'(x)\Delta x$ là hai VCB tương đương.

Định nghĩa 1.1. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U_\epsilon(x_0)$. Nếu có*

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x),$$

ở đó A chỉ phụ thuộc vào x_0 chứ không phụ thuộc vào Δx thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và biểu thức

$$df = A\Delta x$$

được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0.

Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

Định lý 8.5. *Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó khả vi tại x_0 và*

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Chú ý 1.1. *Khái niệm "có đạo hàm" và khái niệm "có vi phân" (hay khả vi) là hai khái niệm khác nhau. Tuy nhiên, vì tính tương đương giữa hai khái niệm này đối với hàm số một biến số mà nhiều người hiểu nhầm rằng chúng là một. Trong chương 3 của học phần Giải tích I này, chúng ta sẽ thấy hai khái niệm này là khác nhau đối với hàm số nhiều biến số.*

Xét hàm số $y = f(x) = x$ có $df(x) = dx = 1.\Delta x$. Vì thế với biến số độc lập x ta quy ước viết

$$dx = \Delta x \quad \text{và} \quad dy = df(x) = f^{'}(x)dx.$$

Tính bất biến của dạng thức vi phân (cấp 1)

Cho $y = f(x)$ là một hàm số khả vi. Khi đó, ta đã biết nếu x là biến số độc lập thì

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Định lý 8.6. *Nếu x không phải là một biến số độc lập mà $x = x(t)$ là một hàm số phụ thuộc vào biến số t thì công thức*

$$df(x) = f'(x)dx$$

vẫn còn đúng.

Chứng minh. Đặt $F(t) = f(x(t))$, khi đó $F'(t) = f'(x(t))x'(t)$ và

$$df(x(t)) = f'(x(t))x'(t)dt.$$

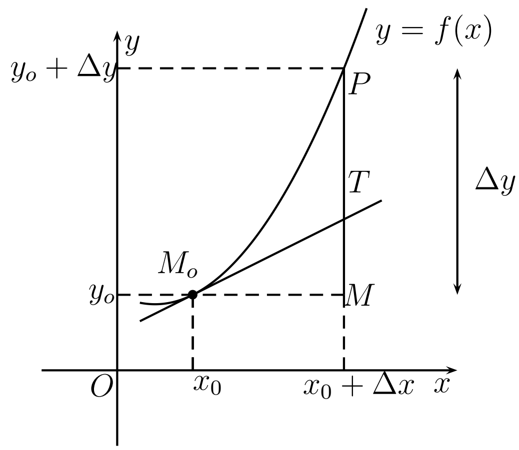
Mặt khác, $dx = x'(t)dt$ nên $df(x) = f'(x)dx$.

Chính vì vậy, tính chất này còn được gọi là tính bất biến của dạng thức vi phân cấp một. Chú ý rằng tính chất này không còn đúng đối với các dạng thức vi phân cấp cao.

Ví dụ 8.1. *Tính* $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$.

Ý nghĩa hình học của vi phân

$df(x_0) = \overline{MT}$



Khi x thay đổi từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$ thì

i) $df(x_0) = \overline{MT}$ thể hiện sự thay đổi của đường thẳng tiếp tuyến,

ii) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thể hiện sự thay đổi của đường cong $y = f(x)$.

Vi phân của tổng, hiệu, tích, thương

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(u.v) = udv + vdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Ví dụ 8.2 (Giữa kì, K61). *Tìm $f'(x)$ nếu biết*

a) $\frac{d}{dx}[f(2016x)] = x^2$. *b)* $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$.

Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Xuất phát từ công thức $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f^{'}(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ta ngắt bỏ phần VCB bậc cao $o(\Delta x)$ để được công thức tính gần đúng sau:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 8.3 (Giữa kì, K61). *Sử dụng vi phân, tính gần đúng*

a) $\sqrt[3]{7,97}$. *b)* $\sqrt[3]{8,03}$.

8.7 Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 1.1. *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y^{'} = f^{'}(x)$ gọi là đạo hàm cấp một của $f(x)$.*

i) Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp một được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu là $f''(x)$.

ii) Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp $n-1$ được gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$.

Các phép toán trên đạo hàm cấp cao

Định lý 8.7. *Cho u, v là các hàm số khả vi đến cấp n. Khi đó,*

i) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$,

ii) (Công thức Leibniz) $(u.v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.u^{(n-k)}v^{(k)}$.

Ví dụ 8.1. *Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số sau*

$$y = x^\alpha,\ \ y = \frac{1}{x+a},\ \ y = \sin(ax+b)\,,$$
$$y = \cos(ax+b)\,,\ \ y = e^{ax},\ \ y = \left(x^2+1\right)e^x,\ \ y = e^x\sin x.$$

Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản

1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
2. $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).(1+x)^{\alpha-n}$
3. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}.\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
4. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
5. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
6. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
7. $(a^x)^{(n)} = a^x.(\ln a)^n$
8. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

Ví dụ 8.2 (Giữa kì, K61). *Tính đạo hàm cấp cao $y^{(10)}(0)$ với*

a) $y(x) = e^{x^2}$.

b) $y(x) = e^{-x^2}$.

c) $y(x) = \arctan x$.

d) $y(x) = \operatorname{arccot} x$.

[Lời giải]

a) Ta có $y'(x) = 2xe^{x^2} = 2xy$. Lấy đạo hàm cấp n hai vế ta được

$$y^{(n+1)}(x) = (2xy)^{(n)} = 2xy^{(n)}(x) + 2ny^{(n-1)}(x). \quad \text{(Công thức Leibniz)}$$

Thay $x = 0$ ta được có công thức truy hồi

$$y^{(n+1)}(0) = 2ny^{(n-1)}(0).$$

Do đó,

$$y^{(10)}(0) = 2.9y^{(8)}(0) = (2.9).(2.7)y^{(6)}(0) = \cdots = (2.9)(2.7)(2.5)(2.3)(2.1)y^{(0)}(0) = 30240.$$

b) Tương tự câu a).

c) Ta có $y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y' = 1$. Lấy đạo hàm cấp n hai vế ta được

$$(1+x^2)y^{(n+1)}(x) + n.2x.y^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}.2.y^{(n-1)}(x) = 0. \quad \text{(Công thức Leibniz)}$$

Thay $x = 0$ vào ta được công thức truy hồi

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0).$$

Do đó,

$$y^{(10)}(0) = -9.8y^{(8)}(0) = (-9.8)(-7.6)y^{(6)}(0) = \cdots = (-9.8)(-7.6)(-5.4)(-3.2)y''(0) = 0$$

bởi vì, $y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y''(0) = 0$.

d) Tương tự câu c).

Ví dụ 8.3 (Giữa kì, K59). *Tính đạo hàm cấp cao $y^{(19)}(0)$ với*

a) $y = \arcsin x$, *b)* $y = \arccos x$.

[Lời giải]

a) Ta có

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)y' = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

Đạo hàm cấp n hai vế ta được

$$[(1-x^2)y'' - xy']^{(n)} = 0 \Rightarrow (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0.$$

Thay $x = 0$ vào ta được công thức truy hồi

$$y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0) \Rightarrow y^{(19)}(0) = 17^2y^{(17)}(0) = \cdots = (17!!)^2y'(0) = (17!!)^2.$$

b) Tương tự câu a).

Ví dụ 8.4 (Cuối kì, K60). *Tính* $f^{(10)}(1)$ *với* $f(x) = x^9 \ln x$.

[Lời giải] Ta xét bài toán tổng quát hơn: tính $g^{(n+1)}(x)$ với $g(x) = x^n \ln x$. Nhận xét

i) $g'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = nx^{n-1}\left(\ln x + \frac{1}{n}\right)$

ii) $g''(x) = n(n-1)x^{n-1}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$

Do đó,

$$g^{(n)}(x) = n!\left(\ln x + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{x} \Rightarrow f^{(10)}(x) = \frac{10!}{x} \Rightarrow f^{(10)}(1) = 10!.$$

Ví dụ 8.5 (Cuối kì, 20152). *Cho hàm số* $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$. *Tính* $d^{10}f(0)$.

[Lời giải] Ta có $(1+x^3)f(x) = x$. Lấy đạo hàm cấp n hai vế ta được

$$(1+x^3)f^{(n)}(x) + n.3x^2.f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}.6x.f^{(n-2)}(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.6.f^{(n-3)}(x) = 0.$$

Cho $x = 0$ ta được công thức truy hồi

$$f^{(n)}(0) = -n(n-1)(n-2)f^{n-3}(0).$$

Do đó,

$$f^{(10)}(0) = -10.9.8.f^{(7)}(0) = (-10.9.8)(-7.6.5)(-4.3.2)f^{(1)}(0) = -10! \Rightarrow d^{10}f(0) = -10!dx^{10}.$$

Ví dụ 8.6 (Giữa kì, K61). *Tính đạo hàm cấp cao*

a) $\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{(60)}$.

b) $\left(\frac{1}{x^2+x}\right)^{(50)}$.

c) $(x^2\sin 2x)^{(50)}$.

d) $(x^2\cos 2x)^{(60)}$.

8.8 Vi phân cấp cao

Định nghĩa 1.1. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *khả vi thì* $dy = f'(x)dx$ *gọi là vi phân cấp một của* $f(x)$.

i) Vi phân, nếu có, của vi phân cấp một được gọi là vi phân cấp hai, kí hiệu là $d^2f(x)$.

ii) Vi phân, nếu có, của vi phân cấp $n-1$ *được gọi là vi phân cấp* n, *kí hiệu là* $d^nf(x)$.

Biểu thức của vi phân cấp cao

Nếu x là biến số độc lập thì

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Vi phân cấp cao không có tính chất bất biến đối với hàm hợp

Ta có $df(x) = f'(x)dx$ nên

$$d^2 f(x) = df'(x)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Ví dụ 8.7. *Chứng minh rằng nếu* $y = x^3, x = t^2$ *thì*

$$d^2 y \neq y^{(2)} dx^2.$$

8.9 Bài tập

Bài tập 8.1. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{khi } x < 1 \\ (1-x)(2-x), & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{khi } x > 2. \end{cases}$$

Bài tập 8.2. Với điều kiện nào thì hàm số $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ 0, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) liên tục tại $x = 0$,

b) khả vi tại $x = 0$,

c) có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

[Đáp số]

a) $n > 0$,

b) $n > 1$,

c) $n > 2$.

Bài tập 8.3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|.\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

[Gợi ý]

$$f'_+(a) = \varphi(a) \neq f'_-(a) = -\varphi(a)$$

Bài tập 8.4. Tìm vi phân của hàm số

a) $y = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}\mid (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin\frac{x}{a}(a \neq 0)$

c) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| (a \neq 0)$

d) $y = \ln|x + \sqrt{x^2+a}|$

[Đáp số]

a) $dy = \dfrac{dx}{a^2+x^2}$

b) $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.(\operatorname{sign} a)$

c) $dy = \dfrac{dx}{x^2-a^2}$

d) $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Bài tập 8.5. Tìm

a) $I = \dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$,

b) $J = \dfrac{d}{d(x^2)}(\frac{\sin x}{x})$,

c) $K = \dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

[Đáp số]

a) $I = -3x^6 - 4x^3 + 1, x \neq 0$,

b) $J = \dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right), x \neq 0$,

c) $K = -\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 8.6. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a) $\lg 11$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}}$

[Gợi ý]

a) Xét $f(x) = \lg x, x_0 = 10, \triangle x = 1$, ta có $\lg 11 \approx \lg 10 + \dfrac{1}{10\ln 10} = 1,043$

b) Cách 1. $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}} = \sqrt[7]{\dfrac{4}{2+0,02} - 1}$. Xét $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{4}{x} - 1}, x_0 = 2, \triangle x = 0,02$
Ta có

$$f(x+\triangle x) = \sqrt[7]{\frac{4}{2} - 1} + 0,02.\frac{1}{7}.(\frac{4}{2} - 1)^{\frac{-6}{7}}.\frac{-4}{2^2} = 1 - 0,02.\frac{1}{7}.$$

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \sqrt[7]{\frac{2-x}{2+x}}$, với $x_0 = 0, \Delta x = 0,02$.

Bài tập 8.7. Tìm đạo hàm cấp cao của các hàm số

(a) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$.

(b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$.

(c) $y = x^2 e^{2x}$, tính $y^{(10)}$.

(d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$.

[Đáp số]

(a) $y^{(8)} = \dfrac{8!}{(1-x)^9}, x \neq 1.$

(b) $y^{(100)} = \dfrac{197!}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}(399-x), x < 1.$

(c) $y^{(10)} = 2^{10}e^{2x}\left(x^2 + 10x + \frac{45}{2}\right).$

(d) $y^{(50)} = -x^2 \sin x + 100x\cos x + 2450 \sin x.$

Bài tập 8.8. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$,

b) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$,

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$,

d) $y = e^{ax}\sin(bx+c)$.

[Đáp số]

a) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{2}n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$

b) $y^{(n)} = n!\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} - \dfrac{1}{(2-x)^{n+1}}\right].$

c) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}(1.4\ldots(3n-5))\dfrac{3n+2x}{(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}, n \geq 2, x \neq 1.$

d) Tính y' rồi dự đoán và chứng minh bằng quy nạp

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi), \text{ ở đó } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Bài tập 8.9. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a) $y = \dfrac{1}{a+bx}$,

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$,

c) $y = \dfrac{1}{x^2-a^2}$,

d) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,

e) $y = \sin^2 x$,

f) $y = \sin^3 x$,

g) $y = \sin ax.\sin bx$,

h) $y = \sin^2 ax.\cos bx$,

i) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$,

j) $y = x\cos ax$,

k) $y = x^2 \cos ax$,

l) $y = x^2 \sin ax$,

m) $y = \ln \dfrac{a+bx}{a-bx}$.

[Đáp số]

a) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$.

b) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.(2n-1)!!b^n}{2^n \sqrt[n]{a+bx}}$.

c) $y = \dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}(\dfrac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})$ **nên** $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{n+1}\right]$.

d) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{1}{c}\left(b - \frac{ad}{c}\right)\dfrac{1}{x+\frac{d}{c}}$ **nên** $y^{(n)} = \dfrac{1}{c}\left(b - \dfrac{ad}{c}\right)\dfrac{(-1)^n.n!}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}}$.

e) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ **nên** $y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

f) $y = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ **nên** $y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

g) $y = \sin ax.\sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$ **nên**

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}(a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

h) $y = \sin^2 ax.\cos bx = \dfrac{\cos bx}{2} - \frac{1}{4}[\cos(2a+b)x + \cos(2a-b)x]$ **nên**

$$\begin{aligned} y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n \cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) & - \frac{1}{4}(2a+b)^n \cos\left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\ & - \frac{1}{4}(2a-b)^n \cos\left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

i) $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ **nên** $y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

j) $y^{(n)} = a^n x \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$.

k) $y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1}x \sin\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$.

l) $y^{(n)} = a^n x^2 \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2na^{n-1}x \cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)a^{n-2}\cos\left(ax + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$.

m) $y^{(n)} = \dfrac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}.\left[(a+bx)^n + (-1)^n(a-bx)^n\right]$.

8.10 Đọc thêm: Về khái niệm vi phân

Vi phân có lẽ là một khái niệm trừu tượng và dễ gây hiểu nhầm nhất trong môn Giải tích I. Theo sự hiểu biết của tác giả thì có nhiều cách tiếp cận khác nhau đối với phép tính vi phân.

1) Người đầu tiên đưa ra khái niệm vi phân có lẽ là Leibniz, khi ông coi dy là một đại lượng vô cùng bé thể hiện sự thay đổi của hàm số $y = f(x)$ tương ứng với sự thay đổi vô cùng bé dx của biến số x, nghĩa là ông định nghĩa

$$f'(x) := \frac{dy}{dx}.$$

Kí hiệu $\frac{dy}{dx}$ này là kí hiệu của Leibniz cho đạo hàm của hàm số $f(x)$. Mặc dù có nhiều chỉ trích cho kí hiệu này, nó vẫn được dùng cho đến ngày nay. Cũng chú ý thêm rằng, kí hiệu $f'(x)$ trên là kí hiệu của d'Alambert.

2) Cauchy là người đã cải tiến ý tưởng của Leibniz và những người đi trước như sau. Trước hết, ông định nghĩa phép toán đạo hàm

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

là giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia của đối số khi số gia của đối số tiến về 0. Sau đó ông định nghĩa vi phân

$$dy = f'(x)dx,$$

như một hàm số của hai biến số x và dx, ở đó dx là một biến số mới, có thể lấy giá trị tùy ý, không nhất thiết phải là một đại lượng VCB như trong kí hiệu của Leibniz.

3) Ngày nay, vi phân được định nghĩa theo lối tiếp cận hiện đại như sau:

Định nghĩa 1.2. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Ta gọi ánh xạ, kí hiệu là $d_{x_0}f$, xác định bởi*

$$\begin{aligned} d_{x_0}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ h &\mapsto f'(x_0)h \end{aligned}$$

là vi phân của f tại x_0.

Vậy vi phân của f tại x_0 là một ánh xạ tuyến tính.

i) Như vậy, vi phân của hàm số một biến số $f(x)$ là một hàm số df của hai biến số x_0 và h cho bởi

$$d_{x_0}f(h) = f'(x_0)h,$$

ở đó h là một biến số mới có thể nhận giá trị tùy ý.

ii) Kí hiệu Id là ánh xạ đồng nhất, khi đó, $d_{x_0}(\mathrm{Id})(h) = h$, hay là $d_{x_0}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

iii) Một cách lạm dụng kí hiệu, ta kí hiệu x là ánh xạ đồng nhất $x := \mathrm{Id}$. Khi đó, $d_{x_0}x = \mathrm{Id}$ là ánh xạ đồng nhất và không phụ thuộc vào x_0 nên ta kí hiệu nó là dx. Điều này dẫn đến $d_{x_0}f = f'(x_0)dx$. Đôi khi, người ta bỏ x_0 trong $d_{x_0}f$ và, một cách lạm dụng, thay x_0 bởi x trong $f'(x_0)$ để có biểu thức cô đọng

$$df = f'(x)dx.$$

§9. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

9.1 Các định lý về hàm khả vi

Định nghĩa 1.1 (Cực trị của hàm số). *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b), ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a,b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a,b)$ sao cho $f(x)-f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.*

- Nếu $f(x)-f(x_0) > 0$ thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- Nếu $f(x)-f(x_0) < 0$ thì ta nói hàm số đạt cực đại tại x_0.

Định lý 9.1 (Định lý Fermat). *Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b), nếu hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a,b)$ và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.*

Chứng minh. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì theo định nghĩa tồn tại một lân cận $U(x_0)$ sao cho $f(x)-f(x_0) < 0 \forall x \in U(x_0)$. Do đó, với h đủ nhỏ sao cho $f(x_0+h) \in U(x_0)$ thì $f(x_0+h)-f(x_0) < 0$.

- $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$
- $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$ ■

Do giả thiết tồn tại $f'(x_0)$ nên $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Điều này chỉ xảy ra khi

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0.$$

Ví dụ 9.1 (Giữa kì, K61). *Tìm các cực trị của các hàm số*

a) $y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$. *b)* $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$.

Ví dụ 9.2 (Cuối kì, K61-Viện ĐTQT). *Cho $f(x)$ là một hàm số khả vi trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(2) < \lambda < f'(3)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (2,3)$ sao cho $f'(x_0) = \lambda$.*

[Lời giải] Xét hàm số $g(x) = f(x) - \lambda x$. Khi đó,

i) $g'(2) = f'(2) - \lambda < 0$, do đó tồn tại $x_1 \in (2,3)$ nào đó sao cho $g(x_1) < g(2)$, nếu không thì

$$g'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \geq 0.$$

ii) $g'(3) = f'(3) - \lambda > 0$, do đó tồn tại $x_2 \in (2,3)$ sao cho $g(x_2) < g(3)$, nếu không thì

$$g'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-3} \leq 0.$$

iii) Do đó, $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 \in (2,3) \Rightarrow g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lambda$.

Định lý 9.2 (Định lý Rolle). *Nếu hàm số* $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a,b]$*,*

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a,b)*,*

iii) thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b)$*,*

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ *sao cho* $f^{'}(c) = 0$.

Chứng minh. Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ nên nó đạt GTLN và GTNN trên $[a,b]$. Ta chia làm các trường hợp sau:

- Nếu $f(x)$ là hằng số trên $[a,b]$ thì $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$.
- Nếu có số $x \in (a,b)$ sao cho $f(x) > f(a) = f(b)$ thì GTLN của $f(x)$ sẽ phải đạt được tại một điểm c nào đó thuộc (a,b) (do nó không đạt GTLN tại hai đầu mút). Khi đó, theo Định lý Fermat, $f'(c) = 0$.
- Nếu có số $x \in (a,b)$ sao cho $f(x) < f(a) = f(b)$ thì GTNN của $f(x)$ sẽ phải đạt được tại một điểm c nào đó thuộc (a,b) (do nó không đạt GTNN tại hai đầu mút). Khi đó, theo Định lý Fermat, $f'(c) = 0$. ■

Ví dụ 9.1 (Học kì 20163). *Cho hàm số* $f(x) = (x-1)(x^2-2)(x^2-3)$*. Phương trình* $f'(x) = 0$ *có bao nhiêu nghiệm thực? Giải thích.*

[Lời giải] Phương trình $f(x) = 0$ có 5 nghiệm là $x = -\sqrt{3}, x = -\sqrt{2}, x = 1, x = \sqrt{2}$ và $x = \sqrt{3}$.

i) Vì $f(-\sqrt{3}) = f(-\sqrt{2}) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_1 \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ sao cho $f'(x_1) = 0$.

ii) Vì $f(-\sqrt{2}) = f(1) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_2 \in (-\sqrt{2}, 1)$ sao cho $f'(x_2) = 0$.

iii) Vì $f(1) = f(\sqrt{2}) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_2 \in (1, \sqrt{2})$ sao cho $f'(x_3) = 0$.

iv) Vì $f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{3}) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_4 \in (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sao cho $f'(x_4) = 0$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 4 nghiệm. Mặt khác, $f'(x)$ là một đa thức bậc bốn, nên nó có nhiều nhất là bốn nghiệm. Kết luận: phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 9.2 (Giữa kì, K62). *Cho ba số thực* a, b, c *thỏa mãn* $a + b + c = 0$*. Chứng minh rằng* *a) phương trình* $3ax^2 + 4bx + 5c = 0$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng* $(1, +\infty)$.

b) phương trình $2ax^2 + 3bx + 4c = 0$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng* $(1, +\infty)$.

[Lời giải]

a) Xét hàm số $f(x) = cx^5 + bx^4 + ax^3$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý Rolle trong khoảng $[0, 1]$. Do đó,

$$\exists x_0 \in (0,1) | f'(x_0) = 5cx_0^4 + 4bx_0^3 + 3ax_0^2 = 0 \Rightarrow 3a\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + 4b\left(\frac{1}{x_0}\right) + 5c = 0.$$

Vậy phương trình $3ax^2 + 4bx + 5c = 0$ có nghiệm $\frac{1}{x_0} \in (1, +\infty)$.

b) Xét hàm số $f(x) = cx^4 + bx^3 + ax^3$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý Rolle trong khoảng $[0, 1]$. Do đó,

$$\exists x_0 \in (0,1) | f'(x_0) = 4cx_0^3 + 3bx_0^2 + 2ax_0 = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + 3b\left(\frac{1}{x_0}\right) + 4c = 0.$$

Vậy phương trình $2ax^2 + 3bc + 4c = 0$ có nghiệm $\frac{1}{x_0} \in (1, +\infty)$.

Ví dụ 9.3 (Cuối kì, K62). *Cho* f *liên tục trên* $[a, b]$ *và thỏa mãn* $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. *Chứng minh rằng* $\exists c \in (a, b)$ *sao cho* $2017 \int_a^c f(x)dx = f(c)$.

[Lời giải]

Xét hàm số $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $g(a) = g(b) = 0$. Do đó, hàm số $h(x) = e^{-2017x}g(x)$ cũng là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $h(a) = h(b) = 0$. Áp dụng Định lý Rolle với hàm số $h(x)$ trong khoảng $[a, b]$ ta có:

$$\begin{aligned}
\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0 &\Leftrightarrow g'(c)e^{-2017c} - 2017e^{-2017c}g(c) = 0 \\
&\Leftrightarrow g'(c) - 2017g(c) = 0 \\
&\Leftrightarrow f(c) = 2017 \int\limits_a^c f(t)dt = 2017 \int\limits_a^c f(x)dx.
\end{aligned}$$

Ví dụ 9.4 (Olympic Toán học sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng B). *Giả sử* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *là một hàm số khả vi sao cho* $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx$. *Chứng minh rằng tồn tại số* $c \in (0, 1)$ *sao cho*

$$f(c) = 2018 \int\limits_0^c f(x)dx.$$

Chứng minh. i) Xét hàm số $F(x) = x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt$ khả vi trên $[0,1]$ và $F(0) = F(1) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

ii) Đặt $G(x) = e^{-2018x}\int\limits_0^x f(t)dt$ thì $G(x)$ là một hàm số khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho

$$G'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 2018\int\limits_0^c f(x)dx.$$

Ví dụ 9.5 (Olympic Toán học sinh viên Toàn quốc 2018 - Bảng A). *Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0,1)$ sao cho*

$$f(c) = 2018f'(c)\int\limits_0^c f(x)dx.$$

Chứng minh. i) Xét hàm số $F(x) = x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt$ khả vi trên $[0,1]$ và $F(0) = F(1) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

ii) Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)}\int\limits_0^x f(t)dt$ thì $G(x)$ là một hàm số khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho

$$G'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 2018f'(c)\int\limits_0^c f(x)dx.$$

Định lý 9.3 (Định lý Lagrange). *Nếu hàm số $f(x)$:*

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a,b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a,b),

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ ***sao cho*** $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Có thể dễ dàng kiểm chứng $h(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý Rolle, do đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. ■

Ví dụ 9.1 (Giữa kì, K61). *Chứng minh các bất đẳng thức sau với* $0 < a < b$.

a) $\frac{a-b}{1+a^2} < \operatorname{arccot} b - \operatorname{arccot} a < \frac{a-b}{1+b^2}$.

b) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

[Lời giải]

a) Áp dụng Định lý Lagrange với hàm số $f(x) = \operatorname{arccot} x$ trong khoảng $[a, b]$ ta có

$$\frac{\operatorname{arccot} b - \operatorname{arccot} a}{b - a} = f'(c) = -\frac{1}{1 + c^2}$$

với $c \in (a, b)$ nào đó. Do đó,

$$-\frac{1}{1 + a^2} < \frac{\operatorname{arccot} b - \operatorname{arccot} a}{b - a} = -\frac{1}{1 + c^2} < -\frac{1}{1 + b^2}$$

dẫn đến điều phải chứng minh.

b) Tương tự câu a).

Ví dụ 9.2 (Giữa kì, K59). *Cho hàm số* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f(x) \leq 1$ *và* $f''(x) \geq 0$ *với mọi* $x > 0$. *Chứng minh rằng* $f'(x) \leq 0$ *với mọi* $x > 0$.

[Lời giải]

Giả sử phản chứng, tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f'(x_0) > 0$.

i) Vì $f''(x) \geq 0$ nên $f'(x) \geq f'(x_0)$ với mọi $x > x_0$.

ii) Áp dụng Định lý Lagrange cho hàm số $f(x)$ trong khoảng $[x_0, x]$ ta có: tồn tại $c \in (x_0, x)$ sao cho $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

iii) Mặt khác, vì $f'(x_0) > 0$ nên $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, trái với giả thiết $f(x) \leq 1$ với mọi $x > 0$.

Mâu thuẫn này chứng tỏ $f'(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$.

Định lý 9.4 (Định lý Cauchy). *Nếu các hàm số* $f(x), g(x)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$*,*

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b)*,*

iii) $g'(x)$ *không triệt tiêu trong khoảng mở* (a, b)

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Chú ý 1.1. *a) Định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange, định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy. Các giả thiết trong các định lý này là cần thiết.*

b) Định lý Lagrange còn có một dạng khác, đó là công thức số gia hữu hạn:

$$\Delta f = f^{'}\left(x_0 + \theta \Delta x\right), \quad \theta \in (0, 1).$$

9.2 Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lý 9.5. *Nếu hàm số* $f(x)$

(i) Có đạo hàm đến cấp n *trong khoảng đóng liên tục tại* x_0*,*

(ii) Có đạo hàm đến cấp $n + 1$ *trong lân cận* $U_\epsilon(x_0)$*,*

thì $f(x)$ *có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ở đó c *là một số thực nằm giữa* x *và* x_0 *nào đó.*

Nếu $x_0 = 0$ thì công thức sau còn được gọi là công thức Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.1}$$

hay

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{1.2}$$

ở đó $o(x^n)$ là một VCB bậc cao hơn x^n.

Một số khai triển Maclaurin quan trọng

(1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

(2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

(3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

(4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

(6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

(7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Các phép toán trên khai triển Maclaurin

Trên khai triển Maclaurin chúng ta có thể thực hiện các phép toán cơ bản sau: cộng, trừ, nhân, chia, hàm hợp, đạo hàm và tích phân. Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia được thực hiện hệt như cộng, trừ, nhân, chia các đa thức. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ và $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$ là các chuỗi Maclaurin hình thức. Khi đó

1. Phép cộng (trừ)

$$f(x) \pm g(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + (a_3 \pm b_3)x^3 + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n + \cdots$$

2. Phép nhân

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots,$$

ở đó $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$ còn được gọi là tích chập của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$.

Ví dụ 9.1. *Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = e^x \sin x$.

[Lời giải] Xuất phát từ khai triển Maclaurin của hàm số $g(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

và $h(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

ta có

$$e^x \sin x = x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \cdots$$

Ví dụ 9.2 (Giữa kì, 20173). *Cho* $y = e^x \sin x$*. Tính đạo hàm cấp cao* $y^{(6)}(0)$*.*

[Lời giải] Số hạng chứa x^6 trong khai triển Maclaurin của $y = e^x \sin x$ là

$$x.(-1)^2\frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{3!}(-1)^1\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}x = -\frac{1}{90}x^6.$$

Do đó,

$$\frac{y^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{90} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -8.$$

- Như vậy, nếu chỉ cần tìm một số số hạng đầu tiên trong khai triển Maclarin của hàm số $e^x \sin x$ thì có thể dùng phương pháp thực hiện phép nhân này.
- Tuy nhiên, để tìm được số hạng tổng quát thì phương pháp này lại không hiệu quả. Thay vào đó, ta sẽ đi tính $f^{(n)}(x)$ bằng phương pháp quy nạp như trong Bài tập 8.8d. Từ công thức

  $$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

  và

  $$f''(x) = \sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{4}\right)$$

  suy ra

  $$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right).$$

  Do đó,

  $$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n.$$

3. Phép chia cũng thực hiện như phép chia đa thức một cách bình thường.

4. Phép lấy hàm hợp. Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ đơn giản sau. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = \sin x^2$. Muốn tìm chuỗi Maclaurin một cách trực tiếp, ta cần tính các đạo hàm cấp cao của hàm số $f(x) = \sin x^2$ rồi thay vào công thức

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

   Bằng cách tính các đạo hàm cấp một và cấp hai của $f(x)$:

   - $f'(x) = 2x\cos x^2$,
   - $f''(x) = -4x^2 \sin x^2 + 2\cos x^2$,

chúng ta thấy rằng quá trình này sẽ rất phức tạp. Chúng ta có một phương pháp khác. Đó là thực hiện phép đổi biến số, thay x bằng x^2 trong khai triển Maclaurin của hàm số

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

để được

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Bản chất của vấn đề ở đây là chúng ta cần đi tìm khai triển Maclaurin của hàm số hợp $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Để tìm hiểu sâu thêm về vấn đề này, công thức Faà di Bruno sau đây giúp chúng ta tính đạo hàm cấp cao của hàm hợp.

Định lý 9.6 (Công thức Faà di Bruno).

$$f(g(x))^{(n)} = \sum \frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}} \cdot f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j},$$

ở đó tổng được lấy trên tất cả các bộ số không âm $(m_1, \ldots, m_n)$ *thỏa mãn*

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots + n \cdot m_n = n.$$

Hệ quả 9.1. *Cho* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *và* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *là các chuỗi Maclaurin hình thức và* $b_0 = 0$*. Khi đó, hàm số* $(f \circ g)(x)$ *có chuỗi Maclaurin hình thức là*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ở đó $c_0 = a_0$ *và*

$$c_n = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{C}_n} a_k b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k}$$

và

$$\mathcal{C}_n = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \,:\, 1 \le k \le n,\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n\}.$$

Trường hợp đơn giản nhất, $g(x) = x^k$ thì chỉ việc thay x bằng x^k trong khai triển Maclaurin của $f(x)$ để ra khai triển Maclaurin của $f(x^k)$ như trong ví dụ hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ đã nêu ở trên.

5. Phép lấy đạo hàm. Giả sử hàm số $f(x)$ có khai triển Maclaurin là

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Khi đó hàm số $f'(x)$ có khai triển Maclaurin là

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

được thực hiện bằng cách lấy đạo hàm của từng thành phần của chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$. Bạn đọc có thể tự kiểm tra bằng cách lấy đạo hàm chuỗi Maclaurin của hàm $\sin x$ để ra chuỗi Maclaurin của hàm số $\cos x$, hoặc lấy đạo hàm của chuỗi Maclaurin của hàm số $\ln(1+x)$ để ra chuỗi Maclaurin của hàm số $\frac{1}{1+x}$.

6. Phép lấy tích phân. Cũng tương tự như vậy, giả sử hàm số $f(x)$ có khai triển Maclaurin là

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

Khi đó hàm số $\int_0^x f(t)dt$ có khai triển Maclaurin là

$$\int\limits_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

được thực hiện bằng cách lấy tích phân của từng thành phần của chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$. Chẳng hạn, muốn tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arctan x$, đầu tiên ta tìm chuỗi Maclaurin của hàm số

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots ,$$

sau đó ta lấy tích phân hai vế thì được

$$\arctan x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Ứng dụng của khai triển Maclaurin

1. Tính gần đúng

Ví dụ 9.1. *Tính gần đúng số* e *với sai số nhỏ hơn* $0,0001$.

Ta có $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}$ với c là một số thực nào đó nằm giữa 0 và x. Do đó ta xấp xỉ số e bằng

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

với sai số mong muốn $\frac{c^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!} < 0,0001$. Điều này xảy ra nếu $(n+1)! > 1000 \Leftrightarrow n > 6$. Nói cách khác,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

2. Tính giới hạn

Ví dụ 9.2. *Tính*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Chứng minh. Dựa vào khai triên Maclaurin của hàm $f(x) = \sin x$ ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

nên

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(theo quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao).

Do đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

■

Chú ý 1.1. *Khi sử dụng khai triển Maclaurin để tính giới hạn, có thể khai triển hàm số đến số hạng thích hợp. Chẳng hạn như ở Ví dụ bên trên, mẫu số là x^3 nên ta chỉ khai triển tử số đến số hạng x^3, còn phần VCB bậc cao ở phía sau sẽ được ngắt bỏ.*

Ví dụ 9.3 (Giữa kì, K61). *Tính giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$.

Ví dụ 9.4 (Giữa kì, K62). *Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax^2 + b\ln(\cos x)}{x^4} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax + b\sin(\sin x)}{x^3} = 1$.

[Lời giải]

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Do đó,

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + b\ln(\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(a - \frac{b}{2}\right)x^2 - \frac{b}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} \Rightarrow a = -6, b = -12.$$

b)

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + o(x^4)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$

Do đó,

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{ax + b\sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(a+b)x - b\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} \Rightarrow a = 3, b = -3.$$

3. Tính đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(0)$.

Ví dụ 9.5 (Giữa kì, K61). *Tính đạo hàm cấp cao $y^{(10)}(0)$ với*

a) $y(x) = e^{x^2}$,

b) $y(x) = e^{-x^2}$,

c) $y(x) = \arctan x$,

d) $y(x) = \operatorname{arccot} x$.

[Lời giải] Ngoài phương pháp dựa vào công thức truy hồi như ở Ví dụ 8.2, ta có thể dựa vào khai triển Maclaurin.

a) Thay x bởi x^2 trong công thức khai triển Maclaurin của e^x ta có

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

So sánh hệ số của x^{10} ta được

$$\frac{y^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{5!} \Rightarrow y^{(10)}(0) = \frac{10!}{5!} = 30240.$$

b) Tương tự câu a).

c) Thay x bằng x^2 trong khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ta được khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ như sau:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots,$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\arctan x = \int_0^t \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

So sánh hệ số của x^{10} hai vế ta được $y^{(10)}(0) = 0$.

Ví dụ 9.6 (Cuối kì, K62). *Tính đạo hàm cấp cao $y^{(10)}(0)$ với* *a)* $y(x) = \sin(x^2)$. *b)* $y(x) = \cos(x^2)$.

[Lời giải]

a) Thay x bằng x^2 trong khai triển Maclaurin của $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ta được

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

So sánh hệ số của x^{10} hai vế ta được

$$\frac{y^{(10)}(0)}{10!} = (-1)^2.\frac{1}{5!} \Rightarrow y^{(10)}(0) = \frac{10!}{5!} = 30240.$$

b) Tương tự câu a).

Ví dụ 9.7 (Giữa kì, K62). *Tính đạo hàm cấp cao* $y^{(9)}(0)$ *với*

a) $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$. *b)* $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

[Lời giải]

a) Ta có

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2) = \ln(1 + x^3) - \ln(1 + x) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^9)$$

Hệ số của x^9 trong khai triển Maclaurin của $f(x)$ bằng

$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Do đó,

$$f^{(9)}(0) = 2.8! = 80640$$

b) Tương tự câu a).

Ví dụ 9.8. *a) Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arcsin x$.

b) Tính đạo hàm cấp cao $\arcsin^{(n)}(0)$ *(Giữa kì, K59).*

[Lời giải]

a) Nhận xét $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Trong trường hợp này có lẽ "không có" hoặc "rất khó" để tìm ra công thức tính đạo hàm cấp cao của hàm số $\arcsin x$. Vì vậy, ta xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Thay $\alpha = -\frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^n.$$

Thay x bằng $-x^2$ ta được

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

Do đó

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

b) Dựa vào công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$ suy ra

$$\begin{cases} \arcsin^{(2n)}(0) = 0, \\ \arcsin^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)!!]^2. \end{cases}$$

Ví dụ 9.9 (Cuối kì, 20152). *Cho hàm số* $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$. *Tính* $d^{10}f(0)$.

[Lời giải] $f(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^3}$, áp dụng công thức Leibniz ta có

$$f^{(n)}(x) = x \cdot \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^{(n)} + n.\left(\frac{1}{1+x^3}\right)^{(n-1)}.$$

Thay $x=0, n=10$ vào ta có $f^{(10)}(0) = 10g^{(9)}(0)$, với $g(x) = \frac{1}{1+x^3}$.

Ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \Rightarrow \frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + (x^3)^2 - (x^3)^3 + \cdots$$

Từ đó suy ra hệ số của x^9 trong khai triển Maclaurin của $g(x) = \frac{1}{1+x^3}$ bằng

$$-1 = \frac{g^{(9)}(0)}{9!} \Rightarrow g^{(9)}(0) = -9! \Rightarrow f^{(10)}(0) = -10! \Rightarrow d^{10}f(0) = -10!dx^{10}$$

Bài tập 9.1. *Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arccos x$.

[Gợi ý] Có thể dựa vào đẳng thức $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.

9.3 Quy tắc L'Hospital

Định lý 9.7 (Quy tắc L'Hospital). *Giả thiết*

i) Các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi trong một lân cận nào đó của điểm x_0 (có thể trừ tại điểm x_0) đồng thời $g'(x) \neq 0$ trong lân cận ấy,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ $\left(\textit{khử dạng } \dfrac{0}{0}\right)$.

Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(có thể hữu hạn hoặc vô hạn) thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Chú ý 1.1. *Quy tắc L'Hospital trên vẫn đúng nếu*

- *thay quá trình $x \to x_0$ bởi một trong các quá trình*

$$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty \textit{ hoặc } x \to -\infty.$$

- *thay điều kiện* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ *bởi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \left(\textit{khử dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Ý tưởng chứng minh: Chúng ta chứng minh quy tắc L'Hospital cho trường hợp đơn giản, $g'(x_0) \neq 0$.

1. Nếu $f(x_0) = g(x_0) = 0$ thì Với $x \neq x_0$ ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

   c nằm giữa x và x_0.

   Khi $x \to x_0$ thì $c \to x_0$. Do $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, suy ra

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

2. Nếu chỉ có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ mà các hàm số chưa chắc đã xác định tại x_0. Ta xây dựng

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ f(x), & x \neq x_0, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ g(x), & x \neq x_0. \end{cases}$$

3. Nếu $x \to \infty$, đặt $y = \dfrac{1}{x}$.

Ví dụ 9.1 (Giữa kì, K61). *Tính giới hạn*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\sin 2x}{x^2}$.

Ví dụ 9.2. *Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\arcsin^3 x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$,

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x}$.

Chú ý 1.2.

- *Hai qui tắc trên chỉ là điều kiện đủ để tìm* $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

  Ví dụ như $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$ *theo nguyên lý giới hạn kẹp, nhưng nếu áp dụng quy tắc L'Hospital thì sẽ dẫn đến kết quả sai.*

- *Trong quá trình tìm giới hạn có dạng vô định, nên kết hợp cả thay tương đương với dùng qui tắc L'Hospital để đạt được hiệu quả tốt nhất.*

- *Có thể dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần.*

Chú ý 1.3. *Công thức L'Hospital được công bố lần đầu vào năm 1696 trong cuốn sách* Analyse des Infiniment Petits, pour intelligence des lignes courbes *của nhà toán học người Pháp Marquis de l'Hospital (1661-1704), nhưng nó lại được khám phá vào năm 1694 bởi nhà toán học người Thụy Sỹ John (Johann) Bernoulli (1667-1748). Điều này được giải thích vì hai nhà toán học có một thỏa thuận lạ kì, rằng Marquis de l'Hospital mua quyền sở hữu các phát minh của Bernoulli trong một khoảng thời gian nhất định. Bức thư sau đây của l'Hopital vào ngày 17 tháng 3 năm 1694 đã đề xuất một trong những thỏa thuận khác thường nhất trong lịch sử khoa học.*

"I will be happy to give you a retainer of 300 pounds, beginning with the first of January of this year ... I promise shortly to increase this retainer, which I know is very modest, as soon as my affairs are somewhat straightened out ... I am not so unreasonable as to demand in return all of your time, but I will ask you to give me at intervals some hours of your time to work on what I request and also to communicate to me your discoveries, at the same time asking you not to disclose any of them to others. I ask you even not to send here to Mr. Varignon or to others any copies of the writings you have left with me; if they are published, I will not be at all pleased. Answer me regarding all this ..."

9.4 Về một số dạng vô định

Quy tắc L'Hospital, ngoài việc được áp dụng để khử dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, còn có thể được dùng để khử các dạng vô định sau:

1. Dạng vô định $0 \times \infty$. Chẳng hạn như muốn tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ ta có thể viết nó dưới dạng

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

để áp dụng công thức L'Hospital.

Ví dụ 9.3. ***Tính*** $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x.$

2. Dạng vô định $\infty - \infty$. Để tính các giới hạn này chúng ta đưa phép trừ về dạng phép thương, chẳng hạn như quy đồng mẫu số, đặt nhân tử chung.

Ví dụ 9.4. ***Tính*** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$

3. Tính các giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)^{B(x)}$. Đặt $f(x) = A(x)^{B(x)}$ và đi tính

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim_{x\to x_0} B(x) \ln A(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$$

bằng cách áp dụng công thức L'Hospital.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\lim_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \lim_{x\to x_0} 1/B(x) = 0.$$

Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty$ ta có dạng vô định 1^∞.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nghĩa là

$$\lim_{x\to x_0} \ln A(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} 1/B(x) = \infty.$$

Khi đó,

  – hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0$ ta có dạng vô định 0^0,
  – hoặc là $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \infty, \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0$ ta có dạng vô định ∞^0.

Chú ý rằng chỉ có ba dạng vô định $0^0, 1^\infty, \infty^0$ cho các giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)^{B(x)}$. Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \qquad 0^{-\infty} = +\infty, \quad 1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

9.5 Thay tương đương khi có hiệu hai VCB?

Đây có lẽ là một câu hỏi thú vị và được rất nhiều bạn đọc quan tâm. Chúng ta bắt đầu với một ví dụ sau đây.

Ví dụ 9.5 (Câu 6, Đề 4, Giữa kì K61). *Tính*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}.$$

[Lời giải]

Cách 1: Thay tương đương

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)-\sin x+(1-\cos x)}{x^2}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^2}{2}}{x^2}\\ =&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Cách 2: Dùng quy tắc L'Hospital

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{2x}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x}{2}\\ =&1.\end{aligned}$$

Trong hai cách giải trên chắc chắn có một cách giải sai, và sai lầm ở đâu? Đây là sai lầm nhiều người hay mắc phải khi thay tương đương trong các biểu thức có chứa dấu $\pm$.

Chú ý 1.4. *Nếu $\alpha_1(x),\alpha_2(x),\beta_1(x),\beta_2(x)$ là các VCB khi $x\to x_0$ và $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$ thì*

- $\alpha_1(x)\beta_1(x)\sim\alpha_2(x)\beta_2(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$

nhưng chưa chắc $\alpha_1(x)\pm\beta_1(x)\sim\alpha_2(x)\pm\beta_2(x)$. Chẳng hạn, $\sin x\sim x,\tan x\sim x$ khi $x\to 0$, nhưng $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

Vậy có thay tương đương được trong biểu thức có dấu $\pm$ hay không không? Đây là một câu hỏi rất thú vị. Muốn biết biểu thức $\alpha_1(x)-\beta_1(x)$ có tương đương với $\alpha_2(x)-\beta_2(x)$ hay không thì chúng ta quay về Định nghĩa, đi tính $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}{\alpha_2(x)-\beta_2(x)}$. Ta chia làm 4 trường hợp như sau:

1. Nếu $\alpha_1(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta_1(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=0$ (theo định nghĩa của VCB bậc cao). Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}{\alpha_2(x)-\beta_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}-1}{\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}-1}.\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}=\frac{0-1}{0-1}=1$. Vậy $\alpha_1(x)-\beta_1(x)$ tương đương với $\alpha_2(x)-\beta_2(x)$.

2. Nếu $\beta_1(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha_1(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$ (theo định nghĩa của VCB bậc cao). Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}{\alpha_2(x)-\beta_2(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}-1}{\frac{\beta_2(x)}{\alpha_2(x)}-1}.\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{0-1}{0-1} = 1$. Vậy $\alpha_1(x)-\beta_1(x)$ tương đương với $\alpha_2(x)-\beta_2(x)$.

3. Nếu $\alpha_1(x)$ và $\beta_1(x)$ là các VCB cùng bậc nhưng không tương đương thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A \neq 1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}{\alpha_2(x)-\beta_2(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}-1}{\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}-1}.\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)} = \frac{A-1}{A-1} = 1$. Vậy $\alpha_1(x)-\beta_1(x)$ tương đương với $\alpha_2(x)-\beta_2(x)$.

4. Nếu $\alpha_1(x)$ và $\beta_1(x)$ là các VCB tương đương thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\beta_1(x)}{\alpha_2(x)-\beta_2(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}-1}{\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}-1}.\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)} = \frac{1-1}{1-1}$ là dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên không xác định được giới hạn của nó.

5. Nếu $\alpha_1(x)$ và $\beta_1(x)$ là các VCB không so sánh được với nhau, thì $\alpha_1(x)-\beta_1(x)$ và $\alpha_2(x)-\beta_2(x)$ có thể không so sánh được với nhau.

Kết luận: Nếu $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \beta_1(x), \beta_2(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ và $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ thì $\alpha_1(x)-\beta_1(x) \sim \alpha_2(x)-\beta_2(x)$ **ngoại trừ trường hợp** $\alpha_1(x)$ **và** $\beta_1(x)$ **là các VCB tương đương hoặc không so sánh được với nhau**. Ví dụ, không thay tương đương được trong biểu thức $\tan x - \sin x$ vì $\tan x \sim \sin x$, nhưng vẫn thay tương đương được trong biểu thức $\tan 2x - \sin x \sim 2x - x = x$ hoặc $\sin x - \tan^2 x \sim x - x^2 \sim x$. **Bạn đọc cần nắm vững điều này, và trong trường hợp không chắc chắn thì tốt nhất nên tránh thay tương đương trong các biểu thức có chứa dấu cộng và dấu trừ.**

Trường hợp $\alpha_1(x)+\beta_1(x)$ có tương đương với $\alpha_2(x)+\beta_2(x)$ hay không chúng ta lập luận tương tự. Vẫn thay tương đương được bình thường ngoại trừ trường hợp $\alpha_1(x)$ và $-\beta_1(x)$ là các VCB tương đương hoặc không so sánh được với nhau.

Quay trở lại Ví dụ 9.5 nêu trên thì sai lầm là ở chỗ chúng ta đã thay tương tương $(e^x-1)-\sin x \sim x - x = 0$ để dẫn đến $(e^x-1)-\sin x + (1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2}$. Chúng ta không thực hiện được điều này bởi vì $e^x - 1 \sim \sin x$. Thực tế thì $(e^x-1)-\sin x$ là một VCB khi $x \to 0$ và nếu nhìn vào khai triển Maclaurin của các hàm số e^x và $\sin x$ thì ta thấy

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\sin x = x + o(x^2)$ (số hạng tiếp theo trong khai triển này là $-\frac{x^3}{3!} = o(x^2)$)

nên

$$(e^x-1)-\sin x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}.$$

Cho nên khi thay $(e^x-1)-\sin x \sim x - x = 0$ nghiễm nhiên chúng ta đã làm mất đi số hạng $\frac{x^2}{2}$.

Ví dụ 9.6 (Câu 5, Đề 1, Giữa kì K61). *Tính*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\ln(1+x)}{x^2}.$$

[Gợi ý] Một cách tương tự, hãy chỉ ra rằng với bài tập trên nếu

- thay tương đương ta được kết quả bằng $\frac{1}{2}$ (**SAI**)
- dùng công thức L'Hospital hoặc khai triển Maclaurin ta được kết quả bằng $\frac{3}{2}$ (**ĐÚNG**).

9.6 Hiệu hai VCB tương đương

Trong mục trước, chúng ta biết rằng không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x)-\beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề 1.1. *Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha(x)\sim\beta(x)$ khi $x\to x_0$. Khi đó,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0.$$

Vậy theo định nghĩa, $\alpha(x)-\beta(x)$ là một VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$. ∎

Ví dụ 9.7 (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương).

a) $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

b) $x-\tan x\sim-\frac{x^3}{3}$

c) $x-\arcsin x\sim-\frac{x^3}{6}$

d) $x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$

e) $\sin x-\tan x\sim-\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x-\arcsin x\sim-\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x-\arctan x\sim\frac{x^3}{6}$

h) $\tan x-\arcsin x\sim\frac{x^3}{6}$

i) $\tan x-\arctan x\sim\frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x-\arctan x\sim\frac{x^3}{2}$

k) $x-(e^x-1)\sim-\frac{x^2}{2}$

l) $x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2}$

m) $(1-\cos x)-\frac{x^2}{2}\sim-\frac{x^4}{24}$

Hiệu hai VCB cùng bậc là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó, vậy cụ thể, cao hơn là bậc bằng bao nhiêu? Lấy, chẳng hạn, $\alpha(x)=x$, ở ví dụ trên ta đã chỉ ra một số hiệu của hai VCB tương đương "trong tự nhiên", như là $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$ cùng bậc với VCB $\alpha(x)=x^3$, còn $x-(e^x-1)\sim-\frac{x^2}{2}$ cùng bậc với VCB $\beta(x)=x^2$ khi $x\to 0$. Với các VCB tương đương "nhân tạo" sau đây thì $x-\beta(x)$ có thể cùng bậc với x^a $(a>1)$ bất kì. Chẳng hạn như muốn $x-\beta(x)\sim x^{2017}$ thì chỉ cần chọn $\beta(x)=x-x^{2017}$. Khi đó,

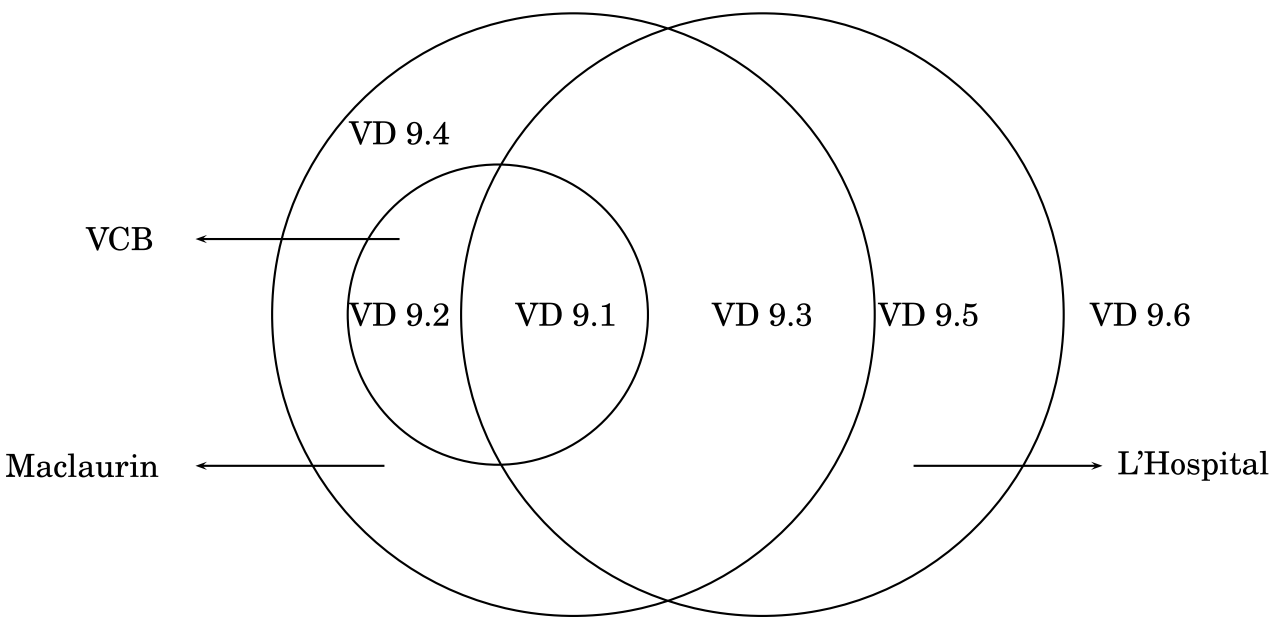
$$x\sim x-x^{2017}\text{ (ngắt bỏ VCB bậc cao), và } x-(x-x^{2017})=x^{2017}$$

9.7 Ba phương pháp (mới) để tính giới hạn

Như vậy đến thời điểm hiện tại chúng ta đã học được ba phương pháp mới để tính giới hạn, đó là

- Phương pháp sử dụng VCB-VCL (thay tương đương, ngắt bỏ),
- Phương pháp dùng khai triển Maclaurin,
- Phương pháp dùng quy tắc L'Hospital.

Mỗi một phương pháp đều có các ưu, nhược điểm riêng và tương ứng với các bài toán đặc thù. Để so sánh các phương pháp này với nhau, ta minh họa bằng vẽ và 6 Ví dụ sau đây.



Bài tập 9.1 (Cả ba phương pháp đều áp dụng được).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

Bài tập 9.2 (Sử dụng VCB hoặc khai triển Maclaurin. Không nên dùng L'Hospital).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2-\sin x}{x+\sin^2 x+\arcsin^3 x+\arctan^4 x}$$

Bài tập 9.3 (Sử dụng khai triển Maclaurin hoặc L'Hospital. Không thay tương đương).

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+x^3}{x^3}.$$

Bài tập 9.4 (Khai triển Maclaurin. Không thay tương đương (tử số) và L'Hospital).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x - x^3}{\arcsin(\arctan^3 x)}.$$

Bài tập 9.5 (Sử dụng L'Hospital. Không dùng VCB, Maclaurin).

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}, \text{ hoặc } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Bài tập 9.6 (Không dùng cả ba phương pháp trên).

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}.$$

[Lời giải]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Chú ý 1.5. *Trong quá trình tìm giới hạn của các dạng vô định, nên linh hoạt trong cách xử lý, có thể kết hợp nhiều phương pháp với nhau để đạt hiệu quả tốt nhất. Chẳng hạn như trong Ví dụ (9.4) nêu trên,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x - x^3}{\arcsin(\arctan^3 x)},$$

nên sử dụng khai triển Maclaurin ở tử số và thay tương đương ở mẫu số.

9.8 Về các VCL tiêu biểu

Chúng ta đã học về các VCB, VCL, các quy tắc thay tương đương, các quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao, ngắt bỏ VCL bậc thấp. Tuy nhiên, các bài tập về VCL thường hay bị lãng quên vì một lý do nào đó. Chúng ta đã học các VCB tương tương hay dùng, nhưng chưa có nhiều ví dụ về các VCL. Chính vì vậy, mục này sẽ dành riêng để nói về ba VCL tiêu biểu (khi $x \to +\infty$), đó là

- Các hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1, ví dụ a^x $(a > 1)$,
- Các hàm số đa thức, các hàm số là lũy thừa của x, chẳng hạn $x^n, x^\alpha,\ (\alpha > 0)$,
- Các hàm số logarit với cơ số lớn hơn 1, như $\ln x, \log_a x$ $(a > 1)$.

Cả ba hàm số này đều tiến ra vô cùng khi $x \to +\infty$, tuy nhiên với tốc độ khác nhau. Trong ba hàm số này thì hàm số mũ (với cơ số lớn hơn 1) là VCL có bậc cao nhất (tiến ra vô cùng với tốc độ nhanh nhất), sau đó đến các hàm số đa thức, và cuối cùng là các hàm số logarit (với cơ số lớn hơn 1).

$$\boxed{\textbf{Hàm số mũ}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số logarit}}$$

Cụ thể, bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng hai giới hạn sau (bằng cách dùng quy tắc L'Hospital):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

Ví dụ 9.8. *Tính*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x^{2016} + e^x}{\log_2 x + x^{2017} + 2e^x}.$$

Áp dụng quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp ta được, $\begin{cases} \ln x + x^{2016} + e^x \sim e^x, \\ \log_2 x + x^{2017} + 2e^x \sim 2e^x \end{cases}$ *khi* $x \to +\infty$.

Do đó,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x^{2016} + e^x}{\log_2 x + x^{2017} + 2e^x} = \frac{1}{2}.$$

Bạn đọc sẽ thường xuyên gặp lại các VCL này khi học về Tích phân suy rộng (trong học phần Giải tích I này) và Chuỗi số (trong học phần Giải tích III, học kì 2).

9.9 Bài tập ôn tập

Bài tập 9.2. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn và không thể có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Chứng minh. Xét n chẵn, giả sử phương trình có 3 nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3$, khi đó tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Tức là phương trình $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ có 2 nghiệm thực, điều này mâu thuẫn do n chẵn.
Xét n lẻ, giả sử phương trình có 4 nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, khi đó theo định lý Rolle, phương trình $x^{n-1} + \frac{p}{n} = 0$ có 3 nghiệm thực, trong khi theo trên ta vừa chứng minh thì nó không thể có quá 2 nghiệm thực do $n - 1$ chẵn. ■

Bài tập 9.3. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được với các hàm số $f(x) = x^2, g(x) = x^3, -1 \le x \le 1$

Bài tập 9.4. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

b) $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}, 0 \le b \le a.$

Chứng minh. a) Xét hàm số $f(t) = \sin t$, thoả mãn điều kiện của định lý Lagrange trong khoảng $[x, y]$ bất kì. Khi đó $\exists c \in [x, y]$ sao cho

$$\sin x - \sin y = f'(c).(x - y) = \cos c.(x - y) \Rightarrow |\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

b) Xét hàm số $f(x) = \ln x$, thoả mãn điều kiện của định lý Lagrange trong khoảng $[b, a]$ nên
$$\ln a - \ln b = f'(c)(a-b) \Rightarrow \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a) \Rightarrow \ln \frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$$
Vậy
$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ do } b < c < a.$$

Bài tập 9.5. Tìm giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - x \ (\infty - \infty)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) \ (\infty - \infty)$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \ \left(\frac{0}{0}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \ \left(\frac{0}{0}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2} \ln(2-x) \ (\infty.0)$,

(f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} \ (0^0)$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - a\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} \ (1^\infty)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\tan x} \ (0^0)$,

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} \ (1^\infty)$.

[Gợi ý]

(a) Sử dụng phương pháp nhân liên hợp, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(b) Quy đồng mẫu số rồi sử dụng công thức L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(c) Đặt $t = \frac{1}{x}$, sau đó độc giả có thể dùng khai triển Maclaurin hoặc công thức L'Hospital, đáp số: ∞.

(d) Sử dụng khai triển Maclaurin hoặc công thức L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{3}$.

(e) Sử dụng trực tiếp công thức L'Hospital (đưa $\tan\frac{\pi x}{2}$ xuống mẫu số), hoặc đặt $t = 1-x$ và dùng công thức thay tương đương. đáp số: $\frac{2}{\pi}$.

(f) Sử dụng công thức L'Hospital, đáp số: $-\infty$.

(g) Sử dụng công thức $\lim A(x)^{B(x)} = e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, đáp số: 1.

(h) Sử dụng công thức $\lim A(x)^{B(x)} = e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, đáp số: e^{-a}.

(i) Sử dụng công thức $\lim A(x)^{B(x)} = e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, đáp số: 1.

(j) Sử dụng công thức $\lim A(x)^{B(x)} = e^{\lim B(x)\ln A(x)}$, đáp số: 1.

Bài tập 9.6. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5}[\sin(\sin x) - x.\sqrt[3]{1-x^2}]$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \dfrac{e^x}{x}]$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{\sin x - x}{x\sin x}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}\right)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}\right)$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$,

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x - x}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$,

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$,

(o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, a\neq 0, b\neq 0.$

[Gợi ý]

(a) Đáp số: $\frac{1}{2}$.

(b) Khai triển Taylor, đáp số: $\frac{1}{3}$.

(c) ĐS: $\frac{7}{45}$.

(d) Khai triển Taylor, đáp số: $-\frac{3}{2}$.

(e) Khai triển Taylor, đáp số: $-\frac{1}{12}$.

(f) Khai triển Taylor hoặc L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(g) Khai triển Taylor hoặc L'Hospital, đáp số: 0.

(h) L'Hospital, đáp số: 2.

(i) L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(j) Quy đồng mẫu số và L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(k) ĐS: $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(l) L'Hospital, đáp số: ∞.

(m) L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{2}$.

(n) L'Hospital, đáp số: $\frac{1}{3}$.

(o) Nhân liên hợp, đáp số: $\frac{4}{3}$.

(p) L'Hospital, thay tương đương, đáp số: $\frac{a^2}{b^2}$.

Bài tập 9.7. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$ tồn tại và bằng 1 nhưng không tính được bằng quy tắc L'Hospital.

Chứng minh.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Nếu áp dụng quy tắc L'Hospital một cách hình thức thì ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$$

Tuy nhiên giới hạn ở vế phải không tồn tại, có thể kiểm tra bằng cách chọn 2 dãy $x_k = 2k\pi$ và $y_k = \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ ■

Bài tập 9.8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x, a, b > 0.$

Bài tập 9.9. Dùng khai triển Maclaurin để tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x(\tan x-\sinh x)}$, (1) b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cosh x-1)\ln(1+x)-x^3/2}{x(\sin x-\arcsin x)}$. (2)

Bài tập 9.10. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}=\frac{x^3-\sin^3 x(1+ax+bx^2)}{x^3\sin^3 x}$$

Chứng minh. Tại lân cận của $x = 0$, ta có thể viết

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

do đó

$$\text{Mẫu số} = x^3[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]^3 = x^6+o(x^6)$$

và

$$\text{Tử số} = x^3-\sin^3 x(1+ax+bx^2) = x^3-[x^3+ax^4+(b-\frac{1}{2})x^5+cx^6+o(x^6)]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{ax^4+(b-\frac{1}{2})x^5+cx^6+o(x^6)}{x^6+o(x^6)}$$

Do đó để tồn tại giới hạn hữu hạn của $f(x)$ khi $x\to 0$, ta phải có $a = 0, b = \frac{1}{2}$ ■

Bài tập 9.11. Cho f là một hàm số thực, khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f"(x)$ trên (a, b), chứng minh rằng $\forall x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f"(c)$$

(1) $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(2) $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Chứng minh. Lấy $x_0 \in (a,b)$ bất kì.

$$\text{Đặt } \varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}.\lambda$$

Trong đó λ được xác định bởi điều kiện :

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) - \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}.\lambda = 0$$

Khi đó ta có $\varphi(x_0) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$
Ta có hàm φ liên tục, khả vi trên $[a,x_0]$, đo đó φ thoả mãn các điều kiện trong định lý Rolle, suy ra tồn tại $c_1 \in (a,x_0)$ sao cho $\varphi'(c_1) = 0$. Tương tự như thế, tồn tại $c_2 \in (x_0,b)$ sao cho $\varphi'(c_2) = 0$. Mặt khác,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \lambda(x - \frac{a+b}{2})$$

Theo giả thiết, f có đạo hàm cấp 2, do đó φ cũng có đạo hàm cấp 2, và $\varphi"(c_1) = \varphi"(c_2) = 0$, nên theo định lý Rolle ta có tồn tại $c \in (c_1,c_2)$ sao cho $\varphi"(c) = f"(c) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = f"(c)$, và ta có :

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f"(c)$$

§10. CÁC LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

10.1 Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Mục này học sinh đã được nghiên cứu tương đối kĩ trong chương trình phổ thông nên chỉ nhấn mạnh cho sinh viên những điểm cần chú ý trong quá trình khảo sát hàm số và khảo sát một số hàm số khác với chương trình phổ thông như hàm số có chứa căn thức, ...
Sơ đồ khảo sát

1. Tìm TXĐ của hàm số, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số (nếu có).
2. Xác định chiều biến thiên: tìm các khoảng tăng, giảm của hàm số.
3. Tìm cực trị (nếu có).
4. Xét tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).
5. Tìm các tiệm cận của hàm số (nếu có).
6. Lập bảng biến thiên.
7. Tìm một số điểm đặc biệt mà hàm số đi qua (ví dụ như giao điểm với các trục toạ độ, ...) và vẽ đồ thị của hàm số.

Ví dụ 10.1 (Giữa kì, K61). *Tìm các cực trị của hàm số sau*

a) $y = \frac{2x}{x^2+2}$. *b)* $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

Ví dụ 10.2 (Giữa kì, K59). *Tìm các đường tiệm cận của đường cong* $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

[Lời giải] TXĐ = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$0 \leq \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{(giới hạn kẹp)}.$$

Đường cong không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} x . \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \infty$$

Đường cong không có tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} x \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin t}{t} - 1 \right) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0 \quad \left(\text{đặt } t = \frac{1}{x} \right).$$

Đường cong có một tiệm cận xiên là $y = x$.

Ví dụ 10.3. *Tìm các tiệm cận xiên của đường cong* $y = \ln(1 + e^{-2x})$.

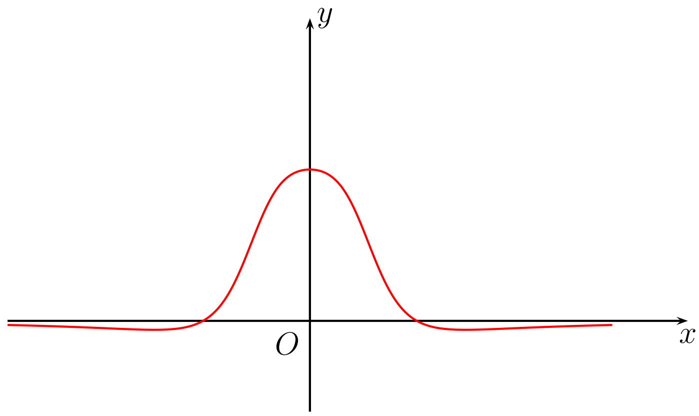
[Lời giải] Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 0, \quad a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^{-2x})}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = -2, \quad (\text{L'Hospital}).$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y + 2x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-2x}) + 2x = \lim_{x\to-\infty} \ln[(1+e^{-2x})e^{2x}] = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{2x}) = 0.$$

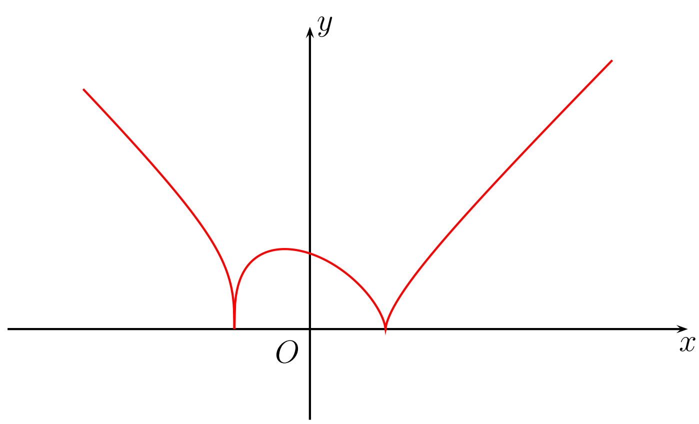
Kết luận: $y = -2x$ là tiệm cận xiên của đường cong.

Bài tập 10.1. Khảo sát và vẽ đường cong $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.



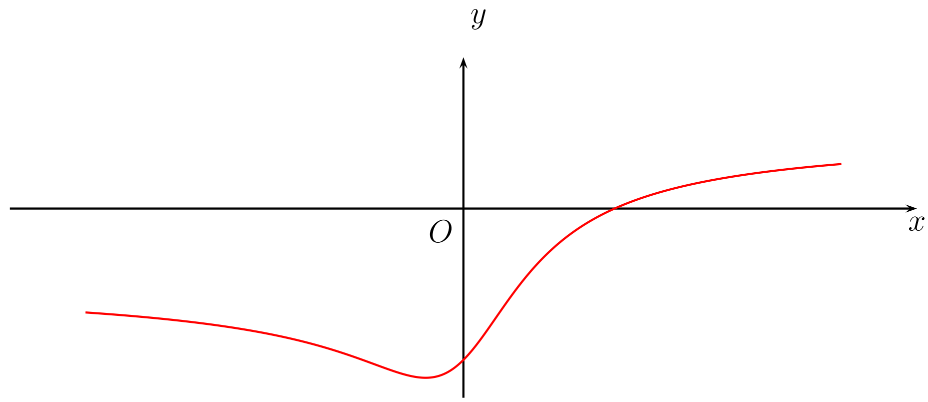
Hình 10.1

Bài tập 10.2. Khảo sát và vẽ đường cong $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.



Hình 10.2

Bài tập 10.3. Khảo sát và vẽ đường cong $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.



Hình 10.3

10.2 Khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số

Giả sử cần khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1. Tìm TXĐ, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của các hàm số $x(t), y(t)$ (nếu có).

2. Xác định chiều biến thiên của các hàm số $x(t), y(t)$ theo biến t bằng cách xét dấu các đạo hàm của nó.

3. Tìm các tiệm cận của đường cong

   (a) Tiệm cận đứng: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = x_0$ thì $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đường cong.

   (b) Tiệm cận ngang: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = y_0$ thì $y = y_0$ là một tiệm cận ngang của đường cong.

   (c) Tiệm cận xiên: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên. Nếu

   $$a = \lim_{t\to t_0(\infty)} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t\to t_0(\infty)} [y(t) - ax(t)]$$

   thì $y = ax + b$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

4. Để vẽ đường cong được chính xác hơn, ta xác định tiếp tuyến của đường cong tại các điểm đặc biệt. Hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm bằng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Ngoài ra có thể khảo sát tính lồi lõm và điểm uốn (nếu cần thiết) bằng cách tính các đạo hàm cấp hai

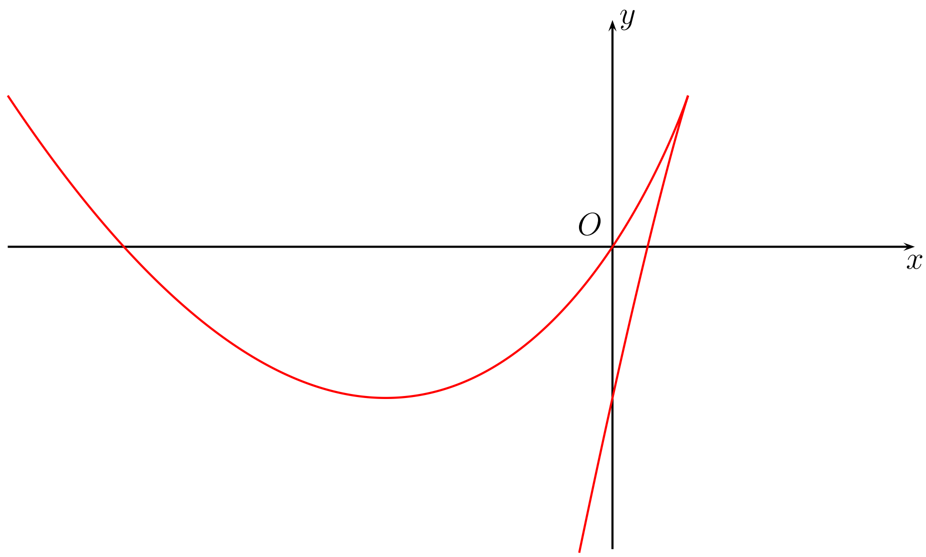
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{y_{tt}"x'_t - y'_t x_t"}{x'^3_t}$$

5. Xác định một số điểm đặc biệt mà đồ thị hàm số đi qua và vẽ đồ thị hàm số.

Ví dụ 10.4 (Giữa kì, K61). *Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi phương trình tham số*

a) $\begin{cases} x = \frac{2016t}{1-t^3} \\ y = \frac{2016t^2}{1-t^3}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \frac{2016t}{1+t^3} \\ y = \frac{2016t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

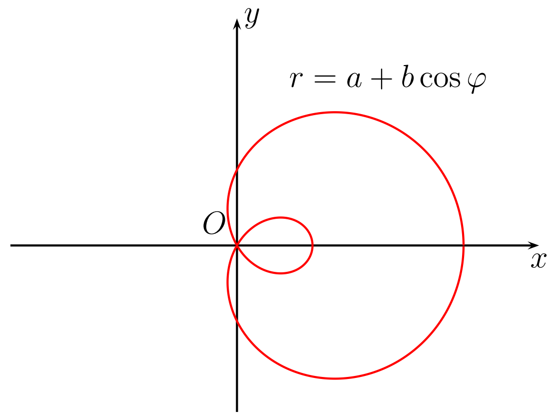
Bài tập 10.4. Khảo sát và vẽ đường cong $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$



Hình 10.4

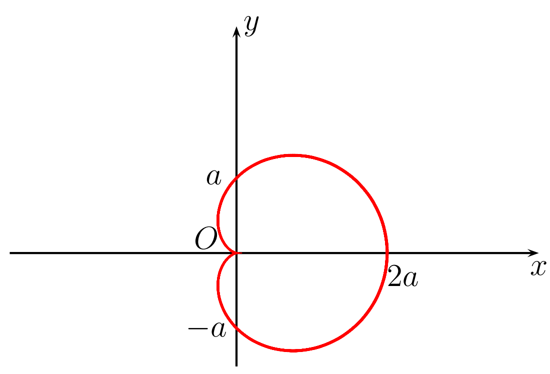
10.3 Khảo sát và vẽ đường cong trong hệ toạ độ cực

Bài tập 10.5. Khảo sát và vẽ đường cong $r = a + b\cos\varphi,\ (0 < a \leq b)$.



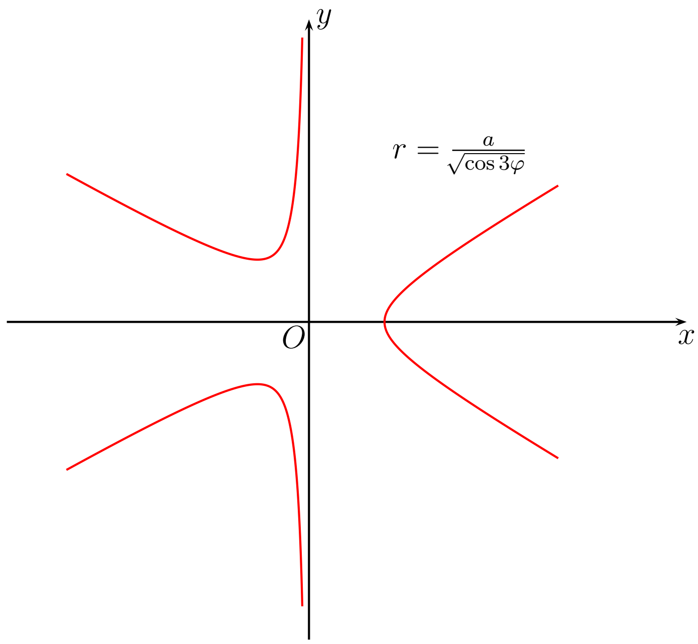
Hình 10.5

Bài tập 10.6. Khảo sát và vẽ đường cong $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$, (đường Cardioid hay đường hình tim, trường hợp đặc biệt của đường cong trong Bài tập 10.5 với $a = b$)



Hình 10.6

Bài tập 10.7. Khảo sát và vẽ đường cong $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $(a > 0)$.

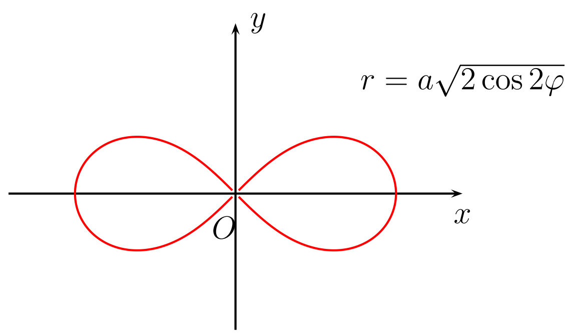


Hình 10.7

Bài tập 10.8. Khảo sát và vẽ đường cong Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\ (a > 0).$$

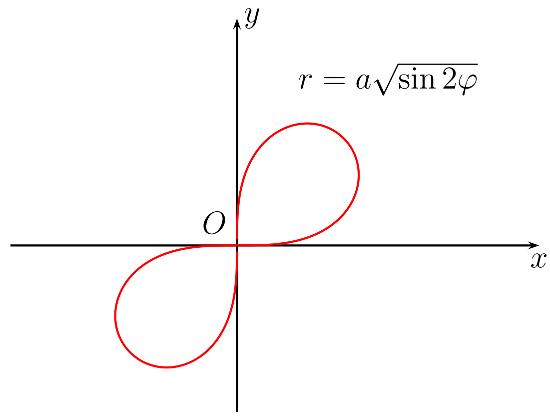
Phương trình của đường Lemniscate trong tọa độ cực là $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.



Hình 10.8

Bài tập 10.9. Khảo sát và vẽ đường cong $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\ \ (a > 0)$.

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

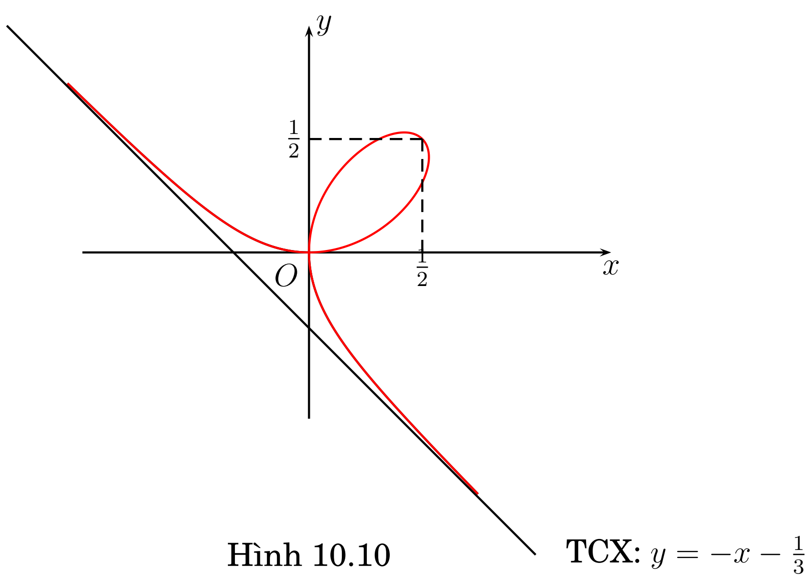


Hình 10.9

Bài tập 10.10. Khảo sát và vẽ đường cong $x^3 + y^3 = axy \ (a > 0)$
(Lá Descartes)

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$



Hình 10.10

10.4 Bài tập

Bài tập 10.11. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a. $y = x^3 + x$ b. $y = \arctan x - x$

[Đáp số]

a) hàm số tăng với mọi x b) hàm số giảm với mọi x

Bài tập 10.12. Chứng minh các bất đẳng thức

a. $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ b. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

Chứng minh. a) Xét hàm số $f(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = 2\arctan x$.

- Nếu $x \geq 0, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$
- Nếu $x \leq 0, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0$ ■

b) Tương tự, xét $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x), h(x) = \ln(1+x) - x$

$$g'(x) = -\frac{x^2}{1+x} < 0, h'(x) = -\frac{x}{1+x} < 0 \Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0, h(x) \leq h(0) = 0.$$

Bài tập 10.13. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ b) $y = x - \ln(1+x)$ c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

Chứng minh. a) $y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}, y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}, y_{\max} = y(0) = 4.$

b) $y' = \frac{x}{1+x}, y_{\min} = y(0) = 0.$

c) $y' = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{\frac{4}{3}-x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}.$

- Xét $x_1 = \frac{4}{3}$, ta có $y_{\min} = y(\frac{4}{3}) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$
- Xét $x_2 = 1, y'$ không đổi dấu, hàm số không đạt cực trị tại $x_2 = 1$
- Xét $x_3 = 2$, ta có $y_{\max} = y(2) = 0$ ■

Bài tập 10.14. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $e^x > 1 + x \quad \forall x \neq 0$ c) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \forall x > 0$

Bài tập 10.15. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

Bài tập 10.16. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5}\left[\sin(\sin x) - x.\sqrt[3]{1-x^2}\right]$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \dfrac{e^x}{x}\right]$.

CHƯƠNG 2

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN MỘT BIẾN SỐ

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1 Nguyên hàm của hàm số

Chương này trình bày về phép tính tích phân, đây là phép toán ngược của phép tính đạo hàm (vi phân) của hàm số. Nếu ta cho trước một hàm số $f(x)$ thì có tồn tại hay không một hàm số $F(x)$ có đạo hàm bằng $f(x)$? Nếu tồn tại, hãy tìm tất cả các hàm số $F(x)$ như vậy.

Định nghĩa 2.1. *Hàm số $F(x)$ được gọi là một* nguyên hàm *của hàm số $f(x)$ trên khoảng D nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$ hay $dF(x) = f(x)dx$.*

Định lý sau đây nói rằng nguyên hàm của một hàm số cho trước không phải là duy nhất, nếu biết một nguyên hàm thì ta có thể miêu tả được tất cả các nguyên hàm khác của hàm số đó.

Định lý 1.1. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng D, thì:*

- *Hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với C là một hằng số bất kỳ.*
- *Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều viết được dưới dạng $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số.*

Như vậy biểu thức $F(x) + C$ biểu diễn tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$, mỗi hằng số C tương ứng cho ta một nguyên hàm.

Định nghĩa 2.1. *Tích phân bất định của một hàm số $f(x)$ là họ các nguyên hàm $F(x)+C$, với $x \in D$, trong đó C là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và C là một hằng số bất kỳ. Tích phân bất định của $f(x)dx$ được ký hiệu là $\int f(x)dx$. Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân và hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số dưới dấu tích phân.*

Vậy $\int f(x)dx = F(x) + C$, với $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

Các tính chất của tích phân bất định

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ hay $d\int f(x)dx = f(x)dx$
- $\int F'(x)dx = F(x) + C$ hay $\int dF(x) = F(x) + C$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ (a là hằng số khác 0)
- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

  Hai tính chất cuối cùng là tính chất tuyến tính của tích phân bất định, ta có thể viết chung
  $$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$
  trong đó α, β là các hằng số không đồng thời bằng 0.

Các công thức tích phân dạng đơn giản

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C \int \cos x dx = \sin x + C$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

9) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

12) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

13) $\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$

1.2 Các phương pháp tính tích phân bất định

1. **Phương pháp khai triển**

   Để tính một tích phân bất kỳ, ta cần sử dụng các phương pháp thích hợp để đưa về các tích phân đã có trong bảng các công thức tích phân đơn giản ở trên. Một phương pháp đơn giản là phương pháp khai triển. Phương pháp này dựa trên tính chất tuyến tính của tích phân bất định:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

   Ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân thành tổng (hiệu) của các hàm số đơn giản mà đã biết được nguyên hàm của chúng, các hằng số được đưa ra bên ngoài dấu tích phân.

   Ví dụ 1.1. • $\int (2x\sqrt{x} - 3x^2)dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^2dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^3 + C$

   • $\int \left(2\sin x + x^3 - \frac{1}{x}\right)dx = 2\int \sin x dx + \int x^3 dx - \int \frac{dx}{x} = -2\cos x + \frac{x^4}{4} - \ln|x| + C$

   • $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$

2. **Phương pháp biến đổi biểu thức vi phân**

   Nhận xét: nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $u = u(x)$ là một hàm số khả vi liên tục. Ta có thể kiểm tra lại bằng cách đạo hàm hai vế theo x. Sử dụng tính chất này, ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân $g(x)dx$ về dạng

$$g(x)dx = f(u(x))u'(x)dx,$$

   trong đó $f(x)$ là một hàm số mà ta dễ dàng tìm được nguyên hàm $F(x)$. Khi đó tích phân cần tính trở thành

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du = F(u(x)) + C$$

   Trong trường hợp đơn giản $u(x) = ax + b$ thì $du = adx$, do đó nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ ta suy ra

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

   Ví dụ 1.2. *(a)* $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

   (b) $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

(c) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

(d) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\tan^2 x) d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C$

(e) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \sqrt{1+3x^2}d(1+3x^2) = \frac{1}{9}\left(\sqrt{1+3x^2}\right)^3 + C$

(f)

$$I = \int \frac{\arccos x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\arcsin x d(\arcsin x)$$

nên

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}\arcsin^2 x - \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C$$

3. **Phương pháp đổi biến**

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$, trong đó $f(x)$là một hàm số liên tục. Để tính tích phân này, ta tìm cách chuyển sang tính tích phân khác của một hàm số khác bằng một phép đổi biến $x = \varphi(t)$, sao cho biểu thức dưới dấu tích phân đối với biến t có thể tìm được nguyên hàm một cách đơn giản hơn.

Phép đổi biến thứ nhất:

Đặt $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là một hàm số đơn điệu, và có đạo hàm liên tục. Khi đó ta có

$$I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

Giả sử hàm số $g(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ có nguyên hàm là hàm $G(t)$, và $t = h(x)$ là hàm số ngược của hàm số $x = \varphi(t)$, ta có

$$\int g(t)dt = G(t) + C \Rightarrow I = G\left[h(x)\right] + C$$

Phép đổi biến thứ hai:

Đặt $t = \psi(x)$, trong đó $\psi(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục, và ta viết được hàm $f(x) = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)$. Khi đó ta có

$$I = \int f(x)dx = \int g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx$$

Giả sử hàm số $g(t)$ có nguyên hàm là hàm số $G(t)$, ta có

$$I = G\left[\psi(x)\right] + C$$

Chú ý: Khi tính tích phân bất định bằng phương pháp đổi biến số, sau khi tìm được nguyên hàm theo biến số mới, phải đổi lại thành hàm số của biến số cũ.

Ví dụ 1.3. *(a) Tính tích phân* $I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$

Đặt $x = 2\sin^2 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, ta tính được*

$$dx = 4\sin t \cos t dt, \sqrt{\frac{x}{2-x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2(1-\sin^2 t)}} = \tan t$$

Suy ra

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = 4\int \sin^2 t dt = 2t - \sin 2t + C$$

Đổi lại biến x*, với* $t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$*, ta thu được*

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2} + C$$

(b) Tính tích phân $I_2 = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$

Đặt $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$*, ta có*

$$I_2 = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln|t+1| + C$$

Đổi lại biến x*, ta được* $I_2 = e^x - \ln(e^x + 1) + C$*.*

(c) Tính tích phân $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4^x}}$

Đặt $t = 2^{-x} \Rightarrow dt = -2^{-x}\ln 2 dx$*, tích phân trở thành*

$$I_3 = \int \frac{-dt}{t\ln 2\sqrt{1+t^{-2}}} = -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{\ln 2}\ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C$$

Đổi lại biến x*, ta có:*

$$I_3 = -\frac{1}{\ln 2}\ln(2^{-x} + \sqrt{4^{-x}+1}) + C$$

Ví dụ 1.4 (Giữa kì, K61). *Tính tích phân*

a) $\int x^{x+1}\left(1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) dx.$ *b)* $\int x^{x-1}\left(1 - \frac{1}{x} + \ln x\right) dx.$

4. **Phương pháp tích phân từng phần**

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục. Theo quy tắc lấy vi phân

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Suy ra

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$. Ta cần biểu diễn

$$f(x)dx = [g(x)h(x)]\,dx = g(x)\,[h(x)dx] = udv$$

và áp dụng công thức tích phân từng phần với các hàm số $u = g(x), v = \int h(x)dx$. Ta thường sử dụng phương pháp này khi biểu thức dưới dấu tích phân chứa một trong các hàm số sau đây: $\ln x, a^x$, hàm số lượng giác, hàm số lượng giác ngược. Cụ thể:

- Trong các tích phân $\int x^n e^{kx}dx; \int x^n \sin kxdx; \int x^n \cos kxdx$, n nguyên dương, ta thường chọn $u = x^n$.
- Trong các tích phân $\int x^\alpha \ln^n xdx$, $\alpha \neq -1$ và n nguyên dương, ta thường chọn $u = \ln^n x$.
- Trong tích phân $\int x^n \arctan kxdx; \int x^n \arcsin kxdx$, n nguyên dương, ta thường chọn $u = \arctan kx$ hoặc $u = \arcsin kx$; $dv = x^n dx$.

Ví dụ 1.5. *Tính các tích phân bất định*

(a) $I_1 = \int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

(b) $I_2 = \int x^2 \sin xdx$

Đặt** $u = x^2, dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$**, ta được

$$I_2 = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx$$

Đặt** $u = x, dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$**, ta được

$$I_2 = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin xdx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

(c) $I_3 = \int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

Đặt** $u = xe^x; dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}; du = (x+1)e^x dx$**, ta được

$$I_3 = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

(d) $I_4 = \int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Đặt** $\sqrt{1+e^x} = t \Rightarrow \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2dt$**, ta có** $I_4 = 2\int [\ln(t-1) + \ln(t+1)]\,dt = 2(t-1)\ln(t-1) + 2(t+1)\ln(t+1) - 4t + C$ **Đổi lại biến** x **ta có

$$\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + 4\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right) - 2x + C$$

(e) $I_5 = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Đặt $u = \arcsin x; dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; v = -\sqrt{1-x^2}$*, ta được*

$$I_5 = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C$$

(f) $I_6 = \int e^x \cos 2x dx$

Đặt $u = \cos 2x; dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x; du = -2 \sin 2x dx$*, ta được*

$$I_6 = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx$$

Đặt $u = \sin 2x; dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x; du = 2 \cos 2x dx$*, ta được*

$$I_6 = e^x \cos 2x + 2 \left(e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx \right) = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4I_6 + 5C$$

Vậy $I_6 = \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$*.*

Ví dụ 1.6 (Giữa kì, K61). *Tính tích phân*

a) $\int x^3 \arctan x dx$*.*

b) $\int x^3 \operatorname{arccot} x dx$*.*

c) $\int x^2 \sin 2x dx$*.*

d) $\int x^2 \cos 2x dx$*.*

Ví dụ 1.7 (Ngụy biện toán học). *Chứng minh rằng* $0 = 1$*.*

Chứng minh. Xét tích phân

$$\begin{aligned} I = \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{1}{\ln x} d \ln x \\ &= \frac{1}{\ln x} . \ln x - \int \ln x d \left(\frac{1}{\ln x} \right) \quad \text{(tích phân từng phần)} \\ &= 1 - \int \ln x . \frac{-1}{\ln^2 x} . \frac{1}{x} dx \\ &= 1 - \int \frac{dx}{x \ln x} \\ &= 1 + I. \end{aligned}$$

Phương trình $I = 1 + I$ dẫn đến $0 = 1$. Sai lầm ở đâu? ■

Trong các mục sau đây chúng ta sẽ xét tích phân bất định của một số dạng hàm cơ bản: hàm phân thức hữu tỷ, hàm lượng giác, hàm chứa căn thức; và trình bày một số phương pháp giải chung đối với tích phân các hàm này.

1.3 Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

Định nghĩa 2.2. Một hàm phân thức hữu tỷ *là một hàm số có dạng* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$*, trong đó* $P(x), Q(x)$ *là các đa thức của* x*. Một phân thức hữu tỷ có bậc của đa thức ở tử số nhỏ hơn bậc của đa thức ở mẫu số là một* phân thức hữu tỷ thực sự.

Bằng phép chia đa thức, chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta luôn đưa được một hàm phân thức hữu tỷ về dạng

$$f(x) = H(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

trong đó $H(x)$ là đa thức thương, $r(x)$ là phần dư trong phép chia. Khi đó $\frac{r(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỷ thực sự. Nguyên hàm của đa thức được tìm bởi công thức tích phân cơ bản. Ta sẽ xét việc tìm nguyên hàm của phân thức hữu tỷ còn lại $\frac{r(x)}{Q(x)}$ trong hai trường hợp đặc biệt: mẫu số của phân thức là đa thức bậc nhất hoặc đa thức bậc hai. Trong những trường hợp mẫu số phức tạp hơn, chúng ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để đưa về hai trường hợp trên.

Phương pháp hệ số bất định

Giả sử chúng ta muốn phân tích một phân thức hữu tỷ thực sự $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng (hiệu) của các phân thức hữu tỷ thực sự có mẫu số là đa thức bậc nhất hoặc bậc hai. Trước hết ta phân tích đa thức ở mẫu số $Q(x)$ thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai vô nghiệm

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}...(x-\alpha_m)^{a_m}(x^2+p_1x+q_1)^{b_1}...(x^2+p_nx+q_n)^{b_n}$$

trong đó α_i, p_j, q_j là các hằng số, a_i, b_j là các số nguyên dương, $1 \le i \le m; 1 \le j \le n$.

- Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện đơn thức $(x-\alpha)^a$, a là số nguyên dương thì trong phân tích của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$, trong đó A_i là hằng số và $1 \le i \le a$.

- Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện biểu thức $(x^2+px+q)^b$, b là số nguyên dương thì trong phân tích của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j}$, trong đó B_j, C_j là các hằng số và $1 \le j \le b$.

Sau khi viết được phân tích của $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ta tìm các hằng số A_i, B_j, C_j bằng cách quy đồng mẫu số ở hai vế, rồi đồng nhất hệ số của $x^n, n \in \mathbb{R}$ ở hai vế. Như vậy việc dùng phương pháp hệ số bất định dẫn chúng ta tới việc tính bốn loại tích phân hữu tỷ cơ bản sau:

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a}$ II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k}\ (k \ge 2)$

III. $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$ IV. $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m}\ (m \ge 2)$

trong đó

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \int A(x-a)^{-k}dx = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}dt \quad (a=\sqrt{q-p^2/4},\ \text{đổi biến } t=x+p/2)\\ &= \int \frac{Mtdt}{t^2+a^2} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{t^2+a^2}\\ &= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}(N-Mp/2)\arctan\frac{t}{a} + C\\ &= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m} &= \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^m}dt \quad (a=\sqrt{q-p^2/4},\ \text{đổi biến } t=x+p/2)\\ &= \int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} + \int \frac{(N-Mp/2)dt}{(t^2+a^2)^m}\end{aligned}$$

- Tích phân thứ nhất $\int \frac{Mtdt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{M}{2(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C.$
- Muốn xử lý tích phân thứ hai ta thực hiện phép đổi biến số lượng giác $t = a\tan z$, khi đó $\begin{cases} t^2+a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 z}, \\ dt = \frac{a}{\cos^2 z}dz. \end{cases}$

  Ta có
  $$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = a^{2m-1}\int \cos^{2m-2} z dz.$$
  Tích phân của hàm lượng giác này sẽ được nghiên cứu kĩ ở phần sau.

Ví dụ 1.8. *Tính các tích phân bất định*

a. $I_1 = \int \frac{x^4-x^3+2x^2-2x+1}{(x^2+2)(x-1)}dx$

Ta có

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-2x+1}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{1}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Quy đồng mẫu số ở hai vế

$$3 = (A+B)x^2 + (C-B+2)x - C$$

Đồng nhất hệ số của x^2, x và hệ số tự do, ta được $\begin{cases} A+B=0 \\ C-B+2=0 \\ -C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

Suy ra

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-2x+3}{(x^2+2)(x-1)} = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2}$$

Vậy tích phân bằng

$$I = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

b. $I_2 = \displaystyle\int \frac{2x^4+10x^3+17x^2+16x+5}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}dx$

Ta viết

$$\frac{2x^4+10x^3+17x^2+16x+5}{(x+1)^2(x^2+2x+3)} = 2 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{x^2+2x+3}$$

Suy ra

$$I = 2x + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 2\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Ví dụ 1.9 (Giữa kì, K61). *Tính các tích phân sau*

a) $\int \frac{1}{x^2+2016x}dx.$

b) $\int \frac{1}{x^2-2016x}dx.$

c) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

d) $\int \frac{xdx}{(x^2+2)(x^2+3)}.$

Ví dụ 1.10 (Giữa kì, K61). *Tính tích phân*

a) $\int x\ln(x^2+x+1)dx.$

b) $\int x\ln(x^2-x+1)dx.$

1.4 Tích phân hàm lượng giác

1. **Phương pháp chung**

   Xét tích phân $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó hàm dưới dấu tích phân là một biểu thức hữu tỷ đối với $\sin x, \cos x$. Ta có thể sử dụng phép đổi biến tổng quát $t = \tan\frac{t}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tan x = \frac{2t}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

   tích phân đang xét được đưa về tích phân của phân thức hữu tỉ của biến t.

Ví dụ 1.11. *Tính tích phân* $\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx$
Ta viết

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\int \frac{d(1 + \sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} + 2\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$***, suy ra***

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C$$

Thay lại biến cũ, ta được

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\ln|1 + \sin x + \cos x| + \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + C$$

2. **Tích phân dạng** $\int \sin^m x \cos^n x dx$**, trong đó** m, n **là các số nguyên**

- Nếu m là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu n là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu m, n là các số nguyên dương chẵn, ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

rồi đưa về tích phân dạng $\int \sin^k 2x \cos^l 2x dx$.

Ví dụ 1.12. *Tính các tích phân bất định*

- $I_1 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$
Đặt $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ ***ta có***

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - t^2)t^2(-dt) = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

- $I_2 = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$
Sử dụng công thức hạ bậc ta có

$$I_2 = \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

$$\Rightarrow I_2 = \tfrac{1}{8}\left(x - \tfrac{\sin 2x}{2} - \int \tfrac{1 + \cos 4x}{2} dx + \tfrac{1}{2}\int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x)\right)$$

Vậy

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C$$

Đối với tích phân I_2 sau khi sử dụng công thức hạ bậc lần thứ nhất ta cũng có thể tiếp tục hạ bậc của biểu thức lượng giác dưới dấu tích phân bởi công thức

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}; \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

Áp dụng vào tích phân I_2 , ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{3\cos 2x + \cos 6x}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{24}\right) + C \end{aligned}$$

3. **Tích phân** $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **có dạng đặc biệt**

- **Đặt** $t = \cos x$ **nếu** $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
- **Đặt** $t = \sin x$ **nếu** $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
- **Đặt** $t = \tan x$ **nếu** $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Ví dụ 1.13. *Tính tích phân* $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$
Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$***, ta có***

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{-dt}{(1-t^2)t^4} &= \int \left[\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right] dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \end{aligned}$$

nên

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = -\frac{1}{3\cos x^3} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

1.5 Tích phân các biểu thức vô tỷ

Xét các tích phân có dạng

- $\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})dx$,
- $\int R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2})dx$,
- $\int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})dx$,

trong đó $R(u, v)$ là các hàm số hữu tỷ.

Có hai phương pháp xử lý tích phân các biểu thức hữu tỉ là **Phép thế lượng giác** và **Phép thế Euler**. Ý tưởng của cả hai phương pháp này đều là khử các biểu thức vô tỉ bằng cách:

1. đưa về tích phân của các hàm lượng giác bằng qua phép thế lượng giác,

2. đưa về tích phân của các hàm phân thức hữu tỉ bằng phép thế Euler.

Phép thế lượng giác

- Đặt $x = \alpha \tan t$ đối với tích phân $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2})dx$.

- Đặt $x = \dfrac{\alpha}{\cos t}$ hoặc $x = \dfrac{\alpha}{\sin t}$ đối với tích phân $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$.

- Đặt $x = \alpha \sin t$ hoặc $x = \alpha \cos t$ đối với tích phân $\displaystyle\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$.

Ví dụ 1.14. *Tính* $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$.

[Lời giải] Đặt $x = \alpha \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ta có $\begin{cases} t = \arcsin \frac{x}{\alpha}, \\ dx = \alpha \cos t dt, \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \frac{1}{\alpha \cos t}. \end{cases}$.

$$I = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{\alpha} + C$$

Ví dụ 1.15. *Tính* $\int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx$.

[Lời giải] Đặt $x = \alpha \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ta có $\begin{cases} t = \arcsin \frac{x}{\alpha}, \\ dx = \alpha \cos t dt, \\ \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha \cos t. \end{cases}$.

$$I = \alpha^2 \int \cos^2 t dt = \alpha^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\alpha^2}{2} t + \frac{\alpha^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \arcsin \frac{x}{\alpha} + C.$$

Phép thế Euler

- Đặt $t = x + \sqrt{x^2+a}$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{x^2+a})dx$, ở đây a có thể âm hoặc dương, nghĩa là $a = \pm\alpha^2$ đều áp dụng được. Khi đó,

$$dt = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

  và tích phân đã cho được đưa về tích phân của phân thức hữu tỉ.

- Đặt $\sqrt{\alpha^2-x^2} = xt + \alpha$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})dx$,. Khi đó,

$$\alpha^2 - x^2 = (xt+\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - x^2 = x^2t^2 + 2\alpha xt + \alpha^2 \Leftrightarrow x = -\frac{2\alpha t}{1+t^2},$$

  và tích phân đã cho được đưa về tích phân của phân thức hữu tỉ.

Ví dụ 1.16. *Tính* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

[Lời giải] Đặt $t = x + \sqrt{x^2+a}$, khi đó $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ và

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Ví dụ 1.17. *Tính* $\int \sqrt{x^2+a}dx$.

[Lời giải] Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx - I. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Do đó,

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C.$$

Nói chung việc tính tích phân của các biểu thức vô tỷ thông thường được đưa về việc tính bốn loại tích phân cơ bản sau

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha} + C.$

2. $\int \sqrt{\alpha^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\arcsin\frac{x}{\alpha} + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$

4. $\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C.$

Ví dụ 1.18. *Tính các tích phân sau*

a) $\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$

Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t$*, thì*

$$\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \tan(\arcsin x) + C$$

b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$*, ta có*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{\sin(\arctan x)} + C.$$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ta có

$$I = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Tích phân có dạng $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Viết

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

để đưa về việc tính tích phân của hàm vô tỉ cơ bản.

Ví dụ 1.19. *Tính* $\int \frac{4x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx.$

Tích phân có dạng $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Đặt $u = \frac{1}{px+q}$ để đưa về việc tính tích phân của hàm vô tỉ cơ bản.

Ví dụ 1.20. *Tính* $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{3+6x+x^2}}.$

Tính các tích phân có dạng $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_p/n_p}\right) dx$

Đặt $\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$, với k là bội chung nhỏ nhất của $n_1, n_2, \ldots, n_p$, để đưa tích phân đã cho về tích phân của phân thức hữu tỉ với biến t.

Ví dụ 1.21. *Tính* $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx.$

[Lời giải] Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ ta có $x = -\frac{2t^2-1}{t^2-1}, dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$ và

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt \\ &= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+1} + x + 2 + C. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ví dụ 1.22. *Tính* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

[Gợi ý] Đặt $\sqrt[6]{x} = t$, đáp số $I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C.$

Bài tập 2.1. *Tính các tích phân sau*

a) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx,$

b) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx,$

c) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}},$

d) $\frac{dx}{\sqrt[5]{x}-1},$

e) $\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}},$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-2}},$

g) $\int \sqrt{e^x+1} dx,$

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},$

i) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x-9}} dx.$

[Đáp số]

a) Đặt $u = \sqrt{x+9}, I = 2\sqrt{x+9} + 3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C.$

b) Đặt $u = \sqrt{x}, I = x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$

c) Đặt $u = \sqrt[3]{x}, I = \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1) + C.$

d) Đặt $\sqrt[5]{x} = u, I = 5\left(\frac{\sqrt[5]{x^4}}{4} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt[5]{x^2}}{2} + \sqrt[5]{x} + \ln|\sqrt[5]{x}-1|\right) + C.$

e) Đặt $\sqrt[12]{x} = u$,

$$I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + 2\sqrt{x} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 12\ln\left|\sqrt[12]{x}\,\breve{}\,1\right| + C.$$

f) Đặt $\sqrt{\sqrt{x} - 2} = u, I = \frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}\,\breve{}\,2)^3} + 8\sqrt{\sqrt{x}\,\breve{}\,2} + C.$

g) Đặt $\sqrt{e^x + 1} = u, I = 2\sqrt{e^x + 1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{e^x+1}}{1\,\breve{}\,\sqrt{e^x+1}}\right| + C.$

h) Đặt $\sqrt[6]{x} = t$, $I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C$.

i) Đặt $\sqrt{x - 9} = u, I = 2(x - 9)^{3/2} + 58\sqrt{x - 9} + C$

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 2.1. *Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ thành n khoảng nhỏ $[x_i, x_{i+1}]$ bởi phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta chọn điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ và thành lập biểu thức*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i \text{ với } \triangle x_i = x_{i+1} - x_i \tag{2.3}$$

Biểu thức S_n được gọi là tổng tích phân. Gọi $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \triangle x_i$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và không phụ thuộc vào cách chọn điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Trong trường hợp đó ta nói hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

Chú ý 2.1. *Trong định nghĩa trên ta đã xét hàm số $f(x)$ trong khoảng đóng $[a,b]$ tức là đã giả thiết $a < b$. Bây giờ nếu $b < a$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$ và khi $a = b$ ta định nghĩa $\int_a^b f(x)dx = 0$.*

2.2 Các tiêu chuẩn khả tích

Định lý 2.1. *Điều kiện cần và đủ để hàm số bị chặn $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ là $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$, trong đó:*

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} M_i \triangle x_i, s = \sum_{i=1}^{n+1} m_i \triangle x_i$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

Áp dụng định lý 2.1 chúng ta có thể chứng minh được các định lý sau:

Định lý 2.2. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

Định lý 2.3. *Nếu $f(x)$ bị chặn trên $[a,b]$ và có một số điểm gián đoạn trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

Định lý 2.4. *Nếu $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.*

2.3 Các tính chất của tích phân xác định

Trong các phần tiếp theo sau đây, nếu không có chú thích gì thì khi viết $\int_a^b f(x)dx$ ta hiểu là $f(x)$ được giả thiết là khả tích trên $[a, b]$.

- *Tính chất 1.*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- *Tính chất 2.*
Cho 3 khoảng đóng $[a, b], [a, c], [b, c]$, nếu $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất thì cũng khả tích trên 2 đoạn còn lại, và

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- *Tính chất 3.* Giả thiết $a < b$. Khi đó:

(i) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(ii) Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

(iii) Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $|f(x)|$ khả tích trên $[a, b]$ và:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(iv) Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

.

- *Tính chất 4.*(Định lý trung bình thứ nhất)
Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, khi đó tồn tại μ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), m \leq \mu \leq M.$$

Đặc biệt, nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

- *Tính chất 5.*(Định lý trung bình thứ hai)
  Giả thiết

  (i) $f(x)$ và $f(x)g(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

  (ii) $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$.

  (iii) $g(x)$ không đổi dấu trên $[a,b]$.

  Khi đó

  $$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, m \le \mu \le M.$$

  Đặc biệt nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho:

  $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Ví dụ 2.1 (Cuối kì, K61-Viện ĐTQT). *Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[3,4]$ sao cho $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [3,4]$ và $\int_3^4 f(x)dx = 0$ thì $f(x) = 0$ với mọi $x \in [3,4]$.*

2.4 Tích phân với cận trên thay đổi (hàm tích phân)

Giả sử $f(x)$ là một hàm khả tích trên $[a,b]$, khi đó với mỗi $x \in [a,b]$ thì f cũng khả tích trên $[a,x]$. Ta xác định hàm số $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Định lý 2.5. **(1)** *Nếu $f(t)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $F(x)$ liên tục trên $[a,b]$.*

(2) *Nếu f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ thì $F(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Định lý 2.6 (Công thức Newton-Leibniz). *Nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng đóng $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định

1. **Sử dụng công thức tích phân từng phần.**
   Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trong $[a, b]$. Khi đó:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

2. **Sử dụng các phép đổi biến số.**

Định lý 2.7 (Đổi biến $x := \varphi(t)$).
Xét $I = \int_a^b f(x)dx$ *với* $f(x)$ *liên tục trong* $[a, b]$. *Thực hiện phép đổi biến* $x = \varphi(t)$ *thoả mãn 3 điều kiện sau:*

(1) $\varphi(t)$ *có đạo hàm liên tục trong* $[a, b]$.

(2) $\varphi(a) = \alpha; \varphi(b) = \beta$.

(3) *Khi* t *biến thiên trong* $[\alpha, \beta]$ *từ* α *đến* β *thì* $x = \varphi(t)$ *biến thiên liên tục từ* a *đến* b.

Khi đó ta có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Định lý 2.8 (Đổi biến $t := \varphi(x)$).
Giả sử tích phân cần tính có dạng $I = \int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx$. *Trong đó* $\varphi(x)$ *biến thiên đơn điệu ngặt và có đạo hàm liên tục trên* $[a, b]$. *Khi đó:*

$$\int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

3. **Sử dụng các phép truy hồi, quy nạp.**

2.6 Hệ thống bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm tích phân.
Chúng ta có các công thức sau:

$$\boxed{\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\left(\int\limits_a^{g(x)} f(t)dt\right)'_x = f(g(x)).g'(x)} \tag{2.5}$$

Công thức 2.4 chúng ta đã biết trong Định lý 2.5, còn công thức 2.5 được suy ra từ công thức đạo hàm của hàm hợp.

Bài tập 2.1. *Tính các đạo hàm:*

a) $\frac{d}{dx}\int_x^y e^{t^2}dt$ *b)* $\frac{d}{dy}\int_x^y e^{t^2}dt$ *c)* $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+x^4}}$

Chứng minh. a) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int\limits_y^x e^{t^2}dt = -e^{x^2}$(do y là hằng số)

b) $\dfrac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = e^{y^2}$(do x là hằng số)

c) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = -\dfrac{d}{dx}\int\limits_a^{x^2} \dfrac{dt}{\sqrt{1+x^4}} + \dfrac{d}{dx}\int\limits_a^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1+x^8}} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+12x^2}}$ ∎

Dạng 2. Tính giới hạn của hàm số dựa vào công thức L'Hospital và đạo hàm của hàm tích phân.

Bài tập 2.2. *Tìm giới hạn:*

a) $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$ *b)* $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int\limits_0^{x}(\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

Chứng minh. a) Nhận xét: $\lim\limits_{x\to 0^+}\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt = \lim\limits_{x\to 0^+}\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt = 0$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt\right)'}{\left(\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}.\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}.\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 \Rightarrow A = 1$$

b) Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^{x}(\arctan t)^2dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = \infty$ nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^{x}(\arctan t)^2dt\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\pi^2}{4}\Rightarrow B = \frac{\pi^2}{4}$$

■

Dạng 3. Sử dụng công thức tổng tích phân để tính giới hạn của một số dãy số đặc biệt.

Xuất phát từ công thức tính tổng tích phân 2.3

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\bigtriangleup x_i \text{ với } \bigtriangleup x_i = x_{i+1} - x_i$$

Nếu chúng ta chia đoạn $[a,b]$ thành n khoảng có độ dài bằng nhau bởi phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, trong đó $x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}$ thì:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \text{ với } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Khi đó nếu hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$, và chọn $\xi_i = x_i$ ta được công thức:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}.i\right)\right] = \int\limits_a^b f(x)dx} \quad (2.6)$$

Còn nếu chọn $\xi_i = x_{i+1}$ ta được công thức:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}.i\right)\right] = \int\limits_a^b f(x)dx} \quad (2.7)$$

Bài tập 2.3. *Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn:*

a) $A = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$

b) $B = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

Chứng minh. a) Viết

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+\frac{\beta}{n}} + \frac{1}{\alpha+\frac{2\beta}{n}} + \cdots + \frac{1}{\alpha+\frac{(n-1)\beta}{n}}\right]$$

Áp dụng công thức 2.6 với $a = 0, b = 1, f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta x}$ ta được:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta x}dx = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

Nếu áp dụng công thức 2.7 với $a = 0, b = 1, f(x) = \frac{1}{\alpha+\beta x}$ ta được:

$$A' = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+n\beta}\right] = A = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$$

b) Áp dụng công thức 2.7 với $a = 0, b = 1, f(x) = \sqrt{1+x}$ ta được:

$$B = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Nếu áp dụng công thức 2.6 với $a = 0, b = 1, f(x) = \sqrt{1+x}$ ta được:

$$B' = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n-1}{n}}\right) = B = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Bài tập 2.4. *Tính* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right)$

[Gợi ý] Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right)$ bằng cách viết biểu thức trong giới hạn dưới dạng tổng tích phân.

Dạng 4. Tính tích phân xác định (xem mục 2.5)

Bài tập 2.5. *Tính các tích phân*

a) $\int_1^e |\ln x|(x+1)dx$

b) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$

c) $\int_0^1 (x^3-2x+5)e^{-\frac{x}{2}}dx$

d) $\int_0^2 \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+\tan^2 x)^2}dx$

e) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx dx$

[Gợi ý]

a) $I_a = \frac{e^2+5}{4}$ b) $I_b = \frac{5e^3-2}{27}$ c) $I_c = 98 - \frac{144}{\sqrt{e}}$

d)

$$\begin{aligned}
I_d &= \int\limits_0^2 \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+\tan^2 x)^2}dx \\
&= \int\limits_0^2 \sin^2 x.\cos x.\cos^4 x dx \\
&= \int\limits_0^2 \sin^2 x.(1-\sin^2 x)d(\sin x) \\
&= \frac{\sin^3(2)}{3} - \frac{2\sin^5(2)}{5} + \frac{\sin^7(2)}{7}
\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
I_e &= \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx \\
&= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3 - \int_0^3 x.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}.\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}.\frac{1}{(x+1)^2}dx \\
&= \pi - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \\
&= \pi - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}.2tdt \text{ (đặt } \sqrt{x}=t) \\
&= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)dt \\
&= \pi - \Big[(t-\arctan t)\Big|_0^{\sqrt{3}}\Big] \\
&= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\sin nx \\
&= \frac{1}{n}\cos^n x\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx.n.\cos^{n-1}x.\sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx.\cos^{n-1}x.\sin x dx.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$\begin{aligned}2I_n &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx.\cos^{n-1} x.\sin x dx\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1)x dx\\ &= I_{n-1}\end{aligned}$$

Vậy theo phép truy hồi ta có $I_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_0 = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Bài tập 2.6. *Tính*

a) $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ *b)* $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

Dạng 5. Chứng minh các đẳng thức tích phân

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng nếu* $f(x)$ *liên tục trên* $[0,1]$ *thì:*

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ *b)* $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx.$

[Gợi ý] Đây là bài tập dễ, câu a) đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, còn câu b) đặt $t = \pi - x$.

Bài tập 2.8. *Áp dụng kết quả của bài tập 2.7 hãy chứng minh*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{4}$$

Bài tập 2.9. *Giả sử* $f(x)$ *liên tục trên* $[-a,a](a>0)$*, hãy chứng minh*

$$I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \textit{nếu } f(x) \textit{ là hàm số lẻ trên } [-a,a] \\ 2\int\limits_0^a f(x)dx & \textit{nếu } f(x) \textit{ là hàm số chẵn trên } [-a,a] \end{cases}$$

Bài tập 2.10. *Cho* $f(x)$ *liên tục, chẵn trên* $[-a,a]$*, chứng minh*

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)dx}{1+b^x} = \int\limits_0^a f(x)dx \textit{ với } 0 \le b \ne 1$$

Áp dụng tính

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)}dx, \quad I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos 2x}{2002^x + 2^x}dx, \quad I_3 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \mid \sin x \mid}{1+2^x}dx$$

Bài tập 2.11. *Chứng minh* $\int\limits_a^b x^m(a+b-x)^n dx = \int\limits_a^b x^n(a+b-x)^m dx$

Áp dụng tính $I_n = \int\limits_0^1 x^2(1-x)^n dx$ *và chứng minh*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k . \frac{1}{k+3} = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

Dạng 6. Chứng minh các bất đẳng thức tích phân

Bài tập 2.12. *Cho* $f(x), g(x)$ *là hai hàm số khả tích trên* $[a,b]$. *Khi đó* $f^2(x), g^2(x)$ *cũng khả tích trên* $[a,b]$. *Chứng minh bất đẳng thức sau* $(a<b)$

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right).\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarzt)

Chứng minh. Xét 2 trường hợp:

TH1. Nếu $\int\limits_a^b f^2(x)dx = \int\limits_a^b g^2(x)dx = 0$ thì:

$$0 \leq \left| \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int\limits_a^b \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx = 0$$

Khi đó ta có dấu $" = "$ xảy ra.

TH2. Nếu ít nhất một trong hai tích phân $\int\limits_a^b f^2(x)dx, \int\limits_a^b g^2(x)dx$ khác 0, không mất tính tổng quát ta giả sử $\int\limits_a^b f^2(x)dx \neq 0$

Khi đó $[\alpha f(x)+g(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b [\alpha f(x)+g(x)]^2 \geq 0$. Suy ra

$$\Big(\int\limits_a^b f^2(x)dx\Big).\alpha^2 + \Big(2\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big).\alpha + \int\limits_a^b g^2(x)dx \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Biểu thức ở vế trái là tam thức bậc 2 đối với α nên 2.8 đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\triangle' = \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right).\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0.$$

■

Bài tập 2.13 (Cuối kì, K62). *Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a,b]$ và $f(a)=f(b)=0$. Chứng minh rằng*

$$\left(\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b [f(x)]^2dx \int\limits_a^b [f''(x)]^2dx.$$

Chứng minh. Ta có

$$\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx = \int\limits_a^b f'(x)df(x) = f(x)f'(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)f''(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)f''(x)dx.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz ta có

$$\left(\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx\right)^2 = \left(-\int\limits_a^b f(x)f''(x)dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b [f(x)]^2dx \int\limits_a^b [f''(x)]^2dx.$$

■

Bài tập 2.14 (Cuối kì, K60). *Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ và $f(0)=0$. Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 [f(x)]^2dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} f(x)^2 = [f(x)-f(0)]^2 = \left(\int\limits_0^x f'(t)dt\right)^2 &\leq \int\limits_0^x [f'(t)]^2dt \cdot \int\limits_0^x 1^2dt \\ &= x\int\limits_0^x [f'(t)]^2dt \leq x\int\limits_0^1 [f'(t)]^2dt = x\int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \le \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

■

Bài tập 2.14 có thể được mở rộng như sau (với chứng minh hoàn toàn tương tự).

Bài tập 2.15. *Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng*

$$\int_a^b [f(x)-f(a)]^2 dx \le \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

Cũng với ý tưởng viết $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$, bạn đọc có thể chứng minh các kết quả sau.

Bài tập 2.16. *Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $f(a)=0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b |f'(x)|dx.$$

[Lời giải] Thật vậy,

$$|f(x)| = |f(x)-f(a)| = \left|\int_a^x f'(t)dt\right| \le \int_a^x |f'(t)|dt \le \int_a^b |f(t)|dt.$$

Do đó,

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b \left(\int_a^b |f(t)|dt\right) dx = (b-a)\int_a^b |f(t)|dt = (b-a)\int_a^b |f(x)|dx.$$

Bài tập 2.17. *Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $f(a)=0$. Chứng minh rằng*

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \le \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

[Lời giải] Ta có $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f(t)dt$ nên

$$|f(x)f'(x)| \le |f'(x)|\int_a^x |f'(t)dt|.$$

Suy ra

$$\int\limits_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \int\limits_a^b \left(|f'(x)| \int\limits_a^x |f'(t)dt| \right) dx \tag{2.9}$$

Vì $\left(\int\limits_a^x |f'(t)|dt \right)' = |f'(x)|$ nên $\left[\left(\int\limits_a^x |f'(t)|dt \right)^2 \right]' = 2|f'(x)| \int_a^x |f'(t)dt|$. Do đó,

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b \left(|f'(x)| \int\limits_a^x |f'(t)dt| \right) dx &= \frac{1}{2} \left(\int\limits_a^x |f'(t)|dt \right)^2 \Bigg|_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int\limits_a^b |f'(x)|dx \right)^2 \leq \frac{b-a}{2} \int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Từ (2.9) và (2.10) ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 2.18. *Cho* f *là một hàm số khả vi liên tục trên* $[a,b]$, $f(a) = 0$ *và* $0 \leq f'(x) \leq 1$ *với mọi* $x \in [a,b]$. *Chứng minh rằng*

a) $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \frac{1}{2} [f(b)^2 - f(a)^2]$, *b)* $\int\limits_a^b [f(x)]^3 dx \leq \left(\int\limits_a^b f(x)dx \right)^2$.

Chứng minh. a) Từ giả thiết ta có $f(x)$ là một hàm số đơn điệu không giảm và $f(x) \geq f(a) = 0, \forall x \in [a,b]$. Do đó,

$$f(x) \geq f(x)f'(x), \forall x \in [a,b].$$

Suy ra

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left[f(b)^2 - f(a)^2\right].$$

b) Xét hàm số

$$F(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)^2 - \int\limits_a^x [f(t)]^3 dt, \quad x \in [a,b].$$

Ta có

$$F'(x) = 2f(x) \int\limits_a^x f(t)dt - f(x)^3 = f(x) \left[2 \int\limits_a^x f(t)dt - [f(x)]^2 \right].$$

Đặt $G(x) = 2 \int_a^x f(t)dt - [f(x)]^2$, ta có

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0, \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow G(x) \geq G(a) = 0, \forall x \in [a, b].$$

Từ đó suy ra $F'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow F(b) \geq F(a) = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b [f(x)]^3 dx \leq \left(\int\limits_a^b f(x) dx \right)^2$.

■

Bài tập 2.19 (Olympic Toán học Sinh viên Toàn quốc 2018 -Bảng A). *Cho* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *là một hàm số khả vi liên tục sao cho* $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. *Chứng minh rằng*

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

[Lời giải] Do $f'(x)$ liên tục nên tồn tại $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$.

- Đặt
$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + M\frac{(x-a)(x-b)}{2}, \quad x \in [a, b]. \tag{2.11}$$
Ta có $F(a) = F(b) = 0$ và $F''(x) = f'(x) + M \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

- Vì $F''(x) \geq 0$ nên $F(x)$ là hàm lồi trên $[a, b]$, hơn nữa $F(a) = F(b) = 0$ nên $F(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$. Từ (2.11) ta có
$$\int\limits_a^x f(t)dt \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq \frac{M}{2}\left(\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{8}M, \forall x \in [a, b].$$

- Một cách tương tự, đặt
$$G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - M\frac{(x-a)(x-b)}{2}, \quad x \in [a, b] \tag{2.12}$$
sẽ dẫn đến G là một hàm lõm trên $[a, b]$ và bất đẳng thức
$$\int\limits_a^x f(t)dt \geq -\frac{(b-a)^2}{8}M, \forall x \in [a, b].$$

Kết luận:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Khi định nghĩa tích phân xác định, chúng ta đã xét các hàm số xác định trên một đoạn hữu hạn $[a, b]$ và bị chặn trên đoạn đó. Trong phần này chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân, từ đó đưa vào khái niệm tích phân suy rộng với cận vô hạn và tích phân của hàm số không bị chặn.

3.1 Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)]$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]\,, (a \leq A < +\infty)$.

Định nghĩa 2.1. *Giới hạn của tích phân* $\int\limits_a^A f(x)dx$ *khi* $A \to +\infty$ *được gọi là tích phân suy rộng của hàm số* $f(x)$ *trên khoảng* $[a, +\infty)$ *và ký hiệu như sau*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Ngược lại, nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng ta nói tích phân đó phân kỳ.*

Tương tự ta định nghĩa tích phân của một hàm số $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty, a]$ và $(-\infty, +\infty)$ bởi các công thức sau

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_A^a f(x)dx \text{ và } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty, A' \to -\infty} \int\limits_{A'}^{A} f(x)dx$$

Ta có thể viết

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

khi hai trong ba tích phân nói trên hội tụ.

Qua các định nghĩa trên ta thấy rằng tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định (hiểu theo nghĩa thông thường) khi cho cận tích phân dần tới vô cùng. Do đó có thể dùng công thức Leibniz để tính tích phân, sau đó cho cận tiến ra vô cùng.

$$\int\limits_a^A f(x)dx = F(A) - F(a)$$

kí hiệu

$$F(+\infty) = \lim_{A\to\infty} F(A)$$

thì có thể viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

Ví dụ 3.1. *a) Tính tích phân* $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$

Ta có

$$\int_{e^2}^{A} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln\ln x}\Big|_{e^2}^{A} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln\ln A} \textbf{ nên } \Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_{e^2}^{A} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Vậy

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

b) Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Trước hết ta tính $\displaystyle\int_{A'}^{A} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$*, đặt* $x = \tan t \Rightarrow \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{dt}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t dt$*,*

$$\int_{A'}^{A} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{\arctan A'}^{\arctan A} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\arctan A'}^{\arctan A}$$

Khi $A \to +\infty, A' \to -\infty$ *thì* $\arctan A \to \frac{\pi}{2}; \arctan A' \to -\frac{\pi}{2}$ *, suy ra*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\sin x dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} x\sin x dx = \lim_{A\to-\infty}(-x\cos x + \sin x)\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty}(A\cos A - \sin A)$

Giới hạn này không tồn tại, do đó tích phân phân kỳ.

d) Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Tích phân suy rộng I *hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha > 1$*, và phân kỳ khi và chỉ khi* $\alpha \le 1$*.*

3.2 Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a, b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, t]$, ($t < b$ bất kỳ), và $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Điểm $x = b$ được gọi là điểm bất thường (điểm kỳ dị) của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 2.2. *Giới hạn của tích phân* $\int\limits_a^t f(x)dx$ *khi* $t \to b^-$, *được gọi là tích phân suy rộng của hàm số* $f(x)$ *trên khoảng* $[a, b)$ *và được ký hiệu như sau:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int\limits_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, ta nói tích phân suy rộng hội tụ. Ngược lại nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng, ta nói tích phân phân kỳ.

Tương tự ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ không bị chặn trên khoảng $(a, b]$ và (a, b) lần lượt nhận $x = a$ và $x = b$ làm điểm bất thường.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int\limits_t^b f(x)dx \text{ và } \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+, t'\to b^-} \int\limits_t^{t'} f(x)dx$$

Đối với tích phân có hai điểm bất thường $x = a, x = b$, ta có thể viết

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

khi hai trong ba tích phân nói trên hội tụ.

Ví dụ 3.2. *a) Xét sự hội tụ của tích phân* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1} \int\limits_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1} \arcsin x \Big|_t^0 = \lim_{t\to -1} (-\arcsin t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \arcsin x \Big|_0^t = \lim_{t\to 1} \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

nên

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

b) Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

Tích phân suy rộng I *hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha < 1$*, phân kỳ khi và chỉ khi* $\alpha \geq 1$.

3.3 Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 3.1 (Tiêu chuẩn so sánh).

1. *Cho hai hàm số* $f(x)$ *và* $g(x)$ *khả tích trên mọi khoảng hữu hạn* $[a, A](a \leq A)$ *và*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), x \geq a.$$

Khi đó

i) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*

ii) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*

2. *Giả sử* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai hàm số khả tích trên mọi đoạn hữu hạn* $[a, A](a \leq A)$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k(0 < k < +\infty)$*. Khi đó các tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

Hệ quả 3.1. *Cho* f *và* g *là hai hàm số dương khả tích trên* $[a, +\infty)$*. Khi đó*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kì thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì.*

Tương tự chúng ta cũng có các tiêu chuẩn hội tụ cho trường hợp tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn.

Định lý 3.2 (Tiêu chuẩn so sánh).

1. *Cho hai hàm số* $f(x)$ *và* $g(x)$ *khả tích trên* $(a, b]$ *và có cùng điểm bất thường là* $x = a$ *sao cho*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$$

Khi đó

i) Nếu $\int\limits_a^b g(x)dx$ ***hội tụ thì*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***hội tụ***

ii) Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***phân kỳ thì*** $\int\limits_a^b g(x)dx$ ***phân kỳ***

2. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số dương khả tích trên $(a, b]$ và có cùng điểm bất thường $x = a$. Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = k(0 < k < +\infty)$$

Khi đó các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^b g(x)dx$ ***hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.***

Hệ quả 3.1. *Cho f và g là hai hàm số dương khả tích trên $(a, b]$ và có cùng điểm bất thường $x = a$. Khi đó*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ***và nếu*** $\int\limits_a^b g(x)dx$ ***hội tụ thì*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***hội tụ.***

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ***và nếu*** $\int\limits_a^b g(x)dx$ ***phân kì thì*** $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***phân kì.***

Chú ý:

- Khi xét đến tính chất hội tụ hay phân kì của một tích phân suy rộng, nói chung chúng ta chỉ "*quan tâm*" tới *dáng điệu* của hàm số tại các điểm bất thường.

- Khi sử dụng tiêu chuẩn so sánh chúng ta thường hay so sánh các tích phân suy rộng đã cho với hai loại tích phân suy rộng sau:

a) $I_1 = \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu} & \alpha > 1\\ \text{phân kì nếu} & \alpha \leq 1\end{cases}$

b)

$$I_2 = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu } \alpha < 1\\ \text{phân kì nếu } \alpha \geq 1\end{cases}, I_2' = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\begin{cases}\text{hội tụ nếu } \alpha < 1\\ \text{phân kì nếu } \alpha \geq 1\end{cases}$$

Ví dụ 3.1 (Cuối kì, K61 Viện ĐTQT). *Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân*

a) $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos 2x)dx}{x^2\ln(1+3\sqrt{x})}$. b) $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos 3x)dx}{x^2\ln(1+2\sqrt{x})}$.

3.4 Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 3.3. *1. Nếu* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ *hội tụ*

2. Nếu $\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ *cũng hội tụ*

Định nghĩa 2.1.

1. Nếu $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *hội tụ thì ta nói* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *bán hội tụ.*

2. Nếu $\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì ta nói* $\int\limits_a^{b}f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int\limits_a^{b}f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ *bán hội tụ.*

Ví dụ 3.1. *Chứng minh rằng* $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ *hội tụ tuyệt đối.*

Chứng minh. Ta có

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2},$$

mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ hội tụ tuyệt đối. ∎

Ví dụ 3.2 (Tích phân Dirichlet). *Chứng minh rằng* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ *là bán hội tụ.*

Chứng minh. Ta có

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x} + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$ thực chất là tích phân xác định vì $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, do đó $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \in R$. Vì vậy chỉ cần chỉ ra rằng $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ là hội tụ. Theo công thức tích phân từng phần,

$$\int\limits_1^M \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M + \int\limits_1^M \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} + \int\limits_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Cho $M \to +\infty$ ta có

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \cos 1 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ là hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ cũng hội tụ. Việc tiếp theo là chỉ ra $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ là phân kì. Thật vậy,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin v}{v+n\pi}dv.$$

Vì $\frac{1}{v+n\pi} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ với $0 \leq v \leq \pi$ nên

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin v}{v+n\pi}dv \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin v dv = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

Mà $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ là phân kì nên $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ là phân kì theo tiêu chuẩn so sánh. ■

3.5 Bài tập

Bài tập 2.1. *Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau:*

a) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

b) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Chứng minh. a) $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x dx = e^x(x-1)\Big|_{-\infty}^0 = 1$

b) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{+\infty}$. Do không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ nên tích phân đã cho phân kì.

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$. Đặt $x = \tan t$ thì $I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

d) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}_{I_2}$

- Xét tích phân I_1 có điểm bất thường là $x = 0$. Khi $x \to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Mặt khác tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên I_1 hội tụ.
- Xét tích phân I_2 có điểm bất thường là $x = 1$. Khi $x \to 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Mặt khác tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ. ■

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ.

Trong trường hợp tổng quát, muốn tính $I = \int\limits_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ta thực hiện phép đổi biến

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$$

sẽ chuyển I về tích phân xác định

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi$$

Bài tập 2.2. *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau*

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

b) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

c) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$

e) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

Chứng minh. a) Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x = 0$ và

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x - x} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Mặc khác $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ phân kì nên $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$ cũng phân kì.

b) Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x = 0$ và khi $x \to 0$, $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ nên $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Do $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x} - 1}$ cũng hội tụ.

c) Tích phân đã cho có điểm bất thường là $x =$ và khi $x \to 1$ thì

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$$

Do $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$ hội tụ nên $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ cũng hội tụ.

d) Ta có $\frac{\ln(1 + x)}{x} > \frac{1}{x}$ với mọi $x > e - 1$. Mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + x)dx}{x}$ cũng phân kì.

e) Ta có $e^{-x^2} < 1$ với mọi $x > 0$ nên $\frac{e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$ với mọi $x > 0$. Mặt khác $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ cũng hội tụ.

f) Khi $x \to +\infty$ thì $\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2}$ nên tích phân đã cho hội tụ. ■

Bài tập 2.3. *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ thì có suy ra được* $f(x) \to 0$ *khi* $x \to +\infty$ *không?*

[Gợi ý] $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ không suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Ví dụ như $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ hội tụ (xem bài tập 2.5) nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x^2)$.

Bài tập 2.4. *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $[a, +\infty)$ *và* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \neq 0$. *Hỏi* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *có hội tụ không?*

[Gợi ý] Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{A}=1$, mà $\int\limits_a^{+\infty}Adx$ phân kì nên $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ cũng phân kì.

Bài tập 2.5. *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau*

a) $\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$

b) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

c) $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)dx$

d) $\int\limits_0^1\dfrac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^p dx$

f) $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

g) $\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$

h) $\int\limits_0^1\dfrac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ($f$ *liên tục*)

Chứng minh. a) Thực hiện phép đổi biến $x=\sqrt{t}, dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, đưa tích phân đã cho về dạng

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}$$

Ta có thể viết

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}=\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}}_{I_2}$$

Vì $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}=0$ nên tích phân I_1 thực chất là tích phân xác định nên hội tụ, do đó chỉ cần xét I_2.

$$I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}}=-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$$

Vì $\left|\dfrac{\cos t}{t^{3/2}}\right|\leq\dfrac{1}{t^{3/2}}$ nên $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\dfrac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ hội tụ. Vậy ta có I_2 cũng hội tụ và tích phân đã cho hội tụ.

b) Ta có với $x>1$ thì $e^{-x^2}<e^{-x}$ mà $\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$ hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ cũng hội tụ.

c) Khi $x\to+\infty$, $1-\cos\dfrac{2}{x}=2\sin^2\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{2}{x^2}$ nên $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)dx$ hội tụ.

d) Khi $x \to 1$, $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{[(1-x)(1+x)]^5}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}.\sqrt[3]{(1-x)^5}}$ nên $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ hội tụ.

e) Trước hết ta có nhận xét rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p dx$ có điểm bất thường là $x = 0$ khi $p < 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ khi $p > 0$.

- Nếu $p < 0$ thì khi $x \to 0$, $(\tan x)^p = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^{-p} \sim \dfrac{1}{x^{-p}}$ nên I hội tụ nếu $-1 < p < 0$ và phân kì nếu $p \leq -1$.
- Nếu $p > 0$ thì khi $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $(\tan x)^p = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^p = \left(\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}\right)^p \sim \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^p}$ nên I hội tụ nếu $0 < p < 1$ và phân kì nếu $p \geq 1$.

Kết luận: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p dx$ hội tụ khi $|p| < 1$ và phân kì khi $|p| \geq 1$.

f) Trước hết ta có nhận xét rằng nếu $p < 1$ thì $x = 0$ là điểm bất thường, còn nếu $q < 1$ thì $x = 1$ là điểm bất thường. Phân tích

$$I = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{I_2}$$

I_1 chỉ hội tụ khi $1 - p < 1$, nghĩa là $p > 0$; còn I_2 chỉ hội tụ khi $1 - q < 1$, nghĩa là $q > 0$. Vậy I chỉ hội tụ khi $p > 0, q > 0$.

g) Nếu $p \geq 1$ thì tích phân đã cho chỉ có điểm bất thường tại $+\infty$ và

$$\lim_{x \to +\infty} [x^{p-1}e^{-x}] : \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

nên $\int\limits_{x \to +\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ.

Nếu $p < 1$ thì $x = 0$ cũng là một điểm bất thường. Ta có

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx}_{I_2}$$

Tích phân I_1 hội tụ khi $p > 0$ và I_2 hội tụ với p bất kì.

Vậy $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ nếu $p > 0$.

h) Mặc dù tích phân đã cho là tích phân suy rộng có điểm bất thường là $x = 1$ nhưng ta có thể đưa I về tích phân thường bằng cách đổi biến. Đặt $x = \sin\theta$, trên $[0, c]$ ta có

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^{\arcsin c} f(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta$$

Vì f là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ nên hàm hợp $f(\sin\theta)$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và tích phân đã cho là tích phân xác định nên hội tụ. ■

Bài tập 2.6. *Tính các tích phân suy rộng sau*

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Chứng minh. a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}$

c) Thực hiện phép đổi biến $x = \dfrac{1}{t}$ ta có

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$$

Do đó

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

Lại đặt $z = x - \dfrac{1}{x}$ ta được

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

§4. CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1 Tính diện tích hình phẳng

1. Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ Descartes (tính diện tích "hình thang cong")

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ y = g(x) \\ f, g \in C[a, b] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int\limits_a^b |\ f(x) - g(x)\ |\ dx} \tag{2.13}$$

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} c \le y \le d \\ x = \varphi(y) \\ x = \psi(y) \\ \varphi, \psi \in [c, d] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int\limits_c^d |\ \varphi(y) - \psi(y)\ |\ dy} \tag{2.14}$$

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\ \psi(t)\varphi'(t)\ |\ dt} \tag{2.15}$$

Trong đó giả thiết rằng phương trình $\varphi(t) = a, \psi(t) = b$ có nghiệm duy nhất là t_1, t_2 và $\varphi, \psi, \varphi' \in C[t_1, t_2]$.

Ví dụ 4.1 (Cuối kì, K61-Viện ĐTQT). *Tính diện tích của miền*

a) $D: \begin{cases} x + y \ge 2 \\ x^2 + y^2 \le 2x. \end{cases}$ *b)* $D: \begin{cases} x - y \ge 2 \\ x^2 + y^2 \le 2x. \end{cases}$

Bài tập 2.1. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:*

a) Đường parabol $y = x^2 + 4$ *và đường thẳng* $x - y + 4 = 0$*.*

b) Parabol bậc ba $y = x^3$ *và các đường* $y = x, y = 2x$.

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ *và parabol* $y^2 = x$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$

[Gợi ý]

Các câu a), b), c) có thể vẽ hình và tính toán dễ dàng như sau:

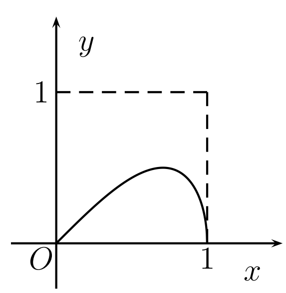
a) $S = \int\limits_0^1 [(x+4) - (x^2+4)]dx = \frac{1}{6}$

b) $S = \int\limits_0^1 (2x - x^2)dx + \int\limits_2^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx = \frac{3}{4}$

c) $S = 2\int\limits_0^2 (\sqrt{4x - x^2}) - \sqrt{2x})dx = 2\pi - \frac{16}{3}$

d) Trước hết ta có điều kiện $0 \leq x \leq 1$, và nhận xét rằng nếu $M(x,y) \in \mathcal{C}$ thì $M'(\pm x, \pm y) \in \mathcal{C}$. Do đó $S = 4S(D)$, trong đó D là miền giới hạn bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{x^2 - x^4}. \end{cases}$

Do miền D nằm hoàn toàn trong hình vuông $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, hơn nữa hàm số $y = \sqrt{x^2 - x^4}$ liên tục, $y(0) = y(1) = 0$ nên đồ thị của nó trong $[0,1]$ có hình dáng như hình vẽ dưới đây:



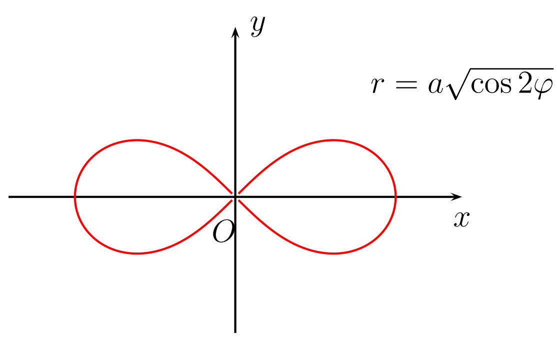
Áp dụng công thức 2.13 ta có $S(D) = \int\limits_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}dx = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{4}{3}$.

2. Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực (tính diện tích của miền có dạng hình quạt)

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi} \begin{cases} \varphi = \alpha \\ \varphi = \beta \\ r = r(\varphi) \\ r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi} \tag{2.16}$$

Bài tập 2.2. *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường hình tim* $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

[Gợi ý]



Hình 2.2

Khảo sát và vẽ đồ thị của đường cong trong toạ độ cực và nhận xét tính đối xứng của hình vẽ ta có:

$$S = 4S(D) = 4.\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)d\varphi = a^2.$$

4.2 Tính độ dài đường cong phẳng

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình $y = f(x)$

$$AB \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \\ f \in C^1[a, b] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \tag{2.17}$$

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình tham số:

$$AB\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \le t \le \beta \\ x(t), y(t) \in C^1[a,b] \\ x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \forall t \in [\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt} \tag{2.18}$$

Trường hợp đường cong AB cho bởi phương trình trong toạ độ cực:

$$AB\begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \\ r(\varphi) \in C^1[\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi} \tag{2.19}$$

Bài tập 2.3. *Tính độ dài đường cong*

a) $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ ***khi** x **biến thiên từ** 1 **đến** 2.*

b) $\begin{cases} x = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}) \\ y = a \sin t \end{cases}$ ***khi** t **biến thiên từ** $\frac{\pi}{3}$ **đến** $\frac{\pi}{2}$.*

Chứng minh. a) Ta có

$$1 + y'^2(x) = 1 + \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2$$

Nên áp dụng công thức 2.17 ta được:

$$s = \int\limits_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx \overset{(t=e^{2x})}{=} \int\limits_{e^2}^{e^4} \frac{t+1}{2t(t-1)} = \ln \frac{e^2+1}{e^2}$$

b) Áp dụng công thức 2.18 ta có

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2.\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \Rightarrow s = a\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}dt = a \ln \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

4.3 Tính thể tích vật thể

Trường hợp vật thể được giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b$. Giả thiết ta biết rằng diện tích S của thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳn $x = x_0$ là $S(x_0)$, và $S(x)$ là hàm số xác định, khả tích trên $[a, b]$. Khi đó

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx} \tag{2.20}$$

Bài tập 2.4. *Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ* $x^2 + y^2 = a^2$ *và* $y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$.

Lời giải: Do tính đối xứng nên $V = 8V'$ trong đó $V' = V \cap \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Một điểm $M(x, 0, 0) \in Ox$, qua M ta dựng thiết diện của V' vuông góc với Ox thì được một hình vuông có cạnh là $\sqrt{a^2 - x^2}$, do đó $S(x) = a^2 - x^2$. Áp dụng công thức 2.20 ta được

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{16}{3}a^3$$

Bài tập 2.5. *Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit* $z = 4 - y^2$*, các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng* $x = a$.

Chứng minh. Sau khi vẽ hình và áp dụng công thức 2.20 ta có:

$$V = \int_0^a S(x)dx \text{ mà } S(x) = \int_0^2 (4 - y^2)dy = \frac{16}{3} \text{ nên } V = \frac{16}{3}a$$

Tính thể tích vật thể tròn xoay

Trường hợp vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong

$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ quanh trục Ox, trong đó $f \in C[a, b]$ thì

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx} \tag{2.21}$$

Tương tự, nêú vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = 0 \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ quanh trục Oy, trong đó $\varphi \in C[c,d]$ thì

$$\boxed{V = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy} \tag{2.22}$$

Bài tập 2.6. *Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường* $y = 2x - x^2$ ***và*** $y = 0$

a) quanh trục Ox một vòng *b) quanh trục Oy một vòng.*

[Gợi ý]

a) Áp dụng công thức 2.21:

$$V = \pi \int\limits_0^2 (2x - x^2)dx =$$

b) Áp dụng công thức 2.22:

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 dy - \pi \int\limits_0^1 \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2 dy$$

4.4 Tính diện tích mặt tròn xoay

Cho hình thang cong giới hạn bởi $\begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ với $f \in C^1[a,b]$. Quay hình thang cong này quanh trục Ox thì ta được một vật thể tròn xoay. Khi đó diện tích xung quanh của vật thể được tính theo công thức:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_a^b |\ f(x)\ | \sqrt{1 + f'^2(x)}dx} \tag{2.23}$$

Tương tự nếu quay hình thang cong $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = 0 \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ với $\varphi \in C^1[c,d]$, quanh trục Oy thì:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_c^d \mid \varphi(y) \mid \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy} \qquad (2.24)$$

Bài tập 2.7. *Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau*

a) $y = \tan x, 0 < x \le \frac{\pi}{4}$ ***quanh trục*** Ox.

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ***quanh trục*** $Oy (a > b)$

c) $9y^2 = x(3-x)^2, 0 \le x \le 3$ ***quanh trục*** Ox.

Chứng minh. a) Áp dụng công thức 2.23 ta có:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sqrt{1 + (1 + \tan^2 x)} dx \\
&= 2\pi \int\limits_0^1 t\sqrt{1 + (1+t^2)^2} . \frac{dt}{1+t^2} \quad (\textbf{đặt } t = \tan x) \\
&= \pi \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1 + (1+t^2)^2}}{1+t^2} . d(t^2 + 1) \\
&= \pi \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} ds \quad (\textbf{đặt } s = 1 + t^2) \\
&= \pi \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \Big(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\Big) du \\
&= \pi . \left\{ \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \Big[\ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}-1} - \ln \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}+1} \Big] \right\}
\end{aligned}$$

b) Nhận xét tính đối xứng của miền và áp dụng công thức 2.24 ta có:

$$\begin{aligned}
S &= 2.2\pi \int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}.\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}\right)^2}dy \\
&= 4\pi\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2}dy \\
&= 4\pi\frac{a}{b}\sqrt{a^2-b^2}\int_0^b \sqrt{y^2+\frac{b^4}{a^2-b^2}}dy \\
&= 4\pi\frac{a}{b}\sqrt{a^2-b^2}\int_0^b \sqrt{y^2+\beta}dy(\text{ đặt } \beta=\frac{b^4}{a^2-b^2}) \\
&= 4\pi\frac{a}{b}\sqrt{a^2-b^2}.\frac{1}{2}\Big[y\sqrt{y^2+\beta}+\beta\ln|\,y+\sqrt{y^2+\beta}\,|\Big]\Big|_0^b \\
&\left(\int\sqrt{y^2+\beta}dy=\frac{1}{2}\Big[y\sqrt{y^2+\beta}+\beta\ln|\,y+\sqrt{y^2+\beta}\,|\Big]\right)
\end{aligned}$$

■

c) Trước hết

$$9y^2=x(3-x)^2 \Rightarrow 18yy'=3(3-x)(1-x)\Rightarrow y'=\frac{(3-x)(1-x)}{6y}\Rightarrow y'^2=\frac{(1-x)^2}{4x}$$

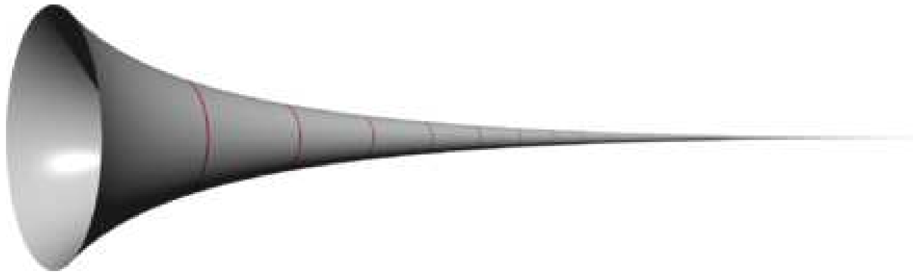
Nên áp dụng công thức 2.23 ta có:

$$S=2\pi\int_0^3\frac{\sqrt{x}(3-x)}{3}.\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}dx=2\pi.\frac{1}{6}\int_0^3(3-x)(1+x)dx=3\pi.$$

"Nghịch lý sừng Gabriel"

Cho một vật thể tròn xoay tạo bởi khi xoay miền giới hạn bởi $\begin{cases}1\le x,\\ y=0,\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}$ quanh trục Ox.

Tính thể tích và diện tích mặt của nó.



[Lời giải] Ta có

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi$$

và

$$S = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx \geq 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Như vậy, đây là một vật thể có diện tích mặt bằng $+\infty$, trong khi đó lại có thể tích hữu hạn. Giả sử bạn có một vật thể như vậy và cần sơn nó.

i) Một mặt, vì diện tích mặt là $+\infty$, bạn cần một lượng vô hạn sơn để sơn nó.

ii) Mặt khác, vì miền giới hạn bởi vật đó có thể tích hữu hạn, bạn có thể đổ đầy nó bằng một lượng hữu hạn sơn (ở đây là π đơn vị thể tích), và khi đó toàn bộ mặt trong của nó sẽ được sơn.

Một nghịch lý phải không?

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1 Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0$ hay nếu $x_n \to x_0, y_n \to y_0$.

Định nghĩa 3.1. *Cho hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là L khi M dần đến M_0 nếu*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \textit{ nếu } d(M, M_0) < \delta \textit{ thì } |f(M) - L| < \epsilon.$$

Một cách tương đương, với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận V dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = L.$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \textit{ hay } \lim_{M\to M_0} f(M) = L.$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.
- Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Nhận xét:

- Theo định nghĩa trên, muốn chứng minh sự tồn tại của giới hạn của hàm số nhiều biến số là việc *không dễ* vì phải chỉ ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$ với mọi dãy số $\{x_n \to x_0\}, \{y_n \to y_0\}$. Trong thực hành, muốn tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số, phương pháp chứng minh *chủ yếu* là đánh giá hàm số, dùng nguyên lý giới hạn kẹp để đưa về giới hạn của hàm số một biến số.

- Với chiều ngược lại, muốn chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $\{x_n \to x_0, y_n \to y_0\}$ và $\{x'_n \to x_0, y'_n \to y_0\}$ sao cho
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$$
hoặc chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

1.2 Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, M_0 là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu
$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$
Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim_{M\to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó liên tục đều, bị chặn trong miền ấy, đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đó.

1.3 Bài tập

Bài tập 1.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

c) $z = \arcsin \dfrac{y - 1}{x}$

d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài tập 1.2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}(x \to 0, y \to 0)$ b) $f(x,y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x + y}(x \to \infty, y \to \infty)$

Chứng minh. a) Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \to \frac{1-k^2}{1+k^2} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Nếu cho $(x,y) \to (\infty,\infty)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x,kx) = \sin \frac{\pi x}{2x + kx} = \sin \frac{\pi}{2+k} \to \sin \frac{\pi}{2+k} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ∎

Bài tập 1.3. [Cuối kì, K62, GT2, Nhóm ngành 2] Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^4 + y^4}{x^2 + 2y^2}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + 2y^4}{2x^2 + y^2}$.

[Lời giải] Ta có

a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4 + y^4}{x^2 + 2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4}{x^2 + 2y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2 + 2y^2} = 0 + 0 = 0,$$

do $0 \le \dfrac{2x^4}{x^2 + 2y^2} \le 2x^2, \quad 0 \le \dfrac{y^4}{x^2 + 2y^2} \le \frac{1}{2}y^2$ và nguyên lý giới hạn kẹp.

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + 2y^4}{2x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^2 + y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^4}{2x^2 + y^2} = 0 + 0 = 0,$$

do $0 \le \dfrac{x^4}{2x^2 + y^2} \le \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \le \dfrac{2y^4}{2x^2 + y^2} \le 2y^2$ và nguyên lý giới hạn kẹp.

Chú ý 3.1. *Không nhầm lẫn* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *với các giới hạn lặp* $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ *và* $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. *Chẳng hạn như, bạn đọc có thể kiểm tra với hàm số* $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ *ta có*

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ *không tồn tại.*

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$,

iii) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$.

§2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.1 Đạo hàm riêng

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $y = y_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_0)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}$ hay $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $x = x_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x_0,y)$ có đạo hàm tại điểm $y = y_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial y}$ hay $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0,y_0)}{\triangle y}$$

Chú ý: Các đạo hàm riêng của các hàm số n biến số (với $n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi cần tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, còn các biến còn lại là các hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm như hàm số một biến số.

2.2 Vi phân toàn phần

- Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0,y_0) \in D, M(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) \in D$. Biểu thức $\triangle f = f(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) - f(x_0,y_0)(x_0,y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0. Nếu như có thể biểu diễn số gia toàn phần dưới dạng

$$\triangle f = A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y + \beta \triangle y$$

  trong đó A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm số z ***khả vi*** tại M_0, còn biểu thức $A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y$ được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ tại M_0 và được kí hiệu là dz.
  Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

- Đối với hàm số một biến số, sự tồn tại đạo hàm tại điểm x_0 tương đương với sự khả vi của nó tại x_0. Đối với hàm số nhiều biến số, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ chưa đủ để nó khả vi tại M_0 (xem bài tập 2.1). Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại M_0.

Định lý 2.1. *Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và*

$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y$$

Ví dụ 2.1 (Cuối kì, K61 Viện ĐTQT). *Sử dụng vi phân, tính gần đúng*

a) $\sqrt{(8,05)^2 + (5,96)^2}$. *b)* $\sqrt{(6,05)^2 + (7,96)^2}$.

2.3 Đạo hàm của hàm số hợp

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$ và các hàm số

$$D \xrightarrow{\varphi} \varphi(D) \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

và $F = f \circ \varphi$ là hàm số hợp của hai hàm số f và φ:

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

Định lý 2.2. *Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ và*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

Công thức 3.1 có thể được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ, định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v với x, y và được kí hiệu là $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

2.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau:

$$\begin{cases} (f'_x)'_x = f''_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ (f'_x)'_y = f''_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ (f'_y)'_x = f''_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ (f'_y)'_y = f''_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

Định lý 2.3 (Schwarz). *Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.*

- Xét hàm số $z = f(x,y)$, vi phân toàn phần của nó $dz = f'_x dx + f'_y dy$, nếu tồn tại, cũng là một hàm số với hai biến số x, y. Vi phân toàn phần của dz, nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là $d^2 z$. Ta có công thức

$$d^2 z = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Ví dụ 2.1 (Cuối kì, K62, GT2, Nhóm ngành 2). *Cho hàm số $z = z(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục, ở đó* $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

2.5 Đạo hàm theo hướng - Gradient

Định nghĩa 3.1. *Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số xác định trong một miền $D \in \mathbb{R}^3$ và $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ là một véctơ đơn vị bất kì trong $\mathbb{R}^3$. Giới hạn, nếu có,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M)}{t} \tag{3.2}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{l}$ tại M_0 và được kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$.

- Nếu $\vec{l}$ không phải là véc tơ đơn vị thì giới hạn trong công thức 3.2 có thể được thay bằng
$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t},$$
trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

- Nếu $\vec{l}$ trùng với véctơ đơn vị i của trục Ox thì đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ chính là đạo hàm riêng theo biến x của hàm f
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

- Vậy đạo hàm riêng theo biến x chính là đạo hàm theo hướng của trục Ox, cũng như vậy, $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ là các đạo hàm của f theo hướng của trục Oy và Oz. Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng:

Định lý 2.4. *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ thì tại M_0 có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có*
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$
trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là cosin chỉ phương của $\vec{l}$.

Cho $f(x,y,z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của f tại M_0 là véctơ
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$$
và được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M_0)$.

Định lý 2.5. *Nếu $\overrightarrow{l}$ là một véctơ đơn vị và hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tại đó ta có*
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}} f.\vec{l}$$

Chú ý: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}} f.\vec{l}=\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right|\left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right|\left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$.

- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$.

2.6 Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

- Cho phương trình $F(x,y) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0 và có đạo hàm
$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

- Tương tự, cho phương trình $F(x,y,z) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^3$ và $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hàm số ẩn $z = z(x,y)$ trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) và có đạo hàm
$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

2.7 Bài tập

Bài tập 2.1. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại $(0,0)$ và do đó không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 2.2. Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$
b) $z = y^2 \sin\frac{x}{y}$
c) $z = x^{y^3}$
d) $z = \arctan\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$
e) $u = x^{y^z}, (x,y,z > 0)$
f) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z > 0)$

Chứng minh. a)

$$z'_x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

b)

$$z'_x = y\cos\frac{x}{y}; z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}.$$

c)

$$z'_x = y^3 x^{y^3-1}; z'_y = 3y^2 \ln x . x^{y^3}$$

d)

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$$

e)

$$u'_x = y^z x^{y^z-1}; u'_y = x^{y^z} z y^{z-1}. \ln x; u'_z = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$$

f)

$$u'_x = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} . \frac{-2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}; u'_y = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \frac{-2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}; u'_z = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \frac{-2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

■

Bài tập 2.3. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số $f(x,y)$ sau

a) $f(x,y) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \textbf{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \textbf{nếu } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \textbf{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Chứng minh. a) Dễ thấy hàm số liên tục với mọi $(x,y) \neq (0,y)$.
Xét $x = 0$, vì $\left|x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| \leq \frac{\pi}{2}|x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x. \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 = f(0,y)$. Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
Với $x \neq 0$ các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục:

$$z'_x = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, z'_y = \frac{2x^3y}{x^4+y^4}$$

Xét tại $x = 0$,

$$\begin{cases} f'_x(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \arctan\left(\frac{h}{y}\right)^2 = \left[\begin{array}{l} 0, y = 0 \\ \frac{\pi}{2}, y \neq 0 \end{array}\right. \\ f'_y(0,y) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,y+k) - f(0,y)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy ta thấy $f'_x(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$; $f'_y(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, còn tại $(0,0)$ thì

$$0 \leq \left|\frac{x\sin y - \text{ysinx}}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\left(\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right|$$

nên

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x\sin y - \text{ysinx}}{x^2+y^2}\right| = 0$$

Vậy $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. ∎

Bài tập 2.4. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thoả mãn

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

Chứng minh. Ta có

$$z'_x = yf\left(x^2 - y^2\right).2x, z'_y = f\left(x^2 - y^2\right) + y.f\left(x^2 - y^2\right).(-2y)$$

nên

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{f(x^2-y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

∎

Bài tập 2.5. Tìm đạo hàm của hàm số hợp sau đây

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}.$

b) $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}.$

c) $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3.$

Chứng minh. a) Ta có

$$\begin{cases} u'_x = -\sin x \\ u'_y = 0 \end{cases}; \begin{cases} v'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases};$$

nên

$$\begin{cases} z'_x = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)} \left[-\sin 2x - 4x\right]. \\ z'_y = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)} \left[-4y\right]. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{cases} u'_x = y \\ u'_y = x \end{cases}; \begin{cases} v'_x = \frac{1}{y} \\ v'_y = \frac{-x}{y^2} \end{cases}$$

nên

$$z'_x = \frac{2}{x}, z'_y = \frac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)}$$

c) Ta có

$$\begin{cases} x'_t = 3 \\ y'_t = 12t^2 \end{cases}$$

nên

$$z'_t = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\left(3-12t^2\right)$$

■

Bài tập 2.6. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin\left(x^2+y^2\right)$

b) $z = \ln\tan\frac{y}{x}$

c) $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$

d) $u = x^{y^2 z}$

Chứng minh. a)

$$dz = \cos\left(x^2+y^2\right)\left(2xdx+2ydy\right)$$

b)

$$dz = \frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}.\left(\frac{xdy-ydx}{x^2}\right).$$

c)

$$dz = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x-y)^2+(x+y)^2}.$$

d)

$$du = x^{y^2z}\left(\frac{y^2z}{x}dx + 2yz\ln x dy + y^2\ln x dz\right). \qquad \blacksquare$$

Bài tập 2.7. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

b) $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

Chứng minh. a) Xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}, \Delta x = 0,02; \Delta y = 0,05; x = 1; y = 0$. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}2x; f'_y = \frac{1}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}2y$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 0+\Delta y) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y = 1 + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,05 = 1,013.$$

b) Xét hàm

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right); x = 1; y = 1; \Delta x = 0,03; \Delta y = 0,02$$

Ta có

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}; f'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3y^{\frac{3}{4}}}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(1+\Delta x, 1+\Delta y) &\approx f(1,1) + f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y \\ &= 0 + \frac{1}{3}.0,03 + \frac{1}{4}(-0,02) = 0,005. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Bài tập 2.8. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - y^3x = a^4$; tính y'

b) $\arctan\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$; tính y'

c) $x + y + z = e^z$; tính z'_x, z'_y

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y

Chứng minh. a) Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4 = 0$, có $F'_x = 3x^2y - y^3; F'_y = x^3 - 3y^2x$. Vậy

$$y' = \frac{-F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x}$$

b) Xét hàm số ẩn $F(x,y) = \arctan\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a}$ có $\begin{cases} F'_x = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} \\ F'_y = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^2-a^2-(x+y)^2}{a\left(a^2+(x+y)^2\right)} \end{cases}$ nên

$$y' = \frac{a}{(x+y)^2}.$$

c) Xét hàm số ẩn $F(x,y,z) = x+y+z-e^z$ có $F'_x = 1; F'_y = 1; F'_z = 1-e^z$ nên

$$z'_x = \frac{-1}{1-e^z}; z'_y = \frac{-1}{1-e^z}$$

d) Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$ có $F'_x = 3x^2-3yz; F'_y = 3y^2-3xz; F'_z = 3z^2-3xy$ nên

$$z'_x = \frac{3yz-3x^2}{3z^2-3xy}; z'_x = \frac{3xz-3y^2}{3z^2-3xy}$$

■

Bài tập 2.9. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x,y xác định bởi phương trình $z.e^z = x.e^x + y.e^y$

Chứng minh. Xét hàm số $F(x,y,z) = ze^z - xe^x - ye^y = 0$ có $\begin{cases} F'_x = -(e^x + xe^x) \\ F'_y = -(e^y + ye^y) \\ F'_z = e^z + ze^z \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{(1+z'_x).(y+z)-(x+z)(z'_x)}{(y+z)^2} = \dfrac{\left(1+\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}\right)-(x+z)\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}}{(y+z)^2} \\ u'_y = \dfrac{(x+z).\left(1+z'_y\right)-(y+z)\left(z'_y\right)}{(y+z)^2} = \dfrac{(x+z).\left(1+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)-(y+z)\left(\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)}{(y+z)^2} \end{cases}$$

■

Bài tập 2.10. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{cases}$$

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của các phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x &= 0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x &= 0 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{z-x}{y-z} \\ z'_x = \dfrac{x-y}{y-z} \end{cases}$$

■

Bài tập 2.11. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$

Chứng minh. Xét hàm số $F(x, y, z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2}$ có $\begin{cases} F'_x = -\frac{2}{x^2} \\ F'_y = \frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}} \\ F'_z = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\frac{2}{x^2}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \\ z'_y = \dfrac{\frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x^2 z'_x + \frac{z'_y}{y} = \frac{1}{z}$. ■

Bài tập 2.12. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ b) $z = x^2 \ln(x^2 + y^2)$ c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

Chứng minh. a) Ta có

$$\begin{cases} z'_x = x\sqrt{x^2+y^2} \\ z'_y = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = \sqrt{x^2+y^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{yy} = \sqrt{x^2+y^2} + y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{xy} = \dfrac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{cases} z'_x = 2x\ln(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} \\ z'_y = \dfrac{x^2}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{-x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$$

c) Ta có

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right)+y.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$$

Bài tập 2.13. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a) $z = xy^2 - x^2y$

b) $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

Chứng minh. a) Ta có $dz = \left(y^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - x^2\right)dy$ nên

$$d^2z = -2y\left(dx\right)^2 + 4\left(y-x\right)dxdy + \left(2y\right)\left(dy\right)^2$$

b) Ta có $dz = \frac{x}{2\left(x^2+y^2\right)^2}dx + \frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)^2}dy$ nên

$$d^2z = \frac{y^2-3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(dx\right)^2 - \frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy + \frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(dy\right)^2$$

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

3.1 Cực trị tự do

Định nghĩa 3.1. *Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Ts nói rằng hàm số $f(x, y)$ đạt* cực trị *tại M_0 nếu với mọi điểm M trong lân cận nào đó của M_0 nhưng khác M_0, hiệu số $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.*

- *Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực tiểu *của hàm số f tại M_0.*
- *Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực đại *của hàm số f tại M_0.*

Trong phần tiếp theo chúng ta sử dụng các kí hiệu sau:

$$p = f'_x(M), q = f_y(M), r = f_{xx}"(M), s = f_{xy}"(M), t = f_{yy}"(M)$$

Định lý 3.1. *Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại M và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M), q = f_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không.*

Định lý 3.2. *Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $p = q = 0$, khi đó*

1. *Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.*
2. *Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0.*

Chú ý: Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa kết luận được điều gì về điểm M_0, nó có thể là cực trị, cũng có thể không. Trong trường hợp đó ta sẽ dùng định nghĩa để xét xem M_0 có phải là cực trị hay không bằng cách xét hiệu $f(M) - f(M_0)$, nếu nó xác định dấu trong một lân cận nào đó của M_0 thì nó là cực trị và ngược lại.

Ví dụ 3.1 (Cuối kì, K61 Viện ĐTQT). *Tìm các cực trị của hàm số*

a) $z = x^2 - 2x + \arctan(y^2)$.

b) $z = y^2 - 2y + \arctan(x^2)$.

Bài tập 3.1. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

b) $z = x + y - x.e^y$

c) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

d) $z = x^2 + y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Chứng minh. a) Xét hệ phương trình $\begin{cases} p = z'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ q = z'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy ta có $M(-1, 1)$ là điểm tới hạn duy nhất.
Ta có $A = z''_{xx}(M) = 2; B = z''_{xy}(M) = 1; C = z''_{yy}(M) = 2$ nên $B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0$.
Vậy hàm số đạt cực trị tại M và do $A > 0$ nên M là điểm cực tiểu.

b) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} p = 1 - e^y = 0 \\ q = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có điểm tới hạn duy nhất $M(1, 0)$. Ta có $A = z''_{xx}(M) = 0; B = z''_{xy}(M) = -1; C = z''_{yy}(M) = -1$ nên $B^2 - AC = 1 > 0$. Hàm số đã cho không có cực trị.

c) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 8x^3 - 2x \\ z'_y = 4y^3 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 1) = 0 \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{cases}$$

Vậy các điểm tới hạn của hàm số là

$$M_1(0,0); \quad M_2(0,1); \quad M_3(0,-1); \quad M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right); \quad M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right); \quad M_7\left(-\frac{1}{2}, 0\right); \quad M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right); \quad M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Ta có $z''_{xx} = 24x^2 - 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y^2 - 4$.

- Tại $M_1(0,0)$, $A = -2; B = 0; C = -4; B^2 - AC = -8 < 0$ nên M_1 là điểm cực đại với $z = 0$.
- Tại $M_2(0,1); M_3(0,-1); A = -2; B = 0; C = 8; B^2 - AC = 16 > 0$ nên M_2, M_3 không phải là điểm cực đại với $z = 0$.
- Tại $M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right); M_7\left(\frac{-1}{2}, 0\right); A = 4; B = 0; C = -4; B^2 - AC = 16 > 0$ nên M_4, M_7 không phải là điểm cực đại với $z = 0$.
- Tại $M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right); M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right); M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right); M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right); A = 4; B = 0; C = 8; B^2 - AC = -32 < 0$ nên M_5, M_6, M_8, M_9 là các điểm cực tiểu với giá trị tại đó là $z = -\frac{9}{8}$.

d) Xét hệ phương trình $\begin{cases} p = z'_x = 2x + e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2x = 0 \\ q = z'_y = 2y + e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy $M(0,0)$ là điểm tới hạn duy nhất. Xét

$$z''_{xx} = 2 + 2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 4x^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$
$$z''_{xy} = -4xy.e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$
$$z''_{yy} = 2 + 2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} - 4y^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Tại $M(0,0)$ có $A = 4; B = 0; C = 4; B^2 - AC = -16 < 0; A > 0$ nên tại M hàm số đạt cực tiểu. ■

3.2 Cực trị có điều kiện

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm số $f : U \to \mathbb{R}$. Xét bài toán tìm cực trị của hàm số $f(x,y)$ khi các biến x, y thoả mãn phương trình

$$\varphi(x,y) = 0$$

Ta nói rằng tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$ hàm f có *cực đại tương đối* (tương ứng *cực tiểu tương đối*) nếu tồn tại một lân cận $V \subset U$ sao cho $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (tương ứng $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$) với mọi $(x,y) \in V$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Điểm (x_0,y_0) được gọi là cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$, còn điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán. Nếu trong một lân cận của (x_0,y_0) từ hệ thức $\varphi(x,y) = 0$ ta xác định được hàm số $y = y(x)$ thì rõ ràng $(x_0, y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm số một biến số $g(x) = f(x, y(x))$. Như vậy, trong trường hợp này bài toán tìm cực trị ràng buộc được đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm số một biến số. Ta xét bài toán sau đây

Bài tập 3.2. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $z = x.y$ với điều kiện $x + y = 1$

Chứng minh. a) Đặt $x = \frac{a}{\sin t}; y = \frac{a}{\cos t}$, ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$. Khi đó

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sin t}{a} + \frac{\cos t}{a}.$$

Ta có

$$z'_t = \frac{\cos t}{a} - \frac{\sin t}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$$

Với $t = \frac{\pi}{4}$ ta có $x = \sqrt{2}a; y = \sqrt{2}a$, hàm số đạt cực tiểu và $z_{\text{CT}} = \frac{-\sqrt{2}}{a}$.
Với $t = \frac{5\pi}{4}$ ta có $x = -\sqrt{2}a; y = -\sqrt{2}a$, hàm số đạt cực đại và $z_{\text{CĐ}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

b) Từ điều kiện $x + y = 1$ ta suy ra $y = 1 - x$. Vậy $z = xy = x(1 - x)$. Dễ dàng nhận thấy hàm số $x = x(1 - x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$ và $z_{\text{CĐ}} = \frac{1}{4}$. ∎

Tuy nhiên không phải lúc nào cũng tìm được hàm số $y = y(x)$ từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Do đó bài toán tìm cực trị điều kiện không phải lúc nào cũng đưa được về bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó ta dùng **phương pháp Lagrange** được trình bày dưới đây.

Định lý 3.3 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị điều kiện). *Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ và (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Hơn nữa giả thiết rằng:*

a. Các hàm $f(x, y), \varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0).

b. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại một số λ_0 cùng với x_0, y_0 tạo thành nghiệm của hệ phương trình sau (đối với λ, x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

với $\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ được gọi là hàm Lagrange.

Định lý trên chính là điều kiện cần của cực trị có ràng buộc. Giải hệ phương trình 3.3 ta sẽ thu được các điểm tới hạn. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm tới hạn ứng với giá trị λ_0. Ta có

$$\phi(x, y, \lambda_0) - \phi(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x, y) + \lambda_0\varphi(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda_0\varphi(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

nên nếu M là một điểm cực trị của hàm số $\phi(x, y, \lambda_0)$ thì M cũng là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Muốn xét xem M có phải là điểm cực trị của hàm số $\phi(x, y, \lambda_0)$ hay không ta có thể quay lại sử dụng định lý 3.2 hoặc đi tính vi phân cấp hai

$$d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2$$

trong đó dx và dy liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0$$

hay

$$dy = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}dx$$

Thay biểu thức này của dy vào $d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0)$ ta có

$$d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0) = G(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2$$

Từ đó suy ra

- Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.
- Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Bài tập 3.3. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Chứng minh. Xét hàm số Lagrange $\phi(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2})$. Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0 \end{cases}$$

ta thu được các điểm tới hạn là $M_1(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $M_2(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ta có

$$d^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2 + \left(\frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2$$

Từ điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$ suy ra $-\frac{2}{x^3}dx - \frac{2}{y^3}dy = 0$ nên $dy = -\frac{y^3}{x^3}dx$, thay vào biểu thức $d^2\phi$ ta có

- Tại M_1, $d^2\phi(M_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = -\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) < 0$ nên M_1 là điểm cực đại có điều kiện.
- Tại M_2, $d^2\phi(M_2) = \frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = \frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) > 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu có điều kiện. ■

3.3 Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên tập hợp đóng A của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A. Để tìm các giá trị này ta hãy tìm giá trị của hàm số tại tất cả các điểm dừng trong miền A cũng như tại các điểm đạo hàm riêng không tồn tại, sau đó so sánh các giá trị này với các giá trị của hàm trên biên ∂A của A (tức là ta phải xét cực trị có điều kiện).

Bài tập 3.4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$.