GIẢI TÍCH I
BÀI 10

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG (TT)

2. Các dấu hiệu hội tụ

Hệ quả. Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0\,;\ +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\ \int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ phân kì

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì

a) $\int\limits_1^\infty \dfrac{1+x^3}{x^4+1}dx$ **b)** $\int\limits_1^\infty \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ **c)** $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{10}\,dx}{(x^4+x^3+x^2+1)^3}$

d) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$ **e)** $\int\limits_{10}^\infty \dfrac{dx}{x\ln(\ln x)}$ **f)** $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

g) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\ln^\alpha(3+2x)}{2+x}dx$ (HT với $\alpha < -1$, PK với $\alpha \ge 1$)

h) $\int\limits_{-\infty}^0 x.2^{2x-1}dx$ **(HT)** **i)** $\int\limits_{-\infty}^0 x.3^{2x+1}dx$ **(HT)**

b) *f*(*x*) có dấu tuỳ ý. Nếu $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ. Khi đó ta bảo $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối

Còn nếu $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ mà $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ phân kì thì ta bảo $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Tiêu chuẩn Dirichlet. Nếu $F(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)dt$ bị chặn khi $x \to +\infty$ thì $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ hội tụ $\forall\ \alpha > 0$ ($a > 0$).

Ví dụ 3. Xét hội tụ, phân kì

a) $\int\limits_1^\infty \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ **b)** $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{2+x^1}}$ **c)** $\int\limits_1^\infty \dfrac{(\sqrt{x}-1)\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}+1}$

d) $\int\limits_1^\infty \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ **e)** $\int\limits_2^\infty \dfrac{dx}{x^k\ln x}$ **f)** $\int\limits_1^\infty \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}x^k dx$

g) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx,\quad a, b > 0$ **h)** $\int\limits_1^{\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx,\ \lambda > 0$

II. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

1) Định nghĩa. $f(x)$ bị chặn và khả tích trên $[a ; b - \eta]$, $\forall\ \eta \in (0 ; b - a)$, $f(b - 0)$ không giới nội (khi đó b được gọi là điểm bất thường), khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0^+}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx.$$

Ta bảo tích phân suy rộng hội tụ nếu vế phải tồn tại (hữu hạn) và phân kì trong trường hợp còn lại.

Tương tự nếu $f(x)$ khả tích trên $[a + \eta ; b]$, $\forall \eta \in (0 ; b - a)$, và $f(a + 0)$ không bị chặn (khi đó a là điểm bất thường), khi đó $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to 0^+}\int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$

Tích phân suy rộng hội tụ $\Leftrightarrow$ vế phải tồn tại (hữu hạn)

- Nếu $f(x)$ không bị chặn tại $x = c \in (a ; b)$, khi đó ta có $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ

Ví dụ 1. Tính hoặc xét sự phân kì

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\alpha}}$ **(HT với $\alpha < 1$, PK với $\alpha \geq 1$)** **b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **d)** $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ **e)** $\int\limits_0^1 x\ln x dx$

f) $\int\limits_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$ **g)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **h)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$

i) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ **k)** $\int\limits_0^1 (\ln x)^n dx,\quad n \in \mathbb{N}$ **l)** $\int\limits_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}.\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. Các dấu hiệu hội tụ

a) $f(x) \geq 0$

Định lí. $f(x)$ có b là điểm bất thường, có $f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in (a ; b - \varepsilon)$. Khi đó

Nếu $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)\,dx$ phân kì.

Hệ quả. $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0 ; +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ và $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nếu $k = 0$, từ $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $k = +\infty$, từ $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kì $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ phân kì.

b) *f*(*x*) có dấu thay đổi.

Nếu $\int_a^b |f(x)|\,dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ, khi đó $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ tuyệt đối

Nếu $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ còn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ phân kì thì ta nói $\int_a^b f(x)\,dx$ bán hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì của tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ **c)** $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ **d)** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

e) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$ **f)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$ **g)** $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{e^{\sin x}-1}\,dx$ **h)** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$

i) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **k)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$ **l)** $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$

Chú ý. Khi *f* có điểm bất thường là *a* thì $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$; khi đó tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ cả hai tích phân suy rộng ở vế phải cùng hội tụ

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kì của các tích phân sau:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-1}}$ **(HT)** **b)** $\int_0^{\infty} \frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\ln\left(1+2\sqrt{x}\right)}\,dx$ **(HT)**

c) $\int_0^{\infty} \frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3\ln\left(1+3\sqrt{x}\right)}\,dx$ **(HT)** **d)** $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{4^x-2^x}\,dx$ **(HT)** **e)** $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{9^x-3^x}\,dx$ **(HT)**

f) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$ **g)** $\int_2^{\infty} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{(x-2)^3}}\,dx$ **(HT)** **h)** $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{(x-1)^4}}\,dx$ **(HT)**

i) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{x\sqrt{x}+x^6}\,dx$ **(HT)** **k)** $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^3+e^x)}{x\sqrt{x}+x^4}\,dx$ **(HT)**

Ví dụ 4. Tính

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ **b)** $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$ **c)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$, $0 < \alpha < 2\pi$

Nhận xét. Liên hệ giữa hai loại tích phân suy rộng ?

§4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Sơ đồ tổng tích phân, vi phân

1) Sơ đồ tổng tích phân. Giả sử cần tính $A(x)$, $x \in [a\,;\,b]$, ngoài ra $A(x)$ thoả mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ sau:

+) Chia $[a\,;\,b]$ thành n phần bởi các điểm chia $x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \equiv b$

+) Phân tích A thành tổng $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, ở đó A_i là đại lượng A trên Δx_i

+) Tìm hàm số $f(x)$ sao cho $A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $\xi_i \in [x_{i-1}\,;\,x_i]$

+) Tính gần đúng đại lượng A: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

+) Sử dụng định nghĩa tích phân, có $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong

2) Sơ đồ vi phân. Cần tính $A(x)$, $x \in [a\,;\,b]$, ngoài ra $A(x)$ thoả mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ vi phân:

+) Lấy $x \in [a\,;\,b]$, lấy $x + dx$

+) Tính $A(x)$, $A(x + dx)$

+) Tìm phần chính bậc nhất dA của ΔA

+) Lấy tích phân của dA từ a đến b

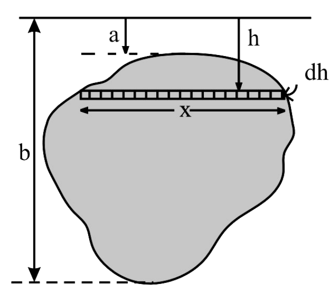
Ví dụ 2. Cho điện tích e_1 đặt ở gốc O, tính công của lực đẩy F sản ra do điện tích e_2 di chuyển từ điểm M_1 có hoành độ r_1 đến điểm M_2 có hoành độ r_2 trên trục hoành Ox

+) Gọi $A(x)$ là công lực đẩy F sinh ra do e_2 di chuyển từ M_1 đến $M(x)$

+) Ví dx khá bé nên coi F không đổi trên $[x\,;\,x + dx]$ và bằng $\dfrac{e_1e_2}{x^2}$

+) $dA = \dfrac{e_1e_2}{x^2}\,dx$

+) $A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{e_1e_2}{x^2}\,dx = e_1e_2\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$



Ví dụ 3. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình

$F = \int_a^b whx\,dh$, ở đó w là trọng lượng riêng của nước $= \dfrac{1}{32}$ tấn/(ft)^3

Ví dụ 4. Công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!