TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

BK – ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

ĐỀ TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH 2

NHÓM NGÀNH 1 + 2

TẬP 1: GIỮA KỲ

THỰC HIỆN: TEAM GIẢI TÍCH 2

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay, với hình thức thi đổi mới từ thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm, chính vì vậy nhiều bạn sinh viên sẽ gặp khó khăn trong việc ôn tập. Trong tình hình đó, nhóm "BK – ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI" đã biên soạn "BỘ ĐỀ TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH 2" để giúp các bạn thuận tiện hơn trong việc ôn tập.

Do thời gian cấp bách nên việc biên soạn tài liệu không thể tránh được những sai sót. Mọi ý kiến đóng góp của bạn đọc xin gửi về fanpage "BÁCH KHOA LEARNING".

Nhóm tác giả: Team GIẢI TÍCH 2 nhóm BK – ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

(Admin: Đỗ Tuấn Cường, Đinh Tiến Long, Phạm Thanh Tùng, Trần Trung Dũng, Đỗ Ngọc Hiếu, Nguyễn Thu Hiền, Nguyễn Minh Hiếu)

PHẦN I: CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

I. HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. GIỚI HẠN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

A.0 B.1 C.2 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 2. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

A.0 B.1 C.2 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 3. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

A.0 B.$+\infty$ C. $-\infty$ D. $\frac{-1}{2}$

Câu 4. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

A.$\frac{1}{2}$ B. $\frac{-1}{2}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 5. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

A.$\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 6. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-xy^2}{x^3+y^3}$

A.$\frac{1}{2}$ B. $\frac{-1}{2}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 7. Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y.(e^{3x}-1)-3x.(e^y-1)}{x^2+y^2}$

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 8. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

A.1 B. $\frac{1}{e}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 9. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

A.1 B. $\frac{1}{e}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 10.Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$

A.1 B. -1 C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 11.Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

A.1 B. $\frac{1}{e}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

Câu 12.Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}$

A.1 B. $\frac{1}{e}$ C.0 D. Không tồn tại giới hạn

1.2. KHẢO SÁT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1: Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2, \text{ nếu } x\neq 0 \\ 0, \text{ nếu } x=0\end{cases}$

Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại $B(0,1)$.

A. $f(x,y)$ liên tục tại $B(0,1)$ B. $f(x,y)$ không liên tục tại $B(0,1)$

Câu 2. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y-y^2x}{x^2+y^2}, \text{ nếu } x^2+y^2\neq 0 \\ a \quad ,\text{nếu } x^2+y^2=0\end{cases}$**. Tìm a để hàm số liên tục tại (0; 0).**

A.0 B.1 C.2 D. $\forall a\in R$

Câu 3. Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}\right), \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad\quad, \text{nếu } (x,y) = 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại $B(0,0)$.

A. $f(x,y)$ liên tục tại $B(0,1)$

B. $f(x,y)$ không liên tục tại $B(0,1)$

Câu 4. Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-x^2}{x^2+y^2}, \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{nếu } (x,y) = 0 \end{cases}$

Khảo sát sự liên tục của hàm số $f(x,y)$ tại $B(0,0)$.

A. $f(x,y)$ liên tục tại $B(0,1)$

B. $f(x,y)$ không liên tục tại $B(0,1)$

1.3. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Câu 1. Đạo hàm riêng theo biến x của hàm z = ln(x + $\sqrt{x^2+y^2}$)

A. $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

B. $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

C. $z'_x = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

D. $z'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Câu 2. Đạo hàm riêng theo biến y của hàm z = ln(x + $\sqrt{x^2+y^2}$)

A. $z'_y = \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

B. $z'_y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

C. $z'_y = \frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

D. $z'_y = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

Câu 3. Vi phân toàn phần của hàm z = ln(x + $\sqrt{x^2+y^2}$)

A. $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.dy$

B. $dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.dy$

C. $dz = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.dy$

D. $dz = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.dy$

Câu 4. Đạo hàm riêng theo biến y của hàm u = x^{y^2z}

A. $u'_y = x^{y^2z}.lnxyz$

B. $u'_y = x^{y^2z}.lnxy^2z$

C. u'$_y$ = $x^{y^2 z}.lnx2yz$

D. u'$_y$ = $x^{yz}.lnxyz$

Câu 5. Vi phân toàn phần của hàm u = $\boldsymbol{e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}}$ **tại (1; -1; 1)**

A. $du(1;-1;1) = \frac{2}{e^{-4}.16}$.dx + $\frac{-4}{e^{-4}.16}$.dy - $\frac{2}{e^{-4}.16}$.dz

B. $du(1;-1;1) = \frac{-2}{e^{-4}.16}$.dx + $\frac{4}{e^{-4}.16}$.dy - $\frac{2}{e^{-4}.16}$.dz

C. $du(1;-1;1) = \frac{2}{e^{-4}.16}$.dx + $\frac{4}{e^{-4}.16}$.dy + $\frac{2}{e^{-4}.16}$.dz

D. $du(1;-1;1) = \frac{2}{e^{-4}.16}$.dx + $\frac{-4}{e^{-4}.16}$.dy + $\frac{2}{e^{-4}.16}$.dz

Câu 6. Tính z'_x, z'_y của hàm số $z = \int_{xy}^{\frac{x}{y}} t^2 \sin 2t dt$

A. $\begin{cases} z'_x = \frac{-1}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\sin\frac{2x}{y} - y\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \\ z'_y = \frac{-x}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\sin\frac{2x}{y} - x\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \end{cases}$

B. $\begin{cases} z'_x = \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\sin\frac{2x}{y} + y\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \\ z'_y = \frac{-x}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\sin\frac{2x}{y} + x\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \end{cases}$

C. $\begin{cases} z'_x = \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\sin\frac{2x}{y} + y\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \\ z'_y = \frac{x}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\sin\frac{2x}{y} - x\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \end{cases}$

D. $\begin{cases} z'_x = \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\sin\frac{2x}{y} - y\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \\ z'_y = \frac{-x}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2\sin\frac{2x}{y} - x\cdot(xy)^2\cdot\sin 2xy \end{cases}$

Câu 7. Vi phân toàn phần của hàm u = $\boldsymbol{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}}$

A. $du = -zx^2(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dx$ +z y $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dy$ + $(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}dz$

B. $du = -zx(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dx +$ z y $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dy$ + $xy(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}dz$

C. $du = -zx(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dx -$ z y $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dy$ + $(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}dz$

D. $du = -zx(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dx +$ z y $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}dy$ $-(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}dz$

Câu 8. Cho hàm số f(x,y) = $\begin{cases} \boldsymbol{y.artan(\frac{x}{y})^2}, & \textbf{nếu } \boldsymbol{y \neq 0} \\ \boldsymbol{0}, & \textbf{nếu } \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$

Tính $f'_y(1,0)$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

Câu 9. Tính đạo hàm riêng z'(x, y) của hàm số:

$$z = \begin{cases} arctan\frac{y}{x}\ khi\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ khi\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A. $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} z'_x = +\infty \\ z'_y = +\infty \end{cases}$

B. $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = +\infty \end{cases}$

D. $\begin{cases} z'_x = +\infty \\ z'_y = 0 \end{cases}$

1.4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

Câu 1. Xác định đạo hàm của hàm hợp z = u^v với u = cosx ; v = sinx

A. z' = $v.u^{v-1}$.sinx + $u^v.lnu.cosx$

B. z' = $v.u^{v-1}$.(-sinx) - $u^v.lnu.cosx$

C. z' = $v.u^{v-1}$.(-sinx) + $u^v.lnu.cosx$

D. z' = $v.u^{v-1}$.sinx - $u^v.lnu.cosx$

Câu 2. Xác định đạo hàm của hàm hợp z = $u^2 - 2v^2$ với u = cosx ; v = sinx

A. z' = -3.sin2x

B. z' = -3.cos2x

C. z' = 3.sin2x

D. z' = 3.cos2x

Câu 3. Xác định đạo hàm của hàm hợp z = ln($u^2 + v^2$) với u = x.y và v = $\frac{x}{y}$

A. $\begin{cases} z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2}.x + \frac{2v}{u^2+v^2}.\frac{1}{y} \\ z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2}.y + \frac{2v}{u^2+v^2}.(\frac{-x}{y^2}) \end{cases}$

B. $\begin{cases} z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2}.y + \frac{2v}{u^2+v^2}.\frac{1}{y} \\ z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2}.x + \frac{2v}{u^2+v^2}.(\frac{-x}{y^2}) \end{cases}$

C. $\begin{cases} z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2}.y + \frac{2v}{u^2+v^2}.\frac{x}{y} \\ z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2}.x + \frac{2v}{u^2+v^2}.(\frac{x}{y^2}) \end{cases}$

D. $\begin{cases} z'_x = \frac{2u}{u^2+v^2}.y - \frac{2v}{u^2+v^2}.\frac{1}{y} \\ z'_y = \frac{2u}{u^2+v^2}.x - \frac{2v}{u^2+v^2}.(\frac{-x}{y^2}) \end{cases}$

1.5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

Câu 1. Xác định đạo hàm của hàm ẩn sau $x^3 + 2y^3 + 3x^2y = 2$

A. $y'_x = -\frac{x^2-2xy}{2y^2-x^2}$

B. $y'_x = \frac{x^2+2xy}{2y^2-x^2}$

C. $y'_x = \frac{x^2-2xy}{2y^2-x^2}$

D. $y'_x = -\frac{x^2+2xy}{2y^2-x^2}$

Câu 2. Cho $x^2.arctanx + 2xy^2 + y^4 + 2z^3 = 1$. Tính z'_x và z'_y

A. $\begin{cases} z'_x = \frac{2x.arctanx+\frac{x^2}{1+x^2}+2y^2}{6z^2} \\ z'_y = \frac{2xy+2y^3}{3z^2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} z'_x = \frac{2x.arctanx-\frac{x^2}{1+x^2}-2y^2}{6z^2} \\ z'_y = -\frac{2xy+2y^3}{3z^2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} z'_x = -\frac{2x.arctanx+\frac{x^2}{1+x^2}+2y^2}{6z^2} \\ z'_y = -\frac{2xy+2y^3}{3z^2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} z'_x = -\frac{2x.arctanx-\frac{x^2}{1+x^2}-2y^2}{6z^2} \\ z'_y = \frac{2xy+2y^3}{3z^2} \end{cases}$

Câu 3. Cho hàm số $x^3 - y^3 + 3xy - 13 = 0$. Xác định hàm ẩn y = y(x). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm ẩn này tại điểm A(-1; -2)

A. y = $-\frac{1}{5}.(x+1)-2$

B. y = $\frac{1}{5}.(x+1)-2$

C. y = $\frac{1}{5}.(x+1)+2$

D. y = $-\frac{1}{5}.(x+1)+2$

Câu 4. Cho hàm ẩn z=z(x,y) được xác định từ phương trình sau

$$\boldsymbol{z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}}$$

Tính $\boldsymbol{x^2z'_x+\frac{1}{y}z'_y}$ =?

A. $\frac{1}{z}$ B. $\frac{-1}{z}$ C. $\frac{-1}{z^2}$ D. $\frac{1}{z^2}$

1.6. TÍNH GẦN ĐÚNG NHỜ VI PHÂN

Câu 1. Tính gần đúng giá trị sau nhờ vi phân A = $(1{,}02)^3.(0.97)^2$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 2. Tính gần đúng giá trị sau nhờ vi phân A = $\boldsymbol{\sqrt[3]{(1,02)^2+(0,05)^2}}$

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{76}{75}$

Câu 3. Tính gần đúng giá trị sau nhờ vi phân A = $\boldsymbol{\sqrt[3]{2.(2,98)^3-3.(4,01)^2+2}}$

A. 1,76 B. 1,89 C. 1,93 D. 1,67

Câu 4. Tính gần đúng giá trị sau nhờ vi phân S = $\boldsymbol{\sqrt{(3,01)^2+(3,99)^2}}$

A. 2,76 B. 3,29 C. 4,988 D. 1,58

1.7. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1. Cho hàm số z = $\boldsymbol{x^2+xy+y^2-2x-y}$. Xác định điểm cực đại và cực tiểu của hàm số nếu có.

A. Hàm số có một điểm cực đại M(1; 0)

B. Hàm số có một điểm cực tiểu M(1; 0)

C. Hàm số có một điểm cực đại M(-1; 0)

A. Hàm số có một điểm cực tiểu M(0; -1)

Câu 2. Cho hàm số z = $2x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2$. Điểm N(1; 0) là điểm cực đại hay cực tiểu của hàm số và xác định z_{max}; z_{min} nếu có.

A. N(1; 0) là điểm cực tiểu với f_{min} = -2

B. N(1; 0) là điểm cực đại với f_{min} = 2

C. N(1; 0) là điểm cực đại với f_{min} = 4

D. N(1; 0) là điểm cực tiểu với f_{min} = 2

Câu 3. Cho hàm số z = $2x^2 + 3y^3 - e^{-(x^2+y^2)}$. Xác định điểm cực đại và cực tiểu của hàm số nếu có.

A. M(0; 0) là điểm cực tiểu

B. M(0; 0) là điểm cực đại

C. N(1; 0) là điểm cực tiểu

D. N(1; 0) là điểm cực đại

Câu 4. Cho hàm số $z = 2x^2 + y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Hàm số trên có bao nhiêu điểm cực đại và điểm cực tiểu.

A. 1 cực đại và 3 cực tiểu

B. 2 cực đại và cực tiểu

C. 3 cực đại và 1 cực tiểu

D. 3 cực đại

Câu 5. Tìm cực trị của hàm số $z = \frac{x}{4} + \frac{y}{3}$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Điểm $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực đại hay cực tiểu của hàm số và xác định giá trị z tại điểm M.

A. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực đại và $z(M) = \frac{1}{2}$

B. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực tiểu và $z(M) = \frac{5}{6}$

C. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực đại và $z(M) = \frac{5}{12}$

D. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực tiểu và $z(M) = \frac{5}{12}$

Câu 6. Cho hàm số sau: z= $x^3 + y^3 + (x + y)^2$. Hàm số trên có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

Câu 7. Cho hàm số sau $z = 2x^2 + xy^2 + y^3 + 2$. Hàm số trên có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

1.8. KHAI TRIỂN TAYLOR

Câu 1. Viết khai triển Taylor của hàm số sau tại điểm M(1; 2)

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 2x + 2y + 1}$$

A. $f(x,y) = 14 + 3(x-1) + 7(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + (y-2)^2$

B. $f(x,y) = 14 + 6(x-1) + 7(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$

C. $f(x,y) = 7 + 6(x-1) + 14(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$

D. $f(x,y) = 7 + 6(x-1) + 14(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$

Câu 2. Viết khai triển Taylor của hàm số sau tại điểm M(0; 1)

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + x^2y + y^3}$$

A. $f(x,y) = 1 + 3(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + 3(y-1)^2 + x^3 + x^2(y-1) + (y-1)^3$

B. $f(x,y) = 1 - 3(y-1) + \frac{1}{2}x^2 - 3(y-1)^2 + x^3 - x^2(y-1) + (y-1)^3$

C. $f(x,y) = 1 + 3(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + 3(y-1)^2 + x^3 + x^2(y-1) + \frac{1}{6}(y-1)^3$

D. $f(x,y) = 1 - 3(y-1) + \frac{1}{2}x^2 - 3(y-1)^2 + x^3 - x^2(y-1) + \frac{1}{6}(y-1)^3$

1.9. TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Tìm min, max của $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ với $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$

A. $z_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, z_{min} = 0$

B. $z_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_{min} = 0$

C. $z_{max} = \frac{1}{2}, z_{min} = -1$

D. $z_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, z_{min} = \frac{-1}{2}$

Câu 2. Tìm GTLN, GTNN của $z = x^2 - 9y^2$, trong miền hình elip $\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1$

A. $z_{max} = 9, Z_{min} = -9$

B. $z_{max} = 3, Z_{min} = -3$

C. $z_{max} = 3, Z_{min} = -9$

D. $z_{max} = 9, Z_{min} = -3$

Câu 3.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong miền ΔOAB với O(0,0);A(7,0);B(0,7) của

$$z = x^3 + 2y^2 + 3xy - 13x - 18y$$

A. $z_{max} = 252;\ z_{min} = -\frac{81}{2}$

B. $z_{max} = 64;\ z_{min} = -\frac{1}{2}$

C. $z_{max} = 212;\ z_{min} = \frac{1}{2}$

D. $z_{max} = 252;\ z_{min} = -\frac{1}{2}$

II. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN

Câu 1. Tìm hình bao của họ đường cong $c(y - c) = x^2$, c là tham số.

A. $y = x$

B. $y = -2x$

C. $y = 2x$

D. $y = \pm 2x$

Câu 2. Phương trình pháp diện tại $A\left(\frac{\pi}{4}; 1; 1\right)$ của đường $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}.\cos t \\ z = \sqrt{2}.\sin t \end{cases}$ là :

A. $x + y + z = 0$

B. $x - y + z = \frac{\pi}{4}$

C. $y - z = \frac{\pi}{4}$

D. $x + y - z = \frac{\pi}{4}$

Câu 3. Phương trình tiếp diện tại $A(1; 1; -1)$ của mặt $z = x^2 - 3xy + y^2$ là :

A. $x + y + z = 1$

B. $x + y - z = 1$

C. $x + y - z + 1 = 0$

D. $x + y + z = 3$

Câu 4. Tính độ cong của đường $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ tại điểm $t = -1$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{8}$

C. 1

D. $\frac{5}{8}$

Câu 5. Viết phương trình tiếp diện của mặt $z = 4x^2 - y^2 + 2y$ tại $(-1; 2; 4)$:

A. $8x + 2y + z = 0$ B. $8x + 2y - z = 0$
C. $x + 2y + z = 7$ D. $4x + 2y - z + 4 = 0$

Câu 6. Viết phương trình tiếp diện của mặt cong $z = e^{x^2 - y^2}$ tại $(1; -1; 1)$:

A. $2x + 2y - z + 1 = 0$ B. $x + 2y - z + 2 = 0$
C. $2x - 2y + z - 5 = 0$ D. Các câu trả lời đều sai

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$:

A. $x - 2y + 1 = 0$ B. $2x + y - 3 = 0$
C. $2x - y + 3 = 0$ D. $x - y + 1 = 0$

Câu 8. Viết phương tình pháp tuyến của đường cong $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại điểm $M(8; 1)$

A. $x + 2y - 10 = 0$ B. $2x + y + 5 = 0$
C. $2x - y - 15 = 0$ D. $x - 2y + 10 = 0$

Câu 9. Tính độ cong tại điểm $M(1; 0; -1)$ của đường là giao của mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$

và mặt phẳng $x - 3z = 4$

A. 0 B. 1
C. 2 D. 9

Câu 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đường $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm A(1,3,4) :

A. $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$ B. $12x - 4y + 3z - 12 = 0$
C. $\frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{4}$ D. Các đáp án đều sai

III. TÍCH PHÂN BỘI & ỨNG DỤNG

3.1. TÍCH PHÂN KÉP

Câu 1: *Tính* $\iint_D xydxdy$ với D được giới hạn bởi $x + y = 4$ *và* $x^2 = 2y$

A.90 B.-90 C.-72 D.72

Câu 2:$Tính\ \iint_D 2ydxdy\ \ với\ D\ xác\ định\ bởi\ x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$

A.$\frac{1}{3}$ B.$\frac{1}{6}$ C.$\frac{2}{3}$ D.$\frac{4}{3}$

Câu 3: $Tính\ \int_0^1 dx \int_2^3 (x^2\, y - 2y^2)dy$

A.$-\frac{62}{6}$ B.$\frac{72}{7}$ C.$-\frac{71}{6}$ D.$\frac{62}{6}$

Câu 4:$\int_0^1 dx \int_x^1 \sin(y^2)\, dy = \frac{a-cosb}{c}.Tính\ a - b + c$

A.0 B.1 C.2 D.3

Câu 5:$Tính\ \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ với\ D\ xác\ định\ bởi\ x^2+y^2\le x; y\ge 0$

A.$\frac{1}{15}$ B.$\frac{2}{15}$ C.$\frac{4}{15}$ D.$\frac{8}{15}$

Câu 6:$Tính\ \iint_D (2x+\sin y)dxdy\ \ với\ D: (x-2)^2+y^2\le 1$

A.2π B.4π C.6π D.8π

Câu 7: $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3}=\frac{a}{b}+lnc, D: x\le x^2+y^2\le 2x\,, -x\le y\le 0.\ \frac{a}{b}\,tối\ giản.$

Tổng a+b+c=?

A.20 B.21 C.22 D.23

Câu 8: $Tính\iint_D \sqrt{2x-x^2-y^2}dxdy\ \ với\ miền\ D$ là $miền\ x^2+y^2\le 2x, y\ge 0$

A.$\frac{\pi}{4}$ B.$\frac{\pi}{3}$ C.$\frac{\pi}{2}$ D.π

***Câu* 9**: $Tính\ \iint_D y^2(6x-y)dxdy, với\ D\ giới\ hạn\ bởi: x=0, x+|y|=1.$

A.$\frac{1}{5}$ B.$\frac{1}{3}$ C.3 D.1

Câu 10: $Tính\iint_D (x+y)^2dxdy\ với\ miền\ D: 5x^2+6xy+5y^2\le 4$

A.$\frac{\pi}{8}$ B.π C.$\frac{\pi}{2}$ D.$\frac{\pi}{4}$

Câu 11: $Miền\ D\ giới\ hạn\ bởi\ x=1, y=0,\ x=y. \iint_D \frac{dxdy}{x+y+1}=\frac{a}{2}lnb-cln2$

$Tổng\ a+b+c=?$

A.5 B.6 C.7 D.8

Câu 12: $Miền\ D: x^2+y^2\le 6. \iint_D \frac{3x^2-y^2+1}{x^2+y^2+1}dxdy=a\pi+lnb.$

Tổng a+b=?

A.6 B.7 C.8 D.9

3.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Câu 1: $Tính\ tích\ phân\ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)\, dy$

A.$\frac{1}{3}$ B.$\frac{2}{3}$ C.1 D.$\frac{4}{3}$

Câu 2: $Tính\ \iiint_V (3x^2-2y)\, dxdydz\ với\ V: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x^2$

A.$\frac{3}{10}$ B.$\frac{1}{10}$ C.$\frac{7}{10}$ D.$\frac{9}{10}$

Câu 3: $Tính\ \iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz, V\ giới\ hạn\ bởi\ x^2+y^2-2z=0, z=2$

A.$\frac{64}{15}$ B.$\frac{64\pi}{15}$ C.$\frac{16\pi}{3}$ D.$\frac{24\pi}{5}$

Câu 4: $\int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_{z^2}^1 xze^{xy^2} dy = \frac{e}{a} - \frac{b}{c}. a+b+c=?$

A.6 B.7 C.8 D.9

Câu **5**: $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+2)^2} = \frac{a}{b} + c.\ln 2 - d.\ln 3, V: \begin{cases} x+y+z \le 1 \\ x,y,z \ge 0 \end{cases}$

$a+b+c-d=?$

A.10 B.11 C.12 D.13

Câu 6: $\iiint_V (4x^2+y^2+z^2+2xy)\, dxdydz = \frac{a\pi}{b}, V: 4x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 0.$

$a-b=?$

A.2 B.3 C.11 D.7

Câu 7: $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \frac{\pi}{a}, V: x^2+y^2+z^2 \le y. Tìm\ a?$

A.9 B.12 C.8 D.10

Câu 8: $, Miền\ V: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}. \iiint_V z\cos(x^2+y^2)\, dxdydz$

$= \pi(a - \cos b). Tổng\ a+b=?$

A.3 B.4 C.5 D.6

Câu 9: $Miền\ V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 8 \\ x^2+y^2 \le 2 \end{cases}. \iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz = \frac{a\sqrt{8} - b\sqrt{6}}{15}\pi.$

$b - a = ?$

A.16 B.42 C.24 D.8

Câu 10: *Tính* $\iiint_V (x + y - 2z)^2 dxdydz = \frac{a\pi}{b}$, *với* $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

$a - b = ?$

A.-3 B.4 C.1 D.-2

3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI

***Câu* 1:** *Diện tích phần mặt* $z = x^2 + y^2 + 2$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 9$ *là*

$\frac{a\sqrt{a} - b}{c}\pi$. *Tổng* $a + b + c = ?$

A.32 B.36 C.44 D.48

Câu 2: *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi* $y = \sqrt{3}x, y = 0, x^2 + y^2 = 2x$ *là*

$\frac{\pi}{a} + \frac{\sqrt{b}}{c}$. *Tổng* $a + b + c = ?$

A.7 B.8 C.9 D.10

Câu 3: *Thể tích miền giới hạn bởi* $x = 1 + y^2 + z^2$ *và* $x = 2(y^2 + z^2)$ *là*

$\frac{\pi}{a}$. *Vậy* $a =$

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{5}{4}$ C.3 D.2

***Câu* 4:** *Miền D giới hạn bởi* $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$. $S_D = \frac{a\pi}{b}$. *Tính* $b - a$?

A.3 B.4 C.5 D.7

Câu 5: *Tính vật thể V xác định bởi* $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$

A.$\frac{16\pi}{3}$ B.$\frac{32\pi}{3}$ $C.\frac{64\pi}{3}$ D.$\frac{35\pi}{3}$

Câu 6: *Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt* $z = x^2 + 3y^2$ và

$z = 4 - 3x^2 - y^2$

A.$\frac{16\pi}{3}$ B.$\frac{8\pi}{3}$ C.2π D.4π

IV. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ:

4.1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ

Câu 1: Tính $\int_0^{\pi/2} \ln(1+y sin^2 x)dx$ $với\ y>1$

A.$\pi \ln\left(1+\sqrt{y+1}\right) - \pi ln2$

B. $\pi \ln\left(1+\sqrt{y+1}\right) + \pi ln2$

C. $\pi - \pi ln2$

D.1

Câu 2: Tính giới hạn sau:

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt{x^3+y^3}dx$$

A.$\frac{3}{5}$ B.0,4 C. $\frac{1}{5}$ D. 0,8

Câu3: Tính giới hạn:

$$\lim_{y \to 0} \int_{-1}^1 \frac{x^{2015}\cos(xy)}{1+x^2+y^2}dx$$

A. .$\frac{3}{7}$ B. .$\frac{3}{5}$ C. .$\frac{1}{3}$ D. .$\frac{2}{3}$

Câu 4: Tính :

$$\lim_{y \to 0} \int_{cosy}^{siny} \frac{arccot(x+y)}{1+x^2+y^2}dx$$

A. .$\frac{-3\pi^2}{32}$ B. .$\frac{3\pi}{16}$ C. .$\frac{-\pi}{32}$ D. .$\frac{3\pi^2}{32}$

Câu 5: Cho I(y)= $\int_y^1 \sin(x^2+xy+y^2)dx$ $.Tính\ I'(0)$

A. .$\frac{sin1}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Câu 6: Cho I(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 sin^2 x + cos^2 x)\ dx$. Tính $I'(1)$

A.0 B. . $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D.2

Câu 7: Tìm

$$\lim_{y\to 1}\int_0^y \frac{arctanx}{x^2+y^2}dx$$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi^2}{32}$ C. $\frac{-\pi^2}{32}$ D. $\frac{-3\pi^2}{32}$

Câu 8: Tính

$$\lim_{y\to 0}\int_{siny}^{cosy} \frac{arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}dx$$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{-\pi^2}{32}$ C. $\frac{\pi^2}{32}$ D. $\frac{-3\pi^2}{32}$

Câu 9: Tính $\lim_{y\to 1}\int_y^{2y} x^2\sin(\pi yx)\,dx$.

A. $\frac{2-5\pi}{\pi^2}$ B. $\frac{2+5\pi}{\pi^2}$ C.2 D. . $\frac{\pi}{4}$

Câu 10 (Đề cuối kì- 20152): Tính giới hạn

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1} \frac{x^{2020}+y^{2021}}{1+x^2+2021y^2}dx$$

4.2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

Câu 1: Tính I(y)= $\int_0^{+\infty}\frac{\text{arctan(x+y)}}{x^2+1}dx$

A. $\frac{2\pi}{y^2+y}$ B. $\frac{2\pi}{y^2+y}$ C. $\frac{2}{y^2+y}$ D. $\frac{2\pi}{y^2}$

Câu2: Tính $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

A. -lna+lnb B. ln(ab) C. lna – lnb D. 1

Câu 3: Tính

$$\lim_{y\to 0}\int_0^y \frac{cosxy}{x^2+1}dx$$

A. $\pi/2$ B. 0 C. - $\pi/2$ D.2

Câu 4: Tính

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(bx)-\sin(cx)}{x}dx$$

A. arctan($\frac{b}{a}$) - arcrtan($\frac{c}{a}$) C. arctan($\frac{b}{c}$) - arcrtan($\frac{c}{a}$)

B. 0 D. arctan($\frac{c}{a}$) -arcrtaln($\frac{c}{b}$)

Câu 5: Tính $\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x} dx$

A. $\ln(\frac{ln3}{ln2})$ B. $\ln(\frac{ln2}{ln3})$ C.0 D. ln6

PHẦN II: LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

I. HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. GIỚI HẠN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1:

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Nguyên lý kẹp: $0 \le |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \le |\frac{x^2y}{x^2}| = |y|$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

- ⇨ I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Đáp án A

Câu 2:

I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Đặt y = kx

- ⇨ I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.kx}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k}{1+(k)^2}$ = f(k)
- ⇨ Không tồn tại giới hạn

Đáp án D

Câu 3:

I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Theo bất đẳng thức Cô – si: $x^2 + y^2 \ge$ 2xy

Ta có: $0 \le |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \le |\frac{xy}{\sqrt{2xy}}| = |\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}|$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}| = 0$

- ⇨ I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Đáp án A

Câu 4:

I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ Đặt y = kx

=> I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-(k)^2}{1+(k)^2}$ =f(k)

=> Không tồn tại giới hạn

Đáp án D

Câu 5:

I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y).(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}$

Ta có: $0 \le |\frac{(x-y).(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}| \le |\frac{(x-y).(x^2+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+y^2)}{x^2+y^2}|$ = $|\frac{3}{2}$.(x-y)|

Mà: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{3}{2}$.(x-y)| = 0

⇨ I= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ = 0

Đáp án C

Câu 6:

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-xy^2}{x^3+y^3}$ Đặt y = kx

=> I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.kx-x.(kx)^2}{x^3+(kx)^3} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k-(k)^2}{1+(k)^3}$ = f(k)

=> Không tồn tại giới hạn

Đáp án D

Câu 7:

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y.(e^{3x}-1)-3x.(e^y-1)}{x^2+y^2}$

Sử dụng khai triển Maclaurin:

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y.\left(3x+\frac{9x^2}{2}+0(x^2)\right)-3x.(y+\frac{y^2}{2}+0(y^2))}{x^2+y^2}$

= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y.\left(\frac{9x^2}{2}\right)-3x.(\frac{y^2}{2})}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy.(\frac{9}{2}.x-\frac{3}{2}.y)}{x^2+y^2}$

Theo bất đẳng thức Cô – si: $x^2 + y^2 \ge$ 2xy

Ta có: $0 \le \left|\frac{xy.(\frac{9}{2}.x-\frac{3}{2}.y)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}.\left|\frac{(x^2+y^2).(\frac{9}{2}.x-\frac{3}{2}.y)}{x^2+y^2}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{9}{2}.x-\frac{3}{2}.y\right|$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}.\left|\frac{9}{2}.x-\frac{3}{2}.y\right| = 0$

⇨ I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y.(e^{3x}-1)-3x.(e^{y}-1)}{x^2+y^2} = 0$

Đáp án C

Câu 8: (Mẹo: Ở đây dạng hàm mũ nên có thể loại bỏ ngay được các giá trị ≤ 0 => loại C)

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2.ln(x^2+y^2)} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.(x^2+y^2).ln(x^2+y^2)}$

$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1.I_2}$

+ Xét: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Ta có: $0 \le \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y^2}{2xy}\right| = \left|\frac{xy}{2}\right|$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{2}\right| = 0$

+ Xét: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2).ln(x^2+y^2)$

Đặt: x^2+y^2 = t

Khi: $\begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$ => t → 0

⇨ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_2 = \lim\limits_{t\to 0} t.lnt = \lim\limits_{t\to 0} \frac{lnt}{\frac{1}{t}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to 0} (-t) = 0$

⇨ I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1.I_2} = e^{0.0} = 1$

Đáp án A

Câu 9:

Do $x \to 0, y \to 0$ nên $x^2y^2 \to 0, x^2+y^2 \to 0, \frac{1}{x^2+y^2} \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ là dạng vô định 1^{∞}

$\Rightarrow$ sử dụng $\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} \sim e$ với $u \to +\infty$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{x^2y^2}}\right)^{\frac{1}{x^2y^2}x^2y^2\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$= e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

Ta có: $|x^2+y^2| \geq |2xy|$ (Cauchy) $\Rightarrow \frac{1}{|x^2+y^2|} \leq \frac{1}{|2xy|} \Rightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y^2}{2xy}\right| = \left|\frac{xy}{2}\right|$

$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy}{2}\right| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{2}\right| = \left|\frac{0}{2}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ (định lý kẹp)

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^0 = 1$

Đáp án A

Câu 10:

I = $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y).(x^2+y^2)}{e^{x+y}.(x+y)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x+y}{e^{x+y}}.\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1.I_2$

Xét: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{e^{x+y}}$ Đặt x + y = t

Khi: $\begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$ => t → 0

⇨ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_1 = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{e^t} = 0$

Xét: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} I_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Ta có: $0 \leq \left|\frac{x^2+y^2}{x+y}\right| \leq \left|\frac{x^2+y^2+2xy}{x+y}\right| = |x+y|$

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| = 0$

⇨ I = 0

Đáp án C

Câu 11:

Do $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow 3x^2 \to 0, x^2+y^2 \to 0, \dfrac{1}{x^2+y^2} \to \infty \Rightarrow$ Dạng vô định 1^∞

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{3x^2}}\right)^{\frac{1}{3x^2}\cdot 3x^2 \frac{1}{x^2+y^2}} = e^{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}$$

Xét $(x,y) \to (0,0)$ theo phương $y = kx$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{3}{1+k^2} = \frac{3}{1+k^2}$$

Vậy với mỗi k khác nhau $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}$ tiến đến những giá trị giới hạn khác nhau.

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Đáp án D

Câu 12:

Do $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow x^2+y^2 \to 0$

$\Rightarrow \cos(x^2+y^2) - 1 = -[1-\cos(x^2+y^2)] \sim \dfrac{-(x^2+y^2)^2}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-(x^2+y^2)^2}{2} \frac{1}{x^2+y^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-(x^2+y^2)}{2} = 0$$

Đáp án C

1.2. KHẢO SÁT TÍNH LIÊN TỤC:

Câu 1:

$$\begin{cases} \text{Do } \dfrac{-\pi}{2} < \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \left|x \cdot \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right| \le \left|\dfrac{\pi}{2}x\right| \\ \text{Mà } \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left|\dfrac{\pi}{2}x\right| = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ liên tục tại $B(0,1)$.

Đáp án A

Câu 2:

$x^2 + y^2 = 0$ chỉ xảy ra khi $x = y = 0$.
Để $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = a$

Theo Cauchy: $x^2 + y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2|xy|}$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|\frac{2x^2y - y^2x}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{2x^2y - y^2x}{2xy}\right| = \left|\frac{2x - y}{2}\right|$$

Mà $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2x-y}{2}\right| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y - y^2x}{x^2 + y^2} = 0 \text{ (Kẹp)}$$

Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$ khi và chỉ khi $a = 0$

Đáp án A

Câu 3:

Xét theo phương $y = kx$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \sin\left(\frac{kx^2 + k^2x^2}{x^2 + k^2x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ kx\to 0}} \sin\left(\frac{k + k^2}{1 + k^2}\right) = \sin\left(\frac{k + k^2}{1 + k^2}\right)$$

Vậy với mỗi k khác nhau $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}\right)$ tiến đến những giá trị giới hạn khác nhau.

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số gián đoạn tại $(0,0)$

Đáp án B

Câu 4:

Với $(x,y) \in R^2 \setminus \{(0,0)\}$ thì hàm số $f(x,y)$ liên tục. Xét tính liên tục của hàm số

$f(x,y)$ tại $(0,0)$.

Khi $(x,y) \to (0,0)$, xét theo phương $y = kx$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{kx^2 - x^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k-1}{1+k^2}$$

Vậy với mỗi k khác nhau $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x^2}{x^2+y^2}$ tiến đến những giá trị giới hạn khác nhau.

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ Hàm số gián đoạn tại $(0,0)$
Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục với $(x,y) \in R^2 \setminus \{(0,0)\}$, gián đoạn tại $(0,0)$

Đáp án B

1.3. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Câu 1:

$z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Đáp án A

Câu 2:

$z'_y = \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$

Đáp án A

Câu 3:

$dz = z'_x.dx + z'_y.dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}.dy$

Đáp án A

Câu 4:

$u'_y = x^{y^2 z}.lnx.2.y.z$

Đáp án C

Câu 5:

u’$_x$ = $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $(\frac{-2x}{(x^2+2y^2+z^2)^2})$

u’$_y$ = $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $(\frac{-4y}{(x^2+2y^2+z^2)^2})$

u’$_z$ = $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $(\frac{-2z}{(x^2+2y^2+z^2)^2})$

⇨ du = $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $(\frac{-2x}{(x^2+2y^2+z^2)^2})$.dx + $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $\left(\frac{-4y}{(x^2+2y^2+z^2)^2}\right)$.dy + $e^{(x^2+2y^2+z^2)^{-1}}$. $(\frac{-2z}{(x^2+2y^2+z^2)^2})$

⇨ du(1; -1; 1) = $\frac{-2}{e^{-4}.16}$.dx + $\frac{4}{e^{-4}.16}$.dy - $\frac{2}{e^{-4}.16}$.dz

Đáp án B

Câu 6:

Đặt $u = \frac{x}{y}, v = xy \Rightarrow u'_x = \frac{1}{y}, u'_y = \frac{-x}{y^2}, v'_x = y, v'_y = x$

$+ z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = u'_x \cdot f(u) - v'_x \cdot f(v)$

$$= \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 \sin\frac{2x}{y} - y \cdot (xy)^2 \cdot \sin 2xy$$

$+ z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = u'_y \cdot f(u) - v'_y \cdot f(v)$

$$= \frac{-x}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 \sin\frac{2x}{y} - x \cdot (xy)^2 \cdot \sin 2xy$$

Đáp án D

Câu 7:

u’$_x$ = z. 2x. $\frac{-1}{2}$. $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$ = - z. x. $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$

u’$_y$ = - z. y. $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}$

u’$_z$ = $(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}$

⇨ du = - z. x. $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}.dx$ - z. y. $(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}.dy$ + $(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}.dz$

Đáp án C

Câu 8:

$$f'_y(1,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1,0+\Delta y) - f(1,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y \cdot \arctan\frac{1}{\Delta y} - 0}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \arctan \frac{1}{\Delta y}$$

Với $\Delta y \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta y} \to +\infty$

$$\Rightarrow \arctan \frac{1}{\Delta y} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \arctan \frac{1}{\Delta y} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f_y'(1,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \arctan \frac{1}{\Delta y} = \frac{\pi}{2}$$

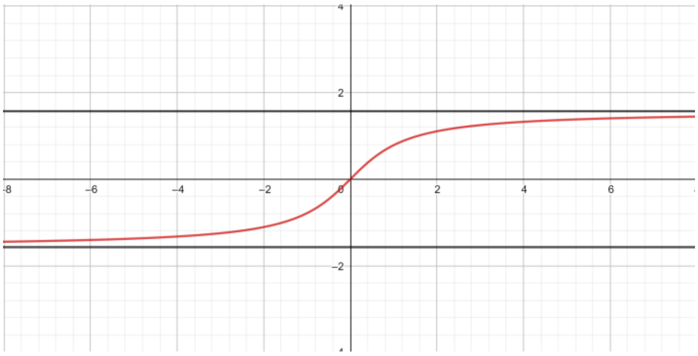
Đáp án A

Câu 9:

Sử dụng định nghĩa:

$$z'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{z(x,0) - z(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(0) - 0}{x - 0} = 0$$

$$z'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{z(0,y) - z(0,0)}{y - 0}$$



$$= \lim_{y \to 0} \frac{\arctan(\infty) - 0}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\pi}{2}}{y} = \infty$$

Đáp án B

1.4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

Câu 1:

$x^3 + 2y^3 + 3x^2y = 2$

F(x, y) = $x^3 + 2y^3 + 3x^2y - 2 = 0$

⇨ $\begin{cases} F'x = 3x^2 + 6xy \\ F'y = 6y^2 - 3x^2 \end{cases}$

- ⇨ $y'_x = -\frac{F'x}{F'y} = -\frac{x^2+2xy}{2y^2-x^2}$

Đáp án D

Câu 2:

Ta có: F(x, y, z) = $x^2.arctanx + 2xy^2 + y^4 + 2z^3 - 1 = 0$

- ⇨ $\begin{cases} f'_x = 2x.arctanx + \frac{x^2}{1+x^2} + 2y^2 \\ f'_y = 4xy + 4y^3 \\ f'_z = 6z^2 \end{cases}$
- ⇨ $z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{2x.arctanx+\frac{x^2}{1+x^2}+2y^2}{6z^2}$
- ⇨ $z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{2xy+2y^3}{3z^2}$

Đáp án C

Câu 3:

<u>PTTT:</u> y = y'(x_0).(x - x_0) + y_0

Có: $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ → Xác định y'(x_0)

Ta có: F(x, y, z) = $x^3 - y^3 + 3xy - 13 = 0$

- ⇨ $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y \\ f'_y = -3y^2 + 3x \end{cases}$
- ⇨ $y'_x = -\frac{F'x}{F'y} = \frac{x^2+x}{y^2-x}$
- ⇨ y'(-1) = $-\frac{1}{5}$
- ⇨ Pttt: y = $-\frac{1}{5}.(x+1) - 2$

Đáp án A

Câu 4:

- Đặt F(x,y,z) = $z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2}$ => $\begin{cases} F'_x = -\frac{2}{x^2} \\ F'_y = \frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}} \\ F'_z = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} \end{cases}$
- $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{\frac{2}{x^2}}{2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z+\frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}}$

- $x^2z'_x = \frac{2}{z.(2+\frac{1}{\sqrt{y^2-z^2}})}$; $\frac{1}{y}z'_y = \frac{\frac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}}{z.(2+\frac{1}{\sqrt{y^2-z^2}})}$
- $x^2z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{y^2-z^2}}}{z.(2+\frac{1}{\sqrt{y^2-z^2}})} = \frac{1}{z}$ (đpcm)

Đáp án A

1.5. TÍNH GẦN ĐÚNG NHỜ VI PHÂN

Câu 1:

Dạng: f(x, y) = $x^3.y^2$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} \Delta x = 0{,}02 \\ \Delta y = -0{,}03 \end{cases}$

⇨ ADCT: A ≈ f(1; 1) + f'$_x$(1; 1).0,02 + f'$_y$(1; 1).(−0,03)
= 1 + 3. 0,02 + 2. (−0,03)
= 1

Đáp án A

Câu 2:

Dạng: f(x, y) = $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} \Delta x = 0{,}02 \\ \Delta y = 0{,}05 \end{cases}$

⇨ ADCT: A ≈ f(1; 1) + f'$_x$(1; 0).0,02 + f'$_y$(1; 0).0,05
= 1 + $\frac{2}{3}$.0,02 + 0
= $\frac{76}{75}$

Đáp án D

Câu 3:

Dạng: f(x, y) = $\sqrt[3]{2x^3 - 3y^2 + 2}$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} \Delta x = -0{,}02 \\ \Delta y = 0{,}01 \end{cases}$

⇨ ADCT: A ≈ f(3; 4) + f'$_x$(3; 4).(−0,02) + f'$_y$(3; 4).0,01
= 2 + 4,5.(−0,02) - 2.0,01
= 1,89

Đáp án B

Câu 4:

- Đặt f(x,y)=$\sqrt{x^2+y^2}$ => $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- Áp dụng công thức :

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \Delta x f'_x(x_0; y_0) + \Delta y f'_y(x_0; y_0)$$

Chọn $x_0 = 3; y_0 = 4;\ \Delta x = 0{,}01\ ; \Delta y = -0{,}01$

- $S \approx 4{,}988$

Đáp án C

1.6. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Câu 1:

z = $x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Ta có: z = f(x, y) = $x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Tập xác định: D = R^2

_ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

⇔$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ => Điểm dừng M(1; 0)

_ Ta có:

f''_{xx}= 2 ; $f''_{xy} = 0$; $f''_{yy} = 2$

⇨ Tại M(1; 0): $\begin{cases} A = f''_{xx}(1;0) = 2 \\ B = f''_{xy}(1;0) = 0 \\ C = f''_{yy}(1;0) = 2 \end{cases}$

⇨ $\Delta = B^2 - AC = 0^2 - 2.2 = -4 < 0$

Và A = 2 > 0 => M(1; 0) là điểm cực tiểu

Đáp án B

Câu 2:

Ta có: z = f(x, y) = $2x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2$

Tập xác định: D = R^2

_ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 8x^3 - 8x = 0 \\ f'_y = 4y^3 + 4y = 0 \end{cases}$

⇨ 2 điểm dừng: M(0; 0), N(1; 0)

_ Ta có: $\begin{cases} f''_{xx} = 24x^2 - 8 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = 12y^2 + 4 \end{cases}$

+ Tại M(0; 0): $\begin{cases} A = -8 \\ B = 0 \\ C = 4 \end{cases}$ => $\Delta = 32 > 0$ => Không phải cực trị

+ Tại N(1; 0): $\begin{cases} A = 16 \\ B = 0 \\ C = 4 \end{cases}$ => $\Delta = -64 < 0$ và A = 16 > 0

⇨ N(1; 0) là điểm cực tiểu với f_{min} = -2

Đáp án A

Câu 3:

Ta có: z = f(x, y) = $2x^2 + 3y^3 - e^{-(x^2+y^2)}$

1, Giải hệ phương trình: $\begin{cases} f'_x = 4x + 2x.e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f'_y = 9y^2 + 2y.e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$

⇨ Điểm dừng M(0; 0)

2, Ta có: $\begin{cases} f''_{xx} = 4 + 2.e^{-(x^2+y^2)} - 4x^2.e^{-(x^2+y^2)} \\ f''_{xy} = -4xy.e^{-(x^2+y^2)} \\ f''_{yy} = 18y + 2.e^{-(x^2+y^2)} - 4y^2.e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$

⇨ Tại M(0; 0): $\begin{cases} A = 6 \\ B = 0 \\ C = 2 \end{cases}$ => $\Delta = -12 < 0$ và A = 6 > 0

⇨ M(0; 0) là điểm cực tiểu với f_{min} = -1

Đáp án A

Câu 4:

Điều kiện $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$
Đặt hàm phụ: $L(x, y, k) = 2x^2 + y^2 + k(x^2 + y^2 - 1)$

Xét $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2kx = 0(1) \\ 2y + 2ky = 0(2)(*) \\ x^2 + y^2 = 1(3) \end{cases}$

TH1: (1) $\Leftrightarrow 2x(k+2)=0 \Rightarrow k=-2$

Với $k=-2$, hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} -2y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$

TH2: (2) $\Leftrightarrow 2y(k+1) \Rightarrow k=-1$

Với $k=-1$, hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} 2x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (*)$ có các bộ nghiệm $(x,y,k)=\{(1,0,-2);(-1,0,-2);(0,1,-1);(0,-1,-1)\}$

Xét vi phân cấp hai: $d^2L(x,y,k)=L''_{xx}dx^2+2L''_{xy}dxdy+L''_{yy}dy^2$

$\Rightarrow d^2L(x,y,k)=(2+k)dx^2+0.dxdy+(1+k)dy^2$

$\Rightarrow d^2L(x,y,k)=(1+k)dx^2+(1+k)dy^2$

Với $(k,x,y)=(1,0,-2) \Rightarrow d^2L(1,0,-2)=-dy^2<0$

$\Rightarrow M_1(1,0)$ là điểm cực đại có điều kiên của hàm số, $z_{\text{CD}}=z(M_1)=2$

Với $(x,y,k)=(-1,0,-2) \Rightarrow d^2L(-1,0,-2)=-dy^2<0$

$\Rightarrow M_2(-1,0)$ là điểm cực đại có điều kiên của hàm số, $z_{CD}=z(M_2)=2$

Với $(x,y,k)=(0,1,-1) \Rightarrow d^2L(0,1,-1)=dx^2>0$

$\Rightarrow M_3(0,1)$ là điểm cực tiểu có điều kiên của hàm số, $z_{\text{CT}}=z(M_3)=1$

Với $(x,y,k)=(0,-1,-1) \Rightarrow d^2L(0,-1,-1)=dx^2>0$

$\Rightarrow M_4(0,-1)$ là điểm cực tiểu có điều kiên của hàm số, $z_{\text{CT}}=z(M_4)=1$

Đáp án B

Câu 5:

Điều kiện $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

Đặt $L(x,y,k)=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+k(x^2+y^2-1)$

$$\text{Xét} \begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}+2kx=0 \\ \frac{1}{3}+2ky=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{8k} \\ y=\frac{-1}{6k} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad (k\neq 0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{8k}\right)^2+\left(\frac{-1}{6k}\right)^2=1 \Rightarrow k=\pm\frac{5}{24}$$

Với $k=\frac{5}{24} \Rightarrow x=\frac{-3}{5}, y=\frac{-4}{5}$

Với $k=-\frac{5}{24} \Rightarrow x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$

Xét vi phân cấp 2 của $L(x, y, k)$

Xét vi phân cấp 2 của $L(x, y, k)$

$$d^2L(x,y,k) = L''_{xx}(x,y,k)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y,k) + L''_{yy}(x,y,k)dy^2 = 2k\,\mathrm{d}x^2 + 2k\,\mathrm{d}y^2$$

Với $(x,y,k) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{5}{24}\right) \Rightarrow d^2L\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{5}{24}\right) = \frac{5}{12}(\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) > 0$

$\Rightarrow M_1\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số, $z_{CT} = z(M_1) = \frac{-5}{12}$

Với $(x,y,k) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{24}\right) \Rightarrow d^2L\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{24}\right) = \frac{-5}{12}(\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) < 0$

$\Rightarrow M_2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số, $z_{CĐ} = z(M_2) = \frac{5}{12}$

Đáp án C

Câu 6:

z= $x^3 + y^3 + (x+y)^2$

- Xét $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 2(x+y) = 0 * \\ z'_y = 3y^2 + 2(x+y) = 0 ** \end{cases}$ => $x^2 = y^2$ <=> $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$
- Với x=y thay vào * ta có

  $3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 => y = 0 \\ x = \frac{-4}{3} => y = \frac{-4}{3} \end{array}\right.$
- Với x=-y thay vào * ta có

  $3x^2 = 0 \Leftrightarrow$ x=y=0

Vậy có 2 điểm tới hạn M($\frac{-4}{3}$; $\frac{-4}{3}$) và N(0,0)

- Đặt A=$z''_{xx} = 6x + 2$; B=$z''_{xy} = 2$; C=$z''_{yy} = 6y + 2$
- Tại M($\frac{-4}{3}$; $\frac{-4}{3}$) thì $\begin{cases} A = -6 < 0 \\ \Delta = B^2 - AC = -32 < 0 \end{cases}$

  => M là điểm cực đại ; $z_{CĐ} = z(M) = \frac{64}{27}$
- Tại N(0,0) : $\Delta = B^2 - AC = 0$

  Giả sử các điểm H($\Delta x; \Delta y$) lân cận điểm N (-1< $\Delta x; \Delta y < 1$)
- Xét $\Delta z = z(H) - z(0,0) = \Delta x^3 + \Delta y^3 + (\Delta x + \Delta y)^2$

  + Với các điểm H(Δx; 0) $\in Ox$

  $$\Delta z = \Delta x^3 + \Delta x^2 = \Delta x^2(1 + \Delta x)$$

Bảng xét dấu:

Δx	-1	0	1

Δz	+ 0 --- 0 --- 0 +

⇨ $\Delta z < 0$ khi Δx đi qua 0

+ Với các điểm H có tọa độ $(\Delta x; -2\Delta x)$ $(\Delta y = -2\Delta x)$

$\Delta z = -7\Delta x^3 + \Delta x^2 = \Delta x^2(1 - 7\Delta x)$

Bảng xét dấu:

Δx	-1/7 0 1/7
Δz	--- 0 + 0 + 0 ---

⇨ $\Delta z > 0$ khi Δx đi qua 0

⇨ Từ 2 trường hợp trên => $\Delta z = z(H) - z(0,0)$ bị đổi dâu với các điểm H lân cận N(0,0)

⇨ N(0,0) không là điểm cực trị của hàm số

Đáp án A

Câu 7:

Xét $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y^2 = 0 \\ 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{-y^2}{2} (1) \\ 2xy + 3y^2 = 0 (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) $\Rightarrow \frac{-y^2}{2} y + 3y^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6 \Rightarrow x = -9 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm tới hạn $M_1(-9,6)$ và $M_2(0,0)$

Đặt $A = z''_{xx} = 4, B = z''_{xy} = 2y, C = z''_{yy} = 2x + 6y$

Tại $M_1(-9,6)$: $\begin{cases} A = 4 > 0 \\ \Delta = B^2 - AC = 72 > 0 \end{cases} \Rightarrow M_1$ không là điểm cực trị của hàm số.

Tại $M_2(0,0)$: $\Delta = 0$

Xét các điểm lân cận $M_2(0,0)$ nằm trên trục Oy : $N(0; \Delta y)$ với Δy rất nhỏ.

$\Rightarrow \Delta z = f(N) - f(M_2) = 2.0 + 0.(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3 + 2 - (0 + 0 + 0 + 2) = (\Delta y)^3$

Bảng xét dấu:

Δy	0^-	0	0^+
$\Delta z = (\Delta y)^3$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \Delta z$ đổi dấu khi Δy đi qua 0 $\Rightarrow M_2(0,0)$ không là điểm cực trị.

Vậy hàm số không có cực trị.

Đáp án A

1.7. KHAI TRIỂN TAYLOR

Câu 1:

Đặt $z(x,y) = f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 2x + 2y + 1$
Ta có: $z'_x = 2x + y + 2, z'_y = 2y + x + 2, z''_{xx} = 2, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = 1$
Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số là những hằng số

$\Rightarrow$ vi phần toàn phần cấp 3 trở lên bằng 0 .
Sử dụng công thức khai triển Taylor tại điểm $M(1,2)$

$$z(x,y) = z(x_0;y_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} d^k z(x_0;y_0) = z(x_0;y_0) + \frac{1}{1!} dz(x_0;y_0) + \frac{1}{2!} d^2 z(x_0;y_0)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} z(1,2) = 14 \\ dz(1,2) z'_x(1,2) \cdot (x-1) + z'(1,2) \cdot (y-2) = 6(x-1) + 7(y-2) \\ d^2 z(1,2) = 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 \end{cases}$$

Vậy khai triển Taylor của hàm số tại $M(1,2)$ là:

$$z = 14 + 6(x-1) + 7(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$$

Đáp án B

Câu 2:

Làm tương tự câu 1

Đáp án C

1.8. TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

Câu 1:

Miền giá trị của (x,y) là hình vuông $ABCD$
Xét các điểm phía trong miền $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$
Tìm các điểm tới hạn:

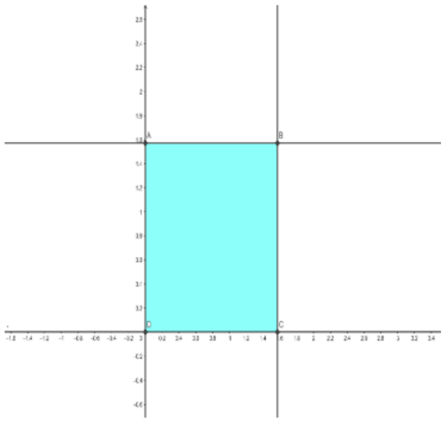
Xét $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \cos x + \cos 2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Trong miền D, z có một điểm tới hạn $M_1(\pi/3, \pi/3)$



Xét trên biên $DC: y = 0{,}0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$z = 2\sin x \Rightarrow z' = 2\cos x$$

$z' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (loại) $\Rightarrow$ Trên DC (trừ hai đầu mút) không có điểm tới hạn

Xét trên biên $AD: x = 0; 0 < y < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow z = 2\sin y \Rightarrow z' = 2\cos y$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow 2\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} \text{ (loại)}$$

Trên AD (trừ hai đầu mút) không có điểm dừng

Tương tự tại các biên AB và BC ta tìm được điểm tới hạn

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M_2\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \text{ và } M_3\left(\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4}\right) \\ z(M_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z(M_2) = z(M_2) = \sqrt{2}+1 \Rightarrow z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, z_{\min} = 0 \\ z(D) = 0 \\ z(B) = z(A) = 2 \end{cases}$$

Đáp án A

Câu 2:

Xét trong miền elip $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$

$$\text{Xét } \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_{\ y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

$\Rightarrow$ Trong miền elip có một điểm tới hạn $O(0,0)$

Xét ở biên của elip $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Tìm điểm tới hạn của z với điều kiện $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Đặt hàm phụ

$$L(x,y,k) = x^2 - 9y^2 + k\left(\frac{x^2}{9} + y^2 - 1\right)$$

$$\text{Xét } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2k}{9}x = 0 \\ -18y + 2ky = 0 \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 + \frac{k}{9}\right) = 0 \\ y(k-9) = 0 \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$$

TH1: $x = y = 0 \Rightarrow$ không phải nghiệm của hệ

$$\text{TH2: } k = -9 => y = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$
$$\text{TH3: } k = 9 => x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Với $k = -9, z$ có hai điểm tới hạn $A(3,0), B(-3,0)$
Với $k = 9, z$ có 2 điểm tới hạn $C(0,1), D(0,-1)$

Ta có: $\begin{cases} z(O) = 0 \\ z(A) = 9 \\ z(B) = -9 \\ z(D) = -9 \end{cases} \Rightarrow z_{\min} = -9, z_{\max} = 9$

Đáp án A

Câu 3:

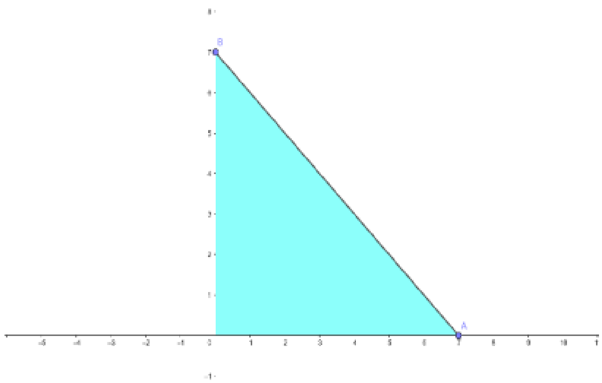
Phương trình AB: y = 7 − x
Xét trong miền ΔOAB

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y - 13 = 0 \\ 4y + 3x - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y - 13 = 0 \\ 3y + \frac{9}{4}x - \frac{27}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

⇒ Trong miền ΔOAB không có điểm tới hạn
Xét trên biên OB (không tính hai đầu mút): $x = 0, 0 < y < 7$

$$\Rightarrow z = 2y^2 - 18y \Rightarrow z' = 4y - 18 \Rightarrow z' = 0 \text{ khi } y = 4,5$$



⇒ trên biên OB có một điểm tới hạn $M(0; 4,5)$
Xét trên biên OA (không tính hai đầu mút): $y = 0, 0 < x < 7$

$\Rightarrow x^3 - 13x \Rightarrow z' = x^2 - 13 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{13}{3}}$ (Không lấy trường họp nghiệm âm)

$\Rightarrow$ Trên biên OA có một điểm tới hạn $N\left(\sqrt{\frac{13}{3}}, 0\right)$

Ta có: $\begin{cases} z(O) = 0 \\ z(A) = 252 \\ z(B) = -17 \\ z(M) = -40{,}5 \end{cases} \Rightarrow z_{\min} = -40{,}5; z_{\max} = 252$

$z(N) = \dfrac{-26\sqrt{39}}{9}$

Đáp án A

II. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN:

Câu 1:

Lời giải :

Bước 1 : Kiểm tra điểm kì dị(thi trắc nghiệm thường bỏ qua bước này để tiết kiệm thời gian)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ c = 0 \\ cy - c^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = c = 0,$$ nhưng điểm kì dị đó không thuộc họ đường cong đã cho nên hệ đường cong không điểm kì dị.

Bước 2 : Tìm hình bao

$$\begin{cases} y - 2c = 0 \\ cy - c^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = \pm 2x$$

Đáp án : D

Câu 2:

Lời giải :

Bước 1 : $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -\sqrt{2}.\sin t \\ z'(t) = \sqrt{2}.\cos t \end{cases}$ $với\ t = \frac{\pi}{4}$; Suy ra : $\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

Bước 2 : Phương trình pháp diện :

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - (y - 1) + (z - 1) = 0\ hay\ x - y + z = \frac{\pi}{4}$$

Đáp án : B

Câu 3:

Lời giải :

Bước 1 : Đặt $F(x, y, z) = x^2 - 3xy + y^2 - z \Longrightarrow \begin{cases} F'_x = 2x - 3y \\ F'_y = -3x + 2y \\ F'_z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F'_x(A) = -1 \\ F'_y(A) = -1 \\ F'_z(A) = -1 \end{cases}$

Bước 2 : Phương trình tiếp diện

$$-(x - 1) - (y - 1) - z(z + 1) = 0\ \ hay\ x + y + z = 1$$

Đáp án : A

Câu 4:

Lời giải :

Áp dụng công thức :

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Đáp án : A

Câu 5:

Lời giải :

Bước 1 : Đặt $F(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 2y - z$ $\begin{cases} F'_x = 8x \\ F'_y = -2y + 2 \\ F'_z = -1 \end{cases}$ $với\ A\ (-1; 2; 4)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F'_x(A) = -8 \\ F'_y(A) = -2 \\ F'_z(A) = -1 \end{cases}$$

Bước 2 : Phương trình tiếp diện :

$$-8(x + 1) - 2(y - 2) - (z - 4) = 0 \quad hay\ 8x + 2y + z = 0$$

Đáp án : A

Câu 6:

Lời giải :

Bước 1 : Đặt $F(x, y, z) = z - e^{x^2 - y^2} \Longrightarrow \begin{cases} F'_x = -2x.e^{x^2 - y^2} \\ F'_y = 2y.e^{x^2 + y^2} \\ F'_z = 1 \end{cases}$ $với\ A\ (1; -1; 1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F'_x(A) = -2 \\ F'_y(A) = -2 \\ F'_z(A) = 1 \end{cases}$$

Bước 2: Phương trình tiếp diện

$$-2(x - 1) - 2(y + 1) + (z - 1) = 0 \quad hay\ 2x + 2y - z + 1 = 0$$

Đáp án : A

Câu 7:

Lời giải :

Bước 1 : Tìm giao điểm : $e^{1-x^2} = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow A(1; 1); A'(-1; 1)$ là giao điểm cần tìm

Bước 2 : Ta có : $y' = -2x.e^{1-x^2}$

- $\square = 1 \Longrightarrow \square'(1) = -2$
- $\square = -1 \Longrightarrow \square'(-1) = 2$

Bước 3 :

- $\square - 1 = -2(\square - 1) \Longrightarrow 2\square + \square - 3 = 0$
- $\square - 1 = 2(\square + 1) \Longrightarrow 2\square - \square + 3 = 0$

Đáp án : B,C

Câu 8:

Lời giải :

Bước 1 : Đặt $F(x;y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 5 \Longrightarrow \begin{cases} F'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \\ F'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F'_x(M) = \frac{1}{3} \\ F'_y(M) = \frac{2}{3} \end{cases}$

Bước 2 : Phương trình pháp tuyến

$$\frac{x-8}{\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}} \Longrightarrow 2x - y - 15 = 0$$

Đáp án : C

Câu 9:

Lời giải :

Bước 1 : Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \frac{\cos t - 4}{3} \end{cases}$

Bước 2 : Áp dụng công thức tính :

$$K = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Đáp án : A

Câu 10:

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} F = x^2 + y^2 - 10 \\ G = y^2 + z^2 - 25 \end{cases}$

$n_F = \left(F'_x(A); F'_y(A); F'_z(A)\right) = (2;6;0);\ n_G = \left(G'_x(A); G'_y(A); G'_z(A)\right) = (0;6;8)$

Ta có

$$\boldsymbol{n_{tt}} = n_F \times n_G = (12;-4;3)$$

Phương trình tiếp tuyến: $$\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$$
Đáp án : A

III. TÍCH PHÂN BỘI & ỨNG DỤNG

3.1. TÍCH PHÂN KÉP

Câu 1: $Tính\ \iint_D xydxdy$ với D được giới hạn bởi $x + y = 4$ và $x^2 = 2y$

$$Miền\ D: \begin{cases} -4 \le x \le 2 \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 4 - x \end{cases}$$

$$\iint_D xydxdy = \int_{-4}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} xydy$$

$$= \int_{-4}^{2} \frac{xy^2}{2} |_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=4-x} dx$$

$$= \int_{-4}^{2} \frac{x(4-x)^2}{2} - \frac{x\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} dx$$

$= -90$. Chọn B

Câu 2: $Tính\ \iint_D 2ydxdy\ với\ D\ xác\ định\ bởi\ x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1$

$$Miền\ D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$\iint_D 2ydxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2ydy$$

$$= \int_0^1 [(1 - x^2) - (1 - x)^2]dx$$

$$= \frac{1}{3}.\ Chọn\ A$$

Câu 3: $Tính\ \int_0^1 dx \int_2^3 (x^2 y - 2y^2)dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right) |_{y=2}^{y=3} dx$$

$$= \int_0^1 [\frac{x^2.(3^2 - 2^2)}{2} - \frac{2(3^3 - 2^3)}{3}]dx$$

$$= -\frac{71}{6}.\ Chọn\ C$$

Câu 4:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \sin(y^2)\,dy$$

$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$

$$\rightarrow \int_0^1 dx \int_x^1 \sin(y^2)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sin(y^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 x sin(y^2)|_{x=0}^{x=y}\,dy$$

$$= \int_0^1 y sin(y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} sin(y^2)\,d(y^2)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} sint\,dt = \frac{1 - cos1}{2}. Chọn\ C$$

Câu 5: $Tính\ \iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy\ với\ D\ xác\ định\ bởi\ x^2 + y^2 \le x; y \ge 0$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$ $\quad |J| = r.$

$Miền\ D\ trở\ thành \begin{cases} 0 \le r \le cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_D r^3 cos\varphi\,drd\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{cos\varphi} r^3 cos\varphi\,drd\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(cos\varphi)^4}{4}. cos\varphi d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - (sin\varphi)^2)^2}{4}. d(sin\varphi)$$

$$= \frac{2}{15}. Chọn\ B$$

Câu 6:$Tính\ \iint_D (2x + siny)dxdy\ \ với\ D: (x - 2)^2 + y^2 \le 1$

Ta thấy f(x,y)=siny là hàm lẻ đối với y và miền D đối xứng qua Ox

$\rightarrow \iint_D sinydxdy = 0$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \qquad |J| = r.$

$Miền\ D\ trở\ thành \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iint_D 2x\,dxdy = \iint_D 2(2 + rcos\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4rdr + \int_0^{2\pi} cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 2r^2\, dr = 4\pi. Chọn\ B$$

Câu 7: $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{a}{b} + lnc, D: x \le x^2 + y^2 \le 2x\,, -x \le y \le 0.\ \frac{a}{b} tối\ giản.$

Tổng a+b+c=?

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \qquad |J| = r.$

$Miền\ D\ trở\ thành \begin{cases} cos\varphi \le r \le 2cos\varphi \\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le 0 \end{cases}$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3} = \iint_D \frac{drd\varphi}{r^5}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int_{cos\varphi}^{2cos\varphi} \frac{dr}{r^5}$$

$$= \frac{15}{64}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{(cos\varphi)^4} d\varphi$$

$$= \frac{15}{64}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{(tan\varphi)^2 + 1}{(cos\varphi)^2} d\varphi$$

$$= \frac{15}{64}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} [(tan\varphi)^2 + 1] d(tan\varphi)$$

$$= \frac{5}{16} \rightarrow a = 5, b = 16, c = 1. Chọn\ C$$

Câu 8: $\iint_D \sqrt{2x - x^2 - y^2} dxdy\ \ với\ miền\ D: x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad |J| = r.$

$Miền\ D\ trở\ thành\ \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

$$\rightarrow \iint_D \sqrt{2x - x^2 - y^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1 - r^2}.rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 -\frac{1}{2}\sqrt{1 - r^2}\,d(1 - r^2)$$

$$= \pi.\int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{2}du = \frac{\pi}{3}.Chọn\ B$$

Câu 9: $Tính\ \iint_D y^2(6x - y)dxdy, với\ D\ giới\ hạn\ bởi: x = 0, x + |y| = 1.$

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - 1 \le y \le 1 - x \end{cases}$$

$$\iint_D y^2(6x - y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} y^2(6x - y)dy$$

$$= \int_0^1 \left(2xy^3 - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=x-1}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (2x(1 - x)^3 - \frac{(1 - x)^4}{4} - 2x(x - 1)^3 + \frac{(x - 1)^4}{4})\,dx$$

$$= \frac{1}{5}.Chọn\ A$$

Câu 10: $\iint_D (x + y)^2dxdy\ với\ miền\ D: 5x^2 + 6xy + 5y^2 \le 4$

$$D: 4(x + y)^2 + (x - y)^2 \le 4$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \rightarrow |J| = \frac{1}{2}$

$Miền\ D\ trở\ thành\ 4u^2 + v^2 \le 4$

$$\rightarrow \iint_D (x + y)^2dxdy = \iint_D \frac{u^2}{2}dudv$$

Đặt $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = 2r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = 2r$

$Miền\ D\ trở\ thành \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\to \iint_D 2u^2 dudv = \iint_D r^3 (cos\varphi)^2 dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} (cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}. Chọn\ D$$

Câu 11: $Miền\ D\ giới\ hạn\ bởi\ x = 1, y = 0, x = y. \iint_D \frac{dxdy}{x+y+1} = \frac{a}{2} lnb - cln2.$

$Tổng\ a + b + c = ?$

$Miền\ D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\iint_D \frac{1}{x+y+1} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x+y+1} dy$$

$$= \int_0^1 \ln|y + x + 1|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \ln|2x + 1| dx - \int_0^1 \ln|x + 1| dx$$

$$= \int_0^1 \ln(2x + 1)\, dx - \int_0^1 \ln(x + 1)\, dx\ (do\ 0 \le x \le 1)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \ln(2x + 1)\, d(2x + 1) - \int_0^1 \ln(x + 1)\, d(x + 1)$$

$$= [\frac{(2x + 1)\ln(2x + 1) - (2x + 1)}{2} - (x + 1)\ln(x + 1) + (x + 1)]\ |_{x=0}^{x=1}$$

$= \frac{3}{2} ln3 - 2ln2$. Chọn D.

Câu 12: $Miền\ D: x^2 + y^2 \le 6. \iint_D \frac{3x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} dxdy = a\pi + lnb$, Tổng a+b=?

Ta thấy trong biểu thức xác định miền D, x và y đối xứng nhau nên có thể đổi vai trò của x và y trong biểu thức lấy tích phân.

$$\to \iint_D \frac{3x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} dxdy = \iint_D \frac{3y^2 - x^2 + 1}{y^2 + x^2 + 1} dxdy$$

$$\to \iint_D \frac{3x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} dxdy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{3x^2 - y^2 + 1 + 3y^2 - x^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \frac{2(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2+1}dxdy$$

$$= \iint_D dxdy$$

$$= S_D$$

$$= 6\pi. \rightarrow a = 6, b = 1 \rightarrow Chọn\ A$$

3.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

Câu 1: *Tính tích phân* $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)\,dy$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2+2z)\,dz$$

$$= \int_0^1 (2z+z^2)|_{z=0}^{z=1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 2(1-x)+(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{4}{3}. Chọn\ D$$

Câu 2: *Tính* $\iiint_V (3x^2-2y)\,dxdydz$ *với* $V: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x^2$

$$\iiint_V (3x^2-2y)\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x^2} (3x^2-2y)\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x^2(3x^2-2y)\,dy$$

$$= \int_0^1 (3x^5-x^4)\,dx = \frac{3}{10}. Chọn\ A$$

Câu 3: *Tính* $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz, V$ *giới hạn bởi* $x^2+y^2-2z=0, z=2$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$

$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} \dfrac{r^2}{2} \leq z \leq 2 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint_V r^3\, drd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3 dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr$$

$$= \frac{16\pi}{3}. Chọn\ C$$

Câu 4: $\int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_{z^2}^1 xze^{xy^2} dy = \frac{e}{a} - \frac{b}{c}. a + b + c = ?$

$Miền \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ z^2 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{y} \end{cases}$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_{z^2}^1 xze^{xy^2} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xze^{xy^2} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{z^2}{2} xe^{xy^2} \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 xye^{xy^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^1 e^{xy^2}\, d(xy^2)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (e^x - 1)\, dx = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}. Chọn\ B$$

Câu 5: $Tính \iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+2)^2}, V: \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

$Miền\ V: \begin{cases} 0 \le z \le 1 - x - y \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+2)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+2)^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{-1}{x+y+z+2} |_{z=0}^{z=1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{x+y+2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-y}{3} + \ln(x+y+2)\right) |_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{3} + \ln(3) - \ln(x+2)\right) dx$$

$$= \frac{5}{6} + 2ln2 - 2ln3. Chọn\ B$$

Câu 6: $Tính \iiint_V (4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy)\, dxdydz, V: 4x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$

$$I = \iiint_V (4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy)\, dxdydz$$

$Có\ f(x,y) = 2xy$ $là\ hàm\ lẻ\ đối\ với\ x\ và\ miền\ V\ đối\ xứng\ qua\ mặt\ x = 0$

$$\rightarrow \iiint_V 2xydxdydz = 0$$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = 2rsin\varphi sin\theta \rightarrow |J| = 4r^2 sin\theta \\ z = 2rcos\theta \end{cases}$

$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\rightarrow I = \iiint_V 4r^4 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^1 4r^4 dr = \frac{8\pi}{5}. Chọn\ B$$

Câu 7: $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \dfrac{\pi}{a}$ $, V: x^2+y^2+z^2 \le y. Tìm\ a?$

$$Đặt \begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rcos\theta \\ z = rsin\varphi sin\theta \end{cases} \to |J| = r^2 sin\theta$$

$$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} 0 \le r \le cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint_V r^3 sin\theta\, drd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{cos\theta} r^3 sin\theta\, dr$$

$$= 2\pi. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(cos\theta)^4}{4}. sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(cos\theta)^4\, d(cos\theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 u^4\, du = \frac{\pi}{10}. Chọn\ D$$

Câu 8: $\iiint_V zcos(x^2+y^2)\,dxdydz, V: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$Đặt \begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases} \to \ |J| = r$$

$$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} r \le z \le \sqrt{4-r^2} \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint_V zcos(x^2+y^2)\,dxdydz = \iiint_V zcos(r^2). r\, drd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_r^{\sqrt{4-r^2}} zrcos(r^2) dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} rcos(r^2)\Big|_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{4 - r^2 - r^2}{2} rcos(r^2)|_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}}\, dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)\cos(r^2)\, d(r^2)$$

$$= \pi \int_0^2 (2 - u)cosu\, du$$

$$= \pi \int_0^2 (2 - u)\, d(sinu)$$

$$= \pi[(2 - u)sinu|_{u=0}^{u=2} + \int_0^2 sinu\, du]$$

$$= \pi(0 - cosu|_{u=0}^{u=2})$$

$$= \pi(1 - cos2). Chọn\ A$$

Câu 9: $Miền\ V$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$. $\iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz = \dfrac{a\sqrt{8} - b\sqrt{6}}{15}\pi.$

$b - a = ?$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$

$Miền\ V\ trở\ thành$ $\begin{cases} -\sqrt{8 - r^2} \leq z \leq \sqrt{8 - r^2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint_V r^3\, drd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\sqrt{8-r^2}}^{\sqrt{8-r^2}} r^3 dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 2r^3\sqrt{8 - r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} -(8 - 8 + r^2)\sqrt{8 - r^2}\ \ d(8 - r^2)$$

$$= 2\pi \int_6^8 (8 - u)\sqrt{u}\, du$$

$$= 2\pi\left(\frac{16}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{u=6}^{u=8}$$

$$= \frac{512\sqrt{8} - 528\sqrt{6}}{15}\pi.\, Chọn\ A.$$

Câu 10: *Tính* $\iiint_V (x + y - 2z)^2 dxdydz = \frac{a\pi}{b}$ *, với* $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

$a - b = ?$

$$I = \iiint_V (x + y - 2z)^2 dxdydz$$

$$= \iiint_V (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz)\, dxdydz$$

Xét $f(x, y, z) = 2xy$ *là hàm lẻ đối với* x, *miền* V *đối xứng qua* $x = 0$

$$\rightarrow \iiint_V 2xy\, dxdydz = 0$$

Tương tự có $\iiint_V -4xz\, dxdydz = \iiint_V -4yz\, dxdydz = 0$

$$\rightarrow I = \iiint_V (x^2 + y^2 + 4z^2)\, dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \rightarrow |J| = r^2 sin\theta \\ z = rcos\theta \end{cases}$

Miền V *trở thành* $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\rightarrow I = \iiint_V (r^2 + r^2(cos\theta)^2).\, r^2 sin\theta\, drd\varphi d\theta$$

$$= \iiint_V (r^4 sin\theta + r^4(cos\theta)^2 sin\theta)\, drd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^4\, dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (cos\theta)^2 sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^4\, dr$$

$$= 2\pi.\, 2.\frac{1}{5} + 2\pi.\frac{2}{3}.\frac{1}{5} = \frac{16\pi}{15}.\, Chọn\ C$$

3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI

Câu 1: *Diện tích phần mặt* $z = x^2 + y^2 + 2$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 9$ *là* $\dfrac{a\sqrt{a} - b}{c}\pi$. *Tổng* $a + b + c = ?$

Hình chiếu của mặt trong mặt trụ lên Oxy *là* $D: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{cases}$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$

Miền D trở thành : $\begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\rightarrow S = \iint_D \sqrt{1 + 4r^2}\,.rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{\sqrt{1 + 4r^2}}{8} d(1 + 4r^2)$$

$$= \frac{2\pi}{8}\int_1^{37} \sqrt{u}du = \frac{37\sqrt{37} - 1}{6}\pi. \text{Chọn } C$$

Câu 2: *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi* $y = \sqrt{3}x, y = 0, x^2 + y^2 = 2x$

$$S_D = \iint_D dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$

Miền D trở thành : $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$$S_D = \iint_D rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2(\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + cos2\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}. Chọn\ D$$

Câu 3: $Tính\ thể\ tích\ miền\ giới\ hạn\ bởi\ x = 1 + y^2 + z^2\ và\ x = 2(y^2 + z^2)$

$$V_V = \iiint_V dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} x = x \\ y = rcos\varphi \\ z = rsin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r$

$$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} 2r^2 \leq x \leq 1 + r^2 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \iiint_V dxdydz = \iiint_V rdrd\varphi dx$$

$$= \int_0^{2\varphi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{2r^2}^{1+r^2} rdx$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(1 + r^2 - 2r^2)dr = \frac{\pi}{2}. Chọn\ D$$

Câu 4: $Miền\ D\ giới\ hạn\ bởi\ (x^2 + y^2)^2 = 2x^3. S_D = \frac{a\pi}{b}. Tính\ a + b?$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \quad |J| = r$

$$Miền\ D\ trở\ thành \begin{cases} 0 \leq r \leq 2(cos\varphi)^3 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2(cos\varphi)^3} rdr$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi)^6 d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi)^6 d\varphi$$

$$= 4.\frac{\pi}{2}.\frac{5!!}{6!!} (Tích\ phân\ Wallis)$$

$$= \frac{5\pi}{8}. Chọn\ A$$

$$* \ Tích\ phân\ Wallis \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin)^n d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi)^n d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}.\frac{(n-1)!!}{n!!} & nếu\ n\ chẵn \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & nếu\ n\ lẻ \end{cases}$$

Câu 5: *Tính vật thể V xác định bởi* $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2$

$$V_V = \iiint_V dxdydz$$

$$Đặt \begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \rightarrow \quad |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

$$Miền\ V\ trở\ thành \begin{cases} r \le z \le 6 - r^2 \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \iiint_V dxdydz = \iiint_V rdrd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} rdz$$

$$= 2\pi \int_0^2 r(6-r^2-r)dr = \frac{32\pi}{3}. Chọn\ B$$

Câu 6: *Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt* $z = x^2 + 3y^2$ và

$z = 4 - 3x^2 - y^2$

$$V_V = \iiint_V dxdydz$$

$$\rightarrow Miền\ V: \begin{cases} x^2 + 3y^2 \le z \le 4 - 3x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \le 1. (D) \end{cases}$$

$$\iiint_V dxdydz = \iint_D (4 - 3x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2) dxdy$$

$$= 4 \iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy$$

$$Đặt \begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \quad |J| = r$$

$Miền\ D\ trở\ thành:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\rightarrow V_V = 4\iint_D (1-r^2)rdrd\varphi$

$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)rdr$

$= 2\pi. Chọn\ C.$

IV. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

(Vì là thi TN nên chúng ta sẽ tập làm theo cách và hướng giải nhanh nhất có thể, không lan man suy nghĩ đến điều kiện ở 1 số câu tích phân xác định hay suy rộng phụ thuộc tham số nữa, mà đa số chúng ta sẽ thay trực tiếp số vào để có thể giải 1 cách nhanh nhất. Vì vậy, lời giải ở 1 số câu ở dưới sẽ trực tiếp thay số và bỏ qua xét các điều kiện cần).

4.1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ

Câu 1: Tính $\int_0^{\pi/2} \ln(1+y sin^2x)dx$ $với$ $y>1$

Đáp án: A. $\pi \ln\left(1+\sqrt{y+1}\right) - \pi ln2$

Giải:

Nhận thấy: I(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+ysin^2x)dx$ $là$ $hàm$ $số$ $khả$ vi $trên$ $(1,+\infty)$

$$\Rightarrow I'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y+\frac{1}{sin^2x}}dx$$

Đặt t= tanx $\Rightarrow$ $dt = \frac{1}{cos^2x}dx = (1+tan^2x)dx = \frac{dt}{t^2+1}$

Với x=0 $\Rightarrow$ $t = 0$; x=$\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $t \to +\infty$

$$\Rightarrow I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y+\frac{1}{sin^2x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y+(1+\ cot^2x)}.\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y+\left(1+\frac{1}{tan^2x}\right)}.\frac{1}{t^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y+\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}.\frac{1}{t^2+1}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{t^2y+t^2+1}.\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2(1+y)+1}dt$$

$$= \frac{1}{y}\left[arctant - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\arctan t\sqrt{1+y}\ \Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}.(1+\sqrt{1+y})}$$

$$\Rightarrow I(y) = \int I'(y)dy = \pi\int \frac{1}{2\sqrt{1+y}.(1+\sqrt{1+y})}dy$$

$$= \pi \int \frac{1}{(1+\sqrt{1+y})} d(1+\sqrt{1+y}) = \pi \ln\left(1+\sqrt{y+1}\right) + C$$

Do I(0)= 0 $\Rightarrow\; C = -\pi ln2$

Vậy I(y)= $\pi \ln\left(1+\sqrt{y+1}\right) - \pi ln2$

Câu 2: Tính giới hạn sau:

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt{x^3+y^3}\,dx$$

Đáp án: B.0,4

Giải:

Thay số trực tiếp:

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt{x^3+y^3}\,dx = I(0) = \int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx = \frac{2}{5}$$

Vậy chọn B.

Câu 3:Tính giới hạn:

$$\lim_{y \to 0} \int_{-1}^1 \frac{x^{2015}\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\,dx$$

Đáp án: D. $\frac{2}{3}$

Giải:

Thay số vào trực tiếp:

$$\lim_{y \to 0} \int_{-1}^1 \frac{x^{2015}\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\,dx = I(0) = \int_{-1}^1 \frac{x^{2015}}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}$$

Câu 4: Tính :

$$\lim_{y \to 0} \int_{cosy}^{siny} \frac{arc\cot(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$$

Đáp án: A.$\frac{-3\pi^2}{32}$

Giải:

Thay số trực tiếp:

$$\lim_{y\to 0}\int_{cosy}^{siny}\frac{arccot(x+y)}{1+x^2+y^2}dx = I(0) = \int_1^0 \frac{arccot(x)}{1+x^2}dx$$

$$= \int_0^1 arccot(x)d(arccot\, x) = \frac{arccot(x)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{-3\pi^2}{32}$$

Câu 5: Cho I(y)= $\int_y^1 \sin(x^2 + xy + y^2)dx\,.Tính\ I'(0)$

Đáp án: A. $\frac{sin1}{2}$

<u>Giải:</u>

*Phân tích:

Hàm f(x,y)= sin($x^2 + xy + y^2)\ xác\ định\ với\ mọi\ x, y \in$ R

Chọn ngẫu nhiên [-1,1]x[-1,1] (chứa điểm y=0)

*Nhận thấy:

$$\begin{cases} f(x,y) khả\ vi\ và\ liên\ tục\ trên\ [-1,1]\text{x}[-1,1] \\ a(y) = y, b(y) = 1\ và\ khả\ vi\ trên\ [-1,1] \\ f'_y(x,y) liên\ tục\ trên\ [-1,1]\text{x}[-1,1] \end{cases}$$

Áp dụng công thức:

$$I'(y) = f(b(y),y).b'_y(y).f(a(y),y).a'_y(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx$$

$$= f(1,y)\beta.0 - f(y,y).1 + \int_y^1 (x+2y)\cos(x^2+xy+y^2)dx$$

$$\Rightarrow\ I'(0) = f(1,0).0 - f(0,0).1$$

$$+\int_0^1 x cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_0^1 = \frac{sin1}{2}$$

Câu 6: Cho I(y)= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 sin^2 x + cos^2 x)\ dx$. Tính $I'(1)$

Đáp án: B. $\frac{\pi}{2}$

<u>Giải:</u>

*Phân tích :

Cho $[\alpha,\beta]\ sao\ cho\ y = 1 \in [\alpha,\beta]\ và\ tránh\ không$ được để $y \in$
$[\alpha,\beta]\ làm\ cho\ hàm\ f(x,y)\ gián\ đoạn$

Hàm $f(x,y) = \ln(y^2 sin^2 x + cos^2 x)\ bị\ gián\ đoạn\ tại\ y = 0, x = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \ tránh\ để\ điểm\ y = 0\ nằm\ trong\ [\alpha, \beta], chọn\ khoảng\ bất\ kì\ [1,2]$$

*Tính toán:

$$Ta\ có\text{: } f_y' = \frac{2y sin^2 x}{y^2 sin^2 x + cos^2 x}$$

Áp dụng công thức:

$$I'(y) = \int_a^b f_y'(x, y) dx$$

Thay số:

$$I'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_y'(x, y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 sin^2 x}{sin^2 x + cos^2 x} = \frac{\pi}{2}$$

Câu 7: Tìm

$$\lim_{y \to 1} \int_0^y \frac{arc\tan x}{x^2 + y^2} dx$$

Đáp án: B. $\frac{\pi^2}{32}$

<u>Giải:</u>

Thay trực tiếp:

$$\lim_{y \to 1} \int_0^y \frac{arc\tan x}{x^2 + y^2} dx = I(1)$$

$$= \int_0^1 \frac{arc\tan x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int_0^1 arctanx\ d(arctanx) = \left(\frac{(\arctan x)^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

Câu 8: Tính

$$\lim_{y \to 0} \int_{siny}^{cosy} \frac{arc\tan(xy)}{1 + x^2 + y^2} dx$$

Đáp án : C. $\frac{\pi^2}{32}$

<u>Giải:</u>

Thay số trực tiếp:

$$\lim_{y\to 0}\int_{siny}^{cosy}\frac{arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}dx = I(0) = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

$$= \int_0^1 arctanx\, d(arctanx) = \left(\frac{(\arctan x)^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

Câu 9: Tính $\lim_{y\to 1}\int_y^{2y} x^2\sin(\pi yx)\,dx$.

Đáp án: A. $\frac{2-5\pi}{\pi^2}$

Giải:

Thay trực tiếp:

$$\lim_{y\to 1}\int_y^{2y} x^2\sin(\pi yx)\,dx = I(1) = \int_1^2 x^2\sin(\pi x)dx$$

Đặt $\begin{cases} x^2 = u \\ \sin(\pi x)\,dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xdx = du \\ \frac{-cos(\pi x)}{\pi} = v \end{cases}$

Ta có:

$$I(1) = \int_1^2 x^2\sin(\pi x)dx = \frac{-x^2cos(\pi x)}{\pi}\Big|_1^2 + \frac{2}{\pi}\int_1^2 \mathrm{x}\cos(\pi x)dx$$

Đặt: $\begin{cases} x = u \\ \cos(\pi x)\,dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi} = v \end{cases}$

Ta có:

$$I(1) = \frac{-5}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}x\,\Big|_1^2 - \frac{1}{\pi}\int_1^2 \sin(\pi x)dx\right) = \frac{-5}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\Big|_1^2 = \frac{2-5\pi}{\pi^2}$$

Câu 10:Tính giới hạn

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2020}+y^{2021}}{1+x^2+2021y^2}dx$$

Đáp án:

Giải:

Thay số trực tiếp:

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2020}+y^{2021}}{1+x^2+2021y^2}dx = I(0) = \int_{-1}^{1}\frac{x^{2020}}{1+x^2}dx$$

Đặt $\begin{cases} x^{2020} = u \\ \frac{1}{1+x^2}dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2020x^{2019}dx = du \\ arctanx = v \end{cases}$

$$I(0) = arctanx^{2020}\Big|_{-1}^{1} - 2020\int_{-1}^{1} arctanx.x^{2019}dx$$

4.2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

Câu 1: Tính I(y)= $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x+y)}{x^2+1}dx$

Đáp án: A. $\frac{2\pi}{y^2+y}$

Lời giải:

Ta có:

$f(x,y) = \frac{\arctan(x+y)}{x^2+1}$ *liên tục trên* $[0,+\infty)$ x R

$\Rightarrow\ f_y' = \frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]}$ *liên tục trên* $[0,+\infty)$ x R

$$\mathrm{I}'(y) = \int_0^{+\infty} f_y' dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]}dx$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{(1+x^2)[1+(x+y)^2]} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$$

Đồng nhất thức hệ số, ta được:

$$A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, B = \frac{2}{y(y^2+4)}\ , C = \frac{1}{(y^2+4)}, D = \frac{3}{(y^2+4)}$$

$$\mathrm{I}'(y) = \frac{1}{(y^2+4)}\int_0^{+\infty}\left[\frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2}\right]dx$$
$$= \frac{1}{(y^2+4)}[-\ln(1+x^2) + y.arctanx$$
$$+\ln[1+(x+y)^2] + \ y.\arctan(x+y)\ ]\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{y^2+y}$$

Câu 2: Tính $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

Đáp án: A. -lna+lnb

Lời giải:

$$\text{Đặt } I(x,a) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (coi\ b\ là\ tham\ số)$$

$$f(x,a) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\ \Rightarrow\ f_a'(x,a) = -e^{-ax}$$

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} f'_a(x,a)dx = \int_0^{+\infty} -e^{-ax}dx = \frac{-1}{a}$$

$$\Rightarrow I(a) = \int I'(a)da = \int \frac{-1}{a}da = -lna + C$$

$$do\ I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = 0 \Rightarrow -lnb + C = 0 \Rightarrow C = lnb$$

$$Vậy \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = -lna + lnb = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Câu 3: Tính

$$\lim_{y \to 0} \int_0^y \frac{cos\text{xy}}{x^2+1}dx$$

Đáp án: A. $\pi/2$

Lời giải:

Thay số trực tiếp:

$$\lim_{y\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{cosyx}{1+x^2}dx = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Câu 4: Tính

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(bx) - \sin(cx)}{x}dx$$

Đáp án: A. arctan($\frac{b}{a}$) - arcrtan($\frac{c}{a}$)

Lời giải:

$$Ta\ có: e^{-ax}\frac{\sin(bx) - \sin(cx)}{x} = F(x,b) - F(x,c)$$

$$= \int_c^b F'_y(x,y)dy = \int_c^b e^{-ax}.\cos(yx)dy$$

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\left(\int_c^b e^{-ax}.\cos(yx)\,dy\right)dx\right)$$

$$= \left(-\frac{a}{a^2+y^2}.e^{-ax}.\cos(yx) + \frac{b}{a^2+b^2}.e^{-ax}.\sin(yx))\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+y^2}$$

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_c^b e^{-ax}.\cos(yx)\,dy)\,dx\right)=\int_c^b\left(\int_0^{+\infty}e^{-ax}.\cos(yx)\,dx)\,dy\right)$$

$$=\int_c^b\frac{a}{a^2+y^2}dy=arctan\frac{y}{a}|\begin{matrix}b\\c\end{matrix}=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ -\ \text{arcrtan}\left(\frac{c}{a}\right)$$

Câu 5: Tính

$$\int_0^{+\infty}\frac{2^{-x}-3^{-x}}{x}dx$$

Đáp án: B. ln($\frac{ln2}{ln3}$)

Lời giải:

$$Ta\ có:\ \int_2^3 t^{-x-1}dt=\frac{t^{-x}}{-x}\Big|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}=\frac{2^{-x}-3^{-x}}{x}$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\left(\int_2^3 t^{-x-1}dt\right)dx$$

$$=\int_2^3\left(\int_0^{+\infty}t^{-x-1}dx\right)dt=\int_2^3\left(\frac{t^{-x-1}}{-lnt}\Big|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right)dt$$

$$=\int_2^3\frac{1}{t.lnt}dt=\ln(lnt)\Big|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}=\ln\left(\frac{ln2}{ln3}\right)$$

---HẾT---