Bài tập tham khảo chương 5

I 5.1 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Bài 1: Tìm ma trận của dạng song tuyến tính đối với cơ sở chính tắc và cơ sở $\{e'_1(1,1,0),\ e'_2(1,0,1),\ e'_3(0,1,1)\}$
$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_1y_3 - 5x_2y_2 - x_3y_2 - 6x_3y_3$

Bài 2: Cho các dạng toàn phương ω trên $\mathbb{R}^3$ có các biểu thức tọa độ:

- $\omega_1(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$
- $\omega_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

a) Dùng phương pháp Lagrange để đưa các dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

b) Xem xét tính xác định âm, xác định dương của các dạng toàn phương trên.

Bài 3: Cho f là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ và $f(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 14x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
Tìm λ biết biểu thức tọa độ của f trong cơ sở $B = \{(1;1;1),(1;0;1),(0;1;1)\}$ là
$f(x) = 20x_1^2 + 10x_2^2 - x_3^2 + 28x_1x_2 + 14x_1x_3 + 16x_2x_3$.

Bài 4: Xem xét tính xác định âm, xác định dương của các dạng toàn phương:

a) $\omega_1(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ (trên $\mathbb{R}^3$)

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 - 2x_4x_1$ (trên $\mathbb{R}^4$)

II 5.2 KHÔNG GIAN EUCLIDE

Bài 1: Cho không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, $W = span\{(1,1,1),(3,4,5),(6,7,8)\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

b) Tìm hình chiếu trực giao của $u = (4,2,6)$ lên W.

Bài 2: Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng thông thường cho các vector:
$u = (-2,0,-1,1)$; $v = (1,-2,1,0)$.

a) Tính khoảng cách giữa u và v.

b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ $\{u,v\}$.

Bài 3: Cho $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V và phép biến đổi tuyến tính: $f : V \to V$ có ma trận theo cơ sở E là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm cơ sở trục chuẩn $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận chéo.

Bài 4: Trong không gian vector $\mathbb{R}^4$ có tích vô hướng chính tắc, cho:
$V = span\{v_1 = (1,-1,0,-1), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (1,1,0,1), v_4 = (0,-2,0,-1)\}$

a) Hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có phải hệ trực giao không?

b) Tìm một hệ cơ sở của V.

c) Tìm hình chiếu của $w = (2,0,3,1)$ lên V.

III 5.3 RÚT GỌN DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Bài 1: Trên $\mathbb{R}^3$ cho dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ

- $\omega_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$
- $\omega_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

Rút gọn các dạng toàn phương trên bằng phương pháp Jacobi

Bài 2: Cho các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$. Kiểm tra xem các dạng toàn phương đó xác định âm, xác định dương hay không bằng tiêu chuẩn Sylvester

a) $\omega_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

Bài 3: Xác định a để mỗi dạng toàn phương có biểu thức tọa độ sau là xác định dương

a) $\omega_1(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $\omega_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2x_3$

c) $\omega_3(x) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

d) $\omega_4(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

e) $\omega_5(x) = ax_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$.

Bài 4: Trong $\mathbb{R}^3$ cho dạng toàn phương có biểu thức tọa độ:

- $\omega_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2$
- $\omega_2(x) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$

Bằng phương pháp chéo hóa trực giao, đưa các dạng toàn phương trên về dạng chính tắc

IV 5.4 ĐƯỜNG VÀ MẶT BẬC HAI

Bài 1: Nhận dạng các đường cong sau:

a) $5x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 = 0$.

b) $-7x_1^2 + 2x_2^2 + 12x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 - 4 = 0$.

c) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 3\sqrt{6}x_2 + 2 = 0$

d) $17x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 + 1 = 0$

Bài 2: Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclid thông thường, cho dạng toàn phương:
$\omega = 4x_1^2 + x_2^2 - 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$

a) Tìm cơ sở trực chuẩn để ω có dạng chính tắc, viết dạng chính tắc đó

b) Nhận dạng mặt bậc hai có phương trình $\omega(x_1, x_2, x_3) = 0$

Bài 3: Nhận dạng các mặt bậc hai sau:

a) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$.

b) $24x_1^2 + 24x_2^2 - 12x_3^2 - 12x_1x_2 + 24x_1x_3 - 24x_2x_3 - 25 = 0$

c) $13x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 + 16x_1x_2 - 20x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

d) $5x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 - 6 = 0$

Bài 4: Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Tìm:
$\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{Max} Q(x_1, x_2, x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=9}{Min} Q(x_1, x_2, x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1, x_2, x_3)$ đạt max, min.

Bài 5 (CK 20161): Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + \alpha x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

a) Tìm α để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid.

b) Khi $\alpha = 1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi).

Bài 6 (CK 20201): Cho A, B là hai ma trận trực giao cấp n thỏa mãn $\det A + \det B = 0$. Chứng minh rằng $\det(A + B) = 0$.