BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài toán đếm

Bài 1:

1. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 chiếc bánh quy để ăn trong một hộp có 18 bánh?
2. Có 5 viên kẹo dẻo màu khác nhau. Số cách để xiên 3 viên kẹo vào một xiên?
3. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 6 người ăn lẩu trên một bàn tròn (nếu chỉ quan tâm người ngồi cạnh là ai)?

Bài 2: Một hộp kẹo có 8 kẹo chanh, 6 kẹo dâu và 4 kẹo bạc hà. Chọn hú họa ra 6 viên kẹo từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

1. Phải có 2 viên kẹo mỗi vị?
2. Có đúng 2 kẹo bạc hà?

Bài 3: Có 6 học sinh (4 nữ 2 nam) được sắp xếp ngồi vào 6 chỗ đã ghi số thứ tự trên một bàn dài để ăn bán trú. Tìm số cách xếp:

1. Sao cho hai học sinh A và B ngồi ăn cạnh nhau?
2. Hai học sinh A và B không ngồi ăn cạnh nhau?
3. Sao cho bạn nữ tên Khuê ngồi ăn giữa hai bạn nữ khác?

Bài 4: Một nhà hàng có 9 nhân viên phục vụ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công:

1. 3 người làm ở tầng một, 2 người làm ở tầng hai và 4 người làm ở tầng ba?
2. một tầng có 3 người, một tầng có 4 người và một tầng có 2 người?

Công thức xác suất cổ điển

Bài 1: Một kiện hàng có 24 sản phẩm, trong đó có 14 sản phẩm loại I, 8 sản phẩm loại II và 2 sản phẩm loại III. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm ra để kiểm tra. Tính xác suất trong 4 sản phẩm đó:

1. Có 3 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II
2. Có ít nhất 3 sản phẩm loại I
3. Có ít nhất 1 sản phẩm loại III

Bài 2: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong bộ bài tú lơ khơ. Tính xác suất để trong sấp bài chứa hai bộ đôi (hai con cùng thuộc 1 bộ, hai con thuộc bộ thứ 2, con thứ 5 thuộc bộ khác)

Bài 3: Cho 100 tấm thẻ đánh các số nguyên dương từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ (có trả lại). Tính xác suất để 3 số trên các tấm thẻ chọn được có tổng là 100.

Bài 4: Một đoàn tàu có 4 toa được đánh số I, II, III, IV đỗ ở sân ga. Có 6 hành khách từ sân ga lên tàu. Mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để:

1. Toa I có 3 người, toa II có 2 người, toa III có 1 người.
2. Một toa có 3 người, một toa có 2 người và một toa có 1 người.

3. Mỗi toa có ít nhất 1 người.

Bài 5: Gieo đồng thời 2 con xúc xắc phân biệt. Tính xác suất để được hai mặt:

1. Tổng số chấm bằng 7; 2. Tổng số chấm nhỏ hơn 8; 3. Ít nhất 1 mặt 6 chấm.

Xác suất hình học

Bài 1: Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Lấy một điểm C bất kì trên đoạn thẳng đo. Tính xác suất chênh lệch độ dài giữa hai đoạn thẳng AC và CB không vượt quá 4cm

Bài 2: Một thanh sắt thẳng được bẻ thành ba khúc một cách một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để ba khúc một tam giác. Biết rằng thanh sắt dài l (đơn vị dài).

Công thức tính xác suất cơ bản

Bài 1: Cho các sự kiện A, B với $P(A) = \dfrac{2}{3}, P(B) = \dfrac{1}{2}, P(A+B) = \dfrac{5}{6}$. Tìm:

$P(AB), P(\overline{A}.\overline{B}), P(A\overline{B}), P(\overline{A}B)$

Bài 2: Trong cùng một phép thử, A và B là các sự kiện thỏa mãn $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{4}, P(B) = \dfrac{1}{2}$. Tính xác suất để A không xảy ra nhưng B xảy ra trong các trường hợp sau:

1. A và B xung khắc
2. A suy ra B
3. $P(AB) = \dfrac{1}{8}$.

Bài 3: Ba sinh viên Bách Khoa đang luyện tập chuẩn bị thi CK môn bóng rổ 1, mỗi người ném một quả bóng vào rổ với xác suất trúng rổ của mỗi người là $0,4; 0,5; 0,6$. Tìm xác suất:

1. Chỉ có người thứ hai ném trúng
2. Có ít nhất một người ném trúng
3. Cả ba người đều ném trúng

Bài 4: Có 3 tiêu chí phổ biến A, B, C cho việc chọn một chiếc xe hơi mới tương ứng là hộp số tự động, động cơ và điều hòa nhiệt độ. Dựa trên dữ liệu bán hàng trước đó ta có:

$P(A) = P(B) = P(C) = 0,7; P(A+B) = 0,8; P(A+C) = 0,9; P(C+B) = 0,85; P(A+B+C) = 0,95$

Tính xác suất:

1. Người mua chọn cả ba tiêu chí.
2. Người mua chọn chính xác 1 trong 3 tiêu chí

Dạng bài xác suất có điều kiện

Bài 1: Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố có 20.7% dân số dùng loại sản phẩm X, 50% dùng loại Y và trong số những người dùng Y có 36.5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

1. Dùng cả X và Y

2. Dùng Y biết người đó không dùng X

Bài 2: Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thức nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ 2 lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ 3 lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ 2. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được 3 vòng thi. Tính xác suất để một thí sinh bất kì

1. Được vào đội tuyển
2. Bị loại ở vòng thứ 3
3. Bị loại ở vòng thứ 2, biết rằng thí sinh này bị loại

Bài 3: Một lớp học của một trường đại học có 2/3 là nam sinh viên và 1/3 là nữ sinh viên. Số sinh viên quê ở Bắc Ninh chiếm tỉ lệ 40% trong nữ sinh viên và chiếm tỉ lệ 60% trong nam sinh viên.

1. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tính xác suất để chọn được một sinh viên quê ở Bắc Ninh. Nếu biết rằng sinh viên vừa chọn quê ở Bắc Ninh thì xác suất để sinh viên đó là nam bằng bao nhiêu?
2. Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại hai sinh viên của lớp. Tính xác suất để có ít nhất 1 sinh viên quê ở Bắc Ninh, biết rằng lớp có 60 sinh viên.

Bài 4: Trong 1 đội tuyển có 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác suất chiến thắng là 0,6;0,7 và 0,8. Giả sử mỗi người thi đấu một trận độc lập nhau. Tính xác suất để:

1. Đội tuyển thắng ít nhất 1 trận
2. A thua trong trường hợp đội tuyển thắng 2 trận

Bài 5: Trong năm học vừa qua, ở một trường học tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34%, thi trượt môn Triết là $24,5\%$, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Triết. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường.

1. Tính xác suất để người ấy trượt cả 2 môn Toán và Triết; đậu cả 2 môn Toán và Triết.
2. Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Triết thì xác suất để người ấy đậu môn Toán là bao nhiêu

Công thức Bernoulli

Bài 1: Một lô hàng gồm rất nhiều bóng đèn, trong đó có 8% bóng đèn xấu. Một người đến mua hàng với quy định: Chọn ngẫu nhiên 10 bóng đèn đem kiểm tra và nếu có nhiều hơn 1 bóng đèn xấu thì không nhận lô hàng. Tính xác suất để lô hàng được chấp nhận

Bài 2: Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của 1 máy là 8%. Khảo sát 1 lô hàng gồm 75 sản phẩm do máy đó sản xuất ra.

1. Tính xác suất để trong lô hàng có 10 phế phẩm.
2. Trong lô hàng, nhiều khả năng nhất là có bao nhiêu phế phẩm? Tính xác suất tương ứng.

Bài 3: Người ta muốn lấy ngẫu nhiên một số hạt giống có tỉ lệ hạt lép là 3% để nghiên cứu. Hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu hạt sao cho xác suất để có ít nhất 1 hạt lép không bé hơn 95%.

Bài 4:

1. Một khu dân cư A có tỉ lệ mắc bệnh B là 30%. Trong 1 đợt điều tra người ta chọn ngẫu nhiên 10 người. Tính xác suất trong đó có nhiều nhất 3 người mắc bệnh B.

2. Được biết trong khu vực đó 60% dân số có chích ngừa bệnh B. Tỷ lệ người kháng bệnh B đối với người được chích ngừa là 95%. Còn tỷ lệ kháng bệnh B đối với người không được chích ngừa là 20%. Chọn ngẫu nhiên 1 người thấy người này không mắc bệnh B. Tính xác suất người này không chích ngừa.

Bài 5: Từ một lô hàng có rất nhiều quyển vở với tỉ lệ hỏng là 5%, người ta chọn ngẫu nhiên từng quyển vở để kiểm tra.

1. Hỏi phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu quyển vở để xác suất có ít nhất 1 quyển vở hỏng không bé hơn 90%?

2. Giả sử việc kiểm tra sẽ dừng lại khi phát hiện 3 quyển vở hỏng. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần kiểm tra thứ 10.

Công thức xác suất đầy đủ. Công thức Bay-ét. (quan trọng)

Bài 1: Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Xác suất để phân xưởng 1, phân xưởng 2 và phân xưởng 3 sản xuất được sản phẩm loại A lần lượt là 0,7, 0,8 và 0,6. Từ một lô hàng gồm 20% sản phẩm của phân xưởng 1, 50% sản phẩm của phân xưởng 2 và 30% sản phẩm của phân xưởng 3 người ta lấy ra một sản phẩm để kiểm tra.

(a) Tính xác suất để sản phẩm được kiểm tra là loại A (0.72)

(b) Biết sản phẩm được kiểm tra là loại A. Tính xác suất để sản phẩm này do phân xưởng 2 sản xuất. (0.5556)

Bài 2: Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm 3 phế phẩm; lô II có 6 chính phẩm 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I bỏ sang lô II, sau đó từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm.

(a) Tính xác suất để 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm. (0.5304)

(b) Giả sử 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm. Hãy tính xác suất để 2 chính phẩm này là của lô I (ban đầu). (0.01956)

Bài 3: Một nhóm xạ thủ có 3 người bắn tốt và 4 người bắn khá với xác suất bắn trúng mỗi lần bắn của mỗi loại tương ứng là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên 2 xạ thủ và cho mỗi người bắn 1 lần.

(a) Tính xác suất để trong 2 lần bắn có đúng 1 người bắn trúng. (0.2657)

(b) Biết trong 2 lần đó có ít nhất 1 người bắn trượt, tính xác suất để cả 2 người đó là xạ thủ thuộc nhóm bắn tốt. (0.0936)

Bài 4: Trong một cái túi có chứa một viên bi màu xanh hoặc màu vàng với tỉ lệ bằng nhau. Một viên bi màu xanh được cho vào trong túi (giờ trong túi có 2 viên bi), sau đó ta lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi. Viên bi lấy ra có màu xanh. Tính xác suất mà viên bi còn lại trong túi đó cũng là màu xanh. $\left(\frac{2}{3}\right)$

Bài 5: Một người có ba chỗ yêu thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở mỗi chỗ tương ứng là 0.6; 0.7 và 0.8. Biết rằng đến một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tính xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất. (0.5026)

GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài toán đếm

Bài 1:

1. Số cách chọn 3 chiếc bánh trong số 18 bánh là: C_{18}^{3} cách
2. Số cách sắp xếp 3 viên kẹo từ 5 viên kẹo là: A_5^3 cách
3. Có $5! = 120$ cách

Bài 2:

1. Số cách chọn 2 kẹo chanh: C_8^2
   Số cách chọn 2 kẹo dâu: C_6^2
   Số cách chọn 2 kẹo bạc hà: C_4^2
   $\Rightarrow$ Số cách thỏa mãn là: $C_8^2.C_6^2.C_4^2 = 2520$ (cách)
2. Số cách chọn 2 kẹo bạc hà: C_4^2
   Số cách chọn 4 kẹo còn lại trong số kẹo chanh và dâu: C_{14}^4
   $\Rightarrow$ Số cách thỏa mãn là: $C_4^2.C_{14}^4 = 6006$ (cách)

Bài 3:

1. Ta coi A và B là một. Từ đó bài toán trở thành xếp 5 bạn vào 5 vị trí.
   Số cách xếp 5 bạn vào 5 vị trí: 5!
   A và B có thể đổi chỗ cho nhau $\Rightarrow$ có 2! cách xếp
   Như vậy số cách xếp thỏa mãn là: $5!.2! = 240$ (cách)
2. Xếp 4 bạn còn lại trừ A và B vào 4 chỗ ngồi $\Rightarrow$ có 4! (cách)
   Xếp A và B vào 5 chỗ trống giữa 4 bạn đó $\Rightarrow$ có A_5^2 (cách)
   Số cách thỏa mãn là: $4!.A_5^2 = 480$ (cách)
3. Chọn ra 2 bạn nữ ngồi cạnh Khuê có: A_3^2 (cách)
   Coi ba bạn đó là một. Bài toán trở thành xếp 4 bạn vào 4 chỗ ngồi
   $\Rightarrow$ Có 4! (cách)
   Số cách thỏa mãn là: $A_3^2.4! = 144$ (cách)

Bài 4:

1. Chọn ra 3 người làm ở tầng 1: C_9^3 cách
   Chọn ra 2 người từ 6 người còn lại làm ở tầng 2: C_6^2 cách
   Chọn ra 4 người còn lại làm ở tầng 3: C_4^4 cách
   Số cách thỏa mãn là: $C_9^3.C_6^2.C_4^4 = 1260$ cách
2. Chọn ra 3 người để làm ở một tầng bất kì: $C_9^3.C_3^1 = 252$ cách
   Chọn ra 4 người trong 6 người còn lại làm ở một trong hai tầng còn lại: $C_6^4.C_2^1 = 30$ cách
   Chọn ra 2 người cuối làm ở tầng còn lại: $C_2^2.C_1^1 = 1$ cách
   Số cách thỏa mãn là: $252.30.1 = 7560$ cách

Công thức xác suất cổ điển

Bài 1

Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{24}^4$.

1. A: "Có 3 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II"
   Số cách lấy 3 sản phẩm loại I là C_{14}^3. Số cách lấy 1 sản phẩm loại II là C_8^1. Số kết cục thuận lợi là $C_{14}^3.C_8^1$. Suy ra:
   $$P(A) = \frac{C_{14}^3.C_8^1}{C_{24}^4} = 0,2740$$
2. B: "Có ít nhất 3 sản phẩm loại I"
   Để trong 4 sản phẩm chọn ra có ít nhất 3 sản phẩm loại I, chỉ có hai khả năng là cả 4 đều loại I; hoặc 3 loại I, 1 loại II hoặc III. Ta tính được:
   $$P(B) = \frac{C_{14}^4 + C_{14}^3.C_{10}^1}{C_{24}^4} = 0,4368$$
3. C: Có ít nhất 1 sản phẩm loại III"
   Ta tính xác suất trong 4 sản phẩm không có sản phẩm loại III: $P(\overline{C}) = \dfrac{C_{22}^4}{C_{24}^4} = 0,6884$
   Do đó ta có $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0,3116$

Bài 2:

Gọi A là biến cố cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn hai bộ đôi có C_{13}^2 cách, mỗi bộ có C_4^2 cách

$\Rightarrow$ Có $C_{13}^2.C_4^2.C_4^2$ cách

Có 11 cách chọn bộ 1. Mỗi cách chọn bộ 1 có 4 cách chọn một quân bộ đó.

$\Rightarrow$ Số kết cục thuận lợi cho A là: $m = C_{13}^2 C_4^2 C_4^2.11.4$

Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{52}^5$

Vậy $P(A) = \dfrac{198}{4165}$

Bài 3:

Số kết cục đồng khả năng: $n = 100^3$

Gọi A: "Ba số có tổng là 100"

Ta đánh dấu trên trục số bởi 100 số 1 cách đều nhau 1 đơn vị. Khi đó, ta có 99 khoảng giữa 2 số 1 liên tiếp.

Nếu ta chia trục bởi 2 điểm chia nằm trong 99 khoảng đó, ta luôn được 3 phần có tổng số số 1 bằng 100. Mỗi phần đó tương ứng với 1 số nguyên dươn thỏa mãn đề bài.

Như vậy, số kết cục thuận lợi cho A là : C_{99}^2

$P(A) = \dfrac{C_{99}^2}{100^3}$

Bài 4:

Số kết cục đồng khả năng là: 4^6

1. A: "toa 1 có 3 người, toa II có 2 người và toa III có 1 người"

   Lần lượt chọn 3 người xếp vào toa đầu, 2 người xếp vào toa II và 1 người xếp vào toa III, ta có:
   $$P(A) = \frac{C_6^3 C_3^2 C_1^1}{4^6} = \frac{15}{1024} \approx 0,0146$$

2. B: "Một toa có 3 người, một toa có 2 người, một toa có 1 người"

   Chọn ra 3 người xếp vào một toa, rồi chọn ra 2 người xếp vào một toa khác, cuối cùng cho người còn lại vào một toa. Ta có:

$$P(B) = \frac{C_6^3 \times 4_3^2 \times 3 \times C_1^1 \times 2}{4^6} = \frac{45}{128} \approx 0,3516$$

3. C: "Mỗi toa có ít nhất 1 người". Khi đó chỉ có thể xảy ra 2 khả năng:

   Khả năng thứ nhất: 1 toa 3 người, 3 toa còn lại 1 người.

   Khả năng thứ hai: 2 toa 2 người và 2 toa 1 người.

$$P(C) = \frac{C_6^3 \times 4 \times 3! + C_4^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 2!}{4^6} = \frac{195}{512} \approx 0,3809$$

Bài 5:

1. Nhận xét: $7 = 6+1 = 5+2 = 4+3$

   Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của hai con xúc xắc bằng 7" $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2. Gọi B là biến cố "Tổng số chấm của hai con xúc xắc nhỏ hơn 8"

   Gọi B_k là biến cố "Tổng số chấm của hai con xúc xắc bằng k". Ta xét các tình huống

   - Tổng số chấm bằng 8: $P(B_8) = \frac{5}{36}$
   - Tổng số chấm bằng 9: $P(B_9) = \frac{4}{36}$
   - Tổng số chấm bằng 10: $P(B_{10}) = \frac{3}{36}$
   - Tổng số chấm bằng 11: $P(B_{11}) = \frac{2}{36}$
   - Tổng số chấm bằng 12: $P(B_{12}) = \frac{1}{36}$

   Vậy $P(B) = 1 - \frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{7}{12}$

3. Gọi C: "Có ít nhất một mặt 6 chấm" $\Rightarrow P(C) = \frac{11}{36}$

Công thức tính xác suất hình học

Bài 1:

Gọi x là độ dài $AC \Rightarrow CB = 10 - x$. Số kết cục đồng khả năng là độ dài đoạn thẳng AB bằng 10cm. Gọi A là "chênh lệch độ dài giữa AC và CB không quá 4 cm", khi đó, A biểu thị bởi miền hình học:

$$H = \{x \in [0,10], \quad |x - (10-x)| \le 4\}$$

Vì H là đoạn thẳng có độ dài $7-3=4$ (cm) nên ta dễ dàng tính được $P(A)$ theo định nghĩa xác suất hình học: $P(A)=\dfrac{4}{10}=0,4$

Bài 2:
Gọi A: "Ba đoạn sắt bẻ ra tạo thành một tam giác".

Gọi x, y, $l-(x+y)$ là độ dài 3 khúc được bẻ ngẫu nhiên. Khi đó

$$\Omega=\{(x,y)|x>0,y>0,x+y<l\}$$

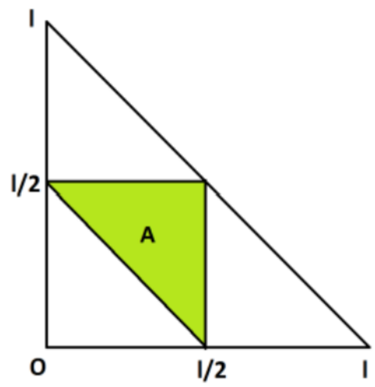
Để tạo thành tam giác thì x,y phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} x+y & >l-(x+y) \\ x+l-(x+y) & >y \\ y+l-(x+y) & >x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & >\dfrac{l}{2} \\ y & <\dfrac{l}{2} \\ x & <\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

Khi đó $A-\{(x,y)|x+y>\frac{l}{2},x<\frac{l}{2},y<\frac{l}{2}\}$

Biểu diễn x,y trên trục tọa độ ta tính được

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=0,25$$



Công thức tính xác suất cơ bản

Bài 1:

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=\dfrac{1}{3}$

$P(\overline{AB})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\dfrac{1}{6}$

$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=\dfrac{2}{3}$

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{3}$

$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$

Bài 2:

1. A và B xung khắc thì $\overline{A}.B = B$ suy ra $P(B) = 0,5$

2. A suy ra B thì $P(AB) = P(A)$ suy ra $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = 0,25$

3. $P(\overline{A}B) = P(B) - P(A) = 0,375$

Bài 3:

1. Chỉ có người thứ 2 ném trúng: $P(A) = 0,6 \times 0,5 \times 0,4 = 0,12$

2. Có ít nhất 1 người ném trúng: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,6 \times 0,5 \times 0,4 = 0,88$

3. Cả 3 người đều ném trúng: $P(C) = 0,4 \times 0,5 \times 0,6 = 0,12$

Bài 4:

1. Gọi A,B,C lần lượt là người chọn mua tiêu chí A,B,C. Gọi D là người chọn mua cả 3 tiêu chí.

$$\Rightarrow D = ABC \Rightarrow P(D) = P(ABC)$$

Có:
$\Rightarrow D = ABC \Rightarrow P(D) = P(ABC)$
$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0,7 + 0,7 - 0,8 = 0,6$
$P(BC) = P(B) + P(C) - P(B+C) = 0,7 + 0,7 - 0,85 = 0,55$
$P(CA) = P(C) + P(A) - P(C+A) = 0,7 + 0,7 - 0,9 = 0,5$
$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$
$\Rightarrow P(ABC) = P(A+B+C) - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(BC) + P(CA)$
$= 0,95 - 0,7 - 0,7 - 0,7 + 0,6 + 0,55 + 0,5 = 0,5 \Rightarrow P(D) = P(ABC) = 0,5$

2. Gọi $E =$ Người mua chọn chính xác một trong ba tiêu chí.

$$\Rightarrow E = \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$$
$$\Rightarrow P(E) = P(\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) + P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) + P(A\,\overline{B}\,\overline{C})$$

Có:

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) = P(\overline{A}\,\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A+B}) - P(\overline{A+B+C}) = 1 - P(A+B) - [1 - P(A+B+C)]$$
$$= P(A+B+C) - P(A+B) = 0,95 - 0,8 = 0,15$$

Tương tự:

$$P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) = P(A+B+C) - P(A+C) = 0,95 - 0,9 = 0,05$$
$$P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(A+B+C) - P(B+C) = 0,95 - 0,85 = 0,1$$
$$\Rightarrow P(E) = 0,15 + 0,05 + 0,1 = 0,3$$

2.2 Dạng bài toán xác suất có điều kiện

Bài 1:
Đặt A: "Người dân trong thành phố dùng sản phẩm X"

B: "Người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y"

=> Theo đề bài, ta có: $P(A) = 0,207; P(B) = 0,5; P(A|B) = 0,365$

1. Xác suất người dân đó dùng cả X và Y là

$$P(AB) = P(B).P(A|B) = 0,5.0,365 = 0,1825$$

2. Xác suất người dân đó dùng Y biết rằng không dùng X là

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}.B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(\overline{A})} = \frac{0,5 - 0,1825}{1 - 0,207} = 0,404$$

Bài 2:

Đặt A_i: "Thí sinh được chọn ở vòng i" với $i \in \{1,2,3\}$

=> Theo đề bài, ta có: $P(A_1) = 0,8; P(A_2|A_1) = 0,7; P(A_3|A_1A_2) = 0,45$

1. Xác suất để thí sinh đó được vào đội tuyển là

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1A_2) = 0,8.0,7.0,45 = 0,252$$

2. Xác suất để thí sinh đó bị loại ở vòng thứ 3 là:

$$P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(\overline{A_3}|A_1A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1).(1-P(A_3|A_1A_2)) = 0,8.0,7.0,55 = 0,308$$

3. Đặt K: "Thí sinh đó bị loại"

$$P(K) = P(\overline{A_1}) + P(A_1\overline{A_2}) + P(A_1A_2\overline{A_3}) = 1 - P(A_1) + P(A_1) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2\overline{A_3})$$
$$= 1 - P(A_1A_2) + P(A_1A_2\overline{A_3}) = 1 - P(A_1).P(A_2|A_1) + P(A_1A_2\overline{A_3}) = 1 - 0,8.0,7 + 0,308 = 0,748$$

Vậy xác suất để thí sinh đó bị loại ở vòng thứ 2 biết rằng thí sinh đó bị loại là:

$$P(\overline{A_2}|K) = \frac{P(\overline{A_2}.K)}{P(K)} = \frac{P(A_1\overline{A_2})}{P(K)} = \frac{P(A_1).P(\overline{A_2}|A_1)}{P(K)} = \frac{0,8.(1-0,7)}{0,748} = 0,3209$$

Bài 3:

1. Đặt A: "Chọn được sinh viên nam" $\Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$
   B: "Chọn được sinh viên nữ" => $P(B) = \frac{1}{3}$
   C: "Chọn được sinh viên quê ở Bắc Ninh"
   => Ta có:
   $$P(C) = P(AC) + P(BC) = P(A).P(C|A) + P(B).P(C|B) = \frac{8}{15}$$
   Do đó, $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A).P(C|A)}{P(C)} = \frac{3}{4}$

2. Lớp sinh viên có 60 sinh viên suy ra có 40 sinh viên nam và 20 sinh viên nữ
   Số sinh viên nam quê ở Bắc Ninh: 24
   Số sinh viên nữ quê ở Bắc Ninh: 8
   => Tổng số sinh viên quê ở Bắc Ninh là 32 sinh viên
   F: " Ít nhất 1 sinh viên quê ở Bắc Ninh"
   $$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{C_{28}^2}{C_{60}^2} = \frac{232}{295}$$

Bài 4: Đặt:

A: "Vận động viên A chiến thắng" =>$P(A) = 0,6$

B: "Vận động viên B chiến thắng" =>$P(B) = 0,7$

C: "Vận động viên C chiến thắng" =>$P(C) = 0,8$

1. Gọi K: "Đội tuyển thắng ít nhất 1 trận"

$$P(K) = 1 - P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0,976$$

2. A thua trong trường hợp đội tuyển thắng 2 trận
   Gọi E: "Đội tuyển thắng 2 trận"

$$P(E) = P(A.B.\overline{C}) + P(A.\overline{B}.C) + P(\overline{A}.B.C) = 0,452$$

$$P(\overline{A}|E) = \frac{P(\overline{A}.E)}{P(E)} = \frac{P(\overline{A}.B.C)}{P(E)} = \frac{56}{113} \approx 0,4956$$

Bài 5:
Đặt

T: "Sinh Viên thi trượt môn Toán" =>$P(T) = 0,34$

L: "Sinh Viên thi trượt môn Triết" =>$P(L) = 0,205$

Khi đó $P(L|T) = 0,5$

1. Xác suất để sinh viên đó trượt cả 2 môn Toán và Triết

$$P(T.L) = P(T).P(L|T) = 0,34.0,5 = 0,17$$

   Xác suất để sinh viên đó đậu cả 2 môn Toán và Triết

$$P(\overline{T}.\overline{L}) = 1 - P(T + L) = 1 - P(T) - P(L) + P(T.L) = 0,625$$

2. Xác suất để sinh viên đó đậu môn Toán biết rằng trượt môn Triết

$$P(\overline{T}|L) = \frac{P(\overline{T}.L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(T.L)}{P(L)} = \frac{7}{41}$$

2.3 Dạng bài toán Công thức Bernoulli

Bài 1:

Việc kiểm tra 10 bóng đèn, nghĩa là thực hiện 10 phép thử Bernoulli, với xác suất "thành công" gặp bóng xấu $p = 0,08$ (không đổi).

Khi đó

$$P_{10}(k) = C_{10}^{k}.0,08^{k}.0,92^{10-k}, k = 0,1,2,...,10$$

(k: Số lần thành công trong 10 phép thử)

Đặt A:" Nhận lô hàng"

$$P(A) = P_{10}(0) + P_{10}(1) = (0,92)^{10} + C_{10}^{1}.0,08.(0,92)^{9} = 0,812$$

Bài 2:

Nếu xem việc máy sản xuất ra một sản phẩm là 1 phép thử Bernoulli, với xác suất cho "thành công" là $p = 0,08$ (không đổi), thì máy đó sản xuất 75 sản phẩm, nó đã thực hiện quá trình $P_{75}(k;0,08)$

1. Xác suất phải tính
$$P_{75}(10) = C_{75}^{10}.(0,08)^{10}.(0,92)^{65} = 0,03941$$
2. Số phế phẩm nhiều khả năng nhất trong lô hàng là:
$$[(75.0,08 - 0,92] + 1 = 6$$
với xác suất tương ứng:
$$P_{75}(6) = C_{75}^{6}.(0,08)^{6}.(0,92)^{69} = 0,16745$$

Bài 3:

Gọi n là số hạt phải lấy, chúng ta có $P_n(k;0,03)$.

Xác suất để có ít nhất 1 hạt lép là: $1-(1-0,03)^n = 1-(0,97)^n$

Theo giả thiết, ta có:

$$1-(0,97)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,97)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0,05)}{ln(0,97)} = 98,3523$$

Vậy phải lấy ít nhất 99 hạt giống.

Bài 4:

Gọi B: "Người được chọn mắc bệnh B" =>$P(B) = 0,3$

Chọn ngẫu nhiên 10 người là thực hiện 10 phép thử Bernoulli với xác suất thành công (mắc bệnh B), $P(B) = 0,3$ (không đổi). Ta có: $P_{10}(k;0,3) = C_{10}^{k}.0,3^{k}.0,7^{10-k}$

1. Xác suất trong đó có nhiều nhất 3 người mắc bệnh B
$P_{10}(k \leq 3) = P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)+P_{10}(3) = 0,0282+0,1211+0,2335+0,2668 = 0,6496$
2. Gọi A: "Chích ngừa bệnh B" => $P(A) = 0,6$

Theo bài, ta có: $P(\overline{B}|A) = 0,95; P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,2$

Xác suất chọn ngẫu nhiên một người thấy người này không mắc bệnh B
$$P(\overline{B}) = P(A).P(\overline{B}|A) + P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,65$$
xác suất người này không chích ngừa:
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}.\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})} = \frac{8}{65}$$

Bài 5:

Gọi p là xác suất vở hỏng trong mỗi lô hàng, $p = 0,05$ và gọi n là số quyển vở cần kiểm tra. Ta có dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công (vở hỏng) là 0,05. Do đó $P_n(k; 0,05)$

1. Đặt A: "Ít nhất 1 quyển vở hỏng"

$$P(A) = 1 - P_n(0) = 1 - (0,95)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow n \geq 44,98$$

   Nên phải kiểm tra ít nhất 45 quyển vở.

2. Việc kiểm tra phát hiện 3 quyển vở hỏng suy ra 9 lần kiểm tra đầu phát hiện 2 quyển vở hỏng và lần thứ 10 phải là vở hỏng.
   Đặt B: "Kiểm tra dưng lại ở lần thứ 10"

$$P(B) = P_9(2).0,05 = (C_9^2.(0,05)^2.(0,95)^7).0.05 = 0,003143$$

.

2.4 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bay-ét

Bài 1:

Gọi H là sự kiện "sản phẩm được kiểm tra là loại A"; A_i là sự kiện "sản phẩm được kiểm tra do phân xưởng i sản xuất, $i = 1,2,3$. Ta thấy, A_1, A_2, A_3 tạo thành 1 hệ đầy đủ với $P(A_1) = 0,2$; $P(A_2) = 0,5$ và $P(A_3) = 0,3$

(a) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ với $P(H|A_1) = 0,7; P(H|A_2) = 0,8$ và $P(H|A_3) = 0,6$ ta nhận được:

$$P(H) = P(A_1).P(H|A_1) + P(A_2).P(H|A_2) + P(A_3).P(H|A_3)$$
$$= 0,2 \times 0,7 + 0,5 \times 0,8 + 0,3 \times 0,6 = 0,72 = 72\%$$

Ý nghĩa của xác suất này là tỷ lệ sản phẩm loại một của nhà máy.

(b) Áp dụng công thức Bay-ét ta tính

$$P(A_2|H) = \frac{P(A_2).P(H|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(H|A_i)} = \frac{0,5 \times 0,8}{0,72} = \frac{5}{9}$$

Bài 2:

(a) Gọi H là sự kiện "hai sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm"; A_i là sự kiện "trong 2 sản phẩm lấy từ lô I bỏ sang lô II có i chính phẩm", $i = 0,1,2$. Khi đó A_0, A_1, A_2 tạo thành 1 hệ đầy đủ với:

$$P(A_0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}; \quad P(A_1) = \frac{C_{73}^{11}}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}; \quad P(A_2) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15};$$

và

$$P(H|A_0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}; \quad P(H|A_1) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}; \quad P(H|A_2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(H) = P(A_0).P(H|A_0) + P(A_1).P(H|A_1) + P(A_2).P(H|A_2)$$
$$= \frac{1}{15} \times \frac{15}{45} + \frac{7}{15} \times \frac{21}{45} + \frac{7}{15} \times \frac{21}{45} = \frac{358}{675} \simeq 0,5304$$

(b) Bài này ta áp dụng công thức xác suất có điều kiện bởi ta đã giả sử H; sự kiện sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm.
Ta gọi thêm A: Sự kiện 2 sản phẩm chính là của lô I sau khi chuyển 2 bi từ bên túi kia.
Vì vậy đề bài bảo chúng ta tính $P(A|H)$. Ta áp dụng công thức điều kiện bình thường:

$$P(A|H) = \frac{P(AH)}{P(H)}$$

Ta có $P(AH) = P(A)$ bởi lấy được 2 chính phẩm từ lô I ban đầu thì cũng là sự kiện H.
Giờ ta tính $P(A)$, thì sẽ là tách của 2 sự kiện liên tiếp là nhặt 2 viên bi chính phẩm từ lô I và nhặt đúng 2 viên đó lúc sau. Vậy:

$$P(A) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} \times \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{7}{675}$$

$$P(A|H) = \frac{7}{675} \times \frac{675}{358} = \frac{7}{358} \simeq 0,01956$$

Bài 3:

Gọi $A_1 = \{\text{Có } i \text{ người bắn tốt trong số 2 người bắn}\}, i = 0,1,2.$

Hệ A_i tạo thành 1 hẹ đầy đủ với:

$$P(A_0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}, \quad P(A_1) = \frac{3.4}{C_7^2} = \frac{4}{7}, \quad P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$$

(a) Gọi H = Trong 2 lần bắn có đúng một người bắn trúng.
$P(H|A_0) = 2.0,2.0,8 = 0,32$; $P(H|A_1) = 0,1.0,8 + 0,2.0,9 = 0,26$;
$P(H|A_2) = 2.0,1.0,9 = 0,18$
Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(H) = P(A_0).P(H|A_0) + P(A_1).P(H|A_1) + P(A_2).P(H|A_2)$$

$$= \frac{2}{7}.0,32 + \frac{4}{7}.0,26 + \frac{1}{7}.0,18 = 0,2657$$

(b) Gọi B = Trong 2 lần bắn có ít nhất 1 người bắn trượt.
$P(B|A_0) = 1 - 0,8.0,8 = 0,36$; $P(B|A_1) = 1 - 0,9.0,8 = 0,28$; $P(B|A_2) = 1 - 0,9.0,9 = 0,19$
Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(A_0).P(B|A_0) + P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2)$$

$$= \frac{2}{7}.0,36 + \frac{4}{7}.0,27 + \frac{1}{7}.0,19 = 0,29$$

Xác suất cần tính là:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{1}{7}.\frac{0,19}{0,29} = \frac{19}{203} = 0,0936$$

Bài 4:

Đầu tiên, ta phân tích các sự kiện xem mối quan hệ của nó.

Gọi G là sự kiện ban đầu túi chứa viên bi màu xanh. $\overline{G}$ là sự kiện ban đầu túi chứa viên bi màu vàng.

Ta dễ thấy là sự kiện mà viên bi trong túi còn lại cũng màu xanh sau khi lấy ra viên bi màu xanh chính là sự kiện G luôn.

Ta gọi sự kiện H là khi ta lấy ra được viên bi có màu xanh. Vậy đề bài bắt ta tính $P(G|H)$.

Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(G|H) = \frac{P(H|G) \times P(G)}{P(H|G) \times P(G) + P(H|\overline{G}) \times P(\overline{G})} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Bài 5:

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là "cá câu được ở chỗ thứ i" thì hệ A_1, A_2, A_3 tạo thành hệ đầy đủ.

Dễ thấy:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Gọi H là "thả câu 3 lần và chỉ câu được 1 con cá". Theo công thức đầy đủ, ta có:

$$P(H) = P(A_1).P(H|A_1) + P(A_2).P(H|A_2) + P(A_3).P(H|A_3)$$

ở đó

$$P(H|A_1) = 3 \times 0,6^1 \times 0,4^2; \quad P(H|A_2) = 3 \times 0,7^1 \times 0,3^2$$
$$P(H|A_3) = 3 \times 0,8^1 \times 0,2^2$$

Như vậy, $P(H) = 0,191$. Theo công thức Bayes suy ra

$$P(A_1|H) = \frac{P(A_1).P(H|A_1)}{P(H)} \simeq 0,5026$$