GIẢI TÍCH I
BÀI 14
§ 2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao:

Định nghĩa: Cho $z = f(x, y)$, ta định nghĩa:

$$f''_{x^2}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f''_{y^2}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$f''_{xy}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f''_{yx}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Tương tự nếu $z = g(x, y, z)$ thì:

$$g'''_{x^3}(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right); \quad g'''_{xyz}(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right).$$

$$g'''_{yx^2}(x, y, z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right), \ldots$$

Ví dụ 1.

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

b) $z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

c) $z = e^{xe^y}$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

d) $z = \sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

e) $w = e^{xyz}$. Tính w'''_{xyz}.

f) $g(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$. Tính $g''_{xx}(0,0)$, $g''_{xy}(0,0)$, $g''_{yy}(0,0)$.

g) $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ CMR $f''_{yx}(0,0) = 1$, $f''_{xy}(0,0) = -1$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{xy}(0,0)$ $(\nexists)$

i), $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{yx}(0,0)$ $(\nexists)$

k), Cho $z = y\sin\dfrac{y}{x}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

l), Cho $z = x\cos\dfrac{x}{y}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

m) Cho $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin^3 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f'_x(x,\ y),\ f''_{xy}(0,\ 0)$

$$\left(f'_x(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{(y^2-x^2)\sin^3 y}{(x^2+y^2)^2} & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & x=y=0\end{cases},\quad f''_{xy}(0,\ 0)=1\right)$$

n) Cho $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin^3 x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f'_y(x,\ y),\ f''_{yx}(0,\ 0)$

$$\left(f'_y(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)\sin^3 y}{(x^2+y^2)^2} & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & x=y=0\end{cases},\quad f''_{yx}(0,\ 0)=1\right)$$

o) Cho $z=ye^{\frac{y}{x}}$. Tính $A=x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}$ (0)

p) Cho $z=ye^{\frac{x}{y}}$. Tính $A=x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}$ (0)

Định lí Schwart. z = f(x, y) có các đạo hàm riêng $f''_{xy},\ f''_{yx}$ trong lân cận $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại $M_0(x_0,y_0)\Rightarrow f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$.

Chú ý: Định lí này có thể mở rộng cho đạo hàm riêng cấp cao hơn và cho hàm số n biến số nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục.

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng cấp hai: $f''_{xy},\ f''_{yx}$

$$a.\ \ f(x,y)=x^2y^3+y^5;\qquad b,\ \ f(x,y)=e^{xy}+\sin(x^2+y^2)$$

Định nghĩa. z = f(x, y), ta định nghĩa $d^nz=d(d^{n-1}z)$, $2\le n\in N$.

Nhận xét:

+ Khi $x,\ y$ là các biến số độc lập ta có: $d^nz=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$.

+ Khi $x,\ y$ không phải là các biến số độc lập thì công thức trên không còn đúng với $n\ge 2$.

Thật vậy: $d^2z=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f+f''_{x^2}d^2x+f''_{y^2}d^2y$

Do đó vi phân toàn phần $d^nz\ (n\ge 2)$ của hàm z nhiều biến số không có dạng bất biến.

Ví dụ 3

a) $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$. Tính $d^2f0,0)$

b) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+5xz+7yz$. Tính $d^2f(0,0,0)$.

c) $z=x^2+2y+y^2-4\ln x-10\ln y$. Tính $d^2(1,2)$

d) $z=e^{xy}$. Tính d^2z

e) $z = e^x \cos y$. Tính d^3z.

f) $f(x, y) = x^{2y}$. Tính $d^2f(1,1)$ $\quad (2dx^2 + 4dxdy)$

g) ($f(x, y) = y^{3x}$. Tính $d^2f(1,1)$ $\quad (6dxdy + 6dy^2)$

6. Công thức Taylor

Định lí: f(x,y) có đạo hàm riêng đến cấp $(n+1)$, liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$. Nếu $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1$$

Ví dụ 4

a, Khai triển $f(x, y) = -x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm (- 2, 1).

b, Khai triển Maclaurin $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

c, Khai triển Maclaurin $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$.

d, Viết công thức Taylor hàm $f(x, y) = y^x$ ở lân cận điểm (1, 1) đến bậc hai.

e, Cho hàm ẩn z xác định bởi $z^3 - 2xz + y = 0$, biết z(1, 1) = 1. Hãy tính một số số hạng của khai triển hàm z theo luỹ thừa của (x – 1) và (y – 1).

§3. Cực trị

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa: $z = f(M), \quad M \in R^n$.

Ta bảo z đạt cực tiểu tại $M_0 \Leftrightarrow f(M) > f(M_0), \forall M \in U_\varepsilon(M_0) \backslash \{M_0\}$.
Tương tự z có cực đại tại $M_1 \Leftrightarrow f(M) < f(M_1), \forall M \in U_\varepsilon(M_1) \backslash \{M_1\}$.

Ví dụ 1. a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = 4 - x^2 - y^2$

II. Quy tắc tìm cực trị

a, $z = f(x,y)$, đặt $p = f'_x$, $q = f'_y$, $a = f''_{x^2}$, $b = f''_{xy}$, $c = f''_{y^2}$

Định lí 1. $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0, \exists f'_x, f'_y \Rightarrow f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

Định nghĩa: ta gọi M_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0) \\ \nexists f'_x(M_0),\ \nexists f'_y(M_0) \end{array}\right.$

Định lí 2: Giả sử $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$, $f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$. Khi đó:

+ Nếu $b^2 - ac < 0$ thì f(x, y) đạt cực trị tại M_0; cực tiểu nếu $a > 0$, cực đại nếu $a < 0$.

+ Nếu $b^2 - ac > 0$ thì f(x, y) không đạt cực trị tại M_0.

+ Nếu $b^2 - ac = 0$ thì không có kết luận gì về cực trị tại M_0.

Ví dụ 2: Tìm các cực trị của các hàm số sau:

a) $z = x^2 - 2x + \arctan y^2$ $\quad (z_{CT}(1\,;\,0) = -1)$

b) $z = \operatorname{arccot} x^2 - y^2 + 2y$ $\quad (z_{CĐ}(0\,;\,1) = \dfrac{\pi}{2} + 1)$

c) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ $\quad (z_{CĐ}(6\,;\,3) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0))$

d) $z = 3xy^2 - y^3 - x^4$ $\quad (z_{CĐ}(3\,;\,6) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0))$

e) $z = (x^2 + 2x - y)e^{-2y}$ $\quad (z_{CT}\left(-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{e}{2})$

f) $z = x + y - \dfrac{1}{xy}$ $\quad (z_{CĐ}(-1\,;\,-1) = 3)$

g) $z = x^3 - y^3 - 3xy$ $\quad (z_{CĐ}(-1\,;\,1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0))$

h) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ $\quad$ i) $z = \dfrac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \left(x^2 + y^2\right) - xy + 1$

k) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad$ l) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

m) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$ $\quad$ n) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

p) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

q) $z = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3\right)$ $\quad (z_{CĐ}(0\,;\,-1) = 2$, $\nexists$ cực trị tại $(2\,;\,1)$

+) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}\left(-2x + 3y - y^3 + 2\right) = 0 \\ e^{-x}\left(-3 + 3y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^3 - 3y - 2}{-2} \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(0\,;\,-1) \\ M_2(2\,;\,1) \end{cases}$

+) $z''_{xx} = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3 - 4\right)$, $z''_{xy} = e^{-x}\left(3 - 3y^2\right)$, $z''_{yy} = e^{-x}6y$

M_i	A	B	C	Δ	Kết luận
M_1	-2	0	-6	-12	$z_{CĐ}(M_1) = 2$
M_2	$-2e^{-2}$	0	$6e^{-2}$	$12e^{-4}$	Không có cực trị

r) $z = e^{-y}\left(3x - x^3 - 2y\right)$ $\quad (z_{CĐ}(-1\,;\,0) = -2$, $\nexists$ cực trị tại $(1\,;\,2)$

s) $z = xy\left(3 - x - y\right)$ $\quad (z_{CĐ}(1\,;\,1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$, $(0\,;\,3)$, $(3\,;\,0)$

t) $z = xy\left(x + y + 3\right)$ $\quad (z_{CĐ}(-1\,;\,-1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$, $(0\,;\,-3)$, $(-3\,;\,0)$

u) $z = x^2 + \dfrac{2}{x} + y + \dfrac{4}{y}$ $\quad (z_{\min}(1\,;\,2) = 7$, $(1\,;\,-2)$ không là cực trị)

v) $z = x + \dfrac{1}{x} - y^2 - \dfrac{2}{y}$ $\quad (z_{\max}(-1\,;\,1) = 5$, $(1\,;\,1)$ không là cực trị)

Have a good understanding!