



**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**HANOI UNIVERSITY OF**  
**SCIENCE AND TECHNOLOGY (HUST)**



**Viện Vật lý Kỹ thuật**  
**School of Engineering Physics (SEP)**

## CHƯƠNG 4

## ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

1. Khối tâm và chuyển động khối tâm
2. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn
3. Chuyển động quay của vật rắn
4. Công và động năng trong CĐ quay



1

### 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm


**Khái niệm khối tâm (center of mass)**

☞ Được đưa ra lần đầu tiên bởi nhà toán học - vật lý học Hy Lạp cổ đại Domenico Fetti Archimedes of Syracuse (sinh tại vùng sicily thuộc Ý ngày nay).

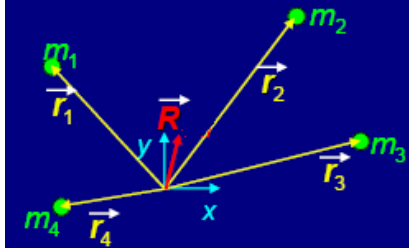
☞ *Khối tâm của hệ chất điểm là một điểm đặc biệt mà có thể coi khối lượng của hệ tập trung tại điểm đó.*

☞ *Khối tâm là một hàm phụ thuộc vào vị trí và khối lượng các chất điểm trong hệ, tức là:*

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



**Domenico Fetti Archimedes**



2

## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Khái niệm khối tâm (center of mass)

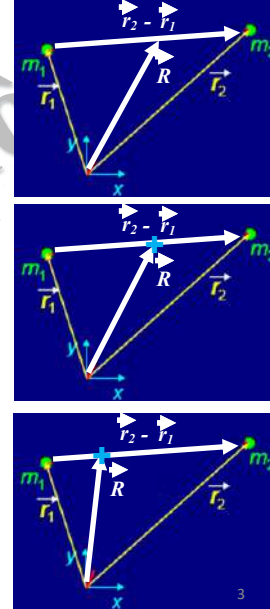
Hệ có 2 chất điểm

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2) \vec{r}_1 + m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2}$$

Hay:  $\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{M} \quad (M = m_1 + m_2)$

Nếu  $m_1 = m_2$   $\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{1}{2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

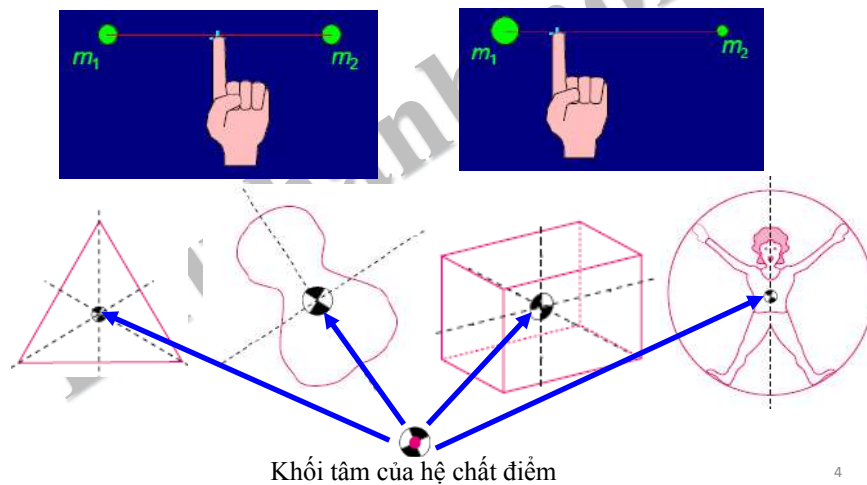
Nếu  $m_1 = 3 m_2$   $\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{1}{4} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$



## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Khái niệm khối tâm (center of mass)

♦ Khối tâm của hệ chất điểm được xác định như là vị trí trung bình của vị trí các chất điểm (vị trí thăng bằng).



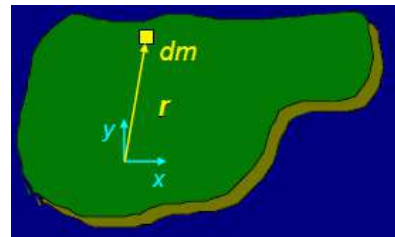
## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Khái niệm khối tâm (center of mass)

Tọa độ (các thành phần) của khối tâm  $\vec{R} = R(X, Y, Z)$

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Với vật rắn (rigid body), vị trí khối tâm được cố định và có mối liên hệ với vật thể (nhưng không nhất thiết phải gắn với hệ).



$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

5

## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Chuyển động của khối tâm

#### Vận tốc và gia tốc

Nếu mỗi chất điểm trong hệ CĐ với vận tốc  $v_i \Rightarrow$  khối tâm cũng CĐ

Từ định nghĩa:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \left( M = \sum_{i=1}^n m_i \right)$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{K}_i$$

♦ Vận tốc:  $\vec{V} = \frac{\vec{K}}{M} \Rightarrow \vec{K} = M\vec{V}$  Tổng động lượng của hệ bằng động lượng của 1 chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ, vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ

♦ Gia tốc:  $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$

6

## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Chuyển động của khối tâm

#### Phương trình động lực học

- ☞ Xét:  $\left\{ \begin{array}{l} + \text{Hệ } n \text{ chất điểm } m_1, m_2, \dots, m_n. \\ + \text{Mỗi chất điểm chịu tác dụng của lực } \vec{F}_i \end{array} \right.$

- ☞ Xuất phát từ biểu thức vận tốc:  $\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

- ♦ Lấy đạo hàm 2 vế theo thời gian:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

7

## 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Chuyển động của khối tâm

#### Phương trình động lực học

♦ Hay:  $\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{A} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

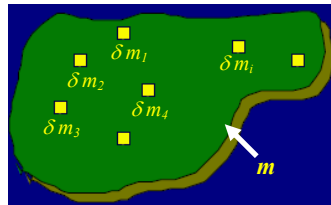
- ♦ *Khối tâm của một hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ, và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp ngoại lực tác dụng lên hệ.*



8

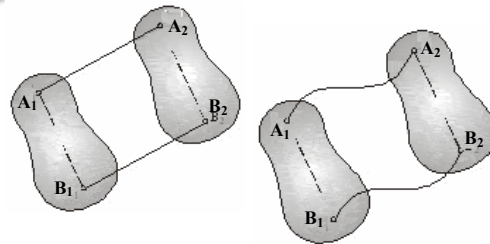
## 2. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

☞ **Vật rắn:** tập hợp của vô số các chất điểm vô cùng nhỏ có khối lượng  $\delta m$ , trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn luôn không đổi.



☞ **Chuyển động tịnh tiến:**

♦ **Chuyển động,** trong đó, mọi chất điểm cấu thành vật rắn đều vạch những quỹ đạo giống nhau  
 $\Rightarrow$  đều CĐ cùng vận tốc  $\vec{v}$  và gia tốc  $\vec{a}$



9

## 2. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

☞ **Vật rắn  $m$ :**

♦  $\delta m_1, \delta m_2, \dots, \delta m_p, \dots$ : các phần tử khối lượng.

♦  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$ : các ngoại lực tác dụng lên từng phần tử khối lượng,

♦  $F'_1, F'_2, \dots, F'_i, \dots$ : các nội lực tương tác giữa các phần tử khối lượng

☞ Ph/tr ĐLH đ/v mỗi phần tử khối lượng:  $+$

$$\begin{cases} \delta m_1 \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}'_1 \\ \delta m_2 \vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{F}'_2 \\ \dots \\ \delta m_i \vec{a} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i \end{cases}$$

♦ Theo định luật 3 Newton :  $\sum_i \vec{F}'_i = 0$   $\left( \sum_i \delta m_i \right) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{F}'_i$

♦ có:  $\left( \sum_i \delta m_i \right) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$  hay  $m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow$  Ph/tr ĐLH vật rắn CĐ tịnh tiến.

♦ Các đặc trưng động học và động lực học của chất điểm hoàn toàn có thể áp dụng được cho vật rắn.

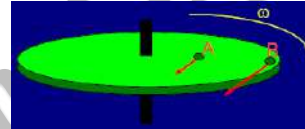


10

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Đặc trưng của chuyển động quay

☞ **CĐ quay của vật rắn quanh trục cố định:**  
CĐ trong đó mọi điểm của vật rắn vạch những quỹ đạo tròn trên các mặt phẳng vuông góc trục quay, có tâm nằm trên trục quay và có các bán kính  $r$  khác nhau.



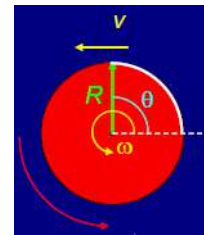
#### Vận tốc trong CĐ quay

☞ Vận tốc góc cho mọi điểm trên vật:

$$\omega = \text{const}$$

☞ Vận tốc dài cho mọi điểm của vật rắn khác nhau, do:

$$v = \omega \cdot R$$



11

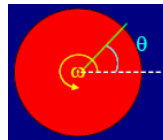
### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Đặc trưng của chuyển động quay

##### Vận tốc trong CĐ quay

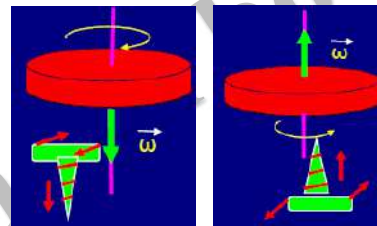
☞ Vector vận tốc góc  $\vec{\omega}$ :

◆ Độ lớn:  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$



◆ Phương  $\equiv$  phương trục quay

◆ Chiều xác định theo quy tắc vặn nút chai.



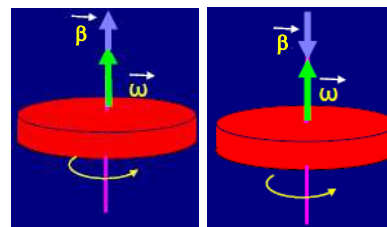
##### Gia tốc trong CĐ quay

☞ Vector gia tốc góc  $\vec{\beta}$ :

◆ Độ lớn:  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

◆ Phương  $\equiv$  phương trục quay,

◆ Cùng chiều  $\omega$  khi  $\omega$   $\nearrow$ , ngược chiều  $\omega$  khi  $\omega$   $\searrow$



12

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Đặc trưng của chuyển động quay

Mối quan hệ động học CĐ tịnh tiến và CĐ quay

☞ Vận tốc tịnh tiến và vận tốc góc:

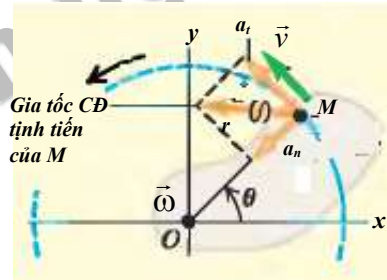
$$v = \omega \cdot r \text{ hay } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

☞ Gia tốc tịnh tiến và gia tốc góc:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \beta \cdot r$$

$$\text{Hay: } \vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

$$\text{Và: } a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



13

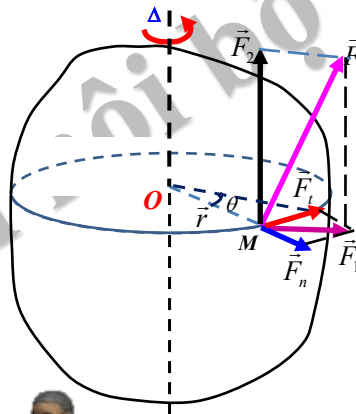
### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Lực gây ra CĐ quay

☞ Xét tác dụng của lực  $\vec{F}$  lên 1 vật rắn (tại M, cách O khoảng r) để có CĐ quay quanh trục Δ.

$$\vec{F} \begin{cases} \vec{F}_2 // \Delta \Rightarrow \text{không đóng góp vào CĐ} \\ \vec{F}_1 \perp \Delta \begin{cases} \vec{F}_n : \text{không đóng góp vào CĐ} \\ \vec{F}_t : \text{đóng góp vào CĐ} \end{cases} \end{cases}$$

♦ Chỉ có thành phần lực tiếp tuyến đóng vai trò làm cho vật rắn quay quanh 1 trục cố định.



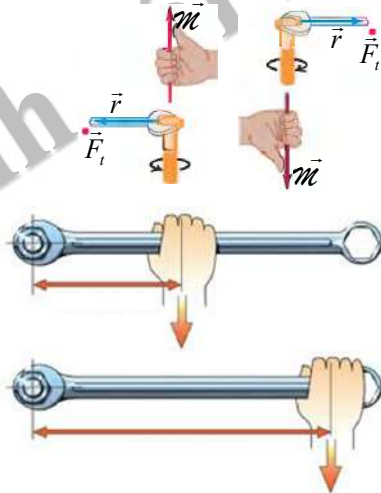
14

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment ngoại lực

☞ Moment lực quay:  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$   
( $r$ : cánh tay đòn)

- ♦ Gốc tại O,
- ♦ Phương  $\perp$  mặt phẳng chứa  $\vec{r}$  và  $\vec{F}$
- ♦ Chiều thuận theo tam diện thuận.
- ♦ Độ lớn:  $\mathcal{M} = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin \theta$



15

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Phương trình động lực học

☞ Vật rắn: tập hợp của  $n$  chất điểm.

☞ Xét chất điểm  $M_i$  (khối lượng  $m_i$ ) cách trục quay  $\Delta$  khoảng  $r_i$  chịu tác dụng của lực  $F_{ti}$

- ♦ Ph/trình ĐLH của chất điểm  $M_i$

$$m_i \vec{a}_{ti} = \vec{F}_{ti}$$

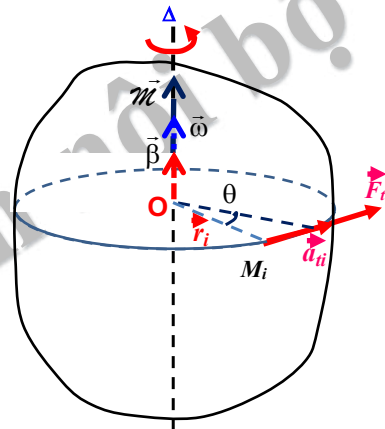
- ♦ Nhân hữu hướng 2 vế với  $\vec{r}_i$

$$m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ti}$$

- ♦  $VP = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_i$

- ♦  $VT = m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti} = m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\beta} \times \vec{r}_i)] = m_i [(\vec{r}_i \vec{r}_i) \vec{\beta} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\beta}) \vec{r}_i] = m_i r_i^2 \vec{\beta}$

$$\text{Hay: } \vec{\mathcal{M}}_i = m_i r_i^2 \cdot \vec{\beta}$$



16



### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Phương trình động lực học

Với toàn bộ các chất điểm tạo thành vật rắn:  $\sum_i \vec{M}_i = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\beta}$

$$\begin{cases} \sum_i \vec{M}_i = \vec{M} : \text{Tổng hợp moment ngoại lực tác dụng lên vật rắn.} \\ \sum_i m_i r_i^2 = I : \text{Moment quán tính của vật rắn đối với trục quay } \Delta. \end{cases}$$

♦ Ph/tr ĐLH cơ bản CĐ quay vật rắn:  $\vec{M} = I\vec{\beta}$

♦  $\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I} \Rightarrow$  Gia tốc trọng chuyển động quay của vật rắn xung quanh một trục tỉ lệ với tổng moment ngoại lực đối với hệ và tỉ lệ nghịch với moment quán tính của vật rắn đối với trục.

♦ Sự tương đương giữa 2 ph/tr ĐLH của vật rắn quay và ch/đ CĐ tịnh tiến:

$$\vec{M} \leftrightarrow \vec{F}, \vec{\beta} \leftrightarrow \vec{a} \text{ và } I \leftrightarrow M \Rightarrow I \text{ là khối lượng góc}$$

17

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

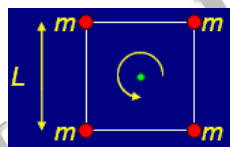
♣ Biểu thức:  $I = \sum_i m_i r_i^2$

♣ Ý nghĩa: thuộc tính của một vật có khối lượng, nhằm duy trì trạng thái CĐ quay quanh trục cố định, theo định luật 1 Newton.

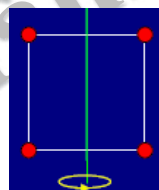
♣ Phụ thuộc:

♦ Phân bố khối lượng (khối lượng càng xa trục quay  $\Rightarrow I$  càng lớn)

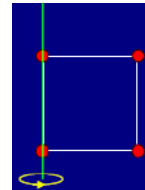
♦ Vị trí chọn trục quay.



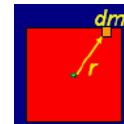
$$I = 2mL^2$$



$$I = mL^2$$



$$I = 5mL^2/4$$



♣ Thực tế, khối lượng vật rắn phân bố liên tục,

$$\Rightarrow I = \int_{\text{toàn bộ vật}} r^2 dm \quad dm: \text{vi phân khối lượng của mỗi phần tử (ch/điểm)}$$

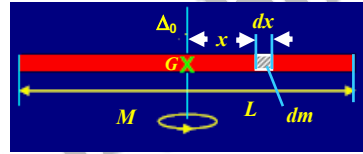
18

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

##### Thanh dài đồng chất

☞ Chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$  và  $\perp$  thanh



☞ Xét phần tử khối lượng  $dm$ , độ dài  $dx$ , cách trục  $\Delta_0$  đoạn  $x$ .

☞ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :  $dI_0 = x^2 \cdot dm$

☞ Thanh đồng chất  $\Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$

$$\Rightarrow dI_0 = \frac{M}{L} x^2 \cdot dx$$

☞ Moment quán tính của thanh với trục quay  $\Delta_0$ :

$$I_0 = \int dI_0 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{ML^2}{12}$$

19

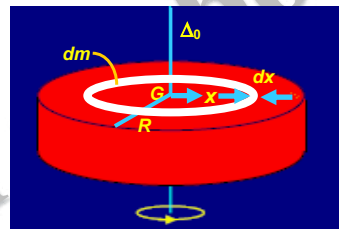
### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

##### Đĩa đồng chất

☞ Bán kính  $R$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ .

☞ Phần tử khối lượng  $dm$  hình vành khăn, bề rộng  $dx$ , cách trục  $\Delta_0$  đoạn  $x$ .



♦ Diện tích của  $dm$ :  $dS = d(\pi x^2) = 2\pi x dx$

♦ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :  $dI_0 = x^2 \cdot dm$

♦ Đĩa đồng chất  $\Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dS}{\pi R^2} = \frac{2\pi x dx}{\pi R^2} = \frac{2x dx}{R^2} \Rightarrow dm = \frac{2M}{R^2} x dx$

$$\Rightarrow dI_0 = \frac{2M}{R^2} x^3 \cdot dx$$

☞ Moment quán tính của đĩa với trục  $\Delta_0$ :  $I_0 = \int dI_0 = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{MR^2}{2}$

20

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

##### Khối cầu đặc đồng chất

☞ Bán kính  $R$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ .

☞ Phần tử khối lượng  $dm$  dạng đĩa, độ dày  $dy$ , bán kính  $r$ , trục quay  $\Delta_0 \equiv y$

♦ Thể tích của  $dm$ :  $dV = \pi r^2 dy = \pi(R^2 - y^2)dy$

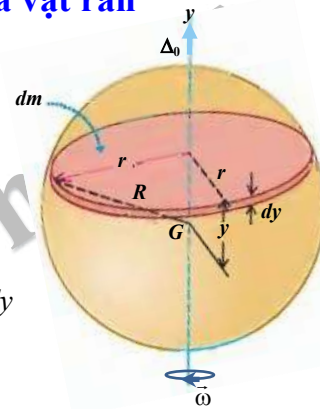
♦ Khối lượng:  $dm = \rho dV = \rho\pi(R^2 - y^2)dy$

☞ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :

$$dI_0 = r^2 dm = (R^2 - y^2) \rho \pi (R^2 - y^2) dy = \rho \pi (R^2 - y^2)^2 dy$$

☞ Moment quán tính của khối cầu:  $I_0 = \rho \pi \int_0^R (R^2 - y^2)^2 dy = \frac{8\pi\rho}{15} R^5$

$$\text{Vì } M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

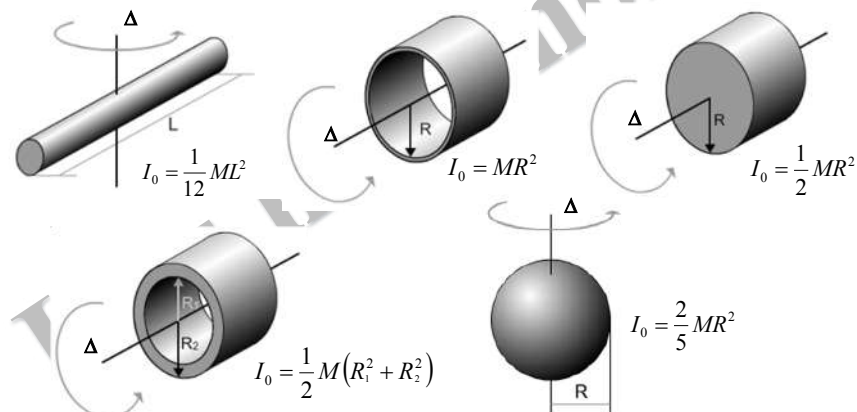


21

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

☞ Vật rắn đối xứng đồng chất, trục quay ( $\Delta$ ) đi qua khối tâm.



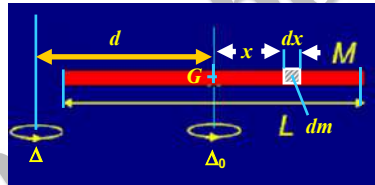
### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Moment quán tính

##### Định lý Steiner-Huyghen

☞ Xác định moment quán tính đi qua trục quay bất kỳ.

☞ Thanh đồng chất chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$ ,  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ , trục quay  $\Delta \perp$  thanh, cách trục  $\Delta_0$  khoảng  $d$ .



♦ Moment quán tính của phần tử KL  $dm$  với trục quay  $\Delta$ :  $dI = (x + d)^2 dm$

☞ Moment quán tính của thanh với trục quay  $\Delta$ :

$$I = \int (x + d)^2 dm = \int (x^2 + 2xd + d^2) dm = \underbrace{\int x^2 dm}_{I_0} + \underbrace{2d \int x dm}_0 + d^2 \underbrace{\int dm}_M$$

♦  $I = I_0 + Md^2 \Rightarrow$  *Moment quán tính của 1 vật rắn đối với 1 trục quay bất kỳ bằng moment quán tính của vật đối với trục quay đi qua khối tâm của vật cộng với tích của khối lượng và bình phương khoảng cách giữa 2 trục quay.*

23

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Bài toán động lực học vật rắn quay quanh trục đối xứng

(chú ý xem lại tâm quay)

☞ Khối trụ tròn, BK  $R$ , kh/lg  $m$ , lăn không trượt trên bề mặt nằm ngang do lực căng dây  $\vec{T}$ .

☞ Phương trình động lực học của trụ trong quá trình CĐ:

♦ CĐ tịnh tiến:  $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ms}$  (1)

♦ CĐ quay quanh trục đối xứng:  $I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}}$  (2)

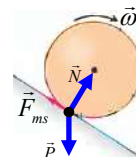
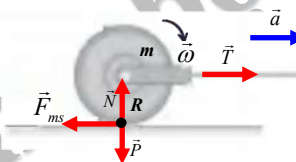
☞ Ngoại lực làm trụ CĐ quay: *Lực tiếp tuyến  $\equiv$  lực ma sát*  $\vec{F}_{ms}$

♦ Moment lực (ma sát) trong CĐ quay khối trụ tròn:  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{F}_{ms}$

♦ (2) trở thành:  $I\vec{\beta} = \vec{R} \times \vec{F}_{ms}$  (2')

♦ Chiều (1) theo phương CĐ, được:  $ma = T - F_{ms}$

♦ (2') trở thành:  $I\beta = R.F_{ms}$



24

### 3. Chuyển động quay của vật rắn

#### Bài toán động lực học vật rắn quay quanh trục đối xứng

☞ Đối với bánh xe ròng rọc, BK  $R$ , kh/lg  $m$  có thể quay quanh trục quay đi qua khối tâm, có dây treo 2 vật nặng vắt quanh ròng rọc.

♦ Ngoại lực làm ròng rọc quay: *Lực căng dây*  $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

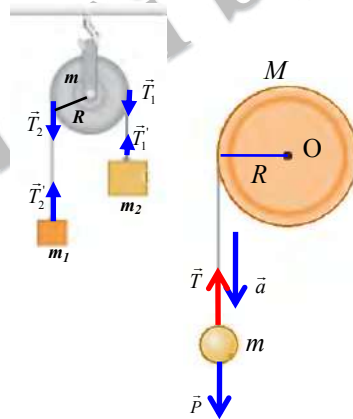
♦ Ph/tr ĐLH của ròng rọc trong CĐ: quay

$$I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{T}$$

☞ Vật nặng  $m$  liên kết với trụ quay  $M$  bằng sợi dây; CĐ tịnh tiến của  $m$  gây ra CĐ quay quanh trục quay của  $M$ :

♦ Ph/r ĐLH của  $M$ :  $I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{T}$

♦ Ph/r ĐLH của  $m$ :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$



25

#### Những nội dung cần lưu ý

1. Đặc điểm của chuyển động tịnh tiến và CĐ quay quanh một trục cố định của vật rắn.
2. Phương trình cơ bản của chuyển động quay quanh 1 trục cố định (biểu thức và ý nghĩa các đại lượng trong ph/tr).
3. Đặc điểm moment quán tính và biểu thức xác định moment quán tính của các vật đối xứng (thanh đồng chất, đĩa đặc, trụ rỗng,...) cũng như định lý Steiner-Huyghen.



26