Chương 5: Tích phân mặt

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Ngày 31 tháng 5 năm 2021

Nội dung

1. 4.1. Tích phân mặt loại một
   - 4.1.1. Định nghĩa
   - 4.1.2. Cách tính
2. 4.2. Tích phân mặt loại hai
   - 4.2.1. Định nghĩa
   - 4.2.2. Cách tính
   - 4.2.3. Công thức Stokes và công thức Ostrogradsky

4.1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số $f(x, y, z)$ xác định trên một mặt cong S.
- Chia S thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh này là $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$. Gọi d_i là đường kính của Δs_i.
- Trên mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm $M_i(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ bất kỳ và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

- Nếu khi $\max d_i \to 0$, tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ tiến tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách chọn điểm M_i, thì giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ trên mặt S, và được ký hiệu là

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) dS.$$

- Người ta chứng minh được rằng nếu S là mặt trơn và hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên S thì tồn tại tích phân mặt loại hai.
- Diện tích của mặt S được tính theo công thức $\iint\limits_S ds$.
- Tích phân mặt loại một có các tính chất giống như tích phân xác định: tuyến tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự.

4.1.2. Cách tính

- Cho mặt S xác định bởi phương trình $z = z(x, y)$, ở đó (x, y) thuộc miền đóng bị chặn D.
- Giả sử $z(x, y)$ là hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D.
- Cho $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên S.
- Khi đó

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy.$$

- Ta có các công thức tương tự khi mặt S xác định bởi phương trình $x = x(y, z)$ hoặc $y = y(x, z)$.

Optional (Stewart)

- Giả sử mặt S cho bởi phương trình tham số $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$, với $(s,t) \in D$.
- Đặt $r(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, và

$$r'_s = (x'_s, y'_s, z'_s) \text{ và } r'_t = (x'_t, y'_t, z'_t).$$

- Khi đó

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))|r'_s \wedge r'_t|dsdt.$$

- Đôi khi cần chia mặt S thành các mặt nhỏ hơn để áp dụng công thức dạng trên.

Ví dụ (CK20182)

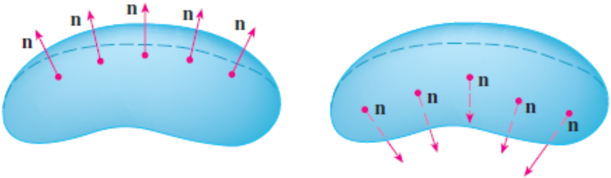
Tính tích phân $\iint\limits_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$, trong đó S là mặt $2z = x^2+y^2$, $0 \le x, y \le 1$.

- $z = (x^2+y^2)/2$, $z'_x = x$, $z'_y = y$.
- $I = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$, $D\colon 0 \le x, y \le 1$.
- $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (1+x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 (\frac{4}{3}+x^2)dx = \frac{5}{3}$.

Một số bài tập

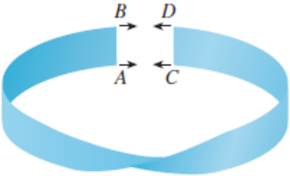
- (CK20192) Tính $\iint\limits_S dS$, trong đó S là phần mặt $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ với $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.
- (CK20192) Tính $\iint\limits_S y^2 z dS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1$ và $z = 2$.
- (CK20193) Tính $\iint\limits_S z\sqrt{x^2 + y^2} dS$, trong đó S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với $1 \leq z \leq 2$.

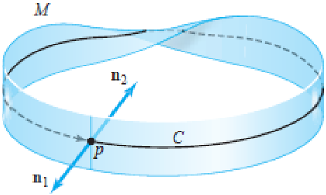
4.2.1. Định nghĩa



- Cho mặt S. Giả sử tại mỗi điểm M của S (có thể trừ tại biên) có tiếp diện. Khi đó tại M có hai vec tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ và $-\vec{n}$.
- Nếu có thể chọn được tại mỗi điểm của S một vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ sao cho vectơ $\vec{n}$ biến thiên liên tục trên S, thì ta nói S là mặt định hướng được và hướng của S là một cách chọn $\vec{n}$.
- Trong mục này ta chỉ xét S mặt định hướng được.

Möbius strip





Trường vectơ

- Một trường vectơ trong $\mathbb{R}^2$ là một ánh xạ $\vec{F}$ gửi mỗi điểm $M(x,y)$ thuộc miền $D \subset \mathbb{R}^2$ một vectơ $\vec{F}(M) \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

hay $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

- Một trường vectơ trong $\mathbb{R}^3$ là một ánh xạ $\vec{F}$ gửi mỗi điểm $M(x,y,z)$ thuộc miền $E \subset \mathbb{R}^3$ một vectơ $\vec{F}(M) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \\ &= P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},\end{aligned}$$

hay $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Tích phân mặt loại hai

- Xét mặt định hướng S với hướng cho bởi vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n} = \vec{n}(M)$ và trường vec tơ liên tục $\vec{F} = (P, Q, R)$ trên S.
- Chia S thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh này là $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. Gọi d_i là đường kính của Δs_i.
- Trên mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm $M_i(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ bất kỳ và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i) \cos \alpha_i + Q(M_i) \cos \beta_i + R(M_i) \cos \gamma_i \right) \Delta S_i.$$

Ở đây $\alpha_i = (\vec{n}(M_i), Ox)$, $\beta_i = (\vec{n}(M_i), Oy)$, $\gamma_i = (\vec{n}(M_i), Oz)$. Như vậy $\vec{n}(M_i) = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$.

- Nếu khi $\max d_i \to 0$, tổng trên tiến tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách chọn điểm M_i, thì giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại hai của các hàm P, Q, R trên mặt S, và được ký hiệu là

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot dS = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS,$$

hay

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

- Người ta chứng minh được khi mặt S là mặt định hướng trơn (từng khúc) và P, Q, R liên tục trên S, thì tích phân mặt loại hai tồn tại.

Chú ý

- Tích phân đường mặt loại hai phụ thuộc vào hướng được chọn của mặt S.
- Giả sử một lượng chất lỏng có khối lượng riêng 1 và có vận tốc cho bởi trường vectơ $\bar{F}$. Cho S là một mặt định hướng với hướng $\vec{n}$. Khi đó lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian (còn gọi là thông lượng) theo hướng $\vec{n}$ là $\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.
- Tích phân mặt loại hai có các tính chất: tuyến tính, cộng tính.

Optional (Stewart)

- Giả sử mặt S cho bởi phương trình tham số $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$, với $(s,t) \in D$.
- Đặt $\vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, và

$$\vec{r'}_s = (x'_s, y'_s, z'_s) \text{ và } \vec{r'}_t = (x'_t, y'_t, z'_t).$$

- Định hướng mặt S với vectơ pháp tuyến đơn vị

$$\vec{n} = \frac{\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t}{|\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t|}.$$

- Khi đó

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \frac{\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t}{|\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t|} |\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t| dsdt = \iint\limits_D \vec{F} \cdot (\vec{r'}_s \wedge \vec{r'}_t) dsdt.$$

- Giả sử S xác định bởi phương trình $z = z(x, y)$, ở đó (x, y) thuộc miền đóng bị chặn D. Coi x, y là tham số: $x = x$, $y = y$, $z = z(x, y)$.
- Ta có $\vec{r'}_x = (1, 0, z'_x)$, $\vec{r'}_y = (0, 1, r'_y)$ và

$$\vec{r'}_x \wedge \vec{r'}_y = (-z'_x, -z'_y, 1) = -z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + \vec{k}.$$

- Ta có

$$\vec{F} \cdot (\vec{r'}_x \wedge \vec{r'}_y) = (P, Q, R) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) = (-Pz'_x - Qz'_y + R).$$

- Chọn phép tơ pháp tuyến đơn vị cùng phương hướng $\vec{r'}_x \wedge \vec{r'}_y$. Khi đó

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_D (-Pz'_x - Qz'_y + R)dxdy.$$

- Trường hợp riêng $P = Q = 0$, tức là $\vec{F} = R\vec{k}$:

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

4.1.2. Cách tính

- Cho mặt S xác định bởi phương trình $z = z(x, y)$, ở đó (x, y) thuộc miền đóng bị chặn D. Giả sử $z(x, y)$ là hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D.
- Cho $R(x, y, z)$ là hàm liên tục trên S.
- Nếu vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ tương ứng của mặt S làm với Oz một góc nhọn thì

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

- Nếu vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ tương ứng của mặt S làm với Oz một góc tù thì

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

- Các tích phân mặt loại hai $\iint\limits_S Pdydz$, $\iint\limits_S Qdxdz$ được tính tương tự.

Ví dụ (CK20192)

Tính $\iint\limits_S y^2 z dx dy$, với S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1$ và $z = 2$, hướng lên trên.

- Phương trình mặt S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in D$, với $D\colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4$.
- Hướng của mặt (vectơ pháp tuyến) tạo với Oz một góc nhọn. $I = \iint\limits_D y^2 \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Đổi biến $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $D'\colon 1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Jacobi $J = r$.
- $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^2 \sin\varphi^2 r \cdot r dr = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int\limits_1^2 r^4 dr = \pi \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31\pi}{5}$.

Ví dụ

Tính tích phân mặt loại hai $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

- Vec tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài tại $M(x, y, z)$ của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ là $\vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$.
- $\vec{F} = (x, y, z)$ và $\vec{(}F) \cdot \vec{n} = (x^2 + y^2 + z^2)/R$.
- $I = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} dS = R \iint\limits_S dS = RArea(S) = 4\pi R^3$.

Ví dụ

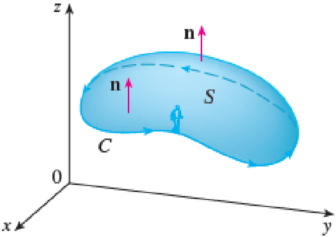
Tính tích phân mặt loại hai
$I = \iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt nón $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$.

- Vec tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài tại $M(x,y,z)$ của S là $\vec{n} = (x,y,-z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- $\vec{F} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ và $\vec{(F)} \cdot \vec{n} = (2yz-2xy)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- $I = \int\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_S \dfrac{2yz-2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS$.
- Mặt S cho bởi pt $z = \sqrt{x^2+y^2}$ với $(x,y) \in D$ và D: $x^2+y^2 \le h^2$.
- $I = \iint\limits_D 2\dfrac{(y-x)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}} dxdy = 0.$

Một số bài tập

- (CK2081) Tính $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$, S là mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, hướng ra ngoài.
- (CK20171) Tính $\iint\limits_S z^2\sqrt{2x-x^2-y^2}dxdy$, S là mặt $z = \sqrt{2x-x^2-y^2}$, hướng theo phía $z > 0$.
- (CK20162) Tính tích phân mặt $\iint\limits_S xdydz$, trong đó S là mặt $x = y^2 + 2z^2$ với $x \leq 2$, hướng theo chiều dương của trục Ox.
- (CK20152) Tính tích phân mặt $\iint\limits_S xdydz$, trong đó S là phía trên của mặt $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4.2.3. Công thức Stokes



Cho S là trơn từng khúc, định hướng, có biên là đường cong kín L trơn từng khúc với định hướng dương. Cho ba hàm P, Q và R có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa S. Khi đó

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ví dụ (CK2018)

Tính tích phân đường $\oint\limits_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$, trong đó C là giao của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ với mặt nón $z=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

- $P = y^2+z^2,\ Q = z^2+x^2,\ R = x^2+y^2$.
- $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} =$
  $\vec{i}(2y-2z)+\vec{j}(2z-2x)+\vec{k}(2x-2y)=\vec{F}$.
- Chọn S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ nằm trong phần mặt nón, với hướng ra ngoài.
- Vec tơ pháp tuyến đơn vị của S tại $M(x,y,z)$ là $\vec{n}=(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2},\dfrac{z}{2})$.

- Theo công thức Stokes

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S (2y-2z)dydz + (2z-2x)dzdx + (2x-2y)dxdy \\
&= \iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \\
&= \iint\limits_S [\frac{x}{2}(2y-2z) + \frac{y}{2}(2z-2x) + \frac{z}{2}(2x-2y)]dS = 0.
\end{aligned}$$

Ví dụ

Tính $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dx$, ở đó C là đường ellip $x^2+y^2=1$, $x+z=1$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương trục Ox.

- $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = \vec{F}$.
- Chọn mặt S là hình ellip: $x^2+y^2 \leq 1$, $x+z=1$, với hướng lên trên (theo hướng trục Oz).
- VTPT ĐV hướng lên trên của mặt S là $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- Theo CT Stokes $I = -2\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy = -2\sqrt{2}\iint\limits_S dS$.
- Mặt S cho bởi pt $z = 1-x$ với $(x,y) \in D$ và $D\colon x^2+y^2 \leq 1$.
- $I = -2\sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{1+(-1)^2}dxdy = -4\iint\limits_D dxdy = -4\pi$.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

- Cho (miền mở) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ có tính chất là mọi đường cong kín C trơn tùng khúc trong D đều là biên của một mặt trơn từng mảnh nằm hoàn toàn trong D.
- Các hàm P, Q, R liên tục với các ĐHR cấp một liên tục trong D.
- Các điều kiện sau là tương đương.
  1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong D.
  2. $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz = 0$, với mọi đường cong kín, trơn từng khúc C nằm trong D.
  3. $R'_y(M) = Q'_z(M)$, $P'_z(M) = R'_x(M)$, $Q'_x(M) = P'_y(M)$, với mọi $M \in D$.
  4. Biểu thức $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z)$ nào đó trong miền D.

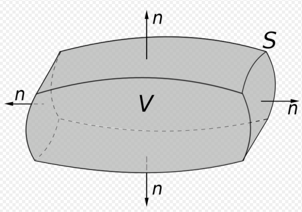
Giả sử các điều kiện tương đương được thỏa mãn.

- Khi đó $u(x,y,z) = \int\limits_A^M Pdx + Qdy + Rdz + C$, ở đây $A(x_0, y_0, z_0)$ cố định, $M(x,y,z)$ chạy trong D.
- Nếu $D = \mathbb{R}^3$, thì

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C,$$

- và $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A)$.

Công thức Ostrogradsky



Cho V là miền đóng bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, có biên là một mặt kín S với hướng ra ngoài. Cho các hàm P, Q, R liên tục cùng với các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa V. Khi đó

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Công thức Ostrogradsky cũng được gọi là Định lý Ostrogradsky, hay Định lý Gauss, hay "The Divergence Theorem".

Hệ quả

Thể tích V của vật thể giới hạn bởi mặt cong kín S cho bởi công thức

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Ví dụ

Tính tích phân mặt loại hai $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

- $P = x$, $Q = y$, $R = z$.
- Theo CT Ostrogradsky $I = \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz$, với V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
- $I = 3\iiint\limits_V dxdydz = 3\dfrac{4}{3}\pi R^2 = 4\pi R^3$.

Ví dụ (CK20152)

Tính tích phân mặt $\iint\limits_S (x^3+y)dydz + (y^3+2z)dzdx + zdxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, hướng ra ngoài mặt cầu.

- Bổ sung thêm phần mặt S': $z=0$ $(x^2+y^2 \leq 1)$, hướng xuống dưới.
- Áp dụng CT Ostrogradsky

$$\iint\limits_{S\cup S'} = \iiint\limits_V (3x^2+3y^2+1)dxdydz = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz + \frac{2}{3}\pi,$$

  với $V: x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.
- Đổi biến tọa độ cầu: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $|J| = r^2\sin\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

- $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} (r^2\sin^2\theta)r^2\sin\theta d\theta =$
  $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{5}\cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}$.
- $\iint\limits_{S\cup S'} = \frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{22\pi}{3}$.
- Tính $\iint\limits_{S'}$. Mặt S' có vectơ pháp tuyến đơn vị hướng xuống dưới là $\vec{n} = (0,0,-1)$.
- $\vec{F}\cdot\vec{n} = -z$.
- $\iint\limits_{S'} = \iint\limits_{S'} -zdS = 0$.
- Vậy $\iint\limits_S = \frac{4\pi}{15}$.

Một số bài tập

- (CK20162) Tính tích phân mặt
  $\iint\limits_{S}(3xy^2+x)dydz+(y^3+2xz)dzdx+(6x^2z+xy)dxdy$, trong đó S
  là mặt paraboloid $z=x^2+y^2$ với $z\leq 4$, hướng xuống dưới.