Giải chi tiết đề thi cuối kỳ Toán Rời Rạc

Vũ Đình Trường An   Lê Nguyên Bách   Nguyễn Việt Dũng

Trịnh Tùng Huy   Chu Thị Ngân   Phạm Nhật Quang

CTTN Toán Tin K64

Viện Toán Ứng Dụng và Tin Học - Đại học Bách Khoa Hà Nội

Lời nói đầu

Với mục tiêu một mùa hè sảng khoái, yên tâm tận hưởng cơn gió mát của điều hòa bằng một con A+ của sếp Ngọc, chúng mình đã bỏ ra những khoảng thời gian quý báu mà đáng ra là để đi chơi với người yêu, bỏ ra những giọt mồ hôi nước mắt để cho ra sản phẩm mà các ông bà marketing sách ôn thi đại học sẽ gọi là Công Phá Toán Rời Rạc, hay Làm Chủ Toán Rời Rạc Trong 1 Đêm. Mong rằng các bạn sẽ hấp thụ được mọi kiến thức kỳ quái của paper này và có một kỳ thi thật hiệu quả.

Hướng dẫn làm bài

Với kết quả là hoán vị ở câu số 0, trong mỗi phần trong 7 phần sau, chọn mỗi phần một câu để làm tương ứng với số hoán vị của bạn. Ví dụ, mã đề bạn nhận được là 2902, bạn cần tìm hoán vị thứ 2902 trong số các hoán vị của 7 số tự nhiên đầu tiên, hoán vị đó là **5127463**. Như vậy phần I làm câu **5**, phần II làm câu **1**, phần III làm câu **2**, phần IV làm câu **7**, phần V làm câu **4**, phần VI làm câu **6** và phần VII làm câu **3**.

Trong trường hợp không thể hoàn thành một câu ở một phần nào đó, bạn có thể chọn một câu ở phần VIII có số thứ tự tương ứng với phần bạn không làm được. Ví dụ, bạn không làm được một câu nào đó của phần V, bạn có thể làm câu **5** phần VIII thay thế. Chú ý rằng, mỗi câu ở phần VIII chỉ được 0.5 điểm, trong khi mỗi câu ở 7 phần còn lại được 1.5 điểm.

Phần I

1. Mô tả khái niệm phân lớp **NP**-Hard và **NP**-Easy.
2. Mô tả khái niệm phép dẫn với thời gian đa thức, phân lớp **NP**-Complete, ý nghĩa của phân lớp **NP**-Complete đối với giả thuyết $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
3. Mô tả khái niệm bài toán tính toán và các dạng của bài toán tính toán (4 dạng).
4. Mô tả khái niệm máy Turing, định đề Church-Turing và ý nghĩa của định đề này.
5. Mô tả khái niệm phân lớp **P**, phân lớp **NP**, và phân lớp **NP**-Median.
6. Mô tả và nêu ý nghĩa của giả thuyết độ phức tạp mũ.
7. Mô tả khái niệm máy Turing đa định.

Giải

1.

*(Phân lớp **NP**-Hard)* Bài toán A thuộc phân lớp **NP**-Hard nếu tồn tại bài toán B thuộc phân lớp **NP**-Complete thoả mãn $B \leq pA$ (Phân lớp **NP**-Hard Là lớp các bài toán không nhất thiết là bài toán quyết định)

*(Phân lớp **NP**-Easy)* Bài toán A thuộc phân lớp **NP**-Easy nếu tồn tại bài toán B thuộc phân lớp **NP** thoả mãn $A \leq pB$.

2.

(Phép dẫn với thời gian đa thức) Cho 2 bài toán quyết định A, B. Bài toán A được gọi là dẫn được về bài toán B với thời gian đa thức (ký hiệu $A \leq pB$) nếu tồn tại Turing đơn định chuyển dữ liệu của bài toán A thành bài toán B sao cho: $a \in \mathscr{I}_A$ cho câu trả lời "Yes" khi và chỉ khi $f(a)$ cho câu trả lời "Yes", trong đó

$$\begin{aligned} f : \mathscr{I}_A &\to \mathscr{I}_B \\ a &\mapsto b = f(a) \end{aligned}$$

*(Phân lớp **NP**-Complete)* Bài toán A thuộc phân lớp **NP**-Complete nếu A thuộc **NP** sao cho với mọi bài toán B thuộc **NP** thì $B \leq pA$.

*(Ý nghĩa của phân lớp **NP**-Complete đối với giả thuyết $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$)* $A = pB$ nếu $A \leq pB$ và $B \leq pA$.

3.

(Bài toán tính toán) là các bài toán hình thức trong tin học lý thuyết được nghiên cứu trong ngành lý thuyết độ phức tạp tính toán.

(Phân loại bài toán tính toán)

- *Bài toán tìm kiếm:* Nếu $\exists x \in S : P(x)$ thì chỉ ra $y \in S : P(y)$. Ngược lại, nếu $\nexists x \in S : P(x)$ thì nói không tồn tại.
- *Bài toán quyết định:* Nếu $\exists x \in S : P(x)$ thì nói rằng đầu ra là "Yes". Ngược lại, nếu $\nexists x \in S : P(x)$ thì nói rằng đầu ra là "No".
- *Bài toán đếm:*
$$\left|\{x \in S | P(x)\}\right|$$
- *Bài toán liệt kê:*
$$\{x \in S | P(x)\}$$

- *Bài toán tối ưu:*

$$\text{Tìm } (x \in S) P(x) : f(x) \to \max / \min$$

4.

(Máy Turing) Là một bộ gồm các phần tử:

- Tập Q hữu hạn chứa các trạng thái của máy
- Tập Σ chứa các ký tự ghi trên dải băng
- Ánh xạ chuyển trạng thái

$$T : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R, O\}$$

trong đó L là dịch sang trái, R là dịch sang phải và O là không dịch.

(Định đề Church-Turing) Mọi bài toán giải được bằng thuật toán đều có thể mô hình hoá được dưới dạng một máy Turing nào đó.

(Ý nghĩa của định đề Church-Turing)

5.

*(Phân lớp **P**)* Là phân lớp các bài toán quyết định tồn tại một máy Turing có độ phức tạp thời gian $O(n^c)$ để giải bài toán đó.

*(Phân lớp **NP**)* Là tập các bài toán quyết định giải được trên một máy Turing đa định trong thời gian đa thức.

*(Phân lớp **NP**-Median)* Là lớp các bài toán thuộc phân lớp **NP** chưa chứng minh được thuộc **P** cũng chưa chứng minh được là **NP**-complete.

6.

(Giả thuyết độ phức tạp mũ)

(Ý nghĩa của giả thuyết độ phức tạp mũ)

7.

(Máy Turing đa định) Là một bộ gồm các phần tử:

- Tập Q hữu hạn chứa các trạng thái của máy
- Tập Σ chứa các ký tự ghi trên dải băng
- Ánh xạ chuyển trạng thái

$$T : Q \times \Sigma \to 2^Q \times 2^\Sigma \times 2^{\{L,R,O\}}$$

trong đó L là dịch sang trái, R là dịch sang phải và O là không dịch.

Phần II

1. Sắp xếp ngẫu nhiên bộ bài tú lơ khơ 52 lá, tìm xác suất để các quân cùng chất được xếp kề nhau.
2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 người đàn ông, và 5 người phụ nữ trên một bàn tròn sao cho xen kẽ cứ hai người đàn ông lại có một người phụ nữ?
3. Huấn luyện viên có một danh sách gồm 15 cầu thủ có thể chơi phòng ngự hoặc tấn công, trong đó có 5 cầu thủ chỉ có thể chơi tấn công, và 8 cầu thủ chỉ có thể chơi phòng thủ. Hỏi huấn luyện viên có bao nhiêu cách để chọn ra 10 cầu thủ trong đó có 7 cầu thủ có thể chơi phòng ngự?
4. Phương trình nghiệm nguyên $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ có bao nhiêu nghiệm thoả mãn $x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq -5, x_4 \geq 8$?
5. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 7 chữ số khác nhau sao cho chữ số 5 và chữ số 6 không đứng cạnh nhau?
6. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 số tự nhiên từ các số 1 đến 20 sao cho không có hai số tự nhiên liên tiếp nhau được chọn?
7. Có bao nhiêu cách để xếp 20 sinh viên vào 5 hàng ghế, mỗi hàng 4 ghế sao cho có hai sinh viên định trước không ngồi cùng hàng ghế?

Giải

1.

Có tất cả 52! cách xếp ngẫu nhiên bộ bài. Bộ bài có 4 chất, mỗi chất có 13 lá. Khi các quân cùng chất được xếp kề nhau thì mỗi chất có 13! cách xếp và có 4! cách hoán vị 4 chất. Như vậy, có tất cả $4!.(13!)^4$ cách xếp thoả mãn. Xác suất cần tính là

$$\frac{4!.(13!)^4}{52!}$$

2.

Cố định 1 người phụ nữ tại 1 vị trí trên bàn tròn. Cứ cách 2 ghế, ta xếp 1 người phụ nữ. Như vậy, có 4! cách xếp những người phụ nữ. Tại 10 ghế còn lại của bàn tròn, sẽ có 10! cách hoán vị những người đàn ông. Vậy có tất cả 4!.10! cách xếp thoả mãn bài toán.

3.

Ta chia số cầu thủ này thành 2 nhóm: *có thể phòng thủ* và *không thể phòng thủ*. Số cầu thủ có thể phòng thủ là 10. Số cầu thủ không thể phòng thủ là 5. Chọn ra 7 cầu thủ trong 10 cầu thủ có thể chơi phòng thủ, ta có $\binom{10}{7}$ cách chọn. Chọn ra 3 cầu thủ trong 5 cầu thủ không thể chơi phòng thủ, ta có $\binom{5}{3}$ cách chọn. Như vậy, số cách chọn thỏa mãn đề bài là

$$\binom{10}{7}\binom{5}{3}$$

4.

Đặt $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 6, y_4 = x_4 - 7$. Khi đó $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ và phương trình trở thành:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 29 \tag{2.4.1}$$

Ta viết ra 29 chữ số 0 liên tiếp nhau

$$\underbrace{00000\cdots00}_{29 \text{ số } 0}$$

Chia dãy 29 số 0 này thành 4 phần bằng cách đặt 3 số 1 vào giữa, khi đó số các số 0 của mỗi phần (từ trái sang phải) sẽ chính là giá trị của các nghiệm nguyên y_1, y_2, y_3, y_4 thoả mãn (2.4.1). Vì y_1, y_2, y_3, y_4 là các số nguyên dương nên các số 1 không được phép nằm cạnh nhau hay nằm bên ngoài dãy số 0. Như vậy, có tất cả 28 vị trí cho 3 số 1, số cách đặt 3 dấu 1 tương ứng với số nghiệm nguyên dương của phương trình (2.4.1). Như vậy số nghiệm thỏa mãn đề bài là $\binom{28}{3}$

5.

Ta sẽ tìm số các số lẻ có 7 chữ số khác nhau. Chữ số hàng đơn vị có 5 cách chọn vì nó phải là số lẻ. Chữ số hàng triệu có 8 cách chọn vì không được chọn giống hàng đơn vị và số 0. Các số còn lại sẽ có 8.7.6.5.4 cách chọn. Như vậy có tất cả $8.8.7.6.5.4.5 = 268800$ số lẻ có 7 chữ số khác nhau.

Tiếp theo, ta sẽ tìm số các số lẻ có 7 chữ số khác nhau, chứa các chữ số 5 và 6 sao cho chúng đứng cạnh nhau. Coi hai số 5 và 6 đứng liền nhau như một phần tử X. Xét 3 trường hợp

- X không nằm ở vị trí đầu và vị trí cuối. Khi đó có 4 cách xếp chỗ cho X. Chữ số hàng đơn vị có 4 cách chọn ("1", "3", "7", "9"). Chữ số hàng triệu có 6 cách chọn vì không được chọn giống hàng đơn vị và số 0. 3 số còn lại sẽ có 6.5.4 cách chọn. Như vậy số các số thỏa mãn trường hợp này là

$$2.4.4.6.6.5.4 = 23040$$

- X nằm ở vị trí đầu. Khi đó chữ số hàng đơn vị có 4 cách chọn ("1", "3", "7", "9"). 4 chữ số còn lại có 7.6.5.4 cách chọn. Như vậy số các số thỏa mãn trường hợp này là

$$2.4.7.6.5.4 = 6720$$

- X nằm ở vị trí cuối. Khi đó X chỉ có thể là "65" vì số ta cần phải là số lẻ. Chữ số hàng triệu có 7 cách chọn vì không được chọn các số "0", "6", "5". 4 chữ số còn lại có 7.6.5.4 cách chọn. Như vậy số các số thỏa mãn trường hợp này là

$$7.7.6.5.4 = 5580$$

Như vậy số các số lẻ có 7 chữ số khác nhau, chứa các chữ số 5, 6 sao cho chúng đứng cạnh nhau là

$$23040 + 6720 + 5580 = 35710$$

Sử dụng nguyên lý bù trừ, số các số lẻ có 7 chữ số khác nhau sao cho số 5 và 6 không đứng cạnh nhau là

$$268800 - 35710 = 233090$$

6.

Gọi 3 số được chọn ra từ tập $\{1, 2, \ldots, 20\}$ thỏa mãn đề bài là a_1, a_2, a_3, trong đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 20 \qquad (2.6.1)$$

Do a_1, a_2, a_3 là các số nguyên nên ta có

$$a_1 + 1 \leq a_2 \quad , \quad a_2 + 1 \leq a_3$$

Do đó

$$3 \leq a_1 + 2 \leq a_2 + 1 \leq a_3 \leq 20 \qquad (2.6.2)$$

Đặt $(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + 2, a_2 + 1, a_3)$. Chọn ra 3 số b_1, b_2, b_3 bất kỳ trong tập $\{3, 4, \ldots, 20\}$, có tất cả $\binom{18}{3}$ cách chọn. Mỗi một bộ (b_1, b_2, b_3) chọn được (thỏa mãn (2.6.2)) sẽ ứng với một bộ (a_1, a_2, a_3) thỏa mãn (2.6.1). Như vậy số bộ (a_1, a_2, a_3) thỏa mãn (2.6.1) chính là số bộ (b_1, b_2, b_3) tìm được ở trên, là $\binom{18}{3}$

7.

Gọi hai sinh viên định trước là A và B. Số cách chọn chỗ ngồi của A là 20. Do B không được ngồi cùng hàng với A nên số cách chọn chỗ ngồi của B là 16. Số cách để hoán vị 18 sinh viên vào 18 chỗ ngồi còn lại là 18!. Vậy số cách xếp 20 sinh viên thỏa mãn đề bài là

$$20.16.18!$$

Phần III

1. Một kỳ thủ có 11 tuần để chuẩn bị thi đấu cho giải cờ nên anh quyết định chơi ít nhất 1 ván một ngày. Để tránh mệt mỏi, anh ta quyết định không chơi 12 ván trong 7 ngày liên tiếp. Chứng minh rằng tồn tại một dãy ngày kế tiếp nhau anh ta chơi đúng 21 ván cờ.

2. Chứng minh rằng trong 101 số tự nhiên bất kỳ chọn ra từ tập $\{1, 2, \ldots, 200\}$ luôn tìm được hai số là bội của nhau.

3. Chứng minh rằng trong một dãy gồm $n^2 + 1$ số thực luôn có thể trích ra được một dãy con (không nhất thiết gồm các số liên tiếp nhau) gồm $n + 1$ số không giảm hoặc một dãy con $n + 1$ số không tăng.

4. Cho 10 người có độ tuổi từ 1 đến 60, chứng minh rằng ta luôn có thể tìm được trong số này hai nhóm người (không giao nhau) sao cho tổng tuổi của mọi người trong hai nhóm là bằng nhau.

5. Cho n điểm trên mặt phẳng được tô bởi hai màu xanh và đỏ sao cho trên đoạn thẳng nối 2 điểm cùng màu bất kỳ luôn có một điểm khác màu. Chứng minh rằng n điểm này thẳng hàng.

6. Cho n điểm trên mặt phẳng không đồng thời thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại 1 đường đi qua đúng 2 điểm.

7. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể kẻ n đoạn thẳng nối n điểm xanh với n điểm đỏ sao cho hai đầu mút của một đoạn thẳng bất kỳ là khác màu, mỗi điểm là một đầu mút của đúng một đoạn thẳng và hai đoạn thẳng bất kỳ không cắt nhau.

Giải

1.

Gọi a_i là tổng số ván chơi mà kỳ thủ này đã chơi được từ ngày 1 đến ngày i. Khi đó dãy $\{a_i\}_{i=1}^{77}$ là dãy tăng thực sự (Vì mỗi ngày anh chơi ít nhất 1 ván). Hơn nữa, do $a_1 \geq 1$ và trong 11 tuần, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván nên $a_{77} \leq 11.12 = 132$. Do đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$$

Xét dãy $\{b_i\}_{i=1}^{77}$ với $b_i = a_i + 21$. Khi đó $\{b_i\}_{i=1}^{77}$ cũng là dãy tăng thực sự và

$$22 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{77} \leq 153$$

Như vậy ta lập được một dãy gồm 154 số nguyên

$$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, b_1, b_2, \ldots, b_{77} \qquad (3.1.1)$$

trong đó các số có giá trị trong đoạn $[1, 153]$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số trong dãy (3.1.1) bằng nhau. Nhận thấy rằng $a_i \neq a_j$ và $b_i \neq b_j$ với $i \neq j$ do dãy $\{a_i\}_{i=1}^{77}$ và $\{b_i\}_{i=1}^{77}$ là các dãy tăng thực sự. Do đó phải tồn tại i và j để $a_i = b_j$, hay

$$a_i = a_j + 21$$

Theo định nghĩa a_i, ta được một dãy ngày $j + 1, j + 2, \ldots, i$ mà tổng số ván cờ anh chơi là đúng 21 ván.

2.

Xét số nguyên m bất kỳ, ta luôn có thể viết m dưới dạng

$$m = 2^k.r$$

trong đó k là một số nguyên không âm và r là một số lẻ. Do m chỉ nhận giá trị từ 1 đến 200 nên r chỉ nhận 100 giá trị gồm các số lẻ từ 1 đến 199. Theo nguyên lý Dirichlet, khi chọn 101 số bất kỳ từ tập $\{1, 2, \ldots, 200\}$, tồn tại 2 số

$$m_1 = 2^{k_1}.r_1 \quad , \quad m_2 = 2^{k_2}.r_2$$

thỏa mãn $r_1 = r_2$. Nếu $k_1 > k_2$ thì $m_2 | m_1$, ngược lại, ta có $m_1 | m_2$

3.

Xét dãy $S: \{a_k\}_{k=1}^{n^2+1}$ là một dãy số bất kỳ có n^2+1 phần tử. Giả sử không có dãy con không tăng nào có độ dài $n+1$. Ta sẽ chỉ ra rằng ta tìm được một dãy con không giảm có độ dài $n+1$. Với mỗi $k = \overline{1, n^2+1}$, gọi m_k là độ dài dãy con không giảm dài nhất mà xuất phát từ a_k.

- Nếu tồn tại k để $m_k \geq n+1$ thì bài toán đã xong.
- Nếu với $\forall k = \overline{1, n^2+1}$, $1 \leq m_k \leq n$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $1 + \left\lfloor \dfrac{n^2+1}{n} \right\rfloor = n+1$ số bằng nhau

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}$$

trong đó $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \leq n^2+1$. Giả sử tồn tại i để $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$, khi đó ta có thể lấy dãy con của S xuất phát từ $a_{k_{i+1}}$ và đặt a_{k_i} vào đằng trước của dãy đó. Như vậy ta thiết lập được một dãy con không giảm xuất phát từ a_{k_i} dài hơn dãy con không giảm dài nhất xuất phát từ $a_{k_{i+1}}$ (Vô lý). Do đó ta phải có $a_{k_i} \geq a_{k_{i+1}}, \forall i = \overline{1, n}$, tức là ta đã tìm được một dãy không tăng có $n+1$ phần tử

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_{n+1}}$$

Điều này là vô lý vì ta đã giả sử không có dãy con không tăng nào. Do vậy trường hợp $1 \leq m_k \leq n$ là không thể

4.

Gọi S là tổng số tuổi của mọi người trong một nhóm con. Để ý rằng số tuổi của mỗi người trong nhóm phải phân biệt, vì nếu như có hai người bằng tuổi nhau thì ta chỉ cần lấy hai người đó và cho mỗi người vào một nhóm con. Hơn nữa, số người tối đa của một nhóm con chỉ có thể là 9. Do đó

$$1 \leq S \leq 60+59+58+57+56+55+54+53+52 = 504$$

Như vậy có tất cả 502 khả năng của S. Nhưng số nhóm con khác rỗng có thể của nhóm 10 người là

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{9} = 1022$$

Do đó theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai nhóm con (Phân biệt và khác rỗng) sao cho tổng số tuổi ở mỗi nhóm là như nhau. Nhưng đến đây ta vẫn chưa xong, vì ta cần hai nhóm không giao nhau. Điều này có thể khắc phục bằng cách bỏ đi hết những người mà ở cả hai nhóm, khi đó số tuổi của hai nhóm vẫn như nhau nhưng giờ cả hai nhóm không có người nào chung.

5.

Với một hệ điểm bất kỳ thỏa mãn đề bài, nếu như có 3 điểm không thẳng hàng thì ta luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh cùng màu. Thật vậy, nếu như có 3 điểm A, B, C không thẳng hàng và cùng màu thì ta đã xong. Còn nếu như A, B, C không đồng thời cùng màu, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 điểm cùng màu (Giả sử là màu đỏ). Khi đó C và một điểm M nào đó trên đoạn AB sẽ có cùng màu xanh. Như vậy sẽ có một điểm N trên đoạn CM có màu đỏ mà khi đó A, B, N sẽ không thẳng hàng và có cùng màu đỏ.

Giả sử rằng tồn tại 3 điểm cùng màu (Không mất tính tổng quát, giả sử là màu đỏ) A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng, khi đó phải tồn tại 3 điểm màu xanh A_2, B_2, C_2 nằm trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 và tạo thành $\Delta A_2B_2C_2$. Tương tự, tồn tại các điểm màu đỏ A_3, B_3, C_3 nằm trên các cạnh B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 và tạo thành $\Delta A_3B_3C_3$. Quá trình này diễn ra vô hạn lần, như vậy số điểm xanh và đỏ là vô hạn. Nhưng ta chỉ có hữu hạn n điểm, dẫn tới mâu thuẫn. Vậy giả sử sai, không tồn tại 3 điểm nào cùng màu mà tạo thành một tam giác, dẫn tới tất cả các điểm đã cho phải thẳng hàng.

6. *(Định lý Sylvester - Gallai)*

Với $n = 2$ thì hiển nhiên tồn tại đường thẳng đi qua 2 điểm

Với $n = 3$ thì hiển nhiên tồn tại đường thẳng đi qua 2 điểm chính là cạnh của tam giác

Với $n \geq 4$. Do số điểm cho trước là hữu hạn nên ta có thể chọn ra 3 điểm A, B, C sao cho $d(A, BC)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Dựng $AA' \perp BC$, đặt $AA' = d(A, BC) = d_{\min}$. Giả sử rằng đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ sẽ luôn đi qua một điểm thứ ba. Gọi điểm thứ ba mà đường nối B, C đi qua là D. Xét hai trường hợp

- D nằm trên đoạn BC. Dựng và $DD' \perp AC$. Ta có $\dfrac{DD'}{AA'} = \dfrac{CD}{CA}$ do $\Delta CDD' \sim CAA'$ (g.g). Hơn nữa, $CD < CA' < CA$, do đó ta được $DD' < AA'$ hay $d(D, AC) < d_{\min}$ (Mâu thuẫn)
- D nằm ngoài BC. Không mất tính tổng quát, giả sử C nằm giữa B và D. Dựng $CC' \perp AC$. Ta có $\dfrac{CC'}{AA'} = \dfrac{DC}{DA}$ do $\Delta DCC' \sim DAA'$ (g.g). Hơn nữa, $DC < DA' < DA$, do đó ta được $CC' < AA'$ hay $d(C, AD) < d_{\min}$ (Mâu thuẫn)

Như vậy giả sử sai, phải tồn tại một đường thẳng đi qua đúng 2 đỉnh.

7.

Gọi $R_1, R_2, \ldots, R_n$ là các điểm màu đỏ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các điểm màu xanh. Do số điểm cho trước là hữu hạn nên ta có thể tìm được một cách nối sao cho tổng độ dài các đoạn nối là nhỏ nhất. Giả sử trong cách nối đó, tồn tại hai đoạn cắt nhau (Không mất tính tổng quát giả sử 2 đoạn đó là R_1B_1, R_2B_2) tại một điểm X. Khi đó theo bất đẳng thức tam giác,

$$\begin{aligned} R_1B_1 + R_2B_2 &= R_1X + XB_1 + R_2X + XB_2 \\ &= (R_1X + XB_2) + (R_2X + XB_1) \\ &> R_1B_2 + R_2B_1 \end{aligned}$$

Như vậy ta tìm được một cách nối có tổng các đoạn nối nhỏ hơn (Mẫu thuẫn với giả thiết ban đầu). Như vậy giả sử sai, không tồn tại 2 đoạn nào cắt nhau.

Phần IV

1. Sơn bàn cờ $1 \times n$ bằng ba màu xanh, đỏ và trắng sao cho không có hai ô đỏ nào kề nhau. Tìm công thức truy hồi cho h_n là số cách tô màu. Giải công thức truy hồi đó.

2. Gọi h_n là số cách lấy ra n quả gồm táo, cam, chuối và lê sao cho số táo là số chẵn, có không có 2 quả cam, không quá 1 quả lê và số chuối là bội của 3. Tìm hàm sinh cho dãy h_n và tìm công thức tường minh cho h_n.

3. Gọi h_n là chuỗi tam phân (chuỗi chỉ gồm các kí tự "0", "1", "2") độ dài n không chứa các chuỗi con "00", "11", "01", "10".

Tìm công thức truy hồi cho h_n, giải công thức truy hồi đó.

4. Gọi h_n là số cách phủ một bàn cờ $1 \times n$ bằng các kích thước 1×1 và 1×2 sao cho không có hình 1×2 nào đặt cạnh nhau. Tìm công thức truy hồi cho h_n.

5. Gọi h_n là chuỗi tam phân (chuỗi chỉ gồm các kí tự "0", "1", "2") độ dài n không chứa các chuỗi con "00", "11". Tìm công thức truy hồi cho h_n, giải công thức truy hồi đó.

6. Gọi h_n là số cách sơn bàn cờ $1 \times n$ bằng bốn màu xanh, đỏ, trắng và vàng sao cho số ô đỏ là số chẵn, số ô trắng là số lẻ. Xác định hàm sinh mũ cho dãy h_n và tìm công thức tường minh cho h_n.

7. Gọi h_n là số cách sơn bàn cờ $1 \times n$ bằng bốn màu xanh, đỏ, trắng và vàng sao cho số ô đỏ và số ô trắng đều là số chẵn. Xác định hàm sinh mũ cho dãy h_n và tìm công thức tường minh cho h_n

Giải

1.

(Thiết lập công thức truy hồi) Với bàn cờ $1 \times (n+1)$, xét hai trường hợp

- Ô thứ $n+1$ được tô màu đỏ. Khi đó để thu được một cách tô màu thỏa mãn thì ta phải tô hai ô cuối cùng lần lượt màu xanh; đỏ hoặc trắng; đỏ. $n-1$ ô còn lại có h_{n-1} cách tô. Như vậy trường hợp này có $2h_{n-1}$ cách tô.
- Ô thứ $n+1$ được tô màu xanh hoặc trắng. Khi đó ở n ô còn lại có h_n cách tô. Như vậy trường hợp này có $2h_n$ cách tô.

Từ hai trường hợp trên, ta được công thức truy hồi

$$h_{n+1} = 2h_n + 2h_{n-1}$$

trong đó $h_1 = 3$, $h_2 = 8, \ldots$

(Giải công thức truy hồi) Xét phương trình đặc trưng

$$r^2 - 2r - 2 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $r = 1 \pm \sqrt{3}$. Do đó

$$h_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n$$

Với $n = 1$ và $n = 2$, ta có

$$\begin{cases} C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ C_1(1+\sqrt{3})^2 + C_2(1-\sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6} \\ C_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy $h_n = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$

2.

Ta có hàm sinh của số lượng táo, cam, chuối, lê lần lượt là

$$\begin{aligned} f_{\text{táo}}(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \\ f_{\text{cam}}(x) &= 1 + x + x^2 \\ f_{\text{chuối}}(x) &= 1 + x \\ f_{\text{lê}}(x) &= 1 + x^3 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^3} \end{aligned}$$

Như vậy hàm sinh cho dãy h_n là số cách lấy n quả gồm táo, cam, chuối và lê thỏa mãn đề bài là

$$\begin{aligned} h(x) &= f_{\text{táo}}(x) f_{\text{cam}}(x) f_{\text{chuối}}(x) f_{\text{lê}}(x) \\ &= \frac{(1+x+x^2)(1+x)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \end{aligned}$$

Từ đó ta được $h_n = n+1$

3.

(Thiết lập công thức truy hồi) Xét chuỗi tam phân S có độ dài $n+1$. Trường hợp chuỗi này kết thúc bằng ký tự "2", chuỗi n ký tự đầu sẽ có h_n khả năng để S thỏa mãn bài toán. Nếu như chuỗi S kết thúc bằng ký tự "0" hoặc "1" thì ký tự liền trước đó phải là "2" (Nói cách khác, chuỗi S sẽ phải kết thúc bằng cụm 2 ký tự "20" hoặc "21"), chuỗi $n-1$ ký tự đầu sẽ có h_{n-1} khả năng để S thỏa mãn bài toán. Như vậy ta được công thức truy hồi

$$h_{n+1} = h_n + 2h_{n-1}$$

trong đó $h_1 = 3$, $h_2 = 5$

(Giải công thức truy hồi) Xét phương tình đặc trưng

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $r = -1$ và $r = 2$. Do đó

$$h_n = C_1(-1)^n + C_2 2^n$$

Với $n = 1$ và $n = 2$, ta có

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 = 3 \\ C_1 + 4C_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{3} \\ C_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $h_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 4.2^n}{3}$

4.

Xét bàn cờ $1 \times (n+1)$. Nếu như vị trí bên phải ngoài cùng của bàn cờ được phủ bởi hình vuông 1×1 thì bàn cờ con $1 \times n$ còn lại sẽ có h_n cách để phủ thỏa mãn bài toán. Mặt khác, nếu như vị trí bên phải ngoài cùng của bàn cờ được phủ bởi hình chữ nhật 1×2 thì hình đứng trước nó phải là hình vuông 1×1, phần bàn cờ con $1 \times (n-2)$ còn lại sẽ có h_{n-2} cách phủ thỏa mãn bài toán. Như vậy ta được công thức truy hồi

$$h_{n+1} = h_n + h_{n-2}$$

trong đó $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 3$

5.

(Thiết lập công thức truy hồi) Trong h_n chuỗi tam phân độ dài n thỏa mãn bài toán, ta chia ra thành 3 nhóm: a_n chuỗi tam phân độ dài n kết thúc bằng ký tự "0", b_n chuỗi tam phân độ dài n kết thúc bằng ký tự "1", c_n chuỗi tam phân độ dài n kết thúc bằng ký tự "2".

Xét 3 trường hợp

- a_{n+1} chuỗi tam phân độ dài $n+1$ thỏa mãn bài toán có tận cùng là "0" được tạo ra bằng cách thêm ký tự "0" vào cuối chuỗi tam phân độ dài n thỏa mãn bài toán có tận cùng là "1" hoặc "2". Như vậy

$$a_{n+1} = b_n + c_n$$

- b_{n+1} chuỗi tam phân độ dài $n+1$ thỏa mãn bài toán có tận cùng là "1" được tạo ra bằng cách thêm ký tự "1" vào cuối chuỗi tam phân độ dài n thỏa mãn bài toán có tận cùng là "0" hoặc "2". Như vậy

$$b_{n+1} = a_n + c_n$$

- c_{n+1} chuỗi tam phân độ dài $n+1$ thỏa mãn bài toán có tận cùng là "2" được tạo ra bằng cách thêm ký tự "2" vào cuối chuỗi tam phân độ dài n thỏa mãn bài toán (Có tận cùng là ký tự bất kỳ)

$$c_{n+1} = h_n$$

Như vậy

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} \\ &= (b_n + c_n) + (a_n + c_n) + h_n \\ &= 2h_n + h_{n-1} \end{aligned}$$

trong đó $h_1 = 3$, $h_2 = 7$

(Giải công thức truy hồi) Xét phương trình đặc trưng

$$r^2 - 2r - 1 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $r = 1 \pm \sqrt{2}$. Do đó

$$h_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n$$

Với $n = 1$ và $n = 2$, ta có

$$\begin{cases} C_1(1+\sqrt{2}) + C_2(1-\sqrt{2}) = 3 \\ C_1(1+\sqrt{2})^2 + C_2(1-\sqrt{2})^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ C_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy $h_n = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$

6.

Ta có hàm sinh mũ của số cách tô lên bàn cờ $1 \times n$ bằng mỗi loại màu xanh, đỏ, trắng, vàng là

$$\begin{aligned} f_{\text{xanh}}(x) = f_{\text{vàng}}(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x \\ f_{\text{đỏ}}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ f_{\text{trắng}}(x) &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Như vậy hàm sinh mũ cho h_n là số cách tô màu bàn cờ $1 \times n$ bằng bốn màu xanh, đỏ, trắng, vàng thỏa mãn đề bài là

$$\begin{aligned} h(x) &= f_{\text{xanh}}(x) f_{\text{đỏ}}(x) f_{\text{trắng}}(x) f_{\text{vàng}}(x) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^{2x} = \frac{e^{4x} - 1}{4} \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$h_n = h^{(n)}(0) = 4^{n-1}$$

7.

Ta có hàm sinh mũ của số cách tô lên bàn cờ $1 \times n$ bằng mỗi loại màu xanh, đỏ, trắng, vàng là

$$\begin{aligned} f_{\text{xanh}}(x) = f_{\text{vàng}}(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x \\ f_{\text{đỏ}}(x) = f_{\text{trắng}}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Như vậy hàm sinh mũ cho h_n là số cách tô màu bàn cờ $1 \times n$ bằng bốn màu xanh, đỏ, trắng, vàng thỏa mãn đề bài là

$$\begin{aligned} h(x) &= f_{\text{xanh}}(x) f_{\text{đỏ}}(x) f_{\text{trắng}}(x) f_{\text{vàng}}(x) \\ &= e^{2x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{4x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$h_n = h^{(n)}(0) = 4^{n-1} + 2^{n-1}$$

Phần V

1. Chứng minh rằng một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi với mọi phân hoạch tập đỉnh của nó thành hai tập khác rỗng, luôn tồn tại một cạnh sao cho hai đầu mút thuộc về hai phần của phân hoạch.
2. Cho G là đơn đồ thị không chứa đỉnh cô lập. Chứng minh rằng G là đầy đủ khi và chỉ khi G không chứa đồ thị con cảm sinh có đúng hai cạnh.
3. Trong một lớp học có 9 sinh viên, mỗi sinh viên gửi thư cho 3 người bạn của mình. Hỏi có thể mỗi sinh viên đều nhận được thư từ 3 người bạn mà mình đã gửi thư hay không?
4. Chứng minh rằng đồ thị G là hai phía khi và chỉ khi mọi đồ thị con H của G đều chứa một tập độc lập chứa ít nhất một nửa số đỉnh của $V(H)$.
5. Chứng minh rằng đơn đồ thị liên thông G là đồ thị hai phía đầy đủ khi và chỉ khi G không chứa P_4 và C_3 như là đồ thị con cảm sinh.
6. Cho G là đơn đồ thị liên thông không chứa P_4 hay C_4 như là đồ thị con cảm sinh. Chứng minh rằng G có một đỉnh kề với tất cả các đỉnh còn lại.
7. Cho G là đồ thị có tất cả các đỉnh đều là đỉnh bậc chẵn. Chứng minh rằng G không có cạnh cầu.

Giải

1.

(Chiều thuận) Do G là đồ thị liên thông nên ta phân hoạch tập $V(G)$ thành hai tập A và B. Giả sử không có hai đỉnh nào ở A và B kề nhau, ta thu được hai thành phần độc lập của G là hai đồ thị tạo bởi các đỉnh trong tập A và B. Kéo theo G không liên thông (Mâu thuẫn)

(Chiều đảo) Giả sử G không liên thông, khi đó G sẽ có ít nhất hai thành phần liên thông. Như vậy ta có hai phân hoạch A và B của $V(G)$. Trong đó, A là các đỉnh của một thành phần liên thông và B là tập các đỉnh còn lại. Vì thế không đỉnh nào trong A và B kề với nhau (Mâu thuẫn)

2.

(Chiều thuận) Do G là đồ thị đầy đủ nên đồ thị con cảm sinh bất kỳ của G cũng là đồ thị đầy đủ. Hơn nữa, một đồ thị đầy đủ K_n sẽ có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh, do đó không tồn tại đồ thị đầy

đủ nào có đúng 2 cạnh (Do phương trình $\frac{n(n-1)}{2} = 2$ không có nghiệm nguyên dương). Như vậy không tồn tại đồ thị con cảm sinh có đúng hai cạnh.

(Chiều đảo) Giả sử G không là đồ thị đầy đủ. Nếu G không liên thông thì G sẽ có ít nhất 2 thành phần liên thông. Chọn hai thành phần liên thông bất kỳ, tại mỗi thành phần ta lấy ra một cạnh và 2 đỉnh là đầu mút của cạnh vừa lấy. Như vậy ta được một đồ thị con cảm sinh có 2 cạnh (Mâu thuẫn). Khi đó G phải là đồ thị liên thông. Nhưng vì G không đầy đủ nên tồn tại cặp đỉnh u,v thuộc $V(G)$ sao cho $d = d_G(u,v) \geq 2$ (Hay nói cách khác, $uv \notin E(G)$). Khi đó tồn tại dãy đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ thỏa mãn $ux_1, vx_{d-1} \in E(G)$, $ux_k, vx_k \notin E(G), \forall k = \overline{1, d-2}$ và

$$x_i x_j \begin{cases} \in E(G) \text{ nếu } |j-i| = 1 \\ \notin E(G) \text{ nếu } |j-i| \neq 1 \end{cases}$$

Xét đồ thị cảm sinh bởi $\{\{u,x_1\},\{x_{d-1},v\}\}$, đồ thị này có đúng 2 cạnh ux_1 và vx_{d-1} (Mâu thuẫn). Như vậy giả sử sai, ta phải có G là đồ thị đầy đủ

3.

Giả sử mỗi sinh viên đều nhận được thư từ 3 người bạn của mình. Ta coi 9 sinh viên như 9 đỉnh của một đồ thị G. Mỗi đỉnh chỉ nối đến 3 đỉnh khác, tương ứng với việc 1 sinh viên gửi thư cho 3 người bạn và nhận lại thư từ đúng 3 người bạn này. Khi đó ta được một đồ thị có 9 đỉnh bậc 3. Điều này là vô lý do đồ thị vô hướng phải có tổng bậc của tất cả các đỉnh là số chẵn, trong khi tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị G nói trên là $9.3 = 27$

4.

(Chiều thuận) Do G là đồ thị hai phía nên ta có thể phân hoạch $V(G)$ thành hai tập độc lập A và B. Mọi đồ thị con H của G đều chứa m đỉnh thuộc A và n đỉnh thuộc B. Hiển nhiên ta có $m \geq \lceil |V(H)|/2 \rceil$ hoặc $n \geq \lceil |V(H)|/2 \rceil$, trong đó $|V(H)| = m+n$, do đó H luôn chứa một tập độc lập có lực lượng $\lceil |V(H)|/2 \rceil$

(Chiều đảo) Giả sử G không là đồ thị hai phía, khi đó G có chứa một chu trình lẻ C_{2k+1}. Chọn $H = C_{2k+1}$, ta chỉ ra rằng không tồn tại tập độc lập của H có lực lượng không nhỏ hơn $\lceil |V(H)|/2 \rceil$. Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}$ là các đỉnh của H, trong đó $u_i u_j \in E(H)$ khi và chỉ khi $|j-i| = 1$. Sử dụng nguyên lý Dirichlet, ta chứng minh được rằng tập độc lập tối đại của H chỉ gồm k phần tử, chẳng hạn $\{x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}\}$ (Mâu thuẫn). Như vậy giả sử sai, ta phải có G là đồ thị hai phía.

5.

(Chiều thuận) Hiển nhiên

(Chiều đảo) Xét một đỉnh u bất kỳ, rõ ràng không có hai đỉnh nào trong $N(u)$ kề với nhau bởi nếu không sẽ tạo thành C_3. Xét tập $S = V(G) - N(u)$, ta sẽ chứng minh mỗi một đỉnh trong S đều kề với mọi đỉnh trong $N(u)$. Thật vậy, giả sử rằng điều đó sai, khi đó sẽ tồn tại một đỉnh $x \in S$ và một đỉnh $y \in N(u)$ sao cho $d(x,y) \geq 2$. Nếu như $d(x,y) \geq 3$ thì đường đi u-v sẽ cảm sinh ra P_4, do đó ta phải có $d(x,y) = 2$. Nhưng điều này dẫn tới vô lý vì khi đó sẽ tồn tại đỉnh w nối với u và v, khi đó $\{v,w,x,y\}$ sẽ tạo thành P_4.

6.

Xét đỉnh x có bậc lớn nhất. Giả sử rằng tồn tại một đỉnh y không kề với x. Gọi x,u,v là các đỉnh đầu tiên trong đường đi x-y (v có thể trùng với y). Do $d(u) \leq d(x)$ nên tồn tại một đỉnh $w \in N(x)$ mà không kề với v. Nếu như w kề với y thì $\{z,x,u,v\}$ sẽ cảm sinh ra C_4, nếu không thì sẽ cảm sinh ra P_4 (Mâu thuẫn). Như vậy mọi đỉnh đều kề với đỉnh x.

7.

Giả sử G có cạnh cầu và gọi cạnh đó là uv (u,v là hai đầu mút). Khi đó $G - uv$ sẽ có hai thành phần liên thông là hai đồ thị con cảm sinh của G. Lúc này, mỗi đồ thị con đó có đúng một đỉnh bậc lẻ tương ứng là u và v (Vô lý). Như vậy giả sử sai, đồ thị G không có cạnh cầu.

Phần VI

1. Chứng minh rằng một đồ thị gồm n đỉnh và m cạnh sẽ chứa ít nhất $m-n+1$ chu trình
2. Cho G là đồ thị có $\operatorname{diam} G = d$. Chứng minh rằng G chứa một tập độc lập có lực lượng $\lceil (d+1)/2 \rceil$
3. Trong các cây chứa n đỉnh, tìm cây chứa tập độc lập có lực lượng lớn nhất.
4. Chứng minh rằng đơn đồ thị liên thông là đường đi khi và chỉ khi nó chứa đúng hai đỉnh không là đỉnh khớp.
5. Chứng minh rằng một cạnh của đồ thị liên thông G là cạnh cầu khi và chỉ khi cạnh đó thuộc tất cả các cây khung của G.
6. Chứng minh rằng đồ thị liên thông n đỉnh G có đúng một chu trình khi và chỉ khi nó có đúng n cạnh.
7. Chứng minh rằng một đồ thị có số cạnh ít hơn số đỉnh sẽ chứa ít nhất là một thành phần liên thông là một cây.

Giải

1.

Hiển nhiên nếu $m < n-1$ thì đồ thị sẽ có ít nhất 0 chu trình. Đối với trường hợp $m \geq n-1$, xét một cây gồm n đỉnh và $n-1$ cạnh. Nối hai đỉnh bất kỳ của cây này bằng một cạnh sẽ tạo thêm ít nhất 1 chu trình. Như vậy nếu ta nối thêm $m-n+1$ cạnh mới, thì đồ thị thu được sẽ có m cạnh và chứa ít nhất $m-n+1$ chu trình.

2.

Chọn hai đỉnh u và v sao cho $d(x,y) = d$. Xét đường đi ngắn nhất giữa u và v, đường đi này sẽ lần lượt đi qua dãy đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$. Nhận thấy rằng x_i và x_j sẽ không là hai đỉnh kề trong G nếu như $|j-i| > 1$. Thật vậy, nếu như x_i và x_j kề nhau thì dãy đỉnh mà đường đi ngắn nhất giữa u và v sẽ là $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j, \ldots, x_{d-1}$ và khi đó $d(x,y) < d$ (Mâu thuẫn). Từ đó dễ dàng tìm được tập độc lập có lực lượng $\lceil (d+1)/2 \rceil$ là $\{u, x_2, x_4, \ldots, x_{d-2}, v\}$ nếu d chẵn và $\{u, x_2, x_4, \ldots, x_{d-1}\}$ nếu d lẻ.

3.

Chi tiết thuật toán và code xem tại đây

4.

(Chiều thuận) Gọi G là đơn đồ thị liên thông là đường đi, thứ tự các đỉnh mà đường đi này sẽ đi qua là $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Hiển nhiên rằng đồ thị G có đúng hai đỉnh không phải đỉnh khớp là u_0 và u_n.

(Chiều đảo) Gọi G là đơn đồ thị có chứa đúng 2 đỉnh khớp. Xét cây khung T của G, khi đó cây khung này sẽ chứa đúng 2 lá, hay T là đường đi. Thật vậy, giả sử T có nhiều hơn 2 lá. Gọi u_1, u_2, u_3 là các đầu mút của 3 trong số các lá của T. Nếu như

$u_2u_3 \notin E(G)$ thì u_1, u_2, u_3 sẽ không là các đỉnh khớp của G (Vô lý). Còn nếu như $u_2u_3 \in E(G)$ thì trong G sẽ tồn tại một chu trình, do đó có tối thiểu 3 đỉnh khớp (Vô lý). Gọi các đỉnh mà đường đi T đi qua thứ tự là $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nếu như $v_iv_j \in E(G)$ với $|j-i| > 1$ thì trong G sẽ có một chu trình, và khi đó sẽ có nhiều hơn 2 đỉnh khớp (Vô lý). Do đó $v_iv_j \in E(G)$ khi và chỉ khi $|j-i| = 1$ và từ đó suy ra G là đường đi.

5.

(Chiều thuận) Gọi e là một cạnh cầu của đồ thị G, khi đó $G-e$ sẽ gồm 2 thành phần liên thông. Chọn hai đỉnh u, v thuộc 2 thành phần liên thông khác nhau, khi đó mọi đường đi u-v chắc chắn sẽ đi qua e. Từ đó suy ra mọi cây khung phải chứa e

(Chiều đảo) Gọi e là cạnh nằm trong mọi cây khung của G. Giả sử e không là cạnh cầu. Khi đó $G-e$ vẫn là đồ thị liên thông nên tồn tại một cây khung của $G-e$ chứa tất cả các đỉnh của $V(G)$ và không chứa e (Mâu thuẫn). Do đó giả sử sai, e phải là cạnh cầu.

6.

(Chiều thuận) Xét đồ thị G có đúng một chu trình. Chọn ra cạnh e thuộc chu trình của đồ thị, khi đó $G-e$ sẽ là đồ thị không chứa chu trình nào, hay hai đỉnh bất kỳ của $G-e$ đều được nối bằng đúng một đường đi đơn. Theo định lý *6 mệnh đề tương đương*, $G-e$ phải liên thông và có $n-1$ cạnh, hay G có đúng n cạnh

(Chiều đảo) Xét đồ thị G' có n đỉnh và $n-1$ cạnh. Nhận thấy rằng G' phải là một cây. DO đó khi ta thêm một cạnh nối giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị thì sẽ tạo ra đồ thị mới có n cạnh và đúng một chu trình.

7.

Nhận thấy rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh thì phải có tối thiểu $n-1$ cạnh. Nếu như G liên thông thì bài toán đã xong. Còn nếu G không liên thông thì G phải có một thành phần liên thông G_k mà số cạnh ít hơn số đỉnh. Như vậy trong G sẽ có thành phần G_k có n_k đỉnh và $n_k - 1$ cạnh, hay G_k là cây.

Phần VII

1. Chứng minh rằng nếu đồ thị hai phía liên thông G là đồ thị Euler thì nó sẽ có số chẵn cạnh.
2. Chứng minh mọi đơn đồ thị phẳng đều chứa một đỉnh có bậc không quá 5.
3. Chứng minh đồ thị phẳng không quá 11 đỉnh sẽ chứa một đỉnh có bậc không quá 4.
4. Chứng minh đồ thị phẳng hai phía sẽ chứa một đỉnh có bậc không quá 3.
5. Tìm điều kiện cần và đủ của n để $K_{n,n}$ là đồ thị Hamilton.
6. Cho đồ thị G có $2m$ đỉnh bậc lẻ. Chứng minh rằng một chu trình chứa tất cả các cạnh của đồ thị sẽ chứa m cạnh lặp lại hơn một lần.
7. Cho đơn đồ thị G có ít nhất 11 đỉnh, chứng minh rằng G hoặc đồ thị bù của nó không phải là đồ thị phẳng.

Giải

1.

Do G là đồ thị Euler nên G sẽ có chu trình Euler. Hơn nữa, G là đồ thị hai phía nên chu trình Euler của G sẽ có độ dài chẵn. Do đó số cạnh của đồ thị G là số chẵn.

2.

Nếu $|V(G)| \leq 6$ thì hiển nhiên mọi đỉnh đều có bậc không quá 5. Xét trường hợp $|V(G)| \geq 7$. Giả sử $\delta(G) \geq 6$. Khi đó

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 3|V(G)| \qquad (*)$$

Mặt khác, do G là đồ thị phẳng nên ta có

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \qquad (**)$$

Từ (*) và (**), suy ra $0 \leq -6$ (Vô lý). Như vậy giả sử sai, ta phải có $\delta(G) \leq 5$

3.

Nếu $|V(G)| \leq 5$ thì hiển nhiên mọi đỉnh đều có bậc không quá 4. Xét trường hợp $6 \leq |V(G)| \leq 11$. Giả sử $\delta(G) \geq 5$. Khi đó

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq \frac{5}{2}|V(G)| \qquad (*)$$

Mặt khác, do G là đồ thị phẳng nên ta có

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \qquad (**)$$

Từ (*) và (**), suy ra $|V(G)| \geq 12$ (Vô lý). Như vậy giả sử sai, ta phải có $\delta(G) \leq 4$

4.

Xét trên thành phần liên thông của G. Do đồ thị hai phía không tồn tại chu trình độ dài lẻ nên đồ thị phẳng hai phía sẽ không tồn tại chu trình độ dài 3. Khi đó

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4 \qquad (*)$$

Giả sử $\delta(G) \geq 4$. Ta có

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 2|V(G)| \qquad (**)$$

Từ (*) và (**), suy ra $0 \leq -4$ (Vô lý). Như vậy giả sử sai, ta phải có $\delta(G) \leq 3$

5.

Với $n = 1$ thì $K_{1,1}$ không là đồ thị Hamilton. Xét trường hợp $n \geq 2$, ta có thể xây dựng được một chu trình Hamilton. Gọi hai tập độc lập của $V(K_{n,n})$ là $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Xuất phát từ x_1, ta đi theo trình tự dưới đây

$$x_1 \to y_1 \to x_2 \to y_2 \to \cdots \to x_n \to y_n \to x_1$$

6.

Gọi C là chu trình Euler của G. Tại một đỉnh v nào đó, khi mạch đi qua v thì phải đi vào một cạnh và đi ra tại một cạnh khác. Nhưng đỉnh bậc lẻ có số lẻ cạnh kề, do đó sẽ có ít nhất một cạnh bị lặp lại để mạch có thể đi ra khỏi đỉnh đó. Có $2m$ đỉnh bậc lẻ cho nên cần ít nhất m cạnh để kề với các đỉnh đấy. Do đó, có m cạnh bị lặp lại hơn 1 lần.

7.

Nếu G không là đồ thị phẳng thì bài toán đã xong. Trường hợp G là đồ thị phẳng thì ta có

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \qquad (*)$$

Nhận thấy rằng $|V(\overline{G})| = |V(G)| = n$ và $|E(\overline{G})| = n(n-1)/2 - |E(G)|$. Giả sử $\overline{G}$ cũng là đồ thị phẳng, khi đó

$$\begin{aligned} & |E(\overline{G})| \leq 3|V(\overline{G})| - 6 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n(n-1)}{2} - |E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \qquad (**) \end{aligned}$$

Từ (*) và (**), suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)}{2} - 6n + 12 \leq 6n - 12 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $3 \leq n \leq 10$ (Mâu thuẫn). Do đó giả sử sai, $\overline{G}$ không là đồ thị phẳng

——— THE END ———

SAMI 1956