ĐỀ 2

ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH III - Học kì 20212

Nhóm ngành 1 **Thời gian làm bài: 90 phút**

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [1đ] Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ Cô-si cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Câu 2. [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+e^{-3n}\right)$.

Câu 3. [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$.

Câu 4. [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n}$.

Câu 5. [1đ] Giải phương trình vi phân $(e^{2y}+x)y'=1$.

Câu 6. [1đ] Giải phương trình vi phân $x'(y)=e^y y\sqrt{x^2+3}$.

Câu 7. [1đ] Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x'(t)=y-5\sin t \\ y'(t)=2x+y \end{cases}$

Câu 8. [1đ] Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t)=e^{3t}$.

Câu 9. [1đ] Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace

$$x''+x=f(t), x(0)=x'(0)=0; f(t)=\begin{cases} \sin 2t,\ 0\le t<2\pi \\ 0,\ t\ge 2\pi \end{cases}$$

Câu 10. [1đ] Cho $y(x)$ là một nghiệm của phương trình $y''+my'+y=0,\ m\in\mathbb{R}$. Tìm điều kiện của tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Cuối kỳ 20212

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1. [1đ]

- Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$, Khi đó:

- Nếu $L<1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

- Nếu $L>1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

Đặt $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ta xét $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\dfrac{1}{e}<1$

Nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Cô-Si.

Câu 2. [1đ]

-Đặt $u_n=\ln\left(1+e^{-3n}\right)>0$ với $n>0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+e^{-3n}\right)$ là chuỗi dương.

Khi $n\to\infty$ $\quad u_n\sim\left(\dfrac{1}{e}\right)^{3n}$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{e}\right)^{3n}$ hội tụ (do $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{3}<1$)

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+e^{-3n}\right)$ hội tụ theo TCSS.

Câu 3. [1đ]

Đặt $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n+5}}>0$ với $(n>1)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ là chuỗi đan dấu

Dễ thấy, $v_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2n+7}}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+5}}=v_n\Rightarrow$ là dãy giảm

Mà $\lim\limits_{x\to\infty}v_n=0$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ hội tụ

Câu 4. [1đ]

Đặt $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\cos x)^n}{n}$ và $y=\cos(x)\to I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{n}$ với $a_n=\dfrac{1}{n}$

Bán kính hội tụ là $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1/n}{1/(n+1)}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của I là $(-1,1)$.

- Tại $y=1$, ta có chuỗi $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

ĐỀ 2

- Tại $y=-1$, ta có chuỗi $I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n}$ là chuỗi đan dấu, có $\frac{1}{n}$ là dãy giảm và $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy I hội tụ khi và chỉ khi $-1\le y<1$ hay $-1\le \cos x<1$ hay $\cos x\neq 1 \iff x\neq k2\pi (k\in Z)$

Vậy miền hội tụ cần tìm là $x\in R, x\neq k2\pi (k\in Z)$

Câu 5: [1đ]

Ta có: $(e^{2y}+x)y'=1\Rightarrow e^{2y}+x=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}=x' \iff x'-x=e^{2y}$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(y)=-1, q(y)=e^{2y}$

Do đó $e^{-y}(x'-x)=e^y\Rightarrow e^{-y}.x=\int e^y=e^y+C\Rightarrow x=e^{2y}+C.e^y$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $x=e^{2y}+C.e^y$

Câu 6: [1đ]

Ta có: $x'(y)=e^y.y.\sqrt{x^2+3}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=e^y.y.\sqrt{x^2+3}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=e^y.ydy$

Tích phân 2 vế: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=\int e^y.ydy\Rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+3})=\int y.d(e^y)=y.e^y-e^y+C(C\in R)$

Vậy $\ln(x+\sqrt{x^2+3})=y.e^y-e^y+C$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Câu 7: [1đ]

Ta có: $x''(t)=y'(t)-5\cos t=2x+y-5\cos t=2x+x'(t)+5\sin t-5\cos t$

$\Rightarrow x''(t)-x'(t)-2x=5\sin t-5\cos t\quad (1)$

Xét phương trình thuần nhất $x''(t)-x'(t)-2x=0$ có phương trình đặc trưng là:

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=2,\lambda=-1$$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $\overline{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$

Mà $f(t)=5\sin t-5\cos t\Rightarrow x^*=A\cos t+B\sin t$

Ta có: $\begin{cases}(x^*)'=-A\sin t+B\cos t\\(x^*)''=-A\cos t-B\sin t\end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$

Suy ra: $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+2\cos t-\sin t$

Ta có: $y(t)=x'(t)+5\sin t=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+3\sin t-\cos t$

ĐỀ 2

Vậy $\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 2\cos t - \sin t \\ y(t) = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + 3\sin t - \cos t \end{cases}$

Câu 8: [1đ]

Theo định nghĩa ta có:

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-3)t}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-3)t}}{3-s}\bigg|_0^\infty = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-3)A}}{3-s} - \frac{1}{3-s}$$

$\Rightarrow L\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s-3} \qquad (s > 3)$

Câu 9: [1đ]

Ta có: $f(t) = \sin 2t(1 - u(t-2\pi)) \Rightarrow L\{f(t)\}(s) = \frac{2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}e^{-2\pi s}$

Đặt: $L\{x(t)\}(s) = X(s)$

Biến đổi Laplace phương trình đã cho ta được:

$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}e^{-2\pi s}$

$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}e^{-2\pi s}$

$\Rightarrow x(t) = L^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}e^{-2\pi s}\}(t)$

$= L^{-1}\{\frac{2}{3(s^2+1)}\}(t) - L^{-1}\{\frac{2}{3(s^2+4)}\}(t) - u(t-2\pi)\cdot L^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}\}(t-2\pi)$

$= \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t - u(t-2\pi)(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t) \quad (t \geq 0)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t - u(t-2\pi)(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t)$; $t \geq 0$

Câu 10: [1đ]

Gọi nghiệm của phương trình đặc trưng $\lambda^2 + m\lambda + 1 = 0$ là λ_1, λ_2

Xét $m \notin [-2;2]$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

Mà: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -m \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ cùng dấu với $-m$

$\Rightarrow$ Với $m > 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$, và với $m < -2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.

Xét $m = -2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1 + xC_2)e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.

Xét $m = 2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$

Xét $-2 < m < 2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ĐỀ 2

Ta có: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -m \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha$ cùng dấu với $-m$

Với $0 < m < 2 \Rightarrow \alpha < 0$, ta có:

$$-(|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x} \le (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)e^{\alpha x} \le (|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x}$$

Mà: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-(|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x} = 0$ (với $\alpha < 0$)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$

Với $-2 < m \le 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.

Vậy $m > 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$

ĐỀ 2

ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH III - Học kì 20213

Nhóm ngành 1   Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [2đ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2\sin n}$.   b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$.

Câu 2. [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-3x^2)^{2n}}{n^2+n}.$$

Câu 3. [2đ] Giải các phương trình vi phân sau

a) $2xydx+(x^2-9y^2)dy=0$.

b) $y''-4y'+4y=2e^{2x}$.

Câu 4. [1đ] Sử dụng biến đổi Laplace, giải phương trình

$$x^{(4)}+2x''+x=-2, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$$

Câu 5. [1đ] Cho hàm số $f(t)=\begin{cases} \sin 2t & \text{nếu } \quad 0\le t<\pi \\ \cos t & \text{nếu } \quad t\ge\pi \end{cases}$.

Tính $L\{f(t)\}(s)$.

Câu 6. [1đ] Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kì 2π và $f(x)=3x-3\pi$ trên $[0,\pi]$.

Câu 7. [1đ] Xét phương trình: $$(x^2+1)y''+a(x)y'-y=-1 \qquad (1)$$

Biết $y_1(x)=x+1$ và $y_2(x)=1$ là hai nghiệm riêng của (1). Hãy tìm $a(x)$ và nghiệm tổng quát của (1).

Câu 8. [1đ] Giả sử rằng m,c,k và F_0 là các hằng số dương, $c^2>mk$. Chứng minh rằng mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình $my''+2cy'+ky=2F_0$ đều thỏa mãn $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)=\frac{2F_0}{k}$.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

ĐỀ 2

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Cuối kỳ 20213

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1.

a) Đặt $U_n = \dfrac{1}{n^3 + n^2 \sin n} = \dfrac{1}{n^2(n+\sin n)} \geq 0 \quad \forall n \geq 4.$

Xét $n + \sin n > 3 \quad \forall n \geq 4 \Rightarrow n^2(n+\sin n) > 3n^2 \quad \forall n \geq 4.$

$\Rightarrow U_n \leq \dfrac{1}{n^2}.$

Mà $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ (Do $\alpha = 2 > 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=4}^{\infty} U_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) Đặt $U_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} > 0 \quad \forall n \geq 4.$

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

Xét $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^2 = 4 \geq 1.$

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Câu 2. Đặt $y = \left(x - 3x^2\right)^2 \quad (y \geq 0).$

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho trở thành chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad (1)$ với $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$

Xét $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n}\right| = 1$

$\Rightarrow$ Chuỗi (1) hội tụ khi $|y| < 1$, phân kỳ khi $|y| > 1$.

Mà $y \geq 0 \Rightarrow$ Chuỗi (1) hội tụ khi $0 \leq y < 1$.

Xét tại $y = 1$, (1) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi

$$0 \leq \left(x - 3x^2\right)^2 \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

Câu 3.

ĐỀ 2

a)

+TH1: $y=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+TH2: $y \neq 0$. Chia cả hai vế phương trình cho y ta được

$$2xx' + \frac{x^2}{y} = 9y \tag{1}$$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2xx'$. Khi đó, (1) $\leftrightarrow u' + \frac{u}{y} = 9y$ là phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có nghiệm tổng quát là:

$$u = e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left(C + \int 9ye^{\int \frac{1}{y}dy}dy\right)$$
$$\leftrightarrow u = \frac{1}{y}(C+3y^3)$$
$$\leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}(C+3y^3)$$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$. (1)

Xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 4y = 0$ có phương trình đặc trưng là

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \leftrightarrow k_1 = k_2 = 2$$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

$f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow \lambda = 2 = k_1 = k_2 \Rightarrow$ (1) có nghiệm riêng $y^* = Ax^2e^{2x}$

Ta có: $\begin{cases} (y^*)' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} \\ (y^*)'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $2Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}$.

Câu 4.

Đặt $L\{x\}(s) = F(s)$. Ta có

ĐỀ 2

$L\{x''\}(s) = s^2F(s) - sx(0) - x'(0) = s^2F(s)$

$L\{x^{(4)}\}(s) = s^4F(s) - s^3x(0) - s^2x'(0) - sx''(0) - x'''(0) = s^4F(s)$

$L\{-2\}(s) = \dfrac{-2}{s}$

Tác động phép biến đổi Laplace vào 2 vế của phương trình, ta được

$$\begin{aligned}
& s^4F(s) + 2s^2F(s) + F(s) = \frac{-2}{s} \\
\Rightarrow\quad & (s^4 + 2s^2 + 1)F(s) = \frac{-2}{s} \\
\Rightarrow\quad & F(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)^2} \\
\Rightarrow\quad & F(s) = \frac{-2}{s} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Do đó, ta có $x(t) = L^{-1}\{F(s)\} = -2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$

$$= -2 + 2\cos t + t\sin t$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = -2 + 2\cos t + t\sin t$

Câu 5.

Cách 1. Dùng định nghĩa.

$$\begin{aligned}
L\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\pi e^{-st}\sin 2t dt + \int_\pi^\infty e^{-st}\cos t dt \\
&= \frac{e^{-st}}{s^2+4}(-s\sin 2t - 2\cos 2t)\Big|_0^\pi + \frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\cos t + \sin t)\Big|_\pi^\infty \qquad (s > 0) \\
&= \frac{2}{s^2+4}(1 - e^{-\pi s}) - s\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ĐỀ 2

Cách 2. Ta biểu diễn lại $f(t)$ qua hàm Heaviside như sau:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sin 2t(1-u(t-\pi)) + \cos t.u(t-\pi) \\
&= \sin 2t - \sin\left[2(t-\pi)\right]u(t-\pi) - \cos(t-\pi)u(t-\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad L\{f(t)\}(s) &= L\{\sin 2t\}(s) - L\{\sin\left[2(t-\pi)\right]u(t-\pi)\}(s) - L\{\cos(t-\pi)u(t-\pi\}(s) \\
&= \frac{2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Câu 6.

Từ giả thiết ta có $f(x) = \begin{cases} 3x-3\pi, & 0 \le x \le \pi \\ -3x-3\pi, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$.

Nhận thấy $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[0,2\pi]$ nên $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Fourier.

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên $b_k = 0, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$.

+) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{3x^2}{2} - 3\pi x\right)\Bigg|_0^\pi = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{3\pi^2}{2} - 3\pi^2\right) = -3\pi.$

+) $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(kx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)\cos(kx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)d\left(\dfrac{\sin(kx)}{k}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6}{\pi}(x-\pi)\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)\Bigg|_0^\pi - \frac{6}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)dx = 0 - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos(kx)}{-k^2}\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{6}{\pi k^2}((-1)^k - 1)
\end{aligned}
$$

Do $f(x)$ liên tục nên ta có

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-3\pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{6}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cos(kx) \\
&= \frac{-3\pi}{2} - \sum_0^\infty \frac{12}{\pi(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)x\right]
\end{aligned}
$$

ĐỀ 2

Câu 7.

Với $y_1(x)=x+1 \Rightarrow y_1'(x)=1 \Rightarrow y_1''(x)=0$. Thay vào phương trình đã cho:

$$\left(x^2+1\right).0+a(x).1-(x+1)=-1 \Leftrightarrow a(x)=x$$

$\Rightarrow$ **(1)** trở thành $\left(x^2+1\right)y''+xy'-y=-1 \Leftrightarrow (x^2+1)y''+xy'-(y-1)=0$ **(2)**

Đặt $u=y-1 \Rightarrow u'=y' \Rightarrow u''=y''$. Phương trình đã cho trở thành phương trình thuần nhất:

$$\left(x^2+1\right)u''+xu'-u=0 \Leftrightarrow u''+\frac{x}{x^2+1}u'-\frac{u}{x^2+1}=0 \text{ } \mathbf{(3)}, \text{ có } p(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

Vì $y_1(x)$ là một nghiệm của **(2)** $\Rightarrow u_1(x)=y_1(x)-1=x$ là một nghiệm của **(3)**.

Dùng công thức Liouville, một nghiệm riêng khác của **(3)** là:

$$u_2=u_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{u_1^2}dx=x\int\frac{e^{-\int\frac{x}{x^2+1}dx}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{\frac{-ln(x^2+1)}{2}}}{x^2}dx=x\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}.x^2}dx$$

- Với $x>0$ thì:

$$u_2=x\int\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.x^2}dx=x\int\frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.\frac{-2dx}{x^3}=x\int\frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-\sqrt{x^2+1}.$$

- Với $x<0$ thì: $u_2=x\int\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.x^2}dx=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{x^2+1}.$

Tóm lại, chọn $u_2=-\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của **(3)** là:

$$u=C_1u_1+C_2u_2=C_1x-C_2\sqrt{x^2+1}\ \ (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = u + 1 = C_1x - C_2\sqrt{x^2+1} + 1 \;\; (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Câu 8.

Phương trình thuần nhất: $my'' + 2cy' + ky = 0$.

Phương trình đặc trưng: $m\lambda^2 + 2c\lambda + k = 0$ có $\Delta = 4c^2 - 4mk > 0$ do $c^2 > mk$

$\Rightarrow$ phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2.

Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{k}{m} > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{-2c}{m} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm thuần nhất $\overline{y}(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \;\; (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$,

Vì vế phải phương trình đã cho là $f(x) = 2F_0 = 2F_0.e^{0.x}$, trong đó $\lambda = 0$ chắc chắn không phải nghiệm của phương trình đặc trưng (vì $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$)

$\Rightarrow$ một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $Y(x) = A \Rightarrow Y' = 0 \Rightarrow Y'' = 0$.

Thay vào phương trình đã cho: $m.0 + 2c.0 + k.A = 2F_0 \Rightarrow A = \dfrac{2F_0}{k} \Rightarrow Y(x) = \dfrac{2F_0}{k}$.

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y(x) = \overline{y}(x) + Y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \frac{2F_0}{k}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \dfrac{2F_0}{k}\right) = 0 + 0 + \dfrac{2F_0}{k} = \dfrac{2F_0}{k}$ (vì $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$)

$\Rightarrow$ đpcm.