Bài tập

*** Tích phân đường loại 1**

Câu 1. $I = \int_C \left(2x - y^2\right) dS \quad , \quad C$ là nửa đường tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$

Bài làm.

Ta có:

$$I = \int_C (2x - y^2) ds = \int_{-2}^{2} [2x - (4 - x^2)] \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-2}^{2} [2x - (4 - x^2)] \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{4x}{\sqrt{4 - x^2}} - 2\sqrt{4 - x^2} \right) dx = -4\sqrt{4 - x^2} \Big|_{-2}^{2} - 2\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx = -2\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$$

Đặt $x = 2\sin t$; $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

$$\Rightarrow I = -2\int_0^{2\pi} 2\sqrt{4 - 4\sin^2 t} = -8\int_0^{2\pi} \cos t |\cos t| dt = -8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t dt \right)$$

$$= -4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\cos 2t + 1) dt \right)$$

$$= -4\left(\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2}\sin 2t + t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}\sin 2t + t \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right)$$

$$= -4\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \left(2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) \right] = -4(-\pi) = 4\pi$$

Câu 2. $I = \int_C (x + 2y)\, ds \quad , \quad C : \begin{cases} y = 2|x| \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Bài làm.

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} (x + 2y)\, ds + \int_{C_2} (x + 2y)\, ds$$

Với $\begin{cases} C_1 : -1 \le x \le 0 \rightarrow y = -2x \\ C_2 : \ 0 \le x \le 1 \rightarrow y = 2x \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} (x-2x)\sqrt{1+(-2)^2}dx + \int_{0}^{1} (x+2x)\sqrt{1+2^2}dx \\ &= \int_{-1}^{0} -\sqrt{5}xdx + \int_{0}^{1} 3\sqrt{5}xdx \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Câu 3. $I = \displaystyle\int_C (x+y)ds \quad , \quad C : \begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

Bài làm.

Ta có $\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos t \end{cases} \quad \Rightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{\pi} (2 + 2\cos t + 2\sin t)\sqrt{4}dt \\ &= 4\int_{0}^{\pi} (1 + \cos t + \sin t)\, dt \\ &= 4\,(t + \sin t - \cos t)\Big|_{0}^{\pi} \\ &= 4\pi + 8 \end{aligned}$$

Câu 4. $I = \displaystyle\int_C \frac{x+1}{x^2+y^2}ds \quad , \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x \ge 0, y \ge 0, R \ge 0 \end{cases}$

Bài làm.

Đặt $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (R \ge 0)$

Do $x \ge 0,\ y \ge 0 \quad \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Ta có $\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = R$

Vì vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\cos t + 1}{R^2} R dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t + \frac{1}{R}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2R} - 1 \end{aligned}$$

Câu 5. $I = \displaystyle\int_C \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, $C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (t \geq 0)$

Bài làm .

Ta có: $\begin{cases} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = a\cos t \\ z'(t) = b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2t^2$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2} dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \arctan\left(\frac{bt}{a}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \arctan\left(\frac{b}{2a}\pi\right)$$

Câu 6. $I = \displaystyle\int_C xy\, dS$, $C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{2}{3}t^3 + 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$

Bài làm .

Ta có: $x'(t) = 1,\ y'(t) = 2t,\ z'(t) = 2t^2 \Rightarrow \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 2t^2 + 1$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^2 t^3(2t^2+1)dt = \left(\frac{81}{3}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{76}{3}$$

Câu 7. ***(K63_20182)***

$I = \displaystyle\int_C \left(x^2+1\right) dS$, $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối $A(1,0)$ với $B(0,1)$

Bài làm .

Đặt: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ Do $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 3\sin t\cos t$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^6 t)3\sin t\cos t dt = -3\left(\frac{\cos^8 t}{8} + \frac{\cos^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{15}{8}$$

*** Tích phân đường loại 2**

Câu 1. Tính $I = \int_L (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$ với L là cung nối từ điểm $O(0,0)$ đến $A(1,1)$ và có PT $y = \sqrt{x}$

Bài làm.

Tham số hóa cung L : $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \to \begin{cases} dx = 1 \\ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases}$

Tại $O(0;0) \Rightarrow t = 0$; $tiA(1;1) \to t = 1$

$$I = \int\limits_0^1 \left[(t-\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}}(t+\sqrt{t})\right] dt = \int\limits_0^1 \left(t - \sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2}\right) dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + \frac{1}{2}t\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Câu 2. Tính $I = \int_{\widehat{AB}} (2xy - x^2)\,dx + (x+y^2)\,dy$ với cung $\widehat{AB}$ có PT $y^2 = 1 - x$ nối từ điểm $A(0,-1)$ đến điểm $B(0,1)$

Bài làm .

Tham số hóa cung AB: $\begin{cases} y = t \\ x = 1 - t^2 \end{cases} \to \begin{cases} dy = 1 \\ dx = -2t \end{cases}$

Tại $A(0;-1) \Rightarrow t = -1$; tại $B(0;1) \Rightarrow t = 1$

$$\to I = \int\limits_{-1}^1 \left\{[2(1-t^2)t - (1-t^2)^2](-2t) + [1 - t^2 + t^2]\right\} dt$$

$$\to I = \int\limits_{-1}^1 \left\{[2t(t^4 - 2t^2 + 1) - (t^4 - 2t^2 + 1)](-2t) + 1\right\} dt$$

$$\to I = \int_{-1}^{1} (2t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 4t^2 + 2t + 1)dt \ = \ \frac{14}{15}$$

Câu 3. Tính $I = \int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2} dx + dy$; $C \begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \end{cases}$, $0 < t < \frac{\pi^2}{4}$.

Bài làm.

Ta có: $\begin{cases} dx = \sin\sqrt{t} + t.\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t} \\ dy = \cos\sqrt{t} + t.\frac{1}{2\sqrt{t}}. - \sin\sqrt{t} \end{cases}$, $x^2 + y^2 = t^2$.

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \left[\frac{\sqrt[4]{t^2}}{2} \left(\sin\sqrt{t} + t.\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t} \right) + \left(\cos\sqrt{t} + t.\frac{1}{2\sqrt{t}}. - \sin\sqrt{t} \right) \right] dt.$$

Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow dt = 2udu$, $t \in \left(0; \frac{\pi^2}{4}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2} \left(\sin u + u^2.\frac{1}{2u}.\cos u \right) + \left(\cos u - \frac{u^2}{2u}.\sin u \right) \right] 2udu$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u\sin u}{2} + \frac{u^2\cos u}{4} + \cos u - \frac{u\sin u}{2} \right) 2udu$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u^3}{2} + 2u \right) \cos udu = \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Câu 4. Tính $I = \oint\limits_C x^2\left(y + \frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x + \frac{y}{4}\right)dx$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Bài làm.

Đặt: $\begin{cases} P(x,y) = -y^2\left(x + \frac{y}{4}\right) & \to \ P'_y(x,y) = -2xy - \frac{3}{4}y^2 \\ Q(x,y) = x^2\left(y + \frac{x}{4}\right) & \to \ Q'_x(x,y) = 2xy + \frac{3}{4}x^2 \end{cases}$

$$\to \quad Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) = 4xy + \frac{3}{4}(x^2 + y^2)$$

Áp dụng công thức Green: $I = \iint 4xy + \frac{3}{4}(x^2+y^2)dxdy$

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\phi \end{cases}$; $J = r$

$$\Rightarrow I = \iint \left(4r^2 \sin\phi\cos\phi + \frac{3}{4}r^2\right) r dr d\phi \; = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{0}^{2\cos\phi} \left(2r^3 \sin 2\phi + \frac{3}{4}r^2\right) dr$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{0}^{2\cos\phi} \left(2\sin 2\phi + \frac{3}{4}\right) r^3 dr \; = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin 2\phi + \frac{3}{4}\right) \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\phi} d\phi$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin 2\phi + \frac{3}{4}\right) \frac{16\cos^4\phi}{4} d\phi \; = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin 2\phi + \frac{3}{4}\right) 4\cos^4\phi d\phi$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\sin\phi\cos^5\phi + 3\cos^4\phi) d\phi \; = \frac{9\pi}{8}$$

Câu 5. Tính $I = \oint\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right) dy.$

$$C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} ,(a > 0)$$

Bài làm.

$P(x, y) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4xy^3 + \cos xy - yx\sin xy$

$Q(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x^2 + y^2 - 1 + \cos xy - yx\sin xy$

$\Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 1 - 4xy^4.$

Áp dụng công thức Green:

$\Rightarrow I = \iint\limits_D (x^2 + y^2 - 1 - 4xy^4) dxdy$ với $D : x^2 + y^2 = a^2$.

$\Rightarrow I = \iint\limits_D (x^2 + y^2 - 1) dxdy$ (do hàm lẻ, miền đối xứng).

$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (r^2 - 1) r dr = 2\pi . \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right).$

Câu 6. Tính $I = \oint \left(x\arctan x + y^2\right) dx + \left(x + 2xy + y^2 e^{-y}\right) dy$ với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.

Bài làm.

$P(x,y) = x\arctan x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$Q(x,y) = x + 2xy + y^2e^{-y} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2y$

$\Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$

Áp dụng công thức Green $\Rightarrow I = \iint\limits_D dxdy = S(D) = \pi$ (D là hình tròn có $R = 1$).

Câu 7. Tính $I = \int\limits_L \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy.$ L: cung đi từ $A(1;\pi)$ đến $B(2;\pi)$.

Bài làm .

$P(x,y) = 1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}.\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{y}{x}$

$Q(x,y) = \sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + -\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}.\dfrac{-y}{x^2}. - \sin\dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\Rightarrow$ Tích phân I không phụ thuộc vào đường đi.

Chọn cung nối từ $A \to B$ là đường thẳng $y = \pi$

Chọn $\begin{cases} x = t \\ y = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \Rightarrow t \in [1;2]$

$\Rightarrow I = \int\limits_1^2 2\left[1 - \dfrac{\pi^2}{t^2}.\cos\left(\dfrac{\pi}{t}\right)\right]dt = 1$

Câu 8. Tính $I = \int_L \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$ với L là cung nối từ $A(1,1)$ đến $B(2,2)$

Bài làm.

Dễ thấy: Đặt: $P(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; $Q(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$ Tích phân I không phụ thuộc đường đi

chọn cung nối từ $A \to B$ là $y = x$: $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$; $t \in (1;2)$

$$\Rightarrow I = \int\limits_1^2 \frac{2t}{2t^2}dt = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2$$