ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Xử lý tín hiệu
Chương 2: Các phép biến đổi thông dụng trong xử lý tín hiệu

PGS. TS. Trịnh Văn Loan

Viện Công nghệ thông tin và Truyền thông

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Tài liệu tham khảo

- Discrete-Time Signal Processing, 2nd Ed., A.V.Oppenheim, R.W. Schafer, J.R. Buck, Prentice Hall, 1999
- Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications, 3rd Ed.,J.G. Proakis, D.G. Manolakis, Prentice Hall, 1996
- Xử lý tín hiệu số
- Xử lý tín hiệu số và lọc số

Chương 2: Các phép biến đổi thông dụng trong xử lý tín hiệu

2.1. Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục, định nghĩa và tính chất

2.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, định nghĩa và tính chất

2.3. Biến đổi Laplace, định nghĩa và tính chất.

2.5. Ứng dụng biến đổi Laplace

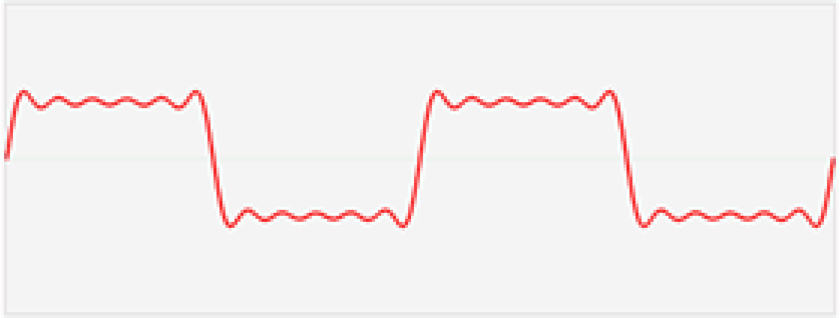
2.6. Biến đổi Z, định nghĩa và tính chất, quan hệ với biến đổi Fourier

2.7. Biến đổi Z thuận và ngược.

2.8. Ứng dụng biến đổi Z

2.1. Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



2.1. Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

- Đối với tín hiệu liên tục tuần hoàn $f(t)$ với chu kỳ T. $f(t)$ có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier như sau

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Where $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ và $f_0 = \frac{1}{T}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$ với n =1,2,3…

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$ với n =1,2,3…

2.1. Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

Do $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-jx} + e^{jx}\right)$ và $\sin(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$ nên $f(x)$ có thể biểu diễn ở dạng phức như sau:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e_0^{jn\omega_0 x}$$

Với

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega_0 x}\,\mathrm{dx}$$

2.1. Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục

- Đối với tín hiệu không tuần hoàn, chúng ta có thể giả định đó là tín hiệu với chu kỳ ∞

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

2.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

- Đối với tín hiệu rời rạc tuần hoàn $x(nT_s)$ với chu kỳ NT_s (T_s là chu kỳ lấy mẫu).

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

2.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc

(DFS: Discrete Fourier Serie)

- Xét tín hiệu $x_p(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N:

$$x_p(n) = x_p(n+kN), \text{ k nguyên}$$

- Tín hiệu này không biểu diễn được bằng biến đổi z nhưng có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier thông qua hàm e mũ phức với các tần số là bội của tần số cơ bản $2\pi/N$.

- Đây là tín hiệu tuần hoàn theo k với chu kỳ N.

  n = 0,1,2,…,N-1

2.2. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

- Chuỗi Fourier biểu diễn tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (1)$$

- Xác định các hệ số $X_p(k)$ theo $x_p(n)$ dựa vào tính chất trực chuẩn:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nr} = \begin{cases} 1 & r = mN \\ 0 & r \neq mN \end{cases} \qquad \text{m: số nguyên}$$

- Nhân 2 vế $x_p(n)$ với $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$ và lấy tổng từ n=0 đến N-1

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

2.2. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

- Thay đổi thứ tự lấy tổng

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

$k - r = mN \rightarrow [\ldots] = 1$, $k - r \neq mN \rightarrow [\ldots] = 0$

$k=r+mN$ và $k < N \rightarrow m=0$ và $k = r$

- Sử dụng tính chất trực chuẩn: $\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = X_p(r)$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (2)$$

- Nhận xét
  - $X_p(k)$ tuần hoàn theo k với chu kỳ N
  - Các công thức (1), (2) là biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn. (1): Tổng hợp. (2): Phân tích

2.2. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

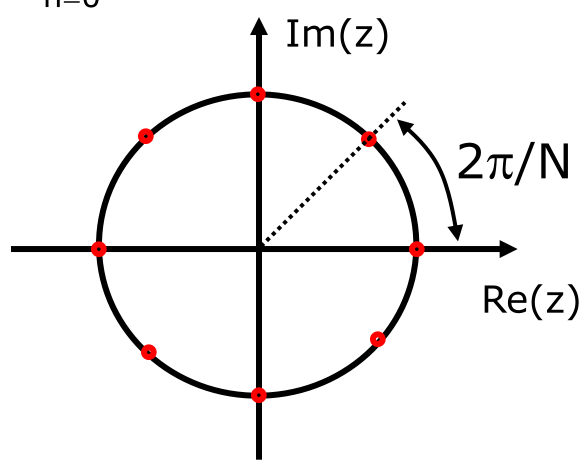
- Quan hệ với biến đổi z

  Xét 1 chu kỳ của $x_p(n)$:

$$x(n)=\begin{cases} x_p(n) & 0\le n\le N\text{-}1 \\ 0 & \text{n cßn l¹ i} \end{cases}$$

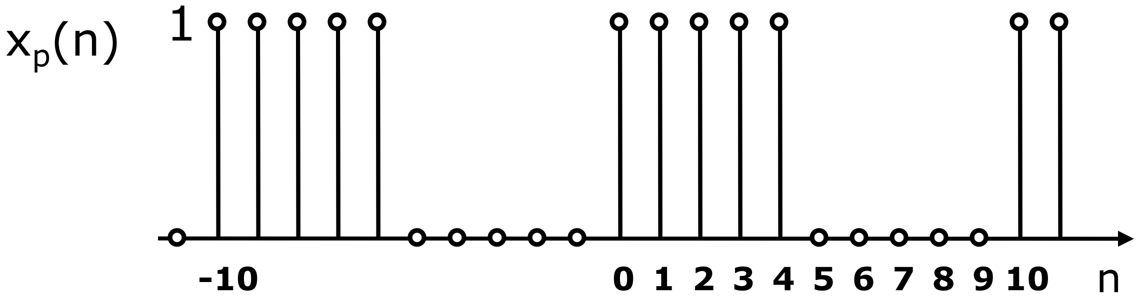
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad X_p(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

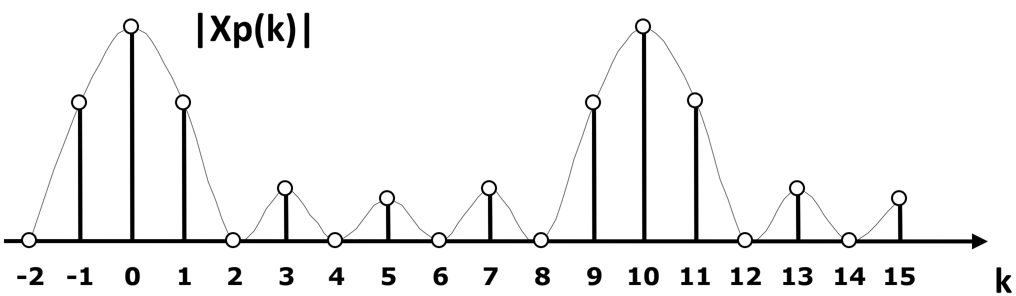


2.2.

- Hãy tính các hệ số chuỗi Fourier của dãy tín hiệu tuần hoàn sau



$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} = e^{-j\frac{4\pi k}{10}} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$



2.2. Biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có độ dài hữu hạn

(DFT: Discrete Fourier Transform)

- Ta đã xét cách biểu diễn một tín hiệu rời rạc tuần hoàn bằng chuỗi Fourier. Bằng cách diễn giải thích hợp ta cũng có thể dùng cách biểu diễn như vậy cho các tín hiệu có độ dài hữu hạn.
- Có thể coi tín hiệu có độ dài hữu hạn N là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N trong đó một chu kỳ chính là tín hiệu có độ dài hữu hạn

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \qquad x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{n cßn l¹ i} \end{cases}$$

2.2. Biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có độ dài hữu hạn

- Cặp công thức DFT

Biến đổi thuận (phân tích)

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{k cßn l¹ i} \end{cases}$$

Biến đổi ngược (tổng hợp)

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{n cßn l¹ i} \end{cases}$$

2.2. Biến đổi nhanh Fourier

(FFT: Fast Fourier Transform)

- Tính trực tiếp DFT cần N^2 phép nhân số phức và N(N-1) phép cộng số phức
- Thuật giải FFT: phân tích DFT của dãy N số lần lượt thành DFT của các dãy nhỏ hơn
- Điều kiện áp dụng thuật giải: $N = 2^m$.
- Số lượng phép toán giảm xuống còn $N\log_2 N$

2.3. Biến đổi Laplace

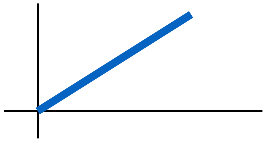
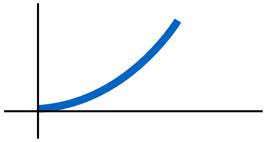
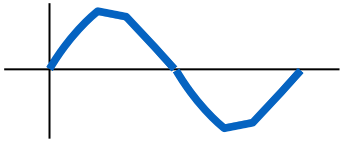
Áp dụng đối với tín hiệu liên tục về thời gian $f(t)$ trong đó $t \geq 0$

$$\boldsymbol{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Biến đổi từ miền thời gian sang miền tần số phức
- Đối với tín hiệu rời rạc thì biến đổi Laplace chính là biến đổi z

2.3. Biến đổi Laplace của 1 số hàm cơ bản

- Biến đổi Laplace của 1 số hàm cơ bản

Tên hàm	$f(t)$		$F(s)$
Xung	$f(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$		1
Bước	$f(t) = 1$		$\frac{1}{s}$
Dốc	$f(t) = t$		$\frac{1}{s^2}$
Hàm mũ	$f(t) = e^{at}$		$\frac{1}{s-a}$
Sine	$f(t) = \sin(\omega t)$		$\frac{1}{\omega^2 + s^2}$

2.3. Biến đổi Laplace

- Tính chất của biến đổi Laplace

$$L\big(af_1(t) + bf_2(t)\big) = aF_1(s) + bF_2(s)$$

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]$$

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = F_1(s)F_2(s)$$

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

2.4. Biến đổi Z

- Biến đổi z của tín hiệu rời rạc x(n) được định nghĩa:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- X(z) là hàm phức của biến phức z. Định nghĩa như trên là biến đổi z 2 phía. Biến đổi z 1 phía như sau:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- Xét quan hệ giữa biến đổi z và biến đổi Fourier. Biểu diễn biến phức z trong toạ độ cực $z = re^{j\omega}$

2.4. Định nghĩa

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n}$$

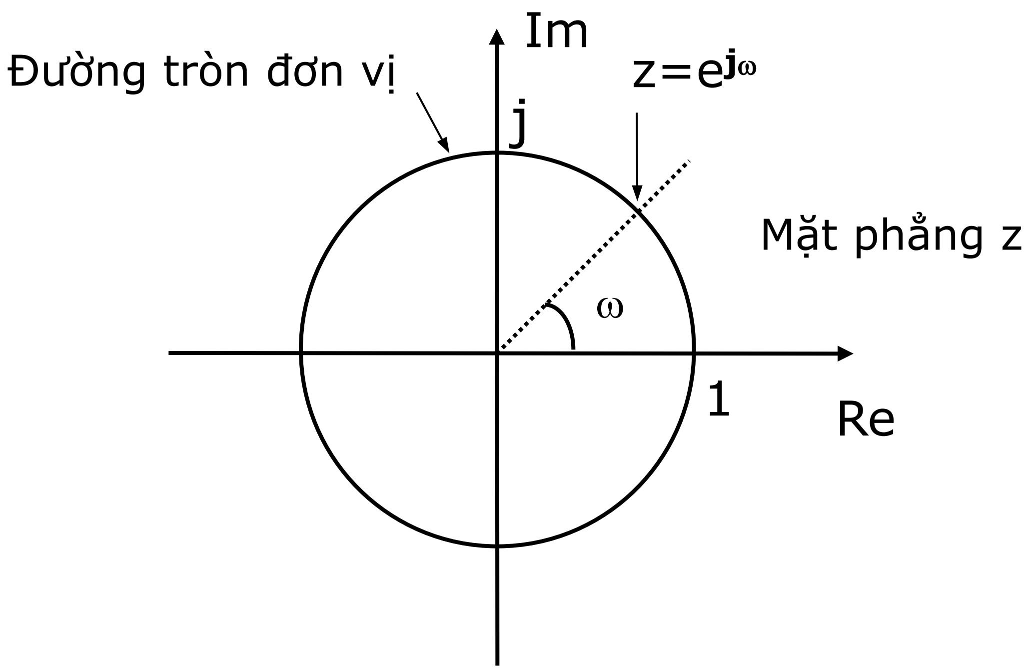
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{x(n)r^{-n}\right\} e^{-j\omega n}$$

- Trường hợp đặc biệt nếu r = 1 hay |z|=1 biểu thức trên trở thành biến đổi Fourier

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

2.4. Định nghĩa

- Biến đổi z trở thành biến đổi Fourier khi biên độ của biến z bằng 1, tức là trên đường tròn có bán kính bằng 1 trong mặt phẳng z. Đường tròn này được gọi là đường tròn đơn vị.



2.4. Điều kiện tồn tại biến đổi Z

- Miền giá trị của z để chuỗi lũy thừa trong định nghĩa biến đổi z hội tụ gọi là miền hội tụ. Áp dụng tiêu chuẩn Cô-si để xác định miền hội tụ. Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

sẽ hội tụ nếu thỏa mãn điều kiện $\lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1$

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

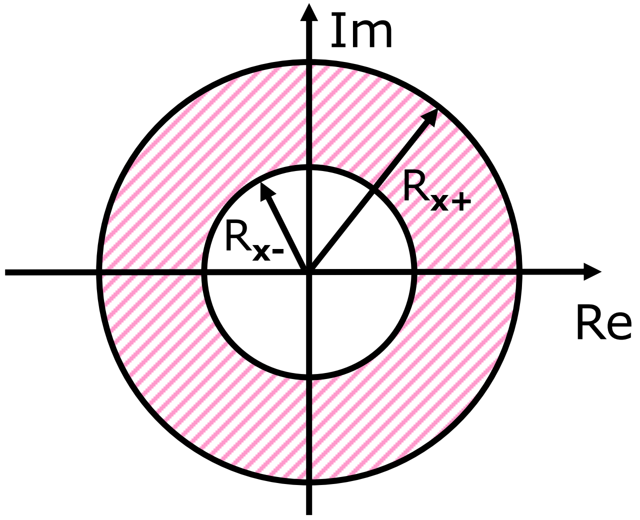
- Áp dụng tiêu chuẩn Cô-si cho $X_2(z)$

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)z^{-n}|^{1/n} < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} |z^{-1}| < 1$$

2.4. Điều kiện tồn tại biến đổi Z

- Trong trường hợp tổng quát, miền hội tụ của biến đổi z là

$$0 \leq R_{x-} < |z| < R_{x+} \leq \infty$$



2.4. Ví dụ

- Cho tín hiệu x(n)=u(n).

  Hãy xác định biến đổi z và miền hội tụ.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1.z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

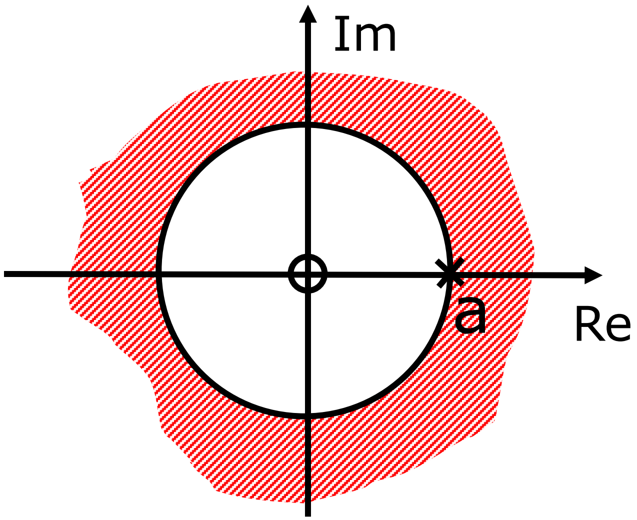
với $|z|>1$, $R_{x-}=1$, $Rx+=\infty$

2.4. Ví dụ 2

- Cho tín hiệu $x(n)=a^n u(n)$. Hãy xác định biến đổi z và miền hội tụ.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(a.z^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

- Mht: $|z|>|a|$, $R_{x-}=|a|$, $R_{x+}=\infty$,
- Điểm không: z = 0.
- Điểm cực: z = a
- Miền hội tụ không chứa điểm cực



2.5. Biến đổi Z thuận và ngược

- Biến đổi z thuận

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$$

- Biến đổi z ngược

$$X(z) \xrightarrow{Z^{-1}} x(n)$$

2.5. Biến đổi Z ngược

Với bất kỳ giá trị nào của r sao cho $z=re^{jw}$ thuộc miền hội tụ

$$X(re^{j\omega}) = F\left\{x(n)r^{-n}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{x(n)r^{-n}\right\} e^{-j\omega n}$$

Lấy biến đổi ngược Fourier cả 2 vế

$$x(n)r^{-n} = F^{-1}\left\{X(re^{j\omega})\right\} \qquad x(n) = r^n . F^{-1}\left\{X(re^{j\omega})\right\}$$

$$x(n) = r^n . \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega$$

Vậy có thể khôi phục x(n) từ biến đổi z của nó đánh giá dọc theo đường cong $z=re^{jw}$ thuộc miền hội tụ trong đó r cố định còn w thay đổi trong khoảng 2p.

2.5. Biến đổi Z ngược

Đổi biến từ ω thành z: $z = re^{j\omega} \rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$

$$d\omega = (1/j)z^{-1}dz$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Tích phân theo đường |z|=r, có tâm tại gốc tọa độ và thuộc miền hội tụ

2.5. Biến đổi Z ngược

- Áp dụng định lý Cô-si $\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{k-1}dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

Γ: đường cong khép kín bao gốc tọa độ trên mặt phẳng z.

Nhân (1) với $\frac{z^{m-1}}{2\pi j}$ và lấy tích phân:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n+m-1}dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{-n+m-1}dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{m-1}dz = x(m) \longrightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz$$

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Biến đổi z của tín hiệu trễ

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$$

$$x(n-n_0) \xrightarrow{Z} ?$$

Đổi biến $m=n-n_0$

$$Z\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

$$Z\{x(m)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)}$$

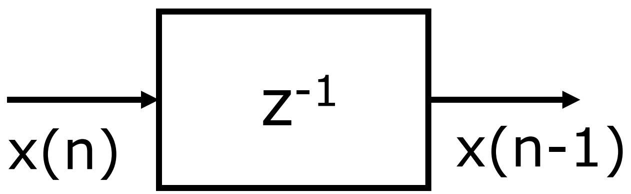
$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

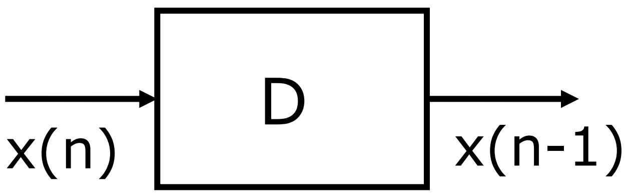
$$= z^{-n_0} X(z)$$

$$x(n-n_0) \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Trường hợp trễ 1 mẫu





2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Giá trị đầu của dãy: x(n)=0 với n<0,

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$= x(0) + x(1)\frac{1}{z} + x(2)\frac{1}{z^2} + \ldots$$

- Đảo trục thời gian

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathbf{Z}\{x(-n)\} = ?$$

$$\mathbf{Z}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{m} = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Vi phân của biến đổi z

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x(n)z^{-n-1}$$

Nhân 2 vế với -z

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[nx(n)\right] z^{-n} = \mathbf{Z}\left\{nx(n)\right\}$$

2.3. Một số tính chất của biến đổi z

- Biến đổi z của tổng chập

$$y(n)=x(n)*h(n) \ ⍰ \ Y(z)=X(z).H(z)$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-n}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right] = X(z).H(z)$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Tính tích phân theo giá trị thặng dư:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)(z)^{n-1}dz = \sum \text{c¸c thÆng d- cña } X(z)z^{\text{n-1}} \text{ trong } \Gamma$$

Thặng dư tại điểm cực z = a bậc q của hàm $X(z)z^{n-1}$ được tính theo:

$$Res_a^q = \lim_{z\to a}\frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[X(z)z^{n-1}(z-a)^q\right]$$

Nếu q = 1

$$Res_a^1 = \lim_{z\to a}\left[(z-a)X(z)z^{n-1}\right]$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

Ví dụ: Tính biến đổi z ngược của

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ với } |z| > 1$$

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{n}}{z - 1}$$

- Tích phân lấy theo đường tròn có bán kính > 1. Nếu n>= 0: đường tròn chỉ chứa 1 điểm cực bậc 1 của $X(z)z^{n-1}$ tại z = 1.

$$\mathrm{Res}_1^1 = \lim_{z \to 1}\left[(z-1)\frac{z^n}{z-1}\right] = 1$$

Vậy nếu n>= 0, x(n) = 1

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

Nếu n< 0:

Có các điểm cực bậc n tại z = 0 và bậc 1 tại z =1.Tính truy hồi x(n) với n < 0

n = -1: có điểm cực đơn tại z = 0 và tại z = 1

$$Res_0^1 = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^{-1}}{z-1}\right] = -1 \quad Res_1^1 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z^{-1}}{z-1}\right] = 1$$

Tổng quát: với điểm cực bậc n tại z = 0

$$Res_0^n = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^n\frac{z^{-n}}{z-1}\right] = -1$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

với điểm cực bậc 1 tại z = 1

$$\mathrm{Res}_1 = \lim_{z \to 1} (z-1)\frac{z^{-1}}{z-1} = 1$$

Vậy nếu n < 0 thì x(n) = 0

Kết quả x(n) = u(n).

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}$$

P(z), Q(z) là các đa thức bậc M, N.

S(z) đa thức bậc M-N (Nếu M < N, S(z) = 0). Bậc của $P_0(z)$ nhỏ hơn bậc $Q_0(z)$

z_i : điểm không đơn của $Q_0(z)$

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{z - z_i}$$

$$A_i = (z - z_i)\frac{P_0(z)}{Q_0(z)}\bigg|_{z=z_i}$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Nếu các điểm không z_n của $Q_0(z)$ có bậc q

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{N} \frac{A_i}{z - z_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{B_i}{(z - z_n)^j}$$

$$B_i = \frac{1}{(q-j)!} \frac{d^{q-j}}{dz^{q-j}} \left[(z - z_n)^q \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \right] \Bigg|_{z=z_n}$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i}{z - z_i} \qquad A_i = (z - z_i)X(z)\Big|_{z=z_i}$$

- Ví dụ: Cho

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

  với |z|>2. Tìm x(n) ?

$$X(z) = \frac{1/2}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 1/2)} = \frac{A_1}{(z^{-1} - 1)} + \frac{A_2}{(z^{-1} - 1/2)}$$

  Mẫu số có 2 nghiệm theo z^{-1}: $z^{-1}=1$ và $z^{-1}=1/2$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

$$A_1 = (z^{-1} - 1).X(z)\Big|_{z^{-1}=1} = 1$$

$$A_2 = (z^{-1} - 1/2).X(z)\Big|_{z^{-1}=1/2} = -1$$

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{1}{z^{-1} - 1/2} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Vậy $x(n)=2.2^n u(n)-u(n)=u(n)[2^{n+1}-1]$

$$x(n) = a^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

- Khai triển theo phép chia: X(z) có dạng là tỷ số của 2 đa thức theo z. Tiến hành phép chia đa thức để có từng mẫu của x(n)

- Ví dụ:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}}$$

2.4. Một số phương pháp tính biến đổi z ngược

z^{-1} | $1-1{,}414z^{-1}+z^{-2}$

$z^{-1}-1{,}414z^{-2}+z^{-3}$ $\quad$ $z^{-1}+1{,}414z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}-1{,}414z^{-6}\ldots$

$1{,}414z^{-2}-z^{-3}$

$1{,}414z^{-2}-2z^{-3}+1{,}414z^{-4}$

$z^{-3}-1{,}414z^{-4}$

$z^{-3}-1{,}414z^{-4}+z^{-5}$

$-z^{-5}$

$-z^{-5}+1{,}414z^{-6}-z^{-7}$

$-1{,}414z^{-6}+z^{-7}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

x(0)=0. x(1)=1. x(2)=1,414. x(3)=1. x(4)=0.x(5)=-1…

n<0 x(n)=0

Một số cặp biến đổi z thông dụng (1/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn mf z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Toàn mf z trừ 0 nếu m>0, trừ ∞ nếu m < 0
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$

Một số cặp biến đổi z thông dụng (2/2)

Tín hiệu	Biến đổi z	Miền hội tụ
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$\cos(\Omega n)u(n)$	$\dfrac{1-(\cos\Omega)z^{-1}}{1-(2\cos\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\sin(\Omega n)u(n)$	$\dfrac{(\sin\Omega)z^{-1}}{1-(2\cos\Omega)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$

2.5. Ứng dụng biến đổi z để giải PT-SP

- Giải PT-SP: Biết PT-SP, biết tín hiệu vào, tính tín hiệu ra
- Ví dụ: Cho PT-SP y(n) = x(n) + ay(n-1)

  Biết điều kiện đầu y(-1) = K. Tín hiệu vào $x(n) = e^{j\omega n}u(n)$. Hãy xác định tín hiệu ra.

  Lấy biến đổi z 1 phía PT-SP:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + a\sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n}$$

  Áp dụng công thức tính biến đổi z 1 phía của tín hiệu trễ

$$Z\{y(n-n_0)\} = z^{-n_0}\left[Y(z) + \sum_{r=1}^{n_0} y(-r)z^{r}\right] \Rightarrow Z\{y(n-1)\} = z^{-1}Y(z) + y(-1)$$

2.5. Ứng dụng biến đổi z để giải PT-SP

$Y(z)=X(z)+az^{-1}Y(z)+ay(-1)$

$$Y(z) = \frac{X(z)+ay(-1)}{1-az^{-1}}$$

$x(n) = e^{j\omega n}u(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{aK}{1-az^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{aK}{1-az^{-1}} + \frac{a/(a-e^{j\omega})}{(1-az^{-1})} - \frac{e^{j\omega}/(a-e^{j\omega})}{(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

Biến đổi z ngược

$$y(n) = \left[a^{n+1}K + \frac{a^{n+1}}{a-e^{j\omega}} - \frac{e^{j\omega(n+1)}}{a-e^{j\omega}}\right]u(n)$$

Đáp ứng với điều kiện đầu

Đáp ứng quá độ

Đáp ứng đối với tín hiệu vào

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- $y(n) = h(n)*x(n) \rightarrow Y(z) = H(z).X(z)$

  H(z): Hàm truyền đạt

- Xét H(z) của hệ nhân quả $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$
  - Hệ nhân quả nên h(n) = 0 với n < 0
  - H(z) hội tụ với
  - Miền hội tụ không chứa điểm cực, vậy:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

$$|z| > R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n}$$

Mọi điểm cực của hệ TT-BB nhân quả đều nằm trong đường tròn có bán kính

$$R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n}$$

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- Xét H(z) của hệ ổn định
  - Hệ ổn định thì đáp ứng xung thỏa mãn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad (1)$$

  - Hàm truyền đạt được xác định theo:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

  - Nếu (1) thỏa mãn thì H(z) hội tụ ngay cả khi |z|=1
  - Vậy nếu miền hội tụ của H(z) chứa đường tròn đơn vị thì hệ sẽ ổn định

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

- H(z) của hệ nhân quả và ổn định

  Toàn bộ điểm cực của hệ nhân quả và ổn định phải nằm bên trong đường tròn đơn vị.

- H(z) của hệ đặc trưng bởi PT-SP-TT-HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Lấy biến đổi z cả 2 vế của PT-SP

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)\right] z^{-n}$$

2.6. Hàm truyền đạt của hệ TT- BB

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{M} b_k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} \right]$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Biểu diễn H(z) qua các điểm không z_r và các điểm cực p_k:

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M} (z - z_r)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

2.7. Đánh giá đáp ứng tần số

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)} \qquad H(e^{j\omega}) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

$$e^{j\omega} - z_r = V_r(\omega)e^{j\theta_r(\omega)}, e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\phi_k(\omega)}$$

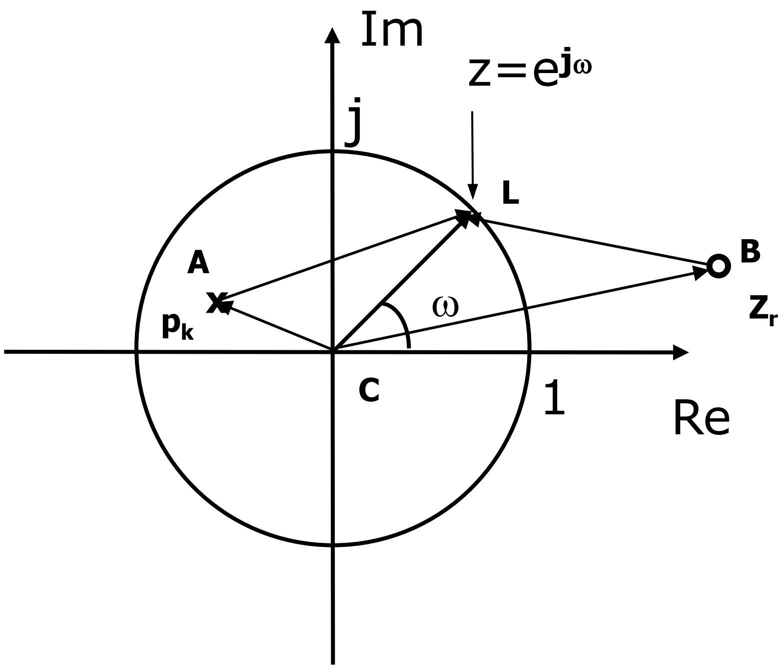
$$V_r(\omega) \equiv \left|e^{j\omega} - z_r\right|, \quad \theta_r(\omega) \equiv \arg[e^{j\omega} - z_r]$$

$$U_k(\omega) \equiv \left|e^{j\omega} - p_k\right|, \quad \phi_k(\omega) \equiv \arg[e^{j\omega} - p_k]$$

$$|H(\omega)| = |H_0| \frac{V_1(\omega)\ldots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)\ldots U_N(\omega)}$$

$$\arg[H(\omega)] = \arg[H_0] + \sum_{r=1}^{M}\theta_r(\omega) - \sum_{k=1}^{N}\phi_k(\omega)$$

2.7. Đánh giá đáp ứng tần số



$CL = CA + AL$

$CL = CB + BL$

$CL = e^{j\omega}$, $CA = p_k$, $CB = z_r$

$AL = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\phi k(\omega)}$

$BL = e^{j\omega} - z_r = V_r(\omega)e^{j\theta r(\omega)}$

$U_k(\omega)$: chiều dài của AL

$V_r(\omega)$: chiều dài của BL

Bài tập Chương 2 (1/2)

1. Cho tín hiệu

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le \text{N-1} \\ 0 & \text{n cßn l}^{1}\text{ i} \end{cases}$$

Hãy tính biến đổi z của tín hiệu này bằng cách dùng:

a) Định nghĩa biến đổi z

b) Tín hiệu u(n) và trễ của u(n)

2. Tính biến đổi z ngược của $X(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \quad |z| > \frac{1}{2}$

3. Ứng dụng biến đổi z 1 phía để giải PT-SP:

$$y(n)-(1/2)\, y(n-1)=x(n)-(1/2)\, x(n-1)$$

Biết $x(n) = \delta(n)$, $y(-1)=0$.

Bài tập Chương 2 (2/2)

4. Hệ TT-BB có PT-SP:

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$$

a) Xác định hàm truyền đạt, điểm không, điểm cực

b) Nhận xét tính nhân quả, ổn định

c) Xác định đáp ứng xung sao cho hệ nhân quả

Bài tập làm lại lớp

Hệ TT-BB có PT-SP:

$$y(n)+y(n-1)-0,75y(n-2)-x(n)=0$$

a) Xác định hàm truyền đạt, điểm không, điểm cực

b) Nhận xét tính nhân quả, ổn định

c) Xác định đáp ứng xung sao cho hệ nhân quả y(n)+y(n-1)-0,75y(n-2)-x(n) =0

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) - 0{,}75z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} - 0{,}75z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + z - 0{,}75}$$

Hệ có điểm không bậc 2 tại z=0

Hai điểm cực tại z = 0,5 và z= -1,5

$0 \leq |z| < 0{,}5$: Không nhân quả, không ổn định

$0{,}5 < |z| < 1{,}5$: Ổn định, không nhân quả

$1{,}5 < |z|$: Nhân quả, không ổn định

- Xác định đáp ứng xung để hệ nhân quả

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + z - 0{,}75} = z.H_1(z)$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z^2 + z - 0{,}75} = \frac{z}{(z - 0{,}5)(z + 1{,}5)}$$

$$H_1(z) = \frac{A_1}{z - 0,5} + \frac{A_2}{z + 1,5}$$

$$A_1 = (z - 0{,}5)\left.\frac{z}{(z - 0{,}5)(z + 1{,}5)}\right|_{z=0{,}5} = 0{,}25$$

$$A_2 = (z+1,5)\left.\frac{z}{(z-0,5)(z+1,5)}\right|_{z=-1,5} = 0,75$$

$$H(z) = \frac{0,25}{1-0,5z^{-1}} + \frac{0,75}{1+1,5z^{-1}}$$

$$h(n) = 0,25.(0,5)^n u(n) + 0,75(-1,5)^n u(n)$$