ĐỀ 1 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ 1 20191**

MÃ HP : MI1141, Nhóm 1, Thời gian : 90 phút

Chú ý : Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị ký xác nhận số đề.

Câu 1(1đ). Cho $z_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Tìm n nhỏ nhất để $\operatorname{Re}(Z_n)=0$

Câu 2(1đ). Chứng minh $\mathrm{W} = \left\{ X \mid X = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} : a,b \in \mathbf{R} \right\}$ là không gian con của không gian vecto các ma trận vuông cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Tính $\dim W$

Câu 3(2,5đ) Ký hiệu $P_2(x)$ không gian vecto của các đa thức có bậc ≤ 2

1. Hệ $\{u_1(x) = 2 + x + 3x^2; u_2(x) = -1 + 2x; u_3(x) = 1 + 8x + 6x^2\}$ có phải là cơ sở của $P_2(x)$ hay không ? Vì sao ?
2. Cho toán tử tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ xác định bởi

   $f(a+bx+cx^2) = 6a - 2b - 2c + (2a-3b)x + (4a+b-2c)x^2$

a. Viết ma trận của *f* theo cơ sở chính tắc $\{1; x; x^2\}$ của $P_2(x)$

b. Tìm $\dim Kerf$

Câu 4(2,5đ). Trong $\mathbf{R}^3$ tích vô hướng của $a = (a_1;a_2;a_3); b = (b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi $\langle a,b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

1. Cho $u_1 = (1,1,0); u_2 = (0;1;1)$. Tìm vecto $v \neq (0;0;0)$ sao cho $\langle u,v\rangle = 0$ với mọi $u \in Span\{u_1,u_2\}$
2. Cho toán tử tuyến tính : $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi :

   $f(x,y,z) = (2x-2y+2z, -2x+5y+z, 2x+y+5z)$

   Tìm cơ sở trực chuyển của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của *f* theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5(1đ). Với $0 < a$, ký hiệu $C_{[-a;a]} = \{ f(x) \mid f(x)$ liên tục trên $[-a;a]\}$

Ánh xạ $\Phi : C_{[-a;a]} \to \mathbf{R}, \Phi(f) = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ có phải là đơn ánh không ? tại sao ?

Câu 6(1đ). Cho *A*,*B* là 2 ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $A^{2019} = 0$ và $AB = A + B$. Chứng minh rằng det(*B*)=0

Câu 7(1đ) : Cho *V* là không gian vecto hữu hạn chiều và toán tử tuyến tính $f : V \to V$.

Chứng minh rằng $\dim(Kerf^2) \le 2\dim(Kerf)$

ĐỀ 4 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ 1 20191**

MÃ HP : MI1141, Nhóm 1, Thời gian : 90 phút

Chú ý : Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị ký xác nhận số đề.

Câu 1(1đ). Cho $f(z)=z^3+(1+2i)z^2+(1+2i)z+2i$. Tính $f(-2i)$ và giải phương trình $f(z)=0$.

Câu 2(1đ). Ánh xạ $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$, $f(x,y)=(x^3+2y^2)+(3x^3+7y)i$ có toàn ánh không ? Vì sao ?

Câu 3(1đ). Tìm $\lambda,\beta\in\mathbf{R}$ để hệ $\begin{cases}2x+y+z=\beta-2\\ x+\lambda y+2z=3\\ 2x-\lambda y-z=1\end{cases}$ có vô số nghiệm

Câu 4(1,5đ). Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V và phép biến đổi tuyến tính :

$f:V\to V$ có ma trận theo cơ sở E là $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Tìm cơ sở trực chuẩn $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ sao cho ma trận của f theo cơ sở F là ma trận đường chéo.

Câu 5(1đ). Cho $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở của không gian vecto V. Hệ

$F=\{f_1=e_1+2e_2-2e_3,\ f_2=2e_1-3e_2+e_3,\ f_3=3e_1-e_2-e_3\}$ có phải là một cơ sở của V hay không ? Vì sao ?

Câu 6(2,5đ). Ký hiệu $P_2(x)$ là không gian vecto có đa thức có bậc ≤ 2

1. Cho toán tử tuyến tính $f:P_2(x)\to P_2(x)$ xác định bởi :

   $f(a+bx+cx^2)=2a-b+(2b+c)x+(a+b+c)x^2$. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$

   Trên $P_2(x)$ cho tích vô hướng $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx$ và $u_1(x)=1; u_2(x)=x; v(x)=x^2$. Tìm hình chiếu trực giao của vecto $v(x)$ lên $Span\{u_1,u_2\}$.

Câu 7(1đ). Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch thỏa mãn $9A=A^{-1}$. Tính $\det(A-A^{2017})$.

Câu 8(1đ). Trong không gian vecto các hàm số liên tục trên [a,b], chứng minh hệ véc tơ $\{u_k(x)-|x-\lambda_k|, k=\overline{1,n}$ với $\lambda_i\ne\lambda_j, i\ne j; i,j=\overline{1,n}\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ 4 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ 1 20191**

MÃ HP : MI1141, Nhóm 1, Thời gian : 90 phút

Chú ý : Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị ký xác nhận số đề.

Câu 1(1đ). Giải phương trình trong trường số phức:

$$z^4-(2+3i)z^3-(1-3i)z^2=0$$

Câu 2(1,5đ). Cho $A=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ với *c* là một số thực cho trước.

a. Chứng minh rằng *A* luôn khả nghịch

b. Tìm ma trận *X* thỏa mãn phương trình $A^5X(A^{-1})^4=E$ trong đó E là ma trận đơn vị cấp 2.

Câu 3(1,5đ). Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo hệ số thực *a:*

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4=1\\ 4x_1 & -8x_2 & -x_3 & +6x_4=7\\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4=a\end{cases}$$

Trong trường hợp hệ số nghiệm, hãy biểu diễn nghiệm theo x_1,x_2

Câu 4(2đ). Cho ánh xạ tuyến tính: $f:P_2[x]\to P_2[x]$ xác định bởi:

$f(1)=(x+x^2);\ f(x)=1+x^2;\ f(x^2)=1+x$

a. Tìm các giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính *f*.

b. Tìm một cơ sở $\mathbb{R}^3$ để ma trận của *f* theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

Câu 5(3đ). Trong không gian vecto $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho:

$V=Span\{v_1=(1;-1;0;1),v_2=(1;1;0;0),v_3=(1;1;0;1),v_4=(0;-2;0;-1)\}$

a. Hệ vecto $\{v_j\}^4_{j=1}$ có là một hệ trực giao không?

b. Hãy tìm một hệ cơ sở của *V*

c. Tìm hình chiếu của vecto $\omega=(2;0;3;1)$ lên *V*.

Câu 6(1đ). Giả sử rằng $A\in M_n(R)$ tập các ma trận thực vuông cấp n. $A^{2020}=0$ và *A* chéo hóa được. Chứng minh rằng A phải là ma trận không

ĐỀ II	**ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20182**

Mã HP: MI1141 – Tín chỉ - Thời gian 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho A, B, C là 3 tập hợp bất kỳ. Chứng minh rằng : $(B\setminus A)\cap C=(B\setminus A)\setminus(A\cup\overline{C})$

Câu 2 (1đ). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\backslash\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ và tập $A=[-1;1]$. Xác định $f^{-1}(A)$

Câu 3 (1đ). Cho 2 ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. Tìm ma trận X sao cho $(XA)^{-1}=B$.

Câu 4 (1đ). Tìm a, b sao cho hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases}x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +ax_4=6\\ -2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4=3b-9\\ -7x_1 & +11x_2 & -15x_3 & +2x_4=10b-39\end{cases}$$

Câu 5 (1đ). Trong không gian vector $P_3[x]$, đặt

$V=span\{u_1=1+2x-2x^2+x^3, u_2=-2-3x+6x^2-x^3\}$

$W=span\{u_3=3+3x-11x^2+2x^3, u_4=-3-4x+13x^2+5x^3\}$

Tìm số chiều và một cơ sở của $V+W$.

Câu 6 (2đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn

$f(4+x+x^2)=-1-x-2x^2, f(1+2x+x^2)=4+5x+9x^2,$

$f(x^2)=1+x^2$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{1,x,x^2\}$. Tính $f(x+x^2)$.

b) Tìm số chiều của $\operatorname{Im} f$ và 1 cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

Câu 7 (1đ). Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, cho $H=\{x,y,z|x-y+z=0\}$. Tìm hình chiếu của $u=\{1,-2,1\}$ lên H.

Câu 8 (1.5đ). Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, đưa dạng toàn phương $\omega=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của ω khi $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$.

Câu 9 (0.5đ). Cho A là ma trận thực vuông cấp 2019 thỏa mãn điều kiện $A^TA=0$, ở đó A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A. Chứng minh rằng $A=0$.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [1;3], B = (m; m+3)$. Tìm m để $(A \backslash B) \subset (A \cap B)$.

Câu 2 (1đ). Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} - 4i$, i là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ). Giải phương trình ma trận $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - X$.

Câu 4 (4đ). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 = 0 \\ -x_1 & (m-3)x_2 & -3x_3 & +7x_4 = m \end{cases}$ (trong đó m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véc tơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v = (4; 5; -6; -9)$ lên không gian con U ở câu c.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi;

$f(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 + 3x_2 + x_3; -x_1 - x_2 + x_3; -3x_1 + 2x_2 + 2x_3)$.

a) Tìm m để véc tơ $u = (1; 3; m) \in Im(f)$. Ánh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ). Trong không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véc tơ $B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin 10x, \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các tập hợp con của $\mathbb{R}$ là $A = [2; 4], B = (m; m + 1)$. Tìm m để $(B \setminus A) \subset (A \setminus B)$.

Câu 2 (1đ). Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = 4\sqrt{3} + 4i, i$ là đơn vị ảo.

Câu 3 (1đ). Giải phương trình ma trận: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + X$

Câu 4 (4đ). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 = m \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 = 0 \\ -x_1 & +mx_2 & -2x_3 & -x_4 = 0 \end{cases}$ (trong đó m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

c) Khi $m = 0$, các nghiệm của hệ phương trình lập thành một không gian véc tơ con U của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của U.

d) Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu trực giao của $v = (5; 2; 4; -3)$ lên không gian con U ở câu c.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 - 2x_2 + 2x_3)$.

a) Tìm m để véc tơ $u = (3; 5; m) \in Im(f)$. Ảnh xạ trên có phải là toàn ánh không? Vì sao?

b) Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f có dạng đường chéo.

Câu 6 (1đ). Trong không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, chứng minh hệ véc tơ $B = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin 10x, \cos 10x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $(A \vee B) \to \overline{C}$.

Câu 2 (1.5đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 - 1$. Ánh xạ f có phải là đơn ánh không vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-3}(\{5 + 2i\})$.

Câu 3 (2đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tính $det(A + 2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $AX = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

Câu 4 (1.5đ). Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véc tơ $u_1 = 1 + 2x - x^3$, $u_2 = 2 - x + x^2 + 2x^3$, $u_3 = -1 + x - x^2 + x^3$, $u_4 = 4 + 2x^2$ và các không gian véc tơ con $V_1 = span\{u_1, u_2\}$, $V_2 = span\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và 1 cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(1;2;-1) = (2;2;4), f(2;1;3) = (1;2;-1), f(1;1;2) = (2;3;1)$.

a) Xác định dim $\text{Im}(f)$ b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6 (2đ). Cho dạng toàn phương

$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với $a = 2$, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v\rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\langle u, u\rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hóa Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20181**

MÃ HP: MI1141 Nhóm ngành 1 – Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ). Cho các mệnh đề A, B, C. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề $\overline{A} \to (B \wedge C)$.

Câu 2 (1.5đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi $f(z) = 2z^3 + 1$. Ánh xạ f có phải là toàn ánh không vì sao? Xác định tích các mô đun của các phần tử trong tập nghịch ảnh $f^{-1}(\{5 - 2i\})$.

Câu 3 (2đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Tính $det(A - 2E)^5$, trong đó E là ma trận đơn vị cấp 3.

b) Giải phương trình ma trận $XA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 4 (1.5đ). Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véc tơ $u_1 = 1 - 2x - x^3, u_2 = 2 - x - x^2 + 2x^3, u_3 = -1 + x - x^2 - x^3$, $u_4 = 4 - 4x + 2x^2 + 2x^3$ và các không gian véc tơ con $V_1 = span\{u_1, u_2\}$, $V_2 = span\{u_3, u_4\}$. TÌm số chiều và 1 cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Câu 5 (2đ). Cho biến đổi tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

l$f(2; 3; -1) = (6; 2; -2), f(1; 1; 3) = (2; 3; -1), f(3; 1; -1) = (5; 4; -2)$.

a) Xác định $\dim \operatorname{Im}(f)$ b) Tìm các giá trị riêng của f.

Câu 6 (2đ). Cho dạng toàn phương

$h(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

a) Tìm điều kiện của a để dạng toàn phương xác định dương.

b) Với $a = 2$, ta có duy nhất một tích vô hướng $\langle u, v \rangle$ trên $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\langle u, u \rangle = h(u)$. Tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng này thông qua việc trực chuẩn hóa Gram-Smith cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Đề 5: **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ 20181**

Nhóm ngành 2. Mã HP 1142-Thời gian : 90 phút

Câu 1: Tìm các nghiệm phức của phương trình thỏa mãn điều kiện $z^4=\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ thỏa mãn điều kiện $|z-2i|<3$

Câu 2 : Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 14 & 11\end{bmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa mãn $AX=B-X$

Câu 3: Trong không gian $P_2[x]$ cho các vecto

$v_1=1+x+x^2, v_2=2+mx-x^2,\ v_3=4+5x+x^2, v=10+11x-5x^2$

a) Xác định m để hệ $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Với m =2,chứng minh B lập thành cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm tọa độ của vecto v đối với cơ sở B

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(1,1,0)=(3,3,9)$, $f(2,-1,1)=(-1,3,1)$, $f(0,1,1)=(1,1,3)$

a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

b) Xác định $f(3,4,5)$

c) Xác định số chiều và một cơ sở của ker f

Câu 5: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho các vecto:

$v_1=(1;1;2;-1), v_2=(1;2;1;1), v_3(3;4;5;-1)$

Đặt $V=Span\{v_1,v_2,v_3\}$

a) Xác định số chiều và một cơ sở của V

b) Tìm hình chiếu trực giao của vecto $V=(4,1,0,4)$ lên V

Câu 6: Cho ma trận A và m x n với $m\le n$, có hạng bằng m. CM tồn tại ma trận B cỡ n x m sao cho AB=E, với E là ma trận đơn vị.

ĐỀ 7 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - 20181**

Mã số MI1143 – Nhóm ngành 3 – Thời gian: 90 phút

Câu 1. (1đ) Cho mệnh đề P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: y > x$"

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2. (1đ) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Câu 3. (2đ) Cho các vector:

$v_1 = (2,1,5,8); v_2 = (1,-1,3,5); v_3 = (0,2,1,6); v_4 = (-3,5,2,1)$

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $v = (-5,15,15,13)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4. (3đ) Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(3,2,1) = (8,3,3); f(3,2,0) = (6,5,3); f(3,0,0) = (6,3,9)$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5. (2đ) Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector; $v_1 = (-1,1,1,-1,-1)$; $v_2 = (2,1,4,-4,2)$; $v_3 = (5,-4,-3,7,1)$. Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gramm-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = (1,2,3,4,5)$ lên V.

Câu 6. (1đ) Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

ĐỀ 8 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ - 20181**

Mã số MI1143 – Nhóm ngành 3 – Thời gian: 90 phút

Câu 1. (1đ) Cho mệnh đề P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}: y < x$".

a) Xác định mệnh đề phủ định của P.

b) Mệnh đề P muốn khẳng định điều gì?

Câu 2. (1đ) Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Câu 3. (2đ) Cho các vector:

$v_1 = (2,1,0,-3); v_2 = (1,-1,2,5); v_3 = (5,3,1,2); v_4 = (8,5,6,1)$

a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_3 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tọa độ của vector $v = (23,14,17,-5)$ đối với cơ sở trên.

Câu 4. (3đ) Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(1,2,3) = (13,-7,-2); f(1,2,0) = (4,2,-2); f(2,0,0) = (4,0,4)$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm các giá trị riêng, vector riêng của f.

c) Tìm số chiều của không gian hạt nhân và không gian ảnh của f.

Câu 5. (2đ) Trong không gian $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector: $v_1 = (1,-1,-1,1,1)$; $v_2 = (2,1,4,-4,2)$; $v_3 = (4,-3,-2,6,0)$. Ký hiệu V là không gian sinh bởi v_1, v_2, v_3.

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V bằng phương pháp Gramm-Schmidt.

b) Tìm hình chiếu trực giao của vector $v = (0,2,4,6,8)$ lên V.

Câu 6. (1đ) Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A^4 cũng đồng dạng với B^4.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ HÈ 20173**

MÃ HP: MI 1141, Nhóm 1, Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1(2đ). 1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề

$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)$ và $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$

có tương đương hay không? Tại sao?

2. Ánh xạ $f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1+i)^{10}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}$.

Câu 3 (1đ). Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & m \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Chứng minh rằng $F\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2 : a, b, c \in \mathbf{R}\right\}$ là không gian con của không gian M_2 các ma trận vuông cấp 2. Tìm số chiều của F.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x - y + z; -x + 2y - z; z).$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6 (1đ). Nhận dạng đường bậc hai $4xy - 4\sqrt{2}y = 1$.

Câu 7 (1đ). Cho $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 1+a_1^2 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Câu 8 (1đ). Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng hệ các véc tơ $\{f_1(x) = e^{\lambda_1 x}; f_2(x) = e^{\lambda_2 x}; \ldots; f_n(x) = e^{\lambda_n x}\} \subset C(\mathbb{R})$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ CUỐI HỌC KỲ HÈ 20173**

MÃ HP: MI 1141, Nhóm 1, Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1 (2đ).

1. Cho p, q, r là 3 mệnh đề. Hỏi hai mệnh đề

$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ và $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

2. Ánh xạ $f: \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4x-5}{x-3}$ là đơn ánh không? Tại sao?

Câu 2 (1đ). Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (1-i)^{20}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}$.

Câu 3 (1đ). Tìm m để phương trình ma trận sau có vô số nghiệm

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Câu 4 (1đ). Chứng minh rằng $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - z + t = 0\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều của F.

Câu 5 (2đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x - y + z; x + 3z; y + z).$$

1. Chứng minh f là một phép biến đổi tuyến tính và tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Câu 6 (1đ). Nhận dạng đường bậc hai $2xy + 2\sqrt{2}x = 1$.

Câu 7 (1đ). Cho $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận sau khả nghịch

$$M = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -(1+t^2) \\ y & x & -(1+t^2) & z \\ z & 1+t^2 & x & -y \\ 1+t^2 & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

Câu 8 (1đ). Gọi $C(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Cho n số thực $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng hệ các véc tơ $\{f_1(x) = e^{\lambda_1 x}; f_2(x) = e^{\lambda_2 x}; \ldots; f_n(x) = e^{\lambda_n x}\} \subset C(\mathbb{R})$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20173**

MÃ HP MI 1143 Nhóm 3 Thời gian: 90 phút

Câu 1 (2đ).

1) Cho ánh xạ $f: [1; +\infty) \to (-2; +\infty)$ xác định bởi $f(x) = 2x - 2$. Ánh xạ f là ánh xạ toàn ánh không? Tại sao?

2) Cho số phức $z = \dfrac{1+2i}{2-i}, (i^2 = -1)$. Tính $\sqrt[6]{z}$.

Câu 2 (2đ). Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 15 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, m là tham số.

1) Khi $m = 1$, tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$.

2) Tìm m để ma trận A có hạng nhỏ nhất.

Câu 3 (3đ). Kí hiệu G là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -3x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 = 0 \\ -2x_2 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ -7x_1 & +2x_2 & +8x_3 & +2x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh G là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của G.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ $u = (1; -2; 0; 1)$ trên G.

Câu 4 (2đ). Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(2; 1; -1) = (0; 1; 3), f(1; 2; 1) = (3; 2; 3), f(1; -1; 2) = (1; 3; 0)$.

1) Tìm ma trận A của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (nếu có) để ma trận của f theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5 (1đ).

Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh $det(A^2 + 4E) \geq 0$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và phải làm đúng số đề được phát. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 6 **ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN ĐẠI SỐ HỌC KỲ 20173**

Mã HP MI 1143 Nhóm 3 Thời gian: 90 phút

Câu 1(2đ).

1) Cho ánh xạ $g: (-\infty; -1] \to [-2; +\infty)$ xác định bởi $g(x) = -2x - 2$. Ánh xạ g là ánh xạ đơn ánh không? Tại sao?

2) Cho số phức $z = \dfrac{5+i}{3-2i}, (i^2 = -1)$. Tính z^{2018}.

Câu 2(2đ). Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & n & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 19 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, n là tham số.

1) Khi $n = 0$, tìm ma trận X thỏa mãn $XA = C$.

2) Tìm n để ma trận A có hạng lớn nhất.

Câu 3(3đ). Kí hiệu S là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh S là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

2) Xác định một cơ sở của S.

3) Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ $x = (0; 1; 2; 5)$ trên S.

Câu 4(2đ). Kí hiệu $P_2[x]$ là không gian các đa thức hệ số thực, có bậc ≤ 2. Cho toán tử tuyến tính $g: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi:

$g(2 + x - x^2) = x + 3x^2, g(1 + 2x + x^2) = 3 + 2x + 3x^2, g(1 - x + 2x^2) = 1 + 3x.$

1) Tìm ma trận B của g theo cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

2) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ (nếu có) để ma trận của g theo cơ sở đó là ma trận đường chéo.

Câu 5(2đ).

Cho A là ma trận thực, vuông cấp n và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh $det(A^2 + 9E) \geq 0$.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và phải làm đúng số đề được phát. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 (1đ) Giải phương trình trong trường số phức:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^2-3(1+2i)\left(\frac{z+1}{z}\right)-8+6i=0$$

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $X^2-2X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ)* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + a^2x_4 = 0 \\ x_1 + (1-a)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (2-a)x_2 + (6-a)x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x,y,z,s)=(x+2y+z-3s,2x+5y+4z-5s,x+4y+5z-s),\forall(x,y,z,s)\in\mathbb{R}^4$.

a) Tìm một cơ sở và số chiều của $\ker f$.

b) Trên $\mathbb{R}^4$ xét tích vô hướng chính tắc, cho $u=(1;0;1;0)$, tìm $\omega\in\ker f$ sao cho $||u-\omega||\le||u-v||$, với mọi véc tơ $v\in\ker f$.

c) Hãy bổ sung thêm các véc tơ vào hệ cơ sở tìm được trong câu (a) để được hệ mới trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Câu 5 *(1,5đ)* Rút gọn dạng toàn phương sau bằng phương pháp chéo hóa trực giao $\varphi(x)=(x_1-x_2+2x_3)^2,\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Hãy nhận dạng mặt bậc hai sau $\varphi(x)=6x_3+6$.

Câu 6 *(1đ)* Cho $G=(\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}$ và $*$ là một phép toán hai ngôi trên G xác định bởi $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_1y_2+y_1)$. Hỏi $(G,*)$ có phải là một nhóm không? Tại sao?

Câu 7 *(1đ)* Giả sử rằng $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ký hiệu $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$ là tập các giá trị riêng của AB. Chứng minh rằng: $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(BA)$.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trong trường số phức:

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^2-(5+i)\left(\frac{z+1}{z}\right)+8+i=0$$

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $X^2-2X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 8 & 15\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ))* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (4-a)x_2 + (10-a)x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x,y,z,s,t)=(x+2y+z-3s+4t, 2x+5y+4z-5s+5t, x+4y+5z-s-2t)\quad \forall(x,y,z,s,t)\in \mathbb{R}^5$,

a) Tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

b) Trên $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng chính tắc, cho $u=(1;0;2)$, tìm $\omega\in\operatorname{Im} f$ sao cho $||u-\omega||\le||u-v||$, với mọi véc tơ $v\in\operatorname{Im} f$.

c) Hãy bổ sung thêm các véc tơ vào hệ cơ sở tìm được trong câu (a) để được hệ mới trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5 *(1,5đ)* Rút gọn dạng toàn phương sau bằng phương pháp chéo hóa trực giao $\varphi(x)=(x_1-2x_2+x_3)^2, \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Hãy nhận dạng mặt bậc hai sau $\varphi(x)=6x_2+6$.

Câu 6 *(1đ)* Cho $G=(\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}$ và $*$ là một phép toàn hai ngôi trên G xác định bởi $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2, x_2y_1+y_2)$. Hỏi $(G,*)$ có phải là một nhóm không? Tại sao?

Câu 7 *(1đ)* Giả sử rằng $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ - tập các ma trận thực vuông cấp n, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ký hiệu $\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$ là tập các giá trị riêng của AB. Chứng minh rằng: $\sigma_{\mathbb{R}}(BA)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(AB)$.

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^7 = (z-i)^7$.

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ)* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ ax_2 + (1-a)x_3 + (a^2+1)x_4 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 - x_3 - 2a^2x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, -2x + y - z, 2x - y + z)$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $\omega = (1;0;1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\phi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 5 *(1,5đ)* Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc,

cho $V_1 = Span\{v_1 = (1;2;3;1), v_2 = (1;3;3;2)\}$;

$V_2 = Span\{v_3 = (1;2;5;3), v_4 = (1;3;4;3)\}$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1 + V_2$. Tìm hình chiếu của véc tơ $\omega = (1;1;2;0)$ lên $V_1 + V_2$

Câu 6 *(1đ)* Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi: P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(p(x)) = (p(0), p(1), p(-1))$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1đ)* Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n \times 1$. Giả sử rằng A, B là hai ma trận vuông thực cấp n, với $0 < n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $X^tAY = X^tBY, \forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A = B$.

ĐỀ 4 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm ngành I, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1 *(1đ)* Giải phương trình trên trường số phức: $(z+i)^9 = (z-i)^9$.

Câu 2 *(1đ)* Giải phương trình ma trận: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 3 *(1,5đ))* Giải và biện luận theo hệ số thực a hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ ax_2 + (1-a)x_3 + (a^2+1)x_4 = 0 \\ 2x_1 + (4-a)x_2 - 4x_3 - 2(a^2+1)x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 *(3đ)* Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (4x+2y-2z, 2x+y-z, -2x-y+z)$$

a) Với tích vô hướng chính tắc của $\mathbb{R}^3$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn để ma trận của f theo hệ cơ sở đó có dạng đường chéo.

b) Tìm tọa độ của véc tơ $\omega = (1;0;1)$ theo hệ cơ sở trực chuẩn đó.

c) Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\phi(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Câu 5 *(1,5đ)* Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ trang bị tích vô hướng chính tắc, cho $V_1 = Span\{v_1 = (1;2;3;1), v_2 = (2;0;-2;1)\}$;

$V_2 = Span\{v_3 = (1;3;5;2), v_4 = (3;8;13;3)\}$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $V_1 \cap V_2$. Tìm hình chiếu của véc tơ $\omega = (1;1;0;1)$ lên $V_1 \cap V_2$

Câu 6 *(1đ)* Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi: P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(p(x)) = (p(0), p(-1), p(1))$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Câu 7 *(1đ)* Ký hiệu $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực kích cỡ $n \times 1$. Giả sử rằng A, B là hai ma trận vuông thực cấp n, với $0 < n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $X^tAY = X^tBY, \forall X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $A = B$.

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Nhóm học: 2, Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

***Câu 1** (2đ)*: Giải phương trình trong tập số phức:

$$a) z^2-(\sqrt{3}+1)iz-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i=0$$

$$b) \frac{1}{(2z+9)^{23}}-\frac{(\sqrt{3}+1)i}{(2z+9)^{11}}-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i=0$$

***Câu 2** (1đ):* Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -6\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Tìm ma trận X sao cho $AX-B=CX$.

***Câu 3** (1đ):* Tìm m và n sao cho không gian nghiệm của hệ phương trình sau có số chiều là 2:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+mx_3+3x_4=0\\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=0\\ 2x_1+2x_2-x_3+nx_4=0. \end{cases}$$

***Câu 4** (1đ)*: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ với

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-3x_3, 3x_1-x_2+2x_3, -7x_1+7x_2-12x_3.-5x_1+4x_2-7x_3)$

$\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$.

***Câu 5** (2đ)*: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 4\\ 4 & 4 & -2\\ -14 & -7 & 9\end{pmatrix}$.

Hãy tính các giá trị riêng của A, sau đó chéo hóa ma trận A.

***Câu 6** (2đ)*: Trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho ba véc-tơ

$$v_1=(1;0;-1;0), v_2=(1;-2m;m;1), v_3=(1;1;1;0).$$

a) Tìm m để hai véc-tơ v_1, v_2 trực giao với nhau, và với m tìm được đó hãy chứng minh rằng hệ véc-tơ $\{v_1,v_2,v_3\}$ là độc lập tuyến tính.

b) Với m tìm được ở trên hãy tính hình chiếu trực giao của véc-tơ $u=(0;2;1;-1)$ lên không gian $Span\{v_1,v_2,v_3\}$.

***Câu 7** (1đ)*: Cho A là ma trận thực vuông cấp n chéo hóa được và $p(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A (tức là $p(\lambda)=|A-\lambda I|$ với $\lambda\in\mathbb{R}$). Chứng minh rằng $p(A)=O$.

ĐỀ 7 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ - Học kì 20171**

Khóa: K62-Mã HP: MI1143 , Thời gian; 90 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị phải ký xác nhận mã số đề vào bài thi.***

Câu 1: Xét ánh xạ xác định bởi: $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2;x_1^3)\forall(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$$

CM f là song ánh. Xác định ánh xạ ngược của f

Câu 2: Tìm các nghiệm phức của phương trình: $(x^4+16)(x^2-2ix+8)=0$

Câu 3: Cho ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\8&5\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Tìm ma trận X thỏa $AX-B=C$

Câu 4: Trong $\mathbf{R}^4$ cho các vecto $v_1=(1;1;1;0), v_2(0;1;2;3), v_3(2;1;0;2)$

a) CM $\{v_1;v_2;v_3\}$ lập thành cơ sở của $V=Span(v_1;v_2;v_3)$

b) CM $v=(4;2;0;9)$ thuộc V. Tìm tọa độ của v đối với cơ sở trên.

Câu 5: Trong $P_2[x]$ Xét cơ sở $B=\{u_1;u_2;u_3\}$, trong đó $u_1=1+x;\ u_2=x;\ u_3=1+x+x^2$. Cho toán tử tuyến tính f: $P_2[x]\to P_2[x]$ có ma trận đối với cơ sở B là $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\2&3&2\end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc: $S=\{1,x,x^2\}$

b) Xác định v trong $P_2[x]$ để $f(v)=7+4x+2x^2$

c) Xác định một cơ sở của Kerf

Câu 6: Trên R^3 cho dạng toàn phương w xác định bởi:

$$\mathrm{w}(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$$

Với tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^3$, tìm cơ sở trực chuẩn để w có dạng chính tắc. Viết dạng chính tắc đó.

Câu 7: Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $A^4=0$, với O là ma trận không. CM: $A^2=0$

ĐỀ I **ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ - HỌC KỲ 20163**

Thời gian: 90 phút

Câu 1. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $A \subset X$. Chứng minh $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

Câu 2. Cho phương trình $z^2 - (5+3i)z + (8+4i) = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 với các điểm biểu diễn là A, B. Tính độ dài đoạn AB.

Câu 3. Tìm điều kiện của m để ma trận $\begin{bmatrix} 1+m & 2+m & -m \\ 3+m & -1+m & 2-m \\ -1+m & m & 1-m \end{bmatrix}$ khả nghịch.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + mx_4 = 0 \end{cases}$

có nghiệm không tầm thường và khi đó tìm công thức nghiệm.

Câu 5. Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ $u_1 = 1 + x - x^2$, $u_2 = 3x - x^2$, $u_3 = 2 - 2x + x^2$, $u_4 = 3 + 2x = 2x^2$. Chứng minh mỗi hệ gồm 3 trong 4 véc tơ kể trên đều là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$f(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1 - 12x_2 + 4x_3, 4x_1 + 7x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2)$

a) Xác định ma trận của f đối với cơ sở $B = \{(1;0;1), (0;1;1), (0;0;1)\}$.

b) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f theo cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 7. Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc $<,>$ và cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$.

a) Cho biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi$f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$. Chứng minh $< f(u), f(v) > = < u, v >$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3$.

b) Ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn bất kỳ có chéo hóa trực giao được không ? Tại sao ?

Câu 8. Cho A là ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn $A^2 + 2017E = 0$. Chứng minh $det(A) > 0$.

ĐỀ 1 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Giải phương trình phức $z^6 + iz^4 - z^2 - i = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+y, x-y)$

và $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.Tìm a biết

$$f^{-1}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\}$$

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B^T$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1:

$$\begin{cases} bx + 3y + z = 0 \\ (1+2b)x + (a+5)y + 2z = 0 \\ (2b-1)x + (a+2)y + z = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ

$$v_1 = (1;2;-1;0), v_2 = (2;2;-1;3), v_3 = (-1;-2;2;-1), v_4 = (1;0;1;2)$$

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn :

$$f(1+x^2) = 2 + 5x + 3x^2 \qquad f(-1+2x+3x^2) = 7(x+x^2)$$

$$f(x+x^2) = 3(x+x^2)$$

a) Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

b) Xác định m để véc tơ $v = 2 + mx + 5x^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2$$

a) Tìm a để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid

b) Khi $a = -5$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận thực A vuông cấp 2017.Chứng minh rằng

$$det(A - A^7)^{2017} = 2017(det\, A - det\, A^T)$$

ĐỀ 2 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Giải phương trình phức $z^6 - iz^4 - z^2 + i = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-y, x+y)$

và $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$.Tìm a biết

$$f^{-1}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\}$$

Câu 3 (1 đ). Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.Tìm ma trận X thỏa mãn $XA^T = B$.

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 1 :

$$\begin{cases} ax & +2y & +z = 0 \\ (1+3a)x & +(b+4)y & +3z = 0 \\ -2x & -by & -z = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ

$$v_1 = (-1;3;2;1), v_2 = (2;1;0;-1), v_3 = (1;4;3;1), v_4 = (2;8;5;1)$$

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 + V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn :

$$f(1+x^2) = 4 + x + 5x^2 \qquad f(1+2x+3x^2) = 10 + 13x + 23x^2$$

$$f(-x+x^2) = -1 - 2x - 3x^2$$

c) Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

d) Xác định m để véc tơ $v = 1 + mx - 5x^2$ thuộc $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phương

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + ax_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3$$

c) Tìm a để $\omega = 1$ là một mặt ellipsoid

d) Khi $a = 1$, hãy đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận thực A vuông cấp 2017.Chứng minh rằng

$$det(A - A^T)^{2017} = 2017(det\, A - det\, A^T)$$

ĐỀ 3 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho A, B là các tập hợp thỏa mãn $A\backslash B \subset B\backslash A$.Chứng minh $A \subset B$

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (4-i)z - 9i$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$

Câu 3 (1 đ).Tìm x biết $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6-x^2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6-x \end{vmatrix} = 0$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ sau có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số :

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad +ax_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \quad +3x_3 \quad +(3a+1)x_4 = b+6 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad -13x_3 \quad +(2a-2)x_4 = -b-1 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$ - các đa thức bậc không vượt quá 3, cho các véc tơ $v_1 = 1 + x + x^2 + 2x^3, v_2 = x - x^2 - x^3, v_3 = 2 + 5x - 2x^2, v_4 = 3 + 7x + 3x^3$.

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 \cap V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ -10 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

a) Tính $f\{1 + x + x^2\}$.Tìm m để $v = 1 - x + mx^2$ thuộc $Kerf$

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$<(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các véc tơ

$$u_1 = (1;1;0), u_2 = (1;2;1), u_3 = (3;4;1), v = (2;2;3)$$

và đặt $H = span\{u_1, u_2, u_3\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ .Chứng minh rằng

$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ở đó $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 4

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho A, B là các tập hợp thỏa mãn $B\backslash A \subset A\backslash B$. Chứng minh $B \subset A$

Câu 2 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = iz^2 + (2-5i)z - 7$, với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{-9i\})$

Câu 3 (1 đ).Tìm x biết $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6-x & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 7-x^2 \end{vmatrix} = 0$

Câu 4 (1 đ).Tìm a, b để hệ sau có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số :

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad +ax_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \quad +3x_3 \quad +(3a+1)x_4 = b+6 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad -13x_3 \quad +(2a-2)x_4 = -b+2 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_3[x]$ - các đa thức bậc không vượt quá 3, cho các véc tơ $v_1 = 1 + 2x + x^3, v_2 = x - x^2 - x^3, v_3 = 3 + 7x - 2x^2 + x^3, v_4 = 3 + 7x + 3x^3$.

Đặt $V_1 = span\{v_1, v_2\}, V_2 = span\{v_3, v_4\}$.Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con $V_1 \cap V_2$

Câu 6 (2 đ). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$

c) Tính $f(1 + x + x^2)$. Tìm m để $v = m - x + 2x^2$ thuộc $Kerf$

d) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$<(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các véc tơ

$$u_1 = (1;0;1), u_2 = (1;1;2), u_3 = (3;1;4), v = (2;3;2)$$

và đặt $H = span\{u_1, u_2, u_3\}$

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

d) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho A, B là các ma trận vuông cấp $n \geq 1$ .Chứng minh rằng

$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ở đó $r(X)$ là hạng của ma trận X

ĐỀ 5 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho số tự nhiên n .Mệnh đề sau đúng hay sai ? Vì sao ?

A: “ Nếu n là số lẻ và n chia hết cho 2 thì nó là số chẵn “

Câu 2 (1 đ). Giải phương trình phức $\bar{z}^2 + 2iz - 1 = 0$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .Tính $f(A)$ với $f(x) = x^2 - 4x$.Tìm ma trận X thỏa mãn $(4A^2 - A^3)X = B$

Câu 4 (1 đ).Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$B_1 = \{u_1 = (1;0;0), u_2 = (1;1;0), u_3 = (1;1;1)\}$ sang cơ sở

$B_2 = \{v_1 = (1;2;3), v_2 = (2;0;3), v_3 = (3;2;5)\}$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn

$f(1+x) = 5 + 5x^2$ $f(1+3x+x^2) = 12 + 3x + 15x^2$

$f(1+2x-x^2) = 7 + 7x^2$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$.Ánh xạ f có là một đơn cấu hay không ? Vì sao ?

b) Tìm số chiều và một cơ sở của $Im\, f$

Câu 7 (2 đ). Cho dạng toàn phuong $\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$

a) Đưa ω về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao (chỉ rõ phép biến đổi)

b) Tìm $\underset{S}{Max}\,\omega$ và $\underset{S}{Min}\,\omega$ với $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận vuông cấp $n \geq 1$, thỏa mãn $A^2 = E$ với E là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng A chéo hóa được

ĐỀ 7 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y) = (2x+1, y-1)$ và $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.Phần tử $(1;2)$ có thuộc $f(A)$ không ? Vì sao ?

Câu 2 (1 đ).Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn

$(1+i)^{14}(2-z) = \left(\sqrt{3}+i\right)^8$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} 3x_1 & +7x_2 & +x_3 & +7x_4 & = 42 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 22 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & +6x_4 & = 33 \\ 5x_1 & +11x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = 50 \end{cases}$$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{bmatrix}$ có hạng bé nhất

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ

$$v_1 = 1 + x + 2x^2, v_2 = 1 - x^2, v_3 = 3 + x, v = 3 - 2x + mx^2$$

Tìm m để $v \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận của fđối với cơ sở $B = \{(1;1;1),(1;1;2),(1;2;3)\}$

b) Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của f

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$<(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)>= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các vecto $u = (1;2;-1), v = (-5;-2;3)$và đặt $H = \{z \in \mathbb{R}^3 | z \perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp 2016 , thỏa mãn $A^{2017} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2016E)$ là khá nghịch , với E là ma trận đơn vị cấp 2016

ĐỀ 8 **ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN ĐẠI SỐ-HỌC KÌ 20161**

KHÓA : 61 – THỜI GIAN : 90 PHÚT

Chú ý :*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi*

Câu 1 (1 đ). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (2x - 1, x + y)$ và $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.Phần tử $(1; 0)$ có thuộc $f(A)$ không ? Vì sao ?

Câu 2 (1 đ).Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn

$(1 - i)^{14}(z - i) = \left(\sqrt{3} - i\right)^8$, với i là đơn vị ảo

Câu 3 (1 đ). Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

$$\begin{cases} 3x_1 & +10x_2 & -5x_3 & +15x_4 & = 58 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +4x_4 & = 17 \\ 2x_1 & +7x_2 & -x_3 & +16x_4 & = 55 \\ x_1 & +4x_2 & +x_3 & +13x_4 & = 42 \end{cases}$$

Câu 4 (1 đ).Tìm m để $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & m+5 & 4 & -1 \\ 3 & m+7 & 6 & m-4 \end{bmatrix}$ có hạng bé nhất

Câu 5 (1 đ). Trong không gian $P_2[x]$, cho các véc tơ

$$v_1 = 1 + x, v_2 = 1 - x^2, v_3 = 3 + x - x^2, v = 1 - x + mx^2$$

Tìm m để $v \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

Câu 6 (2 đ). Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$

của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) Tìm ma trận của fđối với cơ sở $B = \{(1; 1; 1), (2; 1; 1), (3; 2; 1)\}$

d) Tìm các giá trị riêng và vecto riêng của f

Câu 7 (2 đ). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc :

$$<(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)>= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

cho các vecto $u = (1; -2; 1), v = (3; -2; 5)$ và đặt $H = \{z \in \mathbb{R}^3 | z \perp u\}$

c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H

d) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Câu 8 (1 đ). Cho ma trận A vuông cấp 2016 , thỏa mãn $A^{2017} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $(A + 2016E)$ là khả nghịch , với E là ma trận đơn vị cấp 2016