 thaonx-fami@mail.hut.edu.vn

GIẢI TÍCH I

BÀI 8

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (TIẾP THEO)

4. Tích phân của một vài lớp hàm

b) Hàm lượng giác. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, ở đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỉ đối với các biến

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi \Rightarrow \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$

Chú ý. +) $R(\sin x, \cos x)$ chẵn với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$

+) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$

+) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$

Ví dụ 1.

a) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$

c) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$

d) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

e) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$

f) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}dx$

g) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

h) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$

k) $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx$

l) $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx$ $\quad\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} + C\right)$

m) $\int \frac{\cot x}{1+\sin^2 x}dx$ $\quad\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} + C\right)$

c) Tích phân các hàm số vô tỉ $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$

1°) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$ đưa về tích phân hàm lượng giác (4b).

2°) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t \Rightarrow$ (4b)

3°) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{a}{\sin t} \Rightarrow$ (4b).

Ví dụ 2.

a) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

d) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx, \quad a > 0$ **e)** $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ **f)** $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}$

g) $\int x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}\, dx$ **h)** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ **i)** $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

k) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

l) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$ $\left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 3\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right| + C\right)$

m) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} dx$ $\left(\sqrt{x^2 + 4x - 5} + \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 5}\right| + C\right)$

Ví dụ 3. Dùng phép thế Euler để tính

- $A > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = t \pm \sqrt{A}x$
- $C > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = xt \pm \sqrt{C}$
- Nếu $Ax^2 + Bx + C = A(x - \lambda)(x - \mu)$, đặt $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = t(x - \lambda)$ hoặc $t(x - \mu)$ sẽ đưa về tích phân hàm hữu tỉ.

a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ **b)** $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}$ **d)** $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx$

Chú ý. Có những hàm không có nguyên hàm sơ cấp:

$e^{\pm x^2}$, $\cos x^2$, $\sin x^2$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\sqrt{1 - x^3}$, $\frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$ (Chứng minh bởi Liouville (Pháp) vào thế kỉ 19).

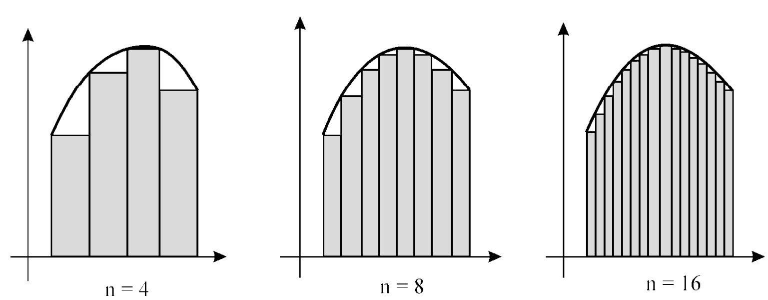
§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa.

1) Ý nghĩa hình học:

+) Bài toán diện tích hình thang cong: $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a\ ;\ b]$, khi đó diện tích của hình thang cong $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$



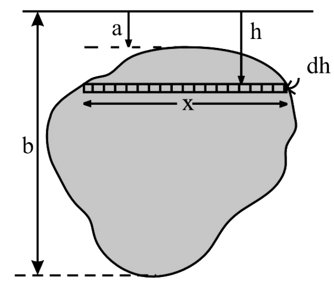
là $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, $\lambda = \max\limits_{i=1,n} |\Delta x_i|$

2) Ý nghĩa cơ học $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) > 0$

– Là khối lượng của đoạn $[a\,;\,b]$ với mật độ khối lượng là $f(x)$

– là công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

3) Tính áp lực lên mặt đĩa. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình



$F = \int_a^b whxdh$, ở đó w là trọng lượng riêng của nước $= \dfrac{1}{32}$ tấn/(ft)^3

4) Định nghĩa. $f(x)$ xác định trên $[a\,;\,b]$

+) Chia $[a\,;\,b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \equiv b$

+) Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}\,;\,x_i]$

+) Lập tổng $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, đặt $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\Delta x_i|$

Nếu $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia $[a\,;\,b]$ và cách chọn điểm ξ_i thì I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a\,;\,b]$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ví dụ 1. a) Tính $\int_{20}^{30} 0\,dx$ **b)** Tính $\int_{11}^{2} 2010\,dx$ **c)** $\int_0^1 y(x)\,dx$, $y(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\cos\dfrac{k\pi}{2n}$ $\left(\dfrac{2\pi - 4}{\pi^2}\right)$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\sin\dfrac{k\pi}{2n}$ $\left(\dfrac{4}{\pi^2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{3n^2 + k^2}$ $\left(\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$

h) Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} < \ln 2$ **k)** Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2n-k} > \ln 2$

Định nghĩa. • Khi $b < a$ có $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

• Khi $a = b$ có $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

II. Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

1) Tiêu chuẩn khả tích

Định lí 1. $f(x)$ khả tích trên $[a\ ;\ b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$,

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i\,,\ s = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i\,,\ M_i = \max_{\Delta x_i} f(x),\ m_i = \min_{\Delta x_i} f(x)$$

Định lí 2. $f(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a\ ;\ b]$

Định lí 3. $f(x)$ bị chặn trên $[a\ ;\ b]$ và có hữu hạn điểm gián đoạn trong $[a\ ;\ b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a\ ;\ b]$

Định lí 4. $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trong $[a\ ;\ b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trong $[a\ ;\ b]$

Ví dụ 2. Tính

a) $\int_0^2 x\,dx$ **b)** $\int_0^1 x^2 dx$ **c)** $\int_1^2 e^x dx$

d) $\int_1^5 x^3 dx$ **e)** $\int_0^1 a^x dx,\quad a > 0$ **f)** $\int_a^b x^\alpha dx,\quad a > 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!