Nhắc lại một số kiến thức

- Matrix và vector
- Xác suất thống kê

54

Nhắc lại một số khái niệm ma trận và vector

- Các phép xử lý ảnh thực chất là các phép tính toán trên các ma trận và các vectors
- → review lại một số khái niệm trong toán học về matrix và vector

55

Một số khái niệm

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Khái niệm ma trận:
  m: dòng, n cột
- A là vuông (square) nếu m = n
- A là ma trận đường chéo (diagonal): nếu các phần tử không nằm trên đường chéo = 0, có ít nhất một phần tử trên đường chéo $\neq 0$
- A là ma trận đơn vị (identity - I): nếu diagonal và các phần tử trên đường chéo đều = 1

56

Một số khái niệm (tiếp)

- $trace(A) = \sum \text{các phần tử trên đường chéo chính}$
- Định thức của ma trận (Determinant)
- Ma trận chuyển vị (transpose): dòng → cột, cột → dòng, ký hiệu: A^T
- Ma trận vuông A đối xứng (symetric) nếu A = A^T
- Ma trận nghịch đảo (Inverse): X là inverse của A nếu: XA = I và AX = I

57

Một số khái niệm (tiếp)

- Vector cột (column vector) là ma trận mx1

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

- Vector hàng (row vector) là ma trận 1xm

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots b_n]$$

58

Các phép tính trong ma trận

- A, B cùng kích thước m x n
  - C = A + B → C kích thước m x n và $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
  - D = A – B → D kích thước m x n và $D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$
- A(m, n); B(n, q)
  - C = AB → C kích thước m x q và

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{pj}}$$

59

Các phép tính trong ma trận

- Cho 2 vector a, b cùng kích thước

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

  - Tích vô hướng 2 vector (inner product – dot product) được định nghĩa như sau

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a} &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_ib_i. \end{aligned}}$$

60

Không gian vector (vector spaces)

- Không gian vector được định nghĩa là một tập vector V và thỏa mãn các điều kiện sau đây
  - Điều kiện A
    - 1. x + y = y + x với mọi vector x và y trong không gian
    - 2. x + (y + z) = (x + y) + z
    - 3. Tồn tại duy nhất vector 0: x + 0 = 0 + x = x
    - 4. x + (-x) = (-x) + x = 0

61

Vector spaces (tếp)

- Điều kiện B
  - 1. c(d**x**) = (cd)**x** với mọi số c, d và vector **x**
  - 2. (c + d)**x** = c**x** + d**x**
  - 3. c(x + y) = c**x** + c**y**
- Điều kiện C
  - 1**x** = **x**

62

Vector spaces (tiếp)

- Tổ hợp tuyến tính (linear combination) của các vectors: $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$\boxed{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n}$$

- Vetor v gọi là phụ thuộc tuyến tính (linearly dependent) của các vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nếu v có thể viết là tổ hợp tuyến tính của tập vector này. Ngược lại v là độc lập tuyến tính của tập vector trên (linearly independent)

63

Vector spaces (tiếp)

- Tập vector cơ sở (basis vector set) trong không gian V cho phép tạo ra vector v bất kỳ trong không gian
  - Ví dụ: không gian vector R^3, vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

  - Có thể được tạo bằng tổ hợp tuyến tính của 3 vectors cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ and } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

64

Chuẩn của vector (vector norm)

- Vector norm của vector x : ký hiệu $\|x\|$ cần thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $\|\mathbf{v}\| > 0$ for $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; $\|\mathbf{0}\| = 0$,
(2) $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$ for all scalars c and vectors $\mathbf{v}$, and
(3) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

- Công thức tính chuẩn của vector có nhiều, công thức hay dùng: 2-norm (công thức Euclidean)

$$\boxed{\|\mathbf{x}\| = [x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2]^{1/2}} \qquad \boxed{\|\mathbf{x}\| = [\mathbf{x}^T\mathbf{x}]^{1/2}}$$

65

Quan hệ giữa 2 vector

- Cosin $\cos\theta = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$
- Suy ra cách tính khác của tích vô hướng (inner product) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$
- 2 vector gọi là trực giao (orthogonal) với nhau nếu và chỉ nếu tích vô hướng = 0
- 2 vector gọi là trực chuẩn (orthonormal) nếu
  - Chúng trực giao
  - Norm của mỗi vector = 1

66

Quan hệ giữa các vectors

- Tập các vector là trực giao nếu mọi cặp 2 vector trực giao từng đôi một
- Tập các vector là trực chuẩn nếu mọi cặp 2 vector trực chuẩn từng đôi một

67

Tính chất của vector trực giao

- Nếu $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là tập vector trực giao hoặc trực chuẩn, thì vector v bất kỳ có thể được biểu diễn bằng tổ hợp tuyến tính của các vector trực giao trên

$$\boxed{\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i} \\ &= \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}\end{aligned}}$$

68

Trị riêng – vector riêng (Eigen values - eigenvectors)

- Cho ma trận vuông M, nếu tồn tại một số λ và vector e sao cho:

$$\boxed{\mathbf{Me} = \lambda\,\mathbf{e}.}$$

- Thì: λ gọi là trị riêng của ma trận M
  e: là vector riêng ứng với trị riêng λ

69

Eigenvalues và eigenvectors (tiếp)

- Công thức tính: Dựa trên biểu thức

$$\det(A - \lambda I) = 0 .$$

- Trong đó: det là định thức
- Ví dụ: Tìm trị riêng, vector riêng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

70

Eigenvalues và eigenvectors (tiếp)

- Giải:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 .$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

Suy ra: $\lambda = 1$ and $\lambda = 3$

- Với λ = 3, tìm vector riêng tương ứng

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \Rightarrow x = y, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

71

Tính chất của eigenvalues và eigenvectors

- Ma trận vuông A (m x m) có ***m*** eigenvalues phân biệt thì ***m*** eigenvectors tương ứng sẽ trực giao với nhau
- M là ma trận vuông đối xứng, A là ma trận có các hàng là các vector riêng của ma trận M thì $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ (nếu ma trận vuông đối xứng thì các vector riêng sẽ trực chuẩn - orthonormal)

72

Tính chất của eigenvalues và eigenvectors

- M là ma trận vuông đối xứng, A là ma trận có các hàng là các vector riêng của ma trận M.

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T$$

  - D là ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo là các trị riêng (eigenvalues) của ma trận M

73

Tính chất của eigenvalues và eigenvectors

- A là ma trận vuông

$$\mathrm{tr}(A) = \sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$\det(A) = \prod \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

74

Nhắc lại một số khái niệm xác suất thống kê

- Nhiều topics trong xử lý ảnh xử dụng các lý thuyết của xác suất thống kê
- → Review lại một số kiến thức của xác suất thống kê
  - Một số khái niệm, thuật ngữ phục vụ cho nội dung môn học
  - Một số khái niệm, thuận ngữ phục vụ cho việc đọc tài liệu

75

Tập hợp và các phép toán tập hợp

- Các biến cố xác suất thường được mô hình hóa bằng tập hợp
- Tập hợp (set) được định nghĩa là một tập các đối tượng, các đối tượng thường được gọi là các phần tử (element) hay các thành viên (member)
- Ví dụ: $\boxed{C = \{c \in I \mid c < 10\}}$
  - (tập các số nguyên < 10)

76

Tập hợp và các phép toán tập hợp (tiếp)

- Tập rỗng
- Quan hệ giữa 2 tập hợp
  - Bằng nhau
  - Khác nhau
  - Tập con
- Tập vũ trụ (universal set) – U: tập tất cả các phần tử quan tâm
  - Ví dụ: U = {H, T} khi tung đồng xu
  - U = {1,2,3,4,5,6}: khi đổ xúc sắc
  - Tập vũ trụ thường gọi là không gian mẫu (sample space – ký hiệu là S)

$$\emptyset \subseteq A \subseteq S,$$

77

Tập hợp và các phép toán tập hợp (tiếp)

$$S^c = \emptyset; \ \emptyset^c = S;$$

$$A \cup A^c = S; \ A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A; \ A \cap \emptyset = \emptyset; \ S \cup \emptyset = S; \ S \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup A = A; \ A \cap A = A; \ A \cup S = S; \ A \cap S = A$$

$$A \cup B = B \cup A; \ A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

78

Tuần suất tương đối & xác suất (relative frequency & probability)

- *Phép thử ngẫu nhiên* (random experiment): phép thử không biết trước kết quả
  - Ví dụ: tung đồng xu, không biết trước là sẽ ra mặt nào (H, T)
    - n: tổng số lần tung đồng xu
    - n_H Tổng số lần ra mặt ngửa
    - n_T Tổng số lần ra mặt sấp

$$\boxed{\frac{n_H}{n} + \frac{n_T}{n} = 1.}$$

79

Tuần suất tương đối & xác suất (relative frequency & probability)

- n_H/n và n_T/n gọi là *tần suất tương đối* (relative frequency)
- Khi số lần thực nghiệm là rất lớn, tần suất tương đối → giá trị ổn định → *xác suất* của một sự kiện (probability)
  - Ký hiệu: P(A)

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

  - Nếu 2 tập (sự kiện) là *loại trừ lẫn nhau* (mutually exclusive) thì P(AB) = 0

80

Xác suất có điều kiện

- P(A/B): xác suất của sự kiện A xảy ra khi có điều kiện là sự kiện B đã xảy ra (conditional probability)
- Nếu A và B là độc lập thống kê (statistic independent) thì
  - P(A/B) = P(A); P(B/A) = P(B)
  - P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A).P(B) $\neq$ 0
    - → độc lập thống kê $\neq$ loại trừ lẫn nhau
    - Ví dụ: loại trừ lẫn nhau: đổ 1 xúc sắc ra 1 với ra 2
    - Độc lập thống kê: đổ 2 xúc sắc khác nhau, giá trị mỗi xúc sắc là độc lập thống kê với xúc sắc kia

81

Lý thuyết Bayes

Xác suất hậu nghiệm (posterial prob)

Khả năng xảy ra B khi biết A xảy ra (likelihood)

Xác suất tiên nghiệm (prior probability)

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Hằng số chuẩn hóa hay xác suất của evidence

82

Biến ngẫu nhiên

- ❑Các phép thử ngẫu nhiên, kết quả đầu ra có thể là số hoặc không phải số
  - Ví dụ 1: Tung đồng xu → {xấp, ngửa}
  - Ví dụ 2: Đổ xúc sắc → {1,2,3,4,5,6}
- ❑Biến ngẫu nhiên là hàm số thực định nghĩa trên tập biến cố (events) của không gian mẫu. Ánh xạ mỗi đầu ra của phép thử ngẫu nhiên với một giá trị số thực
  - Nói cách khác biến ngẫu nhiên ánh xạ mỗi biến cố trong không gian mẫu lên trục số thực

83

Biến ngẫu nhiên (tiếp)

- Ký hiệu:

$$X(\zeta) = x$$

Trong đó: ζ đại diện cho một biến cố (đầu ra của phép thử ngẫu nhiên), x: số thực, X phép ánh xạ

- Ví dụ $X(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if}\,'head' \\ 0 & \text{if}\,'tail' \end{cases}$

84

Biến ngẫu nhiên (tiếp)

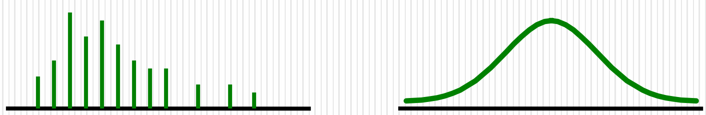
- Các điểm có thể hiểu nhầm về biến ngẫu nhiên
  - "Biến" không phải là biến thông thường mà là hàm (ánh xạ)
  - "Ngẫu nhiên" không phải là hàm ngẫu nhiên mà là hàm xác định
    - Tính ngẫu nhiên là do tham số đầu vào ζ ngẫu nhiên → đầu ra của hàm là ngẫu nhiên

85

Biến ngẫu nhiên (tiếp)

❑Phân loại

- Biến ngẫu nhiên rời rạc
- Biến ngẫu nhiên liên tục



86

Hàm phân bố xác suất tích lũy

❑Cumulative probability distribution function – hoặc gọi đơn giản là hàm phân bố xác suất (probability distribution)

$$\boxed{F_X(x) = P(X \le x).}$$

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(\infty) = 1$
3. $0 \le F(x) \le 1$
4. $F(x_1) \le F(x_2) \quad \text{if} \quad x_1 < x_2$
5. $P(x_1 < x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
6. $F(x^+) = F(x)$,

87

Hàm mật độ phân bố xác suất

- Probability density function (pdf): được định nghĩa là đạo hàm của hàm phân bố xác suất $$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

1. $p(x) \geq 0$ for all x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\alpha)d\alpha$, where α is a dummy variable
4. $P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$

88

Giá trị kỳ vọng (expected value)

- Giá trị kỳ vọng của hàm g(x) của biến ngẫu nhiên liên tục

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx.$$

p(x): hàm mật độ phân bố xác suất

- Trường hợp biến rời rạc

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)P(x_i).$$

89

Giá trị kỳ vọng (expected value)

- Giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên
  - Liên tục

$$E[x] = \overline{x} = m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

  - Rời rạc

$$E[x] = \overline{x} = m = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i)$$

90

Giá trị kỳ vọng và các moment

- Ý nghĩa của kỳ vọng
  - Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên.
  - Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất

91

Phương sai của biến ngẫu nhiên (variance)

- Phương sai nhận được bằng cách thay $g(x) = x^2$
  - Liên tục

$$\sigma^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

  - Rời rạc

$$\sigma^2 = E[x^2] = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 P(x_i)$$

92

Phương sai của biến ngẫu nhiên

- Phương sai thường được chuẩn hóa bằng cách trừ đi giá trị trung bình (kỳ vọng)
  - Liên tục

$$\sigma^2 = E[(x-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x) dx$$

  - Rời rạc

$$\sigma^2 = E[(x-m)^2] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 P(x_i)$$

  - Giá trị: σ *gọi là độ lệch chuẩn (standard deviation)*

93

Moment các cấp

- Giá trị moment cấp n nhận được bằng cách cho g(x) = (x - m)^n

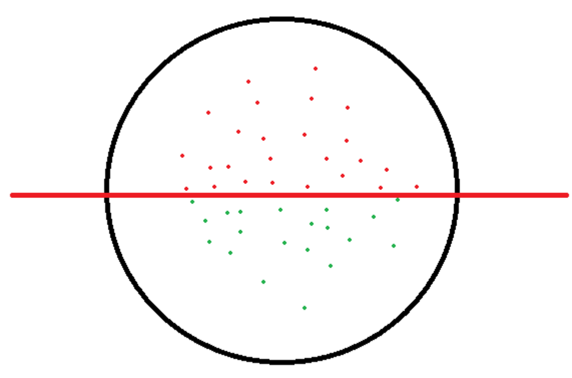
$$\mu_n = E[(x-m)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n p(x)dx$$

Hay

$$\mu_n = E[(x-m)^n] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^n P(x_i)$$

94

Moment các cấp



95

Moment các cấp

- Moment cấp 0 = 1
- Moment cấp 1 = 0
- Moment cấp 2: Phương sai
- Moment cấp 3: Skewness
- → Thông thường giá trị kỳ vọng (trung bình), phương sai (moment cấp 2) và moment cấp 3 được dùng để phản ánh phân bố của biến ngẫu nhiên

96

Biến ngẫu nhiên nhiều biến

- Thường biểu diễn dưới dạng vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

97

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Hàm phân bố xác suất

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= P\{x_1 \le a_1, x_2 \le a_2, \ldots, x_n \le a_n\} \end{aligned}$$

- Hàm mật độ phân bố xác suất

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}. \end{aligned}$$

98

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Giá trị kỳ vọng của hàm g(x)

$$\begin{aligned} E[g(\mathbf{x})] &= E[g(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) p(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

- Joint moment bậc k,q của biến ngẫu nhiên 2 biến

$$\eta_{kq} = E[x^k y^q] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^q p(x, y) dx dy.$$

99

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Tương quan của x và y (correlation)

$$R_{xy} = \eta_{11} = E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy.$$

- Nếu x và y là độc lập thống kê thì

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy = E[x]E[y].$$

  - 2 biến gọi là không tương quan với nhau

100

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Central joint moment bậc k,q của 2 biến ngẫu nhiên x, y

$$\mu_{kq} = E[(x-m_x)^k(y-m_y)^q] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k(y-m_y)^q p(x,y)dxdy$$

$$\mu_{20} = E[(x-m_x)^2] \qquad \mu_{02} = E[(y-m_y)^2]$$

101

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Hiệp biến – Hiệp phương sai (covariance)

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= E[(x-m_x)(y-m_y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)p(x,y)dxdy\end{aligned}$$

- Ký hiệu thường dùng: C_{xy}

$$\begin{aligned}C_{xy} &= E[xy]-m_yE[x]-m_xE[y]+m_xmy \\ &= E[xy]-E[x]E[y] \\ &= R_{xy}-E[x]E[y].\end{aligned}$$

Hiệp phương sai = 0 nếu 2 biến độc lập thống kê hoặc không tương quan với nhau

102

Biến ngẫu nhiên nhiều biến (tiếp)

- Hệ số tương quan (correlation coefficient)

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} \\ &= \frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \\ &= E\left[\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y}\right].\end{aligned}$$

103

Phân bố Gaussian (phân bố chuẩn)

- Pdf – Hàm một biến

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}$$

- Pdf – Hàm nhiều biến

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right]}$$

  - Trong đó: C là ma trận hiệp biến (covariance matrix), m là vector trung bình (mean vector)

104

Phân bố Gaussian (tiếp)

- Mean vector

$$\mathbf{m} = E[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{bmatrix}$$

- Covariance matrix

$$\mathbf{C} = E[(\mathbf{x}-\mathbf{m})(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T].$$

$$c_{ij} = C_{x_i x_j} = E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$

105

Phân bố Gaussian (tiếp)

- Tính chất của covariance matrix
  - Ma trận số thực
  - Đối xứng
  - Nếu các phần tử của vector x là độc lập thống kê → ma trận đường chéo

106

Phép chiếu giải tương quan (decorrelation)

- Cho vector biến ngẫu nhiên x = $\{x_i\}$
  - Ma trận hiệp biến (hiệp phương sai)

$$\boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{x}} = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T\}}$$

- Phép biến đổi (chiếu) tuyến tính
  - y = Ax
  - Trong đó: A là ma trận gồm các dòng là các eigenvectors của C_x

107

Phép chiếu giải tương quan (decorrelation)

- Phép chiếu từ x → y bằng hàm y = Ax là một phép chiếu giải tương quan
  - Thật vậy:

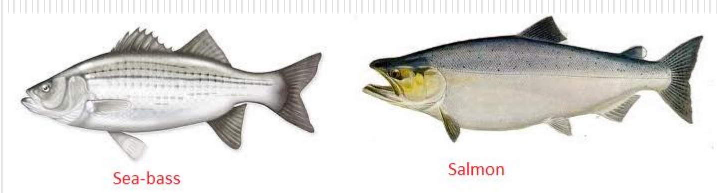
$$\begin{aligned} \mathbf{C_y} &= E\{(\mathbf{y}-\mathbf{m_y})(\mathbf{y}-\mathbf{m_y})^T\} \\ &= E\{(\mathbf{Ax}-\mathbf{Am_x})(\mathbf{Ax}-\mathbf{Am_x})^T\} \\ &= E\{\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})^T\mathbf{A}^T\} \\ &= \mathbf{A}E\{(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})^T\}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{AC_xA}^T \end{aligned}$$

  - Theo lý thuyết về eigenvalue và eigenvectors thì C_y là ma trận đường chéo

108

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất

- Phân lớp 2 loại cá: salmon và sea-bass



109

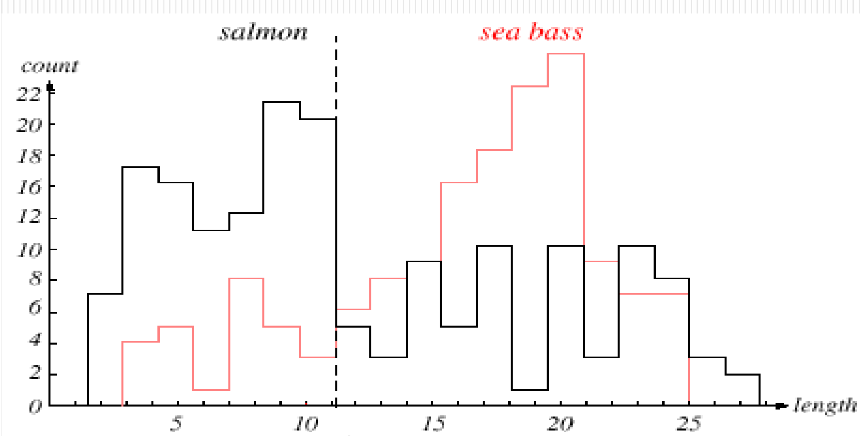
Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

- ❑Chọn đặc trưng để phân lớp
  - Chiều dài
  - Độ sáng (hay màu sắc)

110

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

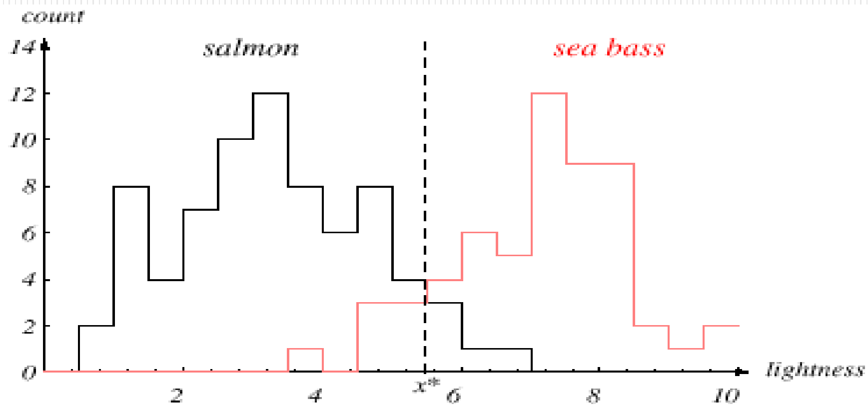
- ❑Feature là chiều dài



111

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

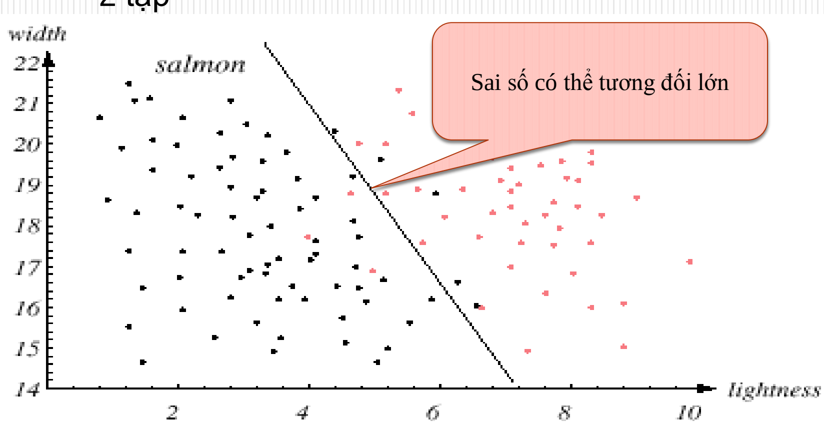
- Feature là độ sáng



112

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

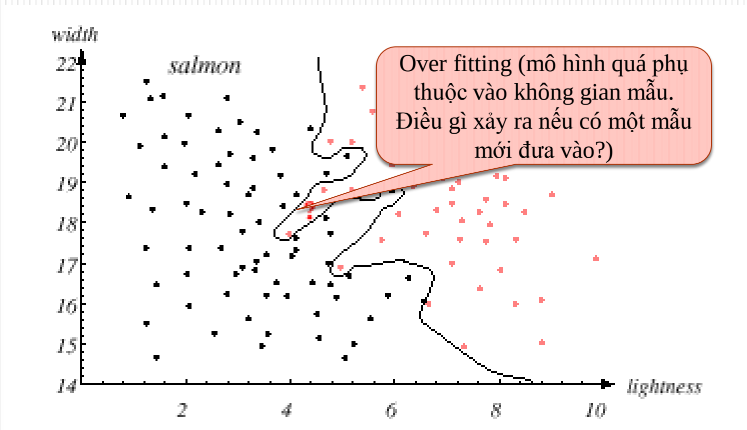
- Kết hợp 2 features
  - Phân lớp chọn đường thẳng chia không gian thành 2 tập



113

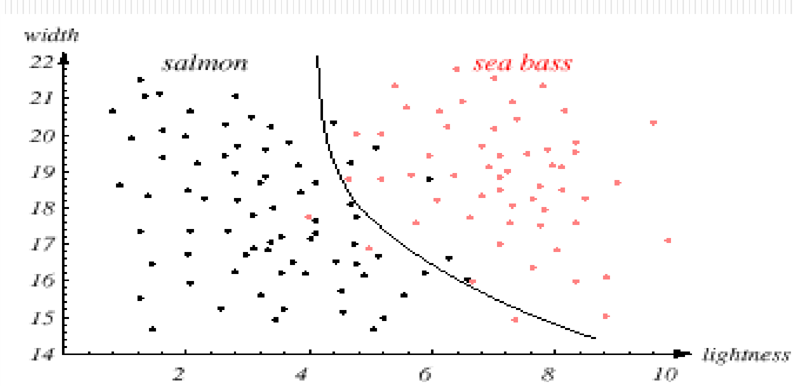
Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

- Kết hợp 2 features
  - Phân lớp chọn một đường không tuyến tính



114

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)



115

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

- Mô hình hóa bài toán
  - Không gian mẫu $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2\}$
    - ω_1: cá là sea-bass
    - ω_2: cá là salmon
  - Biến ngẫu nhiên x: chiều dài của con cá
  - P(ω_1), P(ω_2): Xác suất tiền nghiệm
  - P(x|ω_1), P(x|ω_2): Xác suất có điều kiện, (likelihood)
  - P(ω_1|x), P(ω_2|x): Xác suất hậu nghiệm
  - P(x): xác suất của evidence

116

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

- TH1. Không có training set: tức là chúng ta không có thông tin gì từ trước để phân biệt salmon với sea-bass → đoán bừa: 50-50
- TH2. Biết xác suất tiền nghiệm P(ω_1), P(ω_2) (Quan sát 1000000 con cá thấy có 600000 con salmon, 400000 sea-bass)→ 60%, 40%
  - Vì: P(ω_1) > P(ω_2): nên lúc nào cũng phân cá mới vào lớp ω_1

117

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

- TH3. Trường hợp thông dụng: chúng ta đã biết các xác suất tiền nghiệm P(ω_1), P(ω_2), và các xác suất có điều kiện P(x|ω_1), P(x|ω_2).
  - Quyết định: dựa vào xác suất hậu nghiệm (công thức xác suất bayes)

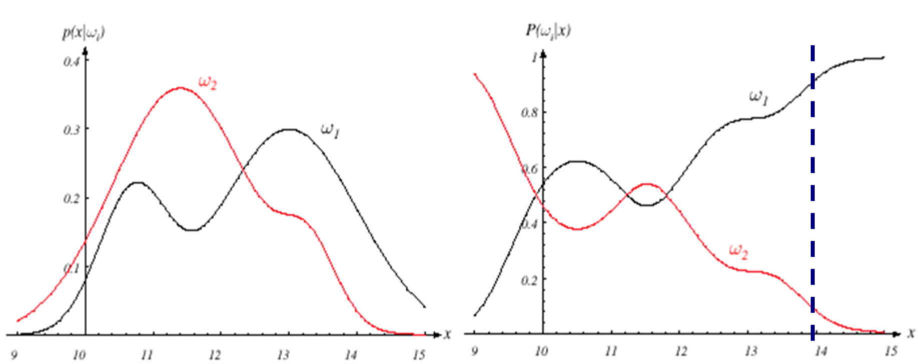
$$P(\omega_j|x) = \frac{p(x|\omega_j)P(\omega_j)}{p(x)}$$

$$posterior = \frac{likelihood \times prior}{evidence}$$

118

Ví dụ áp dụng lý thuyết xác suất (tiếp)

P(ω₁) = 2/3, P(ω₂) = 1/3



119

Một số khái niệm cơ bản

- Điểm ảnh (pixel)
- Độ phân giải (resolution)
- Mức xám (gray scale)
- Lân cận (neighbors)
- Liên thông (conectivity)

120