CHƯƠNG I
Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất

Mục lục

1 Định nghĩa xác suất

1.1 Bài toán đếm

Một số kiến thức cần nhớ:
Quy tắc cộng. Quy tắc nhân

- Quy tắc cộng: Nếu một công việc được chia thành k trường hợp, mỗi trường hợp có n_i cách thực hiện thì tổng cộng ta có $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách thực hiện công việc đó.
- Quy tắc nhân: Nếu một công việc được chia thành k giai đoạn, mỗi trường hợp có n_i cách thực hiện thì tổng cộng ta có $n = n_1.n_2...n_k$ cách thực hiện công việc đó.

Phân biệt giữa tổ hợp, chỉnh hợp

- Tổ hợp (C): **Không** phân biệt thứ tự các phần tử.
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Chỉnh hợp (A): **Có** phân biệt thứ tự các phần tử.
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Bài 1:

1. Có bao nhiêu cách để chọn 3 bạn nam đi dọn vệ sinh trong lớp gồm 20 người? $\left(C_{20}^3\right)$
2. Có bao nhiêu số tự nhiên 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ các số từ $1 \to 9$? $\left(A_9^3\right)$

Bài 2: Trong lớp gồm 20 sinh viên. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 sinh viên tham gia CLB Văn học và 4 sinh viên tham gia CLB Toán học trong trường hợp:

1. Mỗi sinh viên chỉ tham gia nhiều nhất 1 CLB $\left(C_{20}^4.C_{16}^4\right)$
2. Mỗi sinh viên có thể tham gia cả 2 CLB $\left(C_{20}^4.C_{20}^4\right)$

Bài 3: Một hộp có 10 quả cầu cùng kích cỡ được đánh số từ 0 đến 9. Từ hộp người ta lấy ngẫu nhiên 1 quả ra và ghi lại, sau đó trả lại vào trong hộp. Làm như vậy 5 lần ta thu được một dãy số có 5 chữ số.

1. Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho các chữ số trong đó là khác nhau? $\left(A_{10}^{5}\right)$
2. Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho có đúng 2 chữ số chẵn khác nhau? $\left(C_5^2.C_5^3.5!\right)$
3. Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho có đúng 2 chữ số chẵn khác nhau và chúng ở cạnh nhau? $\left(C_5^2.2!.C_5^3.4!\right)$

1.2 Công thức xác suất cổ điển

- Bước 1: Tìm tổng số kết cục đồng khả năng $(\Omega) : n$
- Bước 2: Gọi tên sự kiện A
- Bước 3: Tìm số kết cục thuận lợi cho A: m
- Bước 4: Xác suất cần tính: $P(A) = \dfrac{m}{n}$

Bài 1: Một kiện hàng có 24 sản phẩm, trong đó có 14 sản phẩm loại I, 8 sản phẩm loại II và 2 sản phẩm loại III. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm ra để kiểm tra.Tính xác suất trong 4 sản phẩm đó:

1. Có 3 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II. (0.2740)
2. Có ít nhất 3 sản phẩm loại I. (0.4368)
3. Có ít nhất 1 sản phẩm loại III. (0.6884)

Bài 2: Một đoàn tàu có 4 toa được đánh số I,II,III,IV đỗ ở sân ga. Có 6 hành khách từ sân ga lên tàu. Mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để:

1. Toa I có 3 người, toa II có 2 người, toa III có 1 người. (0.0146)
2. Một toa có 3 người, một toa có 2 người và một toa có 1 người. (0.3516)
3. Mỗi toa có ít nhất 1 người. (0.3809)

Bài 3: Một tổ gồm 2 học sinh giỏi, 4 học sinh khá và 5 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên ra 4 người. Tính các xác suất sau:

1. Trong 4 người có đúng một học sinh khá. (0.4242)
2. Trong 4 người học sinh khá chiếm đa số (nhiều hơn các học sinh khác). (0.2697)

Bài 4: Có 2 túi đựng bi. Túi I có 2 bi trắng, 4 bi đỏ. Túi II có 3 bi trắng 4 bi đỏ. Rút hú họa từ mỗi túi ra hai viên bi. Tính các xác suất để trong 4 viên bi được rút ra:

1. Có đúng hai bi trắng. (0.3810)
2. Số bi trắng rút từ mỗi túi bằng nhau. (0.4286)

Bài 5: Lớp Xác suất thống kê có 90 sinh viên trong đó có 30 sinh viên thuộc nhóm ngành 1, 25 sinh viên thuộc nhóm ngành 2 và 35 sinh viên thuộc nhóm ngành 3. Chọn ngẫu nhiên 10 sinh viên trong lớp để phát lì xì. Tính xác suất để mỗi nhóm ngành có ít nhất 1 sinh viên được chọn. (0,9505)

1.3 Công thức xác suất hình học

Dạng này thường ít ra trong đề thi.
Các bước giải bài:

- Bước 1: Tìm độ dài, thể tích,... của miền đồng khả năng S_G
- Bước 2: Gọi tên sự kiện A
- Bước 3: Tìm độ dài, diện tích,thể tích,... của miền kết cục thuận lợi cho A: S_A
- Bước 4: Xác suất cần tính là: $P(A) = \dfrac{s_A}{s_G}$

Bài 1: Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Lấy một điểm C bất kì trên đoạn thẳng đo. Tính xác suất chênh lệch độ dài giữa hai đoạn thẳng AC và CB không vượt quá 4cm. (0.4)
Bài 2: Cho đoạn thẳng AB dài 10cm. Lấy hai điểm C, D bất kỳ trên đoạn AB (C nằm giữa A và D). Tính xác suất độ dài AC, CD, DB tạo thành 3 cạnh một tam giác. (0.25)

2 Công thức cộng, nhân xác suất

- Xác suất có điều kiện:$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
- Công thức cộng xác suất

  $$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
  $$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

  Nếu A, B xung khắc thì $A.B = 0 \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

- Công thức nhân xác suất:

  $$P(AB) = P(A).P(B|A); \qquad P(ABC) = P(A).P(B|A).P(C|AB)$$

  Nếu A, B độc lập thì $P(AB) = P(A).P(B)$

- *Một số công thức cần nhớ* 2
  - $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow P\left(A + \overline{A}\right) = 1$
  - $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$
  - $A.\overline{A} = \emptyset \Rightarrow P\left(A.\overline{A}\right) = 0$
  - $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

  Lưu ý: $\overline{A.B} \neq \overline{A}.\overline{B}$

  - $AB + A\overline{B} = A\left(B + \overline{B}\right) = A \Rightarrow P(AB) = P(A) - P\left(A.\overline{B}\right)$
  - $AB + \overline{A}.B = \left(A + \overline{A}\right)B = B \Rightarrow P(AB) = P(B) - P\left(\overline{A}.B\right)$

2.1 Công thức cần tính xác suất cơ bản

Bài 1: Cho các sự kiện A, B với $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A+B) = \frac{3}{4}$. Tìm:

1. $P(AB), P(\overline{A}.\overline{B}), P(A\overline{B}), P(\overline{A}B)$. (0.0833; 0.25; 0.25; 0.4167)

2. $P(A+\overline{B}), P(\overline{A}+B), P(\overline{A}+\overline{B})$. (0.5833; 0.9167; 0.9167)

Bài 2: Giả sử $P(AB) = \frac{1}{4}, P(A|\overline{B}) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{1}{2}$. Tính $P(A)$. (0.3125)

Bài 3: Ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi người là $0,6; 0,7; 0,8$. Tìm xác suất:

1. Chỉ có người thứ hai bắn trúng. (0.056)

2. Có đúng một người bắn trúng. (0.188)

3. Có ít nhất một người bắn trúng. (0.976)

4. Cả ba người đều bắn trúng. (0.336)

5. Có đúng hai người bắn trúng. (0.452)

6. Có ít nhất hai người bắn trúng. (0.788)

7. Có không quá hai người bắn trúng. (0.664)

Bài 4: Có 3 tiêu chí phổ biến A, B, C cho việc chọn một chiếc xe hơi mới tương ứng là hộp số tự động, động cơ và điều hòa nhiệt độ. Dựa trên dữ liệu bán hàng trước đó ta có:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0,7; P(A+B) = 0,8; P(A+C) = 0,9; P(C+B) = 0,85; P(A+B+C) = 0,95$$

Tính xác suất:

1. Người mua chọn cả ba tiêu chí. (0.5)

2. Người mua chọn chính xác 1 trong 3 tiêu chí. (0.3)

2.2 Dạng bài xác suất có điều kiện

Thường có chữ ***"biết"*** ở câu hỏi: Tìm xác suất để A biết $B \Rightarrow P(A|B)$

Công thức: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Bài 1: Một lô hàng có 15 sản phẩm gồm 6 loại A, 5 loại B và 4 loại C. Chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) ra 4 sản phẩm.

1. Tính xác suất trong 4 sản phẩm đươc chọn có đúng 2 sản phẩm loại B. (0.3297)

2. Biết trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại A. Tính xác suất để trong 4 sản phẩm đó có đúng 1 sản phẩm loại C. (0.5556)

Bài 2: Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Có 8 người, gồm 5 nam và 3 nữ nộp đơn xin dự tuyển, và mỗi người đều có cơ hội được tuyển như nhau. Tính xác suất để trong 4 người được tuyển:

1. có không quá hai nam (0.5)

2. có ba nữ, biết rằng có ít nhất một nữ đã được tuyển. (0.0769)

Bài 3: Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X, 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y , có 36,5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy:

1. Dùng cả X và Y (0,1825)

2. Dùng Y, biết rằng người ấy không dùng X. (0,404)

Bài 4: Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên:

1. Có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu. (0,45)

2. Có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính. (0,3125)

2.3 Công thức Beroulli

Điều kiện: Thỏa mãn lược đồ **Bernoulli** (Các phép thử phải độc lập)

Công thức: $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; P_n(k_1;k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

Bài 1:Khi tiêm truyền một loại huyết thanh, trung bình có một trường hợp phản ứng trên 1000 trường hợp. Dùng loại huyết thanh này tiêm cho 20 người. Tính xác suất để:

1. có 3 trường hợp phản ứng $(1.12 * 10^{-6})$

2. có nhiều nhất 3 trường hợp phản ứng (0.9999)

3. có nhiều hơn 3 trường hợp phản ứng $(4.78 * 10^{-9})$

Bài 2: Trong phân xưởng có 5 máy hoạt động độc lập. Xác suất để trong mỗi ca mỗi máy bị hỏng đều bằng 0,1.

1. Tìm xác suất để trong ca đó có đúng 2 máy hỏng. (0,729)

2. Biết rằng trong một ca có đúng 2 máy hỏng. Tính xác suất để máy thứ nhất không hỏng (0,6)

Bài 3: Một hệ thống điện có 10 bộ phận hoạt động độc lập nhau. Xác suất để trong khoảng thời gian T mỗi bộ phận hoạt động tốt là 0,8.

1. Tính xác suất để trong khoảng thời gian T hệ thống điện đó có nhiều nhất 7 bộ phận hoạt động tốt. (0,3222)

2. Giả sử trong khoảng thời gian T hệ thống điện đó có ít nhất một bộ phận hoạt động tốt, tính xác suất để trong khoảng thời gian T hệ thống có ít nhất hai bộ phận hoạt động tốt. (0,999996)

2.4 Công thức xác suất đầy đủ

Dạng này quan trọng, nên làm nhiều để quen cách chọn hệ đầy đủ.
Hệ đầy đủ: Hệ gồm các sự kiện A_i xung khắc từng đôi một và $\sum P(A_i) = 1$
Ví dụ:

- Hệ $\{A, \overline{A}\}$
- Hệ $\{A_i\}$ với A_i tương ứng là sự kiện sản phẩm do nhà máy i sản xuất;
- Hệ $\{A_i\}$ với A_i tương ứng là sự kiện có i chính phẩm chọn được

Công thức xác suất đầy đủ: $P(H) = \sum P(A_i)P(H|A_i)$
Dạng bài: Biết H hỏi A_i: $P(A_i|H) = \dfrac{P(A_i.H)}{P(H)} = \dfrac{P(A_i).P(H|A_i)}{P(H)}$

Bài 1: Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Xác suất để phân xưởng 1, phân xưởng 2 và phân xưởng 3 sản xuất được sản phẩm loại A lần lượt là 0,7, 0,8 và 0,6. Từ một lô hàng gồm 20% sản phẩm của phân xưởng 1, 50% sản phẩm của phân xưởng 2 và 30% sản phẩm của phân xưởng 3 người ta lấy ra một sản phẩm để kiểm tra.

1. Tính xác suất để sản phẩm được kiểm tra là loại A (0.72)
2. Biết sản phẩm được kiểm tra là loại A. Tính xác suất để sản phẩm này do phân xưởng 2 sản xuất. (0.5556)

Bài 2: Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm 3 phế phẩm; lô II có 6 chính phẩm 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I bỏ sang lô II, sau đó từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm.

1. Tính xác suất để 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm. (0,5303)
2. Giả sử 2 sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm. Hãy tính xác suất để 2 chính phẩm này là của lô I (ban đầu). (0,5476)

Bài 3: Một nhóm xạ thủ có 3 người bắn tốt và 4 người bắn khá với xác suất bắn trúng mỗi lần bắn của mỗi loại tương ứng là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên 2 xạ thủ và cho mỗi người bắn 1 lần.

1. Tính xác suất để trong 2 lần bắn có đúng 1 người bắn trúng. (0,2657)
2. Biết trong 2 lần đó có ít nhất 1 người bắn trượt, tính xác suất để cả 2 người đó là xạ thủ thuộc nhóm bắn tốt. (0,0936)

Bài 4: Một công ty có 5 xe tải và 3 xe con. Biết xác suất sự cố trong tháng của mỗi xe tải là 0,1; còn của mỗi xe con là 0,02. Trong tháng nào đó chọn ngẫu nhiên 2 xe của công ty để kiểm tra.

1. Tính xác suất để trong hai xe được kiểm tra có đúng 1 xe bị sự cố. (0,1306)
2. Biết có ít nhất 1 xe bị sự cố trong 2 xe được kiểm tra. Tính xác suất để trong số xe bị sự cố có đúng 1 xe con. (0,1101)

Bài 5: Một nhóm học sinh có 5 loại giỏi, 4 khá và 2 trung bình. Chọn ngẫu nhiên ra một nhóm gồm 2 học sinh. Biết trong nhóm 2 học sinh có ít nhất 1 loại khá. Tính xác suất để trong nhóm đó có đúng 1 học sinh giỏi. (0.5882)

Bài 6: Một lô hàng gồm 16 sản phẩm loại A và 12 sản phẩm loại B. Chọn ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm.

1. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm đó có ít nhất 2 sản phẩm loại A. (0,1605)

2. Chọn tiếp ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm trong số sản phẩm còn lại. Tính xác suất để trong số 3 sản phẩm được chọn lần hai có ít nhất 1 sản phẩm loại A. (0,9328)

Bài 7: Có hai hộp bóng đèn. Hộp I có 7 bóng đèn xanh, 3 bóng đèn vàng; hộp II có 6 bóng đèn xanh, 4 bóng đèn vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp I ra hai bóng đèn rồi bỏ vào hộp II, sau đó từ hộp II lại lấy ngẫu nhiên ra 2 bóng đèn.

1. Tính xác suất để hai bóng đèn lấy ra sau cùng đều có màu xanh. (0.3616)

2. Biết rằng cả hai bóng đèn lấy ra sau cùng đều có màu xanh, tính xác suất để trong 2 bóng đèn đó có một bóng của hộp I và một bóng của hộp II. (0.3520)