# Chương 4
# ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2024

## Nội dung Chương 4

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính
2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
3. Trị riêng và véc-tơ riêng

## Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ánh xạ tuyến tính và ma trận của ánh xạ tuyến tính, mối quan hệ giữa ma trận và ánh xạ tuyến tính, khái niệm giá trị riêng, véc tơ riêng và ma trận chéo hoá được, toán tử chéo hoá được.
- Kỹ năng: Nhận biết ánh xạ tuyến tính; tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính tương ứng với cặp cơ sở bất kỳ; thực hiện chéo hoá ma trận và toán tử tuyến tính chéo hoá được.

# 1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

## Nội dung

# 1.1 Định nghĩa

### Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho $V$ và $W$ là hai không gian véc tơ trên cùng trường số $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu:

**i)** $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V,$

**ii)** $f(ku) = kf(u), \forall k \in \mathbb{K}, u \in V.$

Trong trường hợp $W \equiv V$, ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ còn được gọi là một **toán tử tuyến tính** (hay **phép biến đổi tuyến tính**) của không gian véc tơ $V$.

# 1.1 Định nghĩa

**Chú ý 1.1**

*Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra rằng ánh xạ* $f : V \to W$ *là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi*

$$f(ku + lv) = kf(u) + lf(v)$$

$\forall u, v \in V, k, l \in \mathbb{K}.$

## 1.2 Ví dụ

Các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính:

1. Ánh xạ không $f : V \to W, f(v) = \theta_W$.
2. Ánh xạ $f : V \to V, f(v) = \alpha v, \alpha \in \mathbb{R}$ là một phép biến đổi tuyến tính. Đặc biệt $\alpha = 1$ thì phép biến đổi này trở thành phép đồng nhất của $V$, tức là nó giữ nguyên mọi phần tử của $V$.
3. Phép chiếu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, 0)$.
4. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + 3y$.
5. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_3).$$
6. Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ánh xạ $f : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ được xác định bởi
$$f(X) = AX$$
Thật vậy, với mọi $X, Y$ thuộc $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ và $k \in \mathbb{R}$ ta có:
$$f(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY) = f(X) + f(Y),$$
$$f(kX) = A(kX) = f(AX) = kf(X).$$

# 1.2 Ví dụ

Các ánh xạ sau không là ánh xạ tuyến tính:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 1, y)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

# 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

**Mệnh đề**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $f(\theta_V) = \theta_W$,
2. $f(-v) = -f(v)$, $\forall v \in V$,
3. $f(u - v) = f(u) - f(v)$, $\forall u, v \in V$.
4. $f(k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n) = k_1f(u_1) + k_2f(u_2) + \cdots + k_nf(u_n)$, $\forall u_1, \ldots, u_n \in V; k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$.

# 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

## Định lý

Giả sử $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}$-không gian véc tơ $V$ và $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là một hệ véc tơ tùy ý của $W$ (chúng có thể không nhất thiết khác nhau). Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho

$$f(v_i) = w_i, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

**Chứng minh**

Mỗi vectơ $v \in V$ biểu diễn được duy nhất dưới dạng

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n.$$

Khi đó ta định nghĩa một ánh xạ $f : V \to W$ bởi

$$f(v) = k_1w_1 + k_2w_2 + \cdots + k_nw_n.$$

# 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Dễ dàng thử lại rằng ánh xạ $f$ định nghĩa như vậy là một ánh xạ tuyến tính. Hơn nữa, trong biểu thức định nghĩa của $f$ với mỗi $i$ cố định ta chọn $k_i = 1$ và $k_j = 0$ nếu $j \neq i$, ta sẽ được

$$f(v_i) = w_i,\ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Bây giờ nếu $g : V \to W$ cũng là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $g(v_i) = w_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$, ta sẽ chứng tỏ rằng $g = f$.
Thật vậy, với mọi $v \in V$ ta có

$$\begin{aligned} g(v) &= g(k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n) \\ &= k_1 g(v_1) + k_2 g(v_2) + ... + k_n g(v_n) \\ &= k_1 w_1 + k_2 w_2 + ... + k_n w_n = f(v). \end{aligned}$$

# 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

## Các phép toán

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f, g$ là ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$. Khi đó

1. *Tổng* của hai ánh xạ này, ký hiệu $f+g$, là ánh xạ $f+g$ xác định bởi
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \ \forall v \in V.$$
2. Tích của một số $k \in \mathbb{K}$ với ánh xạ tuyến tính $f$ là ánh xạ $kf$ xác định bởi
$$(kf)(v) = kf(v), \ \forall k \in \mathbb{K}, \forall v \in V.$$

# 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

**Mệnh đề**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f, g$ là ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$. Khi đó

1. Tổng $f + g : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính
2. Với $k \in \mathbb{K}$, tích $kf : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính

## 1.3 Tính chất của ánh xạ tuyến tính

**Mệnh đề**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Tập hợp

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W | f \text{ tuyến tính}\}$$

cùng hai phép toán trên là không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$.

**Mệnh đề**

Cho $V, W, Z$ là các không gian véc tơ trên trường số $\mathbb{K}$ và các ánh xạ tuyến tính:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z.$$

Khi đó hợp thành $g \circ f : V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

# 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

## Định nghĩa

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

$$\mathrm{Ker} f := \{v \in V | f(v) = \theta_W\} = f^{-1}(\{\theta_W\})$$

được gọi là **hạt nhân** của $f$.

$$\mathrm{Im} f := \{f(v) | v \in V\} = \{w \in W | \exists v \in V, f(v) = w\} = f(V)$$

được gọi là **ảnh** của $f$.

## Ví dụ

Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ sau:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, 0)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + 3y$.

# 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

## Lời giải

1. Theo định nghĩa Ker$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (0;0)\}$. Ta có $f(x,y) = (0;0) \Leftrightarrow (x,0) = (0;0) \Leftrightarrow x = 0$.
   Do đó Ker$f = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} =$ span$\{(0,1)\}$.
   Theo định nghĩa
   $$\text{Im}f = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (a,b).\}$$
   Ta có $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (x,0) = (a,b)$.
   Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $b = 0$.
   Vậy Im$f = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\} =$ span$\{(1,0)\}$.
2. Ker$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2x + 3y = 0\} = \{(3t, -2t), t \in \mathbb{R}\} =$ span$\{(3,-2).\}$
   Im$f = \{a \in \mathbb{R}, \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x + 3y = a\}$.
   Phương trình $2x + 3y = a$ có nghiệm với mọi $a$ nên Im$f \equiv \mathbb{R}$.

## Định lý

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. Ker$f$ là một không gian véc tơ con của $V$.
2. Im$f$ là một không gian véc tơ con của $W$.

**Chứng minh**

1. Ker$f$ khác rỗng vì $\theta_V \in$ Ker$f$. Lấy $u, v$ bất kỳ thuộc Ker$f$ ta có $f(u) = f(v) = \theta_W$.
   Với mọi $k, l$ thuộc $\mathbb{R}$ thì
   $$f(ku + lv) = kf(u) + lf(v) = \theta_W.$$
   Do đó $(ku + lv)$ thuộc Ker$f$. Vậy Ker$f$ là một không gian véc tơ con của $V$.
2. Im$f$ khác rỗng vì $\theta_W = f(\theta_V) \in$ Im$f$. Lấy $u', v'$ thuộc Im$f$, khi đó tồn tại $u, v$ thuộc $V$ sao cho $f(u) = u', f(v) = v'$.
   Với mọi $k, l$ thuộc $\mathbb{R}$ thì $f(ku + lv) = ku' + lv'$, do đó $(ku' + lv')$ thuộc Im$f$. Vậy Im$f$ là một không gian véc tơ con của $W$.

# 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

**Chú ý**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Xét hệ véc tơ $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ của $V$ và $f(S) = \{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ của $W$. Khi đó:

1. Nếu hệ $S$ là phụ thuộc tuyến tính thì hệ $f(S)$ cũng phụ thuộc tuyến tính.
2. Nếu hệ $f(S)$ là độc lập tuyến tính thì hệ $S$ là độc lập tuyến tính.

# 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

**Định lý**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Nếu hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ của $V$ là một hệ sinh của $V$ thì hệ véc tơ $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ là hệ sinh của Im$f$. Hơn nữa Im$f$ = span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$.

**Chứng minh** Lấy $w$ bất kỳ thuộc Im$f$, khi đó tồn tại $v \in V$ sao cho $w = f(v)$. Do span$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = V$ nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sao cho:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Từ đó ta có:

$$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_m f(v_m).$$

Điều này chứng tỏ Im$f \subset$ span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$. Mặt khác span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\} \subset$ Im$f$. Vậy Im$f$ = span$\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$.

### Các bước xác định không gian ảnh Im$f$

**Bước 1.** Chọn một hệ sinh (thông thường ta chọn một cơ sở) $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ của $V$.
**Bước 2.** Tìm ảnh của $B$ qua $f$:

$$S = f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}.$$

**Bước 3.** Kết luận Im$f$ = span$(S)$ = span$\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.

### Định lý về số chiều

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$ với $\dim V < +\infty$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

$$\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim V$$

# 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

**Chứng minh**
Giả sử $\dim \text{Ker} f = r$ và $\dim \text{Im} f = s$.
Chọn $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ là một cơ sở của Ker$f$ và chọn $\{v_1', v_2', \ldots, v_s'\}$ là một cơ sở của Im$f$. Khi đó tồn tại các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_s$ thuộc $V$ sao cho $f(v_i) = v_i', i = \overline{1, s}$.
Ta sẽ chỉ ra hệ véc tơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ là một cơ sở của $V$.
Thật vậy, giả sử:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r + l_1v_1 + l_2v_2 + \ldots + l_sv_s = \theta_V, k_i \in \mathbb{R}\, \forall i = \overline{1, r}, l_j \in \mathbb{R}\, \forall j = \overline{1, s} \tag{1}$$

Khi đó

$$f(k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r + l_1v_1 + l_2v_2 + \ldots + l_sv_s) = \theta_W$$

Suy ra

$$k_1f(u_1) + k_2f(u_2) + \ldots + k_rf(u_r) + l_1f(v_1) + l_2f(v_2) + \ldots + l_sf(v_s) = \theta_W$$

Do $u_1, u_2, \ldots, u_r$ thuộc Ker$f$ nên $f(u_i) = 0\, \forall i \in \overline{1, r}$. Lại có $f(v_j) = v_j', j = \overline{1, s}$ nên ta có

$$l_1v_1' + l_2v_2' + \ldots + l_sv_s' = \theta_W.$$

## 1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

**Chứng minh định lý về số chiều**

Vì $v'_1, v'_2, \ldots, v'_s$ độc lập tuyến tính nên $l_1 = l_2 = \ldots = l_s = 0$. Thay vào (1) ta được:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_ru_r = \theta_W$$

Mà $u_1, u_2, \ldots, u_r$ cũng độc lập tuyến tính nên $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$. Như vậy từ (1) ta suy ra tất cả các hệ số $k_1, k_2, \ldots, k_r, l_1, l_2, \ldots, l_s$ đều phải bằng 0.

Do đó hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ là độc lập tuyến tính.

Bây giờ ta sẽ chứng minh hệ này là hệ sinh của $V$. Thật vậy, xét một véc tơ $u$ bất kỳ thuộc $V$, ta có $f(u)$ thuộc Im$f$ nên tồn tại các hệ số $\alpha_i, i = \overline{1, s}$ sao cho

$$f(u) = \alpha_1v'_1 + \alpha_2v'_2 + \ldots + \alpha_sv'_s.$$

Do $f(v_i) = v'_i, i = \overline{1, s}$ nên

$$f(u) = \alpha_1f(v_1) + \alpha_2f(v_2) + \ldots + \alpha_sf(v_s)$$

Từ đó ta có $f(u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s)) = \theta_W$. Vậy $(u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s))$ thuộc Ker$f$.

Mặt khác $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ là một cơ sở của Ker$f$ nên tồn tại các hệ số $\beta_j, j = \overline{1, r}$ sao cho

$$u - (\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s) = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \ldots + \beta_ru_r$$

Như vậy $u$ được biểu diễn qua hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ :

$$u = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \ldots + \beta_ru_r + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_sv_s.$$

# 1.5 Hạng của ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}, \dim V < \infty$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Số chiều của không gian Im$f$ được gọi là hạng của $f$, kí hiệu là $\operatorname{rank} f$:

$$\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

**Ví dụ**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$$

Tìm số chiều và cơ sở của Im$f$ và Ker$f$.

**Lời giải**

Ta có

$$\mathsf{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = y + z = 0\}$$

Vì hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$

có nghiệm dạng $\{(-2t, t, -t), t \in \mathbb{R}\}$ nên

$$\mathsf{Ker} f = \{(-2t, t, -t), t \in \mathbb{R}\} = \mathsf{span}\{(-2, 1 - 1)\}$$

Mặt khác, áp dụng định lý về số chiều ta được:

$$\dim \mathsf{Im} f = 3 - \dim \mathsf{Ker} f = 3 - 1 = 2.$$

Hơn nữa $\mathsf{Im} f$ là không gian con của không gian $\mathbb{R}^2$ nên $\mathsf{Im} f \equiv \mathbb{R}^2$. Do đó hạng của $\operatorname{rank} f = 2$.

# 1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

## Định nghĩa

Ánh xạ tuyến tính được gọi là đơn cấu (tương ứng toàn cấu, đẳng cấu) nếu nó là đơn ánh (tương ứng toàn ánh, song ánh.)

## Ví dụ

1. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.
2. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$
không là đơn cấu, cũng không là toàn cấu.
3. Ánh xạ tuyến tính $f : P_n[x] \to P_{n-1}[x]$ xác định bởi $f(p(x)) = p'(x)$, (đạo hàm của $p(x)$) là toàn cấu nhưng không là đơn cấu.

# 1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

## Mệnh đề

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$.

1. $f$ là đơn cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$.
2. $f$ là toàn cấu khi và chỉ khi $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$

**Chứng minh**

1. Nếu $f$ là đơn cấu thì với mọi $v \in \operatorname{Ker} f$ ta có $f(v) = f(\theta_V) = \theta_W$. Do tính đơn ánh nên $v = \theta_V$.
   Ngược lại, nếu $\operatorname{Ker} f = \{\theta_V\}$, lấy $v_1, v_2$ bất kỳ thoả mãn $f(v_1) = f(v_2)$ ta có $f(v_1 - v_2) = \theta_W$. Điều này chứng tỏ $(v_1 - v_2) \in \operatorname{Ker} f$, do đó $v_1 - v_2 = \theta_V$ hay $v_1 = v_2$.
2. $f$ là toàn cấu khi và chỉ khi $f(V) = W$ khi và chỉ khi $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.

# 1.6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

**Hệ quả**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to V', \dim V = \dim V'$. Ta có các khẳng định sau là tương đương:

1. $f$ là đơn cấu,
2. $f$ là toàn cấu,
3. $f$ là đẳng cấu.

**Định nghĩa**

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$. Ta nói $V, W$ là đẳng cấu nếu tồn tại đẳng cấu $f : V \to W$. Khi đó ta kí hiệu: $V \cong W$.

Cho $V$ là không gian véc tơ $n$ chiều trên $\mathbb{K}$ và $B$ là một cơ sở của $V$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\to (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

với $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là toạ độ của $v$ đối với cơ sở $B$, là một đẳng cấu giữa $V$ và $\mathbb{K}^n$. Do đó: $V \cong \mathbb{K}^n$.

# 2. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

## Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính, ma trận đồng dạng và mối liên hệ giữa phép toán trên ma trận và ánh xạ.
- Kỹ năng: Viết được ma trận của ánh xạ với cặp cơ sở bất kỳ cũng như xây dựng được công thức của ánh xạ nếu biết ma trận của nó, tương tự cho toán tử tuyến tính.

## Nội dung

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ trên $\mathbb{K}, \dim V = n, \dim W = m$ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử $B$ là một cơ sở của $V$ và $B'$ là một cơ sở của $W$ với

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}.$$

Khi đó mọi véc tơ $v \in V$ được xác định bởi toạ độ của $v$ đối với cơ sở $B$ và $f(v)$ được xác định bởi toạ độ của nó đối với cơ sở $B'$. Ta có thể xây dựng ma trận của ánh xạ $f$ để biểu diễn mối quan hệ giữa hai tọa độ này.

**Định nghĩa**

Cho $f$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ $n$ chiều $V$ tới không gian véc tơ $m$ chiều $W$. Giả sử $B$ là một cơ sở của $V$ và $B'$ là một cơ sở của $W$ với

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}.$$

Ma trận $A$ cỡ $m \times n$ được gọi là **ma trận của ánh xạ tuyến tính** $f$ đối với cặp cơ sở $B, B'$ nếu với mọi véc tơ $v \in V$

$$[f(v)]_{B'} = A[v]_B. \tag{2}$$

ở đó $[f(v)]_{B'}$ là tọa độ cột của véc tơ $f(v)$ trong cơ sở $B'$ và $[v]_B$ là tọa độ của véc tơ $v$ trong cơ sở $B$.

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

**Ví dụ**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_3)$$

Xét cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là:

$$E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\},\ E' = \{e'_1 = (1;0), e'_2 = (0;1)\}$$

Tìm ma trận của $f$ đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

## 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

**Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1;0;0) = (1;1), \\ f(e_2) &= f(0;1;0) = (-3;0), \\ f(e_3) &= f(0;0;1) = (1;2). \end{aligned}$$

Với mọi véc tơ $v(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3).$$

Do $f(v) \in \mathbb{R}^2$, giả sử $f(v) = (y_1, y_2)$, biểu thức trên được viết lại dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó nếu đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì với mọi véc tơ $v \in \mathbb{R}^3$ ta có

$$[f(v)]_{E'} = A[v]_E.$$

$A$ chính là ma trận của $f$ đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

## Nhận xét

Nếu thay $v_i$ vào (2) ta được

$$[f(v_i)]_{B'} = A[v_i]_B, \forall i = \overline{1,n}$$

Do đó cột thứ $i$ của ma trận $A$ là véc tơ toạ độ của $f(v_i)$ đối với cơ sở $B'$.
Cụ thể, nếu biểu diễn các ảnh $f(v_i)$ qua cơ sở $B'$ là:

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ ... \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{cases} \qquad (*)$$

thì ta có ma trận $A$ thu được từ phép chuyển vị đối với ma trận của các hệ số trong biểu diễn $(*)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

**Quy trình xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với mỗi cặp cơ sở $B$ của $V$ và $B'$ của $W$.**

**Bước 1.** Tính $f(v_i)$ với mọi $v_i \in B$
**Bước 2.** Tìm tọa độ của $f(v_i)$ trong cơ sở $B'$.
**Bước 3.** Lập $A$ là ma trận tọa độ cột của hệ véc tơ $\{f(v_i), i = \overline{1, n}\}$ :

$$A = ([f(v_1)]_{B'} [f(v_2)]_{B'} \dots [f(v_n)]_{B'})$$

**Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính**

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\text{Tính trực tiếp}"] \arrow[d, "(1)"'] & f(v) \\ {[v]_B} \arrow[r, "\text{Nhân } A[v]_B", "\text{Tính gián tiếp (2)}"'] & {[f(v)]_{B'}} \arrow[u, "(3)"'] \end{tikzcd}$$

## 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

Theo sơ đồ này, khi đã biết $v \in V$, muốn tính $f(v)$ có hai cách: cách thứ nhất là tính trực tiếp, cách thứ hai là tính gián tiếp qua 3 bước:

1. Tìm tọa độ $[v]_B$.
2. Tính $[f(v)]_{B'} = A[v]_B$.
3. Từ $[f(v)]_{B'}$ ta suy ra $f(v)$.

**Nhận xét**

1. Ta có thể chọn các cơ sở $B$ và $B'$ sao cho ma trận $A$ càng đơn giản càng tốt. Khi đó ma trận có thể cung cấp những thông tin quan trọng về ánh xạ tuyến tính.
2. Mối quan hệ giữa tập hợp các ánh xạ tuyến tính $f$ và ma trận tương ứng được thể hiện qua đẳng cấu $\mathcal{F} : \text{Hom}(V, W) \to M_{m \times n}(\mathbb{K})$ được xác bởi $\mathcal{F}(f) = A$. Như vây $\text{Hom}(V, W) \cong M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

## 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

### Ví dụ 1

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

đối với các cơ sở $B_1 = \{e_1(1;0;0)e_2(0;1;0), e_3(0;0;1)\}$ và $B_2 = \{e'_1(1;1), e'_2(0;1)\}$. Ta có

$$\begin{cases} f(e_1) & = (1;0) = e'_1 - e'_2 \\ f(e_2) & = (1;1) = e'_1 \\ f(e_3) & = (0;1) = \qquad e'_2 \end{cases}$$

Do đó ma trận của $f$ đối với cặp cơ sở $B_1, B_2$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ví dụ 2**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $f(1;2;3)$.
b) Tìm cơ sở và số chiều của Ker$f$.
c) Tìm cơ sở và số chiều của Im$f$.

**Lời giải**

a) Ta có

$$\begin{aligned} f(1;2;3) &= f(1;0;0) + 2f(0;1;0) + 3f(0;0;1) \\ &= (2;1) + 2(-4;3) + 3(1;-2) \\ &= (-3;1) \end{aligned}$$

**Nhận xét**

Ta có thể tính $f(1;2;3)$ "gián tiếp" bằng cách nhân ma trận $A$ với tọa độ cột của $(1;2;3)$ (đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$) để được toạ độ cột của $f(1;2;3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $f(1;2;3) = (-3;1)$.

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

## Lời giải

b) Ta có $\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = (0, 0)\}$. Do đó

$$(x, y, z) \in \text{Ker} f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0. \end{cases}$$

Không gian nghiệm của hệ trên là $\{(x, y, z) = (t, t, 2t), t \in \mathbb{R}\}$ nên $\dim \text{Ker} f = 1$ và một cơ sở của $\text{Ker} f$ là $\{(1, 1, 2)\}$.

c) Từ định lý về số chiều ta có: $\dim \text{Im} f = 3 - \dim \text{Ker} f = 2$. Mặt khác $\text{Im} f$ là không gian con của $\mathbb{R}^2$. Do đó $\text{Im} f \equiv \mathbb{R}^2$. Ta có thể chọn một cơ sở của $\text{Im} f$ chính là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{(1; 0), (0; 1)\}$.

# 2.1 Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính

**Ví dụ**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2[x] \to P_3[x]$ có ma trận đối với cặp cơ sở chính tắc của $P_2[x], P_3[x]$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Tính $f(1 + x + x^2)$
b) Tìm cơ sở và số chiều của Ker$f$.
c) Tìm cơ sở và số chiều của Im$f$.

**Lời giải**

a) Ta có

$$\begin{aligned} f(1+x+x^2) &= f(1)+f(x)+f(x^2) \\ &= (1+3x+x^2+2x^3)+(-4-12x-4x^2-8x^3)+(5+7x-x^2-x^3) \\ &= 2-2x-4x^2+7x^3. \end{aligned}$$

**Nhận xét.**

Ta có thể tính $f(1+x+x^2)$ theo cách "gián tiếp" như sau: toạ độ của $1+x+x^2$ đối với cơ sở chính tắc là $(1;1;1)$ và

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Do đó $f(1+x+x^2) = 2-2x-4x^2+7x^3$.

b) Ta có $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \text{Ker}f$ khi và chỉ khi $A.X = 0$ với $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ là toạ độ cột của $p(x)$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Phương trình $A.X = 0$ tương đương với hệ phương trình sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 7 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Xét ma trận bổ sung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 3 & -12 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4-2h_1\to h_4]{h_2-3h_1\to h_2, h_3-h_1\to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4+9h_2\to h_4]{h_2/(-8)\to h_2, h_3+6h_2\to h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Từ đó ta có tập hợp nghiệm là $\{(a_0, a_1, a_2) = (4t, t, 0) = t(4, 1, 0), t \in \mathbb{R}\}$. Do đó $\text{Ker}f = \text{span}\{4 + x\}$ và $\dim \text{Ker}f = 1$.

**Lời giải**

c) Từ định lý về số chiều ta có: $\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$.

Mặt khác $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{(f(1), f(x), f(x^2))\}$. Ta viết ma trận tọa độ của hệ này theo hàng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & -12 & -4 & -8 \\ 5 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3-5h_1\to h_3]{h_2+4h_1\to h_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

Do đó cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là $\{(1+3x+x^2+2x^3), (8x+6x^2+11x^3)\}$.

# 2.2 Ma trận đồng dạng

## Ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với các cặp cơ sở khác nhau

Xét ánh xạ tuyến tính $f$ từ không gian véc tơ $n$ chiều $V$ tới không gian véc tơ $m$ chiều $W$. Giả sử $B_1, B_2$ là hai cơ sở của $V$ và $B_1', B_2'$ là hai cơ sở của $W$ với

$$B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, B_1' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

$$B_2 = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}, B_2' = \{w_1', w_2', \dots, w_m'\}$$

Giả sử $A_1, A_2$ lần lượt là ma trận của $f$ tương ứng với cặp cơ sở $B_1, B_1'$ và $B_2, B_2'$. Khi đó:

$$[f(v)]_{B_1'} = A_1[v]_{B_1}, [f(v)]_{B_2'} = A_2[v]_{B_2}$$

Gọi $P_1$ là các ma trận chuyển từ cơ sở $B_1$ sang $B_2$, $P_2$ là các ma trận chuyển từ cơ sở $B_1'$ sang $B_2'$. Theo tính chất của ma trận chuyển cơ sở:

$$[f(v)]_{B_1'} = P_2[f(v)]_{B_2'}, [v]_{B_1} = P_1[v]_{B_2}$$

# 2.2 Ma trận đồng dạng

Từ đó ta có:

$$A_1[v]_{B_1} = [f(v)]_{B'_1} = P_2[f(v)]_{B'_2} = P_2A_2[v]_{B_2} = P_2A_2P_1^{-1}[v]_{B_1}, \forall v \in V$$

Suy ra:

$$A_1 = P_2A_2P_1^{-1}$$

Khi $m = n$ và $V \equiv W$, và $B'_1 \equiv B_1, B'_2 \equiv B_2$ thì $P_2 \equiv P_1 := P$, ta có

$$A_1 = PA_2P^{-1}$$

với $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $B_1$ sang cơ sở $B_2$. Ta cũng có thể viết

$$A_2 = P^{-1}A_1P.$$

**Định nghĩa**

Giả sử $A$ và $B$ là hai ma trận vuông cùng cấp $n$. Ta nói $A$ và $B$ đồng dạng với nhau, kí hiệu $A \sim B$ nếu tồn tại một ma trận không suy biến $P$ sao cho $B = P^{-1}AP$

## 2.3 Ma trận của toán tử tuyến tính

Từ khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính cho phép chúng ta xây dựng khái niệm ma trận của toán tử tuyến tính, khi mà không gian nguồn và không gian đích trùng nhau.

**Định nghĩa**

Cho $T$ là một toán tử tuyến tính của không gian véc tơ $n$ chiều $V$. Giả sử $B$ là một cơ sở của $V$ với

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Ma trận $A$ tương ứng với "cặp" cơ sở $\{B, B\}$ được gọi là ma trận của $T$ đối cơ sở $B$.

**Nhận xét**

1 Ma trận của toán tử tuyến tính là ma trận vuông cỡ $n \times n$ thoả mãn tính chất

$$[T(v_i)]_B = A.[v_i]_B, \forall i = \overline{1, n}$$

2 Hai ma trận của một ánh xạ tuyến tính tương ứng với hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng.

# 2.4 Các phép toán

## Tổng của hai ánh xạ tuyến tính

Xét $V$ là không gian véc tơ $n$ chiều và $W$ là không gian véc tơ $m$ chiều trên $\mathbb{K}$. Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g : V \to W$. Nhắc lại *tổng* của hai ánh xạ này, ký hiệu $f + g$, là ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \forall u \in V.$$

## Mệnh đề

Nếu các ánh xạ tuyến tính $f, g$ có ma trận tương ứng là $A, B$ đối với cặp cơ sở nào đó của $V$, $W$ thì tổng $f + g$ có ma trận là $A + B$ đối với các cơ sở này.

Đối với tích $kf$ của số $k \in \mathbb{K}$ với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có

## Mệnh đề

Nếu ánh xạ tuyến tính $f$ có ma trận là $A$ đối với một cặp cơ sở của $V, W$ thì tích $kf$, với $k \in \mathbb{K}$, có ma trận là $kA$ đối với cặp cơ sở này.

# 2.4 Các phép toán

## Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Cho các ánh xạ tuyến tính xác định trên các không gian véc tơ hữu hạn chiều $V, W, Z$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

Khi đó dễ thấy hợp thành $g \circ f : V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

## Mệnh đề

Nếu các ánh xạ tuyến tính $f, g$ có ma trận tương ứng là $A, C$ đối với các cơ sở nào đó thì hợp thành $g \circ f$ có ma trận là $CA$ đối với các cơ sở này.

# 2.4 Các phép toán

## Ánh xạ ngược

Cho $V, W$ là hai không gian véc tơ có cùng số chiều. Ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ được gọi là *không suy biến* nếu ma trận của nó không suy biến.

## Mệnh đề

Ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ không suy biến khi và chỉ khi nó là một đẳng cấu. Hơn nữa, nếu đẳng cấu $f$ có ma trận $A$ đối với cặp cơ sở nào đó thì ánh xạ ngược $f^{-1}$ có ma trận là $A^{-1}$ đối với cặp cơ sở này.

# 3. TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

## Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm giá trị riêng, véc tơ riêng, ma trận chéo hoá được.
- Kỹ năng: Tìm được giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận và toán tử tuyến tính, đưa ma trận chéo hoá được về dạng chéo và thực hiện chéo hoá toán tử thông qua ma trận của nó.

## Nội dung

3.1 Định nghĩa

3.2 Chéo hoá ma trận

3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

# 3.1 Định nghĩa

Trong phần này ta sẽ luôn xét $V$ là không gian véc tơ $n$ chiều trên $\mathbb{K}$ và $f$ là toán tử tuyến tính trên $V$.

**Định nghĩa**

Số $\lambda \in \mathbb{K}$ được gọi là *giá trị riêng* hay *trị riêng* của $f$ nếu tồn tại véc tơ $u \neq \theta$ sao cho $f(u) = \lambda u$. Khi đó ta nói $u$ là *véc tơ riêng* ứng với giá trị riêng $\lambda$.

**Ví dụ**

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi: $f(x, y) = (y, x) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Ta có:

$$f(1; -1) = (-1; 1) = (-1).(1; -1)$$

nên $\lambda = -1$ là một giá trị riêng của $f$ và $(1; -1)$ là véc tơ riêng tương ứng với nó.

### Tính chất của véc tơ riêng và giá trị riêng

1. Véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính có giá trị riêng duy nhất.
2. Nếu $u$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ và $0 \neq k \in \mathbb{K}$ thì $ku$ cũng là vectơ riêng ứng với cùng giá trị riêng $\lambda$.
3. Nếu $u_1$, $u_2$ là hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính của toán tử tuyến tính $f$ với cùng một giá trị riêng $\lambda$ thì tổng $u_1 + u_2$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$.
4. Nếu $u_1, u_2, ..., u_s$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của toán tử tuyến tính $f$ với cùng một giá trị riêng $\lambda$ thì mọi tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các véc tơ này cũng là một véc tơ riêng với giá trị riêng $\lambda$.

### Nhận xét

Tập hợp gồm véc tơ không và mọi véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ của $f$ là một không gian con của $V$. Không gian này được gọi là *không gian con riêng ứng với giá trị riêng* $\lambda$ của $f$ . Kí hiệu là $V_\lambda$ hoặc $V_f(\lambda)$

# 3.1 Định nghĩa

### Mệnh đề

Nếu $u_1, u_2, ..., u_s$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của $f$ với giá trị riêng $\lambda_1$ và $v_1, v_2, ..., v_r$ là các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của $f$ với giá trị riêng $\lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ thì hệ

$$S = \{u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_r\}$$

là độc lập tuyến tính.

**Chứng minh** Thật vậy, giả sử ngược lại, hệ $S$ là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $k_1, ..., k_s, l_1, ..., l_r$ thuộc $\mathbb{K}$, không cùng bằng 0 tất cả sao cho

$$k_1u_1 + ... + k_su_s = l_1v_1 + ... + l_rv_r.$$

Nếu cả hai vế cùng bằng $\theta$ thì mọi $k_i, l_j$ cùng bằng $0$ theo giả thiết $\{u_1, u_2, ..., u_s\}$ và $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ độc lập tuyến tính. Bây giờ giả thiết rằng hai vế của đẳng thức trên khác $\theta$. Khi đó theo tính chất 4. vế trái là một véc tơ riêng của $f$ với giá trị riêng $\lambda_1$, và vế phải là một véc tơ riêng của $f$ với giá trị riêng $\lambda_2$. Điều này là trái với tính chất 1. Bởi vậy hệ $S$ là độc lập tuyến tính.

### Hệ quả

Nếu $f$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k (\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j, i, j = 1, \ldots k)$ và $u_1, u_2, \ldots u_k$ là $k$ véc tơ riêng tương ứng thì $u_1, u_2, \ldots u_k$ là độc lập tuyến tính.

# 3.1 Định nghĩa

**Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng**

Trong không gian véc tơ $n$ chiều $V$ chúng ta đã chọn một cơ sở $B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ và giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của toán tử tuyến tính $f$ đối với cơ sở này. Giả sử $\lambda$ là một giá trị riêng của $f$ và $u$ là một véc tơ riêng của nó. Khi đó $f(u) = \lambda u$. Ta có

$$[f(u)]_B = A[u]_B.$$

Do đó

$$A[u]_B = \lambda[u]_B.$$

Tương đương với

$$(A - \lambda I)[u]_B = 0 \tag{3}$$

trong đó $I$ là ma trận đơn vị. Giả sử $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tọa độ của $u$ đối với cơ sở $B$ và $X = [u]_B$ là toạ độ cột của $u$. Phương trình (3) trở thành

$$(A - \lambda I)X = 0. \tag{4}$$

### Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng

Phương trình ma trận này biểu diễn một hệ $n$ phương trình tuyến tính đẳng cấp $n$ ẩn

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & 0 \\ \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = & 0. \end{cases}$$

Nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức

$$|A-\lambda I| = 0 \tag{5}$$

Định thức $|A-\lambda I|$ là một đa thức bậc $n$ đối với $\lambda$. Nó được gọi là *đa thức đặc trưng của ma trận* $A$, hay *của toán tử tuyến tính* $f$.
Phương trình (5) được gọi là *phương trình đặc trưng của toán tử* $f$, và cũng được gọi là *phương trình đặc trưng của ma trận* $A$.

## 3.1 Định nghĩa

**Bài toán tìm véc tơ riêng và giá trị riêng**

Các nghiệm của phương trình (5) là các giá trị riêng của $f$, và cũng được gọi là các *giá trị riêng của ma trận* $A$. Với mỗi giá trị riêng $\lambda$ tìm được như là nghiệm của phương trình đặc trưng (5) chúng ta thay vào phương trình (4) để tìm vectơ riêng $u$.

**Định lý**

Số $\lambda \in \mathbb{K}$ là một giá trị riêng của $f$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng của phép biến đổi này.

**Nhận xét**

1. Đa thức đặc trưng là đa thức bậc $n$, tổng các nghiệm của đa thức (tính cả nghiệm phức nếu có) luôn bằng tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận. Đó cũng chính là tổng của các giá trị riêng thu được (tính cả giá trị riêng phức nếu có).
2. Các giá trị riêng của toán tử tuyến tính trong một $\mathbb{R}$-không gian véc tơ chỉ tính các nghiệm *thực* của phương trình đặc trưng.

# 3.1 Định nghĩa

**Các bước tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của toán tử tuyến tính**

**Bước 1.** Viết ma trận $A$ của $f$ theo một cơ sở $B$ của $V$.
**Bước 2.** Giải $|A - \lambda I| = 0$ tìm giá trị riêng.
**Bước 3.** Giải $(A - \lambda I)[u]_B = 0$ véc tơ riêng tương ứng với $\lambda$.

**Ví dụ**

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, x) = (-2y - 3z, -2x - 3z, 2x + 2y + 5z)$$

Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của $f$.

# 3.1 Định nghĩa

**Lời giải**

Ta có ma trận $A$ của $f$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng (5) của $f$ có dạng

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

# 3.1 Định nghĩa

## Lời giải

Sau khi tính định thức ở vế trái ta được

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda^2) - (4\lambda^2 - 4\lambda) + (4\lambda - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0.$$

Bởi vậy, phương trình đặc trưng có hai nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
Để tìm véc tơ riêng chúng ta giải hệ phương trình (4).

- Với $\lambda = 1$, hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

  Nghiệm của hệ là các véc tơ có tọa độ $\{(c, -c, c),\ c \in \mathbb{R}\}$. Từ đó ta có không gian con riêng $V_f(1) = \text{span}\{u_1 = (-1; -1; 1)\}$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$.
  Các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là: $\{t_1(-1; -1; 1), t \neq 0\}$.

# 3.1 Định nghĩa

**Lời giải**

- Với $\lambda = 2$, hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

  Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(3c, 3d, -2(c+d)),\ c, d \in \mathbb{R}\}$. Ta có không gian con riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $V_f(2) = \text{span}\{u_2(3; 0; -2), u_3(0; 3; -2)\}$, do đó các véc tơ riêng là: $\{t_2(3; 0; -2) + t_3(0; 3; -2), t_2^2 + t_3^2 \neq 0\}$.

# 3.2 Chéo hoá ma trận

## Định nghĩa

Cho $A$ là ma trận vuông cấp $n$. $A$ được gọi là **ma trận chéo hoá được** nếu nó đồng dạng với ma trận đường chéo, tức là tồn tại một ma trận không suy biến $P$ sao cho

$$P^{-1}AP = D$$

với $D$ là ma trận đường chéo.
Ma trận $P$ đưa $A$ về dạng chéo được gọi là **ma trận làm chéo hoá** ma trận $A$.

## Định lý

Cho $A, B$ là hai ma trận đồng dạng. Khi đó $A, B$ sẽ có cùng đa thức đặc trưng, và do đó có cùng các trị riêng.

**Chứng minh** Ta có tồn tại ma trận không suy biến $P$ sao cho:

$$B = P^{-1}AP$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| \\ &= |P^{-1}||(A - \lambda I||P| = |A - \lambda I| \end{aligned}$$

## 3.2 Chéo hoá ma trận

**Bổ đề**

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các trị riêng phân biệt của ma trận $A$ thì các véc tơ riêng $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tương ứng là độc lập tuyến tính.

**Định lý**

$A$ là chéo hoá được khi và chỉ khi $A$ có $n$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

**Chứng minh** Nếu $A$ đưa về dạng đường chéo nghĩa là tồn tại một ma trận $P$ sao cho

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} := D$$

Suy ra

$$AP = PD$$

## 3.2 Chéo hoá ma trận

Giả sử $P = (v_1 v_2 \dots v_n)$ với $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ là các véc tơ cột của $P$, ta có

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots Av_n = \lambda_n v_n.$$

Như vậy $A$ có $n$ véc tơ riêng là $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Ngược lại, giả sử $A$ có $n$ véc tơ riêng $\{u_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ với

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2, \dots Au_n = \lambda_n u_n.$$

Khi đó ta xây dựng ma trận $P$ có $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là các véc tơ cột

$$P = (u_1 u_2 \dots u_n)$$

Khi đó

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nên

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Như vậy $A$ chéo hoá được.

# 3.2 Chéo hoá ma trận

## Ví dụ

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Chéo hoá ma trận $A$.

**Lời giải**

Ta có $|A - \lambda I| = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$.
Với $\lambda_1 = 9$, hệ phương trình $(A - \lambda I)X = 0$ tương đương với phương trình

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Bởi vậy không gian con riêng ứng với $\lambda = 9$

$$V_A(9) = \{u = (c, -2c - 2d, d),\ c, d \in \mathbb{R}\} = \{u = c(1; -2; 0) + d(0; -2; 1),\ c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Ta được một cơ sở của không gian riêng con này là $u_1 = (1; -2; 0),\ u_2 = (0; -2; 1)$.
Với $\lambda_2 = -9$, hệ phương trình $(A - \lambda I)X = 0$ tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} -10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 - 16x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Bởi vậy không gian riêng ứng với $\lambda = -9$

$$V_A(-9) = \{v = (2t, t, 2t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{v = t(2;1;2),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Ta chọn một vectơ cơ sở của không gian riêng con này là $u_3 = (2, 1, 2)$.
Khi đó

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

thoả mãn

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

# 3.2 Chéo hoá ma trận

## Quy trình chéo hoá ma trận

**Bước 1.** Tìm các giá trị riêng của của ma trận $A$ từ việc giải phương trình đa thức

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**Bước 2.** Với mỗi giá trị riêng $\lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., s)$, tìm một cơ sở $B_i$ của không gian con riêng tương ứng là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - \lambda_i I)X = 0.$$

**Bước 3.** Lập $B$ là hợp các cơ sở $B_i$ vừa tìm được ở Bước 2 để thu được các véc tơ riêng. Nếu số véc tơ bằng $n$, giả sử $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, thiết lập ma trận chéo hóa $P$ với cột thứ $j$ là véc tơ $u_j$, $P = (u_1 u_2 \dots u_n)$.
Khi đó ma trận $P$ sẽ làm chéo hoá ma trận $A$, hơn nữa

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

trong đó $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các trị riêng ứng với véc tơ riêng $u_i$.
Nếu số véc tơ trong $B$ nhỏ hơn $n$, kết luận ma trận $A$ không chéo hoá được.

# 3.2 Chéo hoá ma trận

Ta sẽ chỉ ra rằng có những ma trận không đưa được về dạng chéo.

**Ví dụ**

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$, nên ma trận chỉ có một giá trị riêng là $\lambda = 1$. Tuy nhiên với $\lambda = 1$ hệ phương trình xác định các vectơ riêng là

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 = 0. \end{cases}$$

Do đó nghiệm của hệ có dạng $(0, c, 0),\ c \in \mathbb{R}$. Như vậy, không gian nghiệm của hệ này là một chiều nên hệ vectơ riêng độc lập tuyến tính chỉ gồm một vectơ, do đó $A$ không thể đưa về dạng chéo.

# 3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Cho $V$ là không gian véc tơ trên $K$ và $f$ là toán tử tuyến tính trong $V$. Ta đã biết ma trận của $f$ tương ứng với các cơ sở khác nhau của $V$ là đồng dạng với nhau. Vậy có tồn tại cơ sở của $V$ để ma trận của $f$ tương ứng với cơ sở đó có dạng chéo?

**Định nghĩa**

Cho $V$ là không gian véc tơ trên $K$ và $f$ là toán tử tuyến tính trong $V$. $f$ được gọi là chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở $B$ của $V$ để cho ma trận của $f$ tương ứng với cơ sở đó là ma trận chéo. Quá trình tìm cơ sở $B$ được gọi là quá trình chéo hoá $f$.

**Định lý**

Cho $f$ là toán tử tuyến tính trong không gian véc tơ $V$. Các khẳng định sau là tương đương:

1. $f$ chéo hóa được
2. $f$ có $n$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính
3. Tồn tại một cơ sở của $V$ gồm những vectơ riêng của $f$.

# 3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

## Quy trình chéo hoá toán tử tuyến tính

**Bước 1.** Chọn một cơ sở $E$ tuỳ ý của $V$ (thường là cơ sở chính tắc). Tìm ma trận $A$ của $f$ đối với $B$.
**Bước 2.** Chéo hoá ma trận $A$. Nếu $A$ không chéo hoá được thì $f$ không chéo hoá được (không tồn tại cơ sở $B$ của $V$ để ma trận của $f$ đối với $B$ là ma trận chéo). Nếu $A$ chéo hoá được chuyển sang bước 3.
**Bước 3.** Giả sử $P$ là ma trận làm chéo hoá $A$. Xét cơ sở $B$ của $V$ sao cho $P$ là ma trận chuyển từ cơ sở $E$ sang $B$. Khi đó ma trận của $f$ đối với $B$ là $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

## Ví dụ

Cho toán tử tuyến tính $f$ trong $\mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Chéo hoá toán tử tuyến tính $f$.

## 3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Ta có:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)=0.$$

Vậy các giá trị riêng của $A$ là : $\lambda=1, \lambda=2, \lambda=4$.
Để tìm véc tơ riêng ta giải hệ phương trình (4).
Với $\lambda=1$, hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ \qquad -3x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ $\{(-5t,t,3t),\ t\in\mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con một chiều mà cơ sở là véc tơ $u_1$ có tọa độ $(-5;1;3)$.

# 3.3 Chéo hoá toán tử tuyến tính

Với $\lambda = 2$, hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(0, t, -t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con có cơ sở là vectơ: $u_2(0; 1; -1)$.

Với $\lambda = 4$, hệ phương trình (4) có dạng

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là các vectơ có tọa độ là $\{(0, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Chúng lập thành một không gian con có cơ sở là vectơ: $u_3(0; 1; 1)$.

Ta có $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm những véc tơ riêng của $f$. Khi đó đối với cơ sở này ma trận của $f$ có dạng:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$