BÀI 15

PHÂN TÍCH PHỔ CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC

TS. Nguyễn Hồng Quang
PGS. TS. Trịnh Văn Loan
TS. Đoàn Phong Tùng
Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

1. Phân tích phổ của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn.
2. Phép biến đổi Fourier rời rạc DFT.
3. Phép biến đổi Fourier nhanh FFT.

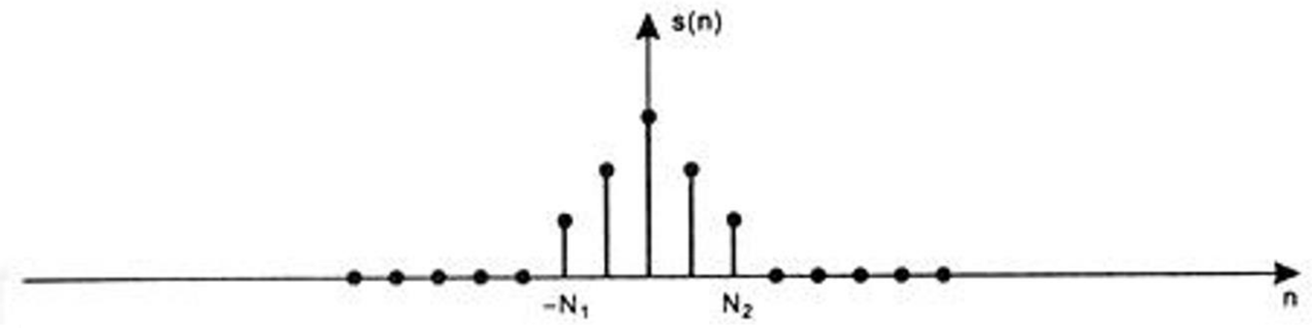
❑ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Phương pháp phân tích phổ của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn.
- Phương pháp tính biến đổi Fourier rời rạc.
- Phương pháp tính biến đổi Fourier nhanh.

1. Phân tích phổ của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn

- Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn:



DTFT: $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

IDTFT: $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{-j\omega n}d\omega$

$$X(e^{j\omega}) = R(\omega).e^{j.\varphi(\omega)}$$

$|X(\omega)|$: phổ biên độ (magnitude spectrum)

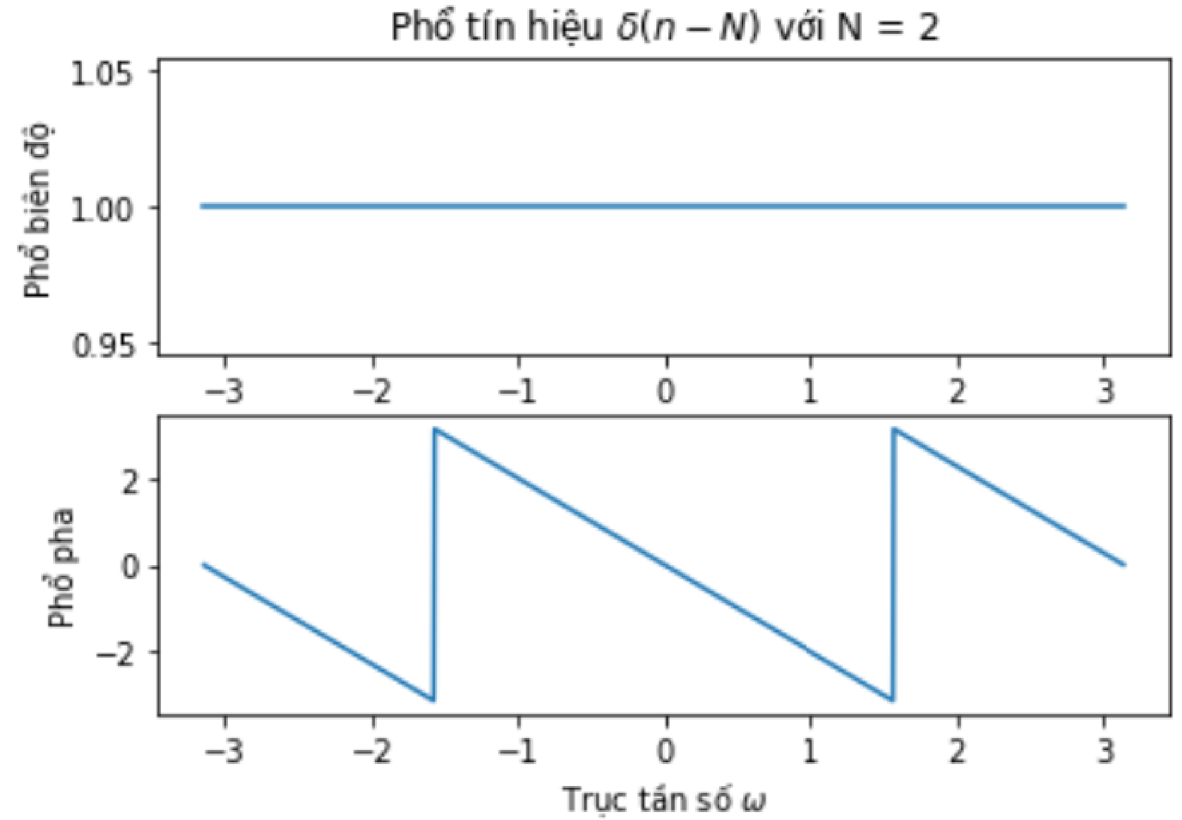
$$R(\omega) = |X(e^{j\omega})| \geq 0$$

$\Theta(\omega) = \measuredangle X(\omega)$: phổ pha (phase spectrum)

$$-\pi \leq \varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] \leq \pi$$

Ví dụ: $x(n) = \delta(n-2)$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \Longrightarrow \quad X(\omega) = e^{-j2\omega}$$

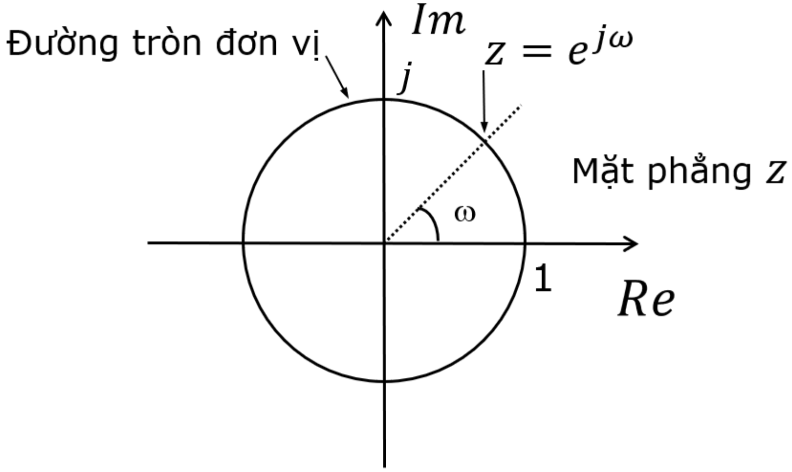


Mối quan hệ giữa phép biến đổi Fourier và phép biến đổi Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad \text{ROC}: r_2 < |z| < r_1$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \equiv X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Biến đổi z trở thành biến đổi Fourier khi biên độ của biến z bằng 1, tức là trên đường tròn có bán kính bằng 1 trong mặt phẳng z.



- Đường tròn này được gọi là đường tròn đơn vị.

Phổ mật độ năng lượng

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

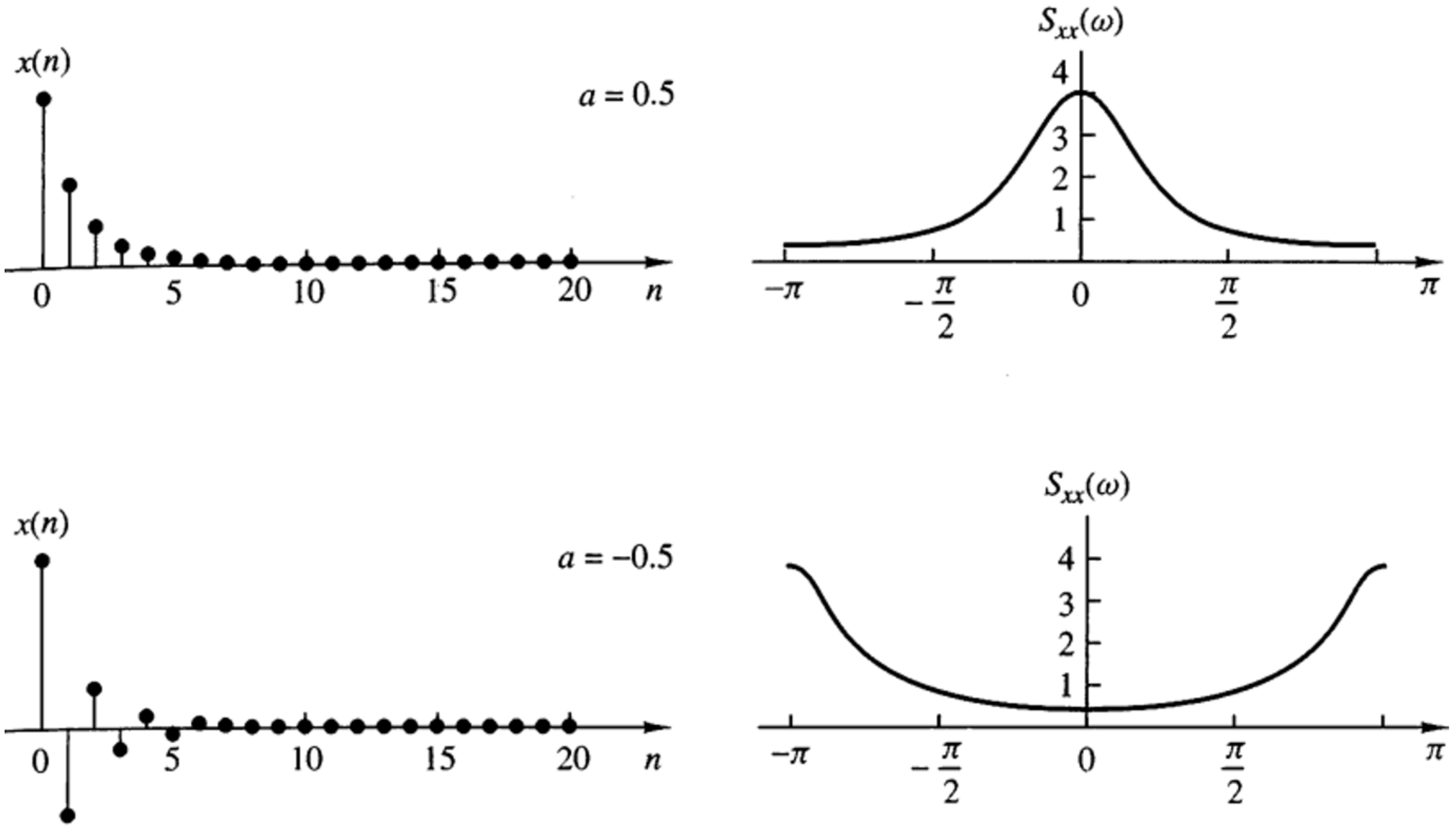
- Phổ mật độ năng lượng: $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$
- Khi x(n) thực: $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$
- Ví dụ: Xác định và vẽ phổ mật độ năng lượng của tín hiệu:

$x(n) = a^n.u(n)$, $-1<a<1$, với $a = 0.5$ và $a = -0.5$

$$\Rightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$$

Ví dụ



Tín hiệu $0.5^n u(n), (-0,5)^n u(n)$ và phổ mật độ năng lượng

Một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

- Tính tuyến tính: $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
- Tính tuần hoàn: $X(e^{j\omega})$ tuần hoàn chu kỳ 2π, $X(f)$ tuần hoàn chu kỳ là 1
- Phép trễ

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

$$x(n-n_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

$$\mathcal{F}\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

- Nhận xét: Tín hiệu trễ có phổ biên độ không thay đổi còn phổ pha dịch đi 1 lượng ωn_0

- Tổng chập: $y(n) = x(n) * h(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).H(e^{j\omega})$

2. Phép biến đổi Fourier rời rạc DFT

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- DTFT: Tần số ω liên tục, $X(\omega)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Với $x(n)$ chiều dài hữu hạn : $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.
- Rời rạc N tần số $\omega \rightarrow \omega_k = k2\pi/N$

$\Longrightarrow$ DFT (Discrete Fourier Transform): biến đổi Fourier của dãy có độ dài hữu hạn theo tần số rời rạc, gọi tắt là biến đổi Fourier rời rạc

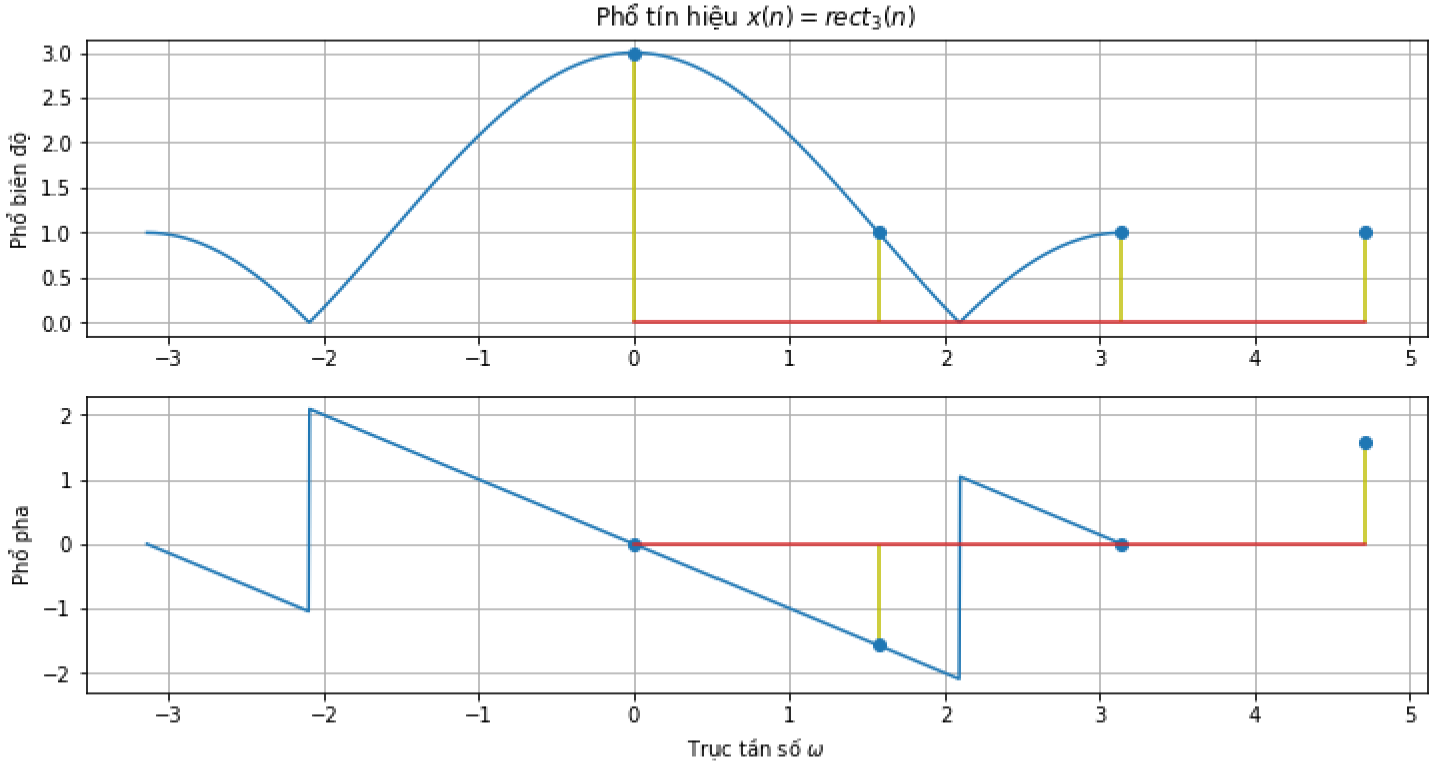
- Biến đổi thuận (phân tích), biến đổi ngược (tổng hợp)

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{k còn lại} \end{cases} \qquad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{k còn lại} \end{cases}$$

- Phân tích DFT với $N = 4$ của $x(n) = rect_3(n)$.
- $X(k) = [3, -j, 1, j]$
- Mối quan hệ với DTFT:



3. Phép biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

(FFT: Fast Fourier Transform)

- Tính trực tiếp DFT cần N^2 phép nhân số phức và $N(N-1)$ phép cộng số phức.
- Thuật giải FFT: phân tích DFT của dãy N số lần lượt thành DFT của các dãy nhỏ hơn
- Điều kiện áp dụng thuật giải: $N = 2^M$
- Số lượng phép toán giảm xuống còn $N \log_2 N$

FFT phân chia theo thời gian

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \text{với} \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad \text{và} \quad 0 \le k \le N-1$$

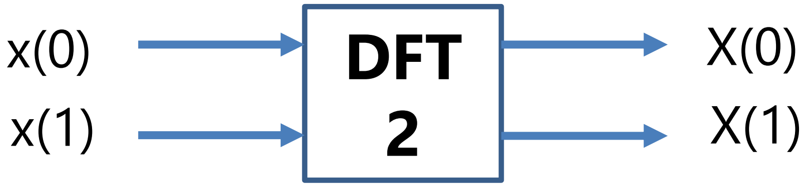
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0,2,4\ldots}^{N-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

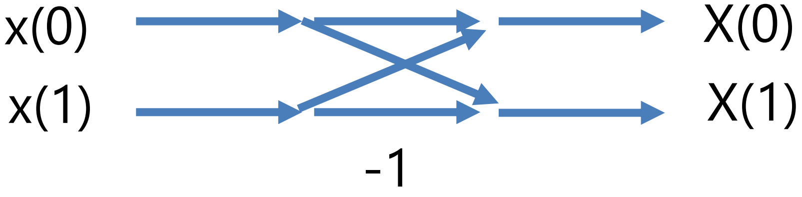
- Thay $n = 2r$ (n chẵn) và $n = 2r + 1$ (n lẻ):

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} x(2r)W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}$$

$$X(k) = X_0(k) + W_N^k . X_1(k)$$

- Ví dụ với N = 2





$$X(0) = X_0(0) + W_2^0 . X_1(0) = x(0) + x(1)$$

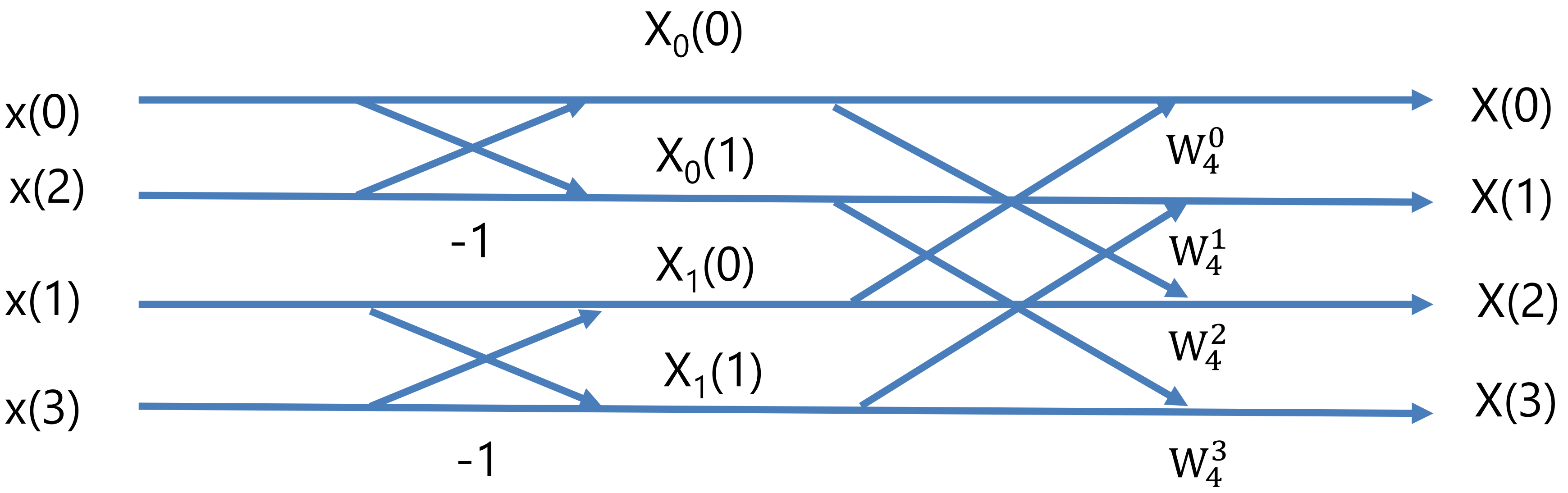
$$X(1) = X_0(1) + W_2^1 . X_1(1) = x(0) - x(1)$$

Ví dụ với N = 4:

$$X(k) = X_0(k) + W_N^k.X_1(k)$$

Đảo bit

0	00	00	0
1	01	10	2
2	10	01	1
3	11	11	3



$$X_0(0) = x(0) + x(2) \qquad X(0) = X_0(0) + W_4^0.X_1(0) = X_0(0) + X_1(0)$$

$$X_0(1) = x(0) - x(2) \qquad X(1) = X_0(1) + W_4^1.X_1(1) = X_0(0) - j.X_1(0)$$

$$X_1(0) = x(1) + x(3) \qquad X(2) = X_0(2) + W_4^2.X_1(2) = X_0(0) - X_1(0)$$

$$X_1(1) = x(1) - x(3) \qquad X(3) = X_0(3) + W_4^3.X_1(3) = X_0(0) + j.X_1(0)$$

4. Tổng kết

- Phép biến đổi Fourier thời gian rời rạc chuyển đổi tín hiệu rời rạc không tuần hoàn có năng lượng hữu hạn sang miền tần số với tần số liên tục.
- Phép biến đổi Fourier rời rạc sử dụng để biểu diễn miền tần số với tần số rời rạc.
- Giải thuật Fourier nhanh cho phép thực hiện biến đổi Fourier rời rạc một cách nhanh chóng.

Bài tập về nhà

- Tín hiệu $x(n) = rect_3(n)$

  a. Hãy tính và vẽ phổ rời rạc của tín hiệu này bằng giải thuật FFT với $N = 4$

  b. Hãy tính và vẽ phổ rời rạc của tín hiệu này bằng giải thuật FFT với $N = 8$

  c. Hãy tính và vẽ phổ của $x(n)$ bằng phép biến đổi DTFT, từ đó so sánh kết quả của câu a và b với kết quả của câu c và đưa ra nhận xét mối quan hệ giữa các phổ này.

Bài học tiếp theo. BÀI 16

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN TẦN SỐ

Tài liệu tham khảo:

- ***Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.***
- ***J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.***

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!