Ánh xạ tuyến tính

Câu 1.

i) Lấy $u = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow f(u) = (-z_1, y_1, -x_1)$

$v = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow f(v) = (-z_2, y_2, -x_2)$

$\Rightarrow f(u) + f(v) = (-z_1, y_1, -x_1) + (-z_2, y_2, -x_2) = (-(z_1 + z_2), (y_1 + y_2), -(x_1 + x_2))(1)$

$u + v = ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (z_1 + z_2) \Rightarrow f(u + v) = (-(z_1 + z_2), (y_1 + y_2), -(x_1 + x_2))(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $f(u) + f(v) = f(u + v)$

ii) Lấy $u = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow ku = (kx_0, ky_0, kz_0)$

$f(ku) = (-kz_0, ky_0, -kx_0) = k(-z_0, y_0, -x_0) = kf(u)$

Vậy ánh xạ $f(x, y, z)$ là ánh xạ tuyến tính

Câu 2.

Giả sử tồn tại ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ Ta có: $2 * f(1, 1, 1) = f(2, 2, 2) = (6, 8, 4)$

Xét $u_1 = (0, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0) \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = (2, 2, 2)$

Ta có: $f(u1) + f(u2) + f(u3) = (4, 2, 0) \neq f(2, 2, 2) = f(u_1 + u_2 + u_3)$

Vậy không tồn tại ánh xạ tuyến tính thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 3.

a) Xét hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $E = e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)$

Khi đó: $f(e_1) = (3, 2); f(e_2) = (1, 0); f(e_3) = (-1, 1)$

Vì $\mathbb{R}^3 = span(e_1, e_2, e_3) \Rightarrow Imf = spanf(e_1), f(e_2), f(e_3)$

Xét ma trận tọa độ theo hàng của $f(v) : A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$r(A) = 2 = dimImf$ Và Imf có 1 cơ sở là $(1, 0), (0, 1)$

b) Gọi $x(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. $x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = -2t \end{cases} \Rightarrow x = t(-1, 1, 2) \Rightarrow x = span(-1, 1, 2)$$

$\Rightarrow dimKerf = dimspan(-1, 1, -2) = 1$ và $Kerf$ có một cơ sở là $(-1, 1, -2)$

Câu 4.

a) Xét hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là $E = e_1(1, 0, 0, 0), e_2(0, 1, 0, 0), e_3(0, 0, 1, 0), e_4(0, 0, 0, 1$

Khi đó: $f(e_1) = (1, 1, 1); f(e_2) = (-1, 0, 1); f(e_3) = (1, 2, 3), f(e_4) = (1, -1, -3)$

Vì $\mathbb{R}^4 = span(e_1, e_2, e_3, e_4) \Rightarrow Imf = span(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$

Xét ma trận tọa độ theo hàng của $f(v) : A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 2 = dimImf$ Và Imf có 1 cơ sở là $(1, 1, 1), (0, 1, 2)$

b) Gọi $u(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. $x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x-2z+t=0 \\ x+y+3z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2b-a \\ y=3b \\ z=b \\ t=a \end{cases}$

$\Rightarrow x=a(-1,0,0,1)+b(2,3,1,0) \Rightarrow x=span(-1,0,0,1),(2,3,1,0)$

$\Rightarrow dimKerf = dimspan(-1,0,0,1),(2,3,1,0)=2$ và $Kerf$ có một cơ sở là $(-1,0,0,1),(2,3,1,0)$

Câu 5.

a) Gọi $u_3=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-5 \\ \lambda_2=3 \end{cases}$

Ta có $u_3=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \to f(u_3)=\lambda_1 f(u_1)+\lambda_2 f(u_2)=5(1,1,2)+3(4,2,1)=(7,-1,7)$

b) Gọi $u=(x,y)$, ta có: $u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 5 & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-5x+3y \\ \lambda_2=2x-y \end{cases}$

Ta có $u_3=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \to f(u_3)=\lambda_1 f(u_1)+\lambda_2 f(u_2)=(-5x+3y)(1,1,2)+(2x-y)(4,2,1)$

$=(-5x+3y,-5x+3y,-10x+6y)+(8x-4y,4x-2y,2x-y)=(3x-y,-x+y,-8x+5y)$

Vậy biểu thức của ánh xạ tuyến tính là: $f(x,y)=(3x-y,-x+y,-8x+5y)$

Câu 6.

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $E=(e_1=(1,0);e_2=(0,1))$

$f(e_1)=(1,1); \quad f(e_2)=(1,-1)$

$f(e_1)=v_1 \Rightarrow [f(e_1)]_B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f(e_2)=c_1(1,1)+c_2(1,0) \Rightarrow \begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=2 \end{cases} \Rightarrow [f(e_2)]_B=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 7 Gọi $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$.

$f(v_1)=f(3,1)=(3a+b,3c+d); \quad f(v_2)=f(1,2)=(a+2b,c+2d)$

$[f(v_1)]_F=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow f(v_1)=3v_1+v_2=3(3,1)+(1,2)=(10,5) \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=10 \\ 3c+d=5 \end{cases} \quad (1)$

$[f(v_2)]_F=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow f(v_1)=v_1+2v_2=(3,1)+2(1,2)=(5,5) \Rightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ c+2d=5 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=10 \\ 3c+d=5 \\ a+2b=5 \\ c+2d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=2 \end{cases}$

Vậy biểu thức $f(x,y)=(3x+y,x+2y)$

Câu 8

a) Gọi $T(x,y)=ax+by$

Ta có: $\begin{cases} T(1,1) = a + b = 3 \\ T(0,1) = b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Công thức của $T(x,y) = 5x - 2y$

b) $T(2,8) = 2*5 - 2*8 = -6$

c) Xét $u_1 = (x_1, y_1)$ và $u_2 = (x_2, y_2)$ với $u_1 \neq u_2$

$\Rightarrow T(u_1) = 5x_1 - 2y_1;\ T(u_2) = 5x_2 - 2y_2$

Xét $T(u_1) - T(u_2) = 0 \Rightarrow 5(x_1 - x_2) - 2(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \dfrac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \exists (u_1, u_2)$ để $T(u_1) = T(u_2)$

$\Rightarrow T$ không phải là đơn ánh $\Rightarrow$ ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ không phải là đơn cấu

Câu 9.

Gọi $E = (e_1, e_2, e_3)$ là hệ cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ với $e_1 = 1; e_2 = x; e_3 = x^2$

Ta có: $f(e_1) = 1 + 2x + 3x^2; f(e_2) = -3 + x - 2x^2; f(e_3) = 1 - 2x - x^2$

Xét ma trận tọa độ của $f(P)$ theo hệ cơ sở chính tắc: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Để $p = 1 - mx + 2x^2 \in Imf \Rightarrow p \in span(f(P)) \Rightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -m \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -m-2 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -m-1 \end{array}\right]$$

Để hệ có nghiệm thì $-m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 10.

f đẳng cấu $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ đơn cấu} \Rightarrow det(A) \neq 0 \\ f \text{ toàn cấu} \Rightarrow r(f) = r(A) = dim\mathbb{R}^3 = 3 \end{cases}$

Từ đề bài suy ra được ma trận A của f theo hệ cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}\right) \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & m-1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix}\right)$$

$r(A) = 3 \Rightarrow m \neq -1$

Giá trị riêng, vécto riêng, chéo hoá ma trận

Câu 1:

Xét $det(A - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (3-\lambda)(5-\lambda) - (-1)(-3) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 6 \end{array}\right.$

$$+TH1:\lambda=2\Rightarrow\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -3 & 5-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -3x_1+3x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=t$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$+TH2:\lambda=6\Rightarrow\begin{pmatrix}3-6 & -1\\ -3 & 5-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3x_1-x_2=0\\ -3x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=t;x_2=-3t$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}$$

Câu 2:

Theo câu 1 , ta tìm được 2 giá trị riêng là $\lambda=2;\lambda=6$

Ta tìm được 2 véctơ riêng là $v_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ và $v_2=\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}$ Như vậy, đã tìm được đủ 2 véctơ riêng độc lập tuyến tính ,do đó ma trận T làm chéo hoá A là:

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Khi đó ta có : $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

Câu 3:

Từ câu 2, ta có: $T^{-1}AT=B$ với $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A=T^{-1}BT$$

$$\Rightarrow A^{2020}=T^{-1}BT*T^{-1}BT*...*T^{-1}BT$$

$$=T^{-1}*B*(T*T^{-1})*B*....*(T*T^{-1})*B*T$$

$$=T^{-1}*B*B*....*B*T$$

$$=T^{-1}B^{2020}T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2020} & 0\\ 0 & 6^{2020}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}*2^{2020}+\frac{1}{4}*6^{2020} & \frac{3}{4}*2^{2020}-\frac{3}{4}*6^{2020}\\ \frac{1}{4}*2^{2020}-\frac{1}{4}*6^{2020} & \frac{1}{4}*2^{2020}+\frac{3}{4}*6^{2020}\end{pmatrix}$$

Câu 4: Ta đi chéo hoá ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$

Xét $det(A-\lambda E)=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 7) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 7 \end{array}\right.$$

$$+TH1 : \lambda = 7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$+TH2 : \lambda = 7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$+TH3 : \lambda = 7 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Do đó :$T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Do đó T là ma trận chuyển từ cơ sở$B = (1, x, x^2)$ sang cơ sở C

$\Rightarrow$ cơ sở C cần tìm là : $C = (-3 + x^2, -3x + 2x^2, x + 2x^2)$

Câu 5: Gọi ma trận A là ma trận biến đổi của f

$\Rightarrow$ ma trận A^2 là ma trận biến đổi của f^2

Vì f^2 có giá trị riêng $\lambda^2 \Rightarrow det(A^2 - \lambda^2 E) = 0$

$\Rightarrow det(A - \lambda E) * det(A + \lambda E) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} det(A - \lambda E) = 0 \\ det(A + \lambda E) = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \lambda$ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Ánh xạ tuyến tính + Chéo hóa ma trận

Câu 1: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $\forall u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, f(u) = (x + z; y; x + z)$.

a) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tính hạng của f.

c) Xác định ma trận A của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

d) Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận P làm chéo hóa A

Giải:

a) i) Lấy $u=(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow f(u)=(x_1+z_1,y_1,x_1+z_1)$

$v=(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow f(v)=(x_2+z_2,y_2,x_2+z_2)$

$\Rightarrow f(u)+f(v)=(x_1+z_1,y_1,x_1+z_1)+(x_2+z_2,y_2,x_2+z_2)$

$=(x_1+x_2+z_1+z_2,y_1+y_2,x_1+x_2+z_1+z_2)=f(u+v)$

$\Rightarrow f(u)+f(v)=f(u+v)$

ii) Lấy $u=(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow ku=(kx_0,ky_0,kz_0)$

$f(ku)=(k(x_0+z_0),ky_0,k(x_0+z_0))=k(x_0+z_0,y_0,x_0+z_0)=kf(u)$

Vậy ánh xạ $f(x,y,z)$ là ánh xạ tuyến tính

b)c) Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E=\{e_1=(1;0;0),e_2=(0;1;0),e_3=(0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1)=(1;0;1) \\ f(e_2)=(0;1;0) \\ f(e_3)=(1;0;1) \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(A)=rank(f)=2$$

d)Xét $det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)\big((1-\lambda)^2-1\big)$

$det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \lambda=1,\lambda=2,\lambda=0 \Rightarrow A$ chéo hóa được

+) vecto riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1=0$ có dạng $v_1=[x \quad 0 \quad -x]^T, x\in\mathbb{R}$

+) vecto riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2=1$ có dạng $v_2=[0 \quad y \quad 0]^T, y\in\mathbb{R}$

+) vecto riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_3=2$ có dạng $v_3=[z \quad 0 \quad z]^T, x\in\mathbb{R}$

Ma trận $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa ma trận A và $D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 2: Tìm cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2+x_3,x_1+2x_2+x_3,x_1+x_2+2x_3)$

Giải: Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Xét $det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^3+1+1-3(2-\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & =4 \\ \lambda_2 & =1 \end{cases}$

+) Với $\lambda_1=4$, Xét $(A-4E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Chọn vector riêng ứng với trị riêng λ_1 là $v_1=[1;1;1]^T$

+)Với $\lambda_2 = 1$, xét $(A - 2E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = t \qquad\qquad u, t \in \mathbb{R} \\ x_3 = u - t \end{cases}$

Chọn vecto riêng ứng với trị riêng λ_2 là $v_2 = [1; 0; 1]^T$ và $v_3 = [0; 1; -1]^T$

3 vector v_1, v_2, v_3 độc lập tuyến tính nên A có chéo hoá được.

Câu 3: Ánh xạ tuyến tính: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_2 + x_3, 2x_2 + 3x_3)$ có chéo hóa được k?

Giải:

Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\}$ của $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1; 0; 0) \\ f(e_2) = (1; 2; 2) \\ f(e_3) = (1; 1; 3) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Xét $det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).\big((2-\lambda).(3-\lambda) - 2\big)$

$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$(bội 2)

+)Với $\lambda_1 = 4$, xét $(A - \lambda_1.I).x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$

Ta giải hệ bằng Phép khử Gauss: ta được nghiệm $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Chọn $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ làm các vecto riêng ứng với $\lambda = 1$

+) Tương tự với $\lambda = 4$ ta tìm được $x = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Chọn $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ làm vecto riêng ứng với $\lambda = 4$

+) Suy ra ma trận A có 3 vecto riêng $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được

Câu 4: Cho ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại ma trận A_{nxn} của ánh xạ T đối với 1 cặp cơ sở nào đó. Hỏi, nếu ma trận A có n giá trị riêng phân biệt thì A có chéo hóa được không?

Giải:

Gọi n trị riêng phân biệt của A là $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ và giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là n vecto riêng tương ứng.

Ta sẽ chứng minh hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính $(*)$ bằng phương pháp quy nạp:

+) Với $n = 1$ hiển nhiên hệ $\{v_1\}$ độc lập tuyến tính vì $\{v_1\} \neq 0$

+) Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, nghĩa là k vecto riêng phân biệt sẽ độc lập tuyến tính. Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Thật vậy: giả sử $t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_kv_k + t_{k+1}v_{k+1} = 0, t_i \in K(1)$.

$\Rightarrow A.\big(t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_kv_k + t_{k+1}v_{k+1}\big) = A.0 = 0$

$\Rightarrow t_1\lambda_1v_1 + t_2\lambda_2v_2 + ... + t_k\lambda_kv_k + t_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1} = 0(2)$

Ta nhân 2 vế của hệ thức (1) với $(-\lambda_{k+1})$ cộng vào (2), ta được:

$t_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + t_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + ... + t_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$

Theo giả thiết quy nạp, hệ $v_1, v_2, ..., v_k$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow t_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0, \quad i = \bar{1,k}$

Vì $\lambda_i \neq \lambda_{k+1} \Rightarrow t_i = 0, \quad i = \bar{1,k}$.

Thay $t_i = 0, \quad i = \bar{1,k}$ vào hệ thức (1) ta được $t_{k+1}vk + 1 = 0 \Rightarrow t_{k+1} = 0$

$\Rightarrow$ hệ $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tức $(*)$ đúng với $n = k + 1 \Rightarrow (*)$ đúng với $\forall n$

Vậy $(*)$ được chứng minh, tức hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính

Do đó ma trận A chéo hóa được.

Câu 5: Cho λ là trị riêng của toán tử tuyến tính T. Chứng minh rằng, với mọi đa thức $f(t)$, ta đều có $f(\lambda)$ là trị riêng của $f(T)$.

Giải:

+) Mệnh đề 1: Nếu A là ma trận biến đổi của f, thì A^k cũng là ma trận biến đổi của f^k

+) Mệnh đề 2: Nếu λ là giá trị riêng của ma trận A thì λ^k cũng là giá trị riêng của ma trận $A^k, \forall k \geq 2$.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề 1 bằng phương pháp quy nạp

Với $k = 2$, ta có

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP