Chương 1: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Tháng 3, 2021

Nội dung

1.1.1. Vectơ pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến

Bài toán:

Trong hệ tọa độ Descartes Oxy, cho đường cong L và một điểm $M \in L$. Tìm phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến của đường cong L tại điểm M.

Nhắc lại: Nếu L cho bởi $y = f(x)$ và $M(x_0, y_0) \in L$, thì phương trình tiếp tuyến của L tại M là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Đường cong cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ (cho một cách ẩn)

Định nghĩa (Điểm chính quy)

Cho đường cong L xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm riêng $F'_x(M), F'_y(M)$ không đồng thời bằng 0.

(Giả sử $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của M.) Vì $M(x_0, y_0)$ chính quy, nên ta có thể giả sử $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó theo định lý về hàm ẩn, phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trong một lân cận của x_0 và $f(x_0) = y_0$. Hơn nữa $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Phương trình tiếp tuyến của L là $M(x_0, y_0)$ là

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

hay tương đương

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Vectơ pháp tuyến của L tại M là $n = (F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$. Phương trình pháp tuyến của L tại M là

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Trường hợp đường cong cho bởi phương trình tham số

Điểm chính quy

Cho đường cong L xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Điểm $M(x(t_0), y(t_0)) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.

Phương trình tiếp tuyến của L là $M(x(t_0), y(t_0))$ là

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Vec tơ chỉ phương của tiếp tuyến của L tại M là $(x'(t_0), y'(t_0))$.
Vectơ pháp tuyến của L tại M là $n = (-y'(t_0), x'(t_0))$.
Phương trình pháp tuyến của L tại M là

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Ví dụ

(GK20192)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $x^3 + y^3 = 9xy$ tại điểm $(2, 4)$.

Giải: $x^3 + y^3 = 9xy \Leftrightarrow F(x, y) := x^3 + y^3 - 9xy$.
$F'_x(x, y) = 3x^2 - 9y$ và $F'_y(x, y) = 3y^2 - 9x$.
Tại điểm $(2, 4)$:
$F'_x(2, 4) = 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 4 = -24$, $F'_y(2, 4) = 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 30$.
Phương trình tiếp tuyến của đường cong lại tại (2,4):

$$-24(x - 2) + 30(y - 4) = 0 \text{ hay } 4x - 5y + 12 = 0.$$

Phương trình pháp tuyến của đường cong lại tại (2,4):

$$\frac{x - 2}{-24} = \frac{y - 4}{30} \text{ hay } 5x + 4y - 26 = 0.$$

(GK20181)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường $x = (t^2 - 1)e^{2t}$, $y = (t^2 + 1)e^{3t}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

Giải: Với $t = 0$, điểm tương ứng $M(-1, 1)$.
$x' = 2te^{2t} + 2(t^2 - 1)e^{2t}$, $y' = 2te^{3t} + 3(t^2 + 1)e^{3t}$.
Với $t = 0$: $x' = -2$, $y' = 3$.
Phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} \text{ hay } 3x + 2y + 1 = 0.$$

Phương trình pháp tuyến

$$-2(x+1) + 3(y-1) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + 5 = 0$$

1.1.2. Độ cong: Định nghĩa

L đường cong đơn, có tiếp tuyến tại mọi điểm. Trên L chọn một chiều dương. Trên tiếp tuyến của L tại M, chọn một hướng ứng với hướng dương của L, gọi là tiếp tuyến dương.
Cho M, M' là hai điểm trên L, và $MT, M'T'$ là hai tiếp tuyến dương. Ta gọi độ cong trung bình, ký hiệu $C_{tb}(\widehat{MM'})$ của cung $\widehat{MM'}$ là tỉ số giữa góc α của hai tiếp tuyến tuyến dương $MT, M'T'$ và độ dài cung $\widehat{MM'}$:

$$C_{tb}(\widehat{MM'}) = \frac{\alpha}{\widehat{MM'}}.$$

Độ cong của L tại M, ký hiệu $C(M)$ là giới hạn (nếu có)

$$C(M) = \lim_{M' \to M} C_{tb}(\widehat{MM'}).$$

Ví dụ

Độ cong của đường thẳng tại mọi điểm đều bằng 0.

Ví dụ

Độ cong của đường tròn bán kính R tại mọi điểm đều bằng $1/R$.

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình $y = f(x)$ và $M(x, y)$ thuộc L. Gọi φ (tương ứng, $\varphi + \Delta\varphi$) là góc của MT (tương ứng, $M'T'$) với trục hoành. Khi M di chuyển đến M', tiếp tuyến quay được một góc $|\Delta\varphi|$, và độ dài cung $\widehat{MM'}$ bằng $|\Delta s|$, và

$$C(M) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

Vì $\tan\varphi = y'$, nên $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{y''}{1 + y'^2}$.

Mặt khác $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$. Vậy

$$C(M) = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \left| \frac{d\varphi/dx}{ds/dx} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$. Khi đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ và $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$.
Ta được

$$\boxed{C(M) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.}$$

Độ cong: công thức

Đường cong L cho bởi phương trình phương trình trong tọa độ cực $r = f(\varphi)$. Khi đó $x = f(\varphi)\cos\varphi$ và $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Ta có

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad & x'' &= r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi \\ y' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi, \quad & y'' &= r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Ta được

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Ví dụ

(GK2021)

Tính độ cong của đường $y = x^3 + x$ tại $M(1.2)$.

Giải: $y' = 3x^2 + 1$, $y'' = 6x$. Tại $M(1,2)$: $y' = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$, $y'' = 6$. Độ cong của đường tại $M(1,2)$ là

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|6|}{(1 + 4^2)^{3/2}} = \frac{6}{17\sqrt{17}}.$$

(GK 20192)

Tính độ cong của đường $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, tại điểm ứng với $t = -\pi/2$.

Giải: $x' = 2(1 - \cos t)$, $x'' = 2\sin t$, $y' = 2\sin t$, $y'' = 2\cos t$.
Tại $t = -\pi/2$: $x' = 2(1 - \cos(-\pi/2)) = 2$, $x'' = 2\sin(-\pi/2) = -2$,
$y' = 2\sin(-\pi/2) = -2$, $y'' = 2\cos(-\pi/2) = 0$.
Độ cong cần tìm:

$$C = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|2(-2) - (-2)0|}{(2^2 + (-2)^2)^{3/2}} = \frac{4}{8\sqrt{8}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

1.1.3. Hình bao của một họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho họ đường cong $\mathcal{L}$ phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Đường E được gọi là hình bao của họ đường cong $\mathcal{L}$ nếu

- mỗi đường cong trong họ $\mathcal{L}$ đều tiếp xúc với đường E và
- với mỗi điểm thuộc E đều tồn tại một đường cong của họ $\mathcal{L}$ tiếp xúc với E tại điểm đó.

Ví dụ

Xét họ đường tròn $\mathcal{C}$ với tham số c: $(x-c)^2+y^2=R^2$. Hình bao của họ đường tròn này là hai đường thẳng $y=\pm R$.

Quy tắc tìm hình bao

Định lý

Cho họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc một tham số c. Nếu các đường của họ này không có điểm kì dị thì hình bao của họ được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0. \end{cases}$

Chú ý: Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình trên bao gồm hình bao E và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Ý tưởng chứng minh:

- Với mỗi c, gọi L_c là đường cong cho bởi $F(x, y, c) = 0$. Giả sử L_c tiếp xúc với E tại $M_c(x(c), y(c))$.
- Vì M_c thuộc L nên $F(x(c), y(c), c) = 0$.
- Lấy đạo hàm hai vế theo c:

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) + F'_c(x(c), y(c), c) = 0.$$

- Phương trình tiếp tuyến của E tại M_c là

$$\frac{x - x(c)}{x'(c)} = \frac{y - y(c)}{y'(c)}.$$

- Phương trình tiếp tuyến của L_c tại M_c là

$$F'_x(x(c), y(c), c)(x - x(c)) + F'_y(x(c), y(c), c)(y - y(c)) = 0.$$

- Hai tiếp tuyến này trùng nhau, nên

$$F'_x(x(c), y(c), c)x'(c) + F'_y(x(c), y(c), c)y'(c) = 0.$$

- Vậy $F'_c(x(c), y(c), c) = 0$.

(GK20201)

Tìm hình bao của họ đường (Γ_c): $2x\cos c + y\sin c = 1$.

Giải: $2x\cos c + y\sin c = 1 \Leftrightarrow F(x, y, c) := 2x\cos c + y\sin c - 1 = 0$.
$F'_x = 2\cos c$, $F'_y = \sin c$. Hệ $F'_x = F'_y = 0$ vô nghiệm. Họ (Γ_c) không có điểm kỳ dị.

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cos c + y\sin c = 1 \\ -2x\sin c + y\cos c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos c \\ y = \sin c \end{cases}$$

Hình bao của họ là đường elip (ellipse) $4x^2 + y^2 = 1$.

Một số bài tập

- (GK20192) Tìm hình bao của họ đường cong $x^2 + y^2 - 4yc + 2c^2 = 0$, c tham số, $c \neq 0$.
- (GK20192) Tìm hình bao của họ đường cong $y = 4cx^3 + c^4$, c là tham số.
- (GK20182) Tìm hình bao của họ đường cong $(x + c)^2 + (y - c)^2 = 2$.
- (GK20181) Tìm hình bao của họ đường cong $x = 2cy^2 + 3c^2$.

1.2.1. Hàm vectơ

Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $r: I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto r(t)$, được gọi là hàm vectơ của biến t xác định trên I.
- Ta xét $n = 3$ và viết $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Quỹ tích $M(x(t), y(t), z(t))$ khi t biến thiên trong I được gọi là tốc đồ của hàm véctơ r. Ta cũng nói rằng đường L có các phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.
- Giới hạn: Ta nói hàm vectơ $r(t)$ có giới hạn là a khi t dần tới t_0 nếu $\lim\limits_{t \to t_0} ||r(t) - a|| = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = a$.
- Liên tục: Hàm vectơ $r(t)$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$. (Tương đương với tính liên tục của các thành phần $x(t), y(t), z(t)$ tại t_0.)

Hàm vectơ: Đạo hàm

Giới hạn (nếu có)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta r}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(t_0+h)-r(t_0)}{h}$$

được gọi là đạo hàm của $r(t)$ tại t_0, kí hiệu $r'(t_0)$ hay $\dfrac{dr(t_0)}{dt}$.
Khi $r(t)$ có đạo hàm tại t_0, ta cũng nói hàm $r(t)$ khả vi tại t_0.
Nhận xét rằng nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $r(t)$ cũng khả vi tại t_0 và $r'(t_0) = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k$.

1.2.2. Đường: Tiếp tuyến của đường cong tại một điểm

- Cho L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Hàm vectơ tương ứng là $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Cho $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$ là một điểm chính quy, tức là các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.
- Khi đó $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ chính là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của L tại M.
- Phương trình tiếp tuyến của L tại M là

$$\boxed{\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.}$$

Đường: Pháp diện của đường cong tại một điểm

- Cho L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Hàm vectơ tương ứng là $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Cho $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$ là một điểm chính quy.
- Mặt phẳng đi qua M vuông góc với tiếp tuyến của L tại M được gọi là *pháp diện* của đường cong L tại M.
- Như vậy mặt phẳng pháp diện của L tại M gồm các điểm P sao cho MP vuông góc với vectơ $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Do vậy phương trình của mặt phẳng pháp diện của đường L tại M là

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

Đường: Độ cong

Tương tự như trong mặt phẳng, ta có thể định nghĩa được độ cong trong không gian (ba chiều).
Cho L trong không gian với phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ và $M(x(t), y(t), z(t))$ thuộc L. Khi đó độ cong của L tại M được tính theo công thức

$$\boxed{C(M) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

Chú ý: Nếu $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ thì $C(M) = \dfrac{||r' \wedge r''||}{||r'||^3}$.

Ví dụ

(CK20182)

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = t\cos 2t$, $y = t\sin 2t$, $z = 3t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$.

Giải: Ứng với $t = \pi/2$, điểm $M(-\pi/2, 0, 3\pi/2)$.
$x' = \cos 2t - 2t\sin 2t$, $y' = \sin 2t + 2t\cos 2t$, $z' = 3$.
Với $t = \pi/2$: $x' = -1$, $y' = -\pi$, $z' = 3$.
Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x + \pi/2}{-1} = \frac{y}{-\pi} = \frac{z - 3\pi/2}{3}.$$

Phương trình pháp diện:

$$(-1)(x + \pi/2) - \pi y + 3(z - 3\pi/2) = 0 \text{ hay } -x - \pi y + 3z - 5\pi = 0.$$

1.2.3. Mặt: Tiếp diện và pháp tuyến

- Cho mặt S và $M \in S$. Đường thẳng MT được gọi là tiếp tuyến của S tại M nếu nó là tiếp tuyến tại M của một đường cong nào đó nằm trên S.
- Cho mặt S có phương trình $f(x, y, z) = 0$. Điểm $M \in S$ được gọi là điểm chính quy nếu các đạo hàm riêng $f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)$ không đồng thời bằng 0.

Định lý

Các đường tiếp tuyến của S tại điểm chính quy M đều nằm trong một mặt phẳng.

- Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến của S tại điểm M chính quy được gọi là *tiếp diện* của S tại M.
- Đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng tiếp diện được gọi là *pháp tuyến* của mặt S tại M.

Công thức

Cho mặt S có phương trình $f(x,y,z)=0$ và $M(x_0,y_0,z_0)\in S$ chính quy.

- Phương trình của mặt tiếp diện của S tại M là

$$\boxed{f'_x(M)(x-x_0)+f'_y(M)(y-y_0)+f'_z(z-z_0)=0.}$$

- Phương trình của đường pháp tuyến của S tại M là

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(M)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M)}=\frac{z-z_0}{f'_z(M)}.}$$

Ví dụ

(GK20201)

Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $z = \ln(2x+y)$ tại điểm $M(-1,3,0)$.

Giải: Đặt $F(x,y,z) = \ln(2x+y) - z$.
$F'_x = 2/(2x+y)$, $F'_y = 1/(2x+y)$, $F'_z = -1$.
Tại $M(-1,3,0)$: $F'_x(M) = 2$, $F'_y(M) = 1$, $F'_z(M) = -1$.
Phương trình tiếp diện:

$$2(x+1) + (y-3) - z = 0 \text{ hay } 2x + y - z - 1 = 0.$$

Phương trình pháp tuyến

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Một số bài tập

- (CK20193) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 - 2y^3 + 3z^2 = 11$ tại $A(1;1;2)$.
- (GK20182) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + y^2 - e^z - 2xyz = 0$ tại $M(1;0;0)$.
- (GK20172) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\ln(2x + y^2) + 3z^3 = 3$ tại $M(0;-1;1)$.
- (CK20171) Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $z = \ln(4 - x^2 - 2y^2)$ tại $A(-1;1;0)$.

Đường cong cho dưới dạng giao hai mặt cong

- (CK20181) Tìm vectơ tiếp tuyến tại $M(1;-1;1)$ của đường

$$\begin{cases} x+y+2z-2=0 \\ x^2+2y^2-2z^2-1=0 \end{cases}$$

- (CK20142) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm $A(1;-2;5)$ của đường cong xác định bởi $z=x^2+y^2$, $z=2x+3$.