Tích phân mặt

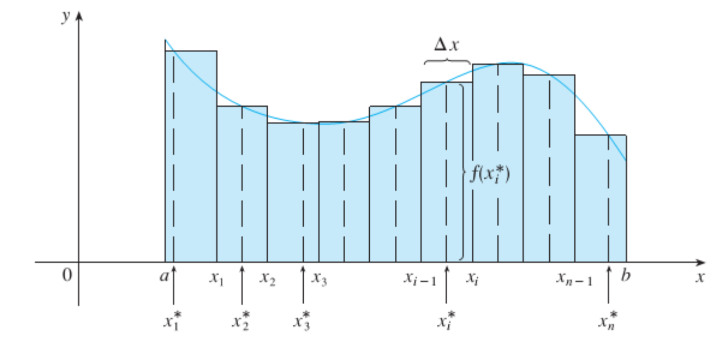
TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 5: Tích phân mặt

Tích phân đường loại I

Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể - Tích phân kép

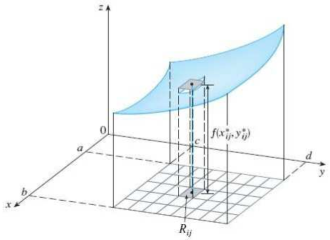


FIGURE 4

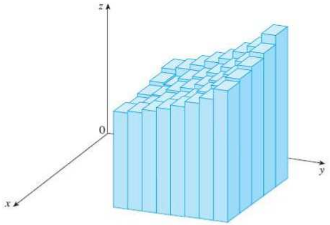
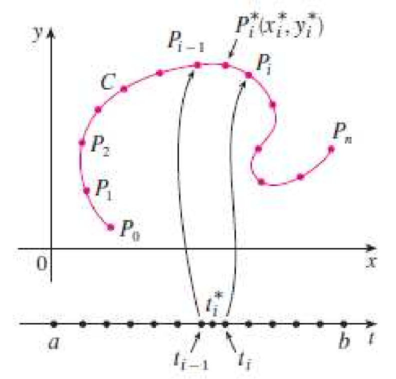


FIGURE 5

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y.$$

Tích phân đường loại I

Định nghĩa



1. *Cho đường cong C :* $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b.$
2. *Chia đoạn* $[a, b]$ *thành n đoạn bằng nhau* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$
3. *Khi đó,* $P_i(x_i, y_i)$ *sẽ chia C thành n cung nhỏ.*
4. *Chọn* $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ *và lập TTP* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

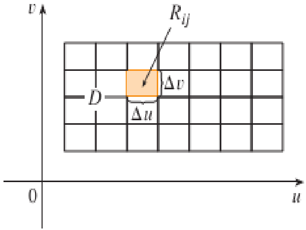
Tích phân mặt của trường vô hướng

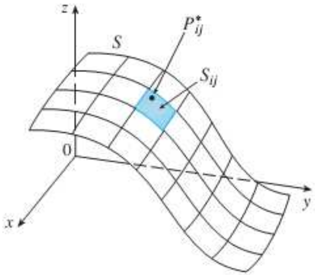
Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại I

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

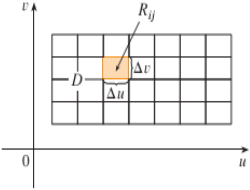
$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

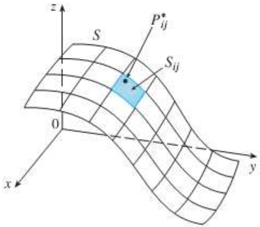
Trên S có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ (hay tỉ trọng bề mặt) tại điểm (x,y,z) là $f(x,y,z)$. Tính khối lượng mặt S.





Tích phân mặt của trường vô hướng





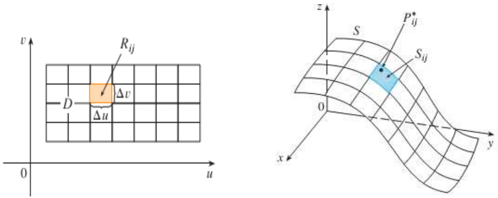
i) Chia mặt S bằng cách chia $[a, b]$ thành m khoảng con $[x_{i-1}, x_i]$ và chia $[c, d]$ thành n khoảng con với độ dài bằng nhau.

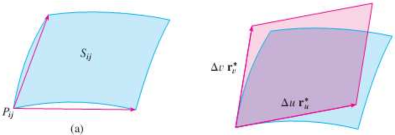
ii) Chọn các điểm P^*_{ij} trên mỗi mảnh con đó, và coi như hàm mật độ f không đổi trên S_{ij} và bằng $f(P^*_{ij})$.

iii) Khối lượng mặt S được xấp xỉ bằng $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f(P^*_{ij})\Delta S_{ij}$

iv) Lấy giới hạn $\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x^*_i, y^*_i, z^*_i)\Delta S_{ij}$.

Tích phân mặt của trường vô hướng





(a)

(b)

$$\text{Khối lượng} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i^*)\Delta S_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(P_{ij}^*)|r_u \wedge r_v|\Delta u \Delta v.$$

Tích phân mặt của trường vô hướng

Định nghĩa

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

và $f(x,y,z)$ *là một hàm số xác định trên* S*. Nếu tồn tại tích phân*

$$\iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|r_u \wedge r_v| dudv$$

thì ta gọi giá trị của tích phân này là tích phân mặt loại I của hàm f *lấy trên* S *và kí hiệu là*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

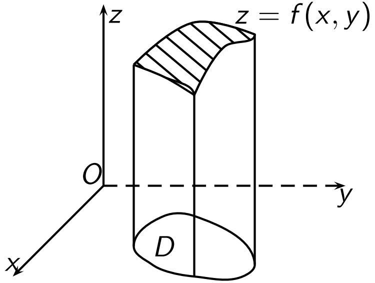
Tích phân mặt của trường vô hướng

Giả sử

- S là mặt được cho bởi phương trình $z = z(x,y)$,
- hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là D,
- $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên D.

Khi đó

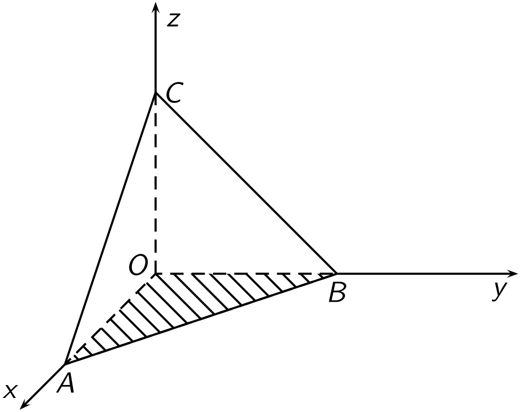
$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy.$$



Tích phân mặt loại I

Ví dụ

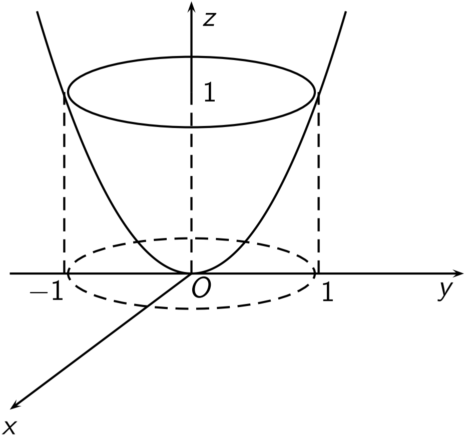
Tính $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) dS$, với $S = \{(x, y, z) \,|\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x, y, z \geqslant 0\}$



Tích phân mặt loại I

Ví dụ

Tính $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS,\ S = \{(x, y, z)\,|z = z^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

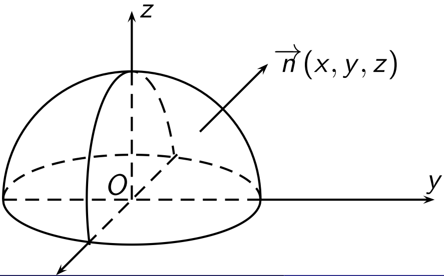


Chương 5: Tích phân mặt

Mặt cong định hướng

Cho mặt cong S trong không gian. Tại mỗi điểm M chính quy của mặt cong S có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là $\overrightarrow{n}$ và $-\overrightarrow{n}$.

- Nếu có thể chọn được tại mỗi điểm M của mặt một vectơ pháp tuyến đơn vị n sao cho vectơ n biến thiên liên tục trên S thì ta nói mặt S định hướng được. Khi đó ta chọn một hướng làm hướng dương thì hướng còn lại được gọi là hướng âm.
- Ngược lại, thì mặt S gọi là không định hướng được. Ví dụ như lá Möbius.

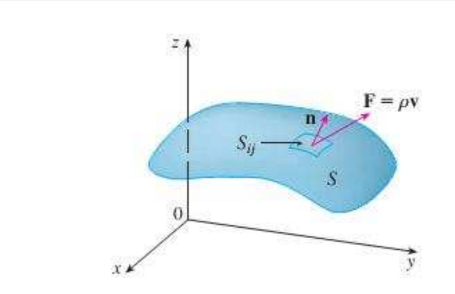


Tích phân mặt của trường véc tơ

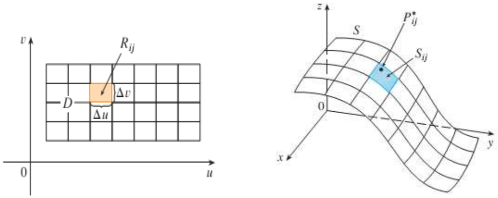
Bài toán dẫn đến tích phân mặt của trường véc tơ

Cho một mặt cong hai phía được nhúng vào một môi trường chất lỏng đang chảy với $\begin{cases} \text{mật độ } \rho(x, y, z), \\ \text{tốc độ } v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z). \end{cases}$

Tính lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

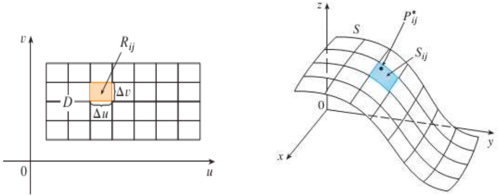


Tích phân mặt của trường véc tơ



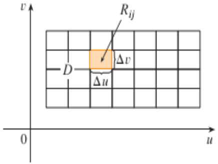
1. Chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij}.

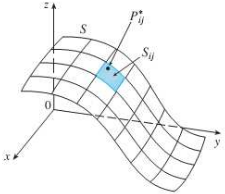
Tích phân mặt của trường véc tơ



1. Chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij}.
2. Coi S_{ij} như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là $\vec{F} = \rho v$ là hằng số trên S_{ij}.

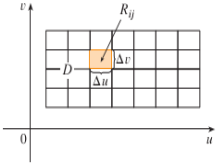
Tích phân mặt của trường véc tơ

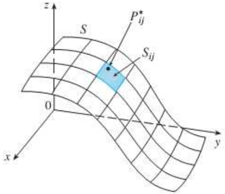




1. Chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij}.
2. Coi S_{ij} như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là $\vec{F} = \rho v$ là hằng số trên S_{ij}.
3. Khối lượng của chất lỏng chảy qua S_{ij} theo hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ trên một đơn vị thời gian được xấp xỉ bởi $(\vec{F} \cdot \vec{n})\Delta(S_{ij})$.

Tích phân mặt của trường véc tơ





1. Chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij}.
2. Coi S_{ij} như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là $\vec{F} = \rho v$ là hằng số trên S_{ij}.
3. Khối lượng của chất lỏng chảy qua S_{ij} theo hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ trên một đơn vị thời gian được xấp xỉ bởi $(\vec{F} \cdot \vec{n})\Delta(S_{ij})$.
4. Lượng chất lỏng chảy qua S trên một đơn vị thời gian được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\vec{F} \cdot \vec{n})\Delta(S_{ij}).$$

Tích phân mặt của trường véc tơ

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\vec{F}\cdot\vec{n})\Delta(S_{ij}) = \iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Tích phân mặt của trường véc tơ

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\vec{F}\cdot\vec{n})\Delta(S_{ij})=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Định nghĩa

Cho mặt cong S và $\vec{n}$ là VTPT đơn vị theo hướng dương đã chọn của S. Tích phân mặt loại II của hàm véctơ $\vec{F}=(P,Q,R)$ lấy theo hướng đã chọn của mặt S là

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy:=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Tích phân mặt của trường véc tơ

Cho S: $r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Nhắc lại công thức tính tích phân mặt loại I

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \times r_v|dudv.$$

Tích phân mặt của trường véc tơ

Cho S: $r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Nhắc lại công thức tính tích phân mặt loại I

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \times r_v|dudv.$$

Công thức tính tích phân mặt loại II

Đặt $\vec{N} = r_u \times r_v = (A,B,C)$. Nếu $\vec{N} \uparrow\uparrow \vec{n}$ thì $\vec{n} = \left(\frac{A}{|r_u \times r_v|}, \frac{B}{|r_u \times r_v|}, \frac{C}{|r_u \times r_v|}\right)$

Tích phân mặt của trường véc tơ

Cho S: $r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Nhắc lại công thức tính tích phân mặt loại I

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \times r_v|dudv.$$

Công thức tính tích phân mặt loại II

Đặt $\vec{N} = r_u \times r_v = (A,B,C)$. Nếu $\vec{N} \uparrow\uparrow \vec{n}$ thì $\vec{n} = \left(\frac{A}{|r_u \times r_v|}, \frac{B}{|r_u \times r_v|}, \frac{C}{|r_u \times r_v|}\right)$

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_D (AP + BQ + CR)dudv.$$

Nếu $\vec{N} \uparrow\downarrow \vec{n}$ thì $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_D (AP + BQ + CR)dudv.$

Tích phân mặt của trường véc tơ

Nếu $P = 0, Q = 0$ và mặt $S : z = z(x, y)$ thì

Tích phân mặt của trường véc tơ

Nếu $P = 0, Q = 0$ và mặt $S : z = z(x, y)$ thì $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$ và

Công thức tính tích phân mặt loại II

Giả sử

- mặt S có phương trình $z = z(x, y)$,
- hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là D,
- $\left(\overrightarrow{Oz}, \vec{n}\right) < \frac{\pi}{2}$.

$$\iint_S R dxdy = \iint_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy.$$

Tích phân mặt của trường véc tơ

Nếu $P = 0, Q = 0$ và mặt $S : z = z(x, y)$ thì $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$ và

Công thức tính tích phân mặt loại II

Giả sử

- mặt S có phương trình $z = z(x, y)$,
- hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là D,
- $\left(\overrightarrow{Oz}, \vec{n}\right) < \frac{\pi}{2}$.

$$\iint\limits_S R dxdy = \iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy.$$

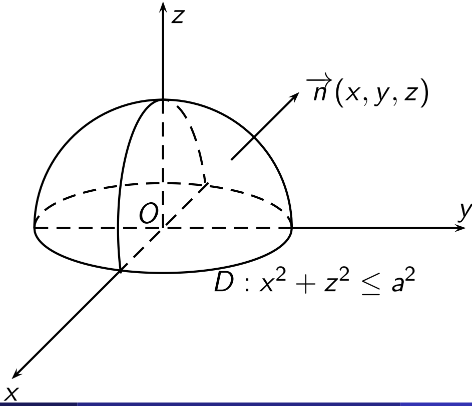
Chú ý:

$$I = \underbrace{\iint\limits_S P dydz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_S Q dzdx}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_S R dxdy}_{I_3}.$$

Tích phân mặt loại II

Ví dụ

Tính $\iint\limits_S z\left(x^2+y^2\right)dxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu.

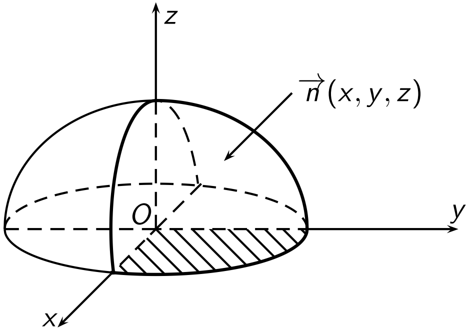


Tích phân mặt loại II

Nếu $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc tù thì $\iint\limits_S Rdxdy = -\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dxdy$.

Ví dụ

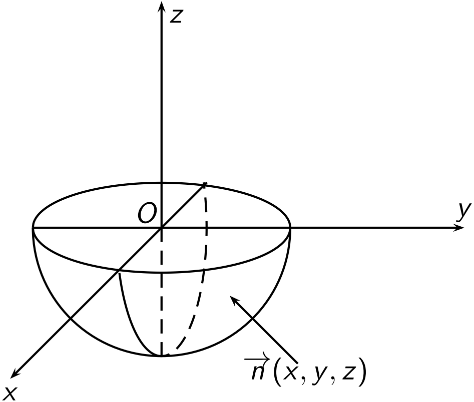
Tính $\iint\limits_S ydxdz + z^2dxdy$ trong đó S là phía trong mặt
$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$



Tích phân mặt loại II

Ví dụ

Tính $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ trong đó S là mặt trên của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2, z\leq 0$.



Tích phân mặt loại II

Công thức Ostrogradsky - Gauss

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

Tích phân mặt loại II

Công thức Ostrogradsky - Gauss

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

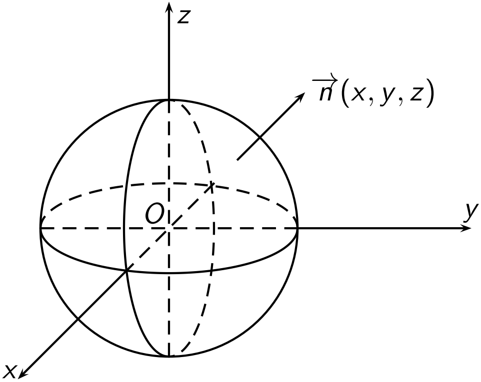
Công thức Ostrogradsky - Gauss

Ví dụ

Tính các tích phân sau với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

a. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$

b. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$.

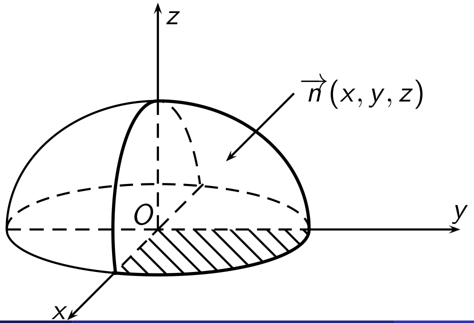


Công thức Ostrogradsky - Gauss

Nếu mặt cong S không kín thì có thể bổ sung để được mặt cong kín để áp dụng công thức Ostrogradsky.

Ví dụ

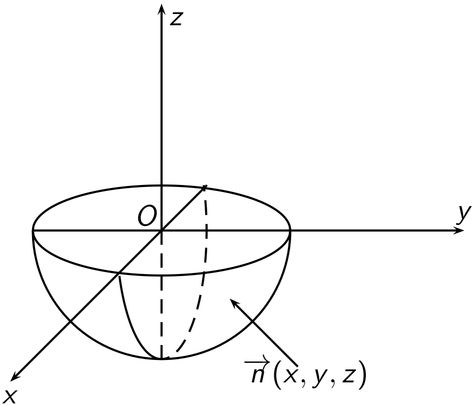
Tính $\iint\limits_S ydxdz + z^2dxdy$ trong đó S là phía trong mặt $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$



Công thức Ostrogradsky - Gauss

Ví dụ

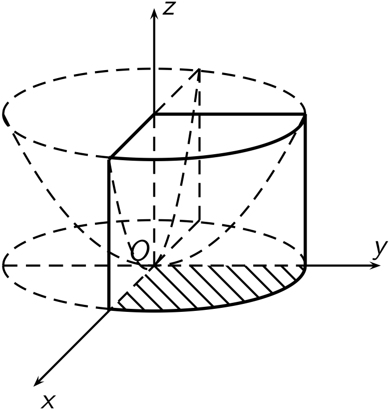
Tính $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ trong đó S là mặt trên của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2, z\leq 0$.



Công thức Ostrogradsky - Gauss

Ví dụ

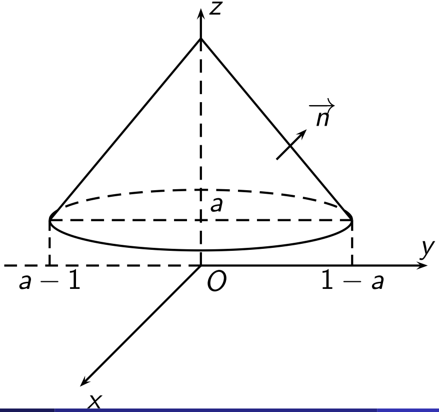
Tính $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$ trong đó S là phía ngoài của miền $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.



Công thức Ostrogradsky - Gauss

Ví dụ

Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ trong đó S là phía ngoài của miền $(z-1)^2 \leqslant x^2 + y^2, a \leqslant z \leqslant 1, a > 0.$

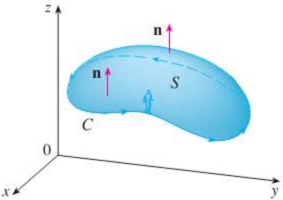


Tích phân mặt của trường véc tơ

Công thức Stokes

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

ở đó tích phân theo hướng dương của C phù hợp với hướng dương của S.



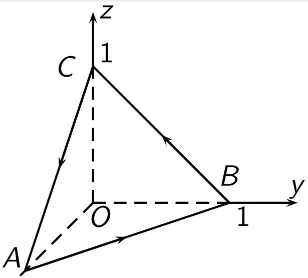
Công thức Stokes

Ví dụ

Tính $\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$, ở đó

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + (y+z^2)\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k},$$

L là tam giác ABC, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ chiều dương của các trục tọa độ.



Tích phân mặt

Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\iint\limits_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dS$$

$$= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của véctơ pháp tuyến đơn vị của mặt S.

Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

Ví dụ

Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $x^2+x+z^2=0, y\geq 0$, hướng S phía ngoài. Chứng minh rằng

$$\iint\limits_S (x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dxdz=0.$$