

GIẢI TÍCH 2

BÀI 8

B. TÍCH PHÂN BA LỚP (TT)

3.10. Cách tính. Gặp nhiều khó khăn trong việc tính tích phân ba lớp bằng định nghĩa. Giải pháp hợp lí là dựa vào kĩ thuật tính tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

a) Tích phân ba lớp trên hình hộp chữ nhật

Định lí Fubini. Cho f khả tích trên hình hộp chữ nhật đóng $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

1°/ Với mỗi $(x, y) \in \mathbb{R} = [a, a'] \times [b, b']$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[c, c']$ thì hàm số

$\varphi(x, y) = \int_c^{c'} f(x, y, z) dz$ khả tích trên \mathbb{R} và có

$$\begin{aligned} \iiint_P f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_R \varphi(x, y) dx dy \\ &= \iint_R dx dy \int_c^{c'} f(x, y, z) dz \quad (10.1) \end{aligned}$$

2°/ Với mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên hình chữ nhật $R = [a, a'] \times [b, b']$ thì hàm số $\psi(z) = \iint_R f(x, y, z) dx dy$ khả tích trên $[c, c']$ và

$$\begin{aligned} \iiint_P f(x, y, z) dx dy, dz &= \int_c^{c'} \psi(z) dz \\ &= \int_c^{c'} dz \iint_R f(x, y, z) dx dy \end{aligned} \quad (10.2)$$

b) Cho hàm f liên tục trên hình hộp chữ nhật đóng P , khi đó ta có các công thức (10.1) và (10.2), khi đó do

hàm số $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \int_c^{c'} f(x, y, z) dz$ liên tục trên

hình chữ nhật $R = [a, a'] \times [b, b']$, nên ta có

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} f(x, y, z) dz$$

Ví dụ 1.

Tính $\iiint_P (x + yz) dx dy dz$, $P : [0; 1] \times [1; 2] \times [1; 3]$.

GIẢI
+)

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_1^3 (x + yz) dz = \int_0^1 dx \int_1^2 \left(xz + y \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=1}^3 dy$$

$$+) = \int_0^1 dx \int_1^2 (2x + 4y) dy = \int_0^1 (2xy + 2y^2) \Big|_{y=1}^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 6) dx = (x^2 + 6x) \Big|_0^1 = 1 + 6 = 7$$

c) Cho tập D đo được theo Jordan trong \mathbb{R}^2 , các hàm số $\varphi_1, \varphi_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích trên D và $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y), \forall (x, y) \in D, B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$

Định lý (Fubini). Cho hàm $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích trên B . Với mỗi $(x, y) \in D$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$ thì hàm số

$$\psi(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

khả tích trên D và có

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \psi(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy\end{aligned}$$

d) Cho tập hợp D đo được trên \mathbb{R}^2 , hàm số φ_1, φ_2 liên tục, bị chặn trên D , hàm $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, bị chặn trên B thì định lí Fubini nói trên vẫn đúng.

e) Cho B là tập đo được theo Jordan trong \mathbb{R}^3 , giới hạn bởi $z = c$ và $z = c'$ và mỗi $z \in [c, c']$, tiết diện thẳng B cắt bởi mặt phẳng $Z = z$ là tập đo được theo Jordan trong \mathbb{R}^2 , gọi B_z là hình chiếu của tiết diện đó lên mặt phẳng Oxy .

Định lí (Fubini). Cho hàm $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích trên B . Nếu mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên B_z thì hàm số $\varphi(z) = \iint_{B_z} f(x, y, z) dx dy$ khả

tích trên $[c, c']$ và có

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^{c'} \varphi(z) dz = \int_c^{c'} dz \iint_{B_z} f(x, y, z) dx dy$$

Nói riêng, Định lí đúng với hàm số f liên tục và bị chặn trên B .

Ví dụ 1.

Tính $\iiint_B x \, dx \, dy \, dz$, $B: x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

$$\left(\frac{1}{24}\right)$$

GIẢI

$$+) I = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy$$

$$= \int_0^1 x \left[y(1-x) - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_{y=0}^{1-x} dx$$

$$+) = \int_0^1 x \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^3 - 2x^2 + x] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3},$

$$V: x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16} \right)$$

GIẢI +) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{d(x+y+z+1)}{(x+y+z+1)^3} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{-2(x+y+z)^2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\
&\quad +) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+y+1} - \frac{y}{4} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}(1-x) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln|x+1| - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left[\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right] = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3 (K60). 1) Tính $\iiint_V x dx dy dz,$

$$V: x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \left(\frac{1}{24}\right)$$

2) CMR : $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f(x) dx.$

3) Tính $\iiint_V yz dx dy dz,$

$$V: z^2 \leq x \leq \sqrt{z}, 0 \leq y \leq z, 0 \leq z \leq 1. \quad \left(\frac{1}{36}\right)$$

3.11. Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Đổi biến

Định lí 1. Cho Ω là tập mở $\subset \mathbb{R}^3$, tập compact, đo được $B \subset \Omega$, ánh xạ $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, ở đó

1°/ Các hàm $x, y, z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên Ω .

2°/ Thu hẹp của φ trên $\text{Int}B$ là đơn ánh

3°/ Định thức Jacobi

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\forall (u, v, w) \in \text{Int } B.$$

Khi đó ta có

1°/ $\varphi(B)$ là tập compact đo được

2°/ Nếu $f: \varphi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\varphi(B)$ thì

$$\iiint_{\varphi(B)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iiint_B f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

Ví dụ 1.

$$(K60) \iiint_V dx dy dz, \quad V: |x - 2y| + |x + y| + |x + y + z| \leq 1.$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)$$

GIẢI

$$+) \begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \\ w = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - x \\ 0 \leq w \leq 1 - x - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow J(x; y; z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow J(u; v; w) = \frac{1}{J(x; y; z)} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} \frac{1}{3} dw = \int_{-1}^1 du \int_0^{1-u} (1-u-v) dv$$

$$+)= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left[(1-u)v - \frac{v^2}{2} \right] \Big|_{v=0}^{1-u} = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left[(1-u)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] du$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 (u-1)^2 d(u-1) = \frac{1}{6} \frac{(u-1)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

b) Tọa độ trụ. Cho ánh xạ

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Rõ ràng có $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ đều thuộc lớp C^∞ trên \mathbb{R}^3 ,

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, thu hẹp của φ lên tập hợp $A = (0 ; \infty) \times [\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ là song ánh từ A lên \mathbb{R}^3 bỏ đi trục Oz , nên có $J(r, \varphi, z) \neq 0$ trên A .

Thu hẹp của φ trên tập mở

$$\Omega_\alpha = (0 ; \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbb{R}^+$$

là song ánh từ Ω_α lên tập mở $V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus P_\alpha^+$, P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α .

Khi B là tập compact đo được sao cho $\text{Int}B \subset \Omega_\alpha$, $\forall \alpha$ thì thu hẹp của φ trên $\text{Int}B$ là đơn ánh và $J(r, \varphi, z) \neq 0$ trên $\text{Int}B$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \iiint_{\varphi(B)} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_B f(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z)) r dr d\varphi dz \end{aligned}$$

NHẬN XÉT. Nên đổi sang tọa độ trụ khi :

- Miền lấy tích phân là hình trụ hoặc một phần hình trụ.
- Miền lấy tích phân giới hạn bởi mặt cong có dạng $F(x^2 + y^2; z) = 0$.

Ví dụ 1.

Tính $\iiint_B \frac{z \, dx \, dy \, dz}{1 + x^2 + y^2}$, $B: x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h, a > 0, h > 0$.

$$\left(\frac{1}{2}\pi h^2 \ln(1 + a^2)\right)$$

GIẢI

$$\begin{aligned} &+) \\ &x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h \\ &\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{z}{1+r^2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r}{1+r^2} dr \int_0^h z dz \\ &+) = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^a \frac{r}{1+r^2} dr \right) \left(\int_0^h z dz \right) \\ &= 2\pi \times \frac{h^2}{2} \times \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \pi h^2 \ln(1+a^2) \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính

$$\iiint_B \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz, B: 2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$$

$$\left(\frac{32\sqrt{2}}{15} \pi a^3\right)$$

GIẢI

$$+) \ x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq r \leq a\sqrt{2}, \frac{r^2}{2a} \leq z \leq \sqrt{3a^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} \frac{z}{r} dz$$

$$\begin{aligned}
 +) &= 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \bigg|_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} dr = \pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2}\right) dr \\
 &= \pi \left(3a^2 r - \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{20a^2}\right) \bigg|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15} \pi a^3.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz, \quad B: z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2), \quad z = h > 0$$

$$\left(\frac{\pi h^2 R^2}{4}\right)$$

GIẢI

$$+) \quad x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq r \leq R, \frac{h}{R}r \leq z \leq h$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{h}{R}r}^h z dz = 2\pi \int_0^R r \frac{1}{2} (h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2) dr$$

$$+) \pi h^2 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{R^2} \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Ví dụ 4. Tính $\iiint_B dx dy dz$,

$B : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, x^2 + y^2 \leq z^2$ và chứa $(0 ; 0 ; R)$

Ví dụ 5. Tính $\iiint_B z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$,

$$B: y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0, z = 0, z = a > 0$$

Ví dụ 6. Tính

a)(K59) $\iiint_B z^2(x^2 + y^2) dx dy dz, V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1.$

$$\left(\frac{\pi}{14}\right)$$

b)(K60)

1) $\iiint_V xyz dx dy dz,$

$$V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \left(\frac{1}{24}\right)$$

$$2) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

$$V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0. \quad \left(\frac{15}{16}\pi^2\right)$$

$$3) \iiint_V (3x^2 + 2y + z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$V: |x - y| \leq 1, |y - z| \leq 1, |z - x| \leq 1. \quad (3)$$

$$4) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \sin(z^2) \, dx \, dy \, dz, \quad V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3.$$

$$\left(\frac{\pi}{3}(\sin 9 - 9 \cos 9)\right)$$

c) Toạ độ cầu. Cho ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $(r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$ rõ ràng
 các hàm số $x, y, z \in C^\infty$ trên \mathbb{R}^3 , và có

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \theta$$

$$\theta = \widehat{(Oz, OM)}, \varphi = \widehat{(Ox, OM')}$$

Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, thu hẹp φ trên tập hợp
 $A = (0; \infty) \times [\alpha, \alpha + 2\pi) \times (0, r)$ là song ánh từ A lên
 \mathbb{R}^3 bỏ đi trục Oz , và có $J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên A .

Thu hẹp của φ trên tập mở

$$\Omega_\alpha = (0 ; \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbb{R}$$

là song ánh lên tập hợp mở $V_\alpha = \mathbb{R}^3 \setminus P_\alpha^+$, ở đó P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz , cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α .

Khi B là tập compact, đo được sao cho $\text{Int}B \subset \Omega_\alpha$, α nào đó thì thu hẹp của φ trên $\text{Int}B$ là đơn ánh và

$J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên $\text{Int}B$, do đó có

$$\begin{aligned} & \iiint_{\varphi(B)} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_B f(x(r, \varphi, \theta), y(r, \varphi, \theta), z(r, \varphi, \theta)) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

NHẬN XÉT. Nên đổi sang tọa độ cầu khi :

- Miền lấy tích phân là hình cầu hoặc một phần hình cầu.
- Miền lấy tích phân giới hạn bởi mặt cong có dạng $F(x^2 + y^2 + z^2; x; y; z) = 0$.

Ví dụ 1. $\iiint_B dx dy dz, \quad B: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

Ví dụ 2. $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

GIẢI

$$+) \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq R$$

Do B và hàm dưới dấu tích phân đều đối xứng qua các mặt $x=0, y=0, z=0$, nên

$$I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 dr$$

$$+) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = 8 \frac{\pi}{2} \frac{R^5}{5} \frac{2!!}{3!!} = \frac{8}{15} \pi R^5.$$

Ví dụ 3. $\iiint_B x^2 y^2 z^2 dx dy dz, \quad B: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

GIẢI

+)

$$x = ar \cos \varphi \sin \theta, y = br \sin \varphi \sin \theta, z = cr \cos \theta \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq R, |J(r; \varphi; \theta)| = abcr^2 \sin \theta \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = (abc)^2 r^6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^4 \theta \cos^2 \theta.$$

Do B và hàm dưới dấu tích phân đều đối xứng qua các mặt $x=0, y=0, z=0$, nên

$$I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (abc)^3 \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^8 dr$$

$$+) = \frac{8}{9} (abc)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta - \sin^7 \theta) d\theta$$

$$= \frac{8}{9} (abc)^3 \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{3!!}{4!!} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{4!!}{5!!} - \frac{6!!}{7!!} \right)$$

$$= \frac{8}{9} (abc)^3 \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{8}\right) \frac{8}{15} \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{189} \pi (abc)^3.$$

Ví dụ 4.

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz, \quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq x$$

GIẢI

$$+) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

$$y = r \cos \varphi \sin \theta, z = r \sin \varphi \sin \theta, = r \cos \theta \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \frac{\sin^4 \theta}{4} d\theta$$

$$+) = -\frac{2\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{10}.$$

Ví dụ 5.

a(K58) $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4z} (2x + y + z) dx dy dz.$ $(\frac{128\pi}{3})$

b(K59)

1) $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4z} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$ $(4\pi^2)$

2) $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$ $(\frac{8\pi}{5})$

3)CMR

$$\iiint_{9x^2+4y^2+z^2 \leq 1} [(3x)^n + (2y)^n - 2z^n] dx dy dz = 0.$$

$$4) \iiint_{x^2+2y^2+3z^2 \leq 1} (x^2 - 2y^2 + 3z^2) dx dy dz. \quad \left(\frac{4\pi}{15\sqrt{6}} \right)$$

Chú ý.

1) Đổi sang tọa độ cầu khi :

- V là hình cầu hoặc một phần hình cầu.
- V xác định bởi công thức là hàm của biến

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

2) Đổi sang tọa độ cầu suy rộng khi :

- V là hình ellipsoid hoặc một phần hình ellipsoid.

- V xác định bởi công thức là hàm của biến

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

3) Đổi sang tọa độ trụ khi :

- V là hình trụ hoặc một phần hình trụ.

- V xác định bởi công thức là hàm của biến

$$x^2 + y^2.$$

4) Đổi sang tọa độ trụ suy rộng khi :

- V là hình trụ elliptic hoặc một phần hình trụ elliptic.

- V xác định bởi công thức là hàm của biến

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

5) Bản chất tính tích phân bội ba là thông qua tính tích phân xác định.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!