Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

TUẦN 3

Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ BÀI

Bài 1: Tính tích phân sau:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

Trong đó miền $D: x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$

Bài 2: Tính tích phân sau:

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dxdydz$$

Với $V: x, y, z \geq 0; x + y + z \leq 1$

Bài 3: Tính $\frac{F'(t)}{f(t^2)}$ biết:

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

Bài 4: Tính diện tích phần mặt paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$ nằm trong hình trụ

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$$

Bài 5:

Tính thể tích của vật thể bị giới hạn bởi:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + y^2 - z^2)$$

CLB Hỗ trợ học tập

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2
ĐÁP ÁN

Bài 1: Hướng dẫn giải:

Chuyển sang tọa độ cực ρ, φ bằng phép biến đổi $x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi$ ta được:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{sin2\varphi}} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\, d\rho = \cdots = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{10-8\sqrt{2}}{3}\right)$$

Bài 2: Hướng dẫn giải:

Dễ dàng đưa được tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \iint_D dx\, dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz \; (D: 0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1)$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_D \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} dx\, dy = \frac{-1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} dy = \cdots$$

$$= \frac{ln2}{2} - \frac{5}{16}$$

Bài 3: Hướng dẫn giải:

Đổi sang tọa độ cầu và chú ý rằng $0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le t \; (t \ge 0)$, ta được:

$$F(t) = \int_0^{\pi} sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{t} \rho^2 f(\rho^2)\, d\rho = 4\pi \int_0^{t} \rho^2 f(\rho^2)\, d\rho$$

Lấy tích phân theo t ta được: $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$

Bài 4: Hướng dẫn giải:

Ta có mặt $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ đối xứng đối với trục Oz và $z \ge 0$

Mặt trụ đối xứng đối với mặt phẳng $y = x$ và cắt mặt phẳng Oxy theo đường cong có phương trình dạng $p^2 = a^2 sin2\varphi$ trong hệ tọa độ cực.

Ta có $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$

Lưu ý đến lý luận về tính đối xứng ở trên, chiếu phần thứ tư của mặt paraboloid bị cắt bởi mặt trụ xuống mặt phẳng Oxy được miền kín D, giới hạn bởi một đoạn của tia $y = x, x \geq 0$ và một phần của đường cong $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\ (x \geq y)$.

Ta có

$$S = 4 \iint\limits_{\mathrm{D}} \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}\, dx\, dy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

$$S = \frac{4}{a} \iint\limits_{\substack{0 \leq \rho \leq a\sqrt{sin2\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4}} \rho\sqrt{a^2 + \rho^2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{sin2\varphi}} \rho\sqrt{a^2 + \rho^2}\, d\rho = \cdots = \frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$$

Bài 5: Hướng dẫn giải:

Xét bài toán tính thể tích của vật thể bị giới hạn bởi:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

Dễ dàng nhận thấy, vật thể cần tính thể tích đối xứng qua các mặt tọa độ. Đổi sang tọa độ cầu (xét các điều kiện ứng với phần vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất), ta có

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

$$V = 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt{-cos2\varphi}} \rho^2\, d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} sin\varphi\left(\sqrt{-cos2\varphi}\right)^3 d\varphi$$

Đặt $\frac{\pi}{2} - \varphi = t$ ta được:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4} \cos{(t)} cos^{\frac{3}{2}}(2t)\, d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4} (1 - 2sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\, d(sint)$$

Đặt $\sqrt{2}sint = sinz$, ta đưa về tích phân

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} cos^4 z\, dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng với $a = \sqrt{2}$, ta có V = $\frac{\pi^2}{2}$