BỘ KĨ NĂNG A+

GIẢI TÍCH 2

SCAN ME

TÀI LIỆU ĐƯỢC TỔNG HỢP VÀ BIÊN SOẠN BỞI
CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

BIÊN SOẠN BỞI CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

CLB.HTHT-WEBSITE.COM

Tài liệu là món quà của CLB Hỗ trợ Học tập dành cho các bạn sinh viên Đại học Bách Khoa Hà Nội. CLB xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến các bạn vì đã tin tưởng đồng hành cùng CLB trong suốt thời gian vừa qua. Sự ủng hộ của các bạn chính là nguồn động lực lớn nhất để chúng mình phấn đấu đưa CLB ngày một phát triển và đem đến nhiều tài liệu chất lượng hơn. Cuối cùng, xin chúc các bạn một kỳ học tập hiệu quả và thành công.

Bản in lần thứ nhất, tháng 6 năm 2024

Mục lục

I Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết

II Mục 2 - Đề thi các nhóm ngành

Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết

1. Ứng dụng của phép vi phân trong hình học

1.1 Hàm véctơ

1.1.1 Định nghĩa, giới hạn, tính liên tục

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1 Ánh xạ $I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm véctơ của biến số t xác định trên $\mathbb{R}$.

Nếu $n = 3$, ta viết

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Đặt $M(x(t), y(t), z(t))$, quỹ tích M khi t biến thiên trong I được gọi là tốc đồ của hàm véctơ $\vec{r}(t)$.

Định nghĩa 1.2 **Giới hạn**: Người ta nói hàm véctơ có giới hạn là $\vec{a}$ khi $t \to t_0$ nếu

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = \overrightarrow{0}$$

kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Định lý 1.1 **Tính liên tục**: Hàm véctơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

(Tương đương với tính liên tục của các thành phần tương ứng $x(t), y(t), z(t)$).

1.1.2 Các phép toán

Định lý 1.2 Xét 2 véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, k là số thực thì:

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3). \\
\vec{a} - \vec{b} &= (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3). \\
k.\vec{a} &= (ka_1; ka_2; ka_3).
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.3 **Tích vô hướng:** Cho $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}\,(b_1;b_2;b_3)$ thì tích vô hướng:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Đặt $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}), 0 \leq \varphi \leq 180^0$ thì $\cos\varphi = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$).

Định nghĩa 1.4 **Tích có hướng:** Với $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)\,;\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ ta có tích có hướng:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

1.1.3 Đạo hàm, tính khả vi và tích phân

Định nghĩa 1.5 **Đạo hàm:** Giới hạn, nếu có, của tỉ số

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}\,(t_0+h)-\vec{r}\,(t_0)}{h}$$

được gọi là đạo hàm của hàm véctơ $\vec{r}(t)$ tại t_0, kí hiệu $\vec{r}'\,(t_0)$ hay $\dfrac{d\vec{r}\,(t_0)}{dt}$, khi đó ta nói hàm véctơ $\vec{r}(t)$ **khả vi** tại t_0.

Định lý 1.3 Nếu $x(t), y(t), z(t)$ **khả vi** tại t_0 thì $\vec{r}(t)$ cũng **khả vi** tại t_0 và

$$\vec{r}'\,(t_0) = x'\,(t_0)\cdot\vec{i} + y'\,(t_0)\cdot\vec{j} + z'\,(t_0)\cdot\vec{k}$$

R

Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \vec{\alpha}(t)$ là các hàm véctơ khả vi. Ta có các kết quả:

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)+\vec{q}(t)) = \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt}$
2. $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$
3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}\vec{q}(t)$
4. $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}(t)\wedge\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\wedge\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}\wedge\vec{q}(t)$

► **Tích phân:**

Định nghĩa 1.6 Xét véctơ $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Ta có:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b \vec{x}(t)dt, \int_a^b \vec{y}(t)dt, \int_a^b \vec{z}(t)dt\right)$$

1.1.4 Ví dụ

Ví dụ 1.1 Cho hàm véctơ $\vec{p}(t) = e^t\cdot\vec{i} + \arctan t\cdot\vec{j} + \arcsin t\cdot\vec{k}$. Tính $\left.\dfrac{d}{dt}\left(e^t\vec{p}(t)\right)\right|_{t=0}$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\frac{d}{dt}\left(e^t\vec{p}(t)\right) = e^t.\frac{d\vec{p}(t)}{dt} + e^t.\vec{p}(t) = e^t.\left(2e^t.\vec{i} + (\frac{1}{t^2+1} + \arctan t).\vec{j} + (\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \arcsin t).\vec{k}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^t\vec{p}(t)\right)\Big|_{t=0} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Ví dụ 1.2 Cho hàm vector $p(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$. Tính $q'(\pi)$ biết $q(t) = (t^2+1).p(t)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $r(t) = t^2 + 1$.

Ta có $q'(t) = r'(t).q(t) + r(t).q'(t) = 2t.(\sin t, \cos t, t^2) + (t^2+1).(\cos t, -\sin t, 2t)$.

Thay $t = \pi$ vào biểu thức trên ta có:

$q'(\pi) = 2\pi.(\sin\pi, \cos\pi, \pi^2) + (\pi^2+1).(\cos\pi, -\sin\pi, 2\pi) = (-\pi^2-1, -2\pi, 4\pi^3+2\pi)$.

1.2 Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng

1.2.1 Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

1.2.1.1 Điểm chính quy

Định nghĩa 1.7 Trong hệ toạ độ Descarter, cho đường cong L có phương trình $f(x,y)=0$. Điểm $M_0(x_0,y_0)\in L$ gọi là **điểm chính quy** nếu $f'_x(M_0)$ và $f'_y(M_0)$ không đồng thời bằng 0, gọi là **điểm kỳ dị** trong trường hợp ngược lại.

1.2.1.2 Công thức phương trình tiếp tuyến, phương trình pháp tuyến của đường cong hàm ẩn và đường cong tham số

► **Đường cong hàm ẩn:**

Chúng ta biết rằng hệ số góc k của tiếp tuyến của đường cong C tại điểm M chính là $y'_x(M)$. Do đó, nếu đường cong cho bởi phương trình $f(x,y)=0$ thì nó xác định một hàm ẩn $y=y(x)$ và đạo hàm của nó tính theo công thức

$$k=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Công thức 1.1 Phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$\boxed{(d):f'_x(M)\cdot(x-x_0)+f'_y(M)\cdot(y-y_0)=0}$$

Công thức 1.2 Phương trình pháp tuyến tại M là:

$$\boxed{(d'):\frac{x-x_0}{f'_x(M)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M)}}$$

R Trường hợp đặc biệt, đường cong cho bởi phương trình $y=f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm $M(x_0,y_0)$ chính quy là $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Đây là công thức mà các bạn đã biết trong chương trình phổ thông.

► **Đường cong tham số:**

Nếu đường cong (C) cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ thì:

$$k=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Công thức 1.3 Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x(t_0),y(t_0))$ chính quy:

$$\boxed{(d):\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}}$$

Nói cách khác, véc tơ tiếp tuyến của đường cong C tại điểm $M(x(t_0),y(t_0))$ là $\vec{n}=(x'(t_0),y'(t_0))$.

Công thức 1.4 Phương trình pháp tuyến tại M :

$$\boxed{(d'):x'(t_0)\cdot(x-x(t_0))+y'(t_0)\cdot(y-y(t_0))=0}$$

1.2.2 Hình bao của họ đường cong

1.2.2.1 Định nghĩa:

Định nghĩa 1.8 Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc (E) đều tồn tại một đường cong của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được goi là **hình bao** của họ đường cong (L).

1.2.2.2 Quy tắc tìm hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số:

Công thức 1.5 Cho họ đường cong $F(x,y,c) = 0$ phụ thuộc một tham số c. Nếu họ đường cong trên không có **điểm kì dị** thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào 2 phương trình trong hệ trên, ta khử c đi, rút ra được 1 phương trình mối liên hệ giữa x và y. Đây chính là phương trình của hình bao (E).

1.2.2.3 Các lưu ý khi tìm hình bao:

R

- Xét đến điểm kì dị: $M(x_0,y_0)$ là điểm kì dị của đường cong $F(x,y) = 0$ khi $F'_x(x_0,y_0) = 0$ và $F'_y(x_0,y_0) = 0$
- Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình trên bao gồm **hình bao** (E) **và quỹ tích các điểm kì dị** thuộc họ các đường cong đã cho.

1.2.3 Ví dụ

Ví dụ 1.3 Viết phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến với đường cong $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^3} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ tại điểm $A(2,2)$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có : $\begin{cases} x'_t = -\dfrac{3}{t^4} - \dfrac{2}{t^3} \\ y'_t = -\dfrac{9}{2t^4} - \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$. Tại điểm $A(2,2) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x'_t(A) = -\dfrac{3}{1^4} - \dfrac{2}{1^3} = -5 \\ y'_t(A) = -\dfrac{9}{2.1^4} - \dfrac{1}{2.1^2} = -5 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm $A(2;2)$ là:

$$\frac{x - x(A)}{x'_t(A)} = \frac{y - y(A)}{y'_t(A)} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-2}{-5} \Leftrightarrow y = x.$$

Phương trình pháp tuyến của đường cong tại điểm $A(2;2)$ là:

$$(x'_t(A))(x - x(A)) + (y'_t(A))(y - y(A)) = 0 \Leftrightarrow -5(x-2) - 5(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Ví dụ 1.4 Tìm hình bao của họ đường cong $y = cx + \dfrac{1}{c}$ (L)

[Hướng dẫn giải]

Đặt $F(x,y,c) = y - cx - \dfrac{1}{c} = 0$. Điều kiện : $c \neq 0$

Xét hệ: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = -c = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 1 = 0 \end{cases}$. $\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm ki dị.

Xét hệ : $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-cx-\dfrac{1}{c}=0 \\ x-\dfrac{1}{c^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{c} \\ x=\dfrac{1}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow y^2=4x \ (E)$

Vậy hình bao của đường cong (L) đã cho là $y^2=4x$, trừ điểm $(0,0)$.

1.3 Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian

1.3.1 Đường cong trong không gian

Định nghĩa 1.9 Đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ là 1 hàm vecto:

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

▶ **Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho bởi phương trình tham số.**

Đường cong L trong không gian cho bởi hàm vecto $\vec{r}(t)$, có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$.

Khi đó, véctơ tiếp tuyến của $r(t)$ là: $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$.

Công thức 1.6 Phương trình tiếp tuyến của r tại điểm chính quy $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là:

$$\boxed{(d) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}}$$

Công thức 1.7 Phương trình pháp diện tại M là:

$$\boxed{(P) : x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0}$$

1.3.2 Mặt cong trong không gian

Định nghĩa 1.10 Phương trình mặt cong trong không gian: $(S) : f(x,y,z) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ được gọi là điểm chính quy nếu:

$$[f'_x(x_0,y_0,z_0)]^2 + [f'_y(x_0,y_0,z_0)]^2 + [f'_z(x_0,y_0,z_0)]^2 > 0$$

▶ **Phương trình pháp tuyến và phương trình tiếp diện của mặt cong.**

Cho mặt cong $S : f(x,y,z) = 0$, có điểm chính quy $M(x_0, y_0, z_0)$. Vecto pháp tuyến của S tại điểm M là: $\vec{n} = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$.

Công thức 1.8 Phương trình pháp tuyến tại M là:

$$\boxed{(d) : \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}}$$

Công thức 1.9 Phương trình tiếp diện tại M là:

$$\boxed{(P) : f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) + f'_z(M)(z - z_0) = 0}$$

1.3.3 Đường cong cho dưới dạng giao của 2 mặt cong

▶ Cho đường cong xác định bởi giao của 2 mặt cong sau: $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

• Đặt $\vec{n_f} = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$ là **vecto pháp tuyến** của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $f(x,y,z) = 0$

tại M.

• Đặt $\vec{n}_g = (g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M))$ là **vecto pháp tuyến** của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $g(x,y,z)=0$ tại M.

• Khi đó $\vec{n}_f \wedge \vec{n}_g$ là **vecto chỉ phương của tiếp tuyến** đường cong đã cho tại M.

1.3.4 Ví dụ

Ví dụ 1.5 Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2+y^3+z^2-2xyz-6=0$ tại điểm $P(1;2;3)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $F(x,y,z) = x^2+y^3+z^2-2xyz-6$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x(x,y,z) = 2x-2yz \\ F'_y(x,y,z) = 3y^2-2xz \\ F'_z(x,y,z) = 2z-2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(1,2,3) = -10 \\ F'_y(1,2,3) = 6 \\ F'_z(1,2,3) = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n} = (-10,6,2) = -2(5,-3,-1)$ là vecto pháp tuyến của mặt cong tại P

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến tại P là: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-1}$

Phương trình tiếp diện tại P là: $5(x-1)-3(y-2)-(z-3)=0 \Rightarrow 5x-3y-z+4=0$

Ví dụ 1.6 Cho đường cong xác định bởi giao của 2 mặt cong sau $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x^2yz=0 \\ x^3+y+z^2-3xy=0 \end{cases}$

Hãy viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại điểm $A(1,1,1)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3x^2yz \\ g(x,y,z) = x^3+y+z^2-3xy \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2x-6xyz \\ f'_y(x,y,z) = 2y-3x^2z \\ f'_z(x,y,z) = 2z-3x^2y \\ g'_x(x,y,z) = 3x^2-3y \\ g'_y(x,y,z) = 1-3x \\ g'_z(x,y,z) = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,1,1) = -4 \\ f'_y(1,1,1) = -1 \\ f'_z(1,1,1) = -1 \\ g'_x(1,1,1) = 0 \\ g'_y(1,1,1) = -2 \\ g'_z(1,1,1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_f} = (-4,-1,-1) \\ \overrightarrow{n_g} = (0,-2,2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_f} \times \overrightarrow{n_g} = (-4,8,8) = 4(1,-2,-2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n} = (1,-2,-2)$ là vecto chỉ phương của tiếp tuyến tại A

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến tại P là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

Phương trình tiếp diện tại P là:$(x-1)-2(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow x-2y-2z+3=0$

1.4 Độ cong của đường cong

1.4.1 Định nghĩa và ý nghĩa

Cho đường cong $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Khi đó véctơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}(t)$ được xác định bởi: $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$

Định nghĩa 1.11 Độ cong của đường cong $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ là $C = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$, ở đó $\mathbf{T}(t)$ là hàm tiếp tuyến đơn vị của đường cong và $s(t)$ là hàm độ dài.

► **Ý nghĩa:** Độ cong của đường cong tại một điểm P là một đại lượng đo "tốc độ" thay đổi hướng của đường cong tại điểm P đó. Một cách cụ thể, người ta định nghĩa độ cong của đường cong tại điểm P là "tốc độ" thay đổi của véctơ tiếp tuyến đơn vị theo độ dài cung tại điểm P đó.

Ta có:
$$C = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

1.4.2 Các công thức tính độ cong

► **Công thức tổng quát:**

Công thức 1.10 Độ cong của đường cong $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ được cho bởi công thức:

$$\boxed{C(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}} \qquad (*)$$

► **Độ cong của đường cong trong mặt phẳng**

Công thức 1.11 Nếu đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì ta áp dụng công thức $(*)$ với hàm véctơ $\mathbf{r} = (x, f(x), 0) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ta được:

$$\boxed{C(M) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

.

Công thức 1.12 Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì áp dụng công thức $(*)$ với hàm véctơ $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ta được:

$$\boxed{C(M) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

.

Công thức 1.13 Nếu đường cong cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực

$$\boxed{r = r(\varphi) \text{ thì: } C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

► **Độ cong của đường cong trong không gian**

Công thức 1.14 Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ thì:

$$\boxed{C(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

1.4.3 Ví dụ

Ví dụ 1.7 Tính độ cong tại điểm ứng với $t = 0$ của đường $\begin{cases} x = e^t + \sin t, \\ y = e^t - \cos t. \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $x' = e^t + \cos t, x'' = e^t - \sin t, y' = e^t + \sin t, y'' = e^t + \cos t$.
Độ cong tại điểm $M(1;0)$ ứng với $t = 0$ là

$$C(M) = \frac{|2 \times 2 - 1 \times 1|}{(2^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

Ví dụ 1.8 Cho đường cong (L) trong không gian cho bởi hàm vecto $\overrightarrow{r(t)}$, có phương trình tham số $x(t) = t^2, y(t) = 3t^2 + t, z(t) = t^3$.Tính độ cong của đường cong tại điểm $M(1,4,1)$.

[Hướng dẫn giải]

Do $\overrightarrow{r(t)} = (t^2, 3t^2 + t, t^3) \Rightarrow \overrightarrow{r'(t)} = (2t, 6t + 1, 3t^2) \Rightarrow \overrightarrow{r''(t)} = (2, 6, 6t)$

Tại $M(1,4,1) \Rightarrow t = 1$. Thay $t = 1$ vào ta tính được $\overrightarrow{r'(1)} = (2,7,3), \overrightarrow{r''(1)} = (2,6,6)$

$\Rightarrow \overrightarrow{r'(1)} \times \overrightarrow{r''(1)} = (24, -6, -2)$

Do độ cong của đường cong L cho bởi công thức:

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{|\overrightarrow{r'(t)} \times \overrightarrow{r''(t)}|}{|\overrightarrow{r'(t)}|^3}$$

$$\Rightarrow C(M) = \frac{|\overrightarrow{r'(1)} \times \overrightarrow{r''(1)}|}{|\overrightarrow{r'(1)}|^3} = \frac{2\sqrt{154}}{62\sqrt{62}}$$

2. Tích phân bội

2.1 Tích phân kép

2.1.1 Định nghĩa, điều kiện khả tích và tính chất của tích phân kép

Định nghĩa 2.1 Cho $z = f(x,y)$ là một hàm hai biến xác định trên miền đóng và bị chặn D.

- Phân hoạch miền D một cách tùy ý thành các miền con $D_1, D_2, \dots, D_n$ sao cho các D_k không giao nhau ngoại trừ biên của chúng.
- Gọi ΔS_k là diện tích của miền con D_k.
- Đặt $d(D_k)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong D_k và $\mathrm{d} = \max\limits_{1 \le k \le n} d(D_k)$.
- Lấy M_k là điểm tùy ý trong D_k.
- Tổng tích phân của $f(x,y)$ trên miền D là $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k).\Delta S_k$.

Nếu $\lim\limits_{d \to 0} I_n$ tồn tại không phụ thuộc vào cách phân hoạch miền D và cách chọn các điểm M_k trong mỗi miền D_k, thì giới hạn này được gọi là tích phân kép của hàm f trên miền D. Kí hiệu là

$$\iint\limits_D f(x,y)dS.$$

Lúc đó, ta nói hàm $f(x,y)$ khả tích trên miền D.

Giả sử $f(x,y)$) khả tích trên miền D. Khi đó, việc tính tích phân kép không phụ thuộc cách phân hoạch miền D. Do đó, ta có thể phân hoạch miền D theo các đường song song với các trục tọa độ. Lúc đó, $\Delta S_k = \Delta x.\Delta y$ và ta có thể viết như sau:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}$$

► **Điều kiện khả tích:**

Định lý 2.1 Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì f khả tích.

► **Các tính chất:** Cho $f(x,y)$, $g(x,y)$ là các hàm khả tích trên miền $D \in \mathbb{R}^2$, và c, m, M là các số thực. Khi đó,

- $\displaystyle\iint_D dxdy = S(D) =$ diện tích miền D.
- $\displaystyle\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy;$
- $\displaystyle\iint_D c.f(x,y)dxdy = c.\iint_D f(x,y)dxdy;$
- Nếu D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không giẫm lên nhau

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

.

- Nếu $f(x,y) \le g(x,y) \forall (x,y) \in D$ thì $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy.$
- Nếu $m \le f(x,y) \le M \forall (x,y) \in D$ thì $\displaystyle m.S \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M.S$, trong đó S là diện tích miền D.

2.1.2 Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

2.1.2.1 Tích phân có miền là hình chữ nhật hoặc hình thang cong

Định lý 2.2 Nếu D là miền hình chữ nhật: $D = \{(x,y) | a \le x \le b; c \le y \le d\}$ và $f(x,y)$ liên tục trên D, thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad \textbf{(Định lý Fubini)}$$

.

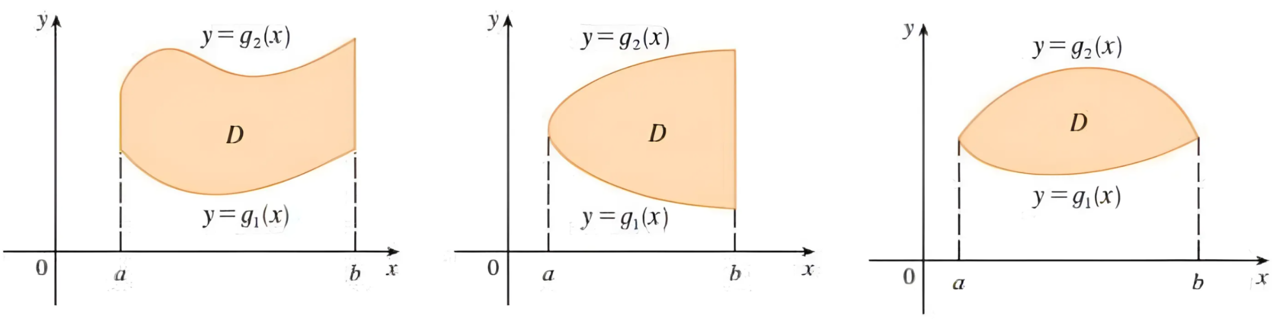
Đặc biệt, nếu $f(x,y)$ có thể phân tích thành tích của các hàm một biến, tức là $f(x,y) = g(x).h(y)$, thì tích phân kép trên miền $D = [a,b] \times [c,d]$ có thể viết thành tích của các tích phân xác định như sau:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)dy \right)}$$

Công thức 2.1 Nếu D là miền hình thang cong có cạnh song song Oy: $D = \{(x,y) | a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D và $y_1(x), y_2(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Một số miền có dạng hình thang cong có cạnh đáy song song với Oy:



Công thức 2.2 Nếu D là miền hình thang cong có các cạnh song song với Ox: $D = \{(x,y)|c \leq y \leq d;\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D và $x_1(y), x_2(y)$ là các hàm liên tục trên $[c;d]$ thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

2.1.2.2 Tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối

► Giả sử cần tính $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|dxdy$.

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối. Vì vậy ta khảo sát dấu của hàm $f(x,y)$. Do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường cong $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền, D^+ và D^-.

Công thức 2.3 Trên miền $D^+, f(x,y) \geq 0$, và trên miền $D^-, f(x,y) \leq 0$. Ta có công thức:

$$\boxed{\iint_D |f(x,y)|dxdy = \iint_{D^+} f(x,y)dxdy + \iint_{D^-} -f(x,y)dxdy} \qquad (*)$$

► Các bước tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

- Bước 1: Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để tìm đường cong phân chia miền D.
- Bước 2: Giả sử đường cong tìm được chia miền D thành 2 miền. Để xác định miền nào là D^+, miền nào là D^-, ta xét một điểm (x_0, y_0) bất kì, sau đó tính giá trị $f(x_0, y_0)$. Nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì miền chứa (x_0, y_0) là D^+ và ngược lại.
- Bước 3: Sau khi xác định được các miền D^+, D^-, sử dụng công thức $(*)$ để tính tích phân.

2.1.2.3 Tích phân có miền lấy tích phân là miền đối xứng

Công thức 2.4 Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng với Oy) và hàm là **hàm lẻ** đối với y (tương ứng đối với x) thì:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = 0}$$

Công thức 2.5 Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng với Oy) và hàm là **hàm chẵn** đối với y (tương ứng đối với x) thì:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D^+} f(x,y)dxdy}$$

trong đó D^+ là phần nằm bên trên trục Ox của D (tương ứng phía phải trục Oy của D).

Công thức 2.6 Nếu miền D là miền đối xứng qua **gốc tọa độ O** và hàm $f(x,y)$ thỏa mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì:

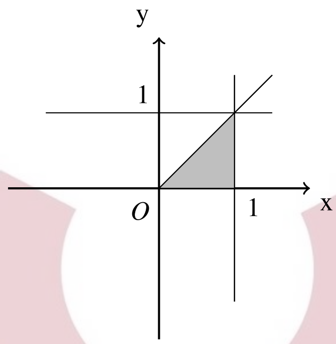
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = 0}$$

Ví dụ 2.1 Tính tích phân kép $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$.

[Hướng dẫn giải]

Ta thấy tích phân $\int_y^1 e^{x^2}dx$ không tính được qua các hàm sơ cấp, vì vậy nếu tính trực tiếp tích phân trên là vô cùng phức tạp. Lúc này nên nghĩ tới việc đổi thứ tự lấy tích phân qua 3 bước:

+ B1: Xác định miền D
+ B2: Biểu diễn miền D trên đồ thị
+ B3: Dựa vào hình vẽ thay đổi thứ tự lấy tích phân

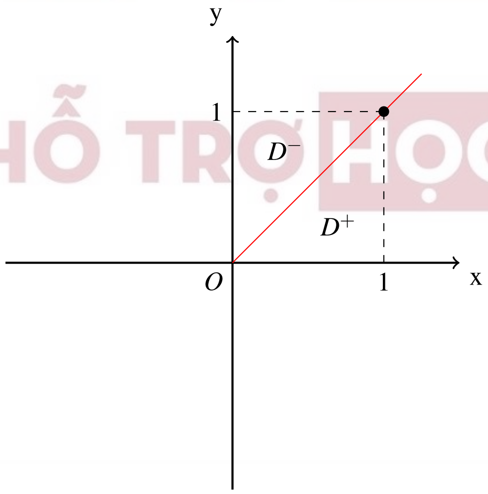


Từ hình vẽ ta có: $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=\int_0^1 dx.e^{x^2}y\Big|_{y=0}^{y=x}=\int_0^1 x.e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{e-1}{2}$

Ví dụ 2.2 Tính tích phân $I=\iint\limits_D |x-y|\,dxdy$ với $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$

[Hướng dẫn giải]



Từ hình vẽ suy ra $D=D^+\cup D^-$, trong đó $D^+:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$ và $D^-:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D^+} (x-y)\,dxdy + \iint\limits_{D^-} (y-x)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)dy + \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)dy$$
$$= \int_0^1 dx \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} + \int_0^1 dx \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3}$$

2.1.3 Tính tích phân kép bằng cách đổi hệ tọa độ

2.1.3.1 Công thức đổi biến trong tích phân kép

Công thức 2.7 Giả sử ta cần tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Thực hiện phép đổi biến $x = x(u,v), y = y(u,v)$ và tính định thức Jacobi: $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$, $\forall (u,v) \in D'$. Khi đó:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v)).|J|dudv}$$

2.1.3.2 Tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Công thức 2.8 Xét tọa độ cực của một điểm M là (r,φ) trong đó: $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}), r = |\overline{OM}|$

Giả sử M có tọa độ (x,y) trong Oxy, ta đặt $\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ |J| = r \end{cases}$. Công thức tính tích phân trong hệ tọa độ cực:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi)rdrd\varphi}$$

R

Thường biến đổi sang hệ tọa độ cực khi miền lấy tích phân là 1 phần hình tròn.

Ví dụ 2.3 Tính tích phân $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ với miền $D: \begin{cases} x \le y \le x+2 \\ -y \le 2x \le 3-y \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

Từ miền $D: \begin{cases} x \le y \le x+2 \\ -y \le 2x \le 3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y-x \le 2 \\ 0 \le 2x+y \le 3 \end{cases}$

Đổi biến: $\begin{cases} u = y-x \\ v = 2x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v-u}{3} \\ y = \dfrac{v+2u}{3} \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{1}{3}$. Miền D trở thành miền D' : $\begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} \frac{v-u+2u+v}{3}.\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{9}\int_0^2 du \int_0^3 (u+2v)dv = \frac{8}{3}$$

Ví dụ 2.4 Tính tích phân $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ với $D: x^2+y^2 \le 2y$

[Hướng dẫn giải]

Lưu ý: Với bài này nhiều người sẽ đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\varphi \end{cases}$, tuy nhiên ta nên ưu tiên biến đổi sao cho biểu thức tích phân dễ tính thay vì biến đổi đưa về miền D dễ tính.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Từ $x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow r^2 \leq 2r\sin\varphi \Leftrightarrow r \leq 2\sin\varphi$

Lại có $r \geq 0 \Rightarrow 2\sin\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$. Miền D trở thành: $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r.rdr = \int_0^{\pi} \frac{8}{3}\sin^3\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} (3\sin\varphi - \sin 3\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{2}{3}\left(-3\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{32}{9}$$

2.1.4 Ứng dụng của tích phân kép

► **Tính thể tích một vật thể hình trụ:**

Công thức 2.9 Vật hình trụ có đáy là miền $D \subset$ mặt phẳng Oxy, mặt trên có phương trình $z = f(x,y)$ ($f(x,y) \geq 0$, liên tục trên D). Thể tích của vật thể ấy là:

$$\boxed{V = \iint_D f(x,y)dxdy}$$

► **Tính diện tích hình phẳng:**

Công thức 2.10 Diện tích hình phẳng xác định trên miền D là:

$$\boxed{S = \iint_D dxdy}$$

► **Tính diện tích mặt cong:**

Công thức 2.11 Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x,y), f(x,y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D. (D là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy). Diện tích mặt phẳng S là

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy}$$

Ví dụ 2.5 Tính thể tích vật thể trong không gian $Oxyz$ giới hạn bởi 2 mặt $x^2 + y^2 + z = 4$ và $z = 2$

[Hướng dẫn giải]

Nhận xét: Mặt phía trên là mặt paraboloid: $z = 4 - x^2 - y^2$

Mặt phía dưới là mặt phẳng $z = 2$. $\Rightarrow 2 \leq 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

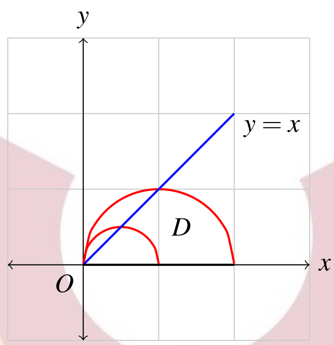
$$\Rightarrow V = \iint_{x^2+y^2\leq 2} (4 - x^2 - y^2 - 2)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$, miền D trở thành: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)rdr = 2\pi.\int_0^{\sqrt{2}} (2r-r^3)dr = 2\pi.\left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Ví dụ 2.6 Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường: $x^2+y^2 = 2x, x^2+y^2 = 4x, y = x, y = 0$.

[Hướng dẫn giải]



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r.$

Từ $2x \le x^2+y^2 \le 4x \Rightarrow 2r\cos\varphi \le r^2 \le 4r\cos\varphi \Leftrightarrow 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi$

Ta có $4\cos\varphi \ge 2\cos\varphi \ge 0$ suy ra $\cos\varphi \ge 0 \Rightarrow \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

Lại có $0 \le y \le x \Rightarrow 0 \le r\sin\varphi \le r\cos\varphi \Rightarrow 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. Miền D trở thành: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow S_D = \iint\limits_D rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+3\cos 2\varphi)d\varphi$$

$$= \left(3\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2.7 Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong miền giới hạn $D : x^2+y^2 \le 2x$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow S = \iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}S_D = \sqrt{2}$$

(do miền D giới hạn bởi đường tròn có bán kính là 1)

2.2 Tích phân bội ba

2.2.1 Định nghĩa, điều kiện khả tích và tính chất của tích phân bội ba

2.2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.2 Cho hàm ba biến $z = f(x,y,z)$ trên miền V đóng và bị chặn trong không gian $Oxyz$.

- Chia miền V một cách tùy ý thành n khối $V_1,\dots,V_n$ sao cho các V_k không giao nhau ngoại trừ biên.
- Gọi ΔV_k là thể tích của khối V_k.
- Đặt $d(V_k)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong khối V_k, và đặt $d = \max\limits_{1\le k\le n} d(V_k)$.
- Lấy điểm M_k tùy ý trong mỗi khối V_k.
- Tổng tích phân của f trên miền V là $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k).\Delta V_k$

Nếu $\lim\limits_{d\to 0} I_n$ tồn tại không phụ thuộc vào cách phân hoạch miền V và cách chọn các điểm M_k trong mỗi khối V_k, thì giới hạn này được gọi là tích phân bội ba của hàm f trên miền V, kí hiệu là

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$$

Lúc đó, ta nói hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên miền V.

Giả sử hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên miền V. Khi đó, việc tính tích phân bội ba không phụ thuộc cách phân hoạch miền V. Do đó, ta có thể phân hoạch miền V theo họ các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Lúc đó, $\Delta V_k = \Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$ và ta có thể viết như sau:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz}$$

2.2.1.2 Định lý Fubini

► **Đổi thứ tự lấy tích phân - Định lý Fubini:**

Định lý 2.3 Nếu f liên tục trên hình hộp $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, thì f khả tích trên B và

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x,y,z)dxdydz}$$

R Tích phân bội ba trên hình hộp có thể được tính theo sáu thứ tự khác nhau.

► **Hệ quả của Định lý Fubini:** Đặc biệt, nếu $f(x,y,z)$ có thể phân tích thành tích của các hàm một biến, tức là $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, thì tích phân bội ba trên miền $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ có thể viết thành tích của các tích phân xác định như sau:

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B g(x)h(y)k(z)dxdydz = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)dy\right)\cdot\left(\int_r^s k(z)dz\right)}$$

2.2.1.3 Các tính chất

Cho $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ là các hàm khả tích trên miền $D\in\mathbb{R}^2$, và α,β,m,M là các số thực. Khi đó,

- $\iiint\limits_V [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dxdydz = \alpha\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz + \beta\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$

- Nếu V được chia thành 2 miền con V_1, V_2 không giao nhau trừ trên biên, thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

- Nếu $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ trong V thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \le \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

Đặc biệt, hàm $|f(x,y,z)|$ cũng khả tích trong V, và

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz$$

- Nếu $m \le f(x,y,z) \le M$ trong V. Khi đó,

$$m.\text{Vol}(V) \le \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \le M.\text{Vol}(V)$$

với $\text{Vol}(V)$ là **thể tích** của V.
- Nếu miền lấy tích phân V **đối xứng** qua mặt phẳng $x=0$ (tương ứng $y=0, z=0$) và $f(x,y,z)$ là hàm lẻ theo biến x (tương ứng y,z), thì khi đó

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = 0}$$

2.2.2 Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes:

Công thức 2.12 Nếu miền $V = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$, trong đó $f_1(x,y), f_2(x,y)$ là các hàm liên tục trên miền D thì

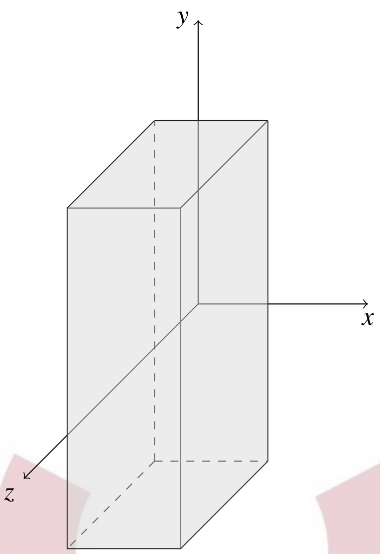
$$\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \rho(x,y,z)dz\right] dxdy$$

R Nếu miền $V = \{(x,y,z)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$ thì

$$\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \rho(x,y,z)dxdydz$$

Ví dụ 2.8 Tính $I = \iiint_V xy^2 dxdydz$, với $V: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \\ 1 \le z \le 3 \end{cases}$

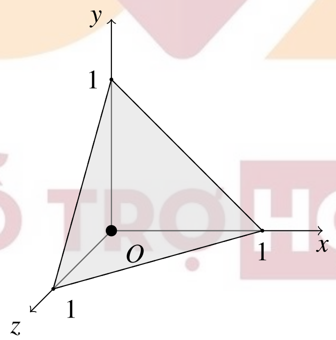
[Hướng dẫn giải]



$$I = \iiint\limits_V xy^2 dxdydz = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 dy \int_1^3 xy^2 dz = \int_0^1 xdx \int_{-1}^2 y^2 dy \int_1^3 1.dz$$
$$= \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{y=1}^{y=2} \cdot z\Big|_{z=1}^{z=3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3.$$

Ví dụ 2.9 Tính $I = \iiint\limits_V zdxdydz$, biết V là khối tứ diện giới hạn bởi 4 mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.

[Hướng dẫn giải]



Ta có $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\right\}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \int_0^1 dx \frac{-1}{2} \cdot \frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1-x}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^3}{3} dx = \frac{1}{24}$$

2.2.3 Tính tích phân bội ba bằng cách đổi hệ tọa độ

2.2.3.1 Công thứ đổi biến trong tích phân bội ba:

Công thức 2.13 Giả sử ta cần tính tích phân $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

Thực hiện phép biến đổi $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ sao cho

Định thức Jacobi:

$$J = \frac{D(x,y,z}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

Nếu $J \neq 0$, thì

$$\frac{1}{J} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$$

Công thức cho đổi biến trong tích phân bội ba với giả thiết $J \neq 0$:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big).|J|dudvdw}$$

2.2.3.2 Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ:

► Xét tọa độ của một điểm P trong hệ tọa độ trụ là (r,φ,z) với (r,φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy và z là cao độ của P.

Giả sử P có tọa độ (x,y,z) trong $Oxyz$, ta có biến đổi $\begin{cases} x = & r.\cos\varphi \\ y = & r.\sin\varphi \\ z = & z \end{cases} \quad (x^2+y^2=r^2)$

Trong đó $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ và $|J| = r$

Công thức 2.14 Giả sử V là miền trong $Oxyz$ có thể được biểu diễn trong tọa độ trụ $Or\varphi z$ như sau:

$$V = \{(r,\varphi,z)\,|\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq \varphi_2, f_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \leq z \leq f_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\}$$

Khi đó, ta có:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int_{f_1(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}^{f_2(r\cos\varphi,r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdz}$$

2.2.3.3 Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

► Xét tọa độ của một điểm P trong hệ tọa độ cầu là (r,φ,θ), trong đó $r = |OP|$, φ là góc như trong tọa độ trụ, và θ là góc tạo bởi tia Oz và tia OP. Khi đó ta có công thức chuyển đổi giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu: $\begin{cases} x = & r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = & r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = & r.\cos\theta \end{cases}$

Trong đó: $r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad$ và $\quad x^2+y^2+z^2 = r^2$

Định thức Jacobi: $J = -r^2\sin\theta$

Công thức 2.15 Giả sử miền vật thể V có thể biểu diễn trong tọa độ cầu như sau:

$$V = \{(r,\theta,\varphi)\,|a \le r \le b, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \alpha \le \varphi \le \beta\}$$

Khi đó,

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_a^b f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr}$$

Ví dụ 2.10 Tính $I = \iiint\limits_V 2dxdydz$ với $V : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} \le 1,\ z \ge 0$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $\dfrac{x}{3} = u, \dfrac{y}{2} = v, \dfrac{z}{1} = w$. Ta có $x = 3u, y = 2v, z = w$. Ta có

$$J = \begin{vmatrix} x'_y & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Miền V trở thành V' : $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \\ w \ge 0 \end{cases}$

Do đó, ta có :

$$I = \iiint\limits_V 2dxdydz = \iiint\limits_{V'} 2\cdot|6|dudvdw = 12\iiint\limits_{V'} dudvdw = 12\cdot\frac{1}{2}\cdot V = 6\cdot\frac{4\pi\cdot r^3}{3} = 6\cdot\frac{4\pi\cdot 1^3}{3} = 8\pi$$

(V' là mặt cầu bán kính bằng $r = 1$).

Ví dụ 2.11 Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ với $V : x^2+y^2 \le 1, 1 \le z \le 2$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |J| = r \\ r^2 = x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$. Khi đó, ta có :

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_1^2 r^2\cdot rdzdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr.r^3\cdot z\Big|_{z=1}^{z=2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1}\right) d\varphi = \frac{1}{4}.\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 2.12 Tính $I = \iiint\limits_V \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, với $V : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\ (a,b,c > 0)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt

$$\begin{aligned} x &= ar\sin\theta\cos\varphi \\ y &= br\sin\theta\sin\varphi \\ z &= cr\cos\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow |J| = abcr^2\sin\theta.$

Ta có $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1 \Leftrightarrow r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \le 1 \Rightarrow 0\le r\le 1.$

Đặt $V' = \left\{(r;\varphi;\theta)\mid 0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\theta\le\pi\right\}$. Suy ra:

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz = \int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi} r^2.r^2.abc.\sin\theta.d\theta \\ &= abc\int_0^1 r^4dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = abc.\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{r=1}.2\pi.(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{4\pi}{5}abc. \end{aligned}$$

2.2.4 Ứng dụng của tích phân bội ba:

► **Tính thể tích vật thể:**

Công thức 2.16 Nếu $f(x,y,z)=1$ với mọi $(x,y,z)\in V$. Khi đó, thể tích khối V là:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V dxdydz}$$

► **Tính khối lượng vật thể không đồng chất:**

Công thức 2.17 Cho vật thể V trong không gian $Oxyz$. Nếu khối lượng riêng của vật thể là hàm liên tục $\rho(x,y,z)$ thì khối lượng của vật thể đó là:

$$\boxed{m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz}$$

3. Tích phân phụ thuộc tham số

3.1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số

3.1.1 Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Định nghĩa 3.1 Xét $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, trong đó $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mỗi $y \in [c,d]$. Tích phân này được gọi là tích phân phụ thuộc tham số y.

3.1.1.1 Tính liên tục

Định lý 3.1 Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và:

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\, dx = \int_a^b f(x,y_0)\, dx = I(y_0)}$$

3.1.1.2 Tính khả vi

Định lý 3.2 Nếu $f(x,y)$ liên tục theo x trên $[a,b]$ với $\forall y \in [c,d]$ và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c,d) và:

$$\boxed{I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx}$$

3.1.1.3 Tính khả tích

Định lý 3.3 Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$ và:

$$\boxed{\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx}$$

Ví dụ 3.1 Tính: $A = \lim\limits_{y \to 0} \int\limits_0^2 x^4 \cos x^2 y dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Xét hàm số $f(x,y)=x^4\cos x^2y$ là hàm số liên tục trên $[0,2]\times[-1,1]$.

Do đó, hàm số $I(y)=\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^4\cos x^2y\,dx$ liên tục trên $[-1,1]$.

Mà đoạn $[-1,1]$ chứa điểm 0, do đó, $I(y)$ liên tục tại $y=0$.

+) Vậy ta có: $A=\lim\limits_{y\to 0}I(y)=\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^4\cos x^2y\,dx=\int\limits_0^2\left(\lim\limits_{y\to 0}x^4\cos x^2y\right)\,dx=\int\limits_0^2 x^4dx=\dfrac{32}{5}$.

Ví dụ 3.2 Tính tích phân: $I(y)=\int\limits_0^1\arctan\dfrac{x}{y}dx$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ có:

- $f(x,y)$ liên tục trên $[0;1]\times[c;d]$ với $0\notin[c;d]$
- $f'_y(x,y)=\dfrac{-x}{y^2(1+\frac{x^2}{y^2})}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ liên tục trên $[1;0]\times[c;d]$ với $0\notin[c;d]$

$\Rightarrow I(y)$ khả vi $\forall\, y\neq 0$

$\Rightarrow I'(y)=\int\limits_0^1\dfrac{-x}{x^2+y^2}dx=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y^2}{y^2}$

$$\begin{aligned}
+)\ I(y)&=\frac{-1}{2}\int\ln\frac{1+y^2}{y^2}dy=\frac{-1}{2}\int\ln\frac{1+y^2}{y^2}dy\\
&=\frac{-1}{2}\left(y\cdot\ln\frac{1+y^2}{y^2}-\int yd\left(\ln\frac{1+y^2}{y^2}\right)\right)\\
&=\frac{-1}{2}\left(y\cdot\ln\frac{1+y^2}{y^2}-\int y\cdot\frac{-2}{y^3}\cdot\frac{y^2}{1+y^2}dy\right)\\
&=\frac{-1}{2}\left(y\cdot\ln\frac{1+y^2}{y^2}+2\int\frac{dy}{1+y^2}\right)\\
&=\frac{-y}{2}\cdot\ln\frac{1+y^2}{y^2}-\arctan y+C
\end{aligned}$$

+) Thay $y=1$ vào ta có:

$I(1)=\int_0^1\arctan x\,dx=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 xd(\arctan x)=\dfrac{\pi}{4}-\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx$

$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$

+) Mà $I(1)=\dfrac{-1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}+C\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$

Vậy $I(y)=\dfrac{-y}{2}\cdot\ln\dfrac{1+y^2}{y^2}-\arctan y+\dfrac{\pi}{2}$

3.1.2 Tích phân xác định với cận biến đổi

Xét tích phân $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx$ với $y\in[c,d]$, $a\le\ a(y),b(y)\ \le b\ \forall\, y\in[c,d]$.

3.1.2.1 Tính liên tục

Định lý 3.4 Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, các hàm số $a(y),b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ thỏa mãn điều kiện $a\leq\ a(y),b(y)\ \leq b\ \forall\ y\in[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục đối với y trên $[c,d]$.

3.1.2.2 Tính khả vi

Định lý 3.5 Nếu hàm số $f(x,y), f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ và các hàm $a(y),b(y)$ khả vi trên $[c,d]$ thỏa mãn điều kiện $a\leq\ a(y),b(y)\ \leq b\ \forall\ y\in[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi đối với y trên $[c,d]$ và:

$$\boxed{I'(y)=f(b(y),y).b'_y(y)-f(a(y),y).a'_y(y)+\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx}$$

Ví dụ 3.3 Tính $B=\lim\limits_{x\to 1}\int\limits_{\cos x}^{x+1}\dfrac{dy}{1+y^2+x^3}$.

Nháp: Ta chọn $x\in[0,2]$ chứa $x=1$. Với $x\in[0,2]\Rightarrow \cos x\in[\cos 2,1]$, $(x+1)\in[1,3]$ nên ta chọn được cận $y\in[\cos 2,3]$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $I(x)=\int\limits_{\cos x}^{x+1}\dfrac{dy}{1+y^2+x^3}; f(x,y)=\dfrac{1}{1+y^2+x^3}$.

+) Nhận thấy $f(x,y)$ liên tục trên $D=[0,2]\times[\cos 2,3]$.

+) Các hàm số: $\alpha(x)=\cos x$, $\beta(x)=x+1$ liên tục $\forall$ x $\in[0,2]$ và $\alpha(x),\beta(x)\in[\cos 2,3]\ \forall x\in[0,2]$.

Do đó $I(x)$ liên tục trên $[0,2]\ \Rightarrow\ I(x)=\int\limits_{\cos x}^{x+1} f(x,y)dy$ liên tục tại $x=1$.

+) Vậy ta có:

$$B=\lim_{x\to 1} I(x)=I(1)=\int\limits_{\cos 1}^{2}\frac{dy}{2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\cos 1}^{2}=\frac{\arctan(\sqrt{2})-\arctan(\frac{\cos 1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}$$

Ví dụ 3.4 Cho $I(y)=\int\limits_{0}^{y}\dfrac{\ln(1+yx)}{1+x^2}dx$. Tính $I'(2)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\Rightarrow f'_y(x,y)=\dfrac{x}{(1+yx)(1+x^2)}$

+) Nhận thấy:

- $f(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$
- $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$
- $B(y)=y$ và $A(y)=0$ khả vi trên $[0,+\infty)$ nên ta có $I(y)$ khả vi trên $[0,+\infty)$

$\Rightarrow I(y)$ khả vi trên $[0,+\infty)$ và: $I'(y)=\displaystyle\int_0^y\frac{x}{(1+yx)(1+x^2)}+\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$

+) $I'(2) = \int_0^2 \frac{x}{(1+2x)(1+x^2)} + \frac{\ln(5)}{5} = \frac{1}{5}\int_0^2 \left(\frac{x+2}{1+x^2} - \frac{2}{1+2x}\right) dx + \frac{\ln(5)}{5}$

$= \frac{1}{10}\ln(1+x^2)\Big|_0^2 + \frac{2}{5}\arctan(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{5}\ln(1+2x)\Big|_0^2 + \frac{\ln 5}{5}$

$= \frac{1}{10}\ln(5) + \frac{2}{5}\arctan(2)$

Vậy $I'(2) = \frac{1}{10}\ln(5) + \frac{2}{5}\arctan(2)$.

3.2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét tích phân $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$, trong đó $f(x,y)$ là hàm số xác định trên $[a,+\infty] \times [c,d]$, với mỗi $y \in [c,d]$ cố định, $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$, $\forall b > a$.

3.2.1 Khái niệm tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định nghĩa 3.2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số là:

- Hội tụ tại điểm $y_0 \in [c,d]$: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, b(\varepsilon, y_0) > a$ (phụ thuộc vào ε và y_0) sao cho:

$$\boxed{\left| I(y_0) - \int_a^b f(x,y_0)dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x,y_0)dx \right| < \varepsilon,\ \forall b > b(\varepsilon, y_0)}$$

- Hội tụ trên $[c,d]$ nếu $I(y)$ hội tụ tại mọi $y \in [c,d]$.
- Hội tụ đều trên $[c,d]$: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, b(\varepsilon) > a$ (chỉ phụ thuộc vào ε mà không phụ thuộc y) sao cho:

$$\boxed{\left| I(y) - \int_a^b f(x,y)dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon,\ \forall b > b(\varepsilon),\ \forall y \in [c,d]}$$

Định lý 3.6 **(Tiêu chuẩn Weierstrass)** Nếu $|f(x,y)| \le g(x)\ \forall (x,y) \in [a,+\infty] \times [c,d]$ và nếu tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, thì tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$.

Ví dụ 3.5 Xét sự hội tụ đều của tích phân: $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(x^2+y+1)}{e^{2x+y^2}}dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\left| \dfrac{\arctan(x^2+y+1)}{e^{2x+y^2}} \right| \le \dfrac{\pi}{2e^{2x}}\ \forall (x,y) \in [0,+\infty] \times \mathbb{R}$

+) Mà $\int_0^{+\infty} \dfrac{\pi}{2e^{2x}}dx = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\pi}{2e^{2x}} = \dfrac{\pi}{-4e^{2x}}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{4}$ là tích phân xác định

$\Rightarrow I(y)$ hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass.

Vậy tích phân đã cho hội tụ đều $\forall y \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Tính chất của tích phân suy rộng hội tụ đều

3.2.2.1 Tính liên tục

Định lý 3.7 Nếu $f(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty] \times [c,d]$ và tích phân suy rộng $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c,d]$, và:

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = I(y_0)}$$

3.2.2.2 Tính khả vi

Định lý 3.8 Giả sử hàm số $f(x,y)$ xác định trên $[a,+\infty]\times[c,d]$ sao cho với mỗi $y\in[c,d]$, hàm số $f(x,y)$ liên tục đối với x trên $[a,+\infty]$ và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty]\times[c,d]$. Nếu tích phân suy rộng $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y\in[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên $[c,d]$ và:

$$\Rightarrow \boxed{I'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx}$$

3.2.2.3 Tính khả tích

Định lý 3.9 Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty]\times[c,d]$ và nếu tích phân suy rộng $I(y)$ hội tụ đều đối với $y\in[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$ và ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:

$$\boxed{\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx}$$

Ví dụ 3.6 Tính $A=\lim\limits_{y\to0}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Xét hàm số $f(x,y)=\frac{\cos(yx)}{1+x^2}$ là hàm số liên tục trên $[0;+\infty)\times\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ (1)

+) Ta có: $\left|\frac{\cos(yx)}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}=g(x)$.

Lại có: $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$ là tích phân xác định.

$\Rightarrow I(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx$ hội tụ đều với $\forall y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ theo tiêu chuẩn Weierstrass (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow I(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

$$\Rightarrow A=\lim_{y\to0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to0}\frac{\cos(yx)}{1+x^2}\right)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 3.7 Tính $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta thấy: $\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\frac{e^{-yx}}{x}\Big|_{y=\beta}^{y=\alpha}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-yx}}{x}\right)'_y dy=\int\limits_\alpha^{\beta} e^{-yx}dy$

Khi đó: $I = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{e}^{-yx}dy\right)dx.$

+) Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx}dx$ với $y \in [\alpha;\beta]$

Ta có: $f(x,y) = \mathrm{e}^{-yx}$ liên tục trên miền $[0;+\infty] \times [\alpha;\beta]$ (1)

Và: $\left|\mathrm{e}^{-yx}\right| \le \mathrm{e}^{-\alpha x}$, mà $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}dx$ hội tụ với $\alpha > 0$.

Do đó, theo tiêu chuẩn Weierstrass ta có: $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx}dx$ hội tụ đều (2).

+) Từ (1) và (2), ta có:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-yx}dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\left.\frac{-\mathrm{e}^{-yx}}{y}\right|_{x=0}^{x=+\infty}\right)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{y}dy = \ln|y|\Big|_{\alpha}^{\beta} = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

3.2.3 Một số tích phân quan trọng

Công thức 3.1 Tích phân Dirichlet

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$

Công thức 3.2 Tích phân Gauss

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Công thức 3.3 Tích phân Fresnel

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3.3 Tích phân Euler

3.3.1 Hàm Gamma

3.3.1.1 Định nghĩa:

Định nghĩa 3.3 Hàm Gamma: $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, xác định trên $(0, +\infty)$

3.3.1.2 Tính chất:

► Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, với $p > 0$. Ý nghĩa của tính chất này là ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$.

► Đặc biệt:

- $\Gamma(1) = 1$ nên $\Gamma(n) = (n-1)!\ \ \forall n \in \mathbf{N}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ nên $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ \ \forall n \in \mathbf{N}$

► Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}.(\ln^k x).e^{-x}dx$

► $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, với mọi $0 < p < 1$

3.3.2 Hàm Beta

3.3.2.1 Định nghĩa:

Định nghĩa 3.4

Dạng 1: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Dạng 2: $B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$

Dạng lượng giác: $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(t).\cos^{2q-1}(t)dt$

3.3.2.2 Tính chất:

► Tính đối xứng: $B(p,q) = B(q,p)$

► Hạ bậc:

$$\begin{cases} B(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q), & \text{nếu } p > 1 \\ B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$

Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm Beta ta chỉ cần xét trong khoảng $(0,1]$ x $(0,1]$ mà thôi.

► Đặc biệt, $B(1,1) = 1$ nên:

$$\begin{cases} B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ B(p,n) = \dfrac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)...(p+1)p}B(p,1), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

► Công thức liên hệ giữa hàm Beta và Gamma: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

► $B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$

Ví dụ 3.8 Tính $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $x^2 = t\ (t \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{cases}$.

+) Tại $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x \to +\infty$ thì $t \to +\infty$

+) Khi đó ta có:

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t.e^{-t}}{2} dt \quad = \frac{\Gamma(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3.9 Tính $\int_0^3 x^9 \sqrt[3]{(27-x^3)^2} dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $x = 3\sqrt[3]{t} \Rightarrow dx = t^{-\frac{2}{3}} dt$.

Đổi cận:

x	0	3
t	0	1

+) Khi đó ta có:

$$\int_0^3 x^9 \sqrt[3]{(27-x^3)^2} dx = 3^9 \int_0^1 t^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(27-27t)^2} dt = 3^{11} \int_0^1 t^{\frac{7}{3}} (1-t)^{\frac{2}{3}} dt$$

$$= 3^{11} \dot{B}\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) = 3^{11} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(5)}$$

$$= 3^7.56 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{4!} = \frac{7.3^6.\pi}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{14.3^6.\pi}{\sqrt{3}}$$

4. Tích phân đường

4.1 Tích phân đường loại 1

4.1.1 Định nghĩa và tính chất

4.1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 4.1 Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên đường cong $C = \overset{\frown}{AB}$, chia C thành n phần không đè nhau bởi các điểm
$A \equiv A_0, A_1, \dots A_n \equiv B$.
Gọi ΔS_i là độ dài cung thứ i là $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$.
Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, xét tổng $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$
Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ với $\forall$ cách chia C và mọi điểm M_i thìI được gọi là tích phân đường loại 1 của $f(x,y)$ trên C.
Kí hiệu: $I = \int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds$

Ví dụ 4.1 Tính $\int\limits_C 3ds$, $C: x^2 + y^2 = 4$ từ $A(0;-2)$ đến $B(0;2)$

[Hướng dẫn giải]

+) Chia cung AB thành n phần không đè nhau: $A_0 \equiv A, A_n \equiv B$

$$f(x,y) = 3 \Rightarrow f(M_i) = 3 \quad (M_i \text{ bất kì} \in \text{cung thứ } i)$$

+) Ta có: $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum\limits_{1}^{n} 3\Delta S_i = 3\sum\limits_{1}^{n} \Delta S_i = 3.\overset{\frown}{AB} = 3.2\pi = 6\pi$

+) Khi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 6\pi$ $\forall$ cách chia $\overset{\frown}{AB}$ $\forall$ điểm M_i.

Vậy $\int\limits_C 3ds = 6\pi$.

4.1.1.2 Sự tồn tại

Định lý 4.1 Hàm số $f(x,y)$ liên tục trên đường cong trơn C thì tồn tại $\int\limits_C f(x,y)ds$

4.1.1.3 Tính chất

► Tích phân đường loại 1 có tính cộng tính và tính tuyến tính tương tự tích phân xác định:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\alpha f+\beta g)(x,y)ds = \alpha \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds + \beta \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)ds$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x,y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} f(x,y)ds \text{ với } B \in \overset{\frown}{AC}$$

► Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung C.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)ds$$

► Nếu gọi l là chiều dài cung C thì $l = \int\limits_C ds$.

4.1.2 Công thức tính tích phân đường loại 1

Xét bài toán: Cho hàm f liên tục trên đường cong trơn C, tính tích phân đường loại 1 của hàm số f dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ trên C.

Công thức 4.1 **Nếu C cho bởi phương trình hàm hiện:** $y = y(x),\ a \le x \le b$

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x)).\sqrt{1+y'(x)^2}dx}$$

Tương tự, nếu C cho bởi phương trình hàm hiện: $x = x(y),\ a \le y \le b$

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(y),y).\sqrt{1+x'(y)^2}dy}$$

Ví dụ 4.2 Tính $I = \int\limits_C \frac{y}{2x}ds$ với $C: y = x+1$ nối $A(1,2)$ với $B(2,3)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y'(x) = 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

+) Khi đó ta có:

$$I = \int\limits_C \frac{y}{2x}ds = \int\limits_1^2 \frac{x+1}{2x}.\sqrt{1+1^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ln x)\Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2+1)$$

Công thức 4.2 **Nếu C cho bởi phương trình tham số:** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}$$

hay dưới dạng véctơ:

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}(t)))|\mathbf{r}'(t)|dt}$$

Ví dụ 4.3 $I = \int_C xyds$; C : $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$; $y \ge 0$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2cost \\ y'(t) = 2sint \end{cases}$

+) Khi đó ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t.\cos t\sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin t.\cos t.2\ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\ dt = -2\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

Công thức 4.3 **Nếu C là đường cong trong không gian:** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

hay dưới dạng véctơ:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}(t)))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

Ví dụ 4.4 Tính: $\int_C (x+y)ds$, với C: $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2 \\ z = t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$

[Hướng dẫn giải]

+) Từ giả thiết, ta có: $x'(t) = 1; y'(t) = \sqrt{6}t; z'(t) = 3t^2$

+) Khi đó tích phân cần tính:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}t^2\right)\sqrt{1^2+(\sqrt{6}t)^2+9t^4}dt \\
&= \int_0^1 \left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}t^2\right)(1+3t^2)dt = \int_0^1 \left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}t^2+3t^3+3\sqrt{\frac{3}{2}}t^4\right)dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{\sqrt{6}}t^3+\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{4}+\frac{14}{5\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

Công thức 4.4 **Nếu C cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\phi),\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2$**

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi)\sqrt{r^2(\phi)+r'^2(\phi)}d\phi$$

4.1.3 Ứng dụng của tích phân dường loại 1

Công thức 4.5 Nếu một dây vật chất có dạng cung C thì độ dài của dây vật chất đó được tính theo công thức:

$$l = \int_C ds$$

Công thức 4.6 Nếu một dây vật chất có dạng cung C và mật độ khối lượng của dây là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của dây vật chất đó được tính theo công thức:

$$m = \int_C f(x,y)ds$$

Tọa độ trọng tâm G của dây được tính như sau: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C xf(x,y)ds \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C yf(x,y)ds \end{cases}$

4.2 Tích phân đường loại 2

4.2.1 Định nghĩa, tính chất và ý nghĩa

4.2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 4.2 Cho hàm vectơ: $\overrightarrow{F}(M) = P(M)\overrightarrow{i} + Q(M)\overrightarrow{j}$ xác định trên đường cong C nối A với B, $C = \overset{\frown}{AB}$. Có $\overrightarrow{T}(M) = \cos\alpha(M)\overrightarrow{i} + \sin\alpha(M)\overrightarrow{j}$ là vectơ tiếp tuyến với C tại M, $\alpha(M) = (\overrightarrow{T}, Ox)$. Khi đó:

$$I = \int\limits_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{T}\,ds = \int\limits_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

được gọi là tích phân đường loại 2 của $\overrightarrow{F}(M)$ lấy trên C.

Tương tự với $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ với $\overrightarrow{F}(M) = P(M)\overrightarrow{i} + Q(M)\overrightarrow{j} + R(M)\overrightarrow{k}$, $M \in \mathbb{R}^3$

Khi đó: $I = \int\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$

với α, β, γ lần lượt là góc giữa tiếp tuyến $\overrightarrow{T}$ với Ox, Oy, Oz.

► **Ý nghĩa cơ học:** Cho biết công của lực dịch chuyển chất điểm dọc đường cong C.

4.2.1.2 Sự tồn tại

Định lý 4.2 Các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục trên đường cong trơn hoặc trơn từng khúc C thì tồn tại

$$\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

4.2.1.3 Tính chất:

► Tích phân đường loại hai có tính tuyến tính và tính cộng tính giống như tích phân xác định

► Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung C

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

4.2.1.4 Liên hệ tích phân đường loại 1 và loại 2

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + Q\cos\gamma)\,ds$$

4.2.2 Công thức tính tích phân đường loại 2

Xét bài toán: Cho hàm vector $\overrightarrow{F}$ liên tục trên đường cong trơn C, tính tích phân đường loại 2 của $\overrightarrow{F}$ dọc theo cung C.

Công thức 4.7 Nếu cung C được cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với điểm đầu $t = a$ và điểm cuối $t = b$ thì:

$$\int Pdx + Qdy = \int\limits_a^b P(x(t), y(t))\,x'_t\,dt + \int\limits_a^b Q(x(t), y(t))\,y'_t\,dt$$

Công thức 4.8 **Nếu cung C được cho bởi phương trình $y = y(x)$ với điểm đầu $x = a$ và điểm cuối $x = b$ thì:**

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right] dx$$

Tương tự, nếu cung C được cho bởi phương trình $x = x(y)$ với điểm đầu $y = a$ và điểm cuối $y = b$ thì:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x(y), y)x'_y + Q(x(y), y)\right] dy$$

Ví dụ 4.5 Tính $I = \int_C (x^2 - xy^2)dx + (2y - x^2y)dy$ trong đó C là parabol $y = 2x^2$ đi từ $A(1,2)$ đến $B(2,8)$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $y = y(x) = 2x^2 \Rightarrow dy = 4xdx$ và hướng đi từ A đến B thỏa mãn : $x_A = 1,\ x_B = 2$
+) Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \int_C (x^2 - xy^2)dx + (2y - x^2y)dy \\
&= \int_1^2 (x^2 - 4x^5)dx + (4x^2 - 2x^4)4x\,dx \\
&= \int_1^2 (x^2 - 4x^5 + 16x^3 - 8x^5)dx \\
&= -\frac{191}{3}
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.6 Tính I = $\int_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$ trong đó ABCA là đường gấp khúc qua $A(0;0), B(1;1), C(0;2)$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: ABCA là tam giác tạo thành từ 3 đường thẳng: $\begin{cases} AB : y = x \ (0 \le y \le 1) \\ BC : x = 2 - y \ (1 \le y \le 2) \\ CA : x = 0 \ (0 \le y \le 2) \end{cases}$

+) Đặt: $I_1 = 2(x^2 + y^2)dx + y(4y + 3)dy$
Suy ra: I $= \int_{AB} I_1 + \int_{BC} I_1 + \int_{CA} I_1$
+) Lại có:

$$\int_{AB} I_1 = \int_0^1 2(y^2 + y^2)dy + y(4y + 3)dy = \int_0^1 (7y^2 + 3y)dy = \frac{25}{6}$$

$$\int_{BC} I_1 = \int_1^2 (-2)[(2 - y)^2 + y^2]dy + (2 - y)(4y + 3)dy = \frac{-7}{6}$$

$$\int_{CA} I_1 = 0$$

Vậy: $\mathrm{I} \;=\; \dfrac{25}{6}+\dfrac{-7}{6}+0 \;=\; 3.$

4.2.3 Công thức Green

Định nghĩa 4.3 **Hướng dương của đường cong kín:** Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng đó sẽ thấy miền giới hạn của nó nằm ở phía bên trái.

Định lý 4.3 **Công thức Green**
Xét các điều kiện:

- $D \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên là C.
- C là đường cong kín, hướng dương.
- Các hàm số $P(x,y);Q(x,y)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền D.

Khi các điều kiện trên thỏa mãn ta có:

$$\boxed{\int\limits_C Pdx+Qdy \;=\; \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy}$$

► **Hệ quả:** Giả sử D là miền đơn liên, liên thông, bị chặn có biên là ∂D, khi đó diện tích của miền D:

$$S(D)=\oint\limits_{\partial D} xdy=-\oint\limits_{\partial D} ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy-ydx$$

R

- Nếu C có hướng âm thì $\displaystyle\int\limits_C Pdx+Qdy \;=\; -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$
- Nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung đường để được đường cong kín và áp dụng công thức Green, sau đó trừ đi phần đã bổ sung

Ví dụ 4.7 Tính $I=\displaystyle\int\limits_C (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$ bằng *công thức Green* với $C: x^2+y^2=R^2$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y \\ Q(x,y)=xy+x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}=x+1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y+1 \end{cases}$

+) Khi đó theo định lý *Green:*

$$I\equiv\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D (y-x)\,dxdy$$

+) Chuyển về hệ toạ độ cực, ta có:

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le R \end{cases} \quad , \quad |J|=r$$

Như vậy

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi=\int_0^R (r\sin\varphi-r\cos\varphi)\,rdr=0$$

4.2.4 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lý 4.4 Định lí 4 mệnh đề tương đương:
Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P,Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D. Khi đó 4 mệnh đề sau là tương đương:

- $P,Q,\dfrac{\partial D}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên D, khi đó *4 mệnh đề sau tương đương:*
  1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ với $\forall (x,y)\in D$
  2. $\displaystyle\int_L (Pdx+Qdy)=0$ với mọi đường cong kín L nằm trong D
  3. $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} (Pdx+Qdy)$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B với mọi $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong D
  4. $(Pdx+Qdy)$ là vi phân toàn phần, nghĩa là có hàm số $u(x,y)$ sao cho: $du=Pdx+Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$\boxed{u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy}$$

► Các bước giải bài toán tích phân đường phụ thuộc đường đi

- *Bước 1* : Kiểm tra điều kiệnkiện $P'_y=Q'_x$
- *Bước 2* : Nếu *bước 1* thoả mãn thì tích phân $I=0$ nếu L là đường cong kín
- *Bước 3* : Nếu *bước 1* thoả mãn và L không kín thì ta chọn đường tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản (L' thường chọn đường thẳng)
  Mặt khác, nếu tìm được hàm u sao cho $du=Pdx+Qdy$ thì $I=u(B)-u(A)$

Ví dụ 4.8 Tính $I=\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$

[Hướng dẫn giải]:

+) Đặt $\begin{cases}P(x,y)=x^4+4xy^3\\ Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4\end{cases}\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2$

Do đó tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi

+) Khi đó ta có:

$$I=I_1+I_2=\int_{\overset{\frown}{AC}}Pdx+Qdy+\int_{\overset{\frown}{CB}}Pdx+Qdy$$

trong đó phương trình AC : $\begin{cases}y=-1\\ -2\le x\le 3\end{cases}$ và phương trình: BC : $\begin{cases}x=3\\ -1\le y\le 0\end{cases}$

+) Đi tính I_1,I_2 ta được:

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\overset{\frown}{AC}}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy\\ &=\int_{-2}^{3}\left(x^4-4x\right)dx+\int_{-1}^{-1}\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy=45\\ I_2&=\int_{\overset{\frown}{CB}}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy\\ &=\int_{3}^{3}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(54y^2-5y^4\right)dy=17\end{aligned}$$

Vậy

$$I=I_1+I_2=45+17=62$$

4.2.5 Ứng dụng của tích phân đường loại 2

Công thức 4.9 Công sinh ra do lực $\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ để dịch chuyển chất điểm từ A đến B được tính bởi công thức:

$$\boxed{W = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz}$$

Công thức 4.10 Giả sử D là miền đơn liên, liên thông, bị chặn có biên là ∂D, khi đó diện tích của miền D có thể được tính bởi các công thức:

$$\boxed{S(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy = -\oint\limits_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy - ydx}$$

5. Tích phân mặt

5.1 Tích phân mặt loại một

5.1.1 Định nghĩa tích phân mặt loại I

Định nghĩa 5.1 Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v).\overrightarrow{i} + y(u,v).\overrightarrow{j} + z(u,v).\overrightarrow{k} \text{ với } (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

và f là một hàm xác định trên mặt S. Nếu tồn tại tích phân:

$$\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).|\overrightarrow{r_u} \wedge \overrightarrow{r_v}|dudv$$

thì ta gọi giá trị của tích phân này là **tích phân mặt loại I** của hàm f lấy trên S và kí hiệu là:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$$

Với

$$\overrightarrow{r_u} = \frac{\partial x}{\partial u}.\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial u}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial u}.\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r_v} = \frac{\partial x}{\partial v}.\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}.\overrightarrow{k}$$

R Tích phân mặt loại I có các tính chất giống như tích phân kép: tuyến tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự,...

Công thức 5.1 Cho mặt cong S trơn cho bởi phương trình tham số như trên. Mặt S chỉ được phủ một lần khi (u,v) biến thiên trên miền D. **Diện tích mặt cong** S được xác định bởi:

$$A = \iint\limits_D |\overrightarrow{r_u} \wedge \overrightarrow{r_v}|dudv$$

Ví dụ 5.1 Tính diện tích mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} x = R.\cos\varphi.\sin\theta \\ y = R.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = R.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

+) Khi đó ta có
$$\overrightarrow{r_\theta} \wedge \overrightarrow{r_\varphi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ R.\cos\theta.\cos\varphi & R.\cos\theta.\sin\varphi & -R.\sin\theta \\ -R.\sin\varphi.\sin\theta & R.\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= R^2.\sin^2\theta.\cos\varphi.\overrightarrow{i} + R^2.\sin^2\theta.\sin\varphi.\overrightarrow{j} + R^2.\sin\theta.\cos\theta.\overrightarrow{k}$$
$$\Rightarrow |\overrightarrow{r_\theta} \wedge \overrightarrow{r_\varphi}| = R^2.\sin\theta \Rightarrow A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2.\sin\theta d\theta = 4\pi R^2$$

5.1.2 Cách tính tích phân mặt loại I

5.1.2.1 Mặt S cho bởi phương trình tham số

Công thức 5.2 Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số
$$\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v).\overrightarrow{i} + y(u,v).\overrightarrow{j} + z(u,v).\overrightarrow{k}, \text{ với } (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$
thì
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).|\overrightarrow{r_u} \wedge \overrightarrow{r_v}|dudv$$

Ví dụ 5.2 Tính tích phân mặt $\iint_S x^2 dS$ với S là mặt cong: $x^2+y^2+z^2=1$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} x = 1.\cos\varphi.\sin\theta \\ y = 1.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = 1.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

+) Ta thấy $|\overrightarrow{r_\theta} \wedge \overrightarrow{r_\varphi}| = \sin\theta$. Từ đó ta có :
$$2\iint_S x^2 dS = \iint_D \sin^2\theta.\cos^2\varphi.\sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin^3\theta.\cos^2\varphi d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin^3\theta.\frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{2}.2\pi d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}.\pi d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

5.1.2.2 Mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x,y)$

Công thức 5.3 Nếu mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x,y), (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Tham số hoá mặt S, ta được phương trình: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$

Dễ dàng tính được $|\overrightarrow{r_u} \wedge \overrightarrow{r_v}| = \sqrt{1+(z'_u)^2+(z'_v)^2} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$.

Miền xác định của (u,v) cũng chính là miền xác định của (x,y). Miền đó là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy, do đó:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$$

Hệ quả: Diện tích mặt cong S là:

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$$

Ví dụ 5.3 Tính $\iint\limits_S ydS$ với S giới hạn bởi $\begin{cases} z = x+y^2 \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $z = x+y^2 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 1 \\ z'_y = 2y \end{cases}$

+) Ta có: $\iint\limits_S ydS = \iint\limits_D y\sqrt{1+1^2+(2y)^2}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 y\sqrt{2+4y^2}dy = \dfrac{13\sqrt{2}}{3}$.

5.1.3 Ứng dụng tích phân mặt loại I

► Khối lượng của mặt S với khối lượng riêng $\rho(x,y,z)$

$$m = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$$

► Toạ độ trọng tâm G của mặt S: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS \\ y_G = \dfrac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS \\ z_G = \dfrac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x,y,z)dS \end{cases}$

Ví dụ 5.4 Xác định trọng tâm của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = a^2, z \ge 0$ và khối lượng riêng là k

[Hướng dẫn giải]

+) Phương trình nửa mặt cầu S: $z = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ $(x^2+y^2 \le a^2)$
+) Khối lượng mặt cầu là:

$$m = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS = k\iint\limits_S dS = k\iint\limits_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy = 2ka^2\pi$$

+) Toạ độ trọng tâm G của mặt cầu là:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS = \frac{1}{m}\iint\limits_S kxdS = 0;$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x,y,z)dS = \frac{1}{m}\iint\limits_S kydS = 0;$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x,y,z)dS = \frac{1}{m}\iint\limits_S kzdS = \frac{a}{2}$$

.

$$\Rightarrow (x_G; y_G; z_G) = \left(0; 0; \frac{a}{2}\right)$$

5.2 Tích phân mặt loại 2

5.2.1 Định nghĩa tích phân mặt loại II

Định nghĩa 5.2 Cho S là mặt cong trơn, giới hạn bởi một đường cong trơn từng khúc C. Lấy điểm $M \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{n}$ của S tại M. Nếu xuất phát từ điểm M di chuyển theo một đường cong kín, quay về điểm xuất phát M mà pháp tuyến $\vec{n}$ không đổi hướng, thì ta nói S **định hướng được**. Nếu mặt S định hướng được thì ta chọn một hướng làm hướng dương và hướng còn lại được gọi là hướng âm.

- Các mặt xác định bởi $z = f(x,y)$ là các **mặt định hướng được** và có hai hướng:
  +) Hướng $\vec{n}$ tạo với trục Oz một góc nhọn $\left((\vec{n};\overrightarrow{Oz}) \leq 90°\right)$,
  +) Hướng $\vec{n}$ tạo với trục Oz một góc tù $\left((\vec{n};\overrightarrow{Oz}) \geq 90°\right)$
- Các mặt kín như mặt cầu, ellipsoid,... là các **mặt định hướng được** và có hai hướng: $\vec{n}$ hướng ra ngoài và $\vec{n}$ hướng vào trong.

Định nghĩa 5.3 Cho mặt cong S trơn, định hướng được, cho bởi phương trình tham số:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

và $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ là vector pháp tuyến đơn vị tại $M(x,y,z)$ theo hướng dương đã chọn của S. Giả sử

$$\vec{F} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) \quad \text{với} \quad (x,y,z) \in S$$

là một hàm vector xác định trên S. Nếu tồn tại tích phân loại I:

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Ccos\gamma) dS$$

thì giá trị đó được gọi là **tích phân mặt loại II** của hàm vector $\vec{F}$ lấy theo hướng đã chọn của mặt S và kí hiệu là:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Tính chất của tích phân mặt loại II:

- Nếu S đổi hướng thì tích phân đổi dấu;
- Nếu P, Q, R liên tục trên mặt S định hướng, trơn thì tồn tại tích phân mặt loại II;
- Có tính chất tương tự như tích phân kép: tuyến tính, cộng tính,...

5.2.2 Cách tính tích phân mặt loại II

5.2.2.1 Mặt S được cho bởi phương trình tham số

– Mặt cong S trơn, được cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{\mathrm{i}} + y(u,v).\vec{\mathrm{j}} + z(u,v).\vec{\mathrm{k}} \text{ với } (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

– Một vector pháp tuyến của S tại điểm M chính quy là $\vec{\mathrm{N}} = \vec{r_u} \wedge \vec{r_v} = (A,B,C)$

Công thức 5.4

- Nếu $\vec{\mathrm{N}} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{n}}$ (hướng theo phía đã chọn của mặt) thì:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

$\Rightarrow$ Công thức: $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_D (AP+BQ+CR)dudv$

- Nếu $\overrightarrow{\mathrm{N}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathrm{n}}$ (hướng ngược theo phía đã chọn của mặt) thì:

$$\cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$\Rightarrow$ Công thức: $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_D (AP+BQ+CR)dudv$

5.2.2.2 Mặt S được cho bởi phương trình $f(x,y,z)=0$

Công thức 5.5 Tích phân I có thể tách thành ba tích phân I_1, I_2, I_3:

$$I = \underbrace{\iint\limits_S Pdydz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_S Qdzdx}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_S Rdxdy}_{I_3}$$

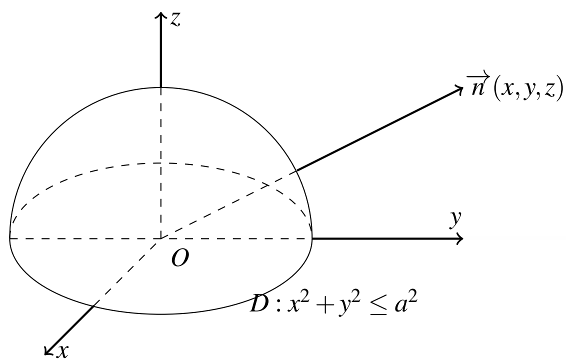
Xét tích phân I_3, giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y)$. $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy.

- Nếu $(\overrightarrow{\mathrm{n}}, Oz) < 90^o$: $\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy$
- Nếu $(\overrightarrow{\mathrm{n}}, Oz) > 90^o$: $\iint\limits_S Rdxdy = -\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy$

Tương tự như đối với tích phân I_1 và I_2 .

Ví dụ 5.5 Tính $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$ hướng ra phía ngoài mặt cầu.

[Hướng dẫn giải]

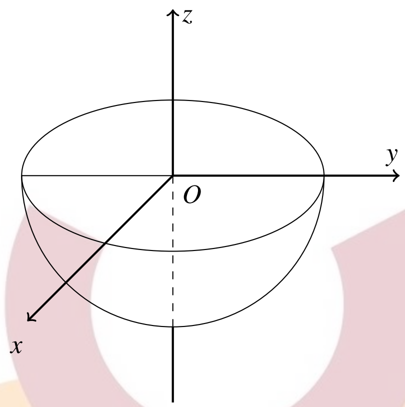


+) Ta có: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, hình chiếu S lên Oxy là $D: x^2+y^2 \leq 1$

+) Do $(\widehat{\overrightarrow{n}; O_z}) < 90^o \Rightarrow I = \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2)dxdy$

+) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}.r^3 dr = \dfrac{4\pi}{15}$

Ví dụ 5.6 Tính $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, trong đó S là mặt dưới nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = R^2, z \le 0$.



[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $S: z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

+) Hình chiếu S lên Oxy là $D: x^2+y^2 \le R^2$. Ta có $\widehat{(\vec{n};O_z)} > 90^o$ nên

$$I = \iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

+) Đổi biến toạ độ cực, ta được: $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2-r^2}.r^5 dr = \dfrac{2R^7}{105}$

5.2.2.3 Liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

Công thức 5.6 Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II:

$$\iint\limits_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của vector pháp tuyến đơn vị ($\vec{n}$) của mặt S.

Ví dụ 5.7 Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$ nằm trong mặt trụ $x^2+x+z^2 = 0, y \ge 0$ và hướng của S là phía ngoài của mặt cầu.
Chứng minh rằng: $\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dzdx = 0$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $y = \sqrt{1-x^2-z^2}$, $\quad \vec{n} = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$

+) Do $(\vec{n}, Oy) < \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\vec{n} = (-y'_x, 1, -y'_z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}; 1; \dfrac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right)$

$\Rightarrow |\vec{n}| = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}} \Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = x \\ cos\beta = y \\ cos\gamma = z \end{cases}$

+) Từ đó ta tính được

$$I = \iint\limits_S [(x-y)cos\gamma + (y-z)cos\beta + (z-x)cos\alpha]dS$$
$$= \iint\limits_S (x-y)z + (y-z)x + (z-x)ydS = 0$$

5.2.3 Công thức Ostrogradsky và công thức Stokes

5.2.3.1 Công thức Ostrogradsky

Công thức 5.7 Công thức Ostrogradsky:
Giả sử P,Q,R là hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn, đo được trong $V \subset \mathbb{R}^3$. V giới hạn bởi mặt cong kín S trơn hay trơn từng mảnh. Khi đó :

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

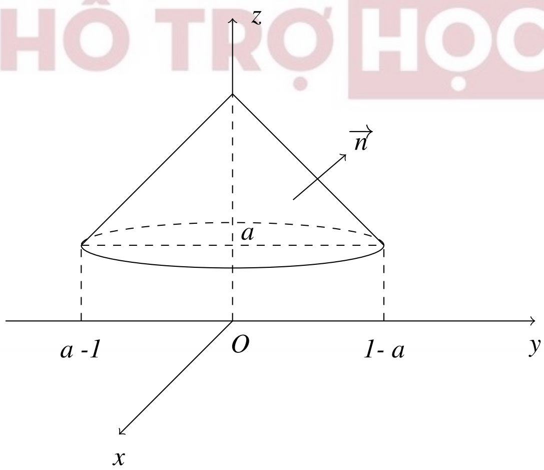
trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.

R

- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong:
$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$
- Nếu mặt cong S không kín, có thể bổ sung thành mặt cong S' kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

Ví dụ 5.8 Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, với S là phía ngoài của miền $\begin{cases} (z-1)^2 \leq x^2 + y^2 \\ a \leq z \leq 1 \\ a > 0 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]



+) Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 3.\frac{1}{3}Bh = \pi(1-a)^3$$

5.2.3.2 Công thức Stokes

Công thức 5.8 Công thức Stokes:
Giả sử S là mặt cong trơn, có biên ∂S là đường cong trơn. Giả thiết P, Q, R là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở nào đó chứa S. Khi đó:

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của ∂S phù hợp với hướng dương của mặt S.

R

Hướng dương của ∂S phù hợp hướng dương của S được xác định theo quy tắc nắm tay phải.

Ví dụ 5.9 Tính tích phân đường

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

trong đó C là giao của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ với mặt nón $z=-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

[Hướng dẫn giải]

+) Áp dụng công thức Stokes:

$$I = \iint_S 2(y-z)dydz + 2(z-x)dzdx + 2(x-y)dxdy$$

Trong đó S là phần mặt cầu phía trên hướng theo trục Oz.
+) Ta có phương trình mặt S là: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

+) Do $(\overrightarrow{n}, Oz) < \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\overrightarrow{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{n}| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = \dfrac{x}{2} \\ cos\beta = \dfrac{y}{2} \\ cos\gamma = \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

+) Từ đó ta tính được

$$I = \iint_S (x(y-z) + y(z-x) + z(x-y))dS = 0$$

6. Lý thuyết trường

6.1 Trường vô hướng

6.1.1 Định nghĩa trường vô hướng

Định nghĩa 6.1 Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{R}^3$ (hoặc $\mathbb{R}^2$). Một hàm số:

$$\begin{aligned} u : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto u = u(x,y,z) \end{aligned}$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

R Cho $c \in \mathbb{R}$, khi đó mặt $S = \{(x,y,z) \in \Omega | u(x,y,z) = c\}$ được gọi là mặt mức ứng với giá trị c (đẳng trị).

6.1.2 Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 6.2 Cho $u = u(x,y,z)$ là một trường vô hướng xác định trên Ω và $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \Omega$
Giả sử $\overrightarrow{l} = (a,b,c)$ là 1 vectơ đơn vị bất kỳ trong $\mathbb{R}^3$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(M_0 + t\vec{l}) - u(M_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0 + ta;\, y_0 + tb;\, z_0 + tc) - u(x_0;\, y_0;\, z_0)}{t}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại M_0 của trường u. Kí hiệu: $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)$.

R Nếu $\overrightarrow{l} \upuparrows Ox$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)$

Định lý 6.1 Nếu $u = u(x,y,z)$ khả vi tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{l} \neq 0$ tại M_0 và

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

Ví dụ 6.1 Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l} = (1;-2;2)$ của $u = x^2 + y^2 + z^2$ tại $M(1;0;-1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có $\overrightarrow{l} = (1;-2;2)$ suy ra $\cos\alpha = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{l}\right|} = \dfrac{1}{3}$; $\cos\beta = \dfrac{-2}{\left|\overrightarrow{l}\right|} = \dfrac{-2}{3}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\left|\overrightarrow{l}\right|} = \dfrac{2}{3}$

+) Lại có $u = x^2 + y^2 + z^2$ suy ra $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z$.

+) Áp dụng công thức của định lý 1, ta có đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ của u tại điểm M là

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M) &= \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma \\ &= 2\cdot\frac{1}{3} + 0 + (-2)\cdot\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

6.1.3 Gradient

Định nghĩa 6.3 Cho $u(x,y,z)$ là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của u tại M_0 là véctơ

$$\overrightarrow{\text{grad}}u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0);\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0);\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)$$

R Trong một số liệu tiếng Anh, véctơ $\overrightarrow{\text{grad}}u$ của trường vô hướng u được kí hiệu là ∇u.

Định lý 6.2 Nếu trường vô hướng $u(x,y,z)$ khả vi tại M_0 và $\overrightarrow{l}$ là một véctơ đơn vị thì

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \overrightarrow{\ell}$$

R $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\overrightarrow{l}$. Do đó $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M_0)\right|_{max} \iff \overrightarrow{\text{grad}}u$ cùng phương với $\overrightarrow{\ell}$

Ví dụ 6.2 Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$ tại $M(1;1;1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

+) Suy ra $\overrightarrow{\text{grad}}u(M) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6.2 Trường Vectơ

6.2.1 Định nghĩa trường Vectơ

Định nghĩa 6.4 Cho Ω là một miền mở trong $\mathbb{R}^3$. Hàm vectơ $\overrightarrow{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{F}=F_x(M)\cdot\overrightarrow{i}+F_y(M)\cdot\overrightarrow{j}+F_z(M)\cdot\overrightarrow{k}$$

là một trường vectơ.

6.2.2 Thông lượng, độ phân tán, trường ống

6.2.2.1 Thông lượng

Định nghĩa 6.5 Thông lượng của $\overrightarrow{F}$ đi qua mặt cong S là:

$$\phi=\iint\limits_S F_x dydz+F_y dzdx+F_z dxdy.$$

6.2.2.2 Độ phân tán (Dive)

Định nghĩa 6.6 Cho hàm vectơ $\overrightarrow{F}$. Khi đó đại lượng vô hướng:

$$div\overrightarrow{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

được gọi là độ phân tán (dive) của trường $\overrightarrow{F}$.

6.2.2.3 Trường ống

Định nghĩa 6.7 Trường vectơ $\overrightarrow{F}$ là trường ống nếu: $div\overrightarrow{F}(M)=0$ với $\forall M\in\Omega$

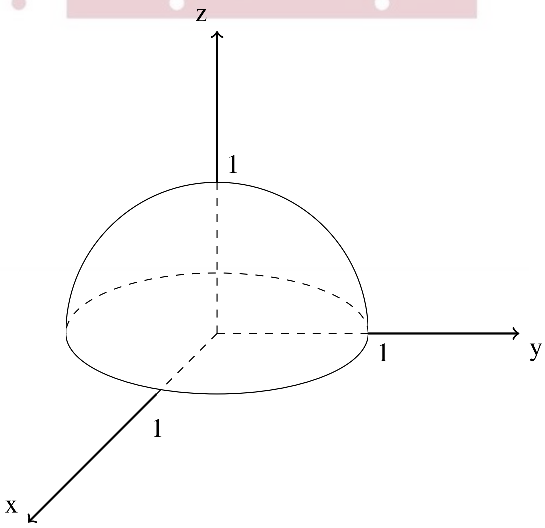
► **Tính chất:** $\overrightarrow{F}$ là trường ống thì $\phi_{\text{vào}}=\phi_{\text{ra}}$

Ví dụ 6.3 (Câu 10 - Đề 2 - 20201) Tính thông lượng của trường vectơ:

$$\overrightarrow{F}=xz^2\overrightarrow{i}+x^2y\overrightarrow{j}+y^2(z+1)\overrightarrow{k}$$

qua nửa mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$, hướng ra ngoài.

[Hướng dẫn giải]



+) Thông lượng của trường $\overrightarrow{F}$ qua mặt cầu S là:

$$\phi=\iint\limits_S xz^2dydz+x^2ydzdx+y^2(z+1)dxdy$$

+) Ta xét mặt S' $\begin{cases} z=0 \text{ hướng xuống dưới}\\ x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$

Khi đó $\phi=\iint\limits_{S+S'}-\iint\limits_{S'}=I_1-I_2$

(Tích phân kép được viết gọn)

+) **Ta thực hiện tính toán I_1**

– Áp dụng công thức Ostrogradski $I_1 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, trong đó $V \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$

– Thực hiện phép đổi biến trong toạ độ cầu $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$, $|J| = r^2 sin\theta$

– Do đó $I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 r^4 \sin\theta dr = \dfrac{2\pi}{5}$

+) **Ta thực hiện tính toán I_2**

– Ta có mặt S' $\begin{cases} z = 0 \text{ hướng xuống dưới} \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow I_2 = -\iint\limits_{S'} y^2 dxdy$

– Thực hiện phép đổi biến trong tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$, $|J| = r$

– Do đó $I_2 = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 \sin^2\varphi dr = -\dfrac{\pi}{4}$

Vậy $\phi = I_1 - I_2 = \dfrac{13\pi}{20}$

6.2.3 Hoàn lưu, vectơ xoáy

6.2.3.1 Hoàn lưu

Định nghĩa 6.8 Hoàn lưu của $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong C là: $\int\limits_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$

6.2.3.2 Vectơ xoáy

Định nghĩa 6.9 Vectơ $\overrightarrow{rot}F = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$ được gọi là vectơ xoáy của trường $\overrightarrow{F}$.

R Trong một số liệu tiếng Anh, véctơ xoáy $\overrightarrow{rot}F$ của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ được kí hiệu là curl$F$.

6.2.4 Trường thế - hàm thế vị

Định nghĩa 6.10 $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường thế nếu tồn tại trường vô hướng u thỏa mãn $\overrightarrow{gradu} = \overrightarrow{F}$. Khi đó, u gọi là hàm thế vị.

Định lý 6.3 $\overrightarrow{F}$ là một trường thế $\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}F(\mathrm{M}) = \overrightarrow{0}, \forall \mathrm{M} \in \Omega$ Khi đó hàm thế u là:

$$u = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(t, y_0, z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x, t, z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x, y, t)dt + C$$

Ví dụ 6.4 (Câu 9 - Đề 1 - 20192). Chứng minh trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = (e^x y^2 + e^{2z} - 2xy^3)\overrightarrow{i} + (2ye^x - 3x^2y^2)\overrightarrow{j} + (2xe^{2z} + 5)\overrightarrow{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

[Hướng dẫn giải]

+) Trước hết ta tính vectơ xoáy của trường $\overrightarrow{F}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}F &= \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ F_z & F_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right) \\
&= (0, \quad 2e^{2z} - 2e^{2z}, \quad 2ye^x - 6xy^2 - 2ye^x + 6xy^2) \\
&= (0, \quad 0, \quad 0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ là trường thế.

+) Ta lựa chọn $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ thay vào công thức trong định lý 3, ta có hàm thế vị trí của F là:

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^x F_x(t,0,0)dt + \int_0^y F_y(x,t,0)dt + \int_0^z F_z(x,y,t)dt + C \\
&= \int_0^x dt + \int_0^y (2te^x - 3x^2t^2)dt + \int_0^z (2xe^{2t} + 5)dt + C \\
&= x + y^2e^x - x^2y^3 + xe^{2z} + 5z - x + C \\
&= y^2e^x - x^2y^3 + xe^{2z} + 5z + C
\end{aligned}$$

Mục 2 - Đề thi các nhóm ngành

7. Đề thi

7.1 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.2

ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20232

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (1đ) Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $z = x^2 + \ln(2x+y)$ tại $(-1,4,1+\ln 2)$.

Câu 2. (1đ) Tính $\int\limits_C y ds$ với C là đường cong có phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - 3t \\ y = \sqrt{3}t^2 \end{cases}$ đi từ gốc tọa độ O đến đ A ứng với $t = 1$.

Câu 3. (1đ) Tính $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(3y^3\right) dy$.

Câu 4. (1đ) Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9. \\ z^2 \le x^2+y^2 \le 3z^2. \end{cases}$

Câu 5. (1đ) Tính $\int\limits_C [\sin x + 2x(y+1)]\, dx + \left[x^2 - \sin(y-1)\right] dy$ biết C là đường cong có phương trình $x = \log_2 y$ từ $A(0,1)$ đến $B(1,2)$.

Câu 6. (1đ) Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{\tan x}}{(\sin x + \cos x)^2} dx$.

Câu 7. (1đ) Tính $\iint\limits_S \left(2x^2 + e^y\right) dydz + \left(x + y^2\right) dzdx + 3(x+y+z)dxdy$ với S là mặt $x^2+y^2+|z| = 3$ hướng ra ngoài.

Câu 8. (1đ) Tính $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2} dxdy$ với D là miền $\sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} \le 2$.

Câu 9. (2đ) Cho trường vector sau: $\vec{F} = \left(\sqrt{y^2z^2+1} - x^2\right)\vec{i} + \left(\sqrt{z^2x^2+1} - y^2\right)\vec{j} + \left(\sqrt{x^2y^2+1} - z^2\right)\vec{k}$

a) Tìm quỹ tích các đ không xoáy của trường vector $\vec{F}$.

b) Tính lưu số dọc theo đường cong L là giao của hai mặt $(S) : x^2 + (y-2)^2 = 1$ và mặt $yz = 1$ hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ chiều dương Oz.

7.2 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.2

ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20232

Nhóm ngành 2. Mã HP: MI1122. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (1 đ) Tìm a để hàm số sau liên tục:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 \sin x}{x^2+y^4}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ a-1, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Câu 2. (1 đ) Cho hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)} = t\tan t.\overrightarrow{i} + te^t.\overrightarrow{j} + t^2.\overrightarrow{k}$. Tính $\overrightarrow{r'(0)}$.

Câu 3. (1 đ) Tính độ cong của đường cong cho bởi hàm số $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2024$ tại điểm $M(1, 2024)$.

Câu 4. (1 đ) Tìm cực trị tự do của hàm số: $f(x,y) = x^2y - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{y^4}{4} + 1$

Câu 5. (1 đ) Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{4x - x^2 - y^2}dxdy$, trong đó miền D giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 = 4x$.

Câu 6. (1 đ) Tính chiều dài cung AB biết cung AB là một phần của đường cong: $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ từ điểm $(1,0)$ đến điểm $(0, e^{\frac{\pi}{2}})$.

Câu 7. (1 đ) Tính thể tích của phần hình trụ bị giới hạn bởi mặt $x^2 + y^2 = 3x$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 8. (1 đ) Chứng minh trường véctơ sau là trường thế và tìm hàm thế vị của nó:

$$\overrightarrow{F} = [2xy + z\cos(xz)].\overrightarrow{i} + (x^2 + ze^{yz}).\overrightarrow{j} + [ye^{yz} + x\cos(xz)].\overrightarrow{k}$$

Câu 9. (1 đ) Tính $I = \iint\limits_D |2x - 4y|dxdy$, trong đó miền $D: \left|\dfrac{x}{2} - y\right| + |x + 2y| \leq 1$.

Câu 10. (1 đ) Cho C là đường: $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, định hướng dương. Tính tích phân đường:

$$I = \oint\limits_C \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4}.$$

7.3 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Kíp 1 - Học kỳ 2022.2

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH II - Học kì 20222

Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1. (1đ) Tính độ cong của đường $x = te^t,\ y = t,\ z = e^t$ tại điểm $M(0;0;1)$.

Câu 2. (1đ) Tính diện tích của phần mặt phẳng $z = 1 + x + 2y$ trên miền bị chặn bởi các đường $y = x^3$ và $x = y^2$.

Câu 3 (1đ). Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$, trong đó V là vật thể bị chặn bởi $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ và $z = 1-x^2-y^2$.

Câu 4 (2đ). Tính các tích phân sau:

a) $I = \int\limits_{-\infty}^{0} x^{24} e^{\sqrt[3]{x}} dx.$

b) $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^8+1}.$

Câu 5 (1đ). Cho C là biên của miền bị chặn bởi $x + y = 2$ và $y = x^2$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Tính

$$\oint\limits_C (e^{x^2} + xy)dx + xdy.$$

Câu 6 (1đ). Tính $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, trong đó S là mặt xác định bởi $z = x^2 + y^2,\ z \le 4$.

Câu 7 (1đ). Cho $M(1;2;3)$ và $N(2;3;-1)$. Tìm đạo hàm của $f(x,y,z) = xyz$ theo hướng $\overrightarrow{MN}$ tại điểm N.

Câu 8 (1đ). Tính $S = \iint\limits_S zdydz + x^2dxdz + 3xzdxdy$, trong đó S là phía dưới của mặt trụ $z = x^2$ bị giới hạn bởi các mặt phẳng $y = 0$ và $y = 1 - z$, khi nhìn theo hướng dương của trục Oz.

Câu 9 (1đ). Cho C là đường $x = t,\ y = t^3,\ z = t^2$ với $0 \le t \le 3$. Tính

$$\int\limits_C e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$$

7.4 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Kíp 2 - Học kỳ 2022.2

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 20222
Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (1đ) Viết phương trình tiếp tuyến của đường $x = te^{t-1}; y = t^2 + t; z = t$ tại điểm $M(1;2;1)$.

Câu 2. (1đ) Tính thể tích của vật thể bao quanh bởi paraboloid $z = x^2 + 2y^2$ và các mặt phẳng $x = 0; y = 1; y = x; z = 0$.

Câu 3. (1đ) Tính tích phân $\iiint\limits_V y^2z^2\,dxdydz$, trong đó V bị chặn bởi $x = 1 - y^2 - z^2$ và $x = 0$.

Câu 4. (2đ) Tính các tích phân sau:

a) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)^3}$.

b) $I = \displaystyle\int_{(1;1)}^{(3;8)} 3y^{\frac{4}{3}}dx + 4xy^{\frac{1}{3}}dy$.

Câu 5. (1đ) Tính tích phân $\int\limits_C xydx + x^2dy$, trong đó C xác định bởi $x = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ từ (0;-3) đến (0;3).

Câu 6. (1đ) Cho trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = 2x\,\overrightarrow{i} + \left(e^yz + 3y^2z\right)\overrightarrow{j} + \left(e^y + y^3\right)\overrightarrow{k}.$$

Tính vectơ $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}$ và tìm hàm thế vị (nếu có).

Câu 7. (1đ) Tìm hướng mà tại $M(-1;2;1)$ hàm số $f(x,y,z) = xyz$ giảm nhanh nhất. Tìm đạo hàm theo hướng này tại M.

Câu 8. (1đ) Tính $\iint\limits_S y^2dydz + z^2dzdx + (x-y)dxdy$, trong đó S là phía trên của mặt nón
$z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le z \le 1$, khi nhìn từ chiều dương của trục Oz.

Câu 9. (1đ) Cho $I(y) = \displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+y^2)dx$, với $y > 0$. Chứng minh rằng hàm $I(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và tính nó.

7.5 Đề thi cuối kì nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.2

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH II - Học kì 20222

Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (1đ) Viết phương trình pháp tuyến tại điểm $A(-1;1)$ của đường cong $x = \sin(2t) - 1, y = 3t + 1$.

Câu 2. (1đ) Phương trình $x^3 - y^2 + z^3 + xyz = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x,y)$. Tính $z'_y(1;1)$.

Câu 3. (1đ) Tính $\iint\limits_D (x^2 - 2y)dxdy$, ở đây $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$.

Câu 4. (1đ) Tính $\int\limits_C (x+y+2)ds$, trong đó C là đoạn thẳng nối $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Câu 5. (1đ) Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}(-1;2;2)$ của hàm số $u(x,y,z) = x^2 + 2xyz + y^2z$ tại điểm $A(1;1;1)$.

Câu 6. (1đ) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^4 - 2xy + 2x + y^2$.

Câu 7. (1đ) Tính $\iint\limits_D \left(2x - y^2\right) dxdy$, ở đây $D: x^2 + y^2 \le 2x$.

Câu 8. (1đ) Chứng minh trường vectơ sau là trường thế

$$\overrightarrow{F} = (2xy + z^2)\overrightarrow{i} + (x^2 - 2yze^{y^2})\overrightarrow{j} + (2xz - e^{y^2})\overrightarrow{k}.$$

Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

Câu 9. (1đ) Tính $\int\limits_C (x+y)dx + \left(x^2 + 3y + \cos(y^2)\right)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ hướng từ $A(2;0)$ đến $B(0;0)$.

Câu 10. (1đ) Tính $\iint\limits_D \left(|x| - |y| + (x-y)^2\right)dxdy$, ở đây miền $D: \ |x| \le 1, |y| \le 1$.

7.6 Đề thi cuối kì nhóm ngành CTTT - Học kỳ 2022.2

Final Examination on Calculus 2 - 2022.2
Elitech programs   Total time: 90 minutes

Attention: No document is allowed.

Prob 1. (1 point) Find the curvature of the curve $y = x^2 - 1$ at $A(1,0)$.
Prob 2. (1 point) Find the directional derivative of the function $u(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 - yz^3$ in the direction of $\overrightarrow{l} = (1,-2,2)$ at the point $A(1,1,1)$.

Prob 3. (1 point) Evaluate $\displaystyle\iint_D (1+x+y^2)dxdy$, where $D: x^2+y^2 \le 1$.

Prob 4. (1 point) Evaluate $\displaystyle\iiint_V (3x+z)dxdydz$, where $V: x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

Prob 5. (1 point) Evaluate $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}dx$.

Prob 6. (1 point) Evaluate $\displaystyle\int_C x+2y\, ds$, where C: $y = \sqrt{2x-x^2}$.

Prob 7. (1 point) Evaluate $\displaystyle\oint_C (xy+3x+2y)\, dx + (xy-2y)\, dy$, where C is the circle $x^2+y^2 = 2x$ with counterclockwise orientation.

Prob 8. (1 point) Evaluate $\displaystyle\iint_S (2x-y+z^2)\, dS$, where S is the hemisphere

$$S: x^2+y^2+z^2 = 1, x \ge 0.$$

Prob 9. (1 point) Find the flux of the vector field $\overrightarrow{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z^2-1)\vec{k}$ across S, where S is the part of the ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $z \ge 0$, with upward orientation.

Prob 10. (1 point) Find the circulation of the vector field

$$\overrightarrow{F} = (2xze^{x^2} + y^2 - z)\,\overrightarrow{i} + (y-3z)\,\overrightarrow{j} + (e^{x^2} + x + 2y)\,\overrightarrow{k}$$

around C. Here C is the curve of intersection of the plane $x+y+z = 1$ and the cylinder $x^2+y^2 = 2y$, oriented counterclockwise as viewed from above.

7.7 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20201

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20201

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 đ). Tính độ cong của đường $x = 2\cos t, y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{3}$.

Câu 2 (1 đ). Tính tích phân $\iint\limits_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, x = 1$ và $y = 0$.

Câu 3 (1 đ). Tính tích phân $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2+y^2 \le 1, y \ge 0\right\}$.

Câu 4 (1 đ). Tính tích phân $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, với V là miền xác định bởi $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \end{cases}$.

Câu 5 (1 đ). Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = 1+x^2+y^2$ và mặt $4x^2+y^2 = 4$.

Câu 6 (1 đ). Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} x^{30}e^{-x^2}dx$.

Câu 7 (1 đ). Tính $\int\limits_L 2(x^3+y^5)dx + 5x(2y^4-1)dy$, với L là đường gấp khúc ABCA nối các điểm $A(0;0), B(1;1), C(0;2)$.

Câu 8 (1 đ). Tính $\int\limits_C \left(e^x\sin y + y^2\right)dx + \left(x^2+2xy+e^x\cos y\right)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y-y^2}$, đi từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(0;2)$.

Câu 9 (1 đ). Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + \left(x^2+y^2+z^3\right)dxdy$, với S là phía ngoài mặt ellipsoid $9x^2+y^2+z^2 = 9$.

Câu 10 (1 đ). Tính thông lượng của trường vecto $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j} + y^2(z+1)\overrightarrow{k}$ qua nửa mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0$, hướng ra ngoài.

7.8 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Kíp 1 - Học kì 20192

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20192

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại $A(-1;2;1)$ của mặt cong $4x^3+2y^2-z^4=3$.

Câu 2 (1 đ). Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 9, z \ge 0$.

Câu 3 (1 đ). Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}}$ với V là miền xác định bởi $0 \le z \le 1$, $0 \le x \le z$, $0 \le y \le x$.

Câu 4 (1 đ). Tính thể tích miền xác định bởi $2 \le z \le \sqrt{8-4x^2-y^2}$.

Câu 5 (1 đ). Tính tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5}dx$.

Câu 6 (1 đ). Tính $\int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx+(x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y=\sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$.

Câu 7 (1 đ). Tính $\iint\limits_S dS$, trong đó S là phần mặt

$$z=\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}) \quad \text{với} \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3$$

. **Câu 8 (1 đ).** Tính $\iint\limits_S x^2zdxdy$, với S là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z=1$ và $z=3$, hướng lên trên.

Câu 9 (1 đ). Chứng minh rằng trường vectơ

$$\overrightarrow{F}=(2ye^{2x}+3)\overrightarrow{i}+(e^yz^2+e^{2x}-2yz^3)\overrightarrow{j}+(2ze^y-3y^2z^2)\overrightarrow{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

Câu 10 (1 đ). Tính tích phân kép $\iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$, với D là miền xác định bởi $x^2-xy+y^2 \le 1$.

7.9 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Kíp 2 - Học kì 20192

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20192

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1 (1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;0)$ của đường $\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases}$.

Câu 2 (1đ). Tính $\iiint\limits_V (z+1)dxdydz$, với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$.

Câu 3 (1đ). Tính $\iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{x^2+y^2+2}$, với V là miền xác định bởi $\sqrt{x^2+y^2-1} \le z \le 1$

Câu 4 (1đ). Tính diện tích phần mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy.

Câu 5 (1đ). Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}dx$

Câu 6 (1đ). Tính $\oint\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2 e^y dy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = 0$ có chiều dương.

Câu 7 (1đ). Tính $I = \iint\limits_S y^2 z dS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1; z = 2$.

Câu 8 (1đ). Tính $I = \iint\limits_S xy^3 dydz + (x^2+z^2)dxdy$, với S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4, z \le 0$, hướng ra phía ngoài mặt cầu.

Câu 9 (1đ). Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l} = (1;2;-2)$ của hàm $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$ tại điểm $A(0;1;2)$

Câu 10 (1đ). Tính tích phân kép $\iint\limits_{\mathbf{D}} (y^2 - x^4)dxdy$, với **D** là miền xác định bởi $2|x| + |x^2 + y| \le 1$

7.10 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20183

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20183

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;1)$ của đường $x = t - 1$, $y = 2 - \sin t, z = e^{2t}$.

Câu 2 (1 đ). Tính $\iint_D (x - 2y)dxdy$, với D giới hạn bởi $x = 0, y = 0, x - y = 1$.

Câu 3 (1 đ). Tính $\iiint_V \frac{z^3 dxdydz}{1 + x^2 + y^2}$, trong đó V xác định bởi $x \geq 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

Câu 4 (2 điểm) Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{x} dx$

Câu 5 (1 đ). Tính $\int_{\widehat{ABC}} 2ydx - 3xdy$, trong đó ABC là đường gấp khúc, với $A(1;0), B(0;1), C(-1,0)$.

Câu 6 (1 đ). Tính $\iint_S (x - y + 2z)^3 (dydz + dzdx + dxdy)$, trong đó S là mặt ellipsoid $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu 7 (1 đ). Chứng minh rằng trường vectơ:

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

Câu 8 (1 đ). Tìm lưu số của trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = (2z - y)\overrightarrow{i} + (2x - z)\overrightarrow{j} + (2y - x)\overrightarrow{k}$$

dọc theo giao tuyến L của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và $x + 2y + 2z = 0$, chiều theo L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z > 0$.

Câu 9 (1 đ). Tính $\int_L \frac{(10x^4 - 4y)dx + (7x^8 - 8y^7)dy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$, trong đó L là đường $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

7.11 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20182

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20182

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = t\cos 2t, y = t\sin 2t, z = 3t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{2}$.

Câu 2 (1 đ). Tính tích phân $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^4)^2}$.

Câu 3 (1 đ). Xác định những điểm không phải là điểm xoáy trong trường vectơ $\overrightarrow{F} = (2xy - z^2)\overrightarrow{i} + (3x^2 + 2yz)\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.

Câu 4 (1 đ). Tính tích phân $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$, trong đó S là mặt $2z = x^2 + y^2,\ 0 \le x, y \le 1$.

Câu 5 (1 đ). Tính khối lượng của một đường cong vật chất có phương trình $x = e^{\frac{t}{2}}\cos t, y = e^{\frac{t}{2}}\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ trong mặt phẳng với hàm mật độ $\rho(x,y) = x + y$.

Câu 6 (1 đ). Tính tích phân kép $\iint_D (y^2 - x^2)dxdy$, trong đó D là miền $0 \le 2y \le x^2 + y^2 \le 2x$.

Câu 7 (1 đ). Tính tích phân đường $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ định hướng dương.

Câu 8 (1 đ). Tính tích phân $\iiint_V zdxdydz$ trên miền V giới hạn bởi mặt $(x+2y)^2 + 4z^2 = 1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.

Câu 9 (1 đ). Tính tích phân mặt $\iint_S ydzdx + zdxdy$, trong đó S là phía dưới của mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le z \le 1$, khi nhìn từ chiều dương trục Oz.

Câu 10 (1 đ). Tính tích phân đường

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

trong đó C là giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ với mặt nón $z = -\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

7.12 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20172

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20172

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 đ). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn cho dưới dạng giao của mặt paraboloid $z = 30 - x^2 - y^2$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $M(3;4;5)$.

Câu 2 (1 đ). Tính tích phân $\iint\limits_D |x+y|\, dxdy$, ở đó $D.x^2 + y^2 \leq 1$.

Câu 3 (1 đ). Tính diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$.

Câu 4 (1 đ). Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V xz\,dxdydz$, ở đó V là miền thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

Câu 5 (1 đ). Tính tích phân $\int\limits_0^1 x^6 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Câu 6 (1 đ). Tính tích phân đường $\int\limits_C (x+y)\, ds$, ở đó C là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 2y$.

Câu 7 (1 đ). Chứng minh rằng trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = e^{x^2+y^2+z^2}\left[\left(2x^2yz + yz\right)\overrightarrow{i} + \left(2xy^2z + xz\right)\overrightarrow{j} + \left(2xyz^2 + xy\right)\overrightarrow{k}\right]$$

là một trường thế. Tìm hàm thế vị.

Câu 8 (1 đ). Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^2y\,dS$, ở đó S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $1 \leq y \leq 2$.

Câu 9 (1 đ). Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2 + z)\overrightarrow{i} + (x^2y + z)\overrightarrow{j}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$ hướng lên trên.

Câu 10 (1 đ). Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và L là đường đi từ $O(0;0)$ đến $A(a;b)$ thì $\int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)\,du$.

8. Đáp án

8.1 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.2

Câu 8.1.1 **(1đ)** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $z = x^2 + \ln(2x+y)$ tại $(-1,4,1+\ln 2)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Xét $F(x,y,z) = x^2 + \ln(2x+y) - z$ là hàm xác định mặt cong đã cho.

+) Gọi điểm M có tọa độ $(-1,4,1+\ln 2)$ thuộc mặt cong.

+) Ta có: $\begin{cases} F'_x = 2x + \dfrac{2}{2x+y} \\ F'_y = \dfrac{1}{2x+y} \\ F'_z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(M) = -1 \\ F'_y(M) = \dfrac{1}{2} \\ F'_z(M) = -1 \end{cases}$

Khi đó, $\vec{n} = (2,-1,2)$ là một vector pháp tuyến của mặt cong đã cho tại M.

+) Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại M là:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1-\ln 2}{2}.$$

+) Phương trình tiếp diện của mặt cong tại M là:

$$2\cdot(x+1) + (-1)\cdot(y-4) + 2\cdot(z-1-\ln 2) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x - y + 2z + 4 - 2\ln 2 = 0.$$

+) Kết luận:

– Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại M là: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-1-\ln 2}{2}$.

– Phương trình tiếp diện của mặt cong tại M là: $2x - y + 2z + 4 - 2\ln 2 = 0$.

Câu 8.1.2 **(1đ)** Tính $\displaystyle\int_C y\,ds$ với C là đường cong có phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - 3t \\ y = \sqrt{3}t^2 \end{cases}$ đi từ gốc tọa độ O đến điểm A ứng với $t = 1$.

[Hướng dẫn giải]

+) Từ phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - 3t \\ y = \sqrt{3}t^2 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x'_t = t^2 - 3 \\ y'_t = 2\sqrt{3}t \end{cases}$

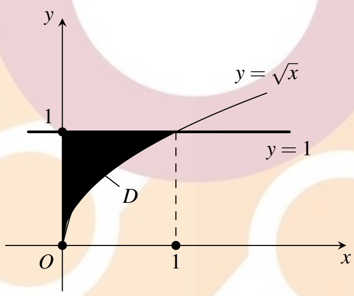
+) Suy ra: $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \sqrt{(t^2-3)^2 + 12t^2}dt$
$= \sqrt{t^4 + 6t^2 + 9}dt = (t^2+3)dt$

+) Khi đó: $I = \int\limits_C yds = \int\limits_0^1 \sqrt{3}t^2(t^2+3)dt = \sqrt{3}\left(\dfrac{t^5}{5} + t^3\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

+) Kết luận: Vậy tích phân cần tính có giá trị bằng $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

Câu 8.1.3 **(1đ)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 \sin(3y^3)dy$

[Hướng dẫn giải]



+) Miền lấy tích phân là D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \le y \le 1 \end{cases}$ được biểu diễn như hình trên.

+) Dựa vào đồ thị, miền D được viết lại thành $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y^2 \end{cases}$.

+) Thực hiện đổi thứ tự lấy tích phân, ta có:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} \sin(3y^3)dx = \int\limits_0^1 \left(x\sin(3y^3)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y^2} dy$$

$$= \int\limits_0^1 y^2\sin(3y^3)dy = -\frac{\cos(3y^3)}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{1-\cos 3}{9}.$$

+) Kết luận: $I = \dfrac{1-\cos 3}{9}$.

Câu 8.1.4 **(1đ)** Tính thể tích miền V giới hạn bởi : $\begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9 \\ z^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3z^2 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

+) Thể tích cần tính là: $I = \iiint\limits_V dxdydz$

+) Do miền V đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ với $f(x,y,z) = 1$ là hàm chẵn nên ta có:

$I = 2\iiint\limits_{V'} dxdydz$ với V' là miền giới hạn bởi miền V ứng với $z \ge 0$.

+) Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow V'_{r,\varphi,\theta} : \begin{cases} 1 \le r \le 3 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ và $|J| = r^2\sin\theta$

+) Khi đó, ta có :

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^3 r^2\sin\theta dr = 2.2\pi.\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^3 r^2 dr\right)$$
$$= 2.2\pi.\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{26}{3} = \frac{52\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$$

+) Kết luận: Vậy thể tích miền V là: $\dfrac{52\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$ (đvtt).

Câu 8.1.5 **(1đ)** Tính $\displaystyle\int_C [\sin x + 2x(y+1)]dx + \left[x^2 - \sin(y-1)\right] dy$ có $C : x = \log_2 y$ từ $A(0;1)$ đến $B(1;2)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt tích phân cần tính là: $I = \displaystyle\int_C [\sin x + 2x(y+1)]dx + \left[x^2 - \sin(y-1)\right] dy.$

+) Đặt: $P(x,y) = \sin x + 2x(y+1)$; $\quad Q(x,y) = x^2 - \sin(y-1)$.

+) Xét miền đơn liên, liên thông $D = \{(x,y)|y > 0\}$.

Nhận thấy $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D.

Lại có: $P'_y = Q'_x = 2x$.

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_C Pdx + Qdy$ là tích phân không phụ thuộc vào đường đi (do đường C nằm trong miền D).

+) Vậy tồn tại hàm số $u(x,y)$ xác định trên D sao cho $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của $u(x,y)$

Khi đó: $I = u(B) - u(A)$.

+) Chọn điểm $A(0;1)$. Hàm số $u(x,y)$ được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(t,1)dt + \int_1^y Q(x,t)dt + c. \\ &= \int_0^x (\sin t + 4t)dt + \int_1^y \left[x^2 - \sin(t-1)\right] dt + c. \\ &= 1 - \cos x + 2x^2 + x^2(y-1) + \cos(y-1) - 1 + c. \\ &= x^2(y+1) + \cos(y-1) - \cos x + c. \end{aligned}$$

$\Rightarrow I = u(B) - u(A) = u(1;2) - u(0;1) = 3.$

+) Kết luận: Giá trị của tích phân đã cho là 3.

Câu 8.1.6 **(1đ)** Tính: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\tan x}}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\tan x}}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\tan x}}{(\tan x + 1)^2}\left(\tan^2 x + 1\right) dx.$

+) Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \left(\tan^2 x + 1\right) dx$.

+) Đổi cận: Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$.

$x \to \dfrac{\pi}{2}$ thì $t \to +\infty$.

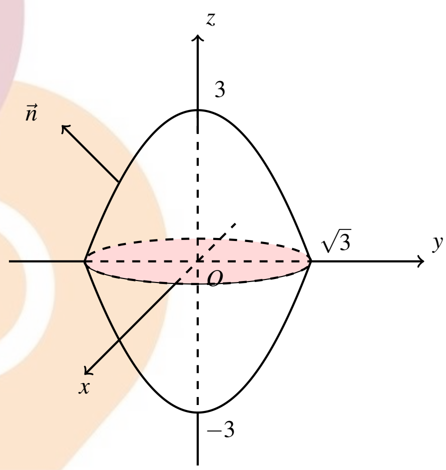
+) Khi đó, tích phân cần tính:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{(t+1)^2} dt = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

+) Kết luận: $I = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

Câu 8.1.7 **(1đ)** Tính $\iint_S \left(2x^2 + e^y\right) dydz + \left(x + y^2\right) dzdx + 3(x+y+z) dxdy$ với S là mặt $x^2 + y^2 + |z| = 3$ hướng ra ngoài.

[Hướng dẫn giải]



+) Ta có tích phân cần tính:
$$I = \int_S \underbrace{\left(2x^2 + e^y\right)}_{P} dydz + \underbrace{\left(x + y^2\right)}_{Q} dzdx + \underbrace{3(x+y+z)}_{R} dxdy$$
trong đó S là mặt cong có phương trình: $x^2 + y^2 + |z| = 3$, hướng ra ngoài.

+) Dễ thấy P, Q, R là các hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn V với V là giới hạn bởi mặt cong kín S có hướng pháp tuyến hướng ra ngoài.

+) Sử dụng công thức Ostrogradsky cho tích phân trên, ta có:

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_V (4x + 2y + 3) dxdydz$$

trong đó V là miền giới hạn bởi: $x^2 + y^2 - 3 \le z \le 3 - x^2 - y^2$.

+) Ta thấy, miền V đối xứng qua mặt $x = 0$ và mặt $y = 0$, đồng thời $f(x,y,z) = 4x$ là hàm lẻ đối với x và $f(x,y,z) = 2y$ là hàm lẻ đối với y nên ta có $\iiint_V 4xdxdydz = 0$ và $\iiint_V 2ydxdydz = 0$.

Khi đó, $I = 3\iiint_V dxdydz$.

+) Đặt $\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền V trở thành miền V' : $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3} \\ r^2 - 3 \le z \le 3 - r^2 \end{cases}$.

+) Khi đó:

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{r^2-3}^{3-r^2} rdz = 3.2\pi. \int_0^{\sqrt{3}} r\left(6 - 2r^2\right) dr$$
$$= 6\pi\left(3r^2 - \frac{r^4}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 27\pi$$

+) Kết luận: Giá trị tích phân cần tính là 27π.

Cách tính khác:

+) Ta có $I = 3\iiint\limits_V dxdydz = 3V_V = 6V_{V_1}$, với V_1 là hình paraboloid nằm phía trên mặt $z = 0$, có $R = \sqrt{3}$ và $h = 3$ (dựa vào hình vẽ). $\Rightarrow V_{V_1} = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}\pi.(\sqrt{3})^2.3 = \dfrac{9\pi}{2}$

+) Giá trị tích phân cần tính là $I = 6.\dfrac{9\pi}{2} = 27\pi$.

Câu 8.1.8 **(1đ)** Tính $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2}dxdy$ với D là miền $\sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} \leq 2$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta thấy: D là miền đối xứng qua gốc tọa độ O với cả x và y, do đó:

$$I = \iint\limits_D \sqrt[3]{x^2}dxdy = 4\iint\limits_{D'} \sqrt[3]{x^2}dxdy$$

với D' là miền $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \leq 2; x, y \geq 0$.

+) Đặt $\begin{cases} x = u^3 \\ y = v^3 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2$ và miền D' trở thành miền $\begin{cases} u + v \leq 2 \\ u, v \geq 0 \end{cases}$.

+) Khi đó, ta có:

$$I = 4\iint\limits_{D'} \sqrt[3]{x^2}dxdy = 4\int_0^2 du \int_0^{2-u} u^2 \cdot 9u^2v^2 dv = 4\int_0^2 3u^4(2-u)^3 du$$

+) Bằng phép đổi biến $u = 2t$, ta thu được:

$$I = 4\int_0^2 3u^4(2-u)^3 du = 4\int_0^1 3(2t)^4 \cdot (2-2t)^3 \cdot 2dt$$

$$= 3072\int_0^1 t^4 \cdot (1-t)^3 dt = 3072 \cdot B(5,4)$$

$$= 3072 \cdot \frac{4! \cdot 3!}{8!} = \frac{384}{35}$$

+) Kết luận: $I = \dfrac{384}{35}$.

Câu 8.1.9 **(2đ)** Cho trường vector sau:

$$\vec{F} = \left(\sqrt{y^2z^2+1} - x^2\right)\vec{i} + \left(\sqrt{z^2x^2+1} - y^2\right)\vec{j} + \left(\sqrt{x^2y^2+1} - z^2\right)\vec{k}$$

a) Tìm quỹ tích các điểm không xoáy của trường vector $\vec{F}$.

b) Tính lưu số dọc theo đường cong L là giao của hai mặt $(S): x^2 + (y-2)^2 = 1$ và mặt $yz = 1$ hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ chiều dương Oz.

[Hướng dẫn giải]

a) Đặt $\begin{cases} P(x,y,z) = \sqrt{y^2z^2+1} - x^2 \\ Q(x,y,z) = \sqrt{z^2x^2+1} - y^2 \\ R(x,y,z) = \sqrt{x^2y^2+1} - z^2 \end{cases}$

Ta có:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2+1}} - \frac{x^2z}{\sqrt{z^2x^2+1}}\right)\vec{i} + \left(\frac{y^2z}{\sqrt{y^2z^2+1}} - \frac{y^2x}{\sqrt{y^2x^2+1}}\right)\vec{j} + \left(\frac{z^2x}{\sqrt{z^2x^2+1}} - \frac{z^2y}{\sqrt{y^2z^2+1}})\right)\vec{k}$$

+) Tọa độ các điểm không xoáy thỏa mãn :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2+1}}=\dfrac{x^2z}{\sqrt{z^2x^2+1}} & (1)\\ \dfrac{y^2z}{\sqrt{y^2z^2+1}}=\dfrac{y^2x}{\sqrt{y^2x^2+1}} & (2)\\ \dfrac{z^2x}{\sqrt{z^2x^2+1}}=\dfrac{z^2y}{\sqrt{y^2z^2+1}} & (3)\end{cases}$$

+) Nếu $x=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2z}{\sqrt{y^2z^2+1}}=0. \\ \dfrac{z^2y}{\sqrt{y^2z^2+1}}=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ z=0.\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Các điểm nằm trên các trục tọa độ Oy và Oz là các điểm không xoáy
Tương tự nếu $y=0$ hoặc $z=0$ ta cũng chỉ ra được các điểm nằm trên Ox,Oy,Oz là các điểm không xoáy.

+) Nếu $x,y,z\neq 0$ từ $(1),(2),(3)$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2y^2+1}}=\dfrac{z}{\sqrt{z^2x^2+1}}\\ \dfrac{z}{\sqrt{y^2z^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{y^2x^2+1}}\\ \dfrac{x}{\sqrt{z^2x^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2z^2+1}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2y^2+1}{y^2}=\dfrac{z^2x^2+1}{z^2}\\ \dfrac{y^2z^2+1}{z^2}=\dfrac{y^2x^2+1}{x^2}\\ \dfrac{z^2x^2+1}{x^2}=\dfrac{y^2z^2+1}{y^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}=x^2+\dfrac{1}{z^2}\\ y^2+\dfrac{1}{z^2}=y^2+\dfrac{1}{x^2}\\ z^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2+\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}\Rightarrow x^2=y^2=z^2$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta lại có x,y,z cùng dấu nên $x=y=z$.

+) Kết luận: Quỹ tích các điểm không xoáy trong trường $\vec{F}$ là các trục tọa độ và đường thẳng $x=y=z$.

b) Có: $\begin{cases} P'_y(x,y,z)=\dfrac{yz^2}{\sqrt{y^2z^2+1}};\ P'_z(x,y,z)=\dfrac{zy^2}{\sqrt{y^2z^2+1}}\\ Q'_z(x,y,z)=\dfrac{zx^2}{\sqrt{z^2x^2+1}};\ Q'_x(x,y,z)=\dfrac{xz^2}{\sqrt{z^2x^2+1}}\\ R'_x(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2+1}};\ R'_y(x,y,z)=\dfrac{yx^2}{\sqrt{x^2y^2+1}}\end{cases}$

+) Ta thấy các hàm $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ đều có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbb{R}^3$, hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ chiều dương Oz, tức là mặt (S) hướng theo phía dương của trục Oz.

+) Áp dụng công thức *Stokes*, lưu số dọc theo đường cong L là:

$$H=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S (R'_y-Q'_z)dydz+(P'_z-R'_x)dzdx+(Q'_x-P'_y)dxdy$$

+) Mặt (S) là mặt $yz=1$ và bị giới hạn bởi mặt trụ $x^2+(y-2)^2=1$, nên vector pháp tuyến đơn vị của (S) là: $\vec{n}_S=\left(0,\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$.

+) Khi đó, ta có liên hệ giữa tích phân mặt loại 1 và loại 2:

$$\begin{aligned} H&=\iint_S \overrightarrow{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}_S\,dS=\iint_S\left[0+(P'_z-R'_x)\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}+(Q'_x-P'_y)\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]dS\\ &=\iint_S\left[\left(\frac{zy^2}{\sqrt{y^2z^2+1}}-\frac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2+1}}\right)\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}+\left(\frac{xz^2}{\sqrt{z^2x^2+1}}-\frac{yz^2}{\sqrt{y^2z^2+1}}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]dS\\ &=\iint_S\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\left(\frac{xyz^2}{\sqrt{z^2x^2+1}}-\frac{xy^2z}{\sqrt{x^2y^2+1}}\right)dS\\ &=\iint_S\frac{xyz}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\left(\frac{z}{\sqrt{z^2x^2+1}}-\frac{y}{\sqrt{x^2y^2+1}}\right)dS\end{aligned}$$

+) Ta có hàm số bên trong dấu tích phân là hàm lẻ đối với x, mặt (S) đối xứng với nhau qua mặt phẳng $x=0 \Rightarrow H=0$.

+) Kết luận: Vậy lưu số dọc theo đường cong L của F bằng 0.

8.2 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.2

Câu 8.2.1 **(1đ)** Tìm a để hàm số sau liên tục:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3\sin x}{x^2+y^4}, & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ a-1, & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

[Hướng dẫn giải]

+) Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $x^2+y^4 \geq 2|x|y^2$.

$\Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{xy^3\sin x}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\dfrac{(x^2+y^4)y\sin x}{2(x^2+y^4)}\right| = \dfrac{|y\sin x|}{2}$.

Mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y\sin x|}{2}=0$ nên theo nguyên lý kẹp, ta có: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3\sin x}{x^2+y^4}=0$.

+) Để hàm số liên tục tại $(0,0)$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0) \Leftrightarrow 0=a-1$ hay $a=1$.

+) Kết luận: Vậy $a=1$.

Câu 8.2.2 **(1đ)** Cho hàm vector $\overrightarrow{r(t)}=t\tan t.\vec{i}+te^t.\vec{j}+t^2.\vec{k}$. Tính $\overrightarrow{r'(0)}$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\overrightarrow{r'(t)}=(t\tan t)'.\vec{i}+(te^t)'.\vec{j}+(t^2)'.\vec{k}$.

$$=\left(\frac{t}{\cos^2 t}+\tan t\right).\vec{i}+(e^t+te^t).\vec{j}+2t.\vec{k}.$$

+) Thay $t=0$, ta được $\overrightarrow{r'(0)}=(0,1,0)$.

+) Kết luận: Vậy $\overrightarrow{r'(0)}=(0,1,0)$.

Câu 8.2.3 **(1đ)** Tính độ cong của đường cong cho bởi hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2024$ tại điểm $M(1,2024)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2024$.

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+2024$.

$=(x^2-5x+4)^2+2(x^2-5x+4)+1+2023$.

$=(x^2-5x+5)^2+2023$.

Khi đó: $y'=2(x^2-5x+5)(2x-5)$, $y''=2(2x-5)^2+4(x^2-5x+5)$.

+) Tại điểm $M(1,2024)$, ta có :

$$C(M)=\frac{|y''|}{((y')^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{22}{(6^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{22}{37\sqrt{37}}.$$

+) Kết luận: Vậy độ cong của đường cong đã cho tại M là $\dfrac{22}{37\sqrt{37}}$.

Câu 8.2.4 **(1đ)** Tìm cực trị tự do của hàm số $f(x,y)=x^2y-\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{y^4}{4}+1$.

[Hướng dẫn giải]

+) Điều kiện cần để hàm số có cực trị: $\begin{cases} f'_x = 2xy - 2x^3 = 0 \\ f'_y = x^2 - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right. \\ x^2 - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Đồ thị đã cho có 3 điểm dừng: $M(0,0)$; $N(-1,1)$; $P(1,1)$.

+) Ta có: $\begin{cases} f''_{xx} = 2y - 6x^2 = A \\ f''_{xy} = 2x = B \\ f''_{yy} = -3y^2 = C \end{cases}$.

► Xét tại $M(0,0)$, ta có: $\begin{cases} f''_{xx}(M) = 0 \\ f''_{xy}(M) = 0 \\ f''_{yy}(M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 0.$

▷ Xét biểu thức số gia hàm số: $\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^2y - \frac{x^4}{2} - \frac{y^4}{4}$.

▷ Chọn hai dãy tiến đến điểm $M(0,0)$ là: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ và $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right)$ khi $n \to +\infty$.

▷ Ta có: $\begin{cases} \Delta f(x_n, y_n) = \frac{1}{n^3} - \frac{3}{4n^4} = \frac{4n-3}{4n^4} \geq 0 \quad \forall n \geq 1,\ n \to +\infty. \\ \Delta f(x'_n, y'_n) = -\frac{1}{n^3} - \frac{3}{4n^4} \leq 0 \quad \forall n \geq 1,\ n \to +\infty. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Điểm $M(0,0)$ không phải là điểm cực trị.

► Xét tại $N(-1,1)$, ta có: $\begin{cases} f''_{xx}(N) = -4 \\ f''_{xy}(N) = -2 \\ f''_{yy}(N) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = -8 < 0 \\ a < 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Điểm $N(-1,1)$ là điểm cực đại và giá trị cực đại $f(N) = \frac{5}{4}$.

► Xét tại $N(-1,1)$, ta có: $\begin{cases} f''_{xx}(N) = -4 \\ f''_{xy}(N) = 2 \\ f''_{yy}(N) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = -8 < 0 \\ a < 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Điểm $P(1,1)$ là điểm cực đại và giá trị cực đại $f(P) = \frac{5}{4}$.

+) Kết luận: Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực đại là $N(-1,1)$ và $P(1,1)$ với $f(N) = f(P) = \frac{5}{4}$.

Câu 8.2.5 **(1đ)** Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{4x - x^2 - y^2}dxdy$, trong đó miền D được giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 = 4x$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

+) Đặt $\begin{cases} x = 2 + r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r.$

Khi đó, miền D trở thành miền D': $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$.

+) Ta có: $I = \iint\limits_D \sqrt{4x - x^2 - y^2}dxdy = \iint\limits_D \sqrt{4 - \left[(x-2)^2 + y^2\right]}dxdy.$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\sqrt{4 - r^2}dr = 2\pi.\frac{-1}{2}.\int_0^2 \sqrt{4 - r^2}d(4 - r^2).$$

$$= -\pi\left[\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^2 = -\pi\left(-\frac{2}{3}.4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{3}\pi.$$

+) Kết luận: Vậy giá trị của tích phân đã cho là $\frac{16\pi}{3}$.

Câu 8.2.6 **(1đ)** Tính chiều dài cung AB biết cung AB là một phần của đường cong $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ từ điểm $(1,0)$ đến điểm $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\begin{cases} e^t\cos t = 1 \\ e^t\sin t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0.$

$\begin{cases} e^t\cos t = 0 \\ e^t\sin t = e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

Khi đó, chiều dài cung AB là: $l = \int ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[e^t\cos t + e^t(-\sin t)]^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}\,dt.$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t\,dt.$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$$

+) Kết luận: Vậy chiều dài cung AB là $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$.

Câu 8.2.7 **(1đ)** Tính thể tích của phần hình trụ bị giới hạn bởi mặt $x^2+y^2 = 3x$ nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 9$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $x^2+y^2+z^2 = 9 \Rightarrow -\sqrt{9-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}$.

Khi đó, thể tích miền cần tính là:

$$V = \iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2} - (-\sqrt{9-x^2-y^2})dxdy = \iint\limits_D 2\sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$$

trong đó, miền D: $x^2+y^2 \le 3x$ là hình chiếu của phần hình trụ lên Oxy.

+) Ta thấy $f(x,y) = 2\sqrt{9-x^2-y^2}$ là hàm chẵn với y và D là miền đối xứng qua Ox nên ta có:

$$V = 4\iint\limits_{D'} \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$$

trong đó, D' là miền giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 3x \\ y \ge 0 \end{cases}$.

+) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r.$

Khi đó, miền D' trở thành miền D'': $\begin{cases} 0 \le r \le 3\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r\sqrt{9-r^2}dr = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \sqrt{9-r^2}d(9-r^2).$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=3\cos\varphi} d\varphi = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[9^{\frac{3}{2}} - \left(9-9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\varphi.$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\left(1-\sin^3\varphi\right) d\varphi = 36\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = 18\pi - 24.$$

+) Kết luận: Vậy thể tích miền cần tính là $18\pi - 24$.

Câu 8.2.8 **(1đ)** Chứng minh trường vector sau là trường thế và tìm hàm thế vị của nó:

$$\overrightarrow{F} = [2xy + z\cos(xz)]\vec{i} + \left(x^2 + ze^{yz}\right)\vec{j} + [ye^{yz} + x\cos(xz)]\vec{k}.$$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z\cos(xz) & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} + x\cos(xz) \end{vmatrix}.$

$$= [e^{yz}(1+yz) - e^{yz}(1+yz)]\vec{i} + [xz(-\sin(xz)) - xz(-\sin(xz))]\vec{j} + (2x-2x)\vec{k}.$$

$$= \vec{0} \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Khi đó, trường vector $\overrightarrow{F}$ là trường thế.

+) Hàm thế vị u của trường $\overrightarrow{F}$ được xác định bởi:

$$u = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt + C.$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y x^2 dt + \int_0^z \left[ye^{yt} + x\cos(xt)\right] dt + C.$$

$$= 0 + x^2y + [e^{yt} + \sin(xt)]\Big|_0^z + C.$$

$$= x^2y + e^{yz} + \sin(xz) + C_1.$$

+) Kết luận: Vậy trường vector $\overrightarrow{F}$ là trường thế và có hàm thế vị là $u = x^2y + e^{yz} + \sin(xz) + C$ với C là hằng số.

Câu 8.2.9 **(1đ)** Tính $I = \iint\limits_D |2x-4y|dxdy$, trong đó miền D: $\left|\dfrac{x}{2} - y\right| + |x+2y| \le 1$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{2}.$

Khi đó, miền D trở thành miền D': $|u| + |v| \le 1$.

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} |4u|.\frac{1}{2}dudv = 2\iint\limits_{D'} |u|dudv.$$

+) Ta thấy miền D' đối xứng qua các trục Ox, Oy và $f(u,v) = |u|$ là hàm chẵn đối với u, v nên ta có:

$$I = 8\iint\limits_{D''} u du dv$$

trong đó, D'' là miền giới hạn bởi: $\begin{cases} u \geq 0,\ v \geq 0 \\ u + v \leq 1 \end{cases}$.

Khi đó, $I = 8\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} u dv = 8\int\limits_0^1 u(1-u)du = \dfrac{4}{3}$.

+) Kết luận: Vậy $I = \dfrac{4}{3}$.

Câu 8.2.10 **(1đ)** Cho C là đường $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, định hướng dương. Tính tích phân đường

$$I = \oint\limits_C \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4}.$$

[Hướng dẫn giải]

+) Bổ sung K: $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ (với $\varepsilon > 0$ và đủ nhỏ) là đường tròn định hướng âm, nằm trong miền giới hạn bởi đường cong C.

Khi đó, ta có: $I = \displaystyle\int\limits_{C+K} \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4} - \int\limits_K \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4}$.

+) Xét $I_1 = \displaystyle\int\limits_{C+K} \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4}$.

► Gọi D là miền giới hạn bởi các đường cong K và C.

⇒ Áp dụng công thức Green cho tích phân trên ta được:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_D \left[\frac{-2xy(x^4+y^4) + x^2y.4x^3}{(x^4+y^4)^2} - \frac{2xy(x^4+y^4) - xy^2.4y^3}{(x^4+y^4)^2}\right] dxdy. \\ &= \iint\limits_D \frac{-4xy(x^4+y^4) + 4x^5y + 4xy^5}{(x^4+y^4)^2} dxdy. \\ &= 0. \end{aligned}$$

+) Xét $I_2 = \displaystyle\int\limits_K \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^4 + y^4}$.

► Đặt $\begin{cases} x = \varepsilon\cos t \\ y = \varepsilon\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\varepsilon\sin t dt \\ dy = \varepsilon\cos t dt \end{cases}$.

► Do K là đường tròn hướng âm nên ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{\varepsilon\cos t.(\varepsilon\sin t)^2.(-\varepsilon\sin t) - (\varepsilon\cos t)^2.\varepsilon\sin t.\varepsilon\cos t}{\varepsilon^4\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right)} dt. \\ &= \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{-\sin t\cos t}{1 - 2\sin^2 t\cos^2 t} dt. \\ &= \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{1}{2(1+\cos^2 2t)} d(\cos 2t). \\ &= \frac{1}{2}\arctan(\cos 2t)\Big|_{2\pi}^{0}. \end{aligned}$$

$$= 0.$$

Ta có: $I = I_1 - I_2 = 0$.

+) Kết luận: Vậy $I = 0$.

8.3 Đáp án đề thi cuối kì - Kíp 1 - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.2

Câu 8.3.1 **(1đ)** Tính độ cong của đường $x = te^t,\ y = t,\ z = e^t$ tại điểm $M(0;0;1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\begin{cases} x(t) = t.e^t \\ y(t) = t \\ z(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = (t+1)e^t \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t) = (t+2)e^t \\ y''(t) = 0 \\ z''(t) = e^t \end{cases}$

+) Xét điểm $M(0;0;1)$ có $\begin{cases} x(t) = t.e^t = 0 \\ y(t) = t = 0 \\ z(t) = e^t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

+) Độ cong của đường cong tại điểm M ứng với $t = 0$ là:

$$C(M) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y'(0) & z'(0) \\ y''(0) & z''(0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(0) & x'(0) \\ z''(0) & x''(0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(0) & y'(0) \\ x''(0) & y''(0) \end{vmatrix}^2}}{(x'(0) + y'(0) + z'(0))^{3/2}}$$

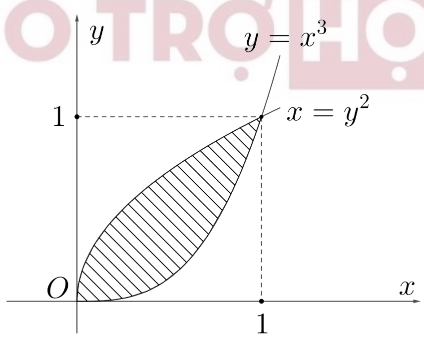
$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2}}{(1+1+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}$$

+) Kết luận: Vậy độ cong của đường cong tại điểm M là $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 8.3.2 **(1đ)** Tính diện tích của phần mặt phẳng $z = 1 + x + 2y$ trên miền bị chặn bởi các đường $y = x^3$ và $x = y^2$.

[Hướng dẫn giải]



+) Từ phương trình mặt phẳng $z = 1 + x + 2y \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 1 \\ z'_y = 2 \end{cases}$

+) Theo công thức tính diện tích của một mặt trong không gian:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{6}\, dxdy$$

với D là hình chiếu của phần mặt phẳng bị chặn trên Oxy, ta có D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^3 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

+) Như vậy diện tích cần tìm là:

$$S=\sqrt{6}\int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}} 1dy=\sqrt{6}\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)dx=\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

+) Kết luận: Vậy diện tích mặt phẳng cần tính là $\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$ (đvdt)

Câu 8.3.3 **(1đ)** Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$, trong đó V là vật thể bị chặn bởi $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ và $z=1-x^2-y^2$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le 1-x^2-y^2$

+) Hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy là D: $x^2+y^2\le 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1-x^2-y^2} zdz\\&=\iint\limits_D \frac{1}{2}\left(\left(1-x^2-y^2\right)^2-\left(1-x^2-y^2\right)\right)dxdy\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy\end{aligned}$$

+) Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow |J|=r$

Khi đó, miền D trở thành miền D': $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\end{cases}$

+) Ta có tích phân cần tính:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(r^4-r^2\right)rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^6}{6}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{12}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{\pi}{12}$$

+) Kết luận: Vậy giá trị tích phân cần tính là $-\dfrac{\pi}{12}$

Câu 8.3.4 **(2đ)** Tính các tích phân sau:

a) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^{24}e^{\sqrt[3]{x}}dx.$

b) $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^8+1}.$

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Đặt $t=-\sqrt[3]{x}\Rightarrow\begin{cases}x=-t^3\\ dx=-3t^2dt\end{cases}$

+) Đổi cận: Khi $x\to 0$ thì $t\to 0$

$x\to-\infty$ thì $t\to+\infty$

Khi đó, ta có:

$$I=\int_0^{+\infty}t^{72}e^{-t}.3t^2dt=3\int_0^{+\infty}t^{74}e^{-t}dt=3.\Gamma(75)=3.74!$$

+) Kết luận: Vậy $I=3.74!$

b)

+) Đặt $x^8 = t \Rightarrow \begin{cases} x = t^{\frac{1}{8}} \\ dx = \dfrac{dt}{8t^{\frac{7}{8}}} \end{cases}$

+) Đổi cận: Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$

$x \to +\infty$ thì $t \to +\infty$

Khi đó, ta có:

$$I = \frac{1}{8}.\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}.\frac{1}{t^{\frac{7}{8}}} = \frac{1}{8}.\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{7}{8}}}{t+1}dt = \frac{1}{8}B\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

+) Kết luận: Vậy $I = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

Câu 8.3.5 **(1đ)** Cho C là biên của miền bị chặn bởi $x+y=2$ và $y=x^2$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Tính

$$\oint\limits_C (e^{x^2}+xy)dx + xdy.$$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $I = \oint\limits_C (e^{x^2}+xy)dx + xdy$

+) Ta thấy C là miền kín và được định hướng theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, áp dụng công thức Green, ta có:

$$I = \iint\limits_D (1-x)\,dxdy$$

trong đó D là miền xác định bởi: $\begin{cases} x^2 \le y \le 2-x \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$

+) Khi đó, ta có:

$$I = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} (1-x)dy = \int\limits_{-2}^{1} y(1-x)\Big|_{y=x^2}^{y=2-x} dx = \int\limits_{-2}^{1} (x^3-3x+2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{27}{4}$$

+) Kết luận: Vậy $I = \dfrac{27}{4}$

Câu 8.3.6 **(1đ)** Tính $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, trong đó S là mặt xác định bởi $z = x^2+y^2$, $z \le 4$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $z = x^2+y^2 \Rightarrow dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$

+) Hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền D: $x^2+y^2 \le 4$

Khi đó, $I = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}.\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \iint\limits_D (1+4x^2+4y^2)dxdy$

+) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Khi đó, miền D trở thành miền D': $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (1+4r^2)rdr = 2\pi.\left(\frac{r^2}{2}+r^4\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi.(2+16) = 36\pi$$

+) Kết luận: Vậy giá trị tích phân cần tính là 36π

Câu 8.3.7 **(1đ)** Cho $M(1;2;3)$ và $N(2;3;-1)$. Tìm đạo hàm của $f(x,y,z)=xyz$ theo hướng $\overrightarrow{MN}$ tại điểm N.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=yz \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=zx \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(N)=-3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(N)=-2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(N)=6 \end{cases}$

Khi đó, ta có: $\overrightarrow{grad} f(N)=(-3;-2;6)$ và $\overrightarrow{MN}=(1;1;-4)$

$\Rightarrow$ Đạo hàm của f theo hướng $\overrightarrow{MN}$ tại điểm N là:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{MN}}(N)=\frac{\overrightarrow{grad} f(N).\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{(-3).1+(-2).1+6.(-4)}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}=-\frac{29\sqrt{2}}{6}$$

+) Kết luận: Vậy đạo hàm của f theo hướng $\overrightarrow{MN}$ tại điểm N là $-\dfrac{29\sqrt{2}}{6}$

Câu 8.3.8 **(1đ)** Tính $S=\displaystyle\iint_S zdydz+x^2dxdz+3xzdxdy$, trong đó S là phía dưới của mặt trụ $z=x^2$ bị giới hạn bởi các mặt phẳng $y=0$ và $y=1-z$, khi nhìn theo hướng dương của trục Oz.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta thấy mặt S chưa phải là mặt cong kín, khi đó để dùng được công thức Ostrogradsky, ta cần bổ sung vào S hai mặt phẳng S_0: $y=0$ và S_1: $y=1-z$ bị giới hạn bởi mặt cong S, ta thu được mặt cong S' có hướng pháp tuyến vào trong.

+) Đặt V là phần thể tích bị giới hạn bởi mặt cong S', khi đó V: $\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ -1\le x\le 1 \\ x^2\le z\le 1-y \end{cases}$

+) Áp dụng công thức Ostrogradsky cho tích phân trên, ta có:

$$K=\iint_{S'} zdydz+x^2dxdz+3xzdxdy=-\iiint_V 3xdxdydz$$

+) Ta thấy miền V đối xứng qua mặt phẳng $x=0$ mà $f(x)=3x$ là hàm lẻ đối với x nên ta có $K=-\displaystyle\iiint_V f(x)dxdydz=0$

Khi đó, $S=K-\underbrace{\displaystyle\iint_{S_0} zdydz+x^2dxdz+3xzdxdy}_{I_1}-\underbrace{\displaystyle\iint_{S_1} zdydz+x^2dxdz+3xzdxdy}_{I_2}$

+) Tính I_1

- Ta thấy, hình chiếu của S_0 lên Oyz, Oxy là các đoạn thẳng nên $\displaystyle\iint_{S_0} zdydz+3xzdxdy=0$ hay $I_1=\displaystyle\iint_S x^2dxdz$
- Hình chiếu của S_0 lên Oxz là miền D_2: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x^2\le z\le 1 \end{cases}$ và góc tạo bởi vector pháp tuyến định hướng mặt và trục Oy là $180°$.
  Khi đó, ta có:

$$I_1=-\iint_{D_2} x^2dxdz=-\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2dz=-\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx=-\frac{4}{15}$$

+) Tính I_2

- Hình chiếu của S_1 lên Oyz là một đoạn thẳng nên $\iint\limits_{S_1} zdydz = 0$
- Hình chiếu của S_1 lên Oxz là miền E_2: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le z \le 1 \end{cases}$ và góc tạo bởi vector pháp tuyến định hướng mặt và trục Oy là một góc nhọn

  Khi đó, ta có: $\iint\limits_{S_1} x^2dxdz = \iint\limits_{E_2} x^2dxdz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} x^2dz = \dfrac{4}{15}$
- Hình chiếu của S_1 lên Oxy là miền E_3: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x^2 \end{cases}$ và góc tạo bởi vector pháp tuyến định hướng mặt và trục Oy là một góc nhọn

  Khi đó, ta có: $\iint\limits_{S_1} 3xzdxdz = \iint\limits_{E_3} 3xzdxdz = 0$ (xét tính đối xứng)

  Từ đó suy ra: $I_2 = \iint\limits_{S_1} zdydz + x^2dxdz + 3xzdxdy = \dfrac{4}{15}$

$\Rightarrow S = K - I_1 - I_2 = 0$

+) Kết luận: Vậy $S = 0$

Câu 8.3.9 **(1đ)** Cho C là đường $x = t,\ y = t^3,\ z = t^2$ với $0 \le t \le 3$. Tính

$$\int\limits_C e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 3t^2\,dt \\ dz = 2t\,dt \end{cases} \quad (0 \le t \le 3)$

Khi đó: $I = \int\limits_C e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz$

$$= \int_0^3 \left[e^{t^3} + e^{t^3}.t.3t^2 + e^{t^2}.2t.(t^2+1)\right] dt$$

$$= \int\limits_0^3 e^{t^3}\left(3t^3+1\right)dt + \int\limits_0^3 e^{t^2}\left(2t^3+2t\right)dt$$

+) Ta có:

- $I_1 = \int\limits_0^3 e^{t^3}(3t^3+1)dt = \int\limits_0^3 td\left(e^{t^3}\right) + \int\limits_0^3 e^{t^3}dt = \left(te^{t^3}\right)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 e^{t^3}dt + \int\limits_0^3 e^{t^3}dt = 3e^{27}$
- $I_2 = \int\limits_0^3 e^{t^2}\left(2t^3+2t\right)dt = \int\limits_0^3 t^2d\left(e^{t^2}\right) + \int\limits_0^3 2te^{t^2}dt = \left(t^2e^{t^2}\right)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 2te^{t^2}dt + \int\limits_0^3 2te^{t^2}dt = 9e^9$

Khi đó, $\int\limits_C e^y dx + xe^y dy + (z+1)e^z dz = I_1 + I_2 = 3e^{27} + 9e^9$

+) Kết luận: Vậy giá trị tích phân cần tính là $3e^{27} + 9e^9$

8.4 Đáp án đề thi cuối kì - Kíp 2 - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.2

Câu 8.4.1 **(1đ)** Viết phương trình tiếp tuyến của đường $x = te^{t-1}, y = t^2 + t, z = t$ tại điểm $M(1;2;1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $(C)\begin{cases} x = te^{t-1} \\ y = t^2 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = e^{t-1}(1+t) \\ y'_t = 2t+1 \\ z'_t = 1 \end{cases}$

+) Lại có: $M(1;2;1) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ Tại $M(1;2;1)$: $\begin{cases} x'_{t(M)} = 2 \\ y'_{t(M)} = 3 \\ z'_{t(M)} = 1 \end{cases}$

+) Phương trình tiếp tuyến của (C) nhận $\overrightarrow{u}(2;3;1)$ làm vector chỉ phương:

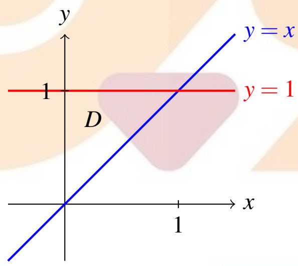
$$\frac{x - x_M}{x'_t} = \frac{y - y_M}{y'_t} = \frac{z - z_M}{z'_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z - 1$$

+) Kết luận: Phương trình tiếp tuyến là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 1$.

Câu 8.4.2 **(1đ)** Tính thể tích của vật thể bao quanh bởi paraboloid $z = x^2 + 2y^2$ và các mặt phẳng $x = 0, y = 1, y = x, z = 0$.

[Hướng dẫn giải]



+) Hình chiếu của vật thể trên mặt phẳng Oxy là miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases}$

+) Thể tích vật thể được giới hạn là:

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + 2y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \left(x^2 + 2y^2\right) dy$$

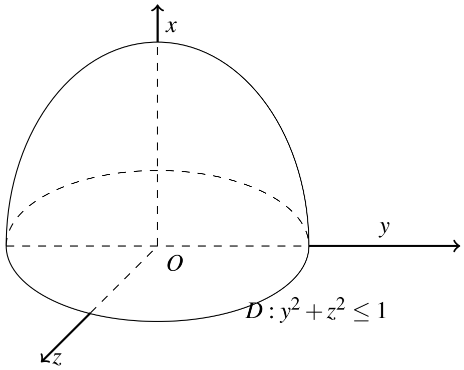
$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_x^1 dx = \int\limits_0^1 x^2(1-x) + \frac{2}{3}\left(1 - x^3\right) dx$$

$$= \frac{7}{12}\,(\text{đvtt}).$$

+) Kết luận: Thể tích của vật thể là: $\dfrac{7}{12}$ (đvtt).

Câu 8.4.3 **(1đ)** Tính tích phân $\iiint\limits_V y^2 z^2 dxdydz$, trong đó V bị chặn bởi $x = 1 - y^2 - z^2$ và $x = 0$.

[Hướng dẫn giải]



+) Hình chiếu của V lên mặt phẳng Oyz là $D: y^2+z^2 \leq 1$.

+) $I = \iint\limits_D y^2z^2dydz \int_0^{1-y^2-z^2} dx = \iint\limits_D y^2z^2 \left(x\Big|_0^{1-y^2-z^2}\right)dydz = \iint\limits_D y^2z^2(1-y^2-z^2)dydz$

+) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

+) Khi đó miền D trở thành $D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

+) Giá trị của tích phân là:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi)^2 (1-r^2)\cdot rdr = \int_0^{2\pi} (\sin\varphi\cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^1 (r^5-r^7)dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi \cdot \left(\frac{r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{192}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{192}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{96}.$$

+) Kết luận: Vậy tích phân cần tính có giá trị là: $\dfrac{\pi}{96}$.

Câu 8.4.4 **(2đ)** Tính các tích phân sau:

a) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+4x^2)^3}$.

b) $I = \int\limits_{(1;1)}^{(3;8)} 3y^{\frac{4}{3}}dx + 4xy^{\frac{1}{3}}dy$.

[Hướng dẫn giải]

a) $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+4x^2)^3}$.

+) Đặt: $t = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} (\text{với } t \in [0;+\infty)) \\ dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{cases}$

+) Đổi cận: Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$

$x \to +\infty$ thì $t \to +\infty$

+) Giá trị của tích phân là:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^3} \cdot \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}} dt \\
&= \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2!} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{2!} \\
&= \frac{3\pi}{32}.
\end{aligned}
$$

+) Kết luận: Vậy tích phân cần tính có giá trị là: $\dfrac{3\pi}{32}$.

b) $I = \displaystyle\int_{(1;1)}^{(3;8)} 3y^{\frac{4}{3}} dx + 4xy^{\frac{1}{3}} dy.$

+) Đặt: $\begin{cases} P(x,y) = 3y^{\frac{4}{3}} \\ Q(x,y) = 4xy^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4y^{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4y^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi.

+) Xét tích phân đường đi từ $A(1,1)$ đến $B(3,8)$ theo các đoạn: $y = 1 (1 \leqslant x \leqslant 3)$ và $x = 3 (1 \leq y \leq 8)$.

Suy ra: $I = \displaystyle\int_1^3 3dx + \int_1^8 12y^{\frac{1}{3}} dy = 3x\Big|_1^3 + 9y^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = 141.$

+) Kết luận: Vậy tích phân cần tính có giá trị là: 141.

Câu 8.4.5 **(1đ)** Tính tích phân $\displaystyle\int_C xydx + x^2dy$, trong đó C xác định bởi $x = 2\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{9}}$ từ (0;-3) đến (0;3).

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = x^2 \end{cases}$

+) $P(x,y), Q(x,y)$ cùng các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

+) Ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = x \end{cases}$

+) Phương trình đường cong C : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

+) Ta bổ sung thêm đường $\Delta : x = 0$ hướng từ B(0;3) đến A(0;-3) và C để thu được đường cong kín $K = C \cup \Delta$, giới hạn miền D : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

+) Khi đó $I = \displaystyle\oint_K Pdx + Qdy - \int_{\Delta: B \to A} Pdx + Qdy.$

+) Tính I_1: Áp dụng công thức Green theo chiều dương ta có:

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (2x - x) dxdy = \iint_D xdxdy.$$

- Đặt $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = 6r.$
- Miền D trở thành D' : $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$
- $I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 6r.2r\cos\varphi dr = 12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = 12\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = 8.$

+) Tính I_2 :

- Ta có $\Delta : x = 0 \Rightarrow dx = 0dy.$
- $B(0;3) \to A(0;-3) \Rightarrow y : 3 \to -3.$

  $\Rightarrow I_2 = \displaystyle\int_3^{-3} (0.y + 0^2)dy = 0.$

+) Kết luận: $I = I_1 - I_2 = 8 - 0 = 8.$

Câu 8.4.6 **(1đ)**Cho trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = 2x\overrightarrow{i} + \left(e^y z + 3y^2 z\right)\overrightarrow{j} + \left(e^y + y^3\right)\overrightarrow{k}.$$

Tính vectơ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}$ và tìm hàm thế vị (nếu có).

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y,z) = 2x \\ Q(x,y,z) = e^y z + 3y^2 z \\ R(x,y,z) = e^y + y^3 \end{cases}$

+) Khi đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} &= \left(R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\right) \\ &= \left(e^y + 3y^2 - e^y - 3y^2; 0; 0\right) \\ &= (0;0;0). \end{aligned}$$

+) Từ đây suy ra $\overrightarrow{F}$ là trường thế. Ta chọn $M(0;0;0) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$ là:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt + C \\ &= \int_0^x 2tdt + \int_0^y 0dt + \int_0^z (e^y + y^3)dt + C \\ &= x^2 + (e^y + y^3)z + C. \end{aligned}$$

+) Kết luận:

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} = (0;0;0).$
- Hàm thế vị là $u(x,y,z) = x^2 + (e^y + y^3)z + C.$

Câu 8.4.7 **(1đ)** Tìm hướng mà tại $M(-1;2;1)$ hàm số $f(x,y,z) = xyz$ giảm nhanh nhất. Tìm đạo hàm theo hướng này tại M.

[Hướng dẫn giải]

+) Tại $M(-1;2;1)$ thì: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = -2 \end{cases}$

Suy ra: $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) = (2;-1;-2).$

+) Gọi hướng cần tìm là $\overrightarrow{d}$.

Hàm giảm nhanh nhất tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{d}$ ngược chiều với $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.
Vậy hướng đó là $(2k;-k;-2k),\ k<0$.

+) Ta chọn vectơ $\overrightarrow{d}$ sao cho $|\overrightarrow{d}|=1 \Rightarrow \overrightarrow{d}=(\frac{-2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3})$.

Do vậy: $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{d}}(M)=\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\cdot\overrightarrow{d}=-3$.

+) Kết luận:

- Hướng mà tại M hàm giảm nhanh nhất là $(2k;-k;-2k),\ k<0$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{d}}(M)=-3$.

Câu 8.4.8 **(1đ)** Tính $\iint\limits_S y^2dydz+z^2dzdx+(x-y)dxdy$, trong đó S là phía trên của mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$, khi nhìn từ chiều dương của trục Oz.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y,z)=y^2\\ Q(x,y,z)=z^2\\ R(x,y,z)=x-y\end{cases}$

+) Vì mặt S không kín. Ta bổ sung thêm mặt $S_1: z=1$ với chiều hướng xuống để thu được mặt $K=S\cup S_1$ kín. Khi đó, giới hạn miền V là:

$$V:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$$

+) Hình chiếu của V trên Oxy là $D: x^2+y^2\le 1$.
Khi đó:

$$I=\underbrace{\iint\limits_K Pdydz+Qdzdx+Rdxdy}_{I_1}-\underbrace{\iint\limits_{S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy}_{I_2}.$$

+) Tính I_1:

- P,Q,R là các hàm khả vi liên tục trên miền V bị chặn.
- Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$I_1=-\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdydz=-\iiint\limits_V(0+0+0)dxdydz=0.$$

+) Tính I_2

- $z=1\Rightarrow dz=0.\Rightarrow I_2=\iint\limits_{S_1}(x-y)dxdy$
- Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow |J|=r$ và $\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(r\cos\varphi-r\sin\varphi)dr=-\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi\int_0^1 r^2dr=0.$$

+) Kết luận: $I=I_1-I_2=0$.

Câu 8.4.9 **(1đ)** Cho $I(y)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx$, với $y>0$. Chứng minh rằng hàm $I(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và tính nó.

[Hướng dẫn giải]

+) $I(y)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx\ (y>0)$.

+) Xét $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ trên $[0,1] \times (0,+\infty)$.

- $f(x,y)$ lên tục theo x trêm $[0,1]$.
- $f'_y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ liên tục trên $(0,+\infty)$.
  $\Rightarrow I(y)$ khả vi trên $(0,+\infty)$.

+) Khi đó:

$$\begin{aligned} I'(y) = \int_0^1 f'_y dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2} dx \\ =& 2\arctan \frac{x}{y}\Big|_0^1 \\ =& 2\arctan \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

+) Ta thấy: $I'(y) = 2\arctan\frac{1}{y} > 0, \ \forall y > 0.$

$\Rightarrow I(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$\begin{aligned} I(y) = \int I'(y)dy = \int 2\arctan\frac{1}{y}dy \\ =& 2y\arctan\frac{1}{y} + 2\int yd(\arctan\frac{1}{y}) \\ =& 2y\arctan\frac{1}{y} + 2\int \frac{y}{1+y^2} \\ =& 2y\arctan\frac{1}{y} + \ln(1+y^2) + C. \end{aligned}$$

+) Ta có:

$$\begin{aligned} I(1) = \int_0^1 \ln(x^2+1)dx =& x\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 xd(ln(x^2+1)) \\ =& \ln(2) - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx \\ =& \ln(2) - 2(x\Big|_0^1 - \arctan x\Big|_0^1) \\ =& \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

+) Thay $y = 1$ ta được: $I(1) = \dfrac{\pi}{2} + \ln(2) + C$.

Do đó: $C = -2$.

Vì vậy: $I(y) = 2y\arctan\dfrac{1}{y} + \ln(1+y^2) - 2$.

+) Kết luận: $I(y)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $I(y) = 2y\arctan\dfrac{1}{y} + \ln(1+y^2) - 2$.

8.5 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.2

Câu 8.5.1 **(1đ)** Viết phương trình pháp tuyến tại điểm $A(-1;1)$ của đường cong $x = \sin(2t) - 1, y = 3t + 1$.

[Hướng dẫn giải]

+) Xét tại điểm $A(-1;1)$: $\begin{cases} x = \sin(2t) - 1 = -1 \\ y = 3t + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

Ta có: $\begin{cases} x'_t = 2\cos 2t \\ y'_t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

+) Phương trình pháp tuyến của đường cong tại điểm A:

$$\begin{aligned} & x'(0) \cdot (x - x(0)) + y'(0) \cdot (y - y(0)) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2(x+1) + 3(y-1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2x + 3y = 1 \end{aligned}$$

+) Vậy phương trình pháp tuyến cần tìm là: $2x + 3y = 1$.

Câu 8.5.2 **(1đ)** Phương trình $x^3 - y^2 + z^3 + xyz = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x,y)$. Tính $z'_y(1;1)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $F(x;y;z) = x^3 - y^2 + z^3 + xyz$

+) Có: $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$

Mà $\begin{cases} F'_y = -2y + xz \\ F'_z = 3z^2 + xy \end{cases} \Rightarrow z'_y = \dfrac{2y - xz}{3z^2 + xy}$

+) Xét điểm $x = 1;\ y = 1$ ta có $z^3 + z = 0 \Rightarrow z = 0$

Khi đó $z'_y(1;1) = \dfrac{2.1 - 1.0}{3.0^2 + 1.1} = 2$

+) Vậy $z'_y(1;1) = 2$.

Câu 8.5.3 **(1đ)** Tính $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2y)dxdy$, ở đây $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có tích phân cần tính:

$$\begin{aligned} I = \iint_D (x^2 - 2y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 - 2y)dy \\ &= \int_0^1 \left((x^2y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

+) Vậy $I = \dfrac{-1}{12}$.

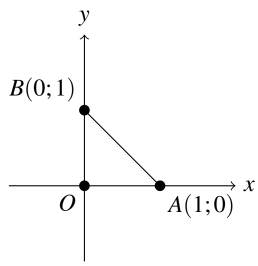
Câu 8.5.4 **(1đ)** Tính $\displaystyle\int_C (x + y + 2)ds$, trong đó C là đoạn thẳng nối $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có phương trình đường thẳng AB là $x+y=1$

$\Rightarrow C:\begin{cases} y=1-x \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow ds=\sqrt{1^2+(-1)^2}dx=\sqrt{2}dx$

+) Do đó $I=\int\limits_C (x+y+2)ds=\int\limits_0^1 (x+1-x+2)\sqrt{2}dx=3\sqrt{2}$



+) Vậy $I=3\sqrt{2}$.

Câu 8.5.5 **(1đ)**. Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}(-1;2;2)$ của hàm số $u(x,y,z)=x^2+2xyz+y^2z$ tại điểm $A(1;1;1)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có:

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2yz \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(A)=4$
- $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2zx+2yz \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}(A)=4$
- $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2xy+y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial z}(A)=3$

+) Khi đó: $\overrightarrow{grad}\,u(A)=(4;4;3)$ và $|\overrightarrow{l}|=3$

+) Vậy: $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A)=\dfrac{\overrightarrow{grad}\,u(A)\cdot\overrightarrow{l}}{|\overrightarrow{l}|}=\dfrac{10}{3}$

Câu 8.5.6 **(1đ)** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=x^4-2xy+2x+y^2$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có $\begin{cases} f'_x(x,y)=4x^3-2y+2 \\ f'_y(x,y)=-2x+2y \end{cases}$

+) Xét hệ phương trình $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3-2y+2=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x^3-2x+2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=y=-1 \quad (x,y\in\mathbb{R})$. Do đó, $M_0(-1,-1)$ là điểm tới hạn của hàm số.

+) Mặt khác ta có $\begin{cases} f''_{x^2}(x,y)=12x^2 \\ f''_{xy}(x,y)=-2 \\ f''_{y^2}(x,y)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(-1,-1)=12=a \\ f''_{xy}(-1,-1)=-2=b \\ f''_{y^2}(-1,-1)=2=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-ac=-20<0 \\ a=12>0 \end{cases}$

+) Vậy hàm số có một cực tiểu duy nhất là điểm $M_0(-1,-1)$.

Câu 8.5.7 **(1đ)** Tính $\iint\limits_D \left(2x-y^2\right)dxdy$, ở đây $D: x^2+y^2\le 2x$.

[Hướng dẫn giải]

+) $D: x^2+y^2\le 2x \Rightarrow D: (x-1)^2+y^2\le 1$.

+) Đặt: $\begin{cases} x=r\cos\varphi+1 \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J|=r$ và $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

+) Ta có tích phân cần tính:

$$I=\iint\limits_{D}\left(2x-y^2\right)dxdy=\iint\limits_{D_{r\varphi}}\left(2r\cos\varphi+2-r^2\sin^2\varphi\right)rdrd\varphi$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(2r\cos\varphi+2-r^2\sin^2\varphi\right)rdr$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\frac{2r^3}{3}\cos\varphi+r^2-\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}\right)d\varphi$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\cos\varphi+1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{7\pi}{4}$$

+) Vậy $I=\dfrac{7\pi}{4}$

Câu 8.5.8 **(1đ)**. Chứng minh trường véc tơ sau là trường thế

$$\overrightarrow{F}=(2xy+z^2)\overrightarrow{i}+(x^2-2yze^{y^2})\overrightarrow{j}+(2xz-e^{y^2})\overrightarrow{k}.$$

Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có:

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$=(-2ye^{y^2}+2ye^{y^2})\overrightarrow{i}+(2z-2z)\overrightarrow{j}+(2x-2x)\overrightarrow{k}$$
$$=\overrightarrow{0}$$

$\Rightarrow$ Vậy trường véc tơ $\overrightarrow{F}$ là trường thế

+) Chọn $M(0;0;0)$, hàm thế vị được xác định bởi:

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x P(t,0,0)dt+\int\limits_0^y Q(x,t,0)dt+\int\limits_0^z R(x,y,t)dt+C$$
$$=\int\limits_0^x 0\,dt+\int\limits_0^y x^2dt+\int\limits_0^z(2xt-e^{y^2})dt+C$$
$$=x^2y+xz^2-ze^{y^2}+C$$

Vậy hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$ là: $u(x,y,z)=x^2y+xz^2-ze^{y^2}+C$.

Câu 8.5.9 **(1đ)** Tính $\int\limits_C(x+y)dx+\left(x^2+3y+\cos(y^2)\right)dy$, trong đó C là nửa đường tròn $y=\sqrt{2x-x^2}$, hướng từ $A(2;0)$ đến $B(0;0)$.

[Hướng dẫn giải]

+) Có: $\begin{cases}P(x,y)=x+y\\Q(x,y)=x^2+3y+\cos(y^2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=1\\\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\end{cases}$

Áp dụng công thức Green (bổ sung thêm đường $y=0$ từ $B(0;0)\to A(2;0)$)

$$I=\int\limits_C(x+y)dx+\left(x^2+3y+\cos(y^2)\right)dy=I_1-I_2$$

+) Tính I_1

Ta có: $I_1 = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D (2x-1)dxdy$ với $D: y \leq \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow D: \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

+) Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi + 1 \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D_{r\varphi}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ |J| = r \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_{D_{r\varphi}} (2r\cos\varphi + 2 - 1)rdrd\varphi = \int_0^1 dr \int_0^\pi (2r\cos\varphi + 1)rd\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\left(2r^2\sin\varphi + r\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) dr = \pi \int_0^1 rdr = \frac{\pi}{2}$$

+) Tính I_2

Ta có: $I_2 = \int\limits_{\widehat{BA}} (x+y)dx + \left(x^2+3y+\cos(y^2)\right)dy = \int_0^2 xdx = 2$ (do $y=0$ nên $dy=0$)

+) Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} - 2$

Câu 8.5.10 **(1đ)**Tính $\iint\limits_D \left(|x|-|y|+(x-y)^2\right)dxdy$, ở đây miền $D:\ |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có: $I = \iint\limits_D \left(|x|-|y|+(x-y)^2\right)dxdy = \iint\limits_D (|x|-|y|)dxdy + \iint\limits_D (x-y)^2dxdy$

+) Xét $I_1 = \iint\limits_D (|x|-|y|)dxdy$ với $D:\ |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Dễ thấy vai trò của x và y là như nhau, miền xác định giống nhau nên $I_1 = 0$.

+) Xét $I_2 = \iint\limits_D (x-y)^2dxdy$ với $D: -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$.

Khi đó : $I_2 = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 (x-y)^2dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{(x-y)^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} - \frac{(-1-y)^3}{3} \right) dy = \frac{8}{3}$.

+) Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{8}{3}$.

8.6 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành CTTT - Học kỳ 2022.2

Câu 8.6.1 **(1 point)** Find the curvature of the curve $y = x^2 - 1$ at $A(1,0)$.

[Solution]

+) We apply curvature formula of curve $y = f(x)$:

$$C = \frac{|f''(x)|}{\left|1+[f'(x)]^2\right|^{3/2}}$$

+) We have: $f'(x) = 2x, f''(x) = 2 \quad \Rightarrow f'(1) = 2, f''(1) = 2$

$$\Rightarrow C(A) = \frac{|f''(1)|}{\left|1+[f'(1)]^2\right|^{3/2}} = \frac{2}{(1+2^2)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

+) Conclusion: The curvature of the curve at A is $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

Câu 8.6.2 **(1 point)** Find the directional derivative of the function $u(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 - yz^3$ in the direction of $\overrightarrow{l} = (1,-2,2)$ at the point $A(1,1,1)$.

[Solution]

+) The function $u(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 - yz^3 \quad \Rightarrow \overrightarrow{grad}u = (u'_x, u'_y, u'_z) = (2x+2y^2, 4xy - z^3, -3yz^2)$

+) Normalize $\overrightarrow{l}$, we get:

$$\overrightarrow{l'} = \frac{\overrightarrow{l}}{|\overrightarrow{l}|} = (1,-2,2)\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

+) $$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \overrightarrow{grad}u \cdot \overrightarrow{l'} = \frac{2x+2y^2}{3} + \frac{-2(4xy-z^3)}{3} + \frac{2(-3yz^2)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A) = \frac{2+2-2(4-1)+2(-3)}{3} = \frac{-8}{3}$$

+) Conclusion: The directional derivative of the function u in the direction of l at the point A is $\dfrac{-8}{3}$

Câu 8.6.3 **(1 point)** Evaluate $\displaystyle\iint_D (1+x+y^2)dxdy$, where $D: x^2+y^2 \leq 1$.

[Solution]

+) Denoting $I = \displaystyle\iint_D (1+x+y^2)dxdy,\ D: x^2+y^2 \leq 1.$

+) Because D symmetry over Oy so $f(x,y) = x$ odd with respect to x.

$$\Rightarrow \iint_D xdxdy = 0 \quad \Rightarrow I = \iint_D (1+y^2)dxdy$$

+) Define $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$ with $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

+) Thus, we have:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1+r^2 sin^2(\varphi))dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r+r^3 sin^2(\varphi))dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin^2(\varphi)\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\cos(2\varphi)\right)d\varphi$$
$$= \frac{5}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{16}\sin(2\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{4}$$

+) Conclusion: $I = \frac{5\pi}{4}$

Câu 8.6.4 **(1 point)** Evaluate $\iiint\limits_V (3x+z)dxdydz$, where $V : x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

[Solution]

+) Denoting $I = \iiint\limits_V (3x+z)dxdydz$, where $V : x^2+y^2+z^2 \le 2z \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$.

+) Because V symmetry over (Oyz) so $f(x,y,z) = 3x$ odd with respect to x.

$\Rightarrow \iiint\limits_V 3xdxdydz = 0.$ $\Rightarrow I = \iiint\limits_V zdxdydz.$

+) Define: $\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta)+1 \end{cases}$ with $\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

+) Thus, we have:

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sin(\theta)(1+r\cos(\theta))dr = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta \int_0^1 (r^2+r^3\cos(\theta))dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} (\frac{1}{3}\sin(\theta)+\frac{1}{8}\sin(2\theta))d\theta = 2\pi(-\frac{1}{3}\cos(\theta)-\frac{1}{16}\cos(2\theta))\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{4\pi}{3}$$

+) Conclusion: $I = \frac{4\pi}{3}$

Câu 8.6.5 **(1 point)** Evaluate $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}dx.$

[Solution]

+) Denoting $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3}dx.$

+) Let $t = x^2 \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}}$ (since $x \in [0,+\infty)$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

+) Change of limits:

x	0	$+\infty$
t	0	$+\infty$

+) We have:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{(1+t)^3} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{4}-1}}{(1+t)^{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-1} B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}-1\right) = \frac{5}{16} \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{16} \cdot \frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}-1\right) = \frac{5}{64} \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{64} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

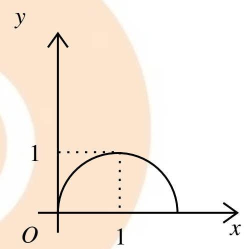
$$= \frac{5\sqrt{2}\pi}{64}$$

+) Conclusion: $I = \dfrac{5\sqrt{2}\pi}{64}$

Câu 8.6.6 **(1 point)** Evaluate $\int_C x + 2y \, ds$, where C: $y = \sqrt{2x - x^2}$.

[Solution]

+) Denoting $I = \int_C x + 2y \, ds$



+) From curve $C: y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

+) Let $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi) \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -\sin t \\ y'_t = \cos t \end{cases}$

$\Rightarrow ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} \, dt = dt$

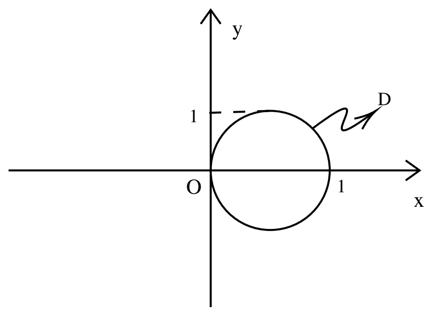
+) We have:

$$I = \int_C x + 2y \, ds = \int_0^{\pi} 1 + \cos t + 2\sin t \, dt = (t + \sin t + 2\cos t)\Big|_0^{\pi} = \pi + 4$$

+) Conclusion: $I = \pi + 4$

Câu 8.6.7 **(1 point)** Evaluate $\oint_C (xy + 3x + 2y) \, dx + (xy - 2y) \, dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 2x$ with counterclockwise orientation.

[Solution]



+) Let $\begin{cases} P = xy + 3x + 2y \\ Q = xy - 2y \end{cases} \Rightarrow P, Q$ have continuous partial derivatives on $\mathbb{R}^2$

+) We get: $\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 2 \end{cases}$

+) C is closed, bounds region $D: x^2+y^2 \leq 2x$ and is oriented positively. Applying Green's theorem:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (y-x-2)\, dxdy$$

+) Region D is symmetric about $y=0$ as well as $f(x,y)=y$ is an odd function with respect to y:

$$\Rightarrow \iint_D ydxdy = 0 \Rightarrow I = -\iint_D xdxdy - 2S_D = -\iint_D xdxdy - 2\pi$$

+) Let: $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ and $D_{(\varphi,r)} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

+) We have:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1+r\cos\varphi)dr - 2\pi \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi}{3} + \frac{1}{2}\right) d\varphi - 2\pi = -3\pi \end{aligned}$$

+) Conclusion: $I = -3\pi$

Câu 8.6.8 **(1 point)** Evaluate $\iint_S (2x-y+z^2)\, dS$, where S is the hemisphere

$$S: x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0.$$

[Solution]

+) Denoting $I = \iint_S \left(2x-y+z^2\right) dS$

+) We have $S: x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \\ x'_z = -\dfrac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz = \frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz$$

+) Projection of S on (Oyz) is $D: y^2+z^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(2\sqrt{1-y^2-z^2} - y + z^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz \\ &= \iint_D \left(2 - \frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right) dydz \end{aligned}$$

+) We can see D is symmetric with respect to both y and z

$$\Rightarrow \iint_D \frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz = 0 \quad \Rightarrow I = \iint_D \left(2 - \frac{z^2}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right) dydz$$

+) Let: $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ and $D_{\varphi,r} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

+) We have:

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(2-\frac{r^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-r^2}})dr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(2r+r\sin^2\varphi\cdot\frac{(1-r^2)-1}{\sqrt{1-r^2}}\right)dr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(2r+r\sin^2\varphi\left(\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)dr$$
$$=\int_0^{2\pi}(r^2+\sin^2\varphi\cdot(-\frac{1}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}+\sqrt{1-r^2}))\Big|_0^1 d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-\frac{2}{3}\sin^2\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\varphi)+2}{3}d\varphi$$
$$=(\frac{2}{3}\varphi+\frac{1}{6}\sin(2\varphi))\Big|_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{3}$$

+) Conclusion: $I=\dfrac{4\pi}{3}$

Câu 8.6.9 **(1 point)** Find the flux of the vector field $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+\left(z^2-1\right)\vec{k}$ across S, where S is the part of the ellipsoid $x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1, z\geqslant 0$, with upward orientation.

[Solution]

+) We have $\begin{cases} P(x,y,z)=x \\ Q(x,y,z)=y \\ R(x,y,z)=z^2-1 \end{cases}$

+) As we can see from the sketch, S is not a closed region

$\Rightarrow$ We add $S_1: z=0$ so we can have $K=S\cup S_1$ is a closed region, with $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2\leqslant 0 \\ z=0 \end{cases}$ upward orientation.

$\Rightarrow$ The flux of the vector field we are finding is $I=I_1-I_2$ with $\begin{cases} I_1=\displaystyle\oiint_K Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \\ I_2=\displaystyle\iint_{S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \end{cases}$

+) Evaluate I_1:

- Apply Divergence Theorem

$$I_1=\iint_K F\cdot dS=\iiint_V \operatorname{div}F\,dxdydz=\iiint_V(1+1+2z)dxdydz$$
$$=\iiint_V(2z+2)dxdydz$$

- Set $\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta \\ y=2r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ z=r\cos\theta \end{cases}\Rightarrow |J|=2r^2\sin\theta$ and $V=\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

- Thus, we have:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 2r^2\sin\theta(1+r\cos\theta)dr \\
&= 2\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2} d\theta\cdot\int_0^1 \left(2r^2\sin\theta + 2r^3\cos\theta\sin\theta\right)dr \\
&= 4\pi\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\cdot\int_0^1 2r^2dr + \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 2r^3dr\right) \\
&= 4\pi\left(1\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{11\pi}{3}
\end{aligned}$$

+) Evaluate I_2:

- We can see that S_1 $\begin{cases} z=0 \\ \vec{n}=(0,0,-1)\end{cases} \Rightarrow \cos\gamma = \cos(\vec{n},\overrightarrow{Oz}) < 0$
- We have:

$$I_2 = \iint_D dxdy = \pi\cdot 1\cdot 2 = 2\pi$$

+) Finally, we have: $I = I_1 - I_2 = \dfrac{11\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$

+) Conclusion: the flux of the vector field $\vec{F}$ across S is $\dfrac{5\pi}{3}$

Câu 8.6.10 **(1 point)** Find the circulation of the vector field

$$\overrightarrow{F} = (2xze^{x^2}+y^2-z)\,\overrightarrow{i} + (y-3z)\,\overrightarrow{j} + (e^{x^2}+x+2y)\,\overrightarrow{k}$$

around C. Here C is the curve of intersection of the plane $x+y+z=1$ and the cylinder $x^2+y^2=2y$, oriented counterclockwise as viewed from above.

[Solution]

+) Denote $\begin{cases} P(x,y,z) = 2xze^{x^2}+y^2-z \\ Q(x,y,z) = y-3z \\ R(x,y,z) = e^{x^2}+x+2y \end{cases}$.

+) We have: $\begin{cases} R'_y - Q'_z = 2-(-3) = 5 \\ P'_z - R'_x = 2xe^{x^2} - 1 - (2xe^{x^2}+1) = -2 \\ Q'_x - P'_y = 0 - 2y = -2y \end{cases}$

+) Denote S to be the surface whose boundary is C. So S is the plane $x+y+z=1$.

The orientation of the curve is counterclockwise when viewing from above, thus the unit normal vector of S is $\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, to be suitable with the orientation of the curve C.

+) $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ are differentiable and continuous functions over the surface S that is bounded by C. Thus, applying *Stokes* theorem, the circulation of the vector field $\overrightarrow{F}$ is:

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C Pdx+Qdy+Rdz \\
&= \iint_S (R'_y-Q'_z)dydz + (P'_z-R'_x)dzdx + (Q'_x-P'_y)dxdy \\
&= \iint_S 5dydz - 2dzdx - 2ydxdy \\
&= \iint_S 5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \iint_S \frac{3-2y}{\sqrt{3}}\,dS
\end{aligned}$$

+) The surface $S: z = 1 - x - y$ is restricted in the region D which is bounded by $x^2 + y^2 = 2y$. Thus:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{3-2y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy \\ &= \iint\limits_D 3 - 2y\, dxdy \end{aligned}$$

+) Let $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |J| = r \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$. Thus,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1 - 2r\sin\varphi)\, drd\varphi \\ &= 2\pi\int_0^1 rdr - \int_0^1 2r^2dr\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

+) Conclusion: The circulation of the vector field around C is π.

8.7 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kì 20201

Câu 8.7.1 Tính độ cong của đường $x = 2\cos t, y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{3}$

Ta có $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t; x''(t) = -2\cos t \\ y'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t; y''(t) = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$

Tại $t = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sqrt{3}; x'' = -1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; y'' = -1 \end{cases}$

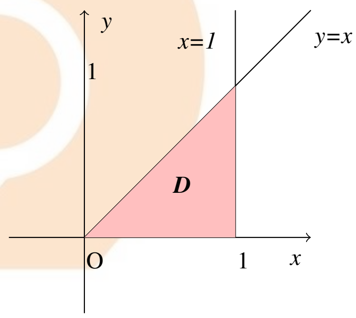
Độ cong của đường cong tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{3}$ là:

$$C = \frac{\left|x'(\frac{\pi}{3})y''(\frac{\pi}{3}) - x''(\frac{\pi}{3})y'(\frac{\pi}{3})\right|}{\left(x'(\frac{\pi}{3})^2 + y'(\frac{\pi}{3})^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|(-\sqrt{3}).(-1) - (-1).\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\left[(-\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{10}}{25}$$

Câu 8.7.2 Tính tích phân $\displaystyle\iint_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, x = 1$ và $y = 0$.

$I = \displaystyle\iint_D xydxdy$ với D $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{8}$$



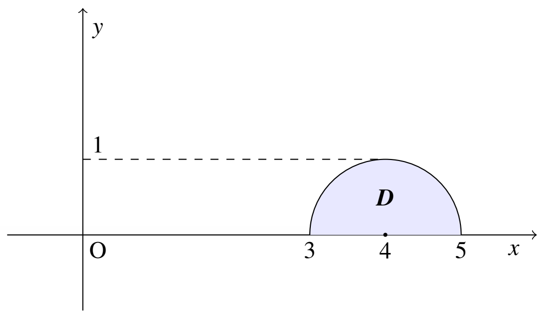
Câu 8.7.3 Tính tích phân $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$, với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\right\}$.

$I = \displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \le 1; y \ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} x = 4 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, D \to D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left(4r + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)dr$$

$$= \int_0^\pi \left(2 + \frac{1}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)d\varphi = 2\pi + \frac{2}{3}$$



Câu 8.7.4 Tính tích phân $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, với V là miền xác định bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \end{cases}$.

$I = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ với $V \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \end{cases}$

Xét giao của 2 mặt cong $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+z^2=9 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \Rightarrow |J|=r, V\to V' \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ r\le z\le\sqrt{9-r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}dr\int_r^{\sqrt{9-r^2}}r^3dz=2\pi\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}r^3\left(\sqrt{9-r^2}-r\right)dr$$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}(9-r^2)\sqrt{9-r^2}-\frac{9}{2}\sqrt{9-r^2}\right)d(9-r^2)-\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}r^4dr\right]$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{1}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{9}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{3}{\sqrt{2}}}-\frac{243}{20\sqrt{2}}\right]$$

$$=2\pi\left(\frac{162}{5}-\frac{81\sqrt{2}}{4}\right)$$

Câu 8.7.5 Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z=0, z=1+x^2+y^2$ và mặt $4x^2+y^2=4$.

Đặt $\begin{cases} x=\dfrac{r}{2}\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \Rightarrow |J|=\dfrac{r}{2}, V\to V' \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 2 \\ r\le z\le 1+\dfrac{r^2}{4}\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow V=\iiint_{V'}\frac{1}{2}rd\varphi drdz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2dr\int_0^{1+\frac{r^2}{4}\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}rdz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(r+\frac{r^3}{4}\cos^2\varphi+r^3\sin^2\varphi\right)dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{16}\cos^2\varphi+\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2+\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{9\pi}{2}$$

Câu 8.7.6 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{30}e^{-x^2}dx.$

$$I=\int_0^{+\infty}x^{30}.e^{-x^2}dx$$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx=2\sqrt{t}dx$

$$\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}\frac{t^{15}.e^{-t}}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{29}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{31}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(15+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{29!!}{2^{15}}\sqrt{\pi}$$

Câu 8.7.7 Tính $\int\limits_L 2(x^3+y^5)dx+5x(2y^4-1)dy$, với L là đường gấp khúc ABCA nối các điểm $A(0;0), B(1;1), C(0;2)$.

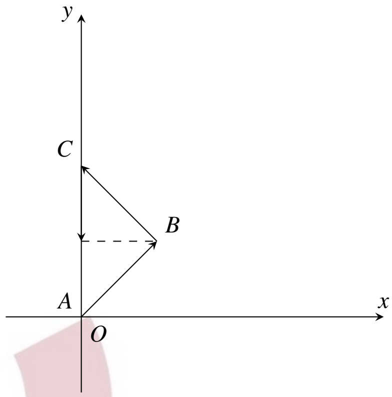
$I=\int\limits_L 2(x^3+y^5)dx+5x(2y^4-1)dy$

$\begin{cases} P(x,y)=2(x^3+y^5) \\ Q(x,y)=5x(2y^4+1) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} P'_y=10y^4 \\ Q'_x=10y^4-5 \end{cases}$

Áp dụng Green:

$I=\iint\limits_D -5dxdy=-5S_D=-5.\dfrac{1}{2}.2.1=-5$



Câu 8.7.8 Tính $\int\limits_C \left(e^x\sin y+y^2\right)dx+\left(x^2+2xy+e^x\cos y\right)dy$, với C là nửa đường tròn $x=\sqrt{2y-y^2}$, đi từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(0;2)$.

$I=\int\limits_C (e^x\sin y+y^2)dx+(2xy+e^x\cos y)dy+\int\limits_C x^2dy=I_1+I_2$

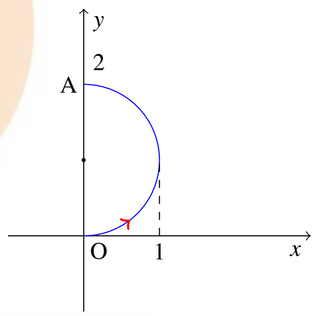
+) Xét I_1 : Đặt $\begin{cases} P(x,y)=e^x\sin y+y^2 \\ Q(x,y)=2xy+e^x\cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y=e^x\cos y+2y \\ Q'_x=2y+e^x\cos y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tích phân I_1 không phục thuộc vào đường đi

Chọn đường đi là $OA: x=0 \Rightarrow I_1=\int\limits_0^2 \cos y dy=\sin(2)$

+) $I_2=\int\limits_C x^2dy=\int\limits_0^2 (2y-y^2)dy=\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow I=I_1+I_2=\sin(2)+\dfrac{4}{3}$



Câu 8.7.9 Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+\left(x^2+y^2+z^3\right)dxdy$, với S là phía ngoài mặt ellipsoid $9x^2+y^2+z^2=9$.

S là mặt cong kín, hướng dương ra ngoài, theo Ostrogradsky:

$I=\iiint\limits_V (3x^2+3y^2+3z^2)\text{dxdydz}$

Với V : $9x^2+y^2+z^2\le 9$

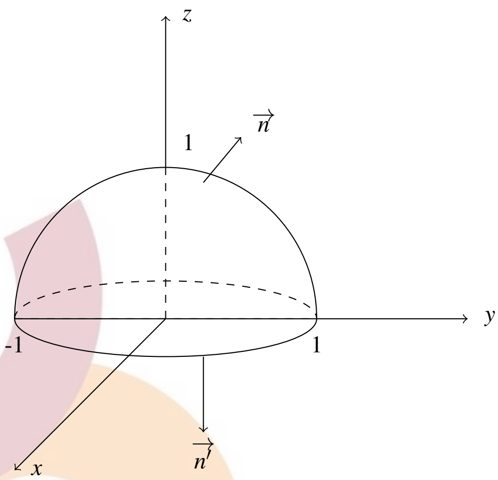
Đặt $\begin{cases} y=r\sin\theta\cos\varphi \\ z=r\sin\theta\sin\varphi \\ x=\dfrac{1}{3}r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 3 \end{cases} \quad |J|=\dfrac{1}{3}r^2\sin\theta$

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 dr\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{3}r^2\sin\theta.3\left[\frac{1}{9}r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right]d\theta$$

$$=2\pi\int\limits_0^3 dr\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{9}r^4\cos^2\theta\sin\theta+r^4\sin^3\theta d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^3 \frac{2}{27}r^4 + \frac{4}{3}r^4 \mathrm{d}r = \frac{684\pi}{5}$$

Câu 8.7.10 Tính thông lượng của trường vecto $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j} + y^2(z+1)\overrightarrow{k}$ qua nửa mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$, hướng ra ngoài.



Thông lượng của trường vecto:

$$\phi = \iint_S xz^2dydz + x^2ydzdx + y^2(z+1)dxdy$$

Bổ sung thêm mặt $S': z = 0$, véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}$ hướng xuống dưới.

$$\Rightarrow \iint_{S\cup S'} = \iint_S + \iint_{S'} \Leftrightarrow I = \phi + I'$$

Do $S \cup S'$ kín, theo Ostrogradsky:

$$I = \iiint_V (z^2+x^2+y^2)dxdydz$$

Với $D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$

$$\Rightarrow V \to V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi.\frac{1}{5}.1 = \frac{2\pi}{5}$$

Tính I': Mặt $S': z = 0$ có $\overrightarrow{n'} = (0,0,-1)$ do $(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{Oz}) > \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I' = \iint_{x^2+y^2\leq 1} -y^2(z+1)dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} -y^2dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$\Rightarrow I' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 -r^3\sin^2\varphi dr = \frac{-\pi}{4}$$

Vậy $\phi = I - I' = \frac{13\pi}{20}$

8.8 Đáp án đề thi cuối kì - Kíp 1 - Nhóm ngành 1 - Học kì 20192

Câu 8.8.1 Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại $A(-1;2;1)$ của mặt cong $4x^3+2y^2-z^4 = 3$.

Xét $f(x,y,z) = 4x^3+2y^2-z^4-3$

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$ là phương trình mặt cong đã cho

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 \\ f'_y = 4y \\ f'_z = -4z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(A) = 12 \\ f'_y(A) = 8 \\ f'_z(A) = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow (12, 8, -4)$ là 1 vector pháp tuyến tại điểm A của mặt cong đã cho.

Phương trình pháp tuyến tại điểm A của mặt cong là:

$$\frac{x+1}{12} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-1}{-4}$$

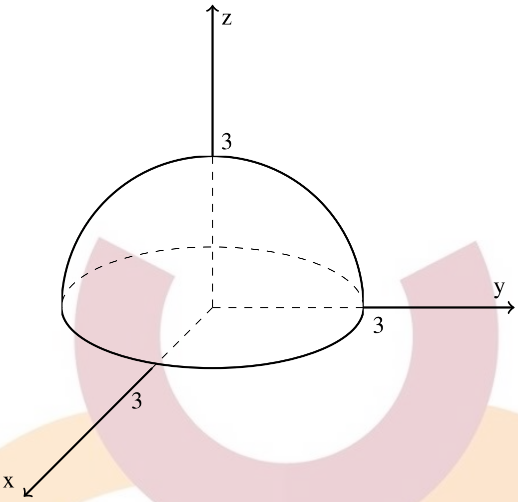
Phương trình tiếp diện tại điểm A của mặt cong là:

$$12(x+1)+8(y-2)-4(z-1)=0$$
$$\text{hay}\quad 3x+2y-z=0$$

Câu 8.8.2 Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2\le 9, z\ge 0$.

Đặt $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\phi \end{cases}$

Ta có $V'\begin{cases} 0\le\phi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0<r\le 3 \end{cases}$

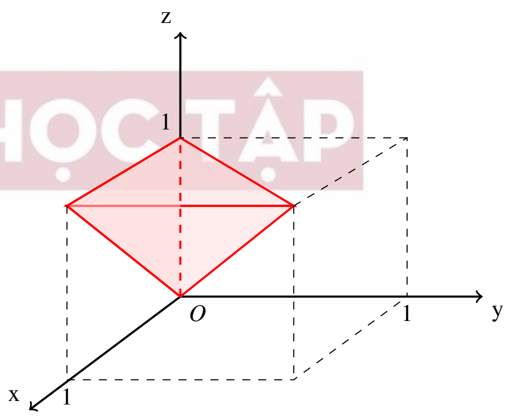


$$\Rightarrow I=\iiint\limits_{V'} r\cdot r^2\cdot\sin\theta drd\phi d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\phi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\cdot\int_0^3 r^3dr$$
$$=2\pi\cdot 1\cdot\frac{81}{4}=\frac{81\pi}{2}$$

Câu 8.8.3 Tính $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}}$ với V là miền xác định bởi $0\le z\le 1, 0\le x\le z, 0\le y\le x$

$$I=\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}}\quad\text{trong đó } V\begin{cases}0\le z\le 1\\0\le x\le z\\0\le y\le x\end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}}dy$$
$$=\int_0^1 dz\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}}.xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dz\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}}d(x^2+4z+4)$$
$$=\int_0^1 z+2-2\sqrt{z+1}dz$$
$$=\left(\frac{z^2}{2}+2z-\frac{4}{3}.(z+1)\sqrt{z+1}\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{23}{6}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



Miền V là phần màu đỏ trong hình vẽ

Câu 8.8.4 Tính thể tích miền xác định bởi $2\le z\le\sqrt{8-4x^2-y^2}$.

Ta có $V: 2\le z\le\sqrt{8-4x^2-y^2}$.
$\Rightarrow$ Thể tích của miền giới hạn trên là:

$$V = \iint\limits_D (\sqrt{8-4x^2-y^2}-2)dxdy$$

Trong đó V là miền : $\sqrt{8-4x^2-y^2} \geq 2 \quad \Rightarrow D: 4x^2+y^2 \leq 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow |J| = 2r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$

$$= 2\pi(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}) = \frac{16\pi\sqrt{2}-20\pi}{3}$$

Câu 8.8.5 Tính tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5} dx.$

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5} dx \qquad \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}} \cdot e^t}{e^5} dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-4t} dt \qquad \text{Đặt } a = 4t \Rightarrow dt = \frac{da}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{+\infty} \left[(\frac{a}{4})^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-a} \right] \frac{da}{4}$$

$$= \frac{1}{32}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{32}\Gamma(\frac{2 \cdot 2+1}{2})$$

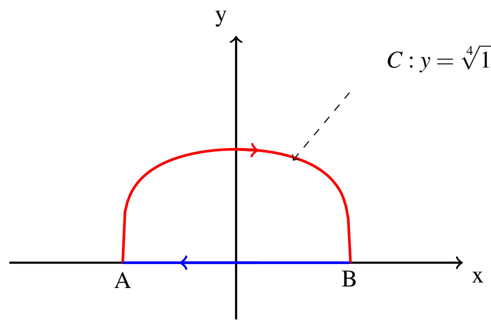
$$= \frac{1}{32}\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3}{128}\sqrt{\pi}$$

Câu 8.8.6 Tính $\int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx + (x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$.

$I = \int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx + (x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$

Bổ sung thêm đoạn thẳng BA, hướng từ B tới A ta có: $C \cup BA$ là đường cong kín, hướng âm:



$$\Rightarrow I=\int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx+(x^4+2e^y)dy$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{C\cup BA}(e^{2x}+y^2)dx+(x^4+2e^y)dy-\int\limits_{BA}(e^{2x}+y^2)dx+(x^4+2e^y)dy=I_1-I_2$$

Áp dụng định lí Green cho I_1, ta có:

$$I_1=-\iint\limits_D (4x^3-2y)dxdy \quad \text{(vì } C\cup BA \text{ là đường cong kín , hướng âm)}$$

Trong đó $D\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le \sqrt[4]{1-x^2}\end{cases}$

Mà D là miền đối xứng qua trục Oy và $4x^3$ là hàm lẻ theo x

$$\Rightarrow I_1=\iint\limits_D 2y\,dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^{\sqrt[4]{1-x^2}}2y\,dy=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2-1}dx=\frac{\pi}{2}$$

Ta có: $BA\begin{cases}y=0\to dy=0\\ x:1\to -1\end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=\int\limits_{BA}(e^{2x}+y^2)dx=\int\limits_1^{-1}(e^{2x}+0^2)dx=-\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}$$

$$\Rightarrow I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{e^2}{2}=\frac{\pi+e^2-e^{-2}}{2}$$

Câu 8.8.7 Tính $\iint\limits_S dS$, trong đó S là phần mặt

$$z=\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}) \quad \text{với} \quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 3$$

.

$$I=\iint\limits_S dS$$

Trong đó S là phần mặt $z=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)$ với $0\le x\le 1;\ 0\le y\le 3$

Có $\begin{cases}z'_x=x^{\frac{1}{2}}\\ z'_y=y^{\frac{1}{2}}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}=\sqrt{x+y+1}\Rightarrow I=\iint\limits_D\sqrt{x+y+1}dxdy$

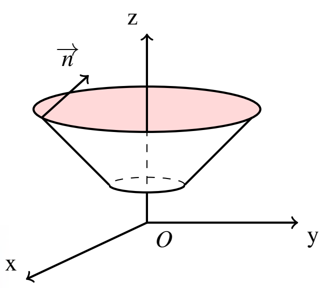
Với D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy với $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 3\end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \sqrt{x+y+1}dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^1 \sqrt{1+x+y}dx = \int\limits_0^3 \left[\frac{2}{3}(y+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\right] dy$$

$$= \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{124}{15}$$

Vậy $I = \dfrac{20\sqrt{5}}{3} - \dfrac{16\sqrt{2}}{15} - \dfrac{124}{15}$

Câu 8.8.8 Tính $\iint\limits_S x^2 z dxdy$, với S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1$ và $z = 3$, hướng lên trên.



$$I = \iint\limits_S x^2 z dxdy$$

Với S: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và $1 \leq x \leq 3$, ta thấy vectơ pháp tuyến của S là $\vec{n}$ tạo với tia $\overrightarrow{Oz}$ một góc nhọn. $\Rightarrow I = \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

Với miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy với $D: 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ miền D trở thành: $\begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int\limits_1^3 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{242\pi}{5}$$

Vậy $I = \dfrac{242\pi}{5}$

Câu 8.8.9 Chứng minh rằng trường vectơ

$$\vec{F} = (2ye^{2x}+3)\vec{i} + (e^y z^2 + e^{2x} - 2yz^3)\vec{j} + (2ze^y - 3y^2z^2)\vec{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= (2ye^{2x}+3)\vec{i} + (e^y z^2 + e^{2x} - 2yz^3)\vec{j} + (2ze^y - 3y^2z^2)\vec{k} \\
&= \langle P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\rangle \\
\operatorname{rot}\vec{F} &= \langle R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\rangle \\
&= (2ze^y - 6yz^2 - 2ze^y + 6yz^2)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2e^{2x} - 2e^{2x})\vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy trường vectơ $\vec{F}$ là trường thế.

Ta tìm hàm thế vị của $\vec{F}$, chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0;0;0)$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int\limits_0^x P(x,0,0)dx + \int\limits_0^y Q(x,y,0)dy + \int\limits_0^z R(x,y,z)dz + C \\
&= 3x + ye^{2x} + z^2e^y - y^2z^3 + C
\end{aligned}$$

Câu 8.8.10 Tính tích phân kép $\iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$, với D là miền xác định bởi $x^2 - xy + y^2 \leq 1$.

$$I = \iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} u = x - \dfrac{y}{2} \\ v = \dfrac{\sqrt{3}y}{2} \end{cases}$

$|J^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |J| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Miền D trở thành miền D': $u^2 + v^2 \leq 1$

Ta có:

$\begin{cases} y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v \\ x = u + \dfrac{y}{2} = u + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}v = u + \dfrac{v}{\sqrt{3}} \end{cases}$

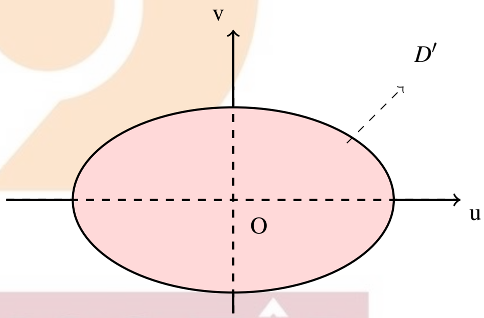
Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D'} \left[2\left(u + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}v\right)^2 \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} dudv \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{D'} 2u^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}uv + 2v^2 dudv \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = r\cos\phi \\ v = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$V' : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 < r \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{V'} \left[2r^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}r^2(\sin\phi + \cos\phi) \right] \cdot rdrd\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{V'} r^3 \cdot \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin\phi + \cos\phi) \right) drd\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin\phi + \cos\phi) d\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \end{aligned}$$



8.9 Đáp án đề thi cuối kì - Kíp 2 - Nhóm ngành 1 - Học kì 20192

Câu 8.9.1 Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;0)$ của đường $\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 + \sin t \\ y'(t) = 3e^{3t} \\ z'(t) = 2t + \cos t \end{cases}$$

Điểm $A(-1;2;0)$ ứng với $t = 0 \Rightarrow x'(0) = 2; y'(0) = 3; z'(0) = 1$

$$\longrightarrow \begin{cases} Phngtrnhtiptuyn: & \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1} \\ Phngtrnhphpdin: & 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu 8.9.2 Tính $\iiint\limits_V (z+1)dxdydz$, với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.

$I = \iiint\limits_V (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad |J| = r^2\sin\theta$

$$\begin{aligned} \rightarrow I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} (2 + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 4r^2 \mathrm{d}r \\ &= 2\pi . \frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Câu 8.9.3 Tính $\iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{x^2 + y^2 + 2}$, với V là miền xác định bởi $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$

$I = \iiint\limits_V \dfrac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + 2}$

$V: \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$. Xét giao điểm của hai mặt: $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1$

$\Rightarrow D: x^2 + y^2 \leq 2$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq 1 \end{cases} \quad |J| = r$

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{\sqrt{r^2-1}}^{1} \frac{zr}{r^2+2}\mathrm{d}z = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{[1-(r^2-1)]r}{2(r^2+2)}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-r^2}{2+r^2}\mathrm{d}r^2 = \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (\frac{4}{2+r^2} - 1)\mathrm{d}r^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[4ln(x+r^2) - r^2\right]\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}(4\ln\frac{4}{3} - 1)$$

Câu 8.9.4 Tính diện tích phần mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy.

$z = 4x - x^2 - y^2 \geq 0, (\mathrm{D}) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4$

$\Rightarrow \begin{cases} z'_x = 4 - 2x \\ z'_y = -2y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Diện tích phần mặt paraboloid nằm trên Oxy :

$$\sigma = \iint\limits_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + z'_{x^2} + z'_{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + 4[(x-2)^2 + y^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \mathrm{D}' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases} \quad |J| = r$

$$\Rightarrow \sigma = \iint\limits_{\mathrm{D}'} \sqrt{1+4r^2}.r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}(1+4r^2) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$$

Câu 8.9.5 Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $e^x = t \rightarrow \mathrm{d}t = t\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{-3}{4}}}{(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow I = \beta\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{3}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3}{4}.\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}}{1!} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

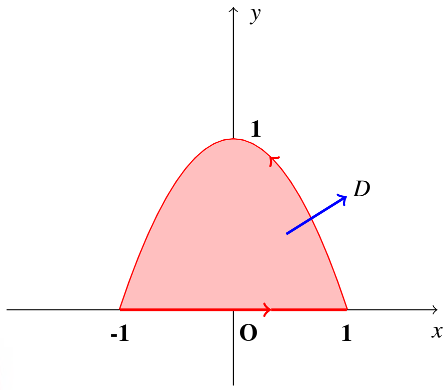
Câu 8.9.6 Tính $\displaystyle\oint_C (e^x + y^2)dx + x^2e^ydy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = 0$ có chiều dương.

$I = \oint\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2e^y dy$

Đặt $P = e^x + y^2, Q = x^2e^y$

Nhận xét: C là đường cong kín, giới hạn miền $D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

C lấy theo chiều dương, áp dụng Green ta có:



$$I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (2xe^y - 2y)dxdy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} (2xe^y - 2y)dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (2xe^y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left[2xe^{1-x^2} - 2x - (1-x^2)^2\right] dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2xe^{1-x^2}dx - \int\limits_{-1}^{1} \left[2x + (1-x^2)^2\right] dx = (-e^{1-x^2})\Big|_{-1}^{1} - \frac{16}{15} = \frac{-16}{15}$$

Câu 8.9.7 Tính $I = \iint\limits_S y^2zdS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1; z = 2$.

Ta có : $I = \iint\limits_S y^2zdS$

$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}dxdy$

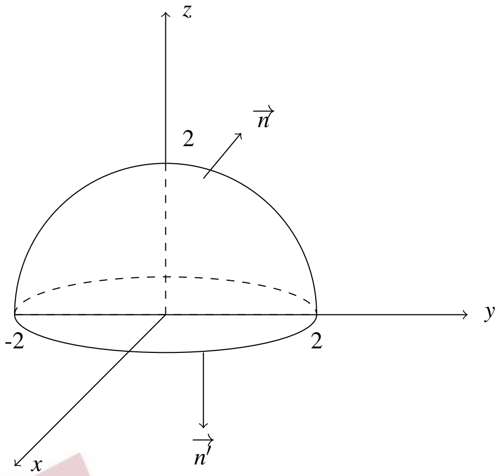
$\Rightarrow I = \sqrt{2}\iint\limits_D y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

Với $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow I = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^3\sin^2\varphi.rdr = \sqrt{2}.\pi.\dfrac{31}{5} = \dfrac{31\pi\sqrt{2}}{5}$

Câu 8.9.8 Tính $I = \iint\limits_S xy^3dydz + (x^2+z^2)dxdy$, với S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4, z \le 0$, hướng ra phía ngoài mặt cầu.



$I = \iint\limits_S xy^3dydz + (x^2+z^2)dxdy$ Bổ sung thêm mặt $S' : z = 0$, véc tơ pháp tuyến $\vec{n'}$ hướng xuống dưới .

$\Rightarrow S \cup S'$ là mặt cong kín, hướng ra ngoài.

Ta có: $\iint\limits_{S\cup S'} = \iint\limits_S + \iint\limits_{S'}$ hay $I_1 = I + I_2$

Tính I_1: Theo Ostrogradsky:

$I_1 = \iiint\limits_V (y^3+2z)dxdydz = \iiint\limits_V 2zdxdydz$

(do $f(x,y,z) = y^3$ là hàm lẻ đối với y, miền V đối xứng qua $y = 0$)

Với V: $\begin{cases} z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\pi.4.1 = 8\pi$$

Tính I_2: Mặt $S' : z = 0$. Do $(\vec{n'}, \vec{Oz}) > \dfrac{\pi}{2}$ nên mặt S' có véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n'} = (0,0,-1)$

$\Rightarrow I_2 = -\iint\limits_D x^2dxdy$ với $D : x^2+y^2 \leq 4$

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3cos^2\varphi dr = -4\pi$$

Vậy : $I = I_1 - I_2 = 12\pi$

Câu 8.9.9 Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l} = (1;2;-2)$ của hàm $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$ tại điểm $A(0;1;2)$

Ta có: $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$

$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = e^x(y^2+z) - 2yz^3 \\ u'_y = 2e^xy - 2xz^3 \\ u'_z = e^x - 6xyz^2 \end{cases}$ Tại $A(0;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{gradu}(A) = (-13;2;1)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = \overrightarrow{gradu}(A).\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = -13.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} + 1.\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-11}{3}$$

Câu 8.9.10 Tính tích phân kép $\iint\limits_{\mathbf{D}} (y^2-x^4)dxdy$, với **D** là miền xác định bởi $2|x| + |x^2+y| \leq 1$

$I = \int\limits_D (y^2-x^4)dxdy$

D đối xứng qua $x = 0$ và $f(x,y) = y^2 - x^4$ là hàm chẵn đối với x

$\Rightarrow I = 2\iint\limits_{D^+} (y^2-x^4)dx$ với $D^+ : \begin{cases} 2|x| + |x^2+y| \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + |v| \le 1 \\ u \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le u \le \dfrac{1}{2} \\ 2u - 1 \le v \le 1 - 2u \end{cases}$

$\Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_{2u-1}^{1-2u} (v - 2u^2)v\,dv = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v^3}{3} - u^2v^2\right)\Big|_{v=2u-1}^{v=1-2u} du$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^3}{3} - u^2(1-2u)^2 - \frac{(2u-1)^3}{3} + u^2(2u-1)^2 du$$

$$= \frac{1}{6}$$

8.10 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kì 20183

Câu 8.10.1 Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;1)$ của đường $x = t - 1$, $y = 2 - \sin t, z = e^{2t}$.

Điểm $A(-1;2;1)$ ứng với $t = 0$

Ta có: $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - \sin t \\ z = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -\cos t \\ z'(t) = 2e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(-1;2;1)$:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Phương trình tiếp diện tại điểm $A(-1;2;1)$:

$$(x+1) - (y-2) + 2(z-1) = 0 \text{ hay } x - y + 2z + 1 = 0$$

Câu 8.10.2 Tính $\iint_D (x-2y)dxdy$, với D giới hạn bởi $x = 0, y = 0, x - y = 1$.

Ta có miền D : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - 1 \le y \le 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (x-2y)dy$$

$$= \int_0^1 \left(xy - y^2\right)\Big|_{y=x-1}^{y=0} dx$$

$$= \int_0^1 \left[-x^2 + x + (x-1)^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

Câu 8.10.3 Tính $\iiint_V \frac{z^3 dxdydz}{1+x^2+y^2}$, trong đó V xác định bởi $x \geq 0$, $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$.

$$I = \iiint_V \frac{z^3}{1+x^2+y^2} dxdydz \; ; \text{ miền } V: \; x \geq 0 \; ; \; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

Ta có : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ hình chiếu của V lên Oxy là $D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, $|J| = r, V \to V': \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ r \leq z \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 \frac{z^3 r}{1+r^2} dz \\ &= \pi \int_0^1 \frac{z^4 r}{4(1+r^2)} \Big|_{z=r}^{z=1} dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{(1-r^4)r}{1+r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-r^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Câu 8.10.4 Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x} dx$

a) $I_1 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-x^4} dx$

Đặt: $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{5}{4}}}{4t^{\frac{3}{4}}}.e^{-t}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}}.e^{-t}dt = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

b) $I_2 = \int_0^{\infty} \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x} dx$

Ta có. $\int_2^3 t^{-x-1} dt = \frac{t^{-x}}{-x}\Big|_2^3 = \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2 &= \int_0^{\infty} \left(\int_2^3 t^{-x-1} dt \right) dx \\ &= \int_2^3 \left(\int_0^{\infty} t^{-x-1} dx \right) dt \\ &= \int_2^3 \left(\frac{t^{-x-1}}{-\ln t} \Big|_0^{\infty} \right) dt \\ &= \int_2^3 \frac{dt}{t.\ln t} = \ln\left(\ln t\right)\Big|_2^3 = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \end{aligned}$$

Câu 8.10.5 Tính $\int_{\overset{\frown}{ABC}} 2ydx - 3xdy$, trong đó ABC là đường gấp khúc, với $A(1;0), B(0;1), C(-1,0)$.

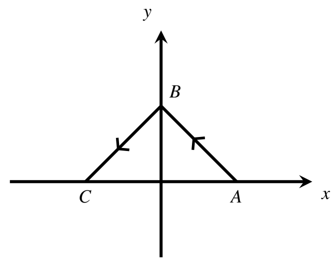
Bổ sung thêm đoạn CA, ta được đường kín

Áp dụng công thức Green, ta có:

$$I_1 = \int_{ABCA} 2ydx - 3xdy = -\iint_D 5dxdy = -5S_{ABC} = -5$$

Xét trên CA: $I_2 = \int_{CA} 2ydx - 3xdy = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$

$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = -5$



Câu 8.10.6 Tính $\iint_S (x-y+2z)^3(dydz + dzdx + dxdy)$, trong đó S là mặt ellipsoid $x^2+y^2+4z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

$$I = \iiint_V \left(x-y+2z\right)^3\left(dydz + dxdz + dxdy\right);\ S: x^2+y^2+4z^2 = 1, \text{hướng ngoài}$$

Do S là mặt kín, miền không gian giới hạn bởi S là $V: x^2+y^2+4z^2 \le 1$

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V \left[3\left(x-y+2z\right)^2 - 3\left(x-y+2z\right)^2 + 6\left(x-y+2z\right)^2\right]dxdydz \\
&= 6\iiint_V \left(x-y+2x\right)^2 dxdydz \\
&= 6\iiint_V \left(x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4xz\right)dxdydz \\
&= 6\iiint_V \left(x^2+y^2+4z^2\right)dxdydz\ (\text{do} -2xy, -4yz, 4xz \text{ là các hàm lẻ})
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt}\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \dfrac{r}{2}\cos\theta \end{cases}, |J| = \frac{r^2}{2}\sin\theta, V \to V' \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.\frac{r^2}{2}\sin\theta dr \\
&= 6.2\pi.\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=1}\right)d\theta \\
&= 6\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{5}d\theta \\
&= \frac{12\pi}{5}
\end{aligned}$$

Câu 8.10.7 Chứng minh rằng trường vectơ:

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

$$\vec{F} = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Ta xét:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{-2zy+2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2zx+2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2xy+2yx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \right) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế

Ta có hàm thế vị:

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt \\
&= \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt + \int_0^y \frac{t}{1+x^2+t^2}dt + \int_0^z \frac{t}{1+x^2+y^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+t^2)\Big|_0^y + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+t^2)\Big|_0^z + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2) + C
\end{aligned}$$

Câu 8.10.8 Tìm lưu số của trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = (2z-y)\overrightarrow{i} + (2x-z)\overrightarrow{j} + (2y-x)\overrightarrow{k}$$

dọc theo giao tuyến L của mặt $x^2+y^2+z^2=3$ và $x+2y+2z=0$, chiều theo L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z>0$.

Ta có lưu số của $\vec{F}$:

$I = \int\limits_L (2z-y)dx + (2x-z)dy + (2y-x)dz$

Áp dụng công thức Stokes, ta có:

$I = \iint\limits_S 3dydx + 3dxdy + 3dzdx = 3\iint\limits_S dxdy + dydz + dzdx$

Với $S: x+2y+2z=0$ hướng về phía $z<0$ nằm trong L

Ta có: $z = -\dfrac{x}{2} - y \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$

$\widehat{(\vec{n}, Oz)} > \dfrac{\pi}{2} \quad ; \quad \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

$\Rightarrow I = 3\iint\limits_S \left(\dfrac{-1}{3} + \dfrac{-2}{3} + \dfrac{-2}{3}\right) dS = -5\iint\limits_S dS = -5S_S = -15\pi$

Câu 8.10.9 Tính $\displaystyle\int_L \frac{(10x^4-4y)dx + (7x^8-8y^7)dy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$, trong đó L là đường $y = 2\sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{\left(10\cos^4 t - 8\sin t\right)(-\sin t) + \left(7\cos^8 t - 1024\sin^7 t\right)(2\cos t)}{2} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (8\sin^2 t - 10\cos^4 t\sin t + 14\cos^9 t - 2048\sin^7 t\cos t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\pi} \sin^2 t dt - 5\int_0^{\pi} \cos^4 t \sin t dt + 7\int_0^{\pi} \cos^9 t dt - 1024\int_0^{\pi} \sin^7 t \cos t dt \\ &= 2\pi - 2 \end{aligned}$$

8.11 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kì 20182

Câu 8.11.1 Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = t\cos 2t, y = t\sin 2t, z = 3t$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} x'_t = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y'_t = \sin 2t + 2t\cos 2t \\ z'_t = 3 \end{cases}$

Tại $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ có: $\begin{cases} x(t_0) = -\dfrac{\pi}{2} \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x'(t_0) = -1 \\ y'(t_0) = -\pi \\ z'(t_0) = 3 \end{cases}$ Phương trình tiếp tuyến: $\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{-1} = \dfrac{y+\pi}{-\pi} = \dfrac{z+\frac{3\pi}{2}}{3}$

Phương trình pháp tuyến: $-\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \pi y + 3\left(z - \dfrac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -x - \pi y + 3z - 5\pi = 0$

Câu 8.11.2 Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^2}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^4} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4}.4x^3 dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4} d(x^4) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(1+t)^4} dt \\ &= \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}; \frac{13}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{\Gamma(4)} \\ &= \frac{1}{4}.\frac{\frac{9}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3!} \\ &= \frac{15}{512}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{15\sqrt{2}}{1024}\pi \end{aligned}$$

Câu 8.11.3 Xác định những điểm không phải là điểm xoáy trong trường vecto $\overrightarrow{F} = (2xy - z^2)\overrightarrow{i} + (3x^2 + 2yz)\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.

Ta có: $\vec{F} = (2xy - z^2)\vec{i} + (3x^2 + 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k} \Rightarrow rot\vec{F} = (-4y; 2z; 4x)$

Những điểm không phải điểm xoáy thì $rot\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy $O(0;0;0)$ không phải điểm xoáy của trường vecto trên.

Câu 8.11.4 Tính tích phân $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$, trong đó S là mặt $2z = x^2+y^2,\ 0 \le x,y \le 1$.

$$I = \iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}.\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy \text{ với miền } D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (1+x^2+y^2)dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (1+x^2+y^2)dy \\ &= \int_0^1 \left(1+x^2+\frac{1}{3}dx\right. \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

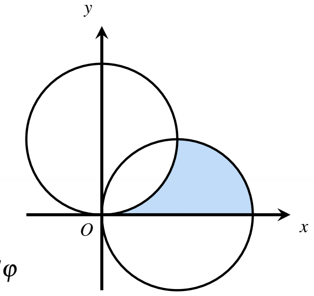
Câu 8.11.5 Tính khối lượng của một đường cong vật chất có phương trình $x = e^{\frac{t}{2}}\cos t, y = e^{\frac{t}{2}}\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ trong mặt phẳng với hàm mật độ $\rho(x,y) = x+y$.

Khối lượng đường cong vật chất là:

$$\begin{aligned} M &= \int_C \rho(x,y)ds = \int_C (x+y)ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\frac{t}{2}}\cos t + e^{\frac{t}{2}}\sin t\right).\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\frac{t}{2}}dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t(\sin t+\cos t)dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}e^t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}.e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Câu 8.11.6 Tính tích phân kép $\iint_D (y^2-x^2)dxdy$, trong đó D là miền $0 \le 2y \le x^2+y^2 \le 2x$.

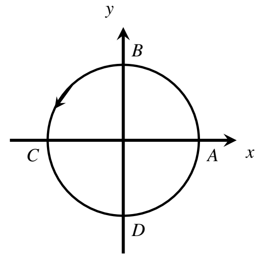
Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $, |J| = r$miền $D \to D'$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 2\sin\varphi \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$



$$\begin{aligned} I = \iint_D (y^2-x^2)dxdy &= \iint_{D'} (r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi).rd\varphi dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{2\cos\varphi} r^3(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2\varphi-\cos^2\varphi).4.(\cos^4\varphi-\sin^4\varphi)\ d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Câu 8.11.7 Tính tích phân đường $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2 = 1$ định hướng dương.

Đặt: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t \\ dy = \cos t \end{cases}$



Vì vậy:

$$I = \oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BC}} + \int_{\overset{\frown}{CD}} + \int_{\overset{\frown}{DA}}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t - \cos t} dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t + \cos t} dt$$
$$= 0$$

Câu 8.11.8 Tính tích phân $\iiint_V zdxdydz$ trên miền V giới hạn bởi mặt $(x+2y)^2 + 4z^2 = 1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $V : \begin{cases} (x+2y)^2 + 4z^2 = 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}\sqrt{1-(x+2y)^2} \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

Ta có:

$$I = \iiint_V zdxdydz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{1-(x+2y)^2}}{2}} zdz$$

$$I = \frac{1}{8}\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} 1-(x+2y)^2 dy$$

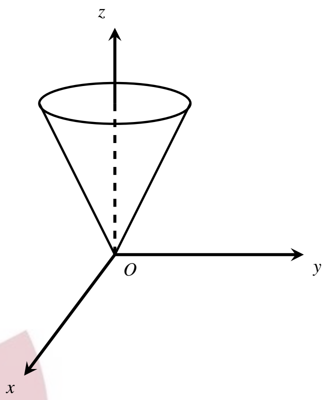
$$= \frac{1}{64}$$

Câu 8.11.9 Tính tích phân mặt $\iint_S ydzdx + zdxdy$, trong đó S là phía dưới của mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 1$, khi nhìn từ chiều dương trục Oz.

Dựng mặt S' : $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ hướng theo chiều dương trục Oz

Ta cũng có:

$$\iint_{S\cup S'} = \iint_{S} + \iint_{S'}$$



Áp dụng công thức Osbogrodsky ta có:

$$\iint_{S\cup S'} = \iiint_V 2dxdydz \text{ với } V : \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_{S\cup S'} = 2V = \frac{2\pi}{3}$$

Ta có:

$$\iint_{S'} = \iint_D dxdy = \pi \text{ với } D : x^2+y^2 \le 1$$

$$\Rightarrow \iint_S = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

Câu 8.11.10 Tính tích phân đường

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

trong đó C là giao của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ với mặt nón $z = -\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

Áp dụng công thức Stokes:

$$I = \iint_S 2(y-z)dydz + 2(z-x)dzdx + 2(x-y)dxdy$$

Trong đó S là phần mặt cầu phía trên hướng theo trục Oz
Ta có $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\widehat{(\vec{n}, \vec{O}z)} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow |\vec{n}| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (x(y-z) + y(z-x) + z(x-y))dS = 0$$

8.12 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kì 20172

Câu 8.12.1 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn cho dưới dạng giao của mặt paraboloid $z = 30 - x^2 - y^2$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $M(3;4;5)$.

Ta có: $\begin{cases} z = 30 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = z - 30 + x^2 + y^2 = 0 \\ G = z - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Xét $F = z - 30 + x^3 + y^2 = 0$ có: $\begin{cases} F'_x = 2x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(M) = 6 \\ F'_y(M) = 8 \\ F'_z(M) = 1 \end{cases}$

Vectơ pháp tuyến của mặt $F = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{a} = (6, 8, 1)$

Xét $G = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ có: $\begin{cases} G'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ G'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ G'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G'_x(M) = -\dfrac{3}{5} \\ G'_y(M) = -\dfrac{4}{5} \\ G'_z(M) = 1 \end{cases}$

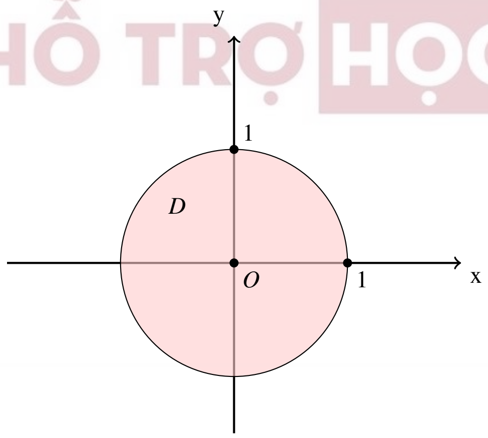
Vectơ pháp tuyến của mặt $G = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{b} = (-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 1)$

Coi $\overrightarrow{u}$ là vectơ chỉ phương tiếp tuyến của đường $\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$ tại điểm $M(3, 4, 5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\dfrac{44}{5}, -\dfrac{33}{5}, 0) = \dfrac{11}{5}(4, -3, 0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Câu 8.12.2 Tính tích phân $\iint\limits_D |x + y|\, dxdy$, ở đó $D.x^2 + y^2 \leq 1$.



Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\to$ Miền D trở thành D' $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ và $|J| = r$

$$I = \iint\limits_D |x+y|\,dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} |r\cdot(\cos\theta+\sin\theta)|\cdot r\,drd\theta$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left|r\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|\cdot r\,drd\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi} |\sin(x+\frac{\pi}{4})|d\theta$$
$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Câu 8.12.3 Tính diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2+z^2$ thỏa mãn $x \le 1$.

Ta có: $x = y^2+z^2 \Rightarrow \begin{cases} x'_y = 2y \\ x'_z = 2z \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} = \sqrt{1+(2y)^2+(2z)^2} = \sqrt{1+4(y^2+z^2)}$

$\Rightarrow$ Diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2+z^2$ thỏa mãn $x \le 1$ là:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz$$
$$= \iint\limits_D \sqrt{1+4(y^2+z^2)}\,dydz$$

Với D là miền $y^2+z^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr$$
$$= 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr$$
$$= 2\pi(\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{12}) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Câu 8.12.4 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V xz\,dxdydz$, ở đó V là miền thỏa mãn $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z \le -2$.

$I = \iiint\limits_V xz\,dxdydz$ trong đó V là miền: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z \leq -2$.

Có $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z \leq -2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 1$. Ta đổi biến:

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = 1 + r\sin\varphi\sin\theta \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \quad \text{khi đó miền } V \text{ trở thành } V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}, \quad |J| = r^2\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I &= \iiint\limits_{V'} (1+r\cos\varphi\sin\theta)(1+r\cos\varphi)\cdot|J|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (1+r\cos\varphi\sin\theta)\,(1+r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\theta\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \left(r\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta + r^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 1\right)\cdot r^2\sin\theta\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2\sin\theta\,dr \\
&= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3} \quad = \quad \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

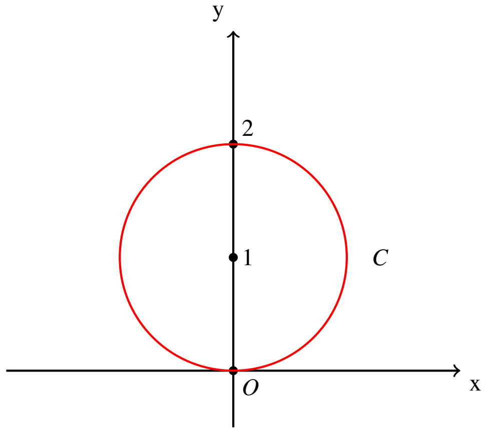
Câu 8.12.5 Tính tích phân $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2} \qquad \text{Đặt} \quad t = x^2 \rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \\
&= \int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt \quad = \quad \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(5)} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{4!} \\
&= \frac{5\sqrt{\pi}}{256}
\end{aligned}$$

Câu 8.12.6 Tính tích phân đường $\int\limits_C (x+y)\,ds$, ở đó C là đường tròn có phương trình $x^2+y^2 = 2y$.

$$I=\int\limits_C (x+y)ds \quad \text{trong đó} \quad C: x^2+y^2=2y$$

Ta đặt $\begin{cases} x=\cos t \\ y=1+\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t=-\sin t \\ y'_t=\cos t \end{cases}$



Khi đó:

$$I=\int\limits_0^{2\pi} (x(t)+y(t))\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} (\cos t+\sin t+1)\,dt = 2\pi$$

Câu 8.12.7 Chứng minh rằng trường vectơ

$$\overrightarrow{F}=e^{x^2+y^2+z^2}\left[\left(2x^2yz+yz\right)\overrightarrow{i}+\left(2xy^2z+xz\right)\overrightarrow{j}+\left(2xyz^2+xy\right)\overrightarrow{k}\right]$$

là một trường thế. Tìm hàm thế vị.

$$\overrightarrow{F}=e^{x^2+y^2+z^2}\left[\left(2x^2yz+yz\right)\overrightarrow{i}+\left(2xy^2z+xz\right)\overrightarrow{j}+\left(2xyz^2+xy\right)\overrightarrow{k}\right]$$

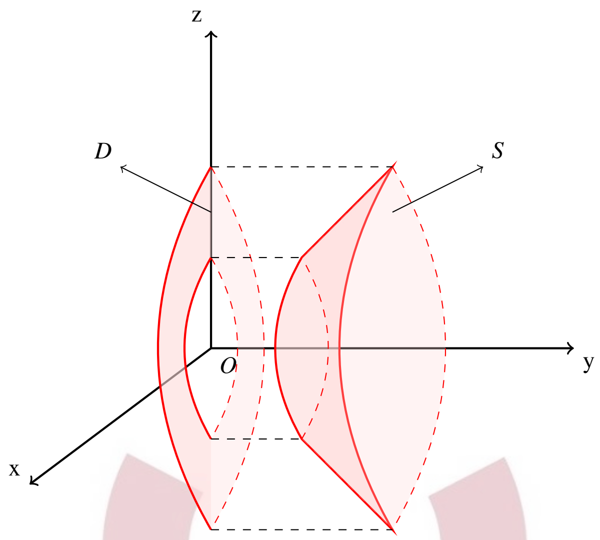
$$\Rightarrow \begin{cases} P=e^{x^2+y^2+z^2}\left(2x^2yz+yz\right) \\ Q=e^{x^2+y^2+z^2}\left(2xy^2z+xz\right) \\ R=e^{x^2+y^2+z^2}\left(2xyz^2+xy\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P'_y=e^{x^2+y^2+z^2}\left(z+4x^2y^2z+2x^2z+2y^2z\right) \\ P'_z=e^{x^2+y^2+z^2}\left(y+4x^2yz^2+2x^2y+2yz^2\right) \end{cases} \\ \begin{cases} Q'_x=e^{x^2+y^2+z^2}\left(z+4x^2y^2z+2x^2z+2y^2z\right) \\ Q'_z=e^{x^2+y^2+z^2}\left(x+2xy^2z^2+2xy^2+2xz^2\right) \end{cases} \\ \begin{cases} R'_x=e^{x^2+y^2+z^2}\left(y+4x^2yz^2+2x^2y+2yz^2\right) \\ R'_y=e^{x^2+y^2+z^2}\left(x+2xy^2z^2+2xy^2+2xz^2\right) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_y=Q'_x \\ P'_z=R'_x \\ Q'_z=R'_y \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{F} \text{ là trường thế.}$$

Tìm hàm thế vị u, ta chọn $(x_0;y_0;z_0)=(0;0;0)$:

$$\begin{aligned} u&=\int\limits_0^x P(t;0;0)\,dt+\int\limits_0^y Q(x;t;0)\,dt+\int\limits_0^z R(x;y;t)\,dt+C \\ &=\int\limits_0^x 0\,dt+\int\limits_0^y 0\,dt+\int\limits_0^z e^{x^2+y^2+t^2}\left(2xyt^2+xy\right)\,dt+C \\ &=e^{x^2+y^2+t^2}xyt\Big|_0^z+C \\ &=e^{x^2+y^2+z^2}xyz+C \end{aligned}$$

Câu 8.12.8 Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^2y\,dS$, ở đó S là phần mặt nón $y=\sqrt{x^2+z^2}$, $1\le y\le 2$.



Ta có: $I = \iint\limits_S x^2 y \, dS$, ở đó S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2+z^2}$, $1 \le y \le 2$

Do có: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ y'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \iint\limits_S x^2 y \, dS \\
&= \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dzdx \\
&= \iint\limits_D \sqrt{2}x^2\sqrt{x^2+z^2}\, dzdx \quad \text{trong đó} \quad D: \begin{cases} 1 \le x^2+z^2 \le 4 \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{2}\cdot r\cdot(r\cos\varphi)^2\cdot r\cdot dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4(\cos\varphi)^2 dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{31}{5}(\cos\varphi)^2 d\varphi \\
&= \frac{31\sqrt{2}\pi}{5}
\end{aligned}$$

Câu 8.12.9 Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2+z)\overrightarrow{i} + (x^2y+z)\overrightarrow{j}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt paraboloid $z = x^2+y^2$ với $z \le 1$ hướng lên trên.

Trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2+z)\overrightarrow{i} + (x^2y+z)\overrightarrow{j}$

Gọi S là mặt paraboloid $z = x^2+y^2, z \leqslant 1$ hướng lên trên,

S' là mặt paraboloid $z = x^2 + y^2, z \leqslant 1$ hướng xuống dưới.

Khi đó thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt S là:

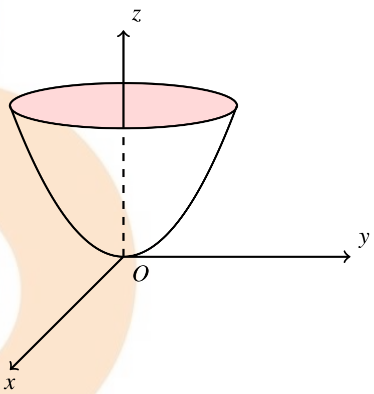
$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \cdot dS = -\iint\limits_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS$$

Gọi K là mặt giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên.

Khi đó: $\iint\limits_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS = \iint\limits_{S' \cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS - \iint\limits_{K} \overrightarrow{F} \cdot dS$

$S' \cup K$ là mặt kín nên áp dụng công thức Ostrogradski cho mặt này ta được:

$$\begin{aligned} -\iint\limits_{S' \cup K} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} &= -\iiint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz \\ &= -\iiint\limits_{D} y^2 + x^2 \, dxdydz \quad \text{trong đó } D \text{ là miền bao bởi } S' \text{ và } K \end{aligned}$$



Chuyển sang hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, |J| = r$

Miền D trở thành miền D': $\{r^2 \leqslant z \leqslant 1; 0 \leqslant r \leqslant 1; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$
Khi đó:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S' \cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS &= \iiint\limits_{D'} r^2 \cdot r \, drd\theta dz \\ &= \iint r^3 \cdot (1 - r^2) \, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3(1 - r^2) dr \\ &= \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Vì K là mặt giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên nên ta có:

$$\iint\limits_{K} \overrightarrow{F} \cdot dS = \iint\limits_{K} (xy^2 + z)dydz + (x^2 y + z)dzdx = 0$$

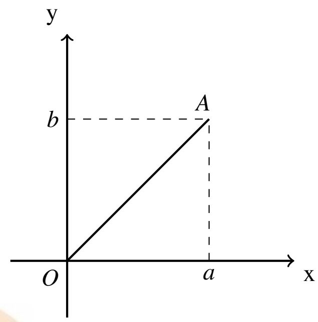
Vậy $\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \cdot dS = -\iint\limits_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS = -\left(\iint\limits_{S' \cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS - \iint\limits_{K} \overrightarrow{F} \cdot dS \right) = -\frac{\pi}{6}$

Câu 8.12.10 Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và L là đường đi từ $O(0;0)$ đến $A(a;b)$ thì $\int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)\,du$.

Ta có: $I = \int\limits_L f(x+y)(dx+dy)$ có miền xác định $D = \mathbb{R}^2$

Coi: $\begin{cases} P = f(x+y) \Rightarrow P'_y = f'(x+y) \\ Q = f(x+y) \Rightarrow Q'_x = f'(x+y) \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Tích phân I không phụ thuộc vào đường đi

Chọn đường đi $OA : y = \frac{b}{a}x$



$\Rightarrow I = \int\limits_0^a f\left(x+\frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a}+1\right)dx = \int\limits_0^a f\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)x\right] d\left(x+\frac{b}{a}x\right)$

Coi $u = \left(1+\frac{b}{a}\right)x$

khi $x = a \Rightarrow u = a+b$

khi $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow I = \int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)du$ (đpcm)

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí - Giáo trình Toán cao cấp, nhà xuất bản giáo dục.

[2] Bùi Xuân Diệu - Bài giảng Giải tích 2, Đại học Bách khoa Hà Nội.

[3] Đề cương môn Giải tích 2, Khoa Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội.