BỘ KĨ NĂNG A+

GIẢI TÍCH 3

SCAN ME

TÀI LIỆU ĐƯỢC TỔNG HỢP VÀ BIÊN SOẠN BỞI
CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

BIÊN SOẠN BỞI CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP BÁCH KHOA

CLB.HTHT-WEBSITE.COM

Tài liệu là món quà của CLB Hỗ trợ Học tập dành cho các bạn sinh viên Đại học Bách Khoa Hà Nội. CLB xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến các bạn vì đã tin tưởng đồng hành cùng CLB trong suốt thời gian vừa qua. Sự ủng hộ của các bạn chính là nguồn động lực lớn nhất để chúng mình phấn đấu đưa CLB ngày một phát triển và đem đến nhiều tài liệu chất lượng hơn. Cuối cùng, xin chúc các bạn một kỳ học tập hiệu quả và thành công.

Bản in lần thứ nhất, tháng 6 năm 2024

Mục lục

I Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết

Mục 1 - Tóm tắt lý thuyết

1. Chương 1 - Chuỗi

1.1 Chuỗi số

1.1.1 Đại cương về chuỗi số

1.1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1

- Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta định nghĩa chuỗi số:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

trong đó $\begin{cases} a_n & \text{là số hạng tổng quát} \\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n & \text{là tổng riêng thứ n} \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \begin{cases} = S \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ và } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S \\ \nexists \text{ hoặc } = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kì} \end{cases}$

Ví dụ 1.1 Cho chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có.

[Hướng dẫn giải]

Ta có $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = 1$

$\Rightarrow$ Chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

R $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.q^n \quad (a \neq 0) \begin{cases} \text{hội tụ} & \Leftrightarrow & |q| < 1 \\ \text{phân kì} & \Leftrightarrow & |q| \geqslant 1 \end{cases}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.q^n = \dfrac{aq}{1-q}$

1.1.1.2 Định lý 1.1: Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 1.1

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Hệ quả: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ

Ví dụ 1.2 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10-3n}{\sqrt{4n^2+2n+7}}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{10-3n}{\sqrt{4n^2+2n+7}} = \dfrac{-3}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ

1.1.1.3 Định lý 1.2: Các phép toán trên chuỗi số hội tụ

Định lý 1.2

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

Ví dụ 1.3 Tính tổng chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2020}{n(n+1)} + \dfrac{2021}{4^n}\right]$

[Hướng dẫn giải]

- Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{n(n+1)} = 2020 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

  $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

  $$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Chuỗi hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{n(n+1)} = 2020 \end{cases} \quad (1)$$

- Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2020}{4^n}$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Chuỗi hội tụ} \qquad (|q| = \dfrac{1}{4} < 1) \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{2021}{4^n} = \dfrac{2021.\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{2021}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2020}{n(n+1)} + \dfrac{2021}{4^n}\right] \quad \text{hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2020}{n(n+1)} + \dfrac{2021}{4^n}\right] = 2021 + \dfrac{2021}{3} = \dfrac{8081}{3} \end{cases}$

1.1.2 Chuỗi số dương

1.1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.2 Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ thỏa mãn $a_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương (Chú ý rằng nếu các phần tử $a_n < 0, \forall n$ thì ta thực hiện bỏ dấu trừ ra ngoài, ta sẽ được một chuỗi dương)

1.1.2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1.3 Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ là chuỗi số dương.

- **Tiêu chuẩn so sánh 1**:

  $$\text{Nếu} \quad a_n \leqslant b_n \quad \text{thì} \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ thì } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kỳ thì } \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

- **Tiêu chuẩn so sánh 2**:
  Giả sử $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$
  - $K = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
  - $K = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
  - $0 < K < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 1.4 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+5^n}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $0 < \dfrac{2^n}{n+5^n} \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.
Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ hội tụ $(q = \dfrac{2}{5} < 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+5^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Ví dụ 1.5 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \dfrac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}} > 0$
Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.
Xét $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^5}}} = 1$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$ phân kỳ theo tiêu chẩn so sánh.

1.1.2.3 Tiêu chuẩn D'Alambert

Định lý 1.4 Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương.
Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$

- $D < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- $D > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- $D = 1 \Rightarrow$ chưa có kết luận (Tiêu chuẩn D'Alembert không áp dụng được trong trường hợp này)

Ví dụ 1.6 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \frac{1}{n!} > 0$
Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

Xét $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alambert.

Ví dụ 1.7 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3+4^n}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \frac{(2n+1)!}{n^3+4^n} > 0, \forall n \in N^*$

Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

Xét $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+3)!}{(n+1)^3+4^{n+1}}}{\frac{(2n+1)!}{n^3+4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{4} = \infty$

Do $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{4} > 1 \forall n \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
$\Rightarrow a_n > a_{n-1} > ...a_1 = \frac{3}{2}$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ nếu có tồn tại thì cũng không thể bằng 0
Vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

R Tiêu chuẩn D'Alembert không áp dụng trong trường hợp này, ta chứng minh chuỗi phân kỳ bằng điều kiện cần

1.1.2.4 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 1.5 Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương.
Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$

- $C < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- $C > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- $C = 1 \Rightarrow$ chưa có kết luận (Tiêu chuẩn Cauchy không áp dụng được trong trường hợp này)

Ví dụ 1.8 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n > 0$
Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.
Xét $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{n}\right) = 0 < 1$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

1.1.2.5 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 1.6 Cho $f(x)$ là một hàm liên tục dương, giảm trên $[1;\infty)$ và $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$, $a_n = f(n) \quad \forall n \geqslant 1$.

Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\int_1^{\infty} f(x)dx$ cùng tính hội tụ, phân kỳ.

R Tiêu chuẩn tích phân thường được sử dụng trong trường hợp $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp có thể tính được nguyên hàm.

Ví dụ 1.9 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \frac{1}{n\ln n} > 0$
Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.
Xét $f(x) = \frac{1}{n\ln n}$ liên tục dương, giảm trên $[2;\infty)$ và $a_n = f(x) \quad \forall n \geqslant 2$
Mà $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$
$\rightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân.

R $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (n > 0) \begin{cases} \text{hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ} \Leftrightarrow 0 < \alpha \leqslant 1 \end{cases}$

1.1.3 Chuỗi số với số hạng có dấu bất kỳ

1.1.3.1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 1.7 Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

R $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nhưng **không có chiều ngược lại**.

Ví dụ 1.10 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$

[Hướng dẫn giải]

- Ta có $\left|\dfrac{\cos(n)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

  Mà
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\cos(n)}{n^2}\right|$ hội tụ

$\Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ hội tụ

Định nghĩa 1.3 Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là

- Hội tụ tuyệt đối nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là hội tụ
- Bán hội tụ nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là phân kỳ.

Ví dụ 1.11 Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q}$, với $p < -1$ và $q - p > 1$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n!}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$

[Hướng dẫn giải]

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^p \sin n}{1+n^q}$, với $p < -1$ và $q - p > 1$

Với $a_n = \dfrac{n^p \sin n}{1+n^q}$, ta xét chuỗi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Khi đó: $|a_n| \leq \left|\dfrac{n^p}{1+n^q}\right| \leq \dfrac{1}{1+n^{q-p}}$.

Do $q - p > 1$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^{q-p}}$ hội tụ.

Suy ra theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n!}$

Với $a_n = \frac{\cos n\pi}{n!}$, ta xét chuỗi: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Khi đó: $|a_n| \leq \frac{1}{n!}$.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, dễ thấy theo tiêu chuẩn D'Alembert thì chuỗi này hội tụ.

Suy ra theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$

Với $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$, ta xét chuỗi: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Khi đó: $|a_n| \geq \frac{1}{n}$ với mọi $n > 0$.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, dễ thấy chuỗi này phân kỳ.

Suy ra theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ phân kỳ.

Mặt khác ta cũng có dãy $b_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}$ là dãy các số thực dương giảm về 0 nên theo tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$ hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho bán hội tụ.

Định lý 1.8 Tiêu chuẩn D'Alembert mở rộng:

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

- $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối
- $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Định lý 1.9 Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng:

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

- $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối
- $L > 1$ thì cả hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

1.1.3.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 1.4 Cho chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.a_n$ với $a_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lý 1.10 Định lý Lebnitz

Nếu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.a_n$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.a_n \leqslant a_1$$

Ví dụ 1.12 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ với $\alpha > 0$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\dfrac{1}{n^\alpha} > 0$ với $\alpha > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu.

Lại có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ với $\alpha > 0$

Mà (a_n) là dãy số giảm. $\Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ với $\alpha > 0$ hội tụ theo **tiêu chuẩn Leibnitz**.

R $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} (n > 0) \begin{cases} \text{hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 0 \\ \text{phân kỳ} \Leftrightarrow \alpha < 0 \end{cases}$

Ví dụ 1.13 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n.n^3}{n!}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $a_n = \dfrac{n^3}{n!} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu.

Đặt $b_n = \dfrac{n^3}{n!}$ với mọi $n > 0$. Ta có: b_n là dãy các số thực dương, bên cạnh đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ và b_n là dãy giảm $\left(\text{do } b_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^2}{n!} < \dfrac{n^3}{n!} = b_n \text{ với mọi } n > 2\right)$.

Vậy theo tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi đã cho hội tụ.

1.1.3.3 Phép nhân chuỗi

Định nghĩa 1.5 Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là 2 chuỗi bất kỳ. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, ở đó $c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k.b_{n+1-k}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ là tích của hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Định lý 1.11 Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$là các chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = A.B$

Ví dụ 1.14 Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}.n\sqrt{n}}$

[Hướng dẫn giải]

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$hội tụ tuyệt đối
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$hội tụ tuyệt đối
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right).\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$hội tụ

1.2 Chuỗi hàm số

1.2.1 Chuỗi hàm số

Định nghĩa 1.6 Cho dãy hàm số $\{u_n(x)\}$ xác định trên tập X. Ta định nghĩa chuỗi hàm số:

$$u_1(x)+u_2(x)+... = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \ (1.1)$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ (phân kì) tại $x_0 \Leftrightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ hội tụ (phân kì).

Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của (1.1) được gọi là **miền hội tụ**. Tổng của chuỗi hàm số là hàm số xác định trong miền hội tụ của nó.

Ví dụ 1.15 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$

[Hướng dẫn giải]

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Xét tại $x_0 \in \mathbb{R}$ cố định. Ta có: $\left|\frac{\cos(nx_0)}{n^2+x_0^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1.$

Mà ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx_0)}{n^2+x_0^2}$ hội tụ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $\mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Xét tại $x_0 \in D$ cố định. Đặt $a_n = x_0^{n-1}$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_0^n}{x_0^{n-1}}\right| = |x_0|$$

Theo tiêu chuẩn D'Alambert:
• Nếu $|x_0| < 1$ thì chuỗi hội tụ.
• Nếu $|x_0| > 1$ thì chuỗi phân kì.
• Nếu $|x_0| = 1$ hay $x_0 = \pm 1$, thay vào chuỗi ban đầu, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, cả hai chuỗi này đều phân kì.
Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1;1)\setminus\{0\}$.

1.2.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa 1.7 Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập X nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N$ thì

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad \forall x$$

Định lý 1.12 **Tiêu chuẩn Cauchy**

Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập $X \subset \mathbb{R}$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall p > q > N$ thì

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathrm{X}$$

Lưu ý $N(\varepsilon)$ trong định nghĩa trên chỉ phụ thuộc vào ε mà không phụ thuộc vào x.

Ví dụ 1.16 Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}, (-1;1)$

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ trên $(0;+\infty)$

[Hướng dẫn giải]

1. Rõ ràng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$ hội tụ $\forall x \in (-1;1)$ (theo tiêu chuẩn D'Alembert)
Ký hiệu tổng của chuỗi đã cho là $S(x)$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ có:

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in (-1;1)$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon), \forall n > N_0 : |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

Theo định nghĩa, ta có chuỗi đã cho hội tụ đều trên (-1;1).

2. Xét: $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{x^n}{n!}, \quad U_n = \dfrac{x^n}{n!}$

Chọn $\varepsilon = \dfrac{1}{4}, \forall n_0 \in \mathbb{N}$, chọn $m = n+1, n > n_0, x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{2}}$, có:

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |U_{n+1}| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$\to$ Chuỗi đã cho không thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy tại 1 điểm cố định
$\to$ Chuỗi đã cho không hội tụ đều trên $(0;+\infty)$

Định lý 1.13 **Tiêu chuẩn Weierstrass**

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$, nếu:

1. $\left|U_n(x)\right| \leqslant a_n, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{X}$
2. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ

Thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trong miền X

Ví dụ 1.17 Chứng minh: chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$ hội tụ đều.

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $\quad |U_n(x)| = \left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ hội tụ (chuỗi nhân, công bội $q = \dfrac{1}{2} < 1$)

Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ hội tụ đều.

Định lý 1.14 Tiêu chuẩn Dirichle

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ trong đó $U_n(x) = a_n(x)b_n(x)$ thỏa mãn:

1. Nếu $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant c \quad \forall n, \forall x \in X$
2. Dãy hàm $b_n(x)$ là đơn điệu, không tăng và dần đến 0 $\forall x \in X$

Thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ hội tụ đều trong miền X

1.2.3 Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 1.15 (Tính liên tục)

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ thỏa mãn:

1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X
2. $U_n(x)$ liên tục trên X $\forall n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $S(x)$ liên tục trên X và:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} U_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0)$$

Định lý 1.16 (Tính khả tích)

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ thỏa mãn:

1. $U_n(x)$ liên tục trên [a, b] với $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X

Khi đó: $S(x)$ khả tích trên $[a;b]$ và:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_a^b U_n(x)dx\right)$$

Định lý 1.17 (Tính khả vi) Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ thỏa mãn:

1. $U_n(x)$ khả vi liên tục trên (a,b) với $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ hội tụ về $S(x)$ trên (a,b)
3. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ hội tụ đều trên (a,b).

Khi đó $S(x)$ khả vi trên $(a;b)$ và:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)dx$$

Ví dụ 1.18 Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022n^2}{2021^{n-1}}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022n^2}{2021^{n-1}} = 2022 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2021}\right)^{n-1}$

Xét $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \forall |x| < \frac{1}{2}$

Dễ thấy $n^2 x^{n-1}$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ $\forall n$ và $S(x)$ hội tụ đều trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ (theo tiêu chuẩn Weierstrass)

$\Rightarrow \int S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int n^2 x^{n-1}\, \mathrm{d}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \forall |x| < \frac{1}{2}.$

Xét $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \forall |x| < \frac{1}{2}$

Dễ thấy nx^{n-1} liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ $\forall n$ và $H(x)$ hội tụ đều trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ (theo tiêu chuẩn Weierstrass)

$\Rightarrow \int H(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int nx^{n-1}\, \mathrm{d}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}, \forall |x| < \frac{1}{2}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$H(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$\Rightarrow \int S(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall |x| < \frac{1}{2}$. Lấy đạo hàm hai vế này theo x, ta có:

$$S(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Thay $x = \frac{1}{2021} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ta được:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022n^2}{2021^{n-1}} = 2022 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2021}\right)^{n-1} = 2022 \cdot S\left(\frac{1}{2021}\right) = 2022.\frac{1 + \frac{1}{2021}}{(1 - \frac{1}{2021})^3} = \frac{2022^2.2021^2}{2020^3}$$

1.3 Chuỗi lũy thừa

1.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.8 Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ở đó x là biến số còn a_n là các hệ số

Chuỗi lũy thừa hội tụ (phân kỳ) tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ hội tụ (phân kỳ)

Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ trên khoảng $(a,b) \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ, x_0 tùy ý $\in (a,b)$

Định lý 1.18 **(Abel)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ hội tụ tuyệt đối tại $x : |x| < |x_0|$

Định lý 1.19 Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ được xác định bởi $R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$

Nhận xét 1.

- Mọi chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ đều có bán kính hội tụ R với $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, trong đó chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < R$ và phân kì với $|x| > R$.
- Cách tìm bán kính hội tụ R: $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ hoặc $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Nhận xét 2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ (1) được gọi là chuỗi lũy thừa tại $x = a$,

Đặt $z = x - a$, ta có $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (2), tìm bán kính hội tụ R của chuỗi (2) thì có tập hội tụ của chuỗi (1).

Cụ thể $-R < x - a < R$ hay $a - R < x < a + R$ và phân kì với $x < a - R$ hoặc $x > a + R$, để nhận được khoảng hội tụ ta cần xét tại $x = a - R$ và $x = a + R$

Ví dụ 1.19 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n \left(\frac{1}{x+2}\right)^n$$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $y = \dfrac{1}{x+2}$ thì chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n y^n$ là chuỗi lũy thừa với $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$

+) Ta có: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ $y \in (-2;2) \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} \in (-2;2) \Rightarrow x \in \left(-\infty;\dfrac{-5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-3}{2};+\infty\right)$

+) Tại $x = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow y = 2$, ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{2n+1}} = e^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

+) Tại $x = \dfrac{-5}{2} \Rightarrow y = -2$, ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-2n-2}{2n+1}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$

$\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-2n-2}{2n+1}\right)^n$ phân kỳ (không thỏa mãn điều kiện cần)

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\left(-\infty;\dfrac{-5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-3}{2};+\infty\right)$

1.3.2 Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý 1.20 Giả sử rằng chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ và đặt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ với $|x| < R$. Khi đó

1. Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-R,R)$
2. $f(x)$ là hàm số liên tục trên $(-R,R)$
3. $f(x)$ là hàm số khả vi(và do đó liên tục) trên $(-R,R)$ và
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}a_n x^n\right) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$
4. $f(x)$ là hàm khả tích trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-R,R)$ và
$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Ví dụ 1.20 Tính tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2022n^2}{2021^{n-1}}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2022n^2}{2021^{n-1}} = 2022\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\left(\dfrac{1}{2021}\right)^{n-1}$

Xét chuỗi lũy thừa $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}, \forall |x| < \dfrac{1}{2}$ có bán kình hội tụ $R = 1$

Dễ thấy n^2x^{n-1} liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ $\forall n$ và $S(x)$ hội tụ đều trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \int S(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int n^2x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \forall |x| < \dfrac{1}{2}$.

Xét chuỗi lũy thừa $H(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \forall |x| < \dfrac{1}{2}$ có bán kình hội tụ $R = 1$

Dễ thấy nx^{n-1} liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ $\forall n$ và $H(x)$ hội tụ đều trên $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \int H(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}, \forall |x| < \frac{1}{2}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$H(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$\Rightarrow \int S(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall |x| < \frac{1}{2}$. Lấy đạo hàm hai vế này theo x, ta có:

$$S(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Thay $x = \frac{1}{2021} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ta được:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022n^2}{2021^{n-1}} = 2022\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2021}\right)^{n-1} = 2022 \cdot S\left(\frac{1}{2021}\right) = 2022.\frac{1+\frac{1}{2021}}{(1-\frac{1}{2021})^3} = \frac{2022^2.2021^2}{2020^3}$$

Ví dụ 1.21 Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \arctan x$

[Hướng dẫn giải]

Ta có

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Thay x bằng $-x$ ta được

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Do đó

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Nên

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\right) dx = C + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1}$$

Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Kết luận

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1}$$

1.3.3 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

1.3.3.1 Chuỗi Taylor - Chuỗi Maclaurin

Định lý 1.21 Nếu hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa tại điểm $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R \quad (1.1.1)$$

thì các hệ số của chuỗi lũy thừa được xác định bởi công thức: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Ví dụ 1.22 Tìm chuỗi Taylor của hàm e^x ở lân cận $x = 1$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, ..., f^{(n)}x = e^x$
Do đó: $f(1) = e, f'(1) = e, f''(1) = e, ..., f^{(n)}(1) = e$.
Vậy chuỗi Taylor của hàm e^x ở lân cận $x = 1$là:

$$e^x = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$$

1.3.3.2 Điều kiện khai triển được thành chuỗi Taylor

Định lý 1.22 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm vô hạn cấp trong lân cận $\xi(x_0)$ của x_0, khi đó hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận đó khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Định lý 1.23 Nếu trong lân cận $\xi(x_0)$ của nghiệm hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn cấp và tồn tại $M > 0$ sao cho $\left|f^{(n)}(x)\right| < M, \forall x \in \xi(x_0), n \in \mathbb{N}$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong $\xi(x_0)$

1.3.4 Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp

- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + ...$ với $x \in \mathbf{R}$
- $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ với $x \in \mathbf{R}$
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ với $x \in \mathbf{R}$
- $\ln|1+x| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$ với $x \in (-1;1)$
- $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$với $x \in (-1;1)$
- $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha+1-k)\right) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...$với $x \in (-1;1)$

Với $\alpha = -1$, ta có $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$với $x \in (-1;1)$

- $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n+1)}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$với $x \in [-1;1]$

Ví dụ 1.23 Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi Maclaurin

[Hướng dẫn giải]

Ta viết: $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} + \frac{1}{x+1}$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^n \text{ với } x \in (-1;1)$$

1.4 Chuỗi Fourier

1.4.1 Chuỗi lượng giác:

Định nghĩa 1.9 Chuỗi lượng giác có dạng

$$S(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

Chuỗi lượng giác hội tụ khi:

$$\begin{cases} |a_n \cos nx| \leqslant a_n \\ |b_n \sin nx| \leqslant b_n \end{cases} \quad \text{nếu } \sum |a_n|, \sum |b_n| \text{ hội tụ}$$

$\Rightarrow$ Chuỗi lượng giác (1) hội tụ đều trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hội tụ

Công thức 1.1 $\forall m,n \in \mathbb{N}; m,n \geqslant 1$ ta có:

+) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$

+) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$

+) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx = 0$

+) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 \text{ khi } n \neq m \\ \pi \text{ khi } n = m \end{cases}$

+) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 \text{ khi } n \neq m \\ \pi \text{ khi } n = m \end{cases}$

1.4.2 Khai triển hàm chu kì 2π thành chuỗi Fourier

Định nghĩa 1.10 Cho hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π và có biểu diễn:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ với } a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Ta có hệ số Fourier $\begin{cases} a_o = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$

Định lý 1.24 Định lý Dirichlet
Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi;\pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi;\pi]$ và:

$$S(x)=\begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \text{ là điểm liên tục của } f(x) \\ \dfrac{f_+(c)+f_-(c)}{2} \text{ nếu } c \text{ là điểm gián đoạn (loại 1) của } f(x) \end{cases}$$

R **Chú ý:**

+) Nếu f bị chặn, các điểm gián đoạn đều là điểm gián đoạn loại 1
+) f đơn điệu từng khúc trên $(-\pi;\pi)$ có thể chia $(-\pi;\pi)$ ra hữu hạn đoạn nhỏ, trên từng đoạn nhỏ f liên tục và đơn điệu

Ví dụ 1.24 Cho $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\leqslant x<0 \\ x, 0\leqslant x<\pi \end{cases}$ khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

[Hướng dẫn giải]

Ta có các hệ số Fourier của $f(x)$ là: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{a_0}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\frac{d\sin nx}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}.x\frac{\sin nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{\pi n}dx=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n}{\pi n^2}-\frac{1}{\pi n^2}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -x\frac{d\cos nx}{n}$$

$$=-\frac{1}{\pi}.x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx=-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{\sin nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Chuỗi Fourier của $f(x)$ là

$$S(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

Công thức 1.2 Khai triển Fourier các hàm số chẵn lẻ

+) Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n=0, \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

+) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $\begin{cases} a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{cases}$

1.4.3 Khai triển hàm tuần hoàn chu kì $2l$ thành chuỗi Fourier

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-l;l]$
Dùng phép biến đổi: $t = \frac{\pi}{l}x \to f(x) = f(\frac{l}{\pi}t)$
Đặt: $g(t) = f(\frac{l}{\pi}t) \to g(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π

Ta có hệ số Fourier $\begin{cases} a_o = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \end{cases}$

Ví dụ 1.25 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn $2l$ với $l = 1$ biết rằng $f(x) = 1 - x^2$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$

[Hướng dẫn giải]

Ta thấy: $f(x)$ là hàm chẵn $\to b_n = 0$
Ta có các hệ số Fourier của f(x) là:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$= (1-x^2)\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1} x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1} x\sin nxdx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\right)$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

Chuỗi Fourier của $f(x)$ là

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

1.4.4 Khai triển hàm trên đoạn bất kì thành chuỗi Fourier

Cho hàm $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a;b]$. Muốn khai triển thành chuỗi Fourier ta cần xác định một hàm $g(x)$ tuần hoàn trên R với chu kì T sao cho: $g(x) = f(x), \forall x \in [a;b], (T \geqslant b-a)$
Có nhiều cách xác định hàm g. Đặc biệt:

+) Nếu $g(x)$ là hàm lẻ $\to a_0 = a_n = 0$
+) Nếu $g(x)$ là hàm chẵn $\to b_n = 0$

Ví dụ 1.26 Khai triển $f(x) = x, 0 \leqslant x \leqslant 2$ thành chuỗi Fourier

[Hướng dẫn giải]

Chọn $g(x) = x, -2 \leqslant x \leqslant 2$ tuần hoàn với chu kì $T = 4$ và $g(x) = x$ nếu $0 \leqslant x \leqslant 2$
Ta có: $g(x)$ là hàm lẻ $\rightarrow a_0 = 0, a_n = 0$

$$b_n = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}.2\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \left(-x.\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{(\frac{n\pi}{2})^2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= -2.\frac{\cos n\pi}{\frac{n\pi}{2}} = 4.\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Vậy chuỗi Fourier của $f(x)$ là $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4.\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.\sin\frac{n\pi x}{2}$

2. Chương 2 - Phương trình vi phân

2.1 Phương trình vi phân cấp một

2.1.1 Định nghĩa và bài toán Cauchy

2.1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1 Phương trình vi phân cấp một là những phương trình có dạng

$$F(x,y,y') = 0 \quad (1)$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số cần tìm.

R **Các cách gọi nghiệm của bài toán**

a) **Nghiệm tổng quát** của (1) là họ hàm số $y = \varphi(x,C)$ trong đó C là hằng số tùy ý sao cho

- Với mỗi C thì $\varphi(x,C_1,C_2)$ là một nghiệm của bài toán (1)
- $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{D}$ thì tồn tại duy nhất hằng số C^* sao cho $y = \varphi(x,C^*)$ là nghiệm của (1)

b) **Tích phân tổng quát** là nghiệm của (1) được viết dưới dạng hàm ẩn $g(x,y,C) = 0$.

c) **Nghiệm riêng** là một nghiệm cụ thể bất kỳ nào đó của phương trình (1).

d) **Nghiệm kì dị** là nghiệm của (1) nhưng không nằm trong họ nghiệm tổng quát.

2.1.1.2 Bài toán Cauchy

Định lý 2.1 **Bài toán Cauchy với giá trị ban đầu**

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Người ta đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm của bài toán trên nếu $f'_y(x,y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ đang xét.

Trong chương trình Giải tích 3, chúng ta sẽ xét các loại phương trình sau

2.1.2 Phương trình khuyết

R **[Cách giải]**
Đặt $y' = t$, biểu diễn x, y theo t.

2.1.2.1 Phương trình khuyết y

Gồm những phương trình có dạng $F(x,y')=0$

- Nếu ta giải được $y'=f(x)$ thì $y=\int f(x)dx$
- Nếu ta giải được $x=f(y')$ thì ta thực hiện đặt $y'=t$. Khi đó $\begin{cases} x=f(t) \\ y=\int tf'(t)dt \end{cases}$
- Nếu giải được $\begin{cases} x=f(t) \\ y'=g(t) \end{cases}$ thì $\begin{cases} x=f(t) \\ y=\int g(t)f'(t)dt \end{cases}$

Ví dụ 2.1 Giải phương trình $x=y'^2+y'$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $y'=t$, ta nhận được: $x=t^2+t$, nên $dx=(2t+1)dt$
Mà: $dy=y'dx=t(2t+1)dt=(2t^2+t)dt$
$\rightarrow \int dy=\int(2t^2+t)dt \rightarrow y=\dfrac{2t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}+C$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng tham số

$$x=t^2+t, y=\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+C$$

2.1.2.2 Phương trình khuyết x

Gồm những phương trình có dạng $F(y,y')=0$

- Nếu ta giải được $y'=f(y)$ thì $x=\int\dfrac{dy}{f(y)}$
- Nếu ta giải được $y=f(y')$ thì ta thực hiện đặt $y'=t$. Khi đó $\begin{cases} y=f(t) \\ x=\int\dfrac{f'(t)}{t}dt \end{cases}$
- Nếu giải được $\begin{cases} y=f(t) \\ y'=g(t) \end{cases}$ thì $x=\int\dfrac{f'(t)}{g(t)}dt$

Ví dụ 2.2 Giải phương trình $y'\cos 2y-\sin y=0 \quad (1)$

[Hướng dẫn giải]

Vì $y'=\dfrac{dy}{dx}$, nên khi ấy, phương trình (1) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx}\cos 2y-\sin y=0 \rightarrow dy\cos 2y=\sin y\, dx.$$

Vậy xảy ra 2 trường hợp:
Nếu $\sin y\neq 0$, (2) $\rightarrow \dfrac{\cos 2y}{\sin y}\, dy=dx$

$$\rightarrow \frac{1-2\sin^2 y}{\sin y}\, dy=dx$$
$$\rightarrow \frac{1}{\sin y}-2\sin y\, dy=dx$$
$$\rightarrow \int\frac{1}{\sin y}-2\sin y\, dy=\int dx$$
$$\rightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|+2\cos y+C=x$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Nếu $\sin y = 0 \leftrightarrow y = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), đây là nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

Ví dụ 2.3 Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 1$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $y = \sin t, y' = \cos t$.
Vì $y' = \dfrac{dy}{dx}$ nên ta có: $\cos t = \dfrac{d(\sin t)}{dx} = \dfrac{\cos t dt}{dx}$
$\rightarrow \cos t\ dt = \cos t\ dx$
Vậy xảy ra 2 trường hợp:
Nếu $\cos t \neq 0$, thì có $dx = dt \rightarrow \int dx = \int dt \rightarrow t = x + C$, và do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \sin(x + C)$
Nếu $\cos t = 0 \leftrightarrow t = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z}) \leftrightarrow y' = 0$ và $y = \pm 1$, đây là hai nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

2.1.3 Phương trình biến số phân ly

Gồm phương trình có dạng $f(y)dy = g(x)dx$ hay $y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$.

[Cách giải]
Tích phân hai vế của phương trình, khi đó

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \quad \text{hay} \quad F(y) = G(x) + C$$

Ví dụ 2.4 Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{y}$ (1)

[Hướng dẫn giải]

$(1) \rightarrow dx \neq 0 \rightarrow$ không nhận nghiệm $x \neq C$.
Từ (1), ta có : $ydy = (x^2+1)dx$

Tích phân 2 vế của phương trình, ta được: $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + x + C$, C là hằng số tùy ý
Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.5 Giải phương trình $y' = \cos\,(x - y)$ (2)

[Hướng dẫn giải]

Đặt: $u = x - y \rightarrow u' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - u'$, khi đó, phương trình (2) trở thành:

$$1 - u' = \cos u$$
$$\rightarrow 1 - \cos u = u'$$
$$\rightarrow 1 - \cos u = \frac{du}{dx}$$
$$\rightarrow (1 - \cos u)dx = du$$

Vậy xảy ra 2 trường hợp:
+) Nếu $\cos u \neq 1$, thì có $dx = \dfrac{du}{1 - \cos u}$
$\rightarrow \displaystyle\int dx = \int \frac{du}{1 - \cos u}$
Đặt $t = \tan\dfrac{u}{2} \rightarrow dt = \dfrac{1}{2}(1+t^2)du$
$\rightarrow \displaystyle\int \frac{2dt}{(1+t^2)(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int dx$

$\rightarrow \int \frac{dt}{t^2} = \int dx$

$\rightarrow \frac{-1}{t} = x + C$

$\rightarrow \frac{-1}{\tan \frac{u}{2}} = x + C$

$\rightarrow u = 2\arctan \left| \frac{-1}{x+C} \right|$

$\rightarrow x - y - 2\arctan \left| \frac{-1}{x+C} \right| = 0$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

+) Nếu $\cos u = 1 \leftrightarrow u = 2k\pi \leftrightarrow y = x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Đây là nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

2.1.4 Phương trình dạng đẳng cấp - đưa được về dạng đẳng cấp

2.1.4.1 Phương trình dạng đẳng cấp

Gồm những phương trình có dạng $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

R **[Cách giải]**

Thực hiện đặt $u = \frac{y}{x}$, khi đó ta đưa được phương trình về dạng biến số phân ly

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{F(u) - u}$$

Ví dụ 2.6 Giải phương trình $(x-y)dx + (x+y)dy = 0 \quad (1)$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $x = C$ không là nghiệm của phương trình (1)

Với $x \neq C$, chia cả 2 vế của phương trình (1) cho xdx ta có:

$$1 - \frac{y}{x} + (1 + \frac{y}{x})y' = 0 \quad (2)$$

Đặt $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = ux \rightarrow y' = u'x + u$, khi ấy phương trình (2) trở thành:

$$1 - u + (1+u)(u'x + u) = 0$$

$$\rightarrow (1+u)u'x = -u^2 - 1$$

$$\rightarrow (1+u)\frac{xdu}{dx} = -u^2 - 1$$

Do $x \neq 0$, $u^2 + 1 \neq 0$ nên: $(2) \rightarrow -\frac{(1+u)du}{u^2+1} = \frac{dx}{x}$

$\rightarrow \int -\frac{(1+u)du}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan|u| = \ln|x| + C$

$\rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \arctan\left|\frac{y}{x}\right| + \ln|x| + C = 0$

Đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.7 Giải phương trình $x^3(y' - x) = y^2 \quad (1)$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1)

$(1) \rightarrow x^3y' = y^2 + x^4 \rightarrow \frac{y'}{x} = \frac{y^2}{x^4} + 1$

Đặt $\frac{y}{x^2} = u \rightarrow y = ux^2 \rightarrow y' = 2xu + u'x^2$, khi ấy phương trình (1) trở thành:

$$\frac{2xu+u'x^2}{x}=u^2+1$$

$\rightarrow 2u+u'x=u^2+1 \rightarrow \dfrac{du}{dx}x=(u-1)^2 \rightarrow du=(u-1)^2\dfrac{dx}{x} \quad (2)$
Vậy xảy ra 2 trường hợp:
Nếu $u \neq 1$, (2) trở thành: $\dfrac{du}{(u-1)^2}=\dfrac{dx}{x} \rightarrow \displaystyle\int \dfrac{du}{(u-1)^2}=\int \dfrac{dx}{x} \rightarrow \dfrac{-1}{u-1}=\ln|x|+C$

$\rightarrow \dfrac{-1}{\dfrac{y}{x^2}-1}=\ln|x|+C \rightarrow \dfrac{x^2}{y-x^2}+\ln|x|+C=0$

Đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.
Nếu $u=1 \rightarrow y=x^2$, đây là nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

2.1.4.2 Phương trình đưa được về dạng đẳng cấp

Gồm những phương trình có dạng

$$y'=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Nếu $c_1=c_2=0$ thì

$$y'=F\left(\frac{a_1\frac{x}{y}+b_1}{a_2\frac{x}{y}+b_2}\right)$$

là phương trình đẳng cấp. Ngược lại, khi có một trong hai số c_1, c_2 khác 0, ta xét hai trường hợp

- Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ thì ta có thể chọn α và β thỏa mãn $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{cases}$. Khi đó với phép đổi biến $\begin{cases} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{cases}$, ta thu được phương trình mới có dạng

$$\frac{dv}{du}=F\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=F\left(\frac{a_1\frac{u}{v}+b_1}{a_2\frac{u}{v}+b_2}\right)$$

- Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ thì $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda$. Khi đó nếu ta đặt $u=a_1x+b_1y$ thì phương trình có dạng

$$\frac{du}{dx}=F\left(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}\right)=\varphi(u)$$

Đây là phương trình biến số phân ly

Ví dụ 2.8 Giải phương trình: $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2 \quad (1)$

[Hướng dẫn giải]

Đặt: $\begin{cases} u=y+2 \\ v=x-3 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} du=dy \\ dv=dx \end{cases} \rightarrow u'_v=y'_x$, phương trình (1) trở thành:

$$u'=2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2 \rightarrow u'=2\left(\frac{\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1}\right)^2 \quad (2)$$

Đặt $t=\dfrac{u}{v} \rightarrow u=tv \rightarrow u'=t'v+t.$

Từ (2), ta có: $t'v+t=2\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \rightarrow vt'=2\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2-t \rightarrow v\dfrac{dt}{dv}=\dfrac{-(t^2+1)t}{(t+1)^2}$

$\rightarrow dt = \dfrac{-(t^2+1)t}{(t+1)^2}\dfrac{dv}{v}$ (3)

Đến đây, ta xét 2 trường hợp:

Nếu $t \neq 0$, phương trình (3) trở thành: $\dfrac{-(t+1)^2 dt}{(t^2+1)t} = \dfrac{dv}{v} \rightarrow \displaystyle\int \dfrac{-2}{t^2+1} - \dfrac{1}{t}\, dt = \int \dfrac{dv}{v}$

$\rightarrow -2\arctan|t| - \ln|t| = \ln|v| + C$

$\rightarrow 2\arctan\left|\dfrac{y+2}{x-3}\right| + \ln\left|\dfrac{y+2}{x-3}\right| + \ln|x-3| + C = 0$

Đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.
Nếu $t = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow y = -2$, đây là nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

2.1.5 Phương trình vi phân tuyến tính

Gồm những phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Công thức tổng quát để giải phương trình trên là

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Hơn nữa, bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(u)du}dt + y_0\right)$$

Ví dụ 2.9 Giải phương trình $y' + 2xy = 3e^{3x-x^2}$

[Hướng dẫn giải]

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = 2x$, $q(x) = 3.e^{3x-x^2}$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[C + \int 3e^{3x-x^2}.e^{\int 2xdx}dx\right]$$

$$= e^{-x^2}.\left(C + \int 3e^{3x-x^2}.e^{x^2}dx\right)$$

$$= e^{-x^2}.\left(C + \int 3e^{3x}dx\right)$$

$$= e^{-x^2}.(C + e^{3x})$$

Vậy $y = e^{-x^2}.(C + e^{3x})$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

2.1.6 Phương trình Bernoulli

Gồm những phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

với $\alpha \neq 0, 1$.

R **[Cách giải]** Để giải phương trình trên ta đặt $u = y^{1-\alpha}$. Khi đó ta đưa được về phương trình vi phân tuyến tính

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$

Ví dụ 2.10 Giải phương trình: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2} \quad (1)$

[Hướng dẫn giải]

Điều kiện: $x \neq 0$.
Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho y^3 ta được: $y'y^{-3} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}$
Đặt $z = y^{-2}$, ta được $z' = -2y^{-3}y'$
Do đó

$$\frac{-1}{2}z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \rightarrow z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 theo biến z, có $p(x) = \frac{-4}{x}, q(x) = \frac{-2}{x^2}$

$$\rightarrow z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int \frac{-4}{x}dx}\left(\int \frac{-2}{x^2}e^{\int \frac{-4}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{4\ln|x|dx}\left(\int \frac{-2}{x^2}e^{-4\ln|x|dx}dx + C\right)$$

$$= x^4\left(\int \frac{-2}{x^6} + C\right) = x^4\left(\frac{2}{5}x^{-5} + C\right)$$

$$\rightarrow y^{-2} = x^4\left(\frac{2}{5}x^{-5} + C\right) \rightarrow x^2y = \pm\left(\frac{2}{5}x^{-5} + C\right)^{\frac{-1}{2}}$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.
Nếu $y = 0$, thử lại vào phương trình, ta thấy thỏa mãn
Đây là nghiệm kì dị không nằm trong lớp nghiệm tổng quát.

2.1.7 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình sau

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.1.6}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho

$$d(u(x,y)) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Khi đó nghiệm của phương trình (5.1) là $u(x,y) = C$

Công thức 2.1 Tiêu chuẩn kiểm tra PTVP toàn phần
Phương trình (2.1.6) là PTVP toàn phần nếu và chỉ nếu P,Q cùng các đạo hàm riêng của nó liên tục và $P'_y = Q'_x$. Khi đó hàm số $u(x,y)$ được tính bởi

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (5.1) là

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C \quad \text{hoặc} \quad \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

Ví dụ 2.11 Giải phương trình $(2y+x^2+1)y'+2xy-9x^2=0.$ (1)

[Hướng dẫn giải]

Từ (1), ta có: $(2y+x^2+1)dy+(2xy-9x^2)dx=0$

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y)=2xy-9x^2 \\ Q(x,y)=2y+x^2+1 \end{cases} \rightarrow P'_y = Q'_x = 2x \rightarrow$ Đây là phương trình vi phân toàn phần.

$\rightarrow \exists u(x,y) : du = Pdx+Qdy \rightarrow \begin{cases} u'_x = 2xy-9x^2 \\ u'_y = 2y+x^2+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = \int 2xy-9x^2dx \\ u'_y = 2y+x^2+1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} u = x^2y-3x^3+C(y) \\ u'_y = 2y+x^2+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x^2y-3x^3+C(y) \\ x^2+C'(y) = 2y+x^2+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x^2y-3x^3+C(y) \\ C'(y) = 2y+1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} u = x^2y-3x^3+C(y) \\ C(y) = \int 2y+1dy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x^2y-3x^3+C(y) \\ C(y) = y^2+y+C \end{cases}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x^2y-3x^3+y^2+y=C$$

Công thức 2.2 Phương trình đưa được về dạng PTVP toàn phần

Đối với dạng phương trình (5.1) nhưng $P'_y \neq Q'_x$, nhưng thỏa mãn một trong hai điều kiện

$$\varphi(x) = \frac{Q'_x - P'_y}{Q} \ (5.2) \quad \text{hoặc} \quad \psi(y) = \frac{Q'_x - P'_y}{P} \ (5.3)$$

- Nếu thỏa mãn (5.2) thì ta nhân hai vế của (5.1) với thừa số tích phân $\mu(x) = e^{\left(-\int \varphi(x)dx\right)}$
- Nếu thỏa mãn (5.3) thì ta nhân hai vế của (5.1) với thừa số tích phân $\mu(y) = e^{\left(\int \psi(y)dy\right)}$

Ví dụ 2.12 Giải phương trình $\left(y^2-x^2\right)dy+2xydx=0,\ y(1)=1$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y)=2xy \\ Q(x,y)=y^2-x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P'_y = 2x \\ Q'_x = -2x \end{cases} \rightarrow \dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \dfrac{-2x-2x}{2xy} = \dfrac{-2}{y}$

Do đó

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$$

+) Vì theo giả thiết: $y(1)=1 \rightarrow y=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho, tức $y \neq 0$

+) Nhân cả 2 vế của phương trình đã cho với $\frac{1}{y^2}$ ta được PTVP toàn phần:

$$\frac{2x}{y}dx+\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$$
$$\leftrightarrow d\left(y+\frac{x^2}{y}\right)=0$$
$$\leftrightarrow y+\frac{x^2}{y}=C \text{ (}C\text{ là hằng số tùy ý)}$$

+) $y(1)=1\rightarrow C=2\rightarrow y+\frac{x^2}{y}=2$ là nghiệm cần tìm

2.2 Phương trình vi phân cấp 2

2.2.1 Đại cương về phương trình vi phân cấp 2

Xét bài toán giá trị hàm ban đầu Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2.1.1 Định lý về sự tồn tại nghiệm duy nhất

Định lý 2.2

Giả thiết rằng $\begin{cases} f(x,y,y'), \dfrac{\partial f}{\partial y} f(x,y,y'), \dfrac{\partial f}{\partial y'} f(x,y,y') \text{ liên tục trên } D \subset \mathbb{R}^3 \\ (x_0,y_0,y'_0) \in D \end{cases}$.

Khi đó bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất thuộc D.

2.2.1.2 Các cách gọi nghiệm của bài toán

Nghiệm tổng quát

a) Hàm $y = \varphi(x,C_1,C_2)$ được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của bài toán

$$y'' = f(x,y,y') \tag{2.2.1.2}$$

Nếu

- Với mỗi C_1,C_2 thì $\varphi(x,C_1,C_2)$ là một nghiệm của bài toán (2.2.1.2)
- $\forall (x_0,y_0,y'_0) \in \mathbb{D}$ thì tồn tại C_1^*,C_2^* sao cho $y = \varphi(x,C_1^*,C_2^*)$ là nghiệm của (2.2.1.2)

b) Nghiệm tổng quát đôi khi được viết dưới dạng $\varphi(x,y,C_1,C_2) = 0$, ta gọi là dạng ẩn của nghiệm. Nghiệm tổng quát viết dưới dạng này được gọi là ***tích phân tổng quát*** của nghiệm.

c) Đôi khi ta có thể tham số hóa nghiệm dưới dạng

$$\begin{cases} x = x(t,C_1,C_2) \\ y = y(t,C_1,C_2) \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát viết dưới dạng này được gọi là ***dạng tham số*** của nghiệm.

Nghiệm riêng là một nghiệm cụ thể bất kỳ nào đó của phương trình (2.2.1.2).

Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.

2.2.2 Các phương trình khuyết

2.2.2.1 Phương trình khuyết $y: F(x,y',y'') = 0$

R **[Cách giải]**

- Đặt $y' = u$ để đưa về PTVP cấp 1 $F(x,u,u') = 0$
- Giả sử PTVP trên có nghiệm tổng quát $u = \varphi(x,)$
- Giải PTVP cấp 1 dạng $y' = \varphi(x,c) \to y$

Ví dụ 2.13 Giải phương trình vi phân $y'' = y' + x$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $y' = u$, khi đó $y'' = u'$. Thay vào phương trình ban đầu ta được

$$u' - u = x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = -1$, $q(x) = x$:

$$\to u = e^{(\int dx)} \left(C_1 + \int x e^{(-\int dx)} dx \right) = -x - 1 - C_1 e^x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int (-x-1-C_1e^x)dx = \int udx = -\frac{x^2}{2} - x - C_1e^x + C_2$$

Ví dụ 2.14 Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu: $\begin{cases} xy'' + xy'^2 = y' (1) \\ y(2) = 2, y'(2) = 1 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $u = y' \to \begin{cases} u(2) = 1 \\ y" = u' \end{cases}$
Thay vào phương trình (1) ta được:

$$xu' + xu^2 = u$$

Vì $u(2) = 1 \to u \neq 0$
Chia cả 2 vế của phương trình cho u' ta được:

$$\frac{xu'}{u^2} + x - \frac{1}{u} = 0 \ (2)$$

Đặt $t = \dfrac{-1}{u} \to t' = \dfrac{u'}{u^2}$. Thay vào phương trình (2) ta được:

$$xt' + x + t = 0 \to t' + \frac{t}{x} = -1$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = -1$:
$\to t = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c_1 + \int -e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) = e^{-\ln|x|}\left(c_1 + \int -e^{\ln|x|}dx\right)$
$= \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-x^2}{2} + c_1\right) = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{c_1}{x}$
$\to \dfrac{-1}{u} = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{c_1}{x} \to u = \dfrac{-1}{\dfrac{-x}{2} + \dfrac{c_1}{x}}$
Vì $u(2) = 1 \to \dfrac{-1}{\dfrac{-2}{2} + \dfrac{c_1}{2}} = 1 \to c_1 = 0 \to u = \dfrac{2}{x} \to y' = \dfrac{2}{x} \to y = 2\ln x + c_2$
Vì $y(2) = 2 \to 2\ln 2 + c_2 = 2 \to c_2 = 2 - 2\ln 2 \to y = 2\ln x + 2 - 2\ln 2$
Vậy phương trình có nghiệm

$$y = 2\ln x + 2 - 2\ln 2$$

2.2.2.2 Phương trình khuyết $x : F(y, y', y") = 0$

[Cách giải]

- Đặt $u = y' \to u = \dfrac{dy}{dx}$ ta có $y" = \dfrac{du}{dx} = u.\dfrac{du}{dy}$
  $\to$ PT đưa về PTVP cấp 1 $F(y, u, u\dfrac{du}{dy}) = 0$ ở đây u là hàm của y
- Giả sử giải PT này được NTQ $u = \varphi(y, c)$
- Giải PTVP cấp 1 $y' = \varphi(y, c) \to$ ta được nghiệm cần tìm

Ví dụ 2.15 Giải phương trình vi phân: $2yy" = y'^2 + 1$ (1)

[Hướng dẫn giải]

Đặt $u = y' \rightarrow y" = u\dfrac{du}{dy}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$2yu\frac{du}{dy} = u^2 + 1 \ (2)$$

Xét $y = 0 \rightarrow y' = 0$ không thỏa mãn phương trình (1)
Xét $u = 0$ không thỏa mãn phương trình (1) $\rightarrow u \neq 0$
Khi đó phương trình (2) $\leftrightarrow \dfrac{2udu}{u^2+1} = \dfrac{dy}{y} \leftrightarrow \ln(u^2+1) + \ln|c_1| = \ln|y|$
$\leftrightarrow y = c_1(1+u^2), c_1 \neq 0$
Do $u = y' \rightarrow dx = \dfrac{dy}{u} = 2c_1 du \rightarrow u = \dfrac{x}{2c_1} + c_2$
Vậy phương trình có NTQ là

$$y = c_1\left(1 + \left(\frac{x}{2c_1} + c_2\right)^2\right) = c_1 + \frac{(x+2c_1c_2)^2}{4c_1}, c_1 \neq 0$$

Ví dụ 2.16 Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{cases} yy" - y'^2 = y^4 \ (1) \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

[Hướng dẫn giải]

Dễ thấy $y \neq 0$ do $y(0) = 1$
Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho y^2 ta được

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = y^2 \leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)' = y^2 \ (2)$$

Đặt $\dfrac{y'}{y} = t \rightarrow t' = \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dt}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dy}.ty$
Thay vào (2) ta được

$$\frac{dt}{dy}ty = y^2 \rightarrow tdt = ydy \rightarrow \frac{t^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1$$

Có $y'(0) = 1, y(0) = 1 \rightarrow t(0) = 1 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow t^2 = y^2 \rightarrow t = y \rightarrow \dfrac{dy}{y^2} = dx \rightarrow \dfrac{-1}{y} = x + c_2$

Có $y(0) = 1 \rightarrow c_2 = -1 \rightarrow$ nghiệm riêng của phương trình: $y = \dfrac{-1}{x-1}$

2.2.2.3 Phương trình dạng $F(x, y'') = 0$

R **[Cách giải]**
Đặt $u = y' \rightarrow$ PT đưa về dạng PTVP cấp một $F(x, u') = 0 \rightarrow u = \varphi(x, c)$
Giải phương trình vi phân cấp một $y' = \varphi(x, c)$

Ví dụ 2.17 Giải phương trình vi phân: $x = (y'')^2 + y'' + 1$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $u = y' \rightarrow x = (u')^2 + u' + 1$
Đặt $u' = t \rightarrow x = t^2 + t + 1$ và $du = tdx = t(2t+1)dt \rightarrow u = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{t^2}{2} + c_1$
Do $y' = u \rightarrow y = \int udx = \displaystyle\int \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + c_1\right)(2t+1)dt = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + c_1t^2 + c_1t + c_2$
Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + c_1t^2 + c_1t + c_2 \end{cases}$$

2.2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

2.2.3.1 Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y" + p(x)y' + q(x)y = 0 \ (2)$$

được gọi là ***phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất.***

Định lý 2.3 Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của (2) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2) với C_1, C_2 là các hằng số.

Định nghĩa 2.2

- Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ $(y_2(x) \neq 0)$ được gọi là ***độc lập tuyến tính*** trên $[a;b]$ nếu $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C \ \forall x \in [a;b]$
- ***Định thức Wronsky*** của hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Định lý 2.4 Nếu y_1, y_2 ***phụ thuộc tuyến tính*** thì $W(y_1, y_2) = 0$

R Nếu tồn tại $x_0 \in [a,b]$ mà $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0$, thì hai hàm đó là độc lập tuyến tính.

Định lý 2.5 Nếu y_1, y_2 là 2 nghiệm **ĐLTT** của (2) thì:

1. $W(y_1, y_2) \neq 0 \ \forall x \in [a;b]$
2. Nghiệm tổng quát của (2) là $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với mọi hằng số C_1, C_2

R Như vậy, muốn tìm nghiệm tổng quát của (2), ta cần xác định được 2 nghiệm ***độc lập tuyến tính*** của nó.
Cách tìm 2 nghiệm ĐLTT

- **Bước 1:** Nhẩm 1 nghiệm $y_1 \neq 0$ thỏa mãn phương trình (2). Thông thường ta tìm nghiệm y_1 có dạng $x^\alpha, e^{\alpha x}$
- **Bước 2:** Xác định nghiệm y_2 theo công thức:

$$y_2 = y_1 . \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx \ \textbf{(Công thức Liouville)}$$

Nói chung không có phương pháp tổng quát để tìm nghiệm riêng của phương trình (2). Chỉ trong một số trường hợp đặc biệt ta mới có thể giải các bài toán này.

Ví dụ 2.18 Giải phương trình vi phân: $x^2y" + xy' - y = 0$

[Hướng dẫn giải]

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được: $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$
Ta có thể thấy $y_1 = x$ là 1 nghiệm của phương trình trên
Dựa vào công thức Liouville ta tìm được nghiệm y_2 độc lập tuyến tính với y_1:

$$y_2 = x.\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \frac{-1}{2x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x - \frac{C_2}{2x}$

Ví dụ 2.19 Giải phương trình vi phân: $(2x+1)y" + 4xy' - 4y = 0$

[Hướng dẫn giải]

Chia hai vế của phương trình cho $2x+1 \neq 0$ ta được: $y" + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4y}{2x+1} = 0$

Ta thấy $y_1 = x$ là nghiệm của phương trình.

Theo công thức Liouville tìm được nghiệm y_2 độc lập tuyến tính với y_1:

$$y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{4x}{2x+1}dx} dx = x.\int \frac{1}{x^2} e^{\ln(2x+1)-2x} dx = x\int \frac{1}{x^2}\frac{2x+1}{e^{2x}} dx = x.\frac{-e^{-2x}}{x} = -e^{-2x}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x - C_2 e^{-2x}$$

2.2.3.2 Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất có dạng:

$$y" + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

Nếu $f(x) = 0$, (2) thành phương trình VPTT cấp 2 thuần nhất

Định lý 2.6 Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (2) có dạng

$$y = \overline{y} + Y$$

trong đó $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và Y là 1 nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2)

Định lý 2.7 **Nguyên lý chồng chất nghiệm**
Nếu Y_1 là một nghiệm riêng của phương trình $y" + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$
Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình $y" + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$
thì $Y = Y_1 + Y_2$ là một nghiệm riêng của $y" + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

Ví dụ 2.20 Giải phương trình: $x^2y" + xy' - y = 1$

[Hướng dẫn giải]

Như ở phần ví dụ 6, $x^2y" + xy' - y = 0$ có hệ nghiệm cơ sở là $y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}$

Một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $y = -1$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là $y = C_1x + \frac{C_2}{x} - 1$

Ví dụ 2.21 Giải phương trình: $(2x+1)y" + 4xy' - 4y = 2x^2 + 2x + 1$

[Hướng dẫn giải]

Như ở ví dụ 7, $(2x+1)y" + 4xy' - 4y = 0$ có hệ nghiệm cơ sở là $y_1 = x; y_2 = e^{-2x}$

Ta có thể nhẩm được 1 nghiệm riêng của phương trình là $y = \frac{x^2}{2}$

Do đó, NTQ của phương trình là: $y = C_1x + C_2e^{-2x} + \frac{x^2}{2}$

R Trong thực tế và trong các bài thi, thông thường ít dạng giải PTVPTT không thuần nhất bằng cách mò nghiệm riêng của nó (rất khó, thậm chí không tìm được). Do đó bài tập phần này ta chuyển xuống cùng bài tập phần giải bằng phương pháp biến thiên hằng số Langrange ở phần sau

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Việc giải PTVPTT cấp 2 không thuần nhất không phải lúc nào cũng giải được theo phương pháp giải PTVPTT thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Phương pháp Lagrange giúp ta giải phương trình không thuần nhất thông qua NTQ của phương trình thuần nhất.

- **Bước 1:** Xác định nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng
$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
- **Bước 2:** Cho C_1, C_2 biến thiên, $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $Y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

  Lúc này giải hệ: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

  Với y_1, y_2 đã biết dựa vào phương trình thuần nhất ta tìm được $C_1'(x), C_2'(x)$ và từ đó tìm được $C_1(x), C_2(x)$.

Ví dụ 2.22 Giải phương trình: $xy" - y' = x^2$

[Hướng dẫn giải]

Xét PTVP thuần nhất $xy" - y' = 0$ có thể viết dưới dạng $\dfrac{y"}{y'} = \dfrac{1}{x}$

Do đó $\overline{y}' = C_1 x, \overline{y} = \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$

Hệ nghiệm cơ bản của phương trình là $y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2$

Theo pp Lagrange, ta giải HPT: $\begin{cases} 1.C_1'(x) + x^2.C_2'(x) = 0 \\ 0.C_1'(x) + 2x.C_2'(x) = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{-x^3}{6} \\ C_2(x) = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Do đó $Y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \dfrac{x^3}{3}$ và nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + Y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{x^3}{3}$$

Ví dụ 2.23 Giải phương trình: $x^2 y" - xy' = 3x^3$

[Hướng dẫn giải]

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất

$$x^2 y" - xy' = 0 \rightarrow y" - \frac{y'}{x} = 0$$

Một nghiệm cơ bản ta có thể thấy ngay là $y_1(x) = 1$

Ta có

$$y_2(x) = 1.\int \frac{1}{1^2} e^{-\int \frac{-1}{x}dx} dx = \frac{x^2}{2}$$

Do đó ta tìm 1 nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $Y = C_1(x).1 + C_2(x).\dfrac{x^2}{2}$

Ta có: $\begin{cases} C_1'(x).0 + C_2'(x).x = 3x \\ C_1'(x).1 + C_2'(x).\dfrac{x^2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2(x) = 3x \\ C_1(x) = \dfrac{-x^3}{2} \end{cases} \rightarrow Y = x^3$

Vậy NTQ của phương trình không thuần nhất là

$$y = \overline{y} + Y = C_1 + C_2.\frac{x^2}{2} + x^3$$

2.2.3.3 Phương trình tuyến tính cấp 2 có hệ số là hằng số

Phương trình thuần nhất

Định nghĩa 2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng có dạng:

$$y'' + py' + qy = 0$$

trong đó p, q là các hằng số.

R Xét phương trình đặc trưng có dạng: $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$

- Nếu $\Delta > 0$, PTĐT có hai nghiệm thực phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2$ thì NTQ của phương trình là :

$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

- Nếu $\Delta = 0$, PTĐT có nghiệm kép $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ thì NTQ của phương trình là:

$$\bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{\alpha x}$$

- Nếu $\Delta < 0$, PTĐT có hai nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$ thì NTQ của phương trình là:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Ví dụ 2.24 Giải phương trình: $y" - 3y' + 2y = 0$

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$
Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.25 Giải phương trình: $y" + 4y' + 4y = 0$

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -2$
Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát:

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 x + C_2), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.26 Giải phương trình: $y" + y' + 3y = 0$

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0 \leftrightarrow \alpha_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$
Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát:

$$\bar{y} = e^{\frac{-x}{2}}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Phương trình không thuần nhất

Định nghĩa 2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất hệ số hằng có dạng:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

trong đó p, q là các hằng số.

R **[Cách giải]**
NTQ của PT không thuần nhất = NTQ của PT thuần nhất+1 nghiệm riêng PT không thuần nhất

$$y = \overline{y} + Y$$

Cách 1: Tìm Y bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.
Cách 2: Tìm Y, dựa vào dạng đặc biệt của $f(x)$
Dạng 1. Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ với $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.

- **TH1:** Nếu α không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$
- **TH2:** Nếu α là nghiệm đơn của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới sạng $Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$
- **TH3:** Nếu α là nghiệm kép của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$

Trong đó $Q_n(x)$ là 1 đa thức bậc n.

Ví dụ 2.27 Giải phương trình: $y" + 3y' - 4y = x$ (1)

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng $\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0$ (*) $\leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -4$
Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-4x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ta thấy $f(x) = x$, $\alpha = 0$, không là nghiệm của phương trình (*), nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = Ax + B$$

Thay vào (1) ta có:

$$-4Ax + 3A - 4B = x, \forall x \leftrightarrow A = -\frac{1}{4}; B = -\frac{3}{16}$$
$$\to Y = \frac{-x}{4} + \frac{-3}{16}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1)là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2.28 Giải phương trình: $y'' + 4y' + 3y = \frac{2}{e^x}$

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng $\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$ (*) $\leftrightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -3$
Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ta thấy $f(x) = 2e^{-x}$, $\alpha = -1$, là nghiệm đơn của phương trình (*), nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = Cxe^{-x}$$
$$\to Y' = Ce^{-x}(1 - x)$$
$$\to Y'' = Ce^{-x}(x - 2)$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$Ce^{-x}(x-2) + 4Ce^{-x}(1-x) + 3Cxe^{-x} = 2e^{-x} \leftrightarrow 2Ce^{-x} = 2e^{-x},\ \forall x \leftrightarrow C = 1$$
$$\to Y = xe^{-x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1)là

$$y = \overline{y} + Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + xe^{-x}$$

Ví dụ 2.29 Giải phương trình: $y" - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

[Hướng dẫn giải]

Ta xét phương trình đặc trưng: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ (*) $\leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$
Phương trình vi phân thuần nhất có nghiệm tổng quát:

$$\overline{y} = C_1 e^x + xC_2 e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ta thấy $f(x) = (12x+4)e^x$, $\alpha = 1$, là nghiệm kép của phương trình (*), nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x^2 e^x (Ax+B)$$
$$\to Y' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx)$$
$$\to Y" = e^x(Ax^3 + Bx^2) + 2e^x(3Ax^2 + 2Bx) + e^x(6Ax + 2B)$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$6Ax + 2B = 12x + 4, \forall x \leftrightarrow A = 2; B = 2$$
$$\to Y = 2x^2 e^x (x+1)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x (x+1), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Dạng 2. Vế phải $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ với $P_m(x), P_n(x)$ là các đa thức cấp m, n tương ứng của x. Đặt $l = \max\{m, n\}$

- **TH1:** Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:
  $$Y = e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$$
- **TH2:** Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:
  $$Y = xe^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$$
  với $Q_l(x), R_l(x)$ là 2 đa thức bậc $l = \max\{m, n\}$

Ví dụ 2.30 Giải phương trình: $y" - 3y' + 2y = e^x \sin x$

[Hướng dẫn giải]

Xét phương trình đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Ta thấy $f(x) = e^x \sin x$, có $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$Y = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

$\to Y' = e^x[(A+B)\cos x + (-A+B)\sin x]$
$\to Y" = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$
Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$e^x[-(A+B)\cos x + (A-B)\sin x] = e^x \sin x, \forall x \leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$
$$\to Y = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$$

Ví dụ 2.31 Giải phương trình: $y" + y - 2\cos x \cos 2x = 0$

[Hướng dẫn giải]

$\Leftrightarrow y" + y = \cos x + \cos 3x \qquad (1)$
Xét phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \leftrightarrow k_1 = i, k_2 = -i$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Ta thấy $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos 3x$
Ta có: $\beta_1 = 1; \beta_2 = 3$. Do $\pm i\beta_1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\pm i\beta_2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x(A\cos(x) + B\sin(x)) + C\cos(3x) + D\sin(3x)$$

$\rightarrow Y' = x(B\cos(x) - A\sin(x)) + A\cos(x) + B\sin(x) - 3C\sin(3x) + 3D\cos(3x)$
$\rightarrow Y" = x(-A\cos(x) - B\sin(x)) - 9C\cos(3x) - 9D\sin(3x) + 2B\cos x - 2A\sin x$
Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$2B\cos x - 2A\sin x - 8C\cos 3x - 8\sin 3x = \cos x + \cos 3x, \forall x$$
$$\leftrightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-1}{8}, D = 0$$
$$\rightarrow Y = \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$

2.2.3.4 Phương trình Euler

Định nghĩa 2.5 Phương trình Euler là phương trình có dạng:

$$x^2y" + axy' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}(1)$$

R **[Cách giải]**

- Đặt $|x| = e^t \rightarrow t = \ln|x|$
- $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

Cần phải xét 2 trường hợp là $x > 0$ và $x < 0$

- Với $x > 0 \rightarrow y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \rightarrow y'_x = y'_t e^{-t}$
- $y"_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dt}(y'_x)\frac{dt}{dx} = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})\frac{1}{x} = (y''_t - y'_t)\frac{1}{x^2}$

  $\rightarrow x^2y''_x = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

Thay vào phương trình ban đầu ta có: $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi

Tương tự với $x < 0 \rightarrow (1) \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (1-a)\frac{dy}{dt} + by = 0$

Ví dụ 2.32 Giải phương trình: $x^2y" + 2xy' - 6y = 0, x > 0$ (1)

[Hướng dẫn giải]

- Đặt $|x| = e^t \rightarrow t = \ln|x|$
- Với $x > 0 \rightarrow t = \ln|x| \rightarrow y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, y" = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$$\rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}, x^2y" = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Thay vào phương trình ban đầu:

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0 \ (2)$$

Phương trình (2) có phương trình đặc trưng là:

$$r^2 + r - 6 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 2 \\ r = -3 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (2) là $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1e^{2\ln x} + C_2e^{-3\ln x} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^3}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x > 0$$

Ví dụ 2.33 Giải phương trình: $x^2y" + xy' + y = x, x > 0 \ (1)$

[Hướng dẫn giải]

Vì $x > 0 \rightarrow$ Đặt $x = e^t \rightarrow t = \ln x$
$\rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}, x^2y" = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$
$\rightarrow (1) \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = e^t$
$\leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t \ (2)$

Xét phương trình thuần nhất $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \ (3)$ có phương trình đặc trưng là: $k^2 + 1 = 0 \ (4) \rightarrow k = \pm i$
$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (3) là:

$$\overline{y} = e^{0t}(C_1\cos t + C_2\sin t) = C_1\cos t + C_2\sin t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ta có: $f(t) = e^t \rightarrow a = 1$ không là nghiệm của (4)
$\rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình (2) là: $Y = ae^t$
Ta có:

$$\begin{gathered} Y' = ae^t \\ Y" = ae^t \\ \rightarrow Y" + Y = 2ae^t = e^t \text{ (Theo (2))}, \forall t \\ \rightarrow 2a = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{2} \end{gathered}$$

Nghiệm riêng của phương trình (2) là $Y = \frac{e^t}{2}$.
Nghiệm tổng quát của (2) là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{e^t}{2}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là: $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + \frac{x}{2}, x > 0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2.2.4 Hệ phương trình vi phân

2.2.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.6 Hệ n phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1 có dạng: $\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ...y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ...y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ...y_n) \end{array}\right.$

Khi $n = 2$, hệ có dạng $\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{array}\right.$

Định lý 2.8 Điều kiện có nghiệm:

Nếu $y_i' = f_i(x, y_1, y_2, ...y_n)$ liên tục và $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, ...y_n)$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

R Ta nói $(y_1, y_2, ...y_n)$với $y_i = \phi_i(x, c_1, c_2, ...c_n)$ là nghiệm tổng quát của hệ.
Với $y_i = \phi_i(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ là nghiệm riêng của hệ.

2.2.4.2 Cách giải

Mọi phương trình vi phân cấp n có dạng:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

đều có thể đưa về hệ PTVP cấp 1 chính tắc.

Đặt $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', ..., y_{n-1} = y^{(n-2)}, y_n = y^{(n-1)}$, phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Đảo lại, một hệ PTVP cấp 1 chính tắc có thể đưa về một phương trình cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ. (Phương pháp khử)

2.2.4.3 Hệ PTVP tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số

Hệ PTVP cấp 2: $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$

- Phương pháp 1: Giải phương trình đặc trưng (tham khảo)
- Phương pháp 2: Phương trình toán tử (tham khảo)
- Phương pháp 3: Phương pháp khử (Dùng nhiều nhất)

Ví dụ về phương pháp khử:

Ví dụ 2.34 Giải hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} y' = y + 2z \ (1) \\ z' = 4y + 3z \ (2) \end{cases} \qquad (*)$$

[Hướng dẫn giải]

Từ (1) $\to y" = y' + 2z'$

Từ (*) $\begin{cases} z' = 4y + 3z \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases} \to \begin{cases} y" = y' + 2\left(4y + \dfrac{3}{2}(y' - y)\right) \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases} \to \begin{cases} y" - 4y' - 5y = 0 \ (3) \\ z = \dfrac{1}{2}(y' - y) \end{cases}$

(3) có phương trình đặc trưng: $r^2 - 4r - 5 = 0 \to \left[\begin{array}{l} r = -1 \\ r = 5 \end{array} \right.$

Phương trình (3) có nghiệm tổng quát là $y = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\to z = \dfrac{1}{2}(y' - y) = \dfrac{1}{2}(-C_1e^{-x} + 5C_2e^{5x} - C_1e^{-x} - C_2e^{5x}) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x}$

Ví dụ 2.35 Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \qquad (*)$$

[Hướng dẫn giải]

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x" = 2x' + y' \\ y' = 3x + 4y \\ y = x' - 2x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x" = 2x' + 3x + 4(x' - 2x) \\ y = x' - 2x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x" - 6x' + 5x = 0 \ (2) \\ y = x' - 2x \ (3) \end{cases}$

(2) có phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 5 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 5 \end{array} \right.$

(2) có nghiệm tổng quát: $x = C_1e^t + C_2e^{5t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(3) $\rightarrow y = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t} \end{cases}$$

3. Chương 3 - Phép biến đổi Laplace

3.1 Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

3.1.1 Phép biến đổi Laplace

3.1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.1 Phép biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ là hàm số $F(s)$ được định nghĩa:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t \quad (s, f(t) \in \mathbb{R})$$

Ví dụ 3.1 Tính phép biến đổi Laplace của một số hàm đơn giản

a) $\mathscr{L}\{1\}(s)$ b) $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s)$

[Hướng dẫn giải]

a) $\mathscr{L}\{1\}(s)$

- $\mathscr{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t = -\dfrac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \dfrac{1}{s}, s > 0$
- Không tồn tại $\mathscr{L}\{1\}(s)$ khi $s \leqslant 0$

b) $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s)$

- $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t = -\dfrac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \dfrac{1}{s-a}$ khi $s > a$
- Phân kì khi $s \leqslant a$

3.1.1.2 Tính chất tuyến tính

Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $\exists \mathscr{L}\{f(t)\}(s), \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$, thì với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta luôn có:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

Ví dụ 3.2 Tìm các biến đổi Laplace sau:
$a)\ \mathscr{L}\{\sin 6t - \sin 2t\}$ $b)\ \mathscr{L}\{\sinh kt\}$

[Hướng dẫn giải]

a) $\mathscr{L}\{\sin 6t - \sin 2t\} = \mathscr{L}\{\sin 6t\} - \mathscr{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{6}{36+s^2} - \dfrac{2}{4+s^2}$

b) $\mathscr{L}\{\sinh kt\} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{kt}\right\} - \dfrac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-kt}\right\} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-k} - \dfrac{1}{s+k}\right) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

3.1.1.3 Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

Định lý 3.1 — Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace. Hàm f được gọi là hàm bậc mũ khi $t \to \infty$ nếu tồn tại các hằng số không âm M, α, T sao cho

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{at} \quad (\forall t > T)$$

Nếu hàm f liên tục từng khúc và là bậc mũ khi $t \to \infty$ thì tồn tại

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) \quad (\forall s > \alpha)$$

Hệ quả. Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của **Định lý 1** thì $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$

3.1.1.4 Bảng các phép biến đổi Laplace

BẢNG BIẾN ĐỔI LAPLACE		
$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^a\ (a > -1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > 0$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{k^2+s^2}$	$s > 0$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$

3.1.2 Phép biến đổi Laplace nghịch đảo

3.1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.2 Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ thì ta nói $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của hàm số $F(s)$.

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ví dụ 3.3 Tìm các biến đổi Laplace ngược sau:

$a)\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{36+s^2}\right\}$ $b)\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-k}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{36+s^2}\right\} = \sin 6t$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-k}\right\} = e^{kt}$

3.1.2.2 Tính chất tuyến tính

Với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta luôn có:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s) = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{f(t)\}(s)+\beta\mathscr{L}^{-1}\{g(t)\}(s)$$

Ví dụ 3.4 Tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

$a)F(s) = \dfrac{6}{s}-\dfrac{1}{s-8}+\dfrac{4}{s-3}$ $b)F(s) = \dfrac{6s}{s^2+25}+\dfrac{3}{s^2+25}$

[Hướng dẫn giải]

a) $F(s) = \dfrac{6}{s}-\dfrac{1}{s-8}+\dfrac{4}{s-3} \rightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s}-\dfrac{1}{s-8}+\dfrac{4}{s-3}\right\} = 6-e^{8t}+4e^{3t}$.

b) $F(s) = \dfrac{6s}{s^2+25}+\dfrac{3}{s^2+25} \rightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s}{s^2+25}+\dfrac{3}{s^2+25}\right\} = 6\cos 5t+\dfrac{3}{5}\sin 5t$.

3.1.2.3 Sự duy nhất của biến đổi Laplace nghịch đảo

Định lý 3.2 Giả sử 2 hàm số $f(t), g(t)$ thoả mãn các giả thiết của **Định lí 1** để tồn tại $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ và $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$. Nếu $F(s) = G(s)$ $(\forall s > C)$ thì có $f(t) = g(t)$ tại t mà cả hai hàm liên tục.

3.2 Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

3.2.1 Phép biến đổi Laplace của đạo hàm

Định lý 3.3 Cho $f(t)$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \rightarrow \infty$ (tức là tồn tại hằng số không âm c, M, T thoả mãn

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad (t \geq T)$$

Khi đó tồn tại $\mathscr{L}\{f'(t)\}$, $s > c$ với $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s)-f(0)$

Ví dụ 3.5 Tính $\mathscr{L}\{te^{2t}\}$.

[Hướng dẫn giải]

- Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{te^{2t}\}$ và $f(t) = te^{2t}$
- $f'(t) = 2te^{2t}+e^{2t}$
- $\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{2te^{2t}+e^{2t}\} = 2F(s)+\dfrac{1}{s-2}$
- Lại có $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s)-f(0) \longrightarrow sF(s) = 2F(s)+\dfrac{1}{s-2} \longrightarrow F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

Ví dụ 3.6 Tính $\mathscr{L}\{t\cos kt\}$.

[Hướng dẫn giải]

- Đặt $f(t)=t\cos kt$ thì $f(0)=0, f'(t)=\cos kt-kt\sin kt, f'(0)=1$
- $f''(t)=-2k\sin kt-k^2t\cos kt$
- $\mathscr{L}\{f''(t)\}=s^2\mathscr{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)=s^2\mathscr{L}\{f(t)\}-1$
- Mà $\mathscr{L}\{f''(t)\}=\mathscr{L}\{-2k\sin kt-k^2t\cos kt\}=-2k.\dfrac{k}{s^2+k^2}-k^2\mathscr{L}\{f(t)\}$

$\rightarrow \dfrac{-2k^2}{s^2+k^2}-k^2\mathscr{L}\{f(t)\}=s^2\mathscr{L}\{f(t)\}-1 \rightarrow \dfrac{s^2-k^2}{s^2+k^2}=(s^2+k^2)\mathscr{L}\{f(t)\}$

$\rightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}=\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2} \rightarrow \mathscr{L}\{t\cos kt\}=\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

Định lý 3.4 Phép biến đổi Laplace của đạo hàm cấp cao

Giả sử rằng hàm số $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$. Khi đó $\exists \mathscr{L}\{f^n(t)\}$ và $s > c$ sao cho

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\}=s^n\mathscr{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

3.2.2 Áp dụng giải bài toán giá trị ban đầu

R **[Cách giải]**

- **Bước 1:** Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}(s)$. Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho để được phương trình đại số.
- **Bước 2:** Sử dụng điều kiện ban đầu và biến đổi đại số để tính $X(s)$.
- **Bước 3:** Sử dụng biến đổi Laplace ngược để tính $x(s)$

$$\text{PTVP} \xrightarrow{\mathscr{L}} \text{PT Đại số} \xrightarrow{\text{Giải}} X(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} x(t) \text{ là nghiệm phương trình vi phân}$$

Ví dụ 3.7 Tìm nghiệm của bài toán với giá trị ban đầu.

$$x''+8x'+15x=0 \quad x(0)=2, x'(0)=-3$$

[Hướng dẫn giải]

- Ta có

$$\mathscr{L}\{x(t)\}(s)=X(s)$$
$$\mathscr{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-x(0)=sX(s)-2$$
$$\mathscr{L}\{x''(s)\}(s)=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-2s+3$$

- Phương trình vi phân đã cho trở thành

$$s^2X(s)-2s+3+8(sX(s)-2)+15X(s)=0$$
$$\Longleftrightarrow (s^2+8s+15)X(s)=2s+13$$
$$\Longleftrightarrow X(s)=\frac{2s+13}{s^2+8s+15}=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{s+3}-\frac{3}{s+5}\right)$$

- Vậy $x(t)=\dfrac{1}{2}\left(7e^{-3t}-3e^{-5t}\right)$.

Ví dụ 3.8 Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=6x+3y \\ x(0)=1; y(0)=-2 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

- Ta có:

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$
$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) + 2$$

- Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} sX(s) = 2X(s) + Y(s) + 1 \\ sY(s) = 6X(s) + 3Y(s) - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 1 \\ -6X(s) + (s-3)Y(s) = -2 \end{cases}$

$$\Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s},\ Y(s) = \frac{-2}{s}$$
$$\Longrightarrow x(t) = 1,\ y(t) = -2$$

3.2.3 Phép biến đổi Laplace của tích phân.

Định lý 3.5 Nếu $f(t)$ liên tục, trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$ thì

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \tfrac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \quad (s > c)$$

$$\text{hay } \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F\}(\tau)d\tau$$

Ví dụ 3.9 Tìm $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\} = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau = 1 - \cos t$$

Ví dụ 3.10 Tìm $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}\mathrm{d}\tau = \int_0^t e^{a\tau}\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{a}(e^{at} - 1)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \dfrac{1}{a}(e^{a\tau} - 1)d\tau$

$$= \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau} - \tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$$

3.3 Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

3.3.1 Phép tịnh tiến theo biến s

Định lý 3.6 Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > c$ thì tồn tại $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$ với $s > a + c$ và có:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a) := \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$$

hay tương đương với:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}.f(t) := e^{at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

R Định lý trên được chứng minh một cách trực tiếp như sau:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

Ví dụ 3.11 Tìm biến đổi Laplace: $\mathscr{L}\left\{e^{3t}.\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s)$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}\left\{e^{3t}.\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) = \mathscr{L}\left\{e^{3t}.\frac{1}{\sqrt{2}}.(\sin t + \cos t)\right\}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\left[\mathscr{L}\{e^{3t}\sin t\}(s) + \mathscr{L}\{e^{3t}\cos t\}(s)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\left[\frac{1}{(s-3)^2+1} + \frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right] \quad \text{với } s > 3$$

Ví dụ 3.12 Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s}\right\}(t)$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}(t) = 1 - \cos t$$

R Cách tách $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = \left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s=0} = 1$$

$$B.i + C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=i} = -i \to B = -1,\ C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Ví dụ 3.13 Tìm biến đổi Laplace ngược $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+4}\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4} - \frac{3}{2}.\frac{2}{(s+3)^2+4}\right\}(t)$

$$= e^{-3t}.\cos 2t - \frac{3}{2}.e^{-3t}.\sin 2t$$

Ví dụ 3.14 Tìm biến đổi Laplace $\mathscr{L}\{(e^t+t)^2\}(s)$

[Hướng dẫn giải]

Ta có:
$\mathscr{L}\{(e^t+t)^2\}(s) = \mathscr{L}\{(e^{2t}\}(s) + 2\mathscr{L}\{e^t.t\}(s) + \mathscr{L}\{t^2\}(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{s^3}$, $s > 0$

3.3.2 Biến đổi phân thức đơn giản $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ được đưa về phép biến đổi Laplace ngược của 4 hàm phân thức đơn giản sau:

$$I.\frac{A}{s-a} \qquad II.\frac{A}{(s-a)^k} \qquad III.\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2} \qquad IV.\frac{Ms+N}{[(s-a)^2+b^2]^h}$$

1. **Quy tắc 1 (Phân thức đơn giản bậc một):** Nếu $Q(s)$ có chứa $(s-a)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng dạng I và II:

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

2. **Quy tắc 2 (Phân thức đơn giản bậc hai):** Nếu $Q(s)$ có chứa $((s-a)^2+b^2)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng dạng III và IV:

$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2} + \frac{A_2s+B_2}{((s-a)^2+b^2)^2} + \ldots + \frac{A_ns+B_n}{((s-a)^2+b^2)^n}$$

Ví dụ 3.15 Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau: $F(s) = \dfrac{-2s^3-4s^2-22s+13}{s^2(s^2+4s+13)}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $F(s) = \dfrac{A}{s^2} + \dfrac{B}{s} + \dfrac{Cs+D}{s^2+4s+13} = \dfrac{-2s^3-4s^2-22s+13}{s^2(s^2+4s+13)}$

Cách 1: Đồng nhất hệ số
Cách 2: Thay $s=1, s=-1, s=2, s=-2$ vào 2 vế:

$$\to A = 1, B = -2, C = 0, D = 3$$

Suy ra $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{3}{s^2+4s+13}$

Khi đó:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}(t)$$

$$= t - 2 + e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = t - 2 + e^{-2t}\sin 3t$$

Cách 3:

$A = \dfrac{-2s^3-4s^2-22s+13}{s^2+4s+13}\Big|_{s=0} = 1$

$B = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{-2s^3-4s^2-22s+13}{s^2+4s+13}\right)\Big|_{s=0} = -2$

$$C.(-2+3i)+D = \frac{-2s^3-4s^2-22s+13}{s^2}\bigg|_{s=-2+3i} = 3 \to 3C=0, D-2C=3 \to C=0, D=3$$

3.3.3 Áp dụng giải phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hằng

R **[Cách giải]**
- **Bước 1**: Đặt $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$. Biến đổi Laplace 2 vế và sử dụng điều kiện ban đầu để tính $F(s)$.
- **Bước 2**: Sử dụng quy tắc biến đổi phân thức đơn giản và phép tịnh tiến để tìm Laplace ngược, tức là tìm ra nghiệm $f(t)$.

Ví dụ 3.16 Giải phương trình vi phân với giá trị ban đầu sau đây:

$$x^{(3)}+x''-6x'=0, x(0)=0, x'(0)=x''(0)=1$$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$\mathscr{L}\{x^{(3)}(t)\}(s)+\mathscr{L}\{x''(t)\}(s)-6\mathscr{L}\{x'(t)\}(s)=0$
$\Leftrightarrow [s^3X(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)]+[s^2X(s)-sx(0)-x'(0)]-6[sX(s)-x(0)]=0$
$\Leftrightarrow (s^3+s^2-6s)X(s)-s-2=0$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{s+2}{s^3+s^2-6s}=\frac{s+2}{s(s+3)(s-2)}=\frac{-1}{3s}+\frac{-1}{15(s+3)}+\frac{2}{5(s-2)}$$

Khi đó:

$$x(t)=\frac{-1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t)-\frac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)+\frac{2}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t)$$

$$=\frac{-1}{3}-\frac{1}{15}e^{-3t}+\frac{2}{5}e^{2t}$$

3.3.4 Phép tịnh tiến theo biến t

Định nghĩa 3.3 Hàm bậc thang (Heaviside) tại $t=a$ được ký hiệu là $u_a(t)$ và được xác định bởi

$$u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases} \quad \text{hoặc ta viết } u_a(t)=u(t-a)$$

Định lý 3.7 Nếu $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s>c$ thì tồn tại $\mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s)$ tồn tại với $s>a+c$ và có:

$$\mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s)=e^{-as}F(s)$$

hay tương đương với:

$$u(t-a)f(t-a)=\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t)$$

Ví dụ 3.17 Tìm $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, biết $f(t)=\begin{cases}3\sin t, & t\geq 1\\ 2, & t<1\end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $f(t)=u(t-1).3\sin t+2[1-u(t-1)]$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s)=3\mathscr{L}\{u(t-1)\sin[(t-1)+1]\}(s)+\frac{2}{s}-2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$=3e^{-s}\mathscr{L}\{\sin(t+1)\}(s)+\frac{2}{s}-2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$= 3.e^{-s}.\mathscr{L}\{\sin t.\cos 1 + \cos t.\sin 1\}(s) + \frac{2}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$= \frac{3e^{-s}(\cos 1 + s.\sin 1)}{s^2+1} + \frac{2(1-e^{-s})}{s},\ s > 0$$

3.4 Đạo hàm, tích phân và tích các phép biến đổi

3.4.1 Tích chập - phép biến đổi Laplace của tích chập

Định nghĩa 3.4 Giả sử f và g là hai hàm liên tục từng khúc trên $[0;+\infty)$
Tích chập của f và g là:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\lambda).g(t-\lambda)d\lambda$$

R Tích chập có các tính chất:

i) **Giao hoán**: $f*g = g*f$
ii) **Kết hợp**: $f*(g*h) = (f*g)*h$
iii) **Phân phối**: $f*(g+h) = f*g + f*h$

Tích chập của 2 hàm không trùng với tích của 2 hàm: $f*g \neq f.g$

Ví dụ 3.18 Tính tích chập của $\cos t * e^{-t}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có : $\cos t * e^{-t} = e^{-t} * \cos t = \int_0^t e^{-(t-\lambda)}\cos\lambda d\lambda \quad = e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}\cos\lambda d\lambda = e^{-t}\left[\frac{e^{\lambda}(\sin\lambda + \cos\lambda)}{2}\right]\Bigg|_0^t$

$$= \frac{\sin t + \cos t - e^{-t}}{2}$$

Định lý 3.8 **(Biến đổi Laplace của tích chập)**

Giả thiết $f(t), g(t)$ liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn của $[0;+\infty)$ và bị chặn mũ trên $[0;+\infty)$ thì:

$$\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s).\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = F(s).G(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t)*g(t)$$

Ví dụ 3.19 Tìm $\mathscr{L}\{\sin bt * \cos bt\}$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}\{\sin bt * \cos bt\} = \mathscr{L}\{\sin bt\}.\mathscr{L}\{\cos bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}.\frac{s}{s^2+b^2} = \frac{bs}{(s^2+b^2)^2}$$

Ví dụ 3.20 Tìm $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right\} = \frac{1}{b}.\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+b^2}.\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}.(\sin bt * \cos bt)$$

$$= \frac{1}{b}\int\limits_0^t \sin b\lambda.\cos b(t-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2b}.\int\limits_0^t [\sin bt + \sin b(2\lambda - t)]d\lambda$$

$$= \frac{1}{2b}\left[\lambda \sin bt - \frac{\cos b(2\lambda - t)}{2b}\Bigg|_0^t\right] = \frac{1}{2b}t\sin bt$$

3.4.2 Đạo hàm của biến đổi Laplace

Định lý 3.9 Nếu $f(t)$ liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn của $[0,+\infty)$ và bị chặn mũ trên $[0,+\infty)$ thì:

$$F'(s) = \mathscr{L}\{-tf(t)\}, s > a \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = -\frac{1}{t}.\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$$

Tổng quát: $F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s)$ với $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$

Ví dụ 3.21 Tìm $\mathscr{L}^{-1}\left\{\operatorname{arccot}\frac{-1}{s}\right\}(t)$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\operatorname{arccot}\frac{-1}{s}\right\}(t) = \frac{-1}{t}.\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\operatorname{arccot}\frac{-1}{s}\right)'\right\}(t) = \frac{-1}{t}.\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{1+(\frac{-1}{s})^2}.\left(\frac{-1}{s}\right)'\right\}(t)$$

$$= \frac{-1}{t}.\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\}(t) = \frac{1}{t}.\sin t$$

Ví dụ 3.22 Tìm $\mathscr{L}\{t(e^{2t}+3\cos t)\}(s)$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathscr{L}\{t(e^{2t}+3\cos t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{3s}{s^2+1}\right), s > 2$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{6s^2}{(s^2+1)^2}, s > 2$$

3.4.3 Tích phân của biến đổi Laplace

Định lý 3.10 Cho $f(t)$ liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn của $[0,+\infty)$, $\exists \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ và $f(t)$ bị chặn mũ trên $[0,+\infty)$
Ta có:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int\limits_s^{+\infty} F(\lambda)d\lambda, s > a$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int\limits_s^{+\infty} F(\lambda)d\lambda\right\}$$

Ví dụ 3.23 Tìm $\mathscr{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sinh t\}(\lambda)d\lambda = \int_s^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{|\lambda-1|}{|\lambda+1|}\Bigg|_s^{\infty} = \frac{1}{2}.\ln\frac{|s+1|}{|s-1|}$$

Ví dụ 3.24 Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\}$

[Hướng dẫn giải]

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty}\frac{2\lambda}{(\lambda^2-1)^2}d\lambda\right\} = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{\lambda^2-1}\Bigg|_s^{+\infty}\right\}$$

$$= t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = t.\sinh t$$

3.4.4 Bài toán giá trị ban đầu đối với PTVP có hệ số là hàm số

Ví dụ 3.25 Giải PTVP sau đây: $y''+3ty'-6y=2, y(0)=y'(0)=0$

[Hướng dẫn giải]

Đặt: $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$, ta có:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2.Y(s)-sy(0)-y'(0) = s^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{ty'\} = \frac{-d}{ds}(\mathcal{L}\{y'\}) = \frac{-d}{ds}(sY(s)-y(0)) = -Y(s)-sY'(s)$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho:

$$s^2Y(s)-3Y(s)-3sY'(s)-6Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)Y(s) = \frac{-2}{3s^2} \qquad (1)$$

(1) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có nghiệm $Y(s)=\frac{2}{s^3}+C.\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$

Để $Y(s)$ là biến đổi Laplace của hàm $y(t)$ nào đó thì $\lim\limits_{s\to+\infty} Y(s)=0 \Rightarrow C=0$

Do đó $Y(s)=\frac{2}{s^3} \Rightarrow y(t)=t^2$

Ví dụ 3.26 Giải PTVP sau đây: $tx''+(t-3)x'+2x=0, x(0)=0$

[Hướng dẫn giải]

Đặt: $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$, ta có:

$$\mathcal{L}\{x'\} = sX(s)-x(0) = sX(s)$$

$$\to \mathcal{L}\{tx'\} = \frac{-d}{ds}(\mathcal{L}\{x'\}) = \frac{-d}{ds}(sX(s)) = -X(s)-sX'(s)$$

và

$$\mathcal{L}\{x''\} = s^2.X(s)-s.x(0)-x'(0) = s^2X(s)-x'(0)$$

$$\to \mathcal{L}\{tx''\} = \frac{-d}{ds}(\mathcal{L}\{x''\}) = \frac{-d}{ds}(s^2X(s)-x'(0)) = -2sX(s)-s^2X'(s)$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-2sX(s)-s^2X'(s)-X(s)-sX'(s)-3sX(s)+2X(s)=0$$

$$\leftrightarrow X'(s)(s^2+s)+X(s)(5s-1)=0$$

$$\leftrightarrow \frac{X'(s)}{X(s)} + \frac{5s-1}{s^2+s} = 0$$

Phương trình trên là phương trình phân ly biến số, ta tính được:

$$X(s) = Ce^{-\int \frac{5s-1}{s^2+s}ds} = Ce^{\int \frac{1}{s} - \frac{6}{s+1}ds} = Ce^{\ln|s| - 6\ln|s+1|} = \frac{C|s|}{(s+1)^6} = \frac{Cs}{(s+1)^6}$$

Khi đó $x(t) = C.\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^6}\right\} = C.\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^5} - \frac{1}{(s+1)^6}\right\}$

$$= Ce^{-t}\left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}\right)$$

3.5 Bảng các phép biến đổi Laplace

Bảng 1:

BẢNG BIẾN ĐỔI LAPLACE		
$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^a \ (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > 0$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sin kt$	$\frac{k}{k^2+s^2}$	$s > 0$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0,\ a > 0$

Công thức bổ sung (Phải chứng minh)

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k} t \sin kt$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)$

Bảng 2:

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
$e^{at}f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$
$f(t)*g(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(s).\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty}\mathscr{L}\{f(t)\}(\lambda)d\lambda$
$f^n(t)$	$s^n\mathscr{L}\{f(t)\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
$\int\limits_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$

Bảng 3:

$F(s)$	$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
$F(s)$	$-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$
$F(s)$	$t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty}F(\lambda)d\lambda\right\}(t)$
$F(s-a)$	$e^{at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
$e^{-as}F(s)$	$u(t-a)\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)$
$F(s)G(s)$	$\left(\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}\right)(t)$
$\frac{F(s)}{s}$	$\int\limits_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$

3.6 Bài tập luyện tập

Ví dụ 3.27 Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:

1. $f(t)=t(e^{2t}+3\cos t)$
2. $f(t)=\frac{\sinh t}{t}$
3. $f(t)=\begin{cases}3\sin t, & t\geq 1\\ 2, & t<1\end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

1. $\mathscr{L}\{t(e^{2t}+3\cos t)\}(s)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{3s}{s^2+1}\right), s>2$

$$=\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{3}{s^2+1}+\frac{6s^2}{(s^2+1)^2}, s>2$$

2. $\mathscr{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\mathscr{L}\{\sinh t\}(\lambda)d\lambda=\int_s^{+\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{|\lambda-1|}{|\lambda+1|}\Bigg|_s^{\infty}=\frac{1}{2}.\ln\frac{|s+1|}{|s-1|}$

3. Ta có: $f(t) = u(t-1)3\sin t + 2(1-u(t-1))$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = 3\mathscr{L}\{u(t-1)\sin((t-1)+1)\}(s) + \frac{2}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$= 3e^{-s}\mathscr{L}\{\sin(t+1)\}(s) + \frac{2}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$= \frac{3e^{-s}(\cos 1 + s.\sin 1)}{s^2+1} + \frac{2(1-e^{-s})}{s}$$

Ví dụ 3.28 Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:

1. $F(s) = \dfrac{2(s^2+3s+4)}{s^3+6s^2+16s+16}$
2. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-a)}$
3. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}$

[Hướng dẫn giải]

1. +) Ta có $F(s) = \dfrac{2s^2+6s+8}{s^3+6s^2+16s+16} = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{s}{s^2+4s+8}$

$$+) \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} + \frac{s}{s^2+4s+8}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+8}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+4}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+4}\right\}$$

$$= e^{-2t}(1+\cos 2t - \sin 2t)$$

2. +) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int\limits_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t e^{a\tau}\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{a}(e^{at}-1)$

+) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int\limits_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\} \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \dfrac{1}{a}(e^{a\tau}-1)d\tau$

$$= \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau} - \tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{b}.\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{b}{s^2+b^2}.\dfrac{s}{s^2+b^2}\right\} = \dfrac{1}{b}.(\sin bt * \cos bt)$

$$= \frac{1}{b}\int_0^t \sin b\tau.\cos b(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2b}.\int_0^t [\sin bt + \sin b(2\tau - t)]d\tau$$

$$= \frac{1}{2b}\left[\tau\sin bt - \frac{\cos b(2\tau-t)}{2b}\Big|_0^t\right] = \frac{1}{2b}t\sin bt$$

Ví dụ 3.29 Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:

1. $4y'' + 4y' + 1 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$
2. $y^{(4)} + y'' = 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
3. $tx'' + (t-3)x' + 2x = 0, x(0) = 0$

[Hướng dẫn giải]

1. Đặt $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$.

+) Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$4[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + \frac{1}{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4s^2+4s)Y(s) - 16s - 20 + \frac{1}{s} = 0$$

$\Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{16s^2+20s-1}{4s^2(s+1)} = \dfrac{21}{4s} - \dfrac{1}{4s^2} - \dfrac{5}{4(s+1)}$

+) Khi đó:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{21}{4s} - \frac{1}{4s^2} - \frac{5}{4(s+1)}\right\}$$

$$= \frac{21}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) - \frac{5}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)$$

$$= \frac{21}{4} - \frac{t}{4} - \frac{5}{4}e^{-t}$$

2. Đặt: $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, ta có:

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2.Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$
$$\mathscr{L}\{y^{(4)}\} = s^4.Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = s^4Y(s)$$

+) Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$(s^2+s^4)Y(s) = \frac{1}{s}$$
$$\leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3(s^2+1)}$$

+)Khi đó: $y(t)$= $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-s^2}{s^3} + \dfrac{s}{s^2+1}\right\}$

$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{s}{s^2+1}\right\}$

$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\}$

$= \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos t$

3. Đặt: $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$, ta có:

$$\mathscr{L}\{x'\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$$
$$\rightarrow \mathscr{L}\{tx'\} = \tfrac{-d}{ds}(\mathscr{L}\{x'\}) = \tfrac{-d}{ds}(sX(s)) = -X(s) - sX'(s)$$

và

$$\mathscr{L}\{x''\} = s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0)$$
$$\rightarrow \mathscr{L}\{tx''\} = \tfrac{-d}{ds}(\mathscr{L}\{x''\}) = \tfrac{-d}{ds}(s^2X(s) - x'(0)) = -2sX(s) - s^2X'(s)$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-2sX(s) - s^2X'(s) - X(s) - sX'(s) - 3sX(s) + 2X(s) = 0$$
$$\leftrightarrow X'(s)(s^2+s) + X(s)(5s-1) = 0$$
$$\leftrightarrow X'(s) + \frac{5s-1}{s^2+s} = 0$$

Phương trình trên là phương trình phân ly biến số, ta tính được:

$$X(s) = Ce^{-\int \frac{5s-1}{s^2+s}ds} = Ce^{-\int \frac{1}{s} - \frac{6}{s+1}ds} = Ce^{\ln|s| - 6\ln|s+1|} = \frac{C|s|}{(s+1)^6} = \frac{Cs}{(s+1)^6}$$

Khi đó $x(t) = C.\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^6}\right\} = C.\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^5} - \dfrac{1}{(s+1)^6}\right\}$

$$= Ce^{-t}\left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}\right) = C_1e^{-t}(5t^4 - t^5)$$

Mục 2 - Đề thi các nhóm ngành

II

4. Đề thi

4.1 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.2

ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - HỌC KÌ: 20232

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ phân kỳ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{n^2}}{(n+1)!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi).(\sqrt{2n+6}-\sqrt{2n+3})$

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}$$

Câu 3. (1 điểm) Khai triển Maclaurin hàm số sau: $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right) \quad (x<1)$

Câu 4. (4 điểm) Giải các phương trình vi phân sau :

a) $(e^{2y-x^2}+1)y' = 2x$ với $y(2) = 2$
b) $e^x[\cos(xy) - y\sin(xy)]dx - xe^x\sin(xy)dy = 0$
c) $y'' - 4y + 4 = e^{2x}.(8x+6)$
d) $x' = \begin{cases} t, & \text{nếu } 0 < t < 2\pi \\ \sin(t), & \text{nếu } t \geq 2\pi \end{cases}, x(0) = 0$

Câu 5. (1 điểm) Tìm biến đổi Laplace ngược:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+s+1}{s^4+s^2+1}\right\}(t)$$

Câu 6. (1 điểm) Cho hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa. Biết $f^{(n)}(1) = n^3$. Giá trị của $f(2)$ là ?

4.2 Đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.2

ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - HỌC KÌ: 20232

Nhóm ngành 2. Mã HP: MI1132. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2023^n}{(2024n)^{2n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi).\cos\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^{n+1}$

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+1)^n}{n(n+2)}$$

Câu 3. (1 điểm) Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier cosine:

$$f(x) = -x \qquad \text{với} \quad -\pi \leq x \leq 0$$

Câu 4. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' - \frac{x+1}{3x^2}y = \frac{y^4}{3x^3}(x \neq 0)$

b) $\left[\frac{1}{x} - y\left(\frac{1}{x} + e^{xy}\right)\right] dx = (\ln x + xe^{xy})\, dy$

c) $y'' + y = x + 2\cos^2 x.$

Câu 5. (1 điểm) Tìm biến đổi Laplace ngược của biểu thức sau:

$$F(s) = \ln\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)$$

Câu 6. (1 điểm) Giải phương trình vi phân sau, biết $x(0) = 0$:

$$tx''(t) - x'(t) - (1+t)x(t) = e^t$$

4.3 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.2

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành 1 **Thời gian làm bài: 90 phút**

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{n+5}\right)^n \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^{2n}$$

Câu 3. (1 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm $x_0 = 2$.

Câu 4. (2 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$,

b) $t.x''(t) - (2t+1)x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t}$, $\quad x(0) = \frac{1}{2}$

Câu 5. (1 điểm)

a) Tìm biến đổi Laplace ngược: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\}$

b) Giải phương trình vi phân sau:

$$\left(x^2+4\right)y'' + 2xy' - \frac{y}{x^2+4} = \frac{2023x}{(x^2+4)^2}.$$

4.4 Đề thi cuối kì nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.2

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1. (2 điểm) Đánh giá sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n(n+2)}$

b) $I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n^2.\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\frac{1}{n^2}\right)$

Câu 2. (2 điểm) a) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^n(4n^2+1)}(x-2)^n$$

b) Khai triển thành chuỗi Maclaurin của hàm:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-9x+20}$$

Câu 3. (2 điểm) Giải các phương trình

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+9xy+y^2}{9x^2}$

b) $xy'-2y=x^3\sin x; x\neq 0$

Câu 4. (2 điểm)

Cho phương trình: $y''+m^2y=3\cos 2x$; với m là hằng số thực khác 0.

a) Giải phương trình với $m=1$.

b) Giải và biện luận phương trình theo m.

Câu 5. (2 điểm)

a) Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t)=6e^{3t}\cos(2t)+t^3e^{2t}; t\geq 0$

b) Giải bài toán sau đây bằng biến đổi Laplace:

$y^{(3)}-6y''+12y'-8y=0; y(0)=y''(0)=0, y'(0)=1$

4.5 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20213

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - HỌC KÌ: 20213

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2\sin n}$. b) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-3x^2)^{2n}}{n^2+n}.$$

Câu 3. (2 điểm) Giải các phương trình vi phân sau

a) $2xydx+(x^2-9y^2)dy=0$.

b) $y''-4y'+4y=2e^{2x}$.

Câu 4. (1 điểm) Sử dụng biến đổi Laplace, giải phương trình

$$x^{(4)}+2x''+x=-2, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$$

Câu 5. (1 điểm) Cho hàm số $f(t)=\begin{cases} \sin 2t & \text{nếu} \quad 0\le t<\pi \\ \cos t & \text{nếu} \quad t\ge\pi \end{cases}$.

Tính $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

Câu 6. (1 điểm) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kì 2π và $f(x)=3x-3\pi$ trên $[0,\pi]$.

Câu 7. (1 điểm) Xét phương trình: $(x^2+1)y''+a(x)y'-y=-1$ (1)
Biết $y_1(x)=x+1$ và $y_2(x)=1$ là hai nghiệm riêng của (1). Hãy tìm $a(x)$ và nghiệm tổng quát của (1).

Câu 8. (1 điểm) Giả sử rằng m,c,k và F_0 là các hằng số dương, $c^2>mk$. Chứng minh rằng mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình $my''+2cy'+ky=2F_0$ đều thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{2F_0}{k}$.

4.6 Đề thi cuối kì nhóm ngành 1 - Học kì 20212

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - HỌC KÌ: 20212

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131. Thời gian: 90 phút

Câu 1. (1 điểm) Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ Cô-si cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Câu 2. (1 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+e^{-3n}\right)$.

Câu 3. (1 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$.

Câu 4. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n}$.

Câu 5. (1 điểm) Giải phương trình vi phân $(e^{2y}+x)y'=1$.

Câu 6. (1 điểm) Giải phương trình vi phân $x'(y)=e^y y\sqrt{x^2+3}$.

Câu 7. (1 điểm) Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x'(t)=y-5\sin t \\ y'(t)=2x+y \end{cases}$

Câu 8. (1 điểm) Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t)=e^{3t}$.

Câu 9. (1 điểm) Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace

$$x''+x=f(t), x(0)=x'(0)=0; f(t)=\begin{cases} \sin 2t,\ 0\le t<2\pi \\ 0,\ t\ge 2\pi \end{cases}$$

Câu 10. (1 điểm) Cho $y(x)$ là một nghiệm của phương trình $y''+my'+y=0,\ m\in\mathbb{R}$. Tìm điều kiện của tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

5. Đáp án

5.1 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2023.2

Câu 5.1.1 **(2 điểm)** Xét sự hội tụ phân kỳ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{n^2}}{(n+1)!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi).(\sqrt{2n+6}-\sqrt{2n+3})$

[Hướng dẫn giải]

a) Ta có: $a_n = \dfrac{e^{n^2}}{(n+1)!} > 0,\ \forall n \geq 0 \Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương

Xét $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{(n+1)^2}}{(n+2)!}.\dfrac{(n+1)!}{e^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{(2n+1)}}{n+2} = \infty > 1$

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert

b) Ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi).(\sqrt{2n+6}-\sqrt{2n+3}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\dfrac{3}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.a_n$

+) $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+3}} > 0,\ \forall n \geq\ 1\ \Rightarrow$ Chuỗi số đã cho là chuỗi đan dấu

+) Mặt khác, $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+3}} > a_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{2n+8}+\sqrt{2n+5}},\ \forall n \geq 1$

$\Rightarrow a_n$ đơn điệu giảm khi $n \to +\infty$

+) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+3}} = 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi số trên hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Câu 5.1.2 **(1 điểm)** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)^n \left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}$

[Hướng dẫn giải]

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}\left(\frac{2x+1}{2-2x}\right)^n$$

Đặt $y=\dfrac{2x+1}{2-2x}$ và $b_n=\left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}$, ta thu được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_ny^n$.

Xét $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2=1$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R=\dfrac{1}{L}=\dfrac{1}{1}=1\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của y là $(-1;1)$.

+) Tại $y=1$ ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

Có $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-2(n+1)}\right)^{\frac{-2(n+1)2n}{-2(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-2n}{2(n+1)}}=e^{-1}\neq 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ

+) Tại $y=-1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.b_n$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n.b_n|=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e^{-1}\neq 0\rightarrow$ Không thể có $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n.b_n=0$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.b_n$ phân kỳ do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ với $-1<y<1\Leftrightarrow -1<\dfrac{2x+1}{2-2x}<1\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.

Vậy miền hội tụ là của chuỗi đã cho là $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$

Câu 5.1.3 **(1 điểm)** Khai triển Maclaurin hàm số sau: $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)\quad(x<1)$

[Hướng dẫn giải]

Vì $x<1$ nên ta có:

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln\left(1+\frac{1}{1-x}\right)=\ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=\ln(2-x)-\ln(1-x)\\&=\ln 2+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-\ln(1-x)\\&=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n}-\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right),\ \forall|x|<1\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\ \forall|x|<1\end{aligned}$$

Câu 5.1.4 **(4 điểm)** Giải các phương trình vi phân sau :

a) $(e^{2y-x^2}+1)y'=2x$ với $y(2)=2$
b) $e^x[\cos(xy)-y\sin(xy)]dx-xe^x\sin(xy)dy=0$
c) $y''-4y+4=e^{2x}.(8x+6)$
d) $x'=\begin{cases}t, & \text{nếu } 0<t<2\pi\\ \sin(t), & \text{nếu } t\geq 2\pi\end{cases}\quad ,x(0)=0$

[Hướng dẫn giải]

a) $(e^{2y-x^2}+1)y'=2x$ với $y(2)=2$

Dễ thấy $e^{x^2}>0, dx, dy$ khác 0 khi đó phương trình trở thành: $e^{2y}+e^{x^2}=2xe^{x^2}.\dfrac{dx}{dy}$

Coi $x=x(y)$ khi đó: $e^{2y}+e^{x^2}=2xe^{x^2}.x'_y$

$\Leftrightarrow e^{2y}+e^{x^2}=(e^{x^2})'$

$\Leftrightarrow (e^{x^2})'-e^{x^2}=e^{2y}$

Đặt $u=e^{x^2}$ thay lại vào phương trình ta được: $u'-u=e^{2y}$

$\Rightarrow u=e^{x^2}=e^{\int dy}.\left[\int e^{2y}.e^{-\int dy}+C\right]=e^y(e^y+C)=e^{2y}+Ce^y$

Lại có : $y(2)=2\Rightarrow C=0\Rightarrow e^{x^2}=e^{2y}$ hay $x^2=2y$

Vậy phương trình vi phân trên có nghiệm riêng là $x^2=2y$ ∎

b) $e^x[\cos(xy)-y\sin(xy)]dx-xe^x\sin(xy)dy=0$

+) Ta có: $\begin{cases} P(x,y)=e^x[\cos(xy)-y\sin(xy))] \\ Q(x,y)=-xe^x\sin(xy) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P'_y=-xe^x\sin(xy)-e^x\sin(xy)-e^x(xy)\cos(xy) \\ Q'_x=-xe^x\sin(xy)-e^x\sin(xy)-e^x(xy)\cos(xy) \end{cases} \Rightarrow P'_y=Q'_x$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần

$\Rightarrow \exists u(x,y): du=Pdx+Qdy$ trong đó $\begin{cases} u'_x(x,y)=P(x,y)=e^x(\cos(xy)-y\cos(xy)) \\ u'_y(x,y)=Q(x,y)=-xe^x\sin(xy) \end{cases}$

Ta có: $u'_y=-xe^x\sin(xy)=Q(x,y)$

$\Rightarrow u=\int -xe^x\sin(xy)dy$

$\Rightarrow u=e^x\cos(xy)+C(x)$

$\Rightarrow u'_x=-ye^x\sin(xy)+e^x\cos(xy)+C'(x)=P(x,y)$

Mà $P(x,y)=-ye^x\sin(xy)+e^x\cos(xy)$

$\Rightarrow C'(x)=0$

$\Rightarrow C(x)=C_1 (C_1\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow d(e^x\cos(xy)+C_1)=0$

$\Rightarrow e^x\cos(xy)+C_1=C_2$

$\Rightarrow e^x\cos(xy)=C (C\in\mathbb{R})$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $e^x\cos(xy)=C$

c) $y''-4y+4=e^{2x}.(8x+6)$

Ta có: $y''-4y+4=e^{2x}.(8x+6)\Leftrightarrow y''-4y=e^{2x}.(8x+6)-4$

Xét phương trình thuần nhất: $y''-4y=0$ (1)

Phương trình đặc trưng $t^2-4=0\Leftrightarrow t=\pm2$

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm tổng quát là $\overline{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x} (C_1,C_2\in\mathbb{R})$

Mặt khác, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=e^{2x}.(8x+6)-4\Rightarrow \alpha_1=2$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, $\alpha_2=0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $Y = x.e^{2x}(Ax+B)+C$

$\Rightarrow Y' = (2Ax+B).e^{2x} + 2(Ax^2+Bx)e^{2x}$
$= (2Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}$

$\Rightarrow Y'' = (4Ax+2A+B).e^{2x} + 2(Ax^2+(2A+2B)x+B)e^{2x}$
$= (4Ax^2+(8A+4B)x+4B)e^{2x}$

$\Rightarrow Y''-4Y = (8Ax+(2A+4B))e^{2x} - 4C = e^{2x}.(8x+6)-4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8A = 8 \\ 2A+4B = 6 \\ -4C = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow Y = e^{2x}(x^2+x)+1$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$y = \bar{y}+Y = C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+e^{2x}(x^2+x)+1 (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

d) $x' = \begin{cases} t, & \text{nếu } 0<t<2\pi \\ \sin(t), & \text{nếu } t \geq 2\pi \end{cases}, x(0) = 0$

$\Rightarrow x' = t\cdot(1-u(t-2\pi)) + \sin t \cdot u(t-2\pi)$
$\Rightarrow x' = t-(t-2\pi)u(t-2\pi) - 2\pi u(t-2\pi) + \sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$
$\Rightarrow x' = t-u(t-2\pi)[(t-2\pi)+2\pi-\sin(t-2\pi)]$
Tác động biến đổi Laplace 2 vế, ta được:
$\mathscr{L}\{x'\}_{(s)} = \mathscr{L}\{t\}_{(s)} - \mathscr{L}\{u(t-2\pi)[(t-2\pi)+2\pi-\sin(t-2\pi)]\}_{(s)}$

$$\Rightarrow sX(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2\pi s}\mathscr{L}\{t+2\pi-\sin(t)\}$$
$$\Rightarrow sX(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2\pi}{s}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^3} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^3}+\frac{2\pi}{s^2}-\frac{1}{s(s^2+1)}\right)$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^3} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^3}+\frac{2\pi}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right)$$

Tác động biến đổi Laplace ngược 2 vế ta có:
$\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^3}+\frac{2\pi}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right)\right\} = u(t-2\pi)\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}+\frac{2\pi}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right\}_{(t-2\pi)}$$

$$= u(t-2\pi)\left(\frac{(t-2\pi)^2}{2}+2\pi(t-2\pi)-1+\cos(t-2\pi)\right) = u(t-2\pi)\left(\frac{(t-2\pi)^2}{2}+2\pi(t-2\pi)+\cos t-1\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} - u(t-2\pi)\left(\frac{(t-2\pi)^2}{2}+2\pi(t-2\pi)+\cos t-1\right)$$

Câu 5.1.5 **(1 điểm)** Tìm biến đổi Laplace ngược:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+s+1}{s^4+s^2+1}\right\}(t)$$

[Hướng dẫn giải]

Ta có:

$$\frac{s^3+s+1}{s^4+s^2+1}=\frac{As+B}{s^2-s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{s^2-s+1}+\frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+s+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+s+1}{s^4+s^2+1}\right\}(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Câu 5.1.6 **(1 điểm)** Cho hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa. Biết $f^{(n)}(1)=n^3$. Giá trị của $f(2)$ là ?

[Hướng dẫn giải]

Ta có: Hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa.

Khi đó: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}(x-1)^n$

Suy ra : $f(2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}(2-1)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=0+\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=5+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$

Suy ra: $f(2)-5=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-3)!}\right)$

Dễ thấy hàm số $f(x)$ được biểu diễn thành chuỗi luỹ thừa và chuỗi số trên dương nên chuỗi số trên là hội tụ tuyệt đối.

Khi đó: $f(2)-5=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}$

$=-\frac{1}{1!}-\frac{1}{0!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{3}{0!}+3\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}$

$=-5+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=-5+5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Suy ra : $f(2)=5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=5e$

Vậy $f(2)=5e$

5.2 Đáp án đề thi thử cuối kì CLB Hỗ trợ Học tập - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2023.2

Câu 5.2.1 **(2 điểm)** Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2023^n}{(2024n)^{2n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\cos\left(\frac{1}{n}\right)+(-1)^{n+1}$

[Hướng dẫn giải]

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2023^n}{(2024n)^{2n}}$

+) Ta có: $a_n=\frac{2023^n}{(2024n)^{2n}}>0,\forall n\geq 1\Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương

+) Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2023}{2024^2 n^2} = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2023^n}{(2024n)^{2n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi).\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) + (-1)^{n+1}$

$I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) + (-1)^{n+1}$

$I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\left[1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$

+) Xét $a_n = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow I$ là chuỗi đan dấu

+) Khi $x \to 0$ thì $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow$ Khi $n \to +\infty$ thì $\dfrac{1}{n} \to 0$ và: $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \quad (1)$

+) Xét: $f(x) = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0 \quad \forall x \geq 1 \quad (2)$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) < 0 \quad \forall x \geq 1 \quad (3)$ (vì $0 < \dfrac{1}{x} < 1 \Rightarrow \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow a_n$ là dãy dương, giảm về $0\ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Câu 5.2.2 **(1 điểm)** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+1)^n}{n(n+2)}$$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $x + 1 = y \Rightarrow$ Chuỗi đã cho trở thành chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n(n+2)} \cdot y^n$$

Ta có: $a_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)} > 0 \quad \forall n \geqslant 1$

Xét: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)} \cdot \dfrac{(n+1)(n+3)}{n+2} = 1$

Xét $y = 1$, chuỗi đã cho trở thành:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$$

Đặt $a_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)} > 0 \quad \forall n \geqslant 1$

Xét: $a_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)} \sim \dfrac{n}{n \cdot n} = \dfrac{1}{n}$ khi $n \to \infty$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì do $\alpha = 1 \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh

Xét $y=-1$, chuỗi đã cho trở thành
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}(-1)^n$$

Đặt $b_n=\dfrac{n+1}{n(n+2)}>0 \quad \forall n\geqslant 1$

Xét: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Xét $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+2)x}=\dfrac{x+1}{x^2+2x}>0 \quad \forall x\geqslant 1$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\dfrac{x^2+2x-2x^2-2x-2x-2}{(x^2+2x)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-2x-2}{(x^2+2x)^2}<0 \quad \forall x\geqslant 1$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm dương giảm $\forall x\geqslant 1 \Rightarrow b_n$ là dãy dương,giảm $\forall n\geq 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

$\Rightarrow$ Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n(n+2)}(-1)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Chuỗi hàm số hội tụ với: $-1\leqslant y<1 \Rightarrow -1\leqslant x+1<1$
$\Rightarrow -2\leqslant x<0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là $[-2;0)$

Câu 5.2.3 **(1 điểm)** Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier cosine:
$$f(x)=-x \quad \text{với} \quad -\pi\leq x\leq 0$$

[Hướng dẫn giải]

+) Mở rộng hàm đã cho thành hàm sau:

$$g(x)=\begin{cases}-x & \text{nếu} \quad -\pi\leq x\leq 0\\ x & \text{nếu} \quad 0<x\leq\pi\end{cases} \text{ tuần hoàn với chu kỳ } 2\pi$$

$\Rightarrow$ Hàm trở thành hàm chẵn $\Rightarrow b_n=0$

+) $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\pi$

+) $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right)$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{2(-1)^n-2}{\pi n^2}=\left[\begin{array}{ll}0 & \text{nếu n chẵn.}\\ \dfrac{-4}{\pi.n^2} & \text{nếu n lẻ.}\end{array}\right.$$

Vậy $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{-4}{\pi.(2n-1)^2}\cos[(2n-1)x]\right]$

Câu 5.2.4 **(3 điểm)** Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' - \dfrac{x+1}{3x^2}y = \dfrac{y^4}{3x^3} (x \neq 0)$

b) $\left[\dfrac{1}{x} - y\left(\dfrac{1}{x} + e^{xy}\right)\right] dx = (\ln x + xe^{xy})\, dy$

c) $y'' + y = x + 2\cos^2 x.$

[Hướng dẫn giải]

a) $y' - \dfrac{x+1}{3x^2}y = \dfrac{y^4}{3x^3} \quad (x \neq 0)\ (1)$

+) Với $y = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = 0$ là nghiệm kì dị của phương trình.

+) Với $y \neq 0$, chia cả 2 vế của phương trình (1) cho y^4 ta được:

$$y^{-4}y' - \frac{x+1}{3x^2}y^{-3} = \frac{1}{3x^3}\ (2)$$

+) Đặt $y^{-3} = u \Rightarrow u' = -3y^{-4}y'$, phương trình (2) trở thành:

$\dfrac{u'}{-3} - \dfrac{x+1}{3x^2}u = \dfrac{1}{3x^3} \Leftrightarrow u' + \dfrac{x+1}{x^2}u = -\dfrac{1}{x^3}\ (3)$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với: $\begin{cases} p(x) = \dfrac{x+1}{x^2} \\ q(x) = \dfrac{-1}{x^3} \end{cases}.$

$$\begin{aligned} \int p(x) &= \int \frac{x+1}{x^2}dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

+) Nghiệm tổng quát của phương trình (3) là

$$\begin{aligned} & u = e^{-\int p(x)}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) \\ \Leftrightarrow\ & u = e^{-\left(\ln|x| - \frac{1}{x}\right)}\left(C + \int \frac{-1}{x^3}e^{\left(\ln|x| - \frac{1}{x}\right)}dx\right) \\ \Leftrightarrow\ & u = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left[C + \int\left(\frac{-1}{x^3}xe^{-\frac{1}{x}}\right)dx\right] \\ \Leftrightarrow\ & u = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left[C + \int \frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx\right] \qquad\qquad (C \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow\ & u = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left[C + \int e^{-\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y^{-3} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left[C - e^{-\frac{1}{x}}\right]$$

$$\Leftrightarrow y^{-3} = \frac{Ce^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{1}{x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương là: $y^{-3} = \dfrac{Ce^{\frac{1}{x}}}{x} - \dfrac{1}{x} \quad (C \in \mathbb{R})$ và nghiệm kì dị: $y = 0$

b) $\left[\dfrac{1}{x} - y\left(\dfrac{1}{x} + e^{xy}\right)\right] dx = (\ln x + xe^{xy})\, dy\ (1) \quad (x > 0)$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{y}{x} + ye^{xy} - \frac{1}{x}\right] dx + (\ln x + xe^{xy})\, dy = 0$$

$$\begin{cases} P(x,y) = \frac{y}{x} + ye^{xy} - \frac{1}{x} \\ Q(x,y) = \ln x + xe^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + xye^{xy} + e^{xy} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{x} + xye^{xy} + e^{xy} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) là phương trình vi phân toàn phần
***Cách 1:** Chọn $(x_0, y_0) = (1,0)$. Nghiệm tổng quát phương trình (1) có dạng:

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C$$

hay

$$\int_1^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)d = C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^x -\frac{1}{t}dt + \int_0^y \left(\ln x + xe^{xt}\right)dt = C$

$\Leftrightarrow -\ln(t)\Big|_1^x + \left(t\ln(x) + e^{xt}\right)\Big|_0^y = C$

$\Leftrightarrow -\ln(x) + y\ln(x) + e^{xy} = C \quad (C \in \mathbb{R})$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình: $-\ln(x) + y\ln(x) + e^{xy} = C$ $(C \in \mathbb{R})$
***Cách 2:** Tồn tại nghiệm $u(x,y) = C, (C \in \mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u'_x = P(x,y) = \dfrac{y}{x} + ye^{xy} - \dfrac{1}{x} \\ u'_y = Q(x,y) = \ln(x) + xe^{xy}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = y\ln(x) + e^{xy} - \ln x + C(y) \\ u'_y = \ln(x) + xe^{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_y = \ln(x) + xe^{xy} + C'(y) \\ u'_y = \ln(x) + xe^{xy} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad C'(y) = 0 \Rightarrow \quad C(y) = C\ (C \in \mathbb{R})$

Vậy nghiệm của phương trình là: $u = y\ln(x) + e^{xy} - \ln(x) = C_1$ $(C_1 \in \mathbb{R})$

c) $y'' + y = x + 2\cos^2 x \quad (1)$

$\Leftrightarrow y'' + y = \cos 2x + x + 1$

+) Xét phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' + y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát là: $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$ $(C_1, C_2 \in R)$

+) Xét (1) có $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \cos 2x + (x+1)$ với $\alpha_1 + \beta_1 i = \pm 2i, \alpha_2 = 0$ đều không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng.

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của (1):

$Y = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D$
$\Rightarrow Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + C$
$\Rightarrow Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Thay vào phương trình (1),ta có:

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x + Cx + D = \cos 2x + x + 1$

$\Leftrightarrow \quad -3A\cos 2x - 3B\sin 2x + Cx + D = \cos 2x + x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ -3B = 0 \\ C = 1 \\ D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/3 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng $Y = -\dfrac{1}{3}\cos 2x + x + 1$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$y = \bar{y} + Y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \dfrac{1}{3}\cos 2x + x + 1 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Câu 5.2.5 **(1 điểm)** Tìm biến đổi Laplace ngược của biểu thức sau:

$$F(s) = \ln\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)$$

[Hướng dẫn giải]

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)'\right\} \\ &= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s^2+4s+5\right)\cdot\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)'\right\} \\ &= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(s^2+4s+5\right)\frac{-(2s+4)}{(s^2+4s+5)^2}\right\} \\ &= \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-(2s+4)}{s^2+4s+5}\right\} \\ &= \frac{2}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} \\ &= \frac{2}{t}e^{-2t}\cos t. \end{aligned}$$

Câu 5.2.6 **(1 điểm)** Giải phương trình vi phân sau, biết $x(0) = 0$:

$$tx''(t) - x'(t) - (1+t)x(t) = e^t$$

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) \quad (s > 1)$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s)$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - s.x(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathscr{L}\{tx''(t)\} &= -[s^2X'(s) + 2s.X(s)] \\ &= -s^2X'(s) - 2s.X(s) \end{aligned}$$

+) Lại có: $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow \mathscr{L}\{tx(t)\} = -X'(s)$

+) Tiến hành biến đổi Laplace 2 vế của phương trình vi phân đã cho, ta có:

$\mathscr{L}\{tx''(t)\} - \mathscr{L}\{x'(t)\} - \mathscr{L}\{x(t)\} - \mathscr{L}\{tx(t)\} = \mathscr{L}\{e^t\}$

$\Leftrightarrow -s^2X'(s) - 2sX(s) - sX(s) - X(s) + X'(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad (s > 1)$

$\Leftrightarrow (-s^2+1)X'(s) + (-3s-1)X(s) = \dfrac{1}{s-1}$

$\Leftrightarrow X'(s) + \dfrac{-3s-1}{-s^2+1}X(s) = -\dfrac{1}{(s-1)^2(s+1)} \quad (1)$

+) Áp dụng công thức phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, ta có nghiệm của phương trình (1) là:

$$X(s) = e^{\int \frac{3s+1}{-s^2+1}ds}\left(\int e^{\int \frac{3s+1}{s^2-1}ds}.\frac{-1}{(s-1)^2(s+1)}ds + C\right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2.(s+1)}\left(\int \frac{-1}{(s-1)^2(s+1)}.(s-1)^2.(s+1)ds + C\right)$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2.(s+1)}.(-s+C)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{s+1} + \frac{-1}{4}.\frac{1}{s-1} + \frac{-1}{2}.\frac{1}{(s-1)^2} + C.\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{s+1} + \frac{-1}{4}.\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(s-1)^2}\right)$$

+) Tiến hành Laplace ngược $X(s)$, ta thu được $x(t)$:

$$\Rightarrow x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}.e^t.t + C.\left(\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}.e^t.t\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\Rightarrow x(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}.e^t.t + C.\left(\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}.e^t.t\right)$

Câu 5.2.7 **(1 điểm)** Giải phương trình vi phân sau trên miền D : $x > 0$ biết y, y' và y'' liên tục trên **D** :

$$x^3y'' - x(x+1)y' + y = 0$$

[Hướng dẫn giải]

+) Ta có : $x^3y'' - x(x+1)y' + y = 0$

$\Leftrightarrow x^3y'' = x(x+1)y' - y$

$\Leftrightarrow xy'' = \dfrac{x(x+1)y' - y}{x^2} = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)y' + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)y = \left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)y\right]'$ (do $x > 0$)

+) Lại có theo bài ra y, y' và y'' liên tục trên D nên xy'' và $\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)y\right]'$ liên tục và khả tích trên D.

+) Khi đó nguyên hàm 2 vế của phương trình theo biến x ta được : $\displaystyle\int xy''dx = \int \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)y\right]' dx$

$\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{x}\right)y = \displaystyle\int xy''dx = \int xdy' = xy' - \int y'dx = xy' - y + A$

$\Leftrightarrow xy' - \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)y = -A$

$\Leftrightarrow y' - \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)y = -\dfrac{A}{x}$ (do $x > 0$)

$\Leftrightarrow y = e^{\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx}.\left[\displaystyle\int -\frac{A}{x}.e^{\int -\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx} + B\right] = x^2e^{-\frac{1}{x}}\left[\displaystyle\int -\frac{A}{x}.\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx + B\right]$

$\Leftrightarrow y = x^2e^{-\frac{1}{x}}\left[\displaystyle\int \frac{A}{x}de^{\frac{1}{x}} + B\right] = x^2e^{-\frac{1}{x}}.\left[\dfrac{Ae^{\frac{1}{x}}}{x} - \displaystyle\int Ae^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) + B\right]$

$y = x^2e^{-\frac{1}{x}}.\left[\dfrac{Ae^{\frac{1}{x}}}{x} - Ae^{\frac{1}{x}} + B\right] = Ax(1-x) + Bx^2e^{-\frac{1}{x}}$ (với $A, B \in \mathbb{R}$)

Vậy phương trình vi phân có nghiệm tổng quát $y = Ax(1-x) + Bx^2e^{-\frac{1}{x}}$ (với $A, B \in \mathbb{R}$).

5.3 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2022.2

Câu 5.3.1 Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$

[Hướng dẫn giải]

a) Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$

Ta có: $u_n = \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \dfrac{2n-1-n-1}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})}$

$= \dfrac{n-2}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})} = b_n > 0 \quad \forall n \geqslant 2$

$\Longrightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi dương

+) Xét $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})}$

Ta có $b_n = \dfrac{n-2}{(3n+2)(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1})} \sim \dfrac{n}{3n(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}}$(khi n $\longrightarrow \infty$) mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}$phân kỳ do ($\alpha = \dfrac{1}{2} <$ 1)

$\Longrightarrow$ chuỗi số dương $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh

b) Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$ có $u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$

+) Ta có: $a_n = \dfrac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}} > 0 \quad \forall n > 1 \quad (1)$

+) Xét $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{\sqrt{3x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2-\ln(2x)}{2\sqrt{3x}\sqrt{x}} < 0 \quad \forall (x \geq 4) \quad (2)$

$\Longrightarrow$ Hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[4; +\infty]$

$\Longrightarrow$ Dãy a_n là dãy giảm khi $n \longrightarrow +\infty$ +) Xét $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2\sqrt{3x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{3x}} = 0$ (Sử dụng quy tắc l'hospital) (3)

$\Longrightarrow$Từ (1), (2), (3) ta kết luận chuỗi số hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Câu 5.3.2 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{n+5}\right)^n \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^{2n}$$

[Hướng dẫn giải]

Đặt: $y = \left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2$. Chuỗi đã cho là chuỗi hàm số:

$$a_n = \left(\frac{4n-1}{n+5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{4n-1}{n+5}\right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

là bán kính hội tụ của chuỗi hàm số

Xét $y = \frac{1}{4}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-1}{n+5}\right)^n \cdot \dfrac{1}{4^n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4n-1}{n+5}\right)^n \cdot \dfrac{1}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\cdot\ln\left(\frac{4n-1}{4n+20}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{4n+20-21}{4n+20}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{n\cdot(-21)}{4n+20}} = e^{\frac{-21}{4}} \neq 0.$

$\Rightarrow$ chuỗi số phân kì tại $y = \dfrac{1}{4}$ mà $y \geqslant 0 \quad \forall x \neq -2$

$\Rightarrow$ Chuỗi hàm số hội tụ tại: $0 < y < \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 < \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow (2x-1)^2 < \frac{(x+2)^2}{4}\\
&\Leftrightarrow 4(4x^2-4x+1) < x^2+4x+4\\
&\Leftrightarrow 15x^2-20x<0\\
&\Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$

Câu 5.3.3 Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm $x_0 = 2$.

[Hướng dẫn giải]

+) Đặt $t = x-2$ khi đó $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ trở thành : $\dfrac{1}{\sqrt{4(t+2)-(t+2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4t+8-t^2-4t-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$

+) Khi đó bài toán trở thành khai triển Taylor của hàm số $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ trong lân cận của điểm $t_0 = x_0 - 2 = 0$ hay khai triển Maclaurin của hàm số $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$

+) Ta có : $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}} = \dfrac{1}{2}.\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

+) Lại có khai triển Maclaurin : $(1+x)^a = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$

+) Khi đó : $g(t) = \dfrac{1}{2}.\left(1+(\dfrac{-t^2}{4})\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}...-\frac{2n-1}{2}}{n!}.\left(-\dfrac{t^2}{4}\right)^n$

$= \dfrac{1}{2}.\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\frac{1}{2})^n(2n-1)!!}{n!}.\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n.t^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!.2^{3n+1}}.t^{2n}$

+) Thay lại $t = x-2$ ta được : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!.2^{3n+1}}.(x-2)^{2n}$

Vậy khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm $x_0 = 2$ là $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!.2^{3n+1}}.(x-2)^{2n}$.

Câu 5.3.4 Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$,

b) $t.x''(t) - (2t+1)x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t}$, $\qquad x(0) = \frac{1}{2}$

[Hướng dẫn giải]

a) Xét phương trình vi phân thuần nhất:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad (3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2+i \\ \lambda = 2-i. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = e^{2x}\cdot(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Ta thấy $\alpha + \beta i = 2+i$ là một nghiệm của phương trình đặc trưng $\Rightarrow$ Một nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng: $\Rightarrow \quad y^* = e^{2x}x(A\cos x + B\sin x)$.
$= Ae^{2x}\cdot x\cdot\cos x + Be^{2x}x\sin x$
$\Rightarrow y^{*'} = 2Ae^{2x}x\cos x + Ae^{2x}(\cos x - x\sin x) + 2Be^{2x}x\sin x + Be^{2x}(\sin x + x\cos x)$
$= (2A+B)\cdot e^{2x}x\cos x + (-A+2B)\cdot e^{2x}x\sin x + A\cdot e^{2x}\cos x + B\cdot e^{x}\sin x$
$\Rightarrow y^{*\prime\prime} = (4A+2B)\cdot e^{2x}x\cos x + (2A+B)e^{2x}(\cos x - x\sin x) + (-2A+4B)e^{2x}\cdot x\sin x + (-A+2B)e^{2x}(\sin x + x\cos x) + 2Ae^{2x}\cos x - A\cdot e^{2x}\sin x + 2Be^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x$
$= (3A+4B)e^{2x}x\cos x + (-4A+3B)e^{2x}x\sin x + (4A+2B)e^{2x}\cos x + (-2A+4B)e^{2x}\cos x$
$\Rightarrow y^{*''} - 4y^{*\prime} + 5y^* = 2Be^{2x}\cos x - 2A\cdot e^{2x}\sin x = e^{2x}\cdot\cos x$

Đồng nhất hệ số $\Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = 0. \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát cua phương trình đã cho là

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}e^{2x}x\sin x.$$

b) Ta có:

$$tx'' - (2t+1)x' - 2x = 2e^{2t}; x(0) = \frac{-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow tx'' - 2 + x' - x - 2x = 2e^{2t} \ (1)$$

Biến đổi Laplace 2 vế, ta có:

$$\mathscr{L}\{x\}(s) = X(s)$$
$$\mathscr{L}\left\{x'\right\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) + \frac{1}{2}$$
$$\mathscr{L}\left\{tx'\right\}(s) = -\left(sX(s) + \frac{1}{2}\right)' = -sX'(s) - X(s)$$
$$\mathscr{L}\left\{x''\right\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$
$$\mathscr{L}\left\{tx''\right\}(s) = -\left(s^2X(s) + \frac{s}{2} - x'(0)\right)'$$
$$\mathscr{L}\left\{2e^{2t}\right\} = \frac{2}{s-2}(s>2)$$

$$\left[-2sX(s)-s^2X'(s)-\frac{1}{2}\right]-2\left[-sX'(s)-X(s)\right]-\left[sX(s)+\frac{1}{2}\right]-2X(s)=\frac{2}{s-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2s-s^2\right)X'(s)-3sX(s)-1=\frac{2}{s-2}$$

Phương trình (1) trở thành: $\Leftrightarrow \left(2s-s^2\right)X'(s)-3sX(s)=\dfrac{s}{s-2}$

$$\Leftrightarrow X'(s)+\frac{3}{s-2}X(s)=\frac{-1}{(s-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad X'(s)+\frac{3}{s-2}X(s)=\frac{-1}{(s-2)^2}$$

PTVP tuyến tính cấp 1 có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{aligned}X(s)&=e^{-\int\frac{3}{s-2}dx}\cdot\left(\int e^{\int\frac{3}{s-2}ds}-\frac{1}{(s-2)^2}ds+c\right)\\&=\frac{1}{(s-2)^3}\left(\int-(s-2)ds+c\right)\\&=\frac{2s-\frac{s^2}{2}+c}{(s-2)^3}=\frac{4s-s^2+c}{2(s-2)^3}\\&=\frac{c-(s^2-4s+4)}{2(s-2)^3}=\frac{c-(s-2)^2}{2\cdot(s-2)^3}\\&=\frac{c}{(s-2)^3}-\frac{1}{2(s-2)}\end{aligned}$$

Biến đổi Laplace ngược vào 2 vế của phương trình đã cho có:

$$\begin{aligned}x&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{c}{(s-2)^3}-\frac{1}{2(s-2)}\right\}(t)\\&=e^{2t}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{c}{s^3}-\frac{1}{2s}\right\}\\&=e^{2t}\cdot\left(c\cdot\frac{t^2}{2!}-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $x(t)=e^{2t}\cdot\left(C\cdot\frac{t^2}{2!}-\frac{1}{2}\right)$

Câu 5.3.5

a) Tìm biến đổi Laplace ngược: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\}$

b) Giải phương trình vi phân sau:

$$\left(x^2+4\right)y''+2xy'-\frac{y}{x^2+4}=\frac{2023x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

[Hướng dẫn giải]

a) Có:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\}&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s}{(s^2+3)^2}+\frac{-3s}{(s^2+3)^2}+\frac{6}{(s^2+3)^2}\right\}\\&=\cos(\sqrt{3}t)-\frac{\sqrt{3}}{2}t.\sin(\sqrt{3}t)+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s^2+3)^2}\right\}\end{aligned}$$

Có: $\dfrac{6}{(s^2+3)^2}=2.\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\sin\sqrt{3}t\right\}\right)^2$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s^2+3)^2}\right\} = 2.\sin\sqrt{3}t * \sin\sqrt{3}t$$
$$= 2.\int_0^t \sin\sqrt{3}\tau.\sin\sqrt{3}(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t \cos(2\sqrt{3}\tau - \sqrt{3}t) - \cos(\sqrt{3}t)$$
$$= \frac{\sin\sqrt{3}t}{\sqrt{3}} - t.\cos\sqrt{3}t$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+6}{(s^2+3)^2}\right\} = \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{2}t.\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\sin\sqrt{3}t}{\sqrt{3}} - t.\cos\sqrt{3}t$$

b) Đặt $x = 2\tan t$

Khi đó ta có $\frac{dy}{dx} = y'_t.\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2y'_t}{x^2+4}$

$$y''_x = \frac{d\left(\frac{2y'_t}{x^2+4}\right)}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{4y''(t)}{(x^2+4)^2} - \frac{4xy'_t}{(x^2+4)^2}$$

Thay vào phương trình đã cho, ta có:

$4.y"_t - y = \frac{2023}{4}\sin 2t$

Xét phương trình $4.y"_t - y = 0$:

Xét phương trình đặc trưng: $4t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình:$y = C_1.e^{\frac{t}{2}} + C_2.e^{\frac{-t}{2}}$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân có dạng: $y* = A.\sin(2t) + B.\cos(2t)$

Thay vào phương trình, ta có:

$y* = \frac{-2023}{68}.\sin(2t)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1.e^{\frac{t}{2}} + C_2.e^{\frac{-t}{2}} + \frac{-2023}{68}.\sin(2t)$

Trả biến cũ: $y = C_1.e^{\frac{\arctan\frac{x}{2}}{2}} + C_2.e^{\frac{-\arctan\frac{x}{2}}{2}} + \frac{-2023}{68}.\sin(2\arctan\frac{x}{2})$

5.4 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 2 - Học kỳ 2022.2

Câu 5.4.1 Đánh giá sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{n(n+2)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n^2.\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Ta có: $a_n=\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{n(n+2)}>0,\ \forall n\geq 1\Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương

+) Xét $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{3n+1}\right)^{(n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{3n+1}{3}}\right)^{(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{3n+1}{3}}\right)^{-\left(\frac{3n+1}{3}\right).\frac{-3(n+2)}{3n+1}}$$

$$=e^{-1}<1$$

$\left(\text{Với}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{3n+1}{3}}\right)^{-\left(\frac{3n+1}{3}\right)}=e\ ;\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3(n+2)}{3n+1}=-1\right)$

nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Cau chy.

+) Kết luận: Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy

b)

+) $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n^2.\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

+) Xét $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2.\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

+) Ta có khai triển Maclaurin: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$

Mà $n\to+\infty$ thì $\dfrac{1}{n^2}\to 0$ nên ta có:

$$e^{\frac{1}{n^2}}=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}}-1-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

+) Khi $n\to+\infty$, ta có:

$$n^2.\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1-\frac{1}{n^2}\right)\sim n^2.\frac{1}{2n^4}=\frac{1}{2n^2}$$

+) Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ hội tụ (do $\alpha=2>1$) nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ tuyệt đối $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ.

Câu 5.4.2 **a)** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^n(4n^2+1)}(x-2)^n$$

b) Khai triển thành chuỗi Maclaurin của hàm:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-9x+20}$$

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Đặt $X=x-2 \Rightarrow$ chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3^n(4n^2+1)}X^n$ (2) là chuỗi lũy thừa với $a_n=\frac{2n^2}{3^n(4n^2+1)}$

+) Xét $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3^n(4n^2+1)}.\frac{3^{n+1}[4(n+1)^2+1]}{2(n+1)^2}=3$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của (2) là $(-3,3)$

+) Với $X=-3$, chuỗi (2) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2(-1)^n}{4n^2+1}$ có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2(-1)^n}{4n^2+1}\right|=\frac{1}{2}\neq 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

+) Với $X=3$, chuỗi (2) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{4n^2+1}$ có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2}{4n^2+1}\right|=\frac{1}{2}\neq 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi phân kỳ do không thỏa mãn điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

+) (2) hội tụ với $-3<X<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5$

+) Kết luận: Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1,5)$.

b)

+) Ta có $f(x)=\frac{1}{x^2-9x+20}=\frac{1}{(4-x)(5-x)}=\frac{1}{4-x}-\frac{1}{5-x}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{5}}\right)$

+) Mà $\frac{1}{1-\frac{x}{4}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$, $|x|<4$

+) Tương tự ta có $\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$, $|x|<5$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n-\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$, $|x|<4$

+) Kết luận: Vậy khai triển Maclaurin của $f(x)$ là: $f(x)=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n-\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$, $|x|<4$

Câu 5.4.3 **(2 điểm)** Giải các phương trình

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+9xy+y^2}{9x^2}$

b) $xy'-2y=x^3\sin x; x\neq 0$

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Điều kiện: $x\neq 0$

+) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+9xy+y^2}{9x^2}\Rightarrow y'=\frac{1}{9}+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{9x^2}$ (1)

+) Đặt $\frac{y}{x}=u\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$

+) Thay vào (1), ta được:

$u'x+u=\frac{1}{9}+u+\frac{u^2}{9}$
$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1}{9}+\frac{u^2}{9}$
$\Leftrightarrow \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{dx}{x}$
$\Leftrightarrow \int\frac{du}{1+u^2}=\int\frac{1}{9}\cdot\frac{dx}{x}$
$\Leftrightarrow \arctan u=\frac{1}{9}\ln|x|+C$
$\Leftrightarrow \arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{9}\cdot\ln\left|x\right|+C$

+) Kết luận: Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là: $\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{9}\ln|x|+C(C\in\mathbb{R})$

b)

+) Điều kiện: $x\neq 0$

$xy'-2y=x^3\sin x\Rightarrow y'-\frac{2y}{x}=x^2\sin x$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với $\begin{cases} p(x)=\frac{-2}{x} \\ q(x)=x^2\sin x \end{cases}$

+) Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)\\ &=e^{\int\frac{2}{x}}\left(C+\int x^2\sin(x)e^{\int\frac{-2}{x}dx}dx\right)\\ &=x^2\left(C+\int x^2\sin(x)\frac{1}{x^2}dx\right)\\ &=x^2\left(C+\int\sin x dx\right)\\ &=x^2(C-\cos x)\end{aligned}$$

+) Kết luận: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y=x^2(C-\cos x)(C\in\mathbb{R});(x\neq 0)$

Câu 5.4.4 (2 điểm)

Cho phương trình: $y''+m^2y=3\cos 2x$; với m là hằng sô thực khác 0.

a) Giải phương trình với $m=1$.

b) Giải và biện luận phương trình theo m.

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Với $m=1$, phương trình đã cho trở thành: $y"+y=3\cos 2x\ (1)$

+) Xét phương trình thuần nhất: $y"+y=0$ có phương trình đặc trưng: $\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm i$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát $\overline{y}=C_1\cos(x)+C_2\cos(x)\ (C_1,C_2\in\mathbb{R})$

+) $f(x)=3\cos 2x=3e^0.\cos 2x$ có $\alpha\pm\beta i=0\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của (1) có dạng:

$Y=A\cos(2x)+B\sin(2x),(A,B\in\mathbb{R})$

$Y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

$Y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

$\Rightarrow -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = 3\cos(2x)$

$\Leftrightarrow (-3A)\cos(2x) + (-3B)\sin(2x) = 3\cos(2x)$

Đồng nhất hệ số: $\Leftrightarrow \begin{cases} -3A = 3 \\ -3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Y = -\cos(2x)$ là nghiệm riêng.

+) Kết luận: Vậy $y = C_1\cos(x) + C_2\cos(x) - \cos(2x)$ là nghiệm của phương trình đã cho tại $m = 1$

b)

+) Xét phương trình thuần nhất: $y'' + m^2y = 0$ có phương trình đặc trưng:‘

$$\lambda^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm mi$$

-TH1: Nếu $m = \pm 2 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

Khi đó $f(x) = 3\cos 2x = 3e^0.cos2x$ có $\alpha + \beta i = 0 \pm 2i$ là nghiệm của phương trình thuần nhất.

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng có dạng:

$Y = x(A\sin 2x + B\cos 2x), (A, B \in \mathbb{R})$
$Y' = (A - 2Bx)\sin 2x + (B + 2Ax)\cos 2x$
$Y" = \sin 2x(4Ax - 4B) + \cos 2x(4A - 4Bx)$
$\Rightarrow Y'' - 4Y = \sin 2x(-4B) + \cos 2x(4A - 8Bx) = 3\cos 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} -4B = 0 \\ 4A - 8Bx = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{3}{4}x\sin 2x\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ là nghiệm của phương trình.

-TH2: Nếu $m \neq \pm 2$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng có dạng: $Y = A\sin 2x + B\cos 2x, (A, B \in \mathbb{R})$
$Y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$
$Y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$
$\Rightarrow Y'' + m^2Y = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x + Am^2\sin 2x + Bm^2\cos 2x = A(m^2 - 4)\sin 2x + B(m^2 - 4)\cos 2x$
$= 3\cos 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} A(m^2 - 4) = 0 \\ B(m^2 - 4) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{3}{m^2 - 4} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ngiệm riêng: $Y = \dfrac{3}{m^2 - 4}\cos(2x)$

$\Rightarrow y = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx) + \dfrac{3}{m^2 - 4}\cos(2x).(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

+) Kết luận: Vậy:

- Với $m = \pm 2 \Rightarrow y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \dfrac{3}{4}x\sin(2x).(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$
- Với $m \neq \pm 2 \Rightarrow y = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx) + \dfrac{3}{m^2 - 4}\cos(2x).(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Câu 5.4.5 **(2 điểm)**

a) Tìm biến đổi Laplace của hàm $f(t) = 6e^{3t}\cos(2t) + t^3e^{2t}; t \geq 0$

b) Giải bài toán sau đây bằng biến đổi Laplace:

$y^{(3)} - 6y" + 12y' - 8y = 0; y(0) = y"(0) = 0, y'(0) = 1$

[Hướng dẫn giải]

a)

+) Ta có: $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$

+) Khi đó : $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{6e^{3t}\cos(2t) + t^3e^{2t}\}(s)$

$= 6\mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s-3) + \mathscr{L}\{t^3\}(s-2)$

$= 6.\dfrac{s-3}{(s-3)^2+2^2} + \dfrac{3!}{(s-2)^{3+1}} = \dfrac{6(s-3)}{s^2-6s+13} + \dfrac{6}{(s-2)^4}\ (s>2)$

+) Kết luận: Vậy biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ là $F(s) = \dfrac{6(s-3)}{s^2-6s+13} + \dfrac{6}{(s-2)^4}\ (s>2))$

b)

+) Đặt $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathscr{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) \\ \mathscr{L}\{y"(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1 \\ \mathscr{L}\{y^(3)(t)\}(s) = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y"(0) = s^3Y(s) - s \end{cases}$$

+) Áp dụng phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình, ta được:

$s^3Y(s) - s - 6(s^2Y(s) - 1) + 12sY(s) - 8Y(s) = 0$

$\Leftrightarrow Y(s).(s^3 - 6s^2 + 12s - 8) = s - 6$

$\Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{s-6}{s^3-6s^2+12s-8}$

$\Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{s-6}{(s-2)^3}$

$\Leftrightarrow Y(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2} - \dfrac{4}{(s-2)^2}$

+) Laplace ngược 2 vế ta được:

$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^2} - \dfrac{4}{(s-2)^3}\right\}$

$\Leftrightarrow y(t = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{4}{s^3}\right\}.e^{2t}$

$\Leftrightarrow y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - 2\dfrac{2}{s^3}\right\}.e^{2t}$

$\Leftrightarrow y(t) = t.e^{2t} - 2t^2.e^{2t}$

+) Kết luận: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y(t) = t.e^{2t} - 2t^2.e^{2t}$

5.5 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2021.3

Câu 5.5.1 Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2\sin n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$.

[Hướng dẫn giải]

a) Đặt $U_n = \dfrac{1}{n^3+n^2\sin n} = \dfrac{1}{n^2(n+\sin n)} \geq 0 \quad \forall n \geq 4$.

Xét $n+\sin n > 3 \quad \forall n \geq 4 \Rightarrow n^2(n+\sin n) > 3n^2 \quad \forall n \geq 4$.
$\Rightarrow U_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Mà $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ (Do $\alpha = 2 > 1$)
$\Rightarrow \sum\limits_{n=4}^{\infty} U_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh
$\Rightarrow$ Hàm đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) Đặt $U_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} > 0 \quad \forall n \geq 4$.
$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương.
Xét $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^2 = 4 \geq 1$.
$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Câu 5.5.2 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3x^2)^{2n}}{n^2+n}.$$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $y = \left(x-3x^2\right)^2 \quad (y \geq 0)$.
$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho trở thành chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad (1)$ với $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$

Xét $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n}\right| = 1$
$\Rightarrow$ Chuỗi (1) hội tụ khi $|y| < 1$, phân kỳ khi $|y| > 1$.
Mà $y \geq 0 \Rightarrow$ Chuỗi (1) hội tụ khi $0 \leq y < 1$.

Xét tại $y = 1$, (1) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi

$$0 \leq \left(x-3x^2\right)^2 \leq 1 \iff \frac{1-\sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

Câu 5.5.3 Giải các phương trình vi phân sau

a) $2xydx + (x^2-9y^2)dy = 0$.
b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

[Hướng dẫn giải]

a) +TH1: $y = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+TH2: $y \neq 0$. Chia cả hai vế phương trình cho y ta được

$$2xx' + \frac{x^2}{y} = 9y \tag{5.1}$$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow u' = 2xx'$. Khi đó, (1) $\leftrightarrow u' + \dfrac{u}{y} = 9y$ là phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left(C+\int 9ye^{\int \frac{1}{y}dy}dy\right)\\ \leftrightarrow u &= \frac{1}{y}(C+3y^3)\\ \leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{y}(C+3y^3)\end{aligned}$$

b) $y''-4y'+4y=2e^{2x}$. (1)

Xét phương trình thuần nhất $y''-4y'+4y=0$ có phương trình đặc trưng là

$$k^2-4k+4=0 \leftrightarrow k_1=k_2=2$$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $\overline{y}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

$f(x)=2e^{2x} \Rightarrow \lambda=2=k_1=k_2 \Rightarrow$ (1) có nghiệm riêng $y^*=Ax^2e^{2x}$

Ta có: $\begin{cases}(y^*)'=2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}\\ (y^*)''=2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}\end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $2Ae^{2x}=2e^{2x} \Rightarrow A=1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+x^2e^{2x}$.

Câu 5.5.4 Sử dụng biến đổi Laplace, giải phương trình

$$x^{(4)}+2x''+x=-2, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$$

[Hướng dẫn giải]

Đặt $\mathscr{L}\{x\}(s)=F(s)$. Ta có
$\mathscr{L}\{x''\}(s)=s^2F(s)-sx(0)-x'(0)=s^2F(s)$
$\mathscr{L}\{x^{(4)}\}(s)=s^4F(s)-s^3x(0)-s^2x'(0)-sx''(0)-x'''(0)=s^4F(s)$
$\mathscr{L}\{-2\}(s)=\dfrac{-2}{s}$

Tác động phép biến đổi Laplace vào 2 vế của phương trình, ta được

$$\begin{aligned} & s^4F(s)+2s^2F(s)+F(s)=\frac{-2}{s}\\ \Rightarrow\quad & (s^4+2s^2+1)F(s)=\frac{-2}{s}\\ \Rightarrow\quad & F(s)=\frac{-2}{s(s^2+1)^2}\\ \Rightarrow\quad & F(s)=\frac{-2}{s}+\frac{2s}{s^2+1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

Do đó, ta có $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$

$$=-2+2\cos t+t\sin t$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t)=-2+2\cos t+t\sin t$

Câu 5.5.5 Cho hàm số $f(t)=\begin{cases}\sin 2t & \text{nếu} \quad 0\le t<\pi\\ \cos t & \text{nếu} \quad t\ge\pi\end{cases}$.

Tính $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

[Hướng dẫn giải]

Cách 1. Dùng định nghĩa.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\pi e^{-st}\sin 2t dt + \int_\pi^\infty e^{-st}\cos t dt \\
&= \frac{e^{-st}}{s^2+4}(-s\sin 2t - 2\cos 2t)\Big|_0^\pi + \frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\cos t + \sin t)\Big|_\pi^\infty \qquad (s>0) \\
&= \frac{2}{s^2+4}(1-e^{-\pi s}) - s\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Cách 2. Ta biểu diễn lại $f(t)$ qua hàm Heaviside như sau:

$$\begin{aligned}
& f(t) = \sin 2t(1-u(t-\pi)) + \cos t.u(t-\pi) \\
& \quad = \sin 2t - \sin[2(t-\pi)]u(t-\pi) - \cos(t-\pi)u(t-\pi) \\
\Rightarrow \; & \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 2t\}(s) - \mathscr{L}\{\sin[2(t-\pi)]u(t-\pi)\}(s) - \mathscr{L}\{\cos(t-\pi)u(t-\pi\}(s) \\
& \quad = \frac{2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Câu 5.5.6 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kì 2π và $f(x) = 3x - 3\pi$ trên $[0,\pi]$.

[Hướng dẫn giải]

Từ giả thiết ta có $f(x) = \begin{cases} 3x - 3\pi, & 0 \le x \le \pi \\ -3x - 3\pi, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$.

Nhận thấy $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[0,2\pi]$ nên $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Fourier.

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên $b_k = 0, \; \forall \; k \in \mathbb{N}$.

+) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{3x^2}{2} - 3\pi x\right)\Bigg|_0^\pi = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{3\pi^2}{2} - 3\pi^2\right) = -3\pi.$

$$\begin{aligned}
\textbf{+)}\; a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (3x-3\pi)d\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right) \\
&= \frac{6}{\pi}(x-\pi)\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)\Bigg|_0^\pi - \frac{6}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)dx = 0 - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos(kx)}{-k^2}\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{6}{\pi k^2}((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

Do $f(x)$ liên tục nên ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-3\pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{6}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cos(kx) \\
&= \frac{-3\pi}{2} - \sum_0^\infty \frac{12}{\pi(2k+1)^2}\cos[(2k+1)x]
\end{aligned}$$

Câu 5.5.7 Xét phương trình: $\qquad (x^2+1)y'' + a(x)y' - y = -1 \qquad (1)$

Biết $y_1(x) = x+1$ và $y_2(x) = 1$ là hai nghiệm riêng của (1). Hãy tìm $a(x)$ và nghiệm tổng quát của (1).

[Hướng dẫn giải]

Với $y_1(x) = x+1 \Rightarrow y_1'(x) = 1 \Rightarrow y_1''(x) = 0$. Thay vào phương trình đã cho:

$$\left(x^2+1\right).0 + a(x).1 - (x+1) = -1 \Leftrightarrow a(x) = x$$

$\Rightarrow$ **(1)** trở thành $\left(x^2+1\right)y''+xy'-y=-1 \Leftrightarrow (x^2+1)y''+xy'-(y-1)=0$ **(2)**

Đặt $u=y-1 \Rightarrow u'=y' \Rightarrow u''=y''$. Phương trình đã cho trở thành phương trình thuần nhất:

$$\left(x^2+1\right)u''+xu'-u=0 \Leftrightarrow u''+\frac{x}{x^2+1}u'-\frac{u}{x^2+1}=0 \text{ } \mathbf{(3)}\text{, có } p(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

Vì $y_1(x)$ là một nghiệm của **(2)** $\Rightarrow u_1(x)=y_1(x)-1=x$ là một nghiệm của **(3)**.

Dùng công thức Liouville, một nghiệm riêng khác của **(3)** là:

$$u_2=u_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{u_1^2}dx=x\int\frac{e^{-\int\frac{x}{x^2+1}dx}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{\frac{-ln(x^2+1)}{2}}}{x^2}dx=x\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}.x^2}dx$$

- Với $x>0$ thì:

$$u_2=x\int\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.x^2}dx=x\int\frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.\frac{-2dx}{x^3}=x\int\frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-\sqrt{x^2+1}.$$

- Với $x<0$ thì: $u_2=x\displaystyle\int\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.x^2}dx=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{x^2+1}.$

Tóm lại, chọn $u_2=-\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của **(3)** là:

$$u=C_1u_1+C_2u_2=C_1x-C_2\sqrt{x^2+1} \;\; (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y=u+1=C_1x-C_2\sqrt{x^2+1}+1 \;\; (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

Câu 5.5.8 Giả sử rằng m,c,k và F_0 là các hằng số dương, $c^2>mk$. Chứng minh rằng mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình $my''+2cy'+ky=2F_0$ đều thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\frac{2F_0}{k}$.

[Hướng dẫn giải]

Phương trình thuần nhất: $my''+2cy'+ky=0$.

Phương trình đặc trưng: $m\lambda^2+2c\lambda+k=0$ có $\Delta=4c^2-4mk>0$ do $c^2>mk$

$\Rightarrow$ phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1,λ_2.

Áp dụng định lý Viet, ta có: $\begin{cases}\lambda_1\lambda_2=\frac{k}{m}>0\\ \lambda_1+\lambda_2=\frac{-2c}{m}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1<0\\ \lambda_2<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm thuần nhất $\overline{y}(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})$,

Vì vế phải phương trình đã cho là $f(x)=2F_0=2F_0.e^{0.x}$, trong đó $\lambda=0$ chắc chắn không phải nghiệm của phương trình đặc trưng (vì $\lambda_1<0,\lambda_2<0$)

$\Rightarrow$ một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $Y(x)=A\Rightarrow Y'=0\Rightarrow Y''=0$.

Thay vào phương trình đã cho: $m.0+2c.0+k.A=2F_0\Rightarrow A=\frac{2F_0}{k}\Rightarrow Y(x)=\frac{2F_0}{k}$.

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y(x) = \overline{y}(x) + Y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{2F_0}{k}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dfrac{2F_0}{k} \right) = 0 + 0 + \dfrac{2F_0}{k} = \dfrac{2F_0}{k}$ (vì $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$)

$\Rightarrow$ Đpcm.

5.6 Đáp án đề thi cuối kì - Nhóm ngành 1 - Học kỳ 2021.2

Câu 5.6.1 Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ Cô-si cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

[Hướng dẫn giải]

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, Khi đó:
Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.
Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

Đặt $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ta xét $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n} = \dfrac{1}{e} < 1$

Nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Cô-Si.

Câu 5.6.2 Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-3n}\right)$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $u_n = \ln\left(1 + e^{-3n}\right) > 0$ với $n > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-3n}\right)$ là chuỗi dương.

Khi $n \to \infty \quad u_n \sim \left(\dfrac{1}{e}\right)^{3n}$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^{3n}$ hội tụ (do $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{3} < 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-3n}\right)$ hội tụ theo TCSS.

Câu 5.6.3 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+5}} > 0$ với $(n > 1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ là chuỗi đan dấu

Dễ thấy, $v_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+7}} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+5}} = v_n \Rightarrow$ là dãy giảm

Mà $\lim\limits_{x\to\infty} v_n = 0$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ hội tụ

Câu 5.6.4 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\cos x)^n}{n}$.

[Hướng dẫn giải]

Đặt $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n}$ và $y = \cos(x) \to I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$ với $a_n = \frac{1}{n}$

Bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của I là $(-1,1)$.

- Tại $y = 1$, ta có chuỗi $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

- Tại $y = -1$, ta có chuỗi $I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\frac{1}{n}$ là chuỗi đan dấu, có $\frac{1}{n}$ là dãy giảm và $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy I hội tụ khi và chỉ khi $-1 \le y < 1$ hay $-1 \le \cos x < 1$ hay $\cos x \ne 1 \iff x \ne k2\pi (k \in Z)$

Vậy miền hội tụ cần tìm là $x \in R, x \ne k2\pi (k \in Z)$

Câu 5.6.5 Giải phương trình vi phân $(e^{2y} + x)y' = 1$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $(e^{2y} + x)y' = 1 \Rightarrow e^{2y} + x = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = x' \iff x' - x = e^{2y}$.

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(y) = -1, q(y) = e^{2y}$

Do đó $e^{-y}(x' - x) = e^y \Rightarrow e^{-y}.x = \int e^y = e^y + C \Rightarrow x = e^{2y} + C.e^y$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $x = e^{2y} + C.e^y$

Câu 5.6.6 Giải phương trình vi phân $x'(y) = e^y y\sqrt{x^2+3}$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $x'(y) = e^y.y.\sqrt{x^2+3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y.y.\sqrt{x^2+3} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = e^y.ydy$

Tích phân 2 vế: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int e^y.ydy \Rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2+3}) = \int y.d(e^y) = y.e^y - e^y + C (C \in R)$

Vậy $\ln(x + \sqrt{x^2+3}) = y.e^y - e^y + C$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Câu 5.6.7 Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x'(t) = y - 5\sin t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $x''(t) = y'(t) - 5\cos t = 2x + y - 5\cos t = 2x + x'(t) + 5\sin t - 5\cos t$

$\Rightarrow x''(t) - x'(t) - 2x = 5\sin t - 5\cos t \quad (1)$

Xét phương trình thuần nhất $x''(t) - x'(t) - 2x = 0$ có phương trình đặc trưng là:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = -1$$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $\overline{x} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

Mà $f(t) = 5\sin t - 5\cos t \Rightarrow x^* = A\cos t + B\sin t$

Ta có: $\begin{cases} (x^*)' = -A\sin t + B\cos t \\ (x^*)'' = -A\cos t - B\sin t \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

Suy ra: $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 2\cos t - \sin t$

Ta có: $y(t) = x'(t) + 5\sin t = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + 3\sin t - \cos t$

Vậy $\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + 2\cos t - \sin t \\ y(t) = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + 3\sin t - \cos t \end{cases}$

Câu 5.6.8 Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số $f(t) = e^{3t}$.

[Hướng dẫn giải]

Theo định nghĩa ta có:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-3)t}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-3)t}}{3-s}\Big|_0^\infty = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(s-3)A}}{3-s} - \frac{1}{3-s}$$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-3} \qquad (s > 3)$

Câu 5.6.9 Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace

$$x'' + x = f(t), x(0) = x'(0) = 0; f(t) = \begin{cases} \sin 2t,\ 0 \le t < 2\pi \\ 0,\ t \ge 2\pi \end{cases}$$

[Hướng dẫn giải]

Ta có: $f(t) = \sin 2t(1 - u(t-2\pi)) \Rightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}e^{-2\pi s}$
Đặt: $\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$
Biến đổi Laplace phương trình đã cho ta được:
$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}e^{-2\pi s}$
$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}e^{-2\pi s}$
$\Rightarrow x(t) = \mathscr{L}^{-}\{\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}e^{-2\pi s}\}(t)$
$= \mathscr{L}^{-}\{\frac{2}{3(s^2+1)}\}(t) - \mathscr{L}^{-}\{\frac{2}{3(s^2+4)}\}(t) - u(t-2\pi)\cdot\mathscr{L}^{-}\{\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}\}(t-2\pi)$
$= \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t - u(t-2\pi)(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t) \quad (t \ge 0)$
Vậy nghiệm của phương trình là: $x(t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t - u(t-2\pi)(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t);\ t \ge 0$

Câu 5.6.10 Cho $y(x)$ là một nghiệm của phương trình $y'' + my' + y = 0,\ m \in \mathbb{R}$. Tìm điều kiện của tham số m để $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

[Hướng dẫn giải]

Gọi nghiệm của phương trình đặc trưng $\lambda^2 + m\lambda + 1 = 0$ là λ_1, λ_2
Xét $m \notin [-2;2]$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

Mà: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -m \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ cùng dấu với $-m$

$\Rightarrow$ Với $m > 2$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$, và với $m < -2$, $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.
Xét $m = -2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1 + xC_2)e^x$
$\lim_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.
Xét $m = 2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-x}$
$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
Xét $-2 < m < 2$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng: $y(x) = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

Ta có: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -m \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha$ cùng dấu với $-m$

Với $0 < m < 2 \Rightarrow \alpha < 0$, ta có:

$$-(|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x} \le (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x} \le (|C_1| + |C_2|)e^{\alpha x}$$

Mà: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-(|C_1|+|C_2|)e^{\alpha x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(|C_1|+|C_2|)e^{\alpha x} = 0 \quad$ (với $\alpha < 0$)
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$
Với $-2 < m \leq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ không xác định.
Vậy $m > 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí - Giáo trình Toán cao cấp, nhà xuất bản giáo dục.

[2] Bùi Xuân Diệu - Bài giảng Giải tích 3, Đại học Bách khoa Hà Nội.

[3] Đề cương môn Giải tích 3, Khoa Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội.