ĐỀ THI GIỮA KÌ GIẢI TÍCH 3 – HỌC KỲ 20172, NHÓM NGÀNH 1 K62

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 0$

Áp dụng tiêu chuẩn Dalembert, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+1)^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}} \div \frac{3n^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{3(n+1)^2+1}{3n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}.\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 0$

Khi $n \rightarrow +\infty$, ta có:

$$\sqrt{n+1}.\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) = \sqrt{n+1}.\ln\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) \sim \frac{2\sqrt{n+1}}{n^2+1} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n.(x+4)^n}$$

Đặt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n.(x+4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^n$ với $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n}, t = \frac{1}{x+4}$ $(x \neq -4)$

Bán kính hội tụ của chuỗi là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)}{n^2.3^n} \div \frac{(n+2)}{(n+1)^2.3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3.(n+1)^3}{n^2.(n+2)}\right| = 3$$

Xét tại biên $t = 3$, chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2} \text{ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt}$$

Xét tại biên $t = -3$, chuỗi đã cho trở thành

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2} \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ là chuỗi phân kỳ}$$

→ Chuỗi hội tụ khi $-3 < t \leq 3$

$$\rightarrow\ -3 < \frac{1}{x+4} \leq 3$$

$$\rightarrow\ x < -\frac{13}{3} \cup x \geq -\frac{11}{3}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $x \in \left(-\infty; -\frac{13}{3}\right) \cup \left[-\frac{11}{3} \cup +\infty\right)$

Câu 3: Khai triển $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}.x+1}$$

Đặt $\frac{3}{2}x = u$

Khai triển Maclaurin của $f(u)$ là

$$f(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}.(-1)^n.u^n \quad , -1 < u < 1$$

Thay $t = \dfrac{3x}{2}$, suy ra chuỗi maclaurin của $f(x)$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}.(-1)^n.\left(\frac{3}{2}x\right)^n = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\left(\frac{3}{2}\right)^n.x^n \quad , -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Câu 4: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.x^{4n}}{(n+1)3^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1, x \in R$

Đặt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.x^{4n}}{(n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^n$ với $u_n = \dfrac{n}{(n+1)3^n}$, $t = x^4$, $(t \geq 0)$

Bán kính hội tụ của chuỗi là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} \div \frac{n+1}{(n+2)3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2).3^{n+1}}{(n+1)^2.3^n} = 3$$

Xét tại biên $t = 3$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)}$ có $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1 \neq 0$

$\rightarrow$ Chuỗi phân kì tại $t = 3$. Suy ra chuỗi đã cho hội tụ khi chỉ khi $t < 3$

$\rightarrow 0 \leq x^4 < 3$

$\rightarrow -\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $\left(-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right)$

Câu 5: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Viết lại chuỗi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{6^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{8^2+1}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(2n)^2+1}}$$

Xét $f(n) = \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+1}}$. Có $f'(n) = \frac{-4n}{\sqrt{(4n^2+1)^3}} < 0, \forall n > 0$

Và $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+1}} = 0$

$\rightarrow f(n)$ là một dãy đơn điệu, tiến tới 0 khi $n \rightarrow +\infty$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

Câu 6: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^6+4x^4}$ trên R

Theo định lí Cauchy, ta có $n^6 + 4x^4 \geq 4n^3x^2$

$$\rightarrow \frac{nx^2}{n^6+4x^4} \leq \frac{nx^2}{4n^3x^2} = \frac{1}{4n^2}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ là chuỗi hội tụ

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ đều và tuyệt đối trên R

Câu 7: Khai triển $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 2$

Đặt $x + 2 = t \rightarrow x = t - 2$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{-1}{1 - t^2}$$

Khai triển Maclaurin của f(t) là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -(t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -t^{2n} \quad , -1 < t < 1$$

Thay $t = x + 2$, khai triển Maclaurin của f(x) là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -(x+2)^{2n} \quad , -3 < x < -1$$

Câu 8: Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.e^{nx}$ với $x < 0$. Tính $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x)dx$

$$\text{Ta có: } \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x)dx = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} n.e^{nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} n.e^{nx}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}\Big|_{-\ln 4}^{-\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

Câu 9: Tính tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ với $-1 < x < 1$

Với $-1 < x < 1$, chuỗi đã cho là khả vi, khả tích với mọi x thuộc khoảng đang xét

$$\text{Gọi } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} = x.P(x)$$

$$\int_0^x P(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} n^2 t^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = x.Q(x)$$

$$\int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{n-1}nt^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n = \frac{x}{1+x}$$

$$\to Q(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\to P(x) = \left(x.Q(x)\right)' = \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$\to S(x) = x.P(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, với $x \in (-1;1)$