Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

TUẦN 2

Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ BÀI

Bài 1: Tìm hình bao của họ đường cong:

$$x^2 + y^2 - xcos\alpha \ - ysin\alpha - 2 = 0$$

Bài 2: Tính tích phân sau:

$$\iint\limits_{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2} sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

Bài 3: Tính tích phân sau:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x| + |y|)\, dx\, dy$$

Bài 4: Tính diện tích của hình phẳng, được giới hạn bởi các đường

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);\ x^2 + y^2 = a^2\ (x^2 + y^2 \ge a^2)$$

Bài 5*: Tính thể tích của vật thể bị giới hạn bởi những mặt:

$$z = xy, x + y\ + z = 1, z = 0$$

CLB Hỗ trợ học tập

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2
ĐÁP ÁN

Bài 1: Hướng dẫn giải:

Ta có: $\mathrm{F'}_{\mathrm{x}} = 2x - cos\alpha, \mathrm{F'}_{\mathrm{y}} = 2y - sin\alpha$

$$\begin{cases} \mathrm{F'}_{\mathrm{x}} = 0 \\ \mathrm{F'}_{\mathrm{y}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = \frac{cos\alpha}{2} \\ y = \frac{sin\alpha}{2} \end{cases}$$

Điểm $M\left(\frac{cos\alpha}{2}, \frac{sin\alpha}{2}\right)$ không thuộc (C) do $F(M) \neq 0$

Giải hệ: $\begin{cases} \mathrm{F} = 0 \\ \mathrm{F'}_{\alpha} = 0 \end{cases}$ (Xét 2 trường hợp $cos\alpha = 0, cos\alpha \neq 0$)

Ta có kết luận:

Hình bao của họ đường cong là 2 đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 4$, (C_2): $x^2 + y^2 = 1$

Bài 2: Hướng dẫn giải:

Chuyển sang tọa độ cực ρ, φ bằng phép biến đổi $x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi$ ta được:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} \rho sin\rho \, d\rho = \cdots = -6\pi^2$$

Bài 3: Hướng dẫn giải:

Nhận xét rằng: Hàm $f(x,y) = |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$ liên tục trên D: $|\mathrm{x}| + |\mathrm{y}| \leq 1$

Miền D đối xứng qua tâm O và hàm f chẵn với cả x,y nên ta có:

$$\iint\limits_{|\mathrm{x}|+|\mathrm{y}|\leq 1} (|\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|)\, dx\, dy = 4 \iint\limits_{\substack{\mathrm{x}+\mathrm{y}\leq 1 \\ x\geq 0, y\geq 0}} (\mathrm{x} + \mathrm{y})\, dx\, dy = 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)\, dy$$

$$= \cdots = \frac{4}{3}$$

CLB Hỗ trợ học tập

Bài 4: Hướng dẫn giải:

Chuyển về tọa độ cực ρ, φ ta được các phương trình biên của miền khảo sát dưới dạng:

$p^2 = 2a^2cos2\varphi$ và $\rho^2 = a^2$ $(\rho^2 \geq a^2)$

Cần tìm giá trị bằng số của diện tích hình phẳng, giới hạn bởi một phần đường tròn $\rho = a$ và một phần đường lemnixcat Becnuli (lemniscate of Bernoulli) $\rho = a\sqrt{2cos2\varphi}$ (hình phẳng này nằm ngoài đường tròn)

Ta tìm được điểm là một trong bốn giao điểm của lemnixcat với đường tròn.

Trên cơ sở sự đối xứng của miền đóng cần tính diện tích, ta có kết luận: diện tích cần tính bằng bốn lần diện tích của miền đóng, được xác định bởi các bất đẳng thức:

$$a \leq \rho \leq a\sqrt{2cos2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

Bởi vậy, diện tích cần tính là:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2cos2\varphi}} \rho\, d\rho = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2cos2\varphi - 1)\, d\varphi = \cdots = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2$$

Bài 5*: Hướng dẫn giải:

Mặt $z = xy$ cắt mặt phẳng $x + y + z = 1$ theo đường cong, mà phương trình hình chiếu của nó trên mặt Oxy có dạng $y = \frac{1-x}{1+x}$. Bởi vậy, trong trường hợp của ta, miền tích phân D là tam giác đóng D: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$. Ta biểu diễn D như là hợp của 2 miền:

D_1: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}$

D_2: $0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1 - x$

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

Trên miền D_1, hàm dưới dấu tích phân có dạng $f(x,y) = xy$, còn trên miền D_2, hàm dưới dấu tích phân có dạng $f(x,y) = 1-(x+y)$.

Vậy, biểu diễn tích phân của f theo miền đóng D dưới dạng tổng của các tích phân theo các miền D_1 và D_2 và chuyển từ tích phân hai lớp sang tích phân lặp, ta có thể tích cần tìm là:

$$V = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y\,dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y)\,dy = \cdots = \frac{17}{12} - 2ln2$$