

## Tuần 3

### Chương 2: Ma trận - Định thức - Hệ PTTT

#### Ma trận, Định thức, Hạng ma trận, Ma trận nghịch đảo

##### 1 Định nghĩa

Một ma trận cỡ  $m \times n$  là một bảng số hình chữ nhật gồm  $m$  hàng,  $n$  cột có dạng

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với các phần tử ma trận  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  là trường số thực  $\mathbb{R}$  hoặc trường số phức  $\mathbb{C}$ )

Khi  $m = 1$ , ma trận được gọi là ma trận hàng:  $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$

Khi  $n = 1$ , ma trận được gọi là ma trận cột:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Khi  $a_{ij} = 0, \forall i, j$ , ma trận được gọi là ma trận không, kí hiệu  $\mathcal{O}$

Khi  $m = n$ , ma trận được gọi là ma trận vuông cấp  $n$

##### ► Hai ma trận bằng nhau

Cho hai ma trận cùng kích thước  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ . Nếu  $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$  thì  $A = B$

##### ► Ma trận chuyển vị

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Ma trận chuyển vị của  $A$  là  $A^T = [a'_{ij}]_{n \times m}$  sao cho  $a_{ij} = a'_{ji}$

**VD** Ma trận  $A$  có ma trận chuyển vị là  $A^T$  ở bên dưới

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

##### ► Đường chéo chính của ma trận vuông

Cho ma trận vuông cấp  $n$ . Các phần tử  $a_{ii} (i = \overline{1, n})$  được gọi là các phần tử trên đường chéo chính của ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### ► Các dạng của ma trận

(1)  $A$  gọi là ma trận tam giác trên nếu  $a_{ij} = 0$  ( $i > j$ ), là ma trận tam giác dưới nếu  $a_{ij} = 0$  ( $i < j$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \cdot \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên

Ma trận tam giác dưới

(2)  $A$  được gọi là ma trận chéo nếu  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(3)  $A$  là ma trận đơn vị nếu nó là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1  
Ký hiệu  $E$  (Hoặc  $I$ )

(4)  $A$  là ma trận đối xứng nếu  $A = A^T$ , là ma trận phản đối xứng nếu  $A = -A^T$

## 2 Các phép toán với ma trận

### 2.1 Phép cộng

Cho hai ma trận cùng cỡ  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ . Khi đó

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

### ► Tính chất

(1) (Giao hoán)  $A + B = B + A$

(2) (Kết hợp)  $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) (Tồn tại phần tử trung hòa)  $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$ . Dễ thấy phần tử đối xứng của  $A$  là  $-A$

(4)  $(A + B)^T = A^T + B^T$

Gọi  $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  là tập các ma trận kích thước  $m \times n$  với các phần tử thực, khi đó  $(\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$  lập thành một nhóm Abel

**VD** Xét hai ma trận cùng cỡ  $A$  và  $B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+4 & 5+2 \\ 4+3 & 9+0 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Nhân một số với ma trận

Cho  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  trên trường  $\mathbb{K}$  và một số  $k \in \mathbb{K}$ . Khi đó

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

**VD**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Ta có một số tính chất sau

(1) (Phân phối)  $k(A + B) = kA + kB$ ,  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

(2) (Kết hợp)  $(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A)$

(3)  $1 \cdot A = A$ ,  $(-1)A = -A$

(4)  $(kA)^T = kA^T$

## 2.3 Nhân 2 ma trận

Cho hai ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ . Tích hai ma trận  $A$  và  $B$  là

$$AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$$

Với

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

VD

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có một số tính chất sau

- (1) (Kết hợp)  $(AB)C = A(BC)$  ,  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- (2) (Tồn tại phần tử trung hòa)  $EA = AE = A$
- (3) (Phân phối)  $A(B + C) = AB + AC$
- (4)  $(AB)^T = B^T A^T$

**Lưu ý** Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán

## I Định thức

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  vuông cấp  $n$ . Gọi  $M_{ij}$  là ma trận vuông cấp  $n - 1$  tạo bởi ma trận  $A$  nhưng bỏ đi hàng  $i$  và cột  $j$ . Định thức của  $A$  (Ký hiệu là  $\det A$  hoặc  $|A|$ ) xác định bởi

$$|A| = a_{i1}|M_{11}| - a_{i2}|M_{12}| + \dots + (-1)^{n+1}a_{in}|M_{1n}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}|M_{1j}|$$

Ta gọi  $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$  là phần phụ đại số của  $a_{ij}$

Ta có một số tính chất sau

- (1)  $\det A = \det A^T$
- (2) Nếu đổi chỗ 2 hàng (cột) của ma trận thì định thức đổi dấu
- (3) Nếu ma trận  $A$  có 2 hàng (cột) bằng nhau thì định thức bằng 0
- (4) Có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo hàng bất kỳ

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ (Cổ định } i \text{)}$$

Tương tự, ta cũng có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo cột bất kỳ

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \text{ (Cổ định } j \text{)}$$

- (6) Ma trận  $A'$  xác định bằng cách nhân một hàng (cột) bất kỳ của  $A$  với một số  $\lambda$ . Khi đó

$$\det A' = \lambda \det A$$

Khi đó, ta có

$$\det(kA) = k^n \det A$$

với  $n$  là cấp của ma trận vuông  $A$

- (7) Nếu ta cộng một hàng (cột) với một hàng (cột) khác của  $A$  thì định thức của  $A$  không đổi

(8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(9) Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính

(10)  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , với  $A$  và  $B$  là hai ma trận cùng cỡ

VD Tính  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Giải

Biến đổi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (\text{Cộng hàng 1 vào hàng 2}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (\text{Nhân hàng 1 với -2 rồi cộng vào hàng 3}) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{Đổi hàng 2 và hàng 3}) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{Nhân hàng 2 với 3 rồi cộng vào hàng 2}) \\ &= -1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

## II Hạng của ma trận

### 1 Định nghĩa

#### ► Định thức con

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Bỏ đi  $m - k$  hàng và  $n - k$  cột của ma trận  $A$ , ta được ma trận vuông cấp  $k$ , định thức của ma trận đó được gọi là định thức con cấp  $k$  của ma trận  $A$

#### ► Hạng của ma trận

Hạng của ma trận  $A$  là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của  $A$ . Ký hiệu  $\text{rank} A$

### 2 Ma trận bậc thang

$A$  gọi là ma trận bậc thang nếu như nó thỏa mãn các điều kiện sau

- (1) Nếu có hàng chứa toàn số 0 thì nó phải nằm ở dưới cùng
- (2) Phần tử khác 0 đầu tiên (Từ bên trái) nằm ở cột bên phải của phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên đó

VD

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận bậc thang

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận "không" bậc thang

Hạng của ma trận chính là số hàng khác 0 của ma trận

### 3 Cách tính hạng của ma trận

Ta có một số chú ý sau

- (1)  $\text{rank} A = \text{rank} (A^T)$
- (2) Hạng của ma trận không đổi nếu áp dụng các phép biến đổi sơ cấp

VD Tính  $\text{rank} A$  với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Giải

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_2 - 2h_1 \rightarrow h_2 \\ h_3 - 3h_1 \rightarrow h_3 \\ h_4 - 2h_1 \rightarrow h_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 - h_2 \rightarrow h_3 \\ h_4 - h_3 \rightarrow h_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó  $\text{rank} A = 3$

### III Ma trận nghịch đảo

#### 1 Định nghĩa

Cho ma trận  $A$  vuông cấp  $n$ . Nếu tồn tại ma trận  $B$  cùng cỡ thỏa mãn  $AB = BA = E$  thì  $A$  gọi là ma trận khả nghịch, và  $B$  là ma trận nghịch đảo của  $A$

Ký hiệu  $B = A^{-1}$

VD Với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ta có  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Do đó  $B = A^{-1}$

#### 2 Tính chất

(1)  $E$  khả nghịch và  $E^{-1} = E$

(2)  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $\det A \neq 0$  và  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

(3)  $A$  và  $B$  là hai ma trận cùng cỡ và khả nghịch thì  $AB$  khả nghịch

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### 3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

#### 3.1 Phương pháp sử dụng phần phụ đại số

**B<sub>1</sub>** Tính  $\det A$   $\begin{cases} \text{Nếu } \det A \neq 0 \text{ thì ma trận khả nghịch} \\ \text{Nếu } \det A = 0 \text{ thì ma trận không nghịch} \end{cases}$

**B<sub>2</sub>** Lập ma trận phụ đại số  $\tilde{A} = [A_{ij}]_{n \times n}$ , với  $A_{ij}$  là phần phụ đại số của  $a_{ij}$

**B<sub>3</sub>** Sử dụng công thức

$$A^{-1} = \frac{(\tilde{A})^T}{\det A}$$

**VD** Tìm ma trận nghịch đảo của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Giải

Ta có  $\det A = 1$  nên ma trận  $A$  khả nghịch

Lập ma trận phụ đại số

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó  $A^{-1} = \frac{(\tilde{A})^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

#### 3.2 Phương pháp biến đổi sơ cấp

**B<sub>1</sub>** Lập ma trận bổ sung  $\bar{A} = [A|E]_{n \times 2n}$

**B<sub>2</sub>** Biến đổi sơ cấp trên các **hàng** để đưa ma trận  $A$  trở thành ma trận đơn vị. Khi đó phần bổ sung ở bên trái sau khi biến đổi sẽ là ma trận nghịch đảo của  $A$

$$[A|E]_{n \times 2n} \xrightarrow{\text{Biến đổi sơ cấp theo hàng}} [E|A^{-1}]_{n \times 2n}$$



VD Tìm ma trận nghịch đảo của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Giải

Xét ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[h_3 - 2h_1 \rightarrow h_3]{h_2 - h_1 \rightarrow h_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[h_2 - h_3 \rightarrow h_2]{h_1 - h_2 \rightarrow h_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP