File 14 câu

Câu 1

+) Ta có $V_1 = span(u_1, u_2), V_2 = span(u_3, u_4) \Rightarrow V_1 + V_2 = span(u_1, u_2, u_3, u_4)$

Ma trận tọa độ hàng của hệ vector $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_3[x]$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$\Rightarrow rank(A) = rank(A') = 4 \Rightarrow$ hệ vector $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow dim(V_1 + V_2) = 4$

và 1 cơ sở của nó là $\{v_1 = 1 - 2x - x^3, v_2 = 3x - x^2 + 4x^3, v_3 = 2x^2 + x^3, v_4 = -3x^3\}$

+) Giả sử $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x = x_1u_1 + x_2u_2 = x_3u_3 + x_4u_4 \Rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3 - x_4u_4 = 0$

Khi đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Xét $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = C' \Rightarrow rank(C) = rank(C') = 4$

$\Rightarrow$ Hệ PT có nghiệm duy nhất $(0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow x = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 = 0 \Rightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 0$

Câu 2

Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ vector $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 5, 6), v_3 = (7, 8, 9)\}$ đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$

$\Rightarrow dimS = rank(A) = rank(A') = 2$

$\Rightarrow$ Hệ vector $\{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,1,2)\}$ là 1 cơ sở của không gian sinh bởi S

Câu 3

Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ vector $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_4[x]$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A' \Rightarrow rank(A') = rank(A) = 4 \Rightarrow \text{hạng của họ vector} = 3$$

$\Rightarrow$ hệ $\{v_1 = 1 + x^2 + x^3, v_2 = x - x^3 + 2x^4, v_3 = x^2 + 3x^3 - x^4, v_4 = -2x^3 + x^4\}$ là 1 cơ sở của $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Câu 4

+) Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ vector $B = \{v_1 = (2,1,1), v_2 = (6,2,0), v_3 = (7,4,1)\}$ đối với cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 8 \neq 0 \Rightarrow B \text{ là 1 cơ sở của } \mathbb{R}^3$$

+) Đặt $u = (15,3,1)$. Ta có $A.[u]_B = [u]_E \Rightarrow [u]_B = A^{-1}.[u]_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{8} \\ -\frac{99}{8} \\ \frac{145}{8} \end{bmatrix}$

Câu 5

a) Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ vector B đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{hệ vector } B \text{ là 1 cơ sở của } \mathbb{R}^3$$

b) Ta có: $[v_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [v_2]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, [v_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận chuyển cơ sở từ } E \text{ sang } B$$

c) +) Đặt $u = (15, 3, 1)$. Ta có $C.[u]_B = [u]_E \Rightarrow [u]_B = C^{-1}.[u]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}$

+) Đặt $u = (15, 3, 1) = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$ với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (15, 3, 1) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 1, 2) + k_3(1, 2, 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 15 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 3 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (k_1; k_2; k_3) = (28, -12, -1) \Rightarrow [u]_B = \begin{bmatrix} 28 \\ -12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Câu 6

a) Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & m & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & m-2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & m-3 & 0 \end{bmatrix} = A'$

YCBT $\Leftrightarrow rank(A) = rank(A') = 2 \Leftrightarrow m = 3$

Câu 7

a) Gọi A là ma trận của hệ vector B đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = 100 \neq 0 \Rightarrow$ hệ vector B là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$

b) Đặt $u = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (23, 14, 17, -5) = k_1(2, 1, 0, -3) + k_2(1, -1, 2, 5) + k_3(5, 3, 1, 2) + k_4(8, 5, 4, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k_1 + k_2 + 5k_3 + 8k_4 = 23 \\ k_1 - k_2 + 3k_3 + 5k_4 = 14 \\ 2k_2 + k_3 + 4k_4 = 17 \\ -3k_1 + 5k_2 + 2k_3 + k_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow (k_1; k_2; k_3; k_4) = \left(\frac{61}{50}; \frac{9}{25}; -\frac{103}{25}; \frac{51}{10}\right) \Rightarrow [u]_B = \begin{bmatrix} \frac{61}{50} \\ \frac{9}{25} \\ -\frac{103}{25} \\ \frac{51}{10} \end{bmatrix}$$

Câu 8

Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & m & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & m & 3 \\ 2 & 2 & -1 & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2m-2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & n-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2m-2 & 3 \\ 0 & 0 & 2m-5 & n \end{bmatrix}$

YCBT $\Leftrightarrow rank(A) = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}, n = 0$

Câu 9

Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ là 1 cở sở của $span\{v_1, v_2, v_3\}$

Để $u = 3 - 2x + mx^2 \in span\{v_1, v_2, v_3\}$

$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, k_3$ sao cho $u = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$\Leftrightarrow 3 - 2x + mx^2 = k_1(1 + x + 2x^2) + k_2(1 - x^2) + k_3(3 + x)$

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} k_1 + k_2 + 3k_3 = 3 \\ k_1 + k_3 = -2 \\ 2k_1 - k_2 = m \end{cases}$ tồn tại nghiệm $(k_1; k_2; k_3)$

Xét $\bar{A} = (A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -6 & 2m-3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2m+12 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow 2m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = -12$

Câu 10

-Lấy $p(x) \in W$ và $q(x) \in W$ nên ta có :

$\begin{cases} p(x) \in P_{2021}[x] \\ q(x) \in P_{2021}[x] \\ p(x) = p(-x) \\ q(x) = q(-x) \end{cases}$

Xét $k * p(x) + h * q(x)$,ta có:

+Vì $p(x) \in P_{2021}[x]; q(x) \in P_{2021}[x] \Rightarrow k * p(x) + h * q(x) \in P_{2021}[x](1)$

+ Vì $p(x) = p(-x); q(x) = q(-x) \Rightarrow k * p(x) + h * q(x) = k * p(-x) + h * q(-x)(2)$

Từ (1) và (2) , ta có: $k * p(x) + h * q(x) \in W$

$\Rightarrow$ W là một không gian vécto con

-Vì $p(x) \in P_{2021}[x]; p(x) = p(-x)$

$\Rightarrow p(x)$ là hàm chẵn

$\Rightarrow p(x) = a_0 + a_2x^2 + ... + a_{2020}x^{2020} = span(1, x^2, ...x^{2020})$

$\Rightarrow$ một cơ sở của W là : $v_0 = (1, 0, 0, ..., 0); v_2 = (0, 0, x^2, ..., 0); v_{2020} = (0, 0, ..., x^{2020})$ $dim(W) = (2020 - 0)/2 + 1 = 1011$

Câu 11

a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 12 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 12 & 11 & 0 \\ 0 & 14 & 21 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 12 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 12 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7a+7b}{2} \\ x_2 = -\frac{a+3b}{2} \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2} * [-7; -1; 0; 2] + \frac{b}{2} * [-7; -3; 2; 0] = c * [-7; -1; 0; 2] + d * [-7; -3; 2; 0]$

$$\begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 & 2 \\ -7 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

=> Cơ sở là $u_1 = [-7; -1; 0; 2]$ và $u_2 = [0; 1; -1; 1]$ và số chiều của không gian nghiệm là 2.

b) Từ đề bài ,ta có:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -13 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -23 & 16 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -23 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 23 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -575a \\ x_2 = -553a \\ x_3 = -59a \\ x_4 = 46a \\ x_5 = 44a \end{cases}$$

Do đó cơ sở là $u = [-575; -553; -59; 46; 44]$ và số chiều của không gian nghiệm là 1

Câu 12

Từ đề bài, ta có: $\left[\begin{array}{ccc|c} b & 3 & 1 & 0 \\ 1+2b & a+5 & 2 & 0 \\ 2b-1 & a+2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Vì đây là hệ phương trình thuần nhất, nên để không gian nghiệm của hệ có số chiều là 1 thì :

$$\begin{bmatrix} b & 3 & 1 \\ 1+2b & a+5 & 2 \\ 2b-1 & a+2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} b & 3 & 1 \\ 1 & a-1 & 0 \\ b-1 & a-1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (a-1)*1-(a-1)*(b-1)=0$

$\Rightarrow (a-1)*(2-b)=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}\right.$

Câu 13

Vì $u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}$ phụ thuộc tuyến tính

Do đó $\exists u_k$ được biểu diễn qua n thành phần còn lại

+TH1: u_k không phải là u_{n+1} , khi đó ta có :

$u_k = a_1 * u_1 + a_2 * u_2 + ... + a_{n+1} * u_{n+1}$, khi đó $u_1, u_2, ...u_n$ độc lập tuyến tính là vô lý(loại)

+TH2: $u_k = u_{n+1}$,ta có

$u_{n+1} = a_1 * u_1 + a_2 * u_2 + ... + a_n * u_n$

$\Rightarrow u_{n+1}$ là tổ hợp tuyến tính của các vector $u_1, u_2, ..., u_n$

Câu 14

Ta sẽ chứng minh theo 2 chiều:

*) Giả sử V_1 và V_2 bù nhau, ta sẽ chứng minh mọi vector u thuộc V đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2$ ($u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$).

Giả sử V_1 có hệ sinh là $\{v'_1, v'_2, ..., v'_a\}$, và V_2 có hệ sinh là $\{v"_1, v"_2, ..., v"_b\}$

Vì $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ nên với mọi vector $v' \in V_1$ thì v' và $\{v"_1, v"_2, ..., v"_b\}$ độc lập tuyến tính. (và ngược lại)

Vì $V_1 + V_2 = V$ nên với mọi vector $u \in V$ tồn tại vector $u_1 \in V_1$ và $u_2 \in V_2$ sao cho $u = u_1 + u_2$.

Ta sẽ chứng minh u_1 và u_2 là duy nhất.

Thật vậy, giả sử tồn tại $u'_1 \in V_1, u'_1 \neq u_1, u'_2 \in V_2, u'_2 \neq u_2$ sao cho $u = u'_1 + u'_2$.

Ta có: $u = u'_1 + u'_2 = u_1 + u_2$

$\Rightarrow u'_1 - u_1 = u_2 - u'_2$

Ta có: $u'_1 - u_1 \in V_1, u_2 - u'_2 \in V_2$ mà $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ nên $u'_1 - u_1 = u_2 - u'_2 = 0$

$\Rightarrow u'_1 = u_1; u'_2 = u_2$

Vậy mọi vector u thuộc V đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2$ ($u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$).

*) Giả sử mọi vector u thuộc V đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2$ ($u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$), ta sẽ chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

Vì mọi vector $u \in V$ đều có thể biểu diễn bằng tổng 2 vector thuộc V_1 và V_2 nên ta chỉ cần chứng minh $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Vì V_1 và V_2 đều là không gian con của V nên $\{0\} \in V_1 \cap V_2$.

Giả sử tồn tại vector $v \neq 0$, $v \in V_1 \cap V_2$.
Vì mọi vector thuộc không gian V đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 2 vector thuộc không gian V_1 và V_2 nên tồn tại 1 vector $u \in V$ sao cho $u = u_1 + u_2$.
Ta có: $u = u_1 + u_2 = (u_1 - v) + (u_2 + v)$
Vì $v \in V_1 \cap V_2$ nên $(u_1 - v) \in V_1$ và $(u_2 + v) \in V_2$.
Mà biểu diễn của u theo u_1, u_2 là duy nhất nên $u_1 = u_1 - v$, $u_2 = u_2 + v$.
Do đó $v = 0$ hay $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

File 17 câu

Câu 1

a) Ta kiểm tra các tính chất sau:

Xét $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$

và $a, b \in \mathbb{R}$

1. Tính chất kết hợp của phép cộng: (thoả mãn)
2. Tính chất giao hoán của phép cộng: (thoả mãn)
3. Phần tử trung hoà: $(0, 0, 0, 0)$
4. Phần tử đối: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, ta có $x + y = 0$
5. Tính chất phân phối phép cộng và phép nhân vô hướng: $a(x + y) = ax + ay$
6. Tính chất phân phối giữa phép nhân vô hướng với phép cộng vô hướng: $(a + b)x = ax + bx$
7. Tính chất kết hợp của phép nhân: $a(b.x) = (a.b)x$
8. Phàn tử đơn vị của phép nhân : 1

b) Giải hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = t \\ x_3 = 3t \\ x_4 = -2u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vậy cơ sở của A có 2 chiều.

Câu 2

Ta có:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (-2(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2), -2(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (y_1 + \\ &= (-2x_1 - 2y_1 + 2z_1, -2x_1 + 5y_1 + z_1, 2x_1 + y_1 + 5z_1) + (-2x_2 - 2y_2 + 2z_2, -2x_2 + 5y_2 + z_2, 2x_2 \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \\ &= (-2\alpha x_1 - 2\alpha y_1 + 2\alpha z_1, -2\alpha x_1 + 5\alpha y_1 + \alpha z_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + 5\alpha z_1) \\ &= \alpha(-2x_1 - 2y_1 + 2z_1, -2x_1 + 5y_1 + z_1, 2x_1 + y_1 + 5z_1) \\ &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính của $\mathbb{R}^3$

b) Ma trận biến đổi của f đối với cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 3$ nên hệ phương trình $f(x, y, z) = (a, b, c)$ luôn có 1 nghiệm duy nhất $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$

Vậy f là song ánh.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$

Câu 3

Đặt $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Ta có: $f(p(x)) = (2x - 1)p'(x) + 3p(x) = 9ax^3 + (7b - 3a)x^2 + (5c - 2b)x + (3d - c)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3d - c \\ 5c - 2b \\ 7b - 3a \\ 9a \end{bmatrix} = A. \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Câu 4

a) Đặt $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$

Dễ dàng chứng minh được $f(u + v) = f(u) + f(v)$ và $f(k.u) = k.f(u)$. Từ đó suy ra f là phép biến đổi tuyến tính.

b) Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{b_1, b_2, b_3\}$ là:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận của f theo cơ sở $\{b_1, b_2, b_3\}$ là:

$$\begin{aligned} A' &= C^{-1}.A.C \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 5

Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là:

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

Ma trận của f theo cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là:

$$\begin{aligned} A' &= C^{-1}.A.C \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 23/2 & 48 & -75/2 \\ 16 & 75 & -58 \\ 45/2 & 104 & -161/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu 6

Ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ sang cơ sở $\{e_1; e_1 + e_2; e_1 + e_2 + e_3\}$ là:

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận của f theo cơ sở $\{e_1; e_1+e_2; e_1+e_2+e_3\}$ là:

$$\begin{aligned}A' &= C^{-1}.A.C\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -9 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & -6 & 5\\ 14 & -1 & 3\\ -8 & 4 & -2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Câu 7

a) Đặt $u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$

Ta có:

$$\begin{aligned}f(u+v) &= (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2); 4(x_1+x_2)-2(y_1+y_2); 6(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)\\ &= (2x_1-y_1; 4x_1-2y_1; 6x_1-3y_1)+(2x_2-y_2; 4x_2-2y_2; 6x_2-3y_2)\\ &= f(u)+f(v)\\ f(k.u) &= (2kx_1-ky_1; 4kx_1-2ky_1; 6kx_1-3ky_1)\\ &= (k(2x_1-y_1); k(4x_1-2y_1); k(6x_1-3y_1))\\ &= k(2x_1-y_1; 4x_1-2y_1; 6x_1-3y_1)=k.f(u)\end{aligned}$$

Vậy f là một biến đổi tuyến tính.

Ma trận biến đổi của f theo các cỗ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}$$

b) Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases}2x-y=0\\ 4x-2y=0\\ 6x-3y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=2t\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=t.\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

Vậy $ker(f)=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}; y=2x\}$ và một cơ sở của $ker(f)$ là $(1,2)$.

Câu 8

a) Ma trận của ánh xạ f đối với 2 cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Vì $r(A) = 3$ nên $Im(f) = 3$.

$Ker(f) = \{x | x \in \mathbb{R}^4, f(x) = (0,0,0)\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow dim(Ker(f)) = 1$

b) $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$; $V = \{v_1, v_2, v_3\}$

Ta có: $\begin{cases} f(u_1) = (3,2,0) = -2v_1 - v_2 + 3v_3 \\ f(u_2) = (3,2,1) = -v_1 - v_2 + 3v_3 \\ f(u_3) = (3,1,1) = -2v_2 + 3v_3 \\ f(u_4) = (1,0,1) = v_1 - v_2 + v_3 \end{cases}$

Ma trận biến đổi của f theo cơ sở S và V là:

$C = \begin{bmatrix} [f(u_1)]_V & [f(u_2)]_V & [f(u_3)]_V & [f(u_4)]_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 9

a) Ta có: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Vì $r(A) = 3$ nên $dim(Im(f)) = 3$

Ta có: $dim(ker(f)) + dim(Im(f)) = 3 \Rightarrow dim(ker(f)) = 0$ b) Ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ sang cơ sở chính tắc là:

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là:

$$\begin{aligned} A' &= C^{-1}.A.C \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = f(a,b,c) = (2a - 4b + 3c; 3a - 6b + 6c; 2a - 6b + 7c)$

Câu 10

Đặt $u = (x, y, z)$

Ta có:

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (2\alpha x - \alpha y + \alpha z, -\alpha x + 2\alpha y - \alpha z, \alpha z + m) \\ \alpha f(u) &= \alpha(2x - y, -x + 2y - z, z + m) \\ &= (2\alpha x - \alpha y + \alpha z, -\alpha x + 2\alpha y - \alpha z, \alpha z + \alpha m) \end{aligned}$$

Để f là ánh xạ tuyến tính thì $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$\Leftrightarrow (2\alpha x - \alpha y + \alpha z, -\alpha x + 2\alpha y - \alpha z, \alpha z + m) = (2\alpha x - \alpha y + \alpha z, -\alpha x + 2\alpha y - \alpha z, \alpha z + \alpha m)$

$\Leftrightarrow m = \alpha m$

$\Leftrightarrow m = 0$

Vậy $m = 0$ để f là một biến đổi tuyến tính

b) Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 11

(Định nghĩa của ánh xạ tuyến tính)

Câu 12

a) Ta có: $\begin{cases} f_1 = f(1,1,2) = (1,0,0) \\ f_2 = f(2,1,1) = (0,1,1) \\ f_3 = f(2,2,3) = (0,-1,0) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1,0,0) = f_1 + f_2 - f_3 = (1,2,1) \\ f(0,1,0) = 3f_3 - 4f_1 - f_2 = (-4,-4,-1) \\ f(0,0,1) = 2f_1 - f_3 = (2,1,0) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) = (x - 4y + 2z, 2x - 4y + z, x - y)$

b) Ta có: $\begin{cases} f_1 = f(1,2,3) = (-1,0,1) \\ f_2 = f(-1,1,1) = (0,1,0) \\ f_3 = f(1,3,4) = (1,0,2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1,0,0) = f_3 - f_1 - f_2 = (2,-1,1) \\ f(0,1,0) = 4f_3 - 5f_1 - f_2 = (9,-1,3) \\ f(0,0,1) = 4f_1 + f_2 - 3f_3 = (-7,1,-2) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) = (2x+9y-7z, -x-y+z, x+3y-2z)$

Câu 13

Xét ma trận biến đổi của f:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 3$ nên Imf = 3

Giải hệ phương trình sau ta được:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ker}f = 1$$

Câu 14

a) $f(1;0;0) = (1;-1;0;1)$

$f(0;1;0) = (0;1;1;1)$

$f(0;0;1) = (1;0;1;2)$

b) Ma trận của f theo cơ sở chính tắc e_1, e_2, e_3 là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 2$ nên số chiều của $f(\mathbb{R}^3)$ là: $dim(f) = 2$

Giải hệ phương trình sau ta được:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - x = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow ker(f) = 1$

Câu 15

a) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 6 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{bmatrix}$

Họ các vector $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}^4$.

Câu 16

a) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 10 & 5 & -1 & 5m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vì $r(A) = 2 < 3$ nên họ vector U luôn phụ thuộc tuyến tính $\forall m \in \mathbb{R}$.

b) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2m \\ 2 & 1 & -1 \\ 1+m & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & -1-2m \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Để họ vector U độc lập tuyến tính thì $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{-1}{2}$

Vậy họ vector U phụ thuộc tuyến tính khi $m = \dfrac{-1}{2}$ và độc lập tuyến tính khi $m \neq \dfrac{-1}{2}$

c) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & -2 & m \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$det(A) = m.(-2).3 + 2.m.2 + 1.1.2 - 1.(-2).2 - m.2.m - 2.1.3 = -m^2 - 2m$

Để họ vector U phụ thuộc tuyến tính thì $det(A) = 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy họ vector U độc lập tuyến tính khi $m \neq 0; 1$ và phụ thuộc tuyến tính khi $m = 0; 1$.

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP