Tuần 2

Chương 1: Logic - Tập hợp - Ánh xạ - Số phức

Ánh xạ, Cấu trúc đại số, Số phức

I Ánh xạ

▶ **Ánh xạ**

Một ánh xạ f đi từ tập hợp X sang tập hợp Y là một quy tắc cho mỗi phần tử của x ứng với một phần tử xác định $y \in Y$

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

▶ **Tập ảnh, tập nghịch ảnh**

$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ là tập ảnh của A

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) = B\}$ là tập nghịch ảnh của B

▶ **Tích các ánh xạ**

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Tích của f và g là $h : X \to Z$ mà $h(x) = g\left(f(x)\right)$

Ký hiệu $h = g \circ f$

▶ **Đơn ánh, toàn ánh, song ánh**

f là đơn ánh nếu với $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$

f là toàn ánh nếu với $\forall y \in Y$ thì $\exists x \in X$ để $f(x) = y$

f là song ánh nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh

VD$_1$ Cho $f(x) = x^2 + 1$ và $A = (1; 2)$, $B = [4; 5]$. Tìm $f(-1)$, $f(B)$, $f^{-1}(A)$

Giải

$f(x) = x^2 + 1$ nên $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

Ta có $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, do đó hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty, 0)$

$f(1) = 2$, $f(2) = 5$ do đó $f(A) = (2; 5)$

$f(x) = 4$ khi $x = \pm\sqrt{3}$, $f(x) = 5$ khi $x = \pm 2$, do đó $f^{-1}(B) = \left[-2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right]$

VD$_2$ Cho $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Tìm a, b biết $f^{-1}\left(\{a\}\right) = \{0; 1; b\}$

Giải

Vì $f^{-1}\left(\{a\}\right) = \{0; 1; b\}$ nên $f(0) = f(1) = f(b) = a$. Mà $f(0) = f(1) = 0$ nên $a = 0$

Phương trình $x^3 + x^2 - 2x = 0$ có 3 nghiệm $\{-2; 0; 1\}$, do đó $b = -2$

VD$_3$ Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$

a) Chứng minh f là song ánh

b) Xác định $f(A)$ với $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$

Giải

a) Xét $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

Do đó f là đơn ánh

Xét $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tùy ý, dễ thấy $f\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right) = (a, b)$. Do đó f là toàn ánh

Vậy f là song ánh

b) Ta có $x^2 + y^2 = 1$, khi đó $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) = 2$

$\Rightarrow (x, y) \in A$ thì $f(x, y) \in B = \left\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_0^2 + y_0^2 = 2\right\}$

Mặt khác với $(x_0, y_0) \in B$ hay $x_0^2 + y_0^2 = 2$ thì $\left(\dfrac{x_0 + y_0}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_0 - y_0}{2}\right)^2 = 1$. Do đó với mỗi bộ $(x_0, y_0) \in B$, tồn tại một bộ $(u, v) = \left(\dfrac{x_0 + y_0}{2}, \dfrac{x_0 - y_0}{2}\right) \in A$ để $f(u, v) = (x_0, y_0)$

Vậy $f(A) = B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 2\right\}$

VD$_4$ Xét xem các ánh xạ sau có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh hay không

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x, y) = (x + 2y, x + 3y)$

Giải

a) Xét $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Do đó f là đơn ánh

Xét $a \in \mathbb{R}$ tùy ý, $f(x) = a \Leftrightarrow x^3 + 1 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a-1}$ hay $f\left(\sqrt[3]{a-1}\right) = a$. Do đó f là toàn ánh

Vậy f là song ánh

b) Xét $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 + 2y_2 \\ x_1 + 3x_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

Do đó f là đơn ánh

Chọn $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tùy ý: $f(x_1,x_2) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ x_1 + 3x_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2) = (3a-2b, b-a)$

Do đó f là toàn ánh

Vậy f là song ánh

II Các cấu trúc đại số

▶ Phép toán hai ngôi

Phép toán hai ngôi là ánh xạ $*$

$$G \times G \to G$$
$$(x,y) \mapsto x * y$$

▶ Cấu trúc nhóm

$(G,*)$ là một nhóm nếu phép toán $*$ có các tính chất sau

(1) Tính **kết hợp**: $(x*y)*z = x*(y*z)$

(2) Tồn tại **phần tử trung hòa** $e \in G$: $x*e = e*x = x$, $\forall x \in G$

(3) Tồn tại **phần tử đối xứng**: $\exists x'$ để $x*x' = x'*x = e$, $\forall x \in G$

$(G,*)$ là một nhóm giao hoán (Nhóm Abel) nếu phép toán $*$ có tính giao hoán:

$$x*y = y*x,\ \forall x,y \in G$$

▶ Cấu trúc vành

$(G,+,.)$ tạo thành một vành nếu thỏa mãn các tính chất sau

(1) $(G,+)$ là một nhóm Abel

(2) $(xy)z = x(yz)$, $\forall x,y,z \in G$

(3) (Tính chất phân phối) $\begin{cases} (x+y)z = xz + yz \\ z(x+y) = zx + zy \end{cases} \forall x,y,z \in G$

▶ Cấu trúc trường

$(G,+,.)$ tạo thành một trường nếu nó là vành giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử $\neq 0$ đều có phần tử đối xứng

VD$_1$ Chứng minh $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ với phép toán nhân thông thường lập thành nhóm Abel

Giải

Dễ thấy tính chất giao hoán và kết hợp được thỏa mãn

Phần tử trung hòa là 1 vì $x.1 = 1.x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Với mỗi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thì tồn tại $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ để $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Vậy $\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .\right)$ là nhóm Abel

VD$_2$ Xét xem các tập sau với phép nhân thông thường có lập thành nhóm hay không

a) $A = \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \{0\}$

b) $B = \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\} \setminus \{0\}$

Giải

a) Nhận thấy 1 là phần tử trung hòa của $(A, .)$

Xét $a + b\sqrt{2} \in A$. Giả sử $c, d \in \mathbb{Z} : \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = 1$. Khi đó

$$(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} = 1 \tag{1}$$

Do $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $(ad + bc)\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Do đó không tồn tại $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (1), hay không tồn tại phần tử nghịch đảo. Vậy $(A, .)$ không là một nhóm

b) Nhận thấy 1 là phần tử trung hòa của $(B, .)$

Xét $x = a + b\sqrt{2} \in B$. Khi đó

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}_{a' \in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{-b}{a^2 - 2b^2}}_{b' \in \mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

Do đó với mỗi $x = a + b\sqrt{2} \in B$, tồn tại phần tử nghịch đảo $x^{-1} = a' + b'\sqrt{2} \in B$

Dễ thấy phép toán "." có tính chất kết hợp, giao hoán trong B

Vậy $(B, .)$ là một nhóm, hơn nữa còn là một nhóm Abel

III Số phức

► **Định nghĩa**

Số phức là số có dạng $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$

Ký hiệu $\text{Re}(z) = a$ là phần thực của số phức z, $\text{Im}(z) = b$ là phần ảo của số phức z

► **Phép toán** Với số phức $z = a + bi$, ta có:

(1) (Các phép toán thông thường)

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(2) (Số phức liên hợp) $\overline{z} = a - bi$

(3) (Phép lấy môđun) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

► **Dạng lượng giác của số phức**

Ngoài cách biểu diễn $z = a + bi$, ta còn có cách biểu diễn khác của số phức như sau

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trong đó $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \text{Arg}(z) : \text{Argument của số phức } z \end{cases}$

Ta có một số phép toán của số phức dưới dạng lượng giác $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ như sau:

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

(2) (Công thức De Moivre) $z_1^n = r_1^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$

(3) Nếu $z \neq 0$ thì $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$

▶ **Công thức Euler**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \forall\varphi\in\mathbb{R}$$

Với $\varphi = \pi$, ta có

$$e^{i\pi} = -1$$

VD$_1$ Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc

a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2020}$ b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4$ c) $(a+bi)^n$ $\left(a^2+b^2\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*\right)$

Giải

a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2020} = 2^{2020}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2020} = 2^{2020}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2020}$

$= 2^{2020}\left(\cos\dfrac{2020\pi}{3}+i\sin\dfrac{2020\pi}{3}\right) = 2^{2020}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{2019} - i2^{2019}\sqrt{3}$

b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4 = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^4}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^4} = \dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4}{\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)^4} = \dfrac{\cos\pi+i\sin\pi}{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)} = 1$

c) Đặt $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(a+bi)^n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)^n$

$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

VD$_2$ Tìm tất cả các nghiệm phức của các phương trình sau

a) $z^2-4iz+3=0$ b) $z^4-3iz^2+4=0$

Giải

a) $z^2-4iz+3=0$

$\Leftrightarrow (z-2i)^2 = -3+(2i)^2 = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-2i=i\sqrt{7} \\ z-2i=-i\sqrt{7} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\left(2+\sqrt{7}\right)i \\ z=\left(2-\sqrt{7}\right)i \end{array}\right.$$

b) $z^4-3iz^2+4=0$

$$\Leftrightarrow \left(z^2-\frac{3i}{2}\right)^2=-4+\left(\frac{3i}{2}\right)^2=-\frac{25}{4}=\left(\frac{5i}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2-\dfrac{3i}{2}=\dfrac{5i}{2} \\ z^2-\dfrac{3i}{2}=-\dfrac{5i}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=\dfrac{8i}{2}=\left(2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \\ z^2=-\dfrac{2i}{2}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} z=\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) \\ z=\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$$

VD$_3$

a) Giải phương trình $x^8\left(i+\sqrt{3}\right)=2$

b) Tính tổng các căn bậc 8 phức của 1

Giải

a) $x^8=\dfrac{2}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}=\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}$

Khi đó $x=\cos\dfrac{-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}{8}$, $k=\overline{0,7}$

b) Gọi $\varepsilon_0=1$, ε_1, $\varepsilon_2, ..., \varepsilon_7$ là các căn bậc 8 phức của 1. Khi đó $\varepsilon_i^8=1$. Do đó ε_i là nghiệm của phương trình $x^8-1=0$. Theo định lý Viete, ta có

$$\sum_{k=0}^{8}\varepsilon_i=0$$