LÝ THUYẾT MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG II: MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Mục lục

I Ma trận và các phép toán

1 Khái niệm

Định nghĩa 1.

- *Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng, n cột dạng:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  với $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Số a_{ij} gọi là phần tử của ma trận A, nằm ở hàng i, cột j, với mọi $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
  Ký hiệu ma trận: sử dụng ngoặc tròn như trên hoặc ngoặc vuông.
  Ta viết $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ để chỉ A là ma trận m hàng, n cột với các phần tử a_{ij}.
- *Ma trận cỡ $1 \times n$ gọi là **ma trận hàng**. Ma trận cỡ $m \times 1$ gọi là **ma trận cột**.*
- *Ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ với $a_{ij} = 0, \forall i, j$, được gọi là **ma trận không**, ký hiệu là θ.*
- *Nếu số hàng và số cột của A bằng nhau $(m = n)$ thì A gọi là **ma trận vuông cấp** n, với các phần tử thuộc trường K .*

Ví dụ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ *là ma trận cột,* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *là ma trận hàng, và* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3 .*

Định nghĩa 2. *Cho ma trận vuông cấp n :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *Các phần $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo, chúng lập thành **đường chéo chính** của A.*
- *Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ (tức là các phần tử nằm dưới đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là **ma trận tam giác trên**.*
- *Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$ (tức là các phần tử nằm trên đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là **ma trận tam giác dưới**.*
- *Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ (tức là các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều là 0) thì A được gọi là **ma trận đường chéo** (hoặc ma trận chéo).*

- *Nếu A là ma trận đường chéo và tất cả các phần tử trên đường chéo chính là 1 thì A được gọi là* ***ma trận đơn vị cấp*** *n. Ma trận đơn vị cấp n thường được ký hiệu là I_n hoặc E_n. Khi không quan tâm đến cấp của ma trận thì ta ký hiệu là I hoặc E.*

Ví dụ 2.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3 với các phần tử chéo là* $1,5,9$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận tam giác dưới.*
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đường chéo.*
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là các ma trận đơn vị cấp 2 và cấp 3.*

Định nghĩa 3. ***Ma trận chuyển vị*** *của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ký hiệu là A^t, xác định bởi $A^t = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ trong đó $b_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i = 1,2,\ldots,n$ và $j = 1,2,\ldots,m$. Ta có thể có được ma trận chuyển vị A^t từ ma trận A bằng cách viết hàng của A thành cột của A^t hoặc viết cột của A thành hàng của A^t một cách tương ứng.*

Ví dụ 3. *Ma trận chuyển vị của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *là* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 4. *Cho ma trận A vuông cấp n.*

1. A gọi là ***ma trận đối xứng*** *nếu $A^t = A$.*

2. A gọi là ***ma trận phản xứng*** *(hay phản đối xứng) nếu $A^t = -A$.*

Rõ ràng, nếu $A = \left[a_{ij}\right]$ vuông cấp n là ma trận đối xứng (tương ứng phản xứng) thì $a_{ij} = a_{ji}$ (tương ứng $a_{ij} = -a_{ji}$) với mọi $i,j = 1,2,\ldots,n$. Hơn nữa, các phần tử trên đường chéo của ma trận phản xứng đều bằng 0 .

Ví dụ 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đối xứng và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận phản xứng.*

2 Hai ma trận bằng nhau

Định nghĩa 5. *Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau.*

Ví dụ 5. *Hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *không bằng nhau vì chúng không cùng cỡ. Hai ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *là hai ma trận bằng nhau.*

3 Các phép toán trên ma trận

3.1 Phép cộng

Định nghĩa 6. *Cho hai ma trận cùng cỡ* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *và* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. *Tổng* $A+B$ *là ma trận cỡ* $m \times n$ *xác định bởi* $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$.
Như vậy, cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử tương ứng của chúng với nhau.

Ví dụ 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) & 3+0 \\ 4+(-3) & 5+1 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 7.
- *Ma trận đối của ma trận* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, *ký hiệu là* $-A$, *xác định bởi* $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
- *Hiệu của hai ma trận cùng cỡ A và B, ký hiệu là* $A-B$ *xác định bởi*

$$A - B = A + (-B)$$

Lưu ý 1. *Với mọi ma trận* A, B, C *cùng cỡ, ta có:*

1. Tính kết hợp: $(A+B)+C = A+(B+C)$;

2. Tính giao hoán: $A+B = B+A$;

3. $A+\theta = \theta + A = A$, *ở đó* θ *là ma trận không, cùng cỡ với A;*

4. $A+(-A) = (-A)+A = \theta$.

3.2 Phép nhân

Định nghĩa 8. *Cho ma trận* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *trên trường* $\mathbb{K}$ *và số* $k \in \mathbb{K}$. *Tích của* k *và* A *được xác định bởi* $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$. *Như vậy, nhân số* k *với ma trận* A *là nhân* k *vào mỗi phần tử của* A.

Ví dụ 7. *Tích của 3 và ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận*

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-5) & 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix}$$

Công thức 1. *Với mọi ma trận cùng cỡ* A, B *và số* $k, l \in \mathbb{K}$, *ta có:*

1. $k(A+B) = kA + kB$;
2. $(k+l)A = kA + lA$;
3. $k(lA) = (kl)A$;
4. $1A = A, (-1)A = -A$;
5. $0A = \theta$;
6. $k\theta = \theta$.

Định nghĩa 9. *Giả sử* $A = [a_{ik}]_{m\times p}$ *và* $B = [b_{kj}]_{p\times n}$ *là các ma trận cỡ* $m \times p$ *và* $p \times n$ *tương ứng. Tích* AB *là ma trận* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ *cỡ* $m \times n$, *ở đó phần tử* $c_{ij} (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ *được xác định bởi công thức*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Ví dụ 8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 1 & 100 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Phần tử C_{12} *của ma trận tích* AB *là tích của vector hàng thứ nhất của* A *và vector cột thứ hai của* B, *ta có:*

$$C_{12} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k}B_{k2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix} = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 = 2340$$

Tính tương tự với tất cả phần tử còn lại của ma trận tích C. Ta được ma trận tích AB có dạng:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 1 & 100 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2340 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

4 Một số phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Định nghĩa 10. *Cho ma trận A. Các phép biến đổi sau gọi là các phép biến đổi sơ cấp:*

1. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) cho nhau;

2. Nhân một hàng (hay một cột) với một số khác 0 ;

3. Cộng vào một hàng (tương ứng một cột) một bội của hàng (tương ứng một cột) khác.

Ký hiệu:

- h_i *để chỉ hàng* i, c_j *để chỉ cột* j;
- $h_i \leftrightarrow h_j$ *(tương ứng* $c_i \leftrightarrow c_j$ *): đổi chỗ hai hàng* i, j *(tương ứng hai cột* i, j *) cho nhau;*
- λh_i *(tương ứng* λc_i*): nhân số* λ *với hàng* i *(tương ứng cột* i*);*
- $h_k + \lambda h_i \to h_k$ *(tương ứng* $c_k + \lambda c_i \to c_k$ *): nhân hàng* i *(tương ứng cột* i *) với* λ *rồi cộng vào hàng* h_k *(tương ứng cột* k *).*

Ví dụ 9.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{2h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3+(-14)h_1 \to h_3]{h_2+(-4)h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$

II Định thức

1 Khái niệm

Định nghĩa 11. *Xét ma trận vuông cấp n*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A bằng cách bỏ đi hàng $i, (i = \overline{1,n})$, cột $j, (j = \overline{1,n})$ được gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}. Kí hiệu M_{ij}.

Ví dụ 10. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *có một số ma trận con tương ứng là:*

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix};$$
$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; \ldots$$

Định nghĩa 12. *Định thức của ma trận vuông A là một số, kí hiệu det (A), được định nghĩa quy nạp như sau:*

- A là ma trận vuông cấp $1 : A = [a_{11}]$ *thì* $\det(A) = a_{11}$.

- A là ma trận vuông cấp $2 : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *thì*

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- *A là ma trận vuông cấp* $3 : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *thì*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

- *A là ma trận vuông cấp* $n : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *thì*

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}) - \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$

Ví dụ 11. *Định thức của ma trận* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *là:*

$$\det(A) = 1.7 - (-3).5 = 22$$

2 Công thức khai triển

Định nghĩa 13. *Cho ma trận vuông cấp n :* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$*. Với mỗi cặp* $(i, j), 1 \le i, j \le n$*, ký hiệu* M_{ij} *là ma trận vuông cấp* $(n-1)$ *có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j. Khi đó, ký hiệu* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ *và gọi là phần phụ đại số của* a_{ij}*.*

Công thức 2. *Cho ma trận vuông* $A = [a_{ij}]$ *cấp n và* A_{ij} *là phần phụ đại số của* $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$*. Khi đó:*

1. Với mỗi i cố định, $1 \le i \le n$*, ta có (công thức khai triển theo hàng i):*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

2. Với mỗi j cố định, $1 \le j \le n$*, ta có (công thức khai triển theo cột j):*

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Lưu ý 2. *Các công thức trên cho phép tính định thức cấp n qua các định thức cấp* $(n-1)$*. Trong thực hành, ta nên chọn hàng hay cột có nhiều số 0 để khai triển để giảm bớt số định thức con phải tính toán.*

Ví dụ 12. *Cho* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. *Ta có:*

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 21$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

$\Rightarrow det(A) = 21.2 + (-15).(-1) + 3.0 = 57.$

3 Một số tính chất của định thức

Tính chất 1. *Định thức của ma trận A đúng bằng định thức của ma trận chuyển vị của A :* $\det\left(A^t\right) = \det(A)$

$\Rightarrow$ **Hệ quả**: Trong một định thức vai trò của hàng và cột là như nhau, điều gì đã đúng cho hàng thì cũng đúng cho cột và ngược lại.

Tính chất 2. *Nếu đổi chỗ 2 hàng (hoặc 2 cột) trong một định thức thì định thức sẽ đổi dấu.*

Chẳng hạn: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -97 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -97 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ **Hệ quả**:

Một định thức có 2 hàng (hoặc 2 cột) như nhau thì bằng 0.

Một định thức có 1 hàng (hoặc 1 cột) toàn số 0 thì bằng 0.

Một định thức có 2 hàng (hoặc 2 cột) tỉ lệ thì bằng 0.

Tính chất 3. *Nếu nhân tất cả các phần tử trên một hàng hay một cột của ma trận A với một số k thì ta được một ma trận B với* $\det(B) = k\det(A)$

$\Rightarrow$ **Hệ quả**:

Nếu các phần tử của một hàng (hay một cột) có thừa số chung thì ta có thể nhân thừa số chung đó ra ngoài định thức.

Cho ma trận vuông A cấp n và số k. Khi đó $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Tính chất 4. *Nếu ma trận A có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì* $\det(A) = 0$

Tính chất 5. *Một định thức có 2 hàng (hoặc 2 cột) như nhau thì bằng 0.*
Một định thức có 1 hàng (hoặc 1 cột) toàn số 0 thì bằng 0.
Một định thức có 2 hàng (hoặc 2 cột) tỉ lệ thì bằng 0.

Tính chất 6. *Định thức có 1 hàng là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hoặc 1 cột là tổ hợp tuyến tính của các các cột khác) thì định thức ấy bằng 0.*

Ví dụ 13. *Chẳng hạn ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *có* $\det(A) = 0$. *Ta thấy* $h_1 = 2h_2 + h_3$ *(ta nói* h_1 *là tổ hợp tuyến tính của* h_2 *và* h_3 *) Ma trận* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *có* $\det(B) = 0$. *Ta thấy* $c_2 = c_1 - 2c_3$ *(ta nói* c_2 *là tổ hợp tuyến tính của* c_1 *và* c_3 *)*

Tính chất 7. *Khi tất cả các phần tử của 1 hàng (hoặc 1 cột) có dạng tổng của 2 số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng 2 định thức. Chẳng hạn*

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 8. *Khi cộng bội k của 1 hàng vào 1 hàng khác (hoặc cộng bội k của 1 cột vào 1 cột khác) thì định thức mới vẫn bằng định thức cũ.*

Tính chất 9. *Các định thức có dạng tam giác bằng tích các phần tử chéo.*
Suy ra, $\det(I) = 1$. *(I là ma trận đơn vị)*

Tính chất 10. *Với mọi ma trận vuông cùng cấp A và B, ta có* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

4 Kết hợp khai triển và biến đổi sơ cấp để tính định thức

Định nghĩa 14. *Phép biến đổi sơ cấp:*
Nhân tất cả các phần tử của 1 hàng (hoặc 1 cột) với cùng 1 số $k \neq 0$, *kí hiệu* $k.h_r \to h_r\,(k.c_r \to c_r)$.
Đổi vị trí 2 hàng cho nhau, kí hiệu $h_r \to h_s\,(c_r \to c_s)$.
Cộng k lần 1 hàng vào 1 hàng khác, kí hiệu $h_s + k.h_r \to h_s\,(c_s + k.c_r \to c_s)$.

Lưu ý 3. *Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp:*

Bước 1. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, đưa dần định thức đã cho về dạng tam giác.

Bước 2. Tính giá trị định thức dạng tam giác thu được (dựa vào tính chất 11 của định thức).

Ví dụ 14. *Tính định thức* $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -97 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$.

Hướng dẫn giải

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3-3h_1 \to h_3}{\overset{h_2+h_1 \to h_2}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_2-2h_4 \to h_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4-2h_2 \to h_4}{\overset{h_3-9h_1 \to h_3}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & -66 & 11 \end{vmatrix} \overset{h_4-h_3 \to h_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-66) \cdot (-30) = -1980.$$

Lưu ý 4. *Khi tính định thức, việc kết hợp biến đổi sơ cấp với công thức khai triển sẽ giảm sự cồng kềnh trong trình bày. Chẳng hạn trong ví dụ trên, ta có thể viết như sau:*

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3-4h_1 \to h_3}{\overset{h_2-2h_1 \to h_2}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{theo cột 1}}{\overset{\text{khai triển}}{=}} -\begin{vmatrix} 5 & -97 & -3 \\ 9 & -3 & -4 \\ 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [(-15) + 776 + 1404 - 18 - (-873) - 1040] = -1980.$$

III Ma trận nghịch đảo

1 Định nghĩa và tính chất

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận cấp n trên trường $\mathbb{K}$ và I (hay E) là ma trận đơn vị cấp n.

Định nghĩa 15. *Ma trận $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho*

$$AB = BA = I$$

Khi đó, ma trận B gọi là ma trận nghịch đảo của A và ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Như vậy, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của ma trận $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nếu tồn tại, là duy nhất. Ký hiệu $GL_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận khả nghịch cấp n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận khả nghịch với ma trận nghịch đảo là* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Định lý 1. *1. Ma trận đơn vị I khả nghịch và $I^{-1} = I$.*
2. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$ và $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.
4. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ và $k \in \mathbb{K}, k \neq 0$ thì $kA \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.
5. Nếu $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Lưu ý 5. *Để chứng minh ma trận X khả nghịch với ma trận nghịch đảo là Y, ta chỉ cần chỉ ra $XY = I$ và $YX = I$.*

2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

Định nghĩa 16. *Ma trận $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận không suy biến nếu* $\det(A) \neq 0$.

Định lý 2. *Ma trận $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến.*

Tính chất 11. *Ma trận $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận B sao cho $AB = I$ hoặc $BA = I$.*

3 Tìm ma trận nghịch đảo sử dụng phần phụ đại số

Công thức 3. *Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách sử dụng các phần phụ đại số*
Bước 1. Tính $\det(A)$.
Bước 2. Xác định các phần phụ đại số $A_{ij}, \forall i, j$.
Bước 3. Lập ma trận $C = \left[A_{ij}\right]$. Áp dụng công thức $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}C^t$.

Ví dụ 16. *Tìm ma trận nghịch đảo của* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\det A = 1$ nên ma trận A khả nghịch

Lập ma trận phụ đại số

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó $A^{-1} = \dfrac{(\tilde{A})^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4 Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải phương trình ma trận

Tính chất 12. *Xét phương trình ma trận $AX = I$ với I là ma trận đơn vị cấp n. Vì A khả nghịch nên phương trình có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}$.*

Ví dụ 17. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có $\det(A) = -2 \neq 0$ nên A khả nghịch. Gọi $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

Bởi vậy $a=-2, b=-1, c=-\frac{-3}{2}, d=\frac{1}{2}$ và vì vậy $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

5 Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách phương pháp biến đổi sơ cấp

Công thức 4. *Bước 1. Viết ma trận đơn vị cấp n vào sau ma trận A để được ma trận cỡ* $n\times 2n : [A \mid I]$.
Bước 2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận $[A \mid I]$ *về ma trận có dạng* $[I \mid B]$ *(ma trận A thành ma trận đơn vị I và ma trận đơn vị I thành ma trận B). Khi đó, B chính là ma trận* A^{-1} *:*

$$[A \mid I] \underset{\text{theo hàng}}{\overset{bdsc}{\longrightarrow}} [I \mid B] \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Ví dụ 18. *Tìm ma trận nghịch đảo của* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

[Hướng dẫn giải]

Xét ma trận bổ sung

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-h_1\to h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h_2-h_3\to h_2]{h_1-h_2\to h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV Hạng của ma trận

1 Khái niệm hạng của ma trận

Định nghĩa 17. *Cho ma trận cỡ* $m \times n$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Cho k *là một số nguyên dương,* $k \leq min\{m,n\}$. *Ma trận vuông cấp* k *có được từ ma trận* A *bằng cách bỏ đi* $(m-k)$ *hàng và* $(n-k)$ *cột nào đó gọi là ma trận con cấp* k *của* A. *Định thức của nó gọi là định thức con cấp* k *của* A.

Lưu ý 6. *Ma trận con cấp* k *của* A *tạo bởi các phần tử nằm ở giao của* k *hàng và* k *cột nào đó của* A. *Bởi vậy* A *có* $C_m^k.C_n^k$ *ma trận con cấp* k *(có thể không phân biệt).*

Ví dụ 19. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ *có cỡ* 3×4.

Ma trận A *có* $C_3^3.C_4^3 = 4$ *định thức con cấp 3:*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ma trận A *có* $C_3^2.C_4^2 = 18$ *định thức con cấp 2:*

$$D_{12}^1 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}, D_{34}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{13}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{14}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \dots$$

Định nghĩa 18. *Hạng của ma trận* A, *ký hiệu là* $rank(A)$ *hoặc* $r(A)$, *là cấp cao nhất của các định thức con khác* 0 *của* A.

Lưu ý 7. *Hạng của ma trận không là* 0.
Như vậy, $rank(A) = r$ *khi và chỉ khi* A *có một định thức con cấp* r *khác* 0 *và mọi định thức con cấp cao hơn* r *của* A *đều bằng* 0.

Ví dụ 20. *Với ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, *ta có* $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$, *tức là tất cả các định thức con cấp* 3 *của nó đều bằng* 0. *Bởi vậy* $rank(A) < 3$. *Mặt khác, vì* $D_{12}^1 = 4 \neq 0$ *nên* $rank(A) \geq 2$. *Từ đó ta có* $rank(A) = 2$.

Lưu ý 8. *Để tìm hạng của ma trận theo định nghĩa, chúng ta cần xét lần lượt các định thức con của* A *có cấp từ cao xuống thấp cho đến khi gặp một định thức con khác* 0.

Tính chất 13.
1. *Nếu* A *là ma trận cỡ* $m \times n$ *thì* $0 \leq rank(A) \leq min\{m,n\}$.
2. *Với mọi ma trận* A *ta có* $rank(A^t) = rank(A)$.
3. *với* A *là ma trận vuông cấp* n, *nếu* $det(A) \neq 0$ *thì* $rank(A) = n$; *nếu* $det(A) = 0$ *thì* $rank(A) < n$.

2 Ma trận bậc thang

Lưu ý 9. *Hàng không của một ma trận được hiểu là hàng có các phần tử đều là* 0.

Định nghĩa 19. *Một ma trận gọi là ma trận bậc thang nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:*
1. *Các hàng không (nếu có) phải nằm dưới các hàng khác không.*
2. *Với hai hàng khác không, phần tử khác* 0 *đầu tiên của hàng trên nằm phía bên trái phần tử khác* 0 *đầu tiên của hàng dưới.*

Lưu ý 10. *Như vậy, với ma trận bậc thang, các phần tử cùng cột và nằm dưới phần tử khác* 0 *đầu tiên (kể từ trái qua phải) của một hàng nào đó đều bằng* 0.

Ví dụ 21. *Cho các ma trận:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận A *là ma trận bậc thang, các ma trận* B, C *không là ma trận bậc thang.*

Định lý 3. *Hạng của ma trận bậc thang bằng số hằng khác không của nó.*

Ví dụ 22. *Hạng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *bằng* 3.

3 Phương pháp tìm hạng của ma trận

Lưu ý 11. *Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tính bằng 0 hay khác 0 của các định thức con của một ma trận nên nó cũng không làm thay đổi hạng của ma trận.*

Định lý 4. *Hạng của ma trận không đổi khi áp dụng các phép biến đổi sơ cấp.*

Định lý 5. ***Tìm hạng ma trận** A:*
$A \xrightarrow{bdsc} B$ *: ma trận bậc thang* $\Rightarrow rank(A) = rank(B) =$ *số hàng khác không của B.*

Ví dụ 23. *Tính* $rank(A)$ *với* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

[Hướng dẫn giải]

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4-2h_1\to h_4]{\substack{h_2-2h_1\to h_2 \\ h_3-3h_1\to h_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3-h_2\to h_3 \\ h_4-h_3\to h_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó $\operatorname{rank} A = 3$.

Ví dụ 24. *Tìm hạng của ma trận* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[Hướng dẫn giải]

Ta có:

$$A \xrightarrow{h1\leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h4-h1\to h4]{\substack{h2-2h1\to h2 \\ h_3-3h1\to h3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h4-h2\to h4]{h3-h2\to h3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{h3\leftrightarrow h4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 3.$$

V Hệ phương trình tuyến tính

1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 20. *Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$ *là các số cho trước và* $x_j, j = 1,2,\ldots,n$ *là các ẩn.*
- Các số a_{ij} *gọi là các hệ số, các số* b_i *gọi là các hệ số tự do của hệ phương trình (1).*
- Dạng (1) gọi là dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính.
- Nếu $b_i = 0, \forall i = 1,2,\ldots,m$ *thì hệ (1) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.*

Lưu ý 12. *Trong hệ phương trình* $(1), a_{ij}$ *là hệ số của phương trình thứ i và ẩn* x_j *với mọi* $i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$.

Định nghĩa 21. *Nghiệm của hệ phương trình (1) là các bộ số* $(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in \mathbb{K}^n$ *sao cho khi thay* $x_j = t_j, j = 1,2,\ldots,n$ *vào các phương trình của hệ, ta được các đồng nhất thức trên* $\mathbb{K}$.

Ví dụ 25. *Hệ* $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ -x_1 & & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases}$ *là hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất, có 3 phương trình và 4 ẩn số. Bộ số* $(-1,1,0,2)$ *là một nghiệm của hệ phương trình.*

2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 22. *Xét hệ phương trình tuyến tính (1). Ma trận* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *gọi là ma trận hệ số. Ma trận cột* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *gọi là cột hệ số tự do. Ma trận* $\bar{A} = [A \mid B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

gọi là ma trận bổ sung. Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *gọi là cột ẩn số. Khi đó, hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng*

$$AX = B \tag{2}$$

Phương trình (2) gọi là dạng ma trận của hệ (1).

Lưu ý 13. *Các phần tử trên hàng thứ i của ma trận bổ sung* $\bar{A}$ *là các hệ số của phương trình thứ i của hệ phương trình* $AX = B$ *và ngược lại. Do đó, khi cố định tên các biến, ta có sự tương ứng 1-1 (tức là tồn tại một song ánh) giữa tập hợp các ma trận bổ sung và tập hợp các hệ phương trình tuyến tính.*

Ví dụ 26. *Xét hệ* $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Ma trận bổ sung $\bar{A} = [A \mid B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$

3 Điều kiện có nghiệm

Các phép biến đổi tương đương trên hệ phương trình tuyến tính:

1. Đổi chỗ hai phương trình;

2. Nhân hai vế của một phương trình với một số khác 0

3. Nhân một phương trình với một số rồi cộng vào phương trình khác.

Nhận thấy các phép biến đổi tương đương trên một hệ phương trình tuyến tính ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung của hệ đó.

Định lý 6. *(Kronecker-Capelli)*
Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận hệ số bằng hạng của ma trận bổ sung.

Tính chất 14. *Hệ quả*
Cho hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $AX = B$*. Khi đó*
1. $\operatorname{rank}(\bar{A}) \neq \operatorname{rank}(A) \Leftrightarrow$ *hệ vô nghiệm.*
2. $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ *hệ có nghiệm duy nhất.*

3. $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}(A) = r < n \Leftrightarrow$ *hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào* $(n-r)$ *tham số.*

4 Hệ Crammer

Định nghĩa 23. *Hệ phương trình* $AX = B$ *gọi là hệ Cramer nếu* A *là ma trận vuông và* $\det(A) \neq 0$.

Định lý 7. *Hệ phương trình Cramer* $AX = B$ *có nghiệm duy nhất* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *xác định bởi công thức* $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \ldots, n$, *với* A_j *là ma trận nhận được từ ma trận* A *bằng cách thay cột* j *của* A *bởi cột hệ số tự do* B.

Ví dụ 28. *Giải phương trình sau bằng hệ Crammer* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

+) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ta có $\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ đã cho là hệ Cramer

+) Ta có $\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3$

+) Vậy $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{\det A_1}{\det A}, \dfrac{\det A_2}{\det A}, \dfrac{\det A_3}{\det A}\right) = (1, 0, 1)$ là nghiệm duy nhất của hệ

5 Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Bước 1: Lập mtr bổ sung $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Bước 2: $\bar{A} = [A \mid B] \underset{\text{theo hàng}}{\overset{\text{bđsc}}{\Rightarrow}} \bar{A}' = [A' \mid B']$. Xác định $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$, $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(\bar{A}')$.

- Nếu $\operatorname{rank}(\bar{A}) \neq \operatorname{rank}(A)$ thì hệ vô nghiệm.

- Nếu $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A)$ thì hệ có nghiệm và tiếp tục bước 3 .

Bước 3: Viết hệ phương trình tương đương $A'X = B'$ và giải nó.

Trong trường hợp $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số. Khi đó, ta sẽ giữ lại r ẩn ứng với r phần tử khác 0 đầu tiên của r hàng của $\bar{A}'$ và coi $(n-r)$ ẩn còn lại là tham số. Ta giải r ẩn theo các tham số.

Ví dụ 29. *Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss* $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

+) Xét ma trận bổ sung $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

$$\bar{A} \xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

+) Nhận thấy $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = 3$ nên hệ phương trình có duy nhất nghiệm $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ x_2 - 3x_3 & = -3 \\ x_3 & = 1 \end{cases}$

+) Giải hệ, ta được nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

Ví dụ 30. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = -2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 & = 8 \end{cases}$

[Hướng dẫn giải]

+) Xét ma trận bổ sung $\bar{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

+) $\bar{B} \xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3h_3-2h_2\to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 18 \end{array}\right)$

+) Do đó hệ có vô số nghiệm thỏa mãn. Đặt $x_4 = t$, khi đó từ ma trận bổ sung sau khi biến đổi sơ cấp, ta được nghiệm $(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(1+\frac{4t}{3}, 2-\frac{16t}{3}, 6-\frac{11t}{3}, t\right)$

6 Phương pháp Gauss - Jordan

Tính chất 15. *Nhận xét*
Khi hệ phương trình là hệ Cramer, tức là hệ gồm n phương trình, n ẩn và $\text{rank}(A) = \text{rank}(\bar{A}) = n$, *thì ma trận* $\bar{A}'$ *trong phương pháp Gauss có dạng* $\bar{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$ *trong đó ma trận* A' *tương ứng có dạng tam giác trên với các phần tử chéo* $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{nn}$ *khác 0 . Khi đó, ta có thể sử dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận* $\bar{A}'$ *về dạng* $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_n \end{array}\right)$ *và vì vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất* $(x_1,x_2,\dots,x_n) = (t_1,t_2,\dots,t_n)$. *Phương pháp giải này gọi là phương pháp Gauss-Jordan.*

Lưu ý 14. *Khi A là ma trận khả nghịch, bằng việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng ta đưa ma trận bổ sung* $\bar{A} = [A \mid B]$ *về dạng* $[I \mid B']$ *thì* B' *trở thành nghiệm của hệ phương trình* $AX = B$. *Điều này cũng đúng khi B không là ma trận cột. Đặc biệt, nếu B là ma trận đơn vị I, thì* B' *chính là ma trận nghịch đảo* A^{-1} *của ma trận A.*

Ví dụ 31. *Giải hệ* $\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3+7x_4 & = 1 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4 & = 4 \\ -x_1-2x_2+2x_3-5x_4 & = -4 \\ 4x_1+10x_2+3x_3+17x_4 & = 1 \end{cases}$ *bằng phương pháp Gauss-Jordan.*

[Hướng dẫn giải]

+) Xét ma trận bổ sung $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 4 & 10 & 3 & 17 & 1 \end{array}\right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

+) $\bar{A} \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 4 & 10 & 3 & 17 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[h4-4h1 \to h4]{h2-2h1 \to h2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & -15 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{h4-2h2 \to h4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{h4+h3 \to h4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{h1-3h4 \to h1 \\ h2-h4 \to h2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[h2-4h3 \to h2]{h1+h3 \to h1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{h1-2h2 \to h1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

+) Do đó hệ có nghiệm duy nhất là $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, -2, -1)$.

7 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 24. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

- Hệ phương trình này có ma hệ số là $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *và ma trận bổ sung là* $\bar{A} = [A \mid \theta]$.

- Nhận thấy, hệ (3) luôn có một nghiệm là $(0,0,\dots,0)$ và nghiệm đó được gọi là nghiệm tầm thường của hệ. Ta cũng luôn có $\operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A)$.

Lưu ý 15. *Khi sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi ma trận A thay cho việc biến đổi ma trận bổ sung $\bar{A}$.*

Tính chất 16. *Mệnh đề:*
Với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3), ta có
1. Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n$.
2. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$.

Ví dụ 32. ***Cho hệ phương trình***

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = b \\ mx_1 + x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

trong đó $a,b,c,m \in \mathbb{R}$.
a) *Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.*
b) *Cho $(a,b,c) = (0,0,0)$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình.*

[Hướng dẫn giải]

a) Xét ma trận tạo bởi các hệ số của các ẩn $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (1+1) - 1 \cdot (2-(-m)) + (-2) \cdot (2-m) = 0 \Leftrightarrow 2 - (2+m) - 6 + 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

b) Với $m \neq -2$ thì $\det A \neq 0$, nên hệ phương trình là hệ Cramer, do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.

Với $m = -2$, thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thấy hệ này có vô số nghiệm.