GIẢI TÍCH I
BÀI 9

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (TIẾP THEO)

2. Các tính chất của tích phân xác định

a) Tuyến tính. $\exists \int_a^b f(x)\,dx, \exists \int_a^b g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Cộng tính. $f(x)$ khả tích trên khoảng có độ dài lớn nhất từ $[a ; b]$, $[a ; c]$, $[c ; b]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ khả tích trên các khoảng còn lại và có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

c) Bảo toàn thứ tự

+) $f(x)$ khả tích và không âm trên $[a ; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

+) $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a ; b]$ và $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

+) $f(x)$ khả tích trên $[a ; b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

+) Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a ; b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$.

d) Các định lí trung bình.

- Định lí trung bình thứ nhất. $f(x)$ khả tích trên $[a ; b]$, $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \exists \mu \in [m ; M]$ để có $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b - a)$.

Nếu thêm $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ thì $\exists\, c \in [a ; b]$: $\int_a^b f(x) g(x)dx = f(c)(b - a)$

- Định lí trung bình thứ hai. $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a ; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ và có $g(x)$ không đổi dấu trên $[a ; b] \Rightarrow \exists\, \mu \in [m ; M]$: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$

Nếu thêm $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ thì $\exists\, c \in [a ; b]$: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$

e) Tính chất

1°/ Tích phân các hàm chẵn, lẻ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm chẵn} \\ 0, & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm lẻ} \end{cases}$$

2°/ $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ lẻ} \end{cases}$$ **(Warllis)**

III. Công thức đạo hàm theo cận , công thức Newton – Leibnitz

Định lí. $f(x)$ khả tích trên $[a ; b] \Rightarrow I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ liên tục trên $[a ; b]$.

Nếu thêm $f(t)$ liên tục tại $t = x \in [a ; b] \Rightarrow I'(x) = f(x)$.

Ví dụ 1.

a) $\dfrac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}dt$ **b)** $\dfrac{d}{dx}\int_x^1 \sqrt{1+t^3}\,dt$ **c)** $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sin t^2\,dt$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^4 x\int_0^x t^2\sin t\,dt\right)$ $(\frac{1}{4})$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\tan^3 x\int_x^{\pi/2}(\pi-2t)\cos t\,dt\right)$ **(0)**

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1-2t)\,dt}{x\sin^3 x}$ **(–1)** **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}\tan t\,dt}{x^2\ln(1+x^4)}$ $(\frac{1}{2})$

h) Tìm a để tích phân đạt giá trị nhỏ nhất $\int_0^a e^x\arctan(1+x)\,dx$ $(a = -1)$

i) Tìm a để tích phân đạt giá trị nhỏ nhất $\int_0^a e^{-x}\arctan(1-x)\,dx$ $(a = 1)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin^2 2t\,dt}{\int_0^x \ln(1+2t^3)\,dt}$ **(2)** **l)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2\sin^3 3t\,dt}{\int_0^x \ln(1-3t^4)\,dt}$ **(0)**

Công thức Newton – Leibnitz: $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$ và có nguyên hàm là $F(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 2.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$;

b) $\int_0^1 x^3 e^x dx$

c) $\int_0^3 |2-x|\, dx$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$

f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{2n}$ $\left(\frac{4}{\pi^2}\right)$

g) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \cos \frac{k\pi}{2n}$ $\left(\frac{2\pi-4}{\pi^2}\right)$

Ví dụ 3. Cửa thẳng đứng của một con đập có dạng hình vuông với cạnh bằng 4ft ngập trong nước và cách mặt nước 2ft. Hãy tính áp lực của nước tác động lên cửa đập.

Ví dụ 4. Một thùng hình trụ có bán kính *r*, chiều cao *h*, chứa nước có chiều cao D. Tính công sản ra khi bơm nước qua đáy trên thùng.

Ví dụ 5. Trong buồng đốt của một xi lanh hình trụ chứa một lượng khí nhất định với áp suất ban đầu là p = 101325N/m^2 và thể tích ban đầu là V_1 = 0,4m^3. Tính công sản ra khi pittông chuyển động đến vị trí sao cho buồng đốt có thể tích V_2 = 0,8m^3 (coi nhiệt độ không khí không thay đổi)

IV. Các phương pháp tính

a) Đổi biến số. Xét $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$.

Định lí 1. Xét $x = \varphi(t)$ thoả mãn:

+) $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha\,;\,\beta]$

+) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

+) Khi t biến thiên trong $[\alpha\,;\,\beta]$ thì $\varphi(t)$ biến thiên trong $[a\,;\,b]$.

Khi đó ta có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Định lí 2. Xét $t = \varphi(x)$ thoả mãn:

+) $\varphi(x)$ biến thiên đơn điệu trên $[a\,;\,b]$ và có đạo hàm liên tục.

+) $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$, ở đó $g(t)$ liên tục trong $[\varphi(a)\,;\,\varphi(b)]$.

Khi đó ta có $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt$

Ví dụ 1.

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

c) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{-e^x+6}\,dx$

h) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x(\sin x + \cos x)}{1+|\sin 2x|}\,dx$ (1)

k) $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x^2(3x+1)^2}$ $\left(2 + 6\ln\frac{3}{4}\right)$

d) $\displaystyle\int_{3}^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx,\quad n\in\mathbb{N}$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{x^2}\arctan x}{1+x^6+\sin x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}\right)dx$ **(0)**

l) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$ **$(2+\ln 3)$**

m) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$ **$(2-\ln 3)$**

n) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2}$ **$(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2})$**

o) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$ **$(-\frac{\pi}{8})$**

b) Tích phân từng phần

Cho các hàm *u, v* khả vi liên tục trên [*a* ; *b*], khi đó ta có $\displaystyle\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Ví dụ 2.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3e^{2x}dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{1}^{2} \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,dx$ **$(\frac{\pi}{2}-1)$**

h) $\displaystyle\int_{1}^{2} \arccos\sqrt{\frac{2x-1}{2x}}\,dx$ **$(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$**

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|(1-2\arctan x)^2\,dx$ **$(1+\frac{\pi^2}{2}-2\pi+4\ln 2)$**

k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|(1+\arctan x)^3\,dx$ **$(1+3\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}+\ln 2\right))$**

l) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\arccos x)^2\,dx$ **$(\pi-2)$**

m) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arcsin^2 x\,dx$ **$(\frac{\pi^2}{4}-2)$**

n) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$ **(1)**

o) $\displaystyle\int_{1}^{2} \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x}}dx$ **$(\frac{\pi}{2}-1)$**

p) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin^2 x\,dx$ **(π)**

q) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4-5x)\sin^2 x\,dx$ **(2π)**

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Đặt vấn đề

I. Tích phân suy rộng với cận vô tận

1. Định nghĩa $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$

Ta nói tích phân suy rộng hội tụ nếu vế phải tồn tại (hữu hạn) và phân kì trong trường hợp ngược lại.

Tương tự ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)\,dx$

Ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Tích phân trên hội tụ ⇔ cả hai tích phân vế phải hội tụ.

Ví dụ 1. Tính

a) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ **b)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^2}$ **c)** $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

d) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\quad \alpha\in\mathbb{R}$ **e)** $\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$ **f)** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

g) $\int_0^{\infty}\frac{2x+1}{e^{2x}}dx$ **(1)** **h)** $\int_1^{\infty}e^{-\sqrt{x-1}}dx$ **(2)**

i) $\int_{-\infty}^{0}x2^{2x-1}dx$ $\left(\frac{-1}{8\ln^2 2}\right)$ **k)** $\int_{-\infty}^{0}x3^{2x+1}dx$ $\left(\frac{-3}{4\ln^2 3}\right)$

l) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(2+x^2)}$ $\left(\frac{1}{4}\ln 3\right)$ **m)** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$ $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$

2. Các dấu hiệu hội tụ

a) Khi $f(x) \ge 0$ và khả tích trên $[a\,;A]$, $\forall\ A > a$.

Định lí 1. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ ⇔ $\int_a^{A} f(x)\,dx \le L,\ \forall\ A.$

Định lí 2. f, g khả tích trên $[a\,;A]$, $\forall\ A > a$; $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall\ x \ge a$.

Nếu $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ hội tụ ⇒ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Nếu $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ phân kì ⇒ $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kì

Have a good understanding!