Chương 1

GIỚI THIỆU XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

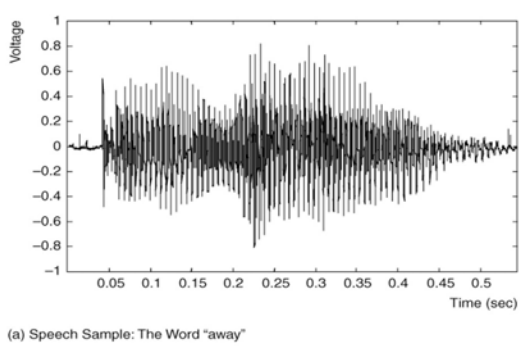
Chương này nêu tổng quát các vấn đề liên quan đến môn học. Nội dung chính chương này là:

- Giải thích các khái niệm như: "Tín hiệu", "Tín hiệu số", "Xử lý tín hiệu", "Xử lý tín hiệu số"...
- Các khâu cơ bản trong hệ thống xử lý tín hiệu số
- Nêu một số ứng dụng của xử lý tín hiệu số
- So sánh xử lý tương tự và xử lý số
- Giải thích khái niệm "Tần số"
- Các bước cơ bản chuyển đổi tín hiệu từ tương tự sang số
- Các bước có bản chuyển đổi tín hiệu từ số sang tương tự

1.1 TÍN HIỆU, HỆ THỐNG và XỬ LÝ TÍN HIỆU

Để hiểu "Xử lý tín hiệu" là gì, ta sẽ tìm hiểu ý nghĩa của từng từ. *Tín hiệu(signal)* dùng để chỉ một đại lượng vật lý mang tin tức. Về mặt toán học, ta có thể mô tả tín hiệu như là một hàm theo biến thời gian, không gian hay các biến độc lập khác. Chẳng hạn như, hàm: $x(t) = 20t^2$ mô tả tín hiệu biến thiên theo biến thời gian t. Hay một ví dụ khác, hàm: $s(x,y) = 3x + 5xy + y^2$ mô tả tín hiệu là hàm theo hai biến độc lập x và y, trong đó x và y biểu diễn cho hai tọa độ không gian trong mặt phẳng.

Hai tín hiệu trong ví dụ trên thuộc về lớp tín hiệu có thể được biểu diễn chính xác bằng hàm theo biến độc lập. Tuy nhiên, trong thực tế, các mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý và các biến độc lập thường rất phức tạp nên không thể biểu diễn tín hiệu như trong hai ví dụ vừa nêu trên.



***Hình 1.1** Ví dụ tín hiệu tiếng nói*

Lấy ví dụ tín hiệu tiếng nói- đó là sự biến thiên của áp suất không khí theo thời gian. Chẳng hạn khi ta phát âm từ "away", dạng sóng của từ đó được biểu diễn trên hình 1.1.

Một ví dụ khác là tín hiệu điện tâm đồ (ECG)- cung cấp cho bác sĩ những tin tức về tình trạng tim của bệnh nhân, hay là tín hiệu điện não đồ (EEG) cung cấp tin tức về hoạt động của não.

Các tín hiệu tiếng nói, ECG, EEG là các ví dụ về tín hiệu mang tin có thể biểu diễn là hàm theo biến thời gian. Thực tế có những tín hiệu là hàm theo nhiều biến độc lập. Ví dụ như tín hiệu ảnh (image)- là sự thay đổi của cường độ ánh sáng theo không gian, có thể xem là hàm độ sáng theo hai biến không gian.

Tất cả các tín hiệu đều do một nguồn nào đó tạo ra, theo một cách thức nào đó. Ví dụ tín hiệu tiếng nói được tạo ra bằng cách ép không khí đi qua dây thanh âm. Một bức ảnh có được bằng cách phơi sáng một tấm phim chụp một cảnh/ đối tượng nào đó. Quá trình tạo ra tín hiệu như vậy thường liên quan đến một hệ thống, hệ thống này đáp ứng lại một kích thích nào đó. Trong tín hiệu tiếng nói, hệ thống là hệ thống phát âm, gồm môi, răng, lưỡi, dây thanh... Kích thích liên quan đến hệ thống được gọi là *nguồn tín hiệu (signal source).* Như vậy ta có nguồn tiếng nói, nguồn ảnh và các nguồn tín hiệu khác.

Có thể định nghĩa *hệ thống (system)* là một thiết bị vật lý thực hiện một tác động nào đó lên tín hiệu. Ví dụ, bộ lọc dùng để giảm nhiễu trong tín hiệu mang tin được gọi là một hệ thống.

Khi ta truyền tín hiệu qua một hệ thống, như bộ lọc chẳng hạn, ta nói rằng ta đã xử lý tín hiệu đó. Trong trường hợp này, xử lý tín hiệu liên quan đến lọc nhiễu ra khỏi tín hiệu mong muốn. Như vậy, *xử lý tín hiệu (signal processing)* là ý muốn nói đến một loạt các công việc hay các phép toán được thực hiện trên tín hiệu nhằm đạt một mục đích nào đó, như là tách lấy tin tức chứa bên trong tín hiệu hoặc là truyền tín hiệu mang tin từ nơi này đến nơi khác.

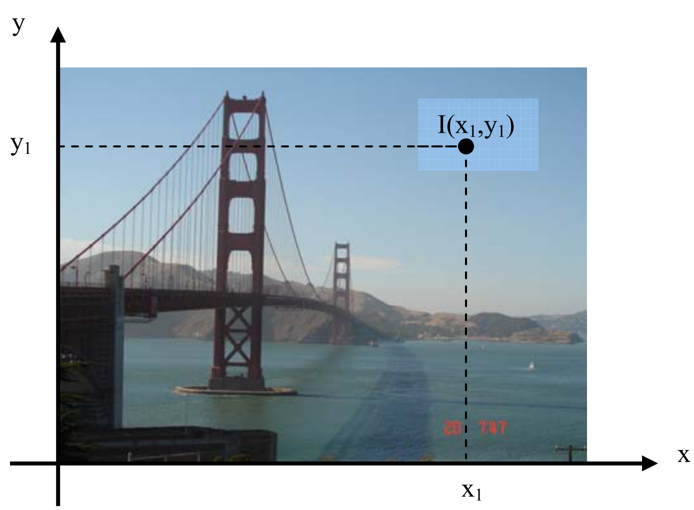
Ở đây ta cần lưu ý đến định nghĩa hệ thống, đó không chỉ đơn thuần là thiết bị vật lý mà còn là các phần mềm xử lý tín hiệu hoặc là sự kết hợp giữa phần cứng và phần mềm.Ví dụ khi xử lý số tín hiệu bằng các mạch logic, hệ thống xử lý ở đây là phần cứng. Khi xử lý bằng máy tính số, tác động lên tín hiệu bao gồm một loạt các phép toán thực hiện bởi chương trình phần mềm. Khi xử lý bằng các bộ vi xử lý- hệ thống bao gồm kết hợp cả phần cứng và phần mềm, mỗi phần thực hiện các công việc riêng nào đó.

1.2 PHÂN LOẠI TÍN HIỆU

Các phương pháp ta sử dụng trong xử lý tín hiệu phụ thuộc chặt chẽ vào đặc điểm của tín hiệu. Có những phương pháp riêng áp dụng cho một số loại tín hiệu nào đó. Do vậy, trước tiên ta cần xem qua cách phân loại tín hiệu liên quan đến những ứng dụng cụ thể.

1.2.1 Tín hiệu nhiều hướng và tín hiệu nhiều kênh

Như đã nói trong mục 1.1, tín hiệu có thể được mô tả là hàm theo một hoặc nhiều biến độc lập. Nếu tín hiệu là hàm theo một biến, ta gọi đó là các *tín hiệu một hướng (one-dimention signal),* như tín hiệu tiếng nói, ECG, EEG. Ngược lại ta gọi là *tín hiệu nhiều hướng (multi-dimention signal)*, ví dụ như tín hiệu ảnh trắng đen, mỗi điểm ảnh là hàm theo 2 biến độc lập.



Hình 1.2 *Ví dụ tín hiệu ảnh màu (2 hướng- 3 kênh)*

Trong một số ứng dụng, tín hiệu được tạo ra không phải từ một mà là nhiều nguồn hay nhiều bộ cảm biến. Các tín hiệu như vậy được gọi là *tín hiệu đa kênh (multi-channel signal).* Bức ảnh trên hình 1.2 là một ví dụ về tín hiệu 2 hướng, 3 kênh. Ta thấy độ sáng I(x,y) ở mỗi một điểm là hàm theo 2 biến không gian độc lập, độ sáng này lại phụ thuộc vào độ sáng của 3 màu cơ bản red, green và blue. Một ví dụ khác, tín hiệu ảnh TV màu là tín hiệu 3 hướng- 3 kênh, có thể biểu diễn bởi vector sau :

$$I(x,y,t)=\begin{bmatrix} I_r(x,y,t) \\ I_g(x,y,t) \\ I_b(x,y,t) \end{bmatrix}$$

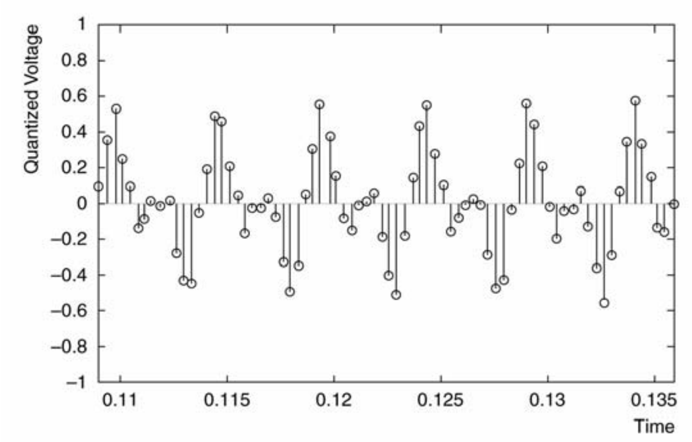
Trong giáo trình này, ta tập trung xét tín hiệu một hướng- một kênh, biến là biến thời gian (mặc dù thực tế không phải lúc nào biến cũng là biến thời gian)

1.2.2 Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

Tín hiệu liên tục (continuous-time signal) hay còn gọi là tín hiệu tương tự là tín hiệu được xác định tại tất cả các giá trị thời gian. Về mặt toán học, có thể mô tả tín hiệu này là hàm của một biến liên tục, ví dụ tín hiệu tiếng nói.

Tín hiệu rời rạc (discrete-time signal) chỉ được xác định tại một số thời điểm nào đó. Khoảng cách giữa các thời điểm này không nhất thiết phải bằng nhau, nhưng trong thực tế thường là lấy bằng nhau để dễ tính toán. Có thể tạo ra tín hiệu rời rạc từ tín hiệu liên tục bằng 2 cách. Một là lấy mẫu tín hiệu liên tục, hai là đo hay đếm một đại lượng vật lý nào đó theo một chu kỳ nhất định, ví dụ cân em bé hàng tháng, đo áp suất không khí theo giờ...

Tín hiệu $x(t_n)=e^{-|t_n|}, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ là một ví dụ về tín hiệu rời rạc. Ta có thể dùng biến nguyên n thay cho biến thời gian rời rạc t_n. Lúc này, tín hiệu trở thành một hàm theo biến nguyên, về mặt toán ta có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc là một dãy số (thực hoặc phức). Ta sử dụng ký hiệu x(n) thay cho $x(t_n)$, nghĩa là t_n = nT với T là hằng số- khoảng cách giữa hai thời điểm rời rạc cạnh nhau. Hình 1.3 là một ví dụ về tín hiệu tiếng nói rời rạc.



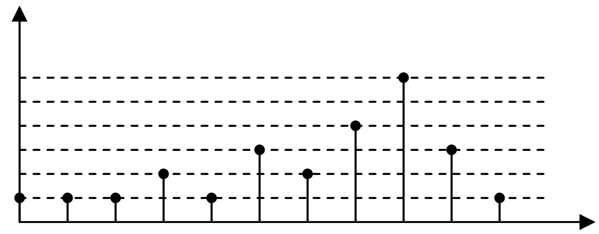
Hình 1.3 *Ví dụ tín hiệu rời rạc*

1.2.3 Tín hiệu biên độ liên tục và tín hiệu biên độ rời rạc

Biên độ của cả tín hiệu liên tục và rời rạc đều có thể liên tục hay rời rạc.

Nếu tín hiệu có tất cả các giá trị trong một dải biên độ nào đó thì ta gọi đó là *tín hiệu biên độ liên tục (continuous-valued signal)*. Ngược lại, nếu tín hiệu chỉ lấy một số giá trị nào đó (còn gọi là mức) trong một dải biên độ thì đó là *tín hiệu biên độ rời rạc (discrete-valued signal).*

Khoảng cách giữa các mức biên độ này có thể bằng nhau hay không bằng nhau. Thường thì ta biểu diễn các mức biên độ này bằng một số nguyên, đó là bội số của khoảng cách giữa hai mức biên độ cạnh nhau. Tín hiệu rời rạc theo cả thời gian và biên độ được gọi là *tín hiệu số (digital signal)*. Hình 1.4 là một ví dụ về tín hiệu số.



Hình 1.4 *Ví dụ tín hiệu số với 6 mức biên độ khác nhau*

Để xử lý tín hiệu, trước hết phải thu lấy được tín hiệu. Ví dụ ta thu lấy tín hiệu âm thanh bằng microphone, chuyển đổi tín hiệu âm thanh sang tín hiệu điện. Hay như tín hiệu ảnh, ta có thể thu lấy bằng máy ảnh. Trong máy ảnh tương tự chẳng hạn, tín hiệu ánh sáng điều khiển các phản ứng hóa học trên một tấm phim ảnh. Về bản chất, các tín hiệu tự nhiên đều là tương tự, có số mức biên độ và số thời điểm đều là vô hạn. Do vậy, tín hiệu tương tự không phù hợp để xử lý bằng các hệ thống số. Để xử lý số, tín hiệu tương tự được lấy mẫu vào các thời điểm rời rạc, tạo thành tín hiệu rời rạc, sau đó lượng tử hóa biên độ của nó thành một tập các mức biên độ rời rạc. Quá trình *lượng tử hóa (quantization)* tín hiệu, về cơ bản là một quá trình xấp xỉ hóa. Nó có thể được thực hiện dễ dàng bằng cách làm tròn hay cắt gọt. Ví dụ tín hiệu có giá trị là 8.62 có thể được xấp xỉ hóa thành 8 (nếu lượng tử hóa bằng cách cắt gọt) hay là 9 (nếu lượng tử hóa bằng cách làm tròn)

1.2.4 Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên

Quá trình phân tích toán học và xử lý tín hiệu yêu cầu phải mô tả được tín hiệu. Sự mô tả này liên quan đến một mô hình tín hiệu. Dựa vào mô hình tín hiệu, ta có một cách phân loại tín hiệu khác.

Các tín hiệu có thể được mô tả duy nhất bằng một biểu diễn toán học rõ ràng như là đồ thị, bảng dữ liệu... được gọi là *tín hiệu xác định (deterministic signal)*. Từ “xác định” ý muốn nhấn mạnh là ta biết rõ và chắc chắn các giá trị của tín hiệu trong quá khứ, hiện tại và tương lai.

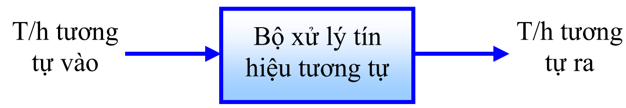
Tuy nhiên trong nhiều ứng dụng thực tế, có những tín hiệu không thể biểu diễn chính xác bằng các công thức toán học hay những mô tả toán như vậy là quá phức tạp. Ta không thể đoán trước sự biến thiên của các giá trị của loại tín hiệu này. Ta gọi đây là *tín hiệu ngẫu nhiên (random signal)*. Ví dụ tín hiệu nhiễu là tín hiệu ngẫu nhiên.

Ta cần lưu ý rằng việc phân loại tín hiệu thực thành xác định hay ngẫu nhiên không phải lúc nào cũng rõ ràng. Đôi khi, xem tín hiệu là xác định hay ngẫu nhiên đều dẫn đến những kết quả có ý nghĩa. Nhưng đôi khi, việc phân loại sai sẽ dẫn đến kết quả bị lỗi, bởi vì có những công cụ toán chỉ có thể áp dụng cho tín hiệu xác định, trong khi các công cụ khác lại chỉ áp dụng cho tín hiệu ngẫu nhiên. Điều này sẽ trở nên rõ ràng hơn khi ta kiểm tra các công cụ toán cụ thể.

1.3 HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU

1.3.1 Các khâu cơ bản trong một hệ thống xử lý số tín hiệu

Như đã nói trên, hầu hết các tín hiệu bắt gặp trong khoa học và kỹ thuật đều là tương tự. Có thể xử lý trực tiếp các tín hiệu đó bằng một hệ thống tương tự thích hợp. Trong trường hợp này, ta nói tín hiệu được xử lý trực tiếp ở dạng tương tự, như minh họa trên hình 1.5. Cả tín hiệu vào và ra đều là tín hiệu tương tự.



***Hình 1.5** Xử lý tín hiệu tương tự*

Xử lý số là một phương pháp khác để xử lý tín hiệu tương tự, như minh họa trên hình 1.6. Tín hiệu tương tự phải được chuyển đổi thành dạng số (A/D) trước khi xử lý. Điều không may là quá trình chuyển đổi tương tự/ số này không bao giờ hoàn hảo, nghĩa là tín hiệu số không phải là biểu diễn chính xác cho tín hiệu tương tự ban đầu. Khi tín hiệu tương tự được chuyển thành tín hiệu số gần đúng nhất, quá trình xử lý sẽ được thực hiện bằng một *bộ xử lý tín hiệu số DSP (Digital Signal Processor),* tạo ra một tín hiệu số mới. Trong hầu hết các ứng dụng, tín hiệu số cần được chuyển đổi ngược lại thành tín hiệu tương tự (D/A) ở cuối quá trình xử lý. Tuy nhiên, cũng có những ứng dụng liên quan đến phân tích tín hiệu, trong đó không cần chuyển đổi D/A. Hình 1.6 là sơ đồ khối một hệ thống xử lý tín hiệu bằng phương pháp số. Bộ xử lý tín hiệu số DSP có thể là một mạch logic, một máy tính số hoặc là một bộ vi xử lý lập trình được.

***Hình 1.6** Xử lý số tín hiệu*

1.3.2 Ưu điểm của xử lý số so với xử lý tương tự

Có nhiều nguyên nhân khác nhau khiến cho xử lý số được ưa chuộng hơn là xử lý trực tiếp tín hiệu tương tự. Trước tiên, hệ thống số có thể lập trình được, tạo ta tính mềm dẻo trong việc cấu hình lại các hoạt động xử lý bằng cách đơn giản là thay đổi chương trình, trong khi đó để cấu hình lại hệ tương tự, ta phải thiết kế lại phần cứng, rồi kiểm tra và thẩm định xem các hoạt động đó có đúng không.

Độ chính xác cũng đóng một vai trò qua trọng trong việc lựa chọn bộ xử lý tín hiệu. Độ sai lệch của các linh kiện tương tự khiến cho các nhà thiết kế hệ thống vô cùng khó khăn trong việc điều khiển độ chính xác của hệ thống tương tự. Trong khi đó, việc điều khiển độ chính xác của hệ thống số lại rất dễ dàng, chỉ cần ta xác định rõ yêu cầu về độ chính xác rồi quyết định lựa chọn các bộ chuyển đổi A/D và DSP có độ dài từ thích hợp, có kiểu định dạng dấu phẩy tĩnh hay dấu phẩy động.

Tín hiệu số dễ dàng lưu trữ trên các thiết bị băng đĩa từ mà không bị mất mát hay giảm chất lượng. Như vậy tín hiệu số có thể truyền đi xa và có thể được xử lý từ xa. Phương pháp xử lý số cũng cho phép thực hiện các thuật toán xử lý tín hiệu tinh vi phức tạp hơn nhiều so với xử lý tương tự, nhờ việc xử lý được thực hiện bằng phần mềm trên các máy tính số.

Trong một vài trường hợp, xử lý số rẻ hơn xử lý tương tự. Giá thành thấp hơn là do các phần cứng số rẻ hơn, hoặc là do tính mềm dẻo trong xử lý số.

Tuy nhiên, xử lý số cũng có một vài hạn chế. Trước tiên là sự hạn chế về tốc độ hoạt động của các bộ chuyển đổi A/D và bộ xử lý số DSP. Sau này ta sẽ thấy những tín hiệu băng thông cực lớn yêu cầu tốc độ lấy mẫu của bộ A/D cực nhanh và tốc độ xử lý của DSP cũng phải cực nhanh. Vì vậy, phương pháp xử lý số chưa áp dụng được cho các tín hiệu tương tự băng thông lớn.

Nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ máy tính và công nghệ sản xuất vi mạch mà lĩnh vực xử lý tín hiệu số (DSP) phát triển rất mạnh trong vài thập niên gần đây. Ứng dụng của DSP ngày càng nhiều trong khoa học và công nghệ. DSP đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của các lĩnh vực như viễn thông, đa phương tiện, y học, xử lý ảnh và tương tác người-máy...

Để thấy rõ ảnh hưởng to lớn của xử lý tín hiệu số, ta xem ví dụ về sự phát triển của máy ảnh, từ máy ảnh tương tự truyền thống đến máy ảnh số ngày nay. Máy ảnh truyền thống hoạt động dựa trên các đặc điểm vật lý của thấu kính quang học, trong đó chất lượng bức ảnh càng đẹp khi hệ thống thấu kính càng to và rộng. Khi máy ảnh số mới ra đời với thấu kính nhỏ hơn thì chất lượng ảnh chụp thấp hơn nhiều so với tương tự. Tuy nhiên, khi năng lực xử lý của các bộ vi xử lý mạnh hơn và các thuật toán xử lý tín hiệu số tinh vi hơn được áp dụng thì các nhược điểm về quang học được khắc phục và chất lượng ảnh được cải thiện rõ rệt. Hiện nay, các máy ảnh số cho chất lượng ảnh vượt trội hơn so với tương tự. Hơn nữa, các máy ảnh số cài trong điện thoại di động hiện nay có thấu kính rất nhỏ nhưng vẫn có thể cho chất lượng ảnh rất tốt. Chất lượng ảnh ở đây phụ thuộc vào năng lực của DSP chứ không phải phụ thuộc vào kích thước của thấu kính quang học. Nói cách khác, công nghệ máy ảnh số đã sử dụng năng lực tính toán của DSP để khắc phục các hạn chế về vật lý.

Tóm lại, DSP là một lĩnh vực dựa trên nguyên ý của toán học, vật lý và khoa học máy tính và có những ứng dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

1.4 KHÁI NIỆM TẦN SỐ TRONG TÍN HIỆU LIÊN TỤC VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC

Từ vật lý chúng ta biết rằng tần số liên quan chặt chẽ với kiểu chuyển động có chu kỳ gọi là dao động và được mô tả bằng hàm sin. Khái niệm tần số liên quan trực tiếp đến khái niệm thời gian. Thực tế thì tần số có thứ nguyên là đảo ngược của thời gian. Do vậy bản chất của thời gian (liên tục hoặc rời rạc) sẽ có ảnh hưởng đến bản chất của tần số.

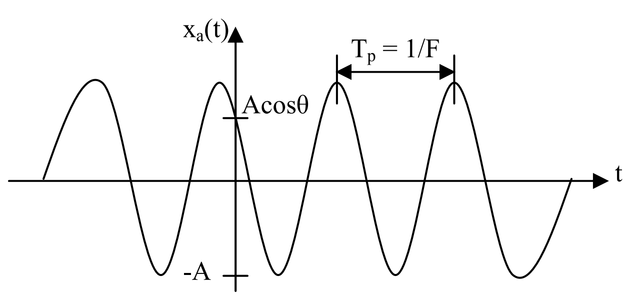
1.4.1 Tín hiệu sin liên tục

Một dao động điều hòa đơn giản được mô tả toán học bằng hàm sin liên tục sau:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta),\ -\infty<t<\infty$$

Tín hiệu này được xác định bởi 3 thông số: A là biên độ, Ω là tần số góc tính bằng radian trên giây (rad/s) và θ là góc pha tính bằng radian (rad) (hình 1.7). Thay vì dùng Ω, ta có thể dùng F tính bằng số chu kỳ trên giây hay hertz (Hz), ở đây: $\Omega = 2\pi F$. Vậy ta có thể viết lại:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft+\theta),\ -\infty<t<\infty$$



Hình 1.7 Tín hiệu sin liên tục

Tín hiệu sin liên tục ở trên có các đặc điểm sau đây:

1. Với F cố định, tín hiệu sin liên tục $x_a(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F$, nghĩa là ta luôn luôn có:

$$x_a(t+T_p) = x_a(t), -\infty < t < \infty$$

2. Các tín hiệu sin liên tục có tần số khác nhau thì khác nhau.
3. Việc tăng tần số sẽ dẫn đến tăng tốc độ của dao động của tín hiệu, tức là tăng số chu kỳ dao động trong một khoảng thời gian cho trước. Vì thời gian t liên tục nên ta có thể tăng F đến vô cùng.

Ta cũng có thể biểu diễn tín hiệu sin liên tục ở một dạng khác, thường được gọi là phasor như sau:

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta)=\frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$

Theo cách biểu diễn phasor, có thể xem tín hiệu sin liên tục là tổng của 2 tín hiệu điều hòa hàm mũ phức có biên độ bằng nhau và liên hợp phức với nhau, tần số góc ở đây là $\pm\Omega$: tần số dương và âm. Để thuận tiện về mặt toán, ta sử dụng cả khái niệm tần số dương và âm. Vậy dải tần số của tín hiệu liên tục là $-\infty < F < \infty$.

1.4.2 Tín hiệu sin rời rạc

Tín hiệu sin rời rạc được biểu diễn như sau:

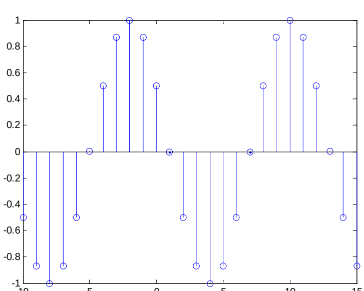
$$x(n) = A\cos(\omega n+\theta), -\infty<n<\infty$$

ở đây n là biến nguyên gọi là số mẫu, A là biên độ, ω là tần số góc tính bằng radian trên mẫu (rad/mẫu) và θ là góc pha tính bằng radian (rad).

Thay vì dùng ω, ta có thể dùng tần số f với quan hệ: $\omega = 2\pi f$. Ta viết lại x(n) như sau:

$$x(n) = A\cos(2\pi fn+\theta), -\infty<n<\infty$$

Tần số f có thứ nguyên là chu kỳ trên mẫu (chu kỳ/mẫu). Tạm thời bây giờ chúng ta chưa xét đến mối quan hệ giữa F và f, ta xem như tín hiệu sin rời rạc là độc lập với tín hiệu sin liên tục. Hình 1.8 là biểu diễn tín hiệu sin rời rạc với $\omega = \pi/6$ (rad/mẫu) và pha $\theta = \pi/3$ (rad).



***Hình 1.8** Tín hiệu sin rời rạc*

Khác với tín hiệu sin liên tục, tín hiệu sin rời rạc có các đặc điểm sau đây:

1. *Tín hiệu sin rời rạc tuần hoàn khi và chỉ khi tần số f là một số hữu tỷ.*

Từ định nghĩa, tín hiệu rời rạc x(n) tuần hoàn với chu kỳ N (N>0) khi và chỉ khi

$$x(n+N) = x(n) \ \ \forall n$$

Giá trị N nhỏ nhất được gọi là chu kỳ cơ bản.

Giả sử tín hiệu sin rời rạc tần số f_0 tuần hoàn, ta có:

$$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta] = \cos(2\pi f_0 n+\theta)$$

Quan hệ này chỉ đúng khi tồn tại một số nguyên k sao cho:

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \Leftrightarrow f_0 = \frac{k}{N}$$

Theo đây, ta thấy tín hiệu sin rời rạc chỉ tuần hoàn khi f_0 có thể biểu diễn dưới dạng tỷ của hai số nguyên, nghĩa là f_0 là một số hữu tỷ.

Để xác định chu kỳ cơ bản của tín hiệu sin rời rạc, ta biểu diễn f_0 dưới dạng tỷ của hai số nguyên k/N, sau đó đưa k/N về dạng phân số tối giản. Lúc đó mẫu số của phân số tối giản chính là chu kỳ cơ bản. Ví dụ f_1 = 31/50, nghĩa là N_1 = 50 hay N_2 = 25/50 = 1/2 nghĩa là N_2 = 2.

2. *Các tín hiệu sin rời rạc có tần số khác nhau một bội số nguyên lần 2π thì trùng nhau.*

Ta xét tín hiệu sin rời rạc $x(n) = \cos(\omega_0 n+\theta)$. Dễ dàng nhận thấy rằng:

$$x(n) = \cos[(\omega_0+2\pi)n+\theta] = \cos(\omega_0 n+2\pi n+\theta) = \cos(\omega_0 n+\theta)$$

Vậy tất cả các tín hiệu sin rời rạc có dạng:

$$x_k(n) = \cos(\omega_k n+\theta),\ k = 0,1,2,...$$

với

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi, -\pi \le \omega_0 \le \pi$$

đều trùng nhau. Nói cách khác, các tín hiệu sin rời rạc có tần số nằm trong dải $-\pi \le \omega \le \pi$ hay $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$ thì mới khác biệt nhau. Vì lý do đó nên ta gọi những tín hiệu sin rời rạc có tần số nằm ngoài dải $[-\pi,\pi]$ là *phiên bản (alias)* của những tín hiệu rời rạc có tần số nằm trong dải $[-\pi,\pi]$ tương ứng. Dải tần $-\pi \le \omega \le \pi$ được gọi là dải cơ bản. Nói rộng hơn, dải cơ bản là dải tần số có bề rộng là 2π. Như vậy, dải cơ bản cũng có thể là dải $0 \le \omega \le 2\pi$, $\pi \le \omega \le 3\pi$ ... Nhưng thực tế thường chọn dải cơ bản là:

$-\pi \le \omega \le \pi$ hay là $0 \le \omega \le 2\pi$

3. *Tốc độ cao nhất của tín hiệu sin rời rạc đạt được khi* $\omega = \pi$ *hay* $\omega = -\pi$*, tương đương với* $f = \frac{1}{2}$ *hay* $f = -\frac{1}{2}$

Ta có thể thấy rõ điều này qua ví dụ minh họa với tín hiệu $x(n) = \cos\omega_0 n$. Lần lượt cho $\omega_0 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ ta có chu kỳ tương ứng là N = $\infty, 16, 8, 4, 2$. Ta thấy chu kỳ giảm khi tần số tăng, tức là tốc độ dao động của tín hiệu tăng.

1.4.3 Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức

Cũng như tín hiệu sin điều hòa, tín hiệu điều hòa hàm mũ phức đóng một vai trò quan trọng trong phân tích tín hiệu và hệ thống. Trong phần này chúng ta xét tín hiệu điều hòa hàm mũ phức trong cả miền thời gian liên tục và rời rạc.

1. Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức liên tục

Xét tín hiệu sau:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{jk2\pi F_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

Lưu ý rằng với mỗi k, tín hiệu $s_k(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là $1/(kF_0) = T_p/k$ và chu kỳ chung là T_p. Khi k khác nhau thì tín hiệu $s_k(t)$ cũng khác nhau.

Từ $s_k(t)$, ta có thể tổ hợp tuyến tính các tín hiệu $s_k(t)$ lại với nhau để tạo thành một tín hiệu tuần hoàn $x_a(t)$ với chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F_0$ như sau:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Biểu diễn này được gọi là khai triển Fourier của $x_a(t)$, các hằng số phức c_k là các hệ số Fourier và $s_k(t)$ là các hài bậc k của $x_a(t)$

2. Tín hiệu điều hòa hàm mũ phức rời rạc

Vì tín hiệu sin rời rạc chỉ tuần hoàn khi tần số là một số hữu tỷ nên ta chọn $f_0 = 1/N$ và định nghĩa tín hiệu điều hòa hàm mũ phức rời rạc là:

$$s_k(n) = e^{jk2\pi f_0 n} = e^{jk2\pi n/N} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

Khác với tín hiệu liên tục, ở đây ta thấy:

$$s_{k+N}(n) = e^{j2\pi(k+N)n/N} = e^{j2\pi n} s_k(n) = s_k(n)$$

Điều này nghĩa là khi chọn k sai khác nhau một bội số nguyên của N thì $s_k(n)$ sẽ trùng nhau, do đó ta chỉ cần xét với $k = n_0$ đến $k = n_0 + N - 1$. Để cho tiện, ta thường chọn $n_0 = 0$. Vậy ta có:

$$s_k(n) = e^{jk2\pi f_0 n} = e^{jk2\pi n/N} \qquad k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Theo đó, tín hiệu s(n) tuần hoàn với chu kỳ cơ bản N có thể khai triển thành chuỗi Fourier như sau:

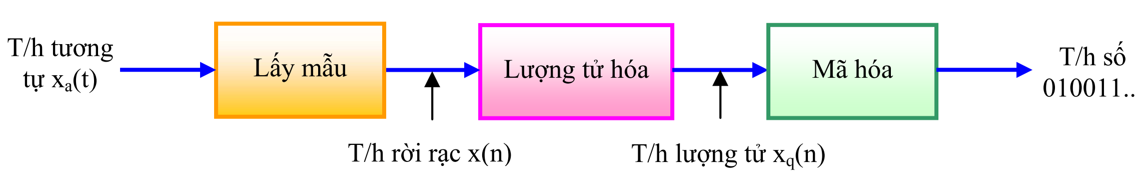
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

ở đây c_k là hệ số Fourier và $s_k(n)$ là hài bậc k của x(n).

1.5 BIẾN ĐỔI TƯƠNG TỰ - SỐ (A/D)

Hầu hết các tín hiệu thực tế như tiếng nói, tín hiệu sinh học, tín hiệu địa chấn, radar, sonar, tín hiệu thông tin như audio, video... đều là tín hiệu tương tự. Để xử lý tín hiệu tương tự bằng phương pháp số, trước hết phải chuyển tín hiệu tương tự sang dạng số. Quá trình này gọi là biến đổi A/D.

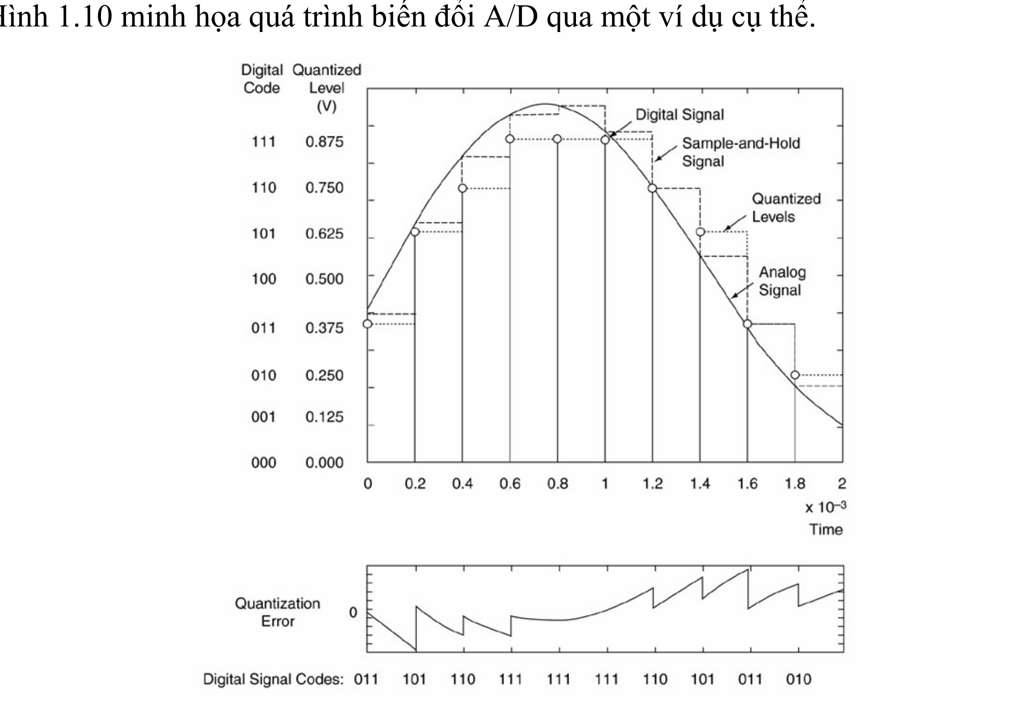
Quá trình A/D về cơ bản gồm 3 bước như minh họa trong hình 1.9.



Hình 1.9 Bộ chuyển đổi A/D cơ bản

1. *Lấy mẫu (sampling)* là quá trình chuyển đổi tín hiệu từ liên tục thành rời rạc bằng cách lấy từng *mẫu (sample)* của tín hiệu liên tục tại các thời điểm rời rạc. Vậy nếu tín hiệu $x_a(t)$ được đưa vào bộ lấy mẫu thì đầu ra là $x_a(nT) \equiv x(n)$ với T là chu kỳ lấy mẫu. Sau lấy mẫu, tín hiệu liên tục trở thành dãy các giá trị rời rạc và có thể lưu trữ trong bộ nhớ máy tính để xử lý. Thực tế thì giá trị của tín hiệu tại các thời điểm lấy mẫu thường được duy trì cho đến mẫu tiếp theo. Do đó quá trình lấy mẫu còn được gọi là *lấy mẫu và giữ mẫu (sample and hold).* Có thể nói quá trình lấy mẫu này là cầu nối giữa thế giới tương tự và thế giới số.
2. *Lượng tử hóa (quantization)* là quá trình chuyển đổi tín hiệu rời rạc có biên độ liên tục thành tín hiệu rời rạc có biên độ rời rạc (còn gọi là tín hiệu số). Mỗi mẫu tín hiệu được biểu diễn bằng một giá trị chọn từ trong tập hữu hạn các giá trị có thể có. Sự khác nhau giữa giá trị của mẫu chưa lượng tử hóa x(n) và giá trị của mẫu đã lượng tử hóa $x_q(n)$ gọi là *sai số lượng tử hóa (quantization error).* Nếu bỏ qua sai số này thì thuật ngữ tín hiệu rời rạc và tín hiệu số có thể sử dụng thay thế cho nhau.
3. *Số hóa (digitization)* là quá trình biểu diễn mỗi giá trị rời rạc $x_q(n)$ bằng một dãy số nhị phân b bit.

Hình 1.10 minh họa quá trình biến đổi A/D qua một ví dụ cụ thể.



Hình 1.10 Biến đổi A/D 3 bit

Trong phần này, ta sẽ xét chi tiết quá trình chuyển đổi A/D, gồm lấy mẫu, lượng tử hóa và mã hóa. Nếu băng thông của tín hiệu tương tự là hữu hạn và tần số lấy mẫu đủ lớn thì việc lấy mẫu sẽ không làm mất mát tín tức và không làm méo tín hiệu. Trong khi đó, lượng tử hóa là quá trình xấp xỉ hóa nên sẽ gây méo tín hiệu. Độ méo này phụ thuộc vào số bit b. Số bit tăng sẽ làm giảm méo nhưng dẫn đến giá thành tăng.

1.5.1 Lấy mẫu tín hiệu tương tự

Như đã giới thiệu ở trên, quá trình lấy mẫu được mô tả bởi quan hệ sau:

$$x(n) \equiv x_a(nT)$$

ở đây x(n) là tín hiệu rời rạc có được bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự $x_a(t)$ vào các thời điểm cách nhau T giây. Khoảng thời gian T giữa các mẫu cạnh nhau gọi là chu kỳ lấy mẫu và $F_s = 1/T$ gọi là tốc độ lấy mẫu (mẫu/s) hay tần số lấy mẫu (Hz).

Từ đây suy ra mối quan hệ giữa biến thời gian liên tục t và biến thời gian rời rạc n như sau:

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

Như vậy cũng sẽ tồn tại một quan hệ giữa biến tần số F (hay Ω) của tín hiệu liên tục và biến tần số f (hay ω) của tín hiệu rời rạc. Để thiết lập mối quan hệ này, ta xét tín hiệu sin liên tục sau:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \theta)$$

Lấy mẫu tín hiệu này với tần số $F_s = 1/T$ (mẫu/s), ta được tín hiệu rời rạc sau:

$$x_a(nT) \equiv x(n) = A\cos(2\pi FnT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right)$$

So sánh tín hiệu này với tín hiệu sin rời rạc đã xét trong (1.4.2), ta được quan hệ giữa F và f là quan hệ tuyến tính như sau:

$$f = \frac{F}{F_s}$$

Điều này tương đương với:

$$\omega = \Omega T$$

Tần số f còn được gọi là *tần số chuẩn hóa (normalized frequency)* hay tần số số. Ta có thể sử dụng tần số f để tính tần số F (Hz) nếu biết tần số lấy mẫu.

Kết hợp các dải biến thiên của tần số F (hay Ω) và f (hay ω) với quan hệ vừa tìm ra, ta có bảng tóm tắt 1.1 sau:

Tín hiệu liên tục		**Tín hiệu rời rạc**
$\Omega = 2\pi F$ [rad/s] [Hz]		$\omega = 2\pi f$ [rad/mẫu] [chu kỳ/mẫu]
$-\infty < \Omega < \infty$ $-\infty < F < \infty$	$\xRightarrow{\omega = \Omega T, \quad f = F/F_s}$	$-\pi \le \omega \le \pi$ $-1/2 \le f \le 1/2$
$-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$ $-F_s/2 \le F \le F_s/2$	$\xLeftarrow{\Omega = \omega/T, \quad F = f.F_s}$	

Bảng 1.1 *Quan hệ giữa các biến tần số*

Từ quan hệ trên, ta thấy điểm khác biệt chính giữa tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc là dải biến thiên của tần số F và f (hay Ω và ω). Việc lấy mẫu một tín hiệu liên tục chính là sắp xếp dải tần số vô hạn của biến F (hay Ω) vào dải tần số hữu hạn của biến f (hay ω). Vì tần số cao nhất của tín hiệu rời rạc là f = ½ (hay ω = π) nên với tần số lấy mẫu là F_s, tần số tương ứng cao nhất của F và Ω là:

$$F_{max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\Omega_{max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

Như vậy, tần số cao nhất của tín hiệu liên tục khi lấy mẫu với tần số F_s là $F_{max} = F_s/2$. Khi tần số của tín hiệu liên tục lớn hơn tần số $F_s/2$ thì sẽ xảy ra sự *mập mờ (ambiguity)*hay còn gọi là *chồng phổ (aliasing).* Ta có thể thấy rõ điều này qua ví dụ minh họa sau:

Cho 2 tín hiệu sin khác nhau có tần số lần lượt là 10 Hz và 50 Hz :

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$$

$$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t$$

Lấy mẫu 2 tín hiệu này với tần số F_s = 40Hz, tín hiệu rời rạc là :

$$x_1(n) = \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos\frac{\pi}{2}n$$

$$x_2(n) = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos\frac{5\pi}{2}n$$

Nhận xét thấy $x_2(n) = x_1(n)$. Như vậy, 2 tín hiệu sin rời rạc này không phân biệt được với nhau. Ta nói tần số 50 Hz là phiên bản của tần số 10 Hz tại tần số lấy mẫu là 40 Hz.

Ta có thể suy ra tổng quát là tần số $(F_0 + kF_s)$ (Hz) là phiên bản của tần số F_0 (Hz) tại tần số lấy mẫu là F_s (Hz).

Từ ví dụ trên, ta có thể dễ dàng thấy tần số cao nhất để không xảy ra sự chồng phổ là 20 Hz. Đây chính là $F_s/2$ tương ứng với $\omega = \pi$. Tần số $F_s/2$ còn được gọi là *tần số gập (folding frequency),* vì để xác định tần số phiên bản (lớn hơn $F_s/2$), ta có thể chọn $F_s/2$ làm điểm chốt rồi gập (hay phản xạ) tần số phiên bản vào dải cơ sở $[0, F_s/2]$.

Ví dụ 1.1

Cho tín hiệu tương tự:

$$x_a(t) = 3\cos 100\pi t$$

(a) Xác định tần số lấy mẫu nhỏ nhất để tránh chồng phổ

(b) Giả sử tín hiệu trên được lấy mẫu với tần số F_s = 200 Hz, tín hiệu rời rạc sau lấy mẫu là gì ?

(c) Giả sử tín hiệu trên được lấy mẫu với tần số F_s = 75 Hz, tín hiệu rời rạc sau lấy mẫu là gì ?

(d) Xác định tần số ($0 < F < F_s$) của tín hiệu sin mà có các mẫu trùng với các mẫu của tín hiệu (c)

1.5.2 Định lý lấy mẫu

Cho một tín hiệu tương tự, ta chọn tần số lấy mẫu như thế nào ? Để trả lời câu hỏi này, ta phải có một số thông tin chi tiết về các đặc điểm của tín hiệu được lấy mẫu, bao gồm biên độ, tần số và pha của các thành phần tần số khác nhau. Tuy nhiên, những thông tin như vậy thì ta lại không được biết trước. Ta chỉ có thể biết được tần số lớn nhất của một lớp tín hiệu nào đó (như là lớp tín hiệu tiếng nói, lớp tín hiệu video...). Dựa vào tần số lớn nhất này, ta có thể xác định được tần số lấy mẫu cần thiết để chuyển tín hiệu từ tương tự sang số.

Vì tần số lớn nhất này có thể thay đổi chút ít trong các tín hiệu cùng lớp (ví dụ tiếng nói của những người nói khác nhau thì có tần số lớn nhất khác nhau) nên để đảm bảo tần số lớn nhất không vượt quá F_s /2 (để tránh chồng phổ) thì trước khi lấy mẫu tín hiệu, ta cho nó đi qua một bộ lọc, lọc bỏ các tần số trên $F_s/2$. Bộ lọc này được gọi là *lọc chống chồng phổ (anti-aliasing filter)*

Từ tần số F_{max} đã biết, ta có thể chọn tần số lấy mẫu tương ứng $F_s > 2F_{max}$

Với tần số lấy mẫu như thế này, tất cả các thành phần tần số của tín hiệu tương tự được biểu diễn dưới dạng các mẫu mà không bị chồng phổ, và do vậy, ta có thể khôi phục lại tín hiệu tương tự từ các mẫu rời rạc mà không bị méo bằng cách sử dụng một phương pháp nội suy thích hợp. Công thức nội suy được trình bày trong định lý lấy mẫu như sau :

Nếu tần số cao nhất trong tín hiệu liên tục $x_a(t)$ là F_{max} và tín hiệu được lấy mẫu với tần số $F_s>2F_{max}$ thì có thể khôi phục chính xác $x_a(t)$ từ các mẫu rời rạc $x_a(nT)$ bằng cách sử dụng công thức nội suy sau :

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin 2\pi F_{max}(t-nT)}{2\pi F_{max}(t-nT)}$$

Tần số lấy mẫu $F_s = 2F_{max}$ được gọi là tần số Nyquist (do Nyquist tìm ra năm 1928)- là tần số lấy mẫu nhỏ nhất để tránh chồng phổ.

Chứng minh (xem SGK)

Ví dụ 1.2

Cho tín hiệu tương tự :

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Xác định tần số Nyquist.

Ví dụ 1.3

Cho tín hiệu tương tự :

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

(a) *Xác định tần số Nyquist*

(b) *Giả sử tín hiệu được lấy mẫu với tốc độ 5000 (mẫu/s), tìm tín hiệu rời rạc có được sau lấy mẫu*

(c) *Xác định tín hiệu tương tự $y_a(t)$ khôi phục từ tín hiệu rời rạc (giả sử nội suy lý tưởng)*

1.5.3 Quan hệ giữa phổ của tín hiệu rời rạc và phổ của tín hiệu liên tục

Lấy mẫu tín hiệu tương tự $x_a(t)$, về mặt toán học chính là:

$$x_s(t) = x_a(t).s(t)$$

Trong đó $x_s(t)$ là tín hiệu sau lấy mẫu, s(t) là dãy xung vuông tuần hoàn chiều cao h, độ rộng xung là τ, chu kỳ là T và có $\tau \to 0$, $h\tau \to 1$. Khai triển Fourier cho dãy s(t) trên rồi lấy giới hạn, ta được :

$$s(t) = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ h\tau\to 1}} \frac{h\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi\frac{\tau}{T}}{k\pi\frac{\tau}{T}} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Vậy có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc dưới dạng sau :

$$x_s(t) = \frac{1}{T} x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Từ đây ta tìm được phổ của tín hiệu rời rạc theo công thức biến đổi Fourier như sau :

$$X_s(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{k=-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j(\Omega - k\frac{2\pi}{T})t}dt$$

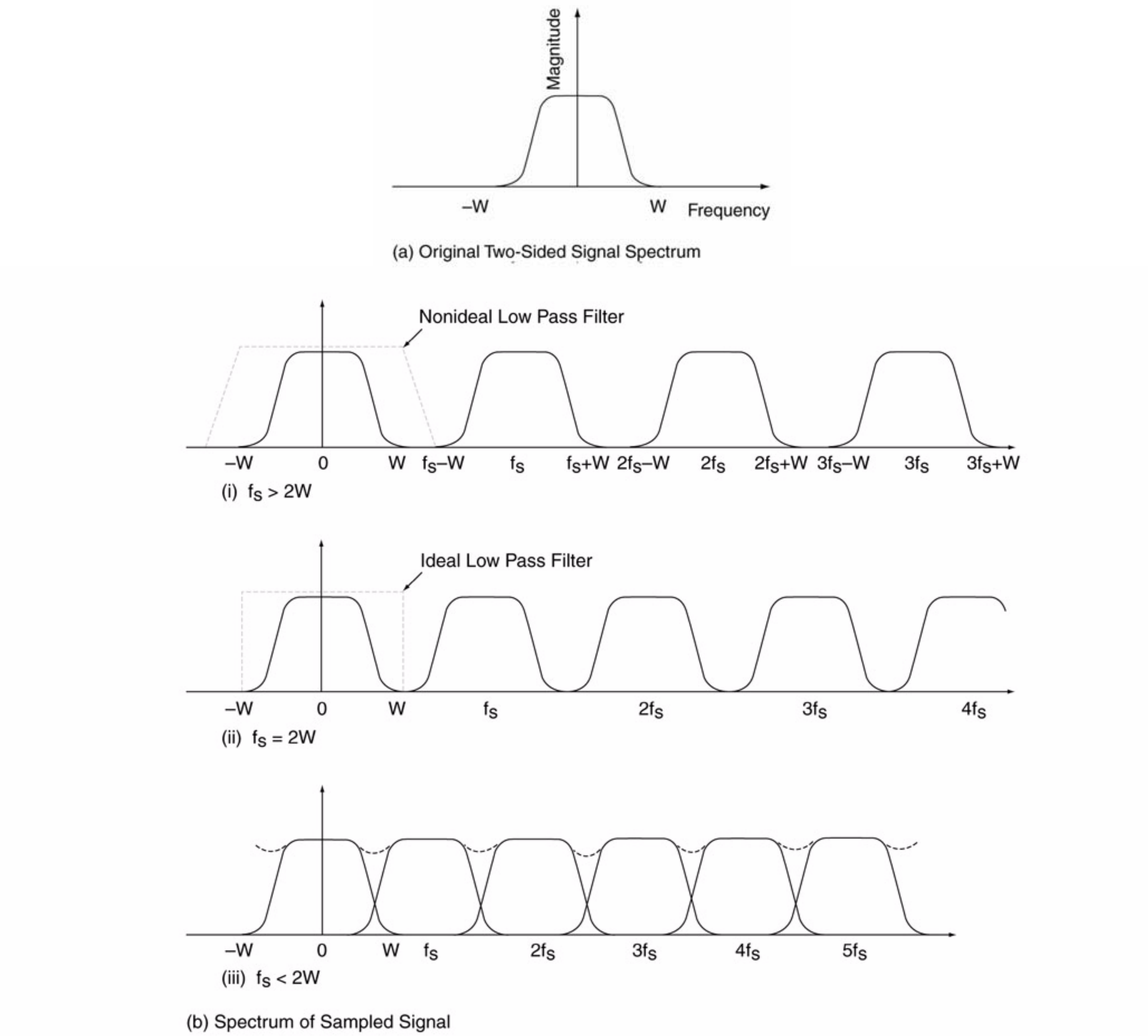
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega - kF_s\right)$$

Từ đây ta có kết luận: phổ của tín hiệu rời rạc là xếp chồng tuần hoàn của phổ của tín hiệu liên tục với chu kỳ là F_s.

Như vậy việc lấy mẫu tín hiệu liên tục tạo ra một dãy mẫu rời rạc trong miền thời gian và đồng thời cũng có ảnh hưởng trong miền tần số nữa. Hình vẽ 1.11a là phổ 2 phía của tín hiệu gốc chưa lấy mẫu và hình vẽ 1.11b là phổ của tín hiệu rời rạc được lấy mẫu với 3 tần số lấy mẫu khác nhau, ở đây W là băng thông của tín hiệu tương tự- cũng chính là tần số cao nhất F_{max}

Qua đây ta thấy các phổ của tín hiệu rời rạc khác nhau khi lấy mẫu với các tần số khác nhau. Nếu lấy mẫu với tần số trên tần số Nyquist $F_s \geq 2F_{max} = 2W$ thì các bản copy của phổ gốc (gọi là ảnh phổ) không bị chồng lên nhau. Lúc này ta có thể khôi phục lại tín hiệu gốc ban đầu từ tín hiệu rời rạc bằng cách cho tín hiệu rời rạc đi qua bộ lọc thông thấp tần số cắt là F_{max} = W. Bộ lọc này được gọi là bộ lọc khôi phục hay *bộ lọc ảnh phổ (anti-imaging filter).* Nếu lấy mẫu với tần số thấp hơn tần số Nyquist thì các ảnh phổ sẽ bị chồng lên nhau, phổ tổng là đường nét đứt trên hình 1.11b(iii), lúc này ta không thể khôi phục lại tín hiệu gốc ban đầu.

Khi tín hiệu là thông dải ($W_1 < F < W_2$), ta không cần lấy mẫu với tần số gấp đôi tần số lớn nhất. Thay vào đó, tần số lấy mẫu phụ thuộc vào băng thông của tín hiệu $W_2 - W_1$ cũng như



Hình 1.11 *Phổ của tín hiệu gốc và tín hiệu rời rạc*

Hình 1.11 *Phổ của tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc*

vị trí của phổ trên trục tần số. Tần số lấy mẫu ít nhất là gấp đôi băng thông của tín hiệu. Điều quan trọng ở đây là phải chọn tần số lấy mẫu sao cho hiện tượng chồng phổ không xảy ra.

Ví dụ 1.4

Cho một tín hiệu liên tục có phổ từ 120-160 kHz. Vẽ phổ 2 phía của tín hiệu rời rạc có được bằng cách lấy mẫu tín hiệu trên với 3 tần số lấy mẫu khác nhau sau đây :

(a) $F_s = 80$ kHz

(b) $F_s = 100$ kHz

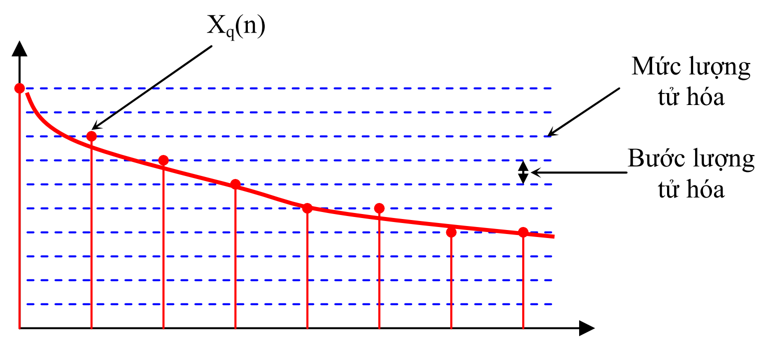
(c) $F_s = 120$ kHz

Tần số lấy mẫu thích hợp là bao nhiêu trong 3 tần số trên ? Giải thích.

1.5.4 Lượng tử hóa tín hiệu có biên độ liên tục

Như đã trình bày trên đây, lượng tử hóa chính là biến đổi tín hiệu rời rạc có biên độ liên tục thành tín hiệu có biên độ rời rạc bằng cách biểu diễn mỗi mẫu x(n) bằng một giá trị $x_q(n)$ chọn từ một tập hữu hạn các giá trị biên độ. Hình 1.12 minh họa hoạt động lượng tử hóa. Qua đây ta thấy lượng tử hóa gây ra lỗi lượng tử, là sai khác giữa giá trị lượng tử và giá trị thực sự của mẫu. Gọi $e_q(n)$ là sai số lượng tử hóa, ta có :

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$



***Hình 1.12** Minh họa sự lượng tử hóa*

Về mặt toán, lượng tử hóa chính là làm tròn hay cắt gọt các giá trị của các mẫu rời rạc. Gọi giá trị lượng tử hóa là mức lượng tử hóa, khoảng cách giữa hai mức lượng tử hóa cạnh nhau là bước lượng tử hóa Δ, sai số lượng tử hóa trong trường hợp làm tròn nằm trong giới hạn là:

$$-\frac{\Delta}{2} \le e_q(n) \le \frac{\Delta}{2}$$

Nếu x_{min} và x_{max} là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x(n) và L là số mức lượng tử hóa thì :

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1}$$

Ta gọi $x_{max} - x_{min}$ là dải động của tín hiệu và Δ là độ phân giải. Lưu ý rằng khi dải động cố định thì việc tăng số mức lượng tử hóa sẽ làm giảm kích thước bước lượng tử hóa, lỗi lượng tử hóa giảm và độ chính xác trong chuyển đổi A/D tăng lên.

Về lý thuyết thì lượng tử hóa luôn làm mất mát thông tin. Lý do là tất cả các mẫu có giá trị nằm trong dải $-\frac{\Delta}{2} \le x(n) < \frac{\Delta}{2}$ đều được lượng tử hóa thành cùng một giá trị.

Chất lượng của tín hiệu ra bộ chuyển đổi A/D được biểu diễn bằng tỷ số tín hiệu trên nhiễu lượng tử hóa SQNR (signal-to-quantization noise ratio) :

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q}$$

Trong đó P_x là công suất trung bình của tín hiệu liên tục và P_q là công suất trung bình của lỗi lượng tử hóa.

Giả sử ta xét lượng tử hóa tín hiệu sin liên tục chu kỳ T_0.

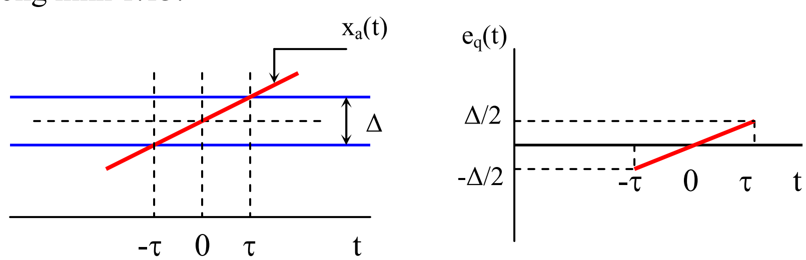
Công suất trung bình của tín hiệu là :

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} (A\cos\frac{2\pi}{T_0}t)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

Nếu lấy mẫu đúng với định lý lấy mẫu thì lượng tử hóa là quá trình duy nhất gây ra lỗi trong chuyển đổi A/D. Do đó, ta có thể tính lỗi lượng tử hóa bằng cách lượng tử hóa tín hiệu $x_a(t)$ thay cho tín hiệu rời rạc x(n). Tín hiệu $x_a(t)$ hầu như là tuyến tính trong khoảng giữa hai mức lượng tử hóa cạnh nhau. Lỗi lượng tử hóa là :

$$e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$$

như chỉ ra trong hình 1.13.



***Hình 1.13** Lỗi lượng tử hóa trong trường hợp lượng tử hóa tín hiệu sin*

Công suất lỗi P_q được tính là:

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_q^2(t)dt$$

Vì $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t, -\tau \le t \le \tau$ nên ta có:

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2 dt = \frac{\Delta^2}{12}$$

Nếu bộ lượng tử hóa có b bit và dải động là 2A thì $\Delta = 2A/2^b$. Do đó:

$$P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$$

Như vậy SQNR tính theo dB là:

$$SQNR(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_q}\right) = 10\log_{10}(\frac{3}{2}.2^b) = 6.02b + 1.76$$

Qua đây ta thấy khi tăng số bit thêm 1 thì SQNR tăng thêm 6dB

Ví dụ 1.5

Lượng tử hóa tín hiệu tương tự điện áp từ -5V đến 5V dùng 3 bit. Xác định giá trị lượng tử hóa và lỗi lượng tử hóa cho các mẫu sau:

(a) -3.4V

(b) 0V

(c) 0.625V

1.5.6 Mã hóa các mẫu lượng tử hóa

Quá trình mã hóa sẽ gán cho mỗi mẫu lượng tử hóa một số nhị phân. Nếu ta có L mức lượng tử hóa, ta cần ít nhất L số nhị phân. Với từ mã dài b bit ta có 2^b số nhị phân khác nhau. Như vậy yêu cầu:

$$b \geq \log_2 L$$

Nói chung, tốc độ lấy mẫu càng cao và độ phân giải lượng tử hóa càng cao (b lớn) thì thiết bị chuyển đổi A/D càng đắt tiền.

Trong thực tế, quá trình lượng tử hóa và mã hóa gộp chung lại thành một. Hình 1.14 trình bày bộ chuyển đổi A/D thực tế.

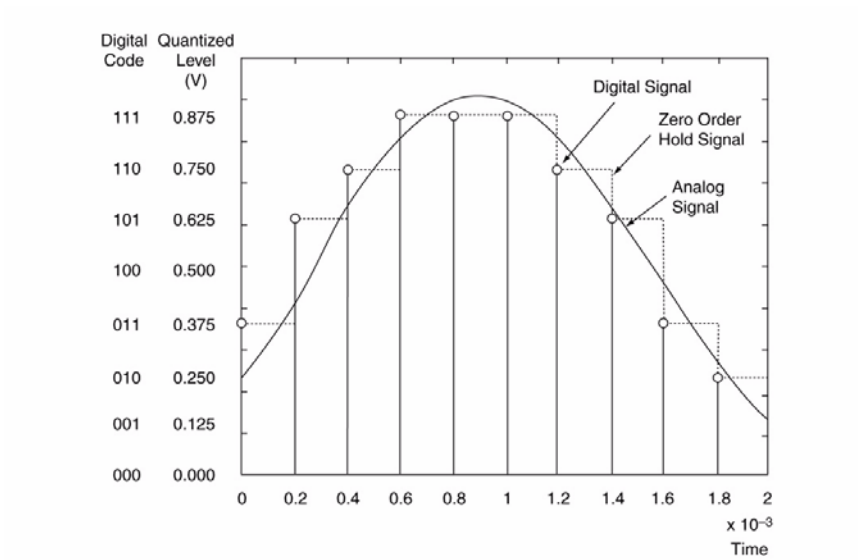
***Hình 1.14** Bộ chuyển đổi A/D thực tế*

1.6 BIẾN ĐỔI SỐ - TƯƠNG TỰ (D/A)

Trong một số trường hợp, có thể dùng trực tiếp tín hiệu số sau xử lý. Tuy nhiên, hầu hết các ứng dụng đều yêu cầu phải chuyển đổi tín hiệu số sau xử lý trở lại thành tín hiệu tương tự. Bộ chuyển đổi số-tương tự (D/A) được trình bày trên hình 1.15. Trước tiên, một mạch sẽ thực hiên chuyển đổi các từ mã b bit thành các mức tương tự tương ứng. Các mức này được duy trì trong khoảng 1 chu kỳ lấy mẫu nhờ bộ giữ mẫu bậc 0 (còn gọi là ZOH-Zero Order Hold). Tín hiệu ra của ZOH có dạng bậc thang, các sườn nhọn của tín hiệu bậc thang chứa các tần số cao. Các tần số cao này được loại bỏ nhờ một bộ lọc khôi phục. Bộ lọc này chính là bộ lọc loại bỏ các ảnh phổ tạo ra do lấy mẫu.

***Hình 1.15** Bộ chuyển đổi D/A*

Hình 1.16 minh họa quá trình chuyển đổi D/A 3 bit.



***Hình 1.16** Chuyển đổi D/A 3 bit*

Chương 2

TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

Nội dung chính chương này là:

- Giới thiệu các tín hiệu rời rạc cơ bản
- Các phép toán trên tín hiệu rời rạc
- Phân loại tín hiệu rời rạc
- Biểu diễn hệ thống rời rạc
- Phân loại hệ thống rời rạc
- Hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến
- Tổng chập rời rạc
- Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
- Cấu trúc hệ rời rạc tuyến tính bất biến

2.1 TÍN HIỆU RỜI RẠC

Như đã trình bày trong chương I, tín hiệu rời rạc x(n) có thể được tạo ra bằng cách lấy mẫu tín hiệu liên tục $x_a(t)$ với chu kỳ lấy mẫu là T. Ta có:

$$x_a(t)\Big|_{t=nT} = x_a(nT) \equiv x(n), \quad -\infty < n < \infty$$

Lưu ý n là biến nguyên, x(n) là hàm theo biến nguyên, chỉ xác định tại các giá trị n nguyên. Khi n không nguyên, x(n) không xác định, chứ không phải bằng 0.

Trong nhiều sách về xử lý tín hiệu số, người ta quy ước: khi biến nguyên thì biến được đặt trong dấu ngoặc vuông và khi biến liên tục thì biến được đặt trong dấu ngoặc tròn. Từ đây trở đi, ta ký hiệu tín hiệu rời rạc là: x[n].

Cũng như tín hiệu liên tục, có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc bằng hàm số, bằng đồ thị, bằng bảng. Ngoài ra, ta còn có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc dưới dạng dãy số, mỗi phần tử trong dãy số là một giá trị của mẫu rời rạc.

Ví dụ:

Cho tín hiệu rời rạc sau:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1,3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & n \neq \end{cases}$$

Biểu diễn tín hiệu trên dưới dạng bảng, đồ thị, dãy số

2.1.1 Một số tín hiệu rời rạc cơ bản

***1.** Tín hiệu bước nhảy đơn vị (Discrete-Time Unit Step Signal)*

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Tín hiệu bước nhảy dịch chuyển có dạng sau:

$$u[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

***2.** Tín hiệu xung đơn vị (Discrete-Time Unit Impulse Signal)*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Tín hiệu xung dịch chuyển có dạng sau:

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

So sánh tín hiệu bước nhảy và xung đơn vị liên tục và rời rạc, ta thấy có một số điểm khác nhau, được trình bày trong bảng 2.1.

Continuous time	Discrete time
$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$
$\delta(t) \equiv \frac{d}{dt}u(t)$	$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$
$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$	$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$

***Bảng 2.1** Tín hiệu bước nhảy và xung đơn vị liên tục và rời rạc*

***3.** Tín hiệu dốc đơn vị (Discrete-Time Unit Ramp Signal)*

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

***4.** Tín hiệu hàm mũ (Discrete-Time Exponential Signal)*

$$x[n] = a^n \quad \forall n$$

2.1.2 Các phép toán trên tín hiệu rời rạc

***1.** Phép đảo thời gian*

$$y[n] = x[m]\big|_{m=-n} = x[-n]$$

Rõ ràng, phép đảo này được thực hiện bằng cách đảo tín hiệu qua trục tung.

2. Phép thay đổi thang thời gian

$$y[n] = x[m]\big|_{m=an} = x[an]$$

Phép toán này còn gọi là phép thay đổi tần số lấy mẫu. Yêu cầu a ở đây phải thoả mãn các điều kiện sau:

Nếu $|a| > 1$ thì phép toán được gọi là tăng tần số lấy mẫu (nén tín hiệu), yêu cầu a phải nguyên.

Ví dụ: a = 2

Nếu $|a| < 1$ thì phép toán được gọi là giảm tần số lấy mẫu (giãn tín hiệu), yêu cầu a = 1/K, với K là số nguyên.

Ví dụ: a = ½. Tìm z[n] = b[n/2]

n	$z[n]$	$b[\frac{n}{2}]$
0	$z[0]$	$b[0]$
1	$z[1]$	??
2	$z[2]$	$b[1]$
3	$z[3]$	??

Các giá trị b[1/2] và b[3/2] không xác định được, vậy làm thế nào xác định z[1] và z[3]? Giải pháp được chọn là nội suy. Có nhiều cách nội suy khác nhau, trong đó cách đơn giản là nội suy tuyến tính như sau:

$$z[n] = \begin{cases} b[n/2], & n \text{ even} \\ 1/2\left\{b[(n-1)/2] + b[(n+1)/2]\right\}, & n \text{ odd} \end{cases}$$

Nội suy tuyến tính là đủ đảm bảo yêu cầu chất lượng đối với các thuật toán nén đơn giản. Đối với các phương pháp nén số liệu chất lượng cao, người ta sử dụng những phương pháp nội suy khác phức tạp hơn.

3. Phép dịch thời gian

$$y[n] = x[m]\Big|_{m=n-n_0} = x[n-n_0]$$

ở đây y[n] là bản dịch thời gian của tín hiệu gốc x[n]

Ví dụ:

Cho $x[n] = a^n u[n]$, $|a|<1$, tìm và vẽ $y[n] = x[n-3]$

Trong nhiều trường hợp, yêu cầu ta phải kết hợp các phép toán trên, chẳng hạn như kết hợp phép đảo với phép dịch thời gian, kết hợp phép đảo, dịch với thay đổi thang thời gian. Xem các ví dụ minh họa sau đây:

Ví dụ:

Vẽ đồ thị tín hiệu u[3-n]

Ví dụ:

Cho $x[n]=2u[n+2]$. Tìm $z[n]=x[3-2n]$.

n	$z[n]$	$x[3-2n]$
0	$z[0]$	$x[3]$
1	$z[1]$	$x[1]$
2	$z[2]$	$x[-1]$
-1	$z[-1]$	$x[5]$
-2	$z[-2]$	$x[7]$

Ví dụ:

Cho $y[n]=a^n u[n]$, where $a>1$. Tìm $z[n]=y[-2n+2]$.

4. Phép thay đổi biên độ tín hiệu

Cho $y[n] = Ax[n] + B$, nếu $A < 0$, ta đảo ngược biên độ của tín hiệu; $|A|$ điều khiển thang biên độ và B điều khiển độ dịch chuyển biên độ, dịch tín hiệu lên trên (B>0) hay xuống dưới (B<0).

Ngoài ra, ta có các phép thay đổi biên độ khác như tìm biên độ và pha của tín hiệu phức, cộng và nhân 2 tín hiệu với nhau. Lưu ý các phép thay đổi biên độ yêu cầu các tín hiệu phải được đặt ở cùng gốc thời gian.

Ví dụ:

Tìm $x[n] = (u[n+1] - u[n-5])(nu[2-n])$

2.1.3 Phân loại tín hiệu rời rạc

1. Tín hiệu chẵn và tín hiệu lẻ (even and odd signals)

Một tín hiệu rời rạc có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ như sau:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Trong đó

$$\text{Even}: x_e[n] = x_e[-n]$$

$$\text{Odd}: x_o[n] = -x_o[-n]$$

$$x_e[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_o[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

2. Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn

Như đã trình bày trong mục 1.4.2, tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu thỏa mãn điều kiện sau:

$$x[n+N] = x[n] \text{ với mọi } n$$

Giá trị N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

Ví dụ:

Các tín hiệu sau là tuần hoàn hay không tuần hoàn? Nếu tín hiệu tuần hoàn, xác định chu kỳ cơ bản.

(a) $x_1[n] = e^{j\frac{\pi}{6}n}$

(b) $x_2[n] = \sin(\frac{3\pi}{5}n + 1)$

(c) $x_3[n] = \cos(2n - \pi)$

(d) $x_4[n] = \cos(1.2\pi n)$

(e) $x_5[n] = e^{-j\frac{n}{3}}$

3. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

Năng lượng của tín hiệu:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Công suất trung bình của tín hiệu:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Nếu tín hiệu có năng lượng hữu hạn, tín hiệu được gọi là tín hiệu năng lượng.

Nếu tín hiệu có năng lượng vô hạn và có công suất trung bình hữu hạn, tín hiệu được gọi là tín hiệu công suất.

Ví dụ:

Trong các tín hiệu sau đây, đâu là tín hiệu năng lượng? đâu là tín hiệu công suất?

(a) Tín hiệu bước nhảy đơn vị

(b) Tín hiệu dốc đơn vị

(c) Tín hiệu $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n, & n \geq 0 \\ (2)^n, & n < 0 \end{cases}$

(d) Tín hiệu $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)(u[n] - u[n-4])$

2.2 HỆ THỐNG RỜI RẠC

Như đã trình bày trong chương I, hệ thống rời rạc là thiết bị/ thuật toán xử lý tín hiệu rời rạc. Nó biến đổi tín hiệu rời rạc đầu vào thành tín hiệu rời rạc đầu ra khác đầu vào nhằm một mục đích nào đó. Tín hiệu rời rạc đầu vào gọi là *tác động (excitation)* và tín hiệu rời rạc đầu ra gọi là *đáp ứng (response)*

Quan hệ đầu vào và đầu ra như sau:

$$y[n] = T(x[n])$$

với T là ký hiệu cho một toán tử hoặc là một quá trình xử lý của hệ thống.

2.2.1 Biểu diễn hệ thống rời rạc

Có nhiều cách biểu diễn hệ rời rạc khác nhau, trong nhiều miền khác nhau. Trong miền thời gian, ta có các cách biểu diễn hệ rời rạc sau đây:

1. *Biểu diễn vào-ra*

Trong cách biểu diễn này, ta giả sử hệ rời rạc là một hộp đen, không biết hoặc lờ đi cấu trúc bên trong của nó. Quan hệ vào-ra là quan hệ giữa x[n] và y[n] được mô tả bằng một phương trình toán. Đặt vào đầu vào một tín hiệu x[n] cụ thể, căn cứ vào phương trình ta sẽ tìm được đầu ra tương ứng.

Ví dụ:

$y[n] = x[n] + x[n-1]$

2. *Biểu diễn bằng đáp ứng đối với một tác động cụ thể*

Trong cách biểu diễn này, ta cho đầu vào là một tín hiệu cụ thể và tìm đầu ra. Đầu ra đó hoàn toàn đặc trưng cho một hệ thống cụ thể. Có 2 loại đáp ứng được dùng phổ biến là *đáp ứng xung (impulse response)*- là đáp ứng đối với đầu vào là xung đơn vị và *đáp ứng bước (step response)*- là đáp ứng đối với đầu vào là tín hiệu bước nhảy đơn vị.

Ví dụ:

Cho hệ thống có quan hệ vào-ra là: $y[n]= x[n] + x[n-1]$. Tìm đáp ứng xung và đáp ứng bước

3. *Biểu diễn bằng sơ đồ*

Trong nhiều trường hợp, để biết được cấu trúc của hệ rời rạc, ta biểu diễn hệ rời rạc bằng sơ đồ khối/ cấu trúc. Trong môn học này, ta xét một số khối cơ bản sau: khối trễ, khối nhân với hằng số, khối cộng 2 tín hiệu. Ta có thể kết nối các khối này với nhau để tạo nên các hệ thống phức tạp.

Ví dụ:

Sử dụng các khối cơ bản kể trên, vẽ sơ đồ khối hệ thống có quan hệ vào-ra sau:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

Ta cũng có thể kết nối các hệ con lại với nhau để tạo thành các hệ lớn hơn. Có 3 cách kết nối chính là: nối tiếp, song song và hồi tiếp (dương/ âm)

2.2.2 Phân loại hệ rời rạc

1. *Hệ có nhớ và không nhớ*

Hệ không nhớ là hệ có tín hiệu ra ở thời điểm n_0 chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào ở cùng thời điểm n_0 đó:

$$y[n_0] = f(x[n_0])$$

Ngược lại, hệ có nhớ có tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào ở cùng thời điểm và ở các thời điểm khác nhau.

Ví dụ:

Các hệ sau là có nhớ hay không nhớ?

(a) $y[n] = x[n] + 5$

(b) $y[n] = (n+5)x[n]$

(c) $y[n] = x[n+5]$

2. Hệ khả đảo và không khả đảo

Hệ khả đảo là hệ mà ta có thể mắc nối tiếp nó với một hệ khác để được tín hiệu ra trùng với tín hiệu gốc ban đầu:

$$T_i[T(x[n])] = x[n]$$

Ví dụ:

(a)

$T: y[n] = x[n+1]$

$T_i: x[n] = y[n-1]$

(b)

$T: y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$T_i: x[n] = y[n] - y[n-1]$

(c)

Bộ chỉnh lưu $y[n] = |x[n]|$ không phải là một hệ khả đảo.

3. Hệ nhân quả và không nhân quả

Hệ nhân quả là hệ có $y[n]$ tại $n = n_0$ chỉ phụ thuộc vào $x[n]$ với $n \le n_0$. Nói cách khác, tín hiệu ra không phụ thuộc vào các giá trị vào tương lai mà chỉ phụ thuộc vào các giá trị vào trong quá khứ và hiện tại.

"A causal system does not laugh before it is tickled"

Hầu hết các hệ vật lý đều nhân quả, nhưng có thể có hệ vật lý không nhân quả- chẳng hạn như xử lý ảnh trên máy tính.

Hệ không nhớ là hệ nhân quả nhưng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ:

Xét tính nhân quả của các hệ sau:

(a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

(b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(c) $y[n] = x[2n]$

(d) $y[n] = x[n] + 3x[n+4]$

4. Hệ ổn định BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) và không ổn định

Hệ ổn định là hệ có tín hiệu ra hữu hạn khi tín hiệu vào hữu hạn

Nếu vào là $\|x[n]\| \le B_1, \forall n$ thì ra là $\|y[n]\| \le B_2, \ \forall n$

"Reasonable (well-behaved) inputs do not cause the system output to blow up"

Ví dụ:

Xét tính ổn định BIBO của các hệ sau:

(a) $y[n] = x[n-1]$

(b) $y[n] = \cos(x[n])$

(c) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

5. Hệ tuyến tính và không tuyến tính

Hệ tuyến tính là hệ thỏa mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[x_1[n]] = y_1[n] \text{ and } T[x_2[n]] = y_2[n] \Rightarrow$$
$$T[ax_1[n] + bx_2[n]] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Ví dụ:

Xét tính tuyến tính của các hệ sau đây:

(a) $y[n] = nx[n]$

(b) $y[n] = x[n^2]$

(c) $y[n] = x^2[n]$

(d) $y[n] = Ax[n] + B$

6. Hệ bất biến và không bất biến

Hệ bất biến: khi tín hiệu vào bị dịch một khoảng thời gian thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi cùng khoảng thời gian đó:

$$T[x[n]] = y[n]$$

$$T[x[n-n_0]] = y[n-n_0]$$

Ví dụ:

Xét tính bất biến của các hệ sau đây:

(a) $y[n] = x[2n]$

(b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(c) $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]$

(d) $y[n] = nx[n]$

(e) $y[n] = x[n]u[n]$

2.3 HỆ RỜI RẠC TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

Ta sẽ xét một trường hợp quan trọng- đó là hệ rời rạc vừa tuyến tính vừa bất biến, gọi tắt là *hệ LTI (Linear Time-Invariant Systems)*

2.3.1 Đáp ứng xung của hệ LTI- Tổng chập

Ta có thể mô tả tín hiệu rời rạc x[n] dưới dạng sau:

$$x[n] = ... + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + ...$$

viết gọn lại là:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Phương trình này biểu diễn $x[n]$ là tổng của các hàm xung dịch thời gian, có biên độ thay đổi với trọng số $x[k]$.

Ví dụ:

$$\mathrm{x[n]} = \begin{cases} 1 - \frac{\mathrm{n}}{4}, & -2 \le \mathrm{n} \le 4 \\ 0, & \mathrm{n} \ne \end{cases} = \frac{6}{4}\delta[\mathrm{n}+2] + \frac{5}{4}\delta[\mathrm{n}+1] + \delta[\mathrm{n}] + \frac{3}{4}\delta[\mathrm{n}-1] + \frac{2}{4}\delta[\mathrm{n}-2] + \frac{1}{4}\delta[\mathrm{n}-3]$$

Hệ ta xét là hệ tuyến tính nên đáp ứng đối với x[n] là tổng của các đáp ứng đối với $\delta[n-k]$ với trọng số $x[k]$. Gọi đáp ứng của hệ đối với $\delta[n-k]$ là $h_k[n]$- là đáp ứng xung. Ta có:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Do hệ là bất biến nên ta có: $h_k[n] = h[n-k]$

Vậy:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Ký hiệu như sau:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ta gọi đây là *tổng chập tuyến tính rời rạc (DT linear convolution).* Vậy đầu ra của hệ LTI là đầu vào chập với đáp ứng xung.

Căn cứ vào chiều dài của đáp ứng xung, ta có thể chia hệ rời rạc thành 2 loại: hệ có *đáp ứng xung dài hữu hạn FIR (Finite-duration Impulse Response)* và hệ có *đáp ứng xung dài vô hạn IIR (Infinite-duration Impulse Response)*

2.3.2 Cách tính tổng chập

Thay $m = n - k$, hay $k = n - m$, vào phương trình trên, ta được:

$$\sum_{n-m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{-m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=+\infty}^{-\infty} h[m]x[n-m] =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n]$$

Như vậy, tín hiệu vào và đáp ứng xung có thể thay thế cho nhau mà không ảnh hưởng đến đầu ra hệ thống.

Các bước tính tổng chập:

1. Viết $x[n]$ thành $x[k]$, h[n] thành h[k]
2. Đảo thời gian $h[k]$ và dịch đi n để tạo thành $h[n-k]$
3. Nhân $x[k]$ và $h[n-k]$ với mọi k.
4. Cộng $x[k]h[n-k]$ với mọi k để được $y[n]$

Lặp lại như vậy với mọi n

Hai nguyên tắc quan trọng để tính tổng chập:

1. Thực hiện đảo thời gian cho tín hiệu đơn giản hơn
2. Vẽ đồ thị

Ví dụ:

Tìm $x[n] * h[n] = y[n]$ với $x[n] = u[n+1] - u[n-3] + \delta[n]$ và $h[n] = 2\left(u[n] - u[n-3]\right)$.

Lưu ý: $N_y = N_x + N_h - 1$, với N_i là chiều dài của $i[n]$.

Ví dụ:

Tìm $x[n]*\delta[n-n_0]\Rightarrow$

Đây là phép chập một tín hiệu rời rạc với xung đơn vị, kết quả là tín hiệu rời rạc bị dịch chuyển đến vị trí của xung đơn vị.

Ví dụ:

Tìm $y[n]=x[n]*h[n]$ trong đó $x[n]=a^n u[n]$ và $h[n]=u[n]$

Làm theo 2 cách: đảo $x[n]$ và đảo $h[n]$

Ví dụ:

Tìm $y[n] = u[n] * a^n u[-n-2]$

Ngoài cách tính tổng chập bằng đồ thị, ta còn có thể tính dựa vào công thức tổng chập.

Ví dụ:

Cho $x[n] = h[n] = u[n]$. Tìm $y[n] = x[n] * h[n]$

Ta có: $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] \text{ since } u[k] = 0,\ k < 0$$

Ta cũng có:

$$u[n-k] = 0, n-k < 0 \text{ or } k > n \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} (1) = n+1$$

Nhưng:

$$u[k] = 0,\ k < 0 \text{ and } u[n-k] = 0,\ k > n$$

$$\Rightarrow\ 0 \le k \le n \Rightarrow n \ge 0.$$

Ví dụ:

Cho $x[n] = b^n u[n]$ và $h[n] = a^n u[n+2]$, với $a \ne b$

Tìm $y[n] = x[n] * h[n]$.

Ví dụ:

Chứng minh rằng khi cho tín hiệu $x[n] = u[-n]$ đi qua hệ thống LTI có đáp ứng xung là: $h[n] = a^n u[n-2]$, $|a| < 1$ thì tín hiệu ra là:

$$\frac{a^2}{1-a}u[2-n] + \frac{a^n}{1-a}u[n-3]$$

Ví dụ:

Cho $x[n] = u[-n+2]$ và $h[n] = a^n u[-n]$, tìm $y[n] = x[n] * h[n]$

2.3.2 Các tính chất của tổng chập

***1.** Tính chất giao hoán*

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

Tính chất này đã được chứng minh trong 2.3.2

***2.** Tính chất kết hợp*

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

Vế trái ở đây chính là tín hiệu ra trong trường hợp: x[n] là đầu vào của hệ đáp ứng xung $h_1[n]$, đầu ra $y_1[n]$ là đầu vào của hệ có đáp ứng xung $h_2[n]$. Đây chính là 2 hệ mắc nối tiếp. Vế phải ở đây chính là tín hiệu ra trong trường hợp x[n] là đầu vào của hệ có đáp ứng xung là $h_1[n]*h_2[n]$. Như vậy, *hai hệ mắc nối tiếp sẽ có đáp ứng xung là chập của hai đáp ứng xung thành phần.*

Hơn nữa, từ tính chất giao hoán ta thấy có thể đổi chỗ 2 hệ mắc nối tiếp cho nhau mà không làm thay đổi quan hệ vào-ra chung của hệ tổng quát

***3.** Tính chất phân phối*

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

Vế trái là tín hiệu ra khi x[n] được đưa vào hệ có đáp ứng xung là $h_1[n]+h_2[n]$. Vế phải là tín hiệu ra tổng của 2 tín hiệu ra khi x[n] đồng thời được đưa vào 2 hệ có đáp ứng xung $h_1[n]$ và $h_2[n]$. Đây chính là 2 hệ mắc song song. Như vậy, *hai hệ mắc song song sẽ có đáp ứng xung là tổng của 2 đáp ứng xung thành phần*.

2.3.3 Các tính chất của hệ LTI

Quan hệ vào- ra (I/O) của hệ LTI hoàn toàn có thể được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h[n]$. Suy ra, ta có thể biết được các tính chất của hệ LTI dựa vào $h[n]$

***1.** Tính có nhớ*

Đáp ứng xung của hệ không nhớ chỉ có thể có dạng sau:

$$h[n]=K\delta[n].$$

***2.** Tính khả đảo*

Hệ LTI có đáp ứng xung $h[n]$ là khả đảo nếu tồn tại một hàm $h_i[n]$ sao cho:

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

Ví dụ:

Tìm hệ đảo của hệ $h[n] = 3\delta[n+5]$

3. Tính nhân quả

Nếu ta có $h[n] = 0, n < 0$ thì

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

chỉ phụ thuộc vào các giá trị quá khứ và hiện tại của tín hiệu vào.

Ví dụ:

Xét tính nhân quả của các hệ sau đây:

(a) h[n] = u[n]

(b) $h_2[n] = u[n+2]$

4. Tính ổn định

Tính ổn định thỏa mãn nếu:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Nghĩa là đáp ứng xung phải thoả điều kiện khả tổng tuyệt đối.

Lý do ở đây là:

Với $|x[n]| \le M$ với mọi n, ta có:

$$|y[n]| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]||h[k]| \le$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} M\,|h[k]| = M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Vì $M < \infty$ nên để hệ ổn định BIBO ta chỉ cần:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Ví dụ:

Hệ $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Xét các đặc điểm của các hệ sau đây:

(a) $h_1[n] = u[n]$ (an accumulator)

(b) $h_2[n] = 3^n u[n]$

(c) $h_3[n] = (3)^n u[-n]$

(d) $h_4[n] = \cos(\frac{\pi}{3} n) u[n]$

(e) $h_5[n] = u[n+2] - u[n]$

2.3.4 Đáp ứng bước

Đáp ứng bước là đáp ứng của hệ đối với tác động là tín hiệu bước nhảy đơn vị, ký hiệu đáp ứng bước là s[n]

$$x[n] = u[n]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

Ta có thể có $h[n]$ từ $s[n]$ như sau:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Ví dụ:

Đáp ứng bước của hệ $h[n] = a^n u[n]$ là $s[n] = u[n] * a^n u[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]$

Từ đáp ứng bước ta có thể tính được đáp ứng xung:

$$u[n-1] = u[n] - \delta[n].$$

Bảng sau tóm tắt về các mối quan hệ, các loại đáp ứng trong hai hệ liên tục và rời rạc

Continuous Time	**Discrete Time**
$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$
$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$	$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = h[n] * u[n]$
$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$	$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$
$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$	$h[n] = s[n] - s[n-1]$

2.4 HỆ RỜI RẠC LTI MÔ TẢ BỞI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Nói chung, hệ rời rạc LTI có thể được đặc trưng hoàn toàn bởi tổng chập tuyến tính. Hơn nữa, công thức tổng chập cũng cung cấp cho ta một phương tiện để thực hiện hệ thống.

Với hệ FIR, để thực hiện hệ ta cần các khâu cộng, nhân và một số hữu hạn các bộ nhớ. Như vậy có thể thực hiện trực tiếp hệ FIR từ công thức tổng chập.

Tuy nhiên với hệ IIR, ta không thể thực hiện hệ thống thực tế dựa vào tổng chập được, vì nó yêu cầu một số lượng vô hạn các khâu cộng, nhân và nhớ.

Thực tế, có một cách biểu diễn hệ rời rạc khác ngoài tổng chập. Đó là biểu diễn bằng phương trình sai phân.

2.4.1 Dạng tổng quát của phương trình sai phân

Ta biết tín hiệu ra của hệ thống phụ thuộc vào tín hiệu vào và có thể phụ thuộc vào chính tín hiệu ra:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + ... + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]] + ... + b_M x[n-M]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r], \quad a_0 = 1$$

Đây là phương trình mô tả quan hệ vào-ra của hệ tuyến tính bất biến nên các hệ số của phương trình là hằng số và phương trình có tên gọi là *phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (Linear constant-coefficient difference equation)*

Căn cứ vào phương trình, ta phân hệ rời rạc LTI ra 2 loại:

1. *Hệ không đệ quy:*

Bậc N = 0, tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào

2. *Hệ đệ quy:*

Bậc N > 0, tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào và vào chính tín hiệu ra ở các thời điểm trước đó

2.4.2 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Về cơ bản, mục đích của giải phương trình là xác định tín hiệu ra y[n], $n \geq 0$ của hệ thống ứng với một tín hiệu vào cụ thể x[n], $n \geq 0$ và ứng với các điều kiện ban đầu cụ thể nào đó.

Nghiệm của phương trình là tổng của 2 phần:

$$y[n] = y_0[n] + y_p[n]$$

Trong đó $y_0[n]$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và $y_p[n]$ là nghiệm riêng.

Nghiệm tổng quát $y_0[n]$ là nghiệm của phương trình vế phải bằng 0, tức là không có tín hiệu vào. Dạng tổng quát của $y_0[n]$ là:

$$y_0[n] = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_N\lambda_N$$

Trong đó λ_i là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_i^{n-k}$$

và C_i là các hệ số trọng số, được xác định dựa vào điều kiện đầu và tín hiệu vào.

Nghiệm riêng $y_p[n]$ là một nghiệm nào đó thỏa phương trình sai phân trên với một tín hiệu vào cụ thể x[n], $n \geq 0$. Nói cách khác, $y_p[n]$ là một nghiệm nào đó của phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r], \quad a_0 = 1$$

Ta tìm $y_p[n]$ có dạng giống như dạng của x[n], chẳng hạn như:

x[n]	y_p [n]
A	K
$A.M^n$	$K.M^n$
$A^n.n^M$	$A^n(K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A\cos\omega_0 n \\ A\sin\omega_0 n \end{Bmatrix}$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$

Ví dụ:

Tìm nghiệm tổng quát y[n], $n \geq 0$ của phương trình:

$$y[n]+a_1y[n-1]=x[n]$$

với x[n] là tín hiệu bước nhảy và y[-1] là điều kiện đầu.

Cho x[n] = 0, nghiệm tổng quát $y_0[n]$ lúc này có dạng:

$$y_0[n]=\lambda^n$$

Giải ra ta được:

$$\lambda=-a_1$$

Do vậy, $y_0[n]$ là:

$$y_0[n]=C(-a_1)^n$$

Do x[n] là tín hiệu bước nhảy đơn vị nên chọn $y_p[n]$ có dạng:

$$y_p[n]=Ku[n]$$

ở đây K là một hệ số, được xác định sao cho phương trình thỏa mãn. Thay $y_p[n]$ vào phương trình trên ta được:

$$Ku[n]+a_1Ku[n-1]=u[n]$$

Để xác định K, ta tính với $n \geq 1$ vì trong dải đó không có số hạng nào bị triệt tiêu. Vậy,

$$K+a_1K=1$$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{1+a_1}$$

Như vậy, nghiệm riêng của phương trình là:

$$y_p[n]=\frac{1}{1+a_1}u[n]$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên là:

$$y[n]=y_0[n]+y_p[n]=C(-a_1)^n+\frac{1}{1+a_1}, \quad n\geq 0$$

C được xác định sao cho thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Cho n = 0, từ phương trình ta có:

$$y[0]+a_1y[-1]=1\Rightarrow y[0]=-a_1y[-1]+1$$

Mặt khác, kết hợp y[0] vừa tìm được với nghiệm tổng quát của phương trình, ta có:

$$y[0]=C+\frac{1}{1+a_1}=-a_1y[-1]+1\Rightarrow C=-a_1y[-1]+\frac{a_1}{1+a_1}$$

Thay C vào nghiệm y[n] ta được kết quả cuối cùng như sau:

$$\begin{aligned} y[n]&=(-a_1)^{n+1}y[-1]+\frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}, \quad n\geq 0 \\ &=y_{zi}[n]+y_{zs}[n] \end{aligned}$$

Ta nhận thấy nghiệm của phương trình gồm có hai phần:

1. $y_{zi}[n]$ là *đáp ứng đầu vào 0 (zero-input response)* của hệ thống. Đáp ứng này chỉ phụ thuộc vào bản chất của hệ thống và các điều kiện ban đầu. Vì vậy nó còn có tên gọi là *đáp ứng tự do (free response).*

2. $y_{zs}[n]$ phụ thuộc vào bản chất của hệ thống và vào tín hiệu vào, do đó nó còn được gọi là *đáp ứng cưỡng bức (forced response).* Nó được xác định khi không để ý đến điều kiện đầu hay là điều kiện đầu bằng 0. Khi điều kiện đầu bằng 0, ta có thể nói hệ thống ở trạng thái 0. Do vậy, $y_{zs}[n]$ còn được gọi là *đáp ứng trạng thái 0 (zero-state response)*

Qua đây ta cũng thấy: C phụ thuộc vào cả điều kiện đầu và tín hiệu vào. Như vậy, C ảnh hưởng đến cả đáp ứng đầu vào 0 và đáp ứng trạng thái 0. Nói cách khác, nếu ta muốn chỉ có đáp ứng trạng thái 0, ta giải tìm C với điều kiện đầu bằng 0.

Ta cũng thấy rằng có thể tìm nghiệm riêng của phương trình từ đáp ứng trạng thái 0:

$$y_p[n] = \lim_{n\to\infty} y_{zs}[n]$$

Ví dụ:

Tìm $y[n], \quad n \geq 0$ của hệ sau:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

với $x[n] = 4^n u[n]$ và các điều kiện đầu bằng 0.

2.4.3 Thực hiện hệ rời rạc LTI

Từ phương trình mô tả quan hệ vào-ra ta thấy để thực hiện hệ LTI, ta cần các khâu nhân, trễ và cộng. Có nhiều cách khác nhau để thực hiện hệ rời rạc, ở đây ta xét cách trực tiếp- là cách thực hiện trực tiếp dựa vào phương trình sai phân mà không qua một phép biến đổi nào

***1.** Dạng chuẩn tắc 1*

$$y[n] + a_1 y[n-1] + ... + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]] + ... + b_M x[n-M]$$
$$\Leftrightarrow y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]] + ... + b_M x[n-M] + (-a_1) y[n-1] + ... + (-a_N) y[n-N]$$

***2.** Dạng chuẩn tắc 2*

Để ý thấy ở dạng chuẩn tắc 1, hệ thống gồm 2 hệ mắc nối tiếp. Theo tính chất giao hoán của tổng chập thì thứ tự các hệ con mắc nối tiếp có thể thay đổi được. Do vậy, ta có thể thay đổi hệ ở dạng 1 thành:

Chương 3

PHÂN TÍCH HỆ RỜI RẠC LTI DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Phép biến đổi Z là một công cụ quan trọng trong việc phân tích hệ rời rạc LTI. Trong chương này ta sẽ tìm hiểu về phép biến đổi Z, các tính chất và ứng dụng của nó vào việc phân tích hệ rời rạc LTI. Nội dung chính chương này là:

- Phép biến đổi Z
- Phép biến đổi Z ngược
- Các tính chất của phép biến đổi Z
- Phân tích hệ rời rạc LTI dựa vào hàm truyền đạt
- Ưng dụng biến đổi Z để giải phương trình sai phân

2.1 PHÉP BIẾN ĐỔI Z (Z-Transform)

Phép biến đổi Z là bản sao rời rạc hóa của phép biến đổi Laplace.

$$\text{Laplace transform}: F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$z\text{-transform}: F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

Thật vậy, xét tín hiệu liên tục $f(t)$ và lấy mẫu nó, ta được:

$$f_s(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

Biến đổi Laplace của tín hiệu lấy mẫu (còn gọi là rời rạc) là:

$$L[f_s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

Cho $f[n] = f(nT)$ và $z = e^{sT}$, ta có:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

$$F(z)\big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-sTn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

$$= L[f_s(t)]$$

Như vậy, biến đổi Z với $z = e^{sT}$ chính là biến đổi Laplace của tín hiệu rời rạc.

3.1.1 Định nghĩa phép biến đổi Z

Như vừa trình bày trên, *phép biến đổi Z hai phía (bilateral Z-Transform)* của h[n] là:

$$H(z) = Z\left[h[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Ta cũng có định nghĩa *phép biến đổi Z một phía (unilateral Z-transform)* là:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}.$$

Phép biến đổi Z hai phía được dùng cho tất cả tín hiệu, cả nhân quả và không nhân quả.

Theo định nghĩa trên ta thấy: X(z) là một chuỗi luỹ thừa vô hạn nên chỉ tồn tại đối với các giá trị z mà tại đó X(z) hội tụ. Tập các biến z mà tại đó X(z) hội tụ gọi là *miền hội tụ* của X(z)- ký hiệu là *ROC (Region of Convergence).*

Ta sẽ thấy có thể có những tín hiệu khác nhau nhưng có biến đổi Z trùng nhau. Điểm khác biệt ở đây chính là miền hội tụ.

Ta cần lưu ý đến hai khái niệm liên quan đến biến đổi Z- đó là *điểm không (zero)* và *điểm cực (pole).* Điểm không là điểm mà tại đó X(z) = 0 và điểm cực là điểm mà tại đó $X(z) = \infty$.

Do ROC là tập các z mà ở đó X(z) tồn tại nên ROC không bao giờ chứa điểm cực.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z, vẽ ROC và biểu diễn điểm cực-không:

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \text{and} \quad x_2[n] = -(a^n)u[-n-1]$$

Ta thấy hai tín hiệu khác nhau trên có biến đổi Z trùng nhau nhưng ROC khác nhau.

3.1.2 Miền hội tụ của phép biến đổi Z

***1.** x[n] lệch phải* $x[n]=0, n<n_0$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

Khi $n\to\infty$, cần $(1/z)^n\to 0$ để tổng hội tụ. Như vậy, điều kiện hội tụ sẽ thỏa với các giá trị của z nằm ngoài đường tròn đi qua điểm cực xa gốc nhất, nghĩa là $|z|>r_{max}$.

***2.** x[n] lệch trái* $x[n]=0, n>n_0$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]z^{-n}$$

Khi $n\to-\infty$, cần $(1/z)^n\to 0$ hay $z^{\infty}\to 0$ để tổng hội tụ. Vậy ROC là miền nằm trong đường tròn đi qua điểm cực gần gốc nhất, nghĩa là $|z|<r_{min}$

Lưu ý trong trường hợp tín hiệu $x[n]=0$ *với* $n>n_0>0$ *nhưng* $x[n_0]\neq 0$*, ROC không chứa điểm 0.* Chẳng hạn như với $x[n]=u[-n+1]$ thì

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{1} z^{-n}=z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$$

không hội tụ ở $z=0$ nên $z=0$ không nằm trong ROC.

***3.** Tín hiệu x[n] lệch hai phía*

ROC có dạng:

$$r_1<|z|<r_2 \text{ (hình vành khăn hoặc rỗng)}$$

***4.** Tín hiệu x[n] dài hữu hạn*

ROC là toàn bộ mặt phẳng z ngoại trừ $z=0$ và/hoặc $z=\infty$

$$\delta[n-1] \leftrightarrow z^{-1}, |z| > 0$$

$$\delta[n+1] \leftrightarrow z, |z| < \infty$$

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $x[n] = a^{|n|}$ where $|a| < 1$.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $x[n] = 3^n u[-n-1] + 4^n u[-n-1]$.

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z và ROC của: $\frac{1}{2}\delta[n-1]+3\delta[n+1]$

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của: $h[n]=(.5)^n u[n-1]+3^n u[-n-1]$. Hệ biểu diễn bằng đáp ứng xung như trên có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của: $x[n]=r^n \sin(bn)u[n]$

2.2 PHÉP BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC – IZT

2.2.1 Biểu thức tính IZT

Biểu thức tính IZT được xây dựng dựa trên định lý tích phân Cauchy. Định lý như sau:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

với C là đường cong kín bao quanh gốc tọa độ theo chiều dương và nằm trong mặt phẳng z.

Nhân 2 vế của biểu thức tính ZT với $\frac{z^{l-1}}{2\pi j}$ rồi lấy tích phân theo đường cong C, ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{l-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n+l-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+l-1}dz$$

Áp dụng định lý tích phân Cauchy ta rút ra được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{l-1}dz = x[l]$$

Thay l = n, ta có biểu thức tính IZT như sau:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Từ đây ta thấy có thể tính IZT trực tiếp từ công thức vừa tìm được. Cách tính là dựa vào định lý về giá trị thặng dư (xem sách). Tuy nhiên, cách tính này khá phức tạp nên không được sử dụng trong thực tế.

Sau đây ta xét hai phương pháp tính IZT được dùng trong thực tế:

2.2.2 Phương pháp khai triển chuỗi lũy thừa (Power Series Expansion)

Ta có thể tính IZT bằng cách khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

Ta có:

$$\delta[n-k] \xleftrightarrow{z} z^{-k}$$

Sau đó đồng nhất các hệ số của chuỗi luỹ thừa với x[n].

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC: |z| > |a|$$

Ví dụ:

Tìm IZT biết:

$$X(z) = \frac{8z - 19}{z^2 - 5z + 6}, \; |z| > 3$$

Cách khai triển X(z) thành chuỗi lũy thừa như trên có điểm không thuận tiện là khó/không thể biểu diễn được x[n] ở dạng tường minh.

2.2.3 Phương pháp khai triển riêng phần (Partial Fraction Expansion)

Phương pháp này tương tự như tính biến đổi Laplace ngược đã biết.

Giả sử cần tính IZT$\{X(z)\}$. Ta khai triển X(z) thành dạng sau:

$$X(z) = X_p(z) + \sum_i X_i(z)$$

Trong đó X_p (z) có dạng đa thức, X_i(z) có dạng phân thức với bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số.

Tuỳ điểm cực mà X_i(z) có thể có các dạng như sau:

1. Nếu p_i là điểm cực đơn: $X_i(z) = \dfrac{r_i}{z - p_i}$ với $r_i = (z - p_i)X(z)\Big|_{z=p_i}$

2. Nếu p_i là điểm cực bội bậc s: $X_i(z) = \sum_{k=1}^{s} \dfrac{c_k}{(z - p_i)^k}$

với

$$c_k = \frac{1}{(s-k)!} \cdot \frac{d^{s-k}}{dz^{s-k}}\left[(z - p_i)^s X(z)\right]\Big|_{z=p_i}$$

Sau khi khai triển X(z) ta sử dụng bảng 3.1 để suy ra IZT.

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(n-m) \leftrightarrow z^{-m}$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2 a^n u[n] \leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

$$a^n \cos(\Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{z(z - a\cos\Omega)}{z^2 - 2z\cos\Omega + a^2}$$

$$a^n \sin(\Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{az\sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + a^2}$$

$$2|K|a^n \cos(\beta n + \alpha)u[n] \leftrightarrow \frac{Kz}{z-p} + \frac{K^* z}{z-p^*}, \quad p = ae^{j\beta} \ \&\ K = |K|e^{j\alpha}$$

***Bảng 3.1** Các cặp x[n] – X(z) thông dụng*

Ví dụ:

Tìm IZT của: $X(z) = \dfrac{2z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)}, |z| > 3$

Ta khai triển

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}, \quad |z| > 2$$

Ví dụ:

Tìm IZT của:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.5z + 0.25}$$

2.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Trong phần này, ta xét những tính chất quan trọng nhất của phép biến đổi Z.

2.3.1 Tuyến tính

$$ax[n]+by[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow} aX(z)+bY(z)$$

Miền hội tụ mới phụ thuộc vào miền hội tụ của cả $X(z)$ và $\mathrm{Y(z)}$, đó là giao của hai miền hội tụ $\mathrm{R_x \cap R_y}$. Tuy nhiên, nếu tổ hợp aX(z) + bY(z) làm khử đi một số điểm cực của X(z) hoặc Y(z) thì miền hội tụ sẽ mở rộng ra, nên:

$$R' \supseteq R_x \cap R_y$$

2.3.2 Dịch chuyển thời gian

$$x[n-n_0]\overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$$

ở đây miền hội tụ mới giống miền hội tụ R_x, có thể thêm vào hoặc bớt đi điểm gốc hay điểm vô cùng tùy n_0 dương hay âm

Ví dụ:

Tìm w[n] biết:

$$W(z)=\frac{z^{-4}}{z^2-2z-3},|z|>3$$

Tính chất tuyến tính và dịch thời gian rất hiệu quả đối với các hệ thống mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

2.3.3 Tổng chập

$$y[n]=x[n]*h[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)H(z)$$

ở đây miền hội tụ mới là

$$R_y \supseteq R_x \cap R_h$$

Tính chất tổng chập của biến đổi Z giúp ta tính toán tổng chập tuyến tính rời rạc một cách đơn giản hơn. Tính chất này sẽ được sử dụng rất nhiều.

Chứng minh:

$$y[n]=x[n]*h[n]\xleftrightarrow{Z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]]z^{-n}$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng, ta có:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n-k]z^{-n}$$

Đặt $m=(n-k)$, ta có:

$$\begin{aligned}y[n]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k][\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]z^{-(m+k)}]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]z^{-m}\\&=X(z)H(z)\end{aligned}$$

Miền hội tụ mới phụ thuộc vào miền hội tụ của cả $X(z)$ và $H(z)$, đó là giao của hai miền hội tụ $R_x \cap R_h$. Tuy nhiên, nếu một thừa số X(z) hoặc H(z) có điểm không, điểm không này khử điểm cực của thừa số kia thì miền hội tụ sẽ mở rộng ra, nên $R_y' \supseteq R_x \cap R_h$

Ví dụ:

Cho $h[n]=a^n u[n]$, $(|a|<1)$ và $x[n]=u[n]$. Tìm $y[n]=x[n]*h[n]$.

Nếu $x[n]=u[n-2]$ thì y[n] thay đổi như thế nào?

Ví dụ:

Tìm đầu ra $y[n]$ với đầu vào $x[n] = u[n]$ và hệ LTI có đáp ứng xung:

$$h[n] = -3^n u[-n-1].$$

2.3.4 Định lý giá trị đầu và giá trị cuối

Định lý giá trị đầu và giá trị cuối thường liên quan đến biến đổi Z một phía, nhưng chúng cũng đúng với biến đổi Z hai phía nếu tín hiệu x[n] = 0 với n < 0.

***1.** Định lý giá trị đầu(initial value theorem)*

Biểu diễn:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0]+f[1]z^{-1}+f[2]z^{-2}+...,$$

Lấy giới hạn $\lim_{z\to\infty} F(z)$, ta sẽ được giá trị đầu của f[n]- đó chính là f[0]

***2.** Định lý giá trị cuối(final value theorem)*

Nếu giá trị cuối của f[n] tồn tại thì:

$$\lim_{n\to\infty} f[n]=f[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Ví dụ:

Tìm giá trị đầu và giá trị cuối của tín hiệu $f[n]$, biết rằng:

$$F(z)=\frac{z}{z-.6}$$

2.4 PHÂN TÍCH HỆ RỜI RẠC LTI

Ta đã biết trong miền thời gian, có thể biểu diễn hệ rời rạc LTI bằng sơ đồ, tổng chập, đáp ứng xung, đáp ứng bước và phương trình sai phân .

Sau đây ta sẽ xét một cách khác - rất hiệu quả để biểu diễn hệ thống rời rạc LTI. Đó là biểu diễn bằng *hàm truyền đạt (transfer function)* hay còn gọi là *hàm hệ thống (system function)*

2.4.1 Định nghĩa hàm truyền đạt

Từ tính chất tổng chập của ZT và từ quan hệ giữa tín hiệu vào x[n], tín hiệu ra y[n] với đáp ứng xung h[n], ta có:

$$\mathrm{Y(z)=X(z).H(z)}$$

ở đây X(z) là biến đổi Z của x[n], Y(z) là biến đổi Z của y[n] và H(z) là biến đổi Z của đáp ứng xung h[n].

Dựa vào đáp ứng xung h[n], ta biết được các đặc tính của hệ thống, vậy rõ ràng là dựa vào H(z) ta cũng sẽ biết được các đặc tính của hệ thống. Nói cách khác, H(z) là biểu diễn của hệ thống trong miền z. Ta gọi H(z) là hàm truyền đạt hay hàm hệ thống.

Ta có thể xác định H(z) rất đơn giản dựa vào phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy biến đổi Z hai vế, sử dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

Suy ra hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Dựa vào hàm truyền đạt, ta biết được các đặc tính của hệ thống, gồm tính nhớ, tính khả đảo, tính nhân quả, tính ổn định BIBO.

2.4.2 Tính nhớ

Hệ không nhớ phải có đáp ứng xung có dạng:

$$h[n] = K\delta[n].$$

$$H(z) = K$$

Vậy hệ có nhớ có hàm truyền đạt là một hằng số.

2.4.3 Tính khả đảo

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \Rightarrow H(z)H_i(z) = 1$$

ở đây:

$$h_i[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H_i(z) \text{ là đảo của } h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H(z).$$

Ví dụ:

Tìm hệ đảo $h_i[n]$ của hệ: $h[n] = a^n u[n]$.

Kiểm tra kết quả bằng cách tính tổng chập của $h[n]$ với $h_i[n]$.

Ví dụ:

Tìm hệ đảo của hệ $h[n]$ nhân quả biết:

$$H(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

2.4.4 Tính nhân quả

$$h[n] = 0, n < 0$$

$$\text{ROC: } |z| > r_{max}$$

Hệ nhân quả có miền hội tụ của H(z) nằm ngoài đường tròn đi ngang qua điểm cực xa gốc nhất.

2.4.5 Tính ổn định BIBO

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \Rightarrow |H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||z^{-n}|$$

Khi ta tính trên đường tròn đơn vị (tức là |z| = 1) thì:

$$|H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

Như vậy, nếu hệ thống ổn định BIBO thì đường tròn đơn vị nằm trong ROC. Điều ngược lại cũng đúng.

Kết hợp với tính nhân quả vừa xét trong 2.4.4 ta có kết luận:

Hệ nhân quả sẽ ổn định BIBO nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của H(z) nằm bên trong đường tròn đơn vị trong mặt phẳng z:

$$|p_k| < 1, \quad \forall k$$

Ví dụ:

Hệ có đáp ứng xung là $u[n]$ có nhân quả không? Có ổn định BIBO không?

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định của hệ có đáp ứng xung là:

$$h[n] = (.9)^n u[n]$$

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định BIBO của hệ có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}, \ \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

2.5 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

Biến đổi Z hai phía được dùng cho tín hiệu tồn tại trong khoảng $-\infty < n < \infty$. Như vậy biến đổi Z hai phía không phù hợp với loại hệ có điều kiện đầu khác 0- là loại hệ có nhiều trong thực tế.

Tín hiệu vào được kích vào hệ thống tại thời điểm n_0 nên cả tín hiệu vào và ra đều được tính với $n \geq n_0$, nhưng không có nghĩa là bằng 0 với $n < n_0$.

Sau đây ta sẽ tập trung xem xét phép biến đổi Z một phía và ứng dụng của nó vào việc giải phương trình sai phân với điều kiện đầu khác 0.

2.5.1 Phép biến đổi Z một phía và tính chất dịch thời gian

Nhắc lại định nghĩa phép biến đổi Z một phía:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía khác biến đổi Z hai phía ở giới hạn dưới của tổng. Do lựa chọn này mà biến đổi Z một phía có các đặc điểm sau đây:

1. Không chứa thông tin về tín hiệu với giá trị thời gian âm.

2. Biến đổi Z một phía và biến đổi Z hai phía của tín hiệu nhân quả trùng nhau.

3. Khi nói đến biến đổi Z một phía, ta không cần quan tâm đến miền hội tụ, vì miền hội tụ luôn luôn là miền ngoài của một đường tròn.

4. Tính chất dịch thời gian của biến đổi Z một phía khác biến đổi Z hai phía. Cụ thể như sau:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

$$x[n-m] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{i=-m}^{-1} x[i]z^{-i}$$

Ta sẽ ứng dụng tính chất dịch thời gian này rất nhiều để giải phương trình sai phân trong trường hợp điều kiện đầu khác 0.

2.5.2 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy biến đổi Z một phía cho cả hai vế của phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(z^{-k}Y(z) + z^{-k}\sum_{i=-k}^{-1} y[i]z^{-i} \right) = \sum_{r=0}^{M} b_r \left(z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{i=-m}^{-1} x[i]z^{-i} \right)$$

ở đây x[i] và y[i] chính là các giá trị ban đầu.

Từ đây ta có thể tìm được Y(z), tính biến đổi Z ngược ta sẽ có được y[n]

Ví dụ:

Tìm $y[n], \quad n \geq 0$ cho biết y[n] là tín hiệu ra của hệ thống:

$$y[n] = 3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n]$$

ở đây $x[n] = 3^{n-2}u[n], \quad y[-2] = -\dfrac{4}{9}, \quad y[-1] = -\dfrac{1}{3}$

Chương 4

PHÂN TÍCH TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC LTI TRONG MIỀN TẦN SỐ

Trong chương III ta đã thấy phép biến đổi Z là một công cụ toán học hiệu quả trong việc phân tích hệ thống rời rạc LTI. Trong chương này, ta sẽ tìm hiểu một công cụ toán học quan trọng khác là *phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc*, gọi tắt là *DTFT (DT-Fourier Transform).*

Phép biến đổi này áp dụng để phân tích cho cả tín hiệu và hệ thống. Nó được dùng trong trường hợp dãy rời rạc dài vô hạn và không tuần hoàn.

Nội dung chính chương này bao gồm:

- Biến đổi Fourier
- Biến đổi Fourier ngược
- Các tính chất của biến đổi Fourier
- Phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc (cách gọi thông dụng là phân tích phổ)
- Phân tích tần số cho hệ thống rời rạc

4.1 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

4.1.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier

Ta đã biết rằng có thể biểu diễn tín hiệu rời rạc tạo ra bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự dưới dạng sau đây:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

Bây giờ ta sẽ tính biến đổi Fourier cho tín hiệu này. Các bước như sau:

1. Tính biến đổi Fourier của $\delta(t-kT)$.

2. Sử dụng nguyên lý xếp chồng, tìm biến đổi Fourier của $x_s(t)$.

$$x_s(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}$$

Đặt $x(nT) = x[n]$ và thay biến $\Omega = \omega T$ (xem lại chương I, lưu ý đơn vị của Ω [rad] và ω [rad/s]), ta được:

$$\text{DTFT} : X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Ta nhận xét thấy tuy tín hiệu rời rạc trong miền thời gian nhưng DTFT lại liên tục và tuần hoàn trong miền tần số.

DTFT chính là hàm phức theo biến tần số thực. Ta gọi DTFT là *phổ phức (complex spectrum)* hay ngắn gọn là phổ của tín hiệu rời rạc $x[n]$

4.1.2 Sự hội tụ của phép biến đổi Fourier

Không phải là tất cả DTFT đều tồn tại (hội tụ) vì DTFT chỉ hội tụ khi:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| < \infty$$

Ta luôn luôn có:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]e^{-j\Omega n}\right|$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|\left|e^{-j\Omega n}\right|$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|$$

Như vậy, nếu x[n] thỏa điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right| < \infty$$

thì biến đổi Fourier hội tụ.

Ví dụ:

Tìm $X(\Omega)$ với $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Nếu $|a| > 1$?

Ví dụ:

Tìm $Y(\Omega)$ với $y[n] = a^n u[-n]$, $|a| > 1$. Nếu $|a| < 1$?

Ví dụ:

Cho $p[n] = u[n] - u[n-N]$. Tìm $P(\Omega)$.

Hãy chứng tỏ rằng biến đổi Fourier này có pha tuyến tính (*linear phase)*

Ví dụ:

Tìm $H(\Omega)$ của hệ LTI có đáp ứng xung sau

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

Và chứng tỏ rằng hệ có pha tuyến tính

4.1.4 Quan hệ giữa biến đổi Z và biến đổi Fourier

Biểu thức tính ZT là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Giả sử ROC có chứa đường tròn đơn vị. Tính X(z) trên đường tròn đơn vị, ta được:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

Như vậy, biến đổi Fourier chính là biến đổi Z tính trên đường tròn đơn vị. Dựa vào đây, ta có thể phát biểu lại điều kiện tồn tại của DTFT như sau:

Biến đổi Fourier của một tín hiệu chỉ tồn tại khi ROC của biến đổi Z của tín hiệu đó có chứa đường tròn đơn vị.

Ví dụ:

Làm lại các ví dụ trên- Tìm biến đổi Fourier của:

(a) $x[n]=a^n u[n]$, $|a|<1$. Nếu $|a|>1$?

(b) $y[n]=a^n u[-n]$, $|a|>1$. Nếu $|a|<1$?

(c) $p[n]=u[n]-u[n-N]$

(d) $h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]+\delta[n-3]$

4.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER NGƯỢC

4.2.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier ngược

Ta thấy $X(\Omega)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π, do $e^{j\Omega}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π :

$$e^{j\Omega}=e^{j(\Omega+2\pi)}=e^{j\Omega}e^{j2\pi}=e^{j\Omega}.$$

Do đó dải tần số của tín hiệu rời rạc là một dải tần bất kỳ rộng 2π, thường chọn là: $(-\pi,\pi)$ hay $(0,2\pi)$.

Vậy ta có thể khai triển $X(\Omega)$ thành chỗi Fourier trong khoảng $(-\pi,\pi)$ hay $(0,2\pi)$ nếu điều kiện tồn tại $X(\Omega)$ thỏa mãn. Các hệ số Fourier là x[n], ta có thể tính được x[n] từ $X(\Omega)$ theo cách sau:

Nhân 2 vế của biểu thức tính DTFT với $\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega l}$ rồi lấy tích phân trong khoảng $(-\pi,\pi)$ ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega l}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\right]e^{j\Omega l}d\Omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\Omega(l-n)}d\Omega\right]=x[l]$$

Thay l = n và thay cận tích phân, không nhất thiết phải là $(-\pi,\pi)$ mà chỉ cần khoảng cách giữa cận trên và dưới là 2π, ta được biểu thức tính biến đổi Fourier ngược (IDTFT) như sau:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Ta có thể tính IDTFT bằng hai cách: một là tính trực tiếp tích phân trên, hai là chuyển về biến đổi Z rồi tính như tính biến đổi Z ngược. Tùy vào từng trường hợp cụ thể mà ta chọn phương pháp nào cho thuận tiện.

4.2.2 Một số ví dụ tính biến đổi Fourier ngược

Ví dụ:

Tìm x[n] nếu biết:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

Ví dụ:

Tìm x[n] nếu biết:

$$X(\Omega) = \cos^2 \Omega$$

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Sau đây ta sẽ xét một số tính chất quan trọng của DTFT, phần còn lại xem sách.

4.3.1 Tính tuyến tính

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

4.3.2 Tính dịch thời gian

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

Qua đây ta thấy sự dịch chuyển tín hiệu trong miền thời gian sẽ không ảnh hưởng đến biên độ của DTFT, tuy nhiên pha được cộng thêm một lượng.

4.3.3 Tính dịch tần số/ điều chế

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

$$\cos(\Omega_0 n)x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0)$$

Như vậy, việc điều chế tín hiệu gây ra sự dịch tần số.

4.3.4 Tính chập thời gian

Tương tự như biến đổi Z, với biến đổi Fourier ta cũng có:

$$x_1[n]*x_2[n]\xleftrightarrow{F}X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

Ví dụ:

Cho $h[n]=a^n u[n], |a|<1$. Tìm hệ đảo của nó $h_i[n]$, nhưng không dùng biến đổi Z.

4.3.5 Tính nhân thời gian

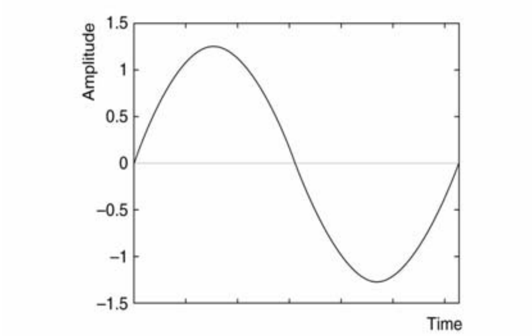
$$x_1[n].x_2[n]\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\lambda)X_2(\Omega-\lambda)d\lambda$$

4.4 PHÂN TÍCH TẦN SỐ (PHỔ) CHO TÍN HIỆU RỜI RẠC

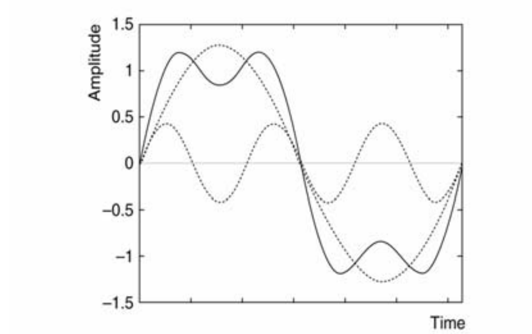
4.4.1 Ý nghĩa của phổ

Trong miền tần số, mỗi tín hiệu đều có đặc điểm riêng của nó. Ví dụ như, tín hiệu sin chỉ có duy nhất một tần số đơn, trong khi nhiễu trắng chứa tất cả các thành phần tần số. Sự biến thiên chậm của tín hiệu là do tần số thấp, trong khi sự biến thiên nhanh và những sườn nhọn là do tần số cao. Như xung vuông chẳng hạn, nó chứa cả tần số thấp và cả tần số cao. Hình sau minh họa cho điều đó. Hình (a) là một sóng sin tần số thấp, các hình sau (b)-(c) cộng thêm dần các sóng sin tần số cao dần. Hình cuối cùng (e) là tổng của 7 sóng sin. Trong hình (e) ta thấy tổng của 7 sóng sin có dạng xấp xỉ với dạng của một xung vuông.

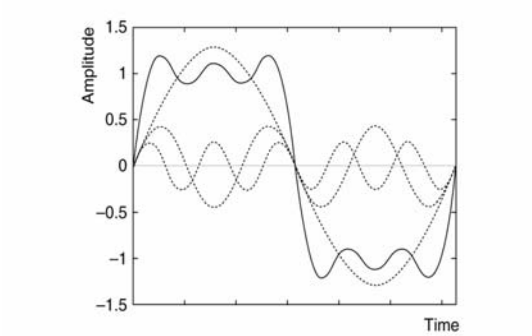
Phổ của tín hiệu là mô tả chi tiết các thành phần tần số chứa bên trong tín hiệu. Ví dụ như với tín hiệu xung vuông vừa nói trên, phổ của nó chỉ ra tất cả các đỉnh nhọn của các sóng sin riêng có thể kết hợp lại với nhau tạo ra xung vuông. Thông tin này quan trọng vì nhiều lý do. Ví dụ như, thành phần tần số trong một mẫu nhạc chỉ cho ta biết các đặc trưng của loa, để từ đó khi sản xuất lại ta có thể cải tiến cho hay hơn. Một ví dụ khác, micro trong hệ thống nhận dạng tiếng nói phải có dải tần đủ rộng để có thể bắt được tất cả các tần số quan trọng trong tiếng nói đầu vào. Để dự đoán các ảnh hưởng của bộ lọc trên tín hiệu, cần phải biết không chỉ bản chất của bộ lọc mà còn phải biết cả phổ của tín hiệu nữa.



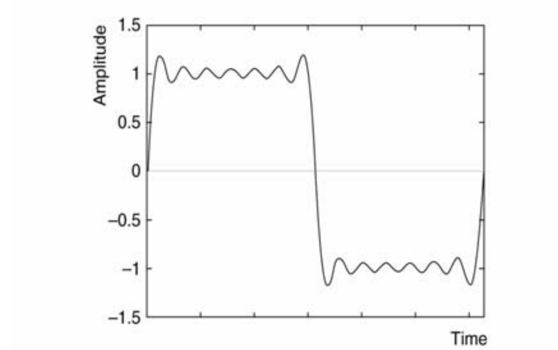
(a) Lowest Frequency Sine Wave



(b) Sum of Two Sine Waves



(c) Sum of Three Sine Waves



(e) Sum of Seven Sine Waves

4.4.2 Phổ biên độ và phổ pha

Phổ của tín hiệu gồm có hai phần: *phổ biên độ (magnitude spectrum)* và *phổ pha (phase spectrum).* Phổ biên độ chỉ ra độ lớn của từng hành phần tần số. Phổ pha chỉ ra quan hệ pha giữa các thành phần tần số khác nhau. Trong phần này, ta xét tín hiệu rời rạc không tuần hoàn. Công cụ để tính phổ tín hiệu rời rạc không tuần hoàn là DTFT.

Để tính phổ tín hiệu, ta qua hai bước: một là tính DTFT của tín hiệu- là $X(\Omega)$, hai là tính biên độ và pha của $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

ở đây $|X(\Omega)|$ là phổ biên độ và $\theta(\Omega)$ là phổ pha.

Ta dễ dàng chứng minh được rằng đối với tín hiệu thực, phổ biên độ là một hàm chẵn theo tần số Ω và phổ pha là một hàm lẻ theo Ω.

Do đó, nếu biết phổ $X(\Omega)$ trong khoảng 0 đến π, ta có thể suy ra phổ trong toàn dải tần số.

Để dễ giải thích phổ, tần số số Ω từ 0 đến π thường được chuyển đổi thành tần số tương tự f từ 0 đến $f_S/2$ nếu tần số lấy mẫu là f_S.

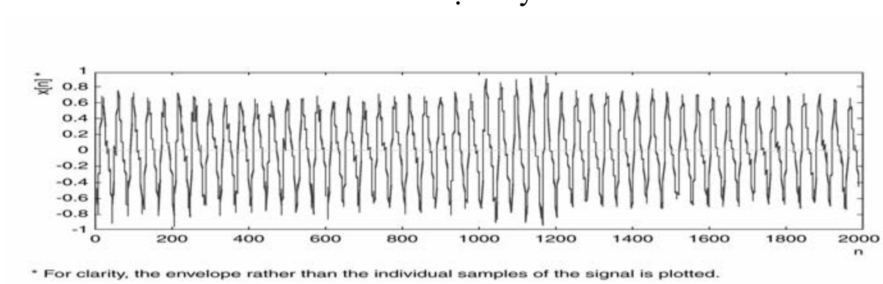
Ví dụ:

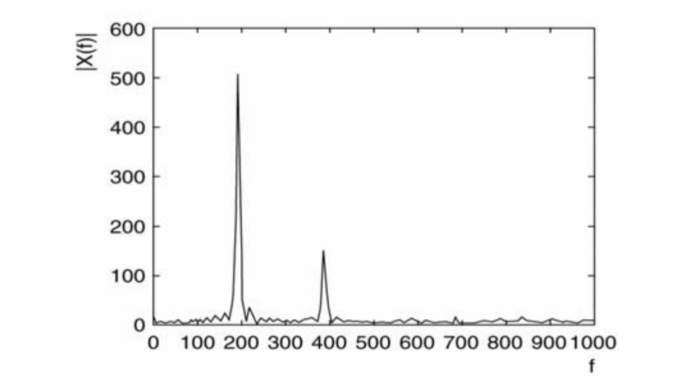
Tìm phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu chữ nhật:

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

Ví dụ:

Một mẩu nguyên âm tiếng nói "eee" được lấy mẫu ở tần số 8 kHz. Phổ biên độ của tín hiệu này như trên hình. Hỏi tần số cơ bản của tín hiệu này là bao nhiêu?





4.4.3 Mật độ phổ năng lượng

Năng lượng của tín hiệu x[n] được định nghĩa là:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Bây giờ ta biểu diễn năng lượng theo phổ:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\Omega)e^{-j\Omega n}d\Omega\right]$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng và tích phân, ta có:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\Omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right]d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Vậy quan hệ về năng lượng giữa x[n] và $X(\Omega)$ là:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega \text{ (quan hệ Parseval)}$$

Đại lượng $S_{xx}(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ gọi là mật độ phổ năng lượng.

Ví dụ:

Xác định mật độ phổ năng lượng của tín hiệu sau:

$$x[n] = a^n u[n] \text{ với } -1 < a < 1$$

4.4.4 Băng thông

Băng thông (bandwidth) là dải tần số tập trung hầu hết năng lượng (công suất) của tín hiệu. Giả sử 95% năng lượng của tín hiệu tập trung trong dải tần số $F_1 \le F \le F_2$, ta nói băng thông 95% của tín hiệu là $F_2 - F_1$. Ta có thể định nghĩa các băng thông 75%, băng thông 90%, băng thông 99%... theo kiểu tương tự như băng thông 95% nói trên.

Dựa vào băng thông của tín hiệu, ta có thể phân loại tín hiệu như sau:

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung quanh tần số 0 thì đó là *tín hiệu tần số thấp (low-frequency signal).*

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung ở miền tần số cao thì đó là *tín hiệu cao tần (high-frequency signal).*

Nếu năng lượng tín hiệu tập trung vào một dải tần số nào đó giữa tần số thấp và tần số cao thì đó là *tín hiệu thông dải (bandpass signal)*

Trong trường hợp tín hiệu thông dải, khái niệm *băng hẹp (narrowband)* được dùng để chỉ tín hiệu có băng thông $F_2 - F_1$ rất nhỏ (khoảng 10% hoặc nhỏ hơn) so với tần số trung tâm $(F_1 + F_2)/2$. Ngược lại, tín hiệu được gọi là *băng rộng (wideband).*

Tín hiệu được gọi là có *băng thông hữu hạn (bandlimited)* nếu phổ của nó bằng 0 ở ngoài dải tần $|F| \geq B$. Tín hiệu năng lượng x[n] được gọi là có băng thông hữu hạn nếu:

$$|X(\Omega)| = 0, \quad \Omega_0 < |\Omega| < \pi$$

4.5 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CHO HỆ THỐNG RỜI RẠC LTI

Trong miền tần số, hệ thống rời rạc LTI được mô tả bằng một hàm theo tần số- gọi là *đáp ứng tần số (frequency response)- là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h[n]*:

Quan hệ giữa tín hiệu vào- ra và hệ thống trong miền tần số như sau:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega)$$

Đáp ứng tần số hoàn toàn đặc trưng cho hệ rời rạc LTI trong miền tần số. Nó cho phép ta:

- xác định các đáp ứng của hệ thống với các đầu vào có dạng tổ hợp tuyến tính của tín hiệu sin hay hàm mũ phức.

- xác định các đặc tính của hệ LTI là bộ lọc tần số.

4.5.1 Tính đáp ứng tần số

***1.** Tính từ đáp ứng xung*

Theo định nghĩa, đáp ứng tần số là $H(\Omega)$ được tính như sau:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

***2.** Tính từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng*

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

Lấy DTFT 2 vế, sử dụng tính chất tuyến tính và dịch thời gian, ta được:

$$\sum_{k=0}^{N} [a_k e^{-j\Omega k}]Y(\Omega = \sum_{r=0}^{M} [b_r e^{-j\Omega r}]X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\Omega r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

Ví dụ:

Tìm đáp ứng tần số của hệ:

$$y[[n]] + 0.1y[[n-1]] + 0.85y[n-2] = x[n] - 0.3x[n-1]$$

3. Tính từ hàm truyền đạt

Theo quan hệ giữa phép biến đổi Z và phép biến đổi Fourier, ta có thể tính được đáp ứng tần số từ hàm truyền đạt bằng cách thay $z = e^{j\Omega}$ (với điều kiện là ROC có chứa đường tròn đơn vị):

$$H(\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

4.5.2 Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha

Do đáp ứng tần số $H(\Omega)$ là hàm theo biến phức Ω nên có thể biểu diễn như sau:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

$|H(\Omega)|$ được gọi là đáp ứng biên độ và $\theta(\Omega)$ được gọi là đáp ứng pha.

Ví dụ:

Cho đáp ứng tần số của hệ sau:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\Omega}}$$

Tìm đáp ứng biên độ và pha.

4.5.3 Đáp ứng của hệ LTI đối với đầu vào là tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin hay hàm mũ phức

1. Đáp ứng trạng thái 0 đối với đầu vào dạng hàm mũ phức

Từ chương II, ta đã biết đáp ứng của hệ (điều kiện đầu là 0) là:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Giả sử tín hiệu vào là tín hiệu hàm mũ phức sau:

$$x[n] = Ae^{j\Omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

với A là biên độ và Ω là một tần số trong dải tần $(-\pi, \pi)$.

Thay x[n] vào biểu thức y[n] ở trên, ta được:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(Ae^{j\Omega(n-k)}\right) \\ &= A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(e^{-j\Omega k}\right)\right]e^{j\Omega n} \\ &= (Ae^{j\Omega n})H(\Omega) \\ &= x[n]H(\Omega) \end{aligned}$$

Ta thấy đáp ứng của hệ có dạng giống dạng của đầu vào, tức là dạng hàm mũ phức với cùng tần số, chỉ khác nhau một hệ số nhân là $H(\Omega)$.

Điều này cũng đúng trong trường hợp tín hiệu vào có dạng sin/cos.

Ví dụ:

Xác định đầu ra của hệ thống có đáp ứng xung là:

$$h[n] = (1/2)^n u[n]$$

khi đầu vào có dạng:

(a) $x[n] = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}, \quad -\infty < n < \infty$. Cho biết $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^0}$

(b) $x[n] = 10 - 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n, \quad -\infty < n < \infty$

2. *Eigenfunction và eigenvalue*

Nếu ta có tín hiệu vào và tín hiệu ra có thể phân tích thành các hàm cơ sở là:

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n]$$

$$y[n] = \sum_k a_k \psi_k[n]$$

Các hàm cơ sở này có cùng dạng là $\phi_k[n]$, chỉ khác nhau một hệ số nhân (thực/ phức) b_k :

$$\psi_k[n] = \phi_k[n] * h[n] \text{ và } \psi_k[n] = b_k \phi_k[n]$$

thì $\phi_k[n]$ được gọi là một *eigenfunction* của hệ rời rạc LTI với *eigenvalue* là b_k .

Trong trường hợp này, tín hiệu vào có dạng hàm mũ phức như trên là eigenfunction và $H(\Omega)$ tính tại cùng tần số của tín hiệu vào là eigenvalue tương ứng.

3. *Đáp ứng trạng thái bền và đáp ứng nhất thời*

Ta có thể phân tích đáp ứng của hệ thống thành hai thành phần. Thành phần thứ nhất không tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng, được gọi là *đáp ứng trạng thái bền (steady-sate response)* $y_{ss}[n]$. Thành phần này tồn tại trong cùng khoảng thời gian tồn tại của đầu vào. Thành phần kia tiến tới 0 khi n tiến tới vô cùng, được gọi là *đáp ứng nhất thời (transient response)* $y_{tr}[n]$

Trong nhiều ứng dụng thì đáp ứng nhất thời không quan trọng vì chỉ tồn tại trong một khoảng thời gian ngắn và do vậy mà nó thường được bỏ qua.

Ví dụ:

Cho tín hiệu $x[n] = Ae^{j\Omega n}, n \geq 0$ đi vào hệ thống $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ $(|a| < 1)$

Cho điều kiện đầu là y[-1]. Tìm đáp ứng của hệ, đáp ứng trạng thái bền, đáp ứng nhất thời.

Tín hiệu ra là:

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] - \frac{Aa^{n+1} e^{-j\Omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\Omega}} e^{j\Omega n} + \frac{A}{1 - ae^{-j\Omega}} e^{j\Omega n}, n \geq 0$$

Ta có đáp ứng trạng thái bền là:

$$y_{ss}[n] = \lim_{n\to\infty} y[n] = \frac{A}{1 - ae^{-j\Omega}} = AH(\Omega)e^{j\Omega n}$$

Hai số hạng đầu của y[n] giảm về 0 khi n tiến tới vô cùng. Đó là đáp ứng nhất thời:

$$y_{tr}[n] = a^{n+1}y[-1] - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\Omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\Omega}}e^{j\Omega n}, \ n \geq 0$$

Tổng quát, khi tín hiệu vào là:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} X_k z_k^n$$

Bằng cách xếp chồng, ta tìm được đáp ứng trạng thái bền như sau:

$$y_{ss}[n] = \sum_{k=1}^{M} X_k H(z_k) z_k^n.$$

Ví dụ:

Cho đầu vào $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, và

$$h[n] = (.5)^n u[n]$$

Tìm đáp ứng trạng thái bền.

$$y_{ss}[n] = H\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4.5.4 Hệ LTI là bộ lọc tần số

Bộ lọc (filter) là một hệ thống xử lý tín hiệu bằng cách thay đổi các đặc trưng tần số của tín hiệu theo một điều kiện nào đó.

Nói cách khác, bộ lọc thay đổi phổ của tín hiệu vào $X(\Omega)$ theo đáp ứng tần số $H(\Omega)$ để tạo ra tín hiệu ra có phổ là: $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$. Đáp ứng tần số ở đây đóng vai trò là một hàm trọng số hay một hàm thay đổi dạng phổ đối với các thành phần tần số khác nhau trong tín hiệu vào. Khi xét theo quan điểm này thì bất kỳ một hệ LTI nào cũng có thể được xem là một bộ lọc tần số, ngay cả khi nó không ngăn một vài hay tất cả các thành phần tần số trong tín hiệu vào. Do vậy ta có thể đồng nhất hai khái niệm bộ lọc tần số và hệ LTI.

Trong môn học này, ta dùng thuật ngữ "bộ lọc" là để chỉ các hệ LTI thực hiện chức năng chọn lọc tín hiệu theo tần số. Bộ lọc cho các thành phần tần số của tín hiệu trong một dải tần nào đó đi qua và ngăn không cho các thành phần tần số khác đi qua. Dải tần số cho qua gọi là *dải thông (passband)* và dải tần số không cho qua gọi là *dải chắn (stopband/block-band).* Tần số giới hạn giữa dải thông và dải chắn gọi là *tần số cắt (cut-off frequency)*

Cách mô tả bộ lọc đơn giản nhất là biểu diễn dạng của nó trong miền tần số. Đó chính là đáp ứng tần số, gồm đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

Xét bộ lọc có dải thông là (Ω_1, Ω_2). Nếu đây là bộ lọc lý tưởng thì đáp ứng tần số có dạng như sau:

$$H(\Omega) = \begin{cases} Ce^{-j\Omega n_0}, \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \\ 0, \quad \Omega \neq \end{cases}$$

ở đây C và n_0 là hằng số.

Tín hiệu ra bộ lọc lý tưởng có dạng:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = CX(\Omega)e^{-j\Omega n_0}, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

$$y[n] = Cx[n - n_0]$$

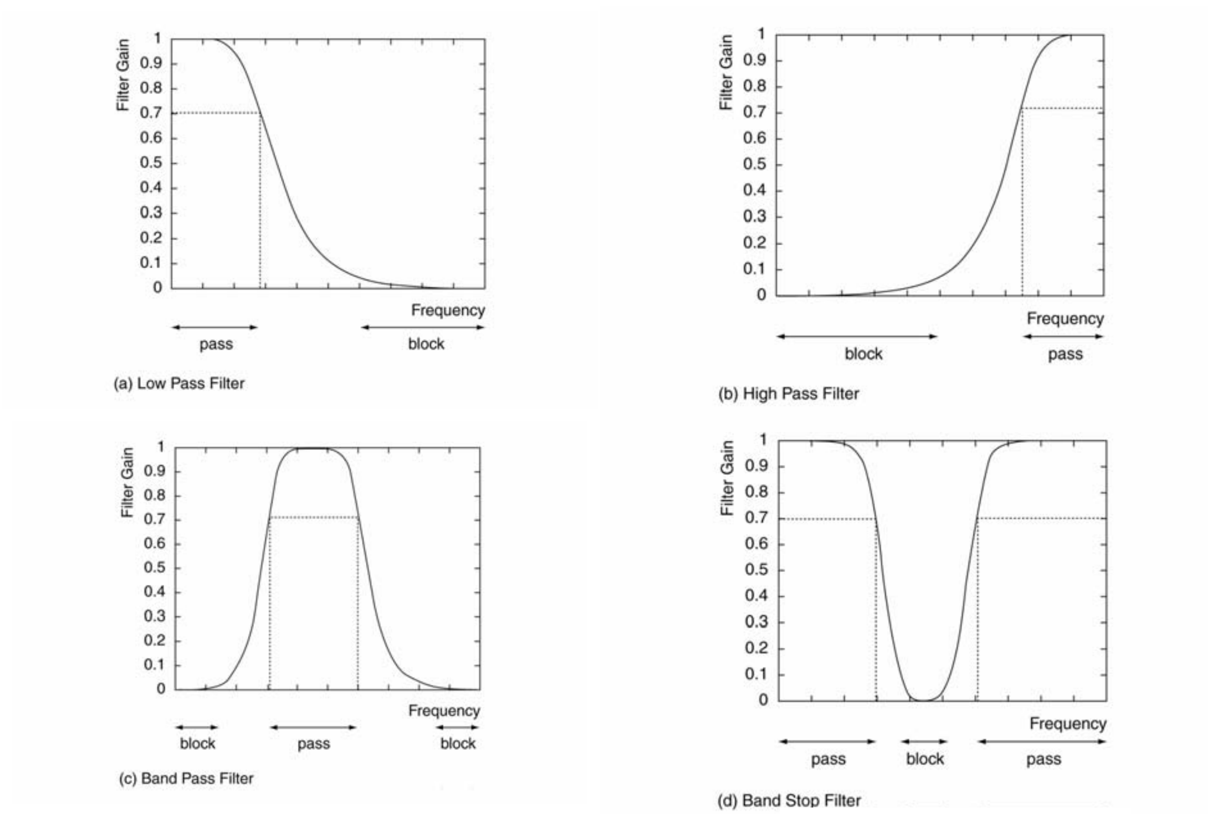
Ta thấy tín hiệu ra đơn giản chỉ là tín hiệu vào bị thay đổi một hệ số nhân và bị trễ đi một khoảng thời gian. Sự thay đổi biên độ và trễ này không làm méo tín hiệu.

Vậy bộ lọc lý tưởng là bộ lọc có đáp ứng biên độ có dạng chữ nhật và đáp ứng pha là tuyến tính trong dải thông:

$$|H(\Omega)| = C, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$
$$\theta(\Omega) = -\Omega n_0, \quad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

Có rất nhiều loại bộ lọc khác nhau với rất nhiều ứng dụng khác nhau, trong đó thông dụng nhất là bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải.

Hình sau vẽ các đáp ứng biên độ của 4 loại bộ lọc thông dụng.



Các đáp ứng biên độ trên không có dạng chữ nhật vì đây không phải là bộ lọc lý tưởng. Giữa dải thông và dải chắn có một *dải chuyển tiếp (transition band). Độ lợi (gain)* của bộ lọc tại một tần số nào đó là giá trị của đáp ứng biên độ tại tần số đó. Tần số cắt là tần số tại điểm mà độ lợi là $1/\sqrt{2}$ của giá trị lớn nhất. Bộ lọc càng tiến gần đến bộ lọc lý tưởng hơn khi độ dốc của bộ lọc càng lớn, dải chuyển tiếp càng nhỏ. Điều này yêu cầu bậc của bộ lọc phải lớn.

Ta sẽ quay lại tìm hiểu kỹ hơn về bộ lọc và thiết kế bộ lọc sau này.

Chương 5

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC VÀ ỨNG DỤNG

Từ chương trước, ta đã thấy ý nghĩa của việc phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc. Công việc này thường được thực hiện trên các bộ xử lý tín hiệu số DSP. Để thực hiện phân tích tần số, ta phải chuyển tín hiệu trong miền thời gian thành biểu diễn tương đương trong miền tần số. Ta đã biết biểu diễn đó là biến đổi Fourier $X(\Omega)$ của tín hiệu x[n]. Tuy nhiên, $X(\Omega)$ là một hàm liên tục theo tần số và do đó, nó không phù hợp cho tính toán thực tế. Hơn nữa, tín hiệu đưa vào tính DTFT là tín hiệu dài vô hạn, trong khi thực tế ta chỉ có tín hiệu dài hữu hạn, ví dụ như một bức ảnh, một đoạn tiếng nói…

Trong chương này, ta sẽ xét một phép biến đổi mới khắc phục được các khuyết điểm trên của DTFT. Đó là *phép biến đổi Fourier rời rạc DFT (Discrete Fourier Transform).* Đây là một công cụ tính toán rất mạnh để thực hiện phân tích tần số cho tín hiệu rời rạc trong thực tế.

Nội dung chính chương này gồm:

- DTFT của tín hiệu rời rạc tuần hoàn. Đây là phép biến đổi trung gian để dẫn dắt đến DFT
- DFT thuận và ngược
- Các tính chất của DFT
- Một số ứng dụng của DFT
- Thuật toán tính nhanh DFT, gọi là FFT

5.1 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC TUẦN HOÀN

5.1.1 Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Nhắc lại khai triển chuỗi Fourier cho *tín hiệu liên tục tuần hoàn*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{synthesis equation}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{analysis equation}$$

Tương tự, ta có khai triển chuỗi Fourier cho *tín hiệu rời rạc tuần hoàn* (còn được gọi là *chuỗi Fourier rời rạc DFS- Discrete Fourier Serie*) như sau:

$$x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \text{synthesis equation}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \qquad \text{analysis equation}$$

Khác với khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu liên tục tuần hoàn, phép lấy tích phân bây giờ được thay bằng một tổng. Và có điểm khác quan trọng nữa là tổng ở đây là tổng hữu hạn, lấy trong một khoảng bằng một chu kỳ của tín hiệu. Lý do là:

$$e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}.e^{jk2\pi n} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j(k+N)\Omega_0 n}$$

5.1.2 Biểu thức tính biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Ta có hai cách để xây dựng biểu thức tính biến dổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn như sau:

1. *Cách thứ nhất:*

Ta bắt đầu từ tín hiệu liên tục tuần hoàn. Ta có:

$$e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Nên:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Vậy, phổ của tín hiệu tuần hoàn là *phổ vạch (line spectrum),* có vố số vạch phổ với chiều cao là $2\pi a_k$ nằm cách đều nhau những khoảng là ω_0 trên trục tần số ω

Bây giờ chuyển sang tìm biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn:

Trước hết, ta tìm DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$. Ta có thể đoán là DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$ cũng có dạng xung tương tự như DTFT của $e^{j\omega_0 t}$, nhưng khác ở điểm DTFT này tuần hoàn với chu kỳ 2π:

$$DT: e^{j\Omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi l)$$

Ta có thể kiểm tra lại điều này bằng cách lấy DTFT ngược:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0-\pi}^{\Omega_0+\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Kết hợp kết quả DTFT của $e^{j\Omega_0 n}$ với khai triển chuỗi Fourier của x[n], tương tự như với tín hiệu liên tục, ta được:

$$\begin{aligned} x[n] &\overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi \sum_{k\in<N>} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0 + 2\pi l) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - k\Omega_0) \text{ (do } a_k \text{ tuần hoàn)} \end{aligned}$$

Với $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, ta có:

$$x[n] \text{ periodic with period } N \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

với a_k là hệ số của chuỗi Fourier, tổng được lấy trong một chu kỳ của tín hiệu.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

Ví dụ:

Tìm DTFT của dãy xung rời rạc sau:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN].$$

Cuối cùng ta có:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) = P(\Omega)$$

Như vậy, DTFT của dãy xung rời rạc là tập vô số xung rời rạc có chiều cao là $\frac{2\pi}{N}$ và có khoảng cách giữa hai xung cạnh nhau là $\frac{2\pi}{N}$

2. *Cách thứ hai:*

Ta có thể rút ra kết quả DTFT của tín hiệu rời rạc tuần hoàn như trên nhưng bằng cách khác.

Ta xét một chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn $x[n]$, ký hiệu là: $x_0[n]$:

$$x_0[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Sau đó tính DTFT của $x_0[n]$

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x_0[n]e^{-jn\Omega}$$

Viết lại $x[n]$ dưới dạng tổng của vô số chu kỳ $x_0[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0[n] * \delta[n-kN] = x_0[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$

Theo tính chất chập tuyến tính ta có:

$$x[n] = x_0[n] * p[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_0(\Omega)P(\Omega) = X(\Omega)$$

Thay $P(\Omega)$ vừa tìm được trong ví dụ trên vào biểu thức này, ta được:

$$X(\Omega) = X_0(\Omega)\left(\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})\right)$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_k X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \text{ (t/c nhân với một xung)}$$

ở đây $X_0(\frac{2\pi k}{N})$ có N giá trị phân biệt, nghĩa là $k = 0,1,2,...,N-1$.

Biểu thức tính DTFT ngược là:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})]e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N})\int_0^{2\pi} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_0(\frac{2\pi k}{N})e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Nếu so sánh với công thức chuỗi Fourier ở trên, ta được:

$$a_k = \frac{1}{N}X_0\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \text{với } k = 0,1,2,...,N-1$$

Tóm lại, ta có:

$$x[n] = x_0[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N}) \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_0(\frac{2\pi k}{N}) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X_0(\frac{2\pi k}{N})$$

Vậy, để tính DTFT $X(\Omega)$ của tín hiệu $x[n]$ rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N, ta tiến hành theo các bước sau đây:

1. Bắt đầu với một chu kỳ $x_0[n]$ của tín hiệu $x[n]$, lưu ý $x_0[n]$ không tuần hoàn

2. Tìm DTFT của tín hiệu không tuần hoàn trên:

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n] e^{-j\Omega n}$$

3. Tính $X_0(\Omega)$ tại các giá trị $\Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,...,N-1$

4. Từ đây có DTFT của tín hiệu tuần hoàn theo như công thức vừa tìm:

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(\frac{2\pi k}{N}) \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Ví dụ:

Cho $x[n] = 1$. Tìm $X(\Omega)$

Ví dụ:

Cho $x_0[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-3]$. Giả sử $N = 4$. Tìm $X_0(\Omega)$ và $X(\Omega)$ và xác định 4 giá trị phân biệt của $X_0(\frac{2\pi k}{N})$.

Ví dụ:

Cho tín hiệu tuần hoàn $x[n]$ với chu kỳ $N = 3$ và một chu kỳ là:

$$x_0[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2].$$

Tìm $X_0(\Omega)$ và $X(\Omega)$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính DTFT ngược để khôi phục lại $x[n]$.

Ví dụ:

Cho tín hiệu tuần hoàn $y[n]$ với chu kỳ $N = 3$ và một chu kỳ là:

$$y_0[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2].$$

Tìm $Y_0(\Omega)$ và $Y(\Omega)$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính DTFT ngược để khôi phục lại $y[n]$.

5.2 PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC DÀI HỮU HẠN

5.2.1 Biểu thức tính biến đổi Fourier rời rạc thuận của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Trong mục trên, ta xét một chu kỳ $x_0[n]$ của tín hiệu tuần hoàn $x[n]$. Ta có thể xem phần chu kỳ này có được bằng cách *lấy cửa sổ (windowing)* tín hiệu dài vô hạn $x[n]$:

$$x_0[n] = x[n]w_R[n]$$

Với $w_R[n]$ là cửa sổ chữ nhật (ở đây nó còn được gọi là cửa sổ DFT):

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \cdots, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x_0[n] = x[n]w_R[n]$ chỉ là các mẫu của $x[n]$ nằm giữa $n = 0$ và $n = N-1$. (không quan tâm đến các mẫu nằm ngoài cửa sổ). Ta có thể tính DTFT của $x_0[n]$ như sau:

$$X_0(\Omega) = \text{DTFT}(x_0[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w_R[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Vậy,

$$X_0(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_0[n]e^{-j\Omega n}$$

Bây giờ ta tiến hành lấy mẫu $X_0(\Omega)$ để lưu trữ trên máy tính. Do $X_0(\Omega)$ liên tục và tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ cần các mẫu ở trong dải tần số cơ bản. Để thuận tiện, ta lấy N mẫu cách đều nhau trong đoạn [0, 2π) :

$$0,\ 2\pi/N,\ 4\pi/N,\ \ldots,\ (N-1)2\pi/N$$

Nói cách khác, các điểm đó là:

$$\Omega = \tfrac{2\pi k}{N}, k = 0,1,...,N-1$$

Ta định nghĩa *phép biến đổi Fourier rời rạc DFT (Discrete Fourier Transform)* như sau:

$$X[k] = X_0(\frac{2\pi k}{N}) \text{ với } k = 0, 1, \ldots, N-1$$

X[k] được gọi là *phổ rời rạc (discrete spectrum)* của tín hiệu rời rạc.

Lưu ý 1:

X[k] là hàm phức theo biến nguyên, có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$X[k] = |X[k]|\, e^{j\theta[k]}$$

ở đây |X[k]| là phổ biên độ và $\theta[k]$ phổ pha.

Lưu ý 2:

Độ phân giải (resolution) của phổ rời rạc *là* $\frac{2\pi}{N}$ vì ta đã lấy mẫu phổ liên tục tại các điểm cách nhau $\frac{2\pi}{N}$ trong miền tần số, nghĩa là: $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$.

Ta cũng có thể biểu diễn độ phân giải theo tần số tương tự f. Ta nhớ lại quan hệ:

$$F = \frac{f}{f_s}$$

Do đó:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Lưu ý 3:

Nếu ta xem xét các mẫu của $X_0(\Omega)$ là $\frac{2\pi k}{N}$ với $k = -\infty$ đến ∞ thì ta sẽ thấy *DFT chính là một chu kỳ của DFS*, nhưng DFT hiệu quả hơn nhiều so với DFS bởi vì số mẫu của DFT là hữu hạn:

$$X[k] = X_0(\Omega) \mid \Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,\cdots,N-1$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}, k=0,1,\cdots,N-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, k=0,1,\cdots,N-1$$

Để cho gọn, ta ký hiệu:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Khi không cần để ý đến N, ta có thể viết đơn giản W thay cho W_N

Vậy,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, k = 0,1,\cdots,N-1$$

là DFT của dãy $x_0[n]$. lấy cửa sổ từ x[n]

Ví dụ:

Tính DFT của $x[n] = u[n] - u[n-N]$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e^{\frac{-j2\pi k}{N}})^n = \sum_{n=0}^{N-1} W^{kn}$$

Suy ra DFT của $x[n] = 1, n = 0,1,\cdots,7.$

Ví dụ:

Cho $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1,\ldots,7 \end{cases}$. Tìm $X[k], k = 0,1,\ldots,7$

Ví dụ:

Cho $y[n] = \delta[n-2]$ và $N = 8$. Tìm $Y[k]$

Ví dụ:

Cho $x[n] = cW_N^{-pn}, n = 0,1,...,N-1$, với p là một số nguyên $p \in [0,1,...,N-1]$ và $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
Tìm DFT của $x[n]$.

5.2.2 Biểu thức tính biến đổi Fourier rời rạc ngược

Trong mục này, ta sẽ đi thiết lập công thức khôi phục $x[n]$ từ $X[k]$. Sự khôi phục này được gọi là tổng hợp hay *DFT ngược (IDFT)*

Từ biểu thức tính DTFT ngược được thiết lập trong mục 5.2.1 và do tính tương hỗ giữa miền thời gian và tần số, ta có thể suy ra biểu thức tính IDFT như sau:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, n = 0,1,...,N-1$$

Sau đây ta sẽ chứng minh điều này đúng:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]W_N^{kl}W_N^{-kn}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)}$$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} = \begin{cases} N, & l = n \\ 0, & l \neq n \end{cases}$$

Thay kết quả này vào x[n] ta có được biểu thức tính IDFT trên là đúng

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(l-n)} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]N\delta[n-l]$$
$$= \frac{1}{N}(Nx[n]) = x[n]$$

Ví dụ:

Tìm IDFT của $X[k] = 1, k = 0,1,...,7$.

Ví dụ:

Cho $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3]$ và $N = 4$, tìm $X[k]$.

Ví dụ:

Cho $X[k]=2\delta[k]+2\delta[k-2]$ và $N=4$, tìm $x[n]$.

5.2.3 Chọn số mẫu tần số N

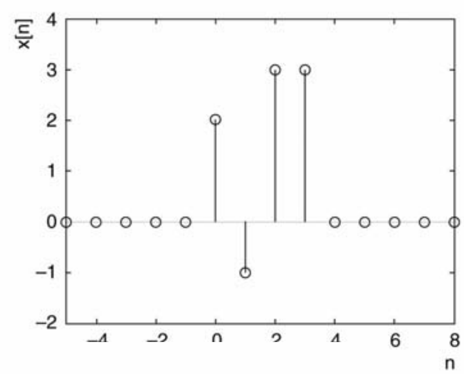
Qua mục 5.2.1 ta thấy biểu thức tính DFT được thành lập từ việc lấy mẫu DTFT với số mẫu là N. Số mẫu N này cũng chính là số mẫu của tín hiệu rời rạc trong miền thời gian hay là độ dài của cửa sổ DFT, nói ngắn gọn là số mẫu tần số bằng số mẫu thời gian.

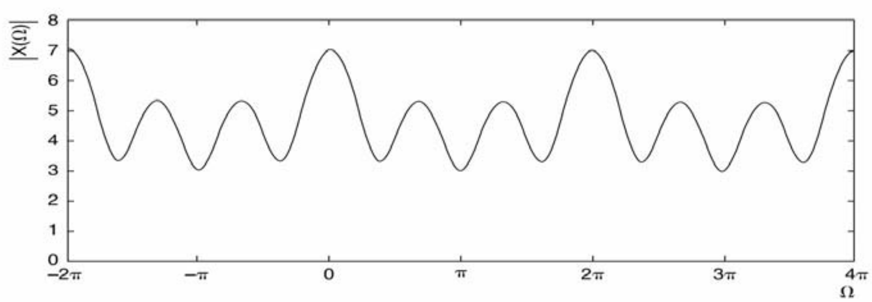
Ví dụ:

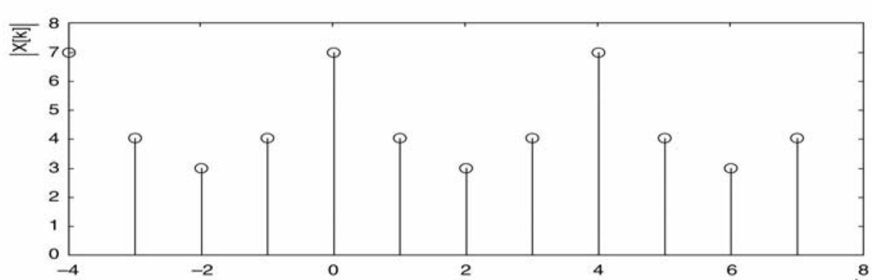
Cho tín hiệu x[n] như hình bên.

Tính rồi vẽ hai loại phổ biên độ $|X(\Omega)|$ và |X[k]| trên đồ thị.

Xem đồ thị ta thấy rõ ràng rằng: các mẫu |X[k]| bằng với $|X(\Omega)|$ tại cùng tần số.







Việc chọn N ảnh hưởng đến độ phân giải của phổ rời rạc. Chọn N càng lớn, độ phân giải càng tốt, nghĩa là khoảng cách giữa hai vạch phổ cạnh nhau X[k] và X[k+1] càng nhỏ, nghĩa là đường bao của phổ rời rạc X[k] càng gần với hình ảnh của phổ liên tục | X(Ω) |.

Để việc tăng N không làm ảnh hưởng đến kết quả, ta kéo dài tín hiệu trong miền thời gian ra bằng cách *chèn thêm các mẫu bằng 0 (zero-padding)* vào phía cuối của tín hiệu.

Ví dụ:

Cho $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

Tìm X[k] với N như sau:

(a) *N = 5.*

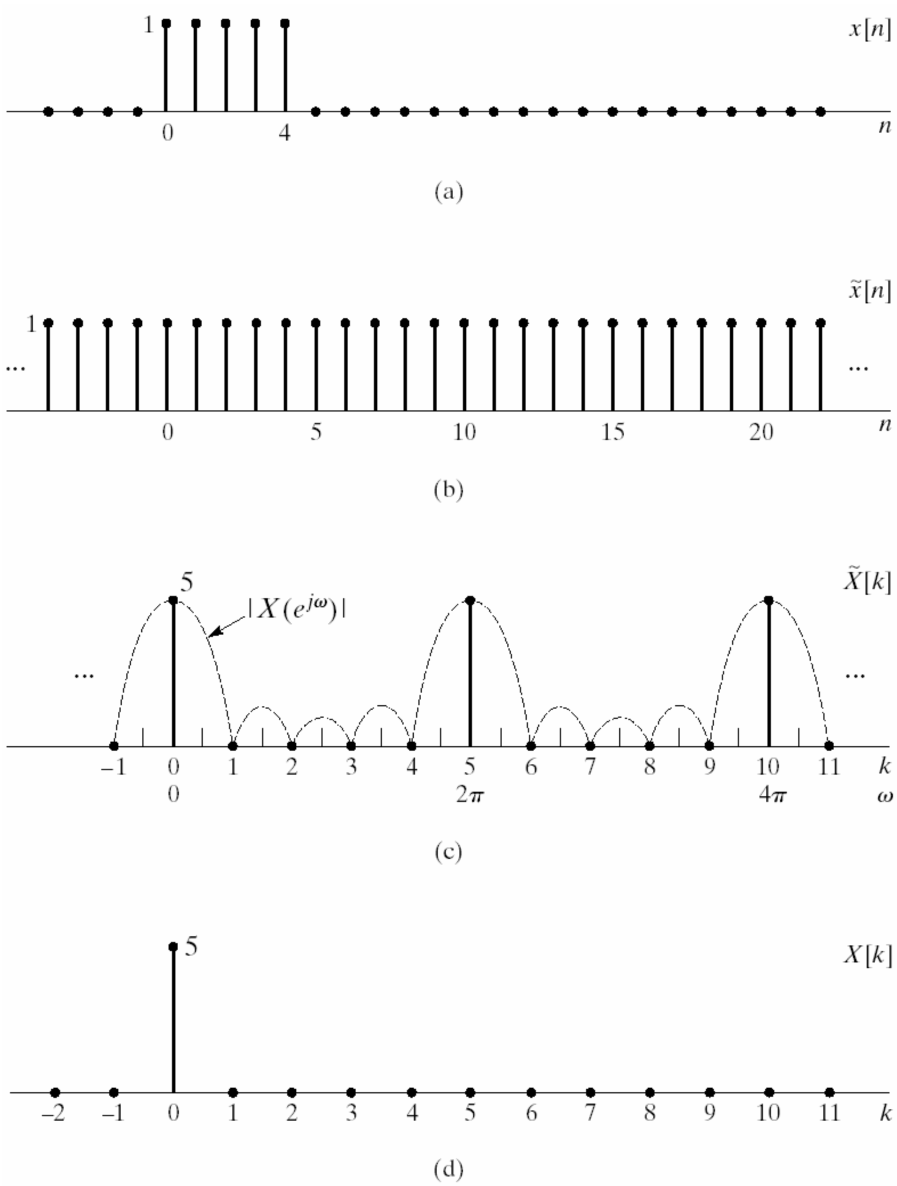


Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 5$. (c) Fourier series coefficients $\tilde{X}[k]$ for $\tilde{x}[n]$. To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform, $|X(e^{j\omega})|$ is also shown. (d) DFT of $x[n]$.

(b) *N = 10*

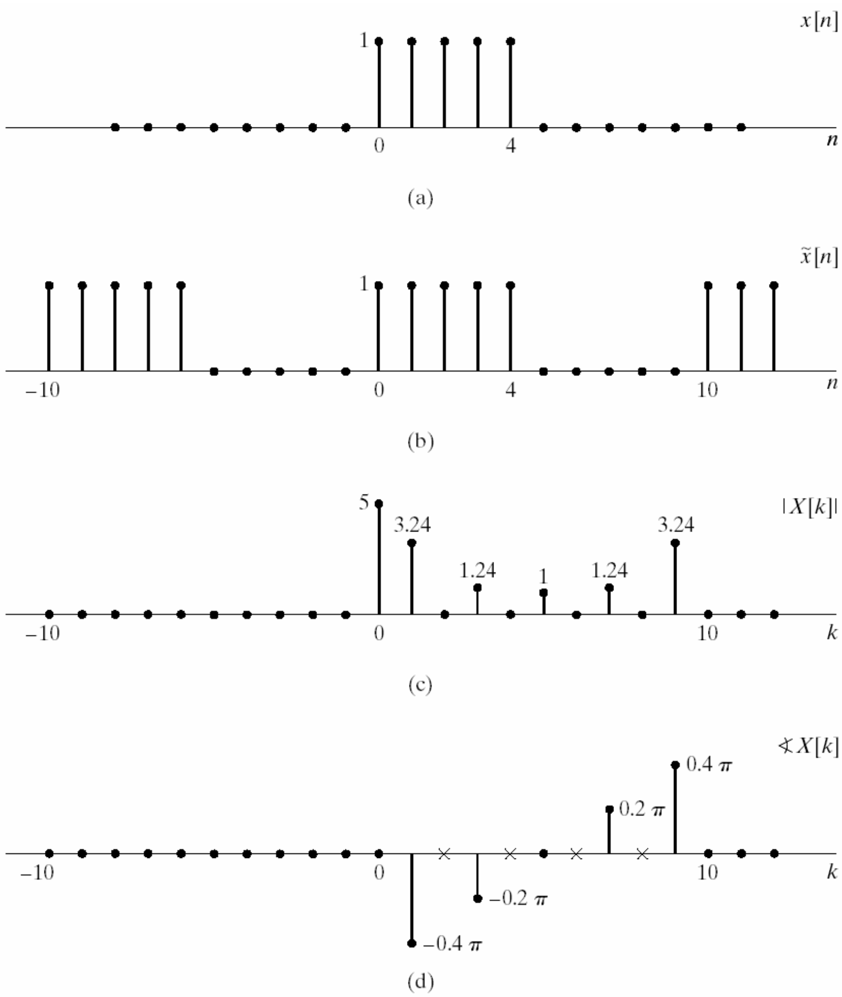


Figure 8.11 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 10$. (c) DFT magnitude. (d) DFT phase. (x's indicate indeterminate values.)

5.2.4 Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc

Hầu hết các tính chất của DFT tương tự như các tính chất của DTFT, nhưng có vài điểm khác nhau. Điểm khác nhau đó là do DFT chính là một chu kỳ trích ra từ dãy DFS tuần hoàn với chu kỳ N.

Bây giờ ta thay đổi ký hiệu, ký hiệu $\tilde{x}[n]$ là dãy tuần hoàn chu kỳ N, $x[n]$ là một chu kỳ trích ra từ $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$$

1. *Dịch vòng*

Nếu

$$x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$$

thì

$$\mathrm{x[n-m]} \overset{\mathrm{DFT}}{\leftrightarrow} \mathrm{W^{km} X[k]} \text{ với } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Ví dụ:

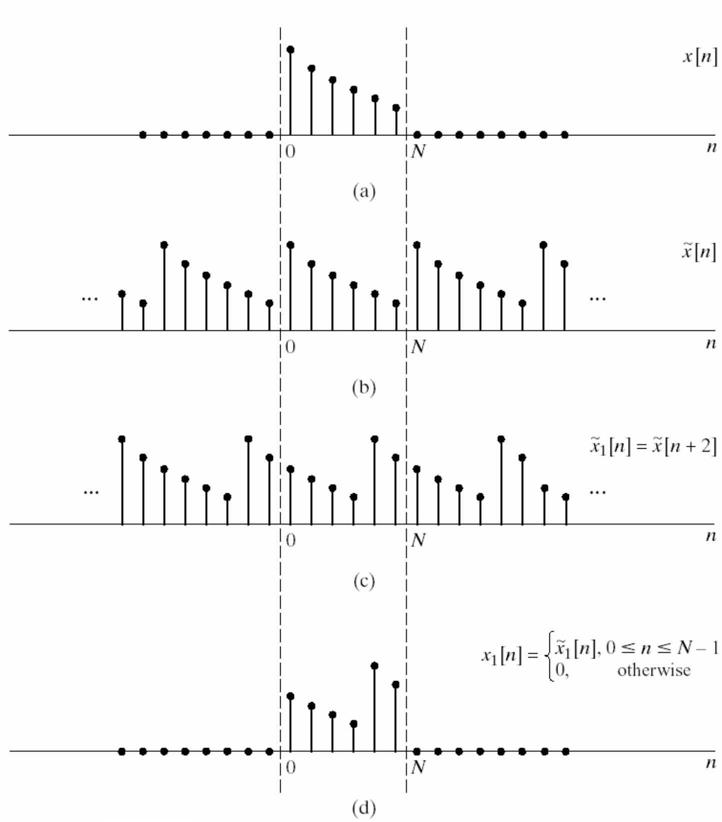


Figure ular shift of a finite-length sequence; i.e., the effect in the time domain of multiplying the DFT of the sequence by a linear phase factor.

Dịch vòng đi *m* mẫu sẽ cho kết quả trùng với dich vòng đi (*m* mod *N) mẫu*.

2. *Tổng chập vòng*

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{DFT,N}{\leftrightarrow} X_1[k]X_2[k]$$

ở đây:

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{p=0}^{N-1} x_1[p]x_2[n-p]_{\mathrm{mod}\ N}$$

Dấu $\otimes$ là ký hiệu tổng chập vòng.

Nhắc lại công thức tổng chập tuyến tính:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_1[p]x_2[n-p]$$

Thoạt nhìn, ta thấy biểu thức tính tổng chập vòng rất giống tổng chập tuyến tính. Tuy nhiên, hai phép chập đó khác nhau ở những điểm sau đây:

- Phép chập vòng chỉ áp dụng cho hai dãy dài hữu hạn và bằng nhau, kết quả cũng là một dãy cùng chiều dài, nghĩa là $x_1[n], x_2[n]$, and $y[n]$ đều có chiều dài là N. Trong khi đó, phép chập tuyến tính áp dụng cho hai dãy có chiều dài bất kỳ: nếu $x_1[n]$ dài N_{x_1}, $x_2[n]$ dài N_{x_1} thì $y[n]$ dài
- Phép dịch trong tổng chập vòng là phép dịch vòng, khác với phép dịch trong tổng chập tuyến tính là phép dịch tuyến tính.

Vì những điểm khác nhau trên nên *kết quả của tổng chập vòng và tổng chập tuyến tính của cùng hai dãy có thể không trùng nhau.* Tuy nhiên, ta có cách làm cho hai kết quả đó trùng nhau như sau:

- Chuyển tổng chập tuyến tính sang miền tần số:

$$Y(\Omega) = X_1(\Omega).X_2(\Omega)$$

- Lấy mẫu $Y(\Omega)$ với số mẫu là $N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$, ta được:

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

- Tính DFT ngược, ta được:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

ở đây chiều dài của y[n] , x[n] và h[n] là:

$$N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$$

Như vậy, bằng cách kéo dài các tín hiệu $x_1[n]$ và $x_2[n]$ ra đến chiều dài $N \geq N_y = N_{x_1} + N_{x_2} - 1$ rồi lấy chập vòng, ta được hai kết quả của tổng chập vòng và chập tuyến tính là trùng nhau:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$$

Ví dụ:

Tìm $x_1[n] \otimes x_2[n] = z[n]$, với $x_1[n] = [1, 2, 0, 0]$, $x_2[n] = [1, 1, 0, 0]$ và N = 4.

Kết quả này có trùng với tổng chập tuyến tính không?

Ví dụ:

Tìm $y[n] = x[n] \otimes x[n]$, với $x[n] = [1, 0, 1, 1]$ trong hai trường hợp:

(a) N = 4

(b) N = 8

N bằng bao nhiêu là đủ để tổng chập vòng trùng với tổng chập tuyến tính?

5.3 MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA DFT

Phần này sẽ giới thiệu sơ lược về một số ứng dụng của DFT trong thực tế

5.3.1 Phân tích phổ tín hiệu

Trong chương trước, ta đã biết được ý nghĩa của phổ trong việc phân tích tín hiệu, từ phổ của tín hiệu ta biết được một số thông tin cần thiết.

Để tìm phổ của tín hiệu (cả liên tục và rời rạc), ta cần phải biết giá trị của tín hiệu tại tất cả các thời điểm. Tuy nhiên trong thực tế, do ta chỉ quan sát được tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn nên phổ tính được chỉ là xấp xỉ của phổ chính xác. DFT được ứng dụng rất hiệu quả trong việc tính toán phổ xấp xỉ này.

Trong thực tế, nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu liên tục, trước hết ta cho tín hiệu đó đi qua một bộ lọc chống chồng phổ rồi lấy mẫu với tần số $F_s \geq 2B$, với B là băng thông của tín hiệu sau khi lọc. Như vậy, tần số cao nhất chứa trong tín hiệu rời rạc là Fs/2. Sau đó, ta phải giới hạn chiều dài của tín hiệu trong khoảng thời gian T_0 = LT, với L là số mẫu và T là khoảng cách giữa hai mẫu. Cuối cùng, ta tính DFT của tín hiệu rời rạc L mẫu. Như đã trình bày trên, muốn tăng độ phân giải của phổ rời rạc, ta tăng chiều dài của DFT bằng cách bù thêm số 0 vào cuối tín hiệu rời rạc trước khi tính DFT.

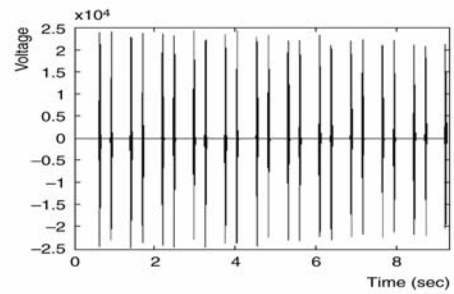
Ví dụ sau đây minh họa một ứng dụng của DFT trong việc phân tích phổ tín hiệu điện tâm đồ (ECG):

Hình vẽ (a) là đồ thị của 11 nhịp tim của một bệnh nhân. 11 nhịp tim này xuất hiện trong khoảng thời gian 9 giây, tương đương với 11/9 = 1.22 nhịp trong một giây, hay 73 nhịp trong một phút.

Hình (b) là chi tiết nửa đầu của nhịp tim thứ tư.

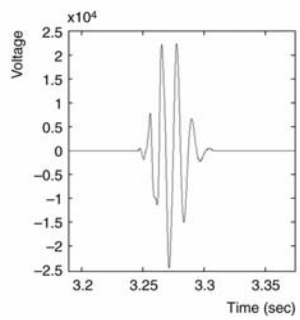
Hình (c) là một đoạn phổ biên độ DFT có được sau khi lấy mẫu đoạn 11 nhịp tim (a) với tần số lấy mẫu là 8 kHz. Nhìn (c) ta thấy có hai điểm biên độ cao nhất xuất hiện ở tần số 88 Hz và 235 Hz.

Để tìm hiểu phổ kỹ hơn, ta tính DFT của tín hiệu ở hình (b)- phổ này thể hiện ở hình (d), ở đây ta thấy rõ hai điểm biên độ cao nhất ở tần số 88 Hz và 235 Hz bên trong mỗi nhịp tim. Tuy nhiên, ta không thấy tần số lặp lại nhịp tim là 1.22 Hz trong DFT hình (c).

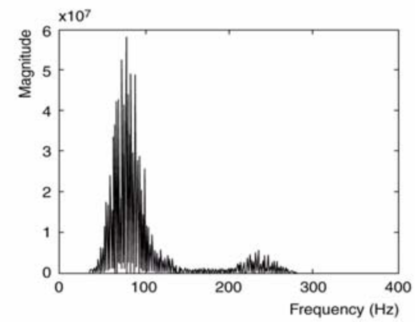


(a) Eleven Heartbeats

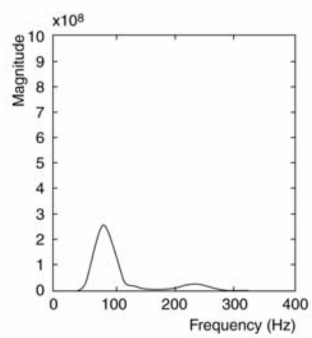
Hình (e) giải thích rõ hơn điều này. Nó là phiên bản mở rộng của các đỉnh nhọn trong dải tần từ 60 Hz đến 100 Hz. Trong khi tần số 1.22 Hz quá nhỏ nên không thấy rõ trong hình (c) thì trong hình (e) này, ta thấy rõ các hài của tần số 1.22 Hz và thấy rõ khoảng cách giữa hai đỉnh nhọn là 1.22 Hz.



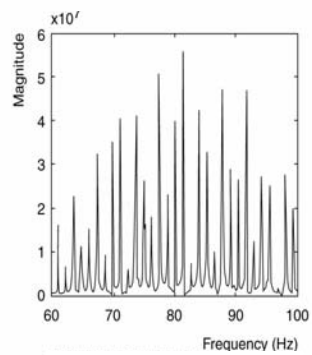
(b) Heartbeat Detail



(a) Magnitude Spectrum of Eleven Heartbeats



(b) Magnitude Spectrum of Heartbeat Detail



5.3.2 Tính tín hiệu ra hệ thống rời rạc LTI

Tín hiệu ra hệ thống rời rạc LTI được tính bằng cách chập tín hiệu vào với đáp ứng xung của hệ thống:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Ta có hai cách để tính tổng chập này: một là tính trực tiếp, hai là tính thông qua tổng chập vòng như phân tích trong mục 5.2.4. Cách tính qua tổng chập vòng sẽ có lợi hơn về mặt thời gian. Lý do là tổng chập vòng có thể tính thông qua DFT, mà DFT có thể được tính nhanh nhờ thuật toán tính nhanh FFT.

Để tính y[n], ta thực hiện theo các bước sau đây:

- Kéo dài x[n] đến độ dài $N = N_x + N_h - 1$

- Kéo dài h[n] đến độ dài $N = N_x + N_h - 1$
- Tính DFT của x[n] N mẫu, ta được X[k]
- Tính DFT của h[n] N mẫu, ta được H[k]
- Nhân X[k] với H[k], ta được Y[k]:

$$Y[k] = X[k].H[k]$$

- Tính DFT ngược của Y[k], ta được y[n]

Việc tính DFT và DFT ngược được thực hiện nhờ một thuật toán tính nhanh DFT, gọi là *FFT (Fast Fourier Transform)*. Phần sau sẽ trình bày về thuật toán FFT.

5.4 TÍNH NHANH DFT BẰNG THUẬT TOÁN FFT

DFT được ứng dụng rộng rãi trong xử lý tín hiệu rời rạc/ số nên nhiều nhà toán học, kỹ sư… đã rất quan tâm đến việc rút ngắn thời gian tính toán. Năm 1965, Cooley và Tukey đã tìm ra thuật toán tính DFT một cách hiệu quả gọi là thuật toán FFT. Cần lưu ý FFT không phải là một phép biến đổi mà là một thuật toán tính DFT nhanh và gọn hơn.

Để đánh giá hiệu quả của thuật toán, ta sử dụng số phép tính nhân và cộng phức. Số phép nhân và cộng phức liên quan trực tiếp đến tốc độ tính toán khi thuật toán được thực hiện trên các máy tính hay là các bộ xử lý chuyên dụng.

5.4.1 Hiệu quả tính toán của FFT

Công thức tính DFT của dãy dài N:

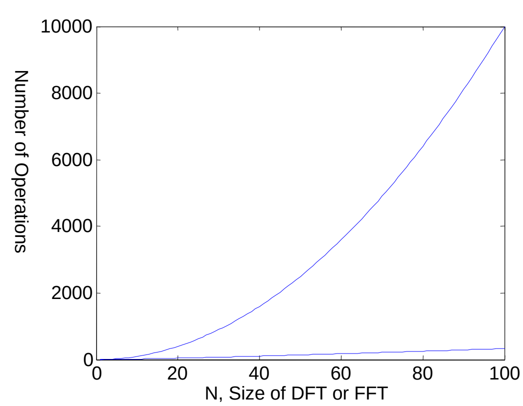
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W^{kn}$$

Qua đây ta thấy để tính mỗi giá trị DFT ta cần N phép nhân và cộng phức. Để tính toàn bộ DFT ta cần N^2 phép nhân và cộng phức.

Tuy nhiên, nếu tính DFT nhờ thuật toán FFT thì số phép nhân và cộng phức giảm xuống chỉ còn $\frac{N}{2}\log_2 N$.

Ví dụ như $N = 2^{10} = 1024$ thì nếu tính trực tiếp DFT cần $N^2 = 2^{20} = 10^6$ phép nhân và cộng phức, trong khi tính qua FFT thì số phép nhân và cộng phức giảm xuống chỉ còn $\frac{N}{2}\log_2 N =$ 5120. Số phép tính giảm đi gần 200 lần!

Hình sau cho thấy rõ hiệu quả của thuật toán FFT:



Có nhiều thuật toán FFT khác nhau bao gồm FFT phân chia theo thời gian và FFT phân chia theo tần số. Trong phần này ta tập trung vào thuật toán FFT cơ số 2 ($N = 2^i$ where i is an integer) phân chia theo thời gian.

5.4.2 Nguyên tắc của FFT

Nguyên tắc cơ bản mà các thuật toán FFT đều dựa vào là phân chia DFT N mẫu thành các DFT nhỏ hơn một cách liên tục:

Với N = 2^i, đầu tiên ta phân chia DFT N mẫu thành các DFT $\frac{N}{2}$ mẫu, sau đó phân chia DFT $\frac{N}{2}$ mẫu thành DFT $\frac{N}{4}$ mẫu và cứ tiếp tục như thế cho đến khi được các DFT dài N = 2. Việc tính DFT nhỏ hơn rõ ràng sẽ cần ít phép tính nhân và cộng phức hơn.

Trước tiên, chia $x[n]$ thành các dãy con chẵn và lẻ:

$$X[k] = \sum_{n even} x[n]W^{kn} + \sum_{n odd} x[n]W^{kn}$$

Đặt $n = 2m$ với n chẵn và $n = 2m+1$ với n lẻ:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]W^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]W^{k(2m+1)} =$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m](W^2)^{mk} + W^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1](W^2)^{mk} =$$

$$X[k] = X_e[k] + W^k X_o[k] = G[k] + W^k H[k]$$

$X_e[k]$ và $X_o[k]$ là DFT $\frac{N}{2}$ mẫu.

Tiếp theo chia dãy con $\frac{N}{2}$ mẫu là x[2m] làm đôi bằng cách đặt $m = 2p$:

$$X_e[k] = \sum_{p=0}^{\frac{N}{4}-1} x[4p](W^4)^{kp} + W^{2k} \sum_{p=0}^{\frac{N}{4}-1} x[4p+2](W^4)^{kp} =$$

Thực hiện tương tự như vậy cho dãy con x[2m+1]

Ví dụ: N = 8

Quá trình phân chia DFT 8 mẫu thành các DFT nhỏ hơn được minh họa trên lưu đồ.

Đầu tiên, chia x[n] thành 2 dãy con, dãy thứ nhất là dãy chẵn x[0], x[2], x[4], x[6] và dãy thứ hai là dãy lẻ x[1], x[3], x[5], x[7].

Tiếp theo, chia dãy chẵn thành 2 dãy con, dãy thứ nhất là x[0], x[4] và dãy thứ hai là x[2], x[6].

Tương tự, dãy lẻ được chia thành 2 dãy con, là dãy x[1], x[5] và dãy x[3], x[7].

Các DFT 2 mẫu được tính đơn giản như sau:

$$G[k] = \sum_{n=0}^{1} g[n]W^{nk}, \quad 0 \le k \le 1, \quad W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow G[0] = g[0]W^{0.0} + g[1]W^{1.0} = g[0] + g[1] \qquad \text{(chỉ cần phép cộng và trừ)}$$

$$G[1] = g[0]W^{0.1} + g[1]W^{1.1} = g[0] - g[1]$$

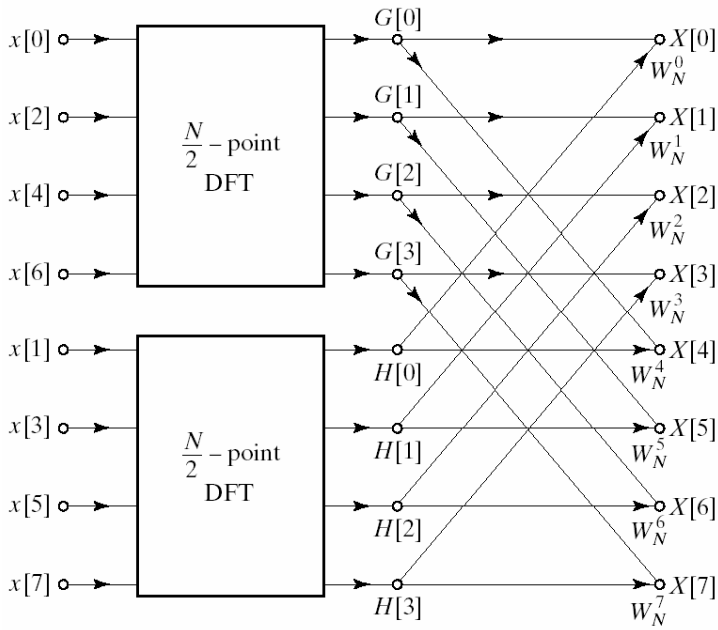
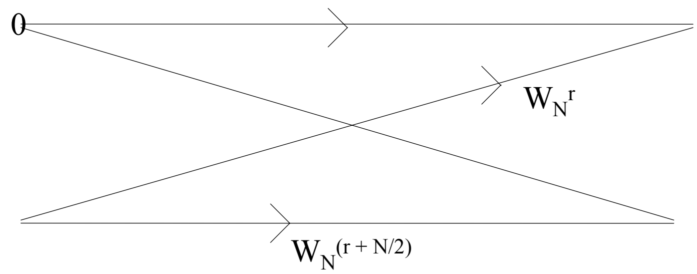


Figure 9.3 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an N-point DFT computation into two ($N/2$)-point DFT computations ($N = 8$).

FFT cơ sở:

A “Butterfly”



Lưu ý: $W_N^{(r+N/2)} = W_N^{N/2}\, W_N^r = -1\ W_N^r = -\ W_N^r$, do đó có thể vẽ lại lưu đồ FFT đơn giản như sau:

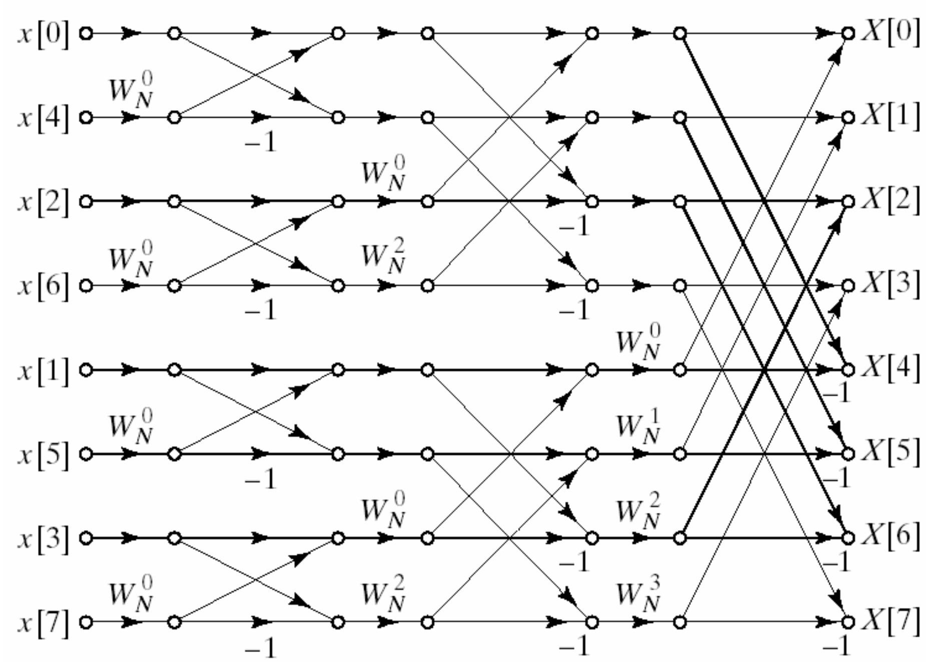


Figure 9.10 Flow graph of 8-point DFT using the butterfly computation of Figure 9.9.

Phụ lục 1

Summary: The Common Types of Fourier Transforms

	Continuous in Time $x(t)$ = Aperiodic in Frequency	Discrete in Time $x[n]$ = Periodic in Frequency
Periodic in Time, = Discrete in Frequency	**Fourier Series (FS):** $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	**Discrete Fourier Series (DFS) and Discrete Fourier Transform (DFT):** $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1$ $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, 0 \le n \le N-1$ where $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.
Aperiodic in Time, = Continuous in Frequency	**Fourier Transform (FT):** $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}dt$	**Discrete-Time Fourier Transform (DTFT):** $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$

Phụ lục 2

Some Fourier Relationships

The Fourier transform is the Laplace transform evaluated on the $j\infty$ axis.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt\right]_{s=j\omega}$$

The discrete-time Fourier transform is the z-transform evaluated around the unit circle.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^{-n}\right]_{z=e^{j\Omega}}$$

Discrete-time periodic signals can also be described by a *Fourier Series expansion*:

$$x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \text{synthesis equation}$$

and

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \qquad \text{analysis equation}$$

then using the DTFT of the impulse train, $P(\Omega)$ that we previously found, the DTFT of an arbitrary discrete-time periodic signal can be found from $X_0(\Omega)$ the DTFT of one period $x_0[n]$

$$X(\Omega) = X_0(\Omega)\left(\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})\right)$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_k X_0(\frac{2\pi k}{N})\delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

The DFT is simply a scaled version of the terms of one period of the discrete time Fourier transform for a periodic sequence:

$$X[k] = X_0(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1$$

for $\Omega = \frac{2\pi k}{N}, k = 0,1,\ldots,N-1$, i.e. only look at the N distinct sampled frequencies of $X_0(\Omega)$.

Also important, the orthogonality of exponentials:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = N\delta[k]$$

where $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.