ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành 2 **Thời gian làm bài: 90 phút**

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2023^n}{(2n)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^n$$

Câu 3. (1 điểm) Khai triển $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{5}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$.

Câu 4. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $x\sqrt{1+y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

b) $(x^2+1)y' \cos y - 2x \sin y = 2023x(x^2+1)$

c) $y'' + y' - 1 = e^{-x}$.

Câu 5. (1 điểm)Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau

$$f(t) = e^t(\cos t + t^2 \sin 2t)$$

Câu 6. (1 điểm). Giải phương trình vi phân

$$y'' + 3ty' - 6y = 1$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0$.

Câu 7. (1 điểm). Chứng minh rằng mọi nghiệm $y(x)$ của phương trình vi phân

$$y' = (\cos x - \pi)\, y + \frac{1}{x+1} - 2$$

trên đoạn $[0; +\infty)$ đều bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|y(x)| < M \text{ với mọi } x \in [0; +\infty)\,.$$

——— ***Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi*** ———

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Thi thử Giữa kỳ 20222

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1.

a) Ta xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2023^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

+) Ta có $a_n = \frac{2023^n}{(2n)!} > 0 \ \forall n \geq 1$, nên chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

+) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2023}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$

+) Do đó theo tiêu chuẩn D'Alembert, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2023^n}{(2n)!}$ hội tụ.

b) +) Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ là chuỗi đan dấu

+) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ là dãy giảm, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \geq 1$

+) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow$ (1) hội tụ (Theo định lý Lebnitz)

Câu 2.

Điều kiện xác định: $x \neq \frac{1}{2}$

Đặt $t = \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$, khi đó chuỗi hàm trở thành chuỗi lũy thừa $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n \quad (1)$, với $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n} \quad \forall n \geq 2$

Ta có $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n}\right| = 1$

+) Với $t \in (-1, 1)$ thì chuỗi (1) hội tụ.

+) Với $t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ thì chuỗi (1) không hội tụ.

+) Tại $t = 1$ thì chuỗi (1) thành: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

Xét $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x} > 0 \quad \forall x \geq 2$, là hàm số liên tục, đơn điệu giảm trên $[2, +\infty]$

Lại có $f(n) = a_n \ \forall n \geq 2$, và $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} = 0$

Mặt khác, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}$ hội tụ (do $\alpha = 2 > 1$)

$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ (theo tiêu chuẩn tích phân).

+) Tại $t = -1$ thì chuỗi (1) thành: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$

Ta có $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$ là chuỗi đan dấu vì $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n} > 0, \forall n \geq 2$

Có $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} < \frac{1}{n\ln^2 n} = a_n, \forall n \geq 2$ nên $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy đơn điệu giảm

Lại có $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} = 0$

Do đó theo định lý Leibnitz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$ hội tụ

Vậy với t $\in [-1,1]$ thì chuỗi (1) hội tụ

Xét $-1 \le t \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{x+1}{2x-1} \le 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$

Vậy miền hội tụ của chuỗi số là $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$

Câu 3.

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

$$\cos\frac{\pi x}{5} = \cos\frac{\pi}{5}(t+1) = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}t - \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}t.$$

Thay x bằng $\frac{\pi}{5}t$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta được

$$\cos\frac{\pi}{5}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}t\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin\frac{\pi}{5}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi x}{5} &= \cos\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}t\right)^{2n}}{(2n)!} - \sin\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \cos\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n}}{(2n)!}(x-1)^{2n} - \sin\frac{\pi}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\end{aligned}$$

Câu 4.

a) $x\sqrt{1+y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$ (1)

+) **<u>TH1:</u>** $\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

+) Thay $x = \pm 1$ vào (1) ta thấy thỏa mãn ($x = \pm 1 \Rightarrow dx = 0$)

$\Rightarrow x = \pm 1$ là nghiệm kì dị của (1)

+) **<u>TH2:</u>** $\sqrt{1-x^2} \ne 0$

+) (1) $\Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy$

$\Leftrightarrow \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) = \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ + C

Vậy (1) có nghiệm kì dị là $x = \pm 1$ và có tích phân tổng quát là:

$$\sqrt{1-x^2} = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) + C$$

b) $(x^2+1)y'\cos y - 2x\sin y = 2023x(x^2+1)$

$\Rightarrow y'\cos y - \dfrac{2x}{x^2+1}\sin y = 2023x \qquad (1)$

Đặt $u = \sin y \Rightarrow u' = y'\cos y$

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$u' - \dfrac{2x}{x^2+1}u = 2023x \qquad (2)$

Xét thừa số tích phân $\varphi(x) = e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{\int -\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}} = \dfrac{1}{x^2+1}$

Nhân cả 2 vế của (2) với $\varphi(x)$, ta được: $\dfrac{u'}{x^2+1} - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}u = \dfrac{2023x}{x^2+1}$

hay $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{x^2+1}\right)}{dx} = \dfrac{2023x}{x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{u}{x^2+1} = \displaystyle\int \dfrac{2023x}{x^2+1}dx = \dfrac{2023}{2}\displaystyle\int \dfrac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{2023}{2}\ln(x^2+1) + C$

$\Rightarrow \sin y = \dfrac{2023(x^2+1)\ln(x^2+1)}{2} + C(x^2+1)$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\sin y - \frac{2023(x^2+1)\ln(x^2+1)}{2} - C(x^2+1) = 0$$

c) Xét phương trình vi phân thuần nhất: $y'' + y' = 0 \quad (2)$

Ta xét phương trình đặc trưng của (2) : $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ và $\lambda = -1$

Nghiệm tổng quát của (2) là: $\overline{y} = C_1 + C_2e^{-x}$

Nghiệm của phương trình ban đầu có dạng $y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$. Ta có $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ -C_2'(x)e^{-x} = 1 + e^{-x} \end{cases}$$

Từ đó, ta có thể giải được $C_1(x) = D_1 + x - e^{-x}$ và $C_2(x) = D_2 - x - e^{x}$

Vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là $y = D_1 + x - e^{-x} + D_2e^{-x} - xe^{-x} - 1$ hay

$$y = A_1 + x + A_2e^{-x} - xe^{-x}$$

Câu 5.

+) $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$

+) $\mathcal{L}\{t^2\sin 2t\} = (\dfrac{2}{s^2+4})^{(2)} = \dfrac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$

+) $\mathcal{L}\{\cos t + t^2\sin 2t\} = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$

+) $\mathcal{L}\{e^t(\cos t + t^2\sin 2t\} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{12(s-1)^2-16}{((s-1)^2+4)^3}$

Câu 6.

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s) \\
\mathcal{L}\{ty'\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathcal{L}\{y\}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s) \\
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) \\
\mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình ban đầu, ta được

$$s^2Y(s) + 3\left[-sY'(s) - Y(s)\right] - 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)Y(s)=\frac{-1}{3s^2}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Giải phương trình vi phân này, ta tìm được

$$Y(s)=\frac{1}{s^3}+C\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$$

Để $Y(s)$ là phép biến đổi Laplace của hàm $y(t)$ nào đó thì $\lim\limits_{s\to+\infty}Y(s)=0$. Điều này chỉ xảy ra khi $C=0$. Do đó, $Y(s)=\dfrac{1}{s^3}$ và $y(t)=\dfrac{t^2}{2}$

Câu 7.

Ta có

$$y'+(\pi-\cos x)\,y=\frac{1}{x+1}-2$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một, đặt $y(0)=y_0$, ta có

$$y(x)=e^{-\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{1}{t+1}-2\right)e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+y_0\right)$$

Do đó, ta suy ra

$$|y(x)|=\frac{\left|\int\limits_0^x\left(\frac{1}{t+1}-2\right)e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+y_0\right|}{e^{\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}}\le\frac{\left|\int\limits_0^x\left(\frac{1}{t+1}-2\right)e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right|+|y_0|}{e^{\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}}$$

$$\Rightarrow|y(x)|\le\frac{\int\limits_0^x\left(2-\frac{1}{t+1}\right)e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+|y_0|}{e^{\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}}$$

Vì $\cos t-\dfrac{1}{t+1}\le\cos t\le1\le\pi-2$ nên ta có

$$0\le2-\frac{1}{t+1}\le\pi-\cos t\,\forall\,0\le t\le x$$

Do đó, ta suy ra

$$|y(x)|\le\frac{\int_0^x(\pi-\cos t)\,e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+|y_0|}{e^{\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}}=\frac{\left(e^{\int\limits_0^t(\pi-\cos s)\mathrm{d}s}\right)\Bigg|_0^x+|y_0|}{e^{\int\limits_0^x(\pi-\cos t)\mathrm{d}t}}$$

$$\Rightarrow|y(x)|\le\frac{e^{\int_0^x(\pi-\cos t)\,\mathrm{d}t}+|y_0|-1}{e^{\int_0^x(\pi-\cos t)\,\mathrm{d}t}}=\frac{e^{\pi x-\sin x}+|y_0|-1}{e^{\pi x-\sin x}}$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\pi x - \sin x} = +\infty$ nên ta suy ra $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\pi x - \sin x} + |y_0| - 1}{e^{\pi x - \sin x}} = 1$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{e^{\pi x - \sin x} + |y_0| - 1}{e^{\pi x - \sin x}}$. Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ nên ta suy ra tồn tại số $A > 0$ đủ lớn để

$$f(x) < 2 \text{ với mọi } x > A.$$

Mặt khác, vì hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; A]$ nên nó có giá trị lớn nhất trên đó. Tức là $f(x) < B$ với mọi $x \in [0; A]$. Từ đó, ta suy ra

$$|y(x)| = f(x) < \max\{2; B\} = M \text{ với mọi } x \in [0; +\infty)$$

Bài toán được chứng minh.