Đề thi thử cuối kỳ môn Đại số tuyến tính - Học kỳ: 20211

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 60 phút

(Đề thi gồm 40 câu hỏi trắc nghiệm)

Câu 01. Khi nào thì ma trận A khả nghịch?

(A) $det(A) = 1$ (B) $det(A) \neq 1$ (C) $det(A) = 0$ (D) $det(A) \neq 0$

Câu 02. Cho p, q, r là 3 mệnh đề trong đó r là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là đúng

(A) $(p \vee q) \to r$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
(B) $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \to \bar{r}$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
(C) $(p \vee \bar{r}) \to q$ luôn có giá trị chân lý bằng 0
(D) $(\bar{p} \wedge r) \to q$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
(E) $(\bar{p} \wedge q) \to r$ luôn có giá trị chân lý bằng 0

Câu 03. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nào sau đây là đơn ánh

(A) $f(x) = x^3|x| + 2$ (B) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$
(C) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (D) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Câu 04. Cho các hàm số thực f, g, h xác định trên $\mathbb{R}$ và ba tập hợp
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}; C = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$.
Khi đó $A \setminus (B \cap C)$ là tập nghiệm của phương trình nào dưới đây

(A) $\dfrac{f(x)}{h(x)+g(x)} = 0$ (B) $\dfrac{g(x).h(x)}{f(x)} = 0$
(C) $\dfrac{f(x)}{h(x).g(x)} = 0$ (D) $\dfrac{f(x)}{g(x)^2+h(x)^2} = 0$

Câu 05. Phép toán nào sau đây không là phép toán 2 ngôi

(A) Phép chia trên tập số thực
(B) Phép tích ánh xạ trên tập các ánh xạ từ A vào A(Akhác rỗng)
(C) Phép nhân trên tập số tự nhiên
(D) Phép cộng trên tập số phức

Câu 06. Cho $A \to B \cap C$ là mệnh đề sai.Khả năng nào sau đâu không thể xảy ra:

(A) A là mệnh đề đúng (B) B và C là 2 mệnh đề sai
(C) B là mệnh đề đúng và C là mệnh đề sai (D) B và C là hai mệnh đề đúng

Câu 07. Ma trận nào là ma trận đối xứng trong các ma trận sau

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & -3 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 08. Tính định thức sau: $\begin{vmatrix} n+2 & n+1 \\ n-1 & n-2 \end{vmatrix}$

(A) -2 (B) -3 (C) -1 (D) 2 (E) 1

Câu 09. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

(A) Nếu một ma trận là ma trận đối xứng thì ma trận đó chéo hóa được.
(B) Nếu một ma trận là ma trận không khả nghịch thì ma trận đó chéo hóa được.
(C) Nếu một ma trận là ma trận khả nghịch thì ma trận đó chéo hóa được.
(D) Nếu một ma trận là ma trận chéo hóa được thì ma trận đó khả nghịch.

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2022}$

(A) 5 (B) 3 (C) 0 (D) 4

Câu 11. Cho A là một ma trận 3×3 có các trị riêng là $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Tính $\det(A^2)$

(A) 810 (B) 550 (C) 800 (D) 900

Câu 12. Cho ánh xạ f :$R \to R$ có $f(x) = x^2 + x + 1$ và tập A=[0,1] . Tính f(A)

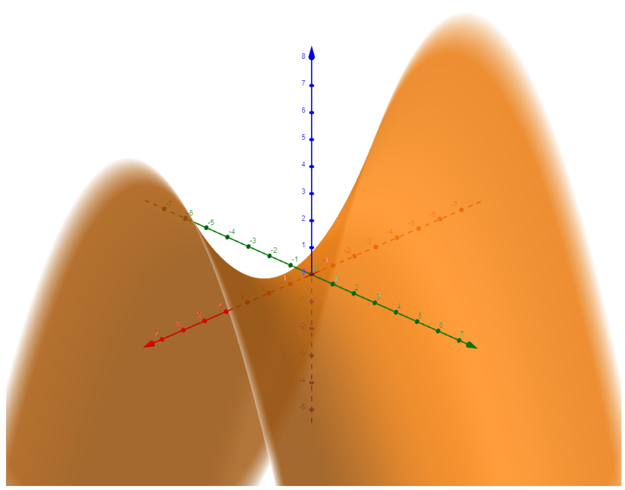
(A) [3,5] (B) [1,3] (C) [0,1] (D) [0,3]

Câu 13. Tìm x thoả mãn: $X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2$

(A) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Câu 14. Cho mặt bậc hai có hình vẽ như sau:



Đâu có thể là dạng chính tắc của mặt bậc hai trên

(A) $x_3 = \frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{4}$ (B) $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{8} - \frac{x_3^2}{12} = 1$ (D) $x_3 = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4}$

Câu 15. Số phát biểu đúng về hệ phương trình Cramer:
(1) Ma trận hệ số là ma trận vuông
(2) Định thức của ma trận hệ số khác 0
(3) Hệ phương trình có vô số nghiệm
(4) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất
(5) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là hệ tầm thường

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 0 (E) 1

Câu 16. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : M_2 \to M_2$ xác định bởi $f(X) = AX$ với ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Biết f có hai trị riêng λ_1 và λ_2. Tính $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$

(A) 18 (B) 10 (C) 25 (D) 17

Câu 17. Cho hệ $\{v_1 = (\alpha, 1, 2), v_2 = (5, \alpha, 6), v_3 = (7, 8, 4)\}$. Tổng các giá trị α để hệ này không độc lập tuyến tính là:

(A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) $\frac{35}{2}$ (D) 17 (E) $\frac{33}{2}$

Câu 18. Đâu không phải là một ánh xạ tuyến tính ?

(A) $F : V \to W\,;\, F(v) = O_W \quad \forall v \in V$
(B) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\, F(x, y) = (x+1, y+2) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
(C) $F : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})\,;\, F(X) = \mathbf{A}X \quad \forall X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,\, \mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
(D) $F : V \to V\,;\, F(v) = v \quad \forall v \in V$

Câu 19. Tính tổng các nghiệm của phương trình sau: $\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = 2$

(A) 5 (B) 3 (C) 4 (D) 6

Câu 20. Tìm số chiều của không gian sinh bởi: $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 5, 6), v_3 = (7, 8, 9)\}$

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 0

Câu 21. Cho hệ $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (1, 5, -4, 3)$, $v_3 = (-2, -2, -11, 6)$, $v_4 = (3, -1, 1, 6)$
Hệ con độc lập tuyến tính tối đa của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có mấy vector?

(A) 4 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Câu 22. Cho một ánh xạ tuyến tính: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; F(x, y, z) = (-4y + 2x + 5z, -6z + 3y + x)$ với hai 2 cơ sở cơ bản của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Đâu là ma trận của ánh xạ tuyến tính trên.

(A) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Câu 23. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 2 (E) 1

Câu 24. Cho phương trình sau : $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$, biết rằng phương trình này có 1 nghiệm là $z_1 = -1 + i$. Tính tổng các nghiệm còn lại:

(A) $5 - 4i$ (B) $-3 - i$ (C) $3 - 5i$ (D) $6 - 2i$

Câu 25. Cho φ là dạng song tuyến tính trên không gian V và có ma trận A đối với cơ sở nào đó của V. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây?

(a) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì φ là dạng toàn phương trên V.

(b) Nếu A chéo hóa trực giao được thì φ là dạng toàn phương trên V.

(c) Với $x, y \in V$ bất kì, $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

(d) Nếu $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \forall x, y \in V \Rightarrow A$ là ma trận đối xứng.

(A) 1 (B) 4 (C) 3 (D) 0 (E) 2

Câu 26. Cho dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \alpha x_2^2 + (2\alpha - 4)x_2x_3 + x_3^2$$

Giả sử ω là dạng toàn phương xác định dương, nhận xét nào dưới đây là đúng ?

(A) $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ (B) $\alpha < 0$

(C) $\alpha > 5$ (D) $\alpha \in \emptyset$

Câu 27. Trên không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận của dạng song tuyến tính

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$$

với cơ sở $B = \{e_1 = (1,0,1); e_2(1,0,-1); e_3(0,1,1)\}$.

(A) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 28. Các ánh xạ dưới đây, có bao nhiêu ánh xạ là ánh xạ tuyến tính?

(a) $f : M_n \to \mathbb{R}, f(X) = \det(X)$ với M_n là không gian vectơ các ma trận vuông cấp n.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to P_2(x), f(a,b) = x^2 + ax + b$ với $P_2(x)$ là không gian vectơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2.

(c) Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f : M_{3\times4} \to M_{2\times4}, f(X) = AX$

(d) $f : P_n(x) \to P_{n+1}(x), f[p(x)] = \int p(x)dx$

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x + 3y + 2z + 1,\ x - y)$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 29. Nhận dạng mặt bậc hai có phương trình trong hệ tọa độ Descartes vuông góc

$$5x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_2x_3 = 20$$

(A) Elipsoid
(B) Hyperboloid hai tầng
(C) Mặt nón
(D) Hyperboloid một tầng

Câu 30. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vector $\{u_1 = (1,2,3,0), u_2 = (2,1,2,2), u_3 = (4,1,3,-2), u = (m,1,0,m-3)\}$. Tìm m để $u \in span\{u_1, u_2, u_3\}$

(A) $\frac{16}{5}$ (B) -3 (C) $-\frac{16}{5}$ (D) $-\frac{12}{5}$ (E) 3

Câu 31. Với V và W là các không gian vectơ trên trường K, có $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Cho các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng:

(a) Nếu f biến cơ sở của V thành độc lập tuyến tính thì f là đơn cấu

(b) Nếu $\dim V = \dim W$ và f là đơn cấu thì f cũng là toàn cấu

(c) Ma trận của tổng các ánh xạ tuyến tính (nếu có) là tổng các ma trận tương ứng của các ánh xạ

(d) Nếu f là đẳng cấu thì ánh xạ $g = \alpha f^\beta$ với $\alpha, \beta \in K$ cũng là đẳng cấu

(e) f có ma trận A. Ánh xạ tuyến tính g có ma trận B. Nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính h sao cho $h(x) = g(f(x))$ với $x \in V$. Thì h có ma trận là $B.A$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 32. Cho $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \mapsto (2x - y + z, mx - 3y, x + ny - z) \end{array}$. Có bao nhiêu cặp giá trị nguyên không âm của m và n để $f^3 = f \circ f \circ f$ không là đơn cấu

(A) vô số (B) 2 (C) 1 (D) 0

Câu 33. Trong không gian $\mathbb{R}$ cho 3 vector $\{v_1 = (2,3,4), v_2 = (3,5,7), v_3 = (4,4,6)\}$ và phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$
Gọi $A = [a_{ij}]_{3x3}$ là ma trận của f theo cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$. Tính tổng $T = a_{11} + a_{21} + a_{31}$

(A) 22 (B) 50 (C) 227 (D) 46 (E) -176

Câu 34. Trong $\mathbb{R}^3$ với cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, cho dạng toàn phương có biểu thức tọa độ:

$$\omega(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$$

Với tích vô hướng Euclid, xác định cơ sở trực chuẩn B để ω có dạng chính tắc:

(A) $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(\frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right) \right\}$

(B) $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

(C) $B = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (1, 0, 0) \right\}$

(D) $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right), \left(\frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right) \right\}$

Câu 35. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\begin{cases} (m+1)x_1 + (m+3)x_3 + (m-2)x_3 = 5 \\ (m+2)x_1 + (m-1)x_2 - (m-4)x_3 = 2 \\ (m-1)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = -3 \end{cases}$

(A) $m = -6$ (B) $m = 2$ (C) $m = \frac{5}{3}$ (D) Không tồn tại m

Câu 36. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ cho các vector x, y. Biết $x \perp 2x - y$, $\|x\| = 3$, $y - 5x = (-1, 12, 3, -1)$ và hình chiếu của y lên $span\{x\}$ là $(2, -4, 0, 4)$. Xác định vector $2x - y$.

(A) $(2, -6, 3, -5)$
(B) $(-2, -6, -3, -5)$
(C) $(4, 2, 3, 9)$
(D) $(1, -2, 0, 2)$

Câu 37. Cho $A = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$. Tính A^n:

(A) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} sin(n\alpha) & -cos(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} sin(n\alpha) & -cos(n\alpha) \\ cos(n\alpha) & sin(n\alpha) \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$
(E) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ -sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$

Câu 38. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide cho $W = span\{(1,0,3); (-2,2,0); (4,-2,6)\}$ và vector $v = (1,8,8)$. Tính $\|v'\|$ biết $v' \in W$ sao cho $\|v' - v\|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $\sqrt{110}$
(B) $3\sqrt{5}$
(C) $\sqrt{190}$
(D) $\sqrt{10}$
(E) $\sqrt{19}$

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $\{O, e_1, e_2\}$ cho phương trình của đường bậc hai $\mathcal{T}$ như sau:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Để $\mathcal{T}$ có dạng là một đường elip thực, thì bộ ba số (a,b,c) nào dưới đây có thể thỏa mãn:

(A) $a = 2, b = 3, c = 1$
(B) $a = 1, b = 2, c = 2$
(C) $a = 4, b = 5, c = 1$
(D) $a = 3, b = 6, c = 2$

Câu 40. Gọi α là giá trị lớn nhất và β là giá trị nhỏ nhất của $Q = x^2 + y^2 + z^2$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$. Biết $3x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2 = 7$, tính $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

(A) 5
(B) 4
(C) 2
(D) 3
(E) 6

ĐÁP ÁN

01. D	09. A	17. B	25. E	33. B
02. A	10. C	18. B	26. A	34. A
03. B	11. D	19. D	27. D	35. D
04. D	12. B	20. C	28. B	36. B
05. A	13. B	21. A	29. A	37. D
06. D	14. A	22. A	30. B	38. A
07. E	15. A	23. D	31. C	39. C
08. B	16. D	24. B	32. C	40. B

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Câu 01. Khi nào thì ma trận A khả nghịch?

A. $det(A) = 1$ B. $det(A) \neq 1$ C. $det(A) = 0$ D. $det(A) \neq 0$

Lời giải. Đáp án đúng D. □

Câu 02. Cho p, q, r là 3 mệnh đề trong đó r là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $(p \vee q) \to r$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
B. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \to \bar{r}$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
C. $(p \vee \bar{r}) \to q$ luôn có giá trị chân lý bằng 0
D. $(\bar{p} \wedge r) \to q$ luôn có giá trị chân lý bằng 1
E. $(\bar{p} \wedge q) \to r$ luôn có giá trị chân lý bằng 0

Lời giải. Đáp án đúng A. □

Câu 03. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nào sau đây là đơn ánh

A. $f(x) = x^3|x| + 2$ B. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$
C. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ D. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Lời giải. Đáp án đúng B. Số tập con của A là $2^{10} = 1024$ □

Câu 04. Cho các hàm số thực f, g, h xác định trên $\mathbb{R}$ và ba tập hợp
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}; C = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$.
Khi đó $A \setminus (B \cap C)$ là tập nghiệm của phương trình nào dưới đây

A. $\dfrac{f(x)}{h(x)+g(x)} = 0$ B. $\dfrac{g(x).h(x)}{f(x)} = 0$
C. $\dfrac{f(x)}{h(x).g(x)} = 0$ D. $\dfrac{f(x)}{g(x)^2+h(x)^2} = 0$

Lời giải. Đáp án đúng D. □

Câu 05. Phép toán nào sau đây không là phép toán 2 ngôi

A. Phép chia trên tập số thực
B. Phép tích ánh xạ trên tập các ánh xạ từ A vào A(Akhác rỗng)
C. Phép nhân trên tập số tự nhiên
D. Phép cộng trên tập số phức

Lời giải. Đáp án đúng A. □

Câu 06. Cho $A \to B \cap C$ là mệnh đề sai.Khả năng nào sau đâu không thể xảy ra:

A) A là mệnh đề đúng
B) B và C là 2 mệnh đề sai
C) B là mệnh đề đúng và C là mệnh đề sai
D) B và C là hai mệnh đề đúng

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng D. Vì $A \to B \cap C$ là mệnh đề sai nên ta có : A đúng và $B \cap C$ sai
$\Rightarrow$ B và C đúng là không thể xảy ra □

Câu 07. Ma trận nào là ma trận đối xứng trong các ma trận sau

A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & -3 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng E. □

Câu 08. Tính định thức sau: $\begin{vmatrix} n+2 & n+1 \\ n-1 & n-2 \end{vmatrix}$

A) -2
B) -3
C) -1
D) 2
E) 1

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng B. $\begin{vmatrix} n+2 & n+1 \\ n-1 & n-2 \end{vmatrix} = (n^2-4) - (n^2-1) = -3$ □

Câu 09. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A) Nếu một ma trận là ma trận đối xứng thì ma trận đó chéo hóa được.
B) Nếu một ma trận là ma trận không khả nghịch thì ma trận đó chéo hóa được.
C) Nếu một ma trận là ma trận khả nghịch thì ma trận đó chéo hóa được.
D) Nếu một ma trận là ma trận chéo hóa được thì ma trận đó khả nghịch.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng A.
Ta giải bằng cách loại trừ đáp án.
Ma trận chéo hóa được hay không không phụ thuộc vào khả năng khả nghịch của một ma trận nên ta có thể loại bỏ mọi đáp án liên quan đến khả nghịch. □

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2022}$

A) 5
B) 3
C) 0
D) 4

Lời giải. Đáp án đúng (C). Ta có :$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z^{2022} = (z^3)^{674} = 1^{674} = 1$
$\Rightarrow$ phần ảo của số phức đã cho là 0 □

Câu 11. Cho A là một ma trận 3×3 có các trị riêng là $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Tính $\det(A^2)$

(A) 810 (B) 550 (C) 800 (D) 900

Lời giải. Đáp án đúng (D).
Ta có: Nếu λ_0 là trị riêng của A thì λ_0^2 là trị riêng của A^2.
Tích các trị riêng của một ma trận bất kỳ bằng với det của ma trận đó.
Vì vậy $\det(A^2) = 5^2 * 3^2 * (-2)^2 = 900$ □

Câu 12. Cho ánh xạ f :$R \to R$ có $f(x) = x^2 + x + 1$ và tập A=[0,1] . Tính f(A)

(A) [3,5] (B) [1,3] (C) [0,1] (D) [0,3]

Lời giải. Đáp án đúng (B). $f(0) = 0; f(1) = 3 \Rightarrow f(A) = [1,3]$ □

Câu 13. Tìm x thoả mãn: $X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2$

(A) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

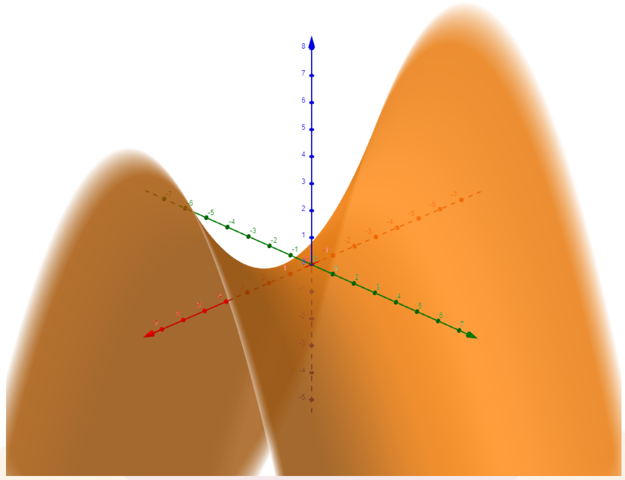
Lời giải. Đáp án đúng (B). $X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2$

$\Rightarrow X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ □

Câu 14. Cho mặt bậc hai có hình vẽ như sau:



Đâu có thể là dạng chính tắc của mặt bậc hai trên

(A) $x_3 = \dfrac{x_1^2}{9} - \dfrac{x_2^2}{4}$ (B) $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} = 1$

(C) $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{8} - \dfrac{x_3^2}{12} = 1$ (D) $x_3 = \dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4}$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Nhận xét: Hình vẽ đó là một mặt Paraboloid - Hyperbolic, có dạng chính tắc là: $x_3 = \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2}$ □

Câu 15. Số phát biểu đúng về hệ phương trình Cramer:
(1) Ma trận hệ số là ma trận vuông
(2) Định thức của ma trận hệ số khác 0
(3) Hệ phương trình có vô số nghiệm
(4) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất
(5) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là hệ tầm thường

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 0 (E) 1

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A). (1), (2), (4) đúng □

Câu 16. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : M_2 \to M_2$ xác định bởi $f(X) = AX$ với ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Biết f có hai trị riêng λ_1 và λ_2. Tính $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$

(A) 18 (B) 10 (C) 25 (D) 17

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (D).
Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của M_2 là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Xét phương trình đặc trưng của f: $\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-3\lambda-4)^2=0 \Rightarrow$ Có hai nghiệm $\lambda_1=-1$ và $\lambda_2=4$ □

Câu 17. Cho hệ $\{v_1=(\alpha,1,2), v_2=(5,\alpha,6), v_3=(7,8,4)\}$. Tổng các giá trị α để hệ này không độc lập tuyến tính là:

(A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) $\frac{35}{2}$ (D) 17 (E) $\frac{33}{2}$

Lời giải. Đáp án đúng (B). Xét ma trận toạ độ hàng của hệ $\{v_1,v_2,v_3\}$

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 2\\ 5 & \alpha & 6\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 2\\ 5 & \alpha & 6\\ 7 & 8 & 4\end{vmatrix}=4\alpha^2-62\alpha+102$$

Để hệ trên không độc lập tuyến tính thì $det(A)=4\alpha^2-62\alpha+102=0$

Theo định lý Viet, tổng các nghiệm của phương trình này là $\frac{62}{4}=\frac{31}{2}$ □

Câu 18. Đâu không phải là một ánh xạ tuyến tính ?

(A) $F: V\to W\,;\, F(v)=O_W \quad \forall v\in V$
(B) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,;\, F(x,y)=(x+1,y+2) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$
(C) $F: M_{n\times 1}(\mathbb{R})\to M_{m\times 1}(\mathbb{R})\,;\, F(X)=\mathbf{A}X \quad \forall X\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,\, \mathbf{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
(D) $F: V\to V\,;\, F(v)=v \quad \forall v\in V$

Lời giải. Đáp án đúng (B).
Ta có nếu F là một ánh xạ tuyến tính thì $F(kv)=kF(v)$ với k là hằng số nên khi ta có khi $k=0$ thì $F(O)=O$
Vì vậy với $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,;\, F(x,y)=(x+1,y+2) \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ta có $F(0,0)=(1,2)\neq(0,0)$ nên F không phải ánh xạ tuyến tính. □

Câu 19. Tính tổng các nghiệm của phương trình sau: $\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}=2$

(A) 5 (B) 3 (C) 4 (D) 6

Lời giải. Đáp án đúng (D). Từ đề bài suy ra :
$(z+1)^2=2(z-1)^2 \Rightarrow z^2+2z+1=2(z^2-2z+1)\Rightarrow z^2-6z+1=0$
Do đó áp dụng định lý viet, ta có $z_1+z_2=6$ □

Câu 20. Tìm số chiều của không gian sinh bởi: $S=\{v_1=(1,2,3), v_2=(4,5,6), v_3=(7,8,9)\}$

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 0

Lời giải. Đáp án đúng C. Gọi A là ma trận toạ độ hàng của hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow dim(S) = r(A) = 2$ □

Câu 21. Cho hệ $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (1, 5, -4, 3)$, $v_3 = (-2, -2, -11, 6)$, $v_4 = (3, -1, 1, 6)$
Hệ con độc lập tuyến tính tối đa của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có mấy vector?

A 4   B 1   C 2   D 3

Lời giải. Đáp án đúng A. Xét ma trận toạ độ hàng của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & -11 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Biến đổi trên hàng của ma trận A ta được $r(A) = 4$
$\Rightarrow$ Hệ con độc lập tuyến tính của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ có nhiều nhất 4 vector. □

Câu 22. Cho một ánh xạ tuyến tính: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $F(x, y, z) = (-4y + 2x + 5z, -6z + 3y + x)$ với hai 2 cơ sở cơ bản của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Đâu là ma trận của ánh xạ tuyến tính trên.

A $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ D $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng A.
Ta đổi lại thứ tự của x, y, z thu được

$$F(x, y, z) = (2x - 4y + 5z, x + 3y - 6z) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận của ánh xạ tuyến tính trên là $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ □

Câu 23. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

A 3   B 4   C 5   D 2   E 1

Lời giải. Đáp án đúng (D). Số ẩn của hệ phương trình: $n = 5$

Ma trận hệ số của hệ phương trình $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là: $n - r(A) = 5 - 3 = 2$ □

Câu 24. Cho phương trình sau : $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$, biết rằng phương trình này có 1 nghiệm là $z_1 = -1 + i$. Tính tổng các nghiệm còn lại:

(A) $5 - 4i$ (B) $-3 - i$ (C) $3 - 5i$ (D) $6 - 2i$

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (B).

Nhận xét $z_1 = -1 + i$ là nghiệm của phương trình thì $z_2 = -1 - i$ cũng là nghiệm của phương trình.
Ta có $(z - z_1)(z - z_2) = (z + 1 - i)(z + 1 + i) = z^2 + 2z + 2$
Chia đa thức ta được $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 == (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$
Phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $-1 - 2i$ và $-1 + 2i$,
Do đó tổng của 3 nghiệm còn lại là :$(-1 - i) + (-1 - 2i) + (-1 + 2i) = -3 - i$ □

Câu 25. Cho φ là dạng song tuyến tính trên không gian V và có ma trận A đối với cơ sở nào đó của V. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây?

(a) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì φ là dạng toàn phương trên V.

(b) Nếu A chéo hóa trực giao được thì φ là dạng toàn phương trên V.

(c) Với $x, y \in V$ bất kì, $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

(d) Nếu $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \forall x, y \in V \Rightarrow A$ là ma trận đối xứng.

(A) 1 (B) 4 (C) 3 (D) 0 (E) 2

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (E).

(a) φ là dạng toàn phương $\Leftrightarrow A$ là ma trận đối xứng $\rightarrow$ **Sai**.

(b) A là chéo hóa trực giao được $\Leftrightarrow A$ là ma trận đối xứng $\rightarrow \varphi$ là dạng toàn phương trên $V \rightarrow$ **Đúng**.

(c) Dễ thấy đây là mệnh đề **Sai**.

(d) Từ vế trái $\Rightarrow \varphi$ là dạng song tuyến tính đối xứng $\Rightarrow A$ là ma trận đối xứng $\rightarrow$ **Đúng**.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

□

Câu 26. Cho dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \alpha x_2^2 + (2\alpha - 4)x_2x_3 + x_3^2$$

Giả sử ω là dạng toàn phương xác định dương, nhận xét nào dưới đây là đúng ?

(A) $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ (B) $\alpha < 0$

(C) $\alpha > 5$ (D) $\alpha \in \varnothing$

Lời giải. Đáp án đúng (A).

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha-2 \\ -1 & \alpha-2 & 1 \end{bmatrix}$

ω là dạng toàn phương xác định dương $\Leftrightarrow$ các định thức con chính của A dương.

- $\Delta_1 = 2 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha-2 \\ -1 & \alpha-2 & 1 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 7\alpha - 5 > 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha < \frac{5}{2}$

Vậy $\alpha \in \left(1, \frac{5}{2}\right)$ □

Câu 27. Trên không gian $\mathbb{R}^3$, tìm ma trận của dạng song tuyến tính

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_3$$

với cơ sở $B = \{e_1 = (1,0,1); e_2(1,0,-1); e_3(0,1,1)\}$.

(A) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng (D).

Ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B là $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở B là $A' = P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ □

Câu 28. Các ánh xạ dưới đây, có bao nhiêu ánh xạ là ánh xạ tuyến tính?

(a) $f : M_n \to \mathbb{R}, f(X) = \det(X)$ với M_n là không gian vectơ các ma trận vuông cấp n.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to P_2(x), f(a,b) = x^2 + ax + b$ với $P_2(x)$ là không gian vectơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc băng 2.

(c) Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f : M_{3\times4} \to M_{2\times4}, f(X) = AX$

(d) $f : P_n(x) \to P_{n+1}(x), f[p(x)] = \int p(x)dx$

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x+3y+2z+1,\ x-y)$

A 4 B 2 C 1 D 3

Lời giải. Đáp án đúng B.

(a) Không là ánh xạ tuyến tính vì $f(\alpha X) = \det(\alpha X) = \alpha^n \det(X) \neq \alpha \det(X) = \alpha f(X)$

(b) Không là ánh xạ tuyến tính vì $f(0,0) = x^2 \neq 0$

(c) Là ánh xạ tuyến tính

(d) Là ánh xạ tuyến tính

(e) Không là ánh xạ tuyến

□

Câu 29. Nhận dạng mặt bậc hai có phương trình trong hệ tọa độ Descartes vuông góc

$$5x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_2x_3 = 20$$

A Elipsoid
B Hyperboloid hai tầng
C Mặt nón
D Hyperboloid một tầng

Lời giải. Đáp án đúng A.

Đặt $\omega = 5x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_2x_3$

Ma trận của ω đối với cơ sở chính tắc là: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

Ta tìm trị riêng của ma trận A. Xét phương trình:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

hay: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 14-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-15) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 5$hoặc $\lambda = 10$ hoặc $\lambda = 15$

Suy ra: $5x_1^2 + 10x_2^2 + 15x_3^2 = 20$

hay $\dfrac{x_1^2}{2^2} + \dfrac{x_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{x_3^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

Đây là một elipsoid □

Câu 30. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vector $\{u_1 = (1,2,3,0), u_2 = (2,1,2,2), u_3 = (4,1,3,-2),$ $u = (m,1,0,m-3)\}$. Tìm m để $u \in span\{u_1, u_2, u_3\}$

(A) $\frac{16}{5}$ (B) -3 (C) $-\frac{16}{5}$ (D) $-\frac{12}{5}$ (E) 3

Lời giải. Đáp án đúng (B). Ta có: $u \in span\{u_1, u_2, u_3\} \Leftrightarrow u = x_1.u_1 + x_2.u_2 + x_3.u_3$ với $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = m \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = m - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = -\frac{14}{5} \\ x_3 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow m = -3$$

□

Câu 31. Với V và W là các không gian vectơ trên trường K, có $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Cho các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng:

(a) Nếu f biến cơ sở của V thành độc lập tuyến tính thì f là đơn cấu

(b) Nếu $\dim V = \dim W$ và f là đơn cấu thì f cũng là toàn cấu

(c) Ma trận của tổng các ánh xạ tuyến tính (nếu có) là tổng các ma trận tương ứng của các ánh xạ

(d) Nếu f là đẳng cấu thì ánh xạ $g = \alpha f^{\beta}$ với $\alpha, \beta \in K$ cũng là đẳng cấu

(e) f có ma trận A. Ánh xạ tuyến tính g có ma trận B. Nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính h sao cho $h(x) = g(f(x))$ với $x \in V$. Thì h có ma trận là $B.A$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Lời giải. Đáp án đúng (C).

(a) Đúng

(b) Đúng

(c) Đúng

(d) Sai vì với trường hợp α là phần tử trung hòa trong trường K thì g không là đẳng cấu

(e) Sai vì $h = f \circ g$ nên có ma trận là $A.B$

□

Câu 32. Cho $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \mapsto (2x - y + z, mx - 3y, x + ny - z) \end{array}$. Có bao nhiêu cặp giá trị nguyên không âm của m và n để $f^3 = f \circ f \circ f$ không là đơn cấu

(A) vô số (B) 2 (C) 1 (D) 0

Lời giải. Đáp án đúng (C).
Ta có ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & -3 & 0 \\ 1 & n & -1 \end{pmatrix}$ ma trận của f^3 là A^3
Để f^3 không là đơn cấu thì $\det(A^3) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow m(n-1) + 9 = 0$
$\Rightarrow$ Tồn tại một cặp số nguyên không âm (m, n) thỏa mãn là $(m, n) = (9, 0)$ □

Câu 33. Trong không gian $\mathbb{R}$ cho 3 vector $\{v_1 = (2,3,4), v_2 = (3,5,7), v_3 = (4,4,6)\}$ và phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$
Gọi $A = [a_{ij}]_{3x3}$ là ma trận của f theo cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$. Tính tổng $T = a_{11} + a_{21} + a_{31}$

(A) 22 (B) 50 (C) 227 (D) 46 (E) -176

Lời giải. Đáp án đúng (B). Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là:
$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
Ma trận của f theo cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là:

$$\begin{aligned} A' &= C^{-1}.A.C \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & 48 & -\frac{75}{2} \\ 16 & 75 & -58 \\ \frac{45}{2} & 104 & -\frac{161}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Câu 34. Trong $\mathbb{R}^3$ với cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, cho dạng toàn phương có biểu thức tọa độ:

$$\omega(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$$

Với tích vô hướng Euclid, xác định cơ sở trực chuẩn B để ω có dạng chính tắc:

A $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},0\right),\left(\frac{-6}{\sqrt{70}},\frac{3}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)\right\}$

B $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6}\right)\right\}$

C $B=\left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(0,\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),(1,0,0)\right\}$

D $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right),\left(\frac{-4}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right\}$

Lời giải. Đáp án đúng A.

Ma trận của ω đối với cơ sở chính tắc là: $A=\begin{bmatrix}4&-2&6\\-2&1&-3\\6&-3&9\end{bmatrix}$

Ta đi tìm các trị riêng: xét phương trình:

$$det(A-\lambda I)=0 \text{ hay } \begin{vmatrix}4-\lambda&-2&6\\-2&1-\lambda&-3\\6&-3&9-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+14\lambda^2=0$$

Ta tìm được hai trị riêng: $\lambda_1=0$ (bội 2), $\lambda_2=14$
Xét từng trị riêng:

- $\lambda_1=0$
  $\begin{bmatrix}4&-2&6\\-2&1&-3\\6&-3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1&=t\\x_2&=2t+3v\\x_3&=v\end{cases}$
  $\Rightarrow$ với $\lambda_1=0$, ta có hệ gồm hai vector riêng độc lập tuyến tính: $u_1=(1,2,0)$ và $u_2=(0,3,1)$
  Trực chuẩn hệ trên, ta được $p_1=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},0\right)$, $p_2=\left(\frac{-6}{\sqrt{70}},\frac{3}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$

- $\lambda_2=14$
  Làm tương tự, ta được $p_3=\left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

  $\Rightarrow$ Ma trận $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{-6}{\sqrt{70}}&\frac{-2}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{3}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\0&\frac{5}{\sqrt{70}}&\frac{-3}{\sqrt{14}}\end{bmatrix}$ là ma trận trực giao và $P^TAP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&14\end{bmatrix}=D$

Lấy cơ sở $B=\{e_1',e_2',e_3'\}$ trong $\mathbb{R}^3$ sao cho P là ma trận chuyển. Khi đó:
$e_1'=\frac{1}{\sqrt5}e_1+\frac{2}{\sqrt5}e_2=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},0\right)$
$e_2'=\frac{-6}{\sqrt{70}}e_1+\frac{3}{\sqrt{70}}e_2+\frac{5}{\sqrt{70}}e_3=\left(\frac{-6}{\sqrt{70}},\frac{3}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$
$e_3'=\frac{-2}{\sqrt{14}}e_1+\frac{1}{\sqrt{14}}e_2+\frac{-3}{\sqrt{14}}e_3=\left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$ □

Câu 35. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\begin{cases}(m+1)x_1+(m+3)x_3+(m-2)x_3=5\\(m+2)x_1+(m-1)x_2-(m-4)x_3=2\\(m-1)x_1+(m+2)x_2+(m+1)x_3=-3\end{cases}$

Ⓐ $m=-6$ Ⓑ $m=2$ Ⓒ $m=\dfrac{5}{3}$ Ⓓ Không tồn tại m

Lời giải. Đáp án đúng Ⓓ. Ta có : $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}m+1 & m+3 & m-2 & 5\\ m+2 & m-1 & -(m-4) & 2\\ m-1 & m+2 & m+1 & -3\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}m+1 & m+3 & m-2 & 5\\ 1 & -4 & -2m+6 & -3\\ m-1 & m+2 & m+1 & -3\end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c}m+1 & m+3 & m-2 & 5\\ 1 & -4 & -2m+6 & -3\\ m-2 & m+6 & 3m-5 & 0\end{array}\right]$

Để hệ vô số nghiệm thì $r(A)=r(\overline{A})<3$

$\Rightarrow\begin{cases}m-2=0\\m+6=0\\3m-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\m=-6\\m=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (vô lý)

Vậy không có m thoả mãn. □

Câu 36. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ cho các vector x,y. Biết $x\perp 2x-y$, $\|x\|=3$, $y-5x=(-1,12,3,-1)$ và hình chiếu của y lên $span\{x\}$ là $(2,-4,0,4)$. Xác định vector $2x-y$.

Ⓐ $(2,-6,3,-5)$ Ⓑ $(-2,-6,-3,-5)$
Ⓒ $(4,2,3,9)$ Ⓓ $(1,-2,0,2)$

Lời giải. Đáp án đúng Ⓑ.
Ta khai thác các giả thiết

- $x\perp 2x-y\Leftrightarrow\langle x,2x-y\rangle\Leftrightarrow 2\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle=0$
- $\|x\|=3\Leftrightarrow\langle x,x\rangle=9$.
- $y-5x=(-1,12,3,-1)\Rightarrow\langle y-5x,y-5x\rangle=155\Leftrightarrow\langle y,y\rangle-10\langle x,y\rangle+25\langle x,x\rangle=155$

Ta có hệ $\begin{cases}2\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle=0\\\langle x,x\rangle=9\\\langle y,y\rangle-10\langle x,y\rangle+25\langle x,x\rangle=155\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle x,x\rangle=9\\\langle x,y\rangle=18\\\langle y,y\rangle=110\end{cases}$

Lại có hình chiếu của y lên $span\{x\}$ là:

$$\frac{x}{\|x\|}\langle\frac{x}{\|x\|},y\rangle=\frac{x}{\|x\|^2}\langle x,y\rangle=\frac{x}{\langle x,x\rangle}\langle x,y\rangle=2x=(2,-4,0,4)$$

Thay vào giả thiết ta được $y=(4,2,3,9)$
Vậy $2x-y=(-2,-6,-3,-5)$ □

Câu 37. Cho $A=\begin{bmatrix}cos\alpha & -sin\alpha\\ sin\alpha & cos\alpha\end{bmatrix}$. Tính A^n:

(A) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} sin(n\alpha) & -cos(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} sin(n\alpha) & -cos(n\alpha) \\ cos(n\alpha) & sin(n\alpha) \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ -sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$

Lời giải. Đáp án đúng (D).

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(2\alpha) & -sin(2\alpha) \\ sin(2\alpha) & cos(2\alpha) \end{bmatrix} \\ A^3 &= \begin{bmatrix} cos(2\alpha) & -sin(2\alpha) \\ sin(2\alpha) & cos(2\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(3\alpha) & -sin(3\alpha) \\ sin(3\alpha) & cos(3\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chứng minh quy nạp ta được $A^n = \begin{bmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{bmatrix}$ □

Câu 38. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclide cho $W = span\{(1,0,3);(-2,2,0);(4,-2,6)\}$ và vector $v = (1,8,8)$. Tính $\|v'\|$ biết $v' \in W$ sao cho $\|v' - v\|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $\sqrt{110}$ (B) $3\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{190}$ (D) $\sqrt{10}$ (E) $\sqrt{19}$

Lời giải. Đáp án đúng (A).
Dễ thấy $r(W) = 2$, ta trực chuẩn hóa cơ sở $\{v_1 = (1,0,3);v_2 = (-2,2,0)\}$ của W.

- $v_1 \to u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, 0, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.
- $\overline{u_2} = v_2 - \langle v, u_1\rangle u_1 = v_2 - \dfrac{-2}{\sqrt{10}}u_1 = \left(-\dfrac{9}{5}, 2, \dfrac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow u_2 = \left(-\dfrac{9}{\sqrt{190}}, \dfrac{10}{\sqrt{190}}, \dfrac{3}{\sqrt{190}}\right)$.

Để $\|v' - v\|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì v' là hình chiếu của v lên W.

$$v' = pr_W(v) = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 = (-2,5,9)$$

Vậy $\|v'\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 9^2} = \sqrt{110}$ □

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $\{O, e_1, e_2\}$ cho phương trình của đường bậc hai $\mathcal{T}$ như sau:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Để $\mathcal{T}$ có dạng là một đường elip thực, thì bộ ba số (a,b,c) nào dưới đây có thể thỏa mãn:

(A) $a = 2, b = 3, c = 1$ (B) $a = 1, b = 2, c = 2$
(C) $a = 4, b = 5, c = 1$ (D) $a = 3, b = 6, c = 2$

Lời giải. Đáp án đúng (C).

Xét dạng toàn phương $\omega = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$ có ma trận là: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Ma trận A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 7$ và ứng với các trị riêng thì ta có các vector riêng trực chuẩn là: $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Từ đó, ta có ma trận $P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ làm chéo hóa ma trận A.

Với $e'_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$ thì $\{e'_1, e'_2\}$ trực chuẩn.

Công thức đổi tọa độ từ $\{O, e_1, e_2\}$ sang $\{O, e'_1, e'_2\}$ là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Khi đó phương trình của $\mathcal{T}$ là: $3{x'_1}^2 + 7{x'_2}^2 + \frac{-a+b}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{a+b}{\sqrt{2}}x'_2 + c = 0$

Ta biến đổi về dạng $3\left(x'_1 + \frac{b-a}{6\sqrt{2}}\right)^2 + 7\left(x'_2 + \frac{a+b}{14\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{24} - \frac{(a+b)^2}{56} + c = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x'_1 + \frac{b-a}{6\sqrt{2}}\right)^2 + 7\left(x'_2 + \frac{a+b}{14\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{24} + \frac{(a+b)^2}{56} - c \quad (1)$$

Nhận xét: để $\mathcal{T}$ có dạng là một elip thực, thì VP của (1) > 0, hay $\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{(a+b)^2}{56} - c > 0$

Đến đây, các bạn thay 4 đáp án đề bài cho, và nhận thấy chỉ có bộ a=4, b=5, c=1 là thỏa mãn điều kiện. □

Câu 40. Gọi α là giá trị lớn nhất và β là giá trị nhỏ nhất của $Q = x^2 + y^2 + z^2$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.
Biết $3x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2 = 7$, tính $\frac{\alpha}{\beta}$.

(A) 5 (B) 4 (C) 2 (D) 3 (E) 6

Lời giải. Đáp án đúng (B).

Ta đưa dạng toàn phương $\omega(v) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2$ với $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Dạng toàn phương này có ma trận đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta chéo hóa trực giao A và đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc $\omega(v) = (x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 7$. Gọi cơ sở mà ω có dạng chính tắc là B.

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B là $P = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta nhận xét với P là một ma trận trực giao thì P^{-1} cũng là ma trận trực giao và

$$\langle v_B, v_B \rangle = \langle P^{-1}v, P^{-1}v \rangle = \langle v, v \rangle \tag{$\star$}$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \langle v', v' \rangle = \langle v, v \rangle = x^2 + y^2 + z^2 = Q$$

Lại có

$$\frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left((x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2\right) \le (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \le (x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \le Q \le 7$$

□
