Giải BT XSTK Buổi 4

PP Nhị thức, Bernoulli

1.

Giải bài 4.5. Gọi X là số trường hợp cần chăm sóc đặc biệt trong 20 ca sinh. Ta có, $X \sim B(20; 0.01)$.

(a) Xác suất để không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X=0) = C_{20}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{20} = 0.818$$

(b) Xác suất để có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X=1) = C_{20}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{19} = 0.165$$

(c) Xác suất có nhiều hơn một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt là

$$P(X>1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - (0.818 + 0.165) = 0.017$$

Khi xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson, nghĩa là $X \sim P(20 \times 0.01) = P(0.2)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} P(X=0) &= e^{-0.2} = 0.819 \\ P(X=1) &= e^{-0.2}\frac{0.2^1}{1!} = 0.164 \\ P(X>1) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - (0.819 + 0.164) = 0.017 \end{aligned}$$

Kết luận : Với cỡ mẫu 20 và tỷ lệ bệnh $p = 0.01$ thì kết quả của hai loại phân phối này xấp xỉ như nhau. ∎

3.

Giải bài 4.7. Gọi X là số người mắc bệnh A trong nhóm 400 người. Khi đó, $X \sim B(400, 0.1)$

(a) Công thức tính xác suất để trong nhóm có nhiều nhất 50 người mắc bệnh A là

$$P(X \leq 50) = \sum_{i=0}^{50} C_{400}^{i} 0.1^{i} 0.9^{400-i}$$

(b) Do $n = 400 \geq 20$ và $p = 0.1$ không quá gần 0 hoặc 1, nên ta có thể áp dụng công thức xấp xỉ phân phối chuẩn.

$$\begin{aligned} P(X \leq 50) &= P\left(\frac{X - 400.(0.1)}{\sqrt{400.(0.1).(0.9)}} \leq \frac{50 - 400.(0.1)}{\sqrt{400.(0.1).(0.9)}}\right) \\ &\approx \Phi(1.667) \\ &= 0.953 \end{aligned}$$

Phân phối Poisson

2.

(a) Xác suất không phải tất cả 4 chiếc ôtô đều được thuê là

$$\begin{aligned} P(X \le 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= e^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right) \\ &= 0.857 \end{aligned}$$

(b) Xác suất tất cả 4 chiếc ôtô đều được thuê là

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0.857 = 0.143$$

(c) Xác suất cửa hàng không đáp ứng được yêu cầu là

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= P(X \ge 4) - P(X=4) \\ &= 0.143 - e^{-2}\frac{2^4}{4!} \\ &= 0.053 \end{aligned}$$

(d) Trung bình số ô tô được thuê là $EX = 2$

(e) Ta có,

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \le 5) \\ &= 1 - e^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}\right) \\ &= 0.017 < 0.02 \end{aligned}$$

Như vậy số ô tô cần thiết để xác suất không đáp ứng được nhu cầu thuê bé hơn 2% là 5.

5.

Giải bài 4.25. Gọi X_i là số khách hàng xuất hiện trong phút thứ i $(i = 1,2,3)$. Theo giả thiết các X_i độc lập nhau và $X_i \sim P(5)$.
Gọi Y là số khách hàng xuất hiện trong khoảng thời gian 3 phút. Ta có $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
Theo bài (4.20), thì $Y \sim P(15)$.
Ta cần tìm

$$P(Y \ge 10) = 1 - P(Y \le 9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} e^{-15}\frac{15^k}{k!} = 0.9301$$

6.

(a) Gọi
A_i: "sản phẩm thứ i, được sản xuất bởi máy đầu tiên, là chính phẩm" $(i = 1,2,\ldots)$

X là số sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra thứ phẩm đầu tiên. Ta có $P(A_i) = 0.98$ với mọi $i = 1, 2, \ldots$ và

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\overline{A_1}) = 0.02 \\ P(X=1) &= P(A_1\overline{A_2}) = 0(.98)(0.02) \\ &\ldots \\ P(X=n) &= P(A_1A_2\ldots A_n\overline{A_n+1}) = (0.98)^n(0.02) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) \\ &= 0.02\sum_{n=0}^{\infty} n(0.98)^n \end{aligned} \tag{7.4}$$

Đặt $p = 0.98 < 1$, ta cần tìm $\sum_{n=0}^{\infty} np^n$. Ta có

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p} \tag{7.5}$$

Lấy đạo hàm theo p hai vế của (7.5),

$$\sum_{k=0}^{n} kp^{k-1} = \frac{np^{n+1}-(n+1)p^n+1}{(1-p)^2} \tag{7.6}$$

Nhân hai vế của (7.6) cho p,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} kp^k &= \frac{np^{n+2}-(n+1)p^{n+1}+p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{np^{n+1}(p-1)-p^{n+1}+p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{np^{n+1}}{p+1} - \frac{p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p}{(1-p)^2} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\lim_{n\to\infty} np^n = 0$. Thật vậy, do $p < 1$ nên $\frac{1}{p} > 1$ hay $\frac{1}{p} = 1 + r$ với $r > 0$ nào đó. Ta có

$$np^n = \frac{n}{(\frac{1}{n})^n} = \frac{n}{(1+r)^n}$$

Mà $(1+r)^n \geq C_n^2 r^2 = \frac{n(n-1)}{2} r^2$ (do khai triển nhị thức Newton). Nên

$$np^n \leq \frac{2}{(n-1)r^2} \longrightarrow 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} np^n = 0$.
Từ đó, kết hợp với (7.7) ta suy ra

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{0.98}{0.02^2} = 2450$$

Thay vào (7.4) ta được

$$EX = 0.02(2450) = 49$$

(b) Gọi Y là số thứ phẩm trong 10 sản phẩm được chọn. Ta có $Y \sim B(10, 0.02)$. Ta cần tìm

$$\begin{aligned} P(Y \le 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= C_{10}^0 (0.02)^0 (0.98)^{10} + C_{10}^1 (0.02)^1 (0.98)^9 + C_{10}^2 (0.02)^2 (0.98)^8 \\ &= 0.9991 \end{aligned}$$

(c) Ta xấp xỉ Y bởi phân phối Poisson sau: $Y \sim P(10(0.02)) = P(0.2)$. Do đó,

$$\begin{aligned} P(Y \le 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= e^{-0.2}\left(\frac{0.2^0}{0!} + \frac{0.2^1}{1!} + \frac{0.2^2}{2!}\right) \\ &= 0.9989 \end{aligned}$$

(d) Gọi
n là số sản phẩm ít nhất phải được lấy ra thỏa yêu cầu.
Z là số thứ phẩm trong n sản phẩm.
Ta có $Z \sim B(n, 0.02)$ và

$$\begin{aligned} & P(Z \ge 1) \ge \tfrac{1}{2} \\ \iff & 1 - P(Z=0) \ge \tfrac{1}{2} \\ \iff & P(Z=0) \le \tfrac{1}{2} \\ \iff & C_n^0 (0.02)^0 (0.98)^n \le \tfrac{1}{2} \\ \iff & 0.98^n \le \tfrac{1}{2} \\ \iff & n \ge \tfrac{\ln(1/2)}{\ln(0.98)} = 34.3096 \end{aligned}$$

Vậy $n = 35$.

Phân phối chuẩn

2.

Giải bài 4.33. Gọi X là trọng lượng trái cây thì $X \sim N(500, 4^2)$. Với $Y = \frac{X-500}{4}$ thì $Y \sim N(0,1)$. Do đó,

(a) Tỷ lệ trái cây loại 1 là

$$\begin{aligned} P(X > 505) &= P\left(\frac{X-500}{4} > \frac{505-500}{4}\right) \\ &= P(Y > 1.25) \\ &= 1 - \Phi(1.25) \\ &= 0.106 \end{aligned}$$

(b) Tỷ lệ trái cây loại 2 là

$$\begin{aligned} P(495 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{495-500}{4} \leq \frac{X-500}{4} \leq \frac{505-500}{4}\right) \\ &= P(-1.25 \leq Y \leq 1.25) \\ &= 0.788 \end{aligned}$$

(c) Tỷ lệ của loại 3 là

$$\begin{aligned} P(X < 495) &= P\left(\frac{X-500}{4} < \frac{495-500}{4}\right) \\ &= P(Y < -1.25) \\ &= 0.106 \end{aligned}$$

Vậy, trái cây thu hoạch được có khoảng 11% loại 1, 78% loại 2 và 11% loại 3.

Phân phối mũ

1.

Câu 3. (*2đ*)

a.(*1,5đ*) $X_i \sim \varepsilon(\lambda)$ $\quad f_i(x) = \lambda.e^{-\lambda x}, x > 0$ $\qquad X = \max\{X_1, X_2\}$

$F(x) = P(X < x) = P(X_1 < x, X_2 < x) = F_1(x).F_2(x) = (1 - e^{-\lambda x})^2,\ x > 0$

b. (*0,5đ*) $f(x) = 2\lambda(1 - e^{-\lambda x})e^{-\lambda x} = 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda e^{-2\lambda x},\ x > 0 \Rightarrow EX = \frac{3}{2\lambda} \quad VX = \frac{7}{4\lambda^2}$