GIẢI TÍCH I

TS. Lê Văn Tứ

Hanoi University of Science and Technology

Tháng 9 Năm 2022

Nội dung

1. Nguyên hàm
2. Tích phân xác định
3. Tích phân suy rộng
4. Các ứng dụng của tích phân xác định

Table of Contents

Khái niệm nguyên

Định nghĩa

Cho hàm số $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Hàm $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ được gọi là một nguyên hàm của f nếu F khả vi trên (a,b) và $F' = f$.

Khái niệm nguyên

Định nghĩa

Cho hàm số $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Hàm $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ được gọi là một nguyên hàm của f nếu F khả vi trên (a,b) và $F' = f$.

Định lí

Gọi F là một nguyên hàm của f. Khi đó, nếu G là một nguyên hàm của f thì tồn tại hằng số $C \in \mathbb{R}$ sao cho $G = F + C$.

Ta kí hiệu họ các nguyên hàm của f bởi kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}}$$

Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Mệnh đề

- Nếu f liên tục trên (a, b) thì f có nguyên hàm trên (a, b).
- Nếu $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ có nguyên hàm trên Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$
- $\int e^x dx = e^x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Các nguyên hàm cơ bản

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1.$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Đổi biến $x = \varphi(t)$

Đặt $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Đổi biến $x = \varphi(t)$

Đặt $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Sau khi tìm được nguyên hàm theo biến t, cần đổi biến lại về biến x.

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Đổi biến $x = \varphi(t)$

Đặt $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Sau khi tìm được nguyên hàm theo biến t, cần đổi biến lại về biến x.

VD. Tính

$\int x(1 + x^2)^4 dx.$

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Đổi biến $x = \varphi(t)$

Đặt $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Sau khi tìm được nguyên hàm theo biến t, cần đổi biến lại về biến x.

VD. Tính

$\int x(1+x^2)^4dx$. Đặt $x^2 = u$

$\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Phương pháp đổi biến

Đổi biến $t = \psi(x)$

Cho hàm $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$ thì đặt $t = \psi(x), dt = \psi'(x)dx$ và

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Đổi biến $x = \varphi(t)$

Đặt $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, ta có

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Chú ý: Sau khi tìm được nguyên hàm theo biến t, cần đổi biến lại về biến x.

VD. Tính

$\int x(1+x^2)^4dx$. Đặt $x^2 = u$

$\int \sqrt{1-x^2}dx$. Đặt $x = \sin u, u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Tích phân từng phần

Ta dựa vào phép lấy vi phân của tích $d(uv) = udv - vdu$ để có công thức tích phân từng phần.

Công thức

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Mục đích của tích phân từng phần là làm giảm độ phức tạp của biểu thức lấy nguyên hàm bằng cách đặt các hàm phức tạp làm u.

Tích phân từng phần

Ta dựa vào phép lấy vi phân của tích $d(uv) = udv - vdu$ để có công thức tích phân từng phần.

Công thức

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Mục đích của tích phân từng phần là làm giảm độ phức tạp của biểu thức lấy nguyên hàm bằng cách đặt các hàm phức tạp làm u.

Gợi ý các trường hợp áp dụng tích phân từng phần

- $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin(kx)dx$, $\int P_n(x)\cos(kx)dx$ với P_n là đa thức bậc n thì đặt $u = P_n$.
- $\int P_n(x)(\ln x)^k dx$ thì đặt $u = (\ln x)^k$.
- $\int P_n(x)\arctan(kx)dx$ thì đặt $u = \arctan(kx)$.
- $\int P_n(x)\arcsin(kx)dx$ thì đặt $u = \arcsin(kx)$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x), Q(x)$ là các phân thức không có nghiệm chung.

Nguyên hàm của hàm phân thức

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x), Q(x)$ là các phân thức không có nghiệm chung.
• Nếu $\deg P > \deg Q$, ta xét phép chia đa thức $P(x) = H(x)Q(x) + R(x)$ với $\deg R < \deg Q$ và

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Nguyên hàm của hàm phân thức

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ với $P(x), Q(x)$ là các phân thức không có nghiệm chung.

• Nếu $\deg P > \deg Q$, ta xét phép chia đa thức $P(x) = H(x)Q(x) + R(x)$ với $\deg R < \deg Q$ và

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

• Phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ thành các phân thức bất khả qui.

Nguyên hàm của hàm phân thức

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x), Q(x)$ là các phân thức không có nghiệm chung.

• Nếu $\deg P > \deg Q$, ta xét phép chia đa thức $P(x) = H(x)Q(x) + R(x)$ với $\deg R < \deg Q$ và

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

• Phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ thành các phân thức bất khả qui.

1. Phân tích $Q(x)$ thành tích các đa thức bất khả qui trên $\mathbb{R}$, tức là

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}\dots(x-\alpha_k)^{a_k}(x^2+p_1x+q_1)^{b_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{b_s}.$$

với $p_i^2 - 4q_i < 0, 1 \le i \le s$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

Xét tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với $P(x), Q(x)$ là các phân thức không có nghiệm chung.

• Nếu $\deg P > \deg Q$, ta xét phép chia đa thức $P(x) = H(x)Q(x) + R(x)$ với $\deg R < \deg Q$ và

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

• Phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ thành các phân thức bất khả qui.

1. Phân tích $Q(x)$ thành tích các đa thức bất khả qui trên $\mathbb{R}$, tức là

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}\dots(x-\alpha_k)^{a_k}(x^2+p_1x+q_1)^{b_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{b_s}.$$

với $p_i^2 - 4q_i < 0, 1 \le i \le s$. Các giá trị α_j là các nghiệm thực bội a_j. Các tam thức bậc hai $x^2+p_ix+q_i$ tương ứng với các cặp nghiệm phức đối ngẫu của $Q(x)$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_i x+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_i x+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \le i \le b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_i x+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \le i \le b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_i x + C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.
2. $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \ldots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.
2. $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.
2. $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$.
3. $\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+3)^2}$

Nguyên hàm của hàm phân thức

2. Nếu $Q(x)$ có nghiệm thực α bội a thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa a số hạng có dạng $\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_a}{(x-\alpha)^a}$.
3. Nếu $Q(x)$ có nhân tử $(x^2+px+q)^b$ thì phân tích $\frac{R(x)}{Q(x)}$ chứa b số hạng có dạng $\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}, 1 \leq i \leq b$.

Các phân thức $\frac{A}{(x-\alpha)^i}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ được gọi là các phân thức bất khả qui.

VD. Xác định dạng tổng quát của phân tích bất khả qui

1. $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.
2. $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$.
3. $\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+3} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+3)^2}$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

2. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x-1)^2$, ta có

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

2. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x-1)^2$, ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2} = A_1(x-1) + \frac{A_2}{1} + \frac{B_1(x-1)^2}{x+1} + \frac{B_2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

và thay $x = 1$,

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

2. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x-1)^2$, ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2} = A_1(x-1) + \frac{A_2}{1} + \frac{B_1(x-1)^2}{x+1} + \frac{B_2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

và thay $x = 1$, ta thu được $\frac{1}{4} = A_2$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

2. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x-1)^2$, ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2} = A_1(x-1) + \frac{A_2}{1} + \frac{B_1(x-1)^2}{x+1} + \frac{B_2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

và thay $x = 1$, ta thu được $\frac{1}{4} = A_2$.

3. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x+1)^2$ và thay $x = -1$,

Nguyên hàm các hàm phân thức

Tính toán hệ số của một phân tích

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

1. Xác định dạng tổng quát

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

2. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x-1)^2$, ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2} = A_1(x-1) + \frac{A_2}{1} + \frac{B_1(x-1)^2}{x+1} + \frac{B_2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

và thay $x=1$, ta thu được $\frac{1}{4} = A_2$.

3. Nhân hai vế của $(*)$ với $(x+1)^2$ và thay $x=-1$, ta thu được $\frac{1}{4} = B_2$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

$$(*)\quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

4. Thay $x = 0$,

Nguyên hàm của hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

4. Thay $x = 0$,ta có $1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \Rightarrow -A_1 + B_1 = \frac{1}{2}$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

4. Thay $x = 0$,ta có $1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \Rightarrow -A_1 + B_1 = \frac{1}{2}$.
5. Nhân hai vế của $(*)$ với x, và cho $x \to \infty$,

Nguyên hàm của hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

4. Thay $x = 0$,ta có $1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \Rightarrow -A_1 + B_1 = \frac{1}{2}$.
5. Nhân hai vế của $(*)$ với x, và cho $x \to \infty$, ta thu được $0 = A_1 + B_1$. Do đó, ta tính được $A_1 = -\frac{1}{4}, B_1 = \frac{1}{4}$.

Nguyên hàm của hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{1}{(x^2-1)^2}$

$$(*) \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

4. Thay $x = 0$,ta có $1 = -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 \Rightarrow -A_1 + B_1 = \frac{1}{2}$.

5. Nhân hai vế của $(*)$ với x, và cho $x \to \infty$, ta thu được $0 = A_1 + B_1$. Do đó, ta tính được $A_1 = -\frac{1}{4}, B_1 = \frac{1}{4}$.

Tóm lại, ta thu được phân tích

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Các kĩ thuật cơ bản

1. Với nghiệm α bội a, nhân 2 vế với $(x-\alpha)^a$ rồi thay $x=\alpha$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Các kĩ thuật cơ bản

1. Với nghiệm α bội a, nhân 2 vế với $(x-\alpha)^a$ rồi thay $x=\alpha$.
2. Nhân với x^k rồi cho $x \to \infty$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Các kĩ thuật cơ bản

1. Với nghiệm α bội a, nhân 2 vế với $(x-\alpha)^a$ rồi thay $x=\alpha$.
2. Nhân với x^k rồi cho $x \to \infty$.
3. Thay các giá trị cụ thể (như $0, 1, ..$).

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$,

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.
2. Nhân với x, rồi cho $x \to \infty$,

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.
2. Nhân với x, rồi cho $x \to \infty$, ta thu được $3 = A + B \Rightarrow B = 2$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.
2. Nhân với x, rồi cho $x \to \infty$, ta thu được $3 = A + B \Rightarrow B = 2$.
3. Thay $x = 0$,

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.
2. Nhân với x, rồi cho $x \to \infty$, ta thu được $3 = A+B \Rightarrow B = 2$.
3. Thay $x=0$, ta thu được $\frac{5}{6} = \frac{A}{2} + \frac{C}{3} \Rightarrow C = 1$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tìm phân tích thành phân thức bất khả qui của $\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)}$

Dạng tổng quát

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

1. Nhân hai vế với $x+2$, thay $x=-2$, ta thu được $A=1$.
2. Nhân với x, rồi cho $x \to \infty$, ta thu được $3 = A + B \Rightarrow B = 2$.
3. Thay $x=0$, ta thu được $\frac{5}{6} = \frac{A}{2} + \frac{C}{3} \Rightarrow C = 1$.

Vậy

$$\frac{3x^2+7x+5}{(x+2)(x^2+2x+3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+2x+3}.$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C.$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C.$
2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C.$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$.
2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C$.
3. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^b}dx$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui
1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$.
2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C$.
3. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^b}dx$. Nếu $B \neq 0$ thì tách $Bx + C = \frac{B}{2}(2x+q) + D$ và ta chỉ cần xét $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^b}$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$.
2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C$.
3. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^b} dx$. Nếu $B \neq 0$ thì tách $Bx + C = \frac{B}{2}(2x+q) + D$ và ta chỉ cần xét $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^b}$. Đổi biến $u = x + \frac{p}{2}$ để đưa về dạng

$$\int \frac{du}{(u^2+s^2)^b}$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C.$

2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C.$

3. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^b}dx$. Nếu $B \neq 0$ thì tách $Bx + C = \frac{B}{2}(2x+q) + D$ và ta chỉ cần xét $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^b}$. Đổi biến $u = x + \frac{p}{2}$ để đưa về dạng

$$\int \frac{du}{(u^2+s^2)^b}$$

Đặt $t = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{u}{s}\right)$

Nguyên hàm các hàm phân thức

Ta đưa về việc tìm nguyên hàm các hàm phân thức bất khả qui
1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$.
2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^a} = \frac{1}{-a+1}(x-\alpha)^{-a+1} + C$.
3. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^b}dx$. Nếu $B \neq 0$ thì tách $Bx + C = \frac{B}{2}(2x+q) + D$ và ta chỉ cần xét $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^b}$. Đổi biến $u = x + \frac{p}{2}$ để đưa về dạng

$$\int \frac{du}{(u^2+s^2)^b}$$

Đặt $t = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{u}{s}\right)$ thì $dt = \frac{du}{u^2+s^2}$ và $u^2+s^2 = \frac{s^2}{\cos^2(st)}$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

$$I = \int \frac{\cos^2(\sqrt{2}t)dt}{2} = \frac{1}{4}\int (\cos(2\sqrt{2}t) + 1)dt$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos^2(\sqrt{2}t)dt}{2} = \frac{1}{4}\int(\cos(2\sqrt{2}t) + 1)dt \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t) + \frac{1}{4}t + C
\end{aligned}
$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos^2(\sqrt{2}t)dt}{2} = \frac{1}{4}\int(\cos(2\sqrt{2}t)+1)dt \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t) + \frac{1}{4}t + C \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{2\tan(\sqrt{2}t)}{1+\tan^2(\sqrt{2}t)} + \frac{1}{4}t + C
\end{aligned}
$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos^2(\sqrt{2}t)dt}{2} = \frac{1}{4}\int(\cos(2\sqrt{2}t)+1)dt \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t) + \frac{1}{4}t + C \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{2\tan(\sqrt{2}t)}{1+\tan^2(\sqrt{2}t)} + \frac{1}{4}t + C \\
&= \frac{1}{8}\frac{x}{1+\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

Nguyên hàm các hàm phân thức

VD. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.Khi đó $dt = \frac{dx}{x^2+2}, x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}t), 2 + x^2 = \frac{2}{\cos^2(\sqrt{2}t)}$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^2(\sqrt{2}t)dt}{2} = \frac{1}{4}\int(\cos(2\sqrt{2}t)+1)dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}t) + \frac{1}{4}t + C \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{2\tan(\sqrt{2}t)}{1+\tan^2(\sqrt{2}t)} + \frac{1}{4}t + C \\ &= \frac{1}{8}\frac{x}{1+\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{8+4x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Ở đây ta đã sử dụng công thức nhân đôi $\sin(2u) = \frac{2\tan u}{1+\tan^2 u}$.

Nguyên hàm của hàm lượng giác

Phương pháp chung

Với các tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$ với $R(x, y)$ là thương của hai đa thức thì ta có thể dùng phép đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$ để đưa về nguyên hàm của hàm phân thức với ẩn t bằng các phép thế

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Nguyên hàm của hàm lượng giác

Trong một số dạng đặc biệt, ta có thể đổi biến linh hoạt hơn

Một số dạng đặc biệt

- Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.

Nguyên hàm của hàm lượng giác

Trong một số dạng đặc biệt, ta có thể đổi biến linh hoạt hơn

Một số dạng đặc biệt

- Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.
- Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

Nguyên hàm của hàm lượng giác

Trong một số dạng đặc biệt, ta có thể đổi biến linh hoạt hơn

Một số dạng đặc biệt

- Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.
- Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.
- Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$.

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, a \in \mathbb{R}.$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, a \in \mathbb{R}.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \in \mathbb{R}.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$

Với các nguyên hàm có dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, ta có các kĩ thuật sau để đưa về hai nguyên hàm vô tỷ cơ bản trên.

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \in \mathbb{R}.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$

Với các nguyên hàm có dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, ta có các kĩ thuật sau để đưa về hai nguyên hàm vô tỷ cơ bản trên.

- Đặt $u = \sqrt{x^2 \pm a}$ hoặc $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ rồi từng phần.
- Đặt $x = a \tan t$ với $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$.
- Đặt $x = a \sin t$ với $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$.
- Đặt $t = x + \ln(x^2 + a)$.

VD. Tính

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \in \mathbb{R}.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0.$

Với các nguyên hàm có dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, ta có các kĩ thuật sau để đưa về hai nguyên hàm vô tỷ cơ bản trên.

- Đặt $u = \sqrt{x^2 \pm a}$ hoặc $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ rồi từng phần.
- Đặt $x = a\tan t$ với $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$.
- Đặt $x = a\sin t$ với $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$.
- Đặt $t = x + \ln(x^2 + a)$.

VD. Tính

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \in \mathbb{R}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0$.

Với các nguyên hàm có dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, ta có các kĩ thuật sau để đưa về hai nguyên hàm vô tỷ cơ bản trên.

- Đặt $u = \sqrt{x^2 \pm a}$ hoặc $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ rồi từng phần.
- Đặt $x = a\tan t$ với $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$.
- Đặt $x = a\sin t$ với $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$.
- Đặt $t = x + \ln(x^2 + a)$.

VD. Tính

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.
2. $\int \sqrt{x^2 + a}dx$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

Nguyên hàm vô tỷ cơ bản

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \in \mathbb{R}.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0.$

Với các nguyên hàm có dạng $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, ta có các kĩ thuật sau để đưa về hai nguyên hàm vô tỷ cơ bản trên.

- Đặt $u = \sqrt{x^2 \pm a}$ hoặc $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ rồi từng phần.
- Đặt $x = a\tan t$ với $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$.
- Đặt $x = a\sin t$ với $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$.
- Đặt $t = x + \ln(x^2 + a)$.

VD. Tính

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$
2. $\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}dx$

Do $-x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$ và

$$I = \int (u + \tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4} - u^2}du$$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$ và

$$\begin{aligned} I &= \int (u+\tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\ &= \int u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \end{aligned}$$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$ và

$$\begin{aligned} I &= \int (u+\tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\ &= \int u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\ &= \tfrac{1}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}d(u^2) + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-u^2}du \end{aligned}$$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I=\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2=\frac{1}{4}-(x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u=x-\frac{3}{2}, x=u+\frac{3}{2}, dx=du$ và

$$\begin{aligned}
I &= \int(u+\tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du\\
&= \int u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du+\tfrac{3}{2}\int\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du\\
&= \tfrac{1}{2}\int\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}d(u^2)+\tfrac{3}{2}\int\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-u^2}du\\
&= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}-u^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}+\tfrac{1}{8}\arcsin(2u)\right)+C
\end{aligned}$$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$ và

$$\begin{aligned}
I &= \int (u+\tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\
&= \int u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\
&= \tfrac{1}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}d(u^2) + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-u^2}du \\
&= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}-u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2} + \tfrac{1}{8}\arcsin(2u)\right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}(x-\tfrac{3}{2})\sqrt{-x^2+3x-2} + \tfrac{3}{16}\arcsin(2x-3) + C
\end{aligned}$$

Nguyên hàm của hàm vô tỷ

VD. Tính $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

Do $-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{3}{2})^2$, đặt $u = x - \frac{3}{2}, x = u + \frac{3}{2}, dx = du$ và

$$\begin{aligned}
I &= \int (u+\tfrac{3}{2})\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\
&= \int u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}du \\
&= \tfrac{1}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2}d(u^2) + \tfrac{3}{2}\int \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-u^2}du \\
&= -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}-u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}u\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2} + \tfrac{1}{8}\arcsin(2u)\right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}(x-\tfrac{3}{2})\sqrt{-x^2+3x-2} + \tfrac{3}{16}\arcsin(2x-3) + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx = \frac{1}{24}(8x^2-6x-11)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{3}{16}\arcsin(2x-3) + C.$$

Table of Contents

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

Ý tưởng: Ta sẽ xấp xỉ hình thang cong bởi các hình chữ nhật.

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

Ý tưởng: Ta sẽ xấp xỉ hình thang cong bởi các hình chữ nhật.

- Chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn $0 = x_0 \le x_1 = \frac{1}{n} \le x_2 = \frac{2}{n} \le \ldots \le x_n = 1$.
- Với $0 \le i \le n-1$, trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, xét hình chữ nhật chiều cao ξ_i^2 với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

Ý tưởng: Ta sẽ xấp xỉ hình thang cong bởi các hình chữ nhật.

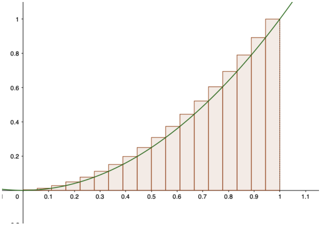
- Chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn $0 = x_0 \leq x_1 = \frac{1}{n} \leq x_2 = \frac{2}{n} \leq \ldots \leq x_n = 1$.
- Với $0 \leq i \leq n-1$, trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, xét hình chữ nhật chiều cao ξ_i^2 với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
- Tổng diện tích n hình chữ nhật $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i^2}{n}$.

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

Ý tưởng: Ta sẽ xấp xỉ hình thang cong bởi các hình chữ nhật.

- Chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn $0 = x_0 \leq x_1 = \frac{1}{n} \leq x_2 = \frac{2}{n} \leq \ldots \leq x_n = 1$.
- Với $0 \leq i \leq n-1$, trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, xét hình chữ nhật chiều cao ξ_i^2 với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
- Tổng diện tích n hình chữ nhật $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i^2}{n}$. Minh hoạ bằng Geogebra

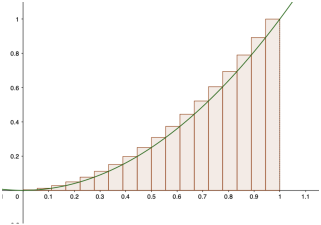


Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

Ý tưởng: Ta sẽ xấp xỉ hình thang cong bởi các hình chữ nhật.

- Chia đoạn $[0, 1]$ thành n đoạn $0 = x_0 \leq x_1 = \frac{1}{n} \leq x_2 = \frac{2}{n} \leq \ldots \leq x_n = 1$.
- Với $0 \leq i \leq n-1$, trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, xét hình chữ nhật chiều cao ξ_i^2 với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
- Tổng diện tích n hình chữ nhật $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i^2}{n}$. Minh hoạ bằng Geogebra



Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

- Khi $n \to \infty$, mỗi hình chữ nhật sẽ trở thành rất nhỏ. Tuy nhiên, tổng diện tích S_n sẽ tiến đến $\frac{1}{3}$.

  Gợi ý: Sử dụng nguyên lí kẹp và đẳng thức $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

- Khi $n \to \infty$, mỗi hình chữ nhật sẽ trở thành rất nhỏ. Tuy nhiên, tổng diện tích S_n sẽ tiến đến $\frac{1}{3}$.

  Gợi ý: Sử dụng nguyên lí kẹp và đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài toán tổng quát

1. Sử dụng cách chia khác, liệu với $y = x^2$, ta có thể thu được tổng diện tích S_n hội tụ về một giá trị ?

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

- Khi $n \to \infty$, mỗi hình chữ nhật sẽ trở thành rất nhỏ. Tuy nhiên, tổng diện tích S_n sẽ tiến đến $\frac{1}{3}$.

  Gợi ý: Sử dụng nguyên lí kẹp và đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài toán tổng quát

1. Sử dụng cách chia khác, liệu với $y = x^2$, ta có thể thu được tổng diện tích S_n hội tụ về một giá trị ?
2. Với cách chia thế nào để S_n hội tụ và giá trị giới hạn xấp xỉ chuẩn xác diện tích hình thang cong ?

Bài toán khởi đầu

Tính diện tích hình thang cong được xác định bởi $x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$

- Khi $n \to \infty$, mỗi hình chữ nhật sẽ trở thành rất nhỏ. Tuy nhiên, tổng diện tích S_n sẽ tiến đến $\frac{1}{3}$.

  Gợi ý: Sử dụng nguyên lí kẹp và đẳng thức $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài toán tổng quát

1. Sử dụng cách chia khác, liệu với $y = x^2$, ta có thể thu được tổng diện tích S_n hội tụ về một giá trị ?
2. Với cách chia thế nào để S_n hội tụ và giá trị giới hạn xấp xỉ chuẩn xác diện tích hình thang cong ?
3. Thay $y = x^2$ bởi một hàm $y = f(x)$, điều kiện nào của $f(x)$ thì tổng S_n hội tụ ?

Khả tích Riemann

Các khái niệm cơ bản

Cho hàm f và đoạn $[a, b]$.

- Một phân hoạch P của $[a, b]$ là cách chia $[a, b]$ thành n đoạn bởi $n + 1$ điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Khả tích Riemann

Các khái niệm cơ bản

Cho hàm f và đoạn $[a, b]$.

- Một phân hoạch P của $[a, b]$ là cách chia $[a, b]$ thành n đoạn bởi $n + 1$ điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- Cỡ của phân hoạch P là $|P| = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$.

Khả tích Riemann

Các khái niệm cơ bản

Cho hàm f và đoạn $[a, b]$.

- Một phân hoạch P của $[a, b]$ là cách chia $[a, b]$ thành n đoạn bởi $n + 1$ điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- Cỡ của phân hoạch P là $|P| = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$.
- Một bộ điểm thuộc phân hoạch P là bộ n điểm $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Khả tích Riemann

Các khái niệm cơ bản

Cho hàm f và đoạn $[a, b]$.

- Một phân hoạch P của $[a, b]$ là cách chia $[a, b]$ thành n đoạn bởi $n+1$ điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- Cỡ của phân hoạch P là $|P| = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$.
- Một bộ điểm thuộc phân hoạch P là bộ n điểm $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ với $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
- Tổng tích phân f theo phân hoạch P và bộ điểm ξ thuộc P là

$$S_{f,P,\xi} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Khả tích Riemann

Khái niệm khả tích

Cho hàm f và đoạn $[a, b]$. Hàm f được gọi là *khả tích trên* $[a, b]$ nếu có một giá trị I thoả mãn: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P thoả mãn $|P| < \delta$, với mọi bộ điểm ξ thuộc P, ta có

$$|S_{f,P,\xi} - I| < \epsilon.$$

Kí hiệu $I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{|P|\to 0} S_{f,P,\xi}$.

Điều kiện khả tích

Định lí

Hàm f liên tục trên $[a, b]$ thì f khả tích

Ý tưởng chứng minh: Sử dụng tổng Darboux. Tham khảo Giáo trình Giải tích I

Điều kiện khả tích

Định lí

Hàm f liên tục trên $[a, b]$ thì f khả tích

Ý tưởng chứng minh: Sử dụng tổng Darboux. Tham khảo Giáo trình Giải tích I

Định lí

Hàm f có hữu hạn gián đoạn bỏ được hoặc loại 1 trên $[a, b]$ thì f khả tích

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Các tính chất cơ bản

Mệnh đề

Cho f, g là hai hàm khả tích trên $[a, b]$.

- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.
- $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.
- Nếu $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ thì $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Các định lí giá trị trung bình

Định lí

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì tồn tại $c \in [a, b]$ thoả mãn

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Các định lí giá trị trung bình

Định lí

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì tồn tại $c \in [a, b]$ thoả mãn

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Định lí

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ và $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích. Hàm g không đổi dấu trên $[a, b]$. Khi đó, tồn tại $c \in [a, b]$ thoả mãn

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Định lí cơ bản của giải tích

Cho f khả tích trên $[a, b]$. Đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Định lí cơ bản của giải tích

Cho f khả tích trên $[a, b]$. Đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Định lí

Hàm f liên tục trên $[a, b]$. Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì F khả vi trên (a, b) và

$$F'(x) = f(x).$$

Định lí cơ bản của giải tích

Cho f khả tích trên $[a, b]$. Đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Định lí

Hàm f liên tục trên $[a, b]$. Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì F khả vi trên (a, b) và

$$F'(x) = f(x).$$

Công thức Newton - Leibnitz

Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và F là một nguyên hàm của f thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Định lí cơ bản của giải tích

Tính liên tục của f trên $[a, b]$ để áp dụng Công thức Newton - Leibnitz là không thể bỏ được.

Ví dụ

Xét $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}dx$. Do $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$ nên

$$\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{3} = -\frac{2}{3}.$$

Tuy nhiên, do $\frac{1}{x^2} \geq 0$ nên $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} \geq 0$. Vậy $-\frac{2}{3} \geq 0$.

Định lí cơ bản của giải tích

Tính liên tục của f trên $[a, b]$ để áp dụng Công thức Newton - Leibnitz là không thể bỏ được.

Ví dụ

Xét $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx$. Do $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$ nên

$$\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{3} = -\frac{2}{3}.$$

Tuy nhiên, do $\frac{1}{x^2} \geq 0$ nên $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} \geq 0$. Vậy $-\frac{2}{3} \geq 0$. **Sai lầm ở đâu ?**

Định lí cơ bản của giải tích

Tính liên tục của f trên $[a, b]$ để áp dụng Công thức Newton - Leibnitz là không thể bỏ được.

Ví dụ

Xét $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx$. Do $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$ nên

$$\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{3} = -\frac{2}{3}.$$

Tuy nhiên, do $\frac{1}{x^2} \geq 0$ nên $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} \geq 0$. Vậy $-\frac{2}{3} \geq 0$. **Sai lầm ở đâu ?**

Nguyên nhân mâu thuẫn: Hàm $\frac{1}{x^2}$ không liên tục trên $[-1, 3]$ nên không thể áp dụng công thức Newton-Leibnitz.

Tích phân từng phần

Công thức

Cho u, v là hai hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó,

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ví dụ: Tính $\int_1^2 x \ln x$

Tích phân từng phân

Công thức

Cho u, v là hai hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi đó,

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Ví dụ: Tính $\int_1^2 x \ln x$

$$\begin{cases} \ln x = u \\ xdx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = du \\ \frac{x^2}{2} = v \end{cases}.$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Đổi biến dạng $x = \varphi(t)$

Định lí

Cho f khả tích trên $[a, b]$. Cho hàm $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ thoả mãn

- φ liên tục trên $[\alpha, \beta]$, khả vi trên (α, β).
- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Khi đó,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Đổi biến dạng $x = \varphi(t)$

Định lí

Cho f khả tích trên $[a, b]$. Cho hàm $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ thoả mãn

- φ liên tục trên $[\alpha, \beta]$, khả vi trên (α, β).
- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Khi đó,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ

Tính $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx$.

Đổi biến dạng $t = \psi(x)$

Định lí

Cho hàm f khả tích trên $[a, b]$. Cho hàm $\psi\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$ và hàm $g(t)\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ thoả mãn

- ψ khả vi và đơn điệu ngặt trên $[a, b]$ và $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$.
- $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$.

Khi đó,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)dt.$$

Đổi biến dạng $t = \psi(x)$

Định lí

Cho hàm f khả tích trên $[a, b]$. Cho hàm $\psi\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$ và hàm $g(t)\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ thoả mãn

- ψ khả vi và đơn điệu ngặt trên $[a, b]$ và $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$.
- $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$.

Khi đó,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)dt.$$

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 xdx$.

Một số đẳng thức tích phân

Do tích phân xác định trả về một giá trị, việc biểu thức lấy tích phân được tính theo biến x hay biến y không quan trọng. Tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy.$$

Ta có thể vận dụng để có được một số đẳng thức tích phân giúp đơn giản việc tính các tích phân phức tạp.

Một số đẳng thức tích phân

Do tích phân xác định trả về một giá trị, việc biểu thức lấy tích phân được tính theo biến x hay biến y không quan trọng. Tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy.$$

Ta có thể vận dụng để có được một số đẳng thức tích phân giúp đơn giản việc tính các tích phân phức tạp.

Đẳng thức 1

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ nếu } f \text{ là hàm lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx \text{ nếu } f \text{ là hàm chẵn} \end{cases}$$

Một số đẳng thức tích phân

Đẳng thức 2

Nếu f liên tục trên $[0,1]$ thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx, \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Áp dụng tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx, \int_0^{\pi} x\sin^5 xdx$$

Table of Contents

Bài toán mở đầu

Bài toán

Tính phần diện tích hạn chế bởi $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^2}$.

Bài toán mở đầu

Bài toán

Tính phần diện tích hạn chế bởi $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^2}$.

- Cố định $x = a > 1$. Khi đó

$$S_a = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx$$

Bài toán mở đầu

Bài toán

Tính phần diện tích hạn chế bởi $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^2}$.

- Cố định $x = a > 1$. Khi đó

$$S_a = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

Bài toán mở đầu

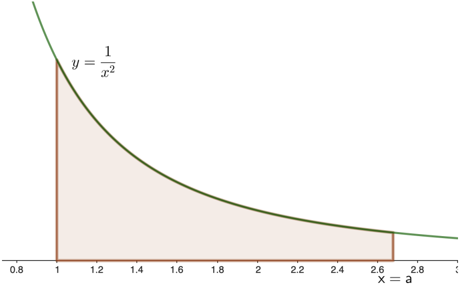
Bài toán

Tính phần diện tích hạn chế bởi $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^2}$.

- Cố định $x = a > 1$. Khi đó

$$S_a = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

- $\lim\limits_{a \to \infty} S_a = 1.$



Tích phân suy rộng loại I – Tích phân với kì dị tại vô cùng

Định nghĩa

Xét $a \in \mathbb{R}$ và hàm f khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với mọi giá trị $b > a$. Đặt

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng loại I – Tích phân với kì dị tại vô cùng

Định nghĩa

Xét $a \in \mathbb{R}$ và hàm f khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với mọi giá trị $b > a$. Đặt

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

- Nếu $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = I$ tồn tại và hữu hạn, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và có giá trị I.

Tích phân suy rộng loại I – Tích phân với kì dị tại vô cùng

Định nghĩa

Xét $a \in \mathbb{R}$ và hàm f khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với mọi giá trị $b > a$. Đặt

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

- Nếu $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = I$ tồn tại và hữu hạn, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và có giá trị I.
- Nếu $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ không tồn tại hoặc bằng vô cùng, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Tích phân suy rộng loại I

Định nghĩa

Xét hàm f khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, đặt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

và ta nói $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ

Tính $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x}dx$

Ví dụ

Tính $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x}dx$

- $\int xe^{-x}dx = \int xd(-e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx.$
  $\Rightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

Ví dụ

Tính $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x}dx$

- $\int xe^{-x}dx = \int xd(-e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx.$
  $\Rightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$
- Với $a > 1$, $\int\limits_1^{a} xe^{-x}dx = -ae^{-a} - e^{-a} + e^{-1} + e^{-1}.$

Ví dụ

Tính $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x}dx$

- $\int xe^{-x}dx = \int xd(-e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx.$
  $\Rightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$
- Với $a > 1$, $\int\limits_1^{a} xe^{-x}dx = -ae^{-a} - e^{-a} + e^{-1} + e^{-1}.$
- $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim\limits_{a\to+\infty} -ae^{-a} - e^{-a} + e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}.$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a)$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) \Rightarrow I$ phân kì.

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) \Rightarrow I$ phân kì.
- Khi $p \neq 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{-p+1} \left(b^{-p+1} - a^{-p+1} \right)$.

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) \Rightarrow I$ phân kì.
- Khi $p \neq 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{-p+1} \left(b^{-p+1} - a^{-p+1} \right)$.

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1 \\ +\infty \text{ nếu } p - 1 < 0 \Leftrightarrow p < 1 \end{cases}$$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) \Rightarrow I$ phân kì.
- Khi $p \neq 1$, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{-p+1} \left(b^{-p+1} - a^{-p+1} \right)$.

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1 \\ +\infty \text{ nếu } p - 1 < 0 \Leftrightarrow p < 1 \end{cases}$$

Vậy

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p > 1}$$

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{a+c}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{a+c}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{a+c}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Mệnh đề

Cho hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{a+c}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ thì $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Mệnh đề

Cho hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{-\infty}^{b-c} f(x)dx$ hội tụ.

Tính chất cơ bản của TPSR loại I

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{a+c}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ thì $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Mệnh đề

Cho hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

- Nếu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall c > 0$, $\int\limits_{-\infty}^{b-c} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq 0$ thì $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ phân kì.

Tích phân suy rộng loại II – Tích phân với kì dị tại điểm hữu hạn

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên $(a, b]$.
- Khả tích trên mọi đoạn $[c, b]$ với mọi $a < c < b$.
- $\lim\limits_{c \to a^+} f(x)dx = \infty$.

Tích phân suy rộng loại II – Tích phân với kì dị tại điểm hữu hạn

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên $(a, b]$.
- Khả tích trên mọi đoạn $[c, b]$ với mọi $a < c < b$.
- $\lim\limits_{c \to a^+} f(x)dx = \infty$.

Ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng loại II – Tích phân với kì dị tại điểm hữu hạn

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên $(a, b]$.
- Khả tích trên mọi đoạn $[c, b]$ với mọi $a < c < b$.
- $\lim\limits_{c \to a^+} f(x)dx = \infty$.

Ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ nếu giới hạn bên phải tồn tại và hữu hạn. Ngược lại, ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kì. Điểm a còn được gọi là *kì dị* của $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Tích phân suy rộng loại II

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên $[a, b)$.
- Khả tích trên mọi đoạn $[a, d]$ với mọi $a < d < b$.
- $\lim\limits_{d \to b^-} f(x)dx = \infty$.

Ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to b^-} \int_a^d f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng loại II

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên $[a, b)$.
- Khả tích trên mọi đoạn $[a, d]$ với mọi $a < d < b$.
- $\lim\limits_{d \to b^-} f(x)dx = \infty$.

Ta định nghĩa

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d \to b^-} \int\limits_a^d f(x)dx.$$

Ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ nếu giới hạn bên phải tồn tại và hữu hạn. Ngược lại, ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kì.

Tích phân suy rộng loại II

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên (a, b).
- Khả tích trên mọi đoạn $[c, d]$ với mọi $a < c < d < b$.
- $\lim\limits_{c \to a^+} f(x) = \lim\limits_{d \to b^-} f(x) = \infty$.

Với $t \in (a, b)$, ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^t f(x)dx + \lim_{d \to b^-} \int_t^d f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng loại II

Khái niệm

Cho hàm f thoả mãn:

- xác định trên (a, b).
- Khả tích trên mọi đoạn $[c, d]$ với mọi $a < c < d < b$.
- $\lim\limits_{c \to a^+} f(x) = \lim\limits_{d \to b^-} f(x) = \infty$.

Với $t \in (a, b)$, ta định nghĩa

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int\limits_c^t f(x)dx + \lim_{d \to b^-} \int\limits_t^d f(x)dx.$$

Ta nói $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ nếu đồng thời $\int\limits_a^t f(x)dx$ và $\int\limits_t^b f(x)dx$ hội tụ. Khi $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ thì giá trị của tích phân suy rộng của f trên $[a, b]$ không phụ thuộc vào việc chọn giá trị $t \in (a, b)$.

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

- Đặt $\sqrt{x} = u$.

Ví dụ

Tính $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

- Đặt $\sqrt{x} = u$. Khi đó

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin(u) + C = 2\arcsin(\sqrt{x}) + C.$$

Ví dụ

Tính $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

- Đặt $\sqrt{x} = u$. Khi đó

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin(u) + C = 2\arcsin(\sqrt{x}) + C.$$

- Với $0 < c < d < 1$,

$$\int_c^d \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\arcsin(\sqrt{d}) - 2\arcsin(\sqrt{c})$$

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

- Đặt $\sqrt{x} = u$. Khi đó

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin(u) + C = 2\arcsin(\sqrt{x}) + C.$$

- Với $0 < c < d < 1$,

$$\int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\arcsin(\sqrt{d}) - 2\arcsin(\sqrt{c})$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \lim_{d\to 1^-} 2\arcsin(\sqrt{d}) - \lim_{c\to 0^+} 2\arcsin(\sqrt{c}) = \pi.$$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx, a > 0$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx, a > 0$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{c \to 0^+} (\ln a - \ln c) \Rightarrow I$ phân kì.

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx, a > 0$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{c \to 0^+} (\ln a - \ln c) \Rightarrow I$ phân kì.
- Khi $p \neq 1, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim\limits_{c \to 0^+} \frac{1}{-p+1} \left(a^{-p+1} - c^{-p+1}\right).$

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{1}{c^{p-1}} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p - 1 < 0 \Leftrightarrow p < 1 \\ +\infty \text{ nếu } p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1 \end{cases}$$

Ví dụ

Biện luận sự hội tụ của $I = \int\limits_0^a \frac{1}{x^p}dx, a > 0$ theo giá trị $p \in \mathbb{R}$

- Khi $p = 1, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p}dx = \lim\limits_{c \to 0^+} (\ln a - \ln c) \Rightarrow I$ phân kì.
- Khi $p \neq 1, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p}dx = \lim\limits_{c \to 0^+} \frac{1}{-p+1}\left(a^{-p+1} - c^{-p+1}\right)$.

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{1}{c^{p-1}} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } p - 1 < 0 \Leftrightarrow p < 1 \\ +\infty \text{ nếu } p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1 \end{cases}$$

Vậy

$$\boxed{\forall a > 0, \int\limits_0^a \frac{1}{x^p}dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}$$

Ví dụ

Tương tự, với tích phân suy rộng có kì dị tại $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\forall a < 0, \int_a^0 \frac{1}{(-x)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}$$

Ví dụ

Tương tự, với tích phân suy rộng có kì dị tại $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\forall a < 0, \int\limits_a^0 \frac{1}{(-x)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}$$

$$\boxed{\forall a > x_0, \quad \int\limits_{x_0}^a \frac{1}{(x - x_0)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}.$$

Ví dụ

Tương tự, với tích phân suy rộng có kì dị tại $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\forall a < 0, \int\limits_a^0 \frac{1}{(-x)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}$$

$$\boxed{\forall a > x_0, \quad \int\limits_{x_0}^a \frac{1}{(x - x_0)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}.$$

$$\boxed{\forall a < x_0, \quad \int\limits_a^{x_0} \frac{1}{(x_0 - x)^p} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow p < 1}.$$

Tính chất cơ bản của TPSR loại II

Mệnh đề

Cho hàm $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall a < t < b, \int\limits_t^b f(x)dx$ hội tụ.

Tính chất cơ bản của TPSR loại II

Mệnh đề

Cho hàm $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall a < t < b, \int\limits_t^b f(x)dx$ hội tụ.

Mệnh đề

Cho hàm $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$. Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall a < t < b, \int\limits_a f(x)dx$ hội tụ.

Tính chất cơ bản của TPSR loại II

Ghi chú

Nếu $f(x)$ liên tục trên $(a, b]$, không xác định tại $x = a$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ tồn tại và hữu hạn, thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ xác định và hữu hạn. Nói cách khác, nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ tồn tại và hữu hạn thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ **không** là tích phân suy rộng.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Các mệnh đề sau phát biểu với hàm f luôn dương. Nếu f luôn âm trên đoạn lấy tích phân, xét tích phân của $-f$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Các mệnh đề sau phát biểu với hàm f luôn dương. Nếu f luôn âm trên đoạn lấy tích phân, xét tích phân của $-f$.

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, +\infty), 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Các mệnh đề sau phát biểu với hàm f luôn dương. Nếu f luôn âm trên đoạn lấy tích phân, xét tích phân của $-f$.

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, +\infty), 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Các mệnh đề sau phát biểu với hàm f luôn dương. Nếu f luôn âm trên đoạn lấy tích phân, xét tích phân của $-f$.

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, +\infty), 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$. Giả sử

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0, +\infty].$$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$. Giả sử

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0, +\infty].$$

- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$. Giả sử

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0, +\infty].$$

- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$. Giả sử

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0, +\infty].$$

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Cụ thể hơn, nếu f, g cùng là VCB hoặc VCL khi $x \to +\infty$ và $f \sim_{x\to+\infty} g$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b], b > a$. Giả sử

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in [0, +\infty].$$

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Cụ thể hơn, nếu f, g cùng là VCB hoặc VCL khi $x \to +\infty$ và $f \sim_{x \to +\infty} g$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Tốc độ phân kì của các vô cùng lớn

Với mọi $\alpha, \beta > 0$, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Tốc độ phân kì của các vô cùng lớn

Với mọi $\alpha, \beta > 0$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

VD: Xét sự hội tụ của $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Tốc độ phân kì của các vô cùng lớn

Với mọi $\alpha, \beta > 0$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

VD: Xét sự hội tụ của $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

Ý tưởng: So sánh $f = \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}$ với $g = \frac{1}{x^\alpha}$. Biện luận giới hạn $\frac{f}{g}$ theo giá trị α.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại I

Tốc độ phân kì của các vô cùng lớn

Với mọi $\alpha, \beta > 0$, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

VD: Xét sự hội tụ của $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

Ý tưởng: So sánh $f = \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}$ với $g = \frac{1}{x^\alpha}$. Biện luận giới hạn $\frac{f}{g}$ theo giá trị α.

Xét $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} \frac{1}{\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x^{\frac{1}{4}}} = 0.$

Do $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} dx$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, t] \subset [a, b)$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

và b là kì dị của $\int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_a^b g(x)dx$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, t] \subset [a, b)$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

và b là kì dị của $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$.

- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, t] \subset [a, b)$ thoả mãn

$$\forall x \in [a, b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

và b là kì dị của $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$.

- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b) \subset [a, b]$. Giả sử

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b) \subset [a, b]$. Giả sử

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b) \subset [a, b]$. Giả sử

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

- Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int\limits_a^b g(x)dx$ và $\int\limits_a^b f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b) \subset [a, b]$. Giả sử

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Cụ thể hơn, nếu f, g cùng là VCB hoặc VCL khi $x \to b^-$ và $f \sim_{x \to b^-} g$ thì $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

Định lí

Cho f, g là hai hàm luôn dương và khả tích trên mọi đoạn $[a, b) \subset [a, b]$. Giả sử

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

- Nếu $k = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Cụ thể hơn, nếu f, g cùng là VCB hoặc VCL khi $x \to b^-$ và $f \sim_{x \to b^-} g$ thì $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.
- Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^b g(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b (x)dx$ phân kì.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_\pi \sqrt[3]{\pi - x}$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_\pi \sqrt[3]{\pi - x}$.

Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_{\pi} \sqrt[3]{\pi - x}$.

Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

VD: Đánh giá $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_\pi \sqrt[3]{\pi - x}$.

Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

VD: Đánh giá $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$

Kì dị tại $x \to 0^+$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_\pi \sqrt[3]{\pi - x}$.

Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

VD: Đánh giá $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$

Kì dị tại $x \to 0^+$. Sử dụng khai triển Taylor, ta $x - \ln(1 + x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$.

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_{\pi} \sqrt[3]{\pi - x}$.
Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

VD: Đánh giá $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$

Kì dị tại $x \to 0^+$. Sử dụng khai triển Taylor, ta $x - \ln(1+x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$. Như vậy

$$\frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}} \sim_0 \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Nguyên lí so sánh với TPSR loại II

VD: Đánh giá $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Kì dị tại $x \to \pi^-$. Ta có $\sqrt[3]{\sin x} = \sqrt[3]{\sin(\pi - x)} \sim_\pi \sqrt[3]{\pi - x}$.

Hơn nữa. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ hội tụ.

VD: Đánh giá $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$

Kì dị tại $x \to 0^+$. Sử dụng khai triển Taylor, ta $x - \ln(1+x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$. Như vậy

$$\frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}} \sim_0 \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Do $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x} dx$ phân kì, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - \ln(1+x)}}$ phân kì.

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định nghĩa

Cho $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ là một tích phân suy rộng (loại I hoặc loại II).

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định nghĩa

Cho $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ là một tích phân suy rộng (loại I hoặc loại II).

- Nếu $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ hội tụ, ta nói $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối.*

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định nghĩa

Cho $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ là một tích phân suy rộng (loại I hoặc loại II).

- Nếu $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ hội tụ, ta nói $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối.*
- Nếu $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x)dx|$ phân kì thì ta nói $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ *bán hội tụ.*

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định lí

Nếu tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định lí

Nếu tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ta áp dụng tính hội tụ tuyệt đối để đánh giá các TPSR của các hàm đảo dấu trên miền lấy tích phân

VD: Đánh giá $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định lí

Nếu tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ta áp dụng tính hội tụ tuyệt đối để đánh giá các TPSR của các hàm đảo dấu trên miền lấy tích phân

VD: Đánh giá $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Với mọi $x \in [1, +\infty)$, ta có $0 \leq |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định lí

Nếu tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ta áp dụng tính hội tụ tuyệt đối để đánh giá các TPSR của các hàm đảo dấu trên miền lấy tích phân

VD: Đánh giá $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Với mọi $x \in [1, +\infty)$, ta có $0 \leq |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Do $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}|dx$ hội tụ, tức là $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ tuyệt đối.

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối - bán hội tụ

Định lí

Nếu tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ta áp dụng tính hội tụ tuyệt đối để đánh giá các TPSR của các hàm đảo dấu trên miền lấy tích phân

VD: Đánh giá $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$

Với mọi $x \in [1, +\infty)$, ta có $0 \leq |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Do $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ, ta suy ra $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}|dx$ hội tụ, tức là $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ tuyệt đối.

Như vậy, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ.

Table of Contents