# ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN1 - HỌC KỲ 2021.2

## Mã đề 2

*Đề thi gồm 2 trang*

**Câu 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong sau tại điểm $M(2,0,0)$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & (1) \\ 2x+y+z-4=0 & (2) \end{cases}$$

**Câu 2.** Tìm hình bao của họ đường cong $(a+x)(y-c)^2-x^2(x-a)=0$ với $a$ là hằng số dương.

**Câu 3.** Tính tích phân sau $I=\int\limits_0^4\int\limits_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3}\text{dxdy}$

**Câu 4.** Tính độ cong của $\begin{cases} x=\ln(\sqrt{t^2+1}-t) \\ y=t+1+\sqrt{t^2+1} \end{cases}$ tại điểm $(0,;2)$

**Câu 5.** Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$ với miền D: $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$

**Câu 6.** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $z=0, y=0, z=4$ và mặt cong $2x=\sqrt{5-2y}$

**Câu 7.** Tính $\iiint\limits_E zdV$, trong đó $E$ là tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x=0, y=0, z=0$ và $x+y+z=1$.

**Câu 8.** Tính tích phân bội ba $I=\iiint\limits_V \frac{(z-1)^3+1}{x^2+y^2}dxdydz$, với $V$ là miền xác định bởi $-1 \leq z \leq 1$ và $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

**Câu 9.** Tính $\displaystyle\iint\limits_D (|x|(1 + siny) - |y|)dxdy$, với miền $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$

**Câu 10.** Tính $I(y) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\mathrm{d}x$ với $y \in (-1;1)$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THỬ GIỮA KỲ MÔN MÔN GIẢI TÍCH 2 - NN1 - HỌC KỲ 2021.2

**Giải câu 1.**

- (1) Đặt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$
- (2) Đặt $g(x,y,z) = 2x + y + z - 4$
- Gọi $n_f, n_g$ lần lượt là VTPT của mặt phẳng tiếp diện tại $M$ của (1) và (2).
$$\begin{cases} n_f = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)) = (4,0,0) \\ n_g = (g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M)) = (2,1,1) \end{cases}$$
- $\rightarrow$ VTCP của tiếp tuyến của đường cong tại $M$ là

$$\vec{u} = n_f \times n_g = (0,-4,4)$$

$\rightarrow$ PT tiếp tuyến $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4t \\ z = 4t \end{cases}$

**Giải câu 2.**

- Xét $F(x,y,c) = (a+x)(y-c)^2 - x^2(x-a)$

Ta có $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F(x,y,c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-c)^2 - 3x^2 + 2ax = 0 \quad (1) \\ 2(a+x)(y-c) = 0 \quad (2) \\ (a+x)(y-c)^2 - x^2(x-a) = 0 \quad (3) \end{cases}$

- Từ (2) $\iff \left[\begin{array}{l} x = -a \\ y = c \end{array}\right.$
- Thay $x = -a$ vào (3) ta được $2a^3 = 0$ (vô lý do $a > 0$)

- Thay $y=c$ vào $(1)$ ta được $-3x^2+2ax=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2a}{3} \end{array}\right.$
  - Với $x=0, y=c$ thỏa mãn $(3)$
  - Với $x=\dfrac{2a}{3}, y=c$ không thỏa mãn $(3)$
- Vậy họ đường cong có tập hợp điểm kì dị là đưởng thẳng $x=0$
- Xét $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+x)(y-c)^2-x^2(x-a)=0 \quad (4) \\ -2(x+a)(y-c)=0 \quad (5) \end{cases}$

  Tuwf $(5) \iff \begin{cases} x=-a \\ y=c \end{cases}$
  - Với $x=-a$ không thoả mãn $(4)$
  - Với $y=c$, thay vào $(4)$ ta được: $-x^2(x-a)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$
- Vậy hệ $(I)$ có nghiệm là $(x;y)=\{(0;c),(a,c)\}$
- Do họ đường cong có tập hợp các điểm kì dị là đường $x=0$

  $\Rightarrow$ Kết Luận: Họ đường cong có hình bao là đường $x=a$

**Giải câu 3.** Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I=\int_0^2 dy\int_0^y \frac{1}{1+y^3}dx$$
$$=\int_0^2 \left(\frac{x}{y^3+1}\Bigg|_{x=0}^{x=y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3} \frac{d(y^3)}{y^3+1} = \frac{1}{3} \ln |y^3+1| \Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{3} \ln 3$$

**Giải câu 4.**

$$x = \ln(\sqrt{t^2+1} - t) = -\ln(\sqrt{t^2+1} + t)$$

$$\to \sqrt{t^2+1} + t = e^{-x} = y - 1$$

$\to$ Đường cong: $y = f(x) = e^{-x} + 1$.

Tại điểm $(0;2)$:

$$C_M = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|e^{-x}|}{(1+e^{-2x})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Giải câu 5.** Chia miền D thành hai miền: $\begin{cases} D_1 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2 : y - x^2 \le 0 \\ D_2 : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2 : y - x^2 \le 0 \end{cases}$

Do đó:

$$\text{I} = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dx\, dy + \iint_{D_2} \sqrt{x^2 - y}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\, dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (|x|^3 + (2 - x^2)^{\frac{3}{2}})\, dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

Đặt: x = $\sqrt{2}\sin t$ trong tích phân sau ta được

$$I = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t}{8}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$$

**Giải câu 6.** Ta có: $2x = \sqrt{5-2y}$, suy ra $\begin{cases} 0 \leq x \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dxdydz \\ &= \iint_D dxdy \int_0^4 dz \quad \text{với } D = \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \leq y \leq \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases} \\ &= 4\iint_D dxdy \\ &= 4\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} dx \int_0^{\frac{5-4x^2}{2}} dy \\ &= 4\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{5-4x^2}{2} dx \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

**Giải câu 7.** Từ đề bài ta xác định được miền $E$ : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$

Từ đó, ta tính được:

$$\iiint\limits_E zdV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} zdzdydx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{1-x-y} dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}$$

**Giải câu 8.** Ta có:

$$I = \iiint\limits_V \frac{z^3+3z}{x^2+y^2}dxdydz - \iiint\limits_V \frac{3z^2}{x^2+y^2}dxdydz$$

Vì $V$ đối xứng qua $Oxy$ và $\dfrac{z^3+3z}{x^2+y^2}$ là hàm lẻ với $z \Rightarrow \iiint\limits_V \dfrac{z^3+3z}{x^2+y^2}dxdydz = 0$

Do đó:

$$I = -\iiint\limits_V \frac{3z^2}{x^2+y^2}dxdydz$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow$ V': $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$ $v$ J=r.

$$\Rightarrow I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} dr \int_{-1}^1 3z^2 dz = -2\pi.(\ln 2).2 = -4\pi \ln 2$$

**Giải câu 9.** Đặt $I = \iint\limits_D (|x|(1+siny) - |y|)dxdy$

Ta chia $I$ thành hai tích phân $I_1$ và $I_2$:

$I_1 = \iint\limits_D |x|sinydxdy$; $I_2 = \iint\limits_D (|x| - |y|)dxdy$

Xét $I_1 = \iint\limits_D |x|sinydxdy$

Đặt $f(x,y) = |x|siny$

Vì $f(x,y) = -f(x-y)\forall(x,y),(x,-y) \in D$ và $D$ đối xứng qua trục Ox

$\Rightarrow I_1 = 0$

Xét $I_2 = \iint\limits_D (|x| - |y|)dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Khi đó miền $D$ trở thành $D'$ $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2(|cos\varphi| - |sin\varphi|)dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}(|cos\varphi| - |sin\varphi|)d\varphi = 0$$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0 + 0 = 0$

**Giải câu 10.** - Với mọi $y_0 \in (-1;1)$ luôn tồn tại đoạn $[c,d] \subset (-1;1)$ sao cho $y_0 \in (c,d)$

Xét $f(x,y)=\ln(1-2y\cos x+y^2)$ trên $[0;\pi]\times[c;d]$

Dễ thấy $f(x,y)=\ln(1-2y\cos x+y^2)=\ln\left((y-\cos x)^2+\sin^2 x\right)$ liên tục trên $[0;\pi]\times[c;d]$

Tồn tại $f'_y(x,y)=\dfrac{2y-2\cos x}{1-2y\cos x+y^2}\forall y\in[c,d]$ và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[0;\pi]\times[c;d]$

Do đó: $I(y)=\int\limits_0^\pi \ln(1-2y\cos x+y^2)dx$ khả vi trên $(c,d)$

Mà $y_0\in(c,d)$ nên $I(y)$ khả vi tại $y_0$

Do đó $\forall y_0\in(-1;1), I(y)$ khả vi tại $y_0$ nên $I(y)$ khả vi trên $(-1;1)$

- Từ đó ta có: $I'(y)=\int\limits_0^\pi \dfrac{2y-2\cos x}{1-2y\cos x+y^2}dx$

+ Với $y=0, I(0)=\int\limits_0^\pi \ln(1)dx=0$

+ Với $y\neq 0, I'(y)=\dfrac{1}{y}\int\limits_0^\pi \dfrac{2y^2-2y\cos x}{1-2y\cos x+y^2}dx$

$$=\frac{1}{y}\int\limits_0^\pi \frac{1-2y\cos x+y^2}{1-2y\cos x+y^2}dx+\frac{1}{y}\int\limits_0^\pi \frac{y^2-1}{1-2y\cos x+y^2}dx$$

$$=\frac{1}{y}\int\limits_0^\pi dx+\frac{y^2-1}{y}\int\limits_0^\pi \frac{1}{1-2y\cos x+y^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{y}+\frac{y^2-1}{y}\int\limits_0^\pi \frac{1}{1-2y\cos x+y^2}dx$$

Đặt $I_1=\dfrac{y^2-1}{y}\int\limits_0^\pi \dfrac{1}{1-2y\cos x+y^2}dx$

Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow \dfrac{2dt}{t^2+1}=dx, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Lúc này $I_1 = \dfrac{y^2-1}{y}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{1-2y\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+y^2}\dfrac{2dt}{t^2+1}$

$$= \frac{2y^2-2}{y}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(y^2+1)(t^2+1)-2y(1-t^2)}dt$$

$$= \frac{2y^2-2}{y}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(yt+t)^2+(1-y)^2}dt$$

$$= \frac{2y^2-2}{y(y+1)^2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2}dt$$

$$= \frac{2y^2-2}{y(y+1)^2}.\frac{1+y}{1-y}.\arctan\left(t.\frac{1+y}{1-y}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-2}{y}.\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{-\pi}{y}$$

Vậy $I'(y) = \dfrac{\pi}{y} + I_1 = \dfrac{\pi}{y} + \dfrac{-\pi}{y} = 0$

$\Rightarrow I(y) = \displaystyle\int I'(y)dy = C$, do $I(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I(y) = 0$