

## CHƯƠNG 5

# CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN

1. Khối tâm và phương trình cơ bản của chuyển động khối tâm
2. Các đặc điểm của chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay của vật rắn (quanh một trục)
3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục
4. Mô men động lượng của vật rắn
5. Công và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

## 5.1. Khối tâm và phương trình cơ bản của chuyển động khối tâm

### 1. Khái niệm khối tâm

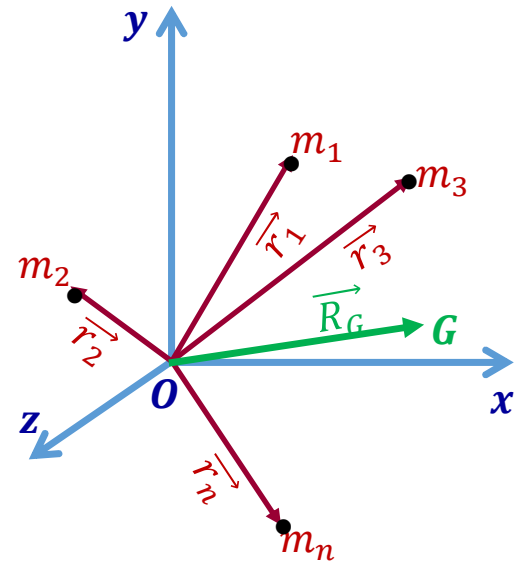
+ Xét hệ chất điểm :  $M_1, M_2, \dots, M_n$

Khối lượng :  $m_1, m_2, \dots, m_n$

Vec tơ vị trí :  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  ( $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x, y, z)$ )

**Khối tâm  $G$  của hệ có tọa độ:**

$$\vec{R}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



Trong hệ tọa độ Oxyz:  $x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$  ;  $y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$  ;  $z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

## 5.1. Khối tâm và phương trình cơ bản của chuyển động khối tâm

### 2. Vận tốc của khối tâm $\vec{V}_G$

$$\vec{V}_G = \frac{d\vec{R}_G}{dt} \Rightarrow \vec{V}_G = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

→ Động lượng của khối tâm:

$$\vec{K}_G = \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_m \right) \vec{V}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum \vec{K}_i$$

Tổng động l-ượng của cả hệ bằng động l-ượng của một chất điểm đặt tại khối tâm, có khối l-ượng bằng tổng khối l-ượng cả hệ, có vận tốc bằng vận tốc của khối tâm của hệ

## 5.1. Khối tâm và phương trình cơ bản của chuyển động khối tâm

### c) Gia tốc của khối tâm

\* Xét hệ chất điểm :  $M_1, M_2, \dots, M_n$

Chịu tác dụng của lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$

Chuyển động với gia tốc  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

Ta có:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{F} + \vec{F}'}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{F}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Trong đó 
$$\begin{cases} \vec{F}' = \sum_i \vec{F}_{\text{inội lực}} = 0 \\ \vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{ngoại lực}} \end{cases}$$

## 5.1. Khối tâm và phương trình cơ bản của chuyển động khối tâm

### d) Phương trình cơ bản của chuyển động của khối tâm

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{a}_G = \vec{F}$$



Khối tâm của hệ chất điểm chuyển động như chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên hệ

## 5.2. Các đặc điểm của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của vật rắn (quanh một trục cố định)

❖ *Vật rắn là một hệ chất điểm trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn luôn không đổi. Vật rắn luôn giữ nguyên hình dạng kích thước của nó dưới tác dụng của ngoại lực*

### 1. Đặc điểm của chuyển động tịnh tiến

- + Mọi chất điểm thuộc vật rắn chuyển động theo những quỹ đạo giống nhau.
- + Mọi chất điểm thuộc vật rắn chuyển động với cùng vận tốc và gia tốc.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_k = \vec{v}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_k = \vec{a}$$

- Xét chất điểm  $M_i$  thuộc vật rắn có: khối lượng  $m_i$ ,  
chịu tác dụng của lực  $\vec{F}_i$  chuyển động với gia tốc  $\vec{a}$
- + Phương trình cơ bản của chuyển động của chất điểm  $M_i$

$$m_i \vec{a} = \vec{F}_i \Rightarrow (\sum_i m_i) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

⇒ *Phương trình cơ bản của chuyển động tịnh tiến của VR:*

$$M \vec{a} = \vec{F}$$

(M: Khối lượng vật rắn

$\vec{F}$ : tổng hợp tác ngoại lực dụng lên vật rắn)

## 5.2. Các đặc điểm của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của vật rắn (quanh một trục cố định)

### 2. Đặc điểm của chuyển động quay xung quanh một trục cố định

#### \* Đặc điểm:

- + Các chất điểm thuộc vật rắn đều vạch ra những quỹ đạo tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục, có tâm nằm trên trục ( $\Delta$ )
- + Trong cùng một khoảng thời gian mọi chất điểm đều quay được một góc như nhau  $\Rightarrow$  **Mọi chất điểm thuộc vật rắn có cùng vận tốc góc  $\vec{\omega}$ , gia tốc góc  $\vec{\beta}$ :**

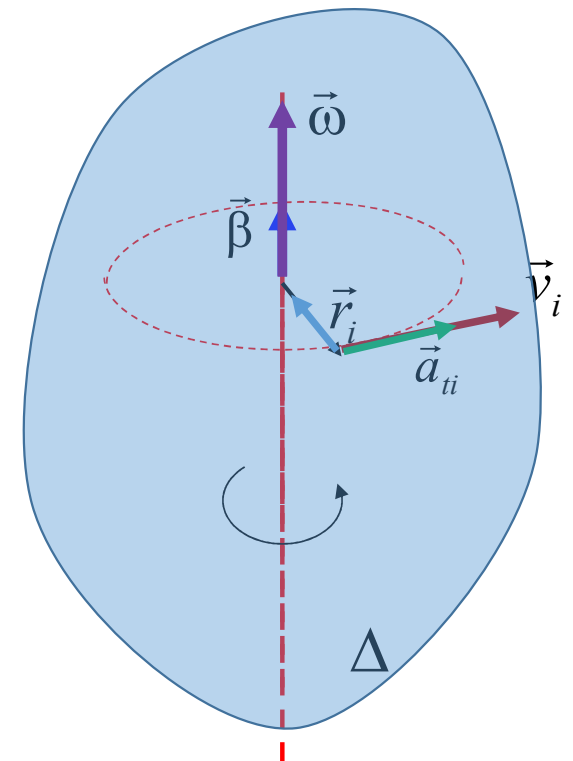
$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_k = \vec{\omega} ; \quad \vec{\beta}_i = \vec{\beta}_k = \vec{\beta}$$

#### \* Mối liên hệ

Vận tốc dài và vận tốc góc :  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$

Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc góc :  $\vec{a}_{ti} = \vec{\beta} \wedge \vec{r}_i$

Gia tốc pháp tuyến :  $a_{ni} = \frac{v_i^2}{r_i} = \omega^2 r_i$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 1. Tác dụng của lực trong chuyển động quay

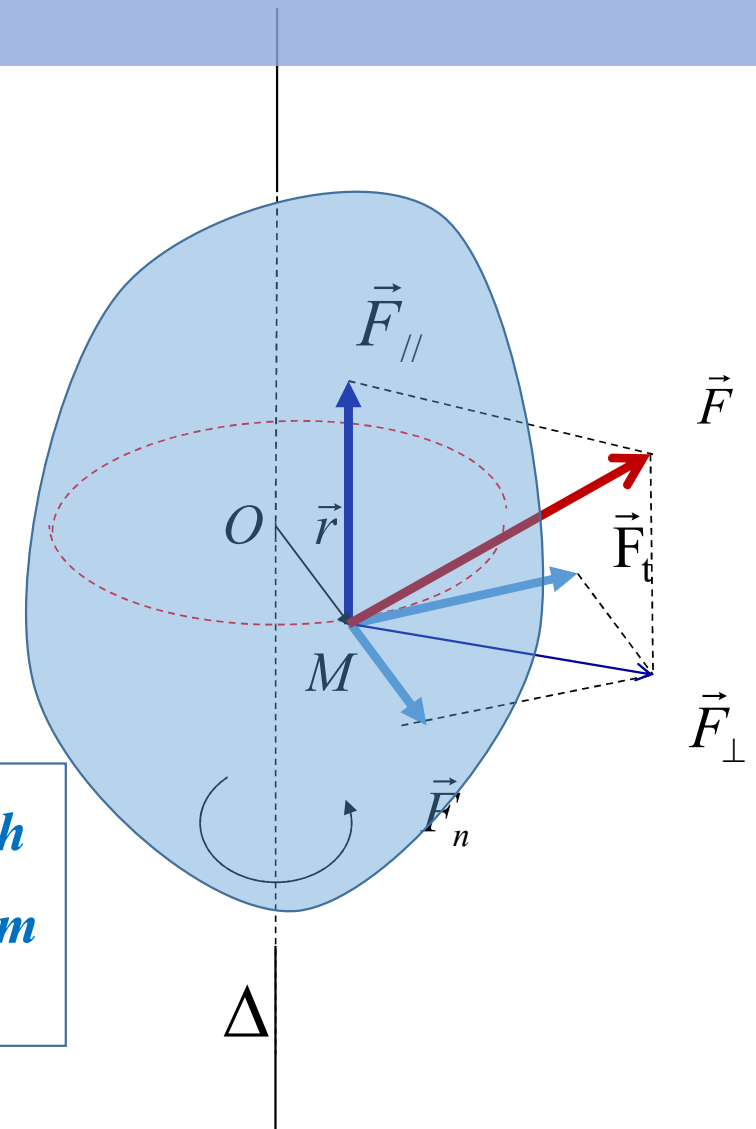
\* Giả sử vật rắn (VR) chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$  có điểm đặt tại M thuộc VR, quay quanh một trục quay ( $\Delta$ )

Ta có:  $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$  mà  $\vec{F}_\perp = \vec{F}_t + \vec{F}_n$

Nên  $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_\parallel$

\* Nhận xét

*Tác dụng của lực  $\vec{F}$  tương đương tác dụng của thành phần lực tiếp tuyến với quỹ đạo của điểm đặt ( $\vec{F}_t$ ) làm VR quay quanh trục quay ( $\Delta$ )*





## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 2. Mômen lực

a) *Định nghĩa* : Mô men của lực  $\vec{F}$  với trục quay  $\Delta$  là một véctơ  $\vec{M}$

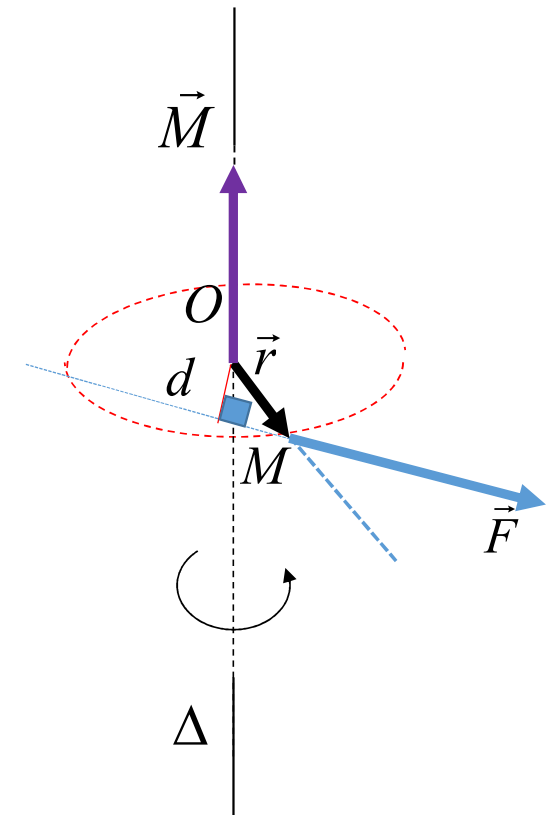
$$\vec{M}_{/\Delta(\vec{F})} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

b) *Đặc điểm của mô men lực* :

- + Phương: vuông góc với mặt phẳng chứa  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  ( $// \Delta$ )
- + Chiều : chiều thuận theo chiều quay từ  $\vec{r} \rightarrow \vec{F}$
- + Độ lớn:  $M = r.F.\sin(\vec{r}, \vec{F}_t) = F.d$

*Chú ý* : Nếu  $\vec{F} // \Delta$ , hoặc  $\vec{F}$  có giá đi qua trục  $\Delta$  thì  $\vec{M}_{/\Delta(\vec{F})} = 0$

Nếu  $\vec{F} \equiv \vec{F}_t$  thì  $M = F.r$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay trục quay cố định

+ Xét chất điểm  $M_k$  thuộc VR, khối lượng  $m_k$ ,  $\overrightarrow{OM_k} = \vec{r}_k$ , chịu tác dụng của ngoại lực  $\vec{F}_{tk}$

+ Phương trình cơ bản :  $m_k \vec{a}_{tk} = \vec{F}_{tk}$

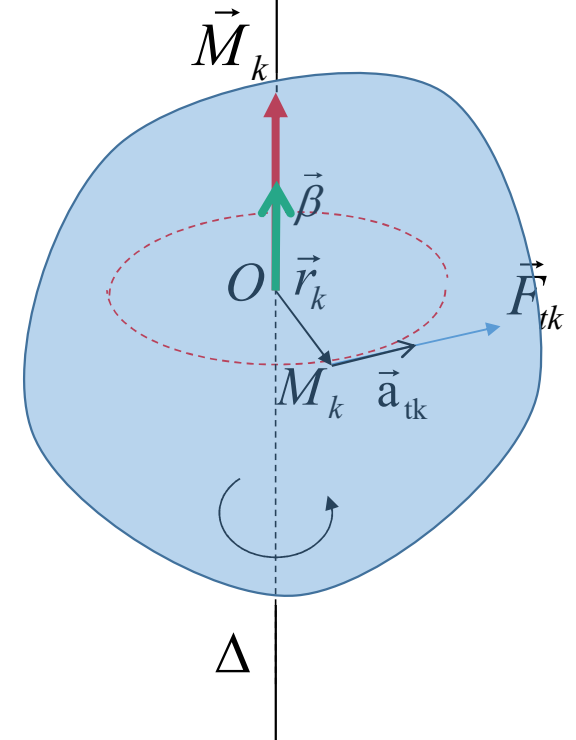
$$\rightarrow m_k(\vec{r}_k \wedge \vec{a}_{tk}) = \vec{r}_k \wedge \vec{F}_{tk}$$

$$\text{Do: } \begin{cases} \vec{r}_k \wedge \vec{a}_{tk} = \vec{r}_k \wedge (\vec{\beta} \wedge \vec{r}_k) = (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) \vec{\beta} - (\vec{r}_k \cdot \vec{\beta}) \vec{r}_k = r_k^2 \vec{\beta} - 0 \\ \vec{r}_k \wedge \vec{F}_{tk} = \vec{M}_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_k r_k^2 \vec{\beta} = \vec{M}_k$$

$$\Rightarrow (\sum_k m_k r_k^2) \vec{\beta} = \sum_k \vec{M}_k = \vec{M}$$

+ Đặt  $I = \sum_k m_k r_k^2$  mô men quán tính của vật VR



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay trục quay cố định

*⇒ Phương trình cơ bản của chuyển động quay VR quanh trục quay cố định*

$$I \vec{\beta} = \vec{M}$$

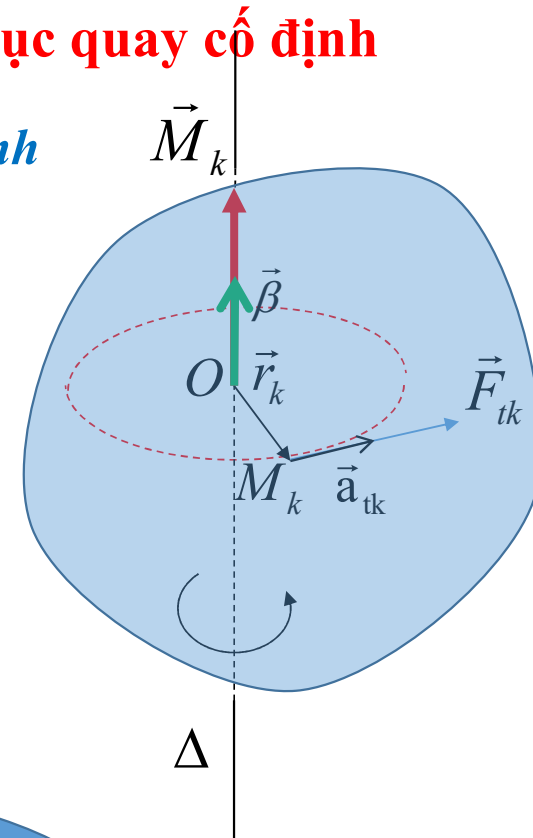
(+  $\vec{M} = \sum_k \vec{M}_k$  tổng mô men của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn.

+  $\vec{\beta}$  là gia tốc góc của chuyển động quay của VR quanh trục  $\Delta$ .

+  $I$  là mô men quán tính của VR đối với trục  $\Delta$  )

→  $\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}$  là gia tốc góc của chuyển động quay của VR

**Phát biểu:** Gia tốc góc trong chuyển động quay của VR xung quanh một trục quay cố định ( $\Delta$ ) tỷ lệ với tổng mô men của ngoại lực tác dụng đối với trục quay và tỷ lệ nghịch với mô men quán tính của VR đối với trục quay



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 4. Mô men quán tính

#### a. Định nghĩa:

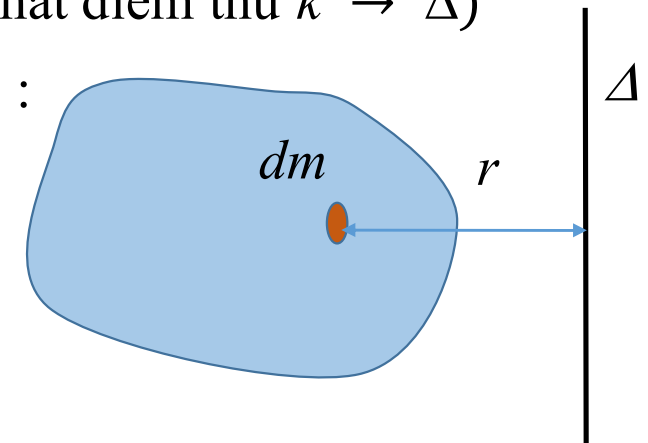
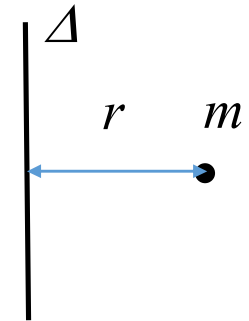
- \* Mô men quán tính của chất điểm:  $I = mr^2$   
(  $m$  là khối lượng chất điểm,  $r$  là khoảng cách  $\rightarrow \Delta$  )
- \* Mô men quán tính của hệ chất điểm:

$$I = \sum_k m_k r_k^2 \xrightarrow{SI} \text{kg.m}^2$$

( $m_k$  là khối lượng của chất điểm thứ  $k$ ,  $r_k$  là khoảng cách từ chất điểm thứ  $k \rightarrow \Delta$ )

- \* Mô men quán tính của vật rắn có khối lượng phân bố liên tục :

$$I = \int_{VR} r^2 dm$$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 4. Mô men quán tính

**b. Ý nghĩa:** Mô men quán tính đặc trưng cho mức quán tính (tính chất bảo toàn trạng thái) của VR trong chuyển động quay

**c. Nhận xét:** *Mô men quán tính của vật rắn quay phụ thuộc*

- Khối lượng VR,
- Khoảng cách từ các chất điểm của VR đến trục  $\Delta$ ,
- Sự phân bố vật chất của VR, hình dạng, kích thước của VR.

## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 4. Mô men quán tính

#### d. Ví dụ:

**VD1:** Tính mô men quán tính của thanh đồng chất dài  $l$ , khối lượng  $M$  đối với trục  $\Delta_0 \perp$  thanh, đi qua khối tâm G của thanh.

\* Chia thanh thành các phần tử có chiều dài  $dx$

cách trục  $\Delta_0$  một khoảng  $x$ , có khối lượng  $dm$

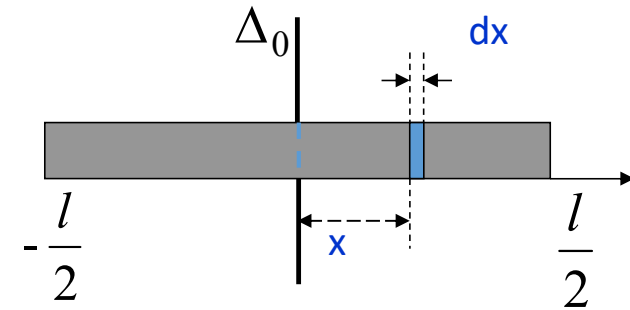
$$dm = \frac{Mdx}{l}$$

\* Mô men quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :

$$dI = x^2 dm = \frac{M}{l} x^2 dx$$

\* Mô men quán tính của thanh

$$I_o = \int_{\text{thanh}} dI = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{12}$$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 4. Mô men quán tính

**VD 2:** Tính mô men quán tính của thanh đồng chất dài  $l$ , khối lượng  $M$  đối với trục  $\Delta \perp$  thanh, đi qua một đầu của thanh.

- \* Chia thanh thành các phần tử có chiều dài  $dx$  cách trục  $\Delta$  một khoảng  $x$ , có khối lượng  $dm$

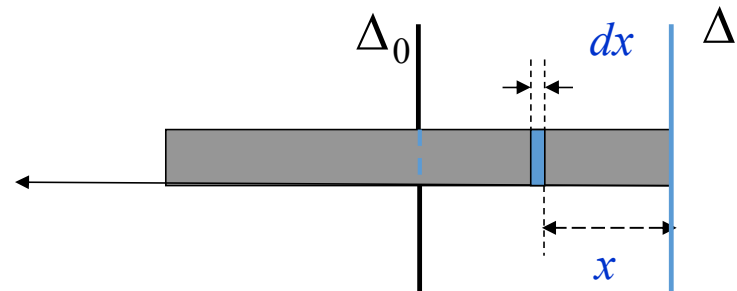
$$dm = \frac{Mdx}{l}$$

- \* Mô men quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta$ :

$$dI = x^2 dm = \frac{M}{l} x^2 dx$$

- \* Mô men quán tính của thanh đối với trục  $\Delta$

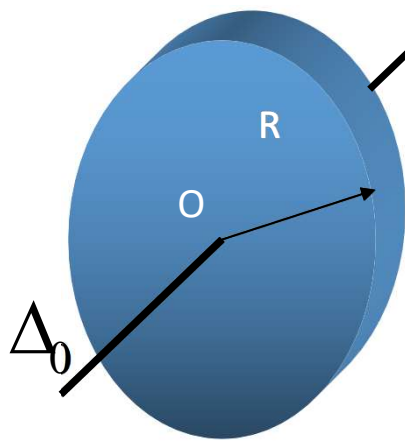
$$I = \int_{\text{thanh}} dI = \int_0^l \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{3}$$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

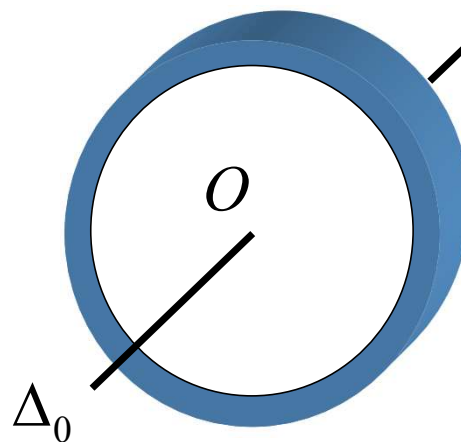
### 4. Momen quán tính

\* Ví dụ: Mô men quán tính của một số VR có hình dạng đối xứng



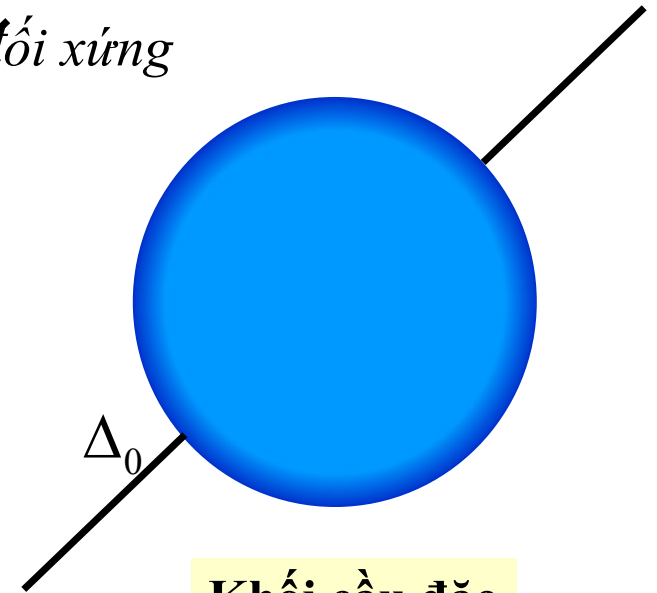
Trụ đặc ( đĩa )

$$I_0 = \frac{MR^2}{2}$$



Trụ rỗng ( vành tròn )

$$I_0 = MR^2$$



Khối cầu đặc

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$$



## 5.3. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

### 4. Mômen quán tính

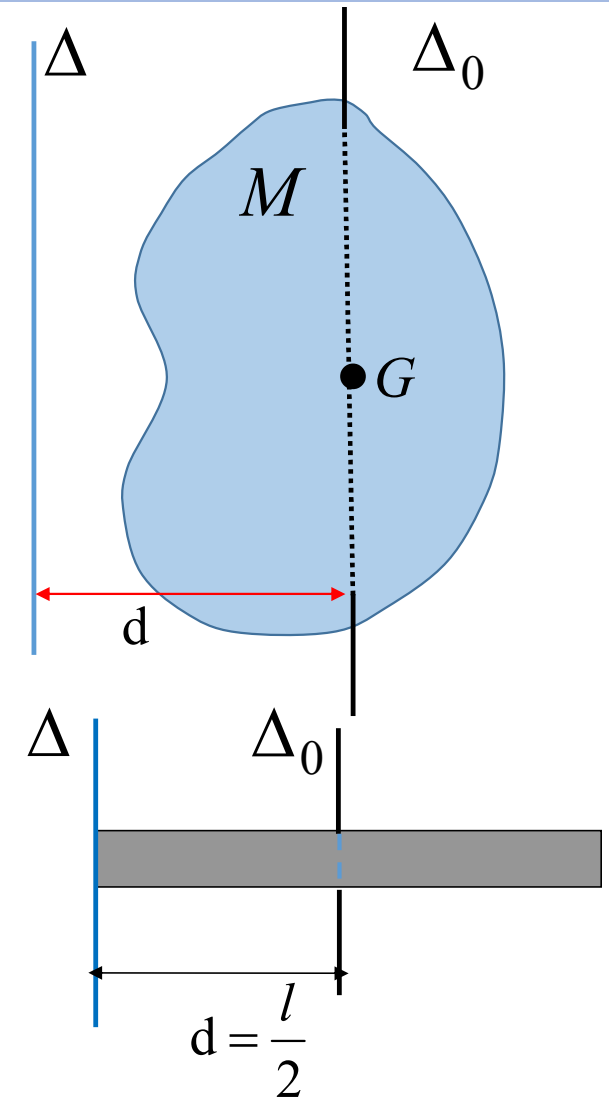
e. **Định lý Steiner- Huyghen:** Mô men quán tính của VR đối với một trục quay bất kỳ ( $\Delta$ ) được xác định:

$$I = I_0 + Md^2$$

Trong đó,  $I_0$  là mô men quán tính của VR đối với trục  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ , song song với  $\Delta$ .  $M$  là khối lượng của VR,  $d$  là khoảng cách từ  $\Delta$  đến  $\Delta_0$

Ví dụ: Tính mô men quán tính của thanh đối với trục quay ( $\Delta$ )

$$I_{\Delta} = I_0 + Md^2 = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$



## ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN QUAY

\* **Phương trình cơ bản:**  $I \vec{\beta} = \vec{M}$

- + Mô men lực  $\vec{M}$  đặc trưng cho tác dụng làm quay của lực (*nguyên nhân làm thay đổi trạng thái của VR quay*)
- + Mô men quán tính  $I$  đặc trưng cho tính quán tính của VR trong chuyển động quay
- +  $\vec{\beta}$ : Đặc trưng cho sự biến thiên nhanh hay chậm của véc tơ vận tốc góc

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

\* **Phương trình cơ bản:**  $m \vec{a} = \vec{F}$

- + Lực  $\vec{F}$  đặc trưng cho nguyên nhân làm thay đổi trạng thái của chất điểm
- + Khối lượng quán tính  $m$  đặc trưng cho tính chất bảo toàn trạng thái của chất điểm
- +  $\vec{a}$ : Đặc trưng cho sự biến thiên nhanh hay chậm của véc tơ vận tốc

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 1. Định nghĩa

a. Xét hệ chất điểm :  $M_1, M_2, \dots, M_n$  có:

khối lượng:  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ;

vận tốc :  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ;

vị trí:  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

\* Mô men động lượng của hệ đối với O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

→ Mô men động lượng của hệ chất điểm đối với O bằng tổng các vectơ mô men động lượng của các chất điểm của hệ đối với O

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### b. Trường hợp riêng

\* *Hệ các chất điểm quay quanh một trục cố định  $\Delta$  với vận tốc góc  $\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_n$*

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = I_i \vec{\omega}_i$$

$$\vec{L}_{\text{hệ}} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n I_i \vec{\omega}_i$$

\* *Vật rắn quay xung quanh một trục cố định  $\Delta$*

→ Mọi chất điểm thuộc vật rắn quay với cùng vận tốc góc:  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \dots = \vec{\omega}_i \dots = \vec{\omega}$

$$\vec{L} = \sum_i I_i \vec{\omega} = \left( \sum_i I_i \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 2. Các định lý về mô men động lượng

#### a. Hệ chất điểm đối với gốc O

##### Định lý 1:

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}) = \vec{M}$$

*Đạo hàm theo thời gian của mô men động lượng của một hệ đối với O bằng tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên hệ đó đối với gốc O*

Hệ chất điểm quay quanh một trục  $\Delta$

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}) = \frac{d}{dt} (I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + \dots + I_n \vec{\omega}_n)$$

$= \vec{M}$

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 2. Các định lý về mô men động lượng

#### a. Hệ chất điểm đối với gốc O

##### Định lý 2:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

*Độ biến thiên của mô men động lượng của một hệ đối với O trong khoảng thời gian  $\Delta t$  bằng xung lượng của mô men các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với O trong khoảng thời gian đó*

##### *Hệ chất điểm quay quanh một trục $\Delta$*

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = (I_1 \vec{\omega}'_1 + I_2 \vec{\omega}'_2 + \dots + I_n \vec{\omega}'_n) - (I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + \dots + I_n \vec{\omega}_n) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

$$\Rightarrow \text{Nếu } \vec{M} = \overrightarrow{const} \rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t$$

$\vec{M} \Delta t$  là xung lượng của mô men lực  $\vec{M}$  trong khoảng thời gian  $\Delta t$

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 2. Các định lý về mô men động lượng

#### b. Vật rắn quay quanh một trục cố định $\Delta$

Vật rắn:  $\vec{L} = I \vec{\omega}$

##### Định lý 1

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$



*Đạo hàm theo thời gian của mô men động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định đối với trục quay bằng tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên VR đối với trục quay đó*

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 2. Các định lý về mô men động lượng

#### b. Vật rắn quay quanh một trục cố định $\Delta$

##### Định lý 2

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$



*Độ biến thiên của mô men động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định đối với trục quay trong khoảng thời gian  $\Delta t$  bằng xung lượng của mô men các ngoại lực tác dụng lên VR đối với trục quay trong khoảng thời gian đó.*

$$\text{Nếu } \vec{M} = \overrightarrow{const} \rightarrow \Delta \vec{L} = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \vec{M}\Delta t$$



## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

#### a. Hệ chất điểm

+ Cô lập (không chịu tác dụng của ngoại lực):  $\sum_i \vec{F}_i = 0$

+ Chịu tác dụng của ngoại lực nhưng **tổng mô men ngoại lực đối với điểm O bằng 0**

$$\sum_i \vec{F}_i \neq 0, \vec{M}_{/\Delta(\vec{F}_i)} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$$

Theo định lý 1:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overline{const}$

#### b. Trường hợp hệ chất điểm (VR) quay xung quanh một trục cố định

Nếu  $\vec{M} = 0$  thì  $I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + \dots + I_n \vec{\omega}_n = \overline{const}$



*Nếu hệ chất điểm hoặc vật rắn cô lập hoặc chịu tác dụng của ngoại lực sao cho tổng mô men các ngoại lực đối với gốc O (trục quay  $\Delta$ ) bằng không thì tổng vec tơ mô men động lượng của hệ đối với gốc O (trục quay  $\Delta$ ) là một đại lượng bảo toàn*

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

#### c. Ứng dụng

\* **Vật không rắn tuyệt đối** : Một số phần VR có thể dịch chuyển với nhau dưới tác dụng ngoại lực

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow I \vec{\omega} = \overrightarrow{const} \quad I \text{ tăng} \rightarrow \omega \text{ giảm : quay chậm}$$

$$I \text{ giảm} \rightarrow \omega \text{ tăng : quay nhanh}$$

\* **Hệ gồm nhiều thành phần quay**

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{const} \text{ ta có } I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = \overrightarrow{const}$$

$$+ \vec{L}_O = 0 \rightarrow I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{I_1 \omega_1}{I_2}$$

$$+ I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = I'_1 \vec{\omega}'_1 + I'_2 \vec{\omega}'_2$$

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

#### c) Ứng dụng

**Ví dụ 1:** Một người múa quay tròn:  $\vec{F}_{ngoại lực} = \vec{P} + \vec{N}$

Mô men ngoại lực đối với trục quay = 0

+ Nếu dang tay ra (r tăng  $\rightarrow$  I tăng)  $\rightarrow \omega$  giảm : quay chậm

+ Hạ tay xuống và thu người lại (I giảm)  $\rightarrow \omega$  tăng: quay chậm

**Ví dụ 2:** Thí nghiệm về ghế Giucopxki. Ghế Giucopxki là một cái ghế có thể quay xung quanh một trục thẳng đứng

**Thí nghiệm 1:** Một người cầm 2 quả tạ đứng trên ghế

+ Giang tay ra  $\rightarrow$  ghế quay chậm lại

+ Hạ tay xuống  $\rightarrow$  ghế quay nhanh hơn

## 5.4. Mô men động lượng của vật rắn

### 3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

#### c. Ứng dụng

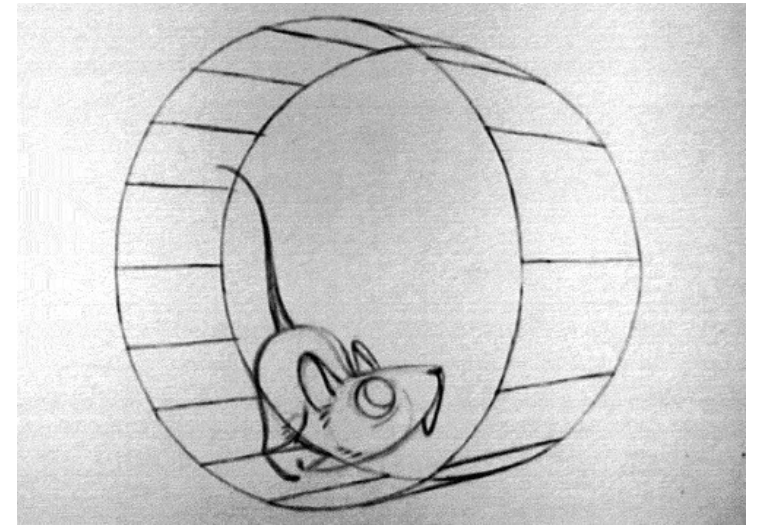
**Thí nghiệm 2:** Một người đứng thẳng trên ghế Giucopxki, tay cầm trục thẳng đứng của một bánh xe.

- + Ban đầu: người và bánh xe đứng yên  $\Leftrightarrow$  Mô men động lượng của hệ = 0
- + Người làm quay bánh xe vận tốc góc  $\vec{\omega}_1 \rightarrow$  ghế quay  $\vec{\omega}_2$  theo chiều ngược lại.
- + Moment động lượng của hệ bảo toàn:

$$I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_2 = - \frac{I_1 \vec{\omega}_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 \text{ và } \vec{\omega}_2 \text{ ngược chiều nhau}$$



## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### 1. Công và công suất của vật rắn trong chuyển động quay.

#### a. Công của lực

\* Xét trong khoảng thời gian  $dt$  VCN vật rắn quay góc  $d\alpha$ , đi đặt  $M_i$  của lực tiếp tuyến  $\vec{F}_t$  (tác dụng lên vật rắn) dịch chuyển đoạn  $d\vec{s}$  vô cùng nhỏ chắn góc  $d\alpha$ ,  $\vec{OM} = \vec{r}_i$

+ Công vi phân của lực  $\vec{F}_t$  trong chuyển dời  $ds$

$$dA = \vec{F}_t \cdot d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\alpha = M d\alpha$$

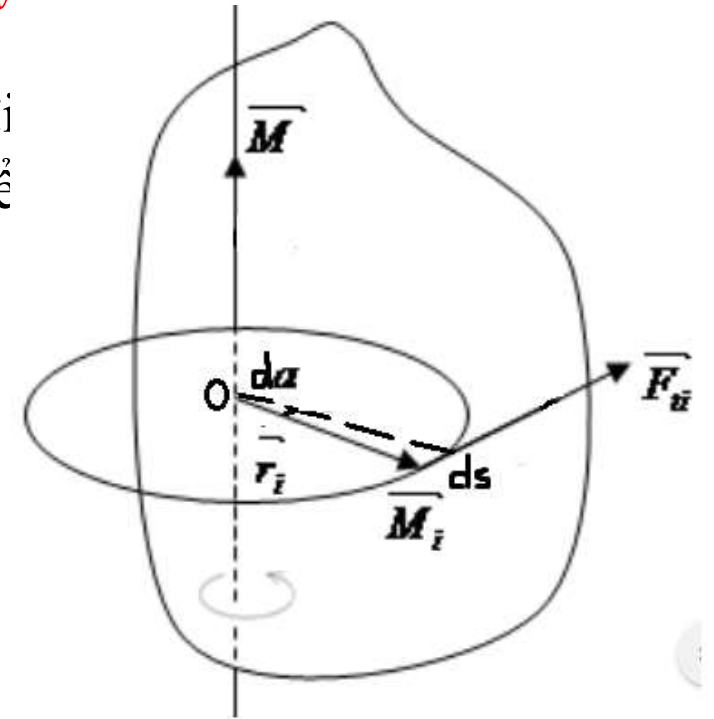
\* Xét một phép quay hữu hạn của VR quanh trục từ VT (1), tương ứng với góc quay  $\alpha_1$ , đến VT (2), tương ứng với góc quay  $\alpha_2$

Công toàn phần của lực  $\vec{F}_t$ :

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M d\alpha = M(\alpha_2 - \alpha_1) = M \Delta \alpha$$



$$A = M \Delta \alpha$$



## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### 1. Công và công suất của vật rắn trong chuyển động quay

#### *b. Công suất*

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M \cdot d\alpha}{dt} = M \cdot \omega$$

nên ta có :

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### 2. Động năng trong chuyển động quay của vật rắn- Vật rắn lăn không trượt

#### a. Động năng của chuyển động quay của vật rắn

+ Xét vật rắn thực hiện một phép quay hữu hạn quanh trục  $\Delta$  từ VT (1), có vận tốc góc  $\omega_1$ , đến VT (2), có vận tốc góc  $\omega_2$

$$\text{Ta có } dA = \mathbf{M} d\alpha = I\beta d\alpha = I \frac{d\omega}{dt} d\alpha = I \frac{d\alpha}{dt} d\omega = I\omega d\omega = Id\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$$

+ Công toàn phần của lực  $\vec{F}_t$  trong chuyển động quay của VR từ VT (1) đến VT (2)

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

→ *Động năng quay của vật rắn:*

$$W_{\text{đ}} = \frac{I\omega^2}{2}$$



## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### 2. Động năng trong chuyển động quay của vật rắn- Vật rắn lăn không trượt

#### a. Động năng của chuyển động quay của vật rắn

→ *Định lý động năng:*  $A_{12} = W_{đ2} - W_{đ1}$

→ *Độ biến thiên động năng của VR quay quanh trục quay cố định  $\Delta$  trong một phép quay hữu hạn nào đó bằng công của các ngoại lực tác dụng lên VR thực hiện trong phép quay đó.*

## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### b. Vật rắn lăn không trượt

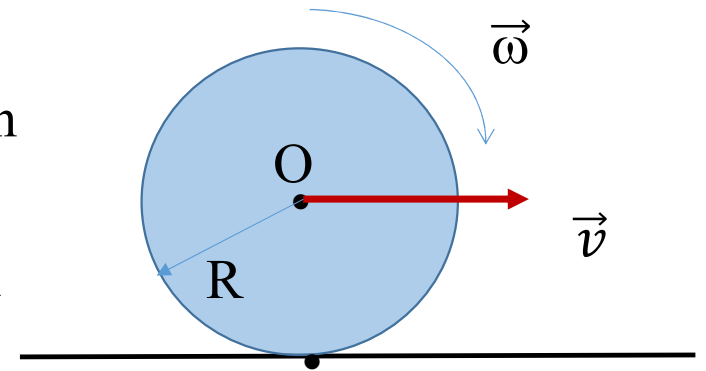
\* **Định nghĩa** : Vật rắn lăn không trượt là vật rắn vừa chuyển động tịnh tiến, vừa chuyển động quay trong đó vận tốc tịnh tiến liên hệ với vận tốc góc của chuyển động quay bằng biểu thức:

$$v = R\omega$$

( $R$  là bán kính tiết diện của vật rắn ở điểm tiếp xúc với mặt phẳng trên đó vật rắn lăn không trượt)

\* **Động năng toàn phần** bằng tổng động năng tịnh tiến và động năng quay:

$$W_{\text{đ}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$



*Chú ý: Thế năng của vật rắn*  
 $W_t = mgh$   
( $h$  là độ cao của khối tâm VR so với mốc thế năng)

## 5.5. Công của lực và động năng của vật rắn trong chuyển động quay

### b. Vật rắn lăn không trượt

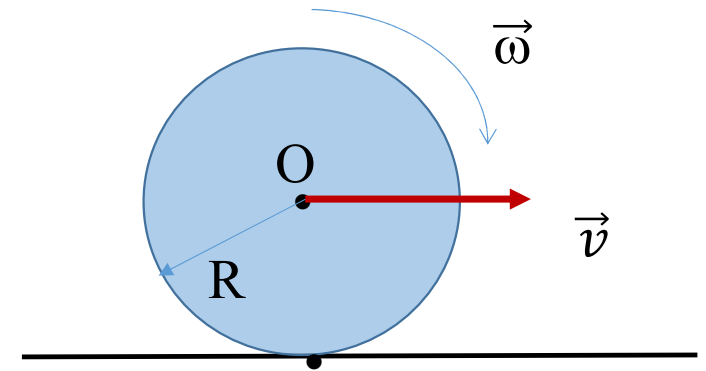
Ví dụ :

+ Tính động năng của **đĩa đồng chất** lăn không trượt trên mặt phẳng

$$\begin{aligned}W_{\text{đ}} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I_o \omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mR^2 \omega^2}{2} \\&= \frac{3}{4} mv^2 = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2\end{aligned}$$

+ Tính động năng của **quả cầu** đặc đồng chất lăn không trượt trên mặt phẳng

$$\begin{aligned}W_{\text{đ}} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I_o \omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{2mR^2 \omega^2}{5} \\&= \frac{7}{10} mv^2 = \frac{7}{10} mR^2 \omega^2\end{aligned}$$



## Sự tương tự giữa các phương trình chuyển động quay và chuyển động tịnh tiến

Chuyển động tịnh tiến	Chuyển động quay xung quanh 1 trục
<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Khối lượng quán tính : <math>m</math></li> <li>+ Lực : <math>\vec{F}</math></li> <li>+ Động lượng : <math>\vec{K} = m \cdot \vec{V}</math></li> <li>+ Phương trình cơ bản : <math>\vec{F} = m \cdot \vec{a}</math>  <math display="block">\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}</math> </li> <li>+ Công thức hiện: <math display="block">A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s}</math> </li> <li>+ Động năng : <math>\frac{mv^2}{2}</math></li> <li>+ Phương trình động học :  <math display="block">V = V_0 + at ; x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}</math> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>+ Momen quán tính : <math>I = \sum_i m_i r_i^2</math></li> <li>+ Momen lực : <math>\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}</math></li> <li>+ Momen động lượng : <math>\vec{L} = I\vec{\omega} = \langle \vec{r} \wedge \vec{K} \rangle</math></li> <li>+ Phương trình cơ bản : <math>\vec{M} = I\vec{\beta}</math>  <math display="block">\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}</math> </li> <li>+ Công thức hiện : <math display="block">A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} M d\alpha</math> </li> <li>+ Động năng: <math>A_{12} = \frac{I\omega^2}{2}</math></li> <li>+ Phương trình động học :  <math display="block">\omega = \omega_0 + \beta t ; \alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{\beta \cdot t^2}{2}</math> </li> </ul>

# Chương 5

- + PT cơ bản của chuyển động quay:  $I_{\Delta}\beta = M$
- + Mô men quán tính: + chất điểm
  - + Vật rắn( tích phân, vật rắn đối xứng)
  - + Huyghen-Steiner:  $I_{\Delta}=I_O+md^2$
- + Mô men động lượng: + Hệ chất điểm
  - + Vật rắn:
- +2 định lý+ 1 định luật bảo toàn
- + Công ngoại lực
- + Động năng quay , định lý động năng
- +Vật rắn lăn, không trượt ( cơ tịnh tiến+quay)