Đề thi cuối kì GT3 học kì 20181 – nhóm ngành 1
Lời giải: Nguyễn Tiến Được – K64

Câu 1

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+n+1}.\,Dễ\ thấy\ u_n=\frac{n^2+2}{n^3+n+1}\geq 0\forall n\geq 1$$

$$u_n=\frac{n^2+2}{n^3+n+1}\sim\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}\ khi\ n\to\infty$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ là\ chuỗi\ điều\ hòa\ phân\ kỳ$$

$\to$ *Chuỗi đã cho phân kỳ theo TCSS*

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{n^2+1}.\ Là\ chuỗi\ đan\ dấu\ với\ u_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$$

$+)\ u_n\geq 0\forall n\geq 1$

$$+)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}\to f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$<0\forall x\geq 1\to\{u_n\}\ là\ dãy\ đơn\ điệu\ giảm$$

$$+)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+1}=0$$

$\to$ *Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz*

Câu 2: Tìm miền HT

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{2n+3}.\,Đặt\ t=2x+3\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}.t^n\ là\ chuỗi\ lũy\ thừa$$

$-$ *Bán kính HT của chuỗi là:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3}=1\to R=1$$

$$-\ Tại\ t=1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\ là\ chuỗi\ điều\ hòa\ phân\ kỳ$$

$$-\ Tại\ t=-1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}\ là\ chuỗi\ đan\ dấu\ hội\ tụ\ theo\ Leibnitz$$

$Miền\ hội\ tụ\ là-1\leq t<1\to -1\leq 2x+3<1\to -2\leq x\leq -1$

$Vậy\ miền\ hội\ tụ\ cần\ tìm\ là\ x\in[-2;-1)$

Câu 3: Khai triển f(x) thành chuỗi Maclaurin

$f(x) = \frac{x}{1+2x^2} = x.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(2x^2)^n \ \forall|2x^2| < 1$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n.x^{2n+1} \ \forall|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 4:

a) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$

Đặt $\frac{y}{x} = t \rightarrow y = xt \rightarrow y' = t + t'x$

$\rightarrow t + t'x = t^2 + t + 4$

$\rightarrow \frac{dt}{dx}x = t^2 + 4 \rightarrow \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{1}{x}dx \rightarrow \ln x + \ln C = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$

$\rightarrow x = \frac{1}{C}(\sqrt{e} + e^{\arctan\frac{t}{2}})$

Vậy PT có nghiệm $\begin{cases} y = \frac{t}{C}(\sqrt{e} + e^{\arctan\frac{t}{2}}) \\ x = \frac{1}{C}(\sqrt{e} + e^{\arctan\frac{t}{2}}) \end{cases}$

b) $(3x^2 + 6xy)dx + (3x^2 - 4y^3)dy = 0$

$P(x;y) = 3x^2 + 6xy \rightarrow P'_y = 6x$

$Q(x;y) = 3x^2 - 4y^3 \rightarrow Q'_x = 6x$

$\rightarrow$ *Đây là PTVP toàn phần*

$\rightarrow C = \int_0^x 3x^2dx + \int_0^y 3x^2 - 4y^3dy$

$= x^3 \Big|_{x=0}^{x=x} + (3x^2y - y^4)\Big|_{y=0}^{y=y} = x^3 + 3x^2y - y^4$

Vậy TPTQ của PT là $C = x^3 + 3x^2y - y^4$

c) $y'' + 3y' + 2y = (6x^2 + 16x + 13)e^x$

- Xét PT thuần nhất $y'' + 3y' + 2y = 0$

Có PT đặc trưng là $k^2 + 3k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1; k_2 = -2$

$\rightarrow \bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

- $f(x) = e^x(6x^2 + 16x + 13)$ *có* $\alpha = 1$ *ko là nghiệm của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^* = e^x(Ax^2 + Bx + C) \rightarrow (y^*)' = e^x[C + B + (B + 2A)x + Ax^2]$

$\rightarrow (y^*)'' = e^x[C + 2B + 2A + (B + 4A)x + Ax^2]$

Thay vào PT ban đầu ta có:

$$e^x[C + 2B + 2A + (B + 4A)x + Ax^2] + 3e^x[C + B + (B + 2A)x + Ax^2] + 2e^x(Ax^2 + Bx + C) = (6x^2 + 16x + 13)e^x$$

$$\rightarrow (A + 3A + 2A)x^2 + (B + 4A + 3B + 6A + 2B)x + (C + 2B + 2A + 3C + 3B + 2C) = 6x^2 + 16x + 13$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6C = 1 \\ 6B + 10A = 16 \\ 6C + 5B + 2A = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \rightarrow y^* = e^x(x^2 + x + 1)$$

Vậy nghiệm TQ của PT là $y = \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^x(x^2 + x + 1)$

d) $y'' - y = \frac{2e^{2x}}{e^x+1}$

- Xét PT thuần nhất $y'' - y = 0$

Có PT đặc trưng là $k^2 = 1 \rightarrow k_{1,2} = \pm 1$

$\rightarrow \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0 \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} = \dfrac{2e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$$

Nhầm nghiệm

$$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x.e^{-x} - e^x.e^{-x} = -1 - 1 = -2$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{2e^{2x}}{e^x+1} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{e^x}{e^x + 1} \rightarrow C_1(x) = \ln(e^x + 1) + K_1$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{2e^{2x}}{e^x+1} \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{e^{3x}}{e^x + 1} \rightarrow C_2(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} - \ln(e^x + 1) + K_2$$

Vậy PT có nghiệm TQ

$$y = [\ln(e^x + 1) + K_1]e^x + \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2} - \ln(e^x + 1) + K_2\right]e^{-x}$$

Câu 5:

a) $x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x = 0 \quad (1)$

với $x(0) = x'(0) = 0; x''(0) = 1$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT (1) ta được:

$L\{x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x\} = 0 \quad (2)$

- $L\{x\} = X(s)$
- $L\{x'\} = s.X(s) - x(0) = s.X(s)$
- $L\{x''\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$
- $L\{x^{(3)}\} = s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0) = s^3X(s) - 1$

Thay vào PT (2) ta được:

$s^3X(s) - 1 - 4s^2X(s) + 5sX(s) - 2X(s) = 0$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}\right\} = e^{2t} - e^{t} - e^{t}.t$$

$$= e^{2t} + e^{t}(-1-t)$$

b) $x'' + 4x = f(t) = \begin{cases} \sin t \ khi \ 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0 \ khi \ t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$với \ x(0) = x'(0) = 0$

Áp dụng CT Trần Bá Hiếu cho vế phải (Heaviside)

$$f(t) = \sin t - \sin t. u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}.e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$= \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)} - \left[\frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{s}{3(s^2+4)}\right].e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\{...\} = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - [\frac{1}{3}\sin(t - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3}\cos(2t - \pi)]$$

$$= \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t$$