Tuần 5
Chương 3: Không gian vevtor
Không gian vector, Không gain vector con

I Khái niệm

1 Định nghĩa

Cho $V \neq \varnothing$ với các phần tử $v \in V$ được gọi là vector. $\mathbb{K}$ là một trường

$$\text{Giả sử trên } V \text{ có } \begin{cases} \text{Phép cộng vector: } u, v \in V \Rightarrow u + v \in V \\ \text{Phép nhân một só với vector: } k \in \mathbb{K}, v \in V \Rightarrow kv \in V \end{cases}$$

V được gọi là một không gian vector (KGVT) trên $\mathbb{K}$ nếu thỏa mãn 8 điều kiện sau

(1) (Giao hoán) $x + y = y + x$

(2) (Kết hợp) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(3) (Phần tử trung hòa) Có vector không θ: $\theta + v = v + \theta = x$

(4) (Phần tử đối xứng) Có vector đối $(-v)$: $v + (-v) = (-v) + v = \theta$

(5) $k(x + y) = kx + ky$

(6) $(k_1 + k_2)x = k_1x + k_2x$

(7) $(k_1k_2)x = k_1(k_2x)$

(8) $1x = x$

VD

(1) V là tập hợp các vector hình học, với phép cộng vector vfa phép nhân vector với một số thì V là không gian vector trên $\mathbb{R}$

(2) Với tập số phức $\mathbb{C}$, xét

$$\mathbb{C}^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \, x_i \in \mathbb{C}, \forall i = \overline{1, n} \right\}$$

Trang bị phép toán $''+''$ và $''.''$ như sau:

Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

Dễ kiểm tra 8 tính chất của KGVT đều thỏa mãn, vậy $\mathbb{C}^n$ là KGVT trên $\mathbb{C}$

2 Các tính chất đơn giản

Tính chất 1 V là $\mathbb{K}$-KGVT, khi đó vector θ là duy nhất

Tính chất 2 V là $\mathbb{K}$-KGVT, khi đó

(1) $\theta x = k\theta = \theta$

(2) $(-1)x = -x$

(3) $kx = \theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ x = \theta \end{array}\right.$

II Không gian vector con

1 Định nghĩa

▶ **Không gian vector con**

Cho V là $\mathbb{K}$-KGVT, $\varnothing \neq W \subset V$. Với các phép toán của V áp dụng cho W mà W trở thành KGVt thì W được gọi là KGVT con

▶ **Đóng kín**

Cho $W \subset V$

(1) W được gọi là đóng kín với phép cộng nếu $x, y \in W$ thì $x + y \in W$

(2) W được gọi là đóng kín với phép nhân với một số nếu $x \in W$, $k \in \mathbb{R}$ thì $kx \in W$

Định lý V là $\mathbb{K}$-KGVT, $\varnothing \neq W \subset V$. Điều kiện cần và đủ để W là KGVT con của V là

(1) Đóng kín đối với phép cộng vector

(2) Đóng kín đối với phép nhân một số với một vector

VD Trong $\mathbb{R}^3$, cho $W = \left\{ (x_1, x_2, 0) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Hiển nhiên $W \neq \varnothing$

Dễ thấy với $x = (x_1, x_2, 0)$ và $y = (y_1, y_2, 0)$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$$

Do đó W đóng kín với phép toán cộng

Ta cũng có W đóng kín với phép toán nhân với một số. Vậy W là một KGVT con

2 Không gian sinh bởi vector

▶ Tổ hợp tuyến tính

Với V là $\mathbb{K}$-KGVT, xét hệ vector $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $v_i \in V$. Ta gọi $v \in V$ là một tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nếu tồn tại $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = \sum_{i=1}^{n} k_iv_i$$

Định lý Trong KGVT V, gọi W là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của hệ vector đã cho $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Khi đó W là KGVT con của V

▶ Không gian con sinh bởi hệ vector

Trong KGVT V cho hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Không gian con W gồm các tổ hợp tuyến tính của hệ vector đã cho được gọi là không gian con sinh bởi hệ vector $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Kí hiệu: $W = \text{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

VD Trong $\mathbb{R}^3$ cho $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Chứng minh rằng

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

<u>*Giải*</u>

Để chứng minh $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, ta sẽ chứng minh

$$\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

và

$$\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

$\left(\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}\right)$

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó ta có thể viết

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Do đó $x \in \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Vậy $\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$

$\left(\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}\right)$

Giả sử $x \in \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, hay

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Thay $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, ta được

$$x = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Vậy $\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$