

## CHƯƠNG 1: CÁC HỆ TT-BB, BIẾN ĐỔI FOURIER

### 1.1. Xét xem các hệ có tuyến tính hay không?

a)  $y(n) = x(n^2)$

Với hệ trên, xét các tín hiệu vào  $x_1(n), x_2(n)$  có tín hiệu ra tương ứng là  $y_1(n), y_2(n)$ ; ta có:

$$y_1(n) = x_1(n^2), \quad y_2(n) = x_2(n^2)$$

Xét tín hiệu vào  $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ , có tín hiệu ra  $y_3(n)$  là:

$$y_3(n) = x_3(n^2) = ax_1(n^2) + bx_2(n^2) = ay_1(n) + by_2(n)$$

Như vậy khi tác động là tổ hợp tuyến tính của các tác động thì đáp ứng cũng là tổ hợp tuyến tính của các đáp ứng thành phần. Hệ đã cho là tuyến tính.

b)  $y(n) = x^2(n)$

Xét các tín hiệu vào  $x_1(n), x_2(n)$  có tín hiệu ra tương ứng là  $y_1(n), y_2(n)$ ; ta có:

$$y_1(n) = x_1^2(n), \quad y_2(n) = x_2^2(n)$$

Xét tín hiệu vào  $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ , có tín hiệu ra  $y_3(n)$  là:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= x_3^2(n) = [ax_1(n) + bx_2(n)]^2 = a^2x_1^2(n) + b^2x_2^2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) \\ &= a^2y_1(n) + b^2y_2(n) + 2ab\sqrt{y_1(n) \cdot y_2(n)} \neq ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

Vậy khi tác động là tổ hợp tuyến tính của các tác động thì đáp ứng KHÔNG là tổ hợp tuyến tính của các đáp ứng thành phần. Hệ đã cho KHÔNG là hệ tuyến tính.

c)  $3y(n) + 3 = x(n)$

Xét các tín hiệu vào  $x_1(n), x_2(n)$  có tín hiệu ra tương ứng là  $y_1(n), y_2(n)$ ; ta có:

$$3y_1(n) + 3 = x_1(n), \quad 3y_2(n) + 3 = x_2(n)$$

Xét tín hiệu vào  $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ , có tín hiệu ra  $y_3(n)$  là:

$$\begin{aligned} 3y_3(n) + 3 &= x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n) = 3ay_1(n) + 3by_2(n) + 3a + 3b \\ &\rightarrow y_3(n) = ay_1(n) + by_2(n) + a + b - 1 \end{aligned}$$

Vậy khi tác động là tổ hợp tuyến tính của các tác động thì đáp ứng KHÔNG là tổ hợp tuyến tính của các đáp ứng thành phần. Hệ đã cho KHÔNG là hệ tuyến tính.

### 1.2. Xét xem các hệ có bất biến hay không?

a)  $y(n) = x(n) - x(n-1)$

Khi tác động trễ đi một khoảng thời gian T, ta có:

$$x(n-T) - x(n-1-T) = x(n-T) - x((n-T)-1) = y(n-T)$$

Nhận thấy đáp ứng cũng trễ đi một khoảng thời gian T. Vậy hệ là bất biến.

b)  $y(n) = nx(n)$

Để hệ là bất biến thì:  $y(n-T) = nx(n-T)$ , nhưng:

$$y(n-T) = (n-T)x(n-T) \neq nx(n-T)$$

Vậy hệ không bất biến.

c)  $y(n) = x(-n)$

Để hệ là bất biến thì:  $y(n-T) = x(-n-T)$ , nhưng:

$$y(n-T) = x(-(n-T)) = x(-n+T)$$

Vậy hệ không bất biến.

d)  $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$

Để hệ là bất biến thì:  $y(n-T) = x(n-T)\cos(\omega_0 n)$ , nhưng:

$$y(n-T) = x(n-T)\cos(\omega_0(n-T))$$

Vậy hệ không bất biến.

### 1.3. Xét xem các hệ có nhân quả hay không?

a)  $y(n) = x(n) - x(n-1)$

Hệ là nhân quả vì tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào ở hiện tại và quá khứ ( $n$  và  $n-1$ )

b)  $y(n) = x(n) + x(n+1)$

Hệ không là nhân quả vì tín hiệu ra có phụ thuộc vào tín hiệu vào ở tương lai ( $n+1$ )

c)  $y(n) = ax(n)$

Hệ là nhân quả vì tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở hiện tại

d)  $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$

Hệ không nhân quả vì tín hiệu ra có phụ thuộc tín hiệu vào ở tương lai ( $n+4$ )

e)  $y(n) = x(n^2)$

Với  $n < 0$ , ta có  $n < n^2$ , như vậy tín hiệu ra có phụ thuộc vào tín hiệu vào ở tương lai. Hệ KHÔNG nhân quả.

f)  $y(n) = x(an)$

Trường hợp  $a > 0$ : nếu  $n > 0$  thì  $n < an$ , tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào ở tương lai.

Trường hợp  $a < 0$ : nếu  $n < 0$  thì  $n < an$ , tín hiệu ra phụ thuộc vào tín hiệu vào ở tương lai. Vậy hệ KHÔNG nhân quả.

#### 1.4. Xét xem các tín hiệu sau có tuần hoàn không? Nếu có, xác định chu kỳ tuần hoàn.

a)  $x_1(n) = e^{j7\pi n}$

Sử dụng công thức Euler:  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$ , ta có:

$$x_1(n) = \cos 7\pi n + j \sin 7\pi n$$

Giả sử tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T$ , khi đó:  $x_1(n+T) = x_1(n)$ ,  $T \in \mathbb{Z}^+$

$$x_1(n+T) = \cos(7\pi n + 7\pi T) + j \sin(7\pi n + 7\pi T)$$

Để  $x_1(n+T) = x_1(n)$  thì:

$$7\pi T = k2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Chọn  $k$  nhỏ nhất để  $T$  nguyên, ta có  $k = 7$ . Vậy tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2$ .

b)  $x_2(n) = 3e^{\frac{j3\pi(n+1)}{5}}$

Giả sử tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T$ , khi đó:  $x_2(n+T) = x_2(n)$ ,  $T \in \mathbb{Z}^+$

Sử dụng công thức Euler:  $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$ , ta có:

$$x_2(n) = 3 \left[ \cos \frac{3\pi(n+1)}{10} + j \sin \frac{3\pi(n+1)}{10} \right]$$

Và có:

$$x_2(n+T) = 3 \left[ \cos \left( \frac{3\pi(n+1)}{10} + \frac{3\pi T}{10} \right) + j \sin \left( \frac{3\pi(n+1)}{10} + \frac{3\pi T}{10} \right) \right]$$

Để  $x_2(n+T) = x_2(n)$  thì:

$$\frac{3\pi T}{10} = k2\pi \Leftrightarrow T = \frac{20k}{3}$$

Chọn  $k$  nhỏ nhất để  $T$  nguyên, ta có  $k = 3$ . Vậy tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T = 20$ .

c)  $x_3(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$

Giả sử tín hiệu tuần hoàn chu kỳ  $T$ , khi đó:  $x_3(n+T) = x_3(n)$ ,  $T \in \mathbb{Z}^+$

Ta có:  $x_3(n+T) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{2\pi}{3}T\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{2\pi}{5}T\right)$ . Để  $x_3(n+T) = x_3(n)$  thì:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{3}T = k2\pi \\ \frac{2\pi}{5}T = m2\pi \end{cases}, \quad k, m \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} T = 3k \\ T = 5m \end{cases} \Leftrightarrow T = 15k$$

Chọn  $k$  nhỏ nhất để  $T$  nguyên, có  $k = 1$ , vậy tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ  $T = 15$ .

#### 1.5. Hệ TTBB nhân quả có quan hệ vào ra: $y(n) + \sum_{k=1}^{10} a_k y(n-k) = x(n) + \beta x(n-1)$ . Chứng minh rằng:

a)  $h(0) \neq 0$

Khi  $x(n) = \delta(n)$  thì  $y(n) = h(n)$ , do đó:

$$h(n) + \sum_{k=1}^{10} a_k h(n-k) = \delta(n) + \beta \delta(n-1)$$

$$\Rightarrow h(0) + \sum_{k=1}^{10} a_k h(-k) = \delta(0) + \beta \delta(-1) = 1$$

Vì hệ là nhân quả nên  $\sum_{k=1}^{10} a_k h(-k) = 0$ , suy ra:  $h(0) = 1 \neq 0$  (đpcm).

b)  $a_1$  có thể xác định được nếu biết  $h(0)$  và  $h(1)$ .

Tương tự câu a), ta có:

$$h(1) + \sum_{k=1}^{10} a_k h(1-k) = \delta(1) + \beta \delta(0) = \beta$$

Vì hệ là nhân quả nên  $\sum_{k=1}^{10} a_k h(1-k) = 0$  với  $k > 1$ , do đó:

$$h(1) + a_1 h(0) = \beta \Rightarrow a_1 = \frac{\beta - h(1)}{h(0)} \text{ (đpcm)}$$

**1.6. Hệ S có tín hiệu vào  $x(n)$  và tín hiệu ra  $y(n)$ . Hệ này có được bằng cách mắc hệ S1 nối tiếp S2 theo sau. Quan hệ vào ra đối với 2 hệ S1 và S2 là: S1:  $y_1(n) = 2x_1(n) + 4x_1(n-1)$ ; S2:  $y_2(n) = x_2(n-2) + \frac{1}{2}x_2(n-3)$ . Xác định quan hệ vào ra của hệ S.**

Đầu ra của S1 là đầu vào của S2, gọi đầu ra của S1 là  $w(n)$ , ta có:

$$w(n) = 2x(n) + 4x(n-1);$$

$$\begin{aligned} y(n) &= w(n-2) + \frac{1}{2}w(n-3) = [2x(n-2) + 4x(n-3)] + \frac{1}{2}[2x(n-3) + 4x(n-4)] \\ &= 2x(n-2) + 5x(n-3) + 2x(n-4) \end{aligned}$$

Vậy quan hệ vào ra của hệ S là:  $y(n) = 2x(n-2) + 5x(n-3) + 2x(n-4)$

**1.7. Hệ TTBB có PTSP:  $y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$ . Xác định đáp ứng xung và đáp ứng tần số.**

Đáp ứng xung của hệ là đầu ra của hệ khi đầu vào là xung đơn vị, do đó:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=0 \\ -\frac{1}{2}, & n=1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đáp ứng tần số:

$$\text{Cách 1: dựa vào PTSP: } H(e^{jw}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-jw}}{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-jw} = \frac{1}{2}e^{-\frac{jw}{2}}(e^{\frac{jw}{2}} - e^{-\frac{jw}{2}}) = j \sin \frac{\omega}{2} e^{-\frac{jw}{2}}$$

$$\text{Cách 2: dựa vào định nghĩa: } H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jwn} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-jw} = \dots$$

**1.8. Hệ TTBB có quan hệ vào ra:  $y(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(n-m)$ . Xác định đáp ứng tần số của hệ.**

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x(n-m) \Rightarrow h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases} = \frac{1}{M}[u(n) - u(n-M+1)]$$

$$\text{Đáp ứng tần số: } H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jwn} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jwn} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}}$$

**1.9. Phương trình sai phân mô tả quan hệ vào ra của 1 hệ TTBB nhân quả là:  $y(n) = -\frac{1}{8}y(n-2) + \frac{3}{4}y(n-1) + x(n)$ . Xác định đáp ứng xung của hệ.**

PTSP tổng quát:  $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$ . Ở đây  $N=2, M=0$ , do đó đây là hệ truy hồi.

Đáp ứng tần số được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 H(e^{jw}) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-j2w}} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-jw}} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-jw}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-jw}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right] e^{-jwk} \\
 &\Rightarrow h(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)
 \end{aligned}$$

1.10. Cho tín hiệu  $x(n)$  có:  $X(e^{jw}) = \frac{1}{2-e^{jw}}$ . Tìm biến đổi Fourier của tín hiệu  $y(n) = nx(n)$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 X(e^{jw}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-jwn} \Rightarrow \frac{dX(e^{jw})}{dw} = -jn \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-jwn} = -j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n) \cdot e^{-jwn} = -j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-jwn} \\
 &\Rightarrow j \frac{dX(e^{jw})}{dw} = -j^2 Y(e^{jw}) = Y(e^{jw})
 \end{aligned}$$

Giả thiết:

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{2-e^{jw}} \Rightarrow Y(e^{jw}) = j \frac{dX(e^{jw})}{dw} = j \cdot \frac{-je^{-jw}}{(2-e^{jw})^2} = \frac{e^{-jw}}{(2-e^{jw})^2}$$

1.11. Xác định biến đổi Fourier của:  $x(n) = a^{|n|}$ ,  $|a| < 1$ .

$$\begin{aligned}
 X(e^{jw}) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jwn} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{m=1}^{+\infty} a^m e^{jwm} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-jwn} \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} (ae^{jw})^m + \sum_{m=0}^{+\infty} (ae^{-jw})^m
 \end{aligned}$$

Do  $|a| < 1$  nên các chuỗi trên đều hội tụ. Khi đó:

$$X(e^{jw}) = \frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} + \frac{1}{1-ae^{-jw}} = \frac{1-a^2}{1+a^2-ae^{jw}-ae^{-jw}} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2\cos w}, \quad |a| < 1$$

## CHƯƠNG 2: BIẾN ĐỔI Z

2.1. Xác định biến đổi Z 2 phía và tìm miền hội tụ:

a)  $x(n) = u(n)$

Biến đổi Z:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , với miền hội tụ  $1 < |z| < \infty$

b)  $x(n) = e^{an} \sin(\omega_0 n) u(n)$

Xét  $y(n) = \sin(\omega_0 n) u(n)$ , ta có  $Y(z) = \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$ ,  $|z| > 1$

Suy ra:  $X(z) = Z\{e^{an} y(n)\} = \sum e^{an} y(n) z^{-n} = \sum y(n) (e^{-a} z)^{-n} = Y(e^{-a} z) = \frac{e^a z^{-1} \sin \omega_0}{1-2e^a z^{-1} \cos \omega_0 + e^{2a} z^{-2}}$ ,  $|z| > e^a$

c)  $x(n) = \delta(n-m)$

Biến đổi Z:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)z^{-n} = 1 \cdot z^{-m} = z^{-m}$

Miền hội tụ: Toàn mặt phẳng Z, trừ 0 nếu  $m > 0$ , trừ  $\infty$  nếu  $m < 0$

d)  $x(n) = -u(-n-1)$

Biến đổi Z:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) \cdot z^{-n}$ , đặt  $m = -n$ , ta có:

$$X(z) = - \sum_{m=1}^{+\infty} z^m = - \left( \sum_{m=0}^{+\infty} z^m - 1 \right) = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Miền hội tụ:  $|z| < 1$

e)  $x(n) = na^n u(n)$

Biến đổi Z: Giả sử  $x(n) = ny(n)$ ,  $y(n) = a^n u(n)$ ; ta có  $Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$  với miền hội tụ  $|z| > |a|$

$$X(z) = Z\{ny(n)\} = -z \cdot \frac{dY(z)}{dz} = -z \cdot \frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

Miền hội tụ:  $|z| > |a|$

f)  $x(n) = -na^n u(-n-1)$

Giả sử  $x(n) = ny(n)$ ,  $y(n) = -a^n u(-n-1)$ ; ta có

$$Y(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{+\infty} a^{-m} z^m = - \left( \sum_{m=1}^{+\infty} a^{-m} z^m - 1 \right) = 1 - \frac{1}{1-za^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

với miền hội tụ  $|z| < |a|$ . Từ đó có:

$$X(z) = Z\{ny(n)\} = -z \cdot \frac{dY(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

g)  $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{-n} z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

Chuỗi  $X_1(z)$  hội tụ khi:  $\left|\frac{3}{4}z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{3}{4} \left(R_{x-} = \frac{3}{4}\right)$ .

Đổi biến  $m = -n$ ; ta có:  $X_2(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m z^m$ ; chuỗi hội tụ khi  $\left|\frac{3}{4}z\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{4}{3} \left(R_{x+} = \frac{4}{3}\right)$ . Từ đó có:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{3}{4}z}{1-\frac{3}{4}z}, \text{ với miền hội tụ } \frac{3}{4} < |z| < \frac{4}{3}$$

h)  $x(n) = \sin(\omega n + \theta) u(n)$

Ta có:  $x(n) = [\sin(\omega n) \cos \theta + \cos(\omega n) \sin \theta] u(n) = \cos \theta \cdot \sin(\omega n) u(n) + \sin \theta \cdot \cos(\omega n) u(n)$

$$\Rightarrow X(z) = \cos \theta \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}} + \sin \theta \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot \cos \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}} = \frac{\sin \theta + z^{-1} \sin(\omega - \theta)}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}}$$

i)  $x(n) = \cos(\omega_0 n) u(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{2} Z\{(e^{j\omega_0})^n u(n)\} + \frac{1}{2} Z\{(e^{-j\omega_0})^n u(n)\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1$$

$$= \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{2(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{2 - 2 \cos \omega_0 z^{-1}}{2(1 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1} + z^{-2})} = \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

k)  $x(n) = \sin(\omega_0 n) u(n)$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j} Z\{(e^{j\omega_0})^n u(n)\} - \frac{1}{2j} Z\{(e^{-j\omega_0})^n u(n)\} \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1 \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} - 1 + e^{j\omega_0} z^{-1}}{2j(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{z^{-1}(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0})}{2j(1 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1} + z^{-2})} = \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}, \\ &\quad |z| > 1 \end{aligned}$$

## 2.2. Tìm biến đổi Z, miền hội tụ, các điểm không và các điểm cực:

a)  $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} = \frac{(z+1)(z+2)}{z^2}$$

Miền hội tụ: toàn mặt phẳng Z, trừ  $z=0$

Điểm không:  $z_{01} = -1, z_{02} = -2$

Điểm cực kép:  $z_{p1} = 0$

b)  $x(n) = 2^n u(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2}$$

Miền hội tụ:  $|z| > 2$

Điểm không:  $z = 0$

Điểm cực:  $z = 2$

c)  $x(n) = e^{\frac{j\pi}{2}n} 2^n u(n)$

$$x(n) = X_b\left(\frac{z}{e^{\frac{j\pi}{2}}}\right) = \frac{ze^{-\frac{j\pi}{2}}}{ze^{-\frac{j\pi}{2}} - 2}$$

Miền hội tụ:  $|z| > 2 \left| e^{\frac{j\pi}{2}} \right| = 2|j| = 2$

Điểm không:  $z = 0$

Điểm cực:  $z = 2j$

## 2.3. Tìm biến đổi Z ngược:

a)  $X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}, \quad |z| > 2$

Ta có:

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{(z^{-1} - 1)\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{z^{-1} - 1} + \frac{B}{z^{-1} - \frac{1}{2}};$$

$$A = (z^{-1} - 1)X(z)|_{z^{-1}=1} = 1; \quad B = \left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)X(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = -1$$

Suy ra:  $X(z) = \frac{2.1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow x(n) = 2.2^n u(n) - u(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$

b)  $X(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right), \quad |z| > \frac{1}{2}$

Sử dụng vi phân của biến đổi Z:  $-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = Z\{nx(n)\}$ , ta có:

$$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = -z \cdot \frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = -\frac{1}{2}z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Với miền hội tụ  $|z| > \frac{1}{2}$  thì  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right\}$ ; do đó:

$$-\frac{1}{2}z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = -\frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right\} = -\frac{1}{2} \cdot Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)\right\} = Z\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)\right\}$$

Vậy  $x(n) = -\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

c)  $X(z) = \ln(1-2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$

Sử dụng vi phân của biến đổi Z:  $-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = Z\{nx(n)\}$ , ta có:

$$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = -z \cdot \frac{-2}{1-2z} = \frac{2z}{1-2z} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Với miền hội tụ  $|z| < \frac{1}{2}$  thì  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = Z\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right\}$ ; do đó:

$$\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = -Z\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right\} = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right\}$$

Từ đây suy ra:  $x(n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

d)  $X(z) = \frac{z+2}{2z^2-7z+3}$

Ta có:  $X(z) = \frac{z+2}{2(z-\frac{1}{2})(z-3)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-3}$ , với  $A = \left(z - \frac{1}{2}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ ;  $B = (z-3)X(z)\Big|_{z=3} = 1$

Suy ra:  $X(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2}z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + z^{-1} \cdot \frac{1}{1-3z^{-1}}$

$$\Rightarrow x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) + 3^{n-1}u(n-1)$$

e)  $X(z) = \frac{z^4}{z-1}$

Ta có:  $X(z) = z^3 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{z^3 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}\right\} = u(n+3)$

f)  $X(z) = \frac{z^{-4}}{z-a}$

Ta có:  $X(z) = z^{-5} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}}$ , mà  $Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-az^{-1}}\right\} = a^n u(n) \Rightarrow x(n) = a^{n-5}u(n-5)$

g)  $X(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$

Sử dụng vi phân của biến đổi Z:  $-z \cdot \frac{dX(z)}{dz} = -z \cdot \frac{-\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = Z\{nx(n)\}$

Suy ra:  $x(n) = \frac{1}{n}u(n-1)$

## 2.4. Ứng dụng biến đổi Z 1 phía giải phương trình sai phân:

a)  $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1); \quad x(n) = \delta(n), \quad y(-1) = 0$

Biến đổi Z 1 phía cả 2 vế của PTSP, ta được:

$$Y(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] = X(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}X(z) + x(-1)]$$

Mà:  $y(-1) = 0, \quad x(-1) = 0, \quad X(z) = Z\{\delta(n)\} = 1$ , suy ra:

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \rightarrow Y(z) = 1 \rightarrow y(n) = Z^{-1}\{1\} = \delta(n)$$

b)  $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n) - \frac{1}{2}x(n-1); \quad x(n) = 0.5\delta(n), \quad y(-1) = 0$

Biến đổi Z 1 phía cả 2 vế của PTSP, ta được:

$$Y(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] = 2X(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}X(z) + x(-1)]$$

Mà:  $y(-1) = 0, \quad x(-1) = 0, \quad X(z) = Z\{0.5\delta(n)\} = 0.5$ , suy ra:

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = 1 - \frac{1}{4}z^{-1} \rightarrow Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{4}z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Lại có:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \right\} = \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n)$$

$$Z^{-1} \left\{ -\frac{1}{4}Z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \right\} = -\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\text{Vậy: } y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n) - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

## 2.5. Hệ TT-BB có PTSP: $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$

a) Xác định hàm truyền đạt, điểm không, điểm cực

Hàm truyền đạt được xác định bởi:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{1 \cdot z^{-1}}{1 \cdot z^{-0} - 1 \cdot z^{-1} - 1 \cdot z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{\left( z - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left( z - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}$$

Điểm không:  $z = 0$

Điểm cực:  $z_{p1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62, z_{p2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$

b) Nhận xét tính nhân quả, ổn định.

+ Với hệ nhân quả thì miền hội tụ không chứa điểm cực

+ Với hệ ổn định thì miền hội tụ chứa đường tròn đơn vị

Từ đó ta có kết luận:

+ Với  $0 \leq |z| < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ : hệ không nhân quả, không ổn định

+ Với  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq |z| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ : hệ không nhân quả, ổn định

+ Với  $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ : hệ nhân quả, không ổn định

c) Xác định đáp ứng xung sao cho hệ nhân quả

Ta có:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left( 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1} \right) \left( 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1} \right)} = \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}$$

$$\text{Với } A = \left( 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1} \right) H(z) \Big|_{z^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; B = \left( 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1} \right) H(z) \Big|_{z^{-1} = \frac{2}{1-\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}$$

Để hệ nhân quả thì  $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , do đó:

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n)$$

**2.6. Hệ TTBB có tính chất sau:** Nếu tín hiệu vào là  $x_1(n) = \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n) - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$  thì tín hiệu ra là  $y(n) = \left( \frac{1}{3} \right)^n u(n)$ . Nếu tín hiệu vào là  $x_2(n) = \left( \frac{1}{5} \right)^n u(n)$ , hãy xác định tín hiệu ra.

Gọi  $y_2(n)$  là tín hiệu ra khi tín hiệu vào là  $x_2(n)$ .



Gọi  $H(z)$  là hàm truyền đạt,  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$ ,  $Y_1(z)$ ,  $Y_2(z)$  lần lượt là biến đổi Z của  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ ,  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ .  
Ta có:

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} \Rightarrow Y_2(z) = X_2(z) \cdot \frac{Y_1(z)}{X_1(z)}$$

Mà có:

$$X_2(z) = Z \left\{ \left( \frac{1}{5} \right)^n u(n) \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{5}$$

$$Y_1(z) = Z \left\{ \left( \frac{1}{3} \right)^n u(n) \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$X_1(z) = Z \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n) \right\} - \frac{1}{4} Z \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1) \right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{1}{4} z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$Y_2(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{5} z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}}$$

Với  $A = Y_2(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=3} = -5$ ;  $B = Y_2(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=4} = 15$ ;  $C = Y_2(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=5} = -9$

Vì thế:

$$Y_2(z) = -5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} - 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}} \Rightarrow y_2(n) = \left[ -5 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n + 15 \cdot \left( \frac{1}{4} \right)^n - 9 \left( \frac{1}{5} \right)^n \right] u(n)$$

**2.7. Hàm truyền đạt của hệ TTBB nhân quả có một điểm không bậc 2 tại gốc tọa độ và 2 điểm cực lần lượt tại  $z = -\frac{1}{3}$  và  $z = 1/2$ . Đối với thành phần 1 chiều (khi  $z = 1$ ) thì  $H(z)=6$ .**

a) Xác định hàm truyền đạt  $H(z)$

Hàm truyền đạt có dạng:

$$H(z) = H_0 \cdot \frac{\prod(z - z_r)}{\prod(z - p_k)}$$

$H(z)$  có 1 điểm không bậc 2 tại gốc tọa độ nên  $\prod(z - z_r) = z^2$

$H(z)$  có 2 điểm cực như giả thiết nên  $\prod(z - p_k) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)$

Suy ra:  $H(z) = H_0 \cdot \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)}$ . Tại  $z=1$  thì  $H(z)=6$  nên có  $6 = H_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} \Rightarrow H_0 = 4$

Vậy:

$$H(z) = \frac{4z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

b) Xác định đáp ứng xung  $h(n)$

Ta có:

$$H(z) = \frac{4z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right) z^{-1}}$$

Với  $A = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{12}{5}$ ;  $B = H(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=-3} = \frac{8}{5}$

Suy ra:

$$h(n) = \frac{12}{5}Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \right\} + \frac{8}{5}Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3}Z^{-1}} \right\} = \left[ \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] u(n)$$

c) Xác định đáp ứng của hệ đối với các tín hiệu:

$$+ x(n) = u(n) - u(n-1)$$

Ta có:  $x(n) = u(n) - u(n-1) = \delta(n) \Rightarrow$  xung đơn vị

Gọi  $y(n)$  là đáp ứng của hệ. Vì đầu vào là xung đơn vị nên ta có đáp ứng:

$$y(n) = h(n) = \left[ \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] u(n)$$

$+ x(n)$  có được từ lấy mẫu tín hiệu tương tự  $x(t) = 50 + 10 \cos 20\pi t + 30 \cos 40\pi t$  với tần số góc lấy mẫu  $\omega_s = 2\pi 40 \text{ rad/s}$ .

$$\text{Chu kỳ lấy mẫu: } T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{40} \text{ s}$$

$$\text{Từ đây ta có tín hiệu } x(n) = 50 + 10 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 30 \cos(\pi n)$$

## CHƯƠNG 3: BỘ LỌC SỐ

### 3.1. Hệ TTBB có quan hệ vào ra: $y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$

a) Xác định đáp ứng tần số:

Biến đổi Fourier 2 vế, ta được:

$$Y(e^{jw}) = \frac{1}{3}[e^{-jw}X(e^{jw}) + X(e^{jw}) + e^{jw}X(e^{jw})] = \frac{1}{3}X(e^{jw})[e^{-jw} + e^{jw} + 1]$$

$$\Rightarrow H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1}{3}(e^{-jw} + e^{jw} + 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos w$$

b) Xác định và vẽ đáp ứng biên độ. Nhận xét tính chất lọc của hệ.

Đáp ứng biên độ xác định bởi:

$$|H(e^{jw})| = \left| \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos w \right|$$

Vẽ đáp ứng biên độ: tự vẽ. Nhận xét đây là hàm giảm  $\Rightarrow$  Lọc thông thấp.

### 3.2. Hàm truyền đạt của bộ lọc số có dạng: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-3}$

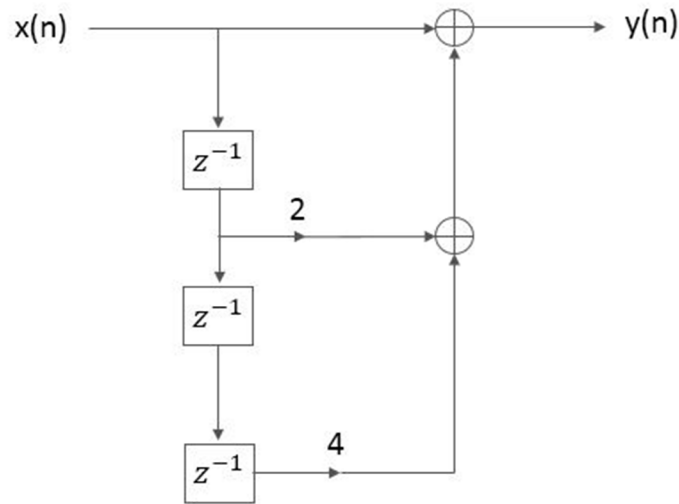
a) Xác định PTSP biểu diễn quan hệ vào ra

PTSP Tổng quát:  $\sum_0^N a_k y(n-k) = \sum_0^M b_k x(n-k)$ . Hàm truyền đạt đối với PTSP này:

$$H(z) = \frac{\sum_0^M b_k z^{-k}}{\sum_0^N a_k z^{-k}} = \frac{1 + 2z^{-1} + 4z^{-3}}{1}$$

Suy ra PTSP:  $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 4x(n-3)$

b) Vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc



### 3.3. Hệ TTBB có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1}}{1 + bz^{-1} + cz^{-2}}, \quad a, b, c = \text{hằng số}$$

a) Xác định quan hệ vào ra của hệ.

Ta có:

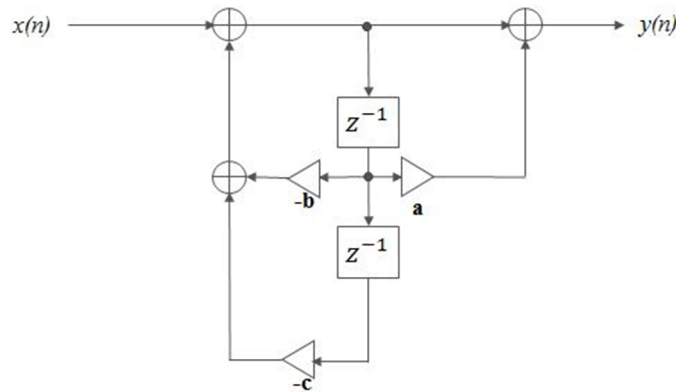
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + az^{-1}}{1 + bz^{-1} + cz^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(z)(1 + bz^{-1} + cz^{-2}) = X(z)(1 + az^{-1})$$

Sử dụng tính chất trễ của biến đổi Z, thực hiện biến đổi Z ngược 2 vế, ta có:

$$y(n) + by(n-1) + cy(n-2) = x(n) + ax(n-1)$$

b) Vẽ sơ đồ dạng chuẩn tắc



3.4. Giả thiết tín hiệu  $x(n]$  là tổng của 2 tín hiệu  $x_1(n]$  và  $x_2(n]$ .  $x_1(n]$  là tín hiệu cosin có tần số góc là  $0,1\text{rad/s}$ ,  $x_2(n]$  cũng là tín hiệu cosin có tần số góc là  $0,4\text{rad/s}$ . Người ta dùng bộ lọc thông cao FIR có độ dài đáp ứng xung bằng 3 với giả thiết  $h(0) = h(2) = \alpha$  và  $h(1) = \beta$  để triệt tiêu tín hiệu  $x_1(n]$  và cho qua hoàn toàn tín hiệu  $x_2(n]$ . Hãy xác định các hệ số  $\alpha, \beta$  và vẽ sơ đồ khối thực hiện bộ lọc FIR này.

Ta có:  $h(0) = h(2) = \alpha, h(1) = \beta \Rightarrow h(n) = \alpha\delta(n) + \beta\delta(n-1) + \alpha\delta(n-2)$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \alpha + \beta e^{-j\omega} + \alpha e^{-j2\omega} = \alpha(1 + e^{-j2\omega}) + \beta e^{-j\omega} = \frac{2\alpha e^{-j\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{2} + \beta e^{-j\omega}$$

$$= 2\alpha e^{-j\omega} \cdot \cos\omega + \beta e^{-j\omega} = (2\alpha \cos\omega + \beta) e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 2\alpha \cos \omega + \beta$$

Tín hiệu  $x_1(n)$  bị triệt tiêu nên:  $|H(e^{j0,1})| = 0 \Rightarrow 2\alpha \cos(0,1) + \beta = 0$

Tín hiệu  $x_2(n)$  được cho qua hoàn toàn nên:  $|H(e^{j0,4})| = 1 \Rightarrow 2\alpha \cos(0,4) + \beta = 1$

Giải hệ (1)+(2) ta thu được:  $\alpha = -6,76195$ ;  $\beta = 13,45634$

**3.5. Xét bộ lọc số có quan hệ vào ra:  $y(n) = -0,9x(n-1) + 0,1x(n)$**

Xác định đáp ứng tần số của hệ. Tính đáp ứng biên độ tại thành phần 1 chiều và tại các tần số  $\omega = \frac{\omega_s}{4}, \omega = \omega_s/2$ , với  $\omega_s$  là tần số góc lấy mẫu.

Biến đổi Fourier cả 2 vế PTSP:

$$Y(e^{j\omega}) = -0,9e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + 0,1X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{0,1}{1 + 0,9e^{-j\omega}}$$

Đáp ứng biên độ:  $|H(e^{j\omega})| = \frac{0,1}{|1+0,9e^{-j\omega}|} = \frac{0,1}{\sqrt{1,81+1,8\cos\omega}}$

Tại thành phần 1 chiều:  $\omega = 0$ :

$$|H(e^{j,0})| = \frac{0,1}{\sqrt{1,81 + 1,8 \cos 0}} = 0.05263$$

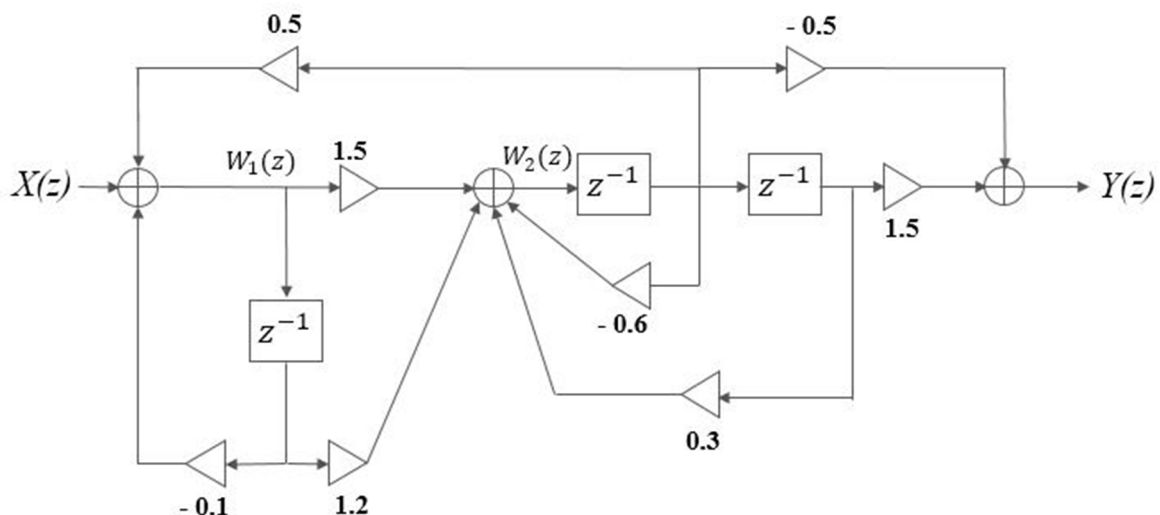
Tại tần số  $\omega = \frac{\omega_s}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ :

$$\left| H \left( e^{j\frac{\pi}{2}} \right) \right| = \frac{0,1}{\sqrt{1,81 + 1,8 \cos \frac{\pi}{2}}} = 0.07433$$

Tại tần số  $\omega = \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ :

$$|H(e^{j.\pi})| = \frac{0,1}{\sqrt{1,81 + 1,8 \cos \pi}} = 1$$

3.6. Cho hệ TT-BB như hình vẽ. Xác định hàm truyền đạt  $H(z)$ , phương trình sai phân của hệ.



Xét các thành phần trung gian  $W_1(z), W_2(z)$  như hình vẽ. Xét lần lượt tại các phần tử cộng, ta có:

$$W_1(z) = X(z) + 0.5z^{-1}W_2(z) - 0.1z^{-1}W_1(z) \quad (1)$$

$$W_2(z) = 1.5W_1(z) + 1.2z^{-1}W_1(z) - 0.6z^{-1}W_2(z) + 0.3z^{-2}W_2(z) \quad (2)$$

$$Y(z) = 1.5z^{-2}W_2(z) - 0.5z^{-1}W_2(z) = W_2(z)(1.5z^{-2} - 0.5z^{-1}) \quad (3)$$

Suy ra:

$$W_2(z) = W_1(z) \cdot \frac{1.5 + 1.2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}}, \quad \text{thay vào (1), có:}$$

$$\begin{aligned} W_1(z) &= X(z) + 0.5z^{-1}W_1(z) \cdot \frac{1.5 + 1.2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}} - 0.1z^{-1}W_1(z) \\ \Rightarrow \frac{X(z)}{W_1(z)} &= 1 + 0.1z^{-1} - 0.5z^{-1} \cdot \frac{1.5 + 1.2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}} = \frac{1 - 0.05z^{-1} - 0.84z^{-2} - 0.03z^{-3}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}} \\ &\Rightarrow W_1(z) = X(z) \cdot \frac{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}}{1 - 0.05z^{-1} - 0.84z^{-2} - 0.03z^{-3}} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_2(z)(1.5z^{-2} - 0.5z^{-1}) = W_1(z) \frac{1.5 + 1.2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}} \cdot (1.5z^{-2} - 0.5z^{-1}) \\ &= X(z) \cdot \frac{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}}{1 - 0.05z^{-1} - 0.84z^{-2} - 0.03z^{-3}} \cdot \frac{1.5 + 1.2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}} \cdot (1.5z^{-2} - 0.5z^{-1}) \\ &= X(z) \cdot \frac{-0.75z^{-1} + 1.65z^{-2} + 1.8z^{-3}}{1 - 0.05z^{-1} - 0.84z^{-2} - 0.03z^{-3}} \\ &\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-0.75z^{-1} + 1.65z^{-2} + 1.8z^{-3}}{1 - 0.05z^{-1} - 0.84z^{-2} - 0.03z^{-3}} \end{aligned}$$

Từ đây có PTSP:

$$\begin{aligned} y(n) - 0.05y(n-1) - 0.84y(n-2) - 0.03y(n-3) \\ = -0.75x(n-1) + 1.65x(n-2) + 1.8x(n-3) \end{aligned}$$

**3.6. Cho hàm truyền đạt của một hệ TTBB như sau:**

$$H(z) = \frac{z - 1}{z^2 + z + 1}$$

**Đánh giá đáp ứng tần số thông qua  $H(z)$  với  $\omega = \pi/3$ .**

Ta có:

+ Điểm không:  $z = 1$

+ Điểm cực là nghiệm của phương trình:  $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

+ Thành phần 1 chiều: khi  $z = 1$  thì  $H(z)=0$ , do đó  $H_0 = 0$

Đáp ứng tần số có dạng:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_{i=1}^1 V_i(\omega)}{\prod_{k=1}^2 U_k(\omega)} e^{j(\sum_{r=1}^1 \varphi_r - \sum_{k=1}^2 \varphi_k)}$$

Đáp ứng biên độ ứng với  $\omega = \pi/3$ :

$$|H(e^{j\pi/3})| = \frac{|e^{\frac{j\pi}{3}} - 1|}{\left| e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right| \left| e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right|}$$

Có:

$$\left| e^{\frac{j\pi}{3}} - 1 \right| = \left| \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{j(\sqrt{3})}{2} \right| = 1$$

$$\left| e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right| = 1$$

$$\left| e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right| = |1 + j\sqrt{3}| = 2$$

Suy ra:  $|H(e^{j\pi/3})| = 1/2$

Đáp ứng pha:

$$\arg \left[ H \left( e^{\frac{j\pi}{3}} \right) \right] = \arg H_0 + \arg[e^{\frac{j\pi}{3}} - 1] - \left( \arg \left[ e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right] + \arg \left[ e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right] \right)$$

Có:

$$\arg \left[ e^{\frac{j\pi}{3}} - 1 \right] = \arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arg \left[ e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg \left[ e^{\frac{j\pi}{3}} - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Suy ra:  $\arg \left[ H \left( e^{\frac{j\pi}{3}} \right) \right] = -\frac{11\pi}{12}$

## CHƯƠNG 4: BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

**4.1. Tìm biến đổi ngược Fourier 4 điểm  $X(0) = 0, X(1) = 2 - 2j, X(2) = 0, X(3) = 2 + 2j$ .**

Ta có biến đổi ngược IDFT:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{n còn lại} \end{cases}$$

Với  $0 \leq n \leq 3$ , ta có:

$$x(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j \frac{\pi}{2} nk} = \dots = \frac{1}{2} (1-j) \cdot j^n + \frac{1}{2} (1+j)(-j)^n = \frac{1}{2} [j^n + (-j)^n - j^{n-1} - (-j)^{n-1}]$$

$$\Rightarrow x(0) = 1, x(1) = 1, x(2) = -1, x(3) = -1, x(n) = 0 \text{ với } n \text{ còn lại}$$

#### 4.2. (bài 4.2 từ bt)

Ta có:

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$$

Sử dụng tính chất trễ của biến đổi Z, ta có biến đổi Z của x(n) là:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}, \quad z \neq 0$$

Theo giả thiết:

$$\begin{aligned} X_1(k) &= X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}k}} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k} + e^{-j2\pi k} + e^{-j\frac{5\pi}{2}k} \\ &= 1 + (-j)^k + (-1)^k + j^k + 1 + (-j)^k = 2 + 2(-j)^k + (-1)^k + j^k \end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$X_1(0) = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

$$X_1(1) = 2 - 2j - 1 + j = 1 - j$$

$$X_1(2) = 2 - 2 + 1 - 1 = 0$$

$$X_1(3) = 2 + 2j - 1 - j = 1 + j$$

Có  $x_1(n)$  là biến đổi ngược DFT của  $X_1(k)$  nên:

$$x_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ở đây  $N = 4$  (do k chạy từ 0 đến 3), suy ra:

$$x_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_1(k) e^{j\frac{\pi}{2}nk}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Khi  $0 \leq n \leq 3$ , ta có:

$$x_1(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_1(k) e^{j\frac{\pi}{2}nk} = \frac{1}{4} \left( 6 + (1-j) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + (1+j) \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}n} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} (1-j) \cdot j^n + \frac{1}{4} (1+j)(-j)^n$$

Do đó:

$$x_1(0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} (1-j) \cdot 1 + \frac{1}{4} (1+j) \cdot 1 = 2$$

$$x_1(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} (1-j) \cdot j + \frac{1}{4} (1+j) \cdot (-j) = 2$$

$$x_1(2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} (1-j) - \frac{1}{4} (1+j) = 1$$

$$x_1(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(1-j) \cdot j + \frac{1}{4}(1+j) \cdot j = 1$$

$$\Rightarrow x_1(0) = 2, x_1(1) = 2, x_1(2) = 1, x_1(3) = 1, x(n) = 0 \text{ với } n \text{ còn lại}$$

**4.3. Khung tín hiệu tiếng nói có 240 mẫu với tần số lấy mẫu  $F_s = 8 \text{ kHz}$ . Tính biến đổi Fourier của khung này dùng 1024 điểm FFT ta được 1024 mẫu  $X(k)$  với  $k = 1, 2, \dots, N$ . Tần số tương ứng của mẫu thứ 55 của  $X(k)$  bằng bao nhiêu và tại sao?**

Ta thực hiện chia vòng tròn đơn vị làm 1024 cung tròn, có tần số lấy mẫu là  $8 \cdot 10^3 \text{ kHz}$  nên:

Chênh lệch tần số giữa 2 mẫu liên tiếp là:

$$\frac{8 \cdot 10^3}{1024} = 7,8125 \text{ Hz}$$

Tần số tương ứng của mẫu thứ 55 sẽ ứng với cung tròn thứ 54, và bằng:

$$54 \cdot 7,8125 = 421,875 \text{ Hz}$$

**4.4. Tần số tương ứng (Hz) sẽ là bao nhiêu đối với tần số góc chuẩn hóa bằng  $\pi/4$ . Biết tần số lấy mẫu  $F_s = 10 \text{ kHz}$ .**

Với tần số góc bằng  $2\pi$  thì ta có tần số lấy mẫu là  $10 \text{ kHz}$ .

Vậy với tần số góc chuẩn hóa bằng  $\pi/4$  thì tần số tương ứng sẽ là:  $10 \cdot \frac{\pi/4}{2\pi} = 1,25 \text{ kHz}$

#### 4.5. (bài 4.4 từ BT)

Biến đổi Z của tín hiệu  $x(n)$  là:

$$X(z) = 2(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})$$

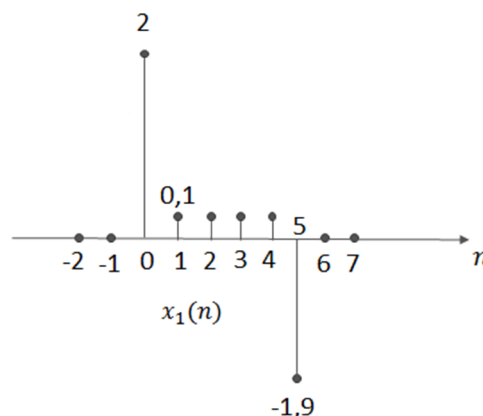
Gọi  $X_1(z)$  là biến đổi Z của tín hiệu  $x_1(n)$ , ta có:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= X(z) \cdot H(z) = 2(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4})(1 - 0,95z^{-1}) \\ &= 2 + 0,1z^{-1} + 0,1z^{-2} + 0,1z^{-3} + 0,1z^{-4} - 1,9z^{-5} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$x_1(n) = Z^{-1}\{X_1(z)\} = 2\delta(n) + 0,1\delta(n-1) + 0,1\delta(n-2) + 0,1\delta(n-3) + 0,1\delta(n-4) - 1,9\delta(n-5)$$

Về tín hiệu  $x_1(n)$ :



Độ dài tín hiệu  $x_1(n)$  là 6 nên ta có hàm cửa sổ Hamming với  $M = 6$ :

$$w(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

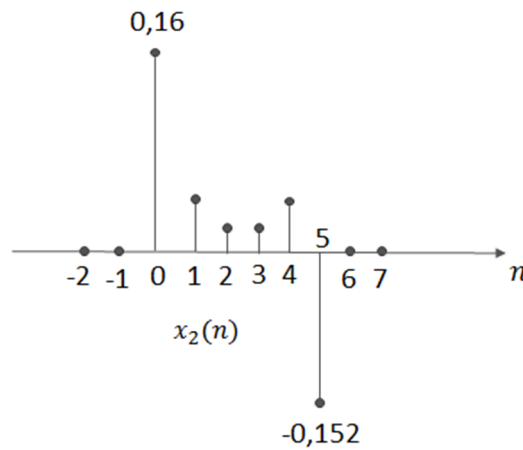


$$\begin{aligned}
w(0) &= 0,54 - 0,46 \cdot \cos 0 = 0,08; & w(1) &= 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0,398 \\
w(2) &= 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \approx 0,912; & w(3) &= 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) \approx 0,912 \\
w(4) &= 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) \approx 0,398; & w(5) &= 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{10\pi}{5}\right) = 0,08
\end{aligned}$$

Tín hiệu  $x_2(n)$  thu được bằng cách cho tín hiệu  $x_1(n)$  qua cửa sổ  $w(n)$ , nên ta có:  $x_2(n) = x_1(n) \cdot w(n)$ ;  $x_2(n) = 0$  với  $n < 0$  hoặc  $n > 5$ .

$$\begin{aligned}
x_2(0) &= x_1(0) \cdot w(0) = 0,16; & x_2(1) &= x_1(1) \cdot w(1) \approx 0,0398 \\
x_2(2) &= x_1(2) \cdot w(2) \approx 0,0912; & x_2(3) &= x_1(3) \cdot w(3) \approx 0,0912 \\
x_2(4) &= x_1(4) \cdot w(4) \approx 0,0398; & x_2(5) &= x_1(5) \cdot w(5) = -0,152
\end{aligned}$$

Vẽ tín hiệu  $x_2(n)$ :



Biến đổi DFT của tín hiệu  $x_2(n)$  có chiều dài hữu hạn là  $N = 6$ :

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=0}^5 x_2(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{5} nk}, & 0 \leq k \leq 5 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

**4.6. Hàm truyền đạt của hệ TTBB nhân quả có dạng như sau:**

$$H(z) = \frac{az - 1}{z - a}, \quad \text{với } a \text{ là số thực}$$

**a. Xác định giá trị của  $a$  sao cho  $H(z)$  ứng với một hệ ổn định.**

**b. Lấy 1 giá trị đặc biệt của  $a$  trong số các giá trị này, biểu diễn các điểm cực, điểm không và miền hội tụ.**

**c. Đánh giá  $|H(f)|$**

**GIẢI:**

- Hệ ổn định và nhân quả nên điểm cực sẽ nằm trong đường tròn đơn vị, nên  $|a| < 1$ .
- Chọn  $a = 1/2$ . Khi đó ta có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z - 1}{z - \frac{1}{2}}$$

- + Điểm không là nghiệm của tử số:  $z = 2$
- + Điểm cực là nghiệm của mẫu số:  $p = 1/2$ .
- + Miền hội tụ:  $|z| > \frac{1}{2}$  (do hệ là nhân quả).

c.