ĐỀ THI THỬ GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 2022.2

Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [1đ] Tính độ cong của đường cong $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ tại điểm ứng với $t = 0$.

Câu 2. [1đ] Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $x^3 + 3xy + e^{z^2} = 5$ tại điểm $M(1,1,0)$

Câu 3. [1đ] Tìm hình bao của họ đường cong $x\sin^3 c + y\cos^3 c = 1$ với $c \in \mathbb{R}$ là tham số.

Câu 4. [1đ] Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1+\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy$

Câu 5. [1đ] Tính tích phân kép $\iint\limits_D dx\,dy$ trong đó D: $\begin{cases} y \le x^2 + y^2 \le 2y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

Câu 6. [1đ] Tính $\iiint\limits_V \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$ với V là miền giới hạn bởi $4x^2 + y^2 + z^2 \le z$

Câu 7. [1đ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 + 2y - 3x + 1 = 0 \\ 3x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Câu 8. [1đ] Tính thể tích của miền được giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, x = y^2, z = y^2$ và mặt Oxy

Câu 9. [1đ] Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + 2\sin^2 x\right) dx$

Câu 10. [1đ] Xét sự hội tụ đều của $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} x^2 dx$ trên khoảng $(0, +\infty)$.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

Giải câu 1. Ta có:

$$\begin{cases} x'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t \\ y'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) = e^t\cos t - e^t\sin t - e^t\sin t - e^t\cos t = -2e^t\sin t \\ y''(t) = e^t\sin t + e^t\cos t + e^t\cos t - e^t\sin t = 2e^t\cos t \end{cases}$$

Độ cong của đường cong cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ được tính theo công thức:

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}$$

Vậy độ cong cần tìm là $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Giải câu 2. Đặt $F = x^3 + 3xy + e^{z^2} - 5 = 0$

$$\begin{cases} F'_x = 3x^2 + 3y \\ F'_y = 3x \\ F'_z = 2z.e^{z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(M) = 6 \\ F'_y(M) = 3 \\ F'_z(M) = 0 \end{cases}$$

- Phương trình pháp tuyến của mặt cong $\begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$
- Phương trình tiếp diện của mặt cong $6(x-1) + 3(y-1) = 0$

Giải câu 3. Đặt $F(x,y,c) = x\sin^3 c + y\cos^3 c - 1$

Xét hệ $\begin{cases} F'_x = \sin^3 c = 0 \\ F'_y = \cos^3 c = 0 \end{cases}$, không tồn tại bộ (x,y) thỏa mãn hệ phương trình.

Ta khử c từ hệ:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sin^3 c + y\cos^3 c - 1 = 0 \\ 3x\sin^2 c\cos c - 3y\cos^2 c\sin c = 0 \end{cases}$$

Từ đây xét các trường hợp:

TH1: Với $\cos c = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

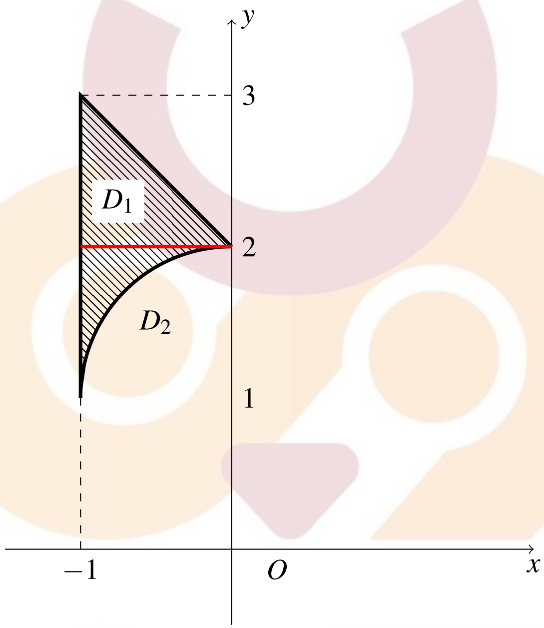
TH2: Với $\sin c = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

TH3: Ta có: $\Rightarrow \begin{cases} x\sin^3 c + y\cos^3 c - 1 = 0 \\ x\sin c = y\cos c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sin^3 c + x\sin c\cos^2 c = 1 \\ x\sin c = y\cos c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\sin c = 1 \\ x\sin c = y\cos c \end{cases} \Rightarrow x\sin c = y\cos c = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1\,(x, y \neq 0)$

Vậy hình bao của họ đường cong là $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$ hợp với 2 đường $x^2 = 1$ và $y^2 = 1$

Giải câu 4. (Hình vẽ)



Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $x = 0, x = -1, y = 1 + \sqrt{1 - x^2}, y = 2 - x$.

Chia miền D thành 2 miền: D_1 và D_2 với $D_1 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ -1 \leq x \leq -\sqrt{1 - (y-1)^2} \end{cases}$ và $D_2 :$

$\begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ -1 \leq x \leq 2 - y \end{cases}$

Vậy khi đổi thứ tự lấy tích phân ta được:

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy = \int_{1}^{2} dy \int_{-1}^{-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx + \int_{2}^{3} dy \int_{-1}^{2-y} f(x,y)dx$$

Giải câu 5. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (r > 0) \implies |J| = r$

D : $\begin{cases} r\sin\varphi \le r^2 \le 2r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \le r\sin\varphi \le \sqrt{3}r\cos\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \sin\varphi \le r \le 2\sin\varphi \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r\,dr = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{16}(6 - 3\sqrt{3} + \pi)$$

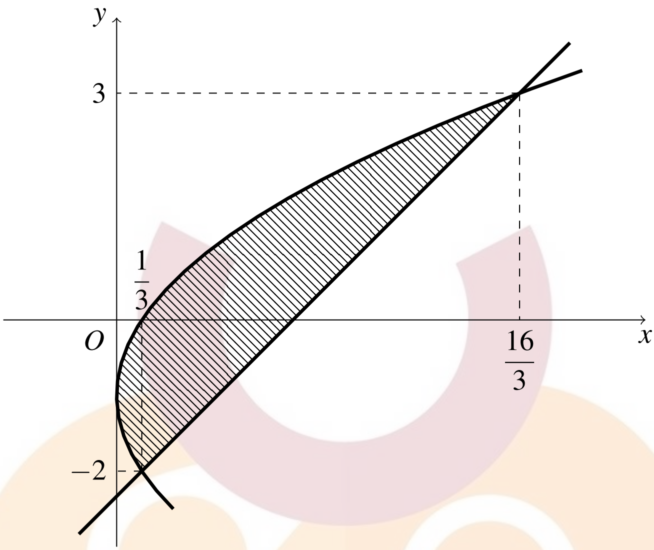
Giải câu 6. Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \implies |J| = \dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$

$V \implies V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r \ge 0 \\ 0 \le r^2 \le r\cos\theta \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Từ đó: $I = \iiint\limits_V \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\frac{1}{2}r^2\sin\theta\,dr$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{-\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\cos\theta = \frac{-\pi\cos^5\theta}{20}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{20}$$

Giải câu 7. Hình minh họa:



Tìm tung độ giao điểm của hai đường cong bằng cách khử x từ hai phương trình đã cho ta có:

$y^2+2y+1=3y+7 \Leftrightarrow y=3, y=-2.$

Dễ thấy $y^2+2y+1 \le 3y+7$ khi $y \in [-2,3]$

$$\Rightarrow (D):\begin{cases} -2 \le y \le 3 \\ \dfrac{y^2+2y+1}{3} \le x \le \dfrac{3y+7}{3} \end{cases}$$

Diện tích của miền D là: $S(D)=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{3} dy \int\limits_{\frac{y^2+2y+1}{3}}^{\frac{3y+7}{3}} dx=\int\limits_{-2}^{3} \dfrac{6+y-y^2}{3}dy=\dfrac{125}{18}$

Giải câu 8. Gọi V là miền giới hạn bởi các mặt cong $y=x^2, y=\sqrt{x}, z=y^2$ và mặt Oxy
Trong miền V ta có: $0 \le z \le y^2$
Thể tích của miền V là:

$I=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{y^2} dz$ (với D là miền giới hạn bởi $y=x^2, x=y^2$ trên Oxy)

$I=\iint\limits_D y^2dxdy$

D tương đương với $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$$\text{Do đó: } I = \iint\limits_D y^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x\sqrt{x} - x^6}{3} dx = \frac{3}{35}$$

Vậy thể tích của miền được giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, x = y^2, z = y^2$ và mặt Oxy là $\frac{3}{35}$(đvtt).

Giải câu 9. Xét $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + ysin(x)^2\right) dx$

$f(x,y) = ln\left(1 + ysin(x)^2\right)$ liên tục theo x trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall y \in [0; +\infty)$

$f'_y(x,y) = \frac{sin^2 x}{1 + ysin^2 x}$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [0; +\infty)$

$\Rightarrow F(y)$ khả vi trên $[0; +\infty)$ và:

$$F'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x}{1 + ysin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tan^2 x}{tan^2 + 1 + ytan^2 x} dx \ (1)$$

Đặt $t = tanx \Rightarrow dt = (1 + tan^2 x)dx \Leftrightarrow \frac{dt}{1 + t^2} = dx$

Thay vào (1) ta được:

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)(1 + (1 + y)t^2)} = \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{1 + (1 + y)t^2} \right) dt$$
$$= \frac{1}{y} \left(arctant - \frac{1}{\sqrt{1 + y}} arctan\left(\sqrt{1 + y}t\right) \right) \Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2y} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y + 1}} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y}\left(1 + \sqrt{1 + y}\right)}$$
$$\Rightarrow F(y) = \int F'(y) dy = \int \frac{\pi dy}{2\sqrt{1 + y}\left(1 + \sqrt{1 + y}\right)} = \int \frac{\pi d\sqrt{y + 1}}{1 + \sqrt{y + 1}}$$
$$\Rightarrow F(y) = \pi ln\left(1 + \sqrt{y + 1}\right) + C$$

Mà $F(0)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0.dx=0 \Rightarrow C=-\pi ln2$

$\Rightarrow F(y)=\pi ln\left(\frac{1+\sqrt{1+y}}{2}\right)$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+2sin(x)^2\right)dx=F(2)=\pi ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Giải câu 10. Xét

$$\begin{aligned}
F(x,y)&=\int e^{-xy}x^2dx=\frac{-1}{y}\int x^2de^{-xy}\\
&=\frac{-x^2e^{-xy}}{y}+\frac{1}{y}\int e^{-xy}\cdot 2xdx=\frac{-x^2e^{-xy}}{y}-\frac{2}{y^2}xe^{-xy}-\frac{2}{y^3}e^{-xy}+C\\
&=-\left(\frac{x^2}{y}+\frac{2x}{y^2}+\frac{2}{y^3}\right)e^{-xy}+C\forall y\in(0;\infty)
\end{aligned}$$

Xét $J(y)=\int\limits_a^{+\infty} e^{-xy}x^2dx=\lim\limits_{b\Rightarrow\infty}F(b,y)-F(a,y)=\left(\frac{a^2}{y}+\frac{2a}{y^2}+\frac{2}{y^3}\right)e^{-ay}$.

Nếu $I(y)$ hội tụ đều trên $(0,\infty)$ thì:

$$\forall\varepsilon>0,\exists a_\varepsilon>0,\forall a>a_\varepsilon:|J(y)|=\left(\frac{a^2}{y}+\frac{2a}{y^2}+\frac{2}{y^3}\right)e^{-ay}<\varepsilon$$

Tuy nhiên $\lim\limits_{y\Rightarrow 0}\left(\frac{a^2}{y}+\frac{2a}{y^2}+\frac{2}{y^3}\right)e^{-ay}=\infty\Rightarrow\nexists a_\varepsilon$ thỏa mãn.

Vậy $I(y)$ không hội tụ đều trên $(0,\infty)$