Date: . . No:

Đề thi Giữa kỳ Giải tích 3 - NN3 - 2022.2

$\boxed{\text{Đề 5}}$

Câu 1:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{2}{n^{10}+1}$

+) Ta có: $\tan \frac{2}{n^{10}+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

→ Chuỗi đã cho là CSD

+) Ta lại có:

Khi $n \to \infty$: $\tan \frac{2}{n^{10}+1} \sim \frac{2}{n^{10}+1} \sim \frac{2}{n^{10}}$

Mà: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{10}}$ HT (do $\alpha = 10 > 1$)

+) Theo t/c so sánh: Chuỗi đã cho HT.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{7^n}$

+) Ta có $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{7^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

→ Chuỗi đã cho là CSD

+) Ta lại có: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} \cdot 7^n}{7^{n+1} \cdot \sqrt{n+2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{1}{7}$

$= \frac{1}{7} < 1$

+) Theo t/c D'Alembert, chuỗi đã cho HT

KLONG

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+\cos n)}$

+) Ta có: $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+\cos n)} = \frac{(-1)^n}{\ln(n+\cos n)} - \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$= \frac{(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\ln n.\ln(n+\cos n)} + \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+\cos n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\ln n.\ln(n+\cos n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

+) Ta có $|b_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\ln n.\ln(n+\cos n)}\right| \sim \left|\frac{\cos n}{n.\ln^2 n}\right| \leqslant \frac{1}{n\ln^2 n}, n \rightarrow \infty$

Mà: $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ là hàm số ltục, dương, giảm trên $[2;\infty)$

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{-1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ HT (t/c Tích phân)

$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |b_n|$ HT (t/c so sánh) $\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ HT

+) Lại có: $c_n = \frac{1}{\ln n} > 0\ \forall n \in [2;\infty) \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n$ là chuỗi đan dấu

Mà: $c_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} = c_n\ \forall n \in [2;\infty)$; $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

$\rightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ HT (t/c Leibnitz)

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho HT.

Câu 2: Tìm miền HT của $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \cos\frac{1}{n}$.

+) Đặt: $X = x^2 \geqslant 0 \rightarrow$ chuỗi đã cho có dạng chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}.X^n$ với $a_n = \cos\frac{1}{n}$.

+) BKHT: $R = \lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}}\right| = 1$.

$\rightarrow$ $0 \leqslant X < 1$ thì chuỗi HT.

$\Leftrightarrow$ $0 \leqslant x^2 < 1$ thì chuỗi HT.

$\Leftrightarrow$ $-1 < x < 1$ thì chuỗi HT

+) Với: $X = 1$, chuỗi đã cho trở thành: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$.

Do: $\lim_{n\rightarrow\infty} \cos\frac{1}{n} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Chuỗi pkỳ (do vi phạm ĐK cần)

$\rightarrow$ Miền HT: $(-1;1)$

Date: No:

Câu 3:

+) Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\rightarrow \cos(2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . 4^n . x^{4n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\rightarrow \cos(2x^2) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . 4^n . x^{4n}}{(2n)!}$$

Do đó với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{\cos(2x^2) - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . 4^n . x^{4n-1}}{(2n)!}$$

Cả 2 vế đều ltục tại $x = 0$, đều có giá trị $= 0$ tại $x = 0$.
Do đó, khai triển trên cũng đúng với $x = 0$.

Date: . . No:

Câu 1:

a) $x(y^2+1)\,dx = y(x^2+1)^2\,dy \quad (1)$

+) Do: $y^2+1 \geq 1\ \forall y$, $x^2+1 \geq 1\ \forall x$, ...

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{y\,dy}{y^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{y\,dy}{y^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C = 0.$$

Đây là TPTQ của pt đã cho.

b) $y' + y\tan x = x\cos x.\cos(x^2)$.

+) Nhân cả 2 vế của pt đã cho với ~~cox~~ $\frac{1}{\cos x}$, ta được:

$$\frac{y'}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = x.\cos(x^2).$$

$$\Leftrightarrow \left(y.\frac{1}{\cos x}\right)' = x.\cos(x^2)$$

$$\Rightarrow y.\frac{1}{\cos x} = \int x.\cos(x^2)\,dx.$$

$$\Rightarrow y.\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin(x^2)}{2} + C.$$

$$\Rightarrow y = \frac{\cos x.\sin(x^2)}{2} + C\cos x$$

Đây là NTQ của pt đã cho.

Date: . . No:

c) $\left[(x^2+1)\sin^2(xy) - y\right]dx = xdy,\ y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Đặt: $u = xy \rightarrow \frac{du}{dx} = x.\frac{dy}{dx} + y$.

Pt đã cho trở thành:

$$(x^2+1)\sin^2(u) = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Do: $y(1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow u(1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin(u) \neq 0$.

$(1) \rightarrow$
$$(x^2+1)dx = \frac{du}{\sin^2 u}.$$

$$\rightarrow \int (x^2+1)\,dx = \int \frac{du}{\sin^2 u}.$$

$$\rightarrow \frac{x^3}{3} + x = -\cot(u) + C'.$$

$$\rightarrow \frac{x^3}{3} + x + \cot(xy) + C = 0$$

$\cdot)$ Với $x = 1$, ta có: $C = -\frac{4}{3}$.

Vậy: n_0 của pt đã cho là:

$$\frac{x^3}{3} + x + \cot(xy) - \frac{4}{3} = 0.$$

Câu 5:

$\forall x \in \mathbb{R}, n \geq 1$, ta có:

$$0 \leq |u_n(x)| = \left| \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{2+\sin^3 t}} \right) \sin(2nx) \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{2+\sin^3 t}} \right| \quad (\text{do: } 0 \leq |\sin(2nx)| \leq 1\ \forall x)$$

$$\leq \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \sin t\,dt \right| = \left| (-\cos t)\Big|_0^{\frac{1}{n}} \right|$$

$$= 1 - \cos\frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

Date: . . No:

+) Mặt khác: $0 \leq 1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, $n \to \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ HT (do $\alpha = 2 > 1$)

$\to \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{1}{n}$ HT (theo t/c so sánh).

+) Suy ra: Chuỗi đã cho HT đều trên $\mathbb{R}$ (theo t/c Weierstrass).

Câu 6: Tính tổng:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}.$$

+) Ta có: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+1)}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n^2 . x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

+) Mà: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Với $x \in \mathbb{R}$, xét chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ khả vi trên $\mathbb{R}$

$\to \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!}\right)' = (\cos x)'$

$\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n-1} . 2n}{(2n)!} = -\sin x$.

$\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n} . 2n}{(2n)!} = -\sin x . x \ . \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét chuỗi: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n} . 2n}{(2n)!}$, ta có khả vi trên $\mathbb{R}$:

$\to \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n . x^{2n} . 2n}{(2n)!}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n} . 2n}{(2n)!}\right)' = (-\sin x . x)'$

$\to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . 4n^2 . x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sin x - \cos x . x$.

Date: . . No:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4n^2 \cdot x^{2n}}{(2n)!} = -x\sin x - x^2 \cdot \cos x \quad \forall x$$

$\rightarrow S = \cos x - x\sin x - x^2\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

KLONG