PTVP CẤP 2

I. PT tuyến tính

Dạng tổng quát:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

Nghiệm của (1) có dạng:

NTQ (1) = NTQ (2) + NR (1)

hay y(x) = $\bar{y}(x)$ + $y^*(x)$

Bước 1: Tìm NTQ của (2)

Với p(x), q(x) là hằng số

Xét PT đặc trưng:

$$k^2 + pk + q = 0$$

- Nếu PT đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt k_1, k_2:

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

- Nếu PT đặc trưng có nghiệm kép $k = k_1 = k_2$:

$$\bar{y} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$$

- Nếu PT đặc trưng có nghiệm phức $\alpha \pm \beta i$:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$\rightarrow$ *Tóm lại* $\bar{y}$ *tìm được sẽ có dạng* $\bar{y} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$

Bước 2: Tìm NR của (1)

- Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$$\bar{y} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_1' f_1(x) + C_2' f_2(x) = 0 \\ C_1'.f_1'(x) + C_2'.f_2'(x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' \\ C_2' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) \\ C_2(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow y(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

- Phương pháp hệ số bất định

+ Dạng 1: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

Xét α:

Nếu α *không phải nghiệm của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^* = e^{\alpha x}.Q_n(x)$ *với* $Q_n(x)$ *là dạng tổng quát của* $P_n(x)$

Nếu α *là 1 nghiệm của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^* = x.e^{\alpha x}.Q_n(x)$

Nếu α *là nghiệm kép của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^* = x^2.e^{\alpha x}.Q_n(x)$

+ Dạng 2: $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$

$Xét\ \alpha \pm \beta i$:

$Nếu\ \alpha \pm \beta i\ không\ là\ nghiệm\ của\ PT\ đặc\ trưng$

$\rightarrow y^* = e^{\alpha x}.A_n(x)\ với\ A_n(x)\ là\ dạng\ đồng\ nhất\ của\ f(x)$

$Nếu\ \alpha \pm \beta i\ là\ nghiệm\ của\ PT\ đặc\ trưng$

$\rightarrow y^* = x.e^{\alpha x}.A_n(x)$

Bước 3: Kết luận nghiệm tổng quát

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

Một vài ví dụ phương pháp hệ số bất định

VD1: $y'' + 4y' + 6y = 2x + 3\ (1)$

- Xét PT thuần nhất $y'' + 4y' + 6 = 0$

Có PT đặc trưng là: $k^2 + 4k + 6 = 0 \rightarrow k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}i$

$\rightarrow \bar{y} = e^{-2x}[C_1\cos\sqrt{2} + C_2\sin\sqrt{2}]$

- $f(x) = 2x + 3 = e^{0x}(2x + 3)$

Dễ thấy $\alpha = 0$ ko là nghiệm của PT đặc trưng

$\rightarrow y^* = Ax + B$

Note: Dạng tổng quát được hiểu đơn giản là xem hệ số của các bậc nhỏ hơn n của Pn(x) là chưa biết. Ví dụ: $f(x) = 5$ sẽ có dạng TQ là A; $f(x) = x^2$ sẽ có dạng TQ là $Ax^2 + Bx + C$; tương tự với bậc n bất kì. Sau đó ta đạo hàm để tìm $(y^*)'\ và\ (y^*)''$ thay vào PT ban đầu sẽ tìm được các hệ số này

$\rightarrow (y^*)' = A \rightarrow (y^*)'' = 0$

Thay vào PT (1) ta có:

$0 + 4A + 6(Ax + B) = 2x + 3$

$$\rightarrow 6Ax + 4A + 6B = 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} 6A = 2 \\ 4A + 6B = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{5}{18} \end{cases}$$

$$\rightarrow y^* = \frac{1}{3}x + \frac{5}{18}$$

Vậy NTQ của PT (1) là $y = e^{-2x}[C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x] + \frac{1}{3}x + \frac{5}{18}$

VD2: $y'' - 4y' + 5y = 2x^2.e^x$

- Xét PT thuần nhất: $y'' - 4y' + 5y = 0$

Có PT đặc trưng: $k^2 - 4k + 5 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 2 \pm i$

$\rightarrow \bar{y} = e^{2x}[C_1\cos x + C_2\sin x]$

- $f(x) = 2x^2.e^x$

Dễ dàng nhận thấy 1 ko là nghiệm của PT đặc trưng

$\rightarrow y^* = e^x(Ax^2 + Bx + C)$

$\rightarrow (y^*)' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B)$
$= e^x(Ax^2 + (2A + B)x + B + C)$
$\rightarrow (y^*)'' = \cdots = e^x(Ax^2 + (B + 4A)x + 2A + 2B + C)$
Thay vào PT ban đầu ta được:
$e^x(Ax^2 + (B + 4A)x + 2A + 2B + C) - 4e^x(Ax^2 + (B + 2A)x + B + C)$
$+ 5e^x(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2.e^x$
$\rightarrow (A + 5A - 4A)x^2 + (B + 4A - 4B - 8A + 5B)x$
$+ (2A + 2B + C - 4B - 4C + 5C) = 2x^2$

$$\rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 4A = 0 \\ 2C + 2A = 2B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow y^* = e^x(x^2 + 2x + 1)$
Vậy NTQ của PT là $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(x^2 + 2x + 1)$
VD3: $y'' - 3y' + 2y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$
- Xét PT thuần nhất $y'' - 3y' + 2y = 0$
Có PT đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1; k_2 = 2$
$\rightarrow \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$
- $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 2x \rightarrow \alpha = 0; \beta = 2$
Xét $\pm 2i$ ko là nghiệm của PT đặc trưng
$\rightarrow y^* = e^{0x}(A\sin 2x + B\cos 2x) = A\sin 2x + B\cos 2x$
Note: Dạng đồng nhất của dạng này cũng tương tự như như Pn(x). VD: f(x)=sin 3x=sin3x+0cos3x => f(x) = Asin3x+Bcos3x. Nếu VD $f(x) = x.\cos 2x$ thì ta nhân biểu thức tổng quát của x với cos 2x $\rightarrow f(x) = (Ax + B)(C\cos 2x + D\sin 2x)$
$\rightarrow (y^*)' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \rightarrow (y^*)'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$
Thay vào PT ban đầu ta được:
$-4A\sin 2\,x - 4B\cos 2x - 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2A\sin 2x +$
$2B\cos 2x = \sin 2x + 3\cos 2x$
$\rightarrow \cdots$
VD4: $y'' - 3y' + 2y = x + \cos x$
- Xét PT thuần nhất: $y'' - 3y' + 2y = 0$
Có PT đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1; k_2 = 2$
$\rightarrow \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$
-$f(x) = x + \cos x$
Note: Nguyên lí chồng chất nghiệm
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ có $NR\ y_1^*$
$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ có $NR\ y_2^*$
$\rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) + g(x)$ có $NR\ y_1^* + y_2^*$
$\rightarrow y = \bar{y} + y^* = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$

Nháp: $f_1(x) = x$ $có$ $\alpha = 0$ ko là nghiệm của PT đặc trưng $\rightarrow y_1^* = Ax + B$

$f_2(x) = \cos x$ $có$ $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i$ ko là nghiệm của PT đặc trưng

$\rightarrow y_2^* = C\cos x + D\sin x$

Tóm lại $\rightarrow y^* = Ax + B + C\cos x + D\sin x$

$\rightarrow \cdots$

Khi f(x) không thuộc 2 dạng của phương pháp hệ số bất định => Sd phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Một vài ví dụ phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

VD1: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ $(f(x)$ ko $thuộc$ 2 $dạng$ $của$ pp $hệ$ $số$ $bất$ $định)$

- Xét PT thuần nhất: $y'' + 3y' + 2y = 0$

Có PT đặc trưng: $k^2 + 3k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = -2; k_2 = -1$

$\rightarrow$ $\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} = C_1f_1(x) + C_2f_2(x)$

(Ta coi C_1 $và$ C_2 là 2 hàm phụ thuộc vào biến x)

- Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta được:

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} = 0 \\ C_1'.-2.e^{-2x} + C_2'.-1.e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} = 0 \\ -2C_1'e^{-2x} - C_2'e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

Note: Công thức nhẩm nghiệm HPT $\begin{cases} ax + by = f(x) \\ cx + dy = g(x) \end{cases}$

$$\rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & b \\ g(x) & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} a & f(x) \\ c & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_1{}' = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} \\ C_2' = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = e^x - \ln(e^x+1) + K_1 \\ C_2(x) = \ln(e^x+1) + K_2 \end{cases}$$

Vậy

$y = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)$

$= [e^x - \ln(e^x+1) + K_1]e^{-2x} + [\ln(e^x+1) + K_2]e^{-x}$

VD2: $y'' + y = \tan x$

$Đáp$ $án: y = (\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - \sin x + K_1)\cos x + (-\cos x + K_2)\sin x$

II. PT thuần nhất hệ số hàm (p(x),q(x) ko là hằng số)

Có dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ $và$ cho $sẵn$ 1 $nghiệm$ $y_1(x)$

Bước 1: Tìm nghiệm $y_2(x)$

CT Lioville:

$$y_2(x) = y_1(x).\int \frac{1}{y_{1(x)}^2}.e^{\int -p(x)dx}dx$$

Bước 2: Kết luận nghiệm

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

III.PT Ơ-le

Có dạng $x^2y'' + axy' + by = f(x)$

Cách làm:

Đặt $|x| = e^t$

$\rightarrow dx = e^t dt \rightarrow x'_t = e^t = x$

Khi đó PT trở thành:

$y''_t + (a-1)y'_t + by = f(e^t) \rightarrow \textit{trở thành PT tuyến tính}$

$\rightarrow \textit{Giải như bình thường}$

Toán tử Laplace

Tổng quát: $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Bảng Laplace $L\{f(t)\} = F(s) \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	Cách nhớ: cuộc – sống
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	Cách nhớ: sức – khỏe
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	

I. Kỹ thuật nhẩy lầu

(Áp dụng trong bài toán tính Laplace ngược)

VD:

$$\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

Tìm A: Ta nhân cả 2 vế với mẫu tương ứng của A, hay nhân cả 2 vế với (s+1)

$$\rightarrow \frac{3s+4}{(s+2)(s+3)}=A+(s+1)\left(\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}\right)\rightarrow Thay\ s=-1\ ta\ được:$$

$$\frac{-3+4}{(-1+2)(-1+3)}=A\rightarrow A=\frac{1}{2}$$

Tương tự khi nhân 2 vế với (s+2) ta tìm được $B=2$

(s+3) ta tìm được C =-5/2

<u>Hoặc ta có cách bấm máy tính nhanh</u>

Muốn tìm A, mẫu tương ứng là (s+1). Ta nhập $\frac{3s+4}{(s+2)(s+3)}$ (bỏ mẫu tương ứng) vào máy tính rồi CALC giá trị s = -1 => A= 1/2 . Tương tự muốn tìm B ta nhập $\frac{3s+4}{(s+1)(s+3)}$ rồi thay giá trị s = -2. Giá trị C ta nhập $\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$ rồi thay giá trị s = -3

Note: Cách tách tổng quát

$$\frac{f(x)}{(x+a)^n(x^2+bx+c)^m}$$
$$=\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x+a)^n}+\frac{B_1x+B_1'}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+B_2'}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_mx+B_m'}{(x^2+bx+c)^m}$$

VD:

$$\frac{4s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)^2(s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+4}$$

Đối với dạng này ta chỉ tìm được hệ số A,C,D bằng cách nhân lần lượt (s+1);(s+2)^2;(s+4). Khi đó chỉ còn lại một ẩn là B => thay s = giá trị bất kì rồi giải PT => B

- Tìm A: nhân 2 vế với (s+1) => A=1
- Tìm C: nhân 2 vế với (s+2)^2 => C=-13/2
- Tìm D: nhân 2 vế với (s+4) => D=-19/4

Vậy ta được:

$$\frac{4s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)^2(s+4)}=\frac{1}{s+1}+\frac{B}{s+2}-\frac{13}{2(s+2)^2}-\frac{19}{4(s+4)}$$

Thay s=0 vào PT:

$$\rightarrow \frac{1}{16}=1+\frac{B}{2}-\frac{13}{8}-\frac{19}{16}\rightarrow B=\frac{15}{4}$$

VD:

$$\frac{2s^2+3s+5}{(s+2)(s+3)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}+\frac{D}{(s+3)^3}$$

Dễ dàng tìm được A=7;D=-14

Đối với dạng còn 2 hệ số cần tìm thì ta chỉ cần thay 2 giá trị s bất kì rồi giải HPT

Thay s=0 ta đc $\frac{5}{2.27} = \frac{7}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{9} - \frac{14}{27}$

s=1 ta đc $\frac{10}{3.4^3} = \frac{7}{3} + \frac{B}{4} + \frac{C}{16} - \frac{14}{4^3}$

Giải HPT $\rightarrow \begin{cases} B = -7 \\ C = -5 \end{cases}$

VD:

$$\frac{4s+6}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Dễ dàng tìm được A=-1/4

Khi đó, nhân 2 vế với (s^2+4) ta có

$$\frac{4s+6}{s+2} = -\frac{s^2+4}{4(s+2)} + Bs + C$$

Giải PT $s^2 + 4 = 0 \rightarrow s = \pm 2i$

Thay s=2i (hoặc s= -2i cũng được)

$$\rightarrow \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i = 2Bi + C \rightarrow \begin{cases} C = \frac{7}{2} \\ 2B = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = \frac{7}{2} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

VD:

$$\frac{4s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)^2(s^2+4s+8)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+4s+8}$$

Dễ dàng tìm được A=1;C=-15/4

Nhân 2 vế với (s^2+4s+8) ta được

$$\frac{4s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)^2} = Ds + E$$

Giải PT $s^2 + 4s + 8 = 0 \rightarrow s = -2 \pm 2i$

Thay s=-2+2i ta được

$$\frac{11}{4} - \frac{3}{2}i = D(-2+2i) + E = -2D + E + 2Di$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2D + E = \frac{11}{4} \\ 2D = -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D = -\frac{3}{4} \\ E = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{4s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)^2(s^2+4s+8)} = \frac{1}{s+1} + \frac{B}{s+2} - \frac{15}{4(s+2)^2} + \frac{-\frac{3}{4}s + \frac{5}{4}}{s^2+4s+8}$$

Thay giá trị s bất kì => B

II. Tính Laplace ngược

VD:

$$L^{-1}\left\{\frac{6s^2+22s+18}{(s+3)(s+1)(s+2)}\right\}$$

Nhẩm kỹ thuật nhảy lầu: $\frac{6s^2+22s+18}{(s+3)(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$

$$\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{3}{s+3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right\} = 3.e^{-3t} + e^{-t} + 2.e^{-2t}$$

III. Ứng dụng Laplace giải PTVP

Nghiệm $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$

Bước 1: Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT

Bước 2: Tìm X(s)

Bước 3: Tìm x(t)

VD: $x''' - 9x'' + 26x' - 24x = e^t \quad (1)$

$với\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT (1)

$$L\{x''' - 9x'' + 26x' - 24x\} = \frac{1}{s-1} \quad (2)$$

- $L\{x\} = X(s)$
- $L\{x'\} = s.X(s) - x(0) = s.X(s)$
- $L\{x''\} = s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0) = s^2.X(s)$
- $L\{x'''\} = s^3.X(s) - s^2.x(0) - s.x'(0) - x''(0) = s^3.X(s)$

Note: CTTQ: $L\{x^{(n)}\} = s^n.X(s) - s^{n-1}.x(0) - s^{n-2}.x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$

Thay vào PT (2) ta được

$$s^3X(s) - 9s^2X(s) + 26sX(s) - 24X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3-9s^2+26s-24)}$$

$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{-\frac{1}{6(s-1)} + \frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{2(s-3)} + \frac{1}{6(s-4)}\right\} (Kỹ\ thuật\ nhẩy\ lầu)$$

$$\rightarrow x(t) = -\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{4t}$$

VD: $x^{(3)} - 2x'' + 16x = 0 \quad (1)$

với x(0)=x'(0)=0; x''(0)=20

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT (1) ta được

$$L\{x^{(3)} - 2x'' + 16x\} = 0 \quad (2)$$

- $L\{x\} = X(s)$
- $L\{x'\} = s.X(s) - x(0) = s.X(s)$
- $L\{x''\} = s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0) = s^2.X(s)$

- $L\{x'''\} = s^3.X(s) - s^2.x(0) - s.x'(0) - x''(0) = s^3.X(s) - 20$

Thay vào PT (2) ta được

$s^3X(s) - 20 - 2s^2X(s) + 16X(s) = 0$

$\rightarrow X(s) = \dfrac{20}{s^3 - 2s^2 + 16} \rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{20}{(s+2)(s^2 - 4s + 8)}\right\}$

$\rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{6-s}{(s^2 - 4s + 8)}\right\} = e^{-2t} + L^{-1}\left\{\dfrac{6-s}{s^2 - 4s + 8}\right\}$

Note: $L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}.f(t)$

VD: $L\{e^{2t}.\sin t\} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$ $(\,thay\ s\ trong\ L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}\ thành\ s-2\,)$

$L\{e^{3t}.\cos t\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+1}$ $(\,thay\ s\ trong\ L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}\ thành\ s-3\,)$

Trở lại bài toán ta đang cần tính $L^{-1}\left\{\frac{6-s}{s^2-4s+8}\right\}$

$L^{-1}\left\{\dfrac{6-s}{s^2 - 4s + 8}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{6-s}{(s-2)^2 + 4}\right\}$

$= L^{-1}\left\{-\dfrac{s-2}{(s-2)^2 + 4}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{2.2}{(s-2)^2 + 4}\right\}$

$= -e^{2t}.\cos 2t + 2.e^{2t}.\sin 2t$

Vậy $x(t) = e^{-2t} - e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t$

VD: $tx'' + (t-3)x' + 2x = 0\ với\ x(0) = 0\ \ (1)$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT (1) ta được

$L\{tx'' + (t-3)x' + 2x\} = 0 \rightarrow L\{tx'' + tx' - 3x' + 2x\} = 0 \quad (2)$

Note: $L\{t^n.f(t)\} = (-1)^n.F^{(n)}(s)$

VD: $L\{t.f(t)\} = -F'(s)$

$L\{t^n f(t)\} = F''(s)$

$L\{t.\sin 2t\} = -\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)' = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

$L\{t^2.\cos 3t\} = \left(\dfrac{s}{s^2+9}\right)'' = \cdots$

- $L\{x\} = X(s)$
- $L\{x'\} = s.X(s) - x(0) = s.X(s)$
- $L\{tx'\} = -[s.X(s)]' = -X(s) - s.X'(s)$
- $L\{x''\} = s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0) = s^2.X(s) - x'(0)$
- $L\{tx''\} = -[s^2X(s) - x'(0)]' = -2sX(s) - s^2X'(s)$

Thay vào PT (2) ta được

$-2sX(s) - s^2X'(s) - X(s) - sX'(s) - 2sX(s) + X(s) = 0$

$\rightarrow (-s^2 - s)X'(s) - 4sX(s) = 0$

$\rightarrow (s+1)X'(s) + 4X(s) = 0 \quad (\,Do\ s > 0 \rightarrow Chia\ 2\ vế\ cho\ -s)$

$\rightarrow X'(s) = -\dfrac{4}{s+1}X(s)$

$\rightarrow \frac{d[X(s)]}{ds} = -\frac{4}{s+1}X(s)$

$$\rightarrow \frac{1}{X(s)} d[X(s)] = -\frac{4}{s+1} ds$$

$$\rightarrow \ln|X(s)| = -4\ln(s+1) + \ln K$$

$$\rightarrow \ln|X(s)| = lnK.(s+1)^{-4} = \ln\frac{K}{(s+1)^4}$$

$$\rightarrow X(s) = \pm\frac{K}{(s+1)^4} = \frac{C}{(s+1)^4}$$

Vậy $x(t) = L^{-1}\left\{\frac{C}{(s+1)^4}\right\} = \frac{C}{3!}.e^{-t}t^3$

CHÚC CÁC BẠN THI TỐT FULL A+

— From NTĐ with love —