Đề thi Giải tích 3 – CK 20193 – nhóm ngành 2
Lời giải: Nguyễn Tiến Được

Câu 1:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n .Dễ\ thấy\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-3}.\left(-\frac{3n}{n+3}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3n}{n+3}}=e^{-3}\neq 0$$

$\rightarrow Chuỗi\ phân\ kỳ$

$b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}.\ \ Dễ\ thấy\ \frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\geq 0\ \forall n\geq 1$$

$$\frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2}.\frac{1}{n}.\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\ khi\ n\to\infty$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\ là\ chuỗi\ Riemann\ hội\ tụ$$

$\rightarrow Chuỗi\ đã\ cho\ hội\ tụ$

Câu 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)^n .Đặt\ t=\frac{4x+1}{4x-1}\rightarrow Chuỗi\ trở\ thành\ chuỗi\ lũy\ thừa$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}\ t^n\ có\ bán\ kính\ hội\ tụ\ là$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n^2+2}.\frac{(n+1)^2+2}{n+1}\right|=1$$

$$+)\ Tại\ t=1\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}\ là\ chuỗi\ đan\ dấu\ hội\ tụ\ theo\ TC\ Leibnitz$$

$+)\ Tại\ t=-1$

$$\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}\ là\ chuỗi\ dương\ phân\ kỳ\ theo\ TCSS\ với\ chuỗi\ điều\ hòa$$

$$\rightarrow Miền\ hội\ tụ-1<t\leq 1\rightarrow -1<\frac{4x+1}{4x-1}\leq 1\ \ \left(x\neq\frac{1}{4}\right)$$

$$\to \begin{cases} \frac{8x}{4x-1} > 0 \\ \frac{2}{4x-1} < 0 \end{cases} \to \begin{cases} x < \frac{1}{4} \text{ hoặc } x < 0 \\ x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$Vậy\ miền\ hội\ tụ\ cần\ tìm\ là\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

Câu 3:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $(x - 1)$

Đặt $t = x - 1 \to f(t) = \frac{t^2 + 2t}{t + 3} = (t + 2)\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{t}}\right)$

$\to f(t) = (t + 2).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{t}\right)^n$ *với* $\left|\frac{3}{t}\right| < 1$

hay $f(x) = (x + 1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.3^n.(x - 1)^{-n}$ *với* $\left|\frac{1}{x - 1}\right| < \frac{1}{3}$

Câu 4:

$L\{(e^{-t} - t)^2\} = L\{e^{-2t} - 2e^{-t}t + t^2\} = \frac{1}{s + 2} - \frac{2}{(s + 1)^2} + \frac{2}{s^3}$

Câu 5:

$a)\ y' - \tan x\, y = \frac{1}{\cos x}$

PT có nghiệm $y = e^{\int \tan x\, dx}\left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int -\tan x dx} dx + C\right)$

$\to y = e^{-\ln|\cos x|}\left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\ln|\cos x|} dx + C\right) = \frac{1}{\cos x}(x + C)$

Vaayj PT đã cho có nghiệm $y = \frac{x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}$

$b)\ y'' + 4y = 3\sin x$

Xét PT thuần nhất $y'' + 4y = 0$ *có PT đặc trưng* $k^2 + 4 = 0 \to k = \pm 2i$

$\to \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$f(x) = 3\sin x$ *có* $\pm\, i$ *ko là nghiệm của PT đặc trưng*

$\to y^* = A\sin x + B\cos x \to (y^*)' = A\cos x - B\sin x$

$\to (y^*)'' = -A\sin x - B\cos x$

Thay vào PT ban đầu ta được

$-A\sin x - B\cos x + 4A\sin x + 4B\cos x = 3\sin x$

$$\to \begin{cases} -A + 4A = 3 \\ -B + 4B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \to y^* = \sin x$$

$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$

$c)\ y' + \frac{1}{x} y = 3x^2 y^3$

$+)\ y = 0\ là\ nghiệm\ kỳ\ dị$

$+)\ y \neq 0 \rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{x} . \frac{1}{y^2} = 3x^2$

Đặt $\frac{1}{y^2} = t \rightarrow t' = -2. \frac{y'}{y^3} \rightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{t'}{-2}$

$\rightarrow \frac{t'}{-2} + \frac{1}{x} t = 3x^2 \rightarrow t' - \frac{2}{x} t = -6x^2$

$$PT\ này\ có\ nghiệm\ t = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int -6x^2 e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x^2(-6x + C)$$
$$= -6x^3 + Cx^2$$

$$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{-6x^3 + Cx^2}}$$

$d)\ xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \rightarrow y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = 0$

$AD\ CT\ Lioville$:

$$y_2(x) = y_1(x). \int \frac{1}{y_{1(x)}^2} . e^{\int -p(x) dx} dx$$

$$\rightarrow y_2(x) = \sin(x^2) \int \frac{1}{\sin^2(x^2)} . e^{\int \frac{1}{x} dx} dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) \int \frac{1}{\sin^2(x^2)} d(x^2)$$

$$\rightarrow y_2(x) = \frac{1}{2} \sin(x^2) [-\cot(x^2) + C] = -\frac{1}{2} \sin(x^2) . \cot(x^2) + \frac{C}{2} \sin(x^2)$$

$$Vậy\ PT\ có\ nghiệm\ y = C_1 \sin(x^2) + C_2 \sin(x^2) . \cot(x^2) + \frac{C}{2} \sin(x^2)$$

Câu 6: Lời giải Nguyễn Đức Dương

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0; y^{(3)}(0) = 1 \end{cases}$$

$Tác\ động\ toán\ tử\ Laplace\ vào\ 2\ vế\ của\ PT\ ta$ được:

$$s^4 Y(s) - s^2 - 1 - 4s^3 Y(s) - 4 + 6s^2 Y(s) - 6 - 4sY(s) + Y(s) = 0$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 4s + 7}{s^4 - 4s^3 + 6s^2 - 4s + 1} = \frac{s^2 - 2s + 1 + 6(s-1) + 12}{(s-1)^4}$$

$$\rightarrow y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{6}{(s-1)^3} + \frac{12}{(s-1)^4} \right\} = e^t t + 3e^t t^2 + 2e^t t^3$$

Đề thi cuối kì GT3 học kì 20181 – nhóm ngành 1
Lời giải: Nguyễn Tiến Được – K64

Câu 1

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+n+1}.\,Dễ\ thấy\ u_n=\frac{n^2+2}{n^3+n+1}\geq 0\forall n\geq 1$$

$$u_n=\frac{n^2+2}{n^3+n+1}\sim\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}\ khi\ n\to\infty$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ là\ chuỗi\ điều\ hòa\ phân\ kỳ$$

$$\to Chuỗi\ đã\ cho\ phân\ kỳ\ theo\ TCSS$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{n^2+1}.\ Là\ chuỗi\ đan\ dấu\ với\ u_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$$

$$+)\ u_n\geq 0\forall n\geq 1$$

$$+)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}\to f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$<0\forall x\geq 1\to\{u_n\}\ là\ dãy\ đơn\ điệu\ giảm$$

$$+)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+1}=0$$

$$\to Chuỗi\ đã\ cho\ hội\ tụ\ theo\ tiêu\ chuẩn\ Leibnitz$$

Câu 2: Tìm miền HT

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{2n+3}.\,Đặt\ t=2x+3\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}.t^n\ là\ chuỗi\ lũy\ thừa$$

$$-\ Bán\ kính\ HT\ của\ chuỗi\ là:$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3}=1\to R=1$$

$$-\ Tại\ t=1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\ là\ chuỗi\ điều\ hòa\ phân\ kỳ$$

$$-\ Tại\ t=-1.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}\ là\ chuỗi\ đan\ dấu\ hội\ tụ\ theo\ Leibnitz$$

$$Miền\ hội\ tụ\ là-1\leq t<1\to -1\leq 2x+3<1\to -2\leq x\leq -1$$

$$Vậy\ miền\ hội\ tụ\ cần\ tìm\ là\ x\in[-2;-1)$$

Câu 3: Khai triển f(x) thành chuỗi Maclaurin

$$f(x)=\frac{x}{1+2x^2}=x.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(2x^2)^n\ \forall|2x^2|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n.x^{2n+1}\ \forall|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Câu 4:

a) $y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+4$

Đặt $\frac{y}{x}=t\rightarrow y=xt\rightarrow y'=t+t'x$

$\rightarrow t+t'x=t^2+t+4$

$\rightarrow \frac{dt}{dx}x=t^2+4\rightarrow \frac{1}{t^2+4}dt=\frac{1}{x}dx\rightarrow \ln x+\ln C=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$

$\rightarrow x=\frac{1}{C}(\sqrt{e}+e^{\arctan\frac{t}{2}})$

Vậy PT có nghiệm $\begin{cases} y=\frac{t}{C}(\sqrt{e}+e^{\arctan\frac{t}{2}}) \\ x=\frac{1}{C}(\sqrt{e}+e^{\arctan\frac{t}{2}}) \end{cases}$

b) $(3x^2+6xy)dx+(3x^2-4y^3)dy=0$

$P(x;y)=3x^2+6xy\rightarrow P'_y=6x$

$Q(x;y)=3x^2-4y^3\rightarrow Q'_x=6x$

$\rightarrow$ *Đây là PTVP toàn phần*

$\rightarrow C=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y 3x^2-4y^3dy$

$$=x^3\left|\begin{matrix}x=x\\x=0\end{matrix}\right.+(3x^2y-y^4)\left|\begin{matrix}y=y\\y=0\end{matrix}\right.=x^3+3x^2y-y^4$$

Vậy TPTQ của PT là $C=x^3+3x^2y-y^4$

c) $y''+3y'+2y=(6x^2+16x+13)e^x$

- Xét PT thuần nhất $y''+3y'+2y=0$

Có PT đặc trưng là $k^2+3k+2=0\rightarrow k_1=-1; k_2=-2$

$\rightarrow \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

- $f(x)=e^x(6x^2+16x+13)$ *có* $\alpha=1$ *ko là nghiệm của PT đặc trưng*

$\rightarrow y^*=e^x(Ax^2+Bx+C)\rightarrow (y^*)'=e^x[C+B+(B+2A)x+Ax^2]$

$\rightarrow (y^*)''=e^x[C+2B+2A+(B+4A)x+Ax^2]$

Thay vào PT ban đầu ta có:

$$e^x[C+2B+2A+(B+4A)x+Ax^2]+3e^x[C+B+(B+2A)x+Ax^2]$$
$$+2e^x(Ax^2+Bx+C)=(6x^2+16x+13)e^x$$

$$\rightarrow (A+3A+2A)x^2+(B+4A+3B+6A+2B)x$$
$$+(C+2B+2A+3C+3B+2C)=6x^2+16x+13$$

$$\rightarrow\begin{cases} 6C = 1 \\ 6B + 10A = 16 \\ 6C + 5B + 2A = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \rightarrow y^* = e^x(x^2 + x + 1) \\ C = 1 \end{cases}$$

$Vậy\ nghiệm\ TQ\ của\ PT\ là\ y = \bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + e^x(x^2 + x + 1)$

d) $y'' - y = \frac{2e^{2x}}{e^x+1}$

- Xét PT thuần nhất $y'' - y = 0$

Có PT đặc trưng là $k^2 = 1 \rightarrow k_{1,2} = \pm 1$

$\rightarrow \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} = \dfrac{2e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$$

Nhẩm nghiệm

$$D = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x.e^{-x} - e^x.e^{-x} = -1 - 1 = -2$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{2e^{2x}}{e^x + 1} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{e^x}{e^x + 1} \rightarrow C_1(x) = \ln(e^x + 1) + K_1$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{2e^{2x}}{e^x + 1} \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{e^{3x}}{e^x + 1} \rightarrow C_2(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} - \ln(e^x + 1) + K_2$$

Vậy PT có nghiệm TQ

$$y = [\ln(e^x + 1) + K_1]e^x + \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2} - \ln(e^x + 1) + K_2\right]e^{-x}$$

Câu 5:

a) $x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x = 0 \quad (1)$

$với\ x(0) = x'(0) = 0; x''(0) = 1$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT (1) ta được:

$L\{x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x\} = 0 \quad (2)$

- $L\{x\} = X(s)$

- $L\{x'\} = s.X(s) - x(0) = s.X(s)$

- $L\{x''\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s)$

- $L\{x^{(3)}\} = s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0) = s^3X(s) - 1$

Thay vào PT (2) ta được:

$s^3X(s) - 1 - 4s^2X(s) + 5sX(s) - 2X(s) = 0$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}\right\} = e^{2t} - e^t - e^t.t$$

$$= e^{2t} + e^t(-1-t)$$

b) $x'' + 4x = f(t) = \begin{cases} \sin t\ khi\ 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0\ khi\ t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$với\ x(0) = x'(0) = 0$

Áp dụng CT Trần Bá Hiếu cho vế phải (Heaviside)

$$f(t) = \sin t - \sin t.u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}.e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$= \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)} - \left[\frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{s}{3(s^2+4)}\right].e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\{\ldots\} = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - [\frac{1}{3}\sin(t - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3}\cos(2t - \pi)]$$

$$= \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t$$

Đề thi cuối kì GT3 kì 20192 – nhóm ngành 2
Lời giải: Trần Bá Hiếu & Nguyễn Tiến Được

Câu 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}.\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} > 0 \;\forall\, n \geq 1$$

$$Khi\ n \to \infty : u_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}\,.2n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$Mà \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ là chuỗi Riemann hội tụ}$$

$\to$ *Chuỗi đã cho hội tụ*

Câu 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^n$$

$$Đặt\ t = \frac{1-2x}{1+x} \to \text{Chuỗi đã cho trở thành} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.t^n$$

$$Xét \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \to R = 1$$

$Taij\ t = 1 \to$ *Chuỗi phân kì do là chuỗi điều hòa*

$$Tại\ t = -1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ là chuỗi hội tụ theo Leibnitz}$$

$$\to \text{Miền hội tụ} -1 \leq t < 1 \to\ -1 < \frac{1-2x}{1+x} < 1 \;(\,x \neq -1)$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1-2x}{1+x}+1 = \dfrac{2-x}{1+x} > 0 \\ \dfrac{1-2x}{1+x}-1 = -\dfrac{3x}{1+x} < 0 \end{cases} \to \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x < -1 \cup x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Vậy miền hội tụ cần tìm là $(-\infty;2)/\{-1\}$

Câu 3:

Khai triển Fourier $f(x) = -x$ *khi* $-2 \leq x \leq 2$ *và tuần hoàn* $T = 4$

Dễ thấy $f(x) = -f(-x) \to f(x)$ *là hàm lẻ* $\to a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} -x.\sin\frac{n\pi x}{2}dx \to b_n = \int_0^2 x\, d\left(\frac{2}{\text{nπ}}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\rightarrow b_n = \frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$\rightarrow b_n = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi = \frac{(-1)^n}{n\pi}\ \textit{với}\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\textit{Vậy khai triển Fourier của } f(x) \textit{ là } \sum_{n=1}^{\infty} 4.\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Câu 4:

a) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

$+)\ y = 0$ *là nghiệm kỳ dị*

$$+)\ y \neq 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{\frac{4}{x}y}{\sqrt{y}} - 2x = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y} = t \rightarrow 2t' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$$

$$\rightarrow 2t' - \frac{4}{x}t = 2x \rightarrow t' - \frac{2}{x}t = x$$

$$\textit{Pt có nghiệm } t = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(lnC + \int x.e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right) = x^2(\ln C + \ln|x|)$$

$$= x^2 \ln Cx$$

Vậy nghiệm PT đã cho là $y = (x^2\ln Cx)^2 = x^4\ln^2 Cx$

b) $y'' + y = 2\sin^2 x$

Xét PT thuần nhất $y'' + y = 0$

Có PT đặc trưng là $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = 0 \pm i$

$\rightarrow \bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$

Sd phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$$\begin{cases} C_1'\cos x + {C_2}'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 - \cos 2x & \cos x \end{vmatrix} = -2\sin^3 x \\ C_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 - \cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos x.\sin^2 x \end{cases}$$

$$\rightarrow C_1(x) = \int 2 - 2\cos^2 x\, d(\cos x) = 2\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + K_1$$

$$\rightarrow C_2(x) = \int 2\sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + K_2$$

Vậy PT đã cho có nghiệm là

$$y = 2\cos^2 x - \frac{2}{3}\cos^4 x + K_1\cos x + \frac{2}{3}\sin^4 x + K_2\sin x$$

c) $xy'' - y' = x^2e^x$

$$\rightarrow \frac{xy'' - y'}{x^2} = e^x \rightarrow \left(\frac{y'}{x}\right)' = e^x \rightarrow \frac{y'}{x} = e^x + C_1 \rightarrow y' = xe^x + C_1x$$

$$\rightarrow y = (x-1)e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

Câu 5:

$$L^{-1}\left\{\frac{7s+13}{(s-1)^2(s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{1}{9(s+2)} + \frac{20}{3(s-1)^2} + \frac{1}{9(s-1)}\right\}$$
$$= -\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{20}{3}e^t.t + \frac{1}{9}e^t$$

Câu 6:

$y^{(4)} - y = 0$

Với $y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) - 0; y^{(3)}(0) = 0$

Tác động toán tử Laplace vào 2 vế của PT ta đc:

$s^4X(s) - s^2 - X(s) = 0$

$$\rightarrow X(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}$$
$$= -\frac{1}{4(s+1)} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}$$
$$\rightarrow x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{4}e^{-t} + \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{2}\sin t$$

Câu 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,;\sum_{n=1}^{\infty} v_n\ HTTĐ \rightarrow \lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}|v_n| = 0$$

$$Xét\ \lim_{n\to\infty}\frac{|u_n||v_n|}{|v_n|} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|u_n||v_n|\ hội\ tụ\ theo\ TCSS$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n.v_n\ hội\ tụ\ tuyệt\ đối\ (đpcm)$$

Câu 8:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)n!}$$

$$Xét\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = x.e^{x}\ \forall x \in R$$

$$\to S(x) = \int x.e^{x} dx = e^{x}(x-1) + C$$

$$S(0) = 0 = -1 + C \to C = 1$$

$$\to S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = e^{x}(x-1) + 1$$

$$S(3) = 2e^{3} + 1\ là\ tổng\ cần\ tìm$$

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20172 KSTN K62

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt – K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Dalembert, ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{2^n.n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} 2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left|1-\frac{1}{n+1}\right|.n} = 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{2^{n^2}}$

Đặt $x^2 - 1 = t$, ($t \geq -1$) chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n^2}}$

Đặt $a_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, suy ra bán kính hội tụ là :

$$R = 1 \div \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = 1 \div \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \infty$$

mà $t \geq -1$, suy ra chuỗi hội tụ $\forall t \geq -1$

$\rightarrow x^2 - 1 \geq -1$

$\rightarrow x^2 \geq 0$

$\rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là $x \in R$

Câu 3: Khai triển hàm số $f(x) = \ln(x^2+1)$ thành chuỗi lũy thừa của x

Đặt $x^2 = t, (t > 0)$

Ta có khai triển Maclaurin của $\ln(1+t)$ là

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{t^n}{n} \quad , R = 1$$

Thay $t = x^2$, ta có:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{n}, R = 1$$

Vậy khai triển f(x) thành chuỗi lũy thừa của x là $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{n}, R = 1$

Câu 4: Giải phương trình vi phân $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -2$

$$2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -2 \qquad (x \neq 0)$$

$$\rightarrow y' = \frac{-2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} \qquad (*)$$

Đặt $\frac{y}{x} = u(x) \rightarrow y = ux \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} \rightarrow y' = u'x + u$

Thay vào $(*)$, ta có :

$$u'x + u = -1 - \frac{u^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} . x = -1 - \frac{u^2}{2} - u$$

$$\rightarrow \frac{du}{-1 - \frac{u^2}{2} - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \frac{-2du}{(u+1)^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow -2\arctan(u+1) = \ln|x| + C$$

$$\rightarrow -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C = \ln|x|$$

$$\rightarrow -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C - \ln|x| = 0$$

Phương trình không có nghiệm kì dị

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$u(x, y, C) = -2\arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) + C - \ln|x| = 0$$

Câu 5: Giải phương trình vi phân $xy'' + 4y' = 0$

$xy'' + 4y' = 0$

$\rightarrow y'' + \frac{4}{x}.y' = 0$, với $x \neq 0$

Đặt $y'(x) = u(x)$, ta có : $u' + \frac{4}{x}.u = 0$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln|x|} = x^4$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$:

$\rightarrow\ x^4.u' + 4x^3.u = 0$

$\rightarrow (x^4.u)' = 0$

$\rightarrow\ x^4.u = C_1$

$\rightarrow\ u = \frac{C_1}{x^4}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^4}$

$\rightarrow dy = \frac{C_1 dx}{x^4}$

$\rightarrow y = \frac{-C_1}{3x^3} + C_2$. Với $x = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = C$. Nên $x = 0$ không phải nghiệm kì dị

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{-C_1}{3x^3} + C_2$

Câu 6: Giải phương trình vi phân

$$y'' - 2y' - 3 = -14\cos x - 8\sin x$$

Xét phương trình : $y'' - 2y' - 3 = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân trên là :

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$\rightarrow\ \begin{cases} k = 3 \\ k = -1 \end{cases}$

$\rightarrow$ Phương trình $y'' - 2y' - 3 = 0$ có nghiệm là

$\bar{y} = C_1.e^{3x} + C_2.e^{-x}$

Để tìm nghiệm riêng $y^*(x) = C_1(x).e^{3x} + C_2(x).e^{-x}$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'(x).e^{3x} + C_2'(x).e^{-x} = 0 & (1) \\ 3C_1'(x).e^{3x} - C_2'(x).e^{-x} = -14\cos x - 8\sin x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) $\to 4C_1'(x).e^{3x} = -14\cos x - 8\sin x$

$$\to C_1'(x) = -\frac{7}{2}.e^{-3x}.\cos x - 2.e^{-3x}.\sin x$$

$$\to C_2'(x) = \frac{7}{2}.e^{x}.\cos x + 2.e^{x}.\sin x$$

NOTE: CÔNG THỨC TÍNH NHANH

$$\int e^{ax}.\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}.(a.\cos bx + b.\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}.(a.\sin bx - b.\cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$C_1(x) = -\frac{7}{2}.\frac{e^{-3x}.(-3.\cos x - \sin x)}{10} - 2.\frac{e^{-3x}.(\cos x + 3\sin x)}{10}$$
$$= \frac{e^{-3x}.(5\cos x + \sin x)}{4}$$

$$C_2(x) = \frac{7}{2}.\frac{e^{x}.(\cos x + \sin x)}{2} + 2.\frac{-e^{x}.(\sin x - \cos x)}{2} = \frac{e^{x}.(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

$$\to y^*(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{e^{-3x}.(5\cos x + \sin x)}{4} + \frac{e^{x}.(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

Vậy nghiệm của phương trình vi phân ban đầu là

$$y = \bar{y} + y^*(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{e^{-3x}(5\cos x + \sin x)}{4} + \frac{e^{x}(3.\cos x + 11.\sin x)}{4}$$

Câu 7: Tìm biến đổi Laplace ngược của $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^3}$

Từ công thức : $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}(s) = \displaystyle\int_s^{+\infty} F(x)dx$ (với $F(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}(x)$)

$$\to f(t) = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(x)dx\right\}(t)$$

Ta có:

$$\int_s^{+\infty} F(x)dx = \int_s^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{(x^2+1)^2}\bigg|_s^{+\infty} = \frac{1}{4(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right.$$

$$\rightarrow f(t) = t.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8}.\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right)\right\}(t) = \frac{1}{8}.t.(\sin t - t\cos t)$$

$$= \frac{1}{8}.(t\sin t - t^2\cos t)$$

Vậy biến đổi Laplace ngược của $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^3}$ là $f(t) = \dfrac{1}{8}.(t\sin t - t^2\cos t)$

Câu 8: Giải bài toán giá trị ban đầu $y'' + y = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < \pi \\ t, & \text{nếu } t \geq \pi \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

Biểu diễn phương trình theo hàm heaviside là :

$y'' + y = 0 + t.u(t-\pi) = t.u(t-\pi)$

Ta có :

$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0) = s^2.F(s)$

$\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s)$

$\mathcal{L}\{t.u(t-\pi)\}(s) = e^{-\pi s}.\dfrac{1}{s^2}$

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế, suy ra :

$$s^2.F(s) + F(s) = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+1)} = e^{-\pi s}.\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\rightarrow y(t) = 0 + (t - \sin t).u(t-\pi)$$

Vậy $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < \pi \\ t - \sin t, & \text{nếu } t \geq \pi \end{cases}$

Bài 9: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ 2, & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ và áp dụng tính $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2xdx + \int_{0}^{\pi} 2dx\right) = 2 + \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2x.\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 2.\cos nx\, dx\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}.\left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x.\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}.\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi}.\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}.\left(\int_{-\pi}^{0} -2x.\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 2.\sin nx\, dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}.\left(\frac{-x.\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}.\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2.(-1)^n}{n} + \frac{2.(1-(-1)^n)}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{nếu n chẵn} \\ -\frac{2}{n} + \frac{4}{\pi n}, & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

Khai triển Fourier của f(x) là

$$f(x) = \frac{2+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n}\sin 2nx + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \left(\frac{-2}{2n+1} + \frac{4}{\pi(2n+1)}\right)\sin(2n+1)x$$

Theo định lí Dirichlet, tổng của chuỗi tại $x = 0$ là:

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

Thay $x = 0$, suy ra :

$$f(0) = \frac{2+\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$$

$$\rightarrow 1 = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1 - 1 - \frac{\pi}{2}}{-\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Bài 10: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}}$$

Xét $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$

Đặt $\ln n = t \to \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(\ln t)^2}{t} = (\text{Lopitan}) \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{2 \ln t}{t} = (\text{Lopitan}) \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{2}{t} = 0$

$\to (\ln \ln n)^2 < \ln n$ kể từ một n nào đó trở đi

$\to \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ $\to$ chuỗi đã cho phân kỳ

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20182 KSTN, KHÓA 63

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$$

Ta có 2 chuỗi trên đều là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Khi $n \to +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$ hội tụ

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} 2.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

$$= 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).n} = 2.e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$

Đặt $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 = t, t \geq 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} t^n$

Đặt $a_n = \frac{n}{n^2-1}$, ta có bán kính hội tụ là:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n^2-1} \div \frac{n+1}{(n+1)^2-1}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n.(n^2+2n)}{(n+1).(n^2-1)}\right| = 1$$

Xét $t = 1 \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ khi $n \to +\infty$, chuỗi này phân kỳ

Suy ra chuỗi hội tụ khi $0 \leq t < 1$

$$\to 0 \leq \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 < 1$$

$$\to -1 < \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$\to \frac{1}{3} < x < 1$$

Miền hội tụ là $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 4: Giải phương trình vi phân $(x.y' - 1).\ln x = 2y$

$(x.y' - 1).\ln x = 2y \qquad (x > 0)$

$$\leftrightarrow y' - \frac{2}{x.\ln x}.y = \frac{1}{x}$$

Thừa số tích phân là $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x.\ln x}dx} = e^{-2\ln\ln x} = \frac{1}{\ln^2 x}$

Nhân cả 2 vế với $p(x)$, ta có:

$$\frac{1}{\ln^2 x}.y' - \frac{2}{x.\ln^3 x}.y = \frac{1}{x.\ln^2 x}$$

$$\leftrightarrow \left(y.\frac{1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{1}{x.\ln^2 x}$$

$$\leftrightarrow y.\frac{1}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$\leftrightarrow y = -\ln x + C.\ln^2 x$. Ngoài ra phương trình không có nghiệm kì dị

Vậy nghiệm tổng quát của ptvp đã cho là $y(x, C) == -\ln x + C.\ln^2 x$

Câu 5: Giải phương trình vi phân

$$(y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx = 0$$

Ta có :

$$\frac{\partial(y^3 + x^3.(1+\ln y))}{\partial x} = \frac{\partial\left(3x^2.(1 + y\ln y)\right)}{\partial y} = 3x^2(1 + \ln y)$$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện ptvp toàn phần

Giả sử $du(x,y) = (y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx$

Xuất phát từ phương trình $u'_x = 3x^2.(1 + y\ln y)$, ta có :

$$u(x,y) = \int 3x^2.(1 + y\ln y)\,dx = x^3.(1 + y\ln y) + g(y)$$

$$\rightarrow\ u'_y = x^3.(1 + \ln y) + g'(y) = (y^3 + x^3.(1 + \ln y))$$

$\rightarrow g'(y) = y^3$. Chọn $g(y) = \dfrac{y^4}{4}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x,y) = x^3.(1 + y\ln y) + \dfrac{y^4}{4} = C$

Câu 6: Tìm biến đổi laplace của $\mathcal{L}\{e^{2t}.\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\}(s)$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}.\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s-2)$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right\}(s-2)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\{\sin t + \cos t\}(s-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1} + \frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right) = \frac{\sqrt{2}(s-1)}{2(s-2)^2+2}$$

Câu 7: Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải PTVP

$x^{(3)} - x'' - x' + x = 2e^{2t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Ta có:

$$\mathcal{L}\{x^{(3)}\}(s) = s^3.F(s) - s^2.f(0) - s.f'(0) - f''(0) = s^3.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0) = s^2.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = s.F(s) - f(0) = s.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{2e^{2t}\}(s) = \frac{2}{s-2}$$

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế, ta được:

$$s^3.F(s) - s^2.F(s) - s.F(s) + F(s) = \frac{2}{s-2}$$

$$\leftrightarrow F(s) = \frac{2}{(s-2)(s^3 - s^2 - s + 1)}$$

$$\leftrightarrow F(s)=\frac{2}{(s-2)(s-1)^2(s+1)}=\frac{-1}{2(s-1)}-\frac{1}{6(s+1)}-\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2}{3(s-2)}$$

$$\leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{2(s-1)}-\frac{1}{6(s+1)}-\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2}{3(s-2)}\right\}(t)$$

$$\leftrightarrow x(t)=-\frac{1}{2}.e^{t}-\frac{1}{6}.e^{-t}-t.e^{t}+\frac{2}{3}.e^{2t}$$

Câu 8: Tìm hàm số f(x) liên tục trên R thỏa mãn $f(x)=2+2\int_0^x tf(t)dt, \forall x\in R$

$$f(x)=2+2\int_0^x tf(t)dt$$

$$\leftrightarrow f'(x)=2x.f(x)$$

$$\leftrightarrow \frac{d(f(x))}{dx}=2x.f(x)$$

$$\leftrightarrow \frac{d(f(x))}{f(x)}=2xdx$$

$$\leftrightarrow \ln|f(x)|=x^2+C$$

$$\leftrightarrow f(x)=e^{x^2+C}$$

Thay $x=0$, ta có: $e^{0^2+C}=2+2\int_0^0 tf(t)dt$

$\rightarrow e^C=2 \quad \rightarrow C=\ln 2$

Vậy hàm f(x) thỏa mãn yêu cầu đề bài là : $f(x)=2.e^{x^2}$

Câu 9: Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)=x^2$ trên $[-\pi;\pi]$

và tính $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2.\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2.\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}.\left(\frac{x^2.\sin nx}{n}+\frac{2x.\cos nx}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n^3}\right)_0^{\pi}=\frac{4.(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2.\sin nx\,dx = 0 \ \text{(do f(x) là hàm chẵn)}$$

→ khai triển chuỗi Fourier của hàm số là:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2}.\cos nx$$

Thay $x = \pi$, suy ra :

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2}.\cos n\pi$$

$$\leftrightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

Câu 10: Xét sự hội tụ đều của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{\sqrt{n}}$ trên $[-1;1]$

Xét $|S(x) - S_n(x)| = \left|x^{2n}.\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{1}{\sqrt{n+5}} + \cdots\right)\right|$

$= \left|x^{2n}.\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n+4}} - \frac{1}{\sqrt{n+5}}\right) + \cdots\right)\right| \le x^{2n}.\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\le \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon, \forall n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

Do đó $\forall \varepsilon > 0$, ta lấy $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$. Khi đó $\forall n > n_0$, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [-1;1]$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{\sqrt{n}}$ hội tụ đều trên $[-1;1]$

ĐỀ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20142

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-1)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^x}$

Câu 3: Giải các phương trình vi phân :

a) $y'.\cos^2 x = y$

b) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 3$

Câu 5: Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số

$$f(x) = x, \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \text{tuần hoàn chu kì } 2 \end{cases}$$

Câu 6: Tính tổng

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$$

Câu 7: Giải phương trình vi phân

$$\left(x + \frac{1}{y^2}\right) dy + \left(y + \frac{1}{x^2}\right) dx = 0$$

GIẢI ĐỀ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20142

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Chuỗi số này là chuỗi số dương $\forall n > 1$

Khi $n \to +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ

$\to$ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu

$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ là một dãy số dương, đơn điệu giảm dần về 0

$\to$ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-1)^n$

Đặt $x - 1 = t$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ với $a_n = \frac{1}{n+1}$

Bán kính hội tụ $R = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1$

Xét $t = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ là chuỗi phân kỳ

Xét $t = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

$\to -1 \le t < 1$

$\to -1 \le x - 1 < 1$

$\rightarrow 0 \leq x < 2$

$\rightarrow$ miền hội tụ là $x \in [0; 2)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^x}$

Chuỗi đã cho là chuỗi số dương $\forall n \geq 1$

Khi $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n-1}{n^x} \sim \frac{1}{n^{x-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$ hội tụ $\leftrightarrow x - 1 > 1$

$\rightarrow x > 2$

$\rightarrow$ miền hội tụ là $x \in (2; +\infty)$

Câu 3: Giải các phương trình vi phân :

a) $y'.\cos^2 x = y$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}.\cos^2 x = y$

$\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Tích phân 2 vế :

$\rightarrow \ln|y| = \tan x + C$

$\rightarrow y = e^{\tan x + C}$

Nghiệm tổng quát của ptvp đã cho là $y = e^{\tan x + C}$,

ngoài ra còn có $y = 0$ là nghiệm kì dị

b) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$

(Đây là phương trình bernoulli)

Đặt $v = y^{-2}$, phương trình đã cho trở thành:

$v' + \frac{-2}{x}.v = -2.x^2$

Thừa số tích phân của ptvp trên là: $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$. Nhân cả 2 vế với p(x):

$$\rightarrow \frac{1}{x^2}.v' + \frac{-2}{x^3}v = -2$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2}.v\right)' = -2$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2}.v = -2x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2y^2} = -2x + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2y^2} + 2x + C = 0$$

Vậy tích phân tổng quát của ptvp đã cho là $u(x, y, C) = \dfrac{1}{x^2y^2} + 2x + C = 0$

Ngoài ra có $y = 0$ là nghiệm kì dị

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 3$

Đặt $t = x + 3 \rightarrow x = t - 3$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{(t-3)^2 - 3(t-3) + 2} = \frac{1}{t^2 - 9t + 20} = \frac{1}{(t-4)(t-5)}$$

$$= \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-4} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\frac{t}{5} - 1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{t}{4} - 1} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1 - \frac{t}{4}} - \frac{1}{5}.\frac{1}{1 - \frac{t}{5}}$$

Khai triển maclaurin của $f(t)$ là :

$$f(t) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^n}$$

Vậy khai triển $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 3$ là :

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n}$$

Câu 5: Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số

$$f(x) = x, \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \text{tuần hoàn chu kì } 2 \end{cases}$$

Nhận xét: $f(x) = x$ là hàm số lẻ, suy ra hệ số a_0 và a_n đều bằng 0

$$b_n = \int_{-1}^{1} x.\sin n\pi x\,dx = 2\int_{0}^{1} x.\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\left(-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}$$

Vậy khai triển thành chuỗi Fourier của f(x) là

$$\rightarrow F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$$

Tại $x = -1, x = 1$ hàm không liên tục, theo định lí Dirichlet :

$$\rightarrow F(-1) = \frac{f(-1^-) + f(-1^+)}{2} = 0$$

$$F(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = 0$$

$$\rightarrow F(x) = \begin{cases} 0\,, & x = -1 \\ x\,, & -1 < x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

Câu 6: Tính tổng

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$$

Ta có $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$

$$\rightarrow \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{6}$$

Câu 7: Giải phương trình vi phân

$$\left(x + \frac{1}{y^2}\right)dy + \left(y + \frac{1}{x^2}\right)dx = 0$$

Ta thấy $\frac{\partial\left(x + \frac{1}{y^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(y + \frac{1}{x^2}\right)}{\partial y} = 1$

→ thỏa mãn điều kiện phương trình vi phân toàn phần

Giả sử $du(x, y) = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)dy + \left(y + \frac{1}{x^2}\right)dx$

Xuất phát từ $u'_y = x + \frac{1}{y^2}$

$\rightarrow u(x, y) = \int \left(x + \frac{1}{y^2}\right) dy = xy + \frac{-1}{y} + g(x)$

$\rightarrow\ u'_x = y + g'(x) = y + \frac{1}{x^2}$

$\rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Chọn $g(x) = -\frac{1}{x}$

Ta có tích phân tổng quát của ptvt đã cho là :

$u(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C$

ĐỀ THI GIỮA KÌ GIẢI TÍCH 3 – HỌC KỲ 20172, NHÓM NGÀNH 1 K62

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 0$

Áp dụng tiêu chuẩn Dalembert, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+1)^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}} \div \frac{3n^2+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{3(n+1)^2+1}{3n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}.\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 0$

Khi $n \rightarrow +\infty$, ta có:

$$\sqrt{n+1}.\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) = \sqrt{n+1}.\ln\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) \sim \frac{2\sqrt{n+1}}{n^2+1} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n.(x+4)^n}$$

Đặt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n.(x+4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^n$ với $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2.3^n}, t = \frac{1}{x+4}$ $(x \neq -4)$

Bán kính hội tụ của chuỗi là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)}{n^2.3^n} \div \frac{(n+2)}{(n+1)^2.3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3.(n+1)^3}{n^2.(n+2)}\right| = 3$$

Xét tại biên $t = 3$, chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2} \text{ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt}$$

Xét tại biên $t = -3$, chuỗi đã cho trở thành

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^2} \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ là chuỗi phân kỳ}$$

→ Chuỗi hội tụ khi $-3 < t \leq 3$

$$\rightarrow\ -3 < \frac{1}{x+4} \leq 3$$

$$\rightarrow\ x < -\frac{13}{3} \cup x \geq -\frac{11}{3}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $x \in \left(-\infty; -\frac{13}{3}\right) \cup \left[-\frac{11}{3} \cup +\infty\right)$

Câu 3: Khai triển $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{3}{2}.x+1}$$

Đặt $\frac{3}{2}x = u$

Khai triển Maclaurin của $f(u)$ là

$$f(u) = \frac{1}{2}.\frac{1}{u+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}.(-1)^n.u^n \quad ,-1 < u < 1$$

Thay $t = \dfrac{3x}{2}$, suy ra chuỗi maclaurin của $f(x)$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}.(-1)^n.\left(\frac{3}{2}x\right)^n = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\left(\frac{3}{2}\right)^n.x^n \quad ,-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Câu 4: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.x^{4n}}{(n+1)3^n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1, x \in R$

Đặt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.x^{4n}}{(n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}u_n t^n$ với $u_n = \dfrac{n}{(n+1)3^n}, t = x^4, (t \geq 0)$

Bán kính hội tụ của chuỗi là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} \div \frac{n+1}{(n+2)3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2).3^{n+1}}{(n+1)^2.3^n} = 3$$

Xét tại biên $t = 3$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)}$ có $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1 \neq 0$

$\rightarrow$ Chuỗi phân kì tại $t = 3$. Suy ra chuỗi đã cho hội tụ khi chỉ khi $t < 3$

$\rightarrow 0 \leq x^4 < 3$

$\rightarrow -\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $\left(-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right)$

Câu 5: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Viết lại chuỗi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{6^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{8^2+1}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(2n)^2+1}}$$

Xét $f(n) = \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+1}}$. Có $f'(n) = \frac{-4n}{\sqrt{(4n^2+1)^3}} < 0, \forall n > 0$

Và $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+1}} = 0$

$\rightarrow f(n)$ là một dãy đơn điệu , tiến tới 0 khi $n \rightarrow +\infty$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

Câu 6: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^6+4x^4}$ trên R

Theo định lí Cauchy, ta có $n^6 + 4x^4 \geq 4n^3x^2$

$$\rightarrow \frac{nx^2}{n^6+4x^4} \leq \frac{nx^2}{4n^3x^2} = \frac{1}{4n^2}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ là chuỗi hội tụ

→ Chuỗi đã cho hội tụ đều và tuyệt đối trên R

Câu 7: Khai triển $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)}$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 2$

Đặt $x + 2 = t \to x = t - 2$

$$\to f(t) = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{-1}{1 - t^2}$$

Khai triển Maclaurin của f(t) là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -(t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -t^{2n} \quad , -1 < t < 1$$

Thay $t = x + 2$, khai triển Maclaurin của f(x) là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -(x+2)^{2n} \quad , -3 < x < -1$$

Câu 8: Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.e^{nx}$ với $x < 0$. Tính $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x)dx$

Ta có: $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x)dx = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} n.e^{nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} n.e^{nx}dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}\Big|_{-\ln 4}^{-\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

Câu 9: Tính tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ với $-1 < x < 1$

Với $-1 < x < 1$, chuỗi đã cho là khả vi, khả tích với mọi x thuộc khoảng đang xét

Gọi $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} = x.P(x)$

$$\int_0^x P(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} n^2 t^{n-1} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = x.Q(x)$$

$$\int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{n-1}nt^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n = \frac{x}{1+x}$$

$$\rightarrow Q(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\rightarrow P(x) = \left(x.Q(x)\right)' = \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$\rightarrow S(x) = x.P(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, với $x \in (-1;1)$

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20172 NHÓM 2

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ là dãy cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{5}$ và công bội là $\frac{1}{5}$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là $4.\frac{1}{4} = 1$

Câu 2: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6n^2+1}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Khin $n \rightarrow +\infty : \frac{n+2}{6n^2+1} \sim \frac{1}{6n}$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n}$ là chuỗi phân kỳ

Suy ra chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n!)^2}{n^{2n}}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Xét giới hạn :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8^{n+1}[(n+1)!]^2}{(n+1)^{2(n+1)}} \div \frac{8^n (n!)^2}{n^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8.\frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}.\frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} 8.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{2n} = 8.e^{\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).2n} = 8.e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n}{n+1}} = \frac{8}{e^2} > 1$$

Suy ra chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Dalembert

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right)$

Ta có : $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Xét $f(n) = \sin\frac{1}{n}$ có $f'(n) = \frac{-1}{n^2}.\cos\left(\frac{1}{n}\right) < 0, \forall n \geq 1$

và $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$\to \sin\frac{1}{n}$ đơn điệu giảm dần về 0

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt

Câu 3: Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x+1)^n}$

Đk: $x \neq -1$. Đặt $t = \frac{1}{x+1} \to$ Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.t^n$

Ta có $a_n = \frac{1}{n^2}$. Bán kính hội tụ của chuỗi hàm là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Xét tại biên $t = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

Xét tại biên $t = -1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ theo tc Leibnizt

$\to$ Chuỗi hội tụ khi chỉ khi $-1 \leq t \leq 1$

$\to\ -1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad \to\ x \leq -2\ \cup x \geq 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n} = 3x.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+9x^2)^n}$$

Với $x = 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n} = 0$, hội tụ

Với mọi $x \neq 0, \frac{1}{1+9x^2} < 1$

$\to$ Chuỗi đã cho là tổng của cấp số nhân công bội là $\frac{1}{1+9x^2}$

và có tổng là : $S = 3x.\frac{\frac{1}{1+9x^2}}{1-\frac{1}{1+9x^2}} = \frac{1}{3x}$, hội tụ

Suy ra miền hội tụ của chuỗi là R

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x + 1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x + 1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một chuỗi hội tụ, suy ra chuỗi đã cho hội tụ khi chỉ khi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2}$ hội tụ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}}$

Với $x < 2$, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt

Với $x \geq 2, \nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}}$ nên chuỗi phân kì .

Vây miền hội tụ là $(-\infty; 2)$

Câu 4: Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$, bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1.$

Tại biên $x = \pm 1$, chuỗi phân kì, suy ra miền hội tụ $(-1; 1)$

Với mọi $x \in (-1; 1)$, chuỗi đã cho là khả tích.

Gọi $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = x.P(x)$

$$\int_0^x P(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x.Q(x)$$

$$\int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\to Q(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\to P(x) = \big(x.Q(x)\big)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

$$\to S(x) = x.P(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n} = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{27}$$

Câu 5: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} = \frac{1}{4}.\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Đặt $-\frac{x^2}{16} = t \to f(t) = \frac{1}{4}.(1-t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.t^n$

$$\rightarrow f(x)=\frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\left(\frac{-x^2}{16}\right)^n=\frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{16^n}.x^{2n}$$

Câu 6: Khai triển hàm số $f(x)=\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ thành chuỗi Fourier

$f(x)$ là hàm chẵn $\rightarrow\ b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{-4}{\pi}.\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}.\left[\frac{-2}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}x+\frac{2}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}x\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{-4}{4n^2-1}=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\cos nx$$

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 HỌC KÌ 20181 – NHÓM NGÀNH 2

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right\}$ là dãy dương, đơn điệu giảm dần về 0

→ Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$$

→ Chuỗi đã cho hội tụ

Bài 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n + 1}$

Đặt $(x-1)^2 = t, t \geq 0$

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, với $a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1}$

Bán kính hội tụ là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{n^2 - n + 1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}\right| = 1$$

Xét $t = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

→ Chuỗi hội tụ khi $0 \leq t \leq 1$

$\rightarrow\ \ 0 \le (x-1)^2 \le 1$

$\rightarrow\ \ -1 \le x-1 \le 1$

$\rightarrow\ \ 0 \le x \le 2$

Miền hội tụ là $x \in [0; 2]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-x^2}$

Chuỗi đã cho hội tụ $\leftrightarrow 2 - x^2 < -1$

$\rightarrow x^2 > 3$

$\rightarrow x > \sqrt{3} \cup x < -\sqrt{3}$

$\rightarrow$ Miền hội tụ là $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

Câu 3: Giải phương trình vi phân

a) $y' + \frac{y}{x} = x^3$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$

$\rightarrow x.y' + y = x^4$

$\rightarrow (x.y)' = x^4$

$\rightarrow x.y = \frac{x^5}{5} + C$

$\rightarrow y = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là $y(x, C) = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$

b) $y' = \frac{-x + 2y}{x}$, $y(1) = 2$

$\rightarrow y' = -1 + \frac{2}{x}.y$

$\rightarrow y' - \frac{2}{x}.y = -1$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$

$\rightarrow \frac{1}{x^2}.y' - \frac{2}{x^3}.y = \frac{-1}{x^2}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2}.y\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$\rightarrow \frac{1}{x^2}.y = \frac{1}{x} + C$

$\rightarrow y = x + C.x^2$

Lại có $y(1) = 2 \rightarrow 2 = 1 + C \rightarrow C = 1$

$\rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho là $y(x) = x + x^2$

c) $(1 - y.e^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$

Ta thấy $\frac{\partial(1 - y.e^{-x})}{\partial y} = \frac{\partial(e^{-x})}{\partial x} = -e^{-x}$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện phương trình vi phân toàn phần

Giả sử $du(x,y) = (1 - y.e^{-x})dx + e^{-x}dy$

Xuất phát từ điều kiện $u'_x = 1 - y.e^{-x}$

$\rightarrow u(x,y) = \int 1 - y.e^{-x}dx = x + y.e^{-x} + g(y)$

$\rightarrow u'_y = e^{-x} + g'(y) = e^{-x}$

$\rightarrow g'(y) = 0.$ Ta chọn $g(y) = 0$

$\rightarrow$ tích phân tổng quát của ptvp đã cho là $u(x,y) = x + y.e^{-x} = C$

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$

Đặt $t = x - 3 \rightarrow x = t + 3$

$$f(t) = \frac{1}{(t+3)^2 - 3(t+3) + 2} = \frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)}$$

$$= \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{t}{2} + 1}$$

$\rightarrow$ Khai triển Maclaurin của $f(t)$ là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^n - \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{t^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^n.\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$\rightarrow$ Khai triển $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$ là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(x-3)^n.\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Câu 5: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm sau trên R

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}}$$

Khi $n \to +\infty$: $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4}} \sim \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ là chuỗi hội tụ

→ chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên R

Câu 6: Khai triển hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π

$$f(x) = x - 2\pi, \pi < x < 3\pi$$

Ta khai triển chuỗi fourier $g(x) = x, -\pi < x < \pi$ tuần hoàn chu kì 2π

$g(x)$ là hàm số lẻ → a_0, a_n đều bằng 0

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}.\left(\frac{-x.\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}.\frac{\pi.(-1)^{n-1}}{n} = \frac{2.(-1)^{n-1}}{n} \qquad \{\cos n\pi = (-1)^n\}$$

→ Chuỗi fourier của $g(x)$ là

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{2}{n}.\sin nx$$

Theo định lí Dirichlet, chuỗi fourier tại những điểm không xác định là :

$$F(-\pi) = \frac{f(-\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

$$F(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

$$\to F(x) = \begin{cases} 0, \text{với } x = -\pi \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{2}{n}.\sin nx, \text{với } -\pi < x < \pi \\ 0, \text{với } x = \pi \end{cases}$$

ĐỀ THI GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20182 NHÓM NGÀNH 2 K63

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{n}}-1)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{n}}-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{\ln 3}{n}}-1\right)$$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n\geq 1$

Khi $n\to+\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{\ln 3}{n}}-1\right)\sim\frac{\ln 3}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln 3}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ do $\alpha=\frac{3}{2}>1$

→ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

Câu 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n\geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn cauchy, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}2.\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}2.e^{-1}<1$$

→ Chuỗi đã cho hội tụ

Câu 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2-2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$

Đặt $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2=t\ \ (t\geq 0)$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2-2}.t^n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nt^n$

Bán kính hội tụ là $R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n^2-2}:\frac{n+1}{(n+1)^2-2}\right|$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n[(n+1)^2-2]}{(n^2-2)(n+1)}\right|=1$$

Tại $t = 1$: khi $n \to +\infty$ $\dfrac{n}{n^2 - 2} \sim \dfrac{1}{n}$ phân kỳ. Suy ra chuỗi hội tụ khi chỉ khi $t \in [0,1)$

Xét $0 \le \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2 < 1$

$\to -1 < 2 - \dfrac{1}{x} < 1$

$\to \ 1 < \dfrac{1}{x} < 3$

$\to \dfrac{1}{3} < x < 1$

Suy ra miền hội tụ là $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 1$

Đặt $t = x - 1 \ \to x = t + 1$

$\to f(t) = \dfrac{t+1}{t+5} = 1 - \dfrac{4}{t+5} = 1 - \dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{\frac{t}{5}+1}$

Khai triển maclaurin $f(t)$tại $t = 0$ là

$1 - \dfrac{4}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{-1}{5}\right)^n.t^n$

Suy ra chuỗi taylor của $f(x)$ tại $x = 1$ là

$1 - \dfrac{4}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{-1}{5}\right)^n.(x-1)^n$

Câu 5: Giải phương trình vi phân

$$\sqrt{x+1}dy + y.\ln^2 y\, dx = 0$$

$\to \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = -\dfrac{dy}{y.\ln^2 y}$

Tích phân 2 vế

$\to \displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int -\dfrac{dy}{y.\ln^2 y}$

$\to 2\sqrt{x+1} + C = \dfrac{1}{\ln y}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x,y,C) = 2\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\ln y} + C = 0$

Câu 6: Giải phương trình vi phân

$$(x.y' - 1)\ln x = 2y$$

$\rightarrow x.\ln x.y' - 2y = \ln x$

$\rightarrow y' - \dfrac{2y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x}$

thừa số tích phân là

$$p(x) = e^{\int -\frac{2dx}{x\ln x}} = e^{-2\ln\ln x} = \frac{1}{\ln^2 x}$$

nhân cả 2 vế với $p(x)$, ta có:

$$\frac{1}{\ln^2 x}.y' - \frac{2\ln x}{x\ln^3 x}.y = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\ln^2 x}.y\right)' = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

lấy tích phân 2 vế

$$\rightarrow \frac{1}{\ln^2 x}.y = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$\rightarrow y = -\ln x + C.\ln^2 x$

Câu 7: Giải phương trình vi phân toàn phần sau

$$(y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx = 0$$

Ta có :

$$(y^3 + x^3.(1+\ln y))'_x = \left(3x^2.(1 + y\ln y)\right)'_y = 3x^2.(1+\ln y)$$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện ptvp toàn phần

$$u(x,y) = \int 3x^2.(1 + y\ln y)\,dx = x^3.(1 + y\ln y) + g(y)$$

$$\rightarrow\ u'_y = x^3.(1+\ln y) + g'(y) = (y^3 + x^3.(1+\ln y))$$

$\rightarrow g'(y) = y^3.$ Chọn $g(y) = \dfrac{y^4}{4}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x,y) = x^3.(1 + y\ln y) + \dfrac{y^4}{4} = C$

Câu 8: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1}$

Xét $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{3/2}} = 0$ (do hàm loga < hàm lũy thừa khi tiến ra vô cực)

$\rightarrow \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1} < \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3 + 3n^2 + 1}$ kể từ n nào đó trở đi

$\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3 + 3n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \rightarrow +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ → chuỗi đã cho hội tụ

Câu 9: Khai triển fourier của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x < 0 \\ 2, 0 < x < \pi \end{cases}, \text{tuần hoàn chu kì } 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} 2xdx\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x.\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x.\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx - nx.\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2\cos nx + 2nx.\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1 + \cos n\pi}{n^2} + \frac{2.\cos n\pi - 2}{n^2}\right) = \frac{3.(-1 + (-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{nếu n chẵn} \\ -\frac{6}{\pi n^2} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x.\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x.\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{nx\cos nx - \sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{-2nx\cos nx + \sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{n\pi\cos n\pi}{n^2} + \frac{-2n\pi\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{1}{n} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

Suy ra chuỗi fourier của f(x) tuần hoàn chu kì 2π là

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{2n}.\sin 2nx + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{6}{\pi(2n+1)^2}.\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\,x$$

Bài 10: Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$$

Xét $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}.n$

chuỗi này có miền hội tụ là $|x| < 1$

với mọi $x \in (-1; 1)$, tổng của chuỗi là khả tích trên $[0, x]$

Ta có:

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}.ndt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1}.ndt = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\to S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{1}{5}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{16}$$

ĐỀ THI GIỮA KÌ GT3 HỌC KÌ 20193 – NHÓM NGÀNH 2

Câu 1:

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}.\ Có\ u_n>0\forall n\geq 2\rightarrow chuỗi\ dương$$

$$Xét\ f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

$$+)\ f'(x)=-\frac{\frac{1}{3}.\ln^{-\frac{2}{3}}x}{\left(x.\sqrt[3]{\ln x}\right)^2}<0\rightarrow f(x)\ đơn\ điệu\ giảm$$

$$+)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}=0$$

$$+)\ \int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}dx=\int_{\ln 2}^{\infty}t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\Big|_{\ln 2}^{\infty}=\infty\rightarrow Tp\ phân\ kì$$

$$\rightarrow Chuỗi\ đã\ cho\ phân\ kì\ theo\ TC\ tích\ phân$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right).\ u_n>0\forall n\geq 1$$

$$u_n=\sqrt[3]{n}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sim\sqrt[3]{n}.\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\ \ (\ do\ e^t-1\sim t\ khi\ t\to 0\ )$$

$$Mà\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\ hội\ tụ\ \left(\frac{5}{3}>1\right)$$

$$\rightarrow Chuỗi\ đã\ cho\ hội\ tụ\ theo\ tiêu\ chuẩn\ so\ sánh$$

Câu 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2x^3}{x^6+4}\right)^n$$

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2x^3}{x^6+4}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^6}{4}+1}\right)^n\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n.\sqrt{n}}$$

$$Xét\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n.\sqrt{n}}\ là\ chuỗi\ dương\ do\ \frac{1}{2^n.\sqrt{n}}>0\forall n\geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n.\sqrt{n}}{2.2^n.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}<1\rightarrow Chuỗi\ hội\ tụ\ theo\ TC\ D'Alembert$$

$$\rightarrow Chuỗi\ đã\ cho\ hội\ tụ\ đều\ trên\ R\ theo\ TC\ Weierstrass$$

Câu 3:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}(2x+1)^{n}$$

$Xét$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{u_n(x)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{n-1}\right|.\left|\frac{1}{2x+1}\right| = \frac{2}{|2x+1|} < 1$$

$$\to -2 < 2x+1 < 2 \to \frac{-3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$Vậy\ miền\ hội\ tụ\ cần\ tìm\ l$à $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 4:

$$f(x) = xln(2-x) = x.\ln 2 + x.\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$\to f(x) = x.\ln 2 + x.\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\ \forall\left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= x.\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}.\frac{1}{2^n(n+1)}.x^{n+2}\ \forall|x| < 2$$

Câu 5:

$a)\ (1-x) + xy'y = 0$

$$\to (1-x) = -x\frac{dy}{dx}y \to \frac{x-1}{x}dx = ydy \to x - \ln|x| + C = \frac{y^2}{2}$$

$$\to y = \pm\sqrt{2x - 2\ln|x| + C}$$

$b)(x-2y)dx + xdy = 0$

$+)\ x = 0\ l$à $nghiệm\ k$ì $dị$

$+)\ x \neq 0. Có$

$$x - 2y + x.y' = 0 \to y' - \frac{2}{x}y = 1\ (PTVP\ tuyến\ tính\ )$$

$$\to y = e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int 1.e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + C\ )$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x + Cx^2$$

$c)(3x^2y + 2\cos y)dx + (x^3 - 2xsin\ y)dy = 0$

$P(x;y) = 3x^2y + 2\cos y \to P'_y = 3x^2 - 2\sin y$

$Q(x;y) = x^3 - 2xsin\ y \to Q'_x = 3x^2 - 2\sin y$

$\to PTVP\ toàn\ phần$

$$C = \int_0^x P(x;0)dx + \int_0^y Q(x;y)dy = \int_0^x 2dx + \int_0^y x^3 - 2x\sin y\, dy$$
$$= 2x + x^3 y + 2x\cos y$$

Câu 6:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } -2 < x < 0 \\ 1 \text{ nếu } 0 < x < 2 \end{cases} \text{tuần hoàn chu kỳ } 4$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0dx + \int_0^2 1dx\right) = \frac{1}{2}.2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0.\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}.\sin\frac{n\pi x}{2}.\frac{2}{n\pi}\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi = 0 \ \text{ với } n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0.\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$
$$= -\frac{1}{2}.\cos\frac{n\pi x}{2}.\frac{2}{n\pi}\Big|_{x=0}^{x=2}$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} \ \text{ với } n = 1,2,3,\ldots$$

$\rightarrow$ *Khai triển Fourier của hàm là*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi}.\sin\frac{n\pi x}{2} \ \text{ với } x \neq 0 \\ \dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \dfrac{1}{2} \ \text{ với } x = 0 \ \text{ (Định lí Dirichlet)} \end{cases}$$