ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20182 KSTN, KHÓA 63

Lời giải: Trần Bá Hiếu KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$$

Ta có 2 chuỗi trên đều là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Khi $n \to +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)$ hội tụ

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} 2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} 2.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= 2.e^{\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).n} = 2.e^{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n}{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ

Câu 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$

Đặt $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 = t, t \geq 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} t^n$

Đặt $a_n = \frac{n}{n^2 - 1}$, ta có bán kính hội tụ là:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n^2-1} \div \frac{n+1}{(n+1)^2-1}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n.(n^2+2n)}{(n+1).(n^2-1)}\right| = 1$$

Xét $t = 1 \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ khi $n \to +\infty$, chuỗi này phân kỳ

Suy ra chuỗi hội tụ khi $0 \le t < 1$

$$\to 0 \le \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 < 1$$

$$\to -1 < \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$\to \frac{1}{3} < x < 1$$

Miền hội tụ là $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 4: Giải phương trình vi phân $(x.y' - 1).\ln x = 2y$

$(x.y' - 1).\ln x = 2y \qquad (x > 0)$

$$\leftrightarrow y' - \frac{2}{x.\ln x}.y = \frac{1}{x}$$

Thừa số tích phân là $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x.\ln x}dx} = e^{-2\ln\ln x} = \frac{1}{\ln^2 x}$

Nhân cả 2 vế với $p(x)$, ta có:

$$\frac{1}{\ln^2 x}.y' - \frac{2}{x.\ln^3 x}.y = \frac{1}{x.\ln^2 x}$$

$$\leftrightarrow \left(y.\frac{1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{1}{x.\ln^2 x}$$

$$\leftrightarrow y.\frac{1}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$\leftrightarrow y = -\ln x + C.\ln^2 x$. Ngoài ra phương trình không có nghiệm kì dị

Vậy nghiệm tổng quát của ptvp đã cho là $y(x, C) == -\ln x + C.\ln^2 x$

Câu 5: Giải phương trình vi phân

$$(y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx = 0$$

Ta có :

$$\frac{\partial(y^3 + x^3.(1+\ln y))}{\partial x} = \frac{\partial\big(3x^2.(1 + y\ln y)\big)}{\partial y} = 3x^2(1 + \ln y)$$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện ptvp toàn phần

Giả sử $du(x, y) = (y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx$

Xuất phát từ phương trình $u'_x = 3x^2.(1 + y\ln y)$, ta có :

$$u(x, y) = \int 3x^2.(1 + y\ln y)\,dx = x^3.(1 + y\ln y) + g(y)$$

$$\rightarrow\ u'_y = x^3.(1 + \ln y) + g'(y) = (y^3 + x^3.(1 + \ln y))$$

$$\rightarrow g'(y) = y^3.\ \ \text{Chọn } g(y) = \frac{y^4}{4}$$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x, y) = x^3.(1 + y\ln y) + \frac{y^4}{4} = C$

Câu 6: Tìm biến đổi laplace của $\mathcal{L}\{e^{2t}.\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\}(s)$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}.\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s - 2)$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right\}(s - 2)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\{\sin t + \cos t\}(s - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{(s - 2)^2 + 1} + \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1}\right) = \frac{\sqrt{2}(s - 1)}{2(s - 2)^2 + 2}$$

Câu 7: Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải PTVP

$x^{(3)} - x'' - x' + x = 2e^{2t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Ta có:

$$\mathcal{L}\{x^{(3)}\}(s) = s^3.F(s) - s^2.f(0) - s.f'(0) - f''(0) = s^3.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0) = s^2.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = s.F(s) - f(0) = s.F(s)$$

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{2e^{2t}\}(s) = \frac{2}{s - 2}$$

Tác động biến đổi Laplace vào 2 vế, ta được:

$$s^3.F(s) - s^2.F(s) - s.F(s) + F(s) = \frac{2}{s - 2}$$

$$\leftrightarrow F(s) = \frac{2}{(s - 2)(s^3 - s^2 - s + 1)}$$

$$\leftrightarrow F(s) = \frac{2}{(s-2)(s-1)^2(s+1)} = \frac{-1}{2(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3(s-2)}$$

$$\leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{2(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3(s-2)}\right\}(t)$$

$$\leftrightarrow x(t) = -\frac{1}{2}.e^t - \frac{1}{6}.e^{-t} - t.e^t + \frac{2}{3}.e^{2t}$$

Câu 8: Tìm hàm số f(x) liên tục trên R thỏa mãn $f(x) = 2 + 2\int_0^x tf(t)dt, \forall x \in R$

$$f(x) = 2 + 2\int_0^x tf(t)dt$$

$$\leftrightarrow f'(x) = 2x.f(x)$$

$$\leftrightarrow \frac{d(f(x))}{dx} = 2x.f(x)$$

$$\leftrightarrow \frac{d(f(x))}{f(x)} = 2xdx$$

$$\leftrightarrow \ln|f(x)| = x^2 + C$$

$$\leftrightarrow f(x) = e^{x^2+C}$$

Thay $x = 0$, ta có: $e^{0^2+C} = 2 + 2\int_0^0 tf(t)dt$

$\rightarrow e^C = 2 \quad \rightarrow C = \ln 2$

Vậy hàm f(x) thỏa mãn yêu cầu đề bài là : $f(x) = 2.e^{x^2}$

Câu 9: Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x) = x^2$ trên $[-\pi;\pi]$

và tính $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2.\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2.\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}.\left(\frac{x^2.\sin nx}{n} + \frac{2x.\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right)_0^{\pi} = \frac{4.(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2.\sin nx\,dx = 0 \ \ (\text{ do } f(x) \text{ là hàm chẵn })$$

→ khai triển chuỗi Fourier của hàm số là:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2}.\cos nx$$

Thay $x = \pi$, suy ra :

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2}.\cos n\pi$$

$$\leftrightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

Câu 10: Xét sự hội tụ đều của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{\sqrt{n}}$ trên $[-1; 1]$

Xét $|S(x) - S_n(x)| = \left|x^{2n}.\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{1}{\sqrt{n+5}} + \cdots\right)\right|$

$= \left|x^{2n}.\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n+4}} - \frac{1}{\sqrt{n+5}}\right) + \cdots\right)\right| \le x^{2n}.\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\le \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon, \forall n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

Do đó $\forall \varepsilon > 0$, ta lấy $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$. Khi đó $\forall n > n_0$, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [-1; 1]$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{\sqrt{n}}$ hội tụ đều trên $[-1; 1]$