ĐỀ 2

Hỗ trợ Sinh viên Bách Khoa
CLB Hỗ trợ Học tập

ĐỀ THI THỬ GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 2022.2

Nhóm ngành 1   Thời gian làm bài: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [1đ] Tính độ cong của đường cong $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ tại điểm ứng với $t = 1$.

Câu 2. [1đ] Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho bởi hai mặt phẳng sau $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ tại điểm $M(0,2,1)$

Câu 3. [1đ] Tìm hình bao của họ đường cong $x\cos^3 c + y\sin^3 c = 1$ với $c \in \mathbb{R}$ là tham số.

Câu 4. [1đ] Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

Câu 5. [1đ] Tính tích phân kép $\iint\limits_D dxdy$ trong đó D: $\begin{cases} y \le x^2 + y^2 \le 3y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

Câu 6. [1đ] Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+4y^2+z^2}\,dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi $x^2 + 4y^2 + z^2 \le z$

Câu 7. [1đ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 - 4y - x = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$

Câu 8. [1đ] Tính thể tích của miền được giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, y = x, z = y^2$ và mặt Oxy

Câu 9. [1đ] Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + 5sin^2 x\right) dx$

Câu 10. [1đ] Xét sự hội tụ đều của $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(xy^2)dx$ trên khoảng $(0, +\infty)$.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

Giải câu 1. Ta có:

$$\begin{cases} x'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t \\ y'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) = e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t \\ y''(t) = e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t = -2e^t \sin t \end{cases}$$

Độ cong của đường cong cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ được tính theo công thức:

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}$$

Vậy độ cong cần tìm là $\dfrac{1}{\sqrt{2}e}$

Giải câu 2. Đặt $\begin{cases} x = 2.\cos\phi \\ y = 2.\sin\phi \end{cases}$

$\Rightarrow z = 2.\cos\phi + 2.\sin\phi - 1$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cong: $\begin{cases} x = 2.\cos\phi \\ y = 2.\sin\phi \\ z = 2.\cos\phi + 2.\sin\phi - 1 \end{cases}$

Tại $M(0,2,1)$ ứng với $\phi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x' = -2.\sin\phi \\ y' = 2.\cos\phi \\ z' = -2.\sin\phi + 2.\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình pháp diện: $-2.(x-0) + 0.(y-2) - 2.(z-1) = 0$ hay $-2x - 2(z-1) = 0$

Giải câu 3. Đặt $F(x,y,c) = x\cos^3 c + y\sin^3 c - 1$

Xét hệ $\begin{cases} F'_x = \cos^3 c = 0 \\ F'_y = \sin^3 c = 0 \end{cases}$, không tồn tại bộ (x,y) thỏa mãn hệ phương trình.

Ta khử c từ hệ:

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos^3 c + y\sin^3 c - 1 = 0 \\ -3x\cos^2 c\sin c + 3y\sin^2 c\cos c = 0 \end{cases}$$

Từ đây xét các trường hợp:

TH1: Với $\cos c = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

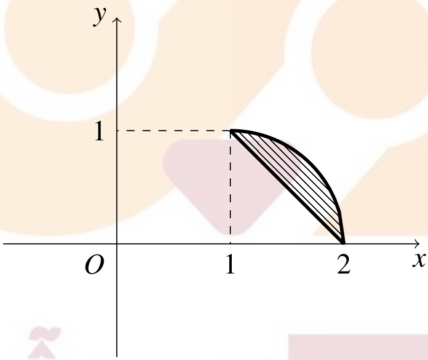
TH2: Với $\sin c = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

TH3: Ta có: $\Rightarrow \begin{cases} x\cos^3 c + y\sin^3 c - 1 = 0 \\ y\sin c = x\cos c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos^3 c + x\cos c\sin^2 c = 1 \\ y\sin c = x\cos c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\cos c = 1 \\ y\sin c = x\cos c \end{cases} \Rightarrow x\cos c = y\sin c = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1\,(x,y \neq 0)$$

Vậy hình bao của họ đường cong là $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ hợp với 2 đường $x^2 = 1$ và $y^2 = 1$

Giải câu 4. (Hình vẽ)



Miền lấy tích phân bị giới hạn bởi các đường $y = 0, y = 1, x = 1 + \sqrt{1-y^2}, x = 2 - y$.

Vậy khi đổi thứ tự lấy tích phân ta được:

$$I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$$

Giải câu 5. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (r > 0) \implies |J| = r$

$$\text{D}: \begin{cases} r\sin\varphi \leq r^2 \leq 3r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \leq r\sin\varphi \leq \sqrt{3}r\cos\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \sin\varphi \leq r \leq 3\sin\varphi \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{3\sin\varphi} r\,dr = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi\,d\varphi = 4\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6}(6-3\sqrt{3}+\pi)$$

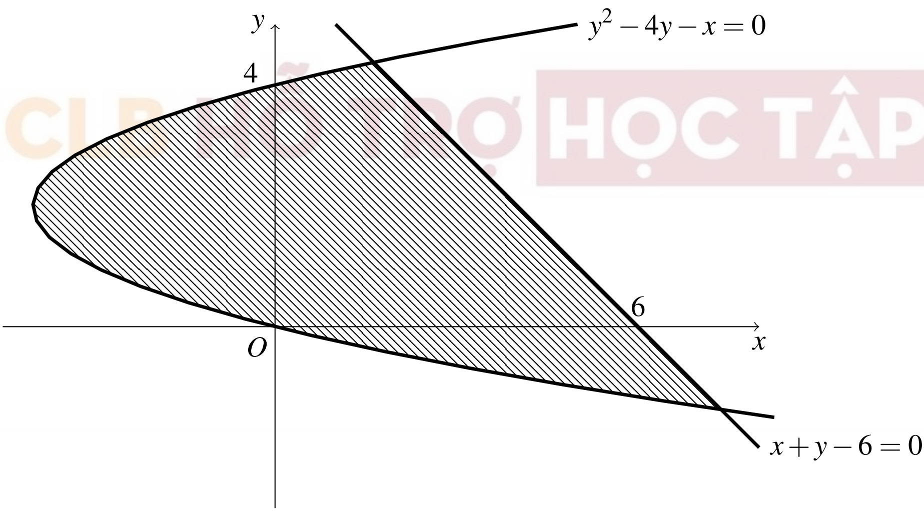
Giải câu 6. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \implies |J| = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$$V \implies V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r \ge 0 \\ 0 \le r^2 \le r\cos\theta \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Từ đó: $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+4y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\frac{1}{2}r^2\sin\theta\,dr$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{-\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\cos\theta = \frac{-\pi\cos^5\theta}{20}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{20}$$

Giải câu 7. Hình minh họa:



Tìm tung độ giao điểm của hai đường bằng cách khử x từ hai phương trình đã cho ta có:

$y^2-4y=6-y \Leftrightarrow y=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Dễ thấy $6-y \geq y^2-4y$ khi $y \in \left[\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\right]$

$$\Rightarrow (D): \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} \leq y \leq \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \\ y^2-4y \leq x \leq 6-y \end{cases}$$

Diện tích của miền D là:

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{3-\sqrt{33}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}} dy \int\limits_{y^2-4y}^{6-y} dx = \int\limits_{\frac{3-\sqrt{33}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{33}}{2}} (-y^2+3y+6)dy = \frac{11\sqrt{33}}{2}$$

Giải câu 8. Gọi V là miền giới hạn bởi các mặt cong $y=x^2, y=x, z=y^2$ và mặt Oxy
Trong miền V ta có: $0 \leq z \leq y^2$
Thể tích của miền V là:

$I=\iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{y^2} dz$ (với D là miền giới hạn bởi $y=x^2, y=x$ trên Oxy)

$I=\iint\limits_D y^2 dxdy$

D tương đương với $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \iint\limits_D y^2dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} y^2dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\right)dx \\ &= \int\limits_0^1 \frac{x^3-x^6}{3}dx = \frac{1}{28}\end{aligned}$$

Vậy thể tích của miền được giới hạn bởi các mặc cong $y=x^2, y=x, z=y^2$ và mặt Oxy là $\dfrac{1}{28}$(đvtt).

Giải câu 9. Xét $F(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + ysin(x)^2\right) dx$

$f(x,y) = ln\left(1 + ysin(x)^2\right)$ liên tục theo x trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall y \in [0; +\infty)$

$f'_y(x,y) = \dfrac{sin^2 x}{1 + ysin^2 x}$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [0; +\infty)$

$\Rightarrow F(y)$ khả vi trên $[0; +\infty)$ và:

$$F'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + y\sin^2 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 + 1 + y\tan^2 x} dx \ (1)$$

Đặt $t = tanx \Rightarrow dt = (1 + tan^2 x)dx \Leftrightarrow \dfrac{dt}{1 + t^2} = dx$

Thay vào (1) ta được:

$$F'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)(1 + (1 + y)t^2)} = \frac{1}{y} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{1 + (1 + y)t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{y}\left(arctant - \frac{1}{\sqrt{1 + y}} arctan\left(\sqrt{1 + y}t\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y + 1}}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y}\left(1 + \sqrt{1 + y}\right)}$$

$$\Rightarrow F(y) = \int F'(y)dy = \int \frac{\pi dy}{2\sqrt{1 + y}\left(1 + \sqrt{1 + y}\right)} = \int \frac{\pi d\sqrt{y + 1}}{1 + \sqrt{y + 1}}$$

$$= \pi ln\left(1 + \sqrt{y + 1}\right) + C$$

Mà $F(0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0.dx = 0 \Rightarrow C = -\pi ln2$

$$\Rightarrow F(y) = \pi ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + y}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1 + 5sin(x)^2\right) dx = F(5) = \pi ln\left(\frac{1 + \sqrt{6}}{2}\right)$$

Giải câu 10.

$$F(x,y) = \int \sin(xy^2)dx = \frac{-1}{y^2}\cos(xy^2) + C \quad \forall y \in (0, \infty)$$

Do hàm $F(x,y)$ liên tục theo x trên $\mathbb{R}$ mà khi $x \to \infty$, $F(x,y)$ tiến tới không xác định, và $F(a,y)$ bằng một giá trị với mọi $a \in \mathbb{R}$ nên $I(y)$ phân kì với mọi $y > 0$.
Vậy $I(y)$ không hội tụ đều trên $(0,\infty)$