ĐỀ giải tích 3 nhóm ngành 1 2021.2 đề 3

Sunday, May 7, 2023 12:57 PM

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3.2^n}{(2^n+1)^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4\sin n}$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3.2^n}{(2^n+1)^2}$

Đặt $a_n = \frac{3.2^n}{(2^n+1)^2} > 0 \ \forall n$ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương

$a_n < \frac{3.2^n}{(2^n)^2} = \frac{3}{2^n} \quad \forall n$

mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$ hội tụ

Nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3.2^n}{(2^n+1)^2}$ hội tụ (Tiêu chuẩn so sánh)

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2}$

Đặt $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2} \Rightarrow a_n > 0 \ \forall n \geq 1$, do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương

ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{2n+4}\right)^{2n+4}\right]^{\frac{n}{2n+4}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$

Nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2}$ hội tụ (Tiêu chuẩn Cauchy)

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4\sin n}$

ta có: $\frac{1}{n+4\sin n} = \frac{1}{n+4\sin n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{-4\sin n}{n(n+4\sin n)} + \frac{1}{n}$

$\rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4\sin n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.4\sin n}{n(n+4\sin n)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (1)$

ta có: $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}.4\sin n}{n(n+4\sin n)}\right| \le \dfrac{4}{n(n\mp 4\sin n)} \sim \dfrac{4}{n^2}$ khi $n\to+\infty$

mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$ hội tụ $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}.4\sin n}{n(n+4\sin n)}\right|$ hội tụ (tc ss) $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}.4\sin n}{n(n+4\sin n)}$ hội tụ (2)

ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (tiêu chuẩn Leibniz) (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+4\sin n}$ hội tụ

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{8^n(n^2+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$.

xét $x_0\in\mathbb{R}$, $a_n = \dfrac{(x_0+1)^{3n}}{8^n.(n^2+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|x_0+1|^3}{8}$

Khi $\dfrac{|x_0+1|^3}{8}<1$ thì chuỗi hội tụ (tiêu chuẩn D'Alembert)

$\Leftrightarrow |x_0+1|<2 \Leftrightarrow -3<x_0<1$ (1)

tại $x_0=-3 \Rightarrow a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

$\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right| < \dfrac{1}{n^2}\ \forall n$ mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ ($\alpha=2>1$)

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ tuyệt đối (2) (t/c so sánh)

tại $x_0=1 \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}\ \forall n$

mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ht ($\alpha=2>1$) $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ (3) (t/c so sánh)

từ (1) (2) và (3) ta có miền hội tụ của chuỗi hàm số là $[-3;1]$

từ (1) (2) và (3) ta có miền hội tụ của chuỗi hàm số là $[-3;1]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x}$, TXĐ: $x \neq -n^2$, xét $x_0 \in R \setminus \{-a^2 | a \in N^*\}$

Khi n đủ lớn thì chuỗi trở thành chuỗi số dương

Đặt $a_n = \frac{1}{n^2+x_0} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ $(\alpha = 2 > 1)$

$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x_0}$ hội tụ $\forall x_0$ (t/c so sánh)

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là $R \setminus \{-a^2 | a \in N^*\}$

Câu 3. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau

a) $y' - y = e^{3x}; y(0) = 3$

b) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$

c) $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \cot y dy = 0.$

a) $y' - y = e^{3x}$

Nghiệm tổng quát của p(t) đã cho là.

$$y = e^{-\int(-1)dx} \cdot \left(\int e^{3x} \cdot e^{\int(-1)dx} dx + C\right)$$

$$= e^{x} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right)$$

ta có: $y(0) = 3 \to C = \frac{5}{2}$

Nên: $y = \frac{e^x(e^{2x}+5)}{2}$

b) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$ (1)

Đặt $\frac{y}{x} = v \to y = v.x \to y' = v + x.v'$

(1) trở thành. $v + x v' = \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)$

$\Leftrightarrow \quad -x.v' = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2+1}{v}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2vv'}{v^2+1} = -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{d(v^2+1)}{v^2+1} = -\frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow \int \frac{d(v^2+1)}{v^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow \ln(v^2+1) = -\ln|x| + C$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right) = -\ln|x| + C$.

$\Leftrightarrow \ln(y^2+x^2) - \ln|x| - C = 0$

Vậy tích phân tổng quát của pt vi phân đã cho là: $\ln(y^2+x^2) - \ln|x| - C = 0$

c) $(1+3x^2.\sin y)dx - x.\cot y\,dy = 0 \quad (1)$

$P(x) = 1+3x^2.\sin y \quad , Q(y) = -x.\cot y$

ta có! $Q'_x = -\cot y \neq 3x^2.\cos y = P'_y$

$\varphi(y) = \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-\cot y - 3x^2.\cos y}{1+3x^2.\sin y} = -\cot y$

$u(y) = e^{\int \varphi(y)dy} = e^{-\ln(\sin y)} = \frac{1}{\sin y}$

Nhân 2 vế của (1) với $u(y)$

$\left(\frac{1}{\sin y} + 3x^2\right)dx - x.\frac{\cos y}{\sin^2 y}dy = 0$, đặt $\begin{cases} P_1 = \frac{1}{\sin y} + 3x^2 \\ Q_1 = -\frac{x.\cos y}{\sin^2 y} \end{cases}$

Chọn $(x_0; y_0) = (0; \frac{\pi}{2})$, tích phân tổng quát của pt đã cho là:

$$\int_0^x P_1(t, \tfrac{\pi}{2})dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} Q_1(x,t)dt = C$$

$\Leftrightarrow \int_0^x (1+3t^2)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} \left(-x.\ \frac{\cos y}{\sin^2 y}\right)dt = C \Leftrightarrow x + x^3 + x\left(\frac{1}{\sin y} - 1\right) = C$

$\Leftrightarrow x^3 + \frac{x}{\sin y} = C$

Tích phân tổng quát của pt đã cho: $x^3 + \frac{x}{\sin y} = C$

Câu 5. (1 điểm) Tìm chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$: $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{khi } -\pi \le x < 0 \\ 2 & \text{khi } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

ta có: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in (-\pi; \pi)$

Nên $f(x)$ là hàm lẻ với $T = 2\pi$

$\Rightarrow a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x).\sin nx\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, dx = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi\right)$

$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n}\right) = \frac{4}{\pi}.\frac{1-(-1)^n}{n}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin nx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)\pi}.\sin[(2n+1)x]$

Câu 6. (1 điểm) Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)4^n}.$$

xét hàm số $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $x \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$f(0) = 0$.

Chuỗi hàm số đã cho là chuỗi lũy thừa có $R = 1$, nên hội tụ đều trên $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ liên tục trên $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

x^{4n} liên tục trên $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$ hội tụ đều trên $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$$\rightarrow f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,dt + f(0) = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{arctan} x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan} x$$

Thay $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \left(-\frac{3}{4} ; \frac{3}{4}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}.(4n+1).4^n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1).4^n} = \sqrt{2}.f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1).4^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \left(\ln(\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$