Lý thuyết trường

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

1. Trường vô hướng

2. Trường véctơ

Chương 6: Lý thuyết trường

1. Trường vô hướng

2. Trường véctơ

Trường vô hướng

Định nghĩa

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Một hàm số*

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto u = u(x, y, z)$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M+t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M).$
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M)$.

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M + t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{k} \Rightarrow$

Đạo hàm theo hướng

Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Định nghĩa

Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M+t\vec{v}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{v}$ tại M, kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M)$.

- $\vec{v} = \vec{i} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{j} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$.
- $\vec{v} = \vec{k} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{k}}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)$.

Đạo hàm theo hướng vs Đạo hàm riêng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \cdot c.$$

Đạo hàm theo hướng vs Đạo hàm riêng

Cho $f(x, y, z)$ là một hàm số và $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ là một véctơ đơn vị.

Mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \cdot c.$$

Nếu $\vec{l}$ không phải là một vectơ đơn vị thì $\vec{v} = \frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$ và $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$.

Ví dụ

Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l} = (1, 1, 1)$ của hàm số $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ tại điểm $M(1, 1, 1)$.

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Ví dụ

Tính $\overrightarrow{\text{grad}} u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Gradient

Gradient

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right).$$

Ví dụ

Tính $\overrightarrow{\operatorname{grad}} u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Đạo hàm theo hướng vs Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M) = \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M) \cdot \vec{l}}{\|\vec{l}\|}$$

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng $\vec{l}$.

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng $\vec{l}$.

- $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)\right|$ đạt GTLN bằng $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}\right|$ nếu $\vec{l} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$.

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng $\vec{l}$.

- $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)\right|$ đạt GTLN bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right|$ nếu $\vec{l} /\!/ \overrightarrow{\text{grad}\, f}$.
- Hàm số f tăng nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\text{grad}\, f}$.

Gradient

Ý nghĩa của Gradient

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M theo hướng $\vec{l}$.

- $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M)\right|$ đạt GTLN bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right|$ nếu $\vec{l} /\!/ \overrightarrow{\text{grad}\, f}$.
- Hàm số f tăng nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\text{grad}\, f}$.
- Hàm số f giảm nhanh nhất tại M nếu $\vec{l} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\text{grad}\, f}$.

Ví dụ

Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x \sin z - y \cos z$ từ gốc toạ độ $O(0,0,0)$ là lớn nhất?

Chương 6: Lý thuyết trường

Trường véctơ

Cho Ω là một miền mở trong $\mathbb{R}^3$. Một hàm véctơ

$$\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

được gọi là một trường vectơ trên Ω.

Trường véctơ

Cho Ω là một miền mở trong $\mathbb{R}^3$. Một hàm véctơ

$$\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

được gọi là một trường vectơ trên Ω.

Thông lượng

Cho S là một mặt định hướng và $\overrightarrow{F}$ là một trường véctơ. Đại lượng

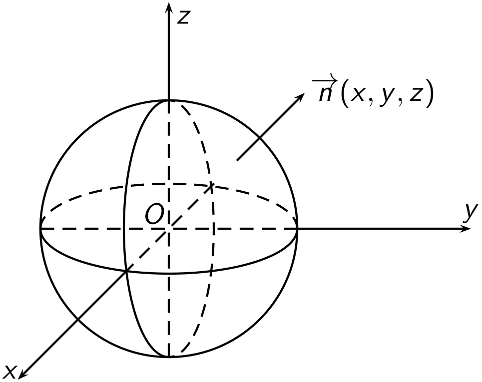
$$\phi = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{1}$$

được gọi là thông lượng của $\overrightarrow{F}$ đi qua mặt cong S.

Thông lượng

Ví dụ

Cho $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + {}^2\overrightarrow{j} + zy^2\overrightarrow{k}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.



Trường véctơ

Dive - Trường ống

a. dive $\overrightarrow{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

b. Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu dive $\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Trường véctơ

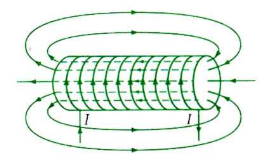
Dive - Trường ống

a. dive $\overrightarrow{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

b. Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu dive $\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Tính chất của trường ống

Nếu $\overrightarrow{F}$ là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.



Trường véctơ

Hoàn lưu

Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \tag{2}$$

được gọi là hoàn lưu (hay lưu số) của $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{C}$.

Trường véctơ

Hoàn lưu

Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz \tag{2}$$

được gọi là hoàn lưu (hay lưu số) của $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{C}$.

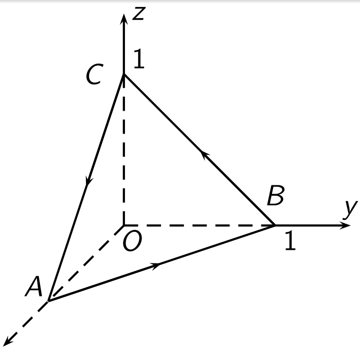
Ví dụ

Cho $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$ và L là tam giác $ABC, A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ chiều dương của các trục tọa độ. Tính lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L.

Hoàn lưu (Lưu số)

Ví dụ

Cho $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + (y+z^2)\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k}$ và L là tam giác $ABC, A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ chiều dương của các trục tọa độ. Tính lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L.



Trường thế - hàm thế vị

Véctơ xoáy

Véctơ

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} := \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ $\overrightarrow{F}$.

Trường thế - hàm thế vị

Véctơ xoáy

Véctơ

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} := \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ $\overrightarrow{F}$.

Trường thế

Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường thế (trên Ω) nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{\text{grad}u} = \overrightarrow{F}$ (trên Ω). Khi đó u được gọi là hàm thế vị.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}$.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L.
3. $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L.
3. $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.
4. $\vec{F}$ là một trường thế, nghĩa là có hàm số $u(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \overrightarrow{F}$.

TP đường trong không gian không phụ thuộc đường đi

Bốn mệnh đề tương đương

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \vec{0}$.
2. $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong đóng kín L.
3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.
4. $\vec{F}$ là một trường thế, nghĩa là có hàm số $u(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \overrightarrow{F}$.

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C.$$

Trường thế - hàm thế vị

Hàm thế vị

Nếu $\overrightarrow{F}$ là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C. \quad (3)$$

Ví dụ

Trong các trường sau, trường nào là trường thế? Nếu nó là trường thế, hãy tìm hàm thế vị của nó.

a. $\overrightarrow{a} = 5(x^2 - 4xy)\overrightarrow{i} + (3x^2 - 2y)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

b. $\overrightarrow{b} = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$.

c. $\overrightarrow{c} = (x + y)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + (z + y)\overrightarrow{k}$.