ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Toán Rời Rạc

Quy nạp

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Kenneth H. Rosen, *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học* (Bản dịch Tiếng Việt)

Nội dung

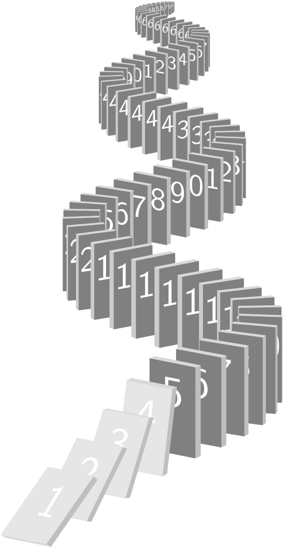
1. Nguyên lý quy nạp
2. Quy nạp mạnh

Nguyên lý quy nạp

Xét vị từ $P(n)$ trên $\mathbb{N}$. Nếu

- $P(0)$ đúng, và
- với mọi $n \in \mathbb{N}$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ cũng đúng,

thì $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.



Ví dụ

Định lý

Với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Đặt $P(n)$ là mệnh đề

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Chứng minh.

- Bước cơ sở: $P(0)$ đúng.
- Bước quy nạp: Ta sẽ chứng minh: với mọi $n \geq 0$, mệnh đề "Nếu ... thì" sau đây đúng

$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Thật vậy, giả sử $P(n)$ đúng cho số nguyên n. Vì

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

nên $P(n+1)$ đúng. Theo quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ví dụ

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1$$

với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ

Định lý

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Đặt $P(n)$ là mệnh đề

"$n^3 - n$ chia hết cho 3."

Chứng minh.

- Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì $0^3 - 0 = 0$ chia hết cho 3.
- Bước quy nạp: Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}$, mệnh đề sau đúng
$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$
Thật vậy, giả sử $P(n)$ đúng, với n là một số nguyên bất kỳ. Vì
$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)\end{aligned}$$
chia hết cho 3 nên $P(n+1)$ đúng.

Theo quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi số $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ví dụ chứng minh sai

Định lý (Sai)

Mọi con ngựa đều cùng màu.

Đặt $P(n)$ là mệnh đề

> *"Trong mọi tập gồm n con ngựa, các con ngựa đều cùng màu."*

Đặt $P(n)$ là mệnh đề

"Trong mọi tập gồm n con ngựa, các con ngựa đều cùng màu."

Chứng minh Sai.

- Bước cơ sở: $P(1)$ đúng vì chỉ có một con ngựa.
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$ đúng. Xét tập gồm $n+1$ con ngựa $\{h_1, h_2, \cdots, h_{n+1}\}$
  - Các con $h_1, h_2, \ldots, h_n$ có cùng màu (giả thiết quy nạp).
  - Các con $h_2, h_3, \ldots, h_{n+1}$ có cùng màu (giả thiết quy nạp).

  Vậy

  $$\text{màu}(h_1) = \text{màu}(h_2, \ldots, h_n) = \text{màu}(h_{n+1}).$$

  Vậy các con ngựa $\{h_1, h_2, \cdots, h_{n+1}\}$ đều cùng màu. Có nghĩa rằng $P(n+1)$ đúng.

Theo quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi số $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bài tập

1. Chứng minh rằng

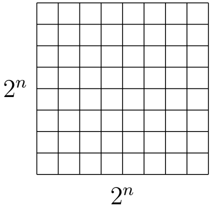
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Chứng minh rằng $2^n > n^2$ với $n \geq 5$.
3. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$,

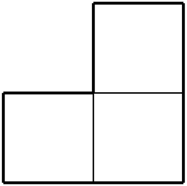
$$F(n-1)F(n+1) - F(n^2) = (-1)^n$$

với $F(i)$ là số Fibonacci thứ i.

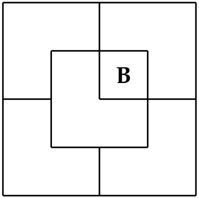
Ví dụ lát gạch



Hình: Sân



Hình: Gạch



Hình: Lát gạch và đặt tượng Bill

Định lý

Với mọi n, luôn có cách lát gạch một sân $2^n \times 2^n$ chỉ để lại một ô trống ở giữa (để đặt tượng Bill).

Chứng minh thử.

Xét $P(n)$ là mệnh đề

"Có cách lát gạch sân $2^n \times 2^n$ để lại một ô ***ở giữa****."*

- Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì chỉ có một ô dành cho Bill.
- Bước quy nạp: !

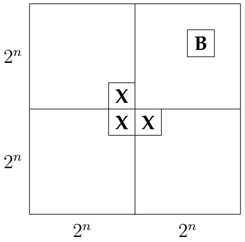
$\square$

Chứng minh.

Xét $P(n)$ là mệnh đề

> *"Với mỗi vị trí đặt tượng Bill trong sân $2^n \times 2^n$, ta đều có cách lát gạch kín sân."*

- Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì chỉ có một ô dành cho Bill.
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, ta chứng minh $P(n+1)$ đúng.



Theo quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi số $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

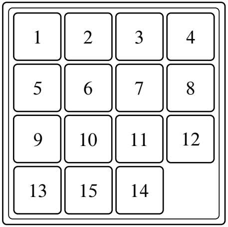
$\Rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

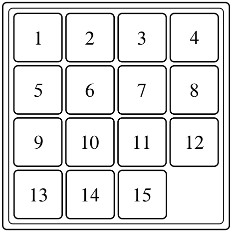
Chuyển hợp lệ: di chuyển một số sang ô trống cạnh nó.

15-Puzzle

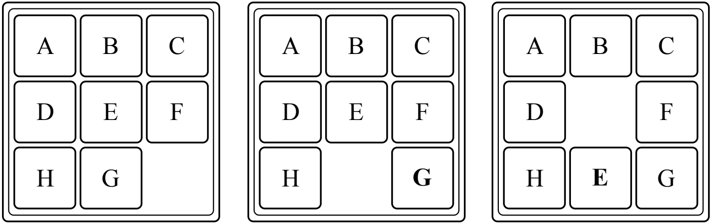
Liệu có dãy chuyển hợp lệ giữa hai trạng thái dưới đây không?



sang



8-Puzzle

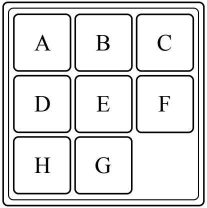


(a) (b) (c)

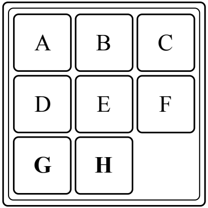
8-Puzzle

Bài tập

Liệu có thể tìm được một dãy chuyển hợp lệ giữa hai trạng thái sau đây?



sang



Định lý

Không tồn tại dãy chuyển cho bài toán trên.

Chuyển hàng

Thứ tự tự nhiên của các chữ trên ô:

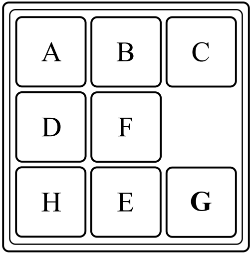
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Bổ đề

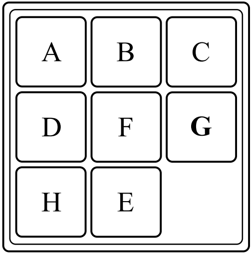
Mỗi lần chuyển hàng không làm thay đổi thứ tự các chữ.

Bổ đề

Mỗi lần chuyển theo cột làm thay đổi thứ tự của đúng hai cặp chữ.



(a)

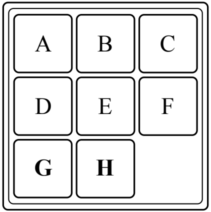


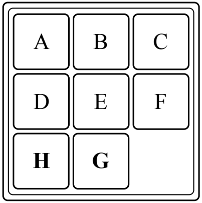
(b)

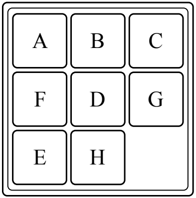
Cặp ngược

Định nghĩa

Cặp chữ L_1 và L_2 gọi là *ngược* nếu L_1 đứng trước L_2 trong bảng chữ cái nhưng L_1 lại đứng sau L_2 trong ô chữ.







Bổ đề

Mỗi bước di chuyển, số cặp ngược chỉ có thể tăng 2, hoặc giảm 2, hoặc giữ nguyên.

Chứng minh.

Chuyển hàng: không đổi vì không làm thay đổi thứ tự các chữ.

Chuyển cột: sẽ làm thay đổi thứ tự đúng 2 cặp chữ.

- Nếu cả hai cặp này không ngược: số cặp ngược tăng 2.
- Nếu cả hai cặp này ngược: số cặp ngược giảm 2.
- Nếu trong hay cặp này chỉ có một cặp ngược: số cặp ngược giữ nguyên.

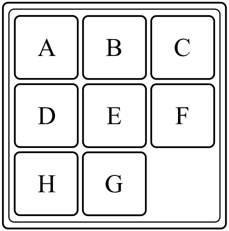
□

Hệ quả

Trong mọi bước di chuyển, tính chẵn lẻ của số cặp ngược là không đổi.

Bổ đề

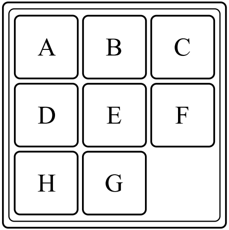
Số cặp ngược trong trong mọi cấu hình đạt được từ



luôn là lẻ.

Chứng minh bằng quy nạp.

Đặt $P(n)$ là mệnh đề : “ Số cặp ngược trong cấu hình đạt được từ



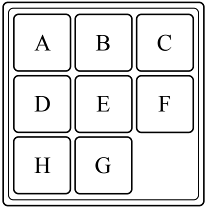
sau n bước chuyển luôn là lẻ”

- Bước cơ sở: $P(0)$ đúng. Tại sao?
- Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, do hệ quả trước về tính chẵn lẻ không đổi của số cặp ngược. Ta được $P(n+1)$ đúng.

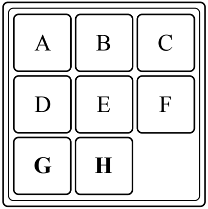
$\square$

Định lý

Không tồn tại dãy chuyển hợp lệ để chuyển từ



sang



Nội dung

1. Nguyên lý quy nạp
2. Quy nạp mạnh

Bài tập

Hãy dùng quy nạp để chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều phân tích được thành tích của các số nguyên tố.

Nguyên lý quy nạp mạnh

Xét vị từ $P(n)$ trên $\mathbb{N}$. Nếu

- $P(0)$ đúng, và
- với mọi $n \in \mathbb{N}$, $(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$,

thì $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ

Ở nước Quy nạp, họ dùng đơn vị tiền Mạnh. Họ chỉ có hai loại tiền 3M (Mạnh) và 5M. Dù họ có vấn đề nhỏ với việc đổi tiền 4M hoặc 7M, nhưng họ nhận thấy rằng họ có thể đổi mọi số tiền ít nhất 8M. Hãy giải thích cho họ xem tại sao điều này đúng.

Unstacking Game

- Có một chồng hộp. Bạn sẽ thực hiện một dãy bước chuyển.
- Mỗi bước chuyển bạn chia một hộp kích thước $(a+b)$ thành hai chồng khác rỗng kích thước a và b. Và bạn được ab điểm cho bước chuyển này.
- Trò chơi kết thúc khi mỗi chồng hộp chỉ còn một hộp.
- Điểm của bạn là tổng điểm bạn đạt được ở mỗi bước.
- Hãy tìm một chiến lược chơi để tối đa hoá điểm của bạn?

Một chiến lược kiểu “chia đôi” cho trò chơi với $n = 10$ đĩa

										Điểm
10										
5	5									**25**
5	3	2								**6**
3	3	2	2							**6**
2	3	2	2	1						**2**
1	3	2	2	1	1					**1**
1	2	2	2	1	1	1				**2**
1	1	2	2	1	1	1	1			**1**
1	1	1	2	1	1	1	1	1		**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
										45

Định lý

Mọi chiến lược của trò chơi gồm chồng n hộp đều cho cùng điểm

$$S(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Chứng minh.

Ta gọi $P(n)$ là mệnh đề $S(n) = n(n-1)/2$.

Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì $S(0) = 0$.

Bước quy nạp: Giả sử $P(0) \wedge \cdots \wedge P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$ đúng.

Xét trò chơi với $n+1$ đĩa. Ta chia $n+1$ đĩa này tùy ý thành hai phần không rỗng a, b thỏa mãn $a+b = n+1$. Theo giả thiết quy nạp, ta được

$$S(a+b) = S(a) + S(b) + ab = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + ab$$
$$= \frac{a^2 - a + b^2 - b + 2ab}{2} = \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2}$$
$$= \frac{(a+b)(a+b-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} \quad ✓$$

$\square$