Chương 2
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2024

Chương 2

Chương 2 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức về ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính. Chúng cung cấp các công cụ hữu hiệu giúp chúng ta tìm hiểu nội dung của các chương tiếp theo.

Nội dung Chương 2 bao gồm:

1. Ma trận và các phép toán
2. Định Thức
3. Ma trận nghịch đảo
4. Hạng của ma trận
5. Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, $\mathbb{K}$ là tập số thực $\mathbb{R}$ hoặc tập số phức $\mathbb{C}$.

1. MA TRẬN VÀ PHÉP TOÁN

Ma trận và tính chất của ma trận là trọng tâm của đại số tuyến tính. Ma trận rất hữu dụng bởi vì chúng cho phép ta xét một bảng gồm rất nhiều số như một đối tượng duy nhất, ký hiệu nó bởi một biểu tượng và biểu diễn tính toán với các biểu tượng đó một cách ngắn gọn, dễ dàng.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận, một số ma trận đặc biệt, hai ma trận bằng nhau, phép toán của ma trận và các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.
- Kĩ năng: Sinh viên thực hành thành thạo các phép toán và các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.

Nội dung

1.1 Khái niệm ma trận

- Một ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng, n cột dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  với $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Số a_{ij} gọi là phần tử của ma trận A, nằm ở hàng i, cột j, với mọi $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
  Ký hiệu ma trận: sử dụng ngoặc tròn như trên hoặc ngoặc vuông.
  Ta viết $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ để chỉ A là ma trận m hàng, n cột với các phần tử a_{ij}.
- Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ thì A gọi là ma trận thực, nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì A gọi là ma trận phức.

Ví dụ 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận cỡ* 2×3, *các phần tử* $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 3, a_{21} = 5, a_{22} = -4,\ a_{23} = 6.$

1.1 Khái niệm ma trận

- Ma trận cỡ $1 \times n$ gọi là ma trận hàng. Ma trận cỡ $m \times 1$ gọi là ma trận cột.
- Ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ với $a_{ij} = 0,\ \forall i, j$, được gọi là ma trận không, ký hiệu là θ.
- Nếu số hàng và số cột của A bằng nhau $(m = n)$ thì A gọi là ma trận vuông cấp n.

Ví dụ 2

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ *là ma trận cột,* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *là ma trận hàng, và* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3.*

Kí hiệu:

- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$: tập hợp các ma trận cỡ $m \times n$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: tập hợp các ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc $\mathbb{K}$.

Cho ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Các phần $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là các phần tử chéo chúng lập thành đường chéo chính của A.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ (tức là các phần tử nằm dưới đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là ma trận tam giác trên.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$ (tức là các phần tử nằm trên đường chéo chính đều là 0) thì A gọi là ma trận tam giác dưới.
- Nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ (tức là các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều là 0) thì A được gọi là ma trận đường chéo (hoặc ma trận chéo).
- Nếu A là ma trận đường chéo và tất cả các phần tử trên đường chéo chính là 1 thì A được gọi là ma trận đơn vị cấp n. Ma trận đơn vị cấp n thường được ký hiệu là I_n hoặc E_n. Khi không quan tâm đến cấp của ma trận thì ta ký hiệu là I hoặc E.

Ví dụ

Ví dụ 3

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận vuông cấp 3 với các phần tử chéo là* $1, 5, 9$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *là ma trận tam giác dưới.*

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đường chéo.*

d) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là các ma trận đơn vị cấp 2 và cấp 3.*

1.2. Hai ma trận bằng nhau

Định nghĩa

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau.

Ví dụ 4

Hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *không bằng nhau vì chúng không cùng cỡ.*

Ví dụ 5

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & x \\ -1 & y & 2 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} z & 5 & 4 \\ -1 & 5 & t \end{pmatrix}$. *Tìm* x, y, z, t *để* $A = B$.

1.3. Phép toán trên ma trận

- **Phép cộng hai ma trận**

Định nghĩa

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Như vậy, cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử tương ứng của chúng với nhau.

Ví dụ 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) & 3+0 \\ 4+(-3) & 5+1 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa

1. Ma trận đối của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu là $-A$, xác định bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
2. Hiệu của hai ma trận cùng cỡ A và B, ký hiệu là $A - B$ xác định bởi

$$A - B = A + (-B).$$

Phép cộng hai ma trận

Mệnh đề

Với mọi ma trận A, B, C cùng cỡ, ta có

1. Tính kết hợp: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. Tính giao hoán: $A + B = B + A$;
3. $A + \theta = \theta + A = A$, ở đó θ là ma trận không, cùng cỡ với A;
4. $A + (-A) = (-A) + A = \theta$.

Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ trên $\mathbb{K}$ và số $k \in \mathbb{K}$. Tích của k và A được xác định bởi $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Như vậy, nhân số k với ma trận A là nhân k vào mỗi phần tử của A.

Ví dụ 7

Tích của 3 *và ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận*

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-5) & 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Phép nhân một số với ma trận

Mệnh đề

Với mọi ma trận cùng cỡ A, B và số $k, l \in \mathbb{K}$, ta có:

1. $k(A+B) = kA + kB$;
2. $(k+l)A = kA + lA$;
3. $k(lA) = (kl)A$;
4. $1A = A$, $(-1)A = -A$;
5. $0A = \theta$;
6. $k\theta = \theta$.

Ví dụ 8

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận* X *sao cho* $2X + A = B$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa

Giả sử $A = [a_{ik}]_{m\times p}$ và $B = [b_{kj}]_{p\times n}$ là hai ma trận cỡ $m \times p$ và $p \times n$ tương ứng. Tích AB là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ cỡ $m \times n$, ở đó phần tử c_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ được xác định bởi công thức

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1}$$

Pt c_{ij} được tính bằng cách nhân tương ứng các pt trên hàng i của A với các pt trên cột j của B rồi cộng lại.

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{matrix}}_{\text{(hàng } i \text{ của } A)} \times \underbrace{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}}_{\text{(cột } j \text{ của } B)}$$

Phép nhân ma trận với ma trận

Lưu ý tích AB chỉ được xác định khi số cột của A bằng số hàng của B . Hơn nữa, ma trận tích AB có số hàng bằng số hàng của A, có số cột bằng số cột của B.

Ví dụ 9

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. *Tính* $C = AB$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Mệnh đề

Giả sử A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được và $k \in \mathbb{K}$. Khi đó:

1. $IA = A,\ \ BI = B$ với I là ma trận đơn vị có cấp phù hợp;
2. Tính kết hợp: $(AB)C = A(BC)$;
3. Tính phân phối của phép nhân ma trận đối với phép cộng ma trận:
$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA;$$
4. $k(AB) = (kA)B$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Chú ý

1. Tích AB tồn tại nhưng chưa chắc tích BA tồn tại.
2. Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán, tức là nếu AB và BA tồn tại thì nói chung $AB \neq BA$.
3. Từ hệ thức $AB = \theta$ không suy ra được $A = \theta$ hoặc $B = \theta$.

Ví dụ 10

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *và* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Khi đó*

i) $AB = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ *và* $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *nên* $AB \neq BA$.

ii) DC *tồn tại nhưng* CD *không tồn tại.*

iii) $DD = \theta$ *nhưng* $D \neq \theta$.

Phép nhân ma trận với ma trận

Chú ý

1. Khi A là ma trận vuông và $m \in \mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $A^m = AA \cdots A$ (m ma trận A).
2. Cho đa thức $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ với $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, và A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó $p(A)$ được xác định bởi

$$p(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI_n,$$

ở đó I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Ví dụ 11

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *và đa thức* $p(x) = 2x^2 - 3x - 1$. *Tính* $p(A)$.

Ma trận chuyển vị

Định nghĩa

Ma trận chuyển vị của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu là A^t, xác định bởi $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$ trong đó $b_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $j = 1, 2, \dots, m$.

Ta có thể có được ma trận chuyển vị A^t từ ma trận A bằng cách viết hàng của A thành cột của A^t hoặc viết cột của A thành hàng của A^t một cách tương ứng.

Ví dụ 12

Ma trận chuyển vị của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *là* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề

Giả sử A, B là các ma trận sao cho các phép toán trong các hệ thức sau thực hiện được và $k \in \mathbb{K}$. Khi đó

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
3. $(kA)^t = kA^t$;
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Ma trận đối xứng - Ma trận phản xứng

Định nghĩa

Cho ma trận A vuông cấp n.

1. A gọi là ma trận đối xứng nếu $A^t = A$.
2. A gọi là ma trận phản xứng (hay phản đối xứng) nếu $A^t = -A$.

Rõ ràng, nếu $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n là ma trận đối xứng (tương ứng phản xứng) thì $a_{ij} = a_{ji}$ (tưng ứng $a_{ij} = -a_{ji}$) với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Hơn nữa, các phần tử chéo của ma trận phản xứng đều bằng 0.

Ví dụ 13

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận đối xứng và* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận phản xứng.*

1.3 Một số phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Định nghĩa

Cho ma trận A. Các phép biến đổi sau gọi là các phép biến đổi sơ cấp:

1. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) cho nhau;
2. Nhân một hàng (hay một cột) với một số khác 0;
3. Cộng vào một hàng (t.ư. một cột) một bội của hàng (t.ư. một cột) khác.

Ký hiệu:

- h_i để chỉ hàng i, c_j để chỉ cột j;
- $h_i \leftrightarrow h_j$ (t.ư. $c_i \leftrightarrow c_j$): đổi chỗ hai hàng i, j (t.ư. hai cột i, j) cho nhau;
- $\lambda h_i \to h_i$ (t.ư. $\lambda c_i \to c_i$): nhân số λ với hàng i (t.ư. cột i);
- $h_k + \lambda h_i \to h_k$ (t.ư. $c_k + \lambda c_i \to c_k$): nhân hàng i (t.ư. cột i) với λ rồi cộng vào hàng h_k (t.ư. cột k).

Ví dụ 14

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{2h_3 \to h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3+(-14)h_1 \to h_3]{h_2+(-4)h_1 \to h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$

2. ĐỊNH THỨC

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm phép thế, định thức của một ma trận vuông và tính chất của định thức.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo sử dụng định nghĩa và các tính chất để tính định thức (tính định thức bằng khai triển và biến đổi sơ cấp...).

Nội dung

2.1 Phép thế

Định nghĩa

Một phép thế bậc n là một song ánh $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Gọi S_n là tập hợp các phép thế bậc n.

Phép thế bậc n thường được viết dưới dạng $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$, với $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi phép thế bậc n sẽ tương ứng với một hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ và ngược lại. Bởi vậy, số các phép thế bậc n là $|S_n| = n!$.

2.1 Phép thế

Định nghĩa

Cho f là một phép thế bậc n.

1. Cặp $(f(i), f(j))$ với $1 \le i < j \le n$ gọi là nghịch thế nếu $f(i) > f(j)$.
2. Nếu số nghịch thế của f là chẵn (t.ư. lẻ) thì f gọi là phép thế chẵn (t.ư. phép thế lẻ).
3. Dấu của phép thế f, ký hiệu là $sign(f)$, được xác định bởi

$$sign(f) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } f \text{ là phép thế chẵn} \\ -1 & \text{nếu } f \text{ là phép thế lẻ.} \end{cases}$$

Ví dụ 15

Cho phép thế bậc 3: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tức là $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$.

- Ta có $(\sigma(1), \sigma(2))$ là nghịch thế vì $\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$; còn $(\sigma(2), \sigma(3))$ không là nghịch thế vì $\sigma(2) = 1 < 2 = \sigma(3)$.
- Phép thế σ có 2 nghịch thế là $(\sigma(1), \sigma(2))$ và $(\sigma(1), \sigma(3))$. Bởi vậy, σ là phép thế chẵn và $sign(\sigma) = 1$.

2.1 Phép thế

Vì $f^{-1}(f(i)) = i$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nên nếu $(f(i), f(j))$ là nghịch thế của f thì (j, i) là nghịch thế của f^{-1}. Bởi vậy, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề

Số nghịch thế của f bằng số nghịch thế của f^{-1} và

$$sign(f^{-1}) = sign(f).$$

Hơn nữa, dấu của phép thế có tính chất sau:

Mệnh đề

Cho f và g là các phép thế bậc n. Khi đó

$$sign(f \circ g) = sign(f) \cdot sign(g).$$

2.2 Định thức của ma trận vuông

Định nghĩa

Cho ma trận vuông cấp n: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Định thức của A là một số, ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$, được xác định bởi công thức

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n.

Chú ý

Tổng (2) có $n!$ số hạng; trong mỗi số hạng mỗi hàng đóng góp một phần tử, mỗi cột đóng góp một phần tử.

Ví dụ 16

Định thức cấp 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. chẳng hạn $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)\cdot 3 = 11.$.

2.2 Định thức của ma trận vuông

Ví dụ 17

Định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

*** Quy tắc Sarrus:**

$$\begin{array}{ccccc} {}^{+}a_{11} & {}^{+}a_{12} & {}^{+}a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ {}_{-}a_{31} & {}_{-}a_{32} & {}_{-}a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Ví dụ 18

Tính $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

2.3 Công thức khai triển

Định nghĩa

Cho ma trận vuông cấp n: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Với mỗi cặp (i, j), $1 \le i, j \le n$, ký hiệu M_{ij} là ma trận vuông cấp $(n-1)$ có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.
Khi đó, ký hiệu $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ và gọi là phần phụ đại số của a_{ij}.

Ví dụ 19

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.
Các phần phụ đại số của A *là:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 21,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3, \ldots$$

2.3 Công thức khai triển

Định lý

Cho ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp n và A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$. Khi đó

1. Với mỗi i cố định, $1 \leq i \leq n$, ta có (công thức khai triển theo hàng i):
$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}; \tag{3}$$
2. Với mỗi j cố định, $1 \leq j \leq n$, ta có (công thức khai triển theo cột j):
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{4}$$

Các công thức (3) và (4) cho phép tính định thức cấp n qua các định thức cấp $(n-1)$. Hơn nữa, trong thực hành, ta nên chọn hàng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

Ví dụ 20

Tính $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 1. Với ma trận vuông A, ta có $\det(A) = \det(A^t)$.

Ví dụ 21

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

Một tính chất của định thức đúng khi phát biểu cho hàng thì cũng đúng khi phát biểu cho cột.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 2. Nếu đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của ma trận thì định thức của nó đổi dấu.

Ví dụ 22

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Hệ quả

Nếu ma trận A có hai hàng (hay hai cột) giống nhau thì $\det(A) = 0$.

Ví dụ 23

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ (vì hàng 1 và hàng 2 giống nhau).}$$

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 3. Nếu nhân tất cả các phần tử trên một hàng (hay một cột) của ma trận A với một số k thì được ma trận B với $\det(B) = k\det(A)$.

Hệ quả

Nếu các phần tử của một hàng (hay một cột) có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ 24

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ *(rút nhân tử chung ở hàng 3 ra ngoài dấu định thức).*

Hệ quả

Cho ma trận A vuông cấp n và số k. Khi đó $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Hệ quả

Nếu ma trận A có một hàng (hay một cột) mà các phần tử đều bằng 0 thì $\det(A) = 0$.

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 4. Nếu ma trận A có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì $\det(A) = 0$.

Ví dụ 25

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ (vì hàng 1 và hàng 2 tỉ lệ với nhau).}$$

Tính chất 5. Nếu ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ có một hàng k (t.ư. một cột l) nào đó mà $a_{kj} = b_j + c_j$, $1 \leq j \leq n$ (t.ư. $a_{il} = e_i + f_i$, $1 \leq i \leq n$) thì định thức của A bằng tổng của hai định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.4 Tính chất của định thức

Tính chất 6. Nếu cộng vào một hàng (t.ư. cột) nào đó của ma trận A một bội của hàng (t.ư. cột) khác của A thì được ma trận B với $\det(B) = \det(A)$.

Ví dụ 26

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_2+(-3)h_1 \to h_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Tính chất 7. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{5}$$

Tính chất 8. Với mọi ma trận vuông cùng cấp A và B, ta có $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Ví dụ 27

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. *Ta có* $\det(A) = -2$, $\det(B) = -3$. *Bởi vậy,* $\det(AB) = (-2) \cdot (-3) = 6$.

Sử dụng biến đổi sơ cấp để tính định thức

Ví dụ 28

Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -97 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải.

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3-4h_1\to h_3}{\overset{h_2-2h_1\to h_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \overset{h_2-2h_4\to h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4-2h_2\to h_4}{\overset{h_3-9h_1\to h_3}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & -66 & 11 \end{vmatrix} \overset{h_4-h_3\to h_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -66 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-66) \cdot (-30) = -1980.$$

Kết hợp khai triển và biến đổi sơ cấp để tính định thức

Chú ý

Khi tính định thức, việc kết hợp biến đổi sơ cấp với công thức khai triển sẽ giảm sự cồng kềnh trong trình bày. Chẳng hạn trong ví dụ trên, ta có thể viết như sau:

$$D \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -97 & -1 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix} \underset{h_3 - 4h_1 \to h_3}{\overset{h_2 - 2h_1 \to h_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -97 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{theo cột 1}}{\overset{\text{khai triển theo}}{=}} -1. \begin{vmatrix} 5 & -97 & -3 \\ 9 & -3 & -4 \\ 2 & -52 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [(-15) + 776 + 1404 - 18 - (-873) - 1040] = -1980.$$

3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm ma trận khả nghịch, điều kiện để một ma trận là ma trận khả nghịch, tính chất của ma trận nghịch đảo và cách tìm ma trận nghịch đảo.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch.

Nội dung

3.1 Định nghĩa và tính chất

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận cấp n trên $\mathbb{K}$ và I (hay E) là ma trận đơn vị cấp n.

Định nghĩa

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho

$$AB = BA = I.$$

Khi đó, ma trận B gọi là ma trận nghịch đảo của A và ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Như vậy, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Hơn nữa, ma trận nghịch đảo của ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nếu tồn tại, là duy nhất.
Ký hiệu $GL_n(\mathbb{K})$ là tập hợp các ma trận khả nghịch cấp n với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 29

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *là ma trận khả nghịch với ma trận nghịch đảo là* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 30

Giả sử ma trận vuông A thỏa mãn $A^2 + A - I = \theta$. Khi đó $A^2 + A = I$ và do đó, ta có $A(A+I) = (A+I)A = I$. Từ đó suy ra $A^{-1} = A + I$.

3.1 Định nghĩa và tính chất

Mệnh đề

1. Ma trận đơn vị I khả nghịch và $I^{-1} = I$.
2. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $A^t \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Nếu $A \in GL_n(\mathbb{K})$ và $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$ thì $kA \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Nếu $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ thì $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chú ý

Để chứng minh ma trận X khả nghịch với ma trận nghịch đảo là Y, ta chỉ cần chỉ ra $XY = I$ và $YX = I$.

3.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

Cho $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ và A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij} với $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Đặt $C = [A_{ij}]_{n \times n}$, ta có bổ đề sau.

Bổ đề

Với mọi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ta có
$$C^t A = AC^t = \det(A)I.$$

Chứng minh

Với mỗi $i, k = 1, 2, \ldots, n$, gọi D_{ik} là định thức của ma trận có được từ ma trận A bằng việc thay các phần tử a_{ij} bởi a_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, nếu $i = k$ thì $D_{ik} = \det(A)$; nếu $i \neq k$ thì $D_{ik} = 0$ (vì có hàng i và k giống nhau). Khai triển D_{ik} theo hàng i ta được $D_{ik} = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$. Bởi vậy

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq k \\ \det(A) & \text{nếu } i = k. \end{cases}$$

Do đó, ta có $AC^t = \det(A)I$. Tương tự, $C^t A = \det(A)I$.

3.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận không suy biến nếu $\det(A) \neq 0$.

Định lý

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi A không suy biến.

Hệ quả

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận B sao cho $AB = I$ hoặc $BA = I$.

Ví dụ 31

Tìm các giá trị của tham số λ để ma trận $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *khả nghịch.*

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Bài toán: *Cho ma trận khả nghịch* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Tìm ma trận nghịch đảo* A^{-1}.

Phương pháp 1: Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách sử dụng các phần phụ đại số
Bước 1. Tính $\det(A)$.
Bước 2. Xác định các phần phụ đại số A_{ij}, $\forall i, j$.
Bước 3. Lập ma trận $C = [A_{ij}]$. Áp dụng công thức $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$.

Ví dụ 32

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Chú ý

Ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ với $ad - bc \neq 0$.

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 2: Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải phương trình ma trận
Xét phương trình ma trận $AX = I$ với I là ma trận đơn vị cấp n. Vì A khả nghịch nên phương trình có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}$.

Ví dụ 33

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có $\det(A) = -2 \neq 0$ nên A khả nghịch. Gọi $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

Bởi vậy $a = -2,\ b = -1,\ c = -\frac{-3}{2},\ d = \frac{1}{2}$ và vì vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

3.3 Cách tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 3: Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi sơ cấp:

Bước 1. Viết ma trận đơn vị cấp n vào sau ma trận A để được ma trận cỡ $n \times 2n$: $[A|I]$.

Bước 2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận $[A|I]$ về ma trận có dạng $[I|B]$ (ma trận A thành ma trận đơn vị I và ma trận đơn vị I thành ma trận B). Khi đó, B chính là ma trận A^{-1}:

$$[A|I] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{\text{bđsc}} [I|B] \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Ví dụ 34

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. HẠNG CỦA MA TRẬN

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm hạng của ma trận và tính chất của nó.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo tính hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp

Nội dung

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

4.2 Ma trận bậc thang

4.3 Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

Cho ma trận cỡ $m \times n$: $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Định nghĩa

Cho k là một số nguyên dương, $k \leq \min\{m, n\}$. Ma trận vuông cấp k có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi $(m-k)$ hàng và $(n-k)$ cột nào đó gọi là một ma trận con cấp k của A. Định thức của nó gọi là một định thức con cấp k của A.

Nhận xét

Ma trận con cấp k của A tạo bởi các phần tử nằm ở giao của k hàng và k cột nào đó của A. Bởi vậy A có $C_m^k.C_n^k$ ma trận con cấp k (có thể không phân biệt).

Ví dụ 35

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ có cỡ 3×4.

Ma trận A có $C_3^3.C_4^3 = 4$ định thức con cấp 3:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ma trận A có $C_3^2.C_4^2 = 18$ định thức con cấp 2:

$$D_{12}^1 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}, D_{34}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{13}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, D_{14}^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \ldots$$

4.1 Khái niệm hạng của ma trận

Định nghĩa

Hạng của ma trận A, ký hiệu là $\operatorname{rank}(A)$ hoặc $\mathrm{r}(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.

Quy ước: hạng của ma trận không là 0.
Như vậy, $\operatorname{rank}(A) = r$ khi và chỉ khi A có một định thức con cấp r khác 0 và mọi định thức con cấp cao hơn r của A đều bằng 0.

Ví dụ 36

Với ma trận A trong Ví dụ 35, ta có $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$, tức là tất cả các định thức con cấp 3 của nó đều bằng 0. Bởi vậy $\operatorname{rank}(A) < 3$. Mặt khác, vì $D^1_{12} = 4 \neq 0$ nên $\operatorname{rank}(A) \geq 2$. Từ đó ta có $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Nhận xét

Để tìm hạng của ma trận theo định nghĩa, chúng ta cần xét lần lượt các định thức con của A có cấp từ cao xuống thấp cho đến khi gặp một định thức con khác 0.

Một số tính chất về hạng của ma trận

1. Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $0 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. Với mọi ma trận A ta có $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$.
3. Với A là ma trận vuông cấp n, nếu $\det(A) \neq 0$ thì $\operatorname{rank}(A) = n$; nếu $\det(A) = 0$ thì $\operatorname{rank}(A) < n$.

4.2 Ma trận bậc thang

Hàng không của một ma trận được hiểu là hàng có các phần tử đều là 0.

Định nghĩa

Một ma trận gọi là ma trận bậc thang nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Các hàng không (nếu có) phải nằm dưới các hàng khác không.
2. Với hai hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên nằm phía bên trái phần từ khác không đầu tiên của hàng dưới.

Như vậy, với ma trận bậc thang, các phần tử cùng cột và nằm dưới phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái qua phải) của một hàng nào đó đều bằng 0.

Ví dụ 37

Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ma trận A là ma trận bậc thang, các ma trận B, C không là ma trận bậc thang.

4.2 Ma trận bậc thang

Mệnh đề

Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Ví dụ 38

Hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bằng 3.

Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tính bằng 0 hay khác 0 của các định thức con của một ma trận nên nó cũng không làm thay đổi hạng của ma trận.

Mệnh đề

Hạng của ma trận không đổi khi áp dụng các phép biến đổi sơ cấp.

Tìm hạng ma trận A:

$$A \xrightarrow{\text{bđsc}} B: \text{ ma trận bậc thang}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \text{số hàng khác không của } B.$$

4.3 Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

$A \xrightarrow{\text{bđsc}} B$: ma trận bậc thang $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) =$ số hàng khác không của B.

Ví dụ 39

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có

$$A \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h4-h1\to h4]{\substack{h2-2h1\to h2 \\ h_3-3h1\to h3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h4-h2\to h4]{h3-h2\to h3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{h3 \leftrightarrow h4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 3.$$

5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm hệ phương trình tuyến tính, các dạng của hệ phương trình tuyến tính, hệ Cramer, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm và phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Kĩ năng: Sinh viên thành thạo giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss, Gauss-Jordan, hiểu và sử dụng được các tính chất của các hệ đặc biệt.

Nội dung

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

5.2 Hệ phương trình Cramer

5.3 Điều kiện có nghiệm - Phương pháp giải

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{6}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ là các số cho trước và $x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ là các ẩn.

- Các số a_{ij} gọi là các hệ số, các số b_i gọi là các hệ số tự do của hệ phương trình (6).
- Dạng (6) gọi là dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính.
- Nếu $b_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m$ thì hệ (6) gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Chú ý

Trong hệ phương trình (6), a_{ij} là hệ số của phương trình thứ i và ẩn x_j với mọi $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Nghiệm của hệ phương trình (6) là các bộ số $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ sao cho khi thay $x_j = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ vào các phương trình của hệ, ta được các đồng nhất thức trên $\mathbb{K}$.

Ví dụ 40

Hệ $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ -x_1 & & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases}$ là hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất, có 3 phương trình và 4 ẩn số. Bộ số $(-1, 1, 0, 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính (6).

Ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ gọi là ma trận hệ số.

Ma trận cột $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ gọi là cột hệ số tự do.

Ma trận $\overline{A} = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ gọi là ma trận bổ sung. Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gọi là cột ẩn số.

Khi đó, hệ phương trình (6) có thể viết dưới dạng

$$AX = B. \tag{7}$$

Phương trình (7) gọi là dạng ma trận của hệ (6).

5.1 Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Chú ý

Các phần tử trên hàng thứ i của ma trận bổ sung $\overline{A}$ là các hệ số của phương trình thứ i của hệ phương trình $AX = B$ và ngược lại. Do đó, khi cố định tên các biến, ta có sự tương ứng 1-1 (tức là tồn tại một song ánh) giữa tập hợp các ma trận bổ sung và tập hợp các hệ phương trình tuyến tính.

Ví dụ 41

Xét hệ

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +5x_4 = 9 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = -2 \\ & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ma trận bổ sung $\overline{A} = [A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$

5.2 Hệ phương trình Cramer

Định nghĩa

Hệ phương trình $AX = B$ gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

Định lý

Hệ phương trình Cramer $AX = B$ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định bởi công thức $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \ldots, n$, với A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột j của A bởi cột hệ số tự do B.

Ví dụ 42

Chỉ ra hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & = 15 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 13 \end{cases}$ *là hệ Cramer và giải nó.*

5.3 Điều kiện có nghiệm - Phương pháp giải

Các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính:

1. Đổi chỗ hai phương trình;
2. Nhân hai vế của một phương trình với một số khác 0.
3. Nhân một phương trình với một số rồi cộng vào phương trình khác.

Nhận thấy các phép biến đổi sơ cấp trên một hệ phương trình tuyến tính ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung của hệ đó.

Ví dụ 43

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & = 11 \\ -x_1 & +4x_2 & = 13 \end{cases} \xrightarrow{pt1 \leftrightarrow pt3} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow[pt3+3\times pt1 \to pt3]{2\times pt2} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 13 \\ 4x_1 + 6x_2 = 22 \\ 13x_2 = 41 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[h3+3\times h1 \to h3]{2\times h2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 13 \\ 4 & 6 & 22 \\ 0 & 13 & 41 \end{array}\right).$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm

Định lý (*Kronecker-Capelli*)

Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận hệ số bằng hạng của ma trận bổ sung.

Cụ thể hơn, ta có:

Hệ quả

Cho hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $AX = B$. Khi đó

1. $\operatorname{rank}(\overline{A}) \neq \operatorname{rank}(A) \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
2. $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.
3. $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A) = r < n \Leftrightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $(n - r)$ tham số.

Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Bước 1: Lập mtr bổ sung $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Bước 2: $\overline{A} = [A|B] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{\text{bđsc}} \overline{A}' = [A'|B']$. Xác định $\text{rank}(A) = \text{rank}(A'), \text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(\overline{A}')$.

- Nếu $\text{rank}(\overline{A}) \neq \text{rank}(A)$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A)$ thì hệ có nghiệm và tiếp tục bước 3.

Bước 3: Viết hệ phương trình tương đương $A'X = B'$ và giải nó.
Trong trường hợp $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số. Khi đó, ta sẽ giữ lại r ẩn ứng với r phần tử khác 0 đầu tiên của r hàng của $\overline{A}'$ và coi $(n-r)$ ẩn còn lại là tham số. Ta giải r ẩn theo các tham số.

Ví dụ

Ví dụ 44

Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 24 \end{cases}$.

Ví dụ 45

Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = m \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Phương pháp Gauss - Jordan

Nhận xét

Khi hệ phương trình là hệ Cramer, tức là hệ gồm n phương trình, n ẩn và $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) = n$, thì ma trận $\overline{A}'$ trong phương pháp Gauss có dạng $\overline{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$ trong đó ma trận A' tương ứng có dạng tam giác trên với các phần tử chéo $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn}$ khác 0. Khi đó, ta có thể sử dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận $\overline{A}'$ về dạng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_n \end{array}\right)$ và vì vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Phương pháp giải này gọi là phương pháp Gauss-Jordan.

Phương pháp Gauss - Jordan

Ví dụ 46

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +7x_4 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 6 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -5x_4 & = -9 \\ 4x_1 & +10x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = 24 \end{cases}$.

Chú ý

Khi A là ma trận khả nghịch, bằng việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng ta đưa ma trận bổ sung $\overline{A} = [A|B]$ về dạng $[I|B']$ thì B' trở thành nghiệm của hệ phương trình $AX = B$. Điều này cũng đúng khi B không là ma trận cột. Đặc biệt, nếu B là ma trận đơn vị I, thì B' chính là ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8}$$

- Hệ phương trình này có ma hệ số là $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ và ma trận bổ sung là $\overline{A} = [A|\theta]$.
- Nhận thấy, hệ (8) luôn có một nghiệm là $(0, 0, \ldots, 0)$ và nghiệm đó được gọi là nghiệm tầm thường của hệ. Ta cũng luôn có $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A)$.

Chú ý

Khi sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi ma trận A thay cho việc biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$.

Mệnh đề

Với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (8), ta có

1. Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n$.
2. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$.

Ví dụ 47

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} (m-1)x_1 & -x_2 & +2x_3 & =0 \\ (2m+1)x_1 & +mx_2 & +x_3 & =0 \\ & -mx_2 & +(m+1)x_3 & =0 \end{cases}.$$