Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

TUẦN 4

Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ BÀI

Bài 1: Tính tích phân sau:

$$I = \iint_D (x + y)\, dx\, dy$$

Trong đó miền D giới hạn bởi các đường: $y^2 = 2x,\ x + y = 4,\ x + y = 12$

Bài 2: Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường:

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy;\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\ ((x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1)$$

Bài 3: Tính tích phân sau:

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

Với $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x$

Bài 4: Tính thể tích của vật thể bị giới hạn bởi:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$$

Bài 5: Tính tích phân

$$\int_0^1 \sin\left(ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{lnx}\, dx$$

ĐÁP ÁN

CLB Hỗ trợ học tập

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

Bài 1: Hướng dẫn giải:

Đường thẳng $x + y = 4$ và parabol $y^2 = 2x$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x = 2$ và $x = 8$, còn đường thẳng $x + y = 12$ và parabol $y^2 = 2x$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x = 8, x = 18$. Bởi vậy có thể biểu diễn miền lấy tích phân dưới dạng hợp của các miền đóng $D_1 = \{2 \le x \le 8;\ 4 - x \le y \le \sqrt{2x}\}, D_2 = \{8 \le x \le 18;\ -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x\}$

Chuyển tích phân hai lớp về tích phân lặp, ta được:

$$I = \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)dy = \cdots = \frac{8156}{15}$$

Bài 2: Hướng dẫn giải:

Tập hợp các điểm, giới hạn bởi vòng tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, nằm trong góc phần tư thứ nhất, còn tập hợp các điểm, giới hạn bởi đường cong kín $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$, nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba. Do đó miền đóng cần tính diện tích nằm trong góc phần tư thứ nhất. Ta chuyển sang tọa độ cực.

Lưu ý đến sự đối xứng của các điểm thuộc miền cần tính diên tích đối với đoạn của tia $\varphi = \frac{\pi}{4}$, nên ta chỉ cần tính diện tích S'của miền đóng, được xác định bởi các bất đẳng thức

$$\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \left((sin\varphi + cos\varphi) - \sqrt{sin2\varphi}\right) \le \rho \le 2\sqrt{sin2\varphi}$$

Bởi vậy:

$$S = 2S' = 2 \int_{\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\left((sin\varphi+cos\varphi)-\sqrt{sin2\varphi}\right)}^{2\sqrt{sin2\varphi}} (x+y)dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2sin2\varphi + 2(sin\varphi + cos\varphi)\sqrt{sin2\varphi} - 1\right)d\varphi$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8} + 2\sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{sin2\varphi}d\varphi \right)$$

Ta tính tích phân:

$$I = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{sin2\varphi}d\varphi$$

Trong tích phân này thực hiện phép đổi biến $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, ta được:

$$I = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sint\sqrt{-cos2t}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}arccos\frac{-1}{8}} \sqrt{1 - \left(\sqrt{2}cost\right)^2}d(\sqrt{2}cost)$$

Phép thế $\sqrt{2}cost = z$ trong tích phân cuối cùng sẽ đưa nó về tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \sqrt{1 - z^2}dz = \cdots = \frac{1}{2}\left(arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8}\right)$$

Thay giá trị vừa tìm được vào biểu thức để tính diện tích S, ta được:

$$S = \frac{\sqrt{7}}{2} + arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8} = \frac{\sqrt{7}}{2} + arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}$$

Bài 3: Hướng dẫn giải:

Đổi sang tọa độ cầu, ta giải được điều kiện $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq sin\theta cos\varphi,$

ta có:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{sin\theta cos\varphi} r^3 sin\theta\, dr=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\theta\cos^4\varphi\, d\theta=\cdots=\frac{\pi}{10}$$

Bài 4: Hướng dẫn giải:

Xét trên miền $B: x, y, z \geq 0$

Biến đổi tọa độ cầu, ta giải được điều kiện $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq A$ $(A = \sqrt[3]{3r^2 sin\theta cos\theta sin\varphi cos\varphi})$

Thể tích cần tính là:

$$V=4\iiint_B r^2 sin\theta\, d\varphi d\theta dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{A} r^2 sin\theta\, dr=\cdots=\frac{1}{2}$$

Bài 5: Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$I=\int_0^1 \sin\left(ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{lnx}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y \sin\left(ln\frac{1}{x}\right)dy$$

Hàm $f(x,y)=x^y\sin\left(ln\frac{1}{x}\right)$ liên tục trong hình chữ nhật $R[0 \leq x \leq 1; a \leq y \leq b]$ (khi $x=0$ đặt $f(0,y)=0$), bởi vậy có thể thực hiện phép thế tích phân:

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(ln\frac{1}{x}\right)dx$$

Thực hiện phép thế $x=e^{-t}$, ta được:

Thử thách 30 ngày chinh phục Giải tích
Môn: Giải tích 2

$$I = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin(t) dt$$

Xét:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin(t) dt$$

Tích phân từng phần A 2 lần, ta có

$$I = \cdots = \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = \arctan(b+1) - \arctan(a+1)$$