GIẢI TÍCH 2
BÀI 6
A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TÍCH PHÂN KÉP) (TT)

Đặt vấn đề.

- Dùng định nghĩa tính tích phân kép chỉ với lớp hàm hằng số.
- Đã biết cách tính tích phân lặp $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.
- Tính tích phân kép thế nào ? có qua tích phân lặp ?
- Học toán để là gì ? tham khảo bài viết sau :

“Người Mỹ đánh giá thấp nCoV vì kém toán”.

3.4. Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp

a) Định lí Fubini trên hình chữ nhật. f khả tích trên hình chữ nhật $R = [a\,;b]\times[c\,;d]$

1°/ Nếu tồn tại $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ với x cố định $\in [a\,;\,b]$

$\Rightarrow \varphi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ khả tích trên $[a\,;\,b]$ và có

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \qquad (4.1)$$

2°/ $\exists \int_a^b f(x, y)dx$, với y cố định thuộc $[c\,;\,d]$

$\Rightarrow \psi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ khả tích trên $[c\,;\,d]$ và có

$$\iint_R f(x, y)dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \qquad (4.2)$$

Nói riêng, nếu có f liên tục trên R thì ta có đồng thời (4.1), (4.2) và có

$$\iint_R f(x, y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

Chú ý. Khi $f(x,y) = g(x)h(y) \Rightarrow$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)dx\right) \times \left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Ví dụ 1. $\iint\limits_R (x+y)^2\,dx\,dy$, $R = [0\ ;\ 1] \times [0\ ;\ 2]$

Giải

+) $f(x,y)=(x+y)^2$ liên tục trên $R \Rightarrow$

+) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x+y)^2\,dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2 (x+y)^2\,d(x+y)\right)dx$

+) $=\int\limits_0^1 \left.\dfrac{(x+y)^3}{3}\right|_{y=0}^{2} dx=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 [(x+2)^3-x^3]dx$

$=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(x+2)^4}{4}-\dfrac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{12}[(81-16)-1]=\dfrac{16}{3}.$

Ví dụ 2. $\iint\limits_R \frac{x^2 dx\, dy}{1+y^2}$, $R = [0\ ;\ 1]\times[0\ ;\ 1]$

Giải

+) $f(x,y) = x^2 \times \dfrac{1}{1+y^2}$ liên tục trên $R \Rightarrow$

+) $I = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\left(\int_0^1 \dfrac{1}{1+y^2} dy\right) = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 \times \arctan y\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{12}$

b) Định lí Fubini trên tập hợp giới nội

1°/ φ_1, φ_2 khả tích trên $[a\,;b]$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $\forall x \in [a\,;b]$,

$D = \{(x\,;y): a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

f khả tích trên D, $\exists \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, $\forall x$ cố định thuộc $[a\,;b]$.

Khi đó, $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ khả tích trên $[a\,;b]$ và có

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (4.3)$$

Nói riêng, nếu φ_1, φ_2 liên tục trên $[a\,;b]$, f liên tục trên D thì vẫn đúng

2°/ ψ_1, ψ_2 khả tích trên $[c ; d]$, $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $\forall y \in [c ; d]$,

$D = \{(x ; y): c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

f khả tích trên D và $\exists \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$, $\forall$ y cố định thuộc

$[c ; d]$. Khi đó $\psi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$ khả tích trên $[c ; d]$

và có
$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \qquad (4.4)$$

Nói riêng, nếu ψ_1, ψ_2 liên tục trên $[c ; d]$, f liên tục trên D thì vẫn đúng.

Nhận xét. Nếu có f liên tục trên D , φ_1, φ_2 liên tục trên $[a\ ;\ b]$, ψ_1, ψ_2 liên tục trên $[c\ ;\ d]$, D thỏa các điều kiện của Định lí,thì ta có đồng thời (4.3), (4.4), tức là có

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

Ví dụ 1. $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dx\,dy$, D: $y^2 = x$, $y = x^2$.

Giải

+) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 1 \end{cases} \Rightarrow D : x^2 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 1.$

+) $f(x,y) = x^2 + y$ liên tục trên D, nên có

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \int_0^1 (yx^2 - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

+) $= \int_0^1 (x^{5/2} - \frac{x + x^4}{2})dx = (\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{10})\Big|_0^1 = \frac{-9}{140}.$

Ví dụ 2. $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$.

Giải

+) $D: 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1.$

+) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ liên tục trên D, nên có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + \frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x} \right)\Bigg|_{y=0}^{x}$$

+) $= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\pi}{3}x^2 \right) dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{9}.$

Ví dụ 3. $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$, D: $[0\ ;\ \pi] \times [0\ ;\ \pi]$

Ví dụ 4. $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$, D: $[-1\ ;\ 1] \times [0\ ;\ 2]$

Giải

+)

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 : 0 \le y \le x^2, |x| \le 1, D_2 : x^2 \le y \le 2, |x| \le 1.$$

+) $f(x,y) = \sqrt{|y - x^2|}$ liên tục trên D, nên có

$$I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{|y - x^2|}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{|y - x^2|}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\,dy$$

$$= -\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,d(x^2-y)\right)dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,d(y-x^2)\right)dx$$

+)

$$= \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}[(x^2-y)^{3/2}\Big|_{y=x^2}^{0} + (y-x^2)^{3/2}\Big|_{y=x^2}^{2}]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[|x|^3 + (2 - x^2)^{3/2}]dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{1}[x^3 + (2 - x^2)^{3/2}]dx = \frac{x^4}{3}\bigg|_0^1 + I_1 = \frac{1}{3} + I_1$$

+) $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow I_1 = \frac{4}{3}\int_{0}^{1}[(2 - x^2)^{3/2}]dx$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/4} 4\cos^4 t dt = \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/4}[1 + \cos(2t)]^2 dt$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/4}[1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)]dt$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \sin(2t)\Big|_0^{\pi/4}\right) + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \frac{2}{3}\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$$

+) $\Rightarrow I = \frac{1}{3} + I_1 = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$

Ví dụ 5. Đổi thứ tự tính tích phân :

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$$

Giải

+) $D: \dfrac{y^2}{2} \le x \le \sqrt{3-y^2}, 0 \le y \le 1 \Rightarrow$

+) $\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} y = \sqrt{3-x^2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \cup D_3, \qquad D_1 : 0 \le y \le \sqrt{2x}, 0 \le x \le \dfrac{1}{2},$

$D_2 : 0 \le y \le 1, \dfrac{1}{2} \le x \le \sqrt{2},$

$D_3 : 0 \le y \le \sqrt{3-x^2}, \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3}.$

+) $I = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dx\,dy$

$$= \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy +$$

$$+ \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy.$$

Ví dụ 6. Tính $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$

Giải

+) $D: y \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \Rightarrow D: 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1.$

+) $f(x,y) = e^{-x^2}$ liên tục trên D, nên có

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx \int_0^x dy$$

$$= \int_0^1 y\Big|_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2}.$$

Khi miền D hoặc hàm f(x,y), không thể dùng ĐL Fubini để tích phân kép. Cách tính ?

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy,$$

$$D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^2 + y^2 \neq 0.$$

3.5. Đổi biến trong tích phân 2 lớp.

a) Đổi biến

Định lí 1. Tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$, D là tập con đo được, compact của U, ánh xạ $\varphi: U \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$, ở đó

- x, y khả vi liên tục
- $\varphi|_{D^\circ}$ là đơn ánh
- Định thức Jacobi $J(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên

D°. Khi đó

- $\varphi(D)$ là tập compact đo được
- Nếu $f : \varphi(D) \to R$ liên tục trên $\varphi(D)$ thì có

$$\iint\limits_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|du\,dv$$

Ví dụ 1.

Tính $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$, $D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le x$

Ví dụ 2.

Tính $\iint\limits_D (2-x-y)^2\,dx\,dy$, D: $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$

Ví dụ 3.

Tính $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$,

$$D: x+y=0, x+y=1, y=-\frac{1}{2}, y=0.$$

Ví dụ 4.

Tính $\iint\limits_D dx\,dy$, D: $y = x$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 2$.

Ví dụ 5. Tính $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dx\,dy$,

$D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^2 + y^2 \neq 0.$

Giải

+)

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \ge 0 \\ y = \dfrac{v-u}{2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 : \begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ -v \le u \le v \end{cases}$$

+) $$\varphi(D_1) = D, J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ne 0$$

+) $$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\,dy = \iint\limits_{D_1} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 e^t dt \right) v dv = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \int_0^1 v dv = \frac{e^1 - e^{-1}}{4} = \frac{\sinh 1}{2}.$$

Ví dụ 3.

Tính $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$,

$D: x + y = 0, x + y = 1, y = -1, y = 0.$

Giải

+) $\begin{cases} u = \sqrt{x+y} \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - v \\ y = v \end{cases} \Rightarrow D_1 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 0 \end{cases}$

+) $\varphi(D_1) = D, J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2u \ne 0$

+) $\displaystyle\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} 2u\arcsin u\,du\,dv$

$$= \left(\int_0^1 2u\arcsin u\,du\right)\left(\int_{-1}^0 dv\right) = \int_0^1 u\arcsin u\,d(u^2)$$

$$= (u^2\arcsin u)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u^2)+1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du + \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin u\right)\Big|_0^1 - \arcsin u\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 4.

Tính $I = \iint\limits_D dx\,dy$, D: $y = x > 0$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 2$.

Giải

+) $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow D_1 : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}, \varphi(D_1) = D.$

$$J(x,y)\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \Rightarrow J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{2v} \neq 0$$

+) $I = \iint\limits_{D_1} \dfrac{1}{2v} du\, dv = \int\limits_1^2 du \int\limits_1^4 \dfrac{dv}{2v} = \left(\int\limits_1^2 du \right) \times \left(\int\limits_1^4 \dfrac{1}{2v} dv \right)$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \ln |v| \Big|_1^4 = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2.$$

b) Đổi biến trong toạ độ cực

Cho ánh xạ

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (\theta, r) \mapsto (x, y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

Ta có $J(\theta, r) = \dfrac{D(x, y)}{D(\theta, r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r.$

Dễ thấy φ không là song ánh, tuy nhiên thu hẹp của φ trên $U_\alpha = (\alpha\ ;\ \alpha + 2\pi) \times (0\ ;\ +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là song ánh từ $U_\alpha \to \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Nếu D là tập compact đo được sao cho $\text{Int}D \subset U_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì thu hẹp của φ trên $\text{Int}D$ là đơn ánh và $J(\theta, r) \neq 0$

trên Int$D$. Khi đó với hàm số liên tục tuỳ ý $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ ta luôn có
$$\iint\limits_{\varphi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Nhận xét.

1) Khi $\varphi(D)$ là hình tròn hoặc một phần hình tròn,thì đổi sang tọa độ cực.

2) Khi $\varphi(D)$ là ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ hoặc một phần ellipse,thì đổi sang tọa độ cực suy rộng

$$x = ar\cos\theta, b = br\sin\theta \Rightarrow |J(\theta, r)| = \frac{D(x, y)}{D(\theta, r)} = abr$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\varphi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = ab\iint\limits_{D} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Ví dụ 1. $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Ví dụ 2. $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Giải

+)

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow D_1 : \begin{cases} \pi \le r \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow |J(\varphi, r)| = r$$

+) $$I = \iint_{D_1} r\sin r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\pi^{2\pi} r\sin r dr$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \times \left(\int_\pi^{2\pi} r\sin r dr\right)$$

$$= 2\pi\left[-r\cos r + \sin r\right]\Big|_\pi^{2\pi} = 2\pi(\pi - 2\pi) = -2\pi^2.$$

Ví dụ 3. $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Giải

+)

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi \Rightarrow D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow |J(\varphi, r)| = abr$$

+)

$$I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1-r^2}\, abrd\varphi dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, abrdr$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \times \left(\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, abrdr\right)$$

$$= -\frac{2\pi ab}{2} \times \left(\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, d(1-r^2)\right) = -\pi ab \left.\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\pi ab.$$

Ví dụ 4.

$$I=\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dx\,dy,\; D:\{x^2+y^2\le 1,\; x\ge 0,\; y\ge 0\}$$

Giải

$$+)\, x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow |J(\varphi, r)| = r$$

$$+)\, I = \iint\limits_{D_1} \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, d\varphi\, dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr$$

$$= \left(\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \right) \times \left(\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} \times \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du \right) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du$$

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow u = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow du = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} \int_0^1 t \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt = \pi \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

+) $t = \tan\theta \Rightarrow I = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2\theta}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} [1 - \cos(2\theta)] d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\Big|_0^{\pi/4}\right] = \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$

Ví dụ 5. $I = \iint\limits_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - \left(x^2 + y^2\right)^2}} dx\,dy$, $D: \frac{x^2}{2} + y^2 \le 1$

Ví dụ 6. CMR $I = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Euler-Poisson)

Giải

+)

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\times\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\times\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, D: x \geq 0; y \geq 0$$

+) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow D_1: \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow |J(\varphi, r)| = r$

+) $I^2 = \iint_{D_1} e^{-r^2} r d\varphi dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr$

$$=\left(\int_0^{\pi/2} d\varphi\right)\times\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2)\right)=\frac{\pi}{4}(-e^{-r^2})\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c) Tích phân hai lớp trên tập đối xứng

Cho $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = S(D_1)$, các tập D_1, D_2 đo được và $|D_1 \cap D_2| = 0$, S là phép đối xứng

1°/ Nếu $f(S(x, y)) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì có

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

2°/ Nếu $f(S(x, y)) = -f(x, y)$ thì có

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 0$$

Ví dụ 1. Tính $I = \iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

Ví dụ 2.

a) Tính $I = \iint_D y^2(x^5 - y^4)\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

Giải

+) $I = \iint\limits_D y^2 x^5 dx\,dy - \iint\limits_D y^6 dx\,dy = I_1 - I_2$

+) Do hàm lẻ trên miền đối xứng, nên

$$I_1 = \iint\limits_D y^2 x^5 dx\,dy = 0$$

+) Do hàm chẵn trên miền đối xứng, nên

$$I_2 = \iint\limits_D y^6 dx\,dy = 4\iint\limits_{D_1} y^6 dx\,dy, D_1 : (x, y) \in D, x \geq 0, y \geq 0$$

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, D_2 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1,$$

$$\left|J(\varphi, r)\right| = abr.$$

$$\Rightarrow I_2 = 4\iint\limits_{D_2} (br\sin\varphi)^6 abrd\varphi dr$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (br\sin\varphi)^6 abrdr$$

$$= 4ab^7\left(\int_0^{\pi/2} \sin^6\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 r^7 dr\right) = 4ab^7\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2}\frac{1}{8} = \frac{5}{64}\pi ab^7$$

+) $I = -\dfrac{5}{64}\pi ab^7.$

b (K58)

1) Tính $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2y} \left(x^5 + 2y\right) dx\, dy$, (2π)

2) Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-x^2} f(x,y)dxdy$

$\left(\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx \right)$

c (K59)

1) Tính $I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$,

D: $x + 2y \le 2, x \ge 0, y \ge 0$. ($\frac{5}{6}$)

2) Tính $I = \iint\limits_D \left(x^2 + 2y\right) dx\, dy$ D là giao $y = x^2, y = 2x$

: ($\frac{88}{15}$)

3) Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1+x} f(x, y) dx dy$

($\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y}}^{1} f(x, y) dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^{1} f(x, y) dx$)

4) Tính $I = \iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, D $: 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

(2)

d (K60)

1) Tính $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$,

D: $a \le x^2 + y^2 \le b^2, x \ge 0, (0 < a < b)$

($\frac{\pi}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})$)

2) Tính $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, D: $x^2 + y^2 \le 4$

$(\pi \ln 5)$

3) Tính $I = \iint\limits_D 3x\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2, 1 \le x + y \le 3$

(12)

4) Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + 2y^2)\,dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$

$(\frac{3\pi}{4})$

3.6. Tính thể tích vật thể

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

$$V = |B| = \iint\limits_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)]\,dxdy \qquad \text{(Do ĐL7)}$$

Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể

a) ellipxoit $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$

+)

$$B: -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$\Rightarrow V=|B|=2c\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

+) $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi\Rightarrow D_1:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\end{cases}$

$$|J(\varphi, r)| = abr \Rightarrow V = 2c\iint\limits_{D_1} \sqrt{1-r^2}\, abr\, d\varphi\, dr$$

$$= -abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, d(1-r^2) = 2\pi abc\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_1^0$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc.$$

b) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$ $\quad\left(\dfrac{48\sqrt{6}}{5}\right)$

c) $2az \geq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

Giải

+) $B: \dfrac{x^2+y^2}{2a} \le z \le \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 2az = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = a \\ z = -3a < 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow D: x^2 + y^2 \le 2a^2 \Rightarrow$$

$$I = |B| = \iint\limits_D \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2+y^2}{2a}\right) dxdy$$

+)

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, D_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a\sqrt{2} \end{cases}, |J(\varphi, r)| = r$

$$\Rightarrow I = \iint_{D_1} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a}\right) r\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a}\right) r\,dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{2}\int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2 - r^2}\,d(3a^2 - r^2) - \frac{r^4}{2a.4}\Bigg|_0^{a\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{2}\frac{2}{3}(3a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} - \frac{a^4}{2a}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}(3\sqrt{3}a^3 - a^3) - \frac{a^3}{2}\right] = 2\pi a^3\left(\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right).$$

d) $z = xy,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ z = 0$

Giải

+)

$$B: 0 \le z \le xy, (x, y) \in D: x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x$$

$$\Rightarrow |B| = \iint_D xydxdy$$

+) $$\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases} \Rightarrow xy = uv, D_1: \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}, \varphi(D_1) = D.$$

$$J(x,y)\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow |B| = \iint_{D_1} \frac{uv}{3} du dv = \int_1^2 du \int_1^2 uv \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}\left(\int_1^2 u du\right)\left(\int_1^2 v dv\right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^2}{2}\Bigg|_1^2 \frac{v^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

e) $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = a^2$

Gợi ý.

+) Đối xứng, nên $|B| = 8|B_1|, B_1 : 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2},$

$D_1 : x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0$

$$\Rightarrow |B_1| = \iint_{D_1} (\sqrt{a^2 - x^2} - 0)dxdy,$$

+) $|B_1| = \iint_{D_1} (\sqrt{a^2 - x^2})dxdy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy$

$$= \int_0^a (a^2 - x^2)du = \frac{2a^3}{3} \Rightarrow |B| = \frac{16a^3}{3}.$$

f) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $(x \ge 0, y \ge 0)$, $z = 0$

g (K58) 1) $x \geq 0, 2x \leq x^2 + y^2 \leq 2y, 1 \leq z \leq 3$. (2)

2) $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left(\frac{32\pi}{3}\right)$

h (K59) 1) $0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, 0 \leq y \leq x$ $\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3) $4x \leq y^2 \leq 5x, 3y \leq x^2 \leq 4y, 1 \leq z \leq 4$. (1)

i (K60) 1) $|x - 2y| + |x + y| + |x + y + z| \leq 1$ $\left(\frac{4}{9}\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!