BÀI 12

KHẢO SÁT TÍNH NHÂN QUẢ, ỔN ĐỊNH TRÊN MIỀN Z

TS. Nguyễn Hồng Quang
PGS. TS. Trịnh Văn Loan
TS. Đoàn Phong Tùng
Khoa Kỹ thuật máy tính

❑ Nội dung bài học

1. Khảo sát tính nhân quả của hệ thống trên miền Z.
2. Khảo sát tính ổn định của hệ thống trên miền Z.
3. Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn
4. Khảo sát tính nhân quả ổn định của hệ truy hồi bậc 2

❑ Mục tiêu bài học

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Phương pháp khảo sát tính nhân quả và ổn định của hệ thống trên miền Z.
- Khảo sát tính nhân quả ổn định của hệ truy hồi bậc 2

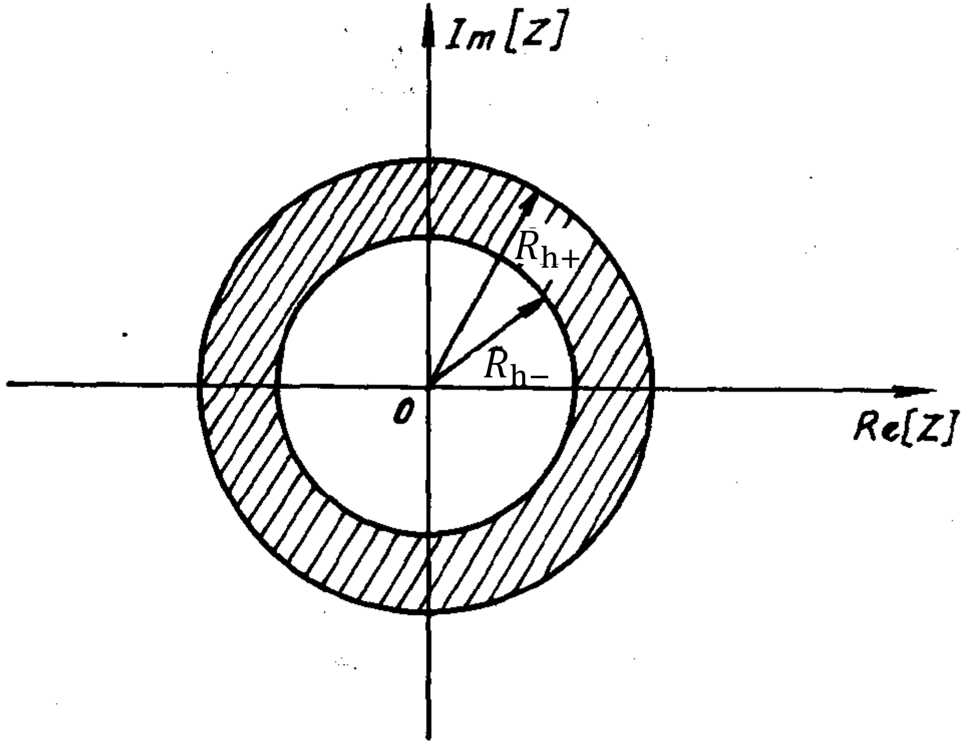
1. Đặc điểm của hàm truyền H(Z)

- Đặc điểm của hàm truyền H(Z):

$$h(n) \xrightarrow{ZT} H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad \text{với} \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n}$$

$$R_{h+} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |h(-n)|^{1/n}}$$

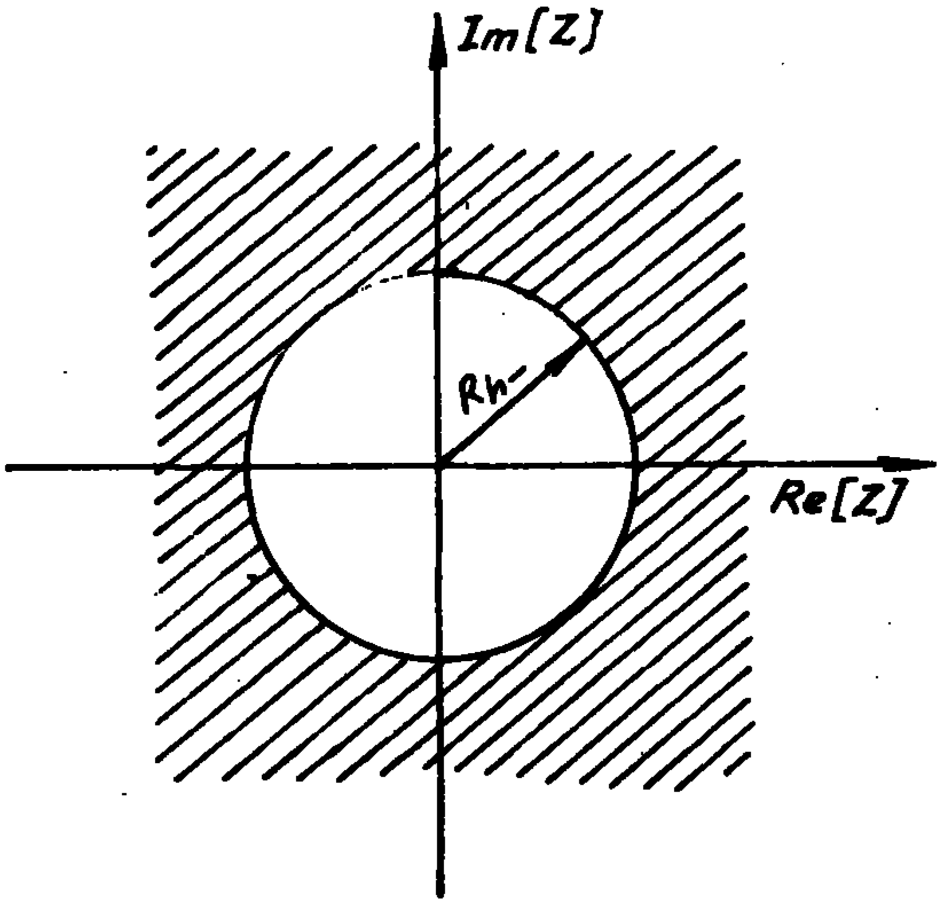


2. Tính nhân quả

- $h(n) = 0, \forall n < 0$

$$R_{\mathrm{h}+} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{h}(-n)|^{1/n}}$$

- $\Longrightarrow R_{h+} = +\infty$
- Hệ là nhân quả $\Leftrightarrow$ miền hội tụ của $\mathrm{H(Z)}$ nằm ngoài vòng tròn $R_{\mathrm{h}-}$



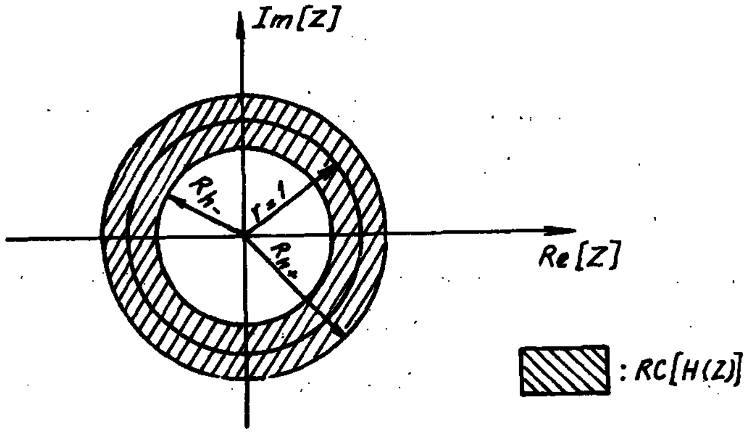
3. Tính ổn định

- $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \Rightarrow |H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}|$$

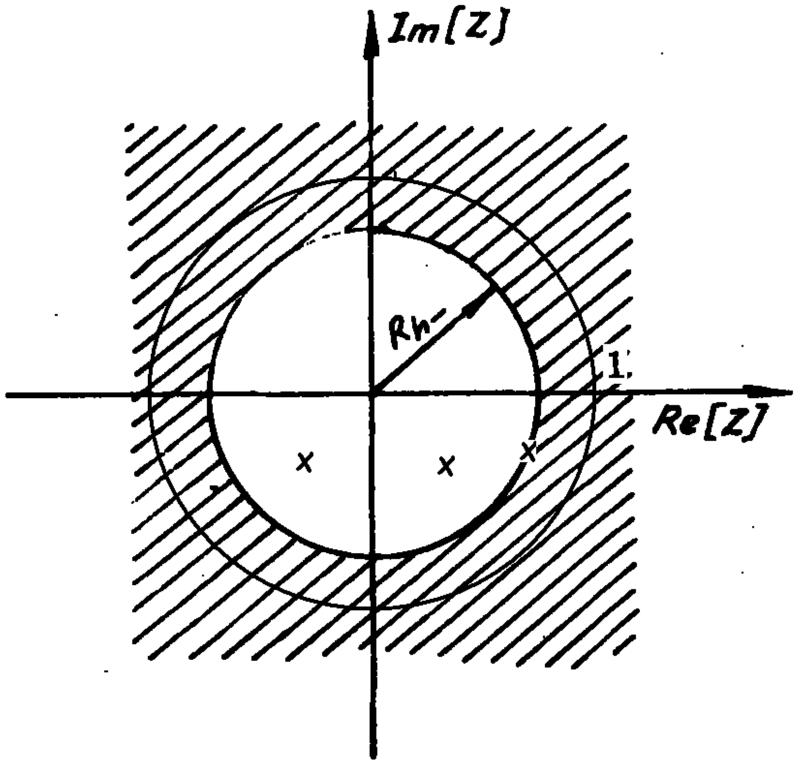
$$\Rightarrow |H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|\,.\,|z|^{-n}$$

- Vậy với các điểm z thoả mãn $|z| = 1$ thì $|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| < \infty$
- Hệ là ổn định $\Leftrightarrow$ đường tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống



Hệ thống nhân quả, ổn định

- Hệ nhân quả: $R_{h+} = +\infty$
- Hệ ổn định: $R_{h-} < 1 < R_{h+}$
- Hệ nhân quả ổn định: $R_{h-} < 1$ và $R_{h+} = \infty$
- Hệ thống nhân quả và ổn định ⇔ các điểm cực của H(Z) nằm trong vòng tròn đơn vị.



4. Khảo sát tính ổn định của hệ LTI nhân quả bởi các điểm cực

- Phương trình sai phân: $y(n) + a_1.y(n-1) + \cdots + a_N.y(n-N) = x(n)$
- Giải thuật:
  - Bước 1: Tìm hàm truyền đạt $H(z)$

    $H(z) = 1/\left(1 + a_1.z^{-1} + \cdots + a_N.z^{-N}\right) = z^N/(z^N + a_1.z^{N-1} + \cdots + a_N)$
  - Bước 2: Tìm các điểm cực Z_{pk}

    Giải phương trình: $z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N = 0$
  - Bước 3: So sánh các điểm cực với vòng tròn đơn vị.
    - Nếu tất cả các điểm cực đều nằm trong vòng tròn đơn vị thì hệ ổn định
    - Nếu có một điểm cực nằm trên hoặc nằm ngoài vòng tròn đơn vị thì hệ không ổn định

Nhược điểm

- Với các hệ thống bậc lớn thì sẽ có nhiều điểm cực Z_{pk}
- Việc xác định Z_{pk} sẽ có độ phức tạp lớn
- Bài toán:
  - $H(z) = 1/\left(1 + a_1.z^{-1} + \cdots + a_N.z^{-N}\right)$
  - Cần kiểm tra xem các điểm cực (nghiệm của mẫu số) có nằm trong vòng tròn đơn vị?
- Một phương pháp không cần giải trực tiếp
  - Khảo sát hàm số ⟶ tiêu chuẩn ổn định Jury, Schur-Cohn, ...
  - Khảo sát trên hàm $A(z) = 1 + a_1.z^{-1} + \cdots + a_N.z^{-N}$

5. Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

$$A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} \ \text{với} \ a_m(0) = 1$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_m(m-k)\, z^{-k}$$

- Các hệ số của $\mathrm{B_m(z)}$ giống với các hệ số của $\mathrm{A_m(z)}$, nhưng theo thứ tự ngược lại

Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

- Bước 1. $A_N(z) = A(z) \quad K_N = a_N(N)$
- Bước 2 (bước lặp). Tính đa thức bậc thấp hơn $A_m(z)$, $m = N, N-1, N-2, \dots, 1$:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad \text{với} \quad K_m = a_m(m)$$

- Bước 3. Đa thức $A(z)$ có các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị nếu và chỉ nếu : Các hệ số K_m thoả mãn điều kiện $|K_m| < 1 \; \forall \, m = 1, 2, \dots, N$.

Ví dụ

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- Bước 1: $A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \quad \Rightarrow \quad K_2 = -\frac{1}{2}$
- Bước 2 (bước lặp) :

$$\Rightarrow B_2\,(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

$$\Rightarrow A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1}$$

$$\Rightarrow K_1 = -\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \text{ Hệ thống không ổn định}$$

Giải thuật lập trình

- Bước khởi tạo:

$$a_N(k) = a_k \qquad k = 1, 2, \dots, N$$

$$K_N = a_N(N)$$

- Bước lặp với $m = N, N-1, \dots, 1$:

$$K_m = a_m(m) \qquad a_{m-1}(0) = 1$$

$$a_{m-1}(k) = \frac{a_m(k) - K_m b_m(k)}{1 - K_m^2} \qquad k = 1, 2, \dots, m-1$$

$$b_m(k) = a_m(m-k) \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

6. Khảo sát tính ổn định của hệ IIR bậc 2

- Hệ thống bậc 2 có PTSP:

$$y(n) + a_1.y(n-2) + a_2.y(n-2) = x(n)$$

- Hàm truyền đạt $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1z + a_2}$$

- Giải phương trình: $z^2 + a_1.z + a_2 = 0$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 \geq 0$$

- Hai nghiệm thực: $z_{1,2} = -a_1/2 \pm \mathrm{sqrt}(\Delta)/2$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$$

- Hai nghiệm phức: $z_{1,2} = -a_1/2 \pm\ j.\mathrm{sqrt}(-\Delta)/2$

Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn

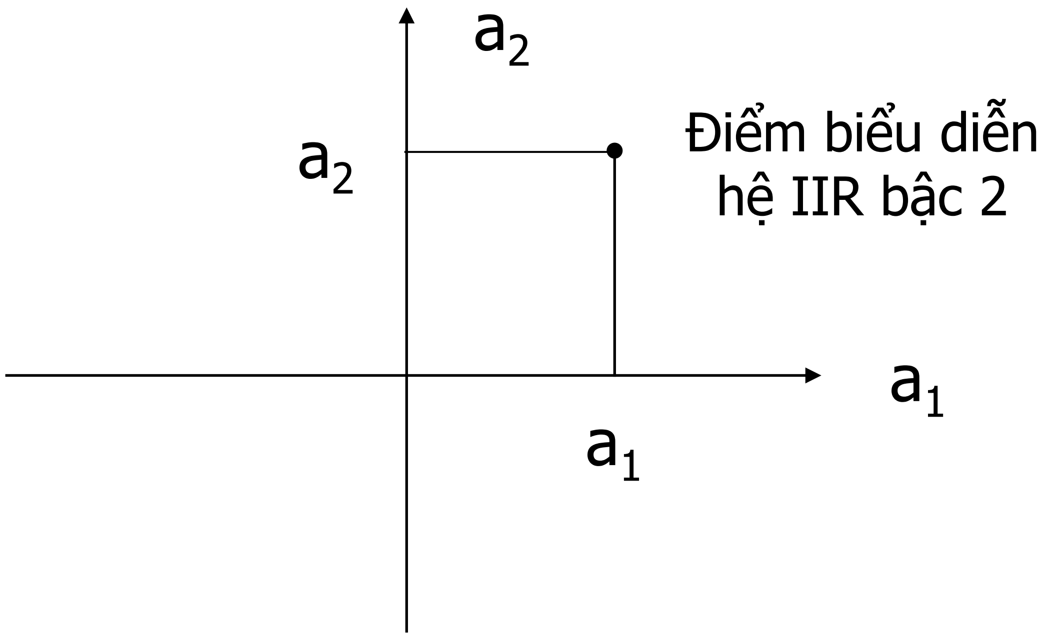
- Đặt $A_2(z) = 1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} \Longrightarrow K_2 = a_2$
- $B_2(z) = z^{-2} + a_1.z^{-1} + a_2$
- $A_1(z) = [A_2(z) - K_2.B_2(z)]/\left(1 - K_2^2\right)$
- $A_1(z) = 1 + a_1.\frac{z^{-1}}{1+a_2} \quad \Longrightarrow \quad K_1 = \frac{a_1}{1+a_2}$
- Hệ thống ổn định nếu và chỉ nếu $|K_1| < 1$ và $|K_2| < 1$

$$\boxed{-1 < a_2 < 1}$$

$$-1 < \frac{a_1}{1+a_2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a_1 < 1 + a_2 \\ a_1 > -1 - a_2 \end{array}}$$

Biểu diễn hình học hệ IIR bậc 2

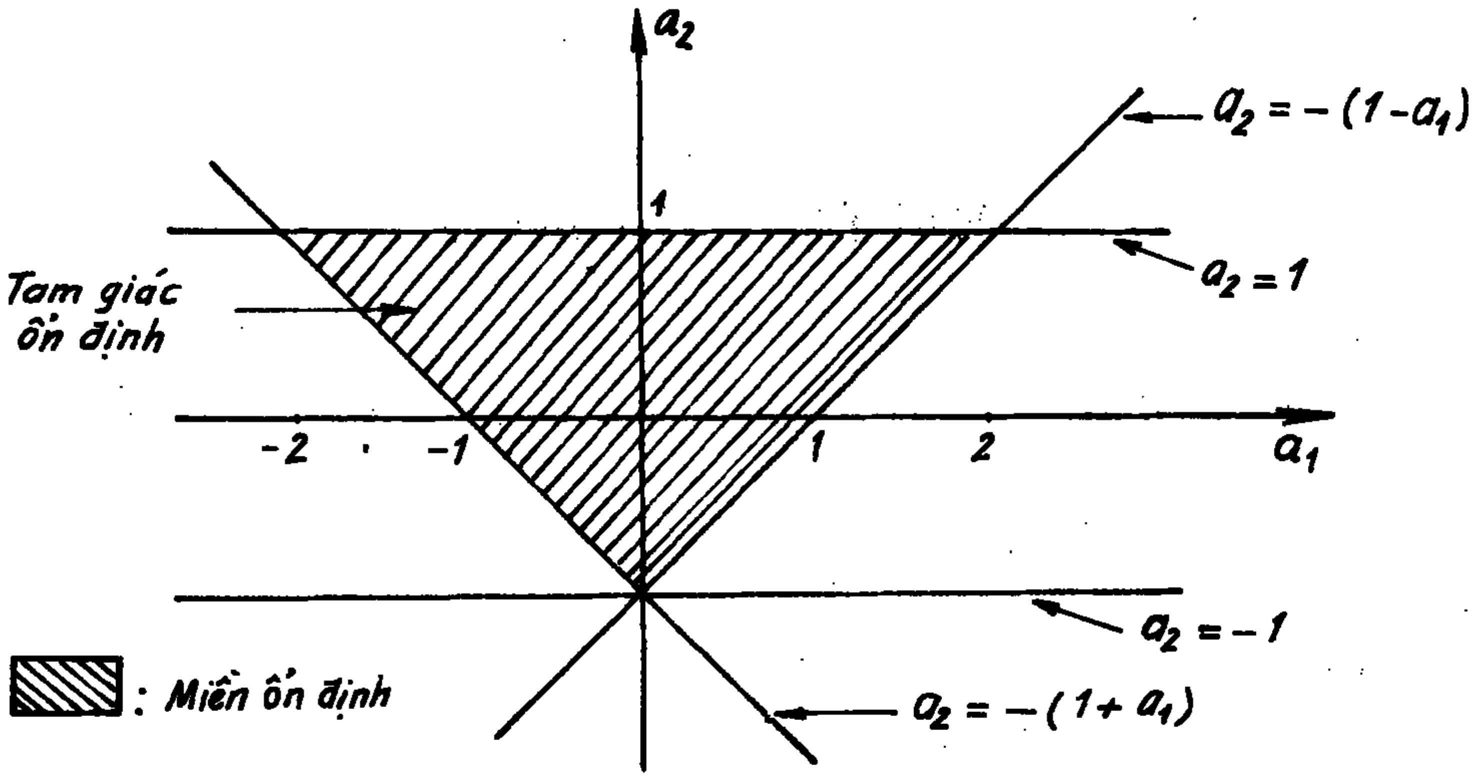
- Hệ thống IIR bậc 2
- Hoàn toàn xác định thông qua (a_1, a_2)
- Biểu diễn bằng một điểm trên mặt phẳng (a_1, a_2)



Biểu diễn hình học điều kiện ổn định của hệ IIR bậc 2

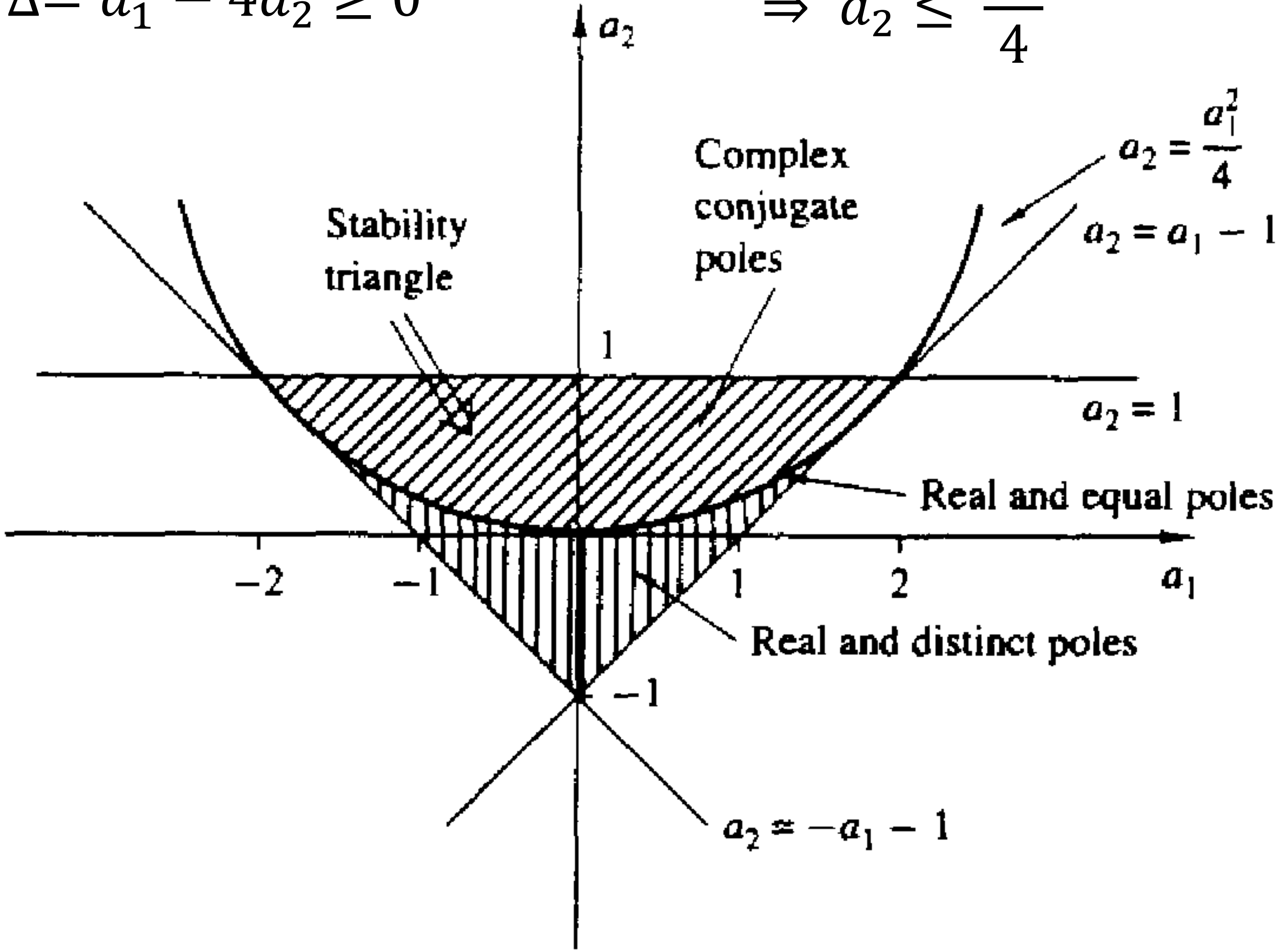
$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 < 1 + a_2 \\ a_1 > -1 - a_2 \end{array}} \begin{array}{l} \Rightarrow\ a_2 > a_1 - 1 \\ \Rightarrow\ a_2 > -a_1 - 1 \end{array}$$

$$\boxed{-1 < a_2 < 1}$$



Phần cực thực và phần cực ảo trên tam giác ổn định của hệ IIR bậc 2

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$$



4. Tổng kết

- Tính nhân quả và ổn định của một hệ thống có thể được khảo sát thông qua hàm truyền đạt và miền hội tụ của nó.
- Tiêu chuẩn Schur-Cohn cho phép khảo sát tính ổn định thông qua các hệ số của phương trình sai phân.
- Hệ thống truy hồi bậc hai ổn định với các điểm biểu diễn hệ thống nằm trong tam giác ổn định trên mặt phẳng A1-A2.

Bài tập 1

- Khảo sát tính ổn định của các hệ thống nhân quả sau:

a. $y(n) - 3.y(n-1) + 2.y(n-2) = 4.x(n) + 5.x(n-1)$

b. $y(n) - 3.y(n-1) + 2.y(n-2) = x(n)$

c. $y(n) - 5/8\,.\,y(n-1) + 1/8\,.\,y(n-2) = x(n)$

d. $y(n) - 4.y(n-1) + 5.y(n-2) = x(n)$

Bài tập 2

- Khảo sát tính ổn định của các hệ thống nhân quả sau:

a. $y(n) - 0.02\, y(n-1) - 0.1\, y(n-2) - 0.03\, y(n-3) - 0.25\, y(n-4) = 0.5\, x(n) + 0.3\, x(n-1)$

b. $y(n) - 0.15\, y(n-3) – 0.3\, y(n-4) – 0.2\, y(n-5) – 0.01\, y(n-6) = 0.1\, x(n) + 0.2\, x(n-1)$

Bài học tiếp theo. BÀI 13

PHÉP BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

Tài liệu tham khảo:

- ***Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.***
- ***J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4th Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.***

TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chúc các bạn học tốt!