Giải XSTK Buổi 3

1.

- Ta thấy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị là 0, 1, 2 . Ta có

$$p_0 = P(X=0) = \frac{C_6^0 C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

$$p_1 = P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

Vậy bảng phân bố của X là

X	0	1	2
P	2/15	8/15	1/3

- Kì vọng , phương sai và độ lệch chuẩn của X

- Kì vọng , phương sai và độ lệch chuẩn của X

$$E(X) = 0\times\frac{2}{15} + 1\times\frac{8}{15} + 2\times\frac{1}{3} = 1,2.$$

$$V(X) = 0^2\times\frac{2}{15} + 1^2\times\frac{8}{15} + 2^2\times\frac{1}{3} - (1,2)^2 = 32/75 = 0,4267.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,4267} = 0,6532.$$

2.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số lọ thuốc tốt trong 3 lọ lấy ra

$\operatorname{Im} X = \{0,1,2,3\}$.

a) A_i: " lọ thuốc lấy ra từ hộp thứ i là lọ tốt".

$$P(X=0) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = \frac{7}{90}$$

$$P(X=1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) = \frac{59}{180}$$

$$P(X=2) = P(A_1.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.A_3 + A_1.\overline{A_2}.A_3) = \frac{77}{180}$$

$$P(X=3) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{6}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{7}{90}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{77}{180}$	$\frac{1}{6}$

3.

Giải

a/ Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số trận thắng của đội tuyển.

$$\operatorname{Im} X = \{0,1,2,3\}.$$

Gọi A: "Vận động viên A thắng"

B : "Vận động viên B thắng"

C: "Vận động viên C thắng"

Ta có

$$P(X=0) = P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0{,}4.0{,}3.0{,}2 = 0{,}024.$$

$$P(X=1) = P(A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}) = 0{,}188.$$

$$P(X=2) = P(A.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.C) = 0{,}452.$$

$$P(X=3) = P(A.B.C) = P(A).P(B).P(C) = 0{,}336.$$

Bảng phân phối xác suất X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,024	0,188	0,452	0,336

b/ Xác suất để đội tuyển thua nhiều nhất một trận:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}788$$

Xác suất để đội tuyển thắng ít nhất một trận :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0{,}976$$

4.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao.
a/ Trung bình và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao :

$$E(X) = \sum_{i=18}^{22} i.P(X = i) = 19,87$$

và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1,3531$$

b/ Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ lợi nhuận cho mỗi bao kẹo. Ta có:

$$Y = 84 - 3X$$

lợi nhuận trung bình

$$E(Y) = E(84 - 3X) = 84 - 3E(X) = 24,39$$

và độ lệch chuẩn của lợi nhuận cho mỗi bao kẹo

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{D(84 - 3X)} = 3\sqrt{D(X)} = 3,48969$$

5.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao.
a/ Xác suất để bao được chọn ngẫu nhiên có từ 19 đến 21 viên kẹo:

$$P(19 \le X \le 21) = P(X = 19) + P(X = 20) + P(X = 21) = 0,77.$$

b/ Đặt A: "Bao chứa ít nhất 20 viên kẹo" $P(A) = 0,32 + 0,21 + 0,09 = 0,62$

Xác suất để ít nhất một trong hai bao chứa ít nhất 20 viên kẹo:

$$P(A + \overline{A}A) = P(A) + P(\overline{A}.A) = P(A) + P(\overline{A})P(A) = 0,8556$$

6.

Giải

Trung bình khối lượng hàng hóa C bán được trong 1 tháng.

$$E\left(X\right)=30.\sum_{x_i=5}^{8}x_i.P\left(X=x_i\right)=201$$

Trung bình khối lượng hàng hóa Y bán được trong 1 tháng.

$$E\left(Y\right)=30.\sum_{y_j=4}^{8}y_j.P\left(Y=y_j\right)=177$$

Trung bình khối lượng hàng hóa Z bán được trong 1 tháng.

$$E\left(Z\right)=30.\sum_{z_k=7}^{10}z_k.P\left(X=z_k\right)=252$$

Nên khối lượng hàng hóa bán được trung bình trong 1 tháng của công ty là

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)+E\left(Y\right)+E\left(Z\right)=630$$

7.

Giải

a/ $f(x)\geq 0,\forall x\in \mathbb{R}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{1}2xdx=x^2\Big|_0^1=1$. Do đó, $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X .

b/ $F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & ,x\leq 0\\ x^2 & ,0<x\leq 1\\ 1 & ,x>1\end{cases}$

c/ $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}.$

8.

Giải

X và Y độc lập với nhau nên mọi biến cố liên quan đến X độc lập với biến cố bất kỳ liên quan đến Y.

Ta có $P(X^2 = x_i^2) = P(X = x_i)$, tức là khả năng nhận giá trị x_i cũng chính là khả năng X^2 nhận gía trị x_i^2. Vậy

X^2	0	1	4
$P(X^2=x_i^2)$	0,3	0,4	0,3

Do X và Y độc lập nên:

$(X+Y = -1) = (X = 0) \cap (Y = -1) \Rightarrow P(X+Y = -1) = P(X = 0).P(Y=-1) = 0,12$

T- ơng tự,

$(X+Y = 0) = (X= 1) \cap (Y=-1)$

$(X+Y = 1) = (X= 0) \cap (Y=1) \cup (X= 2) \cap (Y=-1)$

$(X+Y = 2) = (X= 1) \cap (Y=1)$

$(X+Y = 3) = (X= 2) \cap (Y=1)$

Từ đó,

X + Y	-1	0	1	2	3
P(X+Y=k)	0,12	0,16	0,3	0,24	0,18

Bây giờ xét X.Y.

$(X.Y = -2) = (X= 2)\,(Y=-1)$

$(X.Y = -1) = (X= 1)\,(Y=-1)$

$(X.Y = 0) = (X= 0)[(Y=-1) \cup (Y=1)] = (X = 0).\Omega = (X = 0)$

$(X.Y = 1) = (X= 1)\,(Y=1)$

$(X.Y = 2) = (X= 2)\,(Y=1)$

Ta nhận đ- ợc bảng phân phối

X.Y	-2	- 1	0	1	2
P(X.Y=k)	0,12	0,16	0,3	0,24	0,18

9.

Giải

$$P(-\tfrac{1}{2} < X < 1) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx = \frac{7}{8}.$$

10.

Giải

Vì X là biến ngẫu nhiên liên tục nên $F(X)$ cũng sẽ là hàm liên tục trên R.

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục trên 2 điểm $x = -\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\text{Xét}\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} (F(x)) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (F(x)) \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (F(x)) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (F(x)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + bsin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ a + bsin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

11.

Giải

a) Ta thấy X có phân phối nhị thức X~ B(n,p) với n = 4, p = 0,8. X là ĐLNN rời rạc nhận 5 giá trị: 0, 1, 2, 3 , 4. Luật phân phối của X có dạng:

X	0	1	2	3	4
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(X = 0) = C_4^0(0,8)^0(0,2)^4 = 0,0016;$$

$$P(X = 1) = C_4^1(0,8)^1(0,2)^3 = 0,0256;$$

$$P(X = 2) = C_4^2(0,8)^2(0,2)^2 = 0,1536;$$

$$P(X = 3) = C_4^3(0,8)^3(0,2)^1 = 0,4096;$$

$$P(X = 4) = C_4^4(0,8)^4(0,2)^0 = 0,4096.$$

Vậy luật phân phối của X là:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

- Kỳ vọng: M(X) = np = 3,2.
- Phương sai: D(X) = npq = 0,64.