ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20172 Đề 1

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 điểm): Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn cho dưới dạng giao của mặt paraboloid $z = 30 - x^2 - y^2$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $M(3; 4; 5)$.

Câu 2 (1 điểm): Tính tích phân $\iint\limits_D |x + y|\, dxdy$, ở đó $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Câu 3 (1 điểm): Tính diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$.

Câu 4 (1 điểm): Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V xz\, dxdydz$, ở đó V là miền thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

Câu 5 (1 điểm): Tính tích phân $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Câu 6 (1 điểm): Tính tích phân đường $\int\limits_C (x + y)\, ds$, ở đó C là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 2y$.

Câu 7 (1 điểm): Chứng minh rằng trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = e^{x^2+y^2+z^2}\left[\left(2x^2yz + yz\right)\overrightarrow{i} + \left(2xy^2z + xz\right)\overrightarrow{j} + \left(2xyz^2 + xy\right)\overrightarrow{k}\right]$$

là một trường thế. Tìm hàm thế vị.

Câu 8 (1 điểm): Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^2y\, dS$, ở đó S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $1 \leq y \leq 2$.

Câu 9 (1 điểm): Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2 + z)\overrightarrow{i} + (x^2y + z)\overrightarrow{j}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$ hướng lên trên.

Câu 10 (1 điểm): Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên $\mathbb{R}$ và L là đường đi từ $O(0; 0)$ đến $A(a; b)$ thì $\int\limits_L f(x + y)(dx + dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)\, du$.

LỜI GIẢI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 20172 Đề 1

Câu 1:

Ta có: $\begin{cases} z = 30 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = z - 30 + x^2 + y^2 = 0 \\ G = z - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Xét $F = z - 30 + x^3 + y^2 = 0$ có: $\begin{cases} F'_x = 2x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(M) = 6 \\ F'_y(M) = 8 \\ F'_z(M) = 1 \end{cases}$

Vectơ pháp tuyến của mặt $F = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{a} = (6, 8, 1)$

Xét $G = z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$ có: $\begin{cases} G'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ G'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ G'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G'_x(M) = -\dfrac{3}{5} \\ G'_y(M) = -\dfrac{4}{5} \\ G'_z(M) = 1 \end{cases}$

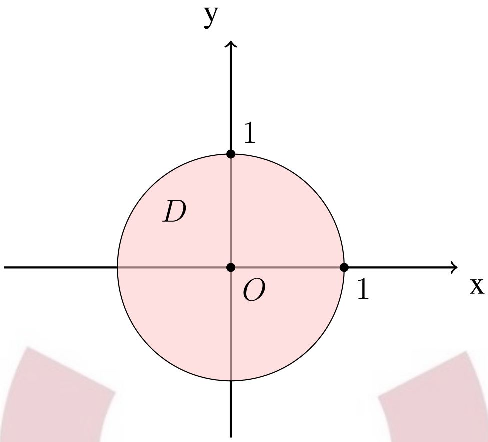
Vectơ pháp tuyến của mặt $G = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{b} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$

Coi $\overrightarrow{u}$ là vectơ chỉ phương tiếp tuyến của đường $\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$ tại điểm $M(3, 4, 5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\frac{44}{5}, -\frac{33}{5}, 0) = \frac{11}{5}(4, -3, 0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Câu 2:



Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\to$ Miền D trở thành D' $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ và $|J| = r$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D |x+y|\,dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |r\cdot(cos\theta + \sin\theta)|\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| r\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|\cdot r\,drd\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 r^2dr \int_0^{2\pi} |\sin(x+\frac{\pi}{4})|d\theta \\
&= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta\right) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

Câu 3:

Ta có: $x = y^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} x'_y = 2y \\ x'_z = 2z \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} = \sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2} = \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}$

$\Rightarrow$ Diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$ là:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dydz \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}\, dydz \end{aligned}$$

Với D là miền $y^2 + z^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}dr \\ &= 2\pi(\frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12}) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

Câu 4:

$I = \iiint\limits_V xz\, dxdydz$ trong đó V là miền: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

Có $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1$. Ta đổi biến:

$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = 1 + r\sin\varphi\sin\theta \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases}$ khi đó miền V trở thành V' $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$, $|J| = r^2\sin\theta$

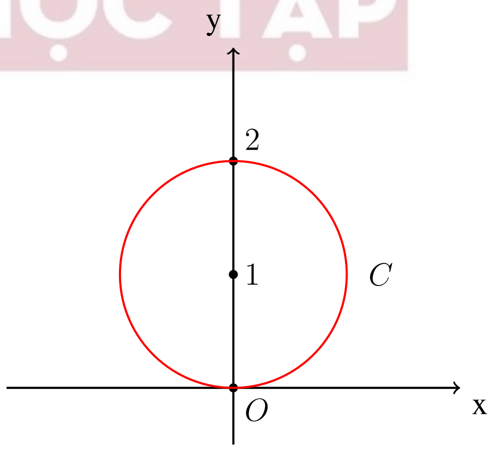
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I &= \iiint\limits_{V'} (1 + r\cos\varphi\sin\theta)(1 + r\cos\varphi)\cdot |J|\; dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} (1 + r\cos\varphi\sin\theta)\,(1 + r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\theta\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} \big(r\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta + r^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 1\big)\cdot r^2\sin\theta\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} r^2\sin\theta\, dr \\
&= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3} \quad = \quad \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Câu 5:

$$I = \int_0^1 x^6\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Đặt} \quad t = x^2 \rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} dt \quad = \quad \frac{1}{2}B(\frac{7}{2};\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(5)} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{4!} \\
&= \frac{5\sqrt{\pi}}{256}
\end{aligned}$$

Câu 6:



$$I = \int\limits_C (x+y)ds \qquad \text{trong đó} \quad C : x^2 + y^2 = 2y$$

Ta đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -\sin t \\ y'_t = \cos t \end{cases}$

Khi đó:

$$I = \int_0^{2\pi} (x(t) + y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad = \quad \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + 1)\, dt \quad = \quad 2\pi$$

Câu 7:

$$\overrightarrow{F} = e^{x^2+y^2+z^2} \left[\left(2x^2yz + yz\right) \overrightarrow{i} + \left(2xy^2z + xz\right) \overrightarrow{j} + \left(2xyz^2 + xy\right) \overrightarrow{k} \right]$$

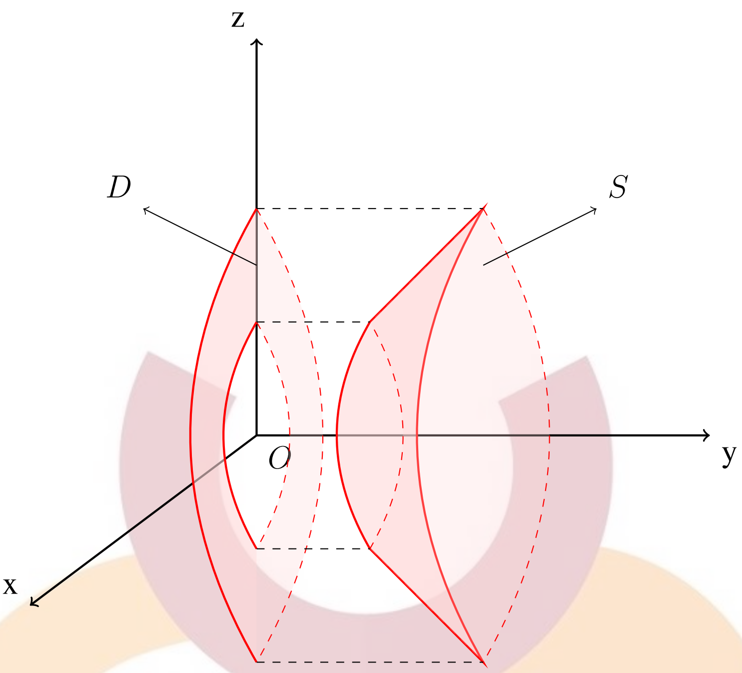
$$\Rightarrow \begin{cases} P = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2x^2yz + yz\right) \\ Q = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2xy^2z + xz\right) \\ R = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2xyz^2 + xy\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P'_y = e^{x^2+y^2+z^2} \left(z + 4x^2y^2z + 2x^2z + 2y^2z\right) \\ P'_z = e^{x^2+y^2+z^2} \left(y + 4x^2yz^2 + 2x^2y + 2yz^2\right) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} Q'_x = e^{x^2+y^2+z^2} \left(z + 4x^2y^2z + 2x^2z + 2y^2z\right) \\ Q'_z = e^{x^2+y^2+z^2} \left(x + 2xy^2z^2 + 2xy^2 + 2xz^2\right) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} R'_x = e^{x^2+y^2+z^2} \left(y + 4x^2yz^2 + 2x^2y + 2yz^2\right) \\ R'_y = e^{x^2+y^2+z^2} \left(x + 2xy^2z^2 + 2xy^2 + 2xz^2\right) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_y = Q'_x \\ P'_z = R'_x \\ Q'_z = R'_y \end{cases} \implies \overrightarrow{F} \text{ là trường thế.}$$

Tìm hàm thế vị u, ta chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0; 0; 0)$:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P(t; 0; 0)\, dt + \int_0^y Q(x; t; 0)\, dt + \int_0^z R(x; y; t)\, dt + C \\ &= \int_0^x 0\, dt + \int_0^y 0\, dt + \int_0^z e^{x^2+y^2+t^2} \left(2xyt^2 + xy\right)\, dt + C \\ &= e^{x^2+y^2+t^2} xyt \Big|_0^z + C \\ &= e^{x^2+y^2+z^2} xyz + C \end{aligned}$$

Câu 8:



Ta có: $I = \iint\limits_S x^2 y\, dS$, ở đó S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2+z^2}$, $1 \le y \le 2$

Do có: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ y'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint\limits_S x^2 y\, dS \\ &= \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dzdx \\ &= \iint\limits_D \sqrt{2}x^2\sqrt{x^2+z^2}\, dzdx \quad \text{trong đó} \quad D: \begin{cases} 1 \le x^2+z^2 \le 4 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành $D' : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{2} \cdot r \cdot (r\cos\varphi)^2 \cdot r \cdot dr$$
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4 (\cos\varphi)^2 dr$$
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{31}{5} (\cos\varphi)^2 d\varphi$$
$$= \frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$$

Câu 9:

Trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2 + z)\overrightarrow{i} + (x^2y + z)\overrightarrow{j}$

Gọi S là mặt paraboloid $z = x^2 + y^2, z \leqslant 1$ hướng lên trên,

S' là mặt paraboloid $z = x^2 + y^2, z \leqslant 1$ hướng xuống dưới.

Khi đó thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt S là:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot dS = -\iint_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS$$

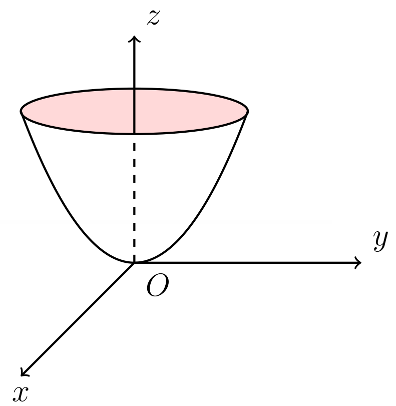
Gọi K là mặt giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên.

Khi đó: $\displaystyle\iint_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS = \iint_{S' \cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS - \iint_K \overrightarrow{F} \cdot dS$

$S' \cup K$ là mặt kín nên áp dụng công thức Ostrogradski cho mặt này ta được:

$$-\iint_{S' \cup K} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S'} = -\iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$
$$= -\iiint_D y^2 + x^2 \, dxdydz \quad \text{trong đó } D \text{ là miền bao bởi } S' \text{ và } K$$

Chuyển sang hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, |J| = r$



Miền D trở thành miền D': $\{r^2 \leqslant z \leqslant 1; 0 \leqslant r \leqslant 1; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$
Khi đó:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S'\cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS &= \iiint\limits_{D'} r^2 \cdot r\, drd\theta dz \\ &= \iint r^3 \cdot (1-r^2)\, drd\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^3(1-r^2)dr \\ &= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Vì K là mặt giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên nên ta có:

$$\iint\limits_K \overrightarrow{F} \cdot dS = \iint\limits_K (xy^2 + z)dydz + (x^2y + z)dzdx = 0$$

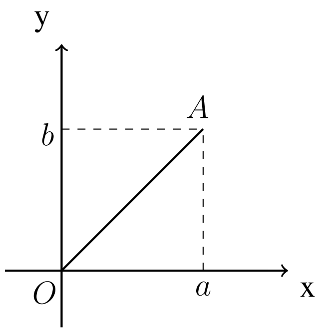
Vậy $\displaystyle\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot dS = -\iint\limits_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS = -\left(\iint\limits_{S'\cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS - \iint\limits_K \overrightarrow{F} \cdot dS\right) = -\frac{\pi}{6}$

Câu 10:

Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_L f(x+y)(dx+dy)$ có miền xác định $D = \mathbb{R}^2$

Coi: $\begin{cases} P = f(x+y) \Rightarrow P'_y = f'(x+y) \\ Q = f(x+y) \Rightarrow Q'_x = f'(x+y) \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Tích phân I không phụ thuộc vào đường đi

Chọn đường đi $OA : y = \dfrac{b}{a}x$



$\Rightarrow I = \displaystyle\int\limits_0^a f\left(x + \frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a} + 1\right) dx = \int\limits_0^a f\left[\left(1 + \frac{b}{a}\right)x\right] d\left(x + \frac{b}{a}x\right)$

Coi $u = \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)x$

khi $x = a \Rightarrow u = a + b$

khi $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)du$ (đpcm)

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ 20182 **Đề 1**

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1(1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = t\cos 2t, y = t\sin 2t, z = 3t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{2}$.

Câu 2(1đ). Tính tích phân $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^4)^2}$.

Câu 3(1đ). Xác định những điểm không phải là điểm xoáy trong trường vectơ $\overrightarrow{F} = (2xy - z^2)\overrightarrow{i} + (3x^2 + 2yz)\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.

Câu 4(1đ). Tính tích phân $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}dS$, trong đó S là mặt $2z = x^2 + y^2,\ 0 \le x, y \le 1$.

Câu 5(1đ). Tính khối lượng của một đường cong vật chất có phương trình $x = e^{\frac{t}{2}}\cos t, y = e^{\frac{t}{2}}\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ trong mặt phẳng với hàm mật độ $\rho(x, y) = x + y$.

Câu 6(1đ). Tính tích phân kép $\iint_D (y^2 - x^2)dxdy$, trong đó D là miền $0 \le 2y \le x^2 + y^2 \le 2x$.

Câu 7(1đ). Tính tích phân đường $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ định hướng dương.

Câu 8(1đ). Tính tích phân $\iiint_V zdxdydz$ trên miền V giới hạn bởi mặt $(x + 2y)^2 + 4z^2 = 1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.

Câu 9(1đ). Tính tích phân mặt $\iint_S ydzdx + zdxdy$, trong đó S là phía dưới của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1$, khi nhìn từ chiều dương trục Oz.

Câu 10(1đ). Tính tích phân đường

$$\oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

trong đó C là giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ với mặt nón $z = -\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

LỜI GIẢI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ 20182 Đề 1

Câu 1.

Ta có: $\begin{cases} x'_t = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y'_t = \sin 2t + 2t\cos 2t \\ z'_t = 3 \end{cases}$

Tại $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ có: $\begin{cases} x(t_0) = -\dfrac{\pi}{2} \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x'(t_0) = -1 \\ y'(t_0) = -\pi \\ z'(t_0) = 3 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến: $\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{-1} = \dfrac{y+\pi}{-\pi} = \dfrac{z+\frac{3\pi}{2}}{3}$

Phương trình pháp tuyến: $-\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \pi y + 3\left(z - \dfrac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -x - \pi y + 3z - 5\pi = 0$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^4)^4} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4}.4x^3dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4}d(x^4) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(1+t)^4}dt \\
&= \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4};\frac{13}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{1}{4}.\frac{\frac{9}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3!} \\
&= \frac{15}{512}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{15\sqrt{2}}{1024}\pi
\end{aligned}$$

Câu 3.

Ta có: $\vec{F} = (2xy - z^2)\vec{i} + (3x^2 + 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k} \Rightarrow rot\vec{F} = (-4y; 2z; 4x)$

Những điểm không phải điểm xoáy thì $rot\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy $O(0;0;0)$ không phải điểm xoáy của trường vecto trên.

Câu 4.

$$I=\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}.\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy \text{ với miền } D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}I&=\iint_D (1+x^2+y^2)dxdy\\&=\int_0^1 dx\int_0^1 (1+x^2+y^2)dy\\&=\int_0^1 \left(1+x^2+\frac{1}{3}dx\right.\\&=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

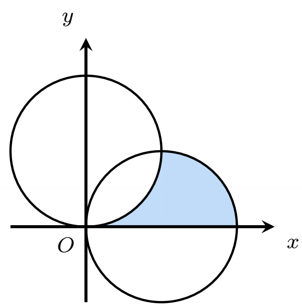
Câu 5.

Khối lượng đường cong vật chất là:

$$\begin{aligned}M&=\int_C \rho(x,y)ds=\int_C (x+y)ds\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}\cos t+e^{\frac{t}{2}}\sin t\right).\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\frac{t}{2}}dt\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t(\sin t+\cos t)dt\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}e^t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}.e^{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Câu 6.

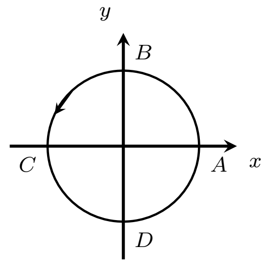
Đặt: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases}$, $|J|=r$ miền $D\to D'\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\\2\sin\varphi\le r\le 2\cos\varphi\end{cases}$



$$\begin{aligned}I=\iint_D (y^2-x^2)dxdy&=\iint_{D'}(r^2\sin^2\varphi-r^2\cos^2\varphi).rd\varphi dr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{2\sin\varphi}^{2\cos\varphi}r^3(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)dr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi).4.(\cos^4\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi\\&=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Câu 7.

Đặt: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t \\ dy = \cos t \end{cases}$



Vì vậy:

$$I = \oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BC}} + \int_{\overset{\frown}{CD}} + \int_{\overset{\frown}{DA}}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t - \cos t} dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t + \cos t} dt$$
$$= 0$$

Câu 8.

Ta có: $V : \begin{cases} (x+2y)^2 + 4z^2 = 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}\sqrt{1 - (x+2y)^2} \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

Ta có:

$$I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{1-(x+2y)^2}}{2}} z\,dz$$

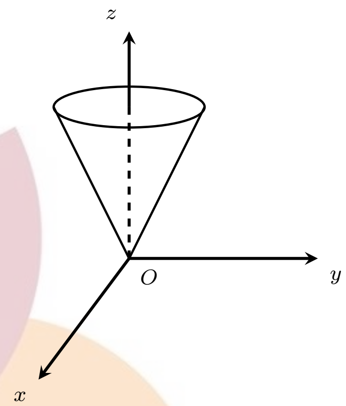
$$I = \frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} 1 - (x+2y)^2 dy$$
$$= \frac{1}{64}$$

Câu 9. Dựng mặt S' : $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ hướng theo chiều dương trục Oz

Ta cũng có:

$$\iint_{S \cup S'} = \iint_{S} + \iint_{S'}$$

Áp dụng công thức Osbogrodsky ta có:



$$\iint_{S \cup S'} = \iiint_V 2dxdydz \text{ với } V : \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\iint_{S \cup S'} = 2V = \frac{2\pi}{3}$$

Ta có:

$$\iint_{S'} = \iint_D dxdy = \pi \text{ với } D : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \iint_S = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

Câu 10.

Áp dụng công thức Stokes:

$$I = \iint_S 2(y-z)dydz + 2(z-x)dzdx + 2(x-y)dxdy$$

Trong đó S là phần mặt cầu phía trên hướng theo trục Oz

Ta có $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$\widehat{(\vec{n}, \vec{Oz})} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow |\vec{n}| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (x(y-z) + y(z-x) + z(x-y))dS = 0$$

ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ 20183 Đề 1

Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1121. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1(1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;1)$ của đường $x = t - 1$, $y = 2 - \sin t, z = e^{2t}$.

Câu 2(1đ). Tính $\iint_D (x - 2y)dxdy$, với D giới hạn bởi $x = 0, y = 0, x - y = 1$.

Câu 3(1đ). Tính $\iiint_V \frac{z^3 dxdydz}{1 + x^2 + y^2}$, trong đó V xác định bởi $x \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

Câu 4(2đ). Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{x} dx$

Câu 5(1đ). Tính $\int_{\widehat{ABC}} 2ydx - 3xdy$, trong đó ABC là đường gấp khúc, với $A(1;0), B(0;1), C(-1,0)$.

Câu 6(1đ). Tính $\iint_S (x - y + 2z)^3(dydz + dzdx + dxdy)$, trong đó S là mặt ellipsoid $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu 7(1đ). Chứng minh rằng trường vectơ:

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k})$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

Câu 8(1đ). Tìm lưu số của trường vectơ

$$\overrightarrow{F} = (2z - y)\overrightarrow{i} + (2x - z)\overrightarrow{j} + (2y - x)\overrightarrow{k}$$

dọc theo giao tuyến L của mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và $x + 2y + 2z = 0$, chiều theo L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn về phía $z > 0$.

Câu 9(1đ). Tính $\int_L \frac{(10x^4 - 4y)dx + (7x^8 - 8y^7)dy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$, trong đó L là đường $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

LỜI GIẢI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ 20183 Đề 1

Câu 1.

Điểm $A(-1;2;1)$ ứng với $t=0$

Ta có: $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2-\sin t \\ z = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -\cos t \\ z'(t) = 2e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(-1;2;1)$:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Phương trình tiếp diện tại điểm $A(-1;2;1)$:

$$(x+1)-(y-2)+2(z-1) = 0 \text{ hay } x-y+2z+1=0$$

Câu 2.

Ta có miền D : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x-1 \le y \le 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (x-2y)dy \\ &= \int_0^1 \left(xy - y^2\right)\Big|_{y=x-1}^{y=0} dx \\ &= \int_0^1 \left[-x^2 + x + (x-1)^2\right] dx \\ &= \int_0^1 (1-x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 3.

$$I = \iiint_V \frac{z^3}{1+x^2+y^2}dxdydz \ ; \ \text{miền } V: \ x \geq 0 \ ; \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

Ta có : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hình chiếu của V lên Oxy là $D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $, |J| = r, V \to V' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ r \leq z \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 \frac{z^3 r}{1+r^2}dz \\
&= \pi \int_0^1 \frac{z^4 r}{4(1+r^2)}\Big|_{z=r}^{z=1} dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{(1-r^4)r}{1+r^2}dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-r^2)rdr \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

Câu 4.

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-x^4}dx$

Đặt: $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{5}{4}}}{4t^{\frac{3}{4}}}.e^{-t}dt = \frac{1}{4}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}.e^{-t}dt = \frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

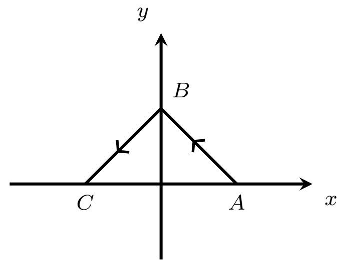
b) $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x}dx$

$$\text{Ta có: } \int_2^3 t^{-x-1}dt = \frac{t^{-x}}{-x}\Big|_2^3 = \frac{2^{-x}-3^{-x}}{x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 &= \int_0^\infty \Big(\int_2^3 t^{-x-1}dt\Big)dx \\
&= \int_2^3 \Big(\int_0^\infty t^{-x-1}dx\Big)dt \\
&= \int_2^3 \Big(\frac{t^{-x-1}}{-\ln t}\Big|_0^\infty\Big)dt \\
&= \int_2^3 \frac{dt}{t.\ln t} = \ln\Big(\ln t\Big)\Big|_2^3 = \ln\Big(\frac{\ln 3}{\ln 2}\Big)
\end{aligned}$$

Câu 5.
Bổ sung thêm đoạn CA, ta được đường kín

Áp dụng công thức Green, ta có:



$I_1 = \int_{ABCA} 2ydx - 3xdy = -\iint_D 5dxdy = -5S_{ABC} = -5$

Xét trên CA: $I_2 = \int_{CA} 2ydx - 3xdy = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$

$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = -5$

Câu 6.

$$I = \iiint_V \left(x - y + 2z\right)^3 \left(dydz + dxdz + dxdy\right); \quad S : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \text{hướng ngoài}$$

Do S là mặt kín, miền không gian giới hạn bởi S là $V : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1$

Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V \left[3\left(x - y + 2z\right)^2 - 3\left(x - y + 2z\right)^2 + 6\left(x - y + 2z\right)^2\right] dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x - y + 2x\right)^2 dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 4xz\right) dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x^2 + y^2 + 4z^2\right) dxdydz \ \ (\text{do } -2xy, -4yz, 4xz \ \text{ là các hàm lẻ})
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \dfrac{r}{2}\cos\theta \end{cases}, |J| = \frac{r^2}{2}\sin\theta, V \to V' \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 . \frac{r^2}{2}\sin\theta dr \\
&= 6.2\pi.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=1}\right) d\theta \\
&= 6\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{5} d\theta \\
&= \frac{12\pi}{5}
\end{aligned}$$

Câu 7.

$\vec{F} = \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$

Ta xét:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} &= \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\right) \\
&= \left(\frac{-2zy+2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2zx+2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2xy+2yx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right) \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế Ta có hàm thế vị:

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt \\
&= \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt + \int_0^y \frac{t}{1+x^2+t^2}dt + \int_0^z \frac{t}{1+x^2+y^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+t^2)\Big|_0^y + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+t^2)\Big|_0^z + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2) + C
\end{aligned}$$

Câu 8.

Ta có lưu số của $\vec{F}$:

$I = \int\limits_L (2z-y)dx + (2x-z)dy + (2y-x)dz$

Áp dụng công thức Stokes, ta có:

$I = \iint\limits_S 3dydx + 3dxdy + 3dzdx = 3\iint\limits_S dxdy + dydz + dzdx$

Với $S: x+2y+2z=0$ hướng về phía $z<0$ nằm trong L Ta có: $z = -\dfrac{x}{2} - y \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$

$\widehat{(\vec{n}, Oz)} > \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

$\Rightarrow I = 3\iint\limits_S \left(\dfrac{-1}{3} + \dfrac{-2}{3} + \dfrac{-2}{3}\right)dS = -5\iint\limits_S dS = -5S_S = -15\pi$

Câu 9.

Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq \pi)$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{\left(10\cos^4 t - 8\sin t\right)\left(-\sin t\right) + \left(7\cos^8 t - 1024\sin^7 t\right)\left(2\cos t\right)}{2} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (8\sin^2 t - 10\cos^4 t\sin t + 14\cos^9 t - 2048\sin^7 t)dt \\
&= 4\int_0^{\pi} \sin^2 tdt - 5\int_0^{\pi} \cos^4 t\sin tdt + 7\int_0^{\pi} \cos^9 tdt - 1024\int_0^{\pi} \sin^7 t\cos tdt \\
&= 2\pi - 2
\end{aligned}$$

ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20192 $\boxed{\textbf{Đề 2}}$

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 điểm). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại $A(-1;2;1)$ của mặt cong $4x^3+2y^2-z^4=3$.

Câu 2 (1 điểm). Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, với V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq 0$.

Câu 3 (1 điểm). Tính $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}}$ với V là miền xác định bởi $0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x \leq z,\ 0 \leq y \leq x$.

Câu 4 (1 điểm). Tính thể tích miền xác định bởi $2 \leq z \leq \sqrt{8-4x^2-y^2}$.

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5}dx$.

Câu 6 (1 điểm). Tính $\displaystyle\int_C (e^{2x}+y^2)dx+(x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y=\sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$.

Câu 7 (1 điểm). Tính $\iint\limits_S dS$, trong đó S là phần mặt

$$z=\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}) \quad \text{với} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$$

.

Câu 8 (1 điểm). Tính $\iint\limits_S x^2zdxdy$, với S là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z=1$ và $z=3$, hướng lên trên.

Câu 9 (1 điểm). Chứng minh rằng trường vectơ

$$\overrightarrow{F}=(2ye^{2x}+3)\overrightarrow{i}+(e^yz^2+e^{2x}-2yz^3)\overrightarrow{j}+(2ze^y-3y^2z^2)\overrightarrow{k}$$

là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$.

Câu 10 (1 điểm). Tính tích phân kép $\iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$, với D là miền xác định bởi $x^2-xy+y^2 \leq 1$.

LỜI GIẢI ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20192 $\boxed{\textbf{Đề 2}}$

Câu 1:

Xét $f(x,y,z) = 4x^3 + 2y^2 - z^4 - 3$

$\Rightarrow f(x,y,z) = 0$ là phương trình mặt cong đã cho

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 \\ f'_y = 4y \\ f'_z = -4z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(A) = 12 \\ f'_y(A) = 8 \\ f'_z(A) = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow (12, 8, -4)$ là 1 vector pháp tuyến tại điểm A của mặt cong đã cho.

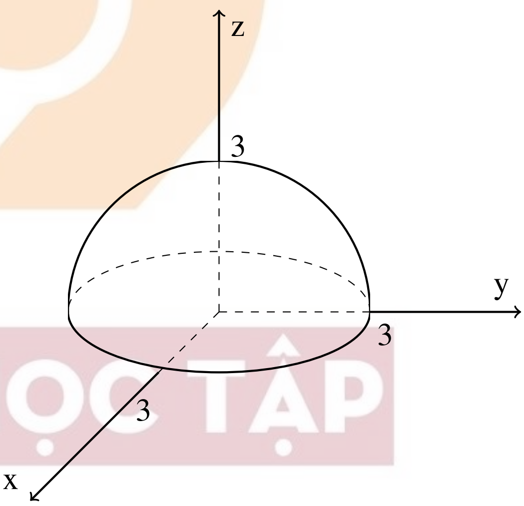
Phương trình pháp tuyến tại điểm A của mặt cong là:

$$\frac{x+1}{12} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-1}{-4}$$

Phương trình tiếp diện tại điểm A của mặt cong là:

$$12(x+1) + 8(y-2) - 4(z-1) = 0$$
$$\text{hay} \quad 3x + 2y - z = 0$$

Câu 2:



Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$

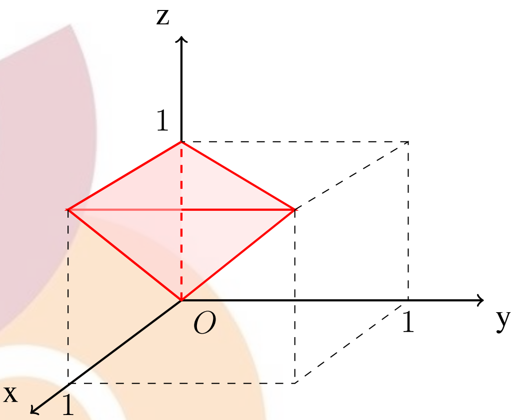
Ta có $V' \begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < r \leq 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{V'} r \cdot r^2 \cdot \sin\theta dr d\phi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^3 r^3 dr$$
$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}$$

Câu 3:

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+4z+4}} \quad \text{trong đó } V \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le x \le z \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}} dy \\
&= \int_0^1 dz \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}}.xdx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x^2+4z+4}} d(x^2+4z+4) \\
&= \int_0^1 z+2-2\sqrt{z+1}dz \\
&= \left(\frac{z^2}{2}+2z-\frac{4}{3}.(z+1)\sqrt{z+1}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{23}{6}-\frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$



Miền V là phần màu đỏ trong hình vẽ

Câu 4:

Ta có $V: 2 \le z \le \sqrt{8-4x^2-y^2}$.

$\Rightarrow$ thể tích của miền giới hạn trên là:

$$V = \iint\limits_D (\sqrt{8-4x^2-y^2}-2)dxdy$$

Trong đó V là miền : $\sqrt{8-4x^2-y^2} \ge 2 \quad \Rightarrow D: 4x^2+y^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow |J| = 2r \quad$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 2r(\sqrt{8-4r^2}-2)dr$$

$$= 2\pi(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{10}{3}) = \frac{16\pi\sqrt{2}-20\pi}{3}$$

Câu 5:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^5}dx \qquad \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}} \cdot e^t}{e^5}dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-4t}dt \qquad \text{Đặt } a = 4t \Rightarrow dt = \frac{da}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \left[(\frac{a}{4})^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-a}\right] \frac{da}{4}$$

$$= \frac{1}{32}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{32}\Gamma(\frac{2\cdot 2+1}{2})$$

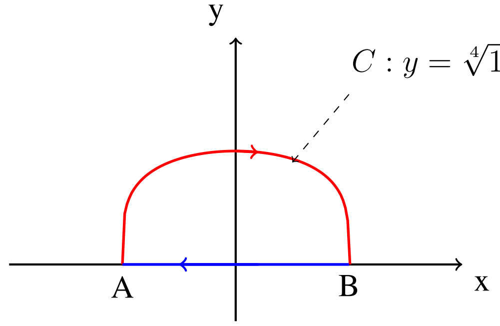
$$= \frac{1}{32}\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3}{128}\sqrt{\pi}$$

Câu 6:

$I = \int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx + (x^4+2e^y)dy$, với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$

Bổ sung thêm đoạn thẳng BA, hướng từ B tới A ta có: $C \cup BA$ là đường cong kín, hướng âm:



$$\Rightarrow I = \int\limits_C (e^{2x}+y^2)dx + (x^4+2e^y)dy$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{C \cup BA} (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy - \int\limits_{BA} (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy = I_1 - I_2$$

Áp dụng định lí Green cho I_1, ta có:

$I_1 = -\iint\limits_D (4x^3 - 2y)dxdy$ (vì $C \cup BA$ là đường cong kín , hướng âm)

Trong đó $D \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt[4]{1 - x^2} \end{cases}$

Mà D là miền đối xứng qua trục Oy và $4x^3$ là hàm lẻ theo x

$$\Rightarrow I_1 = \iint\limits_D 2y\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 2y\, dy = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ta có: $BA \begin{cases} y = 0 \to dy = 0 \\ x : 1 \to -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int\limits_{BA} (e^{2x} + y^2)dx = \int\limits_{1}^{-1} (e^{2x} + 0^2)dx = -\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2} = \frac{\pi + e^2 - e^{-2}}{2}$$

Câu 7:

$I = \iint\limits_S dS$

Trong đó S là phần mặt $z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)$ với $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 3$

Có $\begin{cases} z'_x = x^{\frac{1}{2}} \\ z'_y = y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{x + y + 1} \Rightarrow I = \iint\limits_D \sqrt{x + y + 1} dxdy$

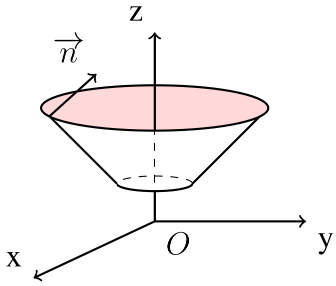
Với D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy với $D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \sqrt{x + y + 1} dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x + y} dx = \int\limits_0^3 \left[\frac{2}{3}(y + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(y + 1)^{\frac{3}{2}}\right] dy = \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{124}{15}$$

Vậy $I = \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{124}{15}$

Câu 8:

$I = \iint\limits_S x^2 z dxdy$



Với S: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và $1 \le x \le 3$, ta thấy vectơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n}$ tạo với tia $\overrightarrow{Oz}$ một góc nhọn. $\Rightarrow I = \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

Với miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy với $D: 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ miền D trở thành: $\begin{cases} 1 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int\limits_1^3 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \dfrac{242\pi}{5}$

Vậy $I = \dfrac{242\pi}{5}$

Câu 9:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= (2ye^{2x}+3)\overrightarrow{i} + (e^y z^2 + e^{2x} - 2yz^3)\overrightarrow{j} + (2ze^y - 3y^2z^2)\overrightarrow{k} \\
&= \langle P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\rangle \\
\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} &= \langle R'_y - Q'_z; P'_z - R'_x; Q'_x - P'_y\rangle \\
&= (2ze^y - 6yz^2 - 2ze^y + 6yz^2)\overrightarrow{i} + (0-0)\overrightarrow{j} + (2e^{2x} - 2e^{2x})\overrightarrow{k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vậy trường vectơ $\overrightarrow{F}$ là trường thế.

Ta tìm hàm thế vị của $\overrightarrow{F}$, chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0;0;0)$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int\limits_0^x P(x,0,0)dx + \int\limits_0^y Q(x,y,0)dy + \int\limits_0^z R(x,y,z)dz + C \\
&= 3x + ye^{2x} + z^2e^y - y^2z^3 + C
\end{aligned}$$

Câu 10:

$I = \iint\limits_D (2x^2+y^2)dxdy$. Đặt $\begin{cases} u = x - \dfrac{y}{2} \\ v = \dfrac{\sqrt{3}y}{2} \end{cases}$

$|J^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |J| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Miền D trở thành miền D': $u^2+v^2 \le 1$

Ta có:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v \\ x = u + \dfrac{y}{2} = u + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}v = u + \dfrac{v}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

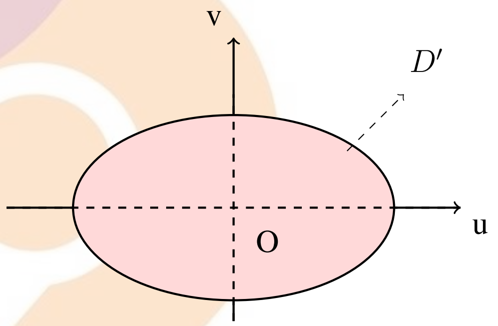
Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D'} \left[2\left(u + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}v\right)^2\right] \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}dudv \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{D'} 2u^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}uv + 2v^2 dudv \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = r\cos\phi \\ v = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$V' : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 < r \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{V'} \left[2r^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}r^2(\sin\phi + \cos\phi)\right] \cdot rdrd\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \iint\limits_{V'} r^3 \cdot \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin\phi + \cos\phi)\right) drd\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin\phi + \cos\phi)d\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \end{aligned}$$



ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20192 **Đề 3**

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại $A(-1;2;0)$ của đường $\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases}$.

Câu 2. Tính $\iiint\limits_V (z+1)dxdydz$, với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$.

Câu 3. Tính $\iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{x^2+y^2+2}$, với V là miền xác định bởi $\sqrt{x^2+y^2-1} \le z \le 1$

Câu 4. Tính diện tích phần mặt paraboloid $z = 4x - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy.

Câu 5. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2}dx$

Câu 6. Tính $\oint\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2e^y dy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = 0$ có chiều dương.

Câu 7. Tính $I = \iint\limits_S y^2 z dS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1; z = 2$.

Câu 8. Tính $I = \iint\limits_S xy^3 dydz + (x^2+z^2)dxdy$, với S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4, z \le 0$, hướng ra phía ngoài mặt cầu.

Câu 9. Tính đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l} = (1;2;-2)$ của hàm $u(x,y,z) = e^x(y^2+z) - 2xyz^3$ tại điểm $A(0;1;2)$

Câu 10. Tính tích phân kép $\iint\limits_{\mathbf{D}} (y^2 - x^4)dxdy$, với **D** là miền xác định bởi $2|x| + |x^2+y| \le 1$

Mỗi câu: 1 điểm

LỜI GIẢI ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20192 Đề 3

Câu 1:

$$\begin{cases} x = 2t - \cos t \\ y = e^{3t} + 1 \\ z = t^2 + \sin t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 + \sin t \\ y'(t) = 3e^{3t} \\ z'(t) = 2t + \cos t \end{cases}$$

Điểm $A(-1; 2; 0)$ ứng với $t = 0 \Rightarrow x'(0) = 2; y'(0) = 3; z'(0) = 1$

$$\longrightarrow \begin{cases} \textbf{Phương trình tiếp tuyến:} & \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1} \\ \textbf{Phương trình pháp diện:} & 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu 2:

$$I = \iiint\limits_V (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad |J| = r^2\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} (2 + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 4r^2 \mathrm{d}r \\ &= 2\pi.\frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Câu 3:

$$I = \iiint\limits_V \frac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + 2}$$

$V : \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$. Xét giao điểm của hai mặt: $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1$

$\Rightarrow D : x^2 + y^2 \leq 2$

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq 1 \end{cases} \quad |J| = r$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\sqrt{r^2-1}}^{1} \frac{zr}{r^2+2} dz = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{[1-(r^2-1)]r}{2(r^2+2)} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-r^2}{2+r^2} dr^2 = \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (\frac{4}{2+r^2} - 1) dr^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[4ln(x+r^2) - r^2 \right] \Bigg|_{r=1}^{r=\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} (4 \ln \frac{4}{3} - 1)$$

Câu 4:

$z = 4x - x^2 - y^2 \geq 0, (\text{D}) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4$

$\Rightarrow \begin{cases} z'_x = 4 - 2x \\ z'_y = -2y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Diện tích phần mặt paraboloid nằm trên Oxy :

$\sigma = \iint\limits_{\text{D}} \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} dxdy = \iint\limits_{\text{D}} \sqrt{1 + 4[(x-2)^2 + y^2]} dxdy$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \text{D}' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases} \quad |J| = r$

$\Rightarrow \sigma = \iint\limits_{\text{D}'} \sqrt{1+4r^2}.rdrd\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4r^2} d(1+4r^2) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$

Câu 5:

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{(1+e^x)^2} dx$

Đặt $e^x = t \to dt = tdx$

$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{-3}{4}}}{(1+t^2)} dt$

$\Rightarrow I = \beta(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{7}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{3}{4}.\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{3}{4}.\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}}{1!} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$

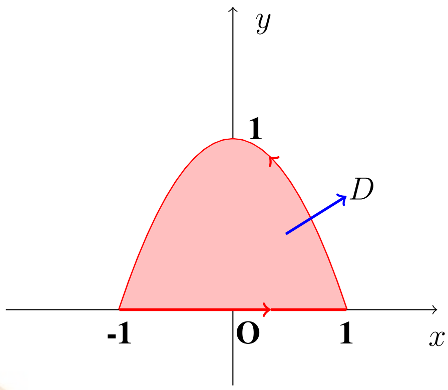
Câu 6:

$I = \oint\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2e^y dy$

Đặt $P = e^x + y^2, Q = x^2e^y$

Nhận xét: C là đường cong kín, giới hạn miền D : $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

C lấy theo chiều dương, áp dụng Green ta có:



$$I = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint\limits_D (2xe^y - 2y)dxdy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} (2xe^y - 2y)dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (2xe^y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left[2xe^{1-x^2} - 2x - (1-x^2)^2\right] dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2xe^{1-x^2} dx - \int\limits_{-1}^{1} \left[2x + (1-x^2)^2\right] dx = (-e^{1-x^2})\Big|_{-1}^{1} - \frac{16}{15} = \frac{-16}{15}$$

Câu 7:

Ta có : $I = \iint\limits_S y^2 z dS$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2}\iint\limits_D y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Với $D : 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

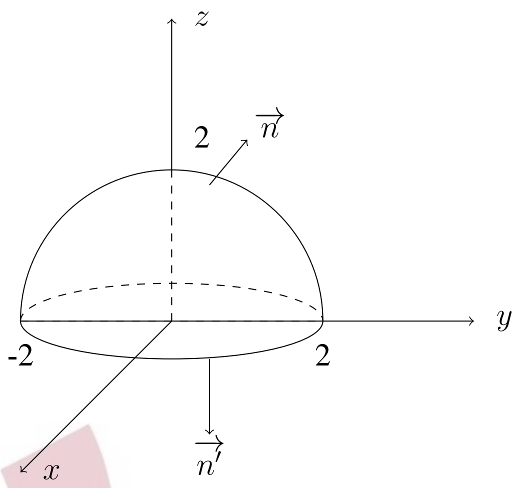
Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^3 sin^2\varphi . rdr = \sqrt{2}.\pi.\frac{31}{5} = \frac{31\pi\sqrt{2}}{5}$$

Câu 8:

$I = \iint\limits_S xy^3dydz + (x^2 + z^2)dxdy$ Bổ sung thêm mặt $S' : z = 0$, véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}$ hướng xuống dưới .

$\Rightarrow S \cup S'$ là mặt cong kín, hướng ra ngoài.



Ta có: $\iint\limits_{S\cup S'} = \iint\limits_S + \iint\limits_{S'}$ hay $I_1 = I + I_2$

Tính I_1: Theo Ostrogradsky:

$I_1 = \iiint\limits_V (y^3 + 2z)dxdydz = \iiint\limits_V 2zdxdydz$

(do $f(x, y, z) = y^3$ là hàm lẻ đối với y, miền V đối xứng qua $y = 0$)

Với V: $\begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\pi.4.1 = 8\pi$

Tính I_2: Mặt $S' : z = 0$. Do $(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{Oz}) > \dfrac{\pi}{2}$ nên mặt S' có véc tơ pháp tuyến đơn vị $\overrightarrow{n'} = (0, 0, -1)$

$\Rightarrow I_2 = -\iint\limits_D x^2dxdy$ với $D : x^2 + y^2 \leq 4$

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3cos^2\varphi dr = -4\pi$

Vậy : $I = I_1 - I_2 = 12\pi$

Câu 9:

Ta có: $u(x, y, z) = e^x(y^2 + z) - 2xyz^3$

$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = e^x(y^2 + z) - 2yz^3 \\ u'_y = 2e^xy - 2xz^3 \\ u'_z = e^x - 6xyz^2 \end{cases}$ Tại $A(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{gradu}(A) = (-13; 2; 1)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A) = \overrightarrow{gradu}(A).\dfrac{\overrightarrow{l}}{|\overrightarrow{l}|} = -13.\dfrac{1}{3} + 2.\dfrac{2}{3} + 1.\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{-11}{3}$

Câu 10:

$I = \int\limits_{D} (y^2 - x^4) dxdy$

D đối xứng qua $x = 0$ và $f(x, y) = y^2 - x^4$ là hàm chẵn đối với x

$\Rightarrow I = 2 \iint\limits_{D^+} (y^2 - x^4) dx$ với $D^+ : \begin{cases} 2|x| + |x^2 + y| \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + |v| \leq 1 \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq \dfrac{1}{2} \\ 2u - 1 \leq v \leq 1 - 2u \end{cases}$

$\Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow |J| = 1$

$$\Rightarrow I = 2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} du \int\limits_{2u-1}^{1-2u} (v - 2u^2) v dv = 2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v^3}{3} - u^2 v^2\right)\Bigg|_{v=2u-1}^{v=1-2u} du$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^3}{3} - u^2(1-2u)^2 - \frac{(2u-1)^3}{3} + u^2(2u-1)^2 du$$

$$= \frac{1}{6}$$

ĐỀ THI CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20201 Đề 2

Nhóm ngành 1 - Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1đ): Tính độ cong của đường $x = 2\cos t, y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{3}$.

Câu 2 (1đ): Tính tích phân $\iint\limits_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, x = 1$ và $y = 0$.

Câu 3 (1đ): Tính tích phân $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$.

Câu 4 (1đ): Tính tích phân $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, với V là miền xác định bởi $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \end{cases}$.

Câu 5 (1đ): Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = 1 + x^2 + y^2$ và mặt $4x^2 + y^2 = 4$.

Câu 6 (1đ): Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} x^{30}e^{-x^2}dx$.

Câu 7 (1đ): Tính $\int\limits_L 2(x^3+y^5)dx + 5x(2y^4-1)dy$, với L là đường gấp khúc ABCA nối các điểm $A(0;0), B(1;1), C(0;2)$.

Câu 8 (1đ): Tính $\int\limits_C \left(e^x\sin y + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy + e^x\cos y\right)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y-y^2}$, đi từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(0;2)$.

Câu 9 (1đ): Tính tích phân mặt $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + \left(x^2+y^2+z^3\right)dxdy$, với S là phía ngoài mặt ellipsoid $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 10 (1đ): Tính thông lượng của trường vecto $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j} + y^2(z+1)\overrightarrow{k}$ qua nửa mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$, hướng ra ngoài.

LỜI GIẢI ĐỀ CUỐI KỲ GIẢI TÍCH 2 - HỌC KỲ 20201 $\boxed{\text{Đề 2}}$

Câu 1.

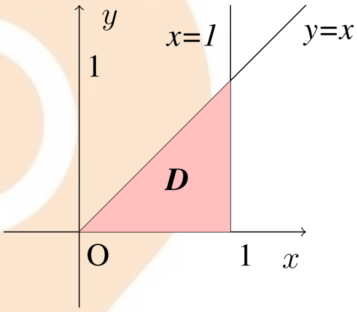
Ta có $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t; x''(t) = -2\cos t \\ y'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t; y''(t) = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$

Tại $t = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sqrt{3}; x'' = -1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; y'' = -1 \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{3}$ là:

$$C = \frac{\left|x'(\frac{\pi}{3})y''(\frac{\pi}{3}) - x''(\frac{\pi}{3})y'(\frac{\pi}{3})\right|}{\left(x'(\frac{\pi}{3})^2 + y'(\frac{\pi}{3})^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|(-\sqrt{3}).(-1) - (-1).\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\left[(-\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{10}}{25}$$

Câu 2.



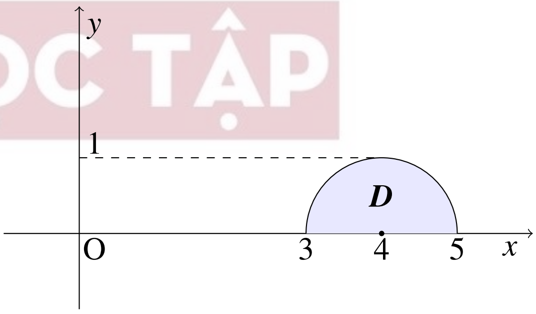
$I = \iint\limits_D xydxdy$ với D $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^x xydy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{8}$$

Câu 3.

$I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ với $D = \left\{(x,y)\middle|(x-4)^2 + y^2 \le 1; y \ge 0\right\}$

Đặt $\begin{cases} x = 4 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, D \to D' \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$



$$\Rightarrow I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left(4r + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)dr$$

$$= \int_0^\pi \left(2 + \frac{1}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)d\varphi = 2\pi + \frac{2}{3}$$

Câu 4.

$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ với $V \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \end{cases}$

Xét giao của 2 mặt cong $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z^2 = 9 \\ \sqrt{x^2+y^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = z \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ r \le z \le \sqrt{9-r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dr \int_r^{\sqrt{9-r^2}} r^3 dz = 2\pi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{9-r^2} - r\right) dr$$

$$= 2\pi \left[\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}(9-r^2)\sqrt{9-r^2} - \frac{9}{2}\sqrt{9-r^2} \right) d(9-r^2) - \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^4 dr \right]$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{1}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{9}{2}.\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{243}{20\sqrt{2}} \right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{162}{5} - \frac{81\sqrt{2}}{4} \right)$$

Câu 5.

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{r}{2}, V \to V' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r \le z \le 1 + \dfrac{r^2}{4}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \iiint_{V'} \frac{1}{2} r d\varphi dr dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{1+\frac{r^2}{4}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} r dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(r + \frac{r^3}{4}\cos^2\varphi + r^3\sin^2\varphi\right) dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{16}\cos^2\varphi + \frac{r^4}{4}\sin^2\varphi \right) \Bigg|_{r=0}^{r=2} \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(2 + \cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

Câu 6.

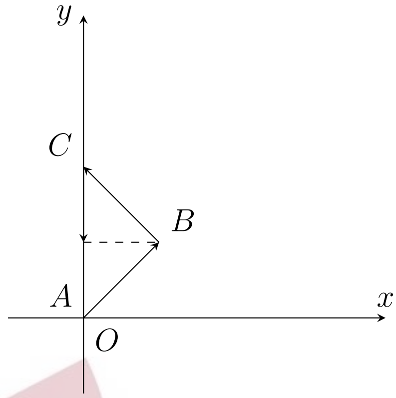
$$I = \int_0^{+\infty} x^{30}.e^{-x^2} dx$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx = 2\sqrt{t}dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{15}.e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{29}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{31}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(15 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{29!!}{2^{15}}\sqrt{\pi}$$

Câu 7.

$$I = \int\limits_L 2(x^3 + y^5)dx + 5x(2y^4 - 1)dy$$



$$\begin{cases} P(x,y) = 2(x^3 + y^5) \\ Q(x,y) = 5x(2y^4 + 1) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} P'_y = 10y^4 \\ Q'_x = 10y^4 - 5 \end{cases}$$

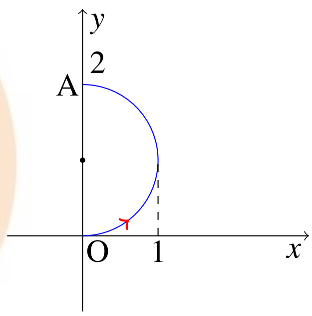
Áp dụng Green:

$$I = \iint\limits_D -5dxdy = -5S_D = -5.\frac{1}{2}.2.1 = -5$$

Câu 8.

$$I = \int\limits_C \left(e^x \sin y + y^2\right)dx + \left(2xy + e^x \cos y\right)dy + \int\limits_C x^2 dy = I_1 + I_2$$

+) Xét I_1 : Đặt $\begin{cases} P(x,y) = e^x \sin y + y^2 \\ Q(x,y) = 2xy + e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = e^x \cos y + 2y \\ Q'_x = 2y + e^x \cos y \end{cases}$



$\Rightarrow$ Tích phân I_1 không phục thuộc vào đường đi

Chọn đường đi là $OA : x = 0 \Rightarrow I_1 = \int\limits_0^2 \cos y dy = \sin(2)$

$$+)\ I_2 = \int\limits_C x^2 dy = \int\limits_0^2 \left(2y - y^2\right)dy = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \sin(2) + \frac{4}{3}$$

Câu 9:

S là mặt cong kín, hướng dương ra ngoài, theo Ostrogradsky:

$$I = \iiint\limits_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\mathrm{dxdydz}$$

Với V : $9x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Đặt $\begin{cases} y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \\ x = \frac{1}{3}r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases} \quad |J| = \frac{1}{3}r^2\sin\theta$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^3 \mathrm{dr} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3}r^2 \sin\theta.3\left[\frac{1}{9}r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \int\limits_0^3 \mathrm{dr} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{9}r^4\cos^2\theta\sin\theta + r^4\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

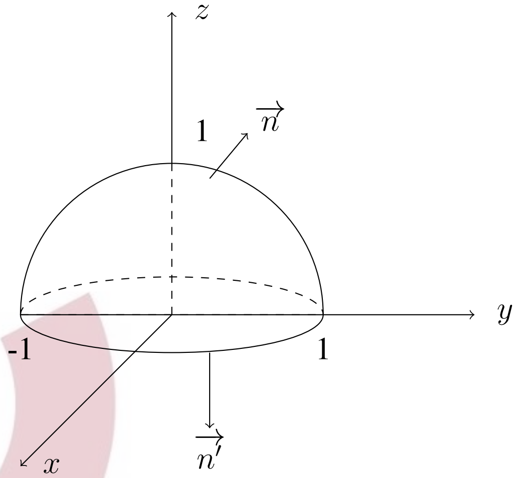
$$= 2\pi \int\limits_0^3 \frac{2}{27}r^4 + \frac{4}{3}r^4\mathrm{dr} = \frac{684\pi}{5}$$

Câu 10.

Thông lượng của trường vecto:

$$\phi = \iint\limits_S xz^2dydz + x^2ydzdx + y^2(z+1)dxdy$$

Bổ sung thêm mặt $S' : z = 0$, véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'}$ hướng xuống dưới.



$$\Rightarrow \iint\limits_{S\cup S'} = \iint\limits_S + \iint\limits_{S'} \Leftrightarrow I = \phi + I'$$

Do $S \cup S'$ kín, theo Ostrogradsky:

$$I = \iiint\limits_V (z^2 + x^2 + y^2)dxdydz$$

Với $D : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi sin\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2 sin\theta$

$$\Rightarrow V \to V' : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta = 2\pi.\frac{1}{5}.1 = \frac{2\pi}{5}$$

Tính I': Mặt $S' : z = 0$ có $\overrightarrow{n'} = (0, 0, -1)$ do $(\overrightarrow{n'}, \overrightarrow{Oz}) > \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I' = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} -y^2(z+1)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} -y^2dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$\Rightarrow I' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 -r^3 sin^2\varphi dr = \frac{-\pi}{4}$$

Vậy $\phi = I - I' = \dfrac{13\pi}{20}$