ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 HỌC KÌ 20181 – NHÓM NGÀNH 2

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right\}$ là dãy dương, đơn điệu giảm dần về 0

→ Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$$

→ Chuỗi đã cho hội tụ

Bài 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n + 1}$

Đặt $(x-1)^2 = t\,, t \geq 0$

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, với $a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1}$

Bán kính hội tụ là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{n^2 - n + 1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}\right| = 1$$

Xét $t = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

→ Chuỗi hội tụ khi $0 \leq t \leq 1$

$\rightarrow\ \ 0 \leq (x-1)^2 \leq 1$

$\rightarrow\ \ -1 \leq x-1 \leq 1$

$\rightarrow\ \ 0 \leq x \leq 2$

Miền hội tụ là $x \in [0;2]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-x^2}$

Chuỗi đã cho hội tụ $\leftrightarrow 2-x^2 < -1$

$\rightarrow x^2 > 3$

$\rightarrow x > \sqrt{3} \cup x < -\sqrt{3}$

$\rightarrow$ Miền hội tụ là $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

Câu 3: Giải phương trình vi phân

a) $y' + \frac{y}{x} = x^3$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$

$\rightarrow x.y' + y = x^4$

$\rightarrow (x.y)' = x^4$

$\rightarrow x.y = \frac{x^5}{5} + C$

$\rightarrow y = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là $y(x,C) = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$

b) $y' = \frac{-x+2y}{x}$, $y(1) = 2$

$\rightarrow y' = -1 + \frac{2}{x}.y$

$\rightarrow y' - \frac{2}{x}.y = -1$

Thừa số tích phân $p(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$. Nhân cả 2 vế với $p(x)$

$\rightarrow \frac{1}{x^2}.y' - \frac{2}{x^3}.y = \frac{-1}{x^2}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{x^2}.y\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$\rightarrow \frac{1}{x^2}.y = \frac{1}{x} + C$

$\rightarrow y = x + C.x^2$

Lại có $y(1) = 2 \rightarrow 2 = 1 + C \rightarrow C = 1$

$\rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho là $y(x) = x + x^2$

c) $(1 - y.e^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$

Ta thấy $\frac{\partial(1 - y.e^{-x})}{\partial y} = \frac{\partial(e^{-x})}{\partial x} = -e^{-x}$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện phương trình vi phân toàn phần

Giả sử $du(x, y) = (1 - y.e^{-x})dx + e^{-x}dy$

Xuất phát từ điều kiện $u'_x = 1 - y.e^{-x}$

$\rightarrow u(x, y) = \int 1 - y.e^{-x}dx = x + y.e^{-x} + g(y)$

$\rightarrow u'_y = e^{-x} + g'(y) = e^{-x}$

$\rightarrow g'(y) = 0.$ Ta chọn $g(y) = 0$

$\rightarrow$ tích phân tổng quát của ptvp đã cho là $u(x, y) = x + y.e^{-x} = C$

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$

Đặt $t = x - 3 \rightarrow x = t + 3$

$$f(t) = \frac{1}{(t + 3)^2 - 3(t + 3) + 2} = \frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{(t + 1)(t + 2)}$$

$$= \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 2} = \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{t}{2} + 1}$$

$\rightarrow$ Khai triển Maclaurin của f(t) là :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^n - \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{t^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^n.\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$\rightarrow$ Khai triển f(x) thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$ là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(x - 3)^n.\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Câu 5: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm sau trên R

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}}$$

Khi $n \to +\infty$: $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4}} \sim \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ là chuỗi hội tụ

→ chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên R

Câu 6: Khai triển hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π

$$f(x) = x - 2\pi, \pi < x < 3\pi$$

Ta khai triển chuỗi fourier $g(x) = x, -\pi < x < \pi$ tuần hoàn chu kì 2π

$g(x)$ là hàm số lẻ → a_0, a_n đều bằng 0

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}.\left(\frac{-x.\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}.\frac{\pi.(-1)^{n-1}}{n} = \frac{2.(-1)^{n-1}}{n} \qquad \{\cos n\pi = (-1)^n\}$$

→ Chuỗi fourier của g(x) là

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{2}{n}.\sin nx$$

Theo định lí Dirichlet, chuỗi fourier tại những điểm không xác định là :

$$F(-\pi) = \frac{f(-\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

$$F(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

$$\to F(x) = \begin{cases} 0, \text{ với } x = -\pi \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{2}{n}.\sin nx, \text{ với } -\pi < x < \pi \\ 0, \text{ với } x = \pi \end{cases}$$