# ĐỀ THI GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20182 NHÓM NGÀNH 2 K63

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{n}} - 1)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{n}} - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1\right)$$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Khi $n \to +\infty$ : $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1\right) \sim \frac{\ln 3}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln 3}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi hội tụ do $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

→ chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

Câu 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Áp dụng tiêu chuẩn cauchy, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2.e^{-1} < 1$$

→ Chuỗi đã cho hội tụ

Câu 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$

Đặt $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 = t \ \ (t \geq 0)$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}.t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$

Bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n}{n^2-2} : \frac{n+1}{(n+1)^2-2}\right|$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n[(n+1)^2-2]}{(n^2-2)(n+1)}\right| = 1$$

Tại $t = 1$ : khi $n \to +\infty$ $\frac{n}{n^2 - 2} \sim \frac{1}{n}$ phân kỳ. Suy ra chuỗi hội tụ khi chỉ khi $t \in [0,1)$

Xét $0 \le \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 < 1$

$\to -1 < 2 - \frac{1}{x} < 1$

$\to \ 1 < \frac{1}{x} < 3$

$\to \frac{1}{3} < x < 1$

Suy ra miền hội tụ là $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 4: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{x}{x+4}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 1$

Đặt $t = x - 1 \ \to x = t + 1$

$\to f(t) = \frac{t+1}{t+5} = 1 - \frac{4}{t+5} = 1 - \frac{4}{5} . \frac{1}{\frac{t}{5} + 1}$

Khai triển maclaurin $f(t)$tại $t = 0$ là

$$1 - \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n . t^n$$

Suy ra chuỗi taylor của $f(x)$ tại $x = 1$ là

$$1 - \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n . (x-1)^n$$

Câu 5: Giải phương trình vi phân

$$\sqrt{x+1} dy + y . \ln^2 y \, dx = 0$$

$\to \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = -\frac{dy}{y . \ln^2 y}$

Tích phân 2 vế

$\to \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int -\frac{dy}{y . \ln^2 y}$

$\to 2\sqrt{x+1} + C = \frac{1}{\ln y}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x, y, C) = 2\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\ln y} + C = 0$

Câu 6: Giải phương trình vi phân

$$(x.y' - 1)\ln x = 2y$$

$\rightarrow x.\ln x.y' - 2y = \ln x$

$\rightarrow y' - \dfrac{2y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x}$

thừa số tích phân là

$p(x) = e^{\int -\frac{2dx}{x\ln x}} = e^{-2\ln\ln x} = \dfrac{1}{\ln^2 x}$

nhân cả 2 vế với $p(x)$, ta có:

$\dfrac{1}{\ln^2 x}.y' - \dfrac{2\ln x}{x\ln^3 x}.y = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$

$\rightarrow \left(\dfrac{1}{\ln^2 x}.y\right)' = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$

lấy tích phân 2 vế

$\rightarrow \dfrac{1}{\ln^2 x}.y = -\dfrac{1}{\ln x} + C$

$\rightarrow y = -\ln x + C.\ln^2 x$

Câu 7: Giải phương trình vi phân toàn phần sau

$$(y^3 + x^3.(1 + \ln y))dy + 3x^2.(1 + y\ln y)dx = 0$$

Ta có :

$(y^3 + x^3.(1 + \ln y))'_x = \left(3x^2.(1 + y\ln y)\right)'_y = 3x^2.(1 + \ln y)$

$\rightarrow$ thỏa mãn điều kiện ptvp toàn phần

$u(x, y) = \displaystyle\int 3x^2.(1 + y\ln y)\,dx = x^3.(1 + y\ln y) + g(y)$

$\rightarrow\ u'_y = x^3.(1 + \ln y) + g'(y) = (y^3 + x^3.(1 + \ln y))$

$\rightarrow g'(y) = y^3.$ Chọn $g(y) = \dfrac{y^4}{4}$

$\rightarrow$ Tích phân tổng quát là $u(x, y) = x^3.(1 + y\ln y) + \dfrac{y^4}{4} = C$

Câu 8: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1}$

Xét $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{3/2}} = 0$ ( do hàm loga < hàm lũy thừa khi tiến ra vô cực )

$\rightarrow \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1} < \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3 + 3n^2 + 1}$ kể từ n nào đó trở đi

$\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3 + 3n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ khi $n \rightarrow +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ $\rightarrow$ chuỗi đã cho hội tụ

Câu 9: Khai triển fourier của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, -\pi < x < 0 \\ 2, 0 < x < \pi \end{cases}, \text{tuần hoàn chu kì } 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} 2xdx\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x.\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x.\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx - nx.\sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{2\cos nx + 2nx.\sin nx}{n^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1 + \cos n\pi}{n^2} + \frac{2.\cos n\pi - 2}{n^2}\right) = \frac{3.(-1 + (-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{nếu n chẵn} \\ -\frac{6}{\pi n^2} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x.\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x.\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{nx\cos nx - \sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{-2nx\cos nx + \sin nx}{n^2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{n\pi\cos n\pi}{n^2} + \frac{-2n\pi\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{1}{n} & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

Suy ra chuỗi fourier của f(x) tuần hoàn chu kì 2π là

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{2n}.\sin 2nx+\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{6}{\pi(2n+1)^2}.\cos(2n+1)x+\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\,x$$

Bài 10: Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^{n-1}}$$

Xét $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}.n$

chuỗi này có miền hội tụ là $|x|<1$

với mọi $x\in(-1;1)$, tổng của chuỗi là khả tích trên $[0,x]$

Ta có:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}.ndt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^{n-1}.ndt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$\to S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\to\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^n}=\frac{1}{5}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{16}$$