Lời giải đề thi thử cuối kì

Câu 1 (1 điểm):

- **(0.5)**

  Đặt $F(x,y,z) = 2x^4 + y^2 - z^3 - 7 \implies$ tại $A \begin{cases} F'_x = 8x^3 = 8 \\ F'_y = 2y = 4 \\ F'_z = -3z^2 = -3 \end{cases}$

- **(0.5)**

  Phương trình tiếp diện tại A: $8(x-1) + 4(y-2) - 3(z+1) = 0$

  $$\implies 8x + 4y - 3z = 19$$

  Phương trình pháp tuyến tại A: $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{-3}$

Câu 2 (1 điểm):

- **(0.5)**

  Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2,2,1) \implies \overrightarrow{l} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$

  $$\overrightarrow{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(2x; \frac{1}{y+e^z}; \frac{e^z}{y+e^z}\right)$$

  $$\implies \overrightarrow{grad}u(A) = \left(-2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

- **(0.5)**

  $$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(A) = \overrightarrow{grad}u(A) \cdot \overrightarrow{l} = -2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$$

Câu 3 (1 điểm):

- **(0.5)**

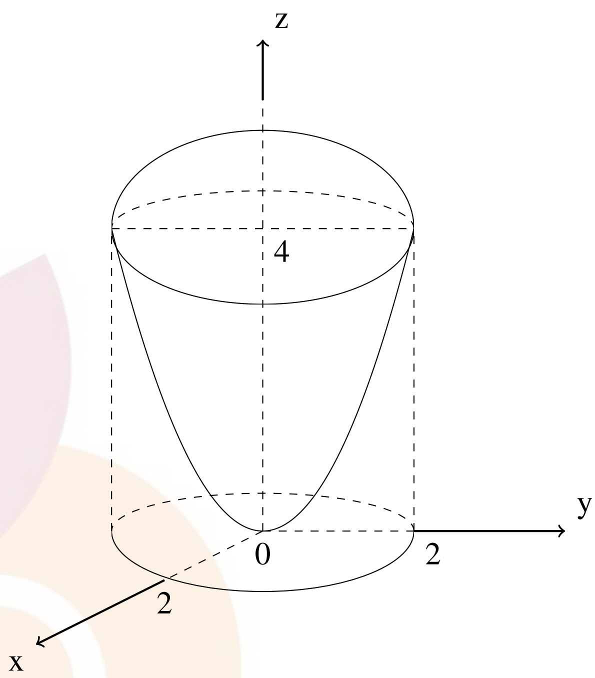
Giao của 2 mặt: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20 \\ x^2+y^2=z \end{cases}$

là $\begin{cases} z=4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$

$\rightarrow |J|=r$

Khi đó $V'\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0<r\le 2 \\ r^2\le z\le\sqrt{20-r^2} \end{cases}$



- **(0.5)**

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V'} z\cdot r dr d\varphi dz \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{r^2}^{\sqrt{20-r^2}} z\cdot r dz \\ &= 2\pi\int\limits_0^2 \frac{r}{2}(20-r^2-r^4)dr \\ &= 2\pi\cdot\frac{38}{3}=\frac{76\pi}{3} \end{aligned}$$

Câu 4 (1 điểm):

- **(0.5)**

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\tan x}dx$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow x=\arctan t\Leftrightarrow dx=\dfrac{1}{t^2+1}dt$

Khi $x\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$ thì $t\rightarrow+\infty$

Khi $x=0$ thì $t=0$

- **(0.5)**
$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{t^2+1}\mathrm{d}(t^2) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(t^2)^{-\frac{1}{3}}}{t^2+1}\mathrm{d}(t^2)$$
$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$
Vậy $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Câu 5 (1.5 điểm):

- **(0.5)**
Ta có: $I = \int\limits_C \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2+y^2+1}dx + \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+y^2+1}dy = \int\limits_C Pdx + Qdy$ có tập xác định $D = [-1,1]\times\mathbb{R}$ Hàm số $u(x,y) = ln(x^2+y^2+1)+x+y$ có:
- **(0.5)**

$$u'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1} + 1 = \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2+y^2+1} = P$$
$$u'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} + 1 = \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+y^2+1} = Q$$

Ta thấy $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ trong miền $D = [-1,1]\times\mathbb{R}$

- **(0.5)**
Lại có C là đường cong $y = \sqrt[4]{1-x^2}$ đi từ điểm $A(-1,0)$ đến điểm $B(1,0)$
$\Rightarrow I = u(B) - u(A) = 2$
Vậy $I = 2$

Câu 6:
Cách 1:

- **(0.5)**
S là mặt : $z^2 = x^2+y^2$; $0 \le z \le 2$ hướng xuống dưới.

Ta có : $z^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2 = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{N} = (2x; 2y; -2z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{||\overrightarrow{N}||} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

- **(0.5)**

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= \iint\limits_S (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot y + \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot z)dS \\ &= \iint\limits_S \frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS\end{aligned}$$

- **(0.5)**
  Mà $x^2+y^2-z^2=0$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_S 0dS = 0$$

Cách 2:

- **(0.5)**
  Bổ sung thêm mặt $K: \ z = 2; \, x^2+y^2 \leq 4$ hướng lên trên
  $\Rightarrow H = S \cup K$ là mặt kín hướng ra ngoài.

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= \iint\limits_H xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint\limits_K xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= I_1 - I_2\end{aligned}$$

- **(0.5)**
  Áp dụng Ostrogradski cho I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iiint\limits_V [(x)'_x + (y)'_y + (z)'_z]dxdydz \\
&= \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz \\
&= 3V = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2^2 = 8\pi
\end{aligned}
$$

- **(0.5)**

  Vì mặt $K: z = 2;\ x^2 + y^2 \le 4$ hướng lên trên

  $\Rightarrow$ hình chiếu của K lên Oxz và Oyz bằng 0

  $\Rightarrow \iint\limits_H xdydz + ydzdx = 0 \Rightarrow I_2 = \iint\limits_H zdxdy$

  mà $z = 2$, hướng lên nên góc giữa Oz và $\overrightarrow{n}$ nhỏ hơn $\dfrac{\pi}{2}$, ta có:

  $I_2 = \iint\limits_D 2dxdy$ với $D: x^2 + y^2 \le 4$

  $\Rightarrow I_2 = 2S(D) = 2\cdot\pi\cdot 2^2 = 8\pi$

$$\Rightarrow I = I_1 - I_2 = 8\pi - 8\pi = 0$$

Câu 7:

- **(1)**

$$\overrightarrow{F} = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + 2xy^2ze^{x^2z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + 2ye^{x^2z}\right)\overrightarrow{j} + \left(x^2y^2e^{x^2z} + 2z\right)\overrightarrow{k}$$

  Ta có:

$$P = \frac{y}{1+x^2y^2} + 2xy^2ze^{x^2z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} + 4xyze^{x^2z} \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial z} = (2xy^2 + 2x^3y^2z)e^{x^2z} \end{cases}$$

$$Q = \frac{x}{1+x^2y^2} + 2ye^{x^2z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} + 4xyze^{x^2z} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2ye^{x^2z} \end{cases}$$

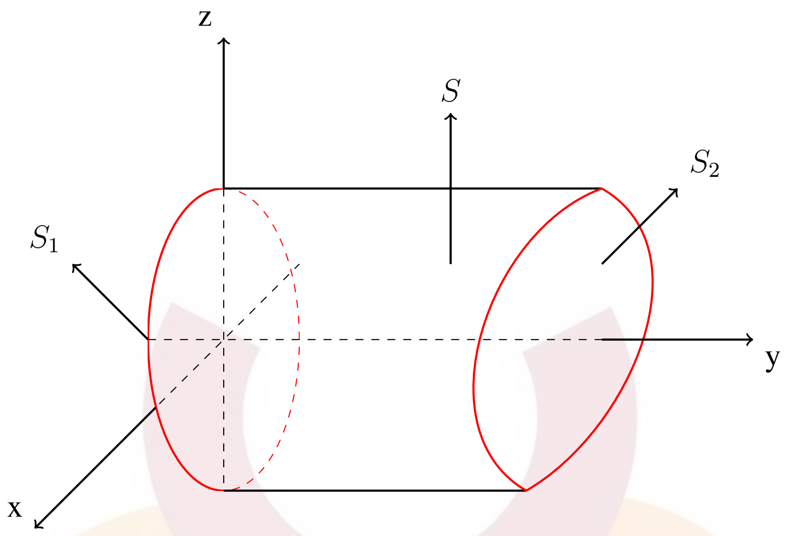
$$R = x^2y^2e^{x^2z} + 2z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = (2xy^2 + 2x^3y^2z)e^{x^2z} \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial y} = 2x^2ye^{x^2z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{F} \text{ là trường thế.}$$

- **(0.5)**
  Tìm hàm thế vị u. Ta chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0; 0; 0)$.

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P(t;0;0)\,dt \quad + \quad \int_0^y Q(x;t;0)\,dt \quad + \quad \int_0^z R(x;y;t)\,dt \quad + \quad C \\ &= \int_0^x 0\,dt \quad + \quad \int_0^y \frac{x}{1+x^2t^2} + 2t\,dt \quad + \quad \int_0^z x^2y^2e^{x^2t} + 2t\,dt \quad + \quad C \\ &= 0 \quad + \quad \arctan(xy) + y^2 \quad + \quad y^2e^{x^2z} - y^2 + z^2 \quad + \quad C \\ &= \arctan(xy) \quad + \quad y^2e^{x^2z} \quad + \quad z^2 \quad + \quad C. \end{aligned}$$

Câu 8 (1.5 điểm):



- **(0.5)**

  Gọi S_1 là phần mặt xác định bởi $y = 0$ và $x^2 + z^2 \leq 9$.
  Gọi S_2 là phần mặt xác định bởi $x + y = 5$ và $x^2 + z^2 \leq 9$.
  Gọi S_0 là phần mặt nằm trên hình trụ $x^2 + z^2 = 9$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $y = 0$ và $x + y = 5$.

  Tích phân mặt cần tính là:
  $$I = \iint\limits_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} yz^2\, dS = \iint\limits_{S_0} + \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2}$$

- **(0.5)**

  Trong đó:
  $$I_1 = \iint\limits_{S_1} = \iint\limits_{S_1} 0z^2\, dS = 0.$$
  $$I_2 = \iint\limits_{S_2} = \iint\limits_{S_2} yz^2\, dS = \iint\limits_{S_1} (5-x)z^2\sqrt{1 + (y'_z)^2 + (y'_x)^2}\, dzdx = \iint\limits_{S_1} \sqrt{2}(5-x)z^2\, dzdx = \iint\limits_{S_1} 5\sqrt{2}z^2\, dzdx$$
  S_1 là hình chiếu của S_2 lên Ozx, S_1 đối xứng qua trục Oz.

  Đổi biến $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow S_1 = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$ và $|J| = r$.

  $$I_2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 5\sqrt{2}r^3\cos\varphi^2 = \frac{405\sqrt{2}}{4}\pi.$$

- **(0.5)**
  $I_3 = \iint\limits_{S_0} = \iint\limits_{S_0} yz^2\, dS$
  Ta có thể chia S_0 làm 2 phần nằm trên Oxy và nằm dưới Oxy, cả 2 phần này đều có hình chiếu lên Oxy là $D = \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 5 - x \end{cases}$ và $(z'_x)^2 = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$; $(z'_y)^2 = 0$ do đó ta có:

  $$\begin{aligned} I_3 &= 2\iint\limits_{D} y(9 - x^2) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy \\ &= 2\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{0}^{5-x} 3y\sqrt{9 - x^2} dy \\ &= 3\int\limits_{-3}^{3} (5 - x)^2\sqrt{9 - x^2} dx = \frac{2943\pi}{8} \end{aligned}$$

  Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = \pi\left(\dfrac{2943 + 810\sqrt{2}}{8}\right)$.