

Bài tập tuần 1

1. Kiểm tra tính đúng của các mệnh đề sau

a) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow A$ b) $(A \wedge \overline{B}) \rightarrow A$ c) $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow C$

2. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương logic

a) $(A \leftrightarrow B)$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ b) $(\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \wedge B$ và $A \wedge B$

3. Cho A, B, C là 3 mệnh đề thỏa mãn các mệnh đề sau đều đúng

$$(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$$

$$(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$$

Chứng minh rằng $A \rightarrow B$ là mệnh đề đúng

4. Cho $A = [1; 4)$, $B = (1; 3)$, $C = [2; 3]$. Xác định $(A \cap B) \setminus C$ và $(A \cup B) \setminus C$

5. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ. Chứng minh rằng

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

6. Xác định tính đúng đắn của mệnh đề sau

$$\text{"Do } A \cup (B \setminus A) = A \cup B \text{ nên } A \cup (B \setminus A) = A \cap B\text{"}$$

7. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm xác định trên \mathbb{R} . Đặt

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$$

Xác định tập nghiệm của các phương trình sau

a) $f^2(x) = 0, g^2(x) = 0$ b) $\frac{f^2(x) + g^2(x)}{f(x)} = 0$

8. Cho các tập A, B thỏa mãn

$$B \cup A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, a\}$$

$$B \setminus A = \{4\}$$

a) Xác định các giá trị mà a có thể nhận

b) Với $a = 5$, tìm A và B

9. Các ánh xạ sau có là đơn ánh? Toàn ánh? Song ánh?

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto 3x + 1$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y, x + y)$$

10. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$ và tập A xác định bởi

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \right\}$$

Xác định $f(A)$ và $f^{-1}(A)$

11. Cho $f(x) = x^3 - x$. Biết $f^{-1}(\{0\}) = \{x_1, x_2, x_3\} = A$, $f(x_1 + 1) = 6$ và x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$. Xác định A

12. Cho ánh xạ

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + 3y, -x + my)$$

Tìm m để f là một song ánh

13. Chứng minh $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ với phép toán $*$ lập thành nhóm Abel biết rằng

$$x * y = x + y - 2xy \quad (\forall x, y \in X)$$

Nếu $X = \mathbb{R}$ thì $(X, *)$ có là nhóm Abel nữa không?

14. Chứng minh G gồm các số chia hết cho 3 cùng với phép cộng thông thường lập thành một nhóm Abel

15. Cho $(G, *)$ là một nhóm có phần tử trung hòa e . Biết rằng $x * x = e$ với mọi $x \in G$. Nhóm $(G, *)$ có là một nhóm Abel?

16. Tìm nghiệm phức của các phương trình sau

a) $z^2 - z + 1 = 0$

b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$

c) $z^4 + 2iz^2 - 5 = 0$

17. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng chính tắc

a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{12}$

b) $z = (3 + 3i)^{2019}$

c) $z = (a + bi)^{2020} \quad (ab \neq 0)$

d) $z^7(\sqrt{3} + i) = 1 + i$

18. Cho $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2020}$ là 2021 căn bậc phức 2020 của 1. Tính

a) $A = \sum_{i=0}^{2020} \varepsilon_i$

b) $B = \prod_{i=1}^{2020} (1 - \varepsilon_i)$

c) $C = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2020} \frac{1}{(2 + \varepsilon_i)(2 + \varepsilon_j)}$

19. Cho $z = \frac{\sqrt{3} - i}{3}$. Tính $S = z^{2020} + (\bar{z})^{2020}$

20. Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 - 5z + 6 = 0$. Tính

a) $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$

b) $B = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4$