ĐỀ THI THỬ GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành 1 **Thời gian làm bài: 60 phút**

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(\ln n)^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)^{2n\ln n}$

Câu 2. (2 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-e^x)^p}$

Câu 3. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{x+y+3}=0$

b) $(x^2+1).y'+y=x^2+x+1$

c) $(x^2+3\ln y)ydx=xdy$

Câu 4. (1 điểm).Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì 1 được xác định như sau

$$f(x)=min\{x,1-x\}\,\forall x\in[0;1]$$

Câu 5. (1 điểm).Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy số dương và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^{\frac{n-1}{n}}$ cũng hội tụ.

——— *Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi* ———

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Thi thử Giữa kỳ 20222

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) Đặt $u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right), n \geq 1$.

+) Vì $\cos\frac{1}{n}, \forall n$ nên $u_n < 0, \forall n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi âm, tức là một chuỗi có số hạng không đổi dấu. Vậy có thể áp dụng được các tiêu chuẩn so sánh với chuỗi này.

+) Ta có: $u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n} - 1 + 1\right) = \ln\left(1 - \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - 2\sin^2\frac{1}{2n}\right)$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{1}{2n} \to 0$, do đó: $2\sin^2\frac{1}{2n} \sim 2.\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$

Suy ra $u_n \sim \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$ khi $n \to \infty$.

+) Chuỗi $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ vì $(\alpha = 2 > 1)$, do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. (Theo tiêu chuẩn so sánh)

b) Đặt $u_n = (-1)^n\frac{n^2}{(\ln n)^n}, n \geq 3$

+) Ta có: $|u_n| = \frac{n^2}{(\ln n)^n}$.

+) Ta có: $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{2}{n}\ln n}}{\ln n}$

Khi $n \to \infty$ thì $\frac{2}{n}\ln n \to 0$, $e^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1$.

+) Theo tiêu chuẩn Cauchy, áp dụng cho chuỗi dương, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2 + \sqrt{n} + 1}{4n^2 + \cos n}\right)^{2n\ln n}$

Đặt $u_n = \left(\dfrac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)^{2n\ln n}, n \geq 1.$

+) Ta có: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

+) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\dfrac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}}^{2n\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)^{2\ln n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)2\ln n}$

$= 0$ (Do $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right) = \ln(\frac{3}{4}) < 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right) 2\ln n = -\infty$)

+) Vậy chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Cauchy)

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)}\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)^n$

+) Điều kiện: $x \neq 1$

Ta đặt $X = \dfrac{2x+1}{1-x}$ chuỗi đã cho có dạng chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)} X^n.$

+) Đặt $a_n = \dfrac{n+2}{n(n-1)} \forall n \geq 2$

Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{n+3}{n(n+1)} \dfrac{n(n-1)}{n+2}\right| = 1$

Suy ra với $X \in (-1; 1)$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

+) Với $X = 1$ thì $S_n(1) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)}$ là chuỗi số dương

Khi $n \to \infty$ thì $0 < \dfrac{n+2}{n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n}$

Mà $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ $\Rightarrow$ chuỗi phân kỳ (theo tiêu chuẩn so sánh)

+) Với $X = -1$ thì chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+2}{n(n-1)}$ là chuỗi đan dấu

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)} = 0$ (1) .

+) Đặt $b_n = \dfrac{n+2}{n(n-1)}$. Xét $f(x) = \dfrac{x+2}{x(x-1)} \forall x \geq 2$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2-x-(x+2)(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \dfrac{-x^2-4x+2}{(x^2-x)^2}$

$\Rightarrow \forall x \geq 2$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ nghịch biến $\forall x \geq 2$

$\Rightarrow b_n$ là dãy giảm (2).

Từ (1), (2) $\rightarrow$ Chuỗi hội tụ (theo tiêu chuẩn Lebnitz)

Vậy $X \in [-1;1)$ chuỗi $S_n(X)$ hội tụ.

$\Leftrightarrow -2 \leq x < 0$ và $x \neq 1$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-2;0)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-e^x)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p}$

+) Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$:

Tập xác định: $n - e^x > 0 \, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2 \leftrightarrow x < \ln 2$

Tại mỗi điểm $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 < \ln 2$ xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p} = \infty \to$ Chuỗi đã cho phân kỳ (Vi phạm điều kiện cần)

+) Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$:

Tập xác định: $x < \ln 2$

Tại mỗi điểm $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 < \ln 2$ xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p}$ là chuỗi đan dấu

Đặt $a_n = (n-e^x)^{-p}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{a_n\}$ là dãy giảm $\to$ Chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Leibnitz)

+) Với $p \in \mathbf{Z}, p \leq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p} \neq 0 \to$ Chuỗi đã cho phân kỳ (Vi phạm điều kiện cần)

+) Với $p \in \mathbf{Z}, p > 0$:

Tập xác định: $n - e^x \neq 0 \, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2 \leftrightarrow x \neq \ln k,\ k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2$

Tại mỗi điểm $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\ln k \,| k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2\}$ xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-e^x)^{-p}$

Đặt $b_n = (n-e^x)^{-p}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\{b_n\}$ là dãy giảm $\to$ Chuỗi đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Leibnitz)

Vậy:

- Với $p \in \mathbf{Z}, p > 0$, MHT= $\mathbb{R} \setminus \{\ln k \,| k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2\}$
- Với $p \notin \mathbf{Z}, p > 0$, MHT= $(-\infty; \ln 2)$
- Với $p \in \mathbf{Z}, p < 0$, MHT= $\emptyset$
- Với $p \notin \mathbf{Z}, p < 0$, MHT= $\emptyset$

Câu 3. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{x+y+3} = 0$

+) Điều kiện: $x \neq 0, x+y+3 \neq 0$

+) Phương trình tương đương: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+3}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+3}{x} + 1$

Đặt $\dfrac{y+3}{x} = u \Rightarrow y = ux - 3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = u'x + u$

$\Rightarrow u'x + u = u + 1 \Rightarrow \dfrac{xdu}{dx} = 1 \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + c \,(c \in \mathbb{R})$

+) Từ đó ta suy ra: $\dfrac{y+3}{x} = \ln|x| + c \,(c \in \mathbb{R})$

+) Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{y+3}{x} = \ln|x| + c \,(c \in \mathbb{R}, x \neq 0, x+y+3 \neq 0)$$

b) $(x^2+1).y' + y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y' + \dfrac{y}{x^2+1} = \dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$

+) Đây là PTVP tuyến tính bậc nhất với $p(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ và $q(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$

+) Ta có: $e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{\arctan x}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}.y\right) = e^{\arctan x}.\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$

$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\frac{x^2+x+1}{1+x^2}dx$

$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\left(1 + x.\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = \displaystyle\int e^{\arctan x}.\left(x' + x.(\arctan x)'\right)dx$

$\Rightarrow e^{\arctan x}.y = e^{\arctan x}.x + C$

$\Rightarrow y = \dfrac{e^{\arctan x}.x + C}{e^{\arctan x}} = x + \dfrac{C}{e^{\arctan x}}(C \in R)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình : $y = x + \dfrac{C}{e^{\arctan x}}(C \in R)$

c) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$ (1)

Đặt $u = \ln(y)$. Phương trình (1) trở thành: $(x^2+3u)dx - xdu = 0$. (2)

Đặt $M = x^2 + 3u, N = -x$, ta có $Mdx + Ndu = 0$.

Thừa số tích phân: $\dfrac{I'(x)}{I(x)} = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\delta M}{\delta u} - \dfrac{\delta N}{\delta x}\right) = -\dfrac{4}{x} \Rightarrow I(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

Nhân cả 2 vế của phương trình (2) với $I(x)$, ta được $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3u}{x^4}\right)dx - \dfrac{du}{x^3} = 0$.

Gọi nghiệm cần tìm là $g(x,u) = C \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\delta g}{\delta x} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3u}{x^4} \ (*) \\ \dfrac{\delta g}{\delta u} = -\dfrac{1}{x^3} \end{cases}$

(*) $\Rightarrow g(x,u) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{u}{x^3} + k(u) = C \Rightarrow \dfrac{\delta g}{\delta u} = -\dfrac{1}{x^3} + k'(u) \Rightarrow k'(u) = 0$.

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình (2) là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{u}{x^3} = C$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình vi phân (1) là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(y)}{x^3} = C$.

Câu 4. (1 điểm).

+) Nhận xét: $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1-x & \text{khi } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$

+) Xét hàm số $h(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 0.5 \\ -x & \text{khi } -0,5 < x \leq 0. \end{cases}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 1$.

+) Dễ thấy $h(x)$ là hàm chẵn trên $[-0.5; 0.5]$ nên $b_n = 0$ với mọi $n \geq 0$.

Ta có: $a_0 = 4\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2}$.

Với mọi $n \geq 1$: $a_n = 4\displaystyle\int_0^{0.5} x\cos(2n\pi x)dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

+) Trên $[0; 1]$ thì $f(x) = h(x)$. Khi đó khai triển Fourier của hàm $f(x)$ sẽ tương ứng với khai triển Fourier của hàm $h(x)$, xét trong khoảng $[0; 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x).$$

+) Do $f(x)$ là hàm số liên tục nên theo định lí Dirichlet, chuỗi Fourier của nó hội tụ đều đến $f(x) = \dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)$ trên $\mathbb{R}$

Câu 5. (1 điểm).

+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, với mọi $n \geq 2$ ta có:

$a_n^{\frac{n-1}{n}} = \left(a_n^{1/2}a_n^{1/2}a_n^{n-2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{2\sqrt{a_n} + (n-2)a_n}{n}$

+) Nhưng $\dfrac{2\sqrt{a_n}}{n} \leq \dfrac{1}{n^2} + a_n$ (vì $2xy \leq x^2 + y^2$) và $\dfrac{(n-2)a_n}{n} \leq a_n \left(\text{vì } \dfrac{n-2}{n} \leq 1\right)$

+) Do đó $0 < a_n^{\frac{n-1}{n}} \leq \dfrac{1}{n^2} + 2a_n$, với mọi $n \geq 2$.

+) Chuỗi đã cho là chuỗi số dương và $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + 2a_n\right)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có điều phải chứng minh.