Tích phân phụ thuộc tham số

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số
2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
3. Tích phân Euler
   - Hàm Gamma
   - Hàm Beta

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

Giới thiệu

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$. Khi đó,

$$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{1}$$

là một hàm số xác định trên $[c,d]$, và được gọi là một TP PTTS.

Mục đích: Khảo sát tính **liên tục, khả vi, khả tích** của $I(y)$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$*là hàm số liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *thì* $I(y)$*là hàm số liên tục trên* $[c, d]$, *i.e.,*

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, i.e.,

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \boxed{\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx} = \int_a^b f(x, y_0)dx = I(y_0).$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x,y)$*là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *thì* $I(y)$*là hàm số liên tục trên* $[c,d]$, *i.e.,*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \boxed{\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx} = \int_a^b f(x,y_0)dx = I(y_0).$$

Ví dụ

Tính $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos xy dx$.

Tính liên tục

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số liên tục trên* $[c,d]$, *i.e.,* $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx$

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$.

Tính liên tục

Định lý (Tính liên tục)

Nếu $f(x, y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số liên tục trên* $[c, d]$, *i.e.,* $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)dx$

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0, 1]$.

i) Xét tính liên tục của $I(y)$ trên mỗi hình chữ nhật $[0, 1] \times [c, d]$ và $[0, 1] \times [-d, -c]$ với $0 < c < d$ bất kì.

ii) Xét tính liên tục của $I(y)$ tại 0.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x, y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$,

ii) $f'_y(x, y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$

thì $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* (c, d) *và*

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x, y)dx\right)'_y =$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x,y)$*là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$,

ii) $f_y'(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$

thì $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* (c,d) *và*

$$I'(y)=\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)_y'=\int_a^b f_y'(x,y)\,dx.$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x,y)$*là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$,

ii) $f'_y(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$

thì $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* (c,d) *và*

$$I'(y)=\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)'_y=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ

Tính tích phân $I_n(\alpha)=\int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz'

B2. Nhận xét rằng $I'_{n-1} = I_n$ nên $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz'

B2. Nhận xét rằng $I'_{n-1} = I_n$ nên $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$.

Ví dụ

Tính $I(y) = \int\limits_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$.

B1. Kiểm tra các điều kiện của Định lý Leibniz.

B2. Tính $I'(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

B3. $I(y) = \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$là hàm số khả tích trên $[c, d]$, và:

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy =$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *thì* $I(y)$*là hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *, và:*

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số

Định lý (Tính khả tích)

Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I(y)$là hàm số khả tích trên $[c, d]$, và:

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Ví dụ

Tính

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ (0 < a < b).$$

Tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx, \text{ với } y \in [c,d].$$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu

i) $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b] \times [c,d]$ *,*

ii) $a(y), b(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *và* $a \leq a(y), b(y) \leq b\ \forall y \in [c,d]$

thì $J(y)$ *là một hàm số liên tục đối với* y *trên* $[c,d]$ *.*

Ví dụ

Tìm $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_{y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx, \text{ với } y \in [c, d]$$

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x, y)$ *liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *,*

ii) $f'_y(x, y)$ *liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *,*

iii) $a(y), b(y)$ *khả vi trên* $[c, d]$ *và* $a \le a(y), b(y) \le b \ \forall y \in [c, d]$

thì $J(y)$ *là một hàm số khả vi đối với y trên* $[c, d]$*, và*

$$J'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(b(y), y)\,b'_y(y) - f(a(y), y)\,a'_y(y)$$

.

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

3. Tích phân Euler
   - Hàm Gamma
   - Hàm Beta

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx, \; y \in [c, d].$

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) hội tụ tại $y_0 \in [c, d]$ nếu $\int_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ hội tụ, i.e.,

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx,\ y \in [c, d].$

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) hội tụ tại $y_0 \in [c, d]$ *nếu* $\int\limits_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ *hội tụ, i.e.,*$\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon, y_0)$

$$\left| I(y_0) - \int_a^A f(x, y_0)dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y_0)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b.$$

ii) hội tụ trên $[c, d]$ *nếu* $I(y)$ *hội tụ tại mọi* $y \in [c, d]$,

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét TPSR phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx, \; y \in [c, d]$.

Định nghĩa

Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là

i) *hội tụ tại* $y_0 \in [c, d]$ *nếu* $\int\limits_a^{\infty} f(x, y_0)dx$ *hội tụ, i.e.,* $\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon, y_0)$

$$\left| I(y_0) - \int_a^A f(x, y_0)dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y_0)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b.$$

ii) *hội tụ trên* $[c, d]$ *nếu* $I(y)$ *hội tụ tại mọi* $y \in [c, d]$,

iii) *hội tụ đều trên* $[c, d]$ *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists b = b(\epsilon) > a$ *sao cho*

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y)dx \right| < \epsilon \quad \forall A > b, \forall y \in [c, d].$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_1^{\infty} \sin(yx)dx$ hội tụ khi $y = 0$ và phân kỳ khi $y \neq 0$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_1^{\infty} \sin(yx)dx$ hội tụ khi $y = 0$ và phân kỳ khi $y \neq 0$.

Ví dụ

a) Tính $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx \quad (y > 0)$.

b) Chứng minh rằng $I(y)$ hội tụ đến 1 đều trên $[y_0, +\infty)$ với mọi $y_0 > 0$.

c) Giải thích tại sao $I(y)$ không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx\right) \neq \int\limits_0^{+\infty}\left(\lim\limits_{y\to 0^+} ye^{-yx}\right)dx$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx\right) \neq \int\limits_0^{+\infty}\left(\lim\limits_{y\to 0^+} ye^{-yx}\right)dx$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu

i) $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$,

ii) *TPSR* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$

thì $I(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$, *i.e.,*

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx\right) \neq \int\limits_0^{+\infty}\left(\lim\limits_{y\to 0^+} ye^{-yx}\right)dx$

Định lý (Tính liên tục)

Nếu

i) $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$,

ii) TPSR $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$

thì $I(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$, *i.e.,*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \boxed{\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx} = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx.$$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Định lý (Dấu hiệu hội tụ Weierstrass)

Nếu

i) $|f(x,y)| \le g(x) \, \forall (x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]$,

ii) TPSR $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ*

thì TPSR $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$.

Ví dụ

Chứng minh rằng

a) $I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2+1} dx$ là hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Định lý (Tính khả vi)

Nếu

i) $f(x,y)$ *và* $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ trên* $[c, d]$,

iii) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ *hội tụ đều trên* $[c, d]$

thì $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c, d]$ *và* $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Các tính chất của TPSR phụ thuộc tham số

Ví dụ

Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad (\alpha, \beta > 0)$.

Định lý (Tính khả tích)

Nếu

i) $f(x, y)$ *liên tục trên* $[a, +\infty) \times [c, d]$,

ii) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y) dx$ *hội tụ đều trên* $[c, d]$

thì $I(y)$ *là khả tích trên* $[c, d]$ *và*

$$\int_c^d I(y)\, dy := \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Các phương pháp tính TPSR phụ thuộc tham số

Đạo hàm qua dấu tích phân

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$.

B2. $I(y) = \int I'(y)\, dy + C$.

B3. Tính $I(y_0)$ với một giá trị đặc biệt nào đó của y_0 để suy ra C.

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện chuyển dấu đạo hàm qua tích phân.

Ví dụ

Tính các tích phân sau $(a, b, \alpha, \beta > 0)$:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$.

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}$.

Các phương pháp tính TPSR phụ thuộc tham số

Đổi thứ tự lấy tích phân

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d F(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^{+\infty} F(x,y)dx\right)dy.$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân.

Ví dụ

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx.$

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx.$

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx.$

d) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}.$

Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số
2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số
3. Tích phân Euler
   - Hàm Gamma
   - Hàm Beta

Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ xác định trên $(0, +\infty)$.

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ xác định trên $(0, +\infty)$.

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Các tính chất

1) Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$ mà thôi.

Nếu $\alpha \in (n, n+1]$ thì $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)$.

Đặc biệt, $\begin{cases} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{cases}$ nên $\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \end{cases}$

Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ xác định trên $(0, +\infty)$.

Ví dụ

Tính $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Các tính chất

1) Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

   Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leq 1$ mà thôi.

   Nếu $\alpha \in (n, n+1]$ thì $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)$.

   Đặc biệt, $\begin{cases} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{cases}$ nên $\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}. \end{cases}$

2) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ $\forall 0 < p < 1$.

Hàm Beta

Dạng 1: $\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$

Hàm Beta

Dạng 1: $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$

Dạng 2: $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và Beta

i) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

ii) $\mathrm{B}(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$

Hàm Beta

Dạng 1: $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$

Dạng 2: $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và Beta

i) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

ii) $\mathrm{B}(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$

Các tính chất

1) Tính đối xứng: $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

2) Hạ bậc: $\begin{cases} \mathrm{B}(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q), & \text{nếu } p > 1 \\ \mathrm{B}(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1), & \text{nếu } q > 1. \end{cases}$

Ý nghĩa: chỉ cần nghiên cứu hàm Beta trong khoảng $(0,1] \times (0,1]$.

Đặc biệt, $\mathrm{B}(1,1) = 1$ nên $\mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N}.$

Tích phân Euler

Ví dụ

Biểu thị $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$ qua hàm Beta.

Gợi ý: Đặt $\sin x = \sqrt{t}$ để suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$.

Tích phân Euler

Ví dụ

Biểu thị $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$ qua hàm Beta.

Gợi ý: Đặt $\sin x = \sqrt{t}$ để suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$.

Dạng lượng giác của hàm Gamma

$\mathrm{B}(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt.$

Ví dụ

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

b) $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0).$

c) $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx.$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx.$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$

f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx, \ n \in \mathbb{N}^*.$