Bài tập trên lớp

1. Điểm $(0,0)^T$ có phải là nghiệm cực tiểu địa phương, nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán $\min\{f(x)|x \in \mathbb{R}^2\}$ không, trong đó:

   i) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

   ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2(2 - x_1)^3$.

   Giải thích?

2. Cho $S \subset \mathbb{R}^n$ là nửa không gian đóng.

   i) Chứng minh rằng S là tập lồi;

   ii) S có phải là tập afin không?

   iii) S có điểm cực biên không?

3. Cho tập

   $$X := \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 + 4x_2 \geq 4, \ x_1 + x_2 \geq 2 \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}.$$

   i) Tập X có điểm cực biên không?

   ii) Bài toán

   $$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in X \tag{P_1}$$

   có nghiệm tối ưu không ?

4. Cho tập lồi $D \subset \mathbb{R}^n$. Kí hiệu $|D|$ là số phần tử của D. Có tập lồi D nào thỏa mãn

   $$D \ \text{ là tập rời rạc và } \ |D| \geq 2?$$

1. Định nghĩa nghiệm cực tiểu đia phương và cực tiểu tòan cục. Cho ví dụ về hàm số f có tính chất: i) có một cực tiểu địa phương nhưng không có cực tiểu tòan cục; ii) không có cả cực tiểu địa phương và cực tiểu toàn cục; iii) Có các điểm cực tiểu địa phương và một điểm cực tiểu tòan cục với giá trị hàm mục tiêu khác nhau; iv) Có nhiều điểm cực tiểu tòan cục. Đặt câu hỏi tương tự cho cực đại.

2. Cho tập lồi $D \subset \mathbb{R}^n$. Nêu định nghĩa điểm cực biên của C. Cho ví dụ: i) tập không có điểm cực biên; ii) tập có hữu hạn điểm cực biên; iii) tập có vô hạn điểm cực biên.

3. Cho E, F là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. CMR các tập $E + F$ và $E - F$ là các tập lồi.

4. Cho tập $M := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 5;\ x_1 + 2x_2 \leq 6;\ x_1, x_2 \geq 0\}$. Tìm tất cả các điểm cực biên của tập này. Tìm các hướng lùi xa và nón lùi xa $RecM$.

5. Cho tập $M := \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2 \geq 1;\ -x_1 + x_2 \leq 2;\ x_1, x_2 \geq 0;\}$. Tìm các phương cực biên của M và nón $RecM$.

6. Chuyển qui hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc:
$$\begin{aligned} \max\quad & z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{với ràng buộc}\quad & 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \leq 7, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Chuyển qui hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc:
$$\begin{aligned} \max\quad & z = x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ \text{với ràng buộc}\quad & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq -2, x_2, x_3 \text{ tự do.} \end{aligned}$$

8. Xét qui hoạch tuyến tính $\max\{\langle c, x\rangle,\ x \in D\}$, trong đó
$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$
với A là ma trận cấp $(m \times n)$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng nếu véc tơ $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn
$$Ad = 0 \text{ và } d \geq 0$$
thì d là một hướng lùi xa của tập D.

9. Xét qui hoạch tuyến tính $\max\{\langle c, x\rangle,\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{và } b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Véc tơ $x = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$ có phải là một phương án cực biên của bài toán này không? Vì sao?

10. Cho $p \neq 0$ là một hướng lùi xa của tập

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

với A là ma trận cấp $(m \times n)$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng $-p$ không thể là một hướng lùi xa của D

11. Cho $\{d_1, \cdots, d_k\}$ là các hướng lùi xa của tập

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

với A là ma trận cấp $(m \times n)$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng véc tơ

$$0 \neq d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i \text{ với } \alpha_i \geq 0$$

cũng là một hướng lùi xa của D.

12. Khi nào bài toán QHTT $\min\{\langle c, x\rangle : x \in M\}$ có nghiệm. Cấu trúc của tập nghiệm của bài toán này?

13. Giả sử rằng một qui hoạch tuyến tính với tập chấp nhận được bị chặn có ℓ phương án cực biên tối ưu $v^1, \cdots, v^\ell$. Chứng minh rằng một phương án là tối ưu khi và chỉ khi nó là tổ hợp lồi của $v^1, \cdots, v^\ell$.

14. Viết cặp bài tóan đối ngẫu của QHTT dạng tổng quát và dạng chính tắc. Phát biểu các định lý chính của Đối ngẫu. Phát biểu và chứng minh định lý Độ lệch bù.

15. Xét bài tóan

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ \text{với ràng buộc} \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Viết bài tóan đối ngẫu của bài tóan này và giải nó bằng phương pháp hình học.

b) Sử dụng điều kiện độ lệch bù để tìm nghiệm tối ưu của bài tóan ban đầu.

16. Xét bài tóan QHTT $\min\{z = \langle c, x\rangle : \ Ax \le b, \ x \ge 0\}$. Giả sử bài tóan này và bài tóan đối ngẫu của nó đều chấp nhận được. Cho x^* là một nghiệm tối ưu của bài tóan gốc với giá trị tối ưu tương ứng là z_* và y^* là một nghiệm tối ưu của bài tóan đối ngẫu. Chứng minh rằng
$$z_* = {y^*}^T A x^*.$$

17. Cho qui hoạch tuyến tính
$$\min 6x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\begin{aligned} \text{với ràng buộc} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 7 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$
a) Bài toán này có nghiệm không? Vì sao? Tìm một bài toán thực tế có thể mô tả bởi qui hoạch tuyến tính này?

b) Chứng minh rằng tập nghiệm của bài toán qui hoạch tuyến tính là tập lồi.

18. Dùng Pha I của thuật toán đơn hình kiểm tra xem hệ bất phương trình sau có nghiệm không?
$$i) x_1 + x_2 \le 5; \quad x_1 - x_2 \le 1; \quad x_1, \ x_2 \ge 0.$$
$$ii) x_1 + x_2 \le 5; \quad -x_1 + x_2 \le 1; \quad x_1, \ x_2 \ge 0.$$

19. Cho qui hoạch tuyến tính
$$\min x_1 - 4x_2 + \alpha.x_3 \quad + 3x_5$$
$$\begin{aligned} \text{với ràng buộc} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 && = 3 \\ & -x_1 \quad + 2x_3 + x_4 && = 2 \\ & 3x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 && = 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 \ge 0. \end{aligned}$$
a) Lập bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biên $x^0 = (0\ 3\ 0\ 2\ 4)$.

b) Tìm điều kiện của tham số α để phương án trên là tối ưu.

20. Cho qui hoạch tuyến tính
$$\max -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4$$
$$\begin{aligned} \text{với ràng buộc} \quad & x_1 + 2x_2 + \ x_3 && = 1 \\ & +4x_2 - 2x_3 && \le 4 \\ & -3x_2 \quad + x_4 && = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \ge 0. \end{aligned}$$
a) Viết bài tóan đối ngẫu của bài tóan trên;

b) Dùng đối ngẫu chứng tỏ $x^* = (0\ 0\ 1\ 5)$ là phương án tối ưu của bài toán.

21. Cho bài toán vận tải

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min$$

với ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0\ \ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n.$$

a) Chứng minh rằng nếu thực hiện phép biến đổi $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + e_i\ (\forall i,\ j)$, với e_i là các hằng số thì phương án tối ưu của bài toán vận tải không thay đổi.

b) CMR: i) mọi cơ sở B của bài tóan vận tải có $|detB| = 1$; ii) nếu các a_i, b_j và c_{ij} nguyên thì mọi phương án tối ưu nhận được theo thuật tóan thế vị đều có các thành phần nguyên.

c) Xét bài toán vận tải trên với $a = (110,\ 100,\ 60,\ 100)$, $b = (95,\ 80,\ 65,\ 35,\ 95)$ và

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 14 & 9 & 13 \\ 10 & 2 & 9 & 8 & 10 \\ 5 & 5 & 9 & 6 & 12 \\ 14 & 3 & 12 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

c1) Véc tơ $x = (95,\ 0,\ 0,\ 0,\ 15,\ 0,\ 15,\ 5,\ 0,\ 80,\ 0,\ 0,\ 60,\ 0,\ 0,\ 0,\ 65,\ 0,\ 35,\ 0)$ có phải là một phương án cực biên của bài toán này không? Vì sao?

c2) Bài toán này có nghiệm tối ưu không? Véc tơ x đã cho ở $(b1)$ có phải nghiệm tối ưu của bài toán này không? Vì sao? Cho biết chi phí phải trả nếu thực hiện theo phương án này?

22. Xét bài tóan vận tải với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b và ma trận cước phí $C = (c_{ij})$ được xác định như sau:

$$a = (10,\ 15,\ 5 + \beta), \qquad b = (5,\ 10 + \beta,\ 15), \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kí hiệu $f(\beta)$ là giá trị tối ưu của bài tóan như là hàm số của tham số β. Hãy tìm tất cả các phương án tối ưu của bài tóan với $\beta = 0$. Vẽ đồ thị của $f(\beta)$ khi $\beta \geq 0$.

23. Giải bài tóan vận tải với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b và ma trận cước phí $C = (c_{ij})$ được xác định như sau:

$$a = (140,\ 550,\ 80,\ 550), \quad b = (120,\ 180,\ 100,\ 150), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

24. Nêu một số mô hình thực tế có mô hình toán học là bài tóan cái túi.

25. Cho $f(x)$ là hàm lồi khả vi, xác định trên tập lồi $X \subset R^n$. Chứng minh rằng $x^* \in X$ là nghiệm cực tiểu của bài toán $\min\{f(x), x \in X\}$ khi và chỉ khi

$$0 = \min_{x \in X} \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle.$$

Theo em, kết luận này có ý nghĩa gì?

26. Cho hàm $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$, trong đó A là ma trận đối xứng, xác định dương, cấp $n \times n$, véc tơ $b \in R^n$ và $c \in R$. Theo em, khẳng định : *"Việc giải bài toán* $\min\{f(x), x \in R^n\}$ *tương đương với việc giải hệ phương trình tuyến tính* $Ax = b$*"* có đúng không? Giải thích? Cho một ví dụ số cụ thể.

27. Xét hàm tòan phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - c^T x$. i) Viết điều kiện tối ưu bậc một và bậc hai; ii) Với điều kiện nào của Q thì f có cực tiểu địa phương? Với điều kiện nào của Q thì f có một điểm dừng nhưng không phải cực tiểu địa phương cũng không phải cực tiểu tòan cục.

28. Nêu định nghĩa hướng giảm của hàm f tại x^*, điều kiện đủ để nhận biết hướng giảm.

29. Trình bày phương pháp giảm nhanh nhất. Xét bài tóan $\min\{f(u) = u_1^2 + 5u_2^2 : u \in \mathbb{R}^2\}$. Lấy $u^0 = (2, 3)$. Xây dựng một số phần tử của dãy lặp $\{u^k\}$ theo phương pháp giảm nhanh nhất.

30. Xét hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c$, trong đó Q là ma trận đối xứng xác định dương. Cho p là hướng giảm của f tại x^k. Chứng minh rằng nghiệm của bài tóan $\min\{f(x^k + tp) : t > 0\}$ là

$$t_k = -\frac{(Qx^k + b)^T p}{p^T Qp}.$$

31. Trình bày phương pháp Newton và các ưu, nhược điểm của nó. Xét hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x + c$, trong đó Q là ma trận đối xứng xác định dương, không suy biến. CMR phương pháp Newton cho nghiệm cực tiểu của f trên $\mathbb{R}^n$ chỉ sau một bước lặp, không phụ thuộc vào điểm xuất phát ban đầu.

32. Nêu định nghĩa hướng chấp nhận được tại $x^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. CMR nếu D là tập lồi thì $x - x^*$ là hướng chấp nhận được tại x^* với mọi $x \in D$.

33. Phát biểu điều kiện cần của điểm cực tiểu địa phương của bài toán $\min\{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}$ và bài tóan $\min\{f(x)\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$. Khi f là hàm lồi và D là tập lồi thì có kết luận gì. Lấy ví dụ để cùng hàm mục tiêu f nhưng hai bài tóan này có nghiệm khác nhau.

34. Hàm một biến $f(x) = -\ln(x)$ có phải hàm lồi không? Hãy giải thích bằng ít nhất 2 cách mà em biết.

35. Xét bài tóan $\min\{f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x : Ax \leq b\}$, trong đó Q là ma trận đối xứng xác định dương, không suy biến cấp $(n \times n)$, ma trận A cấp $(m \times n)$, véc tơ $c, x \in \mathbb{R}^n$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Viết điều kiện Kuhn-Tucker cho bài tóan này.

36. Cho bài toán

$$\min f(x) = x_1$$

với ràng buộc

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2.$$

Sử dụng định lý Kuhn-Tucker tìm nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán. Hãy giải thích chi tiết cách lấy nghiệm.

37. Xét bài toán $\min\{f(x) = x_1 \ : \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1, \ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$. i) Sử dụng đinh lý Kuhn-Tucker tìm nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu của bài tóan. Giải thích chi tiết từng điều kiện áp dụng và cách lấy nghiệm.

38. Xét $\min\{f(x) = cx_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2 \ : \ x \in \mathbb{R}^2\}$, trong đó c là một số thực. i) Xác các điểm dừng của f với giá trị c. ii) Với giá trị nào của c thì f có cực tiểu tòan cục.

39. Trình bày phương pháp nhân tử Langrange giải bài toán trơn với ràng buộc đẳng thức. Giải $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 \ : \ x_1 + x_2 = 10\}$.

40. Trình bày thuật tóan Frank-Wolfe. Xét bài toán $\min\{f(u) = \frac{1}{2}u_1^2 + u_2^2 + u_1 \ : \ u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ u_1 + u_2 \geq\}$. Cho $u^0 = (1, 1)$. Xây dựng một vài phần tử của dãy lặp $\{u^k\}$ theo thuật tóan Frank-Wolfe.

41. **Chú ý: - Ngoài các câu hỏi và bài tập trên, làm các bài tập sau mỗi chương.**