Đề thi Giữa kỳ môn Giải tích 3 - Học kỳ 20201

Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

$$a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n} \qquad b)\sum_{n=2}^{+\infty} ne^{-n} \qquad c)\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$$

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

Câu 3. (1 điểm) Tính tổng $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

Câu 4. (1 điểm) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, tuần hoàn chu kỳ $T=2,\ f(x)=x,\ \forall x\in[0;1]$. Khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

Câu 5. (4 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'+2xy=3e^{3x-x^2}$

b) $y'+2y=2(1+x)\sqrt{y},\ y(0)=1$

c) $(y^2-x^2)\,\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}x=0,\ y(1)=1$

d) $y'=y\ln y+xy,\ y(0)=1$

LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ SỐ 1 - GT3 - Giữa kỳ 20201

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1.

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ là chuỗi đan dấu vì $u_n = \frac{1}{n \ln n} > 0,\ \forall n \geq 2$

+) $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} = u_n,\ \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \{u_n\}_{n=2}^{\infty}$ là dãy đơn điệu giảm khi $n \to +\infty$ (1)

+) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ hội tụ (theo định lý Leibnitz)

b) Đặt $u_n = ne^{-n} > 0, \forall n \geq 2 \Rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi số dương. Xét giới hạn:

$$D = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{ne^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} ne^{-n}$ hội tụ (theo tiêu chuẩn $\mathrm{D'}$ Alambert)

c) Đặt $a_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} > 0,\ \forall n \geq 2 \Rightarrow$ chuỗi đã cho là chuỗi số dương.

Ta có: $a_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \frac{n+3}{2n+1}} = n^{\ln \frac{n+3}{2n+1}} > n^{\ln \frac{n+\frac{1}{2}}{2n+1}} = n^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\ln 2}} > 0,\ \forall n \geq 2$

Mà $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln 2}}$ phân kì (do $\alpha = \ln 2 < 1$)

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho phân kì (theo tiêu chuẩn so sánh)

Câu 2.

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}$

+) Ta có: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

+) Tại $x = \frac{-1}{3}$, ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì $\left(\text{do } \alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

+) Tại $x = \frac{1}{3}$, ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ là chuỗi đan dấu với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Vì $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_n, \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \text{dãy } \{u_n\} \text{ đơn điệu giảm trên } [1; +\infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ hội tụ (theo định lý Leibnitz)

Vậy miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

Câu 3.

+) Từ GT: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}$

+) Theo khai triển Maclaurin ta có: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\bigstar)$

+) Thay $x = \frac{\pi}{6}$ vào $(\bigstar)$ ta được: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tổng chuỗi cần tính là $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 4.

+) Hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kì $T = 2 = 2l$, nên chuỗi Fourier của nó có dạng:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n(\sin n\pi x)\Big)$$

+) Do $f(x)$ là hàm chẵn, tuần hoàn chu kỳ $T = 2l = 2$ nên ta có các hệ số Fourier như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \int_0^1 f(x)dx \\ a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

+) $a_0 = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$

+) $a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = 2x.\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx = 0 + 2\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 = \frac{2(-1)^n - 2}{(n\pi)^2}$

$\Rightarrow$ chuỗi Fourier của $f(x)$ là:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n - 2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 5.

a) $y' + 2xy = 3e^{3x-x^2}$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = 2x,\ q(x) = 3.e^{3x-x^2}$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[C + \int 3e^{3x-x^2}.e^{\int 2xdx}dx\right]$$

$$= e^{-x^2}.\left(C + \int 3e^{3x-x^2}.e^{x^2}dx\right)$$

$$= e^{-x^2}.\left(C + \int 3e^{3x}dx\right)$$

$$= e^{-x^2}.(C + e^{3x})$$

Vậy $y = e^{-x^2}.(C + e^{3x})$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

b) $y' + 2y = 2(1 + x)\sqrt{y},\ y(0) = 1\ (1)$

+) Theo GT: $y(0) = 1 \Rightarrow y = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho, tức $y \neq 0$

+) Từ $(1) \Rightarrow \dfrac{y'}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y} = 1 + x\ (2)$

+) Đặt $u = \sqrt{y} \Rightarrow u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$. Khi đó, phương trình (2) trở thành: $u' + u = 1 + x\ (3)$

+) Phương trình (3) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có $p(x) = 1,\ q(x) = 1 + x$.

$$\Rightarrow u = e^{-\int (p(x))dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int (p(x))dx}dx\right] = e^{-\int dx}.\left[C + \int (1 + x).e^{\int dx}dx\right]$$

$$= e^{-x}.\left(C + \int (1 + x).e^{x}dx\right)$$

$$= e^{-x}.\left(C + \int (1 + x)d\left(e^{x}\right)\right)$$

$$= e^{-x}.\left(C + (1 + x).e^{x} - \int e^{x}.d(1 + x)\right)$$

$$= e^{-x}.(C + x.e^{x})$$

$$= C.e^{-x} + x$$

+) Thay $u = \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = C.e^{-x} + x \Rightarrow y = (C.e^{-x} + x)^2$

+) Theo bài ra, $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = (C.e^{-0} + 0)^2 \Rightarrow C = 1$ hoặc $C = -1$

$\Rightarrow y = (e^{-x} + x)^2;\ y = (-e^{-x} + x)^2$ là nghiệm của phương trình.

c) $(y^2 - x^2)\,dy + 2xydx = 0,\ y(1) = 1$

+) Đặt $\begin{cases} P(x,y) = 2xy \\ Q(x,y) = y^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_y = 2x \\ Q'_x = -2x \end{cases} \Rightarrow \dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \dfrac{-2x-2x}{2xy} = \dfrac{-2}{y}$

Do đó

$$\mu(y) = e^{\displaystyle\int \frac{-2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$$

+) Vì theo GT: $y(1) = 1 \Rightarrow y = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho, tức $y \neq 0$

+) Nhân cả 2 vế của PT đã cho với $\dfrac{1}{y^2}$ ta được PTVP toàn phần:

$$\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$
$$\Leftrightarrow d\left(y + \frac{x^2}{y}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow y + \frac{x^2}{y} = C\ (C \text{ là hằng số tùy ý})$$

+) $y(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y + \dfrac{x^2}{y} = 2$ là nghiệm cần tìm

d) $y' = y\ln y + xy,\ y(0) = 1$

+) GT $\Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln y + x\ (1)$

+) Đặt $u = \ln y \Rightarrow u' = \dfrac{y'}{y}$. Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$u' = u + x \Leftrightarrow u' - u = x\ (2)$$

+) Phương trình (2) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có $p(x) = -1,\ q(x) = x$

$$u = e^{-\displaystyle\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\displaystyle\int p(x)dx}dx\right] = e^x\left[C + \int xe^{-x}dx\right]$$
$$= e^x\left[C + \int xd(-e^{-x})\right]$$
$$= e^x\left(C + x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})dx\right)$$
$$= e^x\left(C - xe^{-x} - e^{-x}\right)$$
$$= Ce^x - x - 1\ (C \text{ là hằng số tùy ý})$$

$\Rightarrow \ln y = Ce^x - x - 1 \Rightarrow y = e^{Ce^x - x - 1}$

+) Theo GT: $y(0) = 1 \Rightarrow e^{C-1} = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = e^{e^x - x - 1}$ là nghiệm cần tìm