Tóm tắt công thức toán học môn giải tích 1

Giải tích I (MI1110)

Chuyên đề 1: Giới hạn hàm số

1. Dạng $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

   Cách làm: Áp dụng quy tắc L'Hospital

   Khi $x \to x_o$ mà $\begin{cases} f(x) \to \infty \\ g(x) \to \infty \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 0 \end{cases}$ => $I = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ví dụ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x} = \infty$$

Câu 3 – N1 – GK20171 – Đề 1

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+4\sin x)}{3^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4\cos x}{1+4\sin x}}{3^x \ln 3} = \frac{4}{\ln 3}$$

Câu 6 – N1 – GK20181 – Đề 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 4x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x + 12x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{6 + 24x}{\cos x} = 6$$

2. Dạng 1^∞. Vận dụng $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + (\cos x - 1)\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-\sin x}{1}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2.\frac{x}{2}} = e^2$$

Câu 2 – N1 – GK20181 – Đề 3

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + (\cos x - 1)\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{-\sin x}{\cos x}} = 1$$

3. Dạng $0^0, \infty^0, 0^\infty$

Khi $x \to x_o$, $\begin{cases} u(x) \to 0 \\ v(x) \to 0 \end{cases}$ => $I = \lim\limits_{x\to x_o} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_o} e^{v(x)\ln[u(x)]}$

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{5\ln x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{5}{x}} = 1$$

Câu 6 – N1 – GK20171 – Đề 3: $I = \lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

$$I = \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x \ln(\sin x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\tan^2 x.\cos^2 x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\sin x \cos x} = e^0 = 1$$

Câu 9 – N1 – GK20181 – Đề 2: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

Xét $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$

4. Vô cùng bé – Vô cùng lớn

$VCB: x \to x_o, f(x) \to 0$

$VCL: x \to x_o, |f(x)| \to \infty$

a. So sánh VCB: Cho α, β là các VCB khi $x \to x_o$. Xét $k = \lim\limits_{x\to x_o} \frac{\alpha}{\beta}$

$k = 1 \Rightarrow \alpha \sim \beta$

$k = 0 \Rightarrow \alpha$ cấp cao hơn β

$k \neq 0;1 \Rightarrow \alpha$ cùng cấp β

b. So sánh VCL: Cho A, B là các VCL khi $x \to x_o$. Xét $K = \lim\limits_{x\to x_o} \frac{A}{B}$

$K = 1 \Rightarrow A \sim B$

$K = \infty \Rightarrow$ A cấp cao hơn B

$K \neq 0;1 \Rightarrow$ A, B cùng cấp

Ví dụ:

So sánh VCB khi x -> 0: ln(1+x) và sin x

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}=1$ => ln(1+x) và sin x tương đương

So sánh VCL khi x ->∞ : x^2 và e^x

⇨ $K=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$ => e^x cấp cao hơn x^2

Câu 2 – N1 – GK20181 – Đề 1

So sánh VCL khi x ->∞ : $\alpha(x)=x+x^2$ và $\beta(x)=e^x-1$

Xét $K=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$ => B cao cấp hơn A

Câu 4 – N3 – GK20181 – Đề 7

Khi x->0, các VCB sau có tương đương không? $\alpha(x)=\sin 5x;\beta(x)=e^{5x}-1-x^2$

$k=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{5x}-1-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{5e^{5x}-2x}=1$ => có tương đương

c. Ngắt bỏ, thay thế VCL, VCB
   - Thay VCB, VCL tương đương trong tích/ thương
   - Ngắt VCB bậc cao, VCL bậc thấp trong tổng/hiệu

d. Bảng VCB tương đương: $x\to 0$

$\ln(1+x)\sim x$ $\quad(1+x)^a-1\sim ax$ $\quad\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\arcsin x\sim x$

$e^x-1\sim x$ $\quad a^x-1\sim x\ln a$

Ví dụ:

So sánh VCB khi x -> 0: ln(1+x) và sin x

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$ => ln(1+x) và sin x tương đương

Câu 4 – N3 – GK20181 – Đề 7

Khi x->0, các VCB sau có tương đương không? $\alpha(x)=\sin 5x;\beta(x)=e^{5x}-1-x^2$

⇨ $k=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^{5x}-1-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{e^{5x}-1}=1$ => có tương đương

Câu 5 – N1 – GK20181 – Đề 4

Tìm a,b để 2 VCB sau tương đương khi x-> 0:

$\alpha(x) = ax^2 + bx^3 + x^4, \beta(x) = \sin(x^3)$

Ta có: $\beta(x) = \sin(x^3) \sim x^3$

$\alpha(x) = ax^2 + bx^3 + x^4 \sim ax^2$ nếu a khác 0 => a = 0

$\alpha(x) = bx^3 + x^4 \sim x^4$ nếu b = 0; $\alpha(x) = bx^3 + x^4 \sim x^3$ nếu b =1

Vậy a = 0; b =1

Chuyên đề 2: Các ứng dụng tìm giới hạn

I. Giới hạn trái – Giới hạn phải – Hàm số liên tục

- Giới hạn phải của hàm số f(x) tại x_o : $f\left(x_o^+\right)=\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$
- Giới hạn trái của hàm số f(x) tại x_o : $f\left(x_o^-\right)=\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$

Ví dụ:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

Câu 3 – GK20173 – N2 – D4: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2x+1}=\infty$

Câu 3 – GK20171 – N3 – D7: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right)}=0$

- Hàm số f(x) liên tục tại x_o khi và chỉ khi: $f\left(x_o^-\right)=f\left(x_o^+\right)=f\left(x_o\right)$

Ví dụ:

Xét sự liên tục của f(x) = x^2+2x+5 tại $x_o=0$ => $f(x_o^+) = f(x_o^-)= f(x_o) = 5$=> LT

Câu 2 – GK20173 – N2 – D4: Xét tính liên tục

$$y=\begin{cases}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x};x\neq 0\\ 0;x=0\end{cases}$$

Nhận xét: Hàm số liên tục trên R\{0}

Tại x = 0: $f\left(0^+\right)=f\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-4x^2\right)}{x}=0=f(0)$=> liên tục tại 0

- ⇨ Hàm số liên tục trên R

Đề 5 – 20141: Tìm m để f(x) = $\begin{cases}\frac{1-\cos 2x}{x^2};x\neq 0\\ m;x=0\end{cases}$ liên tục tại x = 0

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2 => m=2$

II. Điểm gián đoạn

- Điểm gián đoạn x_o: tại đó không tồn tại $f(x_o)$
- Phân loại điểm gián đoạn:

- Tìm $f(x_o^+)$ và $f(x_o^-)$
- Nếu tồn tại cả $f(x_o^+)$ và $f(x_o^-)$: loại 1
  Khi đó: $h = | f(x_o^+) - f(x_o^-) |$ gọi là bước nhảy
  h = 0 => Gián đoạn bỏ được
- Không phải loại 1 => loại 2

<u>Ví dụ:</u>

Xét sự gián đoạn của hàm số: $f(x) = \frac{1}{x}$

Tại x = 0, ta có: $f(0^+) = \infty$ và $f(0^-) = -\infty$ => Loại 2

C3 – 20181 – N3 – D7:Xét sự gián đoạn của y = $\arctan \frac{1}{x}$

Ta có: $f(0^+) = \frac{\pi}{2}; f(0^-) = \frac{-\pi}{2}$ => Loại 2

C4 – 20181 – N1 – D1: Xét sự gián đoạn của y = $\cot\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$

$f(0^+) = 0$ và $f(0^-) = 0$ => Loại 1

C3 – 20181 – N1 – D3: Tìm a để x = 0 là điểm gián đoạn bỏ được

f(x) = $\begin{cases} a + e^{\frac{1}{x}}; x < 0 \\ \frac{1}{\ln x}; x > 0 \end{cases}$. Ta có $f(0^+) = 0$ và $f(0^-) = a$ = > a = 0

C2 – 20173 – N1 – D1

Phân loại điểm gián đoạn $y = \frac{\sin x}{x(x-1)}$

$f(0^+) = -1$ và $f(0^-) = -1$ => L1

$f(1^+) = \infty$ và $f(1^-) = -\infty$ => L2

III. Đạo hàm

1. Định nghĩa đạo hàm: $f'(x)|_{x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

2. Đạo hàm trái – Đạo hàm phải

$$\left.\begin{aligned} &\text{Phải: } f'(x_o^+) = \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \\ &\text{Trái: } f'(x_o^-) = \lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \end{aligned}\right\}$$

Tồn tại đạo hàm khi và chỉ khi $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$

Chú ý: f(x) có đạo hàm tại x_o => Liên tục tại x_o, không có ngược lại

Ví dụ:

Tính đạo hàm $y = \sqrt{x}\tan x \Rightarrow y' = \dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}$

C5 – 20181 – D7 – N3: Dùng định nghĩa tính đạo hàm y'(0) với $y = x\sqrt[3]{\arcsin x}$

$$y'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{\arcsin x}}{x} = 0$$

C5 – 20181 – D5 – N2: Tìm a để hàm số có đạo hàm tại x = 0

f(x) = $\begin{cases} e^x - a\sin x; x \ge 0 \\ \cos x; x < 0 \end{cases}$. Với a tìm được, tính f'(0)

$f(0) = f(0^+) = f(0^+) = 1$: Hàm số liên tục tại x = 0

$f'(0^+) = 1 - a$; $f'(0^-) = 0$ => a = 1 => f'(0) = 0

IV. Vi phân cấp 1 – Tính xấp xỉ

Vi phân của y = f(x) là $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$

⇨ Cách tính xấp xỉ: $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$

Ví dụ:

Áp dụng vi phân, tính gần đúng $\sqrt[3]{7.97}$

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$. Ta có $x_o = 8; \Delta x = -0.03$

Áp dụng $f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$ => $\sqrt[3]{7.97} = 7.9975$

Áp dụng vi phân, tính gần đúng $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)$

Xét $f\left(x\right)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$. Ta có $x_o=\frac{\pi}{4}; \Delta x=0.01$

⇨ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+0.01\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.714$

Câu 6 – 20181 – D4 – N1:

Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $\sqrt[4]{\frac{2}{2-0.02}}$

Xét $f\left(x\right)=\sqrt[4]{\frac{2}{x}}=\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{-1}{2x^2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{-3}{4}}$. Ta có $x_o=2;\Delta x=-0.02$

⇨ $\sqrt[4]{\frac{2}{2-0.02}}=f\left(2\right)-0.02f'\left(2\right)=1.0025$

Chuyên đề 3: Đạo hàm, vi phân cấp cao

Khai triển Taylor, Maclaurin

I. Đạo hàm, vi phân cấp cao

- Đạo hàm cấp n: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$
- Vi phân cấp n: $d^n y = y^{(n)} dx^n$

Ví dụ: $y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6 \Rightarrow y'' = 42x^5 \Rightarrow y^{(3)} = 210x^4 \Rightarrow y^{(4)} = 840x^3$

Bảng đạo hàm cấp cao của một số hàm số:

Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản:

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
- $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).(1+x)^{\alpha-n}$
- $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}.\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
- $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(a^x)^{(n)} = a^x.(\ln a)^n$
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}.\frac{(n-1)!}{x^n}$

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$\left[(ax+b)^\alpha\right]^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{a^n}{(ax+b)^n}$$

Chú ý: Công thức Leibiniz: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}.v^{(k)}$

Trong đó:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Qui ước:

$$C_n^0 = 1$$

(Sử dụng khi biết một số k hữu hạn nào đó sẽ khiến $v^{(k)} = 0$

<u>Ví dụ:</u> x^5 có đạo hàm cấp 5 bằng 0

$$f(x) = \sin x.e^x \Rightarrow f'(x) = (\cos x + \sin x)e^x \Rightarrow f''(x) = 2\cos x e^x$$

$$(f(x))'' = \sum_{k=0}^{2} C_2^k \sin x^{(2-k)}.\left(e^x\right)^{(k)} = C_2^0 \sin x^{(2)}.\left(e^x\right) + C_2^1 \sin x^{(1)}.\left(e^x\right)^{(1)} + C_2^2 \sin x.\left(e^x\right)^{(2)}$$

$$= -\sin x.e^x + 2\cos x.e^x + \sin x.e^x = 2\cos x.e^x$$

- Cho y = xlnx. Tính $y^{(20)}(1)$

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (\ln x)^{(20-k)} x^{(k)} = C_{20}^0 (\ln x)^{(20)} x^{(0)} + C_{20}^1 (\ln x)^{(19)} x^{(1)}$$

$$= (\ln x)^{(20)} x + 20(\ln x)^{(19)} = (-1)^{19}.\frac{19!}{x^{20}}.x + 20(-1)^{18}\frac{18!}{x^{19}} = \frac{-19!}{x^{19}} + \frac{20.18!}{x^{19}} = \frac{(20.18! - 19!)}{x^{19}}$$

⇨ $y^{(20)}(1) = 20.18! - 19!$

Lưu ý: Cách chứng minh công thức đạo hàm cấp cao: Dùng quy nạp

$$y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Giả sử $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ (*)

Với $n = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$ => n = 1 đúng với (*)

Với $n = 2 \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$ => n = 2 đúng với (*)

Giả sử $n = k \Rightarrow y^{(k)} = (-1)^k.\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$ là đúng

$$n=k+1\Rightarrow y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=(-1)^k.k!.\frac{-(k+1)(1+x)^k}{(1+x)^{2k+2}}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$ (đúng với *)

Ví dụ:

Câu 7 – 20181 – Đề 5 – N2: Cho y = (x+1)lnx. Tính $y^{(20)}(1)$

$$y^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}(\ln x)^{(20-k)}(x+1)^{(k)}=C_{20}^{0}(\ln x)^{(20)}(x+1)^{(0)}+C_{20}^{1}(\ln x)^{(19)}(x+1)^{(1)}$$

$$=(\ln x)^{(20)}(x+1)+20(\ln x)^{(19)}=(-1)^{19}.\frac{19!}{x^{20}}.(x+1)+20(-1)^{18}\frac{18!}{x^{19}}=-2.19!+20.18!=-2.19!+19!+18!=18!-19!$$

Câu 5 – 20171 – Đề 1 – N1: Tính $y^{(5)}(x)$ với $y = \ln(2x^2-x)$

$$y=\ln(2x^2-x)=\ln|x|+\ln|2x-1| => y^{(5)}=\frac{4!}{x^5}+\frac{2^5.4!}{(2x-1)^5}$$

Câu 10 – 20173 – Đề 4 – N2: Cho $y = x^2\ln(1-3x)$. Tính $y^{(n)}(0)$, n≥3.

$$y^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{(k)}(0)\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-k)}(0),\left(x^2\right)^{(k)}(0)=\begin{matrix}2;k=2\\0;k=0\end{matrix}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0)=2C_n^2\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-2)}(0)$$

Ta có $y=\ln(1-3x)\Rightarrow y'=\frac{-3}{1-3x}\Rightarrow y''=\frac{-9}{(1-3x)^2}\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(-3)^n}{(1-3x)^n}$

$$\Rightarrow 2C_n^2\left(\ln(1-3x)\right)^{(n-2)}(0)=2C_n^2(-1)^{n-3}(n-3)!\frac{(-3)^{n-2}}{(1-3x)^{n-2}}=-2.3^{n-2}C_n^2(n-3)!$$

Câu 9 – 20171 – Đề 7 – N3: Cho $f(x)=\frac{(x-1)^4}{5!}\ln(2-x)$. Tính $d^{10}f(1)$.

$$d^{10}y(1)=y^{(10)}(1)\,dx^{10},y^{(10)}(1)=\frac{1}{5!}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left((x-1)^4\right)^{(k)}\left(\ln(2-x)\right)^{(10-k)}.$$

Ta có $\left((x-1)^4\right)^{(k)}=\begin{cases}4!;k=4\\0;k\neq 4\end{cases}$ =>

$$y^{(10)}(1)=\frac{1}{5!}C_{10}^4 4!\left(\ln(2-x)\right)^{(6)}=42\left(\ln(2-x)\right)^{(6)}=42.(-1)^5.5!.\frac{(-1)^6}{(2-x)^6}=-5040$$

II. Khai triển Taylor, Maclaurin

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k+\ldots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(x_o)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+O(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+O(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+O(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

x~0

a. Tìm khai triển Maclaurin hoặc Taylor

<u>Ví dụ:</u>

Tìm khai triển Maclaurin của $f(x)=\frac{1}{(1-3x)^5}$ đến số hạng o(x^2)

$$f(x)=\frac{1}{(1-3x)^5}=(1-3x)^{-5}=1+15x+135x^2+o(x^2)$$

Câu 8 – 20173 – Đề 4 – N2: Khai triển Maclaurin của $f(x)=\frac{1}{(1+2x)^{40}(1-x)^{50}}$ đến số hạng o(x^2).

$$(1+2x)^{-40}=1-80x+3280x^2+o(x^2)$$

$$(1-x)^{-50}=1+50x+1275x^2+o(x^2)$$

$$y=(1+2x)^{-40}(1-x)^{-50}=1+50x+1275x^2-80x-4000x^2+3280x^2+o(x^2)=1-30x+555x^2+o(x^2)$$

Bỏ qua những x có bậc cao hơn 2.

Câu 9 – 20171 – Đề 1 – N1:

Sử dụng khai triển Maclaurin của hàm số $y=\sqrt[3]{1+x}$ đến x^3 để tính gần đúng $\sqrt[3]{1,09}$

Quy tròn đến 10^{-6}.

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sqrt[3]{1,09}=\sqrt[3]{1+0,09}=1+\frac{1}{3}.0,09-\frac{1}{9}.0,09^2+\frac{5}{81}.0,09^3=1,029145$$

b. Vận dụng khai triển Taylor để tìm đạo hàm cấp cao
Cách làm: Đề bài yêu cầu tìm đạo hàm cấp n hàm số y tại x = 0 • Khai triển Maclaurin hàm số y • Hệ số của số hạng chứa x^n . n! = kết quả cần tìm

Ví dụ:

Tìm đạo hàm cấp cao $y^{(5)}(0)$ của y = sin x.

$y^{(5)}(0) = \sin(x+5\pi/2)|_{x=0} = 1$

Ta có khai triển Mac của y là: $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$

Hệ số của x^5 là $\frac{1}{5!}$ => $y^{(5)}(0) = \frac{1}{5!}.5! = 1$

Câu 9 – 20173 – Đề 6 – N3: Cho $y = e^x\sin x$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(6)}(0)$.

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5$ $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$

=> Hệ số của x^6 của $e^x\sin x$ là: $\frac{1}{5!}x^6-\left(\frac{1}{3!}x^3\right)^2+\frac{1}{5!}x^6=\frac{-1}{90}$

⇨ $\frac{y^{(6)}(0)}{6!}=\frac{-1}{90}\Rightarrow y^{(6)}(0)=-8$

Câu 8 – 20181 – Đề 2 – N1: Cho $y=\frac{2x}{x^2+1}$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(7)}(0)$.

$$y=\frac{2x}{x^2+1}=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'\Rightarrow y^{(7)}(x)=\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}.$$

Ta có: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$ => $\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+...$

⇨ $\frac{-1}{4}=\frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}(0)}{8!}\Rightarrow y^{(7)}(0)=\frac{-8!}{4}=-10080$

c. Vận dụng khai triển maclaurin để tìm giới hạn

Cách làm: khi x => 0. Khai triển cả tử và mẫu để số hạng có bậc lớn nhất phụ thuộc mẫu

Ví dụ:

Câu 9 – 20173 – Đề 1 – N1: Tính $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)}$

$x^5\ln\left(1-2x^3\right)\sim-2x^8$

$\sqrt{1+2x^4}\sim1+x^4-\frac{x^8}{2}$

=>

$\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)\sim1-x^4+\frac{x^8}{6}$

$\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)=1+x^4-\frac{x^8}{2}-x^4-x^8+\frac{x^8}{6}+o\left(x^8\right)=1+\frac{-4}{3}x^8$

⇨ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{4}{3}x^8}{-2x^8}=\frac{-2}{3}$

Chuyên đề 4: Các vấn đề về hàm số - đồ thị

I. Tìm cực trị

Cách làm: Hàm số y=f(x) có cực trị <=> y' đổi dấu

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số f(x)

Bước 2: Tìm y’, giải phương trình y’ = 0.

Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận

Ví dụ:

Câu 5 – GK20141 – Đề 4: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{3x}$

Điều kiện xác định: $x\neq 0$

$y'=\dfrac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}=\dfrac{3x^2-6}{9x^2}=\dfrac{x^2-2}{3x^2}$ $.y'=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Vẽ bảng biến thiên:

x	-∞		$-\sqrt{2}$		0			$\sqrt{2}$		∞
y’	1/3	+	0	-	-∞	-∞	-	0	+	1/3
			$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$			∞				∞
y	-∞				-∞			$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		

Vậy hàm số đạt cực đại $y=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $-\sqrt{2}$

Hàm số đạt cực tiểu y = $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $\sqrt{2}$

Câu 5 – GK20151 – Đề 2: Tìm cực trị của hàm số $y=4x-5\sqrt[5]{x^4}$

$y=4x-5x^{\frac{4}{5}}\Rightarrow y'=4-4x^{\frac{-1}{5}}=1-\dfrac{1}{x^{1/5}}=\dfrac{x^{1/5}-1}{x^{1/5}}$. Ta có bảng biến thiên

$y'=0\Leftrightarrow x=1$

x	-∞		0		1		∞
y’		+		-	0	+	
			0				∞
y	-∞				-1		

II. Tiệm cận

1. $f(x)$

- Tiệm cận ngang: xét f(x) khi x tiến tới ∞ và -∞
- Tiệm cận đứng: xét f(x) tại điểm x gián đoạn
- Tiệm cận xiên: y = ax + b

Trong đó: $$\left[\begin{array}{l} a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right] \\ a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] \end{array}\right.$$

2. $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$. Xét lim tiến tới t_o hoặc ∞

- Tiệm cận đứng: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=a \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty \end{cases}$
- Tiệm cận ngang: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=b \end{cases}$
- Tiệm cận xiên:

  Nếu $\lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty$ và $\lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên.

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{t\to t_o}\dfrac{y}{x} \\ b=\lim\limits_{t\to t_o}(y-ax) \end{cases}$$

<u>Ví dụ:</u>

Tìm tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ => 2 tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} y=\infty;\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} y=-\infty$ => 2 tiệm cận đứng

Câu 6 – GK20181 – D7 – N3: Tìm tiệm cận xiên của $y=xe^{2\frac{x+1}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2x+2}{x-1}}=e^2\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(y-e^2x\right)=4e^2\Rightarrow y=e^2(x+4)$. Xét lim tại -∞ tương tự.

Câu 8 – GK20173 – D5 – N3: Tìm tiệm cận xiên y = ln(1+e^{-2x}).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+e^{-2x}\right)=0 \Rightarrow khongco$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=-2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(y+2x\right)=0 \Rightarrow y=-2x$$

<u>Ví dụ:</u> Tìm tiệm cận của $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=t^2 \end{cases}$

$$\lim_{t\to0}x=\infty;\lim_{t\to0}y=0 \Rightarrow TCN: y=0$$
$$\lim_{t\to\infty}x=0;\lim_{t\to\infty}y=\infty\Rightarrow TCD: y=0$$

Câu 9 – 20161 – D4:

Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi $x=\dfrac{2016t}{1-t^3};y=\dfrac{2016t^2}{1-t^3}$

$\lim_{t\to1}x=\infty;\lim_{t\to1}y=\infty$ => Không có TCD, TCN. Có TCX

$\lim_{t\to\infty}x=0;\lim_{t\to\infty}y=0$ => Không có

$$\lim_{t\to1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}t=1;\lim_{t\to1}\left(y-x\right)=\frac{-2016}{3}$$
$$\Rightarrow y=x-\frac{2016}{3}$$

III. Tiếp tuyến:

1. Tìm tiếp tuyến y = f(x) tại x_o.
   ⇨ $y = f'(x_o)(x-x_o) + y_o$

2. Tiếp tuyến của hàm số có tham số t: $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$ tại t_o

$$\frac{x-x\left(t_o\right)}{x'\left(t_o\right)}=\frac{y-y\left(t_o\right)}{y'\left(t_o\right)}$$

Ví dụ:

Câu 8 – 20181 – Đề 3 – N1: $\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}$ tại $t_o = \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $x_o = \frac{\pi}{2} - 1; y_o = 1$.

x'= 1 – cost => x'$_o$= 1 và y'= sint => y'$_o$= 1

⇨ $\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 \Rightarrow x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0$

3. Tọa độ cực: r = f(φ)

- Cách 1: Đưa về tọa độ Oxy

  $r = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

  ⇨ Từ f(x;y) = 0, viết pttt: f'(x$_o$)(x – x$_o$) + f'(t$_o$)(y – y$_o$) = 0

- Cách 2: Tính tan V = $\frac{r}{r'}$

  tan V = 0 => tt trùng bán kính cực

  tan V = ∞ => tt vuông góc bán kính cực

Ví dụ:

Câu 10 – 20181 – D1 – N1: tìm tiếp tuyến tại φ = 0 của r = 2+cos φ

Cách 1:

Với $\varphi = 0 => r = 3$. Chuyển tọa độ Oxy

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0 \Rightarrow M(3;0)$

$f'x = 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \Rightarrow f'x_o = 3$

$f'y = 2y - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f'y_o = 0$

⇨ 3(x – 3) + 0.y = 0 => x = 3

Cách 2:

r = 2+cos φ => r' = - sin φ = 0 và r = 3 => tan V = ∞ => Tiếp tuyến vuông góc r tại M => x = 3

Chuyên đề 5: Nguyên hàm – Tích phân

I. Bảng nguyên hàm

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$$

II. Một số cách tính nguyên hàm

- Đổi biến.
- Tích phân từng phần.
- Phân tích các phân thức.
- Hàm lượng giác:
  - áp dụng công thức t = tan(x/2)

⇨ $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \mathrm{tg}\, x = \frac{2t}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

  - Dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$

    + Nếu m lẻ: đặt t = cos x

    + Nếu n lẻ: đặt t = sin x

    + Nếu m,n chẵn: hạ bậc

<u>Ví dụ:</u>

$I = \int \sin^3 x \cos x^2 dx$.

Đặt t = cos x =>$I = \int (t^2 - 1)t^2 dt = \int (t^4 - t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C$ => $I = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

Sử dụng khai triển Maclaurin của hàm số $y=\sqrt[3]{1+x}$ đến x^3 để tính gần đúng $\sqrt[3]{1,09}$

Quy tròn đến 10^{-6}.

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sqrt[3]{1,09}=\sqrt[3]{1+0,09}=1+\frac{1}{3}.0,09-\frac{1}{9}.0,09^2+\frac{5}{81}.0,09^3=1,029145$$

b. Vận dụng khai triển Taylor để tìm đạo hàm cấp cao

Cách làm: Đề bài yêu cầu tìm đạo hàm cấp n hàm số y tại x = 0

- Khai triển Maclaurin hàm số y
- Hệ số của số hạng chứa x^n . n! = kết quả cần tìm

Hệ số của số hạng chứa x^n . n! = kết quả cần tìm

<u>Ví dụ:</u>

Tìm đạo hàm cấp cao $y^{(5)}(0)$ của y = sin x.

$y^{(5)}(0) = \sin(x+5\pi/2)|_{x=0} = 1$

Ta có khai triển Mac của y là: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

Hệ số của x^5 là $\frac{1}{5!}$ => $y^{(5)}(0) = \frac{1}{5!}.\,5! = 1$

Câu 9 – 20173 – Đề 6 – N3: Cho y = $e^x\sin x$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(6)}(0)$.

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$ $\qquad$ $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

=> Hệ số của x^6 của $e^x \sin x$ là: $\frac{1}{5!}x^6 - \left(\frac{1}{3!}x^3\right)^2 + \frac{1}{5!}x^6 = \frac{-1}{90}$

⇨ $\frac{y^{(6)}(0)}{6!} = \frac{-1}{90} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -8$

Câu 8 – 20181 – Đề 2 – N1: Cho $y = \frac{2x}{x^2+1}$. Tính đạo hàm cấp cao $y^{(7)}(0)$.

$$y = \frac{2x}{x^2+1} = \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' \Rightarrow y^{(7)}(x) = \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}.$$

Ta có: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ => $\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots$

⇨ $\frac{-1}{4} = \frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^{(8)}(0)}{8!} \Rightarrow y^{(7)}(0) = \frac{-8!}{4} = -10080$

c. Vận dụng khai triển maclaurin để tìm giới hạn

Cách làm: khi x => 0. Khai triển cả tử và mẫu để số hạng có bậc lớn nhất phụ thuộc mẫu

Ví dụ:

Câu 9 – 20173 – Đề 1 – N1: Tính $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)}$

$x^5\ln\left(1-2x^3\right) \sim -2x^8$

$\sqrt{1+2x^4} \sim 1 + x^4 - \frac{x^8}{2}$

=>

$\cos\left(\sqrt{2}x^2\right) \sim 1 - x^4 + \frac{x^8}{6}$

$\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right) = 1 + x^4 - \frac{x^8}{2} - x^4 - x^8 + \frac{x^8}{6} + o\left(x^8\right) = 1 + \frac{-4}{3}x^8$

⇨ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+2x^4}\cos\left(\sqrt{2}x^2\right)}{x^5\ln\left(1-2x^3\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^8}{-2x^8} = \frac{-2}{3}$

$$x \to 0 \qquad x^{3}\ln\left(1-2x^{3}\right) \qquad x \to 0 \; -2x^{6} \qquad 3$$

Chuyên đề 4: Các vấn đề về hàm số - đồ thị

I. Tìm cực trị

<u>Cách làm:</u> Hàm số y=f(x) có cực trị <=> y' đổi dấu

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số f(x)

Bước 2: Tìm y’, giải phương trình y’ = 0.

Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận

<u>Ví dụ:</u>

Câu 5 – GK20141 – Đề 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2}{3x}$

Điều kiện xác định: $x \neq 0$

$y' = \dfrac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} = \dfrac{3x^2 - 6}{9x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{3x^2}$ $. y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Vẽ bảng biến thiên:

x	-∞		$-\sqrt{2}$		0			$\sqrt{2}$		∞
y’	1/3	+	0	-	-∞	-∞	-	0	+	1/3
			$\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$			∞				∞
y	-∞	↗		↘	-∞		↘	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại $y = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $-\sqrt{2}$

Hàm số đạt cực tiểu y = $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ tại x = $\sqrt{2}$

Câu 5 – GK20151 – Đề 2: Tìm cực trị của hàm số $y = 4x - 5\sqrt[5]{x^4}$

$y = 4x - 5x^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y' = 4 - 4x^{\frac{-1}{5}} = 1 - \dfrac{1}{x^{1/5}} = \dfrac{x^{1/5} - 1}{x^{1/5}}$. Ta có bảng biến thiên

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	-∞	0	1	∞

y'		+	-	0	+	
			0			∞
y	-∞			-1		

II. Tiệm cận

1. $f(x)$

- Tiệm cận ngang: xét f(x) khi x tiến tới ∞ và -∞
- Tiệm cận đứng: xét f(x) tại điểm x gián đoạn
- Tiệm cận xiên: y = ax + b

Trong đó: $\left[\begin{array}{l} a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right] \\ a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$. Xét lim tiến tới t_o hoặc ∞

- Tiệm cận đứng: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=a \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty \end{cases}$
- Tiệm cận ngang: $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty \\ \lim\limits_{t\to t_o} g(t)=b \end{cases}$
- Tiệm cận xiên:

Nếu $\lim\limits_{t\to t_o} f(t)=\infty$ và $\lim\limits_{t\to t_o} g(t)=\infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên.

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{t\to t_o}\dfrac{y}{x} \\ b=\lim\limits_{t\to t_o}(y-ax) \end{cases}$$

<u>Ví dụ:</u>

Tìm tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ => 2 tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} y=\infty;\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} y=-\infty$ => 2 tiệm cận đứng

Câu 6 – GK20181 – D7 – N3: Tìm tiệm cận xiên của $y=xe^{2\frac{x+1}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2x+2}{x-1}}=e^2\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(y-e^2x\right)=4e^2\Rightarrow y=e^2(x+4)$. Xét lim tại $-\infty$ tương tự.

Câu 8 – GK20173 – D5 – N3: Tìm tiệm cận xiên y = ln(1+e^{-2x}).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+e^{-2x}\right)=0 => khongco$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}=-2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(y+2x\right)=0 => y=-2x$$

<u>Ví dụ:</u> Tìm tiệm cận của $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t} \\ y=t^2 \end{array}\right.$

$$\lim_{t\to 0}x=\infty;\lim_{t\to 0}y=0 => TCN: y=0$$

$$\lim_{t\to\infty}x=0;\lim_{t\to\infty}y=\infty\Rightarrow TCD: y=0$$

Câu 9 – 20161 – D4:

Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi $x=\dfrac{2016t}{1-t^3};y=\dfrac{2016t^2}{1-t^3}$

$\lim\limits_{t\to 1}x=\infty;\lim\limits_{t\to 1}y=\infty$ => Không có TCD, TCN. Có TCX