

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về xác suất là các khái niệm và quy tắc suy diễn xác suất cũng như về biến ngẫu nhiên và các phân phối xác suất thông dụng (một và hai chiều); các khái niệm cơ bản của thống kê toán học nhằm giúp sinh viên biết cách xử lý các bài toán thống kê về ước lượng, kiểm định giả thuyết. Trên cơ sở đó sinh viên có được một phương pháp tiếp cận với mô hình thực tế và có kiến thức cần thiết để đưa ra lời giải đúng cho các bài toán đó.

Objective: The course provides students with the knowledge of probability such as concepts and inference rules for probability as well as random variables and common probability distributions (one-dimensional and two-dimensional); basic concepts of mathematical statistics which help students in dealing with statistical problems in estimation, hypothesis testing and linear regression. Through the acquired knowledge, students are given a methodology for approaching practical models and finding out an appropriate solution.

Nội dung: Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất, đại lượng ngẫu nhiên, phân phối xác suất, véc tơ ngẫu nhiên, lý thuyết ước lượng thống kê, lý thuyết quyết định thống kê.

Contents: Random event and probability calculation, random variables, probability distributions, random vectors, statistical estimation theory, statistical decision theory.

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Xác suất thống kê (Probability and Statistics)
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI2020
Khối lượng:	3(2-2-0-6) - Lý thuyết: 30 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần học trước:	- MI1111 hoặc MI1112 hoặc MI1113 (Giải tích 1) - MI1121 hoặc MI1122 (Giải tích 2)
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Học phần cung cấp cho sinh viên các kiến thức về phép thử ngẫu nhiên, sự kiện, xác suất của sự kiện, các phương pháp tính xác suất, biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất của nó, các đặc trưng của biến ngẫu nhiên, một số phân phối xác suất thường gặp trong thực tế, luật số lớn và các định lý giới hạn; giới thiệu cho sinh viên các bài toán cơ bản của thống kê và cách giải quyết các bài toán này, như bài toán ước lượng, bài toán kiểm định giả thiết, bài toán tương quan và hồi quy...

Học phần cũng giúp sinh viên có thể tìm hiểu và sử dụng được một số phần mềm thống kê trợ giúp cho công việc của mình.

Ngoài ra học phần cũng cung cấp cho sinh viên các kỹ năng phân tích, kỹ năng phát hiện và giải quyết vấn đề, kỹ năng làm việc nhóm, thuyết trình và thái độ cần thiết để học các học phần kế tiếp cũng như công việc sau này.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN



Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	Hiểu, biết phân loại và có khả năng giải các bài toán về xác suất thống kê	ITU
M1.1	Nắm được bản chất của xác suất, các tính chất cũng như các phương pháp tính xác suất.	ITU
M1.2	Nắm được khái niệm biến ngẫu nhiên, phân phối của biến ngẫu nhiên, các đặc trưng của biến ngẫu nhiên (một và hai chiều) và một số phân phối xác suất thông dụng.	ITU
M1.3	Nắm được những kết quả quan trọng của xác suất để ứng dụng vào thống kê.	U
M1.4	Hiểu và vận dụng được các định lý giới hạn. Nắm được bản chất của luật số lớn.	TU
M1.5	Nắm được các bài toán cơ bản của thống kê (bài toán ước lượng khoảng, bài toán kiểm định giả thuyết thống kê...)	ITU
M1.6	Biết phân loại và giải quyết các bài toán về xác suất thống kê.	U
M2	Biết phân tích, lập mô hình, xử lý số liệu để giải quyết bài toán ứng dụng công cụ xác suất thống kê trong thực tế và các bài toán kỹ thuật chuyên ngành	U
M2.1	Hiểu và vận dụng được ứng dụng của học phần.	U
M2.2	Nhận biết các mô hình thống kê đơn giản và áp dụng chúng để giải quyết một số bài toán kỹ thuật.	U
M2.3	Chủ động tìm hiểu và biết sử dụng một số phần mềm thống kê thông dụng trợ giúp cho công việc.	I/U

I: Mức giới thiệu (Introduce); T: Mức dạy (Teach); U: Mức vận dụng (Utilize).

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

- [1] Tổng Đình Quý (2014). *Xác suất thống kê*. NXB Bách khoa – Hà Nội (tái bản lần thứ 6).
- [2] Bộ môn Toán ứng dụng (2020). *Bài tập Xác suất thống kê* (tài liệu lưu hành nội bộ).

Sách tham khảo

- [1] Đào Hữu Hồ (2007). *Xác suất thống kê*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Đặng Hùng Thắng (2005). *Mở đầu Lý thuyết xác suất và ứng dụng*. NXB Giáo dục.
- [3] Đặng Hùng Thắng (2008). *Thống kê và ứng dụng*. NXB Giáo dục.
- [4] Murray, R. Spiegel, John Schiller, and R. Alu Srinivasan (2001). *Probability and Statistics*. McGraw-Hill Companies.
- [5] Andrew Metcalfe, David Green, Tony Greenfield, Mayhayaudin Mansor, Andrew Smith, Jonathan Tuke (2019). *Statistics in Engineering: With Examples in MATLAB®*

and R. Second Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group.

- [6] H. Thomas (2016). *An Introduction to Statistics with Python* (With Applications in the Life Sciences). Springer.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	Đánh giá quá trình			30%
	A1.1. Thảo luận trên lớp	Thuyết trình	M1, M2.1, M2.2	Cộng điểm chuyên cần, điểm tích cực
	A1.2. Bài tập về nhà	Tự luận		
	A1.3. Bài tập nhóm	Báo cáo		
	A1.4. Thi giữa kỳ	Thi viết	M1.1, M1.2, M1.3, M1.6, M2.1	
A2. Điểm cuối kỳ	A2.1. Thi cuối kỳ	Thi viết	M1, M2.1, M2.2	70%

(*) Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ -2 đến +2, theo Quy định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	Chương 1: Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất 1.1. Các khái niệm cơ bản 1.1.1. Phép thử, sự kiện 1.1.2. Quan hệ và các phép toán của các sự kiện 1.1.3. Giải tích kết hợp	M1.1 M1.3 M1.6 M2.1	- Giới thiệu tổng quan về học phần; Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 1		- Thảo luận - Thực hành	
2	1.2. Định nghĩa xác suất 1.2.1. Định nghĩa cổ điển 1.2.2. Định nghĩa hình học 1.2.3. Định nghĩa thống kê	M1.1 M1.3 M1.6 M2.1	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 1		- Thảo luận - Thực hành	
3	1.3. Công thức cộng và nhân xác suất 1.3.1. Xác suất có điều kiện 1.3.2. Công thức cộng và nhân xác suất 1.3.3. Công thức Béc-nu-li	M1.1 M1.3 M1.6 M2.1	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 1		- Thảo luận - Thực hành	
4	1.4. Công thức Bay-ét	M1.1	- Giảng lý thuyết	A1.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	1.4.1. Công thức xác suất đầy đủ 1.4.2. Công thức Bay-ét	M1.3 M1.6	- Thảo luận	A1.2 A1.3
	Bài tập Chương 1	M2.1 M2.2	- Thảo luận - Thực hành	A1.4 A2.1
5	Chương 2. Biến ngẫu nhiên và luật phân phối xác suất 2.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên 2.1.1. Khái niệm 2.1.2. Phân loại 2.2. Luật phân phối xác suất 2.2.1. Bảng phân phối xác suất (của biến ngẫu nhiên rời rạc) 2.2.2. Hàm phân phối xác suất	M1.2 M1.3 M1.6 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 2		- Thảo luận - Thực hành	
6	2.2.3. Hàm mật độ xác suất (của biến ngẫu nhiên liên tục) 2.3. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên 2.3.1. Kỳ vọng 2.3.2. Phương sai	M1.2 M1.3 M1.6 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 2		- Thảo luận - Thực hành	
7	2.3.3. Một số đặc trưng khác (mốt, trung vị, mômen) 2.4. Một số phân phối thông dụng 2.4.1. Phân phối đều 2.4.2. Phân phối nhị thức 2.4.3. Phân phối Poa-xông	M1.2 M1.3 M1.6 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A1.4 A2.1
	Bài tập Chương 2		- Thảo luận - Thực hành	
8	2.4.4. Phân phối mũ 2.4.5. Phân phối chuẩn 2.4.6. Phân phối khi bình phương và phân phối student (giới thiệu)	M1.2 M1.3 M1.6 M2.1	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
	Bài tập Chương 2	M2.2	- Thảo luận - Thực hành	
9	Chương 3. Biến ngẫu nhiên hai chiều 3.1. Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều 3.1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên hai chiều 3.1.2. Phân phối xác của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc 3.1.3. Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục 3.1.4. Phân phối có điều kiện 3.1.5. Biến ngẫu nhiên độc lập	M1.2 M1.3 M1.4 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	Bài tập Chương 3		- Thảo luận - Thực hành	
10	3.2. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều 3.2.1. Các số đặc trưng của các biến thành phần 3.2.2. Kỳ vọng có điều kiện 3.2.3. Hiệp phương sai và hệ số tương quan 3.3. Hàm của các biến ngẫu nhiên 3.3.1. Hàm của một biến ngẫu nhiên 3.3.2. Hàm của hai biến ngẫu nhiên 3.4. Các định lý giới hạn và luật số lớn 3.4.1. Các định lý giới hạn (định lý giới hạn Moa-vơ – Láp-la-xơ; định lý giới hạn trung tâm) 3.4.2. Luật số lớn Bài tập Chương 3	M1.2 M1.3 M1.4 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận - Thảo luận - Thực hành	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
11	Chương 4. Mẫu thống kê và ước lượng tham số 4.1. Mẫu và thống kê mô tả 4.1.1. Tổng thể và mẫu 4.1.2. Một số cách chọn mẫu cơ bản 4.1.3. Phân loại và mô tả số liệu mẫu 4.2. Mẫu ngẫu nhiên và các đặc trưng mẫu 4.2.1. Mẫu ngẫu nhiên 4.2.2. Các đặc trưng mẫu 4.2.3. Tính các đặc trưng mẫu thông qua mẫu cụ thể 4.3. Ước lượng điểm 4.3.1. Ước lượng tham số 4.3.2. Các tính chất của ước lượng điểm 4.3.3. Các phương pháp ước lượng Bài tập Chương 4 <i>Giới thiệu một phần mềm xử lý số liệu thống kê thông dụng</i>	M1.3 M1.5 M2.1 M2.2 M2.3	- Giảng lý thuyết - Thảo luận - Thảo luận - Thực hành - Thảo luận - Thực hành	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
12	4.4. Khoảng tin cậy 4.4.1. Ước lượng khoảng 4.4.2. Khoảng tin cậy cho kỳ vọng 4.4.3. Khoảng tin cậy cho tỷ lệ Bài tập Chương 4	M1.3 M1.5 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận - Thảo luận - Thực hành	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
13	Chương 5. Kiểm định giả thuyết thống kê 5.1. Giả thuyết thống kê và quy tắc kiểm	M1.3 M1.5	- Giảng lý thuyết - Thảo luận	A1.1 A1.2

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	định 5.1.1. Giả thuyết thống kê 5.1.2. Quy tắc kiểm định giả thuyết thống kê 5.2. Kiểm định giả thuyết dùng một mẫu 5.2.1. Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng (trường hợp mẫu lớn và mẫu bé) Bài tập Chương 4	M2.1 M2.2	- Thảo luận - Thực hành	A1.3 A2.1
14	5.2.2. Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ (trường hợp mẫu lớn) 5.3. Kiểm định giả thuyết dùng hai mẫu 5.3.1. So sánh hai kỳ vọng (trường hợp mẫu lớn và mẫu bé) 5.3.2. So sánh hai tỷ lệ (trường hợp mẫu lớn) Bài tập Chương 5	M1.3 M1.5 M2.1 M2.2	- Giảng lý thuyết - Thảo luận - Thảo luận - Thực hành	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
15	Ôn tập Bài tập Chương 5	M1.3 M1.5 M2.1 M2.2	- Thuyết trình - Thảo luận - Thực hành	A1.1 A1.2 A1.3 A2.1
	<i>Ứng dụng phần mềm thống kê giải bài toán ước lượng tham số và kiểm định giả thuyết</i>	M2.3	- Giới thiệu - Thực hành	

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 15/07/2020



VIỆN TRƯỞNG
 VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÀI TẬP THAM KHẢO
XÁC SUẤT THỐNG KÊ

(Dành cho sinh viên đại học chính quy)

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

HÀ NỘI – 2020

GIỚI THIỆU

Phần bài tập này được biên soạn tương ứng với nội dung của học phần "Xác suất thống kê" với một số thông tin cụ thể như sau:

1. **Tên học phần:** XÁC SUẤT THỐNG KÊ (PROBABILITY AND STATISTICS)
2. **Mã học phần:** MI2020
3. **Khối lượng:** 3(2-2-0-6)
 - **Lý thuyết:** 30 tiết
 - **Bài tập:** 30 tiết
3. **Đối tượng:** Sinh viên các ngành Công nghệ thông tin, Kỹ thuật điện, Điện tử viễn thông, Quản trị kinh doanh, Tài chính – Ngân hàng, Kinh tế, Quản lý công nghiệp, Kinh tế công nghiệp.
4. **Mục tiêu học phần:** Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về xác suất là các khái niệm và quy tắc suy diễn xác suất cũng như về biến ngẫu nhiên và các phân phối xác suất thông dụng (một và hai chiều); các khái niệm cơ bản của thống kê toán học nhằm giúp sinh viên biết cách xử lý các bài toán thống kê về ước lượng, kiểm định giả thuyết và hồi quy tuyến tính. Trên cơ sở đó sinh viên có được một phương pháp tiếp cận với mô hình thực tế và có kiến thức cần thiết để đưa ra lời giải đúng cho các bài toán đó.
5. **Nội dung văn tắt học phần:** Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất, đại lượng ngẫu nhiên, phân phối xác suất, véc tơ ngẫu nhiên, lý thuyết ước lượng thống kê, lý thuyết quyết định thống kê.
6. **Nhiệm vụ của sinh viên:**
 - **Dự lớp:** Đầy đủ theo quy chế.
 - **Bài tập:** Hoàn thành các bài tập của học phần.
7. **Đánh giá kết quả:** QT(0,3) + T(0,7)

- **Điểm quá trình (QT):** trọng số 0,3

Thi giữa kỳ (thi tự luận, thời gian 60 phút; nội dung Chương 1, Chương 2).

Chú ý: Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ -2 đến +2, theo Quy định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.

- **Thi cuối kỳ (T):** trọng số 0,7 (thi tự luận, thời gian 90 phút).

MỤC LỤC

Chương 1. Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất	3
1.1 Quan hệ và phép toán của các sự kiện. Giải tích kết hợp	3
1.2 Định nghĩa xác suất	4
1.3 Xác suất điều kiện. Công thức cộng, nhân xác suất. Công thức Béc-nu-li	7
1.4 Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bay-ét	10
Chương 2. Biến ngẫu nhiên và luật phân phối xác suất	13
2.1 Biến ngẫu nhiên rời rạc	13
2.2 Biến ngẫu nhiên liên tục	16
2.3 Một số luật phân phối xác suất thông dụng	18
Chương 3. Biến ngẫu nhiên nhiều chiều	22
3.1 Biến ngẫu nhiên rời rạc	22
3.2 Biến ngẫu nhiên liên tục	24
Chương 4. Ước lượng tham số	27
4.1 Ước lượng khoảng cho kỳ vọng	27
4.2 Ước lượng khoảng cho tỷ lệ hay xác suất	31
Chương 5. Kiểm định giả thuyết	33
5.1 Kiểm định giả thuyết cho một mẫu	33
5.1.1 Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng	33
5.1.2 Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ	35
5.2 Kiểm định giả thuyết cho hai mẫu	36
5.2.1 So sánh hai kỳ vọng	36
5.2.2 So sánh hai tỷ lệ	38

Chương 1

Sự kiện ngẫu nhiên và phép tính xác suất

1.1 Quan hệ và phép toán của các sự kiện. Giải tích kết hợp

Bài tập 1.1. Một hộp có 10 quả cầu cùng kích cỡ được đánh số từ 0 đến 9. Từ hộp người ta lấy ngẫu nhiên 1 quả ra và ghi lại số của quả đó, sau đó trả lại vào trong hộp. Làm như vậy 5 lần ta thu được một dãy số có 5 chữ số.

- (a) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó?
- (b) Có bao nhiêu kết quả cho dãy số đó sao cho các chữ số trong đó là khác nhau?

Bài tập 1.2. Có 6 bạn Hoa, Trang, Vân, Anh, Thái, Trung ngồi quanh một bàn tròn để uống cà phê, trong đó bạn Trang và Vân không ngồi cạnh nhau.

- (a) Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn này trên bàn tròn nếu tất cả các ghế là không phân biệt?
- (b) Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn này trên bàn tròn nếu tất cả các ghế có phân biệt?

Bài tập 1.3. Từ một bộ bài tú lơ khơ 52 cây rút ngẫu nhiên và không quan tâm đến thứ tự 4 cây. Có bao nhiêu khả năng xảy ra trường hợp trong 4 cây đó:

- (a) đều là át;
- (b) có duy nhất 1 cây át;
- (c) có ít nhất 1 cây át;
- (d) có đủ 4 loại rô, cơ, bích, nhép.

Bài tập 1.4. Có 20 sinh viên. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 sinh viên (không xét tới tính thứ tự) tham gia câu lạc bộ Văn và 4 sinh viên tham gia câu lạc bộ Toán trong trường hợp:

- (a) một sinh viên chỉ tham gia nhiều nhất một câu lạc bộ;
- (b) một sinh viên có thể tham gia cả hai câu lạc bộ.

Bài tập 1.5. Cho phương trình $x + y + z = 100$. Phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm:

- (a) nguyên dương;
- (b) nguyên không âm.

Bài tập 1.6. Thực hiện một phép thử tung 2 con xúc xắc, rồi ghi lại số chấm xuất hiện trên mỗi con. Gọi x, y là số chấm xuất hiện tương ứng trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai. Ký hiệu không gian mẫu $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x, y \leq 6\}$. Hãy liệt kê các phần tử của các sự kiện sau:

- (a) A : "tổng số chấm xuất hiện lớn hơn 8";
- (b) B : "có ít nhất một con xúc xắc ra mặt 2 chấm";
- (c) C : "con xúc xắc thứ nhất có số chấm lớn hơn 4";
- (d) $A + B, A + C, B + C, A + B + C$, sau đó thể hiện thông qua sơ đồ Venn;
- (e) AB, AC, BC, ABC , sau đó thể hiện thông qua sơ đồ Venn.

1.2 Định nghĩa xác suất

Bài tập 1.7. Số lượng nhân viên của công ty A được phân loại theo lứa tuổi và giới tính như sau:

Tuổi \ Giới tính	Giới tính	
	Nam	Nữ
Dưới 30	120	170
Từ 30 – 40	260	420
Trên 40	400	230

Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên một người của công ty thì được:

- (a) một nhân viên trong độ tuổi 30 – 40;
- (b) một nam nhân viên trên 40 tuổi;
- (c) một nữ nhân viên từ 40 tuổi trở xuống.

Bài tập 1.8. Một kiện hàng có 24 sản phẩm, trong số đó có 14 sản phẩm loại I, 8 sản phẩm loại II và 2 sản phẩm loại III. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm để kiểm tra. Tính xác suất trong 4 sản phẩm đó:

- (a) có 3 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II;
- (b) có ít nhất 3 sản phẩm loại I;
- (c) có ít nhất 1 sản phẩm loại III.

Bài tập 1.9. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 tới 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để:

- (a) tất cả tấm thẻ đều mang số chẵn;
- (b) có đúng 5 số chia hết cho 3;
- (c) có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có một số chia hết cho 10.

Bài tập 1.10. Việt Nam có 64 tỉnh thành, mỗi tỉnh thành có 2 đại biểu quốc hội. Người ta chọn ngẫu nhiên 64 đại biểu quốc hội để thành lập một ủy ban. Tính xác suất để:

- (a) trong ủy ban có ít nhất một người của thành phố Hà Nội;
- (b) mỗi tỉnh có đúng một đại biểu trong ủy ban.

Bài tập 1.11. Một đoàn tàu có 4 toa được đánh số I, II, III, IV đỗ ở sân ga. Có 6 hành khách từ sân ga lên tàu. Mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để:

- (a) toa I có 3 người, toa II có 2 người và toa III có 1 người;
- (b) một toa có 3 người, một toa 2 người, một toa có 1 người;
- (c) mỗi toa có ít nhất 1 người.

Bài tập 1.12. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Một con xúc xắc có số chấm các mặt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, con xúc xắc còn lại có số chấm các mặt là 2, 3, 4, 5, 6, 6. Tính xác suất:

- (a) có đúng 1 con xúc xắc ra mặt 6 chấm;
- (b) có ít nhất 1 con xúc xắc ra mặt 6 chấm;
- (c) tổng số chấm xuất hiện bằng 7.

Bài tập 1.13. Trong một thành phố có 5 khách sạn. Có 3 khách du lịch đến thành phố đó, mỗi người chọn ngẫu nhiên một khách sạn. Tìm xác suất để:

- (a) mỗi người ở một khách sạn khác nhau;
- (b) có đúng 2 người ở cùng một khách sạn.

Bài tập 1.14. Một lớp có 3 tổ sinh viên: tổ I có 12 người, tổ II có 10 người và tổ III có 15 người. Chọn hủ họa ra một nhóm sinh viên gồm 4 người.

- (a) Tính xác suất để trong nhóm có đúng một sinh viên tổ I.
- (b) Biết trong nhóm có đúng một sinh viên tổ I, tính xác suất để trong nhóm đó có đúng một sinh viên tổ III.

Bài tập 1.15. Ba nữ nhân viên phục vụ A, B và C thay nhau rửa đĩa chén và giả sử ba người này đều “khéo léo” như nhau. Trong một tháng có 4 chén bị vỡ. Tìm xác suất để:

- (a) chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén;
- (b) một trong ba người đánh vỡ 3 chén;
- (c) một trong ba người đánh vỡ cả 4 chén.

Bài tập 1.16. Đội A có 3 người và đội B có 3 người tham gia vào một cuộc chạy thi, 6 người có khả năng như nhau và xuất phát cùng nhau. Tính xác suất để 3 người đội A về vị trí nhất, nhì, ba.

Bài tập 1.17. Phân phối ngẫu nhiên n viên bi vào n chiếc hộp (biết rằng mỗi hộp có thể chứa cả n viên bi). Tính xác suất để:

- (a) Hộp nào cũng có bi;
- (b) Có đúng một hộp không có bi.

Bài tập 1.18. Hai người hẹn gặp nhau ở công viên trong khoảng thời gian từ 5h00 đến 6h00 để cùng đi tập thể dục. Hai người quy ước ai đến không thấy người kia sẽ chỉ chờ trong vòng 10 phút. Giả sử rằng thời điểm hai người đến công viên là ngẫu nhiên trong khoảng từ 5h00 đến 6h00. Tính xác suất để hai người gặp nhau.

Bài tập 1.19. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Lấy một điểm C bất kỳ trên đoạn thẳng đó. Tính xác suất chênh lệch độ dài giữa hai đoạn thẳng AC và CB không vượt quá 4cm.

Bài tập 1.20. Cho đoạn thẳng AB độ dài 10cm. Lấy hai điểm C, D bất kỳ trên đoạn AB (C nằm giữa A và D). Tính xác suất độ dài AC, CD, DB tạo thành 3 cạnh một tam giác.

1.3 Xác suất điều kiện. Công thức cộng, nhân xác suất. Công thức Béc-nu-li

Bài tập 1.21. Cho các sự kiện A, B với $P(A) = P(B) = 1/2$; $P(A\bar{B}) = 1/8$. Tìm:

- (a) $P(\bar{A} + \bar{B})$;
- (b) $P(\bar{A}B), P(A + \bar{B})$.

Bài tập 1.22. Cho ba sự kiện A, B, C độc lập từng đôi thỏa mãn $P(A) = P(B) = P(C) = p$ và $P(ABC) = 0$.

- (a) Tính $P(ABC\bar{C}); P(A\bar{B}\bar{C}); P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$.
- (b) Tìm giá trị p lớn nhất có thể có.

Bài tập 1.23. Trong cùng một phép thử, A và B là các sự kiện thỏa mãn $P(A) = 1/4, P(B) = 1/2$. Tính xác suất để A không xảy ra nhưng B xảy ra trong các trường hợp sau:

- (a) A và B xung khắc;
- (b) A suy ra B ;
- (c) $P(AB) = 1/8$.

Bài tập 1.24. Cho hai sự kiện A và B trong đó $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,7$. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P(AB)$ và $P(A + B)$ và điều kiện đạt được các giá trị đó.

Bài tập 1.25. Ba người A, B và C lần lượt tung một đồng xu. Giả sử rằng A tung đồng xu đầu tiên, B tung thứ hai và thứ ba C tung. Quá trình lặp đi lặp lại cho đến khi ai thắng bằng việc trở thành người đầu tiên thu được mặt ngửa. Xác định khả năng mà mỗi người sẽ giành chiến thắng.

Bài tập 1.26. Trong một thùng kín có 6 quả cầu đỏ, 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả cầu cho đến khi lấy được cầu đỏ thì dừng lại. Tính xác suất để:

- (a) Lấy được 2 cầu trắng, 1 cầu vàng.
- (b) Không có quả cầu trắng nào được lấy ra.

Bài tập 1.27. Ba xạ thủ A, B, C độc lập với nhau cùng bắn súng vào bia. Xác suất bắn trúng bia của 3 người A, B và C tương ứng là 0,7, 0,6 và 0,9. Tính xác suất để:

- (a) có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia;

- (b) có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia;
- (c) có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia;
- (d) xạ thủ A bắn trúng bia biết rằng có hai xạ thủ bắn trúng bia.

Bài tập 1.28. Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm 4 bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 3 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thấp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập. Tính xác suất để trong 18 giờ thấp sáng liên tục:

- (a) cả hai hệ thống bị hỏng;
- (b) chỉ có một hệ thống bị hỏng.

Bài tập 1.29. Có 6 khẩu súng cũ và 4 khẩu súng mới, trong đó xác suất trúng khi bắn bằng súng cũ là 0,8, còn súng mới là 0,95. Bắn hủ họa bằng một khẩu súng vào một mục tiêu thì thấy trúng. Điều gì có khả năng xảy ra lớn hơn: bắn bằng khẩu súng mới hay bắn bằng khẩu súng cũ?

Bài tập 1.30. Theo thống kê xác suất để hai ngày liên tiếp có mưa ở một thành phố vào mùa hè là 0,5; còn không mưa là 0,3. Biết các sự kiện có một ngày mưa, một ngày không mưa là đồng khả năng. Tính xác suất để ngày thứ hai có mưa, biết ngày đầu không mưa.

Bài tập 1.31. Một hộp chứa a quả bóng màu đỏ và b quả bóng màu xanh. Một quả bóng được chọn ngẫu nhiên và quan sát màu sắc của nó. Sau đó bóng được trả lại cho vào hộp và k bóng cùng màu cũng được thêm vào hộp. Một quả bóng thứ hai sau đó được chọn một cách ngẫu nhiên, màu sắc của nó được quan sát, và nó được trả lại cho vào hộp với k bóng bổ sung cùng một màu. Quá trình này được lặp đi lặp lại 4 lần. Tính xác suất để ba quả bóng đầu tiên sẽ có màu đỏ và quả bóng thứ tư có màu xanh.

Bài tập 1.32. Một cửa hàng sách ước lượng rằng: trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này:

- (a) không thực hiện cả hai điều trên;
- (b) không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Bài tập 1.33. Một cuộc khảo sát 1000 người về hoạt động thể dục thấy có 80% số người thích đi bộ và 60% thích đạp xe vào buổi sáng và tất cả mọi người đều tham gia ít nhất một trong hai hoạt động trên. Chọn ngẫu nhiên một người hoạt động thể dục. Nếu gặp được người thích đi xe đạp thì xác suất mà người đó không thích đi bộ là bao nhiêu?

Bài tập 1.34. Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi. Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ:

- (a) được vào đội tuyển;
- (b) bị loại ở vòng thứ ba;
- (c) bị loại ở vòng thứ hai, biết rằng thí sinh này bị loại.

Bài tập 1.35. Theo thống kê ở các gia đình có hai con thì xác suất để con thứ nhất và con thứ hai đều là trai là 0,27 và hai con đều là gái là 0,23, còn xác suất con thứ nhất và con thứ hai có một trai và một gái là đồng khả năng. Biết sự kiện khi xét một gia đình được chọn ngẫu nhiên có con thứ nhất là gái, tìm xác suất để con thứ hai là trai.

Bài tập 1.36. Một tổ có 15 sinh viên trong đó có 5 sinh viên học giỏi môn "Xác suất thống kê". Cần chia làm 5 nhóm, mỗi nhóm 3 sinh viên. Tính xác suất để nhóm nào cũng có một sinh viên học giỏi môn "Xác suất thống kê".

Bài tập 1.37. Một hộp có n áo trắng và $2n$ áo xanh. Chia ngẫu nhiên các áo trong hộp thành n nhóm mỗi nhóm 3 áo.

- (a) Tính xác suất để trong mỗi nhóm đều có áo trắng;
- (b) Áp dụng cho $n = 5$.

Bài tập 1.38. Hai vận động viên bóng bàn A và B đấu một trận gồm tối đa 5 ván (không có kết quả hòa sau mỗi ván và trận đấu sẽ dừng nếu một người nào đó thắng trước 3 ván). Xác suất để A thắng được ở một ván là 0,7.

- (a) Tính các xác suất để A thắng sau x ván ($x = 3, 4, 5$).
- (b) Tính xác suất để trận đấu kết thúc sau 5 ván.

Bài tập 1.39. Một bài thi trắc nghiệm (multiple-choice test) gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Giả sử một câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hù họa câu trả lời. Tìm xác suất để:

- (a) Học sinh đó được 13 điểm.
- (b) Học sinh đó bị điểm âm.

Bài tập 1.40. Một nhân viên bán hàng mỗi ngày đi chào hàng ở 10 nơi với xác suất bán được hàng ở mỗi nơi là 0,2. Tìm xác suất để:

- (a) người đó bán được hàng ở 2 nơi;
- (b) người đó bán được hàng ở ít nhất 1 nơi.

Bài tập 1.41. Xác suất trúng đích của một lần bắn là 0,4. Cần phải bắn bao nhiêu phát đạn để xác suất có ít nhất một viên bắn trúng sẽ lớn hơn 0,95?

Bài tập 1.42. Hai cầu thủ bóng rổ, mỗi người ném bóng 2 lần vào rổ. Xác suất ném trúng rổ của mỗi cầu thủ theo thứ tự lần lượt là 0,6 và 0,7. Tìm xác suất để

- (a) số lần ném trúng rổ của hai người bằng nhau;
- (b) số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ nhất nhiều hơn số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ hai.

Bài tập 1.43. Xác suất sản xuất ra phế phẩm của một máy là 0,005. Tìm xác suất để trong 800 sản phẩm của máy đó có đúng 3 phế phẩm.

Bài tập 1.44. Một công nhân đứng máy 1000 ống sợi. Xác suất mỗi ống bị đứt trong vòng một giờ là 0,005. Tính xác suất để trong vòng một giờ:

- (a) 40 ống sợi bị đứt;
- (b) không quá 40 ống sợi bị đứt.

Bài tập 1.45. Xác suất ném trúng rổ của một cầu thủ là 0,8. Tìm xác suất để trong 100 lần cầu thủ đó:

- (a) ném trúng 75 lần;
- (b) ném trúng không ít hơn 75 lần.

1.4 Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bay-ét

Bài tập 1.46. Một phân xưởng có 3 máy tự động: máy I sản xuất 25%, máy II sản xuất 30%, máy III sản xuất 45% số sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm tương ứng của các máy lần lượt là 0,1%, 0,2% và 0,3%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm của phân xưởng.

- (a) Tìm xác suất nó là phế phẩm.
- (b) Biết nó là phế phẩm. Tính xác suất để sản phẩm đó do máy I sản xuất.

Bài tập 1.47. Có 3 hộp đựng bi: hộp thứ nhất có 3 bi đỏ, 2 bi trắng; hộp thứ hai có 2 bi đỏ, 2 bi trắng; hộp thứ ba không có viên nào. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất và 1 viên bi từ hộp thứ hai bỏ vào hộp thứ ba. Sau đó từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi.

- (a) Tính xác suất để viên bi đó màu đỏ.
- (b) Biết rằng viên bi lấy ra từ hộp thứ ba màu đỏ, tính xác suất để lúc đầu ta lấy được viên bi đỏ từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ ba.

Bài tập 1.48. Hộp I có 4 viên bi đỏ, 2 viên bi xanh; hộp II có 3 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh. Bỏ ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lại bỏ ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II sang hộp I. Cuối cùng rút ngẫu nhiên từ hộp I ra một viên bi.

- (a) Tính xác suất để viên bi rút ra sau cùng màu đỏ.
- (b) Nếu viên rút ra sau cùng màu đỏ, tìm xác suất lúc ban đầu rút được viên bi đỏ ở hộp I cho vào hộp II.

Bài tập 1.49. Trong một kho rượu, số lượng rượu loại A và loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai và đưa cho 5 người nếm thử. Biết xác suất đoán đúng của mỗi người là 0,8. Có 3 người kết luận rượu loại A, 2 người kết luận rượu loại B. Hỏi khi đó xác suất chai rượu đó thuộc loại A là bao nhiêu?

Bài tập 1.50. Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm 3 phế phẩm; lô II có 6 chính phẩm 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I sang lô II, sau đó từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm được 2 chính phẩm. Tính xác suất để 2 chính phẩm lấy ra sau cùng là của lô I.

Bài tập 1.51. Có hai lô sản phẩm: lô I có 7 chính phẩm, 3 phế phẩm; lô II có 8 chính phẩm, 2 phế phẩm. Từ lô I lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm, từ lô II lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Sau đó từ số sản phẩm này lại lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để trong 2 sản phẩm lấy ra sau cùng có ít nhất 1 chính phẩm.

Bài tập 1.52. Có ba kiện hàng (mỗi kiện hàng có 20 sản phẩm) với số sản phẩm tốt tương ứng của mỗi kiện là 18, 16, 12. Lấy ngẫu nhiên một kiện hàng, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm thì được sản phẩm tốt. Trả sản phẩm này lại kiện hàng vừa lấy, sau đó lại lấy ngẫu nhiên một sản phẩm thì được sản phẩm tốt. Tính xác suất để các sản phẩm tốt đó được lấy từ kiện hàng thứ nhất.

Bài tập 1.53. Tỷ lệ người nghiện thuốc là ở một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%.

(a) Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

(b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất người đó nghiện thuốc lá.

Bài tập 1.54. Một công nhân đi làm ở thành phố khi trở về nhà có 2 cách: hoặc đi theo đường ngầm hoặc đi qua cầu. Biết rằng ông ta đi lối đường ngầm trong $\frac{1}{3}$ các trường hợp, còn lại đi lối cầu. Nếu đi lối đường ngầm 75% trường hợp ông ta về đến nhà trước 6 giờ tối; còn nếu đi lối cầu chỉ có 70% trường hợp (nhưng đi lối cầu thích hơn). Tìm xác suất để công nhân đó đã đi lối cầu biết rằng ông ta về đến nhà sau 6 giờ tối.

Bài tập 1.55. Tại một phòng khám chuyên khoa tỷ lệ người đến khám có bệnh là 0,8. Người ta áp dụng phương pháp chẩn đoán mới thì thấy nếu khẳng định có bệnh thì đúng 9 trên 10 trường hợp; còn nếu khẳng định không bệnh thì đúng 5 trên 10 trường hợp. Tính xác suất để

(a) chẩn đoán có bệnh;

(b) chẩn đoán đúng.

Bài tập 1.56. Một hãng hàng không cho biết rằng 5% số khách đặt trước vé cho các chuyến đã định sẽ hoãn không đi chuyến bay đó. Do đó hãng đã đưa ra một chính sách là sẽ bán 52 ghế cho một chuyến bay mà trong đó mỗi chuyến chỉ trở được 50 khách hàng. Tìm xác suất để tất cả các khách đặt chỗ trước và không hoãn chuyến bay đều có ghế. Biết rằng xác suất bán được 51 vé hoặc 52 vé là như nhau và bằng 10%.

Bài tập 1.57. Một trạm chỉ phát hai loại tín hiệu A và B với xác suất tương ứng là 0,84 và 0,16. Do có nhiễu trên đường truyền nên $\frac{1}{6}$ tín hiệu A bị méo và được thu như là tín hiệu B, còn $\frac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo thành tín hiệu A.

(a) Tìm xác suất thu được tín hiệu A;

(b) Giả sử thu được tín hiệu A, tìm xác suất để thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Bài tập 1.58. Một người có ba chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở mỗi chỗ tương ứng là 0,6; 0,7 và 0,8. Biết rằng đến một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tính xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất.

Bài tập 1.59. Trong học kỳ I năm học 2018-2019, sinh viên phải thi 4 học phần. Xác suất để sinh viên thi đạt một học phần trong mỗi lần thi đều là 0,8. Nếu thi không đạt học phần nào phải thi lại học phần đó. Tính xác suất để một sinh viên thi đạt cả 4 học phần trong đó không có học phần nào thi quá 2 lần.

Bài tập 1.60. Ba người thợ cùng may một loại áo với xác suất may được sản phẩm chất lượng cao tương ứng là 0,9; 0,9 và 0,8. Biết một người khi may 8 áo thì có 6 sản phẩm chất lượng cao. Tìm xác suất để người đó may 8 áo nữa thì có 6 áo chất lượng cao.



Chương 2

Biến ngẫu nhiên và luật phân phối xác suất

2.1 Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài tập 2.1. Một chùm chìa khóa gồm 4 chiếc giống nhau, trong đó chỉ có một chiếc mở được cửa. Người ta thử ngẫu nhiên từng chiếc cho đến khi mở được cửa. Gọi X là số lần thử.

- (a) Tìm phân phối xác suất của X .
- (b) Tìm kỳ vọng và phương sai của X .
- (b) Viết hàm phân phối xác suất của X .

Bài tập 2.2. Một xạ thủ có 5 viên đạn. Anh ta phải bắn vào bia với quy định khi nào có 2 viên trúng bia hoặc hết đạn thì dừng. Biết xác suất bắn trúng bia ở mỗi lần bắn là 0,4 và gọi X là số đạn cần bắn.

- (a) Tìm phân phối xác suất của X .
- (b) Tìm kỳ vọng, phương sai và viết hàm phân phối xác suất của X .

Bài tập 2.3. Tỷ lệ cử tri ủng hộ ứng cử viên A trong một cuộc bầu cử tổng thống là 40%. Người ta hỏi ý kiến 20 cử tri được chọn một cách ngẫu nhiên. Gọi X là số người bỏ phiếu cho ông A trong 20 người đó.

- (a) Tìm giá trị trung bình, độ lệch chuẩn của X và $\text{mod}X$.
- (b) Tìm $P(X = 10)$.

Bài tập 2.4. Biến ngẫu nhiên rời rạc X chỉ có 2 giá trị x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Xác suất để X nhận giá trị x_1 là 0,2. Tìm luật phân phối xác suất của X , biết kỳ vọng $E(X) = 2,6$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = 0,8$.

Bài tập 2.5. Mỗi khách uống cà phê tại quán cà phê mỗi ngày đều được phát ngẫu nhiên một vé bốc thăm, xác suất khách hàng trúng thăm là 0,1. Nếu khách hàng trúng thăm liên tục trong 5 ngày (từ thứ hai đến thứ sáu) sẽ nhận được 100\$, nếu không sẽ không được gì. An uống cà phê liên tục tại quán này 4 tuần liên tiếp. Gọi X là số tiền An được thưởng khi bốc thăm trong 4 tuần đó. Xác định kỳ vọng và phương sai của X .

Bài tập 2.6. Tung đồng xu 10 lần. Biến ngẫu nhiên X được định nghĩa như sau: ($X = 1$) nếu sự kiện đúng 3 lần ra mặt sấp xảy ra và ($X = 0$) trong trường hợp còn lại. Tính kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $V(X)$.

Bài tập 2.7. Có 5 sản phẩm trong đó có 4 chính phẩm và 1 phế phẩm. Người ta lấy ra lần lượt hai sản phẩm (lấy không hoàn lại).

(a) Gọi X là "số chính phẩm gặp phải". Lập bảng phân phối xác suất của X . Tính $E(X)$ và $V(X)$.

(b) Gọi Y là "số phế phẩm gặp phải". Lập hệ thức cho mối quan hệ giữa X và Y .

Bài tập 2.8. Người ta đặt ngẫu nhiên 10 thẻ (trong đó có 5 thẻ màu đỏ và 5 thẻ màu xanh) vào 10 phong bì (5 phong bì có màu đỏ và 5 phong bì có màu xanh), mỗi phong bì một thẻ. Gọi X là số phong bì có chứa một thẻ cùng màu. Tính giá trị:

(a) $P(X = 1)$.

(b) $E(X)$.

Bài tập 2.9. Có 2 kiện hàng. Kiện I có 3 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu. Kiện II có 2 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ kiện I ra 2 sản phẩm và từ kiện II ra 1 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm lấy ra.

Bài tập 2.10. Có hai kiện hàng. Kiện thứ nhất có 8 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm xấu. Kiện thứ hai có 5 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ kiện I bỏ sang kiện II. Sau đó từ kiện II lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm. Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm tốt có trong 2 sản phẩm lấy ra từ kiện II.

Bài tập 2.11. Gieo hai con xúc sắc đồng chất 5 lần, gọi X là số lần xuất hiện hai mặt 6.

(a) Tính xác suất của sự kiện số lần xuất hiện hai mặt 6 ít nhất là 2.

(b) Tính $E(X)$, $V(X)$.

(c) Viết hàm phân phối $F_X(x)$.

Bài tập 2.12. Một thanh niên nam vào cửa hàng thấy 5 máy thu thanh giống nhau. Anh ta đề nghị cửa hàng cho anh ta thử lần lượt các máy đến khi chọn được máy tốt thì mua, nếu cả 5 lần đều xấu thì thôi. Biết rằng xác suất để một máy xấu là 0,6 và các máy xấu tốt độc lập với nhau. Gọi X là số lần thử. Lập bảng phân phối xác suất của X .

Bài tập 2.13. Có hai hộp bi. Hộp I có 2 bi trắng, 3 bi đỏ. Hộp II có 2 bi trắng, 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lại lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp II bỏ vào hộp I. Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số bi trắng có mặt ở hộp I, hộp II sau khi đã chuyển xong.

Bài tập 2.14. Một người đi làm từ nhà đến cơ quan phải qua 3 ngã tư. Xác suất để người đó gặp đèn đỏ ở các ngã tư tương ứng là 0,2; 0,4 và 0,5. Gọi X là số đèn đỏ mà người đó gặp phải trong một lần đi làm (giả sử 3 đèn giao thông ở ngã tư hoạt động độc lập với nhau).

- Lập bảng phân phối xác suất của X . Tính kỳ vọng, phương sai của X . Tìm hàm phân phối xác suất của X .
- Hỏi thời gian trung bình phải ngừng trên đường là bao nhiêu biết rằng mỗi khi gặp đèn đỏ người ấy phải đợi khoảng 3 phút.

Bài tập 2.15. Một người chơi trò chơi tung con xúc sắc cân đối đồng chất ba lần. Nếu cả ba lần đều xuất hiện mặt 6 thì thu về 36\$, nếu hai lần xuất hiện mặt 6 thì thu về 2,8\$, nếu một lần xuất hiện mặt 6 thì thu về 0,4\$. Biết rằng khi chơi người đó phải nộp x \$.

- Tìm x sao cho trò chơi là vô thưởng vô phạt.
- x bằng bao nhiêu thì trung bình mỗi lần chơi, người chơi mất 1\$?

Bài tập 2.16. Một kiện hàng có 12 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm loại I và 5 sản phẩm loại II. Khi bán được một sản phẩm loại I thì được lãi 50 ngàn đồng; còn nếu bán được một sản phẩm loại II thì được lãi 20 ngàn đồng. Lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 3 sản phẩm.

- Tìm quy luật phân phối xác suất của số tiền lãi thu được do bán 3 sản phẩm đó; tính kỳ vọng, phương sai của số tiền lãi thu được do bán 3 sản phẩm đó.
- Viết hàm phân phối, vẽ đồ thị hàm phân phối của số tiền lãi thu được khi bán 3 sản phẩm đó.

Bài tập 2.17. Một hộp đựng 15 quả bóng bàn trong đó có 10 quả còn mới. Lần đầu ta lấy ra 3 quả để thi đấu, sau đó lại trả 3 quả đó vào hộp. Lần thứ hai lại lấy ra 3 quả. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số quả bóng mới trong 3 quả lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất, tính kỳ vọng, phương sai của X .

Bài tập 2.18. Một cơ sở thí nghiệm có 3 phòng thí nghiệm như nhau. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm của các phòng lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Một sinh viên chọn một phòng thí nghiệm bất kỳ và tiến hành 3 thí nghiệm độc lập. Gọi X là số thí nghiệm thành công.

- (a) Lập bảng phân phối xác suất của X , tính kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $V(X)$.
- (b) Theo anh (chị) thì khả năng chắc chắn sẽ thành công mấy thí nghiệm?

2.2 Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập 2.19. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} k \sin 3x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \\ 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

- (a) Xác định k và hàm phân phối $F_X(x)$.
- (b) Tính $P(\pi/6 \leq X < \pi/3)$.

Bài tập 2.20. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}.$$

Xác định hằng số c và sau đó tính kỳ vọng của X .

Bài tập 2.21. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ là $f_X(x) = ae^{-|x|}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

- (a) Xác định a .
- (b) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X , biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.
- (c) Tìm $E(X)$, $V(X)$.
- (d) Tính xác suất để sau ba lần lặp lại phép thử một cách độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(0; \ln 3)$.

Bài tập 2.22. Nhu cầu hàng năm về loại hàng A là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau (đơn vị: ngàn sản phẩm):

$$f_X(x) = \begin{cases} k(30 - x), & x \in (0, 30), \\ 0, & x \notin (0, 30). \end{cases}$$

- (a) Tìm k .

(b) Tìm hàm phân phối $F_X(x)$.

(c) Tìm nhu cầu trung bình hàng năm về loại hàng đó.

Bài tập 2.23. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} - k \cos x, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

(a) Tìm k .

(b) Tìm $P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) Tìm $E(X)$.

Bài tập 2.24. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a, \\ A + B \arcsin \frac{x}{a}, & x \in (-a, a), \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

(a) Tìm A và B .

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

Bài tập 2.25. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng

$$F_X(x) = a + b \arctan x, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(a) Tìm hệ số a và b .

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

(c) Tìm xác suất để khi tiến hành 3 phép thử độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài tập 2.26. Biến ngẫu nhiên X liên tục trên toàn trục số và có hàm phân phối xác suất $F_X(x) = 1/2 + 1/\pi \arctan x/2$. Tìm giá trị có thể có của x_1 thỏa mãn điều kiện $P(X > x_1) = 1/4$.

Bài tập 2.27. Thu nhập của dân cư tại một vùng là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, & x \geq x_0, \alpha > 0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Hãy xác định mức thu nhập sao cho lấy ngẫu nhiên một người ở vùng đó thì thu nhập của người này vượt quá mức trên với xác suất 0,5.

Bài tập 2.28. Thời gian phục vụ mỗi khách hàng tại một cửa hàng ăn nhanh là biến ngẫu nhiên X tuân theo quy luật lũy thừa với hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

với x được tính bằng phút/khách hàng.

- (a) Tìm xác suất để thời gian phục vụ một khách hàng nào đó sẽ nằm trong khoảng $(0, 4; 1)$ (phút).
- (b) Tính thời gian trung bình để phục vụ một khách hàng.

Bài tập 2.29. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{khi } x > 0, \\ 0, & \text{khi } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Tính $P(X \geq 5)$.
- (b) Xác định hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = -2X + 5$.

Bài tập 2.30. Cho hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

của biến ngẫu nhiên liên tục X và định nghĩa $Y = [X]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá X (nghĩa là $[x] = 0$ nếu $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ nếu $1 \leq x < 2 \dots$).

- (a) Tính $P(Y = 0)$.
- (b) Tính $E(Y)$.

2.3 Một số luật phân phối xác suất thông dụng

Bài tập 2.31. Bắn 5 viên đạn vào một mục tiêu. Xác suất trúng đích của mỗi lần bắn như nhau và bằng 0,2. Muốn phá hủy mục tiêu phải có ít nhất 3 viên trúng mục tiêu. Tìm xác suất mục tiêu bị phá hủy.

Bài tập 2.32. Xác suất để một sinh viên chậm giờ thi là 0,02. Tìm số sinh viên chậm giờ thi có khả năng xảy ra nhiều nhất trong 855 sinh viên dự thi.

Bài tập 2.33. Có 10 máy sản xuất sản phẩm (độc lập nhau), mỗi máy sản xuất ra 2% phế phẩm.

- (a) Từ mỗi máy sản xuất lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Hỏi xác suất lấy được nhiều nhất 2 phế phẩm trong 10 sản phẩm này là bao nhiêu?
- (b) Trung bình có bao nhiêu sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra phế phẩm đầu tiên (giả sử các sản phẩm sản xuất ra là độc lập)?

Bài tập 2.34. Một ga ra cho thuê ô tô thấy rằng số người đến thuê ô tô vào thứ bảy cuối tuần là một biến ngẫu nhiên có phân bố Poa-xông với tham số $\lambda = 2$. Giả sử gara có 4 chiếc ô tô.

- (a) Tìm xác suất để tất cả 4 ô tô đều được thuê vào thứ 7.
- (b) Tìm xác suất gara không đáp ứng được yêu cầu (thiếu xe cho thuê) vào thứ 7.
- (c) Trung bình có bao nhiêu ô tô được thuê vào ngày thứ 7?

Bài tập 2.35. Số khách hàng đến một cửa hàng bán lẻ là một biến ngẫu nhiên có phân phối Poa-xông với trung bình 6 khách hàng đến trong vòng một giờ.

- (a) Nếu có đúng 5 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:00 thì xác suất để có ít nhất 8 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:30 là bao nhiêu?
- (b) Nếu có ít hơn 6 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 12:00 thì cửa hàng được xem như là không có lợi nhuận. Tìm xác suất để cửa hàng có đúng 1 ngày có lãi trong một tuần (giả sử cửa hàng mở cửa 6 ngày trong tuần).

Bài tập 2.36. Gọi biến ngẫu nhiên Y là tỷ lệ người trong 1000 người Mỹ xác nhận rằng có uống nhiều hơn 5 cốc bia mỗi ngày. Giả sử rằng tỷ lệ đúng là 10% trên toàn bộ dân số Mỹ. Tính $E(Y)$, $V(Y)$.

Bài tập 2.37. Giả sử X là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình là 3 và phương sai là 0,16.

- (a) Hãy tính $P(X > 3)$, $P(X > 3,784)$.
- (b) Tìm c sao cho $P(3 - c < X < 3 + c) = 0,9$.

Bài tập 2.38. Cho biên độ dao động của một vật là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất là

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0, & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

trong đó σ là tham số đã biết. Tính xác suất để biên độ dao động đó lớn hơn trị trung bình của nó.

Bài tập 2.39. Lãi suất (%) đầu tư vào một dự án trong năm 2019 được coi như một biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn. Theo đánh giá của ủy ban đầu tư thì với xác suất 0,1587 cho lãi suất lớn hơn 20% và với xác suất 0,0228 cho lãi suất lớn hơn 25%. Vậy khả năng đầu tư mà không bị lỗ là bao nhiêu?

Bài tập 2.40. Tung một đồng xu vô hạn lần, xác suất thu được mặt ngửa mỗi lần là p .

- Gọi X là số lần tung đến khi xuất hiện mặt ngửa lần đầu tiên (tại lần tung thứ X). Tính $E(X)$.
- Tính xác suất xuất hiện đúng 6 lần ngửa trong 10 lần tung.
- Tính xác suất để lần xuất hiện mặt ngửa thứ 6 rơi vào lần tung thứ 10.

Bài tập 2.41. Xét một phần tư hình tròn tâm $O(0,0)$ bán kính bằng a , ký hiệu là OAB , với tọa độ tương ứng là $A(a,0)$ và $B(0,a)$.

- Trên đoạn OA lấy ngẫu nhiên một điểm C . Tìm phân phối xác suất của độ dài đoạn OC .
- Dựng một đường thẳng đi qua C , vuông góc với OA và cắt cung tròn tại điểm D . Tính kỳ vọng và phương sai của độ dài đoạn CD .

Bài tập 2.42. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trên nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2a$. Biết rằng xác suất điểm M rơi vào cung CD bất kì của nửa đường tròn AMB chỉ phụ thuộc vào độ dài cung CD .

- Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y chỉ diện tích tam giác AMB .
- Tìm giá trị trung bình của diện tích tam giác ấy.

Bài tập 2.43. Từ điểm $A(0, -a)$ ($a > 0$) trong nửa mặt phẳng tọa độ xOy phần $x \geq 0$, người ta kẻ ngẫu nhiên một tia At hợp với tia Oy một góc φ . Biết φ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong khoảng $(0, \pi/4)$. Tia At cắt Ox tại điểm M .

- Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X chỉ diện tích tam giác AOM .
- Tìm giá trị trung bình của diện tích trên.

Bài tập 2.44. Một công ty kinh doanh mặt hàng A dự định sẽ áp dụng một trong hai phương án kinh doanh: Phương án 1: Gọi X_1 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_1 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(140; 2500)$. Phương án 2: Gọi X_2 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_2 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(200; 3600)$. Biết rằng công ty tồn tại và phát triển thì lợi nhuận thu được từ mặt hàng A phải đạt ít nhất 80 triệu đồng/tháng. Hỏi nên áp dụng phương án nào để rủi ro thấp hơn.

Bài tập 2.45. Trọng lượng của một loại trái cây tuân theo luật phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 250g, độ lệch chuẩn là 5g. Trái cây loại I là trái cây có trọng lượng không nhỏ hơn 260g.

- (a) Một người lấy 1 trái từ trong sọt trái cây ra. Tính xác suất người này lấy được trái cây loại I.
- (b) Nếu lấy được trái loại I thì người này sẽ mua sọt đó. Người này kiểm tra 100 sọt. Tính xác suất người này mua được 6 sọt.

Bài tập 2.46. Một dây chuyền tự động khi hoạt động bình thường có thể sản xuất ra phế phẩm với xác suất $p = 0,001$ và được điều chỉnh ngay lập tức khi phát hiện có phế phẩm. Tính số trung bình các sản phẩm được sản xuất giữa 2 lần điều chỉnh.

Bài tập 2.47. Trong một kỳ thi điểm số trung bình của các sinh viên là 80 và độ lệch chuẩn là 10. Giả sử điểm thi của sinh viên tuân theo luật phân phối chuẩn.

- (a) Nếu giáo viên muốn 25% số sinh viên đạt điểm A (nhóm điểm cao nhất) thì điểm số thấp nhất để đạt điểm A là bao nhiêu?
- (b) Chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên, tính xác suất trong đó có nhiều hơn 10 sinh viên đạt điểm A (điểm A lấy ở câu (a)).

Bài tập 2.48. Đường kính của một loại chi tiết do một máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn, với kỳ vọng là 20mm và độ lệch chuẩn là 0,2mm. Tính xác suất để lấy ngẫu nhiên một chi tiết có đường kính trong khoảng 19,9mm đến 20,3mm.

Bài tập 2.49. Chiều cao của nam giới khi trưởng thành là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với chiều cao trung bình là 160cm và độ lệch chuẩn là 6cm. Tìm xác suất để đo ngẫu nhiên 4 người thì có ít nhất một người có chiều cao nằm trong khoảng (158–162)cm.

Bài tập 2.50. Dùng hai phương pháp để tính sai số của một biến ngẫu nhiên. Phương pháp 1: Cho sai số đó bằng $2X$ với X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0; 25)$. Phương pháp 2: Cho sai số đó bằng tổng hai biến ngẫu nhiên độc lập $Y = Y_1 + Y_2$ trong đó $E(Y_1) = E(Y_2) = 0$ và $\sigma(Y_1) = \sigma(Y_2) = 5$. Hỏi phương pháp nào được ưa dùng hơn?

Chương 3

Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

3.1 Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài tập 3.1. Cho biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân bố xác suất đồng thời như sau

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

- (a) Chứng minh rằng X và Y độc lập.
- (b) Lập bảng phân phối xác suất của X và Y .
- (c) Tìm quy luật phân phối của biến ngẫu nhiên $Z = XY$.
- (d) Tính $E(Z)$ bằng 2 cách và kiểm tra $E(Z) = E(X) \cdot E(Y)$.

Bài tập 3.2. Cho biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân bố xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	4/15	1/15	4/15
0	1/15	2/15	1/15
1	0	2/15	0

- (a) Tìm $E(X)$, $E(Y)$, $cov(X, Y)$.
- (b) X và Y có độc lập không?
- (c) Tìm bảng phân phối xác suất của X , của Y .

Bài tập 3.3. Cho biến ngẫu nhiên X và Y có bảng phân bố xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,17	0,13	0,25
2	0,10	0,30	0,05

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X và của Y .

(b) Lập ma trận Covarian của (X, Y) .

(c) Tìm hệ số tương quan.

(d) X và Y có độc lập không?

Bài tập 3.4. Thống kê về giá thành sản phẩm Y (triệu đồng) và sản lượng X (tấn) của một ngành sản xuất thu được bảng phân phối xác suất sau:

$X \backslash Y$	30	50	80	100
6	0,05	0,06	0,08	0,11
7	0,06	0,15	0,04	0,08
8	0,07	0,09	0,10	0,11

(a) Tìm giá thành sản phẩm trung bình và mức độ phân tán của nó.

(b) Tìm sản lượng trung bình khi giá thành bằng 8.

(c) X và Y có độc lập không?

(d) X và Y có tương quan không?

Bài tập 3.5. Cho X_1, X_2, X_3 là các biến ngẫu nhiên độc lập theo luật phân phối Poa-xông với tham số $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Tính xác suất của các sự kiện sau:

(a) Số lớn nhất trong các số X_1, X_2, X_3 không nhỏ hơn 1.

(b) Số lớn nhất trong các số X_1, X_2, X_3 bằng 1.

(c) Số nhỏ nhất trong các số X_1, X_2, X_3 không nhỏ hơn 1.

(d) Số nhỏ nhất trong các số X_1, X_2, X_3 bằng 1.

Bài tập 3.6. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,08	0,02
Y	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

(a) Tính $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

(b) Nếu X và Y độc lập, tính $P(X + Y \leq 2)$ và lập bảng phân phối xác suất của $X + Y$.

Bài tập 3.7. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ một hộp gồm 3 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi vàng. Gọi X , Y lần lượt là số bi xanh, bi vàng trong 3 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất đồng thời cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) .

3.2 Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập 3.8. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k

(b) X và Y có độc lập không?

Bài tập 3.9. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), & \text{nếu } 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k .

(b) Tìm hàm phân phối đồng thời của X và Y .

Bài tập 3.10. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, & \text{nếu } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất biên của X , của Y .

(b) Tìm xác suất để (X, Y) nằm trong hình chữ nhật $O(0,0); A(0,1); B(1,2); D(2,0)$.

Bài tập 3.11. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx^2, & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

- (a) Tìm k .
- (b) Tìm hàm mật độ xác suất biên $f_X(x), f_Y(y)$.
- (c) Tính $P(Y \leq \frac{1}{4})$.

Bài tập 3.12. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

- (a) Tìm hàm mật độ xác suất biên của X , của Y .
- (b) Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_1(x|y), f_2(y|x)$.

Bài tập 3.13. Một linh kiện điện tử có thời gian hoạt động X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ xác suất là $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0$.

- (a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của một mạng gồm 2 linh kiện loại trên được mắc song song/mắc nối tiếp.
- (b) Tính kỳ vọng, phương sai của thời gian hoạt động của mạng đó.

Bài tập 3.14. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập với nhau có cùng phân phối đều trên $[0, 2]$.

- (a) Tìm hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên $Z = X + Y; T = XY; U = X - Y$.
- (b) Tính $P(-1 \leq Y - X \leq 1)$.

Bài tập 3.15. Hai người A và B hẹn gặp nhau tại cổng trường trong khoảng từ 7h00 đến 8h00. Gọi X và Y lần lượt là thời gian đến điểm hẹn của người A và B trong khoảng thời gian trên. Giả sử X và Y độc lập và có cùng phân phối đều trên $[7;8]$.

- (a) Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của X và Y .
- (b) Với quy ước chỉ đợi nhau trong vòng 10 phút, tìm xác suất để 2 người được gặp nhau.

Bài tập 3.16. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, $X \sim \mathcal{N}(5; 1^2), Y \sim \mathcal{N}(3; (0, 2)^2)$.

- (a) Tìm $P(X + Y < 5, 5)$.
- (b) Tìm $P(X < Y)$; $P(X > 2Y)$.
- (c) Tìm $P(X < 1; Y < 1)$.

Bài tập 3.17. Trọng lượng của những người chồng tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 70kg và độ lệch chuẩn 9kg, còn trọng lượng của những người vợ tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng 55kg và độ lệch chuẩn 4kg. Hệ số tương quan trọng lượng giữa vợ và chồng là $2/3$. Tính xác suất vợ nặng hơn chồng.

Bài tập 3.18. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$. Tìm hàm mật độ xác suất $g_Y(y)$ của biến ngẫu nhiên Y nếu:

- (a) $Y = X + 1, -\infty < x < +\infty$.
- (b) $Y = 2X, -a < x < a$.

Bài tập 3.19. Giả sử tại một trường đại học, một sinh viên đạt được điểm X trong bài kiểm tra năng khiếu toán học và điểm Y trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc là một số trong khoảng từ 0 đến 1. Giả sử X và Y được phân phối theo hàm mật độ sau

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

- (a) Tính tỷ lệ sinh viên đại học đạt điểm cao hơn 0,8 trong bài kiểm tra năng khiếu toán.
- (b) Giả sử điểm số của một sinh viên trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc là 0,3. Tính xác suất để điểm của anh ấy trong bài kiểm tra năng khiếu toán học sẽ lớn hơn 0,8.
- (c) Giả sử điểm số của một sinh viên trong bài kiểm tra năng khiếu toán là 0,3. Tính xác suất để điểm của anh ấy trong bài kiểm tra năng khiếu âm nhạc sẽ lớn hơn 0,8.

Bài tập 3.20. Một mảnh đất bằng phẳng có hình tam giác vuông với một bờ phía nam dài 200m, bờ phía đông dài 100m. Ta quan tâm đến điểm mà một hạt giống rơi từ trên cao xuống tiếp đất. Giả sử rằng hạt giống nằm trong ranh giới của mảnh đất với tọa độ X và Y của nó được phân bố đều trên bề mặt của tam giác vuông.

- (a) Tìm c với c là giá trị của hàm mật độ xác suất của điểm nằm trong ranh giới mảnh đất.
- (b) Tìm các hàm mật độ xác suất biên của X và Y .
- (c) Tìm hàm mật độ xác suất của Y biết $X = x$ và tính $P(0,1 \leq Y \leq 0,7 \mid X = 0,5)$.

Chương 4

Ước lượng tham số

4.1 Ước lượng khoảng cho kỳ vọng

Bài tập 4.1. Xác suất để một sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội thi trượt môn Giải tích 2 là p . Một mẫu lớn n sinh viên được lựa chọn ngẫu nhiên và ký hiệu X là số sinh viên đã trượt môn Giải tích 2 trong mẫu.

- (a) Giải thích tại sao có thể sử dụng $\frac{X}{n}$ để ước lượng cho p ?
- (b) Trình bày cách tính xấp xỉ xác suất sự sai khác giữa $\frac{X}{n}$ và p nhỏ hơn 0,01? Áp dụng cho $n = 500$ và $p = 0,2$.

Bài tập 4.2. Tuổi thọ của một loại bóng đèn do một dây chuyền công nghệ sản xuất ra có độ lệch chuẩn là 305 giờ. Người ta lấy ngẫu nhiên ra 45 bóng đèn loại này thấy tuổi thọ trung bình là 2150 giờ. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn nói trên.

Bài tập 4.3. Một kỹ sư cho biết trọng lượng tạp chất trong một sản phẩm tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn bằng 3,8gam. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 9 sản phẩm được tiến hành kiểm tra và thấy lượng tạp chất như sau (đơn vị tính là gam):

18,2 13,7 15,9 17,4 21,8 16,6 12,3 18,8 16,2

- (a) Tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình tạp chất của sản phẩm với độ tin cậy 99%.
- (b) Không cần tính toán, nếu độ tin cậy 95% thì khoảng ước lượng trung bình sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

Bài tập 4.4. Giả sử chiều dài của một chi tiết sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0,2m. Người ta sản xuất thử nghiệm 35 sản phẩm loại này và tính được chiều dài trung bình là 25m. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng khoảng cho chiều dài trung bình của chi tiết sản phẩm đang được thử nghiệm.

Bài tập 4.5. Để xác định trọng lượng trung bình của các bao gạo được đóng gói bằng máy tự động, người ta chọn ngẫu nhiên ra 20 bao gạo và thấy trung bình mẫu là 49,2kg và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 1,8kg. Biết rằng trọng lượng các bao gạo xấp xỉ phân phối chuẩn. Hãy tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của một bao gạo với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.6. Thời gian đợi phục vụ tại một cửa hàng ăn nhanh là biến ngẫu nhiên xấp xỉ phân phối chuẩn. Người ta khảo sát 16 người thì thấy thời gian đợi trung bình là 4 phút và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 1,8 phút. Với độ tin cậy 99% hãy tìm khoảng tin cậy cho thời gian chờ đợi trung bình của một khách hàng tại cửa hàng ăn nhanh này.

Bài tập 4.7. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 thùng hàng được chọn ra từ tất cả các thùng hàng được sản xuất bởi nhà máy trong một tháng. Trọng lượng của 16 thùng hàng lần lượt như sau (đơn vị tính là kg):

18,6 18,4 19,2 19,8 19,4 19,5 18,9 19,4
19,7 20,1 20,2 20,1 18,6 18,4 19,2 19,8

Tìm khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình tổng thể của tất cả các thùng hàng của nhà máy với độ tin cậy 95%, biết rằng trọng lượng thùng hàng được chọn ngẫu nhiên là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 4.8. Để định mức thời gian gia công một chi tiết máy, người ta theo dõi ngẫu nhiên quá trình gia công 35 chi tiết máy và thu được số liệu:

Thời gian (phút)	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22
Số chi tiết máy	3	4	10	9	5	4

Giả sử thời gian gia công chi tiết máy là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng khoảng tin cậy cho thời gian gia công trung bình một chi tiết máy nói trên.

Bài tập 4.9. Đo áp lực X (tính bằng kg/cm^2) của 18 thùng chứa ta được bảng kết quả sau:

Áp lực (kg/cm^2)	19,6	19,5	19,9	20,0	19,8	20,5	21,0	18,5	19,7
Số thùng	1	2	2	4	2	3	2	1	1

Với độ tin cậy 99% hãy tìm khoảng ước lượng đối xứng của áp lực trung bình của các thùng trên. Biết rằng áp lực là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 4.10. Một bài báo trong Nuclear Engineering International (tháng 2 năm 1988, trang 33) mô tả một số đặc điểm của các thanh nhiên liệu được sử dụng trong một lò phản ứng hạt nhân của một công ty điện lực ở Na Uy. Người ta đo tỷ lệ làm giàu của 12 thanh và có được dữ liệu sau:

2,94 3,00 2,90 2,90 2,75 2,95 2,75 3,00 2,95 2,82 2,81 3,05

Giả sử tỷ lệ làm giàu của các thanh nhiên liệu tuân theo luật phân phối chuẩn. Hãy ước lượng khoảng cho tỷ lệ làm giàu trung bình của các thanh nhiên liệu với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.11. Trọng lượng những viên gạch trong một quá trình sản xuất gạch được giả sử là tuân theo luật phân phối chuẩn. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 25 viên gạch vừa sản xuất ra trong ngày có trọng lượng trung bình 2,45 kg và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 0,15 kg.

- Tìm khoảng tin cậy của trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch trong ngày với độ tin cậy 99%.
- Không cần tính toán, với độ tin cậy 95% thì khoảng tin cậy trung bình sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng với kết quả ý (a)?
- Một mẫu ngẫu nhiên gồm 20 viên gạch sẽ được chọn ra trong ngày mai. Không cần tính toán, với độ tin cậy 99% thì khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch sản xuất ra trong ngày mai sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?
- Sự thật rằng, độ lệch chuẩn mẫu của các viên gạch sản xuất trong ngày mai là 0,10kg. Không cần tính toán, với độ tin cậy 99% thì khoảng tin cậy cho trọng lượng trung bình của tất cả các viên gạch sản xuất ra trong ngày mai sẽ rộng hơn, hẹp hơn hay bằng như trong ý (a)?

Bài tập 4.12. Một trường đại học lớn đang quan tâm về lượng thời gian sinh viên tự nghiên cứu mỗi tuần. Người ta tiến hành khảo sát một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 sinh viên, dữ liệu cho thấy thời gian nghiên cứu trung bình của một sinh viên là 15,26 giờ/tuần và độ lệch chuẩn hiệu chỉnh là 6,43 giờ. Giả sử thời gian nghiên cứu của sinh viên của trường đại học trên là tuân theo luật phân phối chuẩn.

- Tìm khoảng tin cậy cho lượng thời gian tự nghiên cứu trung bình mỗi tuần cho tất cả sinh viên trường đại học này với độ tin cậy 95%.
- Không cần tính toán, khoảng tin cậy của trung bình tổng thể khi ước lượng sẽ rộng hơn hay hẹp hơn với ba điều kiện sau:

b1. Mẫu gồm 30 sinh viên được chọn ra, với tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

b2. Độ lệch chuẩn mẫu là 4,15 giờ, tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

b3. Độ tin cậy 99%, tất cả các điều kiện khác giống như ý (a)?

Bài tập 4.13. Một kỹ sư nghiên cứu về cường độ nén của bê tông đang được thử nghiệm. Anh ta tiến hành kiểm tra 12 mẫu vật và có được các dữ liệu sau đây:

2216 2234 2225 2301 2278 2255 2249 2204 2286 2263 2275 2295

Giả sử cường độ nén của bê tông đang thử nghiệm tuân theo luật phân phối chuẩn.

(a) Hãy ước lượng khoảng với độ tin cậy 95% cho cường độ nén trung bình của bê tông đang được thử nghiệm.

(b) Hãy ước lượng khoảng tin cậy phải cho cường độ nén trung bình của bê tông đang được thử nghiệm với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.14. Người ta chọn ngẫu nhiên ra 49 sinh viên của một trường đại học và thấy chiều cao trung bình mẫu là 163cm và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 12cm. Hãy tìm khoảng ước lượng với độ tin cậy 99% cho chiều cao trung bình của sinh viên của trường đó.

Bài tập 4.15. Một trường đại học tiến hành một nghiên cứu xem trung bình một sinh viên tiêu hết bao nhiêu tiền điện thoại trong một tháng. Họ điều tra 60 sinh viên và cho thấy số tiền trung bình mẫu là 95 nghìn và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 36 nghìn. Hãy ước lượng khoảng với độ tin cậy 95% cho số tiền điện thoại trung bình trong một tháng của mỗi sinh viên.

Bài tập 4.16. Người ta điều tra 35 người nghiện thuốc lá được chọn ngẫu nhiên từ số lượng người nghiện hút thuốc lá của một thành phố thấy số điều thuốc hút trong 5 ngày của họ là:

31 37 48 40 59 97 98 87 80 68 64 45
48 62 74 76 79 85 83 81 93 82 85 79
34 57 95 49 59 63 48 79 50 55 63

Hãy tìm khoảng ước lượng cho số điều thuốc hút trung bình trong 5 ngày của những người nghiện thuốc lá của thành phố đó với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.17. Để nghiên cứu về thời gian xem ti vi của một thanh niên từ 18 đến 35 tuổi trong vòng một tuần, người ta tiến hành khảo sát trên 40 người và cho ta bảng số liệu sau:

39 02 43 35 15 54 23 21 25 07 24 33 17
23 24 43 11 15 17 15 19 06 43 35 25 37
15 14 08 11 29 12 13 25 15 28 24 06 16 7

Hãy tìm khoảng ước lượng cho thời gian xem ti vi trung bình của thanh niên trong độ tuổi trên trong vòng một tuần với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.18. Để điều tra tiền điện phải trả trong một tháng của một hộ dân cư ở phường A, người ta kiểm tra ngẫu nhiên 200 hộ gia đình ở phường này và được kết quả sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[80,180)	[180,280)	[280,380)	[380,480)	[480,580)	[580,680)	[680,780]
Số hộ gia đình	14	25	43	46	39	23	10

Ước lượng khoảng cho số tiền trung bình một hộ dân phải trả ở phường đó với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.19. Để ước lượng số lượng xăng hao phí trên một tuyến đường của một hãng xe khách, người ta tiến hành chạy thử nghiệm 55 lần liên tiếp trên tuyến đường này và có được số liệu:

Lượng xăng hao phí	10,5-11	11-11,5	11,5-12	12-12,5	12,5-13	13-13,5
Tần số	5	12	15	13	6	4

Hãy ước lượng lượng xăng hao phí trung bình cho một xe với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.20. Để xác định giá trung bình đối với một loại hàng hóa trên thị trường, người ta điều tra ngẫu nhiên tại 100 cửa hàng thu được số liệu sau:

Giá (nghìn đồng)	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
Số cửa hàng	5	8	13	14	30	11	8	6	4	1

Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng giá trung bình của loại hàng đó tại thời điểm đang xét. Biết rằng giá hàng hóa là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

4.2 Ước lượng khoảng cho tỷ lệ hay xác suất

Bài tập 4.21. Để ước lượng cho tỷ lệ những cây bạch đàn có chiều cao đạt chuẩn phục vụ cho việc khai thác ở một nông trường lâm nghiệp, người ta tiến hành đo ngẫu nhiên chiều cao của 135 cây và thấy có 36 cây cao từ 7,5m trở lên. Hãy ước lượng khoảng cho tỷ lệ các cây bạch đàn có chiều cao trên 7,5m với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.22. Để ước lượng số cá có trong hồ người ta bắt từ hồ lên 100 con đánh dấu rồi thả lại vào hồ. Sau đó người ta bắt lên 300 con thì thấy có 32 con bị đánh dấu. Hãy ước lượng khoảng cho số cá có trong hồ với độ tin cậy 99%.

Bài tập 4.23. Để điều tra thị phần xe máy, người ta chọn ngẫu nhiên ra 450 người mua xe máy trong một tháng ở các địa bàn ở một thành phố thì có 275 người mua xe Honda. Tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ người mua xe Honda với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.24. Kiểm tra ngẫu nhiên 400 sản phẩm do một hệ thống máy mới sản xuất thì thấy có 387 chính phẩm. Hãy ước lượng tỷ lệ chính phẩm tối thiểu của hệ thống máy mới với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.25. Thử nghiệm 560 bóng đèn điện tử do một nhà máy sản xuất thì thấy 10 bóng có lỗi kỹ thuật. Hãy tìm ước lượng cho tỷ lệ bóng có lỗi kỹ thuật tối đa với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.26. Mở thử 200 hộp của kho đồ hộp thấy có 10 hộp bị biến chất. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng tỷ lệ hộp bị biến chất tối đa của kho.

Bài tập 4.27. Chọn ngẫu nhiên ra 1000 trường hợp điều trị bệnh ung thư phổi, các bác sĩ thống kê thấy có 823 bệnh nhân bị chết trong vòng 10 năm.

(a) Ước lượng khoảng cho tỷ lệ tử vong của bệnh nhân điều trị bệnh ung thư phổi với độ tin cậy 99%.

(b) Cần phải lấy số lượng mẫu là bao nhiêu để với độ tin cậy 95% các sai số khi dự đoán tỷ lệ bệnh nhân điều trị ung thư phổi tử vong 10 năm là ít hơn 0,03?

Bài tập 4.28. Cần phải lập một mẫu ngẫu nhiên với kích thước là bao nhiêu để tỷ lệ phế phẩm của mẫu là 0,2 và độ dài khoảng tin cậy đối xứng là 0,05 và độ tin cậy của ước lượng là 95%.

Bài tập 4.29. Làm cách nào để ước lượng số thú hiếm trong một khu rừng với độ tin cậy 95%.

Bài tập 4.30. Nghiên cứu về năng suất của loại hoa màu A, người ta kiểm tra năng suất của 64 điểm trồng loại hoa màu này thu được bảng số liệu

Năng suất (tạ/ha)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
Số điểm	2	5	15	30	8	4

(a) Hãy ước lượng năng suất trung bình của loại hoa màu A với độ tin cậy 95%; Nếu muốn sai số của ước lượng giảm đi 2 lần thì cần kiểm tra bao nhiêu điểm để đảm bảo yêu cầu nêu trên?

(b) Biết rằng trên toàn miền Bắc có 10.000 điểm trồng loại hoa màu A. Hãy cho biết có khoảng bao nhiêu điểm đạt năng suất trên 60 tạ/ha? Hãy kết luận với độ tin cậy 99%.

(c) Hãy cho biết tỷ lệ những điểm có năng suất trên 60 tạ/ha của loại hoa màu A tối thiểu là bao nhiêu? Hãy kết luận với độ tin cậy 95%?

Chương 5

Kiểm định giả thuyết

5.1 Kiểm định giả thuyết cho một mẫu

5.1.1 Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng

Bài tập 5.1. Với các thử nghiệm về nhiệt độ nước ở một bình nước sử dụng năng lượng mặt người ta chỉ ra rằng độ lệch tiêu chuẩn là $2^{\circ}F$. Người ta chọn ra ngẫu nhiên 9 ngày để tiến hành đo đạc thì thấy trung bình mẫu là $98^{\circ}F$. Giả sử nhiệt độ nước tuân theo luật phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận rằng nhiệt độ trung bình sử dụng năng lượng mặt trời là bằng $99^{\circ}F$ hay không?

Bài tập 5.2. Người ta tiến hành thử nghiệm một cải tiến kỹ thuật trong bộ chế hòa khí của một loại xe ô tô với hy vọng sẽ tiết kiệm được xăng hơn. Họ thử nghiệm 16 xe ô tô với bộ hòa khí có cải tiến kỹ thuật và thu được kết quả sau về số km chạy được cho một lít xăng:

20,5	20,9	20,3	20,2	20,6	20,6	20,5	21,0
21,1	21,2	20,8	20,7	20,6	20,9	20,3	20,2

Giả thiết số km chạy được cho một lít xăng tuân theo luật phân phối chuẩn. Nếu trước khi cải tiến một lít xăng trung bình chạy được 20,1 km thì có thể kết luận rằng cải tiến trên đã mang lại hiệu quả đáng kể hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.3. Một nhà máy đưa ra định mức thời gian hoàn thành sản phẩm là 24 phút. Khi khảo sát thời gian hoàn thành sản phẩm của 22 công nhân, ta tính được thời gian trung bình hoàn thành sản phẩm trong mẫu là 25,2 phút, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 2,6 phút. Với mức ý nghĩa 5% người quản lý nhà máy có cần phải đổi định mức không. Giả sử rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.4. Một dây chuyền sản xuất dầu gội đầu, mỗi thùng dầu gội có trọng lượng trung bình là 20kg. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 thùng được chọn ra ngẫu nhiên để cân có trọng lượng (kg) như sau:

21,4 19,7 19,9 20,6 20,8 20,1 19,7 20,3 20,9 20,8

Giả sử rằng trọng lượng của mỗi thùng dầu gội tuân theo luật phân phối chuẩn. Hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 5% với giả thuyết cho rằng quá trình sản xuất hoạt động một cách chính xác.

Bài tập 5.5. Gạo được đóng gói bằng máy tự động có trọng lượng đóng bao theo quy định 25kg. Người ta chọn ngẫu nhiên 25 bao được đóng bằng máy tự động trên ra kiểm tra trọng lượng của chúng ta được bảng số liệu sau:

Trọng lượng (kg)	24,6-24,8	24,8-25,0	25,0-25,2	25,2-25,4	25,4-25,6
Tần suất	3	7	8	5	2

Giả sử trọng lượng của các bao gạo tuân theo luật phân phối chuẩn. Hỏi trọng lượng trung bình của các bao gạo được đóng gói tự động giống như yêu cầu hay phải dừng máy để điều chỉnh với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.6. Định mức thời gian hoàn thành một sản phẩm là 14 phút. Có cần thay đổi định mức không, nếu theo dõi thời gian hoàn thành một sản phẩm ở 25 công nhân ta thu được bảng số liệu sau:

Thời gian sản xuất 1 sản phẩm (phút)	10-12	12-14	14-16	16-18	20-22
Số công nhân tương ứng	3	6	10	4	2

Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%, biết rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.7. Trọng lượng đóng gói bánh loại 250g một gói trên một máy tự động là biến ngẫu nhiên. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 gói thu được kết quả sau:

Trọng lượng (gam)	245	247	248	250	252	253	2544
Số gói	8	12	20	32	16	8	4

Có thể coi trọng lượng trung bình của các gói bánh là bằng 250g theo quy định hay không với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.8. Kiểm tra lượng điện áp đầu vào của một loại máy tính bảng, người ta tiến hành thử nghiệm 100 lần đo và thu được điện áp trung bình 5,04V với độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,064V. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định lượng điện áp trung bình đầu vào của loại máy tính bảng có đúng bằng 5V hay không?

Bài tập 5.9. Gọi X là thời gian sản xuất một sản phẩm (phút). Định mức cũ để sản xuất một sản phẩm là 20 phút. Nay do cải tiến kỹ thuật, người ta sản xuất thử 100 sản phẩm và thu được số liệu:

Thời gian sản xuất sản phẩm (phút)	16-17	17-18	18-19	10-20	20-21	21-22
Số sản phẩm tương ứng	6	10	24	30	18	12

Với mức ý nghĩa 5% có thể nói rằng việc cải tiến kỹ thuật giảm bớt thời gian sản xuất một sản phẩm hay không? Biết rằng thời gian sản xuất một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.10. Hàm lượng đường trung bình của một loại trái cây lúc đầu là 5(%). Người ta chăm bón bằng một loại NPK mới và sau một thời gian kiểm tra một số trái cây được kết quả sau:

Hàm lượng (%)	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	37-41
Số trái	51	47	39	36	32	8	7	3	2

Hãy cho kết luận về loại NPK trên trên với mức ý nghĩa 5%. Giả thiết hàm lượng đường của loại trái là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.11. Một nhà phân phối sữa trong một thành phố khẳng định rằng: bằng cách quảng cáo và cách tiếp cận khách hàng mới ở các cửa hàng, mỗi tuần trong các cửa hàng bán trung bình tăng thêm 20 hộp sữa. Người ta tiến hành chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 40 cửa hàng để xác định lời khẳng định trên thì thấy trung bình mỗi cửa hàng chỉ bán thêm được 16,4 hộp sữa và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 7,2. Kiểm định giả thuyết cho rằng mỗi tuần bán thêm được 20 hộp sữa ở mỗi cửa hàng với mức ý nghĩa 5%.

5.1.2 Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Bài tập 5.12. Người ta quan tâm tới việc lây lan dịch sốt xuất huyết ở một phường. Theo số liệu năm ngoái tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của vùng này là 8%. Người ta tiến hành kiểm tra sức khỏe ngẫu nhiên 200 người ở phường này thì thấy có 17 người mang vi trùng sốt xuất huyết. Tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của phường có tăng lên hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.13. Một hãng xà phòng A tuyên bố rằng 64% số các bà nội trợ thích sử dụng bột giặt của hãng. Người ta chọn ra một mẫu gồm 100 bà nội trợ và hỏi thì có 58 bà tỏ ra là thích sử dụng bột giặt của hãng A. Với mức ý nghĩa 1%, số liệu trên có chứng tỏ là tuyên bố của hãng xà phòng A là đúng hay không?

Bài tập 5.14. Tỷ lệ phế phẩm do một máy tự động sản xuất là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 300 sản phẩm thấy có 24 phế phẩm. Từ đó có ý kiến cho rằng tỷ lệ phế phẩm do máy đó sản xuất có chiều hướng tăng lên. Hãy kết luận ý kiến nêu trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.15. Nếu áp dụng phương pháp công nghệ thứ nhất thì tỷ lệ phế phẩm là 6%, còn nếu áp dụng phương pháp công nghệ thứ hai thì trong 100 sản phẩm có 5 phế phẩm. Vậy có thể kết luận áp dụng phương pháp công nghệ thứ hai thì tỷ lệ phế phẩm thấp hơn tỷ lệ phế phẩm của phương pháp công nghệ thứ nhất không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.16. Tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh T khi điều trị bằng thuốc A là 85%. Thí nghiệm dùng loại thuốc B để chữa bệnh thì trong số 900 người mắc bệnh T có 810 người được chữa khỏi. Như vậy có thể kết luận thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%.

5.2 Kiểm định giả thuyết cho hai mẫu

5.2.1 So sánh hai kỳ vọng

Bài tập 5.17. Hai công thức khác nhau về nhiên liệu động cơ oxy hóa được tiến hành thử nghiệm để đưa ra chỉ số octan. Phương sai của công thức I là $\sigma_1^2 = (1,5)^2$ của công thức II là $\sigma_2^2 = (1,3)^2$. Người ta chọn ngẫu nhiên $n_1 = 15$ mẫu của công thức I và $n_2 = 18$ mẫu của công thức II thì thấy $\bar{x}_1 = 89,7$ và $\bar{x}_2 = 91,5$. Giả sử rằng chỉ số octan của công thức I và II tuân theo luật phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng công thức I có chỉ số octan ít hơn so với công thức II hay không?

Bài tập 5.18. Chọn ngẫu nhiên 100 thiết bị điện tử của nhà máy I thấy tuổi thọ trung bình là 1658 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 123 giờ. Chọn ngẫu nhiên 110 thiết bị điện tử của nhà máy II thấy tuổi thọ trung bình là 1717 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 107 giờ. Với mức ý nghĩa 1%, hãy kiểm định giả thiết có phải thực sự tuổi thọ trung bình thiết bị điện tử của nhà máy II là lớn hơn nhà máy I hay không?

Bài tập 5.19. Hai máy tự động dùng để cắt những thanh thép do cùng một kỹ thuật viên phụ trách và căn chỉnh. Từ mỗi máy lấy ra 35 thanh thép để kiểm tra thu được kết quả sau:

- Máy 1: Trung bình mẫu 11,7m, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,12m.
- Máy 2: Trung bình mẫu 11,6m, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,14m.

Giả sử chiều dài thanh thép do các máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn và có phương sai như nhau. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng chiều dài của các thanh thép do hai máy sản xuất là khác nhau hay không?

Bài tập 5.20. Hai công ty I và II cùng sản xuất ra một loại sản phẩm và cạnh tranh nhau trên thị trường. Người ta chọn ngẫu nhiên ra $n_1 = 11$ ngày và $n_2 = 18$ ngày để khảo sát số lượng sản phẩm được bán ra trong ngày của hai công ty I và II tương ứng và có được kết quả:

- Công ty I: trung bình mẫu 237, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 23;
- Công ty II: trung bình mẫu 247, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 27.

Giả sử số lượng hàng bán ra trong một ngày của hai công ty là tuân theo luật phân phối chuẩn, có cùng phương sai. Phải chăng lượng hàng bán ra của công ty II là nhiều hơn so với công ty I với mức ý nghĩa 1%?

Bài tập 5.21. Người ta nghiên cứu trọng lượng của loại trái cây A ở 2 vùng với hai chế độ canh tác khác nhau. Kiểm tra ngẫu nhiên trong lượng 25 trái ở vùng I, 22 trái ở vùng II ở thời điểm thu hoạch thu được kết quả sau (đơn vị tính là kg):

- Vùng I: 2, 0; 2, 0; 1, 8; 1, 9; 1, 7; 1, 5; 1, 9; 2, 0; 1, 8; 1, 6; 1, 8; 1, 7; 1, 6; 1, 7; 2, 1; 1, 5; 1, 7; 2, 0; 1, 8; 1, 7; 1, 5; 1, 6; 1, 6; 1, 7; 1, 7.
- Vùng II: 1, 5; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 1; 1, 7; 1, 4; 1, 7; 1, 4; 1, 4; 1, 7; 1, 1; 1, 5; 1, 2; 2, 0; 1, 6; 1, 2; 1, 3; 1, 5; 1, 7; 1, 9; 1, 0.

Hỏi có sự khác nhau đáng kể giữa các trọng lượng trung bình của loại trái cây A của hai vùng trên không? Kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.22. Thời gian tự học trong một tuần của 12 sinh viên lớp A và 15 sinh viên lớp B được thống kê lại như sau (đơn vị tính là giờ):

- Lớp A: 18; 15; 24; 23; 30; 12; 15; 24; 35; 30; 18; 20
- Lớp B: 19; 18; 24; 25; 30; 36; 28; 25; 30; 12; 14; 28; 22; 28; 20.

Với mức ý nghĩa 5%, xét xem thời gian tự học của sinh viên hai lớp thực chất là như nhau không?

Bài tập 5.23. Người ta muốn so sánh 2 chế độ bón phân cho một loại cây trồng, họ đã chia 10 mảnh ruộng sao cho mỗi mảnh thành 2 nửa có điều kiện trồng trọt tương đối như nhau. Nửa thứ nhất áp dụng phương pháp bón phân I, nửa thứ hai theo phương pháp bón phân II (các chế độ chăm sóc khác nhau). Sau khi thu hoạch ta được số liệu về năng suất như sau (đơn vị tính là kg/sào)

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Năng suất nửa thứ I	24	14	18	20	21	19	16	18	20	23
Năng suất nửa thứ II	16	20	24	23	25	15	22	24	25	29

Giả sử năng suất của hai chế độ phân bón đều tuân theo luật phân phối chuẩn. Đánh giá xem hai chế độ bón phân có giống nhau không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.24. Quan sát 12 lọ chất hóa học do hai cân khác nhau cân, ta có số liệu (đơn vị tính là gam):

Cân I	0,5	1	2,5	3	4	5	0,7	0,9	1,5	2,3	3,4	4,5
Cân II	1	1,5	2	2	2,5	3	1,8	1,7	2,2	2,4	4,5	3,1

Giả sử cân nặng của lọ hóa chất tuân theo luật phân phối chuẩn. Kiểm định giả thiết hai cân có cân khác nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

5.2.2 So sánh hai tỷ lệ

Bài tập 5.25. Một hãng nước giải khát A muốn đưa vào sản xuất một công thức mới để cải tiến sản phẩm của mình. Người ta tiến hành một cuộc khảo sát với công thức cũ cho 600 người uống thử thì thấy có 132 người thích nó và công thức mới cho 400 người uống thử thì thấy có 91 người thích nó. Hãy kiểm định xem liệu với công thức mới có làm tăng tỉ lệ những người ưa thích nước uống của hãng A hay không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.26. Từ kho đồ hộp I, lấy ngẫu nhiên 1000 hộp để kiểm tra thấy có 20 hộp bị hỏng. Từ kho II lấy ngẫu nhiên 900 hộp thấy 30 hộp bị hỏng. Hỏi chất lượng bảo quản của 2 kho có thực sự giống nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.27. Bệnh A được điều trị theo hai phương pháp. Sau một thời gian thấy kết quả như sau:

- Trong 102 bệnh nhân điều trị phương pháp I có 82 bệnh nhân khỏi bệnh.
- Trong 98 bệnh nhân điều trị phương pháp II có 69 bệnh nhân khỏi bệnh.

Hỏi có phải phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.28. Để đánh giá hiệu quả của hai dây chuyền sản xuất người ta tiến hành kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền I sản xuất có 10 sản phẩm hỏng, kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền II sản xuất thấy có 8 sản phẩm hỏng. Với mức ý nghĩa 5%, có kết luận gì về tỷ lệ sản phẩm hỏng từ hai dây chuyền trên.

Bài tập 5.29. Nghiên cứu về năng suất của loại hoa màu A, người ta kiểm tra năng suất của 64 điểm trồng loại hoa màu này thu được bảng số liệu

Năng suất (tạ/ha)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
Số điểm	2	5	15	30	8	4

- (a) Giả sử theo tính toán lý thuyết, năng suất trung bình của loại hoa màu A là 55 tạ/ha. Theo anh chị năng suất trung bình loại hoa màu A có xu hướng tăng không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%?
- (b) Một tài liệu thống kê cho biết tỷ lệ những điểm có năng suất trên 60 tạ/ha của loại hoa màu A là 15%. Hãy cho kết luận về tài liệu nói trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.30. Điều tra doanh thu của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta điều tra 100 hộ kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng năm 2019 thu được bảng số liệu

Doanh thu (triệu đồng)	20	24	28	32	36	40	44	48	52
Số hộ gia đình	5	10	17	25	20	10	8	3	2

- (a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng nói trên. Để độ chính xác của ước lượng nhỏ hơn 2 triệu đồng thì cần điều tra ít nhất bao nhiêu hộ?
- (b) Theo số liệu điều tra năm 2018 thì tỷ lệ những hộ gia đình đạt doanh thu dưới 28 triệu đồng là 20%. Theo anh chị tỷ lệ này năm 2019 có giảm đi hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.
- (c) Hãy ước lượng tỷ lệ những hộ có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%? Nếu yêu cầu độ tin cậy 95%, độ chính xác của ước lượng là 0,02 thì cần điều tra ngẫu nhiên bao nhiêu hộ gia đình?
- (d) Một tài liệu báo cáo cho biết doanh thu trung bình của các hộ kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B là 30 triệu đồng trên tháng. Tài liệu báo cáo này có làm giảm doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh mặt hàng A để giảm thuế hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 5%.
- (e) Theo điều tra cách đây 2 năm thì doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng này là 30 triệu đồng/tháng, hãy đánh giá xem doanh thu trung bình sau 2 năm có thay đổi không với mức ý nghĩa 5%.
- (f) Điều tra doanh thu của 200 hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A ở địa phương C năm 2019 người ta tính được doanh thu trung bình/tháng là 37 triệu đồng và độ lệch chuẩn mẫu là 1,1 triệu đồng. Doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương C và B có như nhau hay không? Hãy kết luận với độ tin cậy 95%.

