Xác suất cổ điển

1.

Gọi A : "Tất cả cùng ra ở tầng bốn "

B : "Tất cả cùng ra ở một tầng "

C : "Mỗi người ra một tầng khác nhau"

(a) Xác suất tất cả cùng ra ở tầng bốn, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6^3}$.

(b) Xác suất tất cả cùng ra ở một tầng, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{6^3}$.

(c) Mỗi người ra một tầng khác nhau, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$.

3.

Gọi A : "Hộp thứ nhất có chứa 3 sản phẩm"

Mỗi cách xếp ngẫu nhiên một sản phẩm vào một trong 3 hộp là một cách chọn ngẫu nhiên một trong 3 hộp. Do đó, số cách xếp 12 sản phẩm ngẫu nhiên vào 3 hộp là số chỉnh hợp lặp chập 12 của 3 phần tử, tức là $|\Omega| = \widetilde{A}_3^{12} = 3^{12}$.
Số cách xếp 3 sản phẩm cho hộp thứ nhất là C_{12}^3.
Số cách xếp 9 sản phẩm cho hộp thứ hai và ba là số chỉnh hợp lặp chập 9 của 2 phần tử, tức là $\widetilde{A}_2^9 = 2^9$.
Từ đó, theo quy tắc nhân, $|A| = 2^9 C_{12}^3$
Do đó,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^9 C_{12}^3}{3^{12}} = 0.212$$

4.

1. Lần lượt chọn 3 người xếp vào toa đầu, 2 người xếp vào toa II và 1 người xếp vào toa III, ta có

$$P(A) = \frac{C_6^3\, C_3^2\, C_1^1}{4^6} = \frac{15}{1024} \simeq 0.0146$$

2. Có chọn ra 3 người xếp vào một toa, rồi chọn ra 2 người xếp vào một toa khác, cuối cùng cho người còn lại vào một toa. Ta có

$$P(B) = \frac{C_6^3 \times 4 \times C_3^2 \times 3 \times C_1^1 \times 2}{4^6} = \frac{45}{128} \simeq 0.3516$$

3. Gọi C "mỗi toa có ít nhất một người", khi đó chỉ có thể xảy ra 2 khả năng.
Khả năng thứ nhất là có 1 toa 3 người, 3 toa còn lại 1 người.
Khả năng thứ 2 là có 2 toa 2 người và 2 toa 1 người. Theo công thức cổ điển ta có

$$P(C) = \frac{C_6^3 \times 4 \times 3! + C_4^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times 2!}{4^6} = \frac{195}{512} \simeq 0.3809$$

5.

Phân biệt 2 trường hợp là bàn tròn có đánh số vị trí và không đánh số vị trí
Đánh số vị trí thì không gian mẫu là 10!
Không đánh số vị trí thì không gian mẫu là 9! thôi vì phải xếp người đầu tiên vào để làm mốc.
Cả 2 trường hợp đều cho đáp án là 2/9 nhá.

Xác suất hình học

1.

Gọi A : "Ba đoạn sắt bẻ ra tạo thành một tam giác".

Gọi $x, y, l-(x+y)$ là độ dài 3 khúc được bẻ ngẫu nhiên. Khi đó,

$$\Omega = \{(x,y) | x > 0, y > 0, x + y < l\}$$

Để tạo thành tam giác thì x, y phải thỏa:

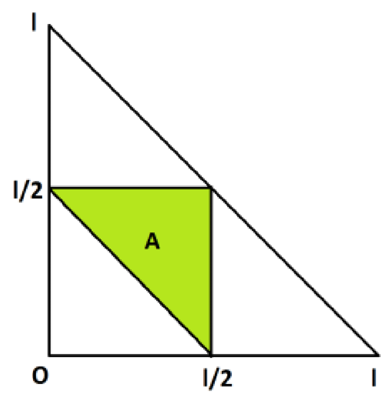
$$\begin{cases} x+y & > & l-(x+y) \\ x+l-(x+y) & > & y \\ y+l-(x+y) & > & x \end{cases} \iff \begin{cases} x+y & > & \frac{l}{2} \\ y & < & \frac{l}{2} \\ x & < & \frac{l}{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$A = \{(x,y)|x+y > \frac{l}{2}, x < \frac{l}{2}, y < \frac{l}{2}\}$$

Biểu diễn x, y trên trục tọa độ ta tính được:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0.25$$

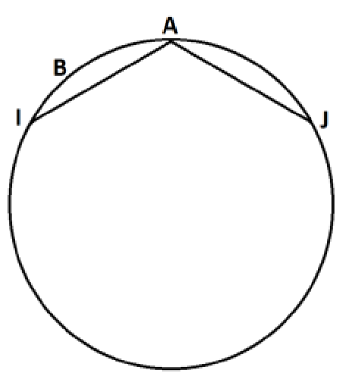


3.

Gọi C : "Cung AB không quá R".

Ta thấy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{độ dài cung } IJ}{\text{độ dài đường tròn}} = \frac{1}{3}$$



Các công thức tính xác suất cơ bản

1.

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)+P(B)-P(A+B)=\frac{1}{12} \\ P(\overline{A}.\overline{B}) &= P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\frac{1}{4} \\ P(\overline{A}+\overline{B}) &= P(\overline{AB})=1-P(AB)=\frac{11}{12} \\ P(A\overline{B}) &= P(A)-P(AB)=\frac{1}{4} \\ P(\overline{A}B) &= P(B)-P(AB)=\frac{5}{12} \end{aligned}$$

3.

(a) $P(A+B+C)=0.95$

(b) $P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)=1-0.95=0.05$

(c) $P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A+B+C)-P(A+B)=0.95-0.80=0.15$

(d) Ta cần tính

$$\begin{aligned} P[(A\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}B\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}C)] &= P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C) \\ &= 3P(A+B+C)-P(A+B)-P(B+C)-P(C+A) \\ &= 3(0.95)-0.80-0.90-0.85=0.3 \end{aligned}$$

5.

Gọi A_i : "Sinh viên thứ i nhận đúng áo của mình" $(i = 1, \ldots, n)$

A : "Có ít nhất một sinh viên nhận đúng áo của mình"

Ta có $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
Xác suất để sinh viên thứ i nhận đúng áo của mình là

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ và } \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)!}{n!} = 1$$

Ta tính xác suất để sinh viên thứ k và i nhận đúng áo

$$P(A_k A_i) = P(A_i) P(A_k | A_i) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

Từ đó $\sum_{k<i}^{n} P(A_k A_i) = C_n^2 P(A_k A_i) = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!}$
Tổng quát, xác suất để có $m (m \leq n)$ sinh viên $k_1, \ldots, k_m$ nhận đúng áo của mình là

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_m}) = \frac{(n-m)!}{n!}$$

và $$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_m}) = C_n^m \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m!}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k<i}^{n} P(A_k A_i) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Khi $n \to \infty$, $P(A) \sim 1 - \frac{1}{e}$

6.

Gọi A_i : "Xạ thủ thứ i bắn trúng" ($i = 1, 2, 3$)

Theo giả thiết, $P(A_1) = 0.6; P(A_2) = 0.7; P(A_3) = 0.8$

(a) Gọi A : "Chỉ có người thứ hai bắn trúng"

Khi đó, $A = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ và

$$P(A) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) = (0.4)(0.7)(0.2) = 0.056$$

(b) Gọi B : "Có đúng một người bắn trúng"

Khi đó, $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + A + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ và

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(A) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(A) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) \\ &= (0.6)(0.3)(0.2) + 0.056 + (0.4)(0.3)(0.8) = 0.188 \end{aligned}$$

(c) Gọi C : "Có ít nhất một người bắn trúng"

Khi đó, $C = A_1 + A_2 + A_3$ và

$$\begin{aligned} & P(C) \\ =\; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \\ =\; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3) - P(A_2)P(A_3) \\ & + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ =\; & 0.6 + 0.7 + 0.8 - (0.6)(0.7) - (0.6)(0.8) - (0.7)(0.8) + (0.6)(0.7)(0.8) \\ =\; & 0.976 \end{aligned}$$

Hoặc ta có thể dùng cách tính sau:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 1 - (0.4)(0.3)(0.2) = 0.976 \end{aligned}$$

(d) Gọi D : "Cả ba người đều bắn trúng"

Khi đó, $D = A_1A_2A_3$ và

$$P(D) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (0.6)(0.7)(0.8) = 0.336$$

(e) Gọi E : "Có đúng hai người bắn trúng"

Khi đó, $E = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$ và

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\ &= (0.6)(0.7)(0.2) + (0.6)(0.3)(0.8) + (0.4)(0.7)(0.8) = 0.452 \end{aligned}$$

(f) Gọi F : "Có ít nhất hai người bắn trúng"

Khi đó, $F = D + E$ và

$$\begin{aligned} P(F) &= P(D) + P(E) \\ &= 0.336 + 0.452 = 0.788 \end{aligned}$$

(g) Gọi G : "Có không quá hai người bắn trúng"

Khi đó, $P(G) = 1 - P(D) = 1 - 0.336 = 0.664$

8.

Đặt A :" cả 3 quả lấy ra lần sau đều mới"

B_i :" Trong 3 quả lấy ra để thi đấu có i quả mới" $i \in \{0;1;2;3\}$

Ta thấy các $\{B_0;\, B_1;\, B_2;\, B_3\}$ lập thành nhóm đầy đủ các biến cố, theo công thức xác suất toàn phần

$$P(A) = P(B_0)P(A \mid B_0) + P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)$$

$$= (20.84 + 135.56 + 216.35 + 84.20)\frac{1}{207025} \approx 0{,}089$$

9.

Đặt A: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm X "

B: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y "

Theo đề bài ta có: $P(A)=0,207; P(B)=0,5; P(A/B)=0,365$

a/ Xác suất người dân đó dùng cả X và Y là

$$P(AB)=P(B).P(A/B)=0,5.0,365=0,1825$$

b/ Xác suất người dân đó dùng Y, biết rằng không dùng X là

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}.B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(\overline{A})}=\frac{0,5-0,1852}{1-0,207}=0,404$$

10.

Gọi A là biến cố sinh viên vừa đủ điểm đậu.Xem việc chọn câu trả lời ở mỗi câu hỏi của sinh viên là 1 phép thử thì trong mỗiphép thử có 1 trong 2 khả năng xảy ra :

+ Sinh viên trả lời đúng với xác suất là p =0.25.

+ Sinh viên trả lời sai với xác suất là q =0.75.

a. $P(A)=P(10;5;0,25)=C_{10}^{5}(0,25)^{5}(0,75)^{5}\approx 0,058$

b.Gọi B là biến cố sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.

⇒B là biến cố sinh viên không chọn đúng câu hỏi nào

Ta có:

$P(B)=P(10;0;0,25)=C_{10}^{0}(0,25)^{0}(0,75)^{10}=(0,75)^{10}$

$\Rightarrow P(B)=1-(0,75)^{10}=0,056$

11.

Giải

a) Coi mỗi là chọn trả lời một câu hỏi là một phép thử Bernoulli. Khi đó, ta có quá trình Bernoulli B(n;p) với n = 10 và p = 0,25.

i) Xác suất học sinh trả lời đúng từ 5 câu hỏi trở lên là:

$$P_{10}(k\geq 5)=\sum_{k=5}^{10}P_{10}(k)=\sum_{k=5}^{10}C_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k}=0,0781$$

ii) Số câu trả lời đúng nhiều khả năng nhất:

$k_o=[(n+1)p]=[11.0,25]=[2,75]=2$

Xác suất tương ứng $P_{10}(2)=C_{10}^{2}0,25^{2}0,75^{8}=0,2857$

b) Gọi n là số câu hỏi trắc nghiệm trong đề. Theo đề bài, ta có

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - 0,75^n > 0,99$$
$$\Leftrightarrow 0,75^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \log_{0,75} 0,01 = 16,0078$$

Suy ra n = 17

Vậy, phải cho ít nhất 17 câu trắc nghiệm.