Lời giải bài tập Đại số chương 1 - 20211

Câu 1.

$a)$ $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow A$

Lập bảng chân lý ta có:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow A$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

$\Rightarrow (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow A$ là mệnh đề đúng.

$b)$ $(A \wedge \overline{B}) \rightarrow A$

Lập bảng chân lý ta có:

A	B	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$(A \wedge \overline{B}) \rightarrow A$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

$\Rightarrow (A \wedge \overline{B}) \rightarrow A$ là mệnh đề đúng.

$c)$ $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow C$

Lập bảng chân lý ta có:

A	B	C	$B \vee C$	$A(B \vee C)$	$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow C$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1

$\Rightarrow (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow C$ là mệnh đề sai.

Câu 2.

$a)$ $(A \leftrightarrow B)$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\\
&\Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)\\
&\Leftrightarrow (\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee A)) \vee (B \wedge (\overline{B} \vee A))\\
&\Leftrightarrow ((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge A)) \vee ((B \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge A))\\
&\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (A \leftrightarrow B)$ và $A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.
$b)$ $(\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \wedge B$ và $A \wedge B$
Ta có:

$$\begin{aligned}
(\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \wedge B &\Leftrightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge B\\
&\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\overline{B} \wedge B)\\
&\Leftrightarrow A \wedge B
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \wedge B$ và $A \wedge B$ là tương đương logic.

Câu 3.

Giả sử $A \rightarrow B$ là mệnh đề sai $\Leftrightarrow$ A đúng và B sai.

TH1: C đúng $\Rightarrow \begin{cases} A \wedge B \text{ đúng} \\ B \wedge C \text{ sai} \end{cases} \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$ sai

TH2: C sai $\Rightarrow \begin{cases} A \vee B \text{ đúng} \\ B \vee C \text{ sai} \end{cases} \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ sai

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai $\Rightarrow A \rightarrow B$ đúng.

Câu 4.

$A = [1;4)$, $B = (1;3)$, $C = [2;3]$

$(A \cap B) \backslash C = (A \cap B) \cap \overline{C} = (1;2)$

$(A \cup B) \backslash C = (A \cup B) \cap \overline{C} = [1;2) \cup (3;4)$

Câu 5.

$a)\ A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

Ta có:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \backslash (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] \\ &= A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap (B \backslash C)\end{aligned}$$

$b)\ A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$

Ta có:

$$\begin{aligned}A \backslash (A \cap B) &= A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \\ &= A \backslash B\end{aligned}$$

$C)\ (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

Ta có:

$$\begin{aligned}(A \backslash B) \backslash C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B \cup C}) = A \backslash (B \cup C)\end{aligned}$$

Câu 6.

Đặt $\begin{cases} \text{“}A \cup (B \backslash A) = A \cup B\text{”} = p \\ \text{“}A \cup (B \backslash A) = A \cap B\text{”} = q \end{cases}$ .Vậy đề bài trở thành: $p \to q$

Xét $p : A \cup (B \backslash A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup B$

$\Rightarrow$ Mệnh đề p đúng. (1)

Xét q : Giả sử $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

Ta có: $A \cup (B \backslash A) = A \cup B = \{1, 2\}$

$A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow A \cup (B \backslash A) \neq A \cap B$

$\Rightarrow$ Mệnh đề q sai. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Mệnh đề $p \to q$ sai.

Vậy mệnh đề đã cho là sai.

Câu 7.

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = 0\} \end{cases}$$

a) $f^2(x) = 0$. Gọi tập nghiệm của phương trình là $D1$

Khi đó $f(x) = 0 \to D1 = A$

$g^2(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$. Gọi tập nghiệm của phương trình là $D2$.

Khi đó $D2 = B$

b) $\dfrac{f^2(x) + g^2(x)}{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

Gọi tập nghiệm của phương trình là $D3 \Rightarrow D3 = \emptyset$.

Câu 8.

$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (1)$

$B \cap A = \{1, 3, a\} \quad (2)$

$B \backslash A = \{4\} \quad (3)$

a) $B\backslash A = \{4\} \Rightarrow \begin{cases} 4 \notin A \\ 4 \in B \end{cases}$; $B \cap A = \{1, 3, a\} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \\ a \in B \end{cases} \Rightarrow a \neq 4 \Rightarrow a$ có thể nhận giá trị$\{2, 5\}$

b) $a = 5 \Rightarrow B \cup A = \{1, 3, 5\}$. Vì $4 \notin A \Rightarrow A = \{1, 3, 5, 2\}$ hoặc $A = \{1, 3, 5\}$

+)$A = \{1, 3, 5, 2\} \Rightarrow 2 \notin B$ vì $B \cap A = \{1, 3, 5\}$

$\Rightarrow B = \{1, 3, 5, 4\}$ (Thỏa mãn $B\backslash A = \{4\}$ và $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

+)$A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow B = \{1, 3, 5, 4\}$ vì $B\backslash A = \{4\}$

Trường hợp này loại vì không thỏa mãn $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Câu 9.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \to 3x + 1$

+) Lấy bất kì $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

Vậy f là đơn ánh (1)

+) Xét $f(x) = y(*)$, $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 3x + 1 = y \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm với $y = 2$ $(x \in \mathbb{N})$

Vậy f không là toàn ánh (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f$ là đơn ánh

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \to f(x, y) = (x + y, x - y)$

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Xét: $f(x, y) = (u, v) \Rightarrow (x + y)(x - y) = (u, v) \Rightarrow \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ hpt luôn có 1 nghiệm duy nhất $\forall (u, v) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh

c) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 - y, x + y) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = a + b \\ x + y = b \end{cases}$

Xét $x^2 + x = a + b \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right) = a + b + \dfrac{1}{4}$

Với $\begin{cases} a+b+\frac{1}{4}<0 \rightarrow & \text{pt vô nghiệm} \rightarrow f \text{ không phải toàn ánh} \\ a+b+\frac{1}{4}>0 \rightarrow & \text{pt có nhiều hơn 1 nghiệm} \rightarrow f \text{ không phải đơn ánh} \end{cases}$

Câu 10.

+) $f(A)=\{Y\in F, \exists x\in A\rightarrow f(x)=Y\}$

$Y(x_2,y_2); \exists(x_1,y_1)\rightarrow f(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Rightarrow \begin{cases} x_1+y_1=x_2 \\ x_1-y_1=y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{x_2+y_2}{2} \\ y_1=\dfrac{x_2-y_2}{2} \end{cases}$

Vì $x\in A$: $x_1^2+y_1^2=4\Rightarrow \left(\dfrac{x_2+y_2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2-y_2}{2}\right)^2=4\Rightarrow x_2^2+y_2^2=8$

Vậy $f(A)=\{x,y\in\mathbb{R}^2|x_2^2+y_2^2=8\}$

+) $f^{-1}(A)=\{x\in E, f(x)\in A\}$

$x=(a,b), f(x)=f(a,b)=(a+b,a-b)\Rightarrow(a+b)^2+(a-b)^2=4\Rightarrow a^2+b^2=2$

$\Rightarrow f^{-1}(A)=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a^2+b^2=2\}$

Câu 11.

+) $f(x)=x^3-x$

Ta có: $f^{-1}\{0\}=\{x\in X|f(x)\in 0\}$ $x^3-x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc$x=-1$

+) $f(x_1+1)=6\Rightarrow(x_1+1)^3-(x_1+1)=6\Leftrightarrow x_1^3+3x_2^2+2x_1-6=0\Leftrightarrow x_1=1$

+) x_2 là nghiệm của pt $f(x)=x\Rightarrow x_2=0\Rightarrow x_3=-1$

Vậy $A=\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,0,-1\}$

Câu 12.

+) f là song ánh $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ là đơn ánh} \\ f \text{ là toàn ánh} \end{cases}$

+) $f$là đơn ánh $\Leftrightarrow\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2; f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ thì $\begin{cases} x1=x2 \\ y1=y2 \end{cases}$ $\forall m\in\mathbb{R}$

+) Gọi $(a,b)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)=(a,b)\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=a \\ -x+my=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{am-3b}{3+2m} \\ y=\dfrac{a+2b}{3+2m} \end{cases}$

f là toàn ánh $\Rightarrow$ Hpt có nghiệm (x,y) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow 3+2m\neq 0\Rightarrow m\neq-\dfrac{3}{2}$

Vậy $m\neq-\dfrac{3}{2}$ thì f là song ánh.

Câu 13.

Tập X và phép toán * lập thành 1 nhóm vì thỏa mãn những thính chất sau:

- Tính đóng kín: $\forall x,y\in X$ thì $x*y\in X$

Thật vậy, giả sử $x*y=-1\Leftrightarrow x+y+xy=-1\Leftrightarrow(x+1)(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $y=-1$ (mâu thuẫn với giả thiết $x,y\in X$)

- Tính hết hợp: $(x*y)*z=(x+y+xy)*z=z+y+xy+z+(x+y+xy)z$

$=x+y+z+xy+xz+yz+xyz=x+(y+z+yz)+(y+z+yz)x=x*(y*z)$

- Có phần tử đơn vị $0\in X$ sao cho $x*0=0*x=x$ $\forall x\in X$

- Với mỗi phần tử $x \in X$, tồn tại phần tử $y = -\dfrac{x}{x+1} \in X$ sao cho $x * y = y * x = 0$

Câu 14. Tập G với phép + thông thường lập thành 1 nhóm abel vì nó thoả mãn những tính chất sau:

-Tính đóng kín : với $\forall x, y \in G$ thì $x + y \in G$

Do tính chất của phép cộng nên:

-Tính kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z)$ với $\forall x, y, z \in G$

-Có phần tử đơn vị $0 \in G$ sao cho với $\forall x \in G$:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

-Với mỗi $x \in G$,tồn tại phần tử $-x \in G$ sao cho:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

-Tính giao hoán: $x + y = y + x \forall x, y \in G$

Câu 15. Do $(G, *)$ là một nhóm nên với $\forall x, y \in G$ ta có:

$$(x * y)^2 = e$$

(e là phần tử đơn vị của G)

Lại có :$y * x * (x * y) = y * (x * x) * y = y * y = e$

Suy ra:

$(x * y)^2 = y * x * (x * y)$

$\Rightarrow (x * y)^3 = y * x * (x * y)^2$

$\Rightarrow x * y = y * x$

< do $(x * y)^2 = e$>

Do đó , (G,*) có tính giao hoán

Vậy (G,*0) là 1 nhóm abel.

Câu 16.

a,$z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = -1$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

b,$z^2 + 2iz - 5 = 0$

$\Delta = 16$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -i + 2 \\ z_2 = -i - 2 \end{cases}$

c,$z^4 + 2iz^2 - 5 = 0$

Đặt $t = z^2$

Phương trình trở thành:$t^2 + 2it - 5 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = -i + 2 \\ t_2 = -i - 2 \end{cases}$

+Với $t_1 = -i + 2 \Rightarrow z^2 = -i + 2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} - i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}} \\ z_2 = -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} + i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}} \end{cases}$

+Với $t_1 = -i - 2 \Rightarrow z^2 = -i - 2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}{2} - i\frac{1}{\sqrt{-4+2\sqrt{5}}} \\ z_2 = -\frac{\sqrt{-4+2\sqrt{5}}}{2} + i\frac{1}{\sqrt{-4+2\sqrt{5}}} \end{cases}$

Câu 17.

a)$(1 + i\sqrt{3})^{12} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{12} = 2^{12}$

b)$(3 + 3i)^{2019} = (3\sqrt{2})^{2019}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2019} = (3\sqrt{2})^{2019}\left(\cos\frac{2019\pi}{4} + i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$

c)$(a + bi)^{2020} = (a^2 + b^2)^{1010}\left[\cos(2020\alpha) + i\sin 2020\alpha\right]$ (Với $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$)

d) $z^7(\sqrt{3} + i) = 1 + i \Leftrightarrow z^7 = \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i} \Leftrightarrow z^7 = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Leftrightarrow z^7 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt[14]{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{7} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{7}\right)$

Câu 18.

Có $\varepsilon_0, \varepsilon_1, .., \varepsilon_{2020}$ là các căn bậc 2021 của đơn vị. Do đó chúng hợp thành tập nghiệm của phương trình $z^{2021} - 1 = 0$

a, Theo định lý Viet:$\sum_{k=0}^{2020} \varepsilon_k = 0$

b,

Đặt $t = 1 - z$

Ta có $z^{2021} = 1 \Rightarrow$ Phương trình trở thành $(t - 1)^{2021} = -1$

Và $B = \prod_{i=1}^{2020}(1 - \varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{2020} t_i$ với t_i là nghiệm thứ i của phương trình trên ngoài $t_0 = 1 - \varepsilon_0 = 1 - 1 = 0$

Ta xét:

$(t - 1)^{2021} = -1$

$\Leftrightarrow a_{2021}t^{2021} + a_{2020}t^{2020} + a_{2019}t^{2019} + \cdots + a_1 t + a_0 = -1 \quad$ với $a_i = C_{2021}^{i}(-1)^{2021-i}$

$\Rightarrow a_0 = -1 \quad \Rightarrow a_{2021}t^{2021} + a_{2020}t^{2020} + a_{2019}t^{2019} + \cdots + a_1 t = 0$

$\Rightarrow a_{2021}t^{2020} + a_{2020}t^{2019} + a_{2019}t^{2018} + \cdots + a_1 = 0$ có nghiệm là t_i với $i = \overline{1, 2020}$ của phương trình ban đầu.

Theo Định lý Vi-ét, ta có:

$\prod_{i=1}^{2020} t_i = \frac{a_1}{a_{2021}} = \frac{C_{2021}^{1}(-1)^{2021-1}}{C_{2021}^{2021}(-1)^{2021-2021}} = 2021$

Vậy $B = 2021$

c, Đặt $t_i = \frac{1}{\varepsilon_i+2}$ với mọi $i = 0, 1, 2, ..., 2000$

$\Rightarrow \varepsilon_i = \frac{1}{t_i} - 2$

Nhận thấy: $(\varepsilon_i)^{2021} = 1$ với mọi $i = 0, 1, 2, ..., 2000$

$\Rightarrow (\frac{1}{t_i} - 2)^{2021} = 1$

$\Rightarrow (-2t_i + 1)^{2021} = t_i^{2021}$

$\Rightarrow (2t_i - 1)^{2021} + t_i^{2021} = 0$

Xét đa thức $P(t) = (2t_i - 1)^{2021} + t_i^{2021} = 0$ có 2021 nghiệm t_i với $i = \overline{0, 2020}$

Ta có: $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le 2020} t_i t_j = \sum_{i=1}^{2020} t_0 t_i + \sum_{1\le i\le j\le 2020} t_i t_j$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\frac{a_{2019}}{a_{2021}} = t_0(\frac{-a_{2020}}{a_{2021}} - t_0) + \sum_{1\le i\le j\le 2020} t_i t_j$$

$$\Rightarrow \frac{2^{2019}C_{2021}^2}{2^{2021}+1} = \frac{1}{3}(\frac{2^{2020}C_{2021}^1}{2^{2021}+1} - \frac{1}{3}) + \sum_{1\le i\le j\le 2020} t_i t_j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le i\le j\le 2020} t_i t_j = \frac{2^{2019}C_{2021}^2}{2^{2021}+1} - \frac{1}{3}\frac{2^{2020}2021}{2^{2021}+1} + \frac{1}{9}$$

Câu 19.

$z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3} = \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \overline{z} = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^{2020} = (\frac{2}{3})^{2020}(\cos\frac{2020\pi}{6} - i\sin\frac{2020\pi}{6}) \\ (\overline{z})^{2020} = (\frac{2}{3})^{2020}(\cos\frac{2020\pi}{6} + i\sin\frac{2020\pi}{6}) \end{cases}$$

$\Rightarrow z^{2020} + (\overline{z})^{2020} = (\frac{2}{3})^{2020} * 2 * \cos\frac{2020\pi}{6} = -(\frac{2}{3})^{2020}$

Câu 20. z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 - 5z + 6 = 0$

a,$A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$

$= (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)$

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \frac{-b}{a} = 0 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + ... + z_3z_4 = \frac{c}{a} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A = 0$

b,$B = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4$

$= (5z_1 - 6) + (5z_2 - 6) + (5z_3 - 6) + (5z_4 - 6)$

$= 5(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) - 24$

$= -24$