GIẢI TÍCH 2
BÀI 9
CHƯƠNG IV.
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. Tích phân đường loại 1

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. $f(x, y)$ xác định trên đường cong $C = \overset{\frown}{AB}$. Chia C thành n phần (không dẫm lên nhau) bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$.

Gọi tên và độ dài của cung thứ i : $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i, $i = \overline{1, n}$.

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i\,;\,y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \Delta s_i\,.$$

Nếu có $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = I$ với mọi cách chia C và mọi cách chọn điểm M_i thì ta gọi I là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ lấy trên đường cong C và kí hiệu

$$I = \int_C f\left(x, y\right) ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f\left(x, y\right) ds$$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C 2ds$, C: $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, từ A$(0 ; -3)$ đến B$(0 ; 3)$

GIẢI

Chia C thành n phần (không dẫm lên nhau) bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$.

Gọi tên và độ dài của cung thứ i : $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i, $i = \overline{1, n}$.

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i\,;\,y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} 2\Delta s_i = 2 \times 3\pi = 6\pi.$$

Có $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ với mọi cách chia C và mọi cách chọn điểm M_i , do đó có

$$I = \int\limits_C 2ds = 6\pi.$$

Ví dụ 2. Xét $\int\limits_C D(x, y)ds$, C: $0 \le x \le 1$, $y = 0$,

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

3. Sự tồn tại.

Định lí 1. $f(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn C thì tồn tại $\int\limits_C f(x, y)ds$

• Ý nghĩa cơ học

$f(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng của đường cong vật chất C thì có khối lượng của đường cong là $m = \int\limits_C f(x, y)ds$

5. Tính chất. Có tính chất giống như tích phân xác định trừ ra tính chất sau

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,ds$$

6. Cách tính. Ta cần tính $\int_C f(x,y)\,ds$

a) $\boldsymbol{C : y = y(x),\ a \le x \le b}$, khi đó ta có

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int\limits_C \frac{4y}{x} ds$, $C : y = \frac{x^2}{2}$ nối điểm $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ với $B(2\ ;\ 2)$.

GIẢI

$$I = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \int_1^2 \frac{4}{x}\frac{x^2}{2}\sqrt{1 + x^2}dx$$

$$= \int_1^2 2x\sqrt{1 + x^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + x^2}d(1 + x^2) = \left.\frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C xy\,ds$, $C: |x| + |y| = a,\ a > 0.$

GIẢI

+) $I=\int\limits_C xy\,ds=\int\limits_{C_1} xy\,ds+\int\limits_{C_2} xy\,ds+\int\limits_{C_3} xy\,ds+\int\limits_{C_4} xy\,ds$

$C_1: y=1-x, 0\le x\le 1; C_2: y=1+x, -1\le x\le 0;$
$C_3: y=-1-x, -1\le x\le 0; C_4: y=-1+x, 0\le x\le 1;$

+) $\Rightarrow I=\int_0^1 x(1-x)\sqrt{2}dx+\int_{-1}^0 x(1+x)\sqrt{2}dx+$

$$+\int_{-1}^0 x(-1-x)\sqrt{2}dx+\int_0^1 x(-1+x)\sqrt{2}dx=0$$

b) *C*: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, thì có

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f\big(x(t);y(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

Ví dụ 1. Tính $\int_C xy\,ds$, $C: x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

GIẢI +)

$$C: x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x'^2 + y'^2} = R$$

$$I = \int_\alpha^\beta f\big(x(t);y(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (R\cos t)(R\sin t)R dt = R^3 \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t)$$

$$= R^3 \left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính $\int_C (x-y)ds$, $C: x^2 + y^2 = ax$.

GIẢI +) $C: x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2}) + y^2 = (\frac{a}{2})^2$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, y = \frac{a}{2}\sin t, 0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{a}{2}$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t); y(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t - \frac{a}{2}\sin t\right)\frac{a}{2}dt = \frac{a}{2}(t + \sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a}{2}2\pi = \pi a$$

c) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, thì có

$$\int_C f(x, y, z)ds$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

Ví dụ 1. Tính

$$\int_C (x+y)ds,\ x = t,\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$$

GIẢI

$$+)\ I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

$$= \int_0^1 (t + \sqrt{\frac{3}{2}}t^2)\sqrt{1 + \left(t\sqrt{6}\right)^2 + 9t^4}dt$$

$$= \int_0^1 \left(t + \sqrt{\frac{3}{2}}t^2\right)(1 + 3t^2)dt = \int_0^1 \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}t^4 + 3t^3 + t + \sqrt{\frac{3}{2}}t^2\right)dt$$

+) $= \int_0^1 \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}t^4 + 3t^3 + t + \sqrt{\frac{3}{2}}t^2\right)dt$

$$= \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 2. Tính

$$\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2},\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \geq 0.$$

GIẢI

$$+)I = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b})\int_0^\infty \frac{1}{a^2+b^2t^2}d(bt)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b})\int_0^\infty \frac{1}{a^2+b^2t^2}d(bt)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\frac{1}{a}\arctan\frac{bt}{a}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}.$$

Ví dụ 3 (K60). Tính

$$\int_C (x+y)ds,\ C: x = 2+2\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le \pi.$$

$$(4\pi + 2)$$

§2. Tích phân đường loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. Cho hàm vectơ

$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ xác định trên đường cong C nối hai điểm A, B, $C = \overset{\frown}{AB}$, vectơ $\vec{T}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \sin\alpha(M)\vec{j}$ là vectơ tiếp tuyến với C tại M, $\alpha(M) = \left(\vec{T}, Ox\right)$, khi đó tích phân đường loại một của hàm

$$f(x, y) = \vec{F}.\vec{T} = P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)$$

trên đường C

$$I = \int_C \vec{F}.\vec{T}\, ds = \int_C \left[P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)\right] ds$$

cùng được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm $P(M)$, $Q(M)$ lấy trên C đi từ A đến B. Ta cũng có

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Tương tự, ta cũng có tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + \vec{R}(M)\vec{k}, M \in \mathbb{R}^3$ là

$$I = \int\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

α, β, γ lần lượt là các góc giữa tiếp tuyến $\vec{T}$ với các trục Ox, Oy, Oz

Ví dụ 1. Tính $\int_C x dx + e^{xy^2} dy$, C: $y = 1$, $x : 0 \to 2$

GIẢI

+) $P = x, Q = e^{xy^2}, \alpha = 0, \beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$I = \int_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

+) $= \int_C (x + e^{xy^2} 0)ds = \int_0^2 x dx = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2.$

Ví dụ 2. Xét $\int\limits_C \sin x^2 dx + dy$, $C: x = 2,\ y: 0 \to 1$

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn từng khúc C thì tồn tại

$$\int\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

4. Ý nghĩa cơ học : Tính công của lực di chuyển chất điểm dọc theo đường cong C.

5. Tính chất : Có các tính chất giống như tích phân xác định, chẳng hạn :

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

6. Cách tính.

a) Nếu $C : y = y(x),\ x : a \to b$ thì có

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x)]dx$$

Ví dụ 1. Tính $\int_C xydx + (y - x)dy$,

a) $C : y = x^2,\ x : 0 \to 1$

b) $C : y = 0,\ x : 0 \to 1$

c) $C : x = 1,\ \ y : 0 \to 1$

GIẢI a)

+) $I = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x)]dx$

$= \int_0^1 [xx^2 + (x^2 - x)2x]dx = \int_0^1 [3x^3 - 2x^2]dx$

+) $= \int_0^1 [xx^2 + (x^2 - x)2x]dx = \int_0^1 [3x^3 - 2x^2]dx$

$= \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$

b)

+) $I=\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx$

$=\int_0^1 [xo+(0-x)0]dx=\int_0^1 0dx=C\Big|_0^1=0.$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ là chu tuyến hình vuông với các đỉnh $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$, $C(-1\ ;\ 0)$, $D(0,\ -1)$.

GIẢI

+) $I=\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx$

$$=\int_{AB}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{CD}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

Do trên AB và CD có dx+dy=0,nên có

$$I=\int_{BC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

Do trên BC và DA có dx=dy,nên có

$$I=\int_{BC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_0^{-1}\frac{2dx}{1}+\int_0^{1}\frac{2dx}{1}$$

$$= \int_0^{-1} \frac{2dx}{1} + \int_0^{1} \frac{2dx}{1} = 2x\Big|_0^{-1} + 2x\Big|_0^{1} = -2 + 2 = 0.$$

b) C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, t: $\alpha \to \beta$**,** có

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t), y(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t) \right] dt$$

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C xdx + (x + y)dy$,

$$C : x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t : 0 \to 2\pi$$

GIẢI

+) $I = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[R\cos t(-R\sin t) + R(\cos t + \sin t) R\cos t \right] dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[R^2 \cos^2 t \right] dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(2t)] dt$$

$$= \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

Ví dụ 2. Tính $\oint\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{(x^2+y^2)}$,

C là $x^2 + y^2 = a^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

GIẢI

+) $C: x = a\cos t, y = a\sin t$, t biến thiên từ 0 đến 2π

$$\Rightarrow \oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a(\cos t+\sin t)(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)(a\cos t)}{a^2}dt$$

+) $= \int_0^{2\pi} \frac{a^2(-\cos^2 t-\sin^2 t)}{a^2}dt = \int_0^{2\pi}(-1)dt = -2\pi.$

Ví dụ 3.

a (K58) 1) Tính $\int_C (x+xy)dx + x^2dy,$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

C là cung bé của $x^2 + y^2 = 4$ đi từ A(-2,0) đến B(0,2).

2) Tính $\int_L 2xdy - 4ydx$, C là cung của $x^2 + y^2 = 4x$, $y \geq 0$, đi từ A(4,0) đến B(0,0). (12π)

b (K59)

1) Tính $\int_L \frac{2x}{(x^2+2y^2)^2}dx + \frac{3y}{x^2+y^2}dy$, (1)

L là cung của $y = \sqrt{1-x^2}$, đi từ A(-1,0) đến B(0,1).

2) Tính $\int_C (x-3y)dx + 2ydy$, (4)

với C là cung parabol $y = 1 - x^2$, đi từ A(1,0) đến B(-1,0).

3) Tính $\int_{ABC} 5y^4dx - 4x^3dy$, (2) *với ABC* là đường gấp khúc đi qua A(0,1), B(1,0), C(0,-1).

c (K60)

1) Tính $\int_L x^2dx + (x+y)dy,$ $\left(\frac{11}{12}\right)$

L là cung đường cong $y = 1 - x^3$, đi từ A(1,0) đến B(0,1).

2) Tính $\int_C (x+y)dx - 3x^2dy,$ $\left(\frac{7}{6}\right)$

L là cung đường parabol $y = x - x^2$, đi từ 0(0,0) đến A(1,0).

Chú ý. Tương tự cũng có công thức khi

$$C : x = x(t),\ y = y(t),\ z(t),\ t : \alpha \to \beta$$

7. Công thức Green

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc C, thì có

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$$

Ví dụ 1. Tính

$$\oint_C \left(1-x^2\right) y dx + \left(1+y^2\right) x dy, \; C: x^2 + y^2 = R^2$$

GIẢI

+) $Q'_x = 1 + y^2; P'_y = 1 - x^2 \Rightarrow$

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

+) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R \Rightarrow$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \times \left(\int_0^R r^3 dr\right)$$

$$= 2\pi \times \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính

$$\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,\ C: x^2 + y^2 = ax.$$

GIẢI

+) $Q'_x = 1 + y; P'_y = 1 + x \Rightarrow$

$$I = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le ax} \left(y - x\right) dxdy$$

+) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \cos\varphi \Rightarrow$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r(\cos\varphi - \sin\varphi) r d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - \sin\varphi) \frac{\cos^3\varphi}{3} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi}{3} d\varphi - 0$$

$$= \frac{2}{3} \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Ví dụ 3. Tính

$$\oint_L \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \right) dx + \left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+y^2}} + 5 \right) dy,$$

$$C : x^2 + y^2 = 4y.$$

GIẢI

+) $Q'_x = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+y^2}};$

$$P'_y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{y+\sqrt{1+y^2}} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+y^2}} = Q'_x \Rightarrow$$

+) $I = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4y} 0dxdy = 0.$

Ví dụ 4.

a (K59) 1) Tính $\oint\limits_L (2xy-5)dx + (2x+3y)dy$, C *là biên miền sau theo chiều dương*: y=x^2 , y=0, x=1.

$(\frac{1}{6})$

2)Dùng tích phân đường loại hai tính diện tích miền D, giới hạn bởi x=0, x=2(1-cost), y=2(1-sint), $0 \le t \le 2\pi$. (12π)

b (K60)

1)Tính

$\int\limits_C (e^y - 3x^2) + (3xy^2 + xe^y)dy$, *với C là nửa đường tròn* : $x^2 + y^2 = 1, y \ge 0$, đi từ A(1,0) đến B(-1,0).

$$\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)$$

2)Tính

$\int\limits_{OABO} (x^3 - xy) + (2xy + y^2)dy$, *với OABO đường gấp khúc* đi qua O(0,0), A(1,0) đến B(1,1). $\left(\frac{2}{3}\right)$

Chú ý :

- Trong công thức Green đường cong C kín và có hướng dương.
- Tuy nhiên, vẫn có thể dùng được công thức Green khi C không kín và có hướng âm.

8. Điều kiện để tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lí 1. (ĐL 4 mệnh đề tương đương). Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền D đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1°/ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$

2°/ $\oint\limits_{L} Pdx + Qdx = 0$, $\forall$ L kín thuộc D.

3°/ $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào A, B mà không phụ thuộc vào đường nối A, B.

4°/ $\exists U(x, y) : du = Pdx + Qdy$

Chú ý :

a) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dU = U(B) - U(A)$

b) Nếu có $Q'_x = P'_y \Rightarrow \exists U : dU = Pdx + Qdy$, hàm U tính được bằng các công thức sau :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

$$= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt$$

c) Liên hệ với công thức TPTQ của PTVPTP (GT3)

Ví dụ 1. $\displaystyle\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$

GIẢI

+) $d(xy) = xdy + ydx$

+) $\Rightarrow I = \int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1;2)}^{(2;3)} = 6 - (-2) = 8.$

Ví dụ 2. Tính

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy$$

GIẢI

+) $Q'_x = 12x^3y^2 - 6y = P'_y \Rightarrow$

$$I = \int_{OA} Pdx + Qdy + \int_{AB} Pdx + Qdy,$$

$OA: y = 0, x: 0 \to 1,$ $AB: x = 1, y: 0 \to 1.$

+) $I = \int_0^1 5dx + \int_0^1 (3y^2 - 6y - 4)dy = 5 + (y^3 - 3y^2 - 4y)\Big|_0^1$

$= 5 - 6 = -1.$

Ví dụ 3. Tính

$$\int_L \frac{x}{(x+y^2)^2}[(x+2y^2)dx-2xydy]$$

ở đó L : $y = 1 - x^3$, đi từ A(1,0) đến B(0,1).

GIẢI

+)

$$Pdx + Qdy = \left[\frac{x}{x+y^2} + \frac{xy^2}{(x+y^2)^2}\right]dx + x^2\frac{-2y}{(x+y^2)^2}dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{x}{x+y^2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{x+y^2}\right)dy = d\left(\frac{x^2}{x+y^2}\right).$$

+) $\Rightarrow I = \int\limits_{(1;0)}^{(0;1)} d\left(\frac{x^2}{x+y^2}\right) = \left.\frac{x^2}{x+y^2}\right|_{(1;0)}^{(0;1)} = 0 - 1 = -1.$

Ví dụ 4.

a (K58) 1) Tìm a, b để tích phân sau không phụ thuộc đường đi

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [(b+3)xy + ay^2]dx + [(a+1)x^2 + 2(b-1)xy]dy$$

(a=2, b=3)

2) Tính $\int\limits_{L} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{2}dx + ydy\right)$,

ở đó L là cung của : $y = x^2$, đi từ A(1,1) đến B(2,4)

$(\sqrt{18} - \sqrt{2})$

b (K59) 1) CMR tích phân sau không phụ thuộc đường đi $I = \int\limits_L (2 - ye^{-x})dx + (3 + e^{-x})dy$.

Tính I với L là đoạn thẳng đi từ A(1,0) đến B(2,1) $(5 + e^{-2})$

2) Tìm a, b để tích phân sau không phụ thuộc đường đi $\int\limits_L e^x[(2x + ay^2 + 1)dx + (bx + 2y)dy]$.

(a=1, b=0)

3) Tìm a, b để tích phân sau không phụ thuộc đường đi

$$\int_L (ax^2y + 2y^4 - 3ye^{xy})dx + (x^3 + bxy^3 - 3xe^{xy})dy,$$

(a=3, b=8)

c (K60) 1) Tính $\int_L e^{2x+y^2}[(1+2x)dx + 2xydy]$.

Với C là đường cong $x = y^3$ đi từ O(0,0) đến N(1,1).

(e^3)

2) Tính $\int_L e^{x+y^2}[(x^2 + 2x)dx + 2x^2ydy]$,

với L là đường cong : $y = 1 - x^2$, đi từ A(1,0) đến B(0,1) (-e)

3) Tìm các số thực a, b để tích phân sau phụ thuộc đường đi

$$I = \int_L (3x^2y^2 + axy^4)dx + (bx^3y + 8x^2y^3)dy.$$

(a=4, b=2)

Chú ý. Tương tự có thể mở rộng định lí này cho đường cong trong không gian:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t : \alpha \to \beta.$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!