Bài tập: Phương trình khuyết

Câu 1: a) $xy" = x^2 - x \ \ (1) \ \ y(0) = 0$

đặt $y' = u \to y" = u'$

Thay vào pt (1) được:

$$xu' = x^2 - x$$

(vì $y(0) = 0 \to x \neq 0$)

$\to u' = x - 1 \to u = \dfrac{x^2}{2} - x + C_1 \to y' = \dfrac{x^2}{2} - x + C_1 \to y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$

Mà $y(0) = 0 \to C_2 = 0 \to y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + C_1x$

Vậy pt (1) có NTQ là

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_1x$$

b) $y" = y' + x \ \ (1)$

Đặt

$$y' = u \to y" = u'$$

Thay vào pt (1) được

$$u' = u + x \to u' - u = x$$

Áp dụng CT nghiệm tổng quát ta có:

$u = e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx + C_1\right) = e^x\left(\int xe^{-x}dx + C_1\right) = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)$

$= C_1e^x - x - 1$

$\to y' = C_1e^x - x - 1 \to y = C_1e^x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_2$

Vậy pt có NTQ là

$$y = C_1e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2$$

c) $(1 - x^2)y" - xy' = 2 \ \ (1)$ và $y(0) = 0, y'(0) = 0$

đặt

$$u = y' \to u' = y"$$

Thay vào pt (1) có $(1 - x^2)u' - xu = 2 \to u' - \dfrac{x}{1 - x^2}u = \dfrac{2}{1 - x^2}$

Theo CT NTQ:

$u = e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx}\left(\int \frac{2}{1-x^2}.e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} dx + C_1\right)$
$= e^{-\frac{1}{2}ln(1-x^2)}\left(\int \frac{2}{1-x^2}e^{\frac{1}{2}ln(1-x^2)}dx + C_1\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx + C_1\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x + C_1)$
$\to y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x + C_1)$
$\to y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$
Vì $y'(0) = 0, y(0) = 0 \to C_2 = C_1 = 0 \to y = \arcsin^2 x$
Vậy pt có nghiệm riêng

$$y = \arcsin^2 x$$

d) $xy' = y'ln\left(\frac{y'}{x}\right)$ (1)
đặt $u = y' \to y" = u'$
Thay vào pt (1) được

$$xu' = uln\left(\frac{u}{x}\right)$$

đặt $\frac{u}{x} = t \to u = xt \to u' = t + xt' \to t + xt' = tlnt \to x\frac{dt}{dx} = t(lnt - 1)$
TH1: $t(lnt - 1) \neq 0$
$\to \frac{dt}{t(lnt-1)} = \frac{dx}{x} \to ln(lnt - 1) = lnx + C_1 \to lnt - 1 = xC_1 \to t = e^{C_1x+1} \to \frac{y}{x} = e^{C_1x+1}$
$\to u = xe^{C_1x+1} \to y' = xe^{C_1x+1} \to y = \frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2$
TH2: $t = 0 \to u = 0$(không thỏa mãn vì $y' > 0$)
TH3: $lnt - 1 = 0 \to t = e \to \frac{u}{x} = e \to y' = ex \to y = e\frac{x^2}{2} + C$ (tm pt (1))
Vậy...
c) $2yy" - y'^2 - 1 = 0$ (1) $y(1) = 1, y'(1) = 1$
đặt $u = y' \to u' = u\frac{du}{dy}$
Thay vào (1) ta được:
$2yu\frac{du}{dy} - u^2 - 1 = 0 \to \frac{2udu}{u^2+1} = \frac{dy}{y} \to ln(u^2 + 1) = lny + C \to u = \sqrt{-1 + C_1y}$
$\to y' = \sqrt{-1 + C_1y} \to \frac{dy}{\sqrt{C_1y - 1}} = dx \to \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y - 1} = x + C_2$
$\to \sqrt{C_1y - 1} = \frac{C_1x}{2} + \frac{C_1C_2}{2}$
$\to y = \frac{1}{C_1}\left(1 + \left(\frac{C_1x}{2} + \frac{C_1C_2}{2}\right)^2\right)$

Vì $y'(1) = 1, y(1) = 1 \to C_1 = 2 \to y = \frac{1}{2}((x + C_2)^2 + 1)$

$y(1) = 1 \to C_2 = 0 \to y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

Vậy....

Bài tập: Phương trình tuyến tính thuần nhất

a) $y" - y' = 0$

Một nghiệm của pt là $y_1 = 1$

Theo CT Liouville:

$y_2 = e^x$

Do đó NTQ của pt là $y = C_1 + C_2e^x$

b) $xy" - (2x + 1)y' + (x + 1)y$ biết trước $y_1 = e^x$

Theo CT Liouville: $y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{-(2x+1)}{x} dx} dx = e^x \frac{x^2}{2}$

Vậy NTQ của pt là $y = C_1e^x + C_2e^x x^2$

c) $(x^2 + 2x)y" - 2(1 + x)y' + 2y = 0$ biết trước $y_1 = x + 1$

Theo CT Liouville:

$y_2 = (x + 1)\int \frac{1}{(x+1)^2} . e^{\int \frac{2(1+x)}{x^2+2x} dx} dx = (x + 1)e^{ln(x^2+2x)} dx = x^2 + x + 1$

Do đó NTQ của pt là $y = C_1(x + 1) + C_2(x^2 + x + 1)$

d) $y" - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ biết trước $y_1 = x$

Theo CT Liouville:

$y_2 = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-1}{x} dx} dx = x. \int \frac{1}{x^2} e^{lnx} dx = xlnx$

Do đó NTQ của pt là $y = C_1x + C_2xlnx$

Như vậy dạng bài về PTVPTT thuần nhất chủ yếu sử dụng công thức Liouville. Thông thường ta sẽ nhẩm được 1 nghiệm hoặc trong trường hợp phức tạp hơn, người ta sẽ cho trước 1 nghiệm.

Bài tập: Phương trình VPTT không thuần nhất và pp biến thiên hằng số Lagrange

a) $y" - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$

Phương trình $y" - y' = 0$ có 2 nghiệm cơ sở là $y_1 = 1, y_2 = e^x$

Ta tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất là

$y^*(x) = C_1(x) + C_2(x)e^x$

Ta có: $\begin{cases} C_1'(x).0 + C_2'(x)e^x = \dfrac{2-x}{x^3}e^x \\ C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{e^x}{x^2} + C \\ C_2(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + C \end{cases}$

Do đó $y^*(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Vậy NTQ của pt không thuần nhất là $y = C_1 + C_2e^x + \dfrac{e^x}{x}$

b) $x^2y" + xy' - y = x^2$

$\rightarrow y" + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 1$

Xét $y" + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 0$ là pt thuần nhất

Ta nhẩm được $y_1 = x$ là 1 nghiệm của nó

$y_2 = x\int \dfrac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx = \dfrac{-1}{2x}$

$\rightarrow y = C_1x + C_2\dfrac{1}{x}$ là NTQ của pt thuần nhất

Ta tìm được 1 nghiệm riêng $y^*(x) = C_1(x)x + C_2(x)\dfrac{1}{x}$ của pt không thuần nhất

Ta có $\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\dfrac{-1}{x^2} = 1 \\ C_1'(x)x + C_2'(x)\dfrac{1}{x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} \\ C_2(x) = \dfrac{-x^3}{6} \end{cases}$

Do đó $y^*(x) = \dfrac{x^2}{3}$

Như vậy NTQ của pt là $y = C_1x + C_2\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{3}$

c) $y" + 3y' + 2y = e^x$

Xét pt $y" + 3y' + 2y = 0$

Ta nhẩm được $y_1 = e^{-x}$ là 1 nghiệm

$y_2 = e^{-x}\int \dfrac{1}{e^{-2x}}e^{-\int 3dx}dx = -e^{-2x}$

Như vậy 1 nghiệm riêng của pt khỗng thuần nhất có dạng:$y^*(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$

Ta có: $\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)2e^{-2x} = -e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \\ C_2(x) = \dfrac{-e^{3x}}{3} \end{cases}$

Vậy NTQ của pt không thuần nhất đã cho là: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \dfrac{e^x}{6}$

d) $y" - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

Xét pt $y" - 2y' + y = 0$ là pt thuần nhất ứng với pt không thuần nhất đã cho

Ta có thể nhẩm được $y_1 = e^x$ là 1 nghiệm cơ sở

Lúc này $y_2 = e^x\int \dfrac{1}{e^{2x}}e^{-\int 2dx}dx = xe^x$

Như vậy 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất đã cho mà ta có thể tìm có dạng:

$y^*(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$

Ta có: $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x \\ C_2(x) = ln(x) \end{cases}$

Do đó $y^*(x) = -xe^x + ln(x)xe^x$

Vậy NTQ của pt tuyến tính không thuần nhất đã cho là: $y = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + lnx.x.e^x$

Như vậy dạng bài tìm nghiệm của pt tuyến tính không thuần nhất sẽ thường xuyên sử dụng pp Lagrange. Rất ít khi ta có thể nhẩm được 1 nghiệm riêng của PTTT không thuần nhất