Tuần 1

Chương 1: Logic - Tập hợp - Ánh xạ - Số phức

Logic, tập hợp

I Logic

1 Kiến thức cần nhớ

1.1 Các phép toán logic

▶ **Phủ định** $\overline{A} = 1 \Leftrightarrow A = 0$

▶ **Hội** $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A = B = 1$

▶ **Tuyển** $A \vee B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$

▶ **Kéo theo** $A \to B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$

▶ **Khi và chỉ khi** $A \leftrightarrow B = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B = 0 \\ A = B = 1 \end{array}\right.$

1.2 Tương đương logic

Ký hiệu: $X \Leftrightarrow Y$. Nghĩa là $X \leftrightarrow Y$ là hằng đúng

1.3 Tính chất

▶ **Đồng nhất** $A \wedge T \Leftrightarrow A \quad , \quad A \vee F \Leftrightarrow A$

▶ **Trội** $A \vee T \Leftrightarrow T \quad , \quad A \wedge F \Leftrightarrow F$

▶ **Lũy đẳng** $A \wedge A \Leftrightarrow A \quad , \quad A \vee A \Leftrightarrow A$

▶ **Phủ định kép** $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$

▶ **Giao hoán** $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \quad , \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

▶ **Kết hợp** $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \quad , \quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

▶ **Phân phối** $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad , \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

▶ **De Morgan** $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \quad , \quad \overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

▶ **Một số tính chất khác** $A \to B \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}$, $A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$

2 Ví dụ minh họa

VD$_1$ Chứng minh các mệnh đề sau đúng

a) $\left(\overline{A} \wedge (A \vee C)\right) \to C$

b) $\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C)$

<u>*Giải*</u>

a) *(Cách 1: Sử dụng biến đổi tương đương)*

$$\begin{aligned}
\left(\overline{A} \wedge (A \vee C)\right) \to C &\Leftrightarrow \overline{\left(\overline{A} \wedge (A \vee C)\right)} \vee C \\
&\Leftrightarrow \left(A \vee \overline{A \vee C}\right) \vee C \\
&\Leftrightarrow \left(A \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right)\right) \vee C \\
&\Leftrightarrow \left(\left(A \vee \overline{A}\right) \wedge \left(A \vee \overline{C}\right)\right) \vee C \\
&\Leftrightarrow \left(T \wedge \left(A \vee \overline{C}\right)\right) \vee C \\
&\Leftrightarrow \left(A \vee \overline{C}\right) \vee C \\
&\Leftrightarrow A \vee \left(\overline{C} \vee C\right) \Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

(Cách 2: Sử dụng bảng giá trị chân lý)

A	B	C	A$\vee C$	$\overline{A} \wedge (A \vee C)$	$\overline{A} \wedge (A \vee C) \to C$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1

Dựa vào bảng giá trị chân lý, ta được đpcm

b) Giả sử mệnh đề sai

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A \to B) \wedge (B \to C) = 1 \\ A \to C = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A \to B = 1 \\ A \to C = 1 \\ A = 1 \\ C = 0 \end{cases}$

Vì $A = 1$ nên $A \to B = 1 \Leftrightarrow B = 1$, ta cũng có $C = 0$ nên $A \to C = 1 \Leftrightarrow A = 0$

Nhưng $A \to B = 1$, mâu thuẫn. Vậy giả sử sai, ta có đpcm

Chú ý Ngoài cách làm trên, ta còn có thể kẻ bảng giá trị chân lý

$\mathbf{VD_2}$ Cho các mệnh đề A, B, C thỏa mãn các điều kiện sau là đúng

$$(A \wedge C) \to (B \wedge C)$$

$$(A \vee C) \to (B \vee C)$$

Chứng minh rằng mệnh đề $A \to B$ là đúng

Giải

Giả sử $A \to B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$1 = (A \wedge C) \to (B \wedge C) = (1 \wedge C) \to (0 \wedge C) = C \to 0 \Leftrightarrow C = 0$

$1 = (A \vee C) \to (B \vee C) = (1 \vee C) \to (0 \vee C) = 1 \to C \Leftrightarrow C = 1$ (Mâu thuẫn)

Vậy giả sử sai, ta phải có $A \to B = 1$ (đpcm)

II Tập hợp

1 Kiến thức cần nhớ

1.1 Các phép toán tập hợp

▶ **Hợp** $A \cup B = \left\{x \,\middle|\, x \in A \text{ hoặc } x \in B\right\}$

▶ **Giao** $A \cap B = \left\{x \,\middle|\, x \in A \text{ và } x \in B\right\}$

▶ **Hiệu** $A \setminus B = \left\{x \,\middle|\, x \in A \text{ nhưng } x \notin B\right\}$

1.2 Tính chất

▶ **Giao hoán** $A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$

▶ **Kết hợp** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

▶ **Phân phối** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

▶ **De Morgan** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

▶ **Một số tính chất khác** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

1.3 Ví dụ

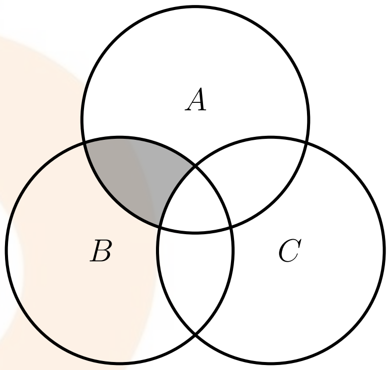
Chứng minh:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

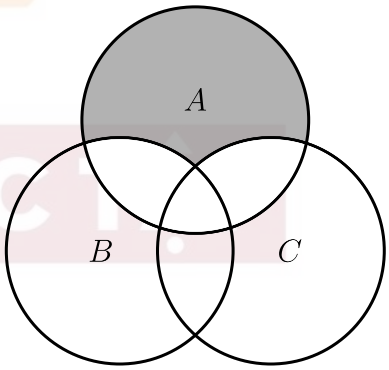
<u>*Giải*</u>

Ta có biến đổi



a)
$$\begin{aligned}
(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} \\
&= (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) \\
&= \left((A \cap B) \cap \overline{A}\right) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \\
&= \left(\left(A \cap \overline{A}\right) \cap B\right) \cup \left(A \cap \left(B \cap \overline{C}\right)\right) \\
&= (B \cup \varnothing) \cup \left(A \cap (B \setminus C)\right) \\
&= A \cap \left(B \setminus C\right)
\end{aligned}$$

b) Ta có biến đổi



$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \setminus C &= (A \setminus B) \cap \overline{C} \\
&= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} \\
&= A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \\
&= A \cap \overline{B \cup C} \\
&= A \setminus (B \cup C)
\end{aligned}$$