

# Toán Rời Rạc

## Bài toán Hôn nhân bền vững

## Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Albert R Meyer's slides

## Bài toán Hôn nhân bền vững

- $N$  chàng trai &  $N$  cô gái,
- Mỗi chàng trai có một danh sách xếp hạng các cô gái,
- Mỗi cô gái có một danh sách xếp hạng các chàng trai.
- Hãy tìm cách ghép cặp mỗi chàng trai với một cô gái sao cho không có cặp lừa đảo.

## Định nghĩa

- Cho một cặp ghép  $\mathcal{M}$ , cô gái  $x$  và chàng trai  $y$  gọi là một **cặp lừa đảo** nếu họ thích nhau hơn bạn của họ trong cặp ghép  $\mathcal{M}$ .
- Cặp ghép không chứa cặp lừa đảo gọi là **cặp ghép ổn định**.

# Nội dung

1 Thủ tục kén chồng

2 Cặp ghép tối ưu

# Thủ tục kén chồng

Ngày qua ngày...

## Buổi sáng

Các chàng trai đến hát dưới ban công cô gái chàng thích nhất.



Billy Bob



Brad



Angelina

## Buổi chiều

Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.



Billy Bob



Brad



Angelina

**Hình:** Nếu anh không phải Brad thì về đi!



## Buổi tối

Chàng trai bị từ chối xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta



Billy Bob

## Kén chồng (theo ngày)

**Buổi sáng:** Chàng trai đến hát dưới ban công nhà cô gái mình thích nhất.

**Buổi chiều:** Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.

**Buổi tối:** Chàng trai bị **từ chối** xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta

## Điều kiện dừng

- Dừng khi mọi cô gái không còn ai để từ chối.
- Và các cô gái cưới chàng trai hiện tại đến cầu hôn.

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:
  - Luôn có một ngày để làm đám cưới.
- Thuật toán **Đúng đắn**:
  - Mọi người đều có chồng (hoặc vợ).
  - Hôn nhân ổn định.

## Định lý

Thuật toán dừng trong  $\leq N^2 + 1$  ngày.

- Nếu vào một ngày thuật toán chưa kết thúc, vậy đêm đó có một chàng trai xóa tên một cô gái khỏi danh sách.
- Có  $N$  danh sách, mỗi danh sách có  $N$  tên. Vậy chỉ có  $\leq N^2$  lần xóa.

# Tính đúng đắn của thuật toán

## Khẳng định

Với mỗi cô gái, chàng trai mà cô thích nhất đến cầu hôn vào ngày mai **không tệ hơn** chàng của ngày hôm nay.

vì chàng thích nhất của ngày hôm nay vẫn ở lại cho đến khi bị cô từ chối vì có chàng tốt hơn.

# Tính đúng đắn của thuật toán

## Khẳng định

Với mỗi chàng trai, cô gái mà chàng cầu hôn ngày mai sẽ **không tốt hơn** cô của ngày hôm nay.

vì nếu bị cô gái thích nhất từ chối, chàng phải chấp nhận thôi bằng cách xóa tên cô ta khỏi danh sách yêu thích.

## Tính đúng đắn của thuật toán

Bất biến trong mọi ngày

Nếu cô gái  $G$  không có trong danh sách của chàng trai  $B$ , vậy hiện tại  $G$  đang được một chàng trai  $B'$  mà cô ấy thích hơn cầu hôn.



## Định lý

Khi thuật toán dừng, mọi người đều có chồng hoặc vợ.

- Vì mỗi cô gái chỉ giữ lại **một** chàng trai mà cô ấy thích nhất trong danh sách.
- và tại mỗi thời điểm, mỗi chàng trai chỉ đến hát dưới ban công **một** cô gái.

## Định lý

Cặp ghép thu được được bởi thủ tục kén chồng là ổn định.

## Chứng minh.

Chàng Bob không thể nằm trong cặp lừa đảo

- 1 với cô gái  $G$  có trong danh sách yêu thích cuối cùng của mình: vì Bob đã cưới cô gái anh ấy thích nhất trong danh sách này.
- 2 với cô gái  $G$  **không** có trong danh sách cuối cùng của mình: vì theo bất biến thì  $G$  thích chồng của mình hơn Bob.



# Nội dung

① Thủ tục kén chồng

② Cặp ghép tối ưu

Ai thích thủ tục kén chồng hơn,  
các chàng trai hay các cô gái?

## Định nghĩa

Ký hiệu

$S =$  "tập mọi cặp ghép ổn định".

Với chàng trai (hoặc cô gái)  $p$ , ta định nghĩa ***lựa chọn có thể*** của  $p$  là tập

$$\{q \mid \exists m \in S, \{p, q\} \in m\}$$

Đây là những cô gái (hoặc chàng trai) có thể ghép cặp với  $p$  trong một cặp ghép ổn định nào đó.

## Ví dụ

Xét danh sách

Chàng trai thích	Cô gái thích
1: $a, b$	$a: 1, 2$
2: $a, b$	$b: 1, 2$

Hãy tìm các lựa chọn có thể của chàng trai 1.

## Định nghĩa

- **Bạn đời tốt nhất** của một người là người tốt nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.
- **Bạn đời tệ nhất** của một người là người tệ nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.



## Định lý

Trong thủ tục kén chồng, mọi chàng trai đều được bạn đời tốt nhất.

## Chứng minh.

- Giả sử (phản chứng), có ngày đầu tiên một anh Keith nào đó xóa tên bạn đời tốt nhất Nicole của mình khỏi danh sách yêu thích:  
*Nicole thích một anh Tom nào đó hơn Keith.*
- Vì đây là ngày đầu tiên nên  
*Tom thích Nicole ít nhất như bạn đời tốt nhất của mình.*
- Xét ghép cặp ổn định mà Keith được lấy người bạn đời tốt nhất Nicole của mình.
- Nhưng đây lại là một mâu thuẫn. Tại sao? □

## Định lý

Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.

## Chứng minh.

- Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định  $\mathcal{M}$  sao cho cô gái  $g$  lấy anh  $b'$  tệ hơn anh  $b$  trong thủ tục kén chồng.
- Trong  $\mathcal{M}$  ta có cặp ghép

$$\{b', g\} \quad \text{và} \quad \{b, g'\}$$

Vậy  $b$  và  $g$  là cặp lừa đảo với  $\mathcal{M}$ . Tại sao?

