Tuần 5

Chương 3: Không gian vevtor

Không gian vector, Không gain vector con

I Khái niệm

1 Định nghĩa

Cho $V \neq \varnothing$ với các phần tử $v \in V$ được gọi là vector. $\mathbb{K}$ là một trường

Giả sử trên V có $\begin{cases} \text{Phép cộng vector: } u, v \in V \Rightarrow u + v \in V \\ \text{Phép nhân một só với vector: } k \in \mathbb{K}, v \in V \Rightarrow kv \in V \end{cases}$

V được gọi là một không gian vector (KGVT) trên $\mathbb{K}$ nếu thỏa mãn 8 điều kiện sau

(1) (Giao hoán) $x + y = y + x$

(2) (Kết hợp) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(3) (Phần tử trung hòa) Có vector không θ: $\theta + v = v + \theta = x$

(4) (Phần tử đối xứng) Có vector đối $(-v)$: $v + (-v) = (-v) + v = \theta$

(5) $k(x + y) = kx + ky$

(6) $(k_1 + k_2)x = k_1x + k_2x$

(7) $(k_1k_2)x = k_1(k_2x)$

(8) $1x = x$

VD

(1) V là tập hợp các vector hình học, với phép cộng vector vfa phép nhân vector với một số thì V là không gian vector trên $\mathbb{R}$

(2) Với tập số phức $\mathbb{C}$, xét

$$\mathbb{C}^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_i \in \mathbb{C}, \forall i = \overline{1, n} \right\}$$

Trang bị phép toán $''+''$ và $''.''$ như sau:

Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

Dễ kiểm tra 8 tính chất của KGVT đều thỏa mãn, vậy $\mathbb{C}^n$ là KGVT trên $\mathbb{C}$

2 Các tính chất đơn giản

Tính chất 1 V là $\mathbb{K}$-KGVT, khi đó vector θ là duy nhất

Tính chất 2 V là $\mathbb{K}$-KGVT, khi đó

(1) $\theta x = k\theta = \theta$

(2) $(-1)x = -x$

(3) $kx = \theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ x = \theta \end{array}\right.$

II Không gian vector con

1 Định nghĩa

▶ Không gian vector con

Cho V là $\mathbb{K}$-KGVT, $\varnothing \neq W \subset V$. Với các phép toán của V áp dụng cho W mà W trở thành KGVt thì W được gọi là KGVT con

▶ Đóng kín

Cho $W \subset V$

(1) W được gọi là đóng kín với phép cộng nếu $x, y \in W$ thì $x + y \in W$

(2) W được gọi là đóng kín với phép nhân với một số nếu $x \in W$, $k \in \mathbb{R}$ thì $kx \in W$

Định lý V là $\mathbb{K}$-KGVT, $\varnothing \neq W \subset V$. Điều kiện cần và đủ để W là KGVT con của V là

(1) Đóng kín đối với phép cộng vector

(2) Đóng kín đối với phép nhân một số với một vector

VD Trong $\mathbb{R}^3$, cho $W = \left\{ (x_1, x_2, 0) \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Hiển nhiên $W \neq \varnothing$

Dễ thấy với $x = (x_1, x_2, 0)$ và $y = (y_1, y_2, 0)$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$$

Do đó W đóng kín với phép toán cộng

Ta cũng có W đóng kín với phép toán nhân với một số. Vậy W là một KGVT con

2 Không gian sinh bởi vector

▶ Tổ hợp tuyến tính

Với V là $\mathbb{K}$-KGVT, xét hệ vector $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $v_i \in V$. Ta gọi $v \in V$ là một tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nếu tồn tại $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{K}$ sao cho

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = \sum_{i=1}^{n} k_iv_i$$

Định lý Trong KGVT V, gọi W là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của hệ vector đã cho $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Khi đó W là KGVT con của V

▶ Không gian con sinh bởi hệ vector

Trong KGVT V cho hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Không gian con W gồm các tổ hợp tuyến tính của hệ vector đã cho được gọi là không gian con sinh bởi hệ vector $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Kí hiệu: $W = \text{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

VD Trong $\mathbb{R}^3$ cho $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Chứng minh rằng

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

<u>*Giải*</u>

Để chứng minh $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, ta sẽ chứng minh

$$\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

và

$$\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

$\left(\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}\right)$

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó ta có thể viết

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Do đó $x \in \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Vậy $\mathbb{R}^3 \subset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$

$\left(\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}\right)$

Giả sử $x \in \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, hay

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Thay $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, ta được

$$x = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Vậy $\mathbb{R}^3 \supset \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$

Chương 3: Không gian vector (tiếp)

1. **Cơ sở và số chiều của KGVT**

a, Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính(ĐLTT và PTTT)

- Hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ĐLTT nếu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$
- Hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ PTTT nếu $\exists\ \lambda_i, i = \overline{1, n}$ không đồng thời bằng 0 mà $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$

Chú ý:

+, Hệ PTTT $\Leftrightarrow \exists$ 1 vector là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.

+, Hệ quả: Hệ chứa vector θ luôn PTTT.

b, Cơ sở, số chiều của KGVT

- Hệ sinh: hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gọi là hệ sinh của KGVT V nếu $\exists$ v $\in V$, v đều là tổ hợp tuyến tính của các vector trong hệ.
- Cơ sở: KGVT V trên trường K, hệ vector B được gọi là cơ sở của V nếu B là hệ sinh và B ĐLTT.
- Nếu KGVT V có cơ sở B gồm n vector thì số chiều của V bằng n. Kí hiệu dimV= n (Nếu V= $\{\theta\}$ thì dimV= 0)

Chú ý:

B={(1, 0,..., 0);(0,1,...,0);...;(0,0,...,1)} (n vector) là hệ cơ sở chính tắc của R^n

Định lý: V là KGVT n chiều, khi đó:

+, Hệ n+1 vector bất kì đều PTTT.

+, Hệ n vector ĐLTT bất kì đều lập thành cơ sở của V.

+, Hệ n vector bất kì là hệ sinh đều lập thành cơ sở của V.

2. **Tọa độ của 1 vector đối với 1 cơ sở**

Không gian vector n chiều có cơ sở B=$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

Khi đó $\forall$ v $\in$ V có biểu diễn duy nhất v= $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Khi đó $x = (x_1, x_2, ...x_n)^T$ là tọa độ của vector v đối với sơ sở B,

kí hiệu $[v]_B = (x_1, x_2, ...x_n)^T$.

Ma trận tọa độ của hệ vector S theo cơ sở B:

- $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$
- $A = [S]_B = \big([v_1]_B, [v_2]_B, ...[v_n]_B\big)$ là m trận tọa độ cột của hệ vector S đối với cơ sở B .
- A^T là ma trận tọa độ hàng của hệ S đó với B.

3. **Công thức đổi cơ sở**

KGVT V có 2 cơ sở $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ...e'_n\}$. Khi đó $P = [B']_B$ là ma trân tọa độ cột của B' đối với B cũng gọi là ma trân chuyển cơ sở từ B sang B'.

Định lý: P khả nghịch và P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B. Với $v \in V$:

+ $[v]_B = P.[v]'_B$
+ $[v]'_B = P^{-1}.[v]_B$

4. **Hạng của hệ vector**

- Là số vector của một bộ phận độc lập tuyến tính tối đa là tập con của hệ B. Kí hiệu $rankB, r(B)$.
- **Định lý:** KGVT v có cơ sở $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$, hệ vector S có ma trận P là ma trận tọa độ đối với cơ sở B. Khi đó $r(B) = r(P)$.

  Chú ý: Để tìm hạng của P ta chỉ thực hiện biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa về ma trận bậc thang.

  Hệ quả: Hệ vector S gồm n vector có ma trận tọa độ hàng đôi với B là p. Khi đó n vector của S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow r(S) = n \Leftrightarrow r(P) = n \Leftrightarrow detP \neq 0$.

* Một số ví dụ

1, xét xem hệ vector sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a, $A = \big\{(1; 0; 1), (1; -1; 2), (-2; 3; 5)\big\}$

b, $B = \big\{(2; 4; -1)\big\}$

Giải

a, ta có, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của hệ A đối với cơ sở chính tắc

của R^3. Mà detP $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ nên hệ A là độc lập tuyến tính.

b, ta có $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của hệ B đối với cơ sở chính tắc của R^3.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow r(P) = 2 \Rightarrow$ hệ B là độc lập tuyến tính.

2, Cho hệ vector $B = \{(1;1;1), (1;1;2), (1;2;3)\}$

a, Chứng minh B là cơ sở của R^3.

b, Tìm tọa độ của $D = (6;9;14)$ đối với cở B.

Giải

a, Xét $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận tọa độ hàng của B đối với cơ sở chính tắc của R^3. Mà $detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên hệ B độc lập tuyến tính.

Hệ B gồm 3 vector nên là cơ sở của R^3.

b, $-\ C_1 \quad v_1 = x_1(1;1;1) + x_2(1,1,2) + x_3(1,2,3) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1;2;3)$$

$-\ C_2$ Gọi E là cơ sở chính tắc của R^3

$[v]_B = S^{-1}[v]_E$, trong đó $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B $\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$