ĐỀ THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 – HỌC KÌ 20172 NHÓM 2

Lời giải: Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

Câu 1: Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ là dãy cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{5}$ và công bội là $\frac{1}{5}$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là $4.\frac{1}{4} = 1$

Câu 2: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6n^2+1}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Khin $n \rightarrow +\infty : \frac{n+2}{6n^2+1} \sim \frac{1}{6n}$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n}$ là chuỗi phân kỳ

Suy ra chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n!)^2}{n^{2n}}$

Chuỗi đã cho là chuỗi dương $\forall n \geq 1$

Xét giới hạn :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{8^{n+1}[(n+1)!]^2}{(n+1)^{2(n+1)}} \div \frac{8^n (n!)^2}{n^{2n}}$$

$$= \lim_{n\rightarrow+\infty} 8.\frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}.\frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{n\rightarrow+\infty} 8.\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2n} = 8.e^{\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).2n} = 8.e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n}{n+1}} = \frac{8}{e^2} > 1$$

Suy ra chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Dalembert

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right)$

Ta có : $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Xét $f(n) = \sin\frac{1}{n}$ có $f'(n) = \frac{-1}{n^2}.\cos\left(\frac{1}{n}\right) < 0, \forall n \geq 1$

và $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$\rightarrow \sin\frac{1}{n}$ đơn điệu giảm dần về 0

Suy ra chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt

Câu 3: Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x+1)^n}$

Đk: $x \neq -1$. Đặt $t = \frac{1}{x+1} \rightarrow$ Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.t^n$

Ta có $a_n = \frac{1}{n^2}$. Bán kính hội tụ của chuỗi hàm là :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Xét tại biên $t = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

Xét tại biên $t = -1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ theo tc Leibnizt

$\rightarrow$ Chuỗi hội tụ khi chỉ khi $-1 \leq t \leq 1$

$\rightarrow \ -1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad \rightarrow \ x \leq -2 \ \cup x \geq 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

Trần Bá Hiếu – KSTN Dệt K64

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n} = 3x.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+9x^2)^n}$$

Với $x = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n} = 0$, hội tụ

Với mọi $x \neq 0, \frac{1}{1+9x^2} < 1$

$\rightarrow$ Chuỗi đã cho là tổng của cấp số nhân công bội là $\frac{1}{1+9x^2}$

và có tổng là : $S = 3x.\frac{\frac{1}{1+9x^2}}{1-\frac{1}{1+9x^2}} = \frac{1}{3x}$, hội tụ

Suy ra miền hội tụ của chuỗi là R

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x + 1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x + 1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một chuỗi hội tụ, suy ra chuỗi đã cho hội tụ khi chỉ khi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2}$ hội tụ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}}$

Với $x < 2$, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnizt

Với $x \geq 2, \nexists \lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}}$ nên chuỗi phân kì .

Vây miền hội tụ là $(-\infty; 2)$

Câu 4: Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$, bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1$.

Tại biên $x = \pm 1$, chuỗi phân kì, suy ra miền hội tụ $(-1; 1)$

Với mọi $x \in (-1; 1)$, chuỗi đã cho là khả tích.

Gọi $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = x.P(x)$

$$\int_0^x P(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x.Q(x)$$

$$\int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\to Q(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\to P(x) = \big(x.Q(x)\big)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

$$\to S(x) = x.P(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n} = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{27}$$

Câu 5: Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} = \frac{1}{4}.\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Đặt $-\frac{x^2}{16} = t \to f(t) = \frac{1}{4}.(1-t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.t^n$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\left(\frac{-x^2}{16}\right)^n = \frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{16^n}.x^{2n}$$

Câu 6: Khai triển hàm số $f(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ thành chuỗi Fourier

$f(x)$ là hàm chẵn $\rightarrow\ b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{-4}{\pi}.\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}.\left[\frac{-2}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}x + \frac{2}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}x\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{-4}{4n^2-1} = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\cos nx$$