Chương 1
CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2024

Chương 1

Chương 1 giới thiệu cho các bạn sinh viên các kiến thức nền tảng của toán học nói chung và môn học Đại số nói riêng. Các bạn sinh viên đã được biết đến các kiến thức này trong chương trình toán ở bậc phổ thông. Tuy nhiên kiến thức của chương sẽ cung cấp lại một cách hệ thống và đầy đủ hơn.

Nội dung Chương 1 bao gồm:

1. Tập hợp
2. Ánh xạ
3. Các cấu trúc đại số và số phức

1. TẬP HỢP

Khái niệm *tập hợp* là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học và không thể định nghĩa bằng những khái niệm đã biết. Ngành toán học nghiên cứu về tập hợp gọi là lý thuyết tập hợp. Khái niệm tập hợp là nền tảng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số... trong toán học.

1. TẬP HỢP

Khái niệm *tập hợp* là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học và không thể định nghĩa bằng những khái niệm đã biết. Ngành toán học nghiên cứu về tập hợp gọi là lý thuyết tập hợp. Khái niệm tập hợp là nền tảng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số... trong toán học.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm về tập hợp và các phép toán trên tập hợp. Liên hệ các khái niệm với kiến thức thực tế ở cuộc sống xung quanh.
- Kĩ năng: Thao tác xem xét quan hệ giữa các tập hợp, tính toán các tập hợp và chứng minh các đẳng thức tập hợp.

1.TẬP HỢP

Nội dung bao gồm:

1.1 Khái niệm tập hợp

1.2 Các phép toán tập hợp

1.3 Tích Đề Các của các tập hợp

1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp tuy không được định nghĩa một cách rõ ràng, nhưng chúng cũng được mô tả qua các ví dụ cụ thể. Một tập hợp được hiểu như là một tụ tập, một nhóm các đối tượng nào đó. Một vài ví dụ về tập hợp như: Tập hợp quận huyện của Hà Nội; tập hợp các số thực;... Trong toán học, một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, \ldots$.

1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp tuy không được định nghĩa một cách rõ ràng, nhưng chúng cũng được mô tả qua các ví dụ cụ thể. Một tập hợp được hiểu như là một tụ tập, một nhóm các đối tượng nào đó. Một vài ví dụ về tập hợp như: Tập hợp quận huyện của Hà Nội; tập hợp các số thực;... Trong toán học, một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, \ldots$.

Cho tập hợp A (sau này có thể gọi tắt là tập A). Các đối tượng nằm trong tập A được gọi là các *phần tử* của tập A. Phần tử thường được ký hiệu là $a, b, \ldots$. Phần tử a *thuộc* tập A được ký hiệu là $a \in A$; ngược lại nếu phần tử a *không thuộc* tập A được ký hiệu là $a \notin A$.

1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp tuy không được định nghĩa một cách rõ ràng, nhưng chúng cũng được mô tả qua các ví dụ cụ thể. Một tập hợp được hiểu như là một tụ tập, một nhóm các đối tượng nào đó. Một vài ví dụ về tập hợp như: Tập hợp quận huyện của Hà Nội; tập hợp các số thực;... Trong toán học, một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, \ldots$.
Cho tập hợp A (sau này có thể gọi tắt là tập A). Các đối tượng nằm trong tập A được gọi là các *phần tử* của tập A. Phần tử thường được ký hiệu là $a, b, \ldots$. Phần tử a *thuộc* tập A được ký hiệu là $a \in A$; ngược lại nếu phần tử a *không thuộc* tập A được ký hiệu là $a \notin A$. Một tập hợp thường được thường được cho thông qua liệt kê tập các phần tử có cùng tính chất nào đó. Ta thường dùng biểu đồ Venn (khoanh vùng thay cho tập hợp, chấm nhỏ thay cho phần tử) để biểu diễn các tập hợp và phần tử.

1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp tuy không được định nghĩa một cách rõ ràng, nhưng chúng cũng được mô tả qua các ví dụ cụ thể. Một tập hợp được hiểu như là một tụ tập, một nhóm các đối tượng nào đó. Một vài ví dụ về tập hợp như: Tập hợp quận huyện của Hà Nội; tập hợp các số thực;... Trong toán học, một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, \ldots$.
Cho tập hợp A (sau này có thể gọi tắt là tập A). Các đối tượng nằm trong tập A được gọi là các *phần tử* của tập A. Phần tử thường được ký hiệu là $a, b, \ldots$. Phần tử a *thuộc* tập A được ký hiệu là $a \in A$; ngược lại nếu phần tử a *không thuộc* tập A được ký hiệu là $a \notin A$. Một tập hợp thường được thường được cho thông qua liệt kê tập các phần tử có cùng tính chất nào đó. Ta thường dùng biểu đồ Venn (khoanh vùng thay cho tập hợp, chấm nhỏ thay cho phần tử) để biểu diễn các tập hợp và phần tử.
Đặc biệt *Tập rỗng*, được ký hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa bất kỳ một phần tử nào.

1.1. Tập hợp con, tập hợp bằng nhau

Khi có các tập hợp, ta có một số mối liên hệ giữa các tập hợp như sau:

1.1. Tập hợp con, tập hợp bằng nhau

Khi có các tập hợp, ta có một số mối liên hệ giữa các tập hợp như sau:

Tập con

1. Tập A được gọi là *tập con* của tập B và ký hiệu là $A \subset B$, nếu như mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Khi tập A là tập con của B ta cũng có thể viết là $B \supset A$. Quy ước tập rỗng là tập con của tập bất kỳ.
2. Ví dụ: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.1. Tập hợp con, tập hợp bằng nhau

Khi có các tập hợp, ta có một số mối liên hệ giữa các tập hợp như sau:

Tập con

1. Tập A được gọi là *tập con* của tập B và ký hiệu là $A \subset B$, nếu như mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Khi tập A là tập con của B ta cũng có thể viết là $B \supset A$. Quy ước tập rỗng là tập con của tập bất kỳ.
2. Ví dụ: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tập hợp bằng nhau

1. Hai tập hợp được gọi là *bằng nhau* khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử.
2. Để chứng minh hai tập bằng nhau $A = B$, chúng ta cần chứng minh $A \subset B$ và $B \subset A$, nghĩa là $A = B \Leftrightarrow \big(A \subset B \text{ và } B \subset A\big)$.
3. Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x^2 < 10\}$ ta có $A = B$

1.2. Phép toán trên tập hợp

Cho trước các tập hợp A, B, X, chúng ta có các phép toán sau trên tập hợp.

Cho trước các tập hợp A, B, X, chúng ta có các phép toán sau trên tập hợp.
Phép giao. *Giao* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

1.2. Phép toán trên tập hợp

Cho trước các tập hợp A, B, X, chúng ta có các phép toán sau trên tập hợp.
Phép giao. *Giao* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Phép hợp. *Hợp* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

1.2. Phép toán trên tập hợp

Cho trước các tập hợp A, B, X, chúng ta có các phép toán sau trên tập hợp.
Phép giao. *Giao* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Phép hợp. *Hợp* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Phép lấy hiệu. *Hiệu* của hai tập hợp A và B, ký hiệu là $A \setminus B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

1.2. Phép toán trên tập hợp

Hiệu đối xứng. *Hiệu đối xứng* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A \Delta B$, là tập hợp được xác định như sau

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.2. Phép toán trên tập hợp

Hiệu đối xứng. *Hiệu đối xứng* của hai tập A và B, ký hiệu bởi $A\Delta B$, là tập hợp được xác định như sau

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Phần bù. Cho hai hợp A và X. Nếu $A \subset X$ thì hiệu $X \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong X và được ký hiệu bởi $C_X A$.Đặc biệt $\overline{A}$ là tập bao gồm tất cả các phần tử không thuộc vào tập A trong tình huống được đề cập đến.

1.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A\Delta B = B\Delta A.$$

1.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A\Delta B = B\Delta A.$$
2. *Tính chất kết hợp*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

1.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \Delta B = B \Delta A.$$

2. *Tính chất kết hợp*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3. *Tính chất phân phối*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A\Delta B = B\Delta A.$$
2. *Tính chất kết hợp*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$
3. *Tính chất phân phối*
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
4. *Tính chất của phép trừ*
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

1.2. Tính chất của các phép toán trên tập hợp

1. *Tính chất giao hoán*
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A,\ A \Delta B = B \Delta A.$$
2. *Tính chất kết hợp*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$
3. *Tính chất phân phối*
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
4. *Tính chất của phép trừ*
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$
5. *Công thức De Morgan*
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \text{ (hoặc } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\text{)},$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ (hoặc } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\text{)},$$

1.3. Tích Đề Các

Cho hai tập hợp A và B. *Tích Đề Các (Descartes)* của hai tập hợp A và B, được ký hiệu bởi $A \times B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử có thứ tự (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$. Như vậy

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ và } b \in B\}.$$

1.3. Tích Đề Các

Cho hai tập hợp A và B. *Tích Đề Các (Descartes)* của hai tập hợp A và B, được ký hiệu bởi $A \times B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử có thứ tự (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$. Như vậy

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ và } b \in B\}.$$

Ví dụ 1

Cho $A = \{1; 2; 3\}$ *và* $B = \{a; b\}$, *khi đó*

$$A \times B = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}.$$

$$B \times A = \{(a; 1), (b; 1), (a; 2), (b; 2), (a; 3), (b; 3)\}.$$

1.3. Tích Đề Các

Tích Đề Các của một họ các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$, được ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là một tập hợp bao gồm các phần tử có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, với $a_i \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Như vậy

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Quy ước: Khi các tập bằng nhau $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, tích Đề Các bên trên có thể được viết gọn là A^n.

Giới thiệu về ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm toán học cơ bản đã từng được giới thiệu trong chương trình phổ thông. Đây là là khái niệm tổng quát của khái niệm hàm số. Ánh xạ đề cập đến các tương ứng giữa các tập hợp bất kỳ. Khi nghĩ về ánh xạ từ tập hợp X đến tập hợp Y, ta có hiểu và ghi nhớ ánh xạ như việc gán các nhãn $y \in Y$ cho tất cả các sản phẩm $x \in X$.

Giới thiệu về ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm toán học cơ bản đã từng được giới thiệu trong chương trình phổ thông. Đây là là khái niệm tổng quát của khái niệm hàm số. Ánh xạ đề cập đến các tương ứng giữa các tập hợp bất kỳ. Khi nghĩ về ánh xạ từ tập hợp X đến tập hợp Y, ta có hiểu và ghi nhớ ánh xạ như việc gán các nhãn $y \in Y$ cho tất cả các sản phẩm $x \in X$.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm về ánh xạ, các loại ánh xạ đặc biệt và phép hợp thành các ánh xạ. Liên hệ các khái niệm với kiến thức thực tế ở cuộc sống xung quanh.
- Kĩ năng: Kiểm tra định nghĩa ánh xạ, ánh xạ đặc biệt như đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Xác định hợp thành các ánh xạ và ánh xạ ngược.

Giới thiệu về ánh xạ

Nội dung bao gồm:

2.1 Định nghĩa ánh xạ

2.2 Một số ánh xạ đặc biệt

2.3 Tích (hợp thành) ánh xạ và ánh xạ ngược

2.1. Định nghĩa ánh xạ

Định nghĩa 1

Cho hai tập hợp X, Y *khác rỗng. Một ánh xạ* f *từ tập* X *đến tập* Y *là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử* $x \in X$ *với một phần tử xác định duy nhất* $y \in Y$*, ký hiệu bởi* $y = f(x)$*.Một ánh xạ* f *từ tập* X *đến tập* Y *thường được viết là*

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

2.1. Định nghĩa ánh xạ

Định nghĩa 1

Cho hai tập hợp X, Y khác rỗng. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định duy nhất $y \in Y$, ký hiệu bởi $y = f(x)$.Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y thường được viết là

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tập X được gọi là tập nguồn của ánh xạ, tập Y được gọi là tập đích của ánh xạ, ký hiệu $\mapsto$ chỉ quy tắc thực hiện ánh xạ. Phần tử $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x, còn phần tử x được gọi là tạo ảnh của y.

2.1. Định nghĩa ánh xạ

Định nghĩa 1

Cho hai tập hợp X, Y khác rỗng. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định duy nhất $y \in Y$, ký hiệu bởi $y = f(x)$.Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y thường được viết là

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tập X được gọi là tập nguồn của ánh xạ, tập Y được gọi là tập đích của ánh xạ, ký hiệu $\mapsto$ chỉ quy tắc thực hiện ánh xạ. Phần tử $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x, còn phần tử x được gọi là tạo ảnh của y. Cho $A \subset X$ và $B \subset Y$, ta định nghĩa $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ gọi lại ảnh của tập A và $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của tập B.

Ví dụ 2

1. *Xét tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$*. Với mỗi số thực* $x \in \mathbb{R}$*, chúng ta xây dựng một quy tắc như sau* $f(x) = x^2 - 1$*. Khi đó, một ánh xạ được xác định*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1. \end{aligned}$$

2. *Cho* $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$*, khi đó* $f(A) = \{0; 8; 24; 48; 80; \}$*,* $f^{-1}(A) = \{\pm\sqrt{2}; \pm 2; \pm\sqrt{6}; \pm 2\sqrt{2}; \pm\sqrt{10}\}$*.*

2.2. Một số loại ánh xạ đặc biệt

- Cho tập $X \neq \varnothing$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi Id_X, gọi là ánh xạ đồng nhất trên tập X.

2.2. Một số loại ánh xạ đặc biệt

- Cho tập $X \neq \varnothing$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi Id_X, gọi là ánh xạ đồng nhất trên tập X.

- Cho tập con $X \subset Y$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi μ_X, gọi là ánh xạ nhúng tập X vào tập Y.

2.2. Một số loại ánh xạ đặc biệt

- Cho tập $X \neq \varnothing$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi Id_X, gọi là ánh xạ đồng nhất trên tập X.

- Cho tập con $X \subset Y$, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi μ_X, gọi là ánh xạ nhúng tập X vào tập Y.

- Cho hai tập X, Y, chúng ta xây dựng một quy tắc với mỗi phần tử $(x, y) \in X \times Y$ với thành phần thứ nhất x. Khi đó, một ánh xạ được xác định

$$\begin{aligned} f : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ánh xạ, được ký hiệu bởi π_X, gọi là ánh xạ chiếu (chiếu lên thành phần thứ nhất).

2.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa 2

Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

1. *Ánh xạ* f *được gọi là đơn ánh nếu*
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
đúng với mọi x_1, x_2 *thuộc tập* X.

Định nghĩa 2

Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

1. *Ánh xạ* f *được gọi là đơn ánh nếu*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

   đúng với mọi x_1, x_2 *thuộc tập* X.

2. *Ánh xạ* f *được gọi là toàn ánh nếu với mỗi* $y \in Y$ *đều tồn tại ít nhất một* $x \in X$ *sao cho* $y = f(x)$.

2.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa 2

Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

1. *Ánh xạ* f *được gọi là đơn ánh nếu*
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
đúng với mọi x_1, x_2 *thuộc tập* X.
2. *Ánh xạ* f *được gọi là toàn ánh nếu với mỗi* $y \in Y$ *đều tồn tại ít nhất một* $x \in X$ *sao cho* $y = f(x)$.
3. *Ánh xạ* f *được gọi là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.*

Chú ý

1. Khi chứng minh ánh xạ f là đơn ánh trong một số trường hợp ta có thể xét:
   - $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$ hoặc;
   - Phương trình $y = f(x)$ có không quá một nghiệm với mọi $y \in Y$.

Chú ý

1. Khi chứng minh ánh xạ f là đơn ánh trong một số trường hợp ta có thể xét:
   - $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$ hoặc;
   - Phương trình $y = f(x)$ có không quá một nghiệm với mọi $y \in Y$.
2. Ánh xạ f là toàn ánh khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ có ít nhất một nghiệm với mọi $y \in Y$;

Chú ý

1. Khi chứng minh ánh xạ f là đơn ánh trong một số trường hợp ta có thể xét:
   - $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in X$ hoặc;
   - Phương trình $y = f(x)$ có không quá một nghiệm với mọi $y \in Y$.
2. Ánh xạ f là toàn ánh khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ có ít nhất một nghiệm với mọi $y \in Y$;
3. Ánh xạ f là song ánh khi và chỉ khi phương trình $y = f(x)$ luôn có nghiệm duy nhất.

2.3. Tích ánh xạ

Định nghĩa 3

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ *và* $g : Y \to Z$*. Xây dựng ánh xạ* $h : X \to Z$ *là một quy tắc biến mỗi* $x \in X$ *thành* $h(x) = g(f(x))$*. Ánh xạ* h *được gọi là tích của hai ánh xạ* f *và* g*, ký hiệu bởi* $g \circ f$*. Ta có*

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \forall x \in X.$$

2.3. Tích ánh xạ

Định nghĩa 3

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Xây dựng ánh xạ $h : X \to Z$ là một quy tắc biến mỗi $x \in X$ thành $h(x) = g(f(x))$. Ánh xạ h được gọi là tích của hai ánh xạ f và g, ký hiệu bởi $g \circ f$. Ta có

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \forall x \in X.$$

Ví dụ 3

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = 5x + 3$ và $g(x) = x^2 + 1$. Khi đó, chúng ta có

1. *Ánh xạ tích $g \circ f(x) = (5x + 3)^2 + 1$;*
2. *Ánh xạ tích $f \circ g(x) = 5(x^2 + 1) + 3$.*

2.3. Ánh xạ ngược

Definition 1

Cho song ánh $f : X \to Y$. Rõ ràng với mỗi $y \in Y$ đều tồn tại duy nhất một $x \in X$ để $y = f(x)$ hay $f^{-1}(y) = x$. Khi đó

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\to X \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

được gọi là *ánh xạ ngược* của ánh xạ f. Ánh xạ f^{-1} là một song ánh và ta có $f \circ f^{-1} = Id_Y; f^{-1} \circ f = Id_X$

Ví dụ 4

Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 + 3 \end{aligned}$$

là một song ánh và có ánh xạ ngược là:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}} \end{aligned}$$

2.3. Ánh xạ ngược

Ví dụ 5

Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

không có ánh xạ ngược vì f không phải là song ánh ($f(-1) = f(0)$).

Giới thiệu về cấu trúc đại số

Khi xem xét về các phần tử của tập hợp trong thực tế, ta nhận thấy rằng luôn có tác động qua lại giữa các phần tử để tạo ra các phần tử khác. Qua đó hình thành trong chúng ta tư duy về các "phép toán" trên tập hợp. Khi các phép toán mà "đủ tốt" thì các tập hợp được trang bị phép toán sẽ gọi là các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường,...

Giới thiệu về cấu trúc đại số

Khi xem xét về các phần tử của tập hợp trong thực tế, ta nhận thấy rằng luôn có tác động qua lại giữa các phần tử để tạo ra các phần tử khác. Qua đó hình thành trong chúng ta tư duy về các "phép toán" trên tập hợp. Khi các phép toán mà "đủ tốt" thì các tập hợp được trang bị phép toán sẽ gọi là các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường,...

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được các cấu trúc đại số, nhìn nhận các cấu trúc đại số trong các kiến thức đã biết và môi trường xung quanh, xây dựng trường số phức.
- Kĩ năng: Thao tác xem xét các tính chất của phép toán hai ngôi, kiểm tra các câu trúc và xem xét các vấn đề trên trường số phức.

Giới thiệu về cấu trúc đại số

Nội dung bao gồm:

3.1 Phép toán hai ngôi

3.2 Nhóm

3.3 Vành

3.4 Trường

3.5 Trường số phức

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$\begin{aligned} * : X^2 &\to X \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

Xét một số ví dụ sau đây:

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$
\begin{aligned}
* : X^2 &\to X \\
(x, y) &\mapsto x * y
\end{aligned}
$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1 Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$\begin{aligned} * : X^2 &\to X \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1. Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán $.$ thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;
2. Phép chia thông thường không phải là phép toán hai ngôi trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, vì không tồn tại phép chia cho số 0;

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$
\begin{aligned}
* : X^2 &\to X \\
(x, y) &\mapsto x * y
\end{aligned}
$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1. Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;
2. Phép chia thông thường không phải là phép toán hai ngôi trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, vì không tồn tại phép chia cho số 0;
3. Xét tập hợp $\mathbb{R}$, ta định nghĩa phép toán $x * y = xy + x + y$.

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$* : X^2 \to X$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1. Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán $.$ thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;
2. Phép chia thông thường không phải là phép toán hai ngôi trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, vì không tồn tại phép chia cho số 0;
3. Xét tập hợp $\mathbb{R}$, ta định nghĩa phép toán $x * y = xy + x + y$.
4. Cho trước tập hợp X, ta xét $P(X) = \{A | A \subset X\}$. Trên $P(X)$ thì các phép toán giao các tập hợp, hợp các tập hợp, hiệu các tập hợp là các phép toán hai ngôi.

3.1. Phép toán hai ngôi

Cho X là một tập khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi* trên tập X, ký hiệu là $*$, là một quy tắc biến đổi mỗi phần tử $(x, y) \in X^2$ thành phần tử $z \in X$ sao cho $z = x * y$. Nói cách khác, phép toán $*$ là một ánh xạ:

$$* : X^2 \to X$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

Xét một số ví dụ sau đây:

1. Xét tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, khi đó các phép toán $+$ hoặc phép toán $.$ thông thường là các phép toán hai ngôi trên các tập đó;
2. Phép chia thông thường không phải là phép toán hai ngôi trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, số nguyên $\mathbb{Z}$, số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, số thực $\mathbb{R}$, vì không tồn tại phép chia cho số 0;
3. Xét tập hợp $\mathbb{R}$, ta định nghĩa phép toán $x * y = xy + x + y$.
4. Cho trước tập hợp X, ta xét $P(X) = \{A | A \subset X\}$. Trên $P(X)$ thì các phép toán giao các tập hợp, hợp các tập hợp, hiệu các tập hợp là các phép toán hai ngôi.
5. Câu hỏi: Phép trừ trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ có phải là một phép toán hai ngôi hay không?

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a * b) * c = a * (b * c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a * b) * c = a * (b * c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$
2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi: $a * b = b * a$ đúng với mọi $a, b \in X$

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a * b) * c = a * (b * c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$
2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi: $a * b = b * a$ đúng với mọi $a, b \in X$
3. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung hòa của phép toán $*$ nếu: $a * e = e * a = a$ đúng với mọi $a \in X$

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a * b) * c = a * (b * c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$
2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi: $a * b = b * a$ đúng với mọi $a, b \in X$
3. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung hòa của phép toán $*$ nếu: $a * e = e * a = a$ đúng với mọi $a \in X$
4. Khi e là phần từ trung hòa của phép toán $*$ và $x \in X$, khi đó phần tử x' thỏa mãn $x.x' = x'.x = e$ được gọi là phần tử đối xứng của x.

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a * b) * c = a * (b * c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$
2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi: $a * b = b * a$ đúng với mọi $a, b \in X$
3. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung hòa của phép toán $*$ nếu: $a * e = e * a = a$ đúng với mọi $a \in X$
4. Khi e là phần từ trung hòa của phép toán $*$ và $x \in X$, khi đó phần tử x' thỏa mãn $x.x' = x'.x = e$ được gọi là phần tử đối xứng của x.
5. Trong một số tình huống, các phần tử trung hòa đôi khi còn được gọi là phần tử không, phần tử đơn vị, và tương ứng phần tử đối xứng còn được gọi là phần tử đối, phần tử nghịch đảo.

3.1. Tính chất của phép toán hai ngôi

Cho tập X cùng phép toán hai ngôi $*$.

1. Phép toán $*$ có tính chất kết hợp khi: $(a*b)*c = a*(b*c)$ đúng với mọi $a, b, c \in X$
2. Phép toán $*$ có tính chất giao hoán khi: $a*b = b*a$ đúng với mọi $a, b \in X$
3. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung hòa của phép toán $*$ nếu: $a*e = e*a = a$ đúng với mọi $a \in X$
4. Khi e là phần từ trung hòa của phép toán $*$ và $x \in X$, khi đó phần tử x' thỏa mãn $x.x' = x'.x = e$ được gọi là phần tử đối xứng của x.
5. Trong một số tình huống, các phần tử trung hòa đôi khi còn được gọi là phần tử không, phần tử đơn vị, và tương ứng phần tử đối xứng còn được gọi là phần tử đối, phần tử nghịch đảo.

3.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

3.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

1. Các tập số quen thuộc $(\mathbb{N}, *)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{R}, *)$, ở đó $*$ có thể là phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường có tính chất kết hợp, tính chất giao hoán, phần tử trung hòa đối với phép cộng là số 0, phần tử trung hòa đối với phép nhân là số 1;

3.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

1. Các tập số quen thuộc $(\mathbb{N}, *)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{R}, *)$, ở đó $*$ có thể là phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường có tính chất kết hợp, tính chất giao hoán, phần tử trung hòa đối với phép cộng là số 0, phần tử trung hòa đối với phép nhân là số 1;
2. Trên tập $\mathbb{Z}$, phép trừ không có tính chất kết hợp, không có tính chất giao hoán, không có phần tử trung hòa.

3.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

1. Các tập số quen thuộc $(\mathbb{N}, *)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{R}, *)$, ở đó $*$ có thể là phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường có tính chất kết hợp, tính chất giao hoán, phần tử trung hòa đối với phép cộng là số 0, phần tử trung hòa đối với phép nhân là số 1;
2. Trên tập $\mathbb{Z}$, phép trừ không có tính chất kết hợp, không có tính chất giao hoán, không có phần tử trung hòa.
3. Câu hỏi: Trên tập hợp $\mathbb{R}$, phép toán $x * y = xy + x + y$ có những tính chất gì?

3.1. Ví dụ minh họa tính chất của phép toán hai ngôi

Một số ví dụ

1. Các tập số quen thuộc $(\mathbb{N}, *)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{R}, *)$, ở đó $*$ có thể là phép toán $+$ hoặc phép toán . thông thường có tính chất kết hợp, tính chất giao hoán, phần tử trung hòa đối với phép cộng là số 0, phần tử trung hòa đối với phép nhân là số 1;
2. Trên tập $\mathbb{Z}$, phép trừ không có tính chất kết hợp, không có tính chất giao hoán, không có phần tử trung hòa.
3. Câu hỏi: Trên tập hợp $\mathbb{R}$, phép toán $x * y = xy + x + y$ có những tính chất gì?

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, với mọi $a, b \in X$.

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, với mọi $a, b \in X$.

Một số ví dụ:

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, với mọi $a, b \in X$.

Một số ví dụ:

1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường không phải là một nhóm vì không tồn tại phần tử đối;

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, với mọi $a, b \in X$.

Một số ví dụ:

1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường không phải là một nhóm vì không tồn tại phần tử đối;
2. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng $+$ thông thường là nhóm giao hoán.

3.2. NHÓM

Cho tập X khác rỗng với phép toán $*$, khi đó đại số hai ngôi $(X, *)$ lập thành một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba tiên đề sau:

1. Tính chất kết hợp: $(a * b) * c = a * (b * c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
2. Tồn tại phần tử trung hòa $e \in X$ sao cho $a * e = e * a = a$, với mọi $a \in X$;
3. Với mỗi $a \in X$, luôn tồn tại *phần tử đối* $x' \in X$ sao cho $x * x' = x' * x = e$.

Nhóm X được gọi là *nhóm giao hoán* hoặc *nhóm Abel* nếu $a * b = b * a$, với mọi $a, b \in X$.

Một số ví dụ:

1. Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường không phải là một nhóm vì không tồn tại phần tử đối;
2. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng $+$ thông thường là nhóm giao hoán.

3.2. NHÓM

Nhận xét: Cho $(X, *)$ là một nhóm, khi đó:

1. Phần tử trung hòa trong một nhóm là duy nhất, vì nếu e và e' là hai phần tử trung hòa của X thì $e' = e' * e = e * e' = e$;

Nhận xét: Cho $(X, *)$ là một nhóm, khi đó:

1. Phần tử trung hòa trong một nhóm là duy nhất, vì nếu e và e' là hai phần tử trung hòa của X thì $e' = e' * e = e * e' = e$;
2. Trong một nhóm, mỗi phần tử chỉ tồn tại duy nhất một phần tử đối của nó.

Nhận xét: Cho $(X,*)$ là một nhóm, khi đó:

1. Phần tử trung hòa trong một nhóm là duy nhất, vì nếu e và e' là hai phần tử trung hòa của X thì $e' = e' * e = e * e' = e$;
2. Trong một nhóm, mỗi phần tử chỉ tồn tại duy nhất một phần tử đối của nó.

3.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán $"+"$ và $"."$. Khi đó $(X, +, .)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

3.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán "$+$" và "$.$". Khi đó $(X, +, .)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

1. $(X, +)$ là một nhóm Abel;
2. $(a.b).c = a.(b.c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
3. Phép toán . phân phối về hai phía đối với phép toán $+$, nghĩa là

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

   với mọi $a, b, c \in X$

3.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán "$+$" và ".". Khi đó $(X, +, .)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

1. $(X, +)$ là một nhóm Abel;
2. $(a.b).c = a.(b.c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
3. Phép toán . phân phối về hai phía đối với phép toán $+$, nghĩa là

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$(b+c).a = b.a + c.a$$

   với mọi $a, b, c \in X$

1. Phần tử trung hòa đối với phép toán "$+$" thường ký hiệu là 0, gọi là phần tử trung hòa của vành. Phần tử trung hòa đối vói phép toán ".", thường ký hiệu là 1, và gọi là *phần tử đơn vị* của vành (để phân biệt với phần tử trung hòa đối với phép $+$);

3.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán ” $+$ ” và ”.”. Khi đó $(X,+,.)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

1. $(X,+)$ là một nhóm Abel;
2. $(a.b).c = a.(b.c)$, với mọi $a,b,c \in X$;
3. Phép toán . phân phối về hai phía đối với phép toán $+$, nghĩa là

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$(b+c).a = b.a + c.a$$

   với mọi $a,b,c \in X$

1. Phần tử trung hòa đối với phép toán ” $+$ ” thường ký hiệu là 0, gọi là phần tử trung hòa của vành. Phần tử trung hòa đối vói phép toán ”.”, thường ký hiệu là 1, và gọi là *phần tử đơn vị* của vành (để phân biệt với phần tử trung hòa đối với phép $+$);
2. Nếu phép toán ”.” của vành có tính chất giao hoán thì gọi là vành giao hoán;

3.3. VÀNH

Cho tập X khác rỗng, trên X trang bị hai phép toán $"+"$ và ".". Khi đó $(X, +, .)$ lập thành một vành nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

1. $(X, +)$ là một nhóm Abel;
2. $(a.b).c = a.(b.c)$, với mọi $a, b, c \in X$;
3. Phép toán . phân phối về hai phía đối với phép toán $+$, nghĩa là

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

   với mọi $a, b, c \in X$

1. Phần tử trung hòa đối với phép toán $"+"$ thường ký hiệu là 0, gọi là phần tử trung hòa của vành. Phần tử trung hòa đối vói phép toán ".", thường ký hiệu là 1, và gọi là *phần tử đơn vị* của vành (để phân biệt với phần tử trung hòa đối với phép $+$);
2. Nếu phép toán "." của vành có tính chất giao hoán thì gọi là vành giao hoán;
3. Nếu phép toán "." của vành có đơn vị thì gọi là vành có đơn vị.

Một số ví dụ:

1. Tập số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với các phép cộng và phép nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị, ở đó phần tử trung hòa là số 0 và phần tử đơn vị là số 1;

Một số ví dụ:

1. Tập số nguyên $\mathbb{Z}$, tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với các phép cộng và phép nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị, ở đó phần tử trung hòa là số 0 và phần tử đơn vị là số 1;
2. Tập $\mathbb{N}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường không phải là một vành.

3.4. TRƯỜNG

Cho tập X khác rỗng, trên đó xác định hai phép toán "$+$" và "$.$". Khi đó $(X,+,.)$ là một *trường* nếu:

1. $(X,+,.)$ là một vành giao hoán có đơn vị 1 đối với phép toán "$.$";
2. Với mọi $a \in X$ sao cho $a \neq 0$, (ở đó 0 là phần tử trung hòa của phép toán "$+$"), luôn tồn tại *phần tử nghịch đảo* của a, ký hiệu a^{-1}, sao cho
$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

hoặc tương đương là

1. $(X,+)$ là một nhóm giao hoán;
2. $(X^*,.)$ là một nhóm giao hoán ($X^* = X \setminus \{0\}$) với 0 là phần tử trung hòa của phép $+$;
3. Phép toán "+" và "." có tính chất phân phối $a(b+c) = ab + ac$.

Một số ví dụ:

1. Tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, tập số thực $\mathbb{R}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường là một trường với phần tử trung hòa của phép cộng là số 0, phần tử đơn vị của phép nhân là số 1.
2. Tập số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép toán cộng và phép toán nhân thông thường không phải là một trường.

3.5. XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Cho tập số thực $\mathbb{R}$. Xây dựng tập $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a;b)|a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Xét hai phần tử bất kỳ $x = (a;b), y = (c;d) \in \mathbb{C}$. Khi đó quan hệ bằng nhau $x = y$ trên $\mathbb{C}$ nếu $a = c$ và $b = d$. Trên $\mathbb{C}$ định nghĩa phép toán cộng "$+$" và phép toán "." (ký hiệu $x.y = xy$) như sau:

$$x + y = (a + c; b + d)$$

$$xy = (ac - bd; ad + bc)$$

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;
2. Phần tử trung hòa $0^* = (0;0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $x + 0^* = 0^* + x = x$, với mọi $x \in \mathbb{C}$;
3. Với mọi phần tử $x = (a;b)$, luôn tồn tại phần tử đối $x' = (-a;-b)$ thỏa mãn $x + x' = 0^*$;
4. $x + y = y + x$, với mọi $x, y \in \mathbb{C}$;
5. $(xy)z = x(yz)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;

6. Phần tử đơn vị $1^* = (1, 0)$ của phép toán nhân có tính chất $x1^* = 1^*x = x$, với mọi $x \in \mathbb{C}$;
7. $xy = yx$, với mọi $x, y \in \mathbb{C}$;
8. Với $x = (a; b) \neq 0^* = (0; 0)$, tồn tại phần tử nghịch đảo $x^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $xx^{-1} = x^{-1} = 1*$.
9. $(x + y)z = xz + yz$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{C}$;

Do vậy $\mathbb{C}$ cùng phép toán "$+$" và phép toán "." là một trường, được gọi là *trường số phức*.

3.5. XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Xét tập $\mathbb{R}^* = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$. Tập $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$ và $\mathbb{R}^*$ cũng là một trường. Xây dựng ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto (x, 0)$$

Dễ dàng kiểm tra được ánh xạ f là song ánh. Do vậy có quan hệ $1-1$ giữa trường số thực $\mathbb{R}$ và trường $\mathbb{R}^*$, hay tập số thực $\mathbb{R}$ là tập con của tập số phức $\mathbb{C}$. Khi đó số phức $(x; 0)$ tương ứng là số thực x; số $0^* = (0; 0)$ chính là số thực 0 và số $1^* = (1; 0)$ chính là số thực 1.
Đặt $i = (0; 1)$, khi đó mỗi số phức $z = (a; b)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a(1; 0) + (b; 0)(0; 1) = a + bi$$

a được gọi là *phần thực* của số phức z, ký hiệu là $Re(z)$; còn b được gọi là *phần ảo* của số phức z ký hiệu là $Im(z)$.
Số phức viết dưới dạng $z = a + bi$ được gọi là *dạng chính tắc* của số phức z.
Lưu ý:

3.5. XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Lưu ý:

1. Cho hai số phức $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, khi đó $z_1 = z_2$ nếu $Re(z_1) = Re(z_2)$ và $Im(z_1) = Im(z_2)$;
2. $i^2 = (0;1)(0;1) = (-1;0) = -1$.

3.5. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC VÀ DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi số phức $z = a + bi$ sẽ được biểu diễn bởi một điểm $M(a; b)$, nghĩa là mỗi điểm trên mặt phẳng sẽ biểu diễn một số phức tương ứng trong trường số phức. Mặt phẳng này được gọi là *mặt phẳng phức*. Độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *mô đun* của số phức z, ký hiệu là $|z|$.

$$|\overrightarrow{OM}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r.$$

Góc φ tạo bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và trục Ox được xác định bởi

$$cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{và} \quad sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

được gọi là *argument* của số phức z, được ký hiệu là $Arg(z)$.
Với các ký hiệu bên trên, số phức z có thể biểu diễn dưới dạng $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z.

3.5. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC VÀ DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Ví dụ: Dạng lượng giác của một số số phức:

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}));$
2. $z_2 = 8 - 8i = 8\sqrt{2}(cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4}));$

3.5. CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

Cho hai số phức dưới dạng chính tắc $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$.

1. Phép cộng, phép trừ
$$z_1 \pm_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$
2. Phép nhân
$$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$
   Đặc biệt:
$$z_1 . \overline{z_1} = |z_1|^2 = a_1^2 + b_1^2.$$
3. Phép chia
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} \qquad , z_2 \neq 0;$$

3.5. CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

Các phép toán trên số phức dạng lượng giác

Cho hai số phức dưới dạng lượng giác $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. Phép nhân

$$z_1.z_2 = r_1.r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

2. Phép chia

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), z_2 \neq 0;$$

3.5. LŨY THỪA VÀ KHAI CĂN SỐ PHỨC

Cho số phức lượng giác $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ và số nguyên n bất kỳ.

1. Phép lũy thừa (công thức Moiver).

$$z^n = [r(cos\varphi + isin\varphi)]^n = r^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi));$$

2. Căn bậc n của số phức: Số phức w được gọi là một *căn bậc* n của số phức z nếu $w^n = z$. Nếu $z = 0$, thì tập các căn bậc n của số phức 0 chỉ có duy nhất một phần tử. Ngược lại, nếu $z \neq 0$ gọi $w = s(cos\theta + isin\theta)$. Khi đó, tập các căn bậc n của số phức $z \neq 0$ là tập hợp bao gồm n số phức có dạng sau

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Nếu biểu diễn tập các căn bậc n của số phức z trên mặt phẳng phức, thì chúng sẽ tạo thành một đa giác đều n đỉnh nội tiếp trong đường tròn có tâm là gốc tọa độ, và bán kính $s = \sqrt[n]{r}$.

3.5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức *liên hợp* của số phức z, ký hiệu là $\overline{z} = a - bi$. Ở dạng lượng giác, số phức liên hợp của số phức $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ là số phức $z = r(cos\varphi - isin\varphi)$

Một số hệ thức của số phức liên hợp

1. Cho z_1, z_2 là các số phức.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

3.5. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

2 Cho số phức $z = a + bi$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} = 2a = 2Re(z)$$

$$z.\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|}$$

$$|\overline{z}| = |z|$$