

Toán Rời Rạc

Phương pháp Chứng minh

Bài tập

- GS Mc Brain và vợ là bà April tới một bữa tiệc ở đó có 4 đôi vợ chồng khác.
- Có một vài cặp bắt tay nhau nhưng không ai bắt tay với vợ hoặc chồng mình.
- GS hỏi mọi người khác xem họ bắt tay bao nhiêu người và ông ấy nhận được 9 con số khác nhau.
- Hỏi có bao nhiêu người đã bắt tay April?

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- K. Rosen, *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học* (Bản dịch Tiếng Việt)

Định nghĩa

Chứng minh toán học của một **mệnh đề** là một dãy **suy luận logic** dẫn đến mệnh đề này từ một tập **tiên đề**.

Nội dung

- 1 Mệnh đề, tiên đề, và suy luận logic
- 2 Phương pháp chứng minh
- 3 Nguyên lý sắp thứ tự tốt

Định nghĩa

Mệnh đề là một khẳng định hoặc đúng hoặc sai.

- Mệnh đề $2 + 3 = 5$ ✓
- Mệnh đề $1 + 1 = 3$ ✗

Khẳng định không phải mệnh đề

- “Đưa tôi cái bánh!”
- “Bây giờ là 5 giờ”

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓

- $p(3) = 53$ ✓

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓

- $p(3) = 53$ ✓
- ...

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓

- $p(3) = 53$ ✓
- ...
- $p(39) = 1601$ ✓

Mệnh đề

Với mọi số nguyên dương n , giá trị

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

là số nguyên tố.

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓

- $p(3) = 53$ ✓
- ...
- $p(39) = 1601$ ✓

nhưng

$$p(40) = 40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41 \quad \text{✗}$$

Mệnh đề (Giả thuyết Euler, 1769)

Phương trình

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

không có nghiệm khi a, b, c, d là số nguyên dương.

Mệnh đề (Giả thuyết Euler, 1769)

Phương trình

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

không có nghiệm khi a, b, c, d là số nguyên dương.

Năm 1988, Noam Elkies đã chứng minh là sai với phản ví dụ

$$\begin{array}{ll} a = 95800, & b = 217519, \\ c = 414560, & d = 422481 \end{array}$$

Mệnh đề

Phương trình

$$313(x^3 + y^3) = z^3$$

không có nghiệm nguyên dương.

Mệnh đề

Phương trình

$$313(x^3 + y^3) = z^3$$

không có nghiệm nguyên dương.

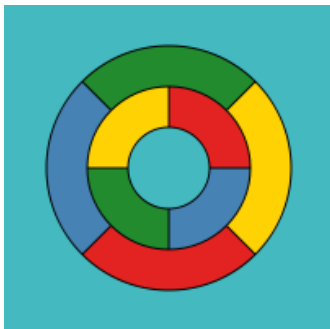
Mệnh đề này cũng sai nhưng phản ví dụ nhỏ nhất có nhiều hơn 1000 chữ số.

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.



Hình: Bản đồ tô 5 màu

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Appel & Hakel đã phân loại các bản đồ và dùng máy tính để kiểm tra xem chúng có tô được bằng 4 màu. Họ đã hoàn tất chứng minh năm 1976. Tuy nhiên

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Appel & Hakel đã phân loại các bản đồ và dùng máy tính để kiểm tra xem chúng có tô được bằng 4 màu. Họ đã hoàn tất chứng minh năm 1976. Tuy nhiên

- Chứng minh quá dài để có thể kiểm tra mà không dùng máy tính.

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Appel & Hakel đã phân loại các bản đồ và dùng máy tính để kiểm tra xem chúng có tô được bằng 4 màu. Họ đã hoàn tất chứng minh năm 1976. Tuy nhiên

- Chứng minh quá dài để có thể kiểm tra mà không dùng máy tính.
- Không ai đảm bảo rằng chương trình máy tính này chạy đúng.

Mệnh đề (Định lý bốn màu)

Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.

Appel & Hakel đã phân loại các bản đồ và dùng máy tính để kiểm tra xem chúng có tô được bằng 4 màu. Họ đã hoàn tất chứng minh năm 1976. Tuy nhiên

- Chứng minh quá dài để có thể kiểm tra mà không dùng máy tính.
- Không ai đảm bảo rằng chương trình máy tính này chạy đúng.
- Không ai đủ nhiệt tình để kiểm tra hết hàng nghìn trường hợp đã được chứng minh.

Mệnh đề (Định lý cuối cùng của Fermat)

Phương trình

$$x^n + y^n = z^n$$

không có nghiệm nguyên với $n \geq 3$.

Mệnh đề (Định lý cuối cùng của Fermat)

Phương trình

$$x^n + y^n = z^n$$

không có nghiệm nguyên với $n \geq 3$.

- Bài toán được viết trong một quyển sách Fermat đọc năm 1630.

Mệnh đề (Định lý cuối cùng của Fermat)

Phương trình

$$x^n + y^n = z^n$$

không có nghiệm nguyên với $n \geq 3$.

- Bài toán được viết trong một quyển sách Fermat đọc năm 1630.
- Andrew Wiles chứng minh là đúng năm 1994.

Mệnh đề (Giả thuyết Goldbach)

Mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

Mệnh đề (Giả thuyết Goldbach)

Mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

- Được giả thuyết năm 1742

Mệnh đề (Giả thuyết Goldbach)

Mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

- Được giả thuyết năm 1742
- Đã được khẳng định là đúng với mọi số không lớn hơn 10^{16} .

Mệnh đề (Giả thuyết Goldbach)

Mọi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

- Được giả thuyết năm 1742
- Đã được khẳng định là đúng với mọi số không lớn hơn 10^{16} .
- ✓ hay ✗ ?

Định nghĩa

Vị từ là một mệnh đề mà giá trị chân lý phụ thuộc vào một hoặc nhiều biến.

$p(n) ::= "n \text{ là số bình phương hoàn hảo}"$

$p(4) = "4 \text{ là số bình phương hoàn hảo}"$

$p(4) = \checkmark$

$p(5) = \times$

Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.

Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.
- Bắt đầu từ 5 “giả sử” để xây dựng hình học Euclid. Ví dụ:
Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.
- Bắt đầu từ 5 “giả sử” để xây dựng hình học Euclid. Ví dụ:
Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- Các mệnh đề như thế này được thừa nhận là đúng được gọi là tiên đề.

Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.
- Bắt đầu từ 5 “giả sử” để xây dựng hình học Euclid. Ví dụ:
Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- Các mệnh đề như thế này được thừa nhận là đúng được gọi là tiên đề.
- Bắt đầu từ các tiên đề này, Euclid thiết lập giá trị chân lý của các mệnh đề khác bằng cách đưa ra “chứng minh”.

Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.
- Bắt đầu từ 5 “giả sử” để xây dựng hình học Euclid. Ví dụ:
Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- Các mệnh đề như thế này được thừa nhận là đúng được gọi là tiên đề.
- Bắt đầu từ các tiên đề này, Euclid thiết lập giá trị chân lý của các mệnh đề khác bằng cách đưa ra “chứng minh”.
- Chứng minh là một dãy các lập luận logic từ tập tiên đề dẫn đến mệnh đề cần chứng minh.

Một số thuật ngữ cho mệnh đề

- Mệnh đề đúng và quan trọng gọi là *định lý*.

Một số thuật ngữ cho mệnh đề

- Mệnh đề đúng và quan trọng gọi là *định lý*.
- *Bổ đề* là mệnh đề chuẩn bị có ích để chứng minh các mệnh đề khác.

Một số thuật ngữ cho mệnh đề

- Mệnh đề đúng và quan trọng gọi là *định lý*.
- *Bổ đề* là mệnh đề chuẩn bị có ích để chứng minh các mệnh đề khác.
- *Hệ quả* là một mệnh đề mà chứng minh nó chỉ cần vài bước từ một định lý.

Hệ tiên đề của chúng ta

- Về cơ bản, toán học hiện đại dựa trên hệ tiên đề ZFC (Zermelo-Fraekel with Choice) cùng với một vài quy tắc suy luận logic.

Hệ tiên đề của chúng ta

- Về cơ bản, toán học hiện đại dựa trên hệ tiên đề ZFC (Zermelo-Fraenkel with Choice) cùng với một vài quy tắc suy luận logic.
- Tuy nhiên, chúng quá tối giản. Ví dụ, một chứng minh hình thức trong ZFC cho $2 + 2 = 4$ cần nhiều hơn 20,000 bước lập luận!

Hệ tiên đề của chúng ta

- Về cơ bản, toán học hiện đại dựa trên hệ tiên đề ZFC (Zermelo-Fraenkel with Choice) cùng với một vài quy tắc suy luận logic.
- Tuy nhiên, chúng quá tối giản. Ví dụ, một chứng minh hình thức trong ZFC cho $2 + 2 = 4$ cần nhiều hơn 20,000 bước lập luận!
- Trong môn học này, ta thừa nhận mọi sự kiện trong toán “phổ thông” như tiên đề.

Suy luận logic

- Luật Modus Ponens:

$$\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

(Một chứng minh của P và một chứng minh P suy ra Q là một chứng minh của Q)

Suy luận logic

- Luật Modus Ponens:

$$\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

(Một chứng minh của P và một chứng minh P suy ra Q là một chứng minh của Q)

- Luật

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

Suy luận logic

- Luật Modus Ponens:

$$\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

(Một chứng minh của P và một chứng minh P suy ra Q là một chứng minh của Q)

- Luật

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

- Luật

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q}{Q \Rightarrow P}$$

Không phải luật

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q}{P \Rightarrow Q} \quad \text{X}$$

Ví dụ

- Nếu 4 là số nguyên tố, thì “tôi không biết bay”. ✓
- Nếu 4 không phải số nguyên tố, thì “tôi biết bay”. X.

Nội dung

- ① Mệnh đề, tiên đề, và suy luận logic
- ② Phương pháp chứng minh
- ③ Nguyên lý sắp thứ tự tốt

Chứng minh mệnh đề “Nếu ... thì”

Để chứng minh mệnh đề $P \Rightarrow Q$:

- 1 Viết, “Giả sử P ”.
- 2 Chỉ ra bằng lập luận logic rằng Q đúng.

Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$.



Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$. Vậy các số

$$x, \quad 2 + x, \quad 2 - x$$

đều lớn hơn hoặc bằng 0.



Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$. Vậy các số

$$x, \quad 2 + x, \quad 2 - x$$

đều lớn hơn hoặc bằng 0. Vậy

$$x(2 - x)(2 + x) \geq 0$$



Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$. Vậy các số

$$x, \quad 2 + x, \quad 2 - x$$

đều lớn hơn hoặc bằng 0. Vậy

$$x(2 - x)(2 + x) \geq 0$$

Thêm 1 vào tích trên ta được

$$x(2 - x)(2 + x) + 1 > 0$$



Định lý

Nếu $0 \leq x \leq 2$ thì $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$. Vậy các số

$$x, \quad 2 + x, \quad 2 - x$$

đều lớn hơn hoặc bằng 0. Vậy

$$x(2 - x)(2 + x) \geq 0$$

Thêm 1 vào tích trên ta được

$$x(2 - x)(2 + x) + 1 > 0$$

Khai triển tích ta được $-x^3 + 4x + 1 > 0$. □

Chứng minh bằng phản đảo

- Phản đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Chứng minh bằng phản đảo

- Phản đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- Ta chứng minh như sau:
 - ① Viết “Ta chứng minh mệnh đề phản đảo:” và đưa ra mệnh đề phản đảo.
 - ② Làm như phương pháp chứng minh “Nếu ... thì”.

Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Chứng minh.



Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu \sqrt{r} là số hữu tỉ, vậy r là số hữu tỉ.



Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu \sqrt{r} là số hữu tỉ, vậy r là số hữu tỉ.
- Giả sử rằng \sqrt{r} là số hữu tỉ. Có nghĩa rằng có hai số nguyên p, q sao cho $\sqrt{r} = p/q$.



Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu \sqrt{r} là số hữu tỉ, vậy r là số hữu tỉ.
- Giả sử rằng \sqrt{r} là số hữu tỉ. Có nghĩa rằng có hai số nguyên p, q sao cho $\sqrt{r} = p/q$.
- Bình phương hai vế ta được

$$\frac{p^2}{q^2} = r$$



Định lý

Nếu r là số vô tỷ, vậy \sqrt{r} cũng là số vô tỷ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu \sqrt{r} là số hữu tỉ, vậy r là số hữu tỉ.
- Giả sử rằng \sqrt{r} là số hữu tỉ. Có nghĩa rằng có hai số nguyên p, q sao cho $\sqrt{r} = p/q$.
- Bình phương hai vế ta được

$$\frac{p^2}{q^2} = r$$

- Vì p^2, q^2 đều là số nguyên nên r là số hữu tỉ. □

Chứng minh mệnh đề “Nếu và chỉ nếu”

Có hai cách chứng minh:

① Chứng minh

$P \Leftrightarrow Q$ tương đương với hai chứng minh $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \end{cases}$

Chứng minh mệnh đề “Nếu và chỉ nếu”

Có hai cách chứng minh:

① Chứng minh

$P \Leftrightarrow Q$ tương đương với hai chứng minh $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \end{cases}$

② Xây dựng dãy “nếu và chỉ nếu”.

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh.

Xét x là một trong 6 người. Có hai trường hợp tương tự nhau:

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh.

Xét x là một trong 6 người. Có hai trường hợp tương tự nhau:

- 1 Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh.

Xét x là một trong 6 người. Có hai trường hợp tương tự nhau:

- 1 Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .
- 2 Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều lạ x .

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh.

Xét x là một trong 6 người. Có hai trường hợp tương tự nhau:

- 1 Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .
- 2 Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều lạ x .

Tại sao?

Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh trường hợp 1.



Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh trường hợp 1.

Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .



Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh trường hợp 1.

Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .
Có hai trường hợp con:



Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh trường hợp 1.

Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .

Có hai trường hợp con:

- 1 Không có cặp nào trong số 3 người này quen nhau. ✓



Chứng minh bằng cách chia trường hợp

Định lý

Mọi nhóm gồm 6 người đều có 3 người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.

Chứng minh trường hợp 1.

Trong 5 người khác x , có ít nhất 3 người đều quen x .

Có hai trường hợp con:

- 1 Không có cặp nào trong số 3 người này quen nhau. ✓
- 2 Có một cặp trong 3 người này quen nhau. Vậy cặp này cùng với x tạo thành 3 người quen nhau từng đôi một. ✓



Chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề P bằng phản chứng:

- 1 Viết “Ta chứng minh dùng phản chứng”.

Chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề P bằng phản chứng:

- 1 Viết “Ta chứng minh dùng phản chứng”.
- 2 Viết “Giả sử P sai.”

Chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề P bằng phản chứng:

- 1 Viết “Ta chứng minh dùng phản chứng”.
- 2 Viết “Giả sử P sai.”
- 3 Dẫn ra một sự kiện đã biết là sai (một phản chứng).

Chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề P bằng phản chứng:

- 1 Viết “Ta chứng minh dùng phản chứng”.
- 2 Viết “Giả sử P sai.”
- 3 Dẫn ra một sự kiện đã biết là sai (một phản chứng).
- 4 Viết “Điều này mâu thuẫn. Vậy P phải đúng.”

Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

- Vậy p chia hết cho 2. Tại sao?



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

- Vậy p chia hết cho 2. Tại sao? Nên p^2 chia hết cho 4.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

- Vậy p chia hết cho 2. Tại sao? Nên p^2 chia hết cho 4.
- Vậy q^2 chia hết cho 2. Nên q chia hết cho 2.



Định lý

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

- Vậy p chia hết cho 2. Tại sao? Nên p^2 chia hết cho 4.
- Vậy q^2 chia hết cho 2. Nên q chia hết cho 2.
- Vậy p/q không tối giản. ✗



Nội dung

- ① Mệnh đề, tiên đề, và suy luận logic
- ② Phương pháp chứng minh
- ③ Nguyên lý sắp thứ tự tốt

Nguyên lý sắp thứ tự tốt (STTT)

Mọi tập số nguyên **không** âm **khác rỗng** đều có phần tử nhỏ nhất.

Nguyên lý sắp thứ tự tốt (STTT)

Mọi tập số nguyên **không âm khác rỗng** đều có phần tử nhỏ nhất.

- Tập rỗng không có phần tử nhỏ nhất.

Nguyên lý sắp thứ tự tốt (STTT)

Mọi tập số nguyên không âm khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

- Tập rỗng không có phần tử nhỏ nhất.
- Không đúng với tập số âm. Ví dụ tập

$$\{\dots, -3, -2, -1\}$$

Nguyên lý sắp thứ tự tốt (STTT)

Mọi tập số nguyên không âm khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

- Tập rỗng không có phần tử nhỏ nhất.
- Không đúng với tập số âm. Ví dụ tập

$$\{\dots, -3, -2, -1\}$$

- Không đúng với mọi tập số hữu tỉ. Ví dụ tập

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Chứng minh.

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Chứng minh.

- Giả sử ngược lại có m, n không viết được như trên.

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Chứng minh.

- Giả sử ngược lại có m, n không viết được như trên.
- Xét C là tập **tử số** của các phân số như vậy. Vậy $C \neq \emptyset$ vì $m \in C$.

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Chứng minh.

- Giả sử ngược lại có m, n không viết được như trên.
- Xét C là tập **tử số** của các phân số như vậy. Vậy $C \neq \emptyset$ vì $m \in C$.
- Theo nguyên lý STTT, có số nhỏ nhất $m_0 \in C$.

Định lý

Mọi số hữu tỉ m/n đều viết được dưới dạng x/y sao cho x, y không có ước chung nguyên tố.

Chứng minh.

- Giả sử ngược lại có m, n không viết được như trên.
- Xét C là tập **tử số** của các phân số như vậy. Vậy $C \neq \emptyset$ vì $m \in C$.
- Theo nguyên lý STTT, có số nhỏ nhất $m_0 \in C$.
- Theo định nghĩa của tập C , có số n_0 để m_0/n_0 không viết được ở dạng trên.

Chứng minh (tiếp).

- Có nghĩa rằng m_0, n_0 có ước chung nguyên tố $p > 0$. Vậy

$$\frac{m_0/p}{n_0/p} = \frac{m_0}{n_0}$$

- Vì m_0/n_0 không thể viết ở dạng trên. Vậy $\frac{m_0/p}{n_0/p}$ cũng không viết được ở dạng trên.
- Vậy ta có

$$\frac{m_0}{p} \in C \quad \text{và} \quad \frac{m_0}{p} < m_0 \quad \textcolor{red}{\times}$$



Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của P :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng} \}$$

Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của P :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng} \}$$

- Giả sử phản chứng rằng $C \neq \emptyset$.

Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của P :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng} \}$$

- Giả sử phản chứng rằng $C \neq \emptyset$.
- Bởi nguyên lý STTT có phần tử nhỏ nhất $c \in C$.

Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của P :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng} \}$$

- Giả sử phản chứng rằng $C \neq \emptyset$.
- Bởi nguyên lý STTT có phần tử nhỏ nhất $c \in C$.
- Đưa ra phản chứng: thường bằng cách chỉ ra $P(c)$ đúng hoặc chỉ ra một phần tử $d \in C$ và $d < c$.

Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n , ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của P :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng} \}$$

- Giả sử phản chứng rằng $C \neq \emptyset$.
- Bởi nguyên lý STTT có phần tử nhỏ nhất $c \in C$.
- Đưa ra phản chứng: thường bằng cách chỉ ra $P(c)$ đúng hoặc chỉ ra một phần tử $d \in C$ và $d < c$.
- Kết luận rằng C rỗng, có nghĩa rằng không có phản ví dụ.

Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C .



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C . Vậy n không nguyên tố.



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C . Vậy n không nguyên tố. Có nghĩa rằng

$$n = a \cdot b \quad \text{với} \quad a, b > 1$$



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C . Vậy n không nguyên tố. Có nghĩa rằng

$$n = a \cdot b \quad \text{với} \quad a, b > 1$$

- Hơn nữa a, b phải phân tích được thành tích các số nguyên tố. Tại sao?



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C . Vậy n không nguyên tố. Có nghĩa rằng

$$n = a \cdot b \quad \text{với} \quad a, b > 1$$

- Hơn nữa a, b phải phân tích được thành tích các số nguyên tố. Tại sao?

$$a = p_1 \cdots p_k \quad \text{và} \quad b = q_1 \cdots q_m$$



Định lý

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.

Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử n nhỏ nhất thuộc C . Vậy n không nguyên tố. Có nghĩa rằng

$$n = a \cdot b \quad \text{với} \quad a, b > 1$$

- Hơn nữa a, b phải phân tích được thành tích các số nguyên tố. Tại sao?

$$a = p_1 \cdots p_k \quad \text{và} \quad b = q_1 \cdots q_m$$

- Vậy $n = p_1 \cdots p_k \cdot q_1 \cdots q_m$.

X



Định lý

Mọi số nguyên dương đều thú vị.

Chứng minh.

- Xét S là tập các số nguyên dương **không** thú vị.
- Nếu S **khác** rỗng, S chứa phần tử nhỏ nhất n .



Định lý

Mọi số nguyên dương đều thú vị.

Chứng minh.

- Xét S là tập các số nguyên dương **không** thú vị.
- Nếu S **khác** rỗng, S chứa phần tử nhỏ nhất n .
- Nhưng là phần tử nhỏ nhất của một tập phải là một tính chất thú vị.



Định lý

Mọi số nguyên dương đều thú vị.

Chứng minh.

- Xét S là tập các số nguyên dương **không** thú vị.
- Nếu S **khác** rỗng, S chứa phần tử nhỏ nhất n .
- Nhưng là phần tử nhỏ nhất của một tập phải là một tính chất thú vị.
- Vậy n không thuộc S . **X**

