GIẢI TÍCH I
BÀI 4.
(§9, §10)

§9 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN (Tiếp theo)

5. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

a) Đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ 1. **a)** $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tính $y^{(n)}$ **c)** $y = \log_a|x|$, tính $y^{(n)}$

Quy tắc. $\exists f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$

1°) $(\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x)$

2°) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

3°) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ 2. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

Ví dụ 3. $y = \sin ax\cos bx$, tính $y^{(20)}$

Ví dụ 4. $y = x^2\cos x$, tính $y^{(30)}$

Ví dụ 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

Ví dụ 6. a) $y = \dfrac{1 - 2x}{e^x}$, tính $y^{(n)}$ $((-2)^n e^{-2x}(n + 1 - 2x))$

b) $y = x\ln(1 - 3x)$, tính $y^{(n)}$ $\left(\dfrac{(n-2)!\,3^{n-1}}{(1-3x)^n}(3x - n)\right)$

c) $y = f(x)$, $\begin{cases} x = 3t + 2t^3 \\ y = te^{t^2} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$ $\left(f' = \dfrac{e^{t^2}}{3},\ f'' = \dfrac{2 + e^{t^2}}{9(1 + 2t^2)}\right)$

d) $y = f(x)$, $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$, tính $f'(x)$, $f''(x)$ $\left(f' = 2(1 - e^t),\ f'' = \dfrac{-2e^t}{1 + e^t}\right)$

e) $f(x) = x^2\sin(1 - x)$. Tính $f^{(50)}(1)$ (-100)

f) $f(x) = (1 - x^2)\cos x$. Tính $f^{(51)}(0)$ (102)

b) Vi phân cấp cao

Định nghĩa. $d^n f = d(d^{n-1} f)$

khi x là biến số độc lập ta có $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ 7. $y = x^3e^x$, tính $d^{10}y$

Vi phân cấp cao không có tính bất biến

Ví dụ 8. $y = x^3$, $x = t^2$, có $d^2y \neq y^{(2)}dx^2$

Ví dụ 9. a) $y = (x + 1)^2 \ln(2x + 3)$, tính $d^{11}y(-1)$, $(8!\,C_{11}^2 2^{10}dx^{11})$

b) $y = (1 - x^2)\ln(2x - 1)$, tính $d^{10}y(1)$. $(-7!\,C_{10}^2.2^9dx^{10})$

Ví dụ 10. a) $f(x) = e^x \sin x$, tính $d^{22}f(0)$ $(-2^{11}dx^{22})$

b) $f(x) = e^x \cos x$, tính $d^{20}f(0)$ $(-2^{10}dx^{20})$

c) CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int\limits_0^x (\arctan t)^n\,dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt

d) CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int\limits_0^x (\operatorname{arccot} t)^n\,dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt.

§ 10. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

• Đặt vấn đề.

1. Các định lí về hàm khả vi

Định lí Fermat. $f(x)$ xác định trên $(a\,;\,b)$, $f(x)$ đạt cực trị tại $c \in (a\,;\,b)$, $\exists\, f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Ví dụ 1. a) $y = x^2$, $x \in (-1\,;\,2)$ b) $y = |x|$, $x \in (-1\,;\,1)$.

Định lí Rolle. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, khả vi trên $(a\,;\,b)$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;\,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Ví dụ 2. $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$, $x \in [-3\,;\,-1]$

Ví dụ 3. $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x^4}$, $x \in [-1\,;\,1]$

Ví dụ 4. $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \left[-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right]$

Ví dụ 5. $f(x)$ khả vi $[0\,;\,1]$, $f'(0).f'(1) < 0$. CMR $\exists\, c \in (0\,;\,1)$: $f'(c) = 0$.

Ví dụ 6. a) Cho $a = b + c$. CMR phương trình $4ax^3 + 3bx^2 + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1\,;\,0)$.

b) Cho $a + b + c = 0$. CMR phương trình $ax^3 + 2bx + 2c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0\,;\,2)$.

Định lí Lagrange. $f(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$, khả vi trên $(a\,;\,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a\,;\,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ví dụ 7. $f(x) = x(x + 1),\ x \in [0\ ;\ 2]$

Ví dụ 8. $f(x) = |x|(x - 1),\ x \in [-1\ ;\ 2]$

Ví dụ 9. CMR: $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$

Ví dụ 10. a) Chứng minh rằng các VCB $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to +\infty$,

$$\alpha(x) = \arctan^2(x + 1) - \arctan^2 x,\quad \beta(x) = \frac{\operatorname{arccot}(1 - x^2)}{1 + x^2}.$$

b) Chứng minh rằng các VCB $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to +\infty$,

$$\alpha(x) = \operatorname{arccot}^2(1 - x) - \operatorname{arccot}^2(2 - x),\quad \beta(x) = \frac{4\operatorname{arccot}(1 - x^2)}{1 + x^2}.$$

c) Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k} < \ln 2$

d) Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n - k} > \ln 2$

e) Tìm a để $\alpha(x) = \tan\frac{1}{3 + x^a} - \tan\frac{1}{1 + x^a}$ là VCB cùng bậc với $\frac{1}{x^4}$ khi $x \to +\infty$.

f) Tìm a để $\alpha(x) = \tan\frac{1}{2 + x^a} - \tan\frac{1}{5 + x^a}$ là VCB cùng bậc với $\frac{1}{x^6}$ khi $x \to +\infty$.

Định lí Cauchy. $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b]$, khả vi trên $(a\ ;\ b) \Rightarrow \exists\ c \in (a\ ;\ b)$:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ngoài ra, nếu $g'(x) \neq 0,\ \forall\ x \in (a\ ;\ b)$ thì có

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ví dụ 11. $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3,\ x \in [1\ ;\ 2]$

Ví dụ 12. $f(x) = |x|(x + 1),\ g(x) = x,\ x \in [-2\ ;\ 1]$

Ví dụ 13. a) CMR $\forall\ x > 0$ có $3\arctan x + \arctan(x + 2) < 4\arctan(x + 1)$.

b) CMR $\forall\ x > 0$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x + 2) > 3\operatorname{arccot}(x + 1)$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!