Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Câu 1: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx$

Giải

Đặt $\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx = \int_2^{+\infty} f(x)dx$

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x} = g(x) > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^6-1}} = 1.$

Vì $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ $(\alpha = 1)$, nên $\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}dx$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh 2

Câu 2: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)\sqrt{x}}dx$

Giải:

Tích phân $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)\sqrt{x}}dx$ suy rộng loại 2 tại cận dưới $x = 0$; Đặt $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)\sqrt{x}}$

Xét $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)} = 1.$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên tích phân $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)\sqrt{x}}dx$ cũng hội tụ

Câu 3: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{1+sinx}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$

Giải

Ta có: $0 \le \left|\frac{1+sinx}{\sqrt{x(x+1)^3}}\right| \le \frac{2}{x^2}, \forall x \ge 1.$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx$ nên $\int_1^{+\infty} \left|\frac{1+sinx}{\sqrt{x(x+1)^3}}\right|dx$

Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{1+sinx}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$ hội tụ tuyệt đối theo tiêu chuẩn so sánh 1.

Câu 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $J = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + arctan(x) - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx.$

Giải:

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + arctan(x) - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx = \int_1^{2} \frac{x^2 + arctan(x) - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^2 + arctan(x) - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx = J_1 + J_2$$

Khi $x \to 1^+ : f(x) = \frac{x^2 + arctanx - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}} \sim \frac{-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}(x-1)^{\frac{1}{2}}} = g(x)$

Mà $\int_1^2 g(x)$ hội tụ nên J_1 hội tụ

Khi $x \to +\infty : f(x) = \frac{x^2 + arctanx - 1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}} \sim \frac{x^2}{x^{\frac{8}{2}}} = \frac{1}{x^2} = g(x)$

Mà $\int_2^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên J_2 hội tụ

Vậy $J = J_1 + J_2$ hội tụ

Câu 5: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + x}{\sqrt{(x+1)^8}}dx$

Giải:

Đặt $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + x}{\sqrt{(x+1)^8}}dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$

Khi $x \to +\infty : f(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt{(x+1)^8}} \sim \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^8}} = \frac{1}{x}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{x}$, ta có $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^3 + x}{\sqrt{(x+1)^8}}.x = 1$

Mặt khác ta có $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ $(p=1)$.

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+x}{\sqrt{(x+1)^8}}dx$ phân kỳ

Câu 6: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4(x+1)^5}}dx$

Giải:

Đặt $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4(x+1)^5}}dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$

Khi $x \to +\infty$: $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x^5}} = \frac{1}{2x^2}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{2x^2}$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)^5}}.2x^2 = 1.$

Mặt khác ta có $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $(p=2>1)$.

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4(x+1)^5}}dx$ hội tụ

Câu 7: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+7x-3}{3x^4+x\sqrt{x}}dx$

Giải:

Với $x \in [1;\infty)$, xét $f(x) = \frac{x^2+7x-3}{3x^4+x\sqrt{x}} > 0, g(x) = \frac{x^2}{3x^4} = \frac{1}{3x^2} > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+7x-3}{3x^4+x\sqrt{x}}.3x^2\right) = 1$$

Suy ra $K = \int_1^{\infty} \frac{x^2+7x-3}{3x^4+x\sqrt{x}}dx$ và $\int_1^{\infty} \frac{1}{3x^2}dx$ cùng tính chất hội tụ

Mà $\int_1^{\infty} \frac{1}{3x^2} dx$ hội tụ, vì $p = 2 > 1$. Vậy K hội tụ

Câu 8: Tích phân suy rộng $\int_2^{\infty} \frac{x^{1,01}dx}{2x^2 + \sqrt{4 + x^2}}$ hội tụ hay phân kỳ?

Giải:

Với $x \in [2;\infty)$, xét $f(x) = \frac{x^{1,01}}{2x^2 + \sqrt{4 + x^2}} > 0, g(x) = \frac{1}{x^{0,99}} > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1,01}}{2x^2 + \sqrt{4+x^2}}.x^{0,99}\right) = \frac{1}{2}$$

Mà $\int_2^{3} \frac{dx}{x^{0,99}}$ phân kỳ nên $\int_2^{\infty} \frac{x^{1,01}dx}{2x^2 + \sqrt{4 + x^2}}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Câu 9: Khảo sát sự hội tụ của tích phân: $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^6 + sinx} dx$

Giải

Đặt $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^6 + sinx} dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$

Khi $x \to +\infty : f(x) \sim \frac{x^3}{x^6} = \frac{1}{x^3}$

Xét $g(x) = \frac{1}{x^3}$, ta có $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^3(x^3 + 5x - 1)}{x^6 + sinx} = 1.$

Mặt khác ta có $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^6 + sinx} dx$ hội tụ

Câu 10: Khảo sát sự hội tụ của tích phân: $\int_1^{2} \frac{1 + x}{x(\sqrt{x} - 1)} dx.$

Giải

Tích phân $\int_1^{2} \frac{1 + x}{x(\sqrt{x} - 1)} dx = \int_1^{2} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2 tại cận dưới.

Xét hàm $g(x)=\frac{1}{1-x}; \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(1+x)(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(1+x)(\sqrt{x}+1)}{x}=4$

mà $\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$ phân kì nên tích phân $\int_1^2 \frac{1+x}{x(\sqrt{x}-1)}dx$ phân kì

Câu 11: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng: $I=\int_0^{+\infty}\frac{3+si.n2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Giải:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{3+sin2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_0^{2}\frac{3+sin2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{3+si.n2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx=I_1+I_2$$

Xét $I_1=\int_0^{2}\frac{3+sin2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx$

Hàm dưới dấu tích phân là hàm không âm.

Ta có: $x\to 0:\frac{3+sin2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\sim\frac{3+0}{2.\sqrt[3]{x^2}}(VCB)$

Mà $\int_0^2\frac{3}{2.\sqrt[3]{x^2}}dx$ hội tụ do $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$ nên I_1 hội tụ (TCSS2)

Xét $I_2=\int_2^{+\infty}\frac{3+si.n2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}dx.$ Ta có : $0\le\frac{3+sin2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\le\frac{4}{x^4};\forall x\in[2;+\infty)$

Mà $\int_2^{+\infty}\frac{3}{x^4}dx$ hội tụ do $(\alpha=4>1)$ nên I_2 hội tụ (TCSS1) Kết luận: I hội tụ

Câu 12: Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau: $\int_1^{+\infty}\frac{x^3+5x^2+1}{2x^5+x^3+5x^2+1}dx$

Giải:

Đặt $f(x)=\frac{x^3+5x^2+1}{2x^5+x^3+5x^2+1}$. Xét hàm $g(x)=\frac{1}{x^2}; \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$

Mà $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty}\frac{x^3+5x^2+1}{2x^5+x^3+5x^2+1}dx$ hội tụ

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Câu 13: Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau: $\int_1^2 \frac{x.ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$

Giải

Đặt $h(x)=\frac{x.ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Xét hàm $k(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; $\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)}{k(x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{xln(1+x)}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{ln2}{\sqrt[3]{2}}$

Mà $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ hội tụ nên $\int_1^2 \frac{x.ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$ hội tụ

Câu 14: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}dx$

Giải

Ta có: $0\le \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ khi $x\to 1^-$

Mà $\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}dx$ hội tụ

Câu 15: Tích phân suy rộng sau đây hội tụ hay phân kì? Tính giá trị tích phân nếu có: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx.$

Giải

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int \frac{1}{1+u^2}du=2arctan\sqrt{x}+C$ (Đặt $u=\sqrt{x}$)

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\lim_{t\to 0^+}\left(2arctan\sqrt{x}\right)\Big|_t^1+\lim_{t\to\infty}\left(2arctan\sqrt{x}\right)\Big|_1^t$$

$$\Rightarrow x=\lim_{t\to 0^+}\left(2.\frac{\pi}{4}-2arctan\sqrt{t}\right)+\lim_{t\to\infty}\left(2arctan\sqrt{t}-2.\frac{\pi}{4}\right)=\pi$$

Câu 16: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_2^{+\infty} \frac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}}dx$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Giải:

$$\int_2^{+\infty} \frac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}}dx = \int_2^3 \frac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}}dx + \int_3^{+\infty} \frac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}}dx = I_1 + I_2$$

Xét I_1

Khi $x \to 2^+ : \dfrac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}} \sim \dfrac{7+3sin2}{\sqrt[3]{(x-2).34}}$

Do $\displaystyle\int_2^3 \frac{7+3sin2}{\sqrt[3]{(x-2).34}}dx, \alpha = \frac{1}{3} < 1$ hội tụ nên I_1 hội tụ (TCSS2)

Xét I_2

Khi $x \to +\infty : \dfrac{7+3sinx}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}} \le \dfrac{10}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}} \sim \dfrac{10}{x^2}.$

Do $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{10}{x^2}dx; \alpha = 2 > 1$ hội tụ nên $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{(x-2)(x^5+2)}}dx$ hội tụ (TCSS2) nên I_1 hội tụ (TCSS1)

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ.

Câu 17: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $J = \displaystyle\int_2^3 \frac{(x^2+3x-1)}{\sqrt[5]{(x-2)(3+x)}}dx$

Giải

Khi $x \to 2^+ : \dfrac{x^2+3x-1}{\sqrt[5]{(x-2)(x+3)}} \sim \dfrac{9}{\sqrt[5]{5(x-2)}} > 0(1)$

Mà $\displaystyle\int_2^3 \frac{9}{\sqrt[5]{5(x-2)}}dx = \frac{9}{\sqrt[5]{5}}\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)}}$ hội tụ vì $\alpha = \dfrac{1}{5} < 1(2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow J$ hội tụ (theo tiêu chuẩn so sánh 2)

Câu 18: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^3+\sqrt{x^4-1}}dx$

Giải:

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Ta có: $0 \le \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3+\sqrt{x^4-1}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ khi $x \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{2}}dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3+\sqrt{x^4-1}}dx$ hội tụ

Câu 19: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^2 \dfrac{1+sinx}{x^3-4x^2+4x}dx$

Giải

Đặt $\int_1^2 \dfrac{1+sinx}{x^3-4x^2+4x}dx = \int_1^2 f(x)dx$ x là tích phân suy rộng loại 2 tại cận trên $x=2$

Xét hàm $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(1+sinx)(x-2)^2}{x^3-4x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1+sinx}{x} = \dfrac{1+sin2}{2}$ hữu hạn

Mà $\int_1^2 \dfrac{1}{(x-2)^2}dx$ phân kỳ nên $\int_1^2 \dfrac{1+sinx}{x^3-4x^2+4x}dx$ phân kỳ

Câu 20: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}-x+1}{x^3+x^2+1}dx$

Giải

Khi $x \to +\infty$, $\dfrac{x\sqrt{x}-1+1}{x^3+x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Mà $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ hội tụ

Vậy $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}-x+1}{x^3+x^2+1}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2

Câu 21: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

Giải:

Khi $x \to 1^+$: $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Mặt khác: $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Vậy $\int_1^2 \frac{x+lnx}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx.$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2

Câu 22: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x^2+1}dx$

Giải

Ta có: $\left|\frac{sinx}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{x^2}, \forall x \ge 1$

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x^2+1}dx$ hội tụ

Câu 23: Tính tích phân suy rộng: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+x-1}}$

Giải:

Đặt $\sqrt{x^2+x-1} = t + x \to x = \frac{t^2+1}{1-2t} \to dx = \frac{-2\left(t^2-t-1\right)}{\left(2t-1\right)^2}dt$

Đổi cận: $t = \sqrt{x^2+x-1} - x; x = 2 \to t = \sqrt{5}-2; x = +\infty \to t = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right) = \frac{1}{2}$

$$\to I = \int_{\sqrt{5}-2}^{\frac{1}{2}} \frac{2dt}{t^2+1} = arctan\frac{1}{2}$$

Câu 24: Tính tích phân suy rộng: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{19}{3}}.\sqrt[3]{1+x^2}}$

Giải:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{19}{3}}.\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{19}+x^{21}}} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^7\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow t^3 = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\rightarrow I = \int_{\sqrt[3]{2}}^{1} -\frac{3}{2}t\left(t^3-1\right)^2 dt = \frac{3}{10}.\sqrt[3]{4} - \frac{27}{80}$$

Câu 25: Khảo sát sự hội tụ của tích phân: $I = \int_0^{\pi} \frac{x^m}{\sqrt[3]{1-cos^2x}}dx$

Giải:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x^m}{\sqrt[3]{1-cos^2x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{\sqrt[3]{1-cos^2x}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x^m}{\sqrt[3]{1-cos^2x}}dx$$

Khi $x \to 0: f(x) \sim \frac{x^m}{\sqrt[3]{2.\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}-m}}$. Tp HT khi và chỉ khi $\frac{2}{3} - m < 1 \leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$

Khi $x \to \pi: f(x) = \frac{x^m}{\sqrt[3]{1-cos(\pi-x)}\sqrt[3]{1+cos(\pi-x)}} \sim \frac{\pi^m}{\sqrt[3]{2.\frac{(\pi-x)^2}{2}}} = \frac{\pi^m}{(\pi-x)^{\frac{2}{3}}}$. TP hội tụ $\forall m$

Vậy tp đã cho HT với $m > -\frac{1}{3}$

Câu 26: Tính tích phân suy rộng: $I = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\left(ln^3x + ln^2x + lnx\right)}$

Giải:

Đặt $t = lnx \rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Ta được tpsr loại 1 của hàm hữu tỉ:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2+t^3} = ln\sqrt{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

Câu 27: Khảo sát sự hội tụ của tích phân: $I = \int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{x(1-x)^{\alpha}}}dx$

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{x(1-x)^{\alpha}}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{lnx}{\sqrt{x(1-x)^{\alpha}}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{lnx}{\sqrt{x(1-x)^{\alpha}}}dx$$

Khi $x \to 0^+ : f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. TPHT

Khi $x \to 1^- : f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{(1-x)^\alpha}}$. TP hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 2$

Vậy tp đã cho HT khi và chỉ khi $\alpha < 2$

Câu 28: Tính tích phân suy rộng: $I = \int_0^1 ln^n(1+x)dx$

Giải:

Đặt $t = ln(1+x) \to x = e^t - 1 \to dx = e^t dt$. Ta được tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{0} t^n e^t dt = t^n e^t - nt^{n-1}e^t + n(n-1)t^{n-2}e^t + ... + (-1)^{n-1}.n!.t.e^t + (-1)^n.n!.e^t \Big|_{-\infty}^{0}$$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị $m > 0$ để tích phân: $I = \int_0^1 \frac{x^3 + x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + arctanx^m}$ hội tụ

Giải

Hàm $f(x) \geq 0, \forall x \in (0;2]$. Ta sẽ so sánh khi $x \to 0^+$ .Lưu ý: Không nhận xét f dương thì trừ điểm

$$\alpha > 2 : f(x) \sim \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow \text{ TP phân kỳ}$$

$$\alpha = 2 : f(x) \sim \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2x^2} \Rightarrow \text{ TP phân kỳ}$$

$$\alpha < 2 : f(x) \sim \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha - \frac{2}{3}} \Rightarrow \text{ TP hội tụ khi và chỉ khi } \alpha - \frac{2}{3} < 1 \leftrightarrow \alpha < \frac{5}{3}$$

Vậy I hội tụ khi và chỉ khi $0 < \alpha < \frac{5}{3}$

Câu 30: Tìm số thực $m > 0$ để tích phân sau hội tụ $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^m(1+x^{m+1})}dx.$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Giải:

Ta có: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^m\left(1+x^{m+1}\right)}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^m\left(1+x^{m+1}\right)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^m\left(1+x^{m+1}\right)}dx = I_1 + I_2$

Hàm $f(x) > 0, \forall x > 0$

$x \to 0^+ : f(x) \sim \frac{1}{x^m} \Rightarrow I_1$ hội tụ khi và chỉ khi $m < 1$

$x \to +\infty : f(x) \sim \frac{1}{x^{2m}} \Rightarrow I_2$ hội tụ khi và chỉ khi $m > \frac{1}{2}$

Vậy I hội tụ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} < m < 1$

Câu 31: Tìm α để tích phân sau hội tụ $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}}$. Tính tích phân khi $\alpha = -2$

Giải

Ta thấy 2 cận của tích phân làm cho biểu thức dưới dấu tích phân không xác định. Nên ta tách ra thành 2 tích phân suy rộng loại 2 như sau:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} = I_1 + I_2$$

Xét tích phân I_1: $I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}}$

Xét khi $x \to 0^+$:

+ Khi $\alpha < 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} \sim 0 \Rightarrow I_1$ hội tụ

+ Khi $\alpha = 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \sim 1 \Rightarrow I_1$ hội tụ

+ Khi $\alpha > 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$

Như vậy thì để I_1 hội tụ thì trong trường hợp này α phải thỏa $0 < \alpha < 1$

Tổng hợp lại thì với $\alpha < 1$ thì I_1 hội tụ!

Xét tích phân $I_2 : I_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}}$

Xét khi $x \to \frac{1}{2}^-$:

+ Khi

$$\alpha < 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{x^\alpha \sqrt{(1+2x)(1-2x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,\frac{1}{2^\alpha}\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\frac{1}{2^\alpha}\sqrt{2\left(\frac{1}{2}-x\right)}} = \frac{1}{2^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ do đây là tích phân suy rộng loại 2 và $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ nên I_2 hội tụ.

+ Khi $\alpha = 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} \sim \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow I_2$ hội tụ.

+ Khi $\alpha > 0 : \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1-4x^2}} \sim \frac{1}{2^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow I_2$ hội tụ

KẾT LUẬN: Do I_2 đã hội tụ nên để cho I hội tụ thì I_1 phải hội tụ. Vậy $\alpha < 1$ thỏa mãn.

* Tính tích phân khi $\alpha = -2$

Khi $\alpha = -2$ thì ta có tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}dx$

Đặt: $x = \frac{1}{2}sint$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{2}costdt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Tích phân trở thành: $\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{cos2t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{32}$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Câu 32: Tìm α để tích phân sau hội tụ $I=\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\left(e^{\frac{2}{x^2}}-e^{-\frac{3}{x^2}}\right)dx$. Tính tích phân khi $\alpha=-5$

Giải:

Đây là tích phân suy rộng loại 1.

Khi $x\to+\infty$, ta có: $x^{\alpha}\left(e^{\frac{2}{x^2}}-e^{-\frac{3}{x^2}}\right)=x^{\alpha}\left[\left(e^{\frac{2}{x^2}}-1\right)-\left(e^{-\frac{3}{x^2}}-1\right)\right]\sim x^{\alpha}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{-3}{x^2}\right)=\frac{5x^{\alpha}}{x^2}=\frac{5}{x^{2-\alpha}}$

Để tích phân hội tụ thì: $2-\alpha>1\Rightarrow\alpha<1$

Khi $\alpha=-5$, tích phân trở thành: $I=\int_1^{+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x^2}}-e^{-\frac{3}{x^2}}}{x^5}dx$

Đặt: $u=\frac{1}{x^2}\Rightarrow du=-\frac{2}{x^3}dx$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=1; x=+\infty\Rightarrow u=0$

Tích phân trở thành: $I=\frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e^{2u}-e^{-3u}\right)du=\frac{1}{2}\int_0^1 ue^{2u}du-\frac{1}{2}\int_0^1 ue^{-3u}du=I_1-I_2$

Đến đây dễ dàng tính được I_1,I_2 bằng tích phân từng phân

Vậy $I=\frac{e^2}{8}+\frac{2}{9e^3}+\frac{5}{72}$

Câu 33: Cho tích phân $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{x^2-1}}$.Tìm m để tích phân I hội tụ và tính tích phân khi $m=2$

Giải:

Do $x=1$ làm cho biểu thức trong dấu tích phân không xác định. Nên đây là tích phân suy rộng loại 1 và 2.

Tách ra thành 2 tích phân sau:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{2}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{x^2-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{x^2-1}}=I_1+I_2$$

Xét tích phân I_1 sau: $I_1=\int_1^{2}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{2}\frac{dx}{\left(x^m+2\right)\sqrt{(x-1)(x+1)}}$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Khi $x \to 1^+$: $\dfrac{dx}{(x^m+2)\sqrt{(x-1)(x+1)}} \sim \dfrac{1}{3\sqrt{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

+ Đây là tích phân suy rộng loại 2, thấy $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow I_1$ hội tụ.

Xét tích phân $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^m+2)\sqrt{x^2-1}}$

Khi $x \to +\infty$ ta xét các trường hợp của m như sau:

Khi $m<0$, xét $\dfrac{1}{(x^m+2)\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{1}{2x} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow I_2$ phân kỳ $\Rightarrow I$ phân kỳ

Khi $m=0$, xét: $\dfrac{1}{(x^m+2)\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{1}{3x} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow I_2$ phân kỳ $\Rightarrow$ I phân kỳ

Khi $m>0$, xét: $\dfrac{1}{(x^m+2)\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{1}{x^{m+1}}$

Như vậy khi $m>0$ thì ta thấy $m+1>1 \Rightarrow I_2$ hội tụ (do đây là tích phân suy rộng loại 1).

Kết luận: + Do I_1 hội tụ nên để I hội tụ thì chỉ phụ thuộc vào I_2. Suy ra, I hội tụ khi $m>0$.

Tính tích phân khi $m=2$:

Khi $m=2$, tích phân đã cho trở thành: $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x^2+2)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

Đặt: $t = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} \Rightarrow t^2 = 1 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{1-t^2} \Rightarrow xdx = \dfrac{t}{(1-t^2)^2}dt$

Tích phân đã tương đương với:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2(x^2+2)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_0^1 \frac{\frac{t}{(1-t^2)^2}}{\frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{1-t^2}+2\right)t}dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1-t^2}}{\frac{t}{1-t^2}+2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{2}-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-t\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+t\right)}dt=\frac{1}{2\sqrt{6}}\int_0^1 \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+t+\frac{\sqrt{6}}{2}-t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-t\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+t\right)}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-t\right)}+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+t\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(-ln\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-t\right|+ln\left|\frac{\sqrt{6}}{2}+t\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2\sqrt{6}}ln\left(5+2\sqrt{6}\right)$$

Câu 34: Cho tích phân $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}$.Tìm m để tích phân I hội tụ và tính tích phân khi $m=1$

Giải:

- Do $x=2$ làm cho biểu thức trong dấu tích phân không xác định. Nên đây là tích phân bất định loại 1 và 2.

Tách ra thành 2 tích phân sau:

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}=\int_2^{3}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}=I_1+I_2$$

Xét tích phân I_1 sau: $I_1=\int_2^{3}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}=\int_2^{3}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)}}$

Khi $x\to 2^+$: $\frac{1}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt{3}\left(2^m-1\right)\left(x-2\right)^{\frac{1}{2}}}$

Nhận thấy với mọi $m\neq 0$ (lưu ý vì hàm số chỉ xác định khi $m\neq 0$). Thì $\sqrt{3}\left(2^m-1\right)$ luôn là hằng.

Do đó thấy $\alpha=\frac{1}{2}<1\Rightarrow I_1$ hội tụ (đây là tích phân suy rộng loại 2).

Xét tích phân $I_2=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}$

Khi $x\to+\infty$ ta xét các trường hợp của $x\to+\infty$ như sau:

Khi $m<0,$ ta xét hàm dương sau: $\frac{1}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}x}\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow I_2$ phân kỳ $\Rightarrow I$ phân kỳ

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Khi $m=0$: không xét vì làm hàm số không xác định $\Rightarrow I$ không có tích phân.

* Khi $m>0,$ ta có: $\dfrac{1}{\left(x^m-1\right)\sqrt{2x^2-5x+2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}x^{m+1}}$

Như vậy khi $m>0$ thì ta thấy $m+1>1 \Rightarrow I_2$ hội tụ.

Kết luận: + Do I_1 hội tụ nên để I hội tụ thì chỉ phụ thuộc vào I_1 Suy ra, I hội tụ khi m > 0.

Tính tích phân khi $m=1$: $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x^2-5x+2}}$

Đặt: $x-1=\dfrac{1}{t} \Rightarrow dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$

Tích phân đã tương đương với: $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x^2-5x+2}} = -\int_1^0 \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{2\left(\frac{1}{t}+1\right)^2-5\left(\frac{1}{t}+1\right)+2}}dt$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{1}{t}-1}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{2-t-t^2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Đặt $t+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}sinu \Rightarrow dt=\dfrac{3}{2}\cos udu$

Tích phân trở thành: $\displaystyle\int_{arcsin\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{2}cosudu}{\frac{3}{2}cosu}=\frac{\pi}{2}-arcsin\frac{1}{3}$

Câu 35: Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\left|4-x^2\right|}}dx$

Giải

Xét: $4-x^2=0 \rightarrow x=\pm 2$

x	1	2	$+\infty$
$\left\|4-x^2\right\|$	$4-x^2$	0	x^2-4

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Vậy, ta có: $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\left|4-x^2\right|}}dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx+\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=I_1+I_2$

Xét I_1:

Đặt $t=\frac{1}{x}\to x=\frac{1}{t}\to dx=-\frac{1}{t^2}dt$

Với $\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\t=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$I_1=\int_{1}^{2}\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=\int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{\sqrt{4t^2-1}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=\frac{1}{2}ln\left|2t+\sqrt{4t^2-1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}ln\left|2+\sqrt{3}\right|$$

Tương tự với $I_2=\frac{\pi}{4}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{1}{2}ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{4}$

Câu 36: Tìm tất cả số thực $\alpha>0$ để tích phân $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^\alpha-ln^\alpha(1+x)}{\left(x^3+arctanx^2\right)^\alpha}dx$ hội tụ

Giải:

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^\alpha-ln^\alpha(1+x)}{\left(x^3+arctanx^2\right)^\alpha}dx=\int_{0}^{2}\frac{x^\alpha-ln^\alpha(1+x)}{\left(x^3+arctanx^2\right)^\alpha}dx+\int_{2}^{+\infty}\frac{x^\alpha-ln^\alpha(1+x)}{\left(x^3+arctanx^2\right)^\alpha}dx=I_1+I_2$$

Đặt $f(x)=\frac{x^\alpha-ln^\alpha(1+x)}{\left(x^3+arctanx^2\right)^\alpha}$

Xét I_1:

Khi $x\to0^+: f(x)\sim\frac{x^\alpha-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^\alpha}{\left(x^3+x^2\right)^\alpha}=\frac{x^\alpha-x^\alpha\left(1-\frac{x}{2}\right)^\alpha}{\left(x^3+x^2\right)^\alpha}\sim\frac{x^\alpha-x^\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}x\right)}{x^{2\alpha}}\sim\frac{x^{\alpha+1}}{x^{2\alpha}}=\frac{1}{x^{\alpha-1}}$

Suy ra I_1 cùng bản chất với $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$

Vậy để I_1 hội tụ thì: $\alpha - 1 < 1 \rightarrow \alpha < 2 (1)$

Xét I_2 :

Khi $x \rightarrow +\infty : f(x) \sim \frac{x^{\alpha}}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha}}$

Suy ra I_2 cùng bản chất với $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$

Vậy để I_2 hội tụ thì: $2\alpha > 1 \rightarrow \alpha > \frac{1}{2} (2)$

Từ (1) và (2): Để I HỘI TỤ thì $\frac{1}{2} < \alpha < 2$

Câu 37: Tìm tất cả các số thực α để tích phân sau hội tụ $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{xarctanx^{\alpha}}} dx$. Tính giá trị của tích phân khi $\alpha = \frac{1}{2}$

Giải

$x = 0$ là điểm kì dị.

Khi $x \rightarrow 0^+$:

TH1: $\alpha < 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{1}{x^{-\alpha}} = +\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)\sqrt{x.arctanx^{\alpha}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x.\frac{\pi}{2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Suy ra I cùng bản chất với $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{x^2}}$

Dễ thấy $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{x^2}}$ hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ (1)

TH2: $\alpha \geq 0 : \frac{1}{(x+1)\sqrt{x.arctanx^{\alpha}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x.x^{\alpha}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$

Suy ra I cùng bản chất với $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$

Vậy để I hội tụ $\frac{1+\alpha}{2} < 1 \Rightarrow \alpha < 1 (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\alpha < 1$

Khi $\alpha = \frac{1}{2}$, tích phân trở thành: $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x.arctan\sqrt{x}}} dx$

Đặt $t = arctan\sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{\sqrt{t}} = 4\sqrt{t}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\pi}$

Câu 38: Xét tính hội tụ của tích phân: $\int_0^{+\infty} \frac{x.sin(ax)}{k^2+x^2} dx \left(k \neq 0, a \neq 0\right)$

Giải

Xét hàm $g(x) = \frac{x}{k^2+x^2}$, ta có: $g'(x) = \frac{k^2-x^2}{\left(k^2+x^2\right)^2}$. Như vậy $x \geq |k|$ thì $g'(x) < 0$ khi đó hàm

$g(x)$ đơn điệu giảm và $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{k^2+x^2} = 0$

Mặt khác, với mọi $A > a: \left|\int_0^A \sin axdx\right| = \frac{1-cosAa}{|a|} \leq \frac{2}{|a|} = M$

Theo dấu hiệu tích phân Dirichle tích phân đã cho hội tụ

Câu 39: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_a^{\infty} \frac{sinx}{x} dx$ với $a > 0$

Trước hết theo định lý Dirichlet tích phân $\int_a^{\infty} \frac{sinx}{x} dx$ hội tụ. Tuy nhiên, tích phân $\int_a^{\infty} \frac{|sinx|}{x} dx$ không hội tụ.

Do $\frac{|sinx|}{x} \geq \frac{sin^2 x}{x} \geq 0, \forall x \in [a, +\infty)$

Mặt khác: $\frac{sin^2 x}{x} = \frac{1-cos2x}{2x}$ nên $\int_a^{\infty} \frac{sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{cos2x}{x} dx$

Tích phân thứ nhất phân kì, tích phân thứ hai hội tụ. Vậy tích phân $\int_a^\infty \frac{sin^2x}{x}dx$ phân kỳ,

$\Rightarrow \int_a^\infty \frac{|sinx|}{x}dx$ phân kỳ

Câu 40: Tính tích phân suy rộng $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx$

Đặt: $I(\alpha) = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2+\alpha}dx$

Khi đó, ta có: $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2+\alpha}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\int_0^\infty e^{-(x^2+\alpha)t}dtdx = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_0^\infty e^{-(1+t)x^2}dtdx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1+t}}dt$

Ta thấy y: $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dt = I'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{t}{2}}dt$

Nhưng

$$\int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{t}{2}}dt = \int_0^\infty \sqrt{1+t}e^{-\frac{t}{2}}dt - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{t}{2}}dt = \left(-2\sqrt{1+t}e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{t}{2}}dt - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{t}{2}}dt = 2$$

Vậy $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx = \sqrt{\pi}$

Câu 41: Tìm α để tích phân sau hội tụ: $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)\left(\sqrt[5]{1+x^4}-cosx\right)}$

Giải:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)\left(\sqrt[5]{1+x^4}-cosx\right)} = \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)\left(\sqrt[5]{1+x^4}-cosx\right)} + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)\left(\sqrt[5]{1+x^4}-cosx\right)} = I_1 + I_2$$

Xét $I_1, x \to 0^+ : f(x) \sim \frac{2}{x^{2-\alpha}}$

$\Rightarrow I_1$ cùng bản chất với $\int_0^1 \frac{2}{x^{2-\alpha}}dx$

Vậy I_1 hội tụ $\Rightarrow 2-\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha>1$

Xét $I_2, x\to+\infty: f(x)\sim \dfrac{2}{x^{\frac{14}{5}-\alpha}}$

$\Rightarrow I_2$ cùng bản chất với $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{2}{x^{\frac{14}{5}-\alpha}}dx$

Vậy I_2 hội tụ $\Rightarrow 2-\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha>1$

Câu 42: Tìm α để tích phân sau hội tụ: $I=\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^{\alpha+1}\right)}dx$

Giải:

$$I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^{\alpha+1}\right)}dx=\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^{\alpha+1}\right)}dx+\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^{\alpha+1}\right)}dx=I_1+I_2$$

Khi $\alpha>-1$

Xét $I_1, x\to 0^+: f(x)\sim \dfrac{1}{x^\alpha}$

$\Rightarrow I_1$ cùng bản chất với $\int\limits_0^{1} \dfrac{1}{x^\alpha}dx$

Vậy I_1 hội tụ $\Leftrightarrow \alpha>1$

Xét $I_2, x\to+\infty: f(x)\sim \dfrac{1}{x^{2\alpha}}$

$\Rightarrow I_2$ cùng bản chất với $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{2\alpha}}dx$

Vậy I_2 hội tụ $\Rightarrow 2\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha>\dfrac{1}{2}$

Khi $\alpha<-1$ làm tương tự

Câu 43: Xét sự hội tụ của tích phân sau: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{sinxcosx}}$

Giải:

$f(x) \geq 0,$ kỳ dị tại $\frac{\pi}{2}$ và $0 \Rightarrow$ tách cận

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{sinxcosx}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{sinxcosx}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{sinxcosx}} = I_1 + I_2$$

Xét $I_1 : f(x)$ kỳ dị tại 0

$x \to 0^+ : f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Vì $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ hội tụ nên I_1 hội tụ

Xét $I_2 : f(x)$ kỳ dị tại $\frac{\pi}{2}$

$$x \to \frac{\pi}{2}^- : f(x) = \frac{1}{\sqrt{sinx}.sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$$

Vì $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2}}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ

Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ

Câu 44: Tính tích phân suy rộng: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}}$

Giải:

$x = 1$ là điểm kỳ dị $\Rightarrow$ Tích phân suy rộng kết hợp. Ta tách thành 2 tích phân:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}}$$

Xét $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{k \to 1^+} \int_k^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{k \to 1^+} \int_k^2 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}}}$

Đặt: $t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{-dx}{(x+1)^2}$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Đổi cận:

x	1	2
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Ta có:

$$I_1 = \lim_{k\to\frac{1}{2}^-}\int_{\frac{1}{3}}^{k}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-3t+1}} = \lim_{k\to\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left|t-\frac{3}{4}+\sqrt{t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{k} = \lim_{k\to\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left|k-\frac{3}{4}+\sqrt{k^2-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}ln2+\frac{\sqrt{2}}{2}ln12$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x}} = \lim_{k\to+\infty}\int_2^{k}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x}} = \lim_{k\to+\infty}\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{1-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}}$$

Giải tương tự: $I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}ln\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy $I = I_1 + I_2 = -\sqrt{2}ln2-\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 45: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_0^{+\infty}\frac{2x-1}{(3+x^\alpha)\sqrt[4]{x^5+1}}dx$

Giải:

Khi $x\to+\infty$ ta so sánh: $2x-1\sim 2x; (3+x^\alpha)\sqrt[4]{x^5+1}\sim x^\alpha x^{\frac{5}{4}} = x^{\alpha+\frac{1}{4}}$

Nên bắt buộc phải chia tp ban đầu thành tổng 2 tp như sau:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{2x-1}{(3+x^\alpha)\sqrt[4]{x^5+1}}dx = \int_0^{1}\frac{2x-1}{(3+x^\alpha)\sqrt[4]{x^5+1}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{2x-1}{(3+x^\alpha)\sqrt[4]{x^5+1}}dx = I_1 + I_2$$

I_1 là tp của hàm liên tục trong đoạn lấy tp nên là tp xác định (tp HT)

Tp I_2 là tp HT khi và chỉ khi $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{4}}}dx$ HT (theo so sánh trên)

Do vậy, tp đã cho HT khi và chỉ khi $\alpha > \frac{3}{4}$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $J=\int_1^{+\infty}\frac{x^2 arctan\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}+4}dx$

Câu 2: Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I=\int_0^1\frac{\sqrt{1+x^\alpha}-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{sin\sqrt{x}}dx$

Câu 3: Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I=\int_1^{+\infty}x^\alpha ln\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}\right)dx$

Câu 4: Cho tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{arctanx}{\left(1+x^2\right)^\alpha}dx$. Tìm α để tích phân hội tụ và tính tích phân khi $\alpha=\frac{3}{2}$

Câu 5: Cho tích phân $I=\int_0^1\frac{arcsin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x^\alpha\left(1-x\right)}}$. Tìm α để tích phân hội tụ và tính tích phân khi $\alpha=1$

Câu 6: Tìm α để tích phân sau hội tụ : $\int_0^1\frac{\left(1-x\right)^{\frac{5}{3}}}{arctan^\alpha\left(x-x^2\right)}$

Câu 7: Xét tích phân suy rộng $\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^\alpha\right)}$, α là tham số. Tìm giá trị α nguyên dương bé nhất để tích phân suy rộng này hội tụ. Với α tìm được, tính tích phân này.

Câu 9: Xét tích phân suy rộng $\int_1^\infty\frac{1}{x^m.\sqrt[3]{1+x^2}}dx$. Tìm m điều kiện về m để tích phân suy rộng này hội tụ. Tính giá trị tích phân này khi $m=\frac{7}{3}$

Câu 10: Cho $f\left(x\right)=e^{sin^2x}, g\left(x\right)=\int_{3x}^0 ln\left(1+sint\right)dt$. Tìm b để $\lim_{x\to0^-}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ nhận giá trị hữu hạn. Với b vừa tìm được, hãy tính giá trị giới hạn trên

Câu 11: Khảo sát sự hội tụ của $I=\int_0^\pi\frac{sinhx}{e^{x^2}-cosx}dx$

Lời giải thực hiện: HOÀNG HUY QUÂN – Lớp: Kỹ thuật nhiệt – K64 và NGUYỄN THỊ MAI HƯƠNG – Lớp: TĐH 09 – K64

Câu 12: Tìm α để tích phân sau hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + sin\left(x^2+1\right)}{x^\alpha + \left(lnx+1\right)^\alpha}$

Câu 13: Tìm α để tích phân sau hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{\left(3+x^\alpha\right)\sqrt[4]{x^5+1}}$

Câu 14: Tìm α để tích phân sau hội tụ $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + arcsin\frac{1}{x^2}}{1+x^\alpha\sqrt[3]{x}}dx$