Đáp án bài tập chương 2

1 TÍNH TOÁN

Bài 1: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2.

a. Tính $F = A^2 - 3A$

b. Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2 + 5E).X = B^T.(3A - 3A^2)$

Lời giải

a. Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F = A^2 - 3A = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

b. Ta có $A^2 + 5E = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$; $3A - 3A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -18 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Do vậy $(A^2 + 5E).X = B^T.(3A - 3A^2)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 21 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

Bài 2: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$

Lời giải

Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -9 & 13 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow f(A) = 3. \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -9 & 13 \end{bmatrix} - 2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} + 5. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 24 \\ -13 & 34 & 13 \\ 0 & 7 & 38 \end{bmatrix}$$

Bài 3: Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lời giải

a. Gọi $X = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán với ma trận A

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & d & g \\ 2b & 2e & 2h \\ 3c & 3f & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2d & 3g \\ b & 2e & 3h \\ c & 2f & 3i \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2d \\ g = 3g \\ 2h = 3h \\ 2b = b \\ 3c = c \\ 3f = 2f \end{cases} \quad \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

b. Gọi $X = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán với ma trận B

Tương tự như phần a, thông qua cân bằng hệ số ta thu được: $\begin{cases} c = f = 0 \\ g = i - a + 2d \\ h = 2e - b + 2i \end{cases}$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & d & i - a + 2d \\ b & e & 2e - b + 2i \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

Bài 4:

a. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tính A^{10}

b. Cho $A = \begin{bmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{bmatrix}$. Tính A^n

c. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tính A^n

Lời giải

a. Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & 1023 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$$

b. Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2a & -sin2a \\ sin2a & cos2a \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} cos2a & -sin2a \\ sin2a & cos2a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos3a & -sin3a \\ sin3a & cos3a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} cosna & -sinna \\ sinna & cosna \end{bmatrix}$$

c. Tương tự phần a. và b. ta cũng chứng minh được :$A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 3^{n-1}.n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

Bài 5: Tìm X thỏa mãn: $X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2$

Lời giải

$$X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2$$

$$\Rightarrow X.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Bài 6: Tìm ma trận X thỏa mãn:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .X - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^2$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

c. $\frac{1}{2}.X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Lời giải

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .X - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^2$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & \frac{9}{2} \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2X = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

c. $\frac{1}{2}.X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 19 & 2 \\ -2 & 17 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 38 & 4 \\ -4 & 34 & -2 \end{bmatrix}$

Bài 7: Cho $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận X thỏa mãn: $A^T.X^T = B + X^T$

Lời giải

Nhận thấy:

$A^T.X^T = B + X^T \Leftrightarrow (A^T - E).X^T = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .X^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Bài 8:

a. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & -2xb_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & -2xb_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & -2xb_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 2.\begin{vmatrix} a_1+b_1x & -xb_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & -xb_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & -xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} a_1 & -xb_1 & c_1 \\ a_2 & -xb_2 & c_2 \\ a_3 & -xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (ĐPCM)

b. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+ab+bc+ca \\ 1 & b & b^2+ab+bc+ca \\ 1 & c & c^2+ab+bc+ca \end{vmatrix} (c_3 \to a_3 + (a+b+c).c_2)$

$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} (c_{33} - (ab+bc+ca).c_1)$ (ĐPCM)

2 Hạng

Bài 1:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 - 4h_1]{\substack{h_2 \to h_2 - 2h_1 \\ h_3 \to h_3 - 5h_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & -12 \\ 0 & -7 & -15 & 6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_2]{h_3 \to h_3 - 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$

Bài 2:

a)$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 3 & \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 17 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 25 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}$

Nếu $\lambda \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$
Nếu $\lambda = 0 \Rightarrow r(A) = 2$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 + h_1]{\substack{h_2 \to h_2 - h_1 \\ h_3 \to h_3 - h_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

Nếu $\lambda = 1 \Rightarrow r(B) = 3$
Nếu $\lambda \neq 1 (B) = 4$

c)

$C = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow r(C) = 4 \, \forall a$

Bài 3:

a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \neq 0; \quad C = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = -3 \neq 0; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -21 & -12 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} C^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 2 & -21 & 11 \\ 1 & -12 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 4:

a)

$$A = \begin{pmatrix} m & -3 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= m \begin{vmatrix} 4 & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m(8-m) - (-3)(4-3m) + (-10) \\ &= -m^2 - m + 2 \end{aligned}$$

Vậy A khả nghịch $\Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2 - m + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

b)

$$B = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det B &= m \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & m \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= m(m^2-4) - 2(2m-4) + 2(4-2m) \\ &= m^3 - 12m + 16 \end{aligned}$$

Vậy B khả nghịch $\Leftrightarrow \quad \det B \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^3 - 12m + 16 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 2 \end{cases}$

c)

$$C = \begin{pmatrix} m+1 & -1 & m \\ 3 & m+1 & 3 \\ m-1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det C &= (m-1)\begin{vmatrix} -1 & m \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ 3 & m+1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1)(-3-m^2-m) + (m-1)(m^2+2m+4) \\ &= m^2 - 1 \end{aligned}$$

Vậy C khả nghịch $\quad \Leftrightarrow \quad \det C \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Bài 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-m \\ m & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - mh_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 2-m & 2-m \\ 0 & m-m^2-3 & -3-m \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-m^2-3 & -3-m \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix}$$

- $m = 2 \quad \to \quad r(A) = 2$
- $m \neq 2$

$$A \xrightarrow{h_3 \to (m-m^2-3)h_3 - (2-m)h_2} \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-m^2-3 & -3-m \\ 0 & 0 & m^3 - 4m^2 + 4m \end{pmatrix}$$

  - $m = 0 \quad \to \quad r(A) = 2$
  - $m \neq 0 \quad \to \quad r(A) = 3$

Vậy $r(A)_{max} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

Bài 6:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & m+4 & -1 \\ 3 & -3 & m+6 & m-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & m+4 \\ 3 & -3 & m-3 & m+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & m & m \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - mh_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & m-m^2 \end{pmatrix}$$

- $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \quad \to \quad r(A) = 1$

- $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad r(A) = 3$

Vậy $r(A)_{min} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{0; 1\}$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_4} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ m & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[h_1 \to h_4 - h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & m-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to 5h_4 - 2h_2]{h_3 \to 5h_3 - h_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5m-9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4 \to 18h_4 - (5m-9)h_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(B) = 3 \quad \forall m$

3 Định thức

Bài 1:

a)

$$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= -6 \cdot -71 - 1 \cdot 50 + 5 \cdot 59$$
$$= 671$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 \\ -5 & 9 & -12 & 7 \\ 12 & -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 9 & -12 & 7 \\ -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & -12 & 7 \\ 12 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -5 & 9 & 7 \\ 12 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -5 & 9 & -12 \\ 12 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-40) - 1 \cdot (-180) + (-4) \cdot 350 - 3 \cdot (-340)$$
$$= -240$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & b & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & b & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix}$$
$$= -b - 8 - a(-4b - 12) - 2(-2b - 11)$$
$$= 4ab + 12a + 3b + 14$$

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2x^2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2x^2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2x^2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 9-x^2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2x^2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2x^4 + 14x^2 - 24 - (3x^2 - 12) + 2(4x^4 - 19x^2 + 12)$$
$$= 6x^4 - 27x^2 + 12$$

Bài 2:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -5x^2 + 5x + 30 = -5(x+2)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2x^2 + 5x + 3 = (x+1)(2x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

c) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 2 & 2x-1 & x+1 \\ 3 & -1 & x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 + x^2 - 7x + 4 = (x-1)(2x^2 + 3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4} \\ x = \dfrac{\sqrt{41}}{4} - \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Bài 3:

a) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \overset{c_3=c_3-c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & -2c_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & -2c_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & -2c_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1=c_1+\frac{c_3}{2} \\ c_2=c_2+\frac{c_1}{2}}}{=} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & -2c_1 \\ b_2 & a_2 & -2c_2 \\ b_3 & a_3 & -2c_3 \end{vmatrix}$

$\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{h_2=h_2-h_1 \\ h_3=h_3-h_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \overset{c_3=c_3-c_2}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

c)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$$

Bài 4:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 4-a & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= -1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 4-a & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \\ &= -1(a^2 - 4a + 6) + 2(-a-2) \\ &= -a^2 + 2a - 10 \quad \le -9 \end{aligned}$$

Giả sử tồn tại ma trận vuông cấp 3 D thỏa mãn $D^2 = A$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \det D^2 = \det A \\ &\rightarrow \quad (\det D)^2 = \det A \le -9 \quad \text{(vô lý)} \\ &\rightarrow \quad \text{Giả sử sai và ta có điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

Bài 5: Ta có

$$\begin{aligned} &A^2 + 2020E = 0 \\ \Leftrightarrow\ & A^2 = -2020E \\ \Rightarrow\ & \det A^2 = (\det A)^2 = (-2020)^n \quad \Rightarrow \text{n là số chẵn và } \det A \neq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đồng thời $A^2 + 2020E = 0 \Leftrightarrow \left(A + \sqrt{2020}E\right)^2 = 2\sqrt{2020}AE$

$\Rightarrow \quad \det\left(A + \sqrt{2020}E\right)^2 = (2\sqrt{2020})^n \det A \ge 0 \qquad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\det A > 0$

Bài 6:

$$
\begin{aligned}
&\det(A^2+B^2)\\
=&\det(A^2-i^2B^2)\\
=&\det(A-iB)\det(A+iB) \qquad \text{do } AB=BA\\
=&\det(\overline{A+iB})\det(A+iB)\\
=&\left|\det(A+iB)\right|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

4 Hệ phương trình

Bài 1:

$$
\begin{cases}
(m+5)x+2y+(2m+1)z=0\\
mx+(m-1)y+4z=0\\
(m+5)x+(m+2)y+5z=0
\end{cases}
\qquad
A=\begin{pmatrix} m+5 & 2 & 2m+1\\ m & m-1 & 4\\ m+5 & m+2 & 5\end{pmatrix}
$$

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0$

$$
\begin{aligned}
\det A =&(m+5)\begin{vmatrix} m-1 & 4\\ m+2 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} m & 4\\ m+5 & 5\end{vmatrix} + (2m+1)\begin{vmatrix} m & m-1\\ m+5 & m+2\end{vmatrix}\\
=&-3m^2-2m-20 < 0 \quad \forall m
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow A \neq 0 \quad \forall m \rightarrow$ Hệ luôn có hệ tầm thường $\rightarrow m \in \emptyset$

Bài 2:

$$
\begin{cases}
mx_1+2x_2-x_3=3\\
x_1+mx_2+2x_3=4\\
2x_1+3x_2+x_3=m
\end{cases}
$$

Xét ma trận bổ sung

$$
\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 3\\ 1 & m & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1 & m\end{array}\right]
\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4\\ m & 2 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1 & m\end{array}\right]
\xrightarrow[h_3\to h_3-2h_1]{h_2\to h_2-mh_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4\\ 0 & 2-m^2 & -1-2m & 3-4m\\ 0 & 3-2m & -3 & m-8\end{array}\right]
$$

- $3-2m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2} \rightarrow r(A)=r(\bar{A})=3 \rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất
- $3-2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{3}{2}$

$$
\bar{A}\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4\\ 0 & 3-2m & -3 & m-8\\ 0 & 2-m^2 & -1-2m & 3-4m\end{array}\right]
$$

$$\xrightarrow{h_3\to(3-2m)h_3-(2-m^2)h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & m & 2 & 4\\ 0 & 3-2m & -3 & m-8\\ 0 & 0 & (m-3)(m-1) & m^3-20m-25\end{array}\right]$$

- $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=1\end{array}\right. \to r(A)=2<r(\bar{A})=3\to$ hệ vô nghiệm
- $m\notin\{1,3\}\to r(A)=r(\bar{A})=3\to$ hệ có nghiệm duy nhất

Vậy $m\notin\{1,3\}$

Bài 3:

$$\begin{cases}x_1-mx_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2+x_3=2\\ 4x_1-x_2+5x_3=2m\end{cases}$$

Xét ma trận bổ sung $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -m & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 5 & 2m\end{array}\right]\xrightarrow[h3\to h_3-4h_1]{h_2\to h_2-2h_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -m & 2 & 0\\ 0 & 2m+1 & -3 & 2\\ 0 & 4m-1 & -3 & 2m\end{array}\right]$

- $2m+1=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}\to r(A)=r(\bar{A})=3$
  $\Longrightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.
- $2m+1\neq 0\Leftrightarrow 0\Leftrightarrow m\neq-\dfrac{1}{2}$

  $\bar{A}\xrightarrow{h_3\to(2m+1)h_3-(4m-1)h_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -m & 2 & 0\\ 0 & 2m+1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 6(m-1) & 4m^2-6m+2\end{array}\right]$

  - $m=1\to r(A)=r(\bar{A})=2<3\to$ Hệ có vô số nghiệm
  - $m\neq 1\to r(A)=r(\bar{A})=3\to$ Hệ có nghiệm duy nhất

Vậy $m=1$

Bài 4:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3+2x_4=2\\ 3x_1-2x_2+7x_3+2x_4=1\\ 5x_1-3x_2+7x_3+6x_4=5\end{cases}$$

Xét ma trận bổ xung

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 4 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 7 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 7 & 6 & 5\end{array}\right]\xrightarrow[h_3\to 2h_3-5h_2]{h_2\to 2h_2-3h_1}\left[\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 4 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -4\\ 0 & -1 & -6 & 2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{h_3\to h_3-h_2}\left[\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 4 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -8 & 4 & 4\end{array}\right]$$

Đặt $x_3 = t \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_1 = 1 - 5 \end{cases}$

Vậy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 5t, 2 - 2t, t, 1 + 2t)$

Bài 5:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Xét ma trận bổ xung

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & a+1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to 2h_2 - 3h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2-3a & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2-3a & 3 \\ 0 & 0 & 2a-1 & b-5 \end{array}\right]$$

- $2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2} \to r(A) = r(\bar{A}) = 3 \to$ hệ có nghiệm duy nhất
- $2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
  - $b - 5 = 0 \leftrightarrow a = 5 \to r(A) = r(\bar{A}) = 2 \to$ hệ có vô số nghiệm
  - $b - 5 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \to r(A) < r(\bar{A}) \to$ hệ vô nghiệm

Bài 6:

Ta có: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2-m & m+1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & m+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_1 \to h_2 - h_1]{h_3 \to h_3 - 3h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2-m & m+1 \\ 0 & 0 & m & -m \\ 0 & -5 & 6+3m & -2m-2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2-m & m+1 \\ 0 & -5 & 6+3m & -2m-2 \\ 0 & 0 & m & -m \end{bmatrix}$

Để $r(A) = 2 \Rightarrow m = 0$ Vậy $m = 0$

Bài 7:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -4 \\ 3x + 7y + 10z + 11t = -11 \\ x + 2y + 4z + 2t = -3 \\ x + 2y + 2z + 7t = -6 \end{cases}$

Ma trận bổ xung của phương trình là

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 7 & 10 & 11 & -11 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - h_1 \\ h_4 \to h_4 - h_1}]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_4 \to h_4 + h_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\rightarrow r(\bar{A}) = r(A) = 4$ Do đó hệ có nghiệm duy nhất

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t & = -4 \\ y + z - t & = 1 \\ z + -2t & = 1 \\ t & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình là $(x, y, z, t) = (1, 1, -1, -1)$

b) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 44z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$

Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 11 & 49 \\ 3 & 6 & -4 & 13 & 49 \\ 1 & 2 & -2 & 9 & 33 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - 3h_1 \\ h_4 \to h_4 - h_1}]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{h_4 \to h_4 - h_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$\rightarrow r(\bar{A}) = r(A) = 4$ Do đó hệ có nghiệm duy nhất

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 3t & = 12 \\ y + z + 5t & = 25 \\ -z + 4t & = 13 \\ 2t & = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình là $(x, y, z, t) = (-1, 2, 3, 4)$

Bài 8:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{h_2 \leftrightarrow h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{h_3 \to h_3 - 3h_1 \\ h_4 \to h_4 - h_1}}{\overset{h_2 \to h_2 - 2h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{h_4 \to h_4 - h_2}{\overset{h_3 \to h_3 - 2h_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Do $det(A) = 0$ nên phương pháp Cramer không áp dụng cho hệ phương trình này

Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{\substack{h_2 \leftrightarrow h_1 \\ h_2 \to h_2 - 2h_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_2]{h_3 \to h_3 - 2h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\rightarrow r(\bar{A}) = 2 = r(A) \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào một tham số

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 5t \\ x_2 = 3t + 1 \\ x_3 = t \end{cases}$

Bài 9:

$$\begin{cases} (m+1)x_1 + (m+3)x_2 + (m-2)x_3 = 5 \\ (m+2)x_1 + (m-1)x_2 - (m-4)x_3 = 2 \\ (m-1)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = -3 \end{cases}$$

Ta có $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m+1 & m+3 & m-2 & 5 \\ m+2 & m-1 & m-4 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} m+1 & m+3 & m-2 & 5 \\ 1 & -4 & -2m+6 & -3 \\ m-1 & m+2 & m+1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} m+1 & m+3 & m-2 & 5 \\ 1 & -4 & -2m+6 & -3 \\ m-2 & m+6 & 3m-5 & 0 \end{array}\right]$

Ta có để hệ đã cho có vô số nghiệm thì $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Rightarrow r(A) = r(\bar{A}) = 2$

Để $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ thì

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ m + 6 = 0 \\ 3m - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \\ m = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tìm được giá trị nào của m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.