Họ và tên: Phạm Thành Dũng.
MSSV: 20204644.

10,0 Mười điểm

Bài tập tuần 15.

Cho $x^1 = (2,2)^T$ và $x^2 = (1,0)^T$. Xét bài toán

$$\min h(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 + 2022 \qquad (P)$$
$$\text{v.đ.k } x_1 + x_2 \le 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a) kiểm tra xem có điểm nào là nghiệm tối ưu của bài toán (P) bằng thuật toán Lagrange và một cách khác.

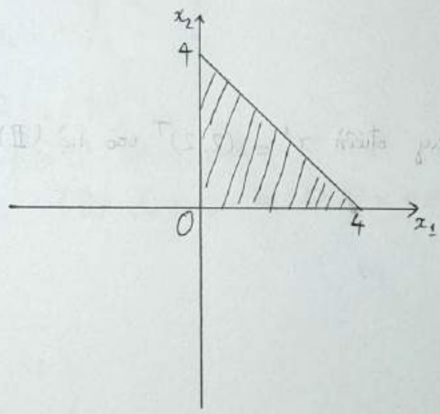
b) Nếu $x^* = x^i$, $i \in \{1,2\}$, không là nghiệm tối ưu của bài toán (P) thì hãy tìm một hướng giảm chấp nhận được của bài toán (P) tại điểm x^*

Bài làm

Dễ thấy tập nghiệm của bài toán (P) trùng với tập nghiệm của bài toán $(\overline{P})$ sau đây:

$$\min f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \qquad (\overline{P})$$
$$\text{v.đ.k } g_1(x) = x_1 + x_2 - 4 \le 0$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0$$

Ta xét bài toán $\overline{P}$,



a) Dễ thấy tập chấp nhận được $X \neq \emptyset$ là tập lồi đóng (xem hình vẽ)

Cách 1:

$n = 2$, $m = 3$

$f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2$

$g_1(x) = x_1 + x_2 - 4$

$g_2(x) = -x_1$

$g_3(x) = -x_2$

Vì $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ đều là hàm afin nên điều kiện chính quy thỏa mãn tại mọi điểm thuộc tập chấp nhận được X. đ

Ta có:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-3) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vì $\det(2) = 2 > 0$; $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$

nên $\nabla^2 f(x)$ là ma trận xác định dương trên $\mathbb{R}^2$ đ

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ đ (D_1)

Vì $f(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ là hàm lồi nên bài toán $(\bar{P})$ là bài toán quy hoạch lồi thỏa mãn điều kiện chính quy. Do đó

$x^* \in \text{Argmin}(\bar{P}) \Leftrightarrow x^*$ là điểm KKT (I) đ

*) Lập hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x)$$
$$= (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 + \lambda_1(x_1+x_2-4) + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3.(-x_2)$$

Ta có hệ KKT:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1} = 0 \\ \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0 \ ; \ i = 1,2,3 \\ g_i(x) \leq 0 \ ; \ i = 1,2,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1-3) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2(x_2-3) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_1(x_1+x_2-4) = 0 \\ \lambda_2(-x_1) = 0 \\ \lambda_3(-x_2) = 0 \\ x_1+x_2-4 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (II)$$

đ

*) Thay điểm $x^1 = (2,2)^T$ vào hệ (II) ta có:

$$\begin{cases} -2+\lambda_1-\lambda_2 = 0 & (1) \\ -2+\lambda_1-\lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 & (3) \\ \lambda_1 . 0 = 0 & (4) \\ \lambda_2 . -2 = 0 & (5) \\ \lambda_3 . -2 = 0 & (6) \\ 0 \leq 0 & (7) \\ -2 \leq 0 & (8) \\ -2 \leq 0 & (9) \end{cases}$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Thay $\lambda_2 = 0$ vào (1) $\Rightarrow \lambda_1 = 2$

Với $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ta thấy thỏa mãn (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9).

~~$\Rightarrow x^1$ là điểm~~

$\Rightarrow x^1 = (2,2)^T$ là điểm KKT. Theo (I) $\Rightarrow x^1 \in \text{Argmin}(\bar{P})$

đ

*) Thay điểm $x^2 = (1,0)^T$ vào hệ $(\overline{II})$ ta có:
$$\begin{cases} -4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (\overline{1}) \\ -6 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (\overline{2}) \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 & (\overline{3}) \\ \lambda_1 . (-3) = 0 & (\overline{4}) \\ \lambda_2 . -1 = 0 & (\overline{5}) \\ \lambda_3 . 0 = 0 & (\overline{6}) \\ -3 \leq 0 & (\overline{7}) \\ -1 \leq 0 & (\overline{8}) \\ 0 \leq 0 & (\overline{9}) \end{cases}$$

Từ $(\overline{4})$ và $(\overline{5}) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Thay $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vào $(\overline{1}) \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow$ vô lý đ

$\Rightarrow x^2 = (1,0)^T$ không là điểm KKT. Theo $(I) \Rightarrow x^2 \notin \text{Argmin } (\overline{P})$ đ

Cách 2:

Từ (D_1) ta đã có $f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$

Do đó $(\overline{P})$ là bài toán quy hoạch lồi. Vì vậy ta có:
$$x^* \in \text{argmin } (\overline{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \\ x^* \in X \end{cases} \quad (D_2)$$
đ

*) Với $x^1 = (2,2)^T \in X$, ta có:

$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $x - x^1 = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle \nabla f(x^1), x - x^1 \rangle = -2(x_1 - 2) + -2(x_2 - 2)$
$= -2(x_1 + x_2 - 4) \geq 0 \quad \forall x \in X$
(Do $x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \ \forall x \in X$) đ

Theo $(D_2) \Rightarrow x^1 \in \text{Argmin } (\overline{P})$ đ

*) Với $x^2 = (1,0)^T \in X$, ta có:

$\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$; $x - x^2 = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle \nabla f(x^2), x - x^2 \rangle = -4(x_1 - 1) - 6x_2$

Chọn $x^* = (2,2)^T \in X$, ta có $\langle \nabla f(x^2), x^* - x^2 \rangle$
$= -4.(2-1) - 6.2$
$= -16 < 0$ đ

Theo $(D_2) \Rightarrow x^2 \notin \text{Argmin } (\overline{P})$ đ

Kết luận: $\begin{cases} x^1 \in \text{Argmin } (\overline{P}) \\ x^2 \notin \text{Argmin } (\overline{P}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 \in \text{Argmin } (P) \\ x^2 \notin \text{Argmin } (P) \end{cases}$ đ

b) Theo phần a), ta có x^2 không phải là nghiệm tối ưu của bài toán $(\bar{P})$

Ta đi tìm hướng giảm chấp nhận được của bài toán $(\bar{P})$ tại x^2.

Chọn $x^0 = (2,2)^T$

Vì tập chấp nhận được X là tập lồi; $x^0, x^2 \in X$ nên $d = x^0 - x^2$ là hướng chấp nhận được của tập chấp nhận được X tại điểm x^2. đ đ đ (K_1)

$$d = x^0 - x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$$ đ

Lại có: $\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \nabla f(x^2), d \rangle = -4 \times 1 + -6 \times 2 = -16 < 0$

Do đó d là hướng giảm của hàm mục tiêu $f(x)$ tại điểm x^2 đ (K_2).

Kết hợp (K_1) và (K_2) ta có:

$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ là hướng giảm chấp nhận được của bài toán $(\bar{P})$ tại điểm x^2

$\Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ là hướng giảm chấp nhận được của bài toán (P) tại điểm x^2.

đ