GIẢI TÍCH 2
BÀI 7
TÍCH PHÂN HAI LỚP (TT)

3.7. Diện tích mặt cong

a) Mặt cong tham số trơn.

• **Mặt cong tham số:** U là miền (mở và liên thông) trong $\mathbb{R}^2$, mặt cong tham số Σ:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U.$$

• **Mặt trơn:** Mặt cong Σ trơn $\Leftrightarrow$:

1°/ Các hàm x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U

2°/ Hai vectơ $\overrightarrow{M}'_u = \left(x'_u, y'_u, z'_u\right)$, $\overrightarrow{M}'_v = \left(x'_v, y'_v, z'_v\right)$ là độc lập tuyến tính, $\forall\ (u, v) \in U$

• **Mặt đơn.** Mặt cong Σ là đơn $\Leftrightarrow$ ánh xạ $(u,v) \mapsto M(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ là đơn ánh

b) Mặt trơn với biểu diễn tham số

Cho mặt cong với tham số Σ: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^2$

Pháp tuyến của mặt Σ tại điểm $M(u, v)$ là $\overrightarrow{N}(u,v) = (A, B, C)$, ở đó

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

Hay

$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

Hàm số sau liên tục

$$(u,v) \mapsto \left\| \overrightarrow{N}(u,v) \right\| \equiv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

c) Diện tích mặt cong. Cho mặt cong tham số Σ đơn, trơn $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, U là miền trong $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa. Số thực không âm $\iint\limits_D \left\|\vec{N}(u,v)\right\| du\,dv$ gọi là diện tích của mặt Σ, kí hiệu là $\mu(\Sigma)$ hoặc $|\Sigma|$.

• Ta gọi $dS = \left\|\vec{N}(u,v)\right\| du\,dv$ là yếu tố diện tích của mặt Σ.

d) Diện tích mặt. $z = f(x, y)$. Cho f có các đạo hàm riêng liên tục trên U, tập compact $D \subset U$, khi đó ta có

$$\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy,$$

ở đó mặt cong S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Nhận xét.

+) Khi mặt cong S suy biến thành đường cong phẳng L, tức là $z = f(x)$ khả vi liên tục trên $[a;b]$, khi đó ta nhận lại công thức tính độ dài đường cong phẳng

$$\mu(L) = \int_a^b \sqrt{1 + f_x'^2}\,dx.$$

+) Khi mặt cong S tròn xoay được tạo thành khi quay đường cong phẳng L : $y = f(x) > 0, a \le x \le b$, khả vi liên tục trên $[a;b]$, quanh trục ox, khi đó ta nhận lại công thức tính diện tích mặt cong tròn xoay.

$$|S| = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Ví dụ 1. Tính diện tích phần của mặt đinh ốc
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Giải

+) $\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & h \end{vmatrix}$

$$=(h\sin\theta,-h\cos\theta,r)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{N}\right\|=\sqrt{h^2+r^2}$$

$D: 0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi.$

+) $\Rightarrow |S|=\iint\limits_D\left\|\overrightarrow{N}\right\|drd\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^a\sqrt{h^2+r^2}\,dr$

$$=2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{h^2+r^2}\Big|_0^a+\frac{h^2}{2}\ln(r+\sqrt{h^2+r^2})\Big|_0^a\right]$$

$$=\pi\left[a\sqrt{h^2+a^2}+h^2\ln\left(\frac{a+\sqrt{h^2+a^2}}{h}\right)\right].$$

Ví dụ 2.

Tìm diện tích phần của mặt paraboloit $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 3.

Tìm diện tích phần của mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$ nằm giữa hai mặt phẳng z= mx và z=nx, m>n>0.

Giải

+) $D: z = mx, z = nx, m > n > 0, 0 \le |x| \le R,$

$D_1: nx \le z \le mx, m > n > 0, 0 \le x \le R.$

+) $\Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y'_z = 0, y'_x = \pm\dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

+) Do mặt cong chẵn với x, y, nên nhận các mặt phẳng đối xứng x=0, y=0, do đó

$$|S| = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdy = 4\iint_{D_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdy =$$

$$= 4\int_0^R dx \int_{nx}^{mx} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 4R\int_0^R \frac{(m-n)x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdy$$

$$= -4R(m-n)\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_0^R = 4R^2(m-n).$$

Chú ý. Tích phân kép có nhiều ứng dụng trong vật lý như :

- Tìm tọa độ trọng tâm của bản phẳng không đồng chất.
- Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất.
- Tính moment quán tính.

B. TÍCH PHÂN BA LỚP

3.8.0 Tích thể tích bằng tích phân lặp.

+) Đã biết công thức tính thể tích vật thể trong Giải tích 1 : $V=\int_a^b S(x)dx$. (0.1)

. Diện tích tiết diện thẳng S(x) được tính như sau :

$$S(x)=\iint_{D_x} dydz \qquad (0.2)$$

. Thay (0.2) vào (0.1), ta có

$$V=\int_a^b\left(\iint_{D_x} dydz\right)dx=\int_a^b dx\iint_{D_x} dydz$$

+) Hay

$$V=\iint\limits_{D}[z_2(x,y)-z_1(x,y)]dxdy=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz.$$

+) Hay khi $D_x: y_1(x)\le y\le y_2(x), z_1(y)\le z\le z_2(y)$

$$V=\int\limits_a^b\left(\iint\limits_{D_x}dydz\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(y)}^{z_2(y)}dz$$

+) $\left|[a;b]\right|=b-a=\int\limits_a^b dx, |D|=\iint\limits_{D}dxdy \overset{?}{\Rightarrow} |V|=\iiint\limits_{V}dxdydz$

+) Tính khối lượng, tọa độ trọng tâm, mô men quán tính của vật thể không đồng chất, …

Ví dụ 1. Tính tích phân lặp $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 2y dy \int_1^y dz$

Giải

+) $= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 2y\, z\Big|_1^y dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 2y(y-1)dy$

+) $= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2y^2 - 2y)dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^3 - y^2\right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx$

$$= \int_0^1 [\frac{2}{3}(x^3 - x^6) - (x^2 - x^4)]dx$$

+) $$= [\frac{2}{3}(\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7}) - (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5})]\Big|_0^1 = -\frac{13}{210}$$

Ví dụ 2. Sử dụng tích phân lặp tính thể tích tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng sau

$$x + y + z = 1$$

Giải

Cách 1.

$$+)\left|V\right| = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} dz, D: 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1$$

$$+) = \iint\limits_D (1 - x - y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{y=0}^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx$$

$$+) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 d(x-1) = \frac{1}{6}(x-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Cách 2.

$$+) |V| = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dxdy, D_z : 0 \le y \le 1-z-x, 0 \le x \le 1-z$$

$$+) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x)dx \right) dz$$

$$= \int_0^1 [(1-z)x - \frac{x^2}{2}]\Big|_{x=0}^{1-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 dz$$

+) $= \frac{1}{2}\int_0^1 (z-1)^2 d(z-1) = \frac{1}{6}(z-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

Cách 3.

+) $V = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x)dx \right) dz$

$$= \int_0^1 [(1-z)x - \frac{x^2}{2}]\Big|_{x=0}^{1-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 dz$$

+) $$= \frac{1}{2}\int_0^1 (z-1)^2 d(z-1) = \frac{1}{6}(z-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

3.8. Tích phân ba lớp trên hình chữ nhật đóng

a) Phép phân hoạch hình hộp chữ nhật.

Cho hình hộp chữ nhật đóng $P = [a\,;\,a'] \times [b\,;\,b'] \times [c\,;\,c']$. Chia P thành những hình hộp chữ nhật đóng ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n, đôi một có phần trong không giao nhau gọi là phép phân hoạch π. Kí hiệu d_i là đường chéo của hình chữ nhật V_i, $d(\pi) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$ gọi là đường kính của phân hoạch π.

Dãy $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

b) Tổng tích phân và các tổng Dacbu trên, dưới của hàm số xác định trên hình hộp chữ nhật được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

c) Định nghĩa. Cho hàm số f xác định, bị chặn trên hình hộp chữ nhật đóng P, dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phép phân hoạch P; $\pi_n = \{\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_{P_n}\}$.

Lấy tuỳ ý $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, P_n$. Đặt

$$\sigma_n\left(f, \pi_n, Q_1, \cdots, Q_{P_n}\right) = \sum_{i=1}^{P_n} f\left(Q_i\right) \Delta V_i$$

Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = I \in \mathbb{R}$, với mọi dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phân hoạch của hình hộp P và mọi cách chọn điểm $Q_i \in \Delta V_i$, thì khi đó ta nói hàm f khả tích trên P và I gọi là tích phân ba lớp của hàm số f trên hình hộp chữ nhật đóng P, kí hiệu là

$$\iiint\limits_{P} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ hoặc } \iiint\limits_{P} f(x, y, z)\,dV$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_{P} 2\,dx\,dy\,dz$, $P = [1\,;\,2]\times[2\,;\,4]\times[1\,;\,4]$

Giải

+) Dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phép phân hoạch P; $\pi_n = \{\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_{P_n}\}$.

+) Lấy tuỳ ý $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, P_n$. Có

$$\sigma_n\left(f, \pi_n, Q_1, \cdots, Q_{P_n}\right) = \sum_{i=1}^{P_n} f\left(Q_i\right) \Delta V_i = \sum_{i=1}^{P_n} 2\Delta V_i$$

+) $= 2\sum_{i=1}^{P_n} \Delta V_i = 2 \times 1 \times 2 \times 3 = 12.$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n\left(f, \pi_n, Q_1, \cdots, Q_{P_n}\right) = 12 \Rightarrow I = 12.$$

d) Điều kiện khả tích được thiết lập hoàn toàn tương tự như đối với tích phân hai lớp. Ở đây ta chỉ nêu một định lí về sự tồn tại tích phân

Định lí 1. Cho hàm số f bị chặn trên hình hộp chữ nhật đóng P, $E \subset P$, E là tập hợp có thể tích 0. Nếu f liên tục trên tập hợp $P \setminus E$ thì f khả tích trên P.

3.9. Tích phân ba lớp trên một tập hợp bị chặn

a) Định nghĩa. Cho tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, hình hộp chữ nhật đóng $P \supset B$ và hàm số

$$f_0 = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in P \setminus B \end{cases}.$$

Nếu hàm số f_0 khả tích trên P thì ta nói f khả tích trên B và định nghĩa

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_P f_0(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

b) Tính chất. Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp, cụ thể: tuyên tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự, định lí giá trị trung bình, ...

c) Độ đo Jordan.

1°/ Tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, $X(x, y, z) = 1, \forall (x, y, z) \in B$

Tập B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ hàm số X khả tích trên B. Khi đó thể tích của B là

$$V(B) \equiv |B| = \iiint\limits_B X(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_B dx\, dy\, dz.$$

Hệ quả 1. B bị chặn $\subset \mathbb{R}^3$, khi đó B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow V(\partial B) = 0$

2°/ D đo được trong $\mathbb{R}^2$, f khả tích trên D, khi đó $V(S) = 0$, ở đó

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Hệ quả 2. D là miền chính quy trong $\mathbb{R}^2$ và hàm số f liên tục, bị chặn trên D thì có $V(S) = 0$.

Hệ quả 3. Tập B bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, ∂B là hợp của một họ hữu hạn $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_z$, $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_x$, $y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_y$, các hàm x, y, z liên tục trên các miền chính quy đóng D_z, D_x, D_y, thì tập B đo được theo nghĩa Jordan

Ví dụ. Hình cầu, elipxoit, trụ tròn xoay là những tập hợp đo được theo nghĩa Jordan

d) Các lớp hàm khả tích: Tập B đo được trong $\mathbb{R}^3$, hàm số f liên tục, bị chặn trên B thì khả tích trên B.

Chú ý. – Tích phân bội ba có ứng dụng tính khối lượng, tọa độ trọng tâm, moment quán tính của vật thể không đồng chất.

- Ta có công thức tính độ dài đoạn thẳng [a,b] :

$$|[a;b]| = \int_a^b dx = b - a$$

Diện tích miền phẳng D : $S(D) = |D| = \iint_D dxdy$

Thể tích vật thể Q : $V(Q) = |Q| = \iiint_Q dxdydz$

– **Bản chất cách tích phân** bội ba là tính tích phân xác định.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!