

Tích phân bội

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 2: Tích phân bội

1 Tích phân kép

- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân kép
- Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
- Ứng dụng của tích phân kép

2 Tích phân bội ba

- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân bội ba
- Ứng dụng của tích phân bội ba

Chương 2: Tích phân bội

1 Tích phân kép

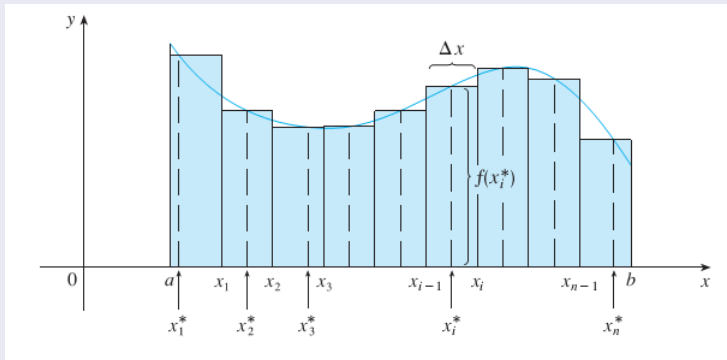
- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân kép
- Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
- Ứng dụng của tích phân kép

2 Tích phân bội ba

- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân bội ba
- Ứng dụng của tích phân bội ba

Tích phân kép

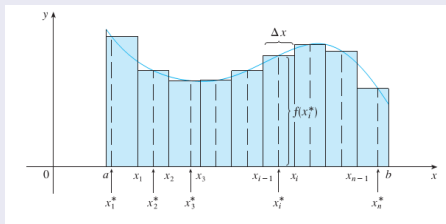
Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Tích phân kép

Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



- Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau $[x_{i-1}, x_i]$ với $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,
- Thành lập tổng Riemann $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$
- Lấy giới hạn $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$

Tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể - Tích phân kép

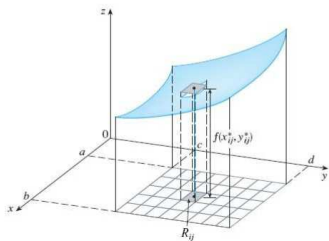


FIGURE 4

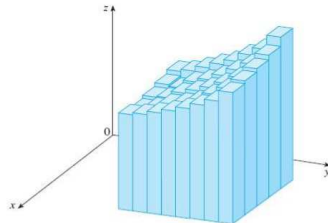
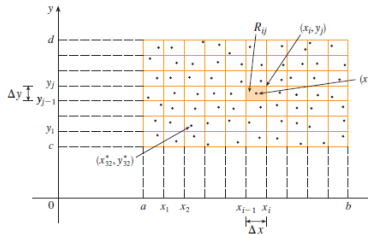
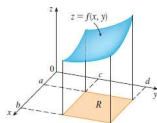


FIGURE 5

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Tính thể tích và tích phân kép



- 1 Chia $[a, b]$ thành m khoảng và chia $[c, d]$ thành n khoảng bằng nhau.
- 2 Chọn $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
- 3 Tổng Riemann

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{ij} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

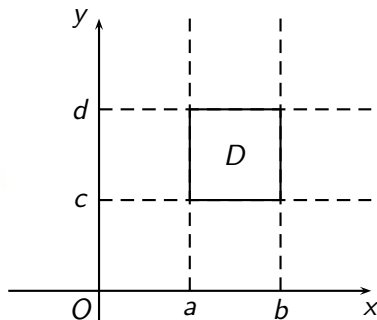
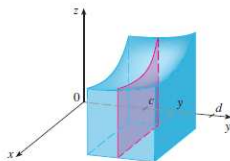
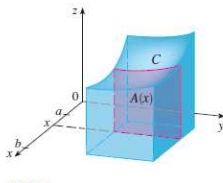
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

TP kép trên miền hình chữ nhật

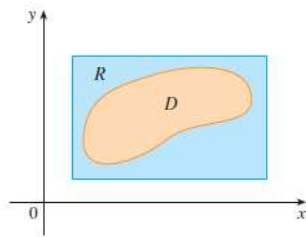
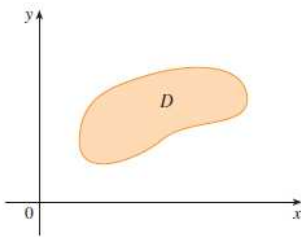
Nguyên tắc chung: Đưa về tính các tích phân lặp.

Fubini

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$



Tích phân kép trên miền bị chặn bất kì



$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

và

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy.$$

Tích phân kép

Ví dụ

$$\iint_R x \sin(x+y) \, dx dy, R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Tích phân kép

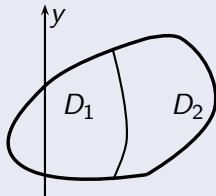
Ví dụ

$$\iint_R x \sin(x+y) dx dy, R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Tính chất cộng tính

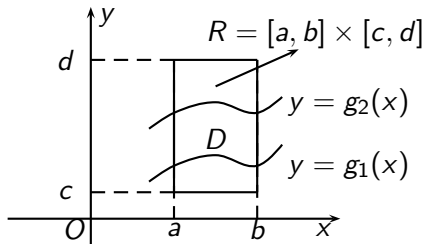
Nếu $D = D_1 \cup D_2$, ở đó D_1 và D_2 không chồng lên nhau thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$



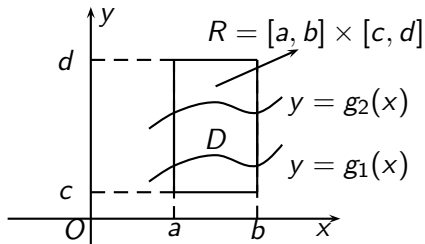
TP kép trên miền $(D) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



TP kép trên miền $(D) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

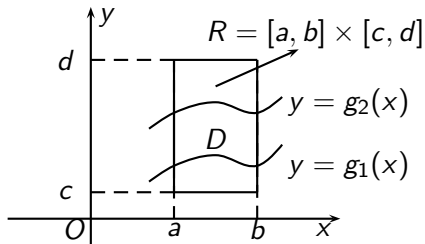
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy$$

TP kép trên miền $(D) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

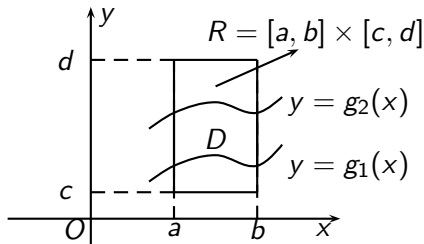
$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy$$

TP kép trên miền $(D) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

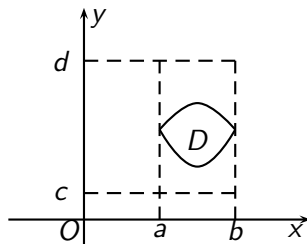
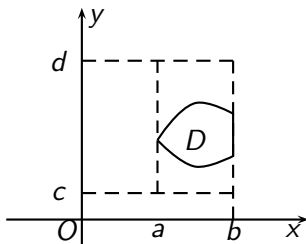
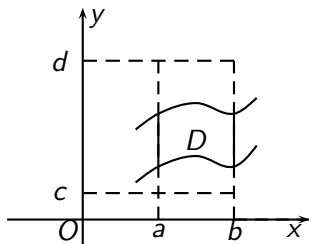


$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_R F(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Tính tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Tích phân kép trên miền (D) : $a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

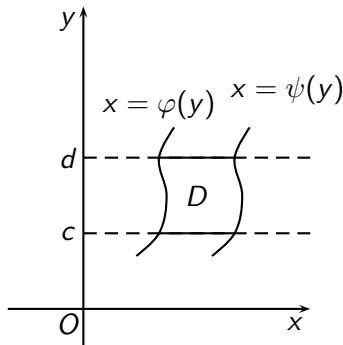
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$



Tích tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Tích phân kép trên miền $(D) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$

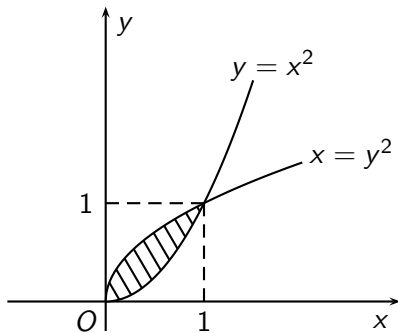
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$



Tích tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Ví dụ

Tính $\iint_D x^2 (y - x) dx dy$ với D giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$.



Tích phân kép

Các tính chất

- Tính chất tuyến tính:

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$\iint_D \alpha f(x, y) = \alpha \iint_D f(x, y).$$

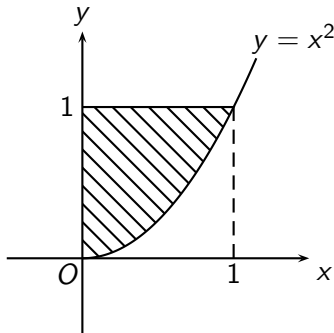
- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và D_1 và D_2 không giao nhau, ngoại trừ phần biên chung, thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

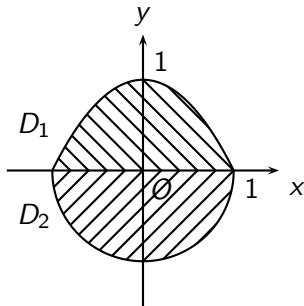
Tính $I = \iint_D x e^{y^2} dx dy$, ở đó $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

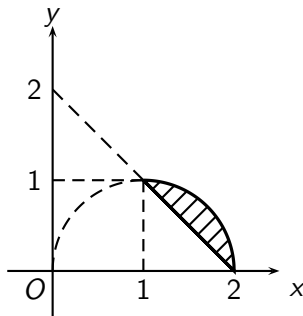
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

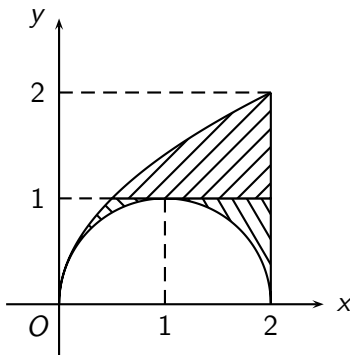
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

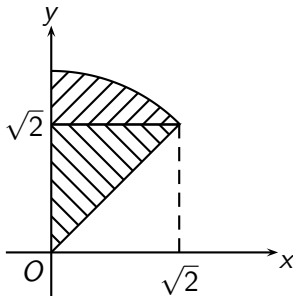
Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$.



Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ

Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^2 f(x, y) dx.$



Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Tính $\iint_D |f(x, y)| dx dy$. **Nguyên tắc chung:** Phá dấu giá trị tuyệt đối.

Đường cong $f(x, y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền,

$$D^+ = D \cap \{f(x, y) \geq 0\}, D^- = D \cap \{f(x, y) \leq 0\}.$$

$$\boxed{\iint_D |f(x, y)| dx dy = \iint_{D^+} f(x, y) dx dy - \iint_{D^-} f(x, y) dx dy} \quad (1)$$

Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Tính $\iint_D |f(x, y)| dx dy$. **Nguyên tắc chung:** Phá dấu giá trị tuyệt đối.

Đường cong $f(x, y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền,

$$D^+ = D \cap \{f(x, y) \geq 0\}, D^- = D \cap \{f(x, y) \leq 0\}.$$

$$\boxed{\iint_D |f(x, y)| dx dy = \iint_{D^+} f(x, y) dx dy - \iint_{D^-} f(x, y) dx dy} \quad (1)$$

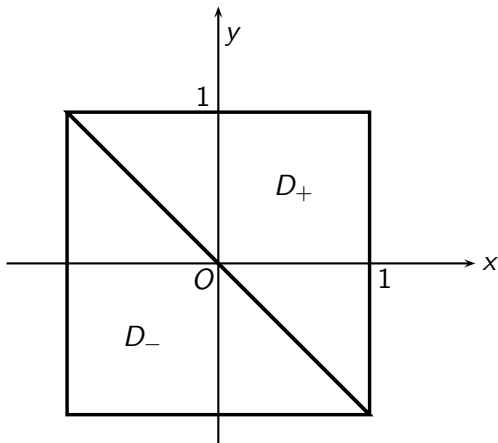
Các bước thực hiện

- 1 Vẽ đường cong $f(x, y) = 0$ để phân chia miền D .
- 2 Để xác định xem miền nào là D^+ , miền nào là D^- , ta chỉ cần xét một điểm (x_0, y_0) bất kì và xét dấu $f(x_0, y_0)$.
- 3 Sử dụng công thức (1) để tính tích phân.

Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ

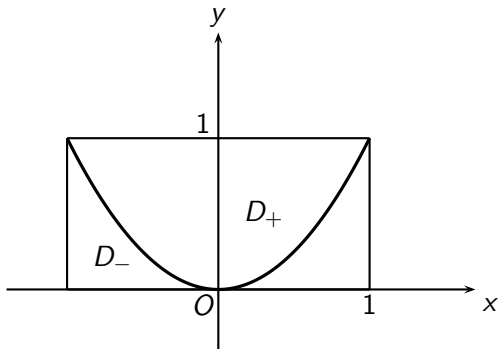
Tính $\iint_D |x + y| dx dy$, $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.



Tích phân kép có chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ

Tính $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.



Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x, y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x, y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và $f(x, y)$ là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D^+} f(x, y) dx dy.$$

Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc tọa độ O và hàm $f(x, y)$ thỏa mãn $f(-x, -y) = -f(x, y)$ thì $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.

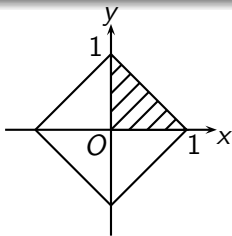
Tích phân kép trên miền đối xứng

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc tọa độ O và hàm $f(x, y)$ thỏa mãn $f(-x, -y) = -f(x, y)$ thì $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.

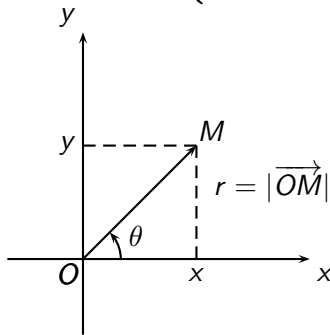
Ví dụ

Tính $\iint_{|x|+|y|\leq 1} |x| + |y| dx dy$.



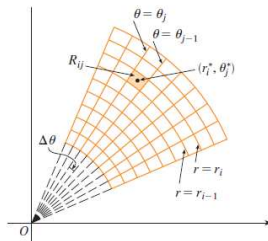
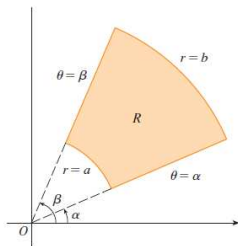
Tích phân kép trong tọa độ cực

Tọa độ cực của điểm M là bộ số (r, θ) , ở đó

$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \theta = \widehat{\overrightarrow{OM}, O_x}. \end{cases}$$


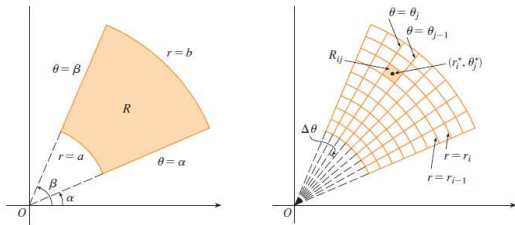
Tọa độ cực vs Tọa độ Đề các:
$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Tích phân kép trong tọa độ cực



$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta.\end{aligned}$$

Tích phân kép trong tọa độ cực



$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) \Delta A &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\
 &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta \theta \\
 &= \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) \boxed{r} dr d\theta.
 \end{aligned}$$

Tích phân kép trong tọa độ cực

Tích phân kép trong tọa độ cực

Nếu f là một hàm số liên tục trên miền $\begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \end{cases}$ thì

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \boxed{r} dr$$

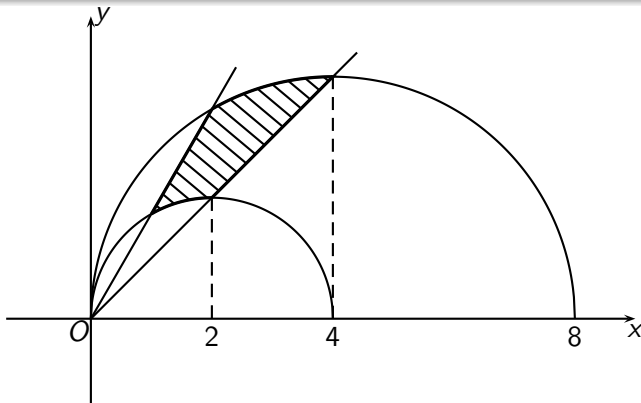
Chú ý

Trong một số sách, tọa độ cực được viết dưới dạng $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$

Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

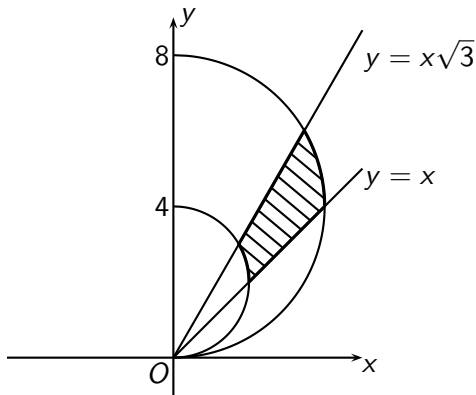
Tính $I = \iint_D dx dy$, ở đó $D : \begin{cases} 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

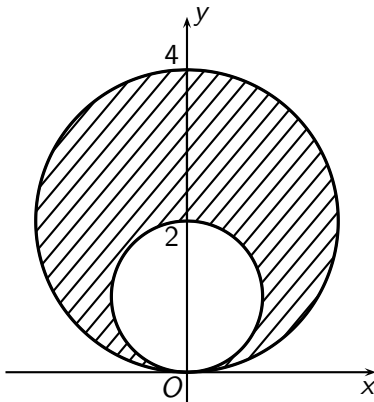
Tính $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, ở đó $D : \begin{cases} 4y \leq x^2 + y^2 \leq 8y \\ x \leq y \leq x\sqrt{3}. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

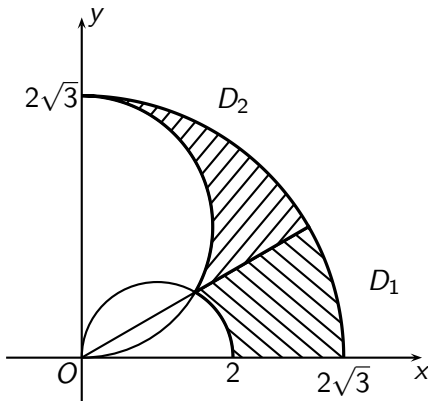
Tính $\iint_D xy^2 dx dy$ với D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0. \end{cases}$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

Tính $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$ trong đó $D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 12, x^2 + y^2 \geq 2x \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$



Đổi biến số trong tích phân kép

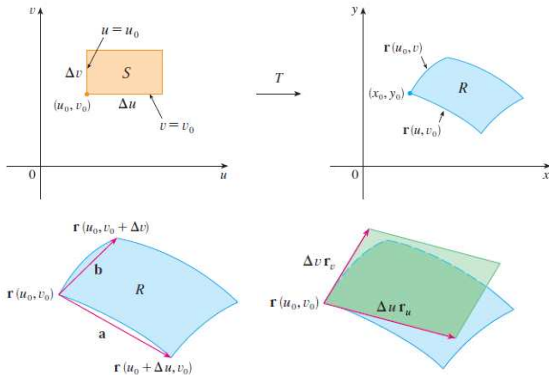
- Giải tích 1, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u)) \boxed{\frac{dx}{du}} dt$, ở đó $x = x(u)$.
- Mong muốn, $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \boxed{\text{hệ số}} du dv$,
ở đó $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$

Ví dụ

Xét phép biến đổi $T : \begin{cases} x = x(u, v) = u^2 - v^2, \\ y = y(u, v) = 2uv. \end{cases}$

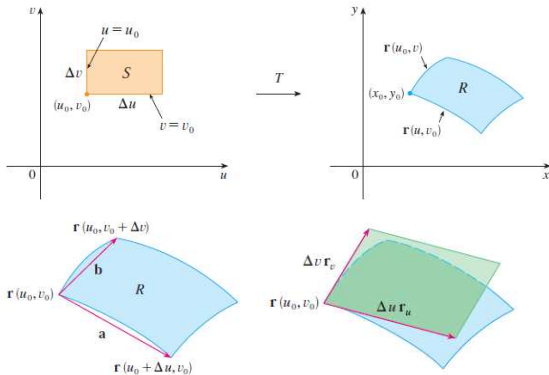
Tìm ảnh của hình vuông $S = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ qua phép biến đổi T .

Đổi biến số trong tích phân kép



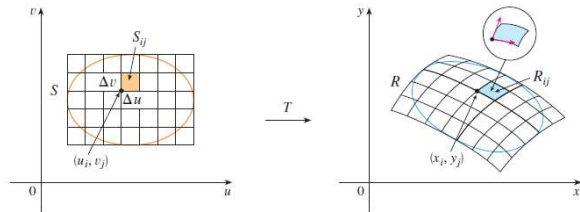
$$\Delta A \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v,$$

Đổi biến số trong tích phân kép



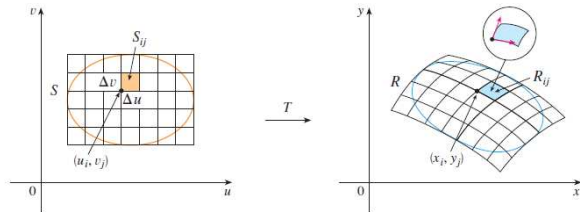
$$\Delta A \approx |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v, \quad J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Đổi biến số trong tích phân kép



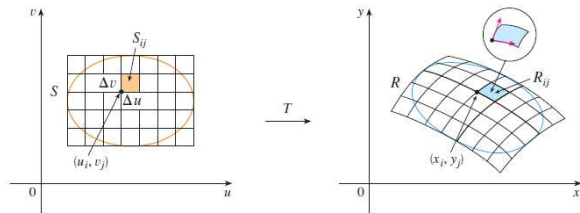
$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Đổi biến số trong tích phân kép



$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Đổi biến số trong tích phân kép



$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A \\
 &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \\
 &= \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.
 \end{aligned}$$

Đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số

Cho $T : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}, S \rightarrow R,$

- $x(u, v), y(u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên S ,
- phép biến đổi này là ánh xạ 1 – 1.
- Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên S .

Khi đó $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$

Đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số

Cho $T : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}, S \rightarrow R,$

- $x(u, v), y(u, v)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên S ,
- phép biến đổi này là ánh xạ 1 – 1.
- Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trên S .

Khi đó $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$

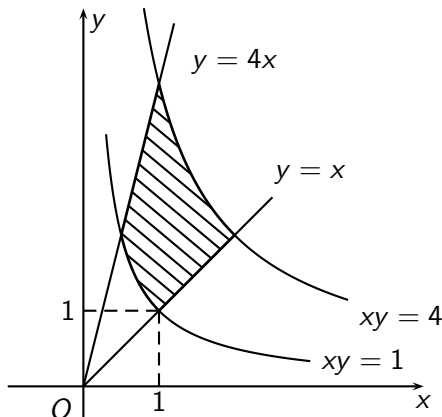
Ví dụ

Tính $I = \iint_D (4x^2 - 2y^2) dx dy$, ở đó $D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân kép

Ví dụ

Tính $I = \iint_D (4x^2 - 2y^2) dx dy$, ở đó $D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$



Đổi biến số trong tích phân kép

Chú ý

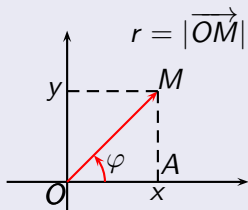
- Mục đích

- đưa miền D có hình dáng phức tạp về miền D_{uv} đơn giản hơn.
- làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x, y)$.

- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Đổi biến số trong tọa độ cực

Công thức đổi biến

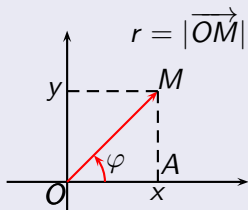


$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Đổi biến số trong tọa độ cực

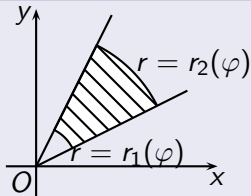
Công thức đổi biến



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Miền D có dạng hình quạt



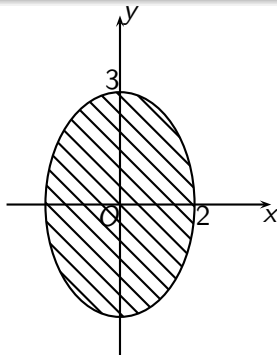
$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Nếu $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, thì đổi biến $\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$, $J = abr$

Ví dụ

Tính $\iint_D |9x^2 - 4y^2| dx dy$, ở đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

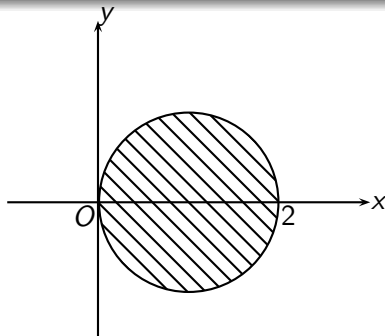


Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Nếu $D : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$, thì $\begin{cases} x = a + r \cos \varphi \\ y = b + r \sin \varphi \end{cases}$, $J = r$

Ví dụ

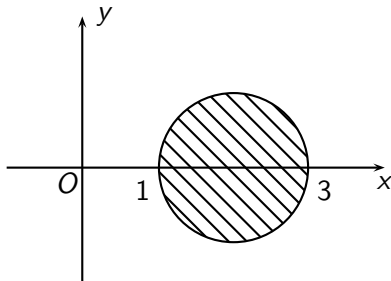
Tính $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{2x-x^2-y^2} dy.$



Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Ví dụ

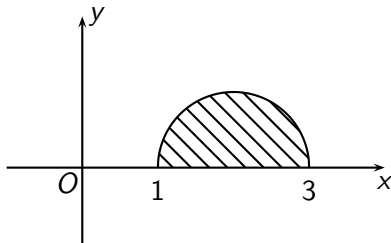
Tính $\iint_D xy dx dy$, với D là mặt tròn $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$.



Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng

Ví dụ

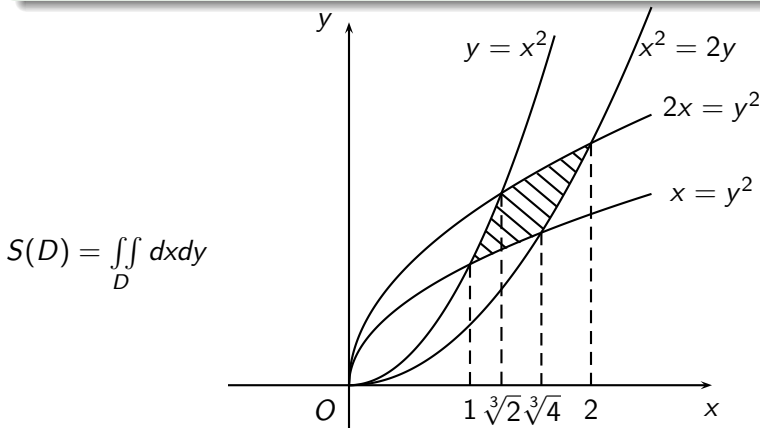
Tính $\iint_D xy dx dy$, với D là nửa mặt tròn $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

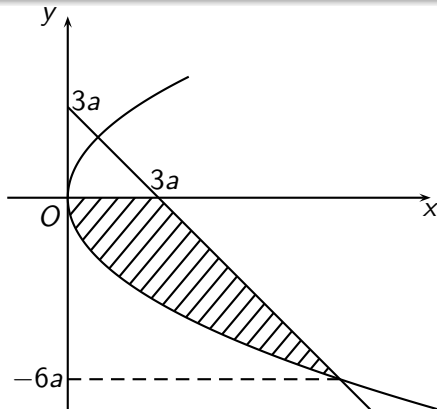
Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

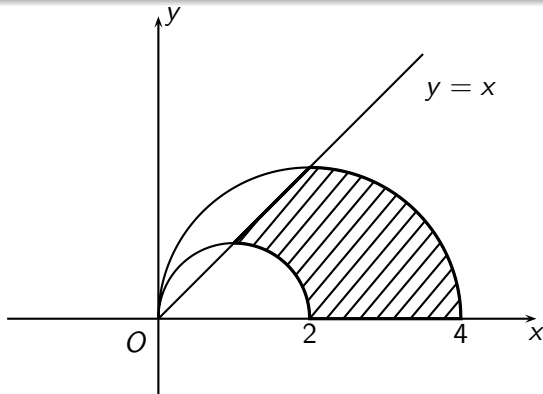
Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0 \end{cases} (a > 0).$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

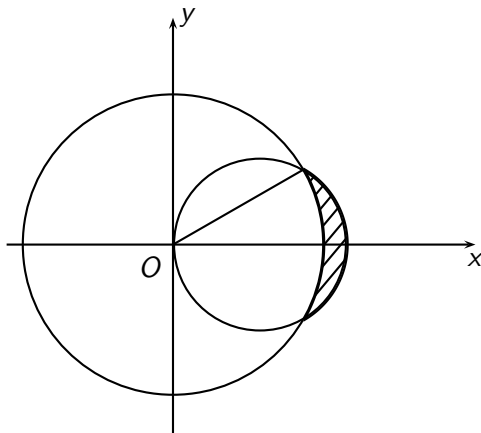
Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0. \end{cases}$



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

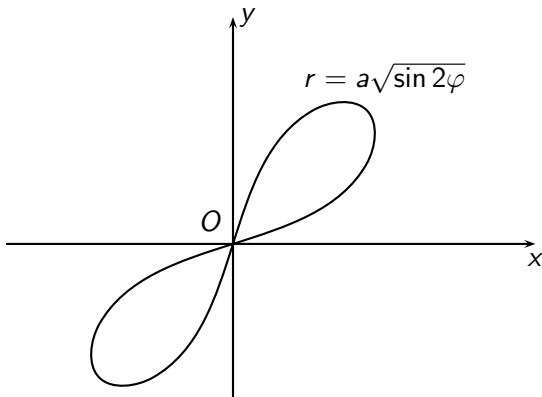
Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

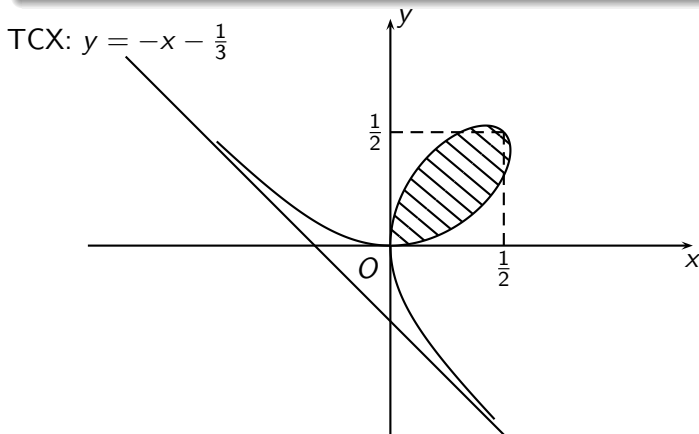
Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ($a > 0$).



Tính diện tích hình phẳng

Ví dụ

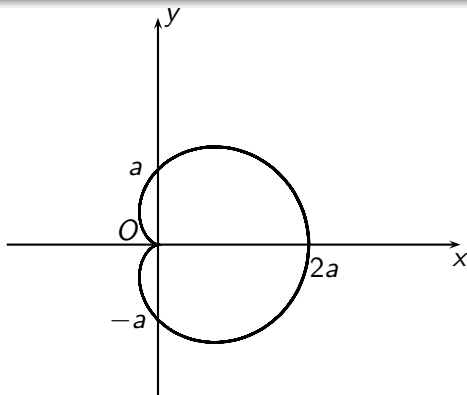
Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy$ ($a > 0$) (Lá Descartes)



Tính diện tích hình phẳng

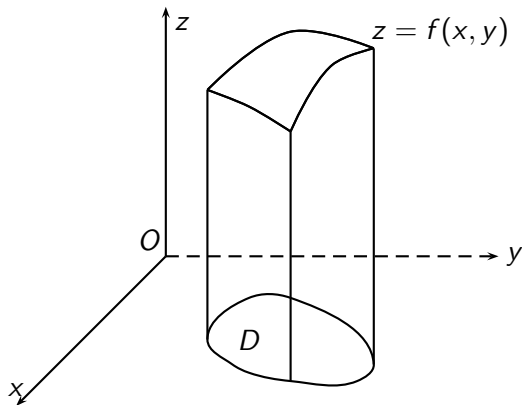
Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) (đường Cardioids hay đường hình tim)



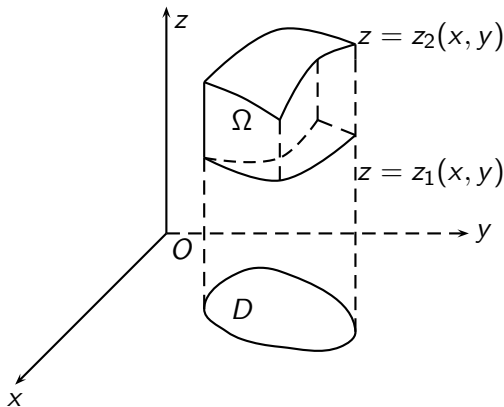
Tính thể tích vật thể

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq f(x, y), \\ (x, y) \in D \end{cases} \Rightarrow V(\Omega) = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$



Tính thể tích vật thể

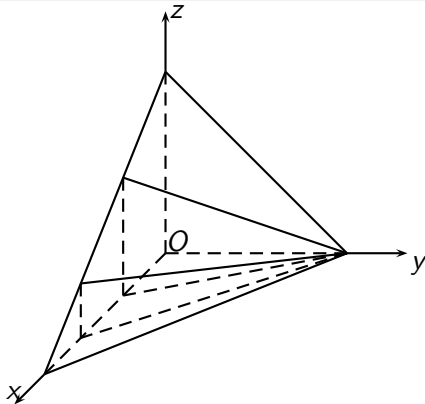
$$\Omega : \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \\ (x, y) \in D \end{cases} \Rightarrow V(\Omega) = \iint_D (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

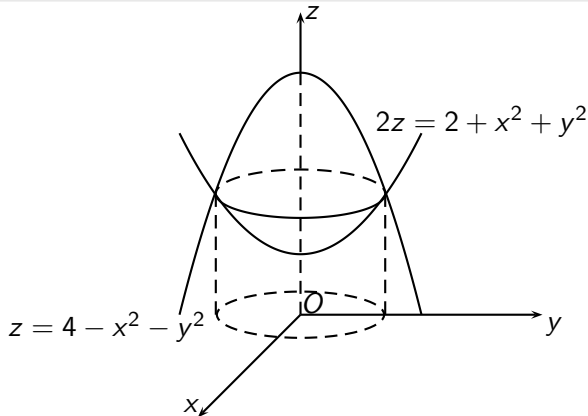
Tính thể tích miền giới hạn bởi
$$\begin{cases} 3x + y \geq 1, y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 2, 0 \leq z \leq 1 - x - y. \end{cases}$$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

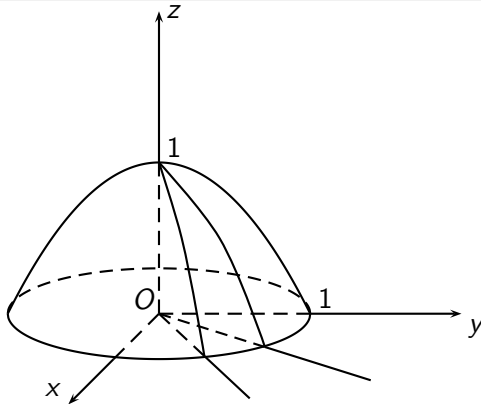
Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$.



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

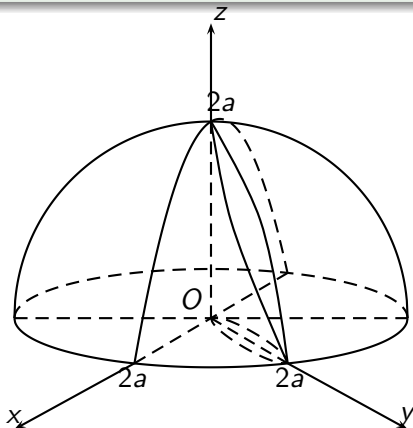
Tính thể tích của $V : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \\ y \geq x, y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

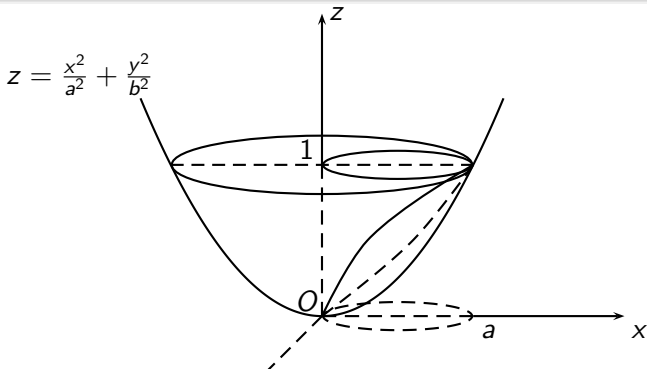
Tính thể tích V :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0 \end{cases}$$



Tính thể tích vật thể

Ví dụ

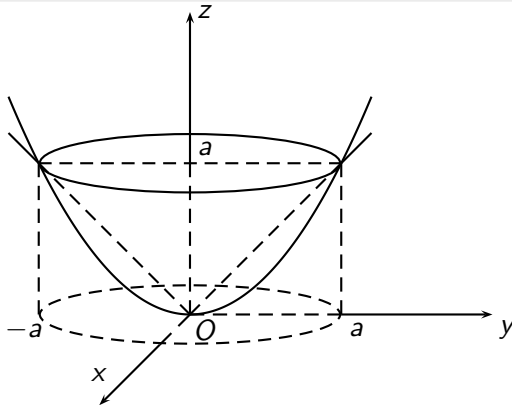
Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} \end{cases}$



Tính thể tích vật thể

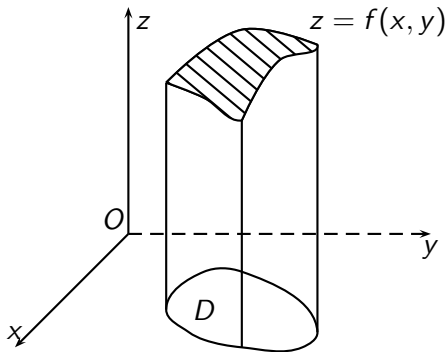
Ví dụ

Tính thể tích của miền $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$



Tính diện tích mặt cong

$$S : \begin{cases} z = f(x, y), \\ (x, y) \in D \end{cases} \Rightarrow \sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$



Chương 2: Tích phân bội

1 Tích phân kép

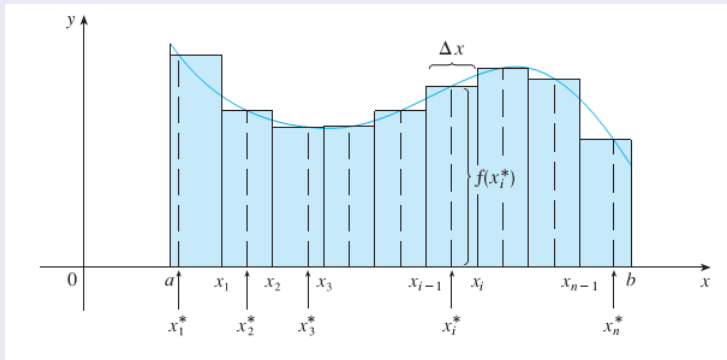
- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân kép
- Đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng
- Ứng dụng của tích phân kép

2 Tích phân bội ba

- Định nghĩa, tính chất, cách tính
- Đổi biến số trong tích phân bội ba
- Ứng dụng của tích phân bội ba

Tích phân bội ba

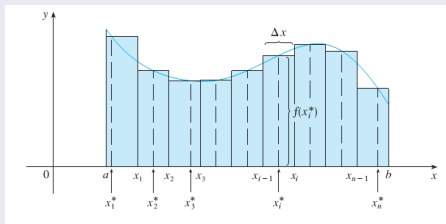
Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Tích phân kép

Bài toán tính diện tích hình phẳng - Tích phân xác định



- Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau $[x_{i-1}, x_i]$ với $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,
- Thành lập tổng Riemann $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$
- Lấy giới hạn $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$

Tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể - Tích phân kép

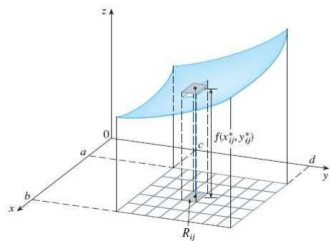


FIGURE 4

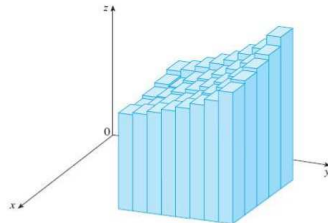
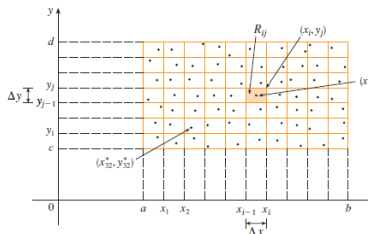
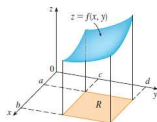


FIGURE 5

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Tính thể tích và tích phân kép



- ❶ Chia $[a, b]$ thành m khoảng và chia $[c, d]$ thành n khoảng bằng nhau.
- ❷ Chọn $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
- ❸ Tổng Riemann

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{ij} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Tích phân bội ba trên hình hộp

Định nghĩa

Cho $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$.

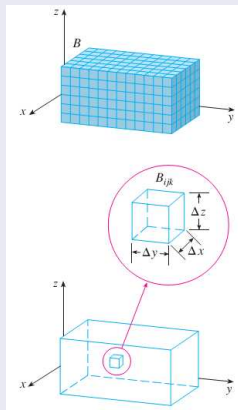
- 1 Chia $[a, b]$ thành l khoảng bằng nhau
Chia $[c, d]$ thành m khoảng bằng nhau
Chia $[r, s]$ thành n khoảng bằng nhau

- 2 Chọn $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$

- 3 Tổng Riemann

$$S_{lmn} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} S_{lmn}.$$



Tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Định lý (Fubini)

Nếu f là một hàm số liên tục trên $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_r^s f(x, y, z) dz.$$

Tích phân bội ba

Tích phân bội ba trên miền bị chặn bất kì

Cho E là một miền bị chặn bất kì, chọn $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \supset E$ và

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{nếu } (x, y, z) \in V, \\ 0, & \text{nếu } (x, y, z) \in B \setminus V. \end{cases}$$

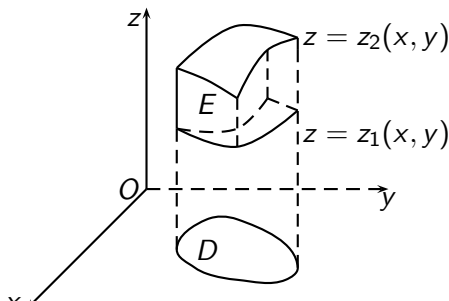
Định nghĩa

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV.$$

Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Nếu $E : \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$ thì

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$



Tích tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền E lên mặt phẳng Oxy .
2. Xác định biên dưới $z = z_1(x, y)$ và biên trên $z = z_2(x, y)$ của V .
3. Sử dụng công thức

$$I = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

để hoàn tất việc chuyển đổi.

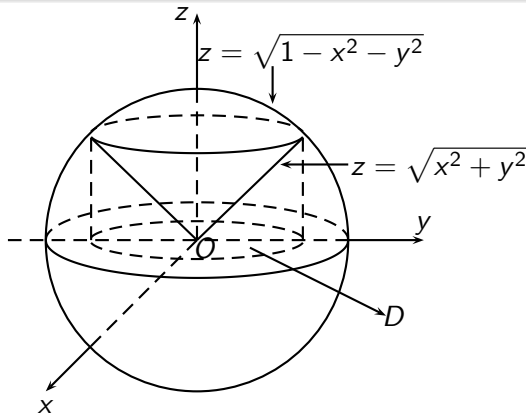
Nguyên tắc chung:

Tích phân ba lớp \Rightarrow Tích phân hai lớp \Rightarrow Tích phân lặp

Tích tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Ví dụ

Tính $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ trong đó V giới hạn bởi:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$



Các tính chất cơ bản của tích phân bội ba

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint_V [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] dx dy dz = \\ \alpha \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz.$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ và V_1, V_2 không giao nhau (ngoại trừ phần biên) thì:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Tích phân bội ba trên miền đối xứng

Định lý

Nếu

① V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$,

② $f(x, y, z)$ là hàm số lẻ đối với z

thì $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$.

Tích phân bội ba trên miền đối xứng

Định lý

Nếu

① V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$,

② $f(x, y, z)$ là hàm số lẻ đối với z

thì $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$.

Định lý

Nếu

① V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$,

② $f(x, y, z)$ là hàm số chẵn đối với z

thì $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{V^+} f(x, y, z) dx dy dz$, trong đó

$V^+ = V \cap \{z \geq 0\}$.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

❶ Giải tích 1, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u)) \boxed{\frac{dx}{du}} du$, ở đó $x = x(u)$.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

❶ Giải tích 1, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u)) \boxed{\frac{dx}{du}} du$, ở đó $x = x(u)$.

❷ $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

❶ Giải tích 1, $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u)) \boxed{\frac{dx}{du}} du$, ở đó $x = x(u)$.

❷ $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$, $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$

❸ Mong muốn,

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \boxed{\text{hệ số}} du dv dw,$$

ở đó $\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Bài toán:

Tính $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} : V_{uvw} \rightarrow V \quad (1)$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó liên tục trên V_{uvw} .
- Công thức (1) xác định song ánh $V_{uvw} \rightarrow V$.
- $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$ trong V_{uvw} .

Khi đó

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{uvw}} f[x(., ., .), y(., ., .), z(., ., .)] |J| du dv dw$$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Ví dụ

Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x + y + z = \pm 3 \\ x + 2y - z = \pm 1 \\ x + 4y + z = \pm 2 \end{cases}$ biết

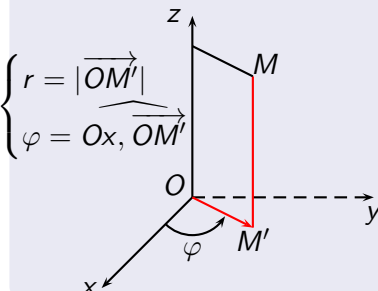
$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y - z \\ w = x + 4y + z \end{cases}$ ta có

$$J^{-1} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6}.$$

Đổi biến số trong tọa độ trụ

Công thức đổi biến



$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM'}| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$$

$$I = \iiint_{V_{r\varphi z}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

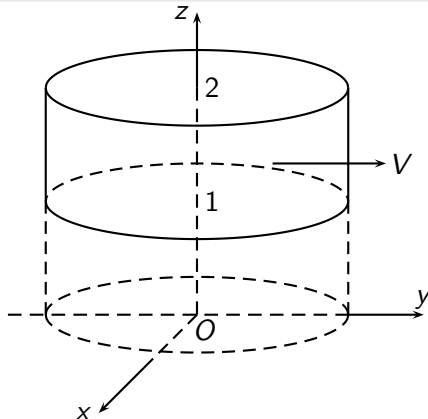
Mục đích: Đưa TP bội ba về TP lặp

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{z_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$$

Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

Tính $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, trong đó $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

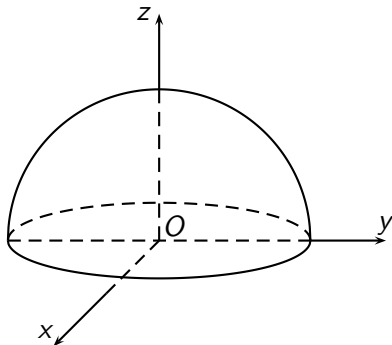
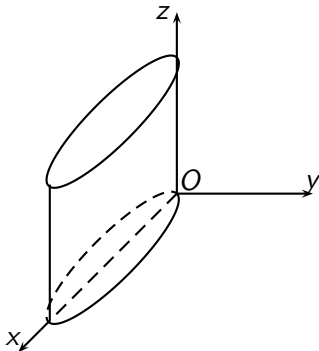


Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

Tính $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, trong đó:

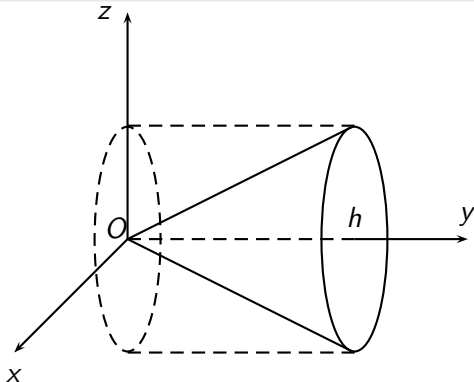
- a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2 + y^2 = 2x$ và $z = 0, z = a (a > 0)$.
- b) V là nửa của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0 (a > 0)$



Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

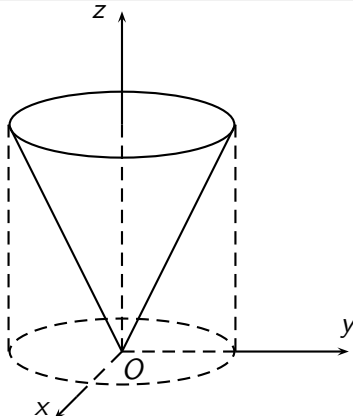
Tính $I = \iiint_V y dx dy dz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ trụ

Ví dụ

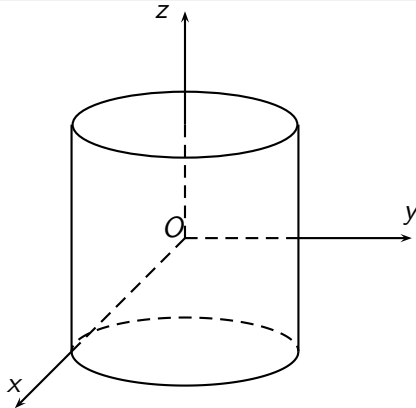
Tính $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ trụ

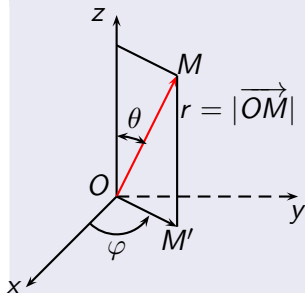
Ví dụ

Tính $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ cầu

Công thức đổi biến



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2 \sin \theta$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\iiint_{V_{r\theta\varphi}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Trường hợp đặc biệt

$$\text{Nếu } V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, & (\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi) \end{cases} \quad \text{thì}$$

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Trường hợp đặc biệt

Nếu $V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, & (\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr$$

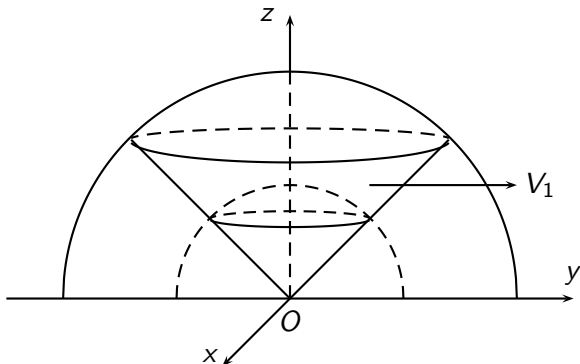
Khi nào đổi biến trong tọa độ cầu?

- Miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,
- hàm lấy tích phân $f(x, y, z)$ có chứa biểu thức $(x^2 + y^2 + z^2)$.

Đổi biến số trong tọa độ cầu

Ví dụ

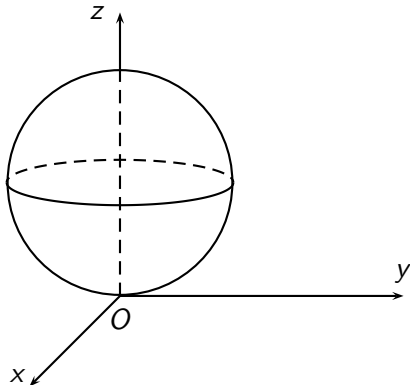
Tính $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$



Đổi biến số trong tọa độ cầu

Ví dụ

Tính $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ trong đó $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.



Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

$$\textcircled{1} \quad V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, J = -abcr^2 \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

$$\textcircled{1} \quad V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, J = -abcr^2 \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad V : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + r \sin \theta \cos \varphi \\ y = b + r \sin \theta \sin \varphi, J = -r^2 \sin \theta \\ z = c + r \cos \theta \end{cases}$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu, trụ suy rộng

$$\textcircled{1} \quad V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, J = -abcr^2 \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad V : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + r \sin \theta \cos \varphi \\ y = b + r \sin \theta \sin \varphi, J = -r^2 \sin \theta \\ z = c + r \cos \theta \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad V : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} z = bz' \\ x = ar \cos \varphi \\ y = ar \sin \varphi \end{cases}$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, với $V : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, với $V : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Tọa độ trụ suy rộng.

$$\text{Đặt } \begin{cases} z = bz' \\ x = ar \cos \varphi, \text{ ta có} \\ y = ar \sin \varphi \end{cases}$$

Cách 2: Tọa độ cầu suy rộng.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = ar \sin \theta \sin \varphi, \text{ ta có} \\ z = br \cos \theta \end{cases}$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, với $V : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Tọa độ trụ suy rộng.

$$\text{Đặt } \begin{cases} z = bz' \\ x = ar \cos \varphi, \text{ ta có} \\ y = ar \sin \varphi \end{cases}$$

$$J = a^2 br \text{ và } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z' \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$$

Cách 2: Tọa độ cầu suy rộng.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = ar \sin \theta \sin \varphi, \text{ ta có} \\ z = br \cos \theta \end{cases}$$

$$J = -a^2 br^2 \sin \theta \text{ và } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng

Ví dụ

Tính $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, với $V : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$.

Cách 1: Tọa độ trụ suy rộng.

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar \cos \varphi, \\ y = ar \sin \varphi \end{cases}$ ta có

$$J = a^2 br \text{ và } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z' \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$$

Cách 2: Tọa độ cầu suy rộng.

Đặt $\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = ar \sin \theta \sin \varphi, \\ z = br \cos \theta \end{cases}$ ta có

$$J = -a^2 br^2 \sin \theta \text{ và } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$I = \frac{2\pi a^3 b^2}{15}.$$

Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát: $V = \iiint_V dx dy dz$.

Ví dụ

Tính thể tích miền V giới hạn bởi
$$\begin{cases} x + y + z = \pm 3 \\ x + 2y - z = \pm 1 \\ x + 4y + z = \pm 2. \end{cases}$$

Thực hiện phép đổi biến
$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y - z \\ w = x + 4y + z \end{cases}$$
 ta có

$$J^{-1} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6}, V = \frac{1}{6} \iiint_{V_{uvw}} du dv dw = 8.$$