Chương 2: Tích phân bội

Giảng viên: PGS.TS. Nguyễn Duy Tân
tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Contents

2.1.1. Định nghĩa, ý nghĩa hình học và tính chất

Xét D là hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ và $f(x, y)$ là một hàm xác định trên D.
Chia D thành các hình chữ nhật nhỏ bằng cách chia các đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

Ta được một phân hoạch P của D gồm mn hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

.
Hình chữ nhật R_{ij} có diện tích $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, và đường kính $\operatorname{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$.
Ta gọi $||P|| = \max \operatorname{diam}(R_{ij})$ là chuẩn của phân hoạch P.

Trong mỗi hình chữ nhật R_{ij} ta lấy một điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*) và lập tổng tích phân (tổng Riemann)

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta S_{ij}.$$

Định nghĩa (Tích phân kép trên miền hình chữ nhật)

Nếu khi $||P|| \to 0$, tổng tích phân $R(f, P)$ tiến tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào phân hoạch P và cách chọn (x_{ij}^*, y_{ij}^*) thì giới hạn đó được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x, y)$ trong miền D, kí hiệu là

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dS \text{ hay } \iint\limits_{D} f(x, y) dxdy.$$

Trong trường hợp này ta nói f khả tích trên D.
D: miền lấy tích phân, f: hàm dưới dâu tích phân, dS: yếu tố diện tích.

Như vậy $I = \iint\limits_D f(x, y)dS$, nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại δ sao cho

$$|R(f, P) - I| < \epsilon,$$

với mọi phân hoạch P của D thỏa mãn $||P|| < \delta$ và với mọi cách chọn điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*).

Điều kiện khả tích

Tổng Darboux dưới $L(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)\Delta S_{ij}$.

Tổng Darboux trên $U(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y)\Delta S_{ij}$.

Định lý

Hàm f khả tích trên D khi vào chỉ khi $\lim(L(f,P) - U(f,P)) = 0$ khi $||P|| \to 0$..

Hệ quả

Nếu f liên tục trên $D = [a,b] \times [c,d]$ thì nó khả tích trên D.

Định nghĩa tích phân kép trên miền tổng quát

Cho $f(x, y)$ là hàm xác định trên miền đóng bị chặn D. Ta chọn một hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ chứa D và định nghĩa hàm F trên R như sau

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Nếu F khả tích trên R thì ta nói f khả tích trên D và ta định nghĩa tích phân kép của f trên D bởi:

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \iint\limits_R F(x, y) dS$$

Định lý

Nếu hàm f liên tục trên miền đóng bị chặn D thì nó khả tích trên D.

Ý nghĩa hình học

- Diện tích của D là $S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_D dxdy$.
- Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục, không âm trên miền D thì thể tích của vật thể hình trụ có đáy dưới là D, đáy trên là $z = f(x, y)$ có thể tích bằng

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Tính chất

Tích phân kép có những tính chất tương tự như tích phân xác định.

- Tính chất tuyến tính: $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\iint\limits_D (af(x,y) + bg(x,y)]dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)dxdy + b\iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

- Tính chất cộng tính: Nếu miền D được chia thành hai miền không D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

- Bảo toàn thứ tự: Nếu $f(x,y) \le g(x,y) \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

Định lý giá trị trung bình

Định lý

Cho hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn, liên thông D. Khi đó trong D có ít nhất một điểm $(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(\bar{x}, \bar{y})S(D).$$

Ta gọi $f(\bar{x}, \bar{y})$ là giá trị trung bình của hàm $f(x, y)$ trên miền D:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

2.1.3. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Miền lấy tích phân dạng hình chữ nhật $D = [a, b] \times [c, d]$.

Định lý Fubini

Cho $f(x, y)$ là hàm liên tục trên $D = [a, b] \times [c, d]$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

- Định lý Fubini còn đúng cho hàm f khả tích trên $D = [a, b] \times [c, d]$.
- Các tích phân ở vế thứ hai và vế thứ ba ở công thức trên được là tích phân lặp.

Tích phân lặp

Để tính tích phân lặp $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$, ta tính tích phân

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

(coi như x không đổi), sau đó tính tiếp tích phân $\int\limits_a^b I(x)dx$.

Ta cũng thường bỏ các dấu ngoặc ở trong công thức tích phân lặp:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Ví dụ

Tính $\iint\limits_D (x - y^2)dxdy$, ở đây $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Đáp số: $1/6$.

Tích phân trên miền hình thang cong

Trên miền hình thang cong cạnh song song trục Oy.

Định lý

Cho f là hàm liên tục trên miền D,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

với g_1 và g_2 là hai hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Trên miền hình thang cong cạnh song song trục Ox.

Định lý

Cho f là hàm liên tục trên miền D,

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

với h_1 và g_2 là hai hàm liên tục trên $[c, d]$. (Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Đổi thứ tự tích phân

Một miền D vừa có thể có dạng hình thang cong cạnh song song với Oy, vừa có thể có dạng hình thang cong cạnh song song với Ox

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp này ta có công thức đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Tổng quát hơn, miền D dạng hình thang cong cạnh song song với Oy có thể được chia thành các hình thang cong $D_1, \ldots, D_n$ cạnh song song Ox: $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, với

$$D_i = \{(x, y) \mid c_i \leq y \leq d_i, u_i(y) \leq x \leq v_i(y)\},$$

và ta có công thức đổi thứ tự tích phân

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{c_i}^{d_i} dy \int\limits_{u_i(y)}^{v_i(y)} f(x, y) dx$$

Tương tự cho trường hợp miền dạng hình thang cong cạnh song song với Ox.

Ví dụ

(GK20201)

Tính tính phân $\iint\limits_D (x^2 + 3y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x$.

Giải: (Phác thảo hình dạng của miền D.)
Miền $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$.

Tích phân $\iint\limits_D (x^2 + 3y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x^2 + 3y^2)dy =$
$\int\limits_0^1 (2x^3 - x^4 - x^6)dx = 11/70.$

Ví dụ

(GK20172)

Tính tích phân sau $\int\limits_0^8 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dy$.

Giải: $D: \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ \sqrt[3]{x} \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y^3. \end{cases}$.

Tích phân $\int\limits_0^8 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1} dx = \int\limits_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy = \frac{\ln 17}{4}$.

Ví dụ

(GK20192)

Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

Giải: Miền $D : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{2-y^2} \end{cases}$

D chia làm hai miền: $D = D_1 \cup D_2$, ở đây

$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$ và $D_2 : \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{2-x^2} \end{cases}$.

Do vậy

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

Một số bài tập

- (GK20192) Tính $\iint\limits_D 4y dxdy$, D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y \geq 1$.
- (GK20181) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy$.
- (GK20181) Tính $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D giới hạn bởi các đường $x = -1, x = 0, y = -1, y = x^2$.
- (GK20182) Tính $\iint\limits_D (2y - x) dxdy$, D giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và trục Ox.
- (GK20182) Tính tích phân lặp $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\sqrt{x-1}}^{1} \dfrac{1 - \cos 2\pi y}{y^2} dy$.
- (GK2016) Tính $\iint\limits_D (x^2 + y) dxdy$, D giới hạn bởi $y^2 = x, y = x^2$.

2.1.4. Công thức đổi biến

Cho $f(x, y)$ liên tục trên $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Thực hiện phép đổi biến $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Ta giả sử các điều sau được thỏa mãn:

- Các hàm này xác định một song ánh từ miền D' (thuộc mặt phẳng tọa độ $O'uv$) lên miền D (thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy).
- Các hàm này có các đạo hàm riêng (bậc nhất) liên tục trên D' và có định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

  trên D'.

Khi đó

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv.$$

Chú ý

- Mục đích chính của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân ban đầu về tính tích phân đơn giản hơn: như miền tính tích phân đơn giản hơn (hình thang cong hoặc hình chữ nhật), hàm dưới dấu tính tích phân đơn giản hơn.
- Phép đổi biến sẽ biến biên của D thành biên của D'.
- Có thể tính J bằng cách tính $J^{-1} = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Ý tưởng chứng minh

Chứng minh chi tiết có thể xem [Puhg, Section 8, pages 306-312]: C. C. Pugh, "Real Mathematical Analysis", Undergraduate Texts in Mathematics (2002).

- Nếu $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là một đẳng cấu tuyến tính thì

$$\mathrm{Area}(T(D)) = |\det T| \cdot \mathrm{Area}(D).$$

- Gọi ϕ là song ánh xác định bởi $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Xét một hình chữ nhật "nhỏ" R_{ij} trong mặt phẳng $O'uv$, với ảnh $W_{ij} = \phi(R_{ij})$. Trên R_{ij}, song ánh ϕ xấp xỉ bởi đẳng cấu tuyến tính (sai khác phép tịnh tiến) có ma trận (trong cơ sở chính tắc) $\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$. Từ đó $\mathrm{Area}(W_{ij}) \approx |J| \mathrm{Area}(R_{ij})$. Hay "$dxdy = |J|dudv$".

Ví dụ

(GK20172)

Tính tích phân $I = \iint_D (x^2 + xy - y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y = -2x + 1$, $y = -2x + 3$, $y = x - 2$, $y = x$.

Đổi biến $u = y + 2x$, $v = y - x$. Do vậy $x = (u - v)/3$, $y = (u + 2v)/3$

Miền D': $1 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 0$. $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/3$.

Vậy

$$I = \iint\limits_{D'} \left(\frac{(u-v)^2}{9} + \frac{(u-v)(u+2v)}{9} - \frac{(u+2v)^2}{9} \right) \frac{1}{3} dudv$$

$$= \frac{1}{27} \int_1^3 du \int_{-2}^0 (u^2 - 5uv - 5v^2) dv = \frac{1}{27} \int_1^3 (2u^2 + 10u - \frac{40}{3}) du$$

$$= \frac{1}{27} \left(\frac{52}{3} + 40 - \frac{80}{3} \right) = \frac{92}{81}.$$

Ví dụ

(GK20172)

Tính tích phân $I = \iint_D (3x + 2xy)dxdy$, với D: $1 \le xy \le 9$, $y \le x \le 4y$.

Ta có $y > 0$ và $x > 0$. Đổi biến $u = xy$, $v = x/y$. Do vậy $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{u/v}$. Miền D': $1 \le u \le 9$, $1 \le v \le 4$.

$$J = \left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix}^{-1} = -\left(\frac{2x}{y}\right)^{-1} = -\frac{1}{2v}.$$

Vậy

$$I = \iint\limits_{D'} \left(3\sqrt{uv} + 2u)\frac{1}{2v}\right) dudv = \int_1^4 dv \int_1^9 (\frac{3}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + \frac{u}{v})du$$

$$= \int_1^4 (\frac{26}{\sqrt{v}} + \frac{40}{v})dv = 26 \cdot 2v^{1/2}\Big|_1^4 + 40 \ln v|_1^4 = 52 + 40 \ln 4.$$

Trường hợp riêng: Tọa độ cực

Công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$$

Khi $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ thì các công thức này xác định một song ánh giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes.

Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$ (trừ tại O).

Ta có công thức đổi biến

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Ví dụ

(GK20201)

Tính tích phân $\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy$, D là miền xác định bởi $x^2+y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

Đổi biến $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Miền D': $0 \leq r \leq 2$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
$J = r$. Vậy

$$\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{D'} \cos(r^2)rdrd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 \cos(r^2)rdr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, \frac{1}{2}\sin(r^2)\Big|_0^2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 4 d\varphi = \frac{\pi}{2}\sin 4.$$

Ví dụ (GK201902)

Tính $\iint_D (4x^2+1)dxdy$, D là miền xác định bởi $(x-1)^2+y^2 \leq 1$.

Đổi biến $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Miền D': $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. $J = r$. Vậy

$$\iint\limits_D (4x^2+1)dxdy = \iint\limits_{D'} 4(1+r\cos\varphi)^2+1)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (5r + 8r^2\cos\varphi + 4r^3\cos^2\varphi)dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{5}{2}r + \frac{8}{3}r^3\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi\right)\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} + \frac{8}{3}\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(3 + \frac{8}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right)d\varphi = 6\pi.$$

Miền lấy tích phân là miền đối xứng

Định lý

Cho miền D là miền đối xứng qua trục Ox.

- Nếu hàm $f(x, y)$ là hàm lẻ đối với y thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = 0$.
- Nếu hàm $f(x, y)$ là hàm chẵn đối với y thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = 2\iint\limits_{D'} f(x, y)dxdy$, trong đó D' là phần nằm bên trên trục Ox của D.

Ta cũng có kết quả tương tự cho miền đối xứng qua trục Oy.

Định lý

Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc tọa độ O và hàm $f(x, y)$ thoả mãn $f(-x, -y) = -f(x, y)$ $(\forall (x, y) \in D)$ thì $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = 0$.

Một số bài tập

- (GK20182) Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x+y \geq 0$.
- (CK20182) Tính $\iint\limits_D \sqrt{y^2-x^2}dxdy$, với D là miền $0 \leq 2y \leq x^2+y^2 \leq 2x$.
- (GK20172) Tính $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x\}$.
- (GK20162) Tính $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (GK20152) Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D: x^2+y^2 \leq 2y, |x| \leq y$.

2.1.5. Ứng dụng

Xét vật thể hình trụ có đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, đường sinh song song với trục Oz, mặt phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$, với $f(x, y)$ liên tục, không âm trên D.
Thể tích của vật thể hình trụ này là

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy.$$

Ví dụ

(CK20142)

Tính thể tích miền V xác định bởi $0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$, $0 \leq y \leq \sqrt{3}x$.

$V = \iint_D (2 - x^2 - y^2)dxdy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{3}x$.
Đổi biến (tọa độ cực) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$, $D' : 0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.
$V = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr = \dfrac{\pi}{3}$.

Tính diện tích hình phẳng

Diện tích $S(D)$ của miền D được tính bởi công thức $S(D) = \iint\limits_D dxdy$.

Ví dụ (GK20201)

Tính diện tích hình phẳng xác định bởi $2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y$, $0 \leq x \leq y$.

Diện tích $S = \iint_D dxdy$, với $D : 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y, 0 \leq x \leq y$.
Đổi biến $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$,
$D' : 2\sin\varphi \leq r \leq 4\sin\varphi$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$.
$S = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} rdr = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 6\sin^2\varphi d\varphi = 3\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3}{2}$.

Tính diện tích mặt cong

Cho mặt S xác định bởi phương trình $z = f(x, y)$, với (x, y) nằm trong một miền đóng, bị chặn D của mặt phẳng Oxy. (D là hình chiếu của mặt S lên Oxy.)

Khi đó diện tích σ của mặt S được tính bởi công thức

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy.}$$

Ví dụ

Ví dụ (GK20192)

Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2 + 1$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

Diện tích $\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 4$.
Đổi biến $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$,
$D' : 0 < r \leq 2,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} rdr = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int\limits_1^{\sqrt{17}} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_1^{\sqrt{17}} =$$

$$\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).$$

Một số bài tập

- (GK20192) Tính thể tích miền V giới hạn bởi mặt Oxy và mặt $z = x^2 + y^2 - 4$.
- (GK20192) Tính diện tích miền giới hạn bởi $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$.
- (GK20182) Tính diện tích phần hình tròn $x^2 + y^2 = 2x$ nằm ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.
- (GK20181) Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $x = 2y^2$, $x = 5y^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$.

2.2.1. Định nghĩa, ý nghĩa hình học, tính chất

Tích phân bội ba được định nghĩa hoàn toàn tương tự như tích phân kép.
Cho $f(x, y, z)$ là một hàm xác định trên là hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ và.
Chia B thành các hình hộp chữ nhật nhỏ bằng cách chia các đoạn $[a, b]$, $[c, d]$ và $[s, t]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d,$$
$$s = z_0 < z_1 < \cdots < z_{p-1} < z_p = t.$$

Ta được một phân hoạch P của B gồm mnp hình hộp chữ nhật con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p).$$

Hình hộp chữ nhật B_{ij} có thể tích
$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$, và đường kính
$\mathrm{diam}(R_{ijk}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$.
Ta gọi $||P|| = \max \mathrm{diam}(B_{ijk})$ là chuẩn của phân hoạch P.

Trong mỗi hình hộp chữ nhật B_{ijk} ta lấy một điểm $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ và lập tổng tích phân (tổng Riemann)

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V_{ijk}.$$

Định nghĩa (Tích phân bội ba trên hình hộp chữ nhật)

Nếu khi $||P|| \to 0$, tổng tích phân $R(f, P)$ tiến tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào phân hoạch P và cách chọn $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trên B, kí hiệu là

$$\iiint_B f(x, y, z)dV \text{ hay } \iiint_B f(x, y, z)dxdydz.$$

Trong trường hợp này ta nói f khả tích trên B.
B: miền lấy tích phân, f: hàm dưới dấu tích phân, dV: yếu tố thể tích.

Như vậy $I = \iiint\limits_{B} f(x, y, z)dV$, nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại δ sao cho

$$|R(f, P) - I| < \epsilon,$$

với mọi phân hoạch P của B thỏa mãn $||P|| < \delta$ và với mọi cách chọn điểm $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$.

Định nghĩa tích phân bội ba trên miền tổng quát

Cho $f(x, y, z)$ là hàm xác định trên miền đóng bị chặn V. Ta chọn một hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ chứa V và định nghĩa hàm F trên B như sau

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{nếu } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in B \setminus V. \end{cases}$$

Nếu F khả tích trên B thì ta nói f khả tích trên V và ta định nghĩa tích phân bội ba của f trên V bởi:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dV = \iiint\limits_B F(x, y, z) dV$$

Định lý

Nếu hàm f liên tục trên miền đóng bị chặn V thì nó khả tích trên V.

Ý nghĩa, tính chất

- Thể tích của V là $\mathrm{Vol}(V) = \iiint\limits_V 1dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz$.
- Nếu hàm $f(x, y, z)$ là khối lượng riêng của vật thể V, thì khối lượng của V bằng
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Tích phân bội ba có những tích chất tương tự như tích phân kép.

- Tính chất tuyến tính.
- Tính chất cộng tính.
- Tính chất bảo toàn thứ tự.
- Định lý giá trị trung bình.

2.2.2. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Xét miền V giới hạn bởi các mặt $z = u_1(x, y)$, $z = u_2(x, y)$, trong đó u_1, u_2 là hai liên tục trên D, với D là hình chiếu của V lên Oxy:

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Giả sử thêm rằng D là hình thang cong

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Ta có công thức tương tự cho các trường hợp

$$V = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

hay

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}.$$

Ví dụ

(GK20192)

Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V x^2 e^z dxdydz$, trong đó

$$V: 0 \le y \le 1, y \le x \le 1, 0 \le z \le xy + 1.$$

$$\iiint\limits_V x^2 e^z dxdydz = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^{xy+1} x^2 e^z dz = \int_0^1 dy \int_y^1 (x^2 e^{xy+1} - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 e^{xy+1} - x^2) dy = \int_0^1 (xe^{x^2+1} - ex - x^3) dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - e) - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{4}.$$

2.2.3. Công thức đổi biến

Cho $f(x, y, z)$ liên tục trên $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Thực hiện phép đổi biến $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Ta giả sử các điều sau được thỏa mãn:

- Các hàm này xác định một song ánh từ miền V' (thuộc hệ tọa độ $O'uvw$) lên miền V (thuộc hệ tọa độ $Oxyz$).
- Các hàm này có các đạo hàm riêng (bậc nhất) liên tục trên V' và có định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

  trên V'.

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|dudvdw$$

Ví dụ (GK20182)

Tính tích phân bội ba $\iiint_V (x+y+2z)dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=1$, $z=0$, $z=1$.

Đổi biến $u=x-y$, $v=x+y$, $w=z \Rightarrow x=(u+v)/2$, $y=(v-u)/2$, $z=w$. $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 1/2$.

V' giới hạn bởi các mặt $u=0$, $u=2$, $v=0$, $v=1$,$w=0$, $w=1$.

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (x+y+2z)dxdydz = \int_0^2 du \int_0^1 dv \int_0^1 (v+2w)\frac{1}{2}dw \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_0^2 du\right)\int_0^1 dv \int_0^1 (v+2w)dw = \int_0^1 (v+1)dv \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Trường hợp riêng: Tọa độ trụ

Công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x, y, z) và tọa độ trụ (r, φ, z) của cùng một điểm:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z.$$

Khi $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ thì các công thức này xác định một song ánh giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes.

Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$

Ta có công thức đổi biến

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Ví dụ (GK20162)

Tính tích phân bội ba $\iiint_V zdxdydz$, với khối V được giới hạn bởi $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 2$.

Đổi biến (tọa độ trụ): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Ta có $J = r$.
Khối V' được giới hạn bởi $z^2 = 4r^2$, $z = 2$.
$V'\colon 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, 2r \le z \le 2$.

$$\iiint_V zdxdydz = \iiint_{V'} rzdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 rzd\varphi drdz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{2r}^2 zdz = 2\pi\int_0^1 r(2-2r^2)dr$$
$$= 2\pi\cdot(1-\frac{1}{2}) = \pi.$$

Trường hợp riêng: Tọa độ cầu

- Tọa độ cầu của điểm $M(x, y, z)$ là bộ ba (r, θ, φ), trong đó $r = OM$, θ là góc giữa trục Oz và OM, và φ là góc giữa Ox và tia $\overrightarrow{OM'}$, ở đó M' là hình chiếu của M lên Oxy. Ta có $0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$.
- Công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes (x, y, z) và tọa độ cầu (r, θ, φ) của cùng một điểm: $x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta$.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} =$

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

- Ta có công thức đổi biến

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Ví dụ (GK20162)

Tính tích phân bội ba $\iiint_V xyzdxdydz$, với
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Đổi biến (tọa độ cầu): $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Ta có $|J| = r^2\sin\theta$.
Miền $V' : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\iiint_V xyzdxdydz = \iiint_{V'} r^3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta \cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$
$$= \int_0^1 r^5dr \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{48}.$$

Miền lấy tích phân là miền đối xứng

Định lý: Cho miền V là miền đối xứng qua mặt Oxy.

- Nếu hàm $f(x, y, z)$ là hàm lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = 0$.
- Nếu hàm $f(x, y, z)$ là hàm chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = 2\iiint\limits_{V'} f(x, y, z)dxdydz$, trong đó V' là phần nằm bên trên mặt Oxy của V.

Ta cũng có kết quả tương tự cho miền đối xứng qua mặt Oyz, măt Oxz .

Định lý

Nếu miền V là miền đối xứng qua gốc tọa độ O và hàm $f(x, y, z)$ thoả mãn $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$ $(\forall (x, y, z) \in V)$ thì

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = 0.$$

Ví dụ (GK20181)

Tính $\iiint\limits_V (x + 2y + 3z + 4)dxdydz$, V xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \le 2.$$

Đổi biến $u = x + y$, $v = y + z$, $w = z + x$. $J = \left|\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}\right|^{-1} = 1/2$

V': $u^2 + v^2 + w^2 \le 4$.

$$\iiint\limits_V (x + 2y + 3z + 4)dxdydz = \iiint\limits_{V'} (2v + w + 4) \cdot \frac{1}{2}dudvdw$$

$$= \iiint\limits_{V'} vdudvdw + \frac{1}{2}\iiint\limits_{V'} wdudvdw + 2\iiint\limits_{V'} dudvdw$$

$$= 2\mathrm{Vol}(V') = 2\frac{4\pi}{3}2^3 = \frac{64\pi}{3}.$$

Một số bài tập

- (GK20201) Tính $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, với V giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$.
- (GK20201) Tính $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 2x$.
- (GK20182) Tính $\iiint_V \dfrac{x^2}{\sqrt{4y-y^2-z^2}}dxdydz$, với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 4y$, $x \leq 0$.
- (GK20172) Tính $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, với V giới hạn bởi các mặt $x = y^2 + 4z^2$, $x \leq 4$.

2.2.4. Ứng dụng: Tính thể tích vật thể

Thể tích của vật thể V trong $\mathbb{R}^3$ là $\iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ (GK20192)

Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2$, $x = y^2$, $z = y^2$ và mặt Oxy.

- Thể tích $I = \iiint_V dxdydz$, ở đây V là miền giới hạn bởi $y = x^2$, $x = y^2$, $z = y^2$ và mặt Oxy.
-

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{3/2} - x^6)dx$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{35}.$$

Một số bài tập

- Đọc giáo trình cách tìm công thức tính thể tích hình cầu, hình ellipsoid.
- (GK20172) Tính thể tích của miền xác định bởi $1 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - 4y^2}$.
- (GK20181) Tính thể tích của hình giới hạn bởi $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$.
- (GK20172) Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - 3x^2 - y^2$.
- (GK20162) Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 3$, $3x + y = 3$, $\frac{3}{2}x + y = 3$, $y = 0$, $z = 0$.