ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Xử lý tín hiệu
Chương 1: Tín hiệu và hệ thống

PGS. TS. Trịnh Văn Loan
Viện Công nghệ thông tin và Truyền thông
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Tài liệu tham khảo

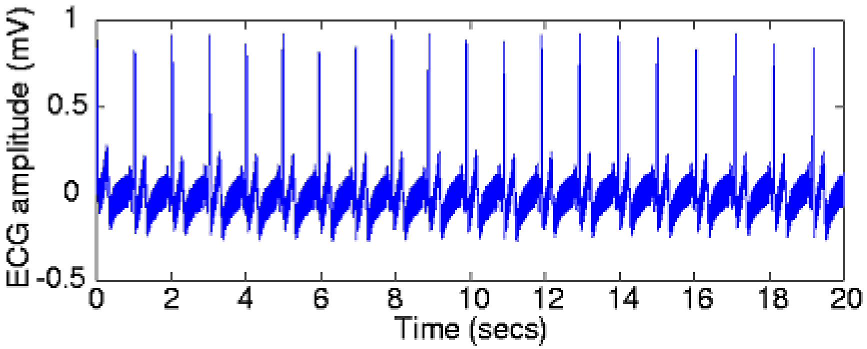
- Discrete-Time Signal Processing, 2nd Ed., A.V.Oppenheim, R.W. Schafer, J.R. Buck, Prentice Hall, 1999
- Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications, 3rd Ed.,J.G. Proakis, D.G. Manolakis, Prentice Hall, 1996
- Xử lý tín hiệu số
- Xử lý tín hiệu số và lọc số

Chương 1: Tín hiệu và hệ thống

- 1.1. Tín hiệu liên tục và rời rạc
- 1.2. Hệ thống liên tục và rời rạc
- 1.3. Các tính chất của hệ xử lý tín hiệu
- 1.4. Hệ tuyến tính bất biến
- 1.5. Các tính chất của hệ tuyến tính bất biến
- 1.6. Phổ tín hiệu và đáp ứng tần số
- 1.7. Phương trình SP-TT-HSH
- 1.8. Xác định đáp ứng tần số từ PT-SP-TT-HSH

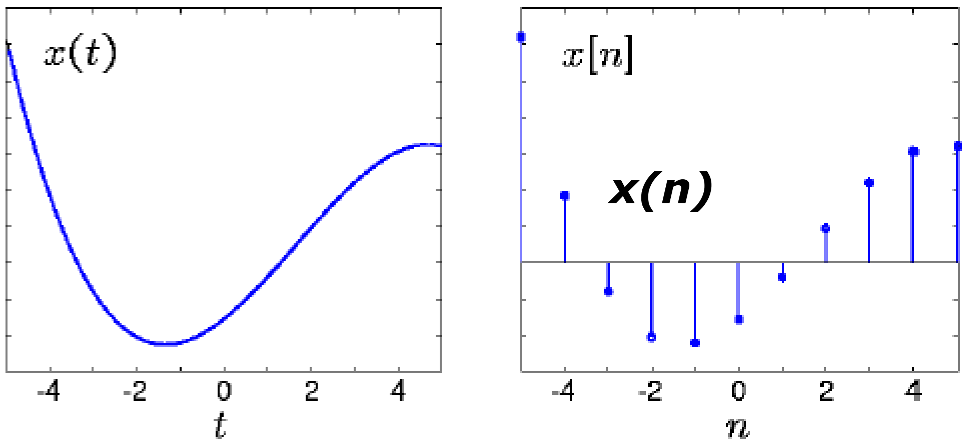
1.1. Tín hiệu liên tục và rời rạc
Khái niệm và phân loại

- Tín hiệu là biểu hiện vật lý của thông tin
- Về mặt toán, tín hiệu là hàm của một hoặc nhiều biến độc lập. Các biến độc lập có thể là: thời gian, áp suất, độ cao, nhiệt độ…
- Biến độc lập thường gặp là thời gian. Trong giáo trình sẽ chỉ xét trường hợp này.
- Một ví dụ về tín hiệu có biến độc lập là thời gian: tín hiệu điện tim.



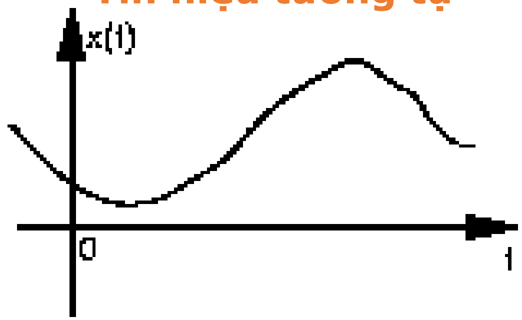
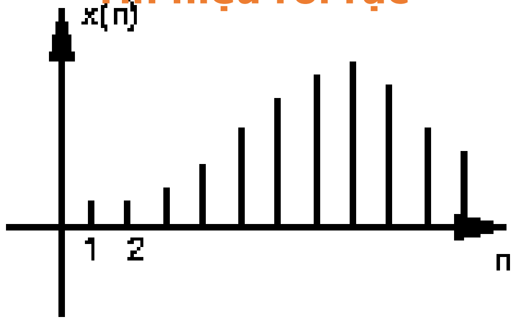
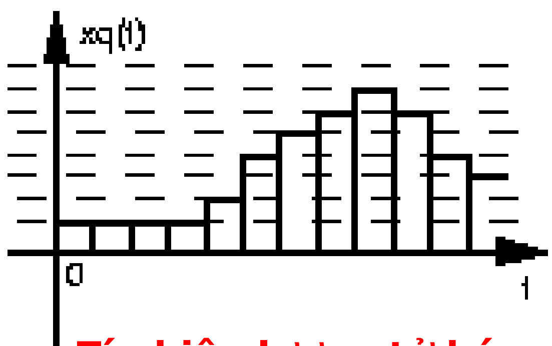
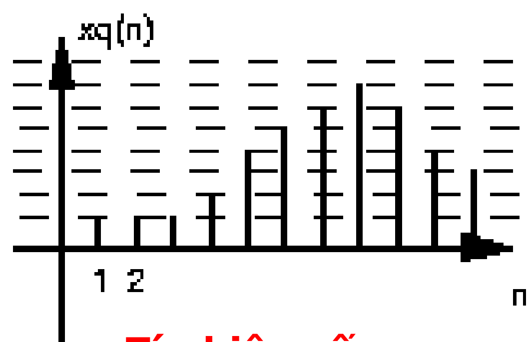
Phân loại

- Xét trường hợp tín hiệu là hàm của biến thời gian



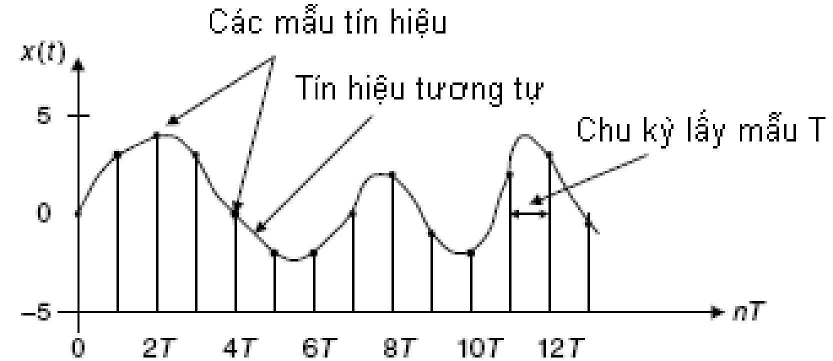
- Tín hiệu tương tự: biên độ (hàm), thời gian (biến) đều liên tục. Ví dụ: *x(t)*
- Tín hiệu rời rạc: biên độ liên tục, thời gian rời rạc. Ví dụ: x(n)

Phân loại tín hiệu

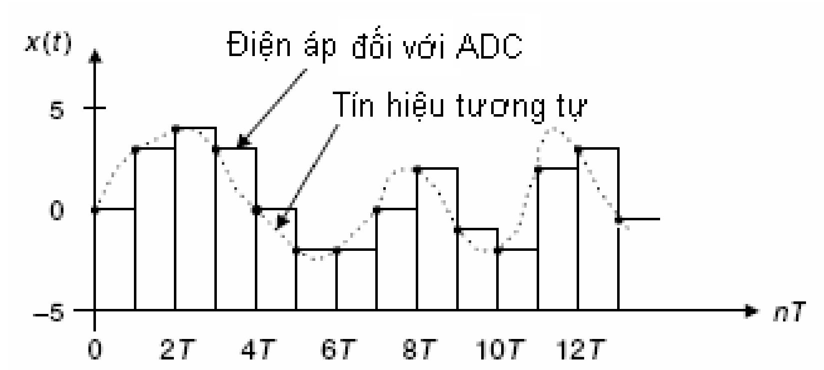
	Thời gian liên tục	Thời gian rời rạc
Biên độ liên tục	**Tín hiệu tương tự** 	**Tín hiệu rời rạc** 
Biên độ rời rạc	 **Tín hiệu lượng tử hóa**	 **Tín hiệu số**

Biến đổi tương tự-số

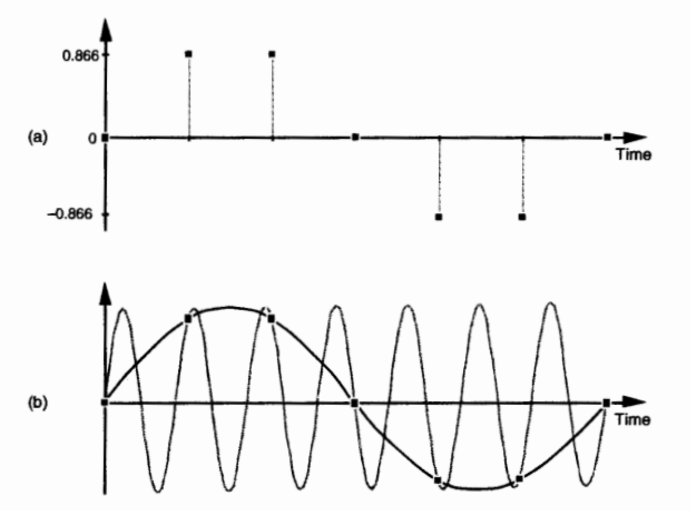
- Lấy mẫu sau đó lượng tử hóa
  - Lấy mẫu (rời rạc hóa thời gian)

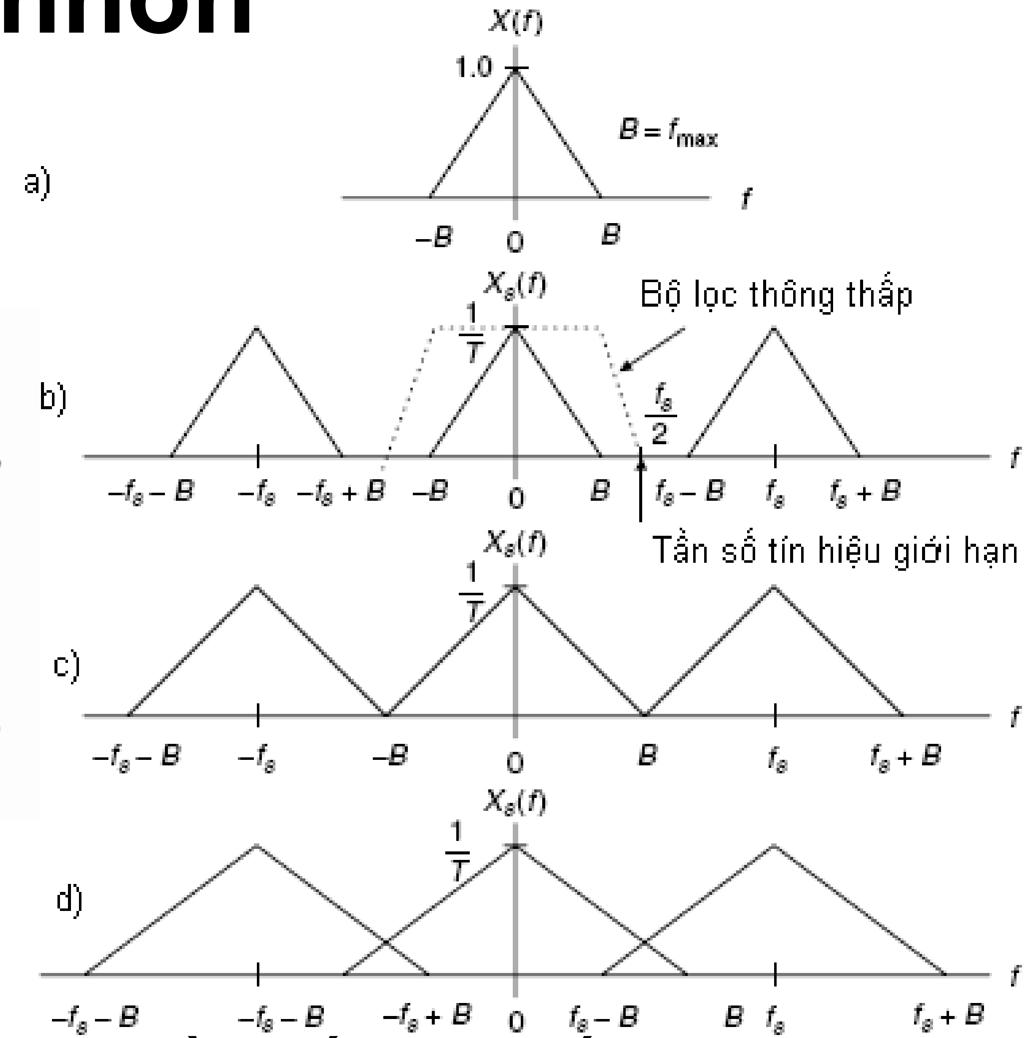


- Chu kỳ lấy mẫu Ts Tần số lấy mẫu Fs = 1/Ts
  - Lượng tử hóa (rời rạc hóa biên độ)



Định lý Shannon





- Fs >= $2f_{max}$ (f_{max}: tần số lớn nhất của tín hiệu)

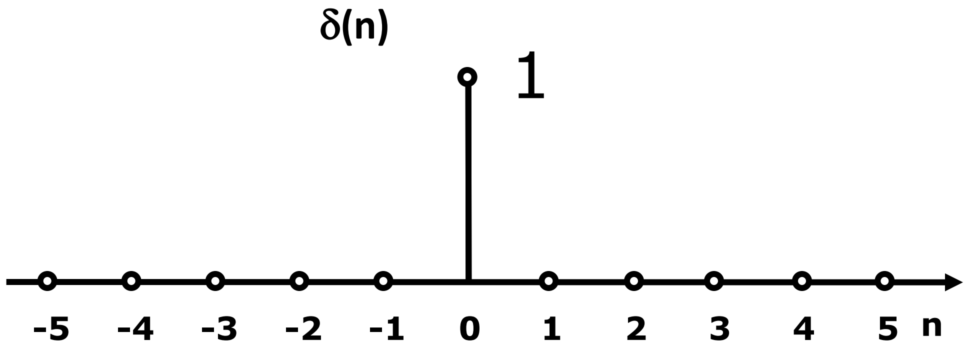
Ký hiệu tín hiệu rời rạc

- Dãy giá trị thực hoặc phức với phần tử thứ n là x(n), $-\infty < n < +\infty$
- n lấy giá trị nguyên
- Quá trình lấy mẫu đều (Ts = hằng số), giả thiết Ts = 1 ? Fs = 1 $\omega_s = 2\pi Fs$.
- x(n) = x(nTs)

Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Xung đơn vị

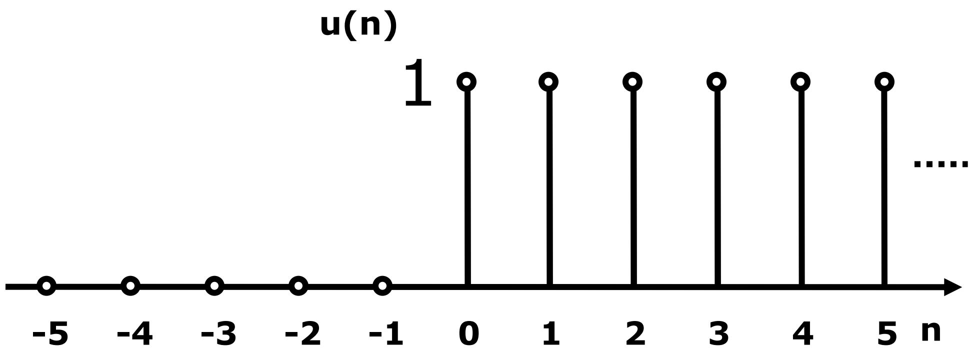
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu bậc đơn vị

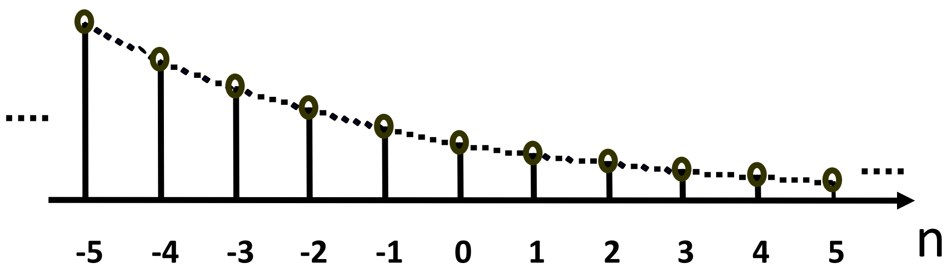
$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu hàm mũ

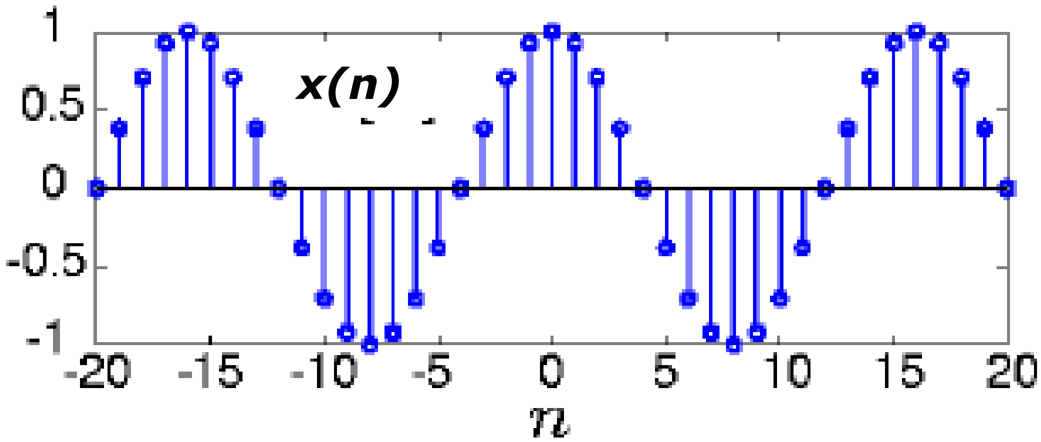
$$x(n)=a^n$$



Một số tín hiệu rời rạc đặc biệt

- Tín hiệu tuần hoàn

$$x(n)=x(n+N),\ N>0\text{: chu kỳ}$$



$$x(n)=\sin[(2\pi/N)(n+n_0)]$$

Các phép toán với tín hiệu rời rạc

- Phép nhân 2 tín hiệu rời rạc

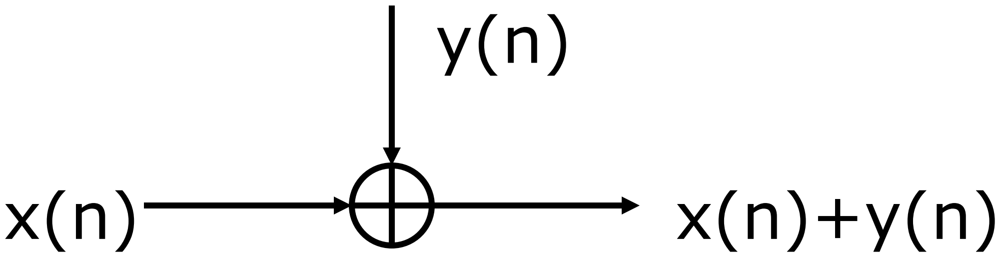
$$\begin{tikzcd} & y(n) \arrow[d] & \\ x(n) \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & x(n).y(n) \end{tikzcd}$$

- Phép nhân tín hiệu rời rạc với hệ số

$$x(n) \xrightarrow{\alpha} \alpha\, x(n)$$

Các phép toán với tín hiệu rời rạc

- Phép cộng 2 tín hiệu rời rạc



- Phép dịch
  - Nếu dịch phải n_0 mẫu, x(n) trở thành y(n)

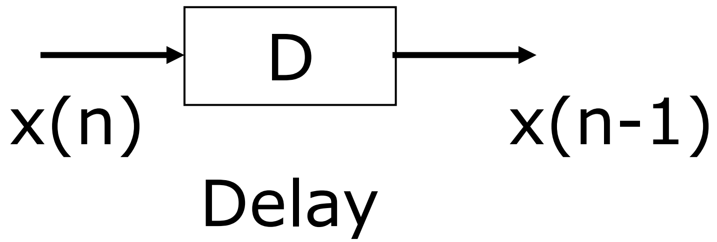
$$y(n) = x(n-n_0)$$

  - Nếu dịch trái n_0 mẫu, x(n) trở thành y(n)

$$y(n) = x(n+n_0)$$

1.3. Các phép toán với tín hiệu rời rạc

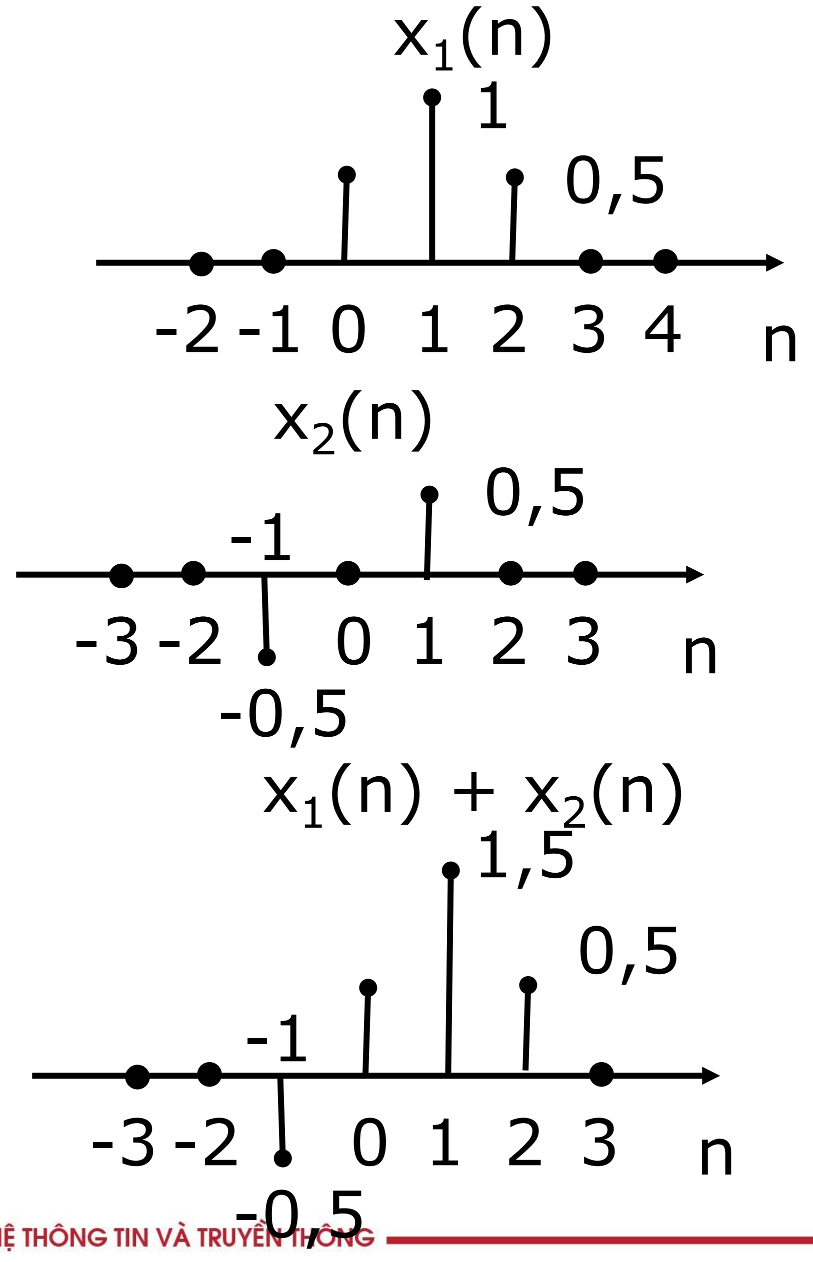
- Trễ 1 mẫu



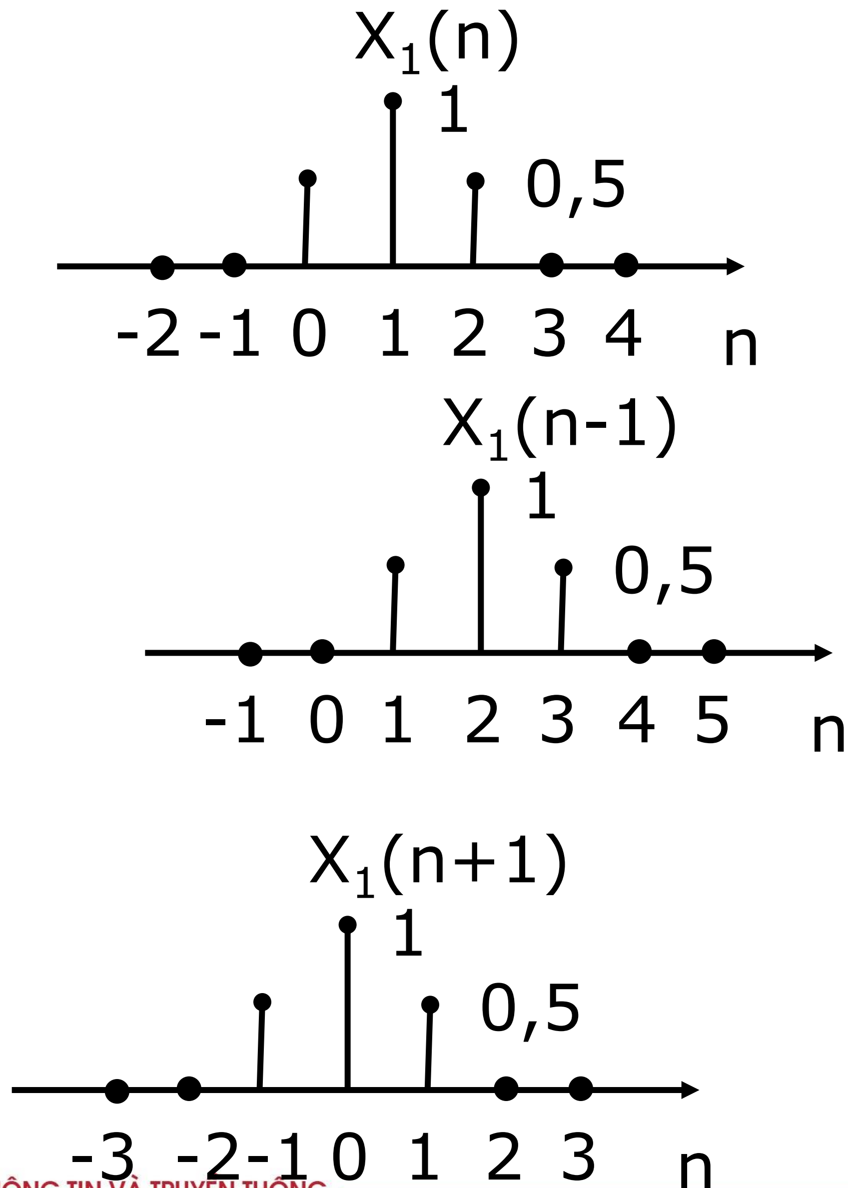
- Một tín hiệu rời rạc bất kỳ x(n) luôn có thể được biểu diễn

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

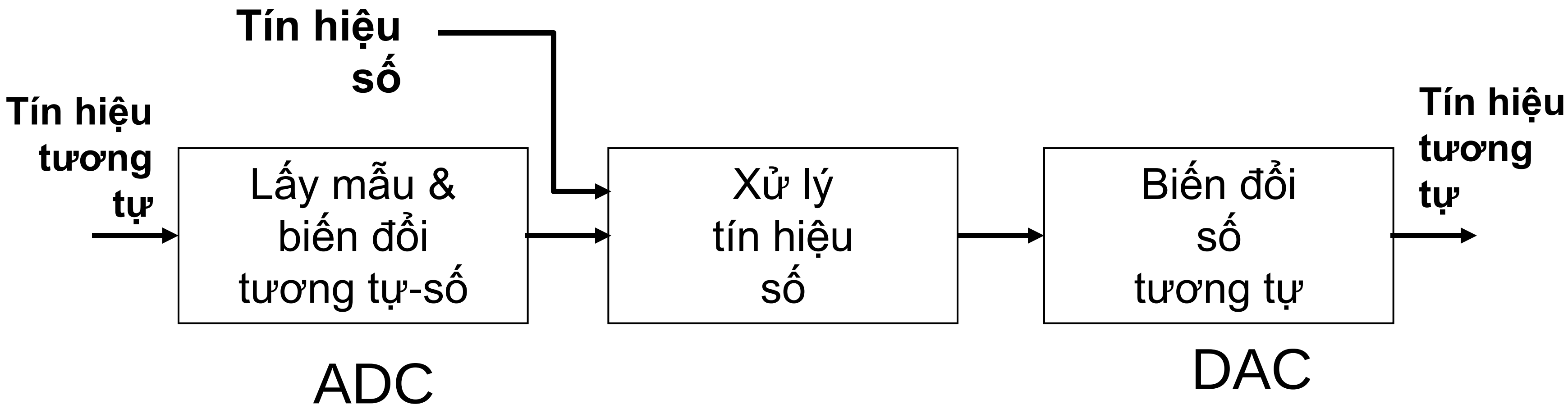
Ví dụ



Ví dụ



1.2. Hệ thống liên tục và rời rạc
Xử lý số tín hiệu

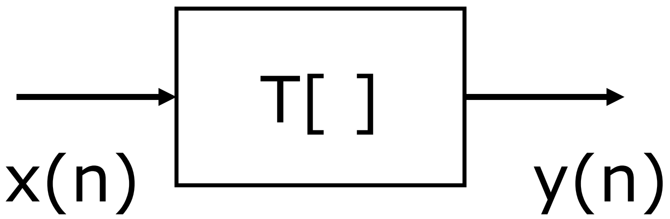


Tại sao lại tín hiệu số ?

- Để có thể xử lý tự động (bằng máy tính)
- Giảm được nhiễu
- Cho phép sao lưu nhiều lần mà chất lượng không thay đổi
- Các bộ xử lý tín hiệu số (DSP) khi được chế tạo hàng loạt có chất lượng xử lý đồng nhất và chất lượng xử lý không thay đổi theo thời gian

1.3. Các tính chất của hệ xử lý tín hiệu

- x(n): tín hiệu vào (tác động)
- y(n): tín hiệu ra (đáp ứng)
- Phân loại dựa trên các điều kiện ràng buộc đối với phép biến đổi T



$y(n)=T[x(n)]$

- Hệ tuyến tính nếu thỏa mãn nguyên lý xếp chồng

1.4. Hệ tuyến tính bất biến

- $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$, $x_2(n) \rightarrow y_2(n)$

  $T[ax_1(n)+bx_2(n)] = aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$

  $= a\,y_1(n) + b\,y_2(n)$

- $y(n) = T[x(n)]$

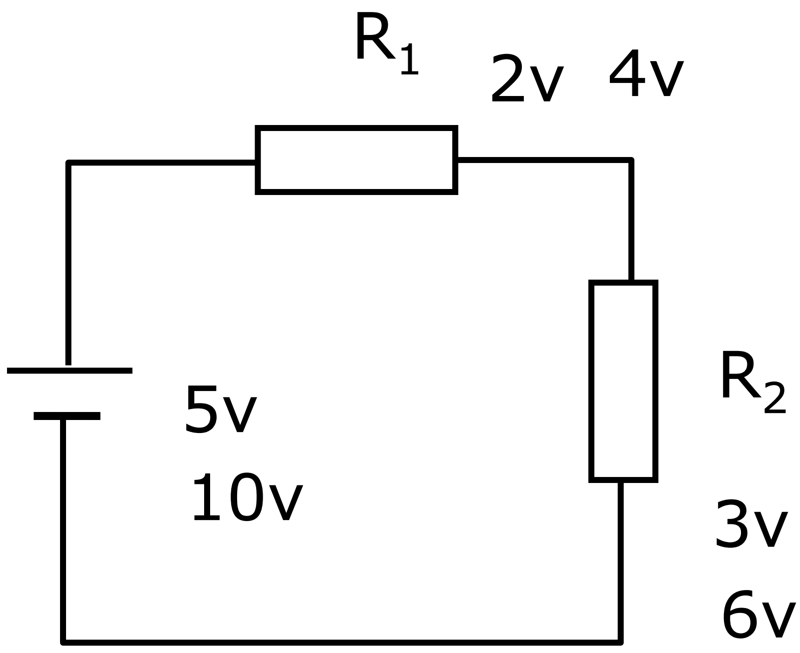
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- Nếu hệ tuyến tính

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)]$$

Ví dụ



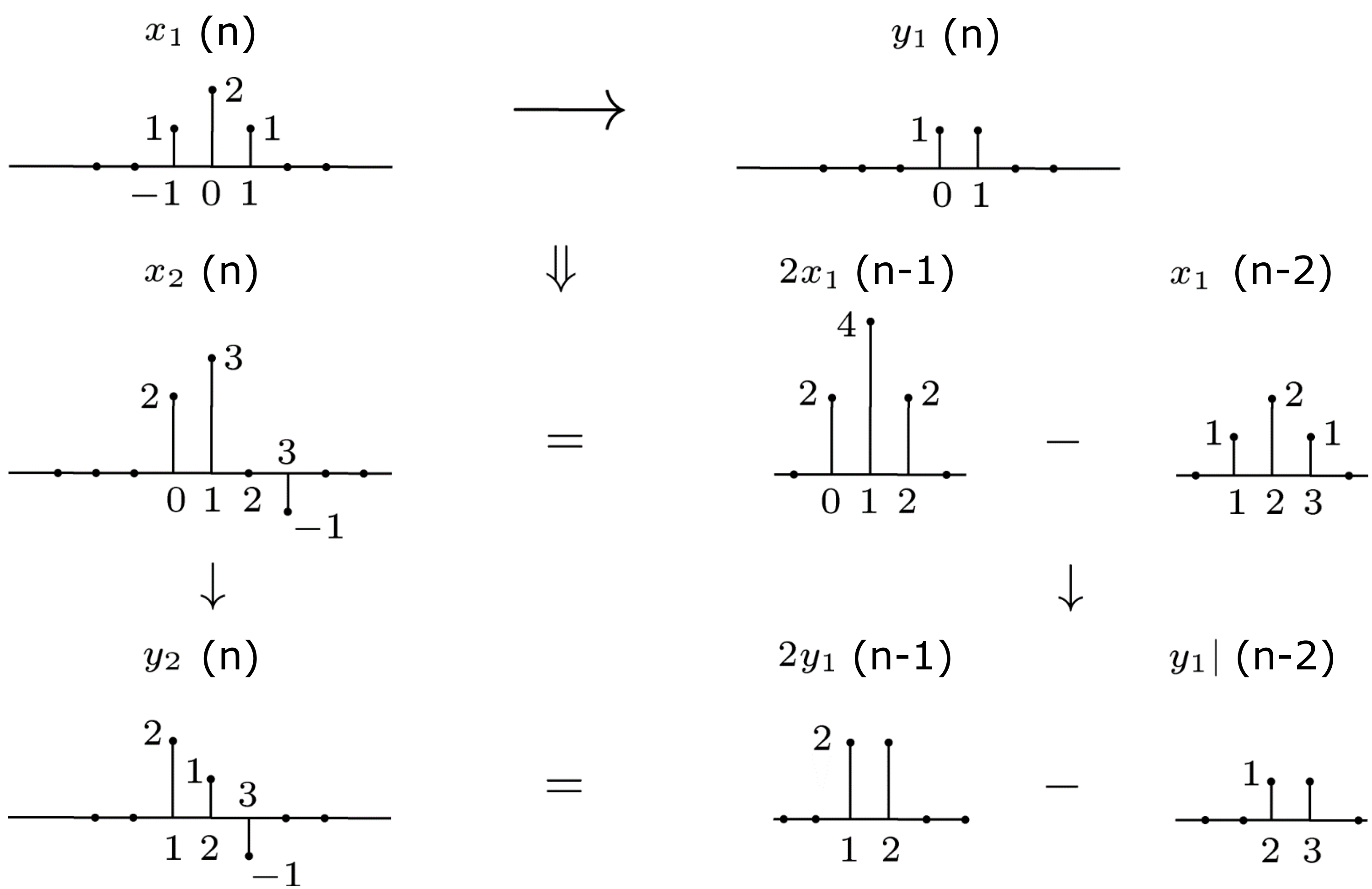
Hệ tuyến tính bất biến

- Nếu hệ bất biến theo thời gian
  - Tác động $\delta(n)$ cho đáp ứng h(n)
  - Tác động $\delta(n-k)$ cho đáp ứng h(n-k)
- Với hệ tuyến tính bất biến (TTBB)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

- h(n) là đáp ứng xung của hệ,
- y(n) = x(n) * h(n). * : Phép tổng chập (lấy chập - convolution)

Ví dụ hệ TTBB



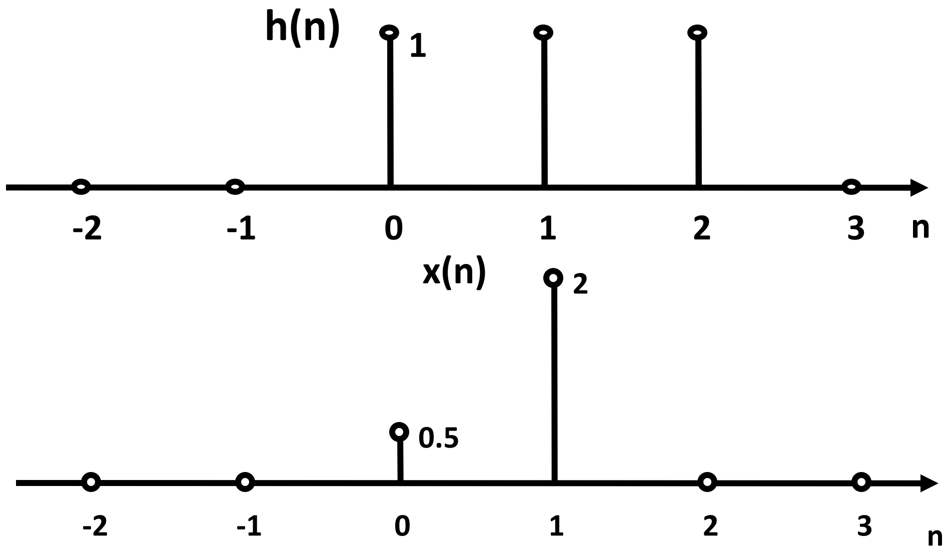
1.4. Phân loại các hệ xử lý tín hiệu rời rạc

- Độ dài tín hiệu: Số lượng mẫu khác 0 của tín hiệu đó
- Phân biệt các hệ TTBB dựa trên chiều dài của đáp ứng xung
  - FIR: Hệ có đáp ứng xung hữu hạn (Finite Impulse Response)
  - IIR: Hệ có đáp ứng xung vô hạn (Infinite Impulse Response)
- Năng lượng tín hiệu

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Ví dụ tính tổng chập

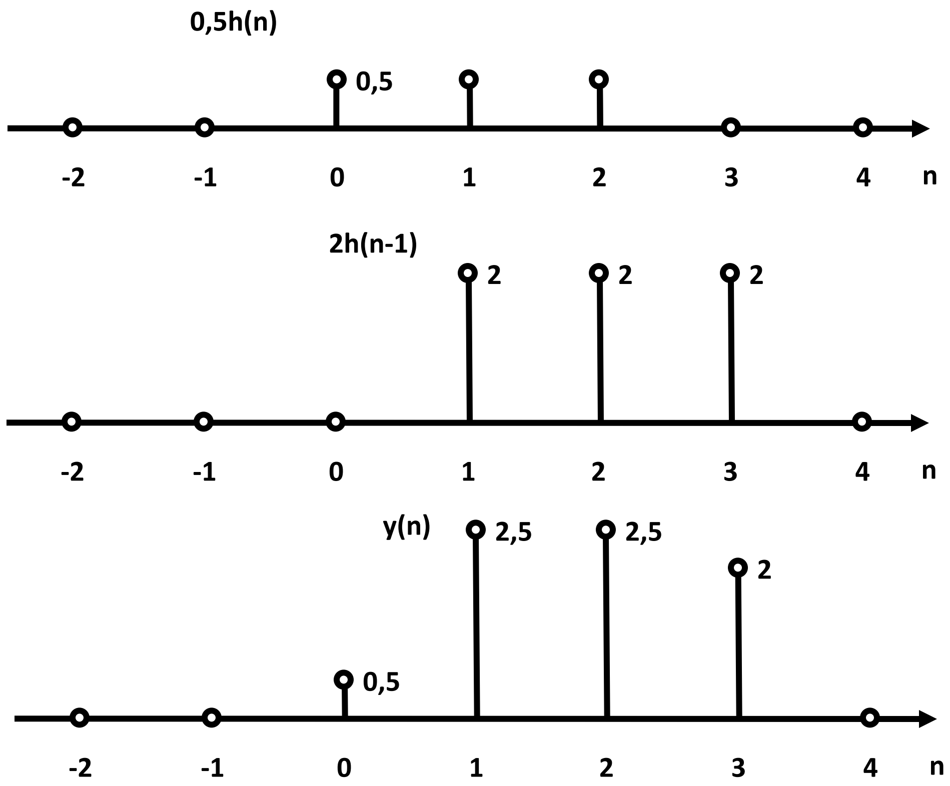
- Ví dụ 1: Tín hiệu vào và đáp ứng xung của hệ TTBB như hình vẽ. Hãy tính tín hiệu ra



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{1} x(k)h(n-k)$$

Ví dụ tính tổng chập

$y(n) = x(0)h(n-0) + x(1)h(n-1) = 0{,}5h(n) + 2h(n-1)$



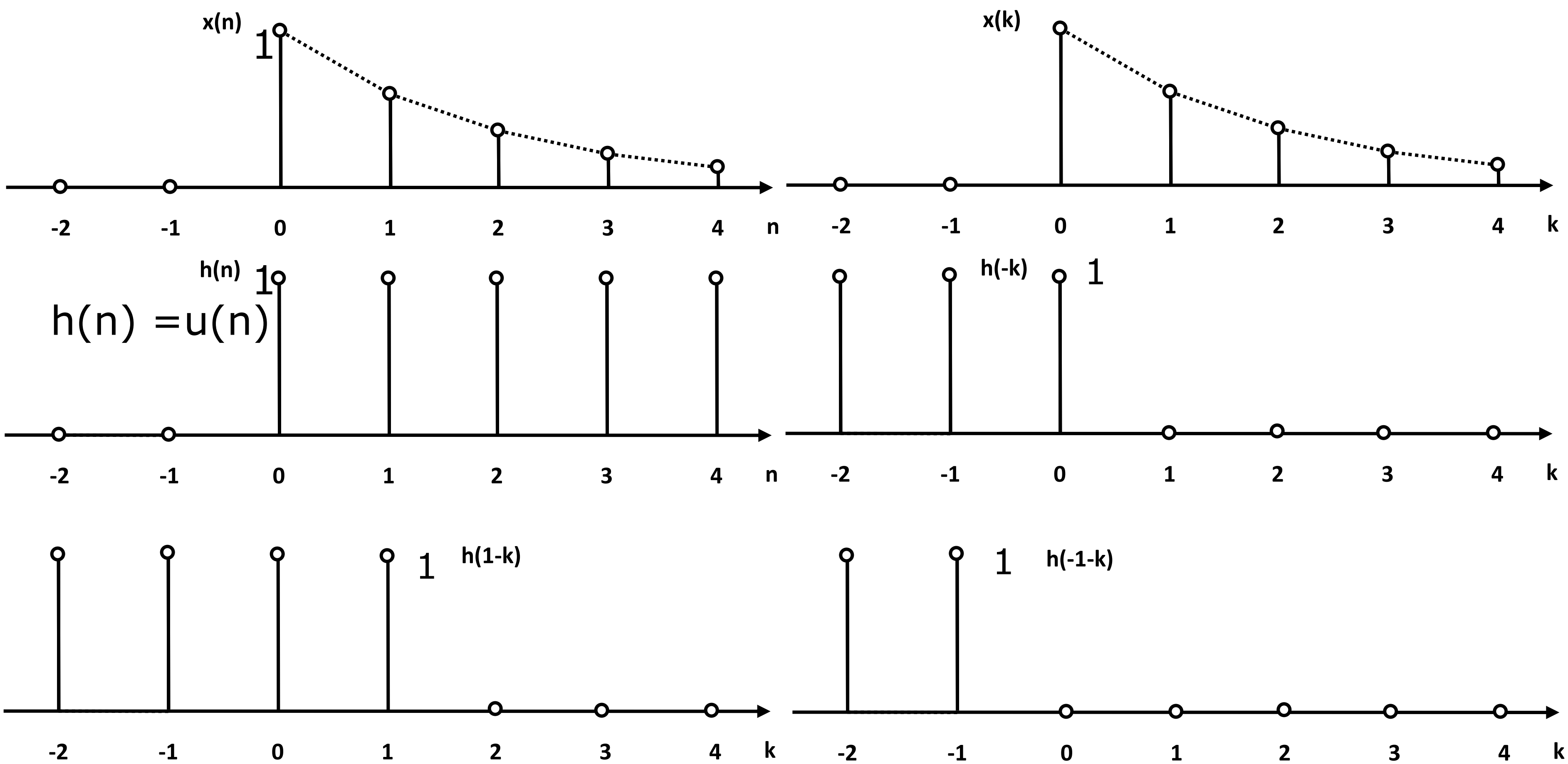
Ví dụ tính tổng chập

- Ví dụ 2: Cho x(n) và h(n) như hình vẽ. Hãy tính y(n)

$$x(n) = \alpha^n u(n),\ 0<\alpha<1$$

$$h(n) = u(n)$$

Ví dụ tính tổng chập



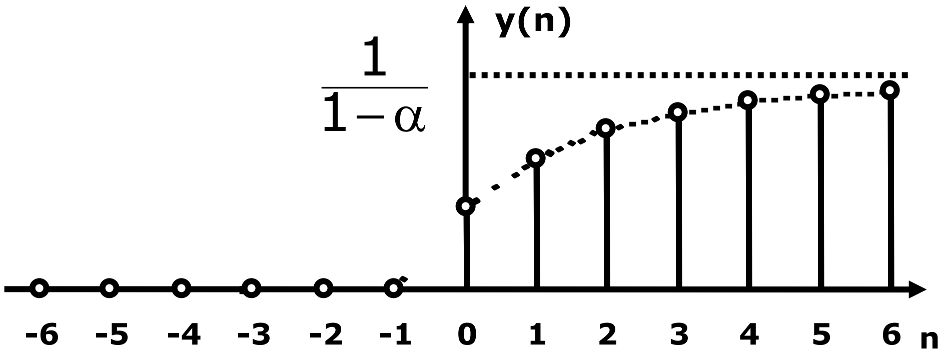
Ví dụ tính tổng chập

- n <0: y(n)=0
- n=0: y(n) = 1
- n>0

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

- Với mọi giá trị của n:

$$y(n)=\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u(n)$$



1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Giao hoán

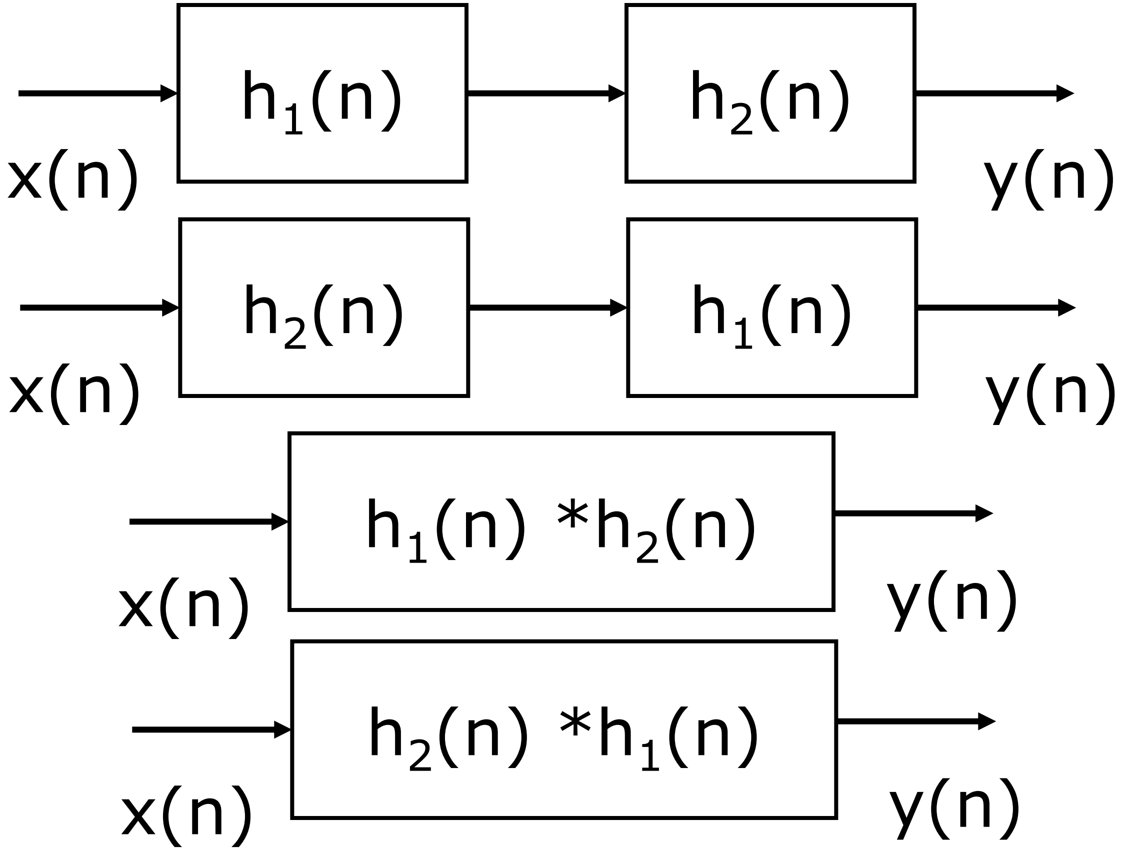
$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

- Kết hợp

$$[y(n)*x(n)]*z(n)=y(n)*[x(n)*z(n)]$$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

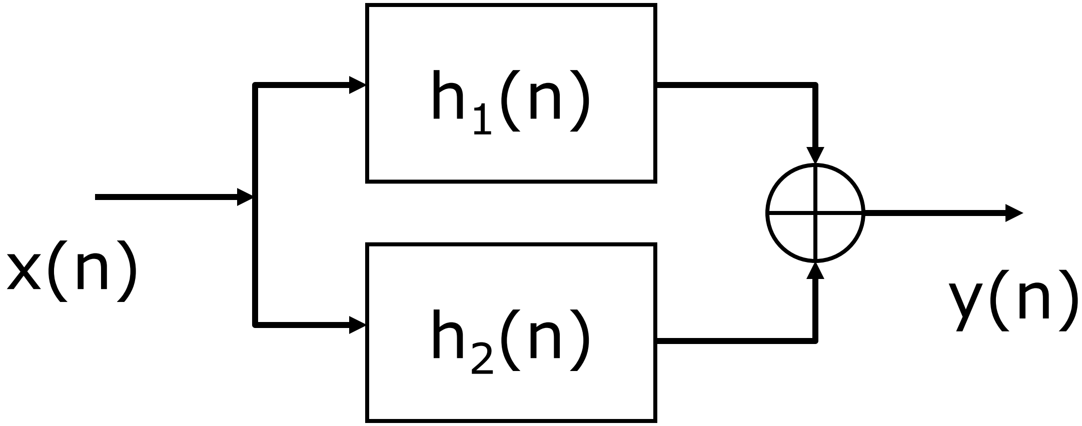
- Các hệ tương đương

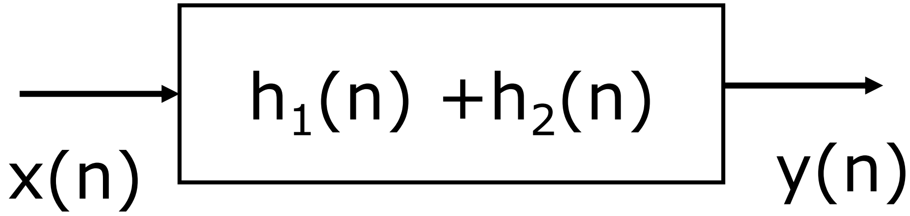


1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Phân phối

$$x(n)*(h_1(n)+h_2(n))=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$





1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ có nhớ và không nhớ
  - Không nhớ: tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở cùng thời điểm.

  Ví dụ: $y(n)=A.x(n)$

  - Có nhớ: tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở nhiều thời điểm

  Ví dụ: $y(n) = x(n) – x(n-1)$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ đồng nhất

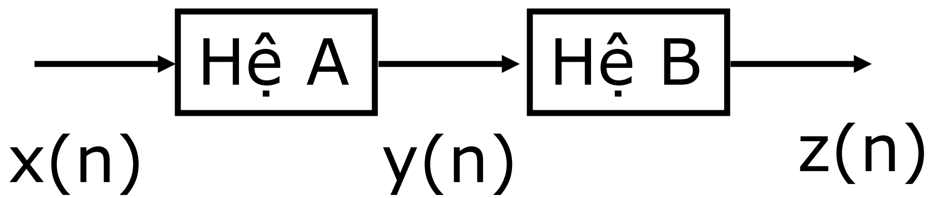
  Tín hiệu ra bằng tín hiệu vào

  $$y(n) = x(n)$$

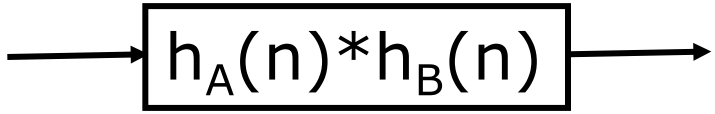
- Hệ A là đảo của hệ B nếu mắc nối tiếp 2 hệ này ta được 1 hệ đồng nhất

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ đảo(A) và hệ khả đảo (B)



$$x(n) = z(n)$$



$$h(n) = h_A(n)*h_B(n) = \delta(n)$$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả
  - Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở hiện tại và quá khứ
  - Chưa có tác động thì chưa có đáp ứng
  - Đáp ứng không xảy ra trước tác động

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả
  - Nếu x(n) =0 với n < n_0 thì y(n) =0 với n < n_0
  - Nếu hệ nhân quả thì y(n) không phụ thuộc x(k) với k > n
  - h(n-k) = 0 với k > n tức là h(n) = 0 với n < 0

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ nhân quả

  Với hệ nhân quả công thức tính tín hiệu ra trở thành

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Chỉ có hệ nhân quả thì mới thực hiện được trên thực tế.
- Tín hiệu nhân quả: $x(n) = 0$ với $n < 0$

1.5.Tính chất của hệ TTBB

- Hệ ổn định
  - Với tín hiệu vào có giá trị hữu hạn thì tín hiệu ra cũng có giá trị hữu hạn
  - Giả thiết |x(n)|<B

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|$$

$$|y(n)| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

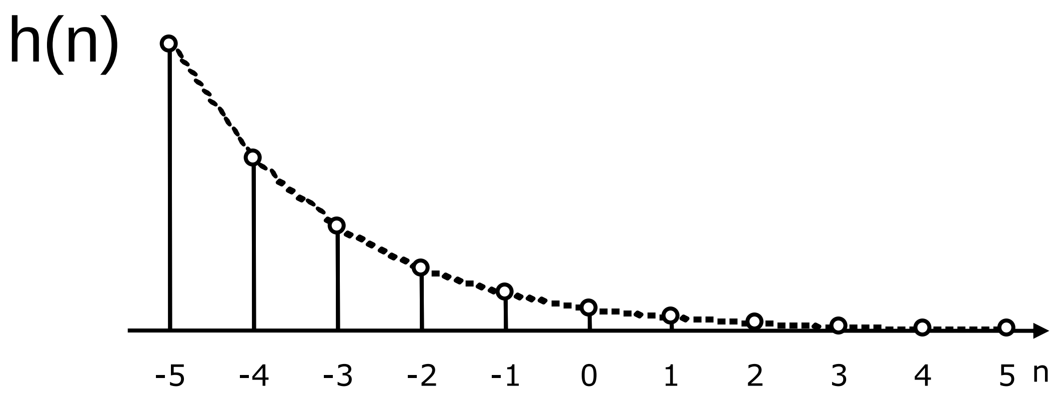
$$|y(n)| \le B\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

  - Để y(n) có giá trị hữu hạn:

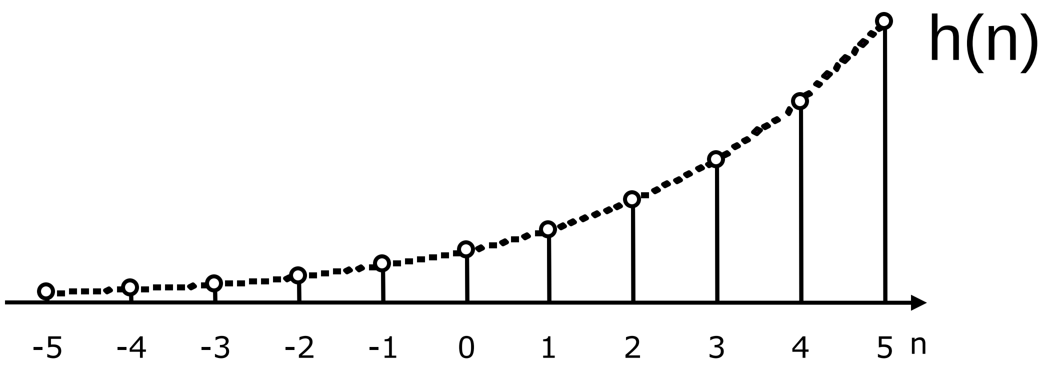
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Ví dụ đáp ứng xung của hệ ổn định và không ổn định

- Ổn định



- Không ổn định



Ví dụ

- Xét tính nhân quả và ổn định của hệ có đáp ứng xung $h(n) = a^n u(n)$
  - Đây là hệ nhân quả vì $h(n) = 0$ với $n < 0$
  - Xét tính ổn định

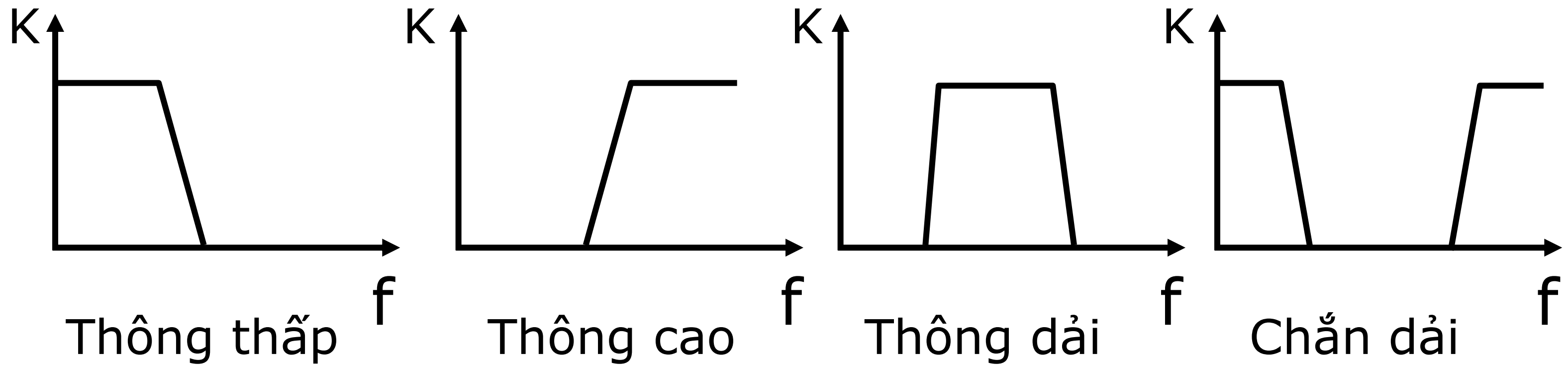
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

    - Đây là chuỗi lũy thừa, chuỗi này
    - hội tụ nếu $|a|<1$
    - phân kỳ nếu $|a|\geq 1$

  - Hệ chỉ ổn định nếu $|a|<1$

1.6. Phổ tín hiệu và đáp ứng tần số của hệ TTBB

- Đáp ứng tần số: cho biết tính chất truyền đạt của hệ đối với các thành phần tần số khác nhau của tín hiệu vào



- Để xét biểu diễn tần số của hệ TTBB, tác động của hệ có dạng:

$$x(n) = e^{j\omega n} \qquad -\infty < n < \infty$$

Hệ có đáp ứng xung h(n)

1.6. Đáp ứng tần số của hệ TTBB

- Đáp ứng của hệ

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = x(n).\, H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

- $H(e^{j\omega})$ cho biết sự truyền đạt của hệ đối với mỗi tần số ω nên $H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của hệ.

1.6. Đáp ứng tần số của hệ TTBB

- $H(e^{j\omega})$ là hàm phức nên có thể được biểu diễn theo phần thực, phần ảo:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

hoặc theo biên độ-pha:

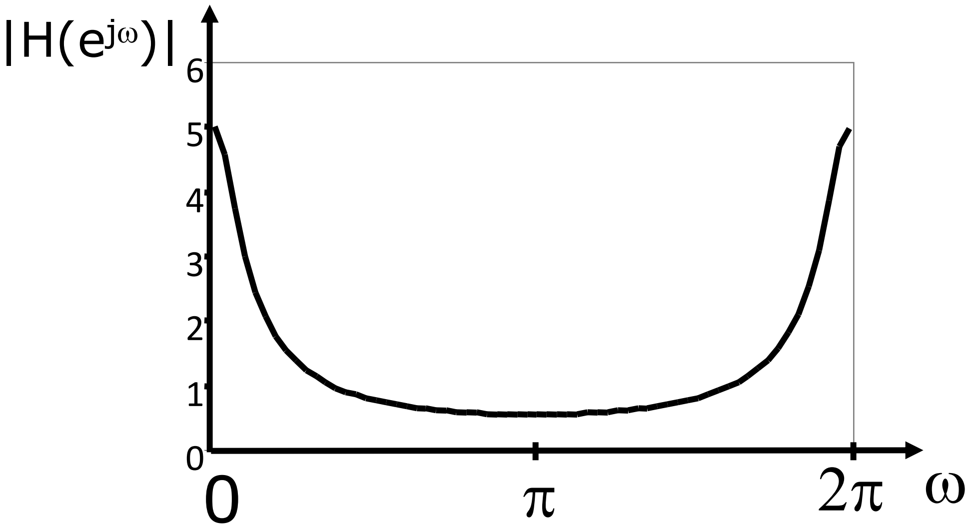
$|H(e^{j\omega})|$: đáp ứng biên độ
$\arg[H(e^{j\omega})]$: đáp ứng pha

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

Ví dụ xác định đáp ứng tần số

- Hệ TTBB có đáp ứng xung $h(n)=a^n u(n)$, $|a|<1$. Xác định đáp ứng tần số của hệ

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$



Nhận xét

- $H(e^{j\omega})$ là hàm liên tục theo ω và tuần hoàn theo ω với chu kỳ 2π.
- Nếu h(n) là thực, đáp ứng biên độ đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$.
- Nếu đáp ứng xung là thực, chỉ cần xét khoảng tần số $0 \le \omega \le \pi$.

$$x_1(n) = Ae^{j\omega n} \rightarrow y_1(n) = H(e^{j\omega})Ae^{j\omega n} = A\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}.e^{j\omega n}$$

$$x_2(n) = Ae^{-j\omega n} \rightarrow y_2(n) = H(e^{-j\omega})Ae^{-j\omega n} = A\left|H(e^{j\omega})\right|e^{-j\arg[H(e^{j\omega})]}.e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A\cos\omega n$$

$$\rightarrow y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A\left|H(e^{j\omega})\right|\cos(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})))$$

$$x(n) = A\sin\omega n$$

$$\rightarrow y(n) = \frac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)] = A\left|H(e^{j\omega})\right|\sin(\omega n + \arg(H(e^{j\omega})))$$

$$x(n)=\cos(\frac{\pi}{3}n)\rightarrow y(n)=H(e^{j\frac{\pi}{3}})\cos(\frac{\pi}{3}n)=\left|H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right|e^{j\arg[H(e^{j\frac{\pi}{3}})]}\cos(\frac{\pi}{3}n)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{3})-j\sin(\frac{\pi}{3}))}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\left|H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right|=\left|\frac{1}{3/4-j\sqrt{3}/4}\right|=\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\arg\left[H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right]=\arg\left[\frac{4}{3-j\sqrt{3}}\right]=-\arg\left(3-j\sqrt{3}\right)=-arctg(\sqrt{3}/3)=-\pi/6$$

$$y(n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\pi n/3-\pi/6)$$

1.7. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Hệ tương tự có quan hệ vào-ra theo phương trình vi phân

- Hệ rời rạc có quan hệ vào-ra theo PT-SP-TT-HSH

1.7. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Dạng tổng quát

  a_k, b_k là các hệ số.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- Trường hợp N = 0

  So sánh với công thức tổng quát

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

$$h(k) = \begin{cases} \dfrac{b_k}{a_0} & 0 \le k \le M \\ 0 & \text{k cßn l¹i} \end{cases} \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

Hệ có đáp ứng xung hữu hạn (FIR) hay hệ không truy hồi

1.7. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PT-SP-TT-HSH)

- Trường hợp N > 0

$$y(n) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right\}$$

Hệ có đáp ứng xung vô hạn (IIR), hay hệ truy hồi

1.8. Xác định đáp ứng tần số từ PT-SP-TT-HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Lấy biến đổi Fourier cả 2 vế:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)\, e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)\, e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{M} b_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)\, e^{-j\omega n}$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Đáp ứng tần số xác định bởi các hệ số của PT-SP

Bài tập làm tại lớp (1/3)

1. Giả sử x(n) = 0 với n < - 2 và n > 4. Với mỗi tín hiệu sau đây, hãy xác định giá trị n để cho tín hiệu đó tương ứng bằng 0.

   a) x(n-3) b) x(n+4) c) x(-n) d) x(-n+2) e) x(-n-2)

2. Xét hệ S có tín hiệu vào x(n) và tín hiệu ra y(n). Hệ này có được bằng cách mắc hệ S_1 nối tiếp với hệ S_2 theo sau. Quan hệ vào ra đối với 2 hệ S_1 và S_2 là:

   S1 : $y_1(n) = 2x_1(n) + 4x_1(n-1)$

   S2 : $y_2(n) = x_2(n-2) + (1/2)x_2(n-3)$

   với $x_1(n)$, $x_2(n)$ ký hiệu tín hiệu vào.

   a) Hãy xác định quan hệ vào ra cho hệ S

   b) Quan hệ vào ra của hệ S có thay đổi không nếu thay đổi thứ tự S_1 và S_2 (tức là S_2 nối tiếp với hệ S_1 theo sau).

Bài tập làm tại lớp (2/3)

3. Tín hiệu rời rạc x(n) cho như hình vẽ sau. Hãy vẽ các tín hiệu:

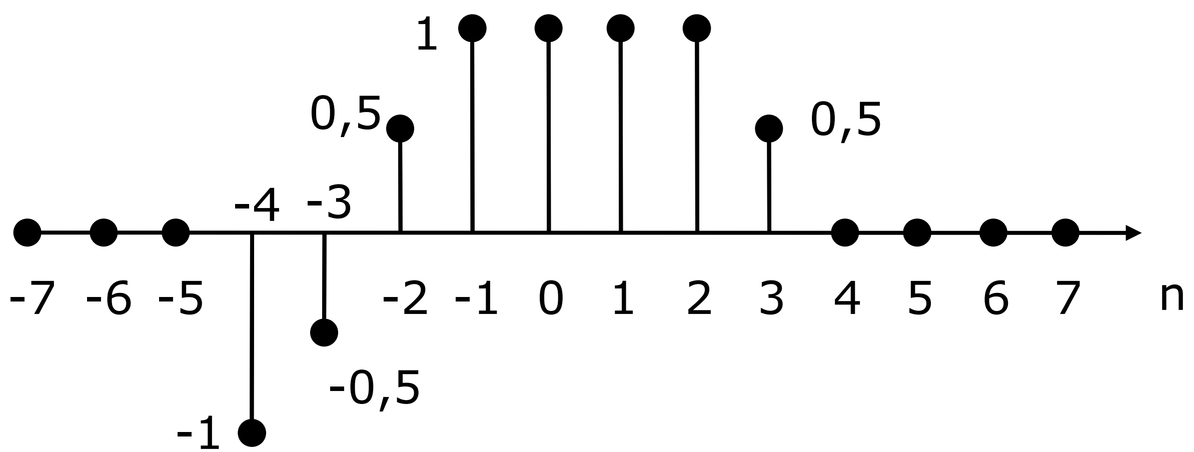
a) $x(n-5)$ b) $x(4-n)$ c) $x(2n)$

d) $x(2n+2)$ e) $x(n)u(2-n)$

f) $x(n-2)u(3-n)$ g) $x(n-3)\,\delta(n-2)$

h) $(1/2)x(n)+(1/2)(-1)^n x(n)$

i) $x((n-1)^2)$



Bài tập làm tại lớp (3/3)

4. Cho $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - 3\delta(n-3)$

   $h(n) = 3\delta(n+1) + 3\delta(n-1)$

   Hãy tính và vẽ kết quả của các tổng chập sau:

   a) $y_1(n) = x(n) * h(n)$

   b) $y_2(n) = x(n+2) * h(n)$

Bài tập làm tại lớp (3/3)

5. Hệ TT-BB có PT-SP: $y(n)=(1/2)[x(n)-x(n-1)]$

   a) Xác định đáp ứng xung của hệ

   b) Xác định đáp ứng tần số và vẽ dạng đáp ứng biên độ