Tuần 4: Tích phân phụ thuộc tham số

1. Xét sự hội tụ đều của các tích phân sau

(a) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx$

(b) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^y e^{-x} dx$ với $y \in [0, b]$

(c) $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{x^y}$ với $1 < y_0 \leq y < +\infty$

(d) $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{x^y}$ với $1 < y < +\infty$

(e) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} dx$

(f) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y e^{-x^2 y^2} dy$ với $y \in [0, b]$

(g) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$

(h) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{x^4 + y^2} dx$

2. Tính các tích phân sau

(a) $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln x dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\ln x} dx$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

(d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin x dx$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + \alpha^2)}{x^2 + \beta^2} dx$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

(f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha x) \arctan(\beta x)}{x^2} dx$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(g)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ với $\alpha \in \mathbb{R}$

(h)* $\int\limits_0^1 (x \ln x)^n \sin(\ln x) dx$ với $n \in \mathbb{N}$

3. Sử dụng hàm Gamma và Beta để tính các tích phân sau

(a) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$

(b) $\int\limits_0^2 x^6 \sqrt[3]{(8 - x^3)^2} dx$

(c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos^6 \varphi d\varphi$

(e) $\int\limits_0^{\pi} \sin^{99} \varphi d\varphi$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{100} \varphi \sin 4\varphi d\varphi$

(g) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x^2)^8} dx$

(h)* $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1 - x)^{2p-1}(1 + x)^{2p+1}}{(1 + x^2)^{p+q}} dx$

4. Tính diện tích miền phẳng dưới hạn bởi $\begin{cases} x^{n+1} + y^{n+1} \leq x^n + y^n \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$