BÁCH KHOA-ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

BÀI GIẢI THAM KHẢO

GIẢI TÍCH II

Đề thi giữa kì 20163-20193

Người biên soạn: Phạm Thanh Tùng

(Tự Động Hóa – ĐHBKHN)

Hà Nội, Tháng 5 năm 2021

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- Bài giảng môn Giải tích II, thầy Bùi Xuân Diệu.
- Bài tập giải sẵn Giải tích 2 (Tóm tắt lý thuyết và chọn lọc), thầy Trần Bình.
- Bài tập Toán học cao cấp, tập hai: Giải tích, GS.TS Nguyễn Đình Trí (chủ biên), PGS.TS. Trần Việt Dũng, PGS.TS. Trần Xuân Hiền, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo.
- Bộ đề cương Giải tích II, Viện Toán ứng dụng và Tin học.
- Bộ đề thi Giữa kì và Cuối kì môn Giải tích II Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.

Tài liệu được biên soạn dựa trên kinh nghiệm cá nhân, dù đã rất cố gắng nhưng với những hạn chế nhất định về kiến thức, kĩ năng chắc chắn vẫn sẽ tồn tại các lỗi sai tính toán, lỗi đánh máy, … chưa được kiểm tra hết, mọi ý kiến góp ý bạn đọc vui lòng gửi qua link fb "fb.com/tungg810" để mình có thể kiểm tra, hoàn thiện bộ tài liệu. Xin chân thành cảm ơn!

PHẦN I:
ĐỀ THI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20163

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại $M(2; -1; 1)$

Câu 2: (1đ). Tìm hình bao của họ đường thẳng $y = 2cx - c^2$ với c là tham số.

Câu 3: (1đ). Tìm điểm có độ cong lớn nhất của đường cong $y = \ln x$

Câu 4: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^1 f(x,y)dy$$

Câu 5: (2đ). Tính các tích phân kép sau:

$a)$ $\iint_D (3x + 2y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 1$

$b)$ $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0\}$

Câu 6: (1đ). Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$z = x^2 + y^2 \text{ và } z = 2x + 4y$$

Câu 7: (2đ). Tính tích phân bội ba $\iiint_V ydxdydz$ trong đó:

a) V giới hạn bởi các mặt

$$z = 0, z = x^2, y = 2x^2 \text{ và } y = 4 + x^2$$

b) V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 2y$

Câu 8: (1đ). Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} dx \text{ với } \alpha \ge 0$$

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20172

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\ln(x^2+3y)-3z^3=2$ tại điểm $M(1,0,-1)$.

Câu 2: (1đ). Tìm hình bao của họ đường cong $cx^2-2y-c^3+1=0$ với c là tham số.

Câu 3: (1đ). Tính độ cong của đường $y=\ln(\sin x)$ tại điểm ứng với $x=\pi/4$.

Câu 4: (2đ). Tính các tích phân sau:

$a)\ \iint\limits_D (x^2-4y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y=x, x=1$ và $y=0$

$b)\ \iint\limits_D (x^2-xy+y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y=-3x+1, y=-3x+2, y=x$

và $y=x+2$

Câu 5: (1đ). Tính tích phân sau:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt[4]{x}}^1 \frac{1}{y^5+1}dy$$

Câu 6: (1đ). Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$z=x^2+2y^2 \text{ và } z=3-2x^2-y^2$$

Câu 7: (1đ). Tính tích phân bội ba $\iiint_V (3xy^2-4xyz)dxdydz$ trong đó V là miền xác định bởi

$1\le y\le 2, 0\le xy\le 2, 0\le z\le 2$

Câu 8: (1đ). Tính tích phân bội ba $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $y=\sqrt{x^2+4z^2},\ y=2$.

Câu 9: (1đ). Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx \text{ với } a,b>0$$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 4 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20172

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = 4\sin^2 t\,, y = 4\cos t\,, z = 2\sin t + 1$ tại điểm $M\left(1; -2\sqrt{3}; 2\right)$

Câu 2: (1đ). Tìm hình bao của họ đường thẳng $3cx - y - c^3 = 0$, với c là tham số.

Câu 3: (1đ). Tính độ cong của đường cong $x = \sin t + t\cos t\,, y = \cos t + t\sin t$ tại điểm ứng với $t = \pi$

Câu 4: (2đ). Tính các tích phân kép sau:

a) $\iint\limits_D 2xdxdy\,, D$ là miền giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 2 - x$

b) $\iint\limits_D y\sqrt{x^2 + y^2}dxdy\,,$ với $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le y\}$

Câu 5: (1đ). Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$x = 9y^2 + z^2 \text{ và } x = 9$$

Câu 6: (1đ). Tính tích phân sau:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xye^{yz^2} dz$$

Câu 7: (1đ). Tính $\iint_D (4xy + 3y)dxdy$ với $D: 1 \le xy \le 4, x \le y \le 9x.$

Câu 8: (1đ). : Tính tích phân bội ba $\iiint_V zdxdydz$ trong đó V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 \le z, z \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

Câu 9: (1đ). Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3} - e^{-bx^3}}{x} dx \text{ với } a, b > 0$$

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20173

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Tính độ cong tại $t = 0$ của đường $\begin{cases} x = e^{-t} - \sin t \\ y = e^{-t} - \cos t \end{cases}$

Câu 2: (1đ). Lập phương trình pháp tuyến và tiếp diện tại $A(1,1,0)$ của mặt $z = \ln(3x - 2y)$

Câu 3: (1đ). Cho hàm vecto $\vec{p}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, e^{-t})$ và $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{p}(t)$. Tính $\overrightarrow{r'}(0)$

Câu 4: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_{-1}^{2} dx \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dxdy$

Câu 5: (1đ). Tính $\iint_D (3x + 2y) dxdy$, D giới hạn bởi:

$$x = 0, y = 0, x + y = 1$$

Câu 6: (1đ). Tính $\iint_D (x + y)(x - 2y - 1)^2 dxdy$, D giới hạn bởi $x + y = 0, x + y = 3, x - 2y = 1, x - 2y = 2$

Câu 7: (1đ). Tính $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, V giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 2$

Câu 8: (1đ). Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad x = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Câu 9: (1đ). Tính

$$\iiint\limits_V \frac{3x^2 - y^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$$

Với V là nửa khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0$

Câu 10: (1đ) Tìm giới hạn

$$\lim_{y \to 0} \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x + y)}{1 + x^2 + y^2} dx$$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20182

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2+y^2-e^z-2yxz=0$ tại điểm $M(1,0,0)$.

Câu 2: (1đ). Tìm hình bao của họ đường cong sau: $(x+C)^2+(y-2C)^2=5$.

Câu 3: (1đ). Tính tích phân kép $\iint_D (x-4y)dxdy$ với D giới hạn bởi parabol $y=x^2-1$ và trục Ox.

Câu 4: (1đ). Tính tích phân lặp:

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^1 \frac{1-\cos \pi y}{y^2} dy$$

Câu 5: (1đ). Tính diện tích phần hình tròn $x^2+y^2=2y$ nằm ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$

Câu 6: (3đ). Tính các tích phân bội ba sau:

$a)$ $\iiint_V (3x^2+2y)dxdydz$, trong đó miền V xác định bởi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x^2$

$b)$ $\iiint_V (x-y+2z)dxdydz$, trong đó V được giới hạn bởi các mặt

$$x-y=0, x-y=2, x+y=0, x+y=1, z=0, z=1$$

$c)$ $\iiint_V \frac{y^2}{\sqrt{4z-x^2-z^2}} dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 4z, y \ge 0$

Câu 7: (1đ). Tính độ cong tại điểm $M(-1,0,-1)$ của đường cong là giao của mặt trụ $4x^2+y^2=4$ và mặt phẳng $x-3z=2$.

Câu 8: (1đ). Chứng minh rằng hàm số $I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx$ khả vi trên R.

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 3 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20182

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = \sin t, y = \cos t, z = e^{2t}$ tại điểm $M(0,1,1)$.

Câu 2: (1đ). Tính độ cong của đường $x = t^2, y = t\ln t, t > 0$ tại điểm ứng với $t = e$

Câu 3: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x,y)dy$$

Câu 4: (2đ). Tính các tích phân sau:

$a)$ $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0$

$b)$ $\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$, trong đó $D = \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Câu 5: (1đ). Tính tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)dy$$

Câu 6: (1đ). Tính thể tích của miền giới hạn bởi hai parabol $x = 1 + y^2 + z^2$ và $x = 2(y^2 + z^2)$

Câu 7: (1đ). Cho hàm vecto khả vi $\overrightarrow{r(t)}: R \to R^3 \backslash \{\vec{0}\}$. Ký hiệu $|\vec{r}(t)|$ là độ dài của $\vec{r}(t)$. Chứng minh:

$$\frac{d(|\vec{r}(t)|)}{dt} = \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\vec{r}(t).\overrightarrow{r'}(t).$$

Câu 8: (1đ). Tính tích phân $\iiint_V (2y-z)^2dxdydz$ trong đó V là hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Câu 9: (1đ). Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx$ khả vi trên R.

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20183

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Tìm hình bao của họ đường thẳng $x - cy + c^3 = 0$

Câu 2: (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của tại điểm $A(1;0;1)$ của mặt $z = xe^{\sin 2y}$

Câu 3: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy$$

Câu 4: (1đ). Tính $\iint_D \sin(x^2 + 2y^2)\, dxdy$, với D là miền:

$$x^2 + 2y^2 \le \frac{\pi}{2}, \qquad y \ge 0$$

Câu 5: (1đ). Tính

$$\iiint_V \frac{x + y + 2}{(x+1)(y+1)z} dxdydz$$

Với V xác định bởi $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le e$

Câu 6: (1đ). Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt $x = -(y^2 + z^2)$ và $x = -1$

Câu 7: (1đ). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)dx$

Câu 8: (1đ). Tìm điểm có độ cong nhỏ nhất của đường $x^2 + 4y^2 = 4x$

Câu 9: (1đ). Tính

$$\iiint \frac{(y+1)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dxdydz$$

Với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

Câu 10: (1đ). Cho hàm số $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$. Tính $I'(1)$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20192

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $x^3 + y^3 = 9xy$ tại điểm $(4,2)$

Câu 2: (1đ). Tính độ cong của đường $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$

Câu 3: (1đ). Tìm hình bao của họ đường cong

$$2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2 = 0, c \text{ là tham số}, c \neq 0$$

Câu 4: (1đ). Tìm giới hạn

$$\lim_{y \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x^2y + 3x + y^2)dx$$

Câu 5: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Với V xác định bởi $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq e$

Câu 6: (1đ). Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2 + 2$ nằm trong mặt $x^2 + y^2 = 9$

Câu 7: (1đ). Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, x = y^2, z = x^2$ và mặt Oxy.

Câu 8: (1đ). Tính $\iint_D (2y^2 + 3)dxdy$, với D là miền xác định bởi

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

Câu 9: (1đ). Tính $\iiint_V zdxdydz$ với V xác định bởi

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad y^2 + z^2 \leq 4, \qquad z \geq 0$$

Câu 10: (1đ). Tính tích phân bội ba $\iiint_V y^2e^z dxdydz$, trong đó

$$V: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1, \leq z \leq xy + 2$$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 3 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20192

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của đường cong $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ tại $t = \pi/2$

Câu 2: (1đ). Tính độ cong của đường cong $y = e^{2x}$ tại $A(0,1)$

Câu 3: (1đ). Tìm hình bao của họ đường cong

$$y = 4cx^3 + c^4, \text{với } c \text{ là tham số}$$

Câu 4: (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

Câu 5: (1đ). Tính $\iint_D 4ydxdy$, với D là miền xác định bởi:

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad x + y \geq 1$$

Câu 6: (1đ). Tính thể tích miền V giới hạn bởi mặt Oxy và mặt $z = x^2 + y^2 - 4$

Câu 7: (1đ). Tính

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$$

Với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z$

Câu 8: (1đ). Tính $\iiint_V zdxdydz$, với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, z \geq x^2 + y^2$

Câu 9: (1đ). Tính diện tích của miền giới hạn bởi

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy$$

Câu 10: (1đ). Cho hàm số $I(y) = \int_y^1 \sin(x^2 + xy + y^2)dx$. Tính $I'(0)$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20193

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và Giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi của sinh viên.

Câu 1: (1đ). Xác định độ cong tại đường cong $x = \sqrt{4y} + 1$ tại điểm $(3,1)$

Câu 2: (1đ). Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $y^2 = 3(x^2 + z^2)$ tại điểm $(\sqrt{2}, 3, 1)$

Câu 3: (1đ). Tìm hình bao của họ đường cong: $y = (2x + 3c)^4$

Câu 4: (1đ). Tính $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, với D là miền phía trên parabol $y = x^2$ và nằm phía trong đường tròn $x^2 + y^2 = 2$

Câu 5: (1đ). Tính $\iiint_V \sqrt{6y - x^2 - y^2 - z^2}dxdydz$ với $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 6y$

Câu 6: (1đ). Tính diện tích miền giới hạn bởi hai đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$

Câu 7: (1đ). Tính thể tích miền giới hạn bởi các mặt cong $x = y^2 + z^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nằm trong phần không gian có x không âm.

Câu 8: (1đ). Tính diện tích mặt cong $z = 2x^2 - 2y^2$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$

Câu 9: (1đ). Tính $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 (x + 3y)\sqrt{x^2 + y^3 + 1}dx$

Câu 10: (1đ). Khảo sát tính liên tục và khả vi của hàm số:

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

PHẦN II: LỜI GIẢI THAM KHẢO

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20163 (ĐỀ 1)

Câu 1: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại $M(2; -1; 1)$

Giải:

Đặt $F(x,y,z) = x^2 + 3y + 2z^3 - 3 \Rightarrow F'_x = 2x, F'_y = 3, F'_z = 6z^2$

Tại $M(2,-1,1)$, ta có $F'_x(M) = 4, F'_y(M) = 3, F'_z(M) = 6$

Phương trình pháp tuyến của đường cong tại $M(2,-1,1)$ là:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{6}$$

Phương trình tiếp diện của đường cong tại $M(2,-1,1)$ là:

$$4(x-2) + 3(y+1) + 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 6z - 11 = 0$$

Câu 2: Tìm hình bao của họ đường thẳng $y = 2cx - c^2$ với c là tham số.

Giải:

Đặt $F(x,y,c) = y - 2cx + c^2$

Xét: $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm $\Rightarrow$ Họ đường thẳng không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F = 0 \\ F'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2cx + c^2 = 0 \\ -2x + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2cx + c^2 = 0 \ (1) \\ x = c \ (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có: $y - 2x^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2$

Vậy hình bao của họ đường thẳng là: $y = x^2$

Câu 3: Tìm điểm có độ cong lớn nhất của đường cong $y = \ln x$

Giải:

$y = \ln x \ (x > 0) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}, y'' = \dfrac{-1}{x^2}$

Độ cong của đường $y = \ln x$ tại điểm $M(x,y)$ bất kì là:

$$C(M)=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\frac{-1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{x}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}.2x.(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.x}{(1+x^2)^3}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2.(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.(1+x^2-3x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.(1-2x^2)}{(1+x^2)^3}$$

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\searrow$	

Vậy độ cong của đường $y=\ln x$ lớn nhất tại điểm $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

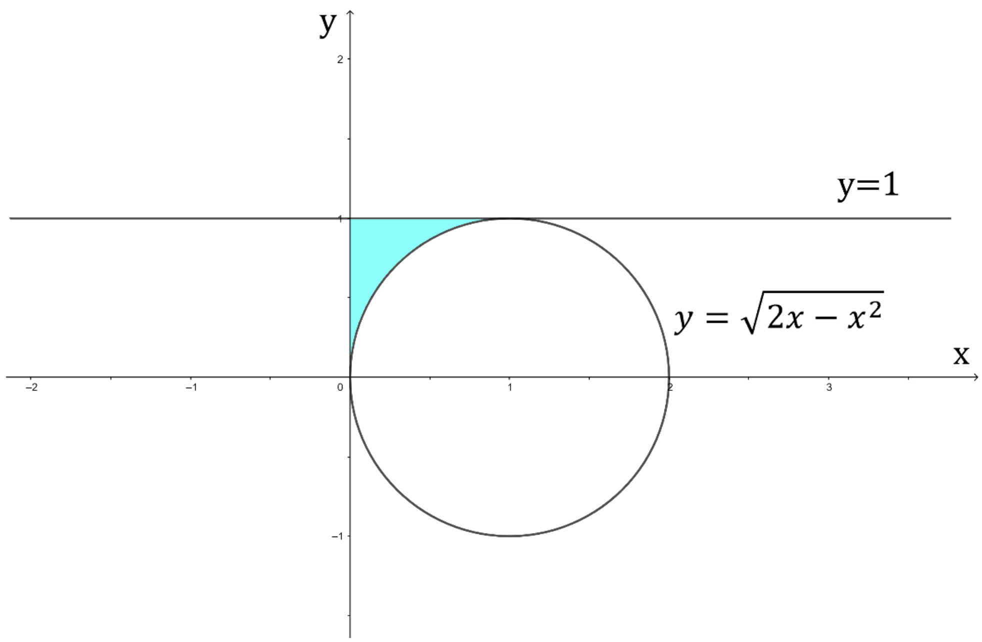
Câu 4: Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)dy$$

Giải:

Miền D: $\begin{cases}0\le x\le 1\\ \sqrt{2x-x^2}\le y\le 1\end{cases}$

$\left(\sqrt{2x-x^2}\le y\Leftrightarrow 2x-x^2\le y^2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2\ge 1\\ y\ge 0\end{cases}\right)$



Đổi thứ tự lấy tích phân D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 - \sqrt{1 - y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

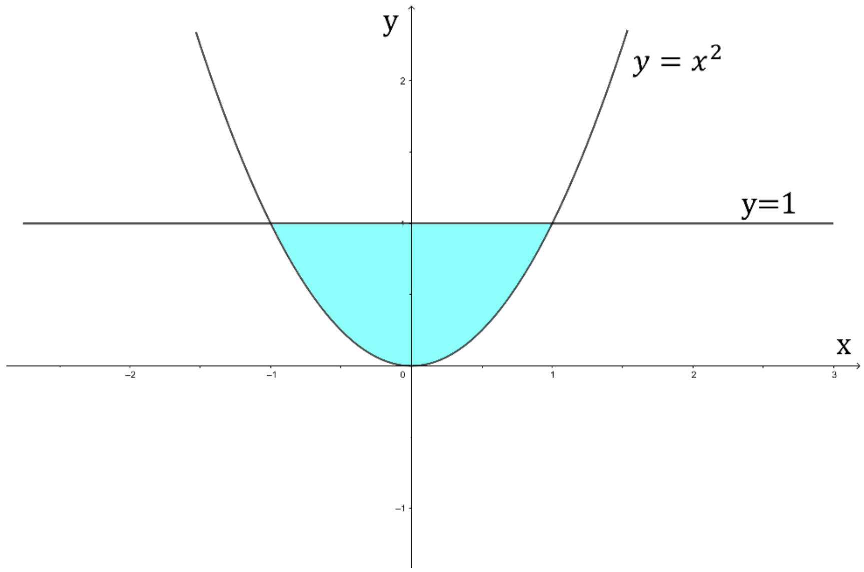
Câu 5: Tính các tích phân kép sau: $a)\ \iint\limits_D (3x+2y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 1$ $b)\ \iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0\}$

Giải:

$a)\ \iint\limits_D (3x+2y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 1$

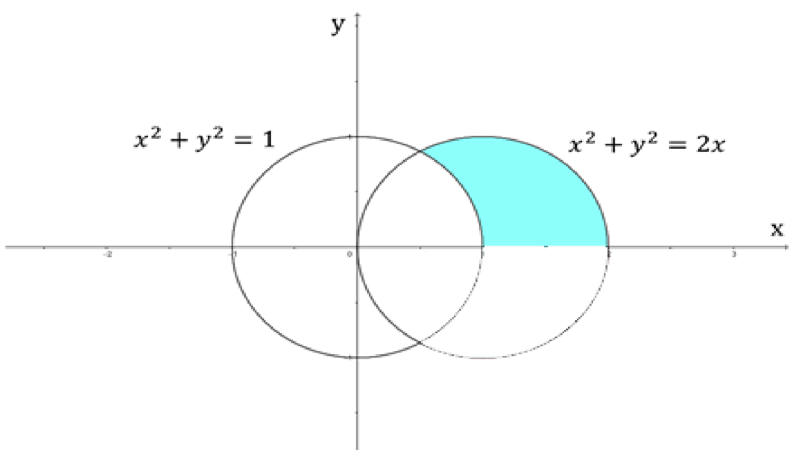
Miền (D): $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (3x+2y)dy = \int_{-1}^{1} (3x+1-3x^3-x^4)dx = \frac{8}{5}$$



Hình minh họa câu a

$b)\ \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2: 1 \leq x^2+y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$

Miền (D): $\begin{cases} 1 \leq r \leq 2\cos\varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/3 \end{cases}$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^{2\cos\varphi} \frac{r\cos\varphi . r\sin\varphi}{r^2} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \sin\varphi \, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} [4(\cos\varphi)^2 - 1]\cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} [4(\cos\varphi)^2 - 1]\cos\varphi \, d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{-1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} (4t^2-1)tdt = \frac{9}{32}$$

Câu 6: Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$z = x^2 + y^2 \text{ và } z = 2x + 4y$$

Giải:

Xét giao tuyến của $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 4y \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 4y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Hình chiếu của (V) lên Oxy là: (D): $(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$

Thể tích miền (V) là:

$$V_{(V)} = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{2x+4y} dz = \iint_D (2x + 4y - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \iint_D \{5 - [(x-1)^2 + (y-2)^2]\}\, dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = 2 + r\sin\varphi \end{cases}$ $|J| = r$. Miền (D): $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{5} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow V_{(V)} = \iint_D (5 - r^2)r\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2)rdr = 2\pi . \frac{25}{4} = \frac{25\pi}{2} \text{ (đvtt)}$$

Câu 7: Tính tích phân bội ba $\iiint_V \; ydxdydz$ trong đó:

a) V giới hạn bởi các mặt

$$z = 0, z = x^2, y = 2x^2 \text{ và } y = 4 + x^2$$

b) V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y$

Giải:

a) V giới hạn bởi các mặt

$$z = 0, z = x^2, y = 2x^2 \text{ và } y = 4 + x^2$$

Hình chiếu D của V lên Oxy giới hạn bởi $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 4 + x^2 \end{cases} \Rightarrow (D) \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 \leq y \leq 4 + x^2 \end{cases}$

$$\iiint_V ydxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{2x^2}^{4+x^2} dy \int_{0}^{x^2} ydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{2x^2}^{4+x^2} yx^2 dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2[(4+x^2)^2 - 4x^4]dx = \frac{4096}{105}$$

b) V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y$

Miền V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $|J| = r^2\sin\theta$. Miền (V): $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_V ydxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r\sin\theta\sin\varphi)r^2\sin\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{4}(\sin\theta)^2\sin\varphi\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8}\sin\varphi\right) d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Câu 8: Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} dx \text{ với } \alpha \geq 0$$

Giải:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-0.x^2}}{x^2 e^{x^2}} dx$$

Đặt $F(x,y)=\dfrac{e^{-yx^2}}{x^2e^{x^2}}$

$$\frac{e^{-ax^2}-e^{-0.x^2}}{x^2e^{x^2}}=F(x,a)-F(x,0)=\int_0^a F'_y(x,y)dy=\int_0^a -e^{-(y+1)x^2}dy=\int_a^0 e^{-(y+1)x^2}dy$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-0.x^2}}{x^2e^{x^2}}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^0 e^{-(y+1)x^2}dy\right)dx=\int_a^0\left(\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx\right)dy$$

Xét $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx$

Đặt $(y+1)x^2=t\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+y}}\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}.t^{\frac{-1}{2}}dt$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-t}.\frac{1}{2\sqrt{1+y}}.t^{\frac{-1}{2}}dt=\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{\frac{1}{2}-1}dt=\frac{1}{2\sqrt{1+y}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+y}}$$

$$\Rightarrow\int_a^0\left(\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx\right)dy=\int_a^0\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+y}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.2\left(\sqrt{a+1}-1\right)=\sqrt{\pi}\left(\sqrt{a+1}-1\right)$$

*Kiểm tra điều kiện khả tích:

Đặt $f(x,y)=e^{-(y+1)x^2}$

- Hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền $[0;+\infty)\times[0;a]$
- Tích phân $I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx$ hội tụ đều trên $[0,a]$

Do $\begin{cases} e^{-(y+1)x^2}\le e^{-(y_0+1)x^2} \text{ với } y_0\ge 0\\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(y_0+1)x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+y_0}} \text{ hội tụ}\end{cases}\Rightarrow\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(y+1)x^2}dx$ hội tụ đều trên $[0;a]$

Vậy điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân thỏa mãn.

❖ ***Mẹo:***

Trong các bài tập sử dụng phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân và phương pháp đạo hàm đạo hàm qua dấu tích phân, chúng ta sẽ ***"tiền trảm hậu tấu"***, tức là cứ áp dụng hai phương pháp trên để tính tích phân, khi ra kết quả rồi mới kiểm tra điều kiện khả vi, khả tích, giống lời giải tham khảo trên. Khi làm như vậy, nếu không đủ thời gian chứng minh điều kiện khả vi, khả tích, chúng ta vẫn được ***0.5đ*** nếu tính toán đúng tích phân.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20172 (ĐỀ 2)

Câu 1: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $\ln(x^2+3y)-3z^3=2$ tại điểm $M(1,0,-1)$.

Giải:

Đặt $F(x,y,z)=\ln(x^2+3y)-3z^3-2 \Rightarrow \begin{cases} F'_x=\dfrac{2x}{x^2+3y} \\ F'_y=\dfrac{3}{x^2+3y} \\ F'_z=-9z^2 \end{cases}$

Tại $M(1,0,-1)$, ta có: $\begin{cases} F'_x(M)=2 \\ F'_y(M)=3 \\ F'_z(M)=-9 \end{cases}$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $M(1,0,-1)$ là:

$$2(x-1)+3(y-0)-9(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-9z-11=0$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $M(1,0,-1)$ là:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-9}$$

Câu 2: Tìm hình bao của họ đường cong $cx^2-2y-c^3+1=0$ với c là tham số.

Giải:

Đặt $F(x,y,c)=cx^2-2y-c^3+1$

Xét $\begin{cases} F'_x(x,y,c)=0 \\ F'_y(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2cx=0 \\ -2=0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm $\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx^2-2y-c^3+1=0 \\ x^2-3c^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c.3c^2-2y-c^3+1=0 \\ x^2=3c^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^3=2y-1 \\ c^2=\dfrac{x^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^3=\dfrac{2y-1}{2} \\ c^2=\dfrac{x^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{3}\right)^3-\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2=0$$

Vậy hình bao của họ đường cong là đường $\dfrac{x^6}{27}=\dfrac{(2y-1)^2}{4}$

Câu 3: Tính độ cong của đường $y = \ln(\sin x)$ tại điểm ứng với $x = \pi/4$.

Giải:

$y = \ln(\sin x) \Rightarrow y'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x\,, y''(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

Tại $x = \dfrac{\pi}{4}$, ta có: $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1, y''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$

Độ cong của đường $y = \ln(\sin x)$ tại $x = \pi/4$

$$C\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{|-2|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Câu 4: Tính các tích phân sau:

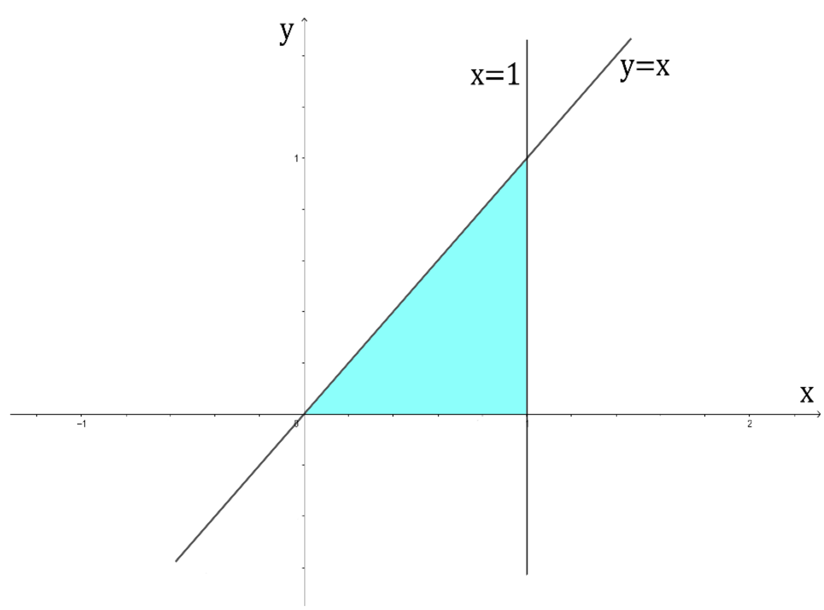
$a)\ \iint\limits_D (x^2 - 4y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y = x, x = 1$ và $y = 0$

$b)\ \iint\limits_D (x^2 - xy + y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y = -3x + 1, y = -3x + 2, y = x$ và $y = x + 2$

Giải:

$a)\ \iint\limits_D (x^2 - 4y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y = x, x = 1$ và $y = 0$

Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$



$$\iint\limits_D (x^2 - 4y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 - 4y^2)dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^2.x - \frac{4}{3}x^3\right)dx = \frac{-1}{12}$$

$b)\ \iint\limits_D (x^2 - xy + y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi $y = -3x + 1, y = -3x + 2, y = x$ và $y = x + 2$

Miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x + 2 \\ y = x \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x = 1 \\ y + 3x = 2 \\ y - x = 0 \\ y - x = 2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = y + 3x \\ v = y - x \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow J = 1/4$

Miền D_{uv} trong tọa độ mới Ouv giới hạn bởi $\begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \\ v = 0 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow D_{uv}: \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = y + 3x \\ v = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u - v}{4} \\ y = \dfrac{u + 3v}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D (x^2 - xy + y^2)dxdy = \frac{1}{4} \iint\limits_{D_{uv}} \left[\left(\frac{u - v}{4} \right)^2 - \frac{u - v}{4} . \frac{u + 3v}{4} + \left(\frac{u + 3v}{4} \right)^2 \right] dudv$$

$$= \frac{1}{64} \iint\limits_{D_{uv}} (u^2 + 2uv + 13v^2) dudv = \frac{1}{64} \int_1^2 du \int_0^2 (u^2 + 2uv + 13v^2) dv$$

$$= \frac{1}{64} \int_1^2 \left(2u^2 + 4u + \frac{104}{3} \right) du = \frac{17}{24}$$

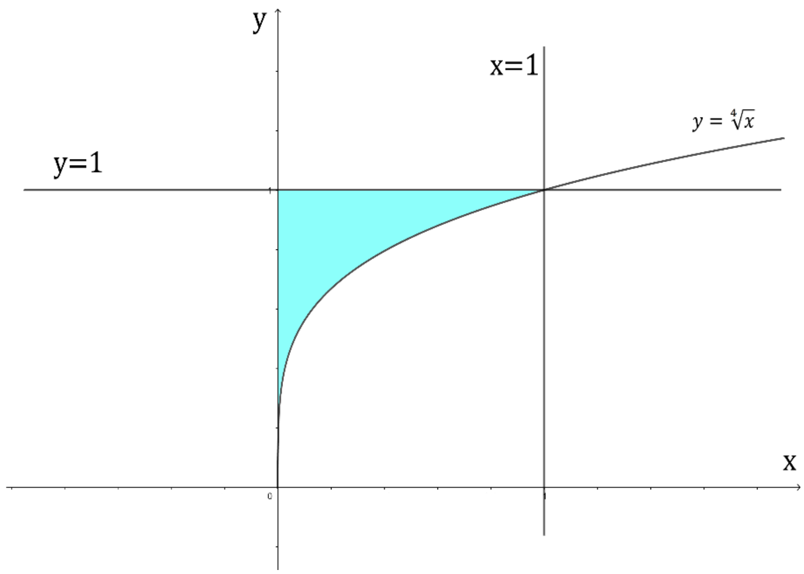
Câu 5: Tính tích phân sau:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt[4]{x}}^1 \frac{1}{y^5 + 1} dy$$

<u>Giải:</u>

Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt[4]{x} \le y \le 1 \end{cases}$

Đổi thứ tự lấy tích phân, miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le y^4 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$



$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt[4]{x}}^1 \frac{1}{y^5+1} dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^4} \frac{1}{y^5+1} dx = \int_0^1 \frac{y^4}{y^5+1} dy = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{d(y^5)}{y^5+1} = \frac{\ln(y^5+1)}{5}\bigg|_0^1 = \frac{\ln 2}{5}$$

Câu 6: Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi các mặt

$$z = x^2 + 2y^2 \text{ và } z = 3 - 2x^2 - y^2$$

Giải:

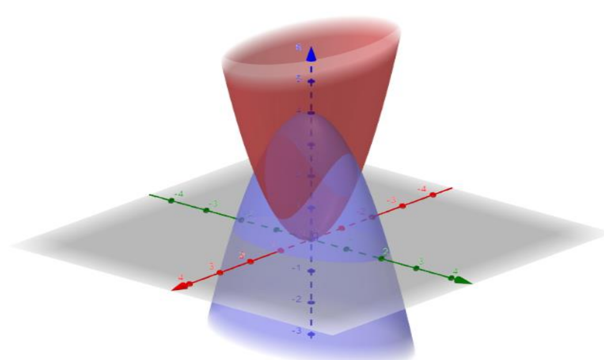
Miền $V: x^2 + 2y^2 \le z \le 3 - 2x^2 - y^2$

Giao tuyến của mặt $z = x^2 + 2y^2$ và $z = 3 - 2x^2 - y^2$

$\Rightarrow x^2 + 2y^2 = 3 - 2x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$



Thể tích vật thể V là:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D [(3 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2)]dxdy$$

$$= \iint_D [3 - 3(x^2 + y^2)]dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 - 3r^2)rdr = \frac{3}{2}\pi \text{ (đvtt)}$$

Câu 7: Tính tích phân bội ba $\iiint_V (3xy^2 - 4xyz)dxdydz$ trong đó V là miền xác định bởi $1 \le y \le 2, 0 \le xy \le 2, 0 \le z \le 2$

Giải:

Cách 1: Đổi biến số:

Đặt $\begin{cases} u = y \\ v = xy \\ w = z \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y \Rightarrow J = -1/y = -1/u$

Miền mới V_{uvw} trong hệ tọa độ mới là $V_{uvw}: \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 \\ 0 \le w \le 2 \end{cases}$

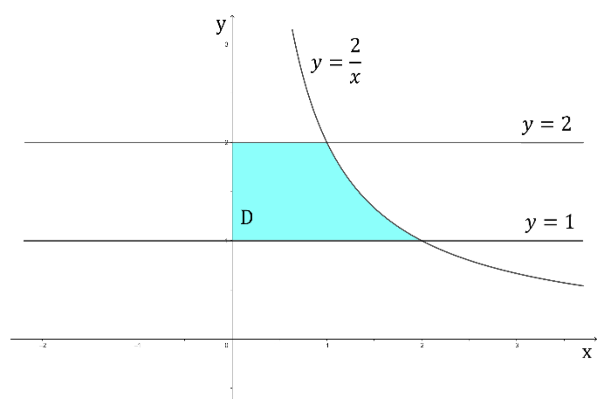
$$\iiint_V (3xy^2 - 4xyz)dxdydz = \iiint_{V_{uvw}} (3uv - 4vw).\frac{1}{u}dudvdw = \int_0^2 dw \int_0^2 dv \int_1^2 \left(3v - \frac{4vw}{u}\right)du$$

$$= \int_0^2 dw \int_0^2 (3v - 4\ln 2 . vw)dv = \int_0^2 (6 - 8\ln 2 . w)dw = 12 - 16\ln 2$$

Cách 2: Tính thông thường:

Hình chiếu D của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} y = 1, y = 2 \\ y = 2/x \end{cases}$

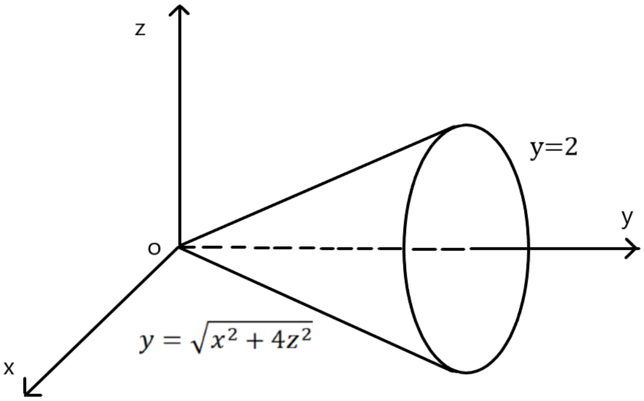
$\Rightarrow$ Hình chiếu D: $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{2}{y} \\ 1 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow$ Miền V: $\begin{cases} 0 \le z \le 2 \\ 0 \le x \le \frac{2}{y} \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$



$$\iiint_V (3xy^2 - 4xyz)dxdydz = \int_1^2 dy \int_0^2 dz \int_0^{\frac{2}{y}} (3xy^2 - 4xyz)dx = 12 - 16\ln 2$$

Câu 8: Tính tích phân bội ba $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $y=\sqrt{x^2+4z^2},\ y=2$.

Giải:



Hình chiếu của miền V lên Oxz là $D: x^2+4z^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} 2z = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{r\cos\varphi}{2} \\ x = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases}, J = \dfrac{r}{2}$

$V: \begin{cases} \sqrt{x^2+4z^2} \le y \le 2 \\ D: x^2+4z^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \le y \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 \left(r^2\sin^2\varphi + y^2 + \frac{r^2}{4}\cos^2\varphi\right).\frac{r}{2}dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left[\left(\frac{r^3\sin^2\varphi}{2} + \frac{r^3\cos^2\varphi}{8}\right)(2-r) + \frac{8}{3} - \frac{r^3}{3}\right]dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5}\sin^2\varphi + \frac{1}{5}\cos^2\varphi + 4\right)d\varphi$$

$$= \frac{4}{5}\pi + \frac{1}{5}\pi + 8\pi = 9\pi$$

Câu 9: Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx \text{ với } a, b > 0$$

Giải:

Đặt $F(x,y) = \dfrac{e^{-yx^2}}{x}$

$$\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = F(x,a) - F(x,b) = \int_b^a F'_y(x,y)dy = \int_b^a -xe^{-yx^2}dy = \int_a^b xe^{-yx^2}dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b xe^{-yx^2}dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} xe^{-yx^2}dx\right)dy$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} d(x^2) \right) dy = \int_a^b \left(\frac{1}{2} . \frac{-1}{y} e^{-yx^2} \Bigg|_0^{+\infty} \right) dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$$

*Kiểm tra điều kiện khả tích:

Đặt $f(x,y) = xe^{-yx^2}$

- Hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền $[0;+\infty) \times [b;a]$
- Tích phân $I(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-yx^2} dx$ hội tụ đều trên $[b,a]$ $(a,b > 0)$

Do $\begin{cases} xe^{-yx^2} \leq xe^{-y_0x^2} \text{ với } y_0 \geq b > 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-y_0x^2}\, dx = \frac{1}{2y_0} \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-yx^2} dx$ hội tụ đều trên $[b;a]$

Vậy điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân thỏa mãn.

❖ ***Mẹo:***

Trong các bài tập sử dụng phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân và phương pháp đạo hàm đạo hàm qua dấu tích phân, chúng ta sẽ ***"tiền trảm hậu tấu"***, tức là cứ áp dụng hai phương pháp trên để tính tích phân, khi ra kết quả rồi mới kiểm tra điều kiện khả vi, khả tích, giống lời giải tham khảo trên. Khi làm như vậy, nếu không đủ thời gian chứng minh điều kiện khả vi, khả tích, chúng ta vẫn được ***0.5đ*** nếu tính toán đúng tích phân.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20172 (ĐỀ 4)

Câu 1: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = 4\sin^2 t$, $y = 4\cos t$, $z = 2\sin t + 1$ tại điểm $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$

Giải:

Tại $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$, ta có: $\begin{cases} 1 = 4\sin^2 t \\ -2\sqrt{3} = 4\cos t \\ 2 = 2\sin t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 5\pi/6$

$\begin{cases} x = 4\sin^2 t \\ y = 4\cos t \\ z = 2\sin t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 8\sin t\cos t \\ y'(t) = -4\sin t \\ z'(t) = 2\cos t \end{cases}$. Tại $t = \dfrac{5\pi}{6}$, ta có: $\begin{cases} x'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} \\ y'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -2 \\ z'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$ là:

$$\frac{x-1}{-2\sqrt{3}} = \frac{y+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{z-2}{-\sqrt{3}}$$

Phương trình pháp diện của đường cong tại $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$ là:

$$-2\sqrt{3}(x-1) - 2(y+2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(z-2) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}x - 2y - \sqrt{3}z = 0$$

Câu 2: Tìm hình bao của họ đường thẳng $3cx - y - c^3 = 0$, với c là tham số.

Giải:

Đặt $F(x, y, c) = 3cx - y - c^3$ với c là tham số.

Xét $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 0 \\ -1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm $\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3cx - y - c^3 = 0 \\ 3x - 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c.c^2 - y - c^3 = 0 \\ x = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2c^3 \\ x = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} = c^3 \\ x = c^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x^3 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4x^3$

Vậy hình bao của họ đường cong là đường $y^2 = 4x^3$

Câu 3: Tính độ cong của đường cong $x = \sin t + t\cos t$, $y = \cos t + t\sin t$ tại điểm ứng với $t = \pi$

Giải:

$$\begin{cases} x = \sin t + t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2\cos t - t\sin t \\ y'(t) = t\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t) = -3\sin t - t\cos t \\ y''(t) = \cos t - t\sin t \end{cases}$$

Tại $t = \pi$, ta có: $\begin{cases} x'(\pi) = -2,\ x''(\pi) = \pi \\ y'(\pi) = -\pi,\ y''(\pi) = -1 \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại điểm ứng với $t = \pi$ là:

$$C(t = \pi) = \frac{|x'.y'' - x''.y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(-2).(-1) - \pi.(-\pi)|}{(4 + \pi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 + \pi^2}{(4 + \pi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Câu 4: Tính các tích phân kép sau:

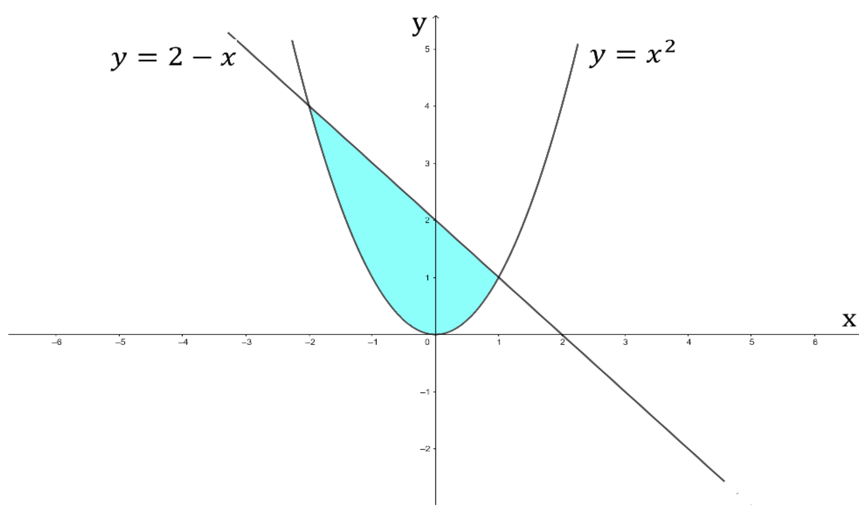
a) $\iint\limits_D 2x dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 2 - x$

b) $\iint\limits_D y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le y\}$

Giải:

a) $\iint\limits_D 2x dx dy$, D là miền giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 2 - x$

Miền D: $\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2 - x \end{cases}$



$$\iint\limits_D 2x dx dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} 2x dy$$

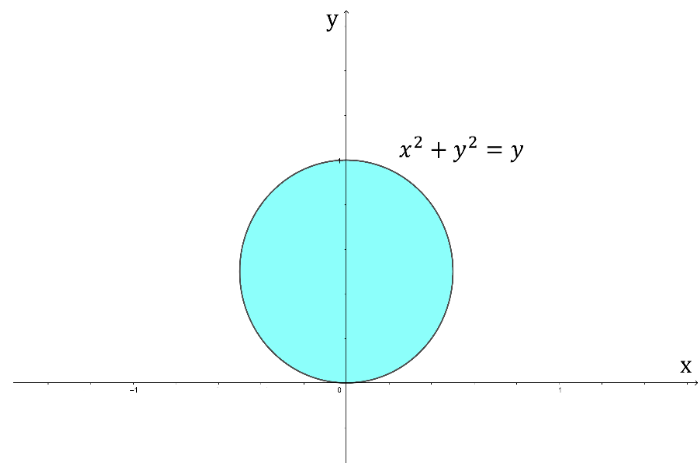
$$= \int_{-2}^{1} 2x(2 - x - x^2) dx$$

$$= \frac{-9}{2}$$

b) $\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\le y\}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J=r$

Miền $\begin{cases} 0\le r\le \sin\varphi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$



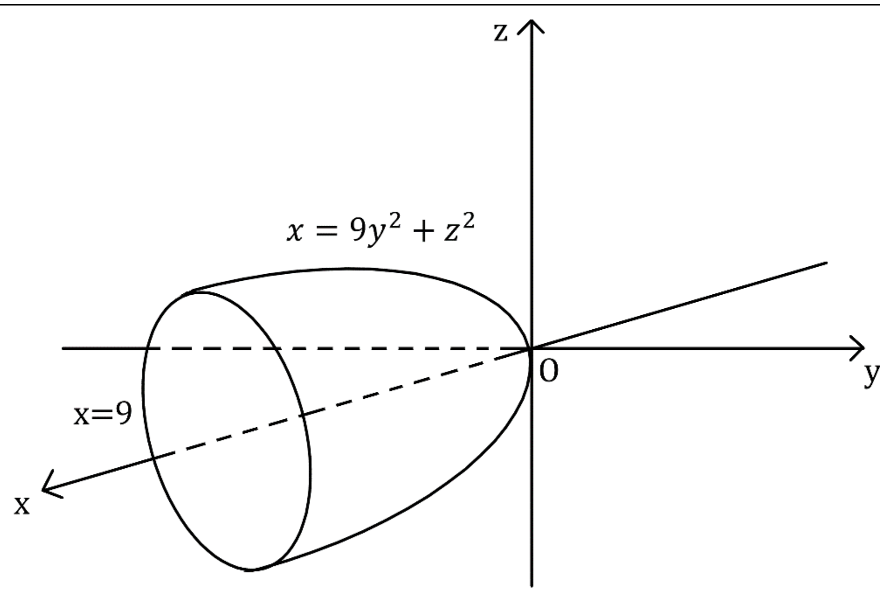
$$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r\sin\varphi\sqrt{r^2}rdr$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\varphi.\sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{-1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)^2 d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{-1}{4}\int_1^{-1}(1-u^2)^2du = \frac{-1}{4}.\frac{-16}{15} = \frac{4}{15}$$

Câu 5: Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt $x=9y^2+z^2$ và $x=9$

Giải:



Xét giao tuyến của $x=9y^2+z^2$ và $x=9$

$$9y^2+z^2=9 \Leftrightarrow (3y)^2+z^2=3^2$$

Hình chiếu của V lên Oyz là D: $(3y)^2+z^2\le 3^2$

Thể tích vật thể V là:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D [9 - (9y^2 + z^2)]dydz$$

Đặt $\begin{cases} 3y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{r}{3}\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, J = \dfrac{r}{3} \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

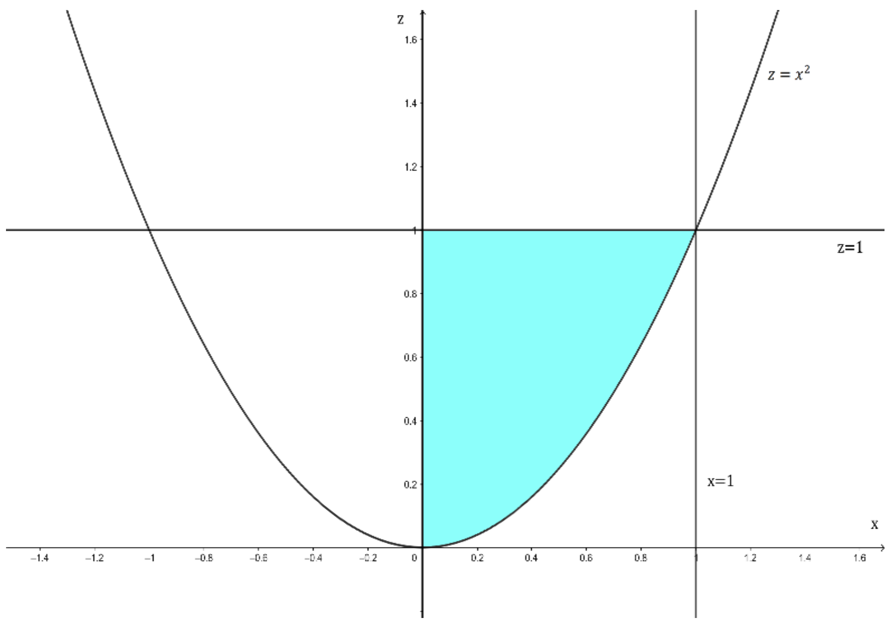
$$\Rightarrow V = \iint\limits_D [9 - (9y^2 + z^2)]dydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2).\frac{r}{3}dr = 2\pi.\frac{27}{4} = \frac{27\pi}{2} \text{ (đvtt)}$$

Câu 6: Tính tích phân sau:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xye^{yz^2}dz$$

Giải:

Miền V: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x^2 \le z \le 1 \end{cases}$.Đổi thứ tự lấy tích phân: miền V trở thanh V: $\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{z} \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$



Hình vẽ minh họa trên mặt phẳng Oxz khi đổi thứ tự cận x và z

$$\Rightarrow \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} xye^{yz^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_0^1 yze^{yz^2}dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_0^1 e^{yz^2} d\left(\frac{yz^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 dy \int_0^1 e^{yz^2} d(yz^2) = \frac{1}{4}\int_0^1 (e^y - 1)dy = \frac{1}{4}(e-2)$$

Câu 7: Tính $\iint_D (4xy + 3y)dxdy$ với $D: 1 \le xy \le 4, x \le y \le 9x$.

Giải:

Miền $D: 1 \le xy \le 4, x \le y \le 9x \Leftrightarrow 1 \le xy \le 4, 1 \le \frac{y}{x} \le 9$

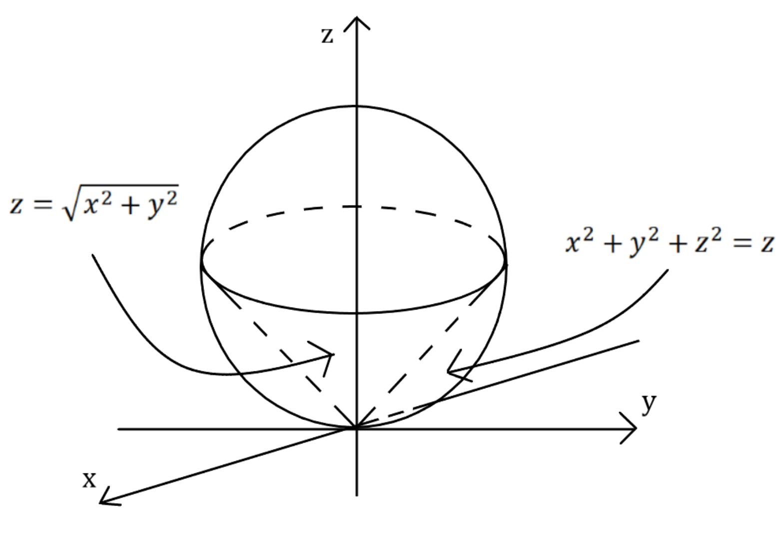
Đặt $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} \Rightarrow J = \frac{1}{2}.\frac{x}{y} = \frac{1}{2v}$

Miền D trong hệ tọa độ mới O_{uv} là $D_{uv}: \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 9 \end{cases}$

$$\iint_D (4xy + 3y)dxdy = \iint_{D_{uv}} (4u + 3\sqrt{uv})\frac{1}{2v}dudv = \int_1^9 dv \int_1^4 \left(\frac{2u}{v} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\right)du = 30\ln 3 + 28$$

Câu 8: Tính tích phân bội ba $\iiint_V zdxdydz$ trong đó V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le z$ $z \le \sqrt{x^2 + y^2}$

Giải:



Cách 1: Tọa độ trụ:

Miền V: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le z \\ z \le \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \\ z \le \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$: Dấu $\le$ thể hiện miền V nằm trong mặt cầu.

$z \le \sqrt{x^2+y^2}$: Dấu $\le$ thể hiện miền V nằm dưới mặt nón.

$\Rightarrow V: \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$

Xét giao tuyến của hai mặt $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = z \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2+y^2)+(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4}$

Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$

Miền V: $\begin{cases} \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \\ D: x^2+y^2 \le \frac{1}{4} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, J = r \Rightarrow V: \begin{cases} \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-r^2} \le z \le r \\ 0 \le r \le \frac{1}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-r^2}}^{r} z.r\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[r^2-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-r^2}\right)^2\right] r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[r^3-\frac{r}{4}+r\sqrt{\frac{1}{4}-r^2}-r\left(\frac{1}{4}-r^2\right)\right] dr$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} r\sqrt{\frac{1}{4}-r^2}dr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}-r^2}d(r^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}-u}du = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[r^3 - \frac{r}{4} + r\sqrt{\frac{1}{4}-r^2} - r\left(\frac{1}{4}-r^2\right)\right]dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{32}+\frac{1}{24}\right)d\varphi = \frac{\pi}{96}$$

Cách 2: Tọa độ cầu:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, |J| = r^2\sin\theta \Rightarrow$ Miền V: $\begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\cos\theta\,.r^2\sin\theta\,dr = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{-1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\,d(\cos\theta) = \frac{-1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} u^5du = \frac{\pi}{96}$$

Câu 9: Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3}-e^{-bx^3}}{x}dx \text{ với } a,b>0$$

<u>Giải:</u>

Đặt $F(x,y) = \dfrac{e^{-yx^3}}{x}$

$$\frac{e^{-ax^3}-e^{-bx^3}}{x} = F(x,a)-F(x,b) = \int_b^a F'_y(x,y)dy = \int_b^a -x^2e^{-yx^3}dy = \int_a^b x^2e^{-yx^3}dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3}-e^{-bx^3}}{x}dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_a^b x^2e^{-yx^3}dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_0^{+\infty} x^2e^{-yx^3}dx\right)dy$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-yx^3} d(x^3) \right) dy = \int_a^b \left(\frac{1}{3} . \frac{-1}{y} e^{-yx^3} \Big|_0^{+\infty} \right) dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{3y} dy = \frac{1}{3} \ln \frac{b}{a}$$

*Kiểm tra điều kiện khả tích:

Đặt $f(x,y) = x^2 e^{-yx^3}$

- Hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền $[0; +\infty) \times [b; a]$
- Tích phân $I(y) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-yx^3} dx$ hội tụ đều trên $[b, a]$ $(a, b > 0)$

Do $\begin{cases} x^2 e^{-yx^3} \leq x^2 e^{-y_0 x^3} \text{ với } y_0 \geq b > 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-y_0 x^3} dx = \frac{1}{3y_0} \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-yx^3} dx$ hội tụ đều trên $[b; a]$

Vậy điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân thỏa mãn.

❖ ***Mẹo:***

Trong các bài tập sử dụng phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân và phương pháp đạo hàm đạo hàm qua dấu tích phân, chúng ta sẽ ***"tiền trảm hậu tấu"***, tức là cứ áp dụng hai phương pháp trên để tính tích phân, khi ra kết quả rồi mới kiểm tra điều kiện khả vi, khả tích, giống lời giải tham khảo trên. Khi làm như vậy, nếu không đủ thời gian chứng minh điều kiện khả vi, khả tích, chúng ta vẫn được ***0.5đ*** nếu tính toán đúng tích phân.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20173 (ĐỀ 1)

Câu 1: Tính độ cong tại $t = 0$ của đường $\begin{cases} x = e^{-t} - \sin t \\ y = e^{-t} - \cos t \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x = e^{-t} - \sin t \\ y = e^{-t} - \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -e^{-t} - \cos t\,,\ x''(t) = e^{-t} + \sin t \\ y'(t) = -e^{-t} + \sin t\,,\ y''(t) = e^{-t} + \cos t \end{cases}$$

Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = -2, x''(0) = 1 \\ y'(0) = -1, y''(0) = 2 \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại $t = 0$ là:

$$C(t=0) = \frac{|x'.y'' - x''.y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(-2).2 - 1.(-1)|}{(2^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

Câu 2: Lập phương trình pháp tuyến và tiếp diện tại $A(1,1,0)$ của mặt $z = \ln(3x - 2y)$

Giải:

Đặt $F(x,y,z) = z - \ln(3x - 2y) \Rightarrow F'_x = \dfrac{-3}{3x - 2y}\,, F'_y = \dfrac{2}{3x - 2y}\,, F'_z = 1$

Tại $A(1,1,0) \Rightarrow F'_x(A) = -3, F'_y(A) = 2, F'_z(A) = 1$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $A(1,1,0)$ là:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $A(1,1,0)$ là:

$$-3(x-1) + 2(y-1) + z = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + z + 1 = 0$$

Câu 3: Cho hàm vecto $\vec{p}(t) = (\sin 2t\,, \cos 2t\,, e^{-t})$ và $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{p}(t)$. Tính $\overrightarrow{r'}(0)$

Giải:

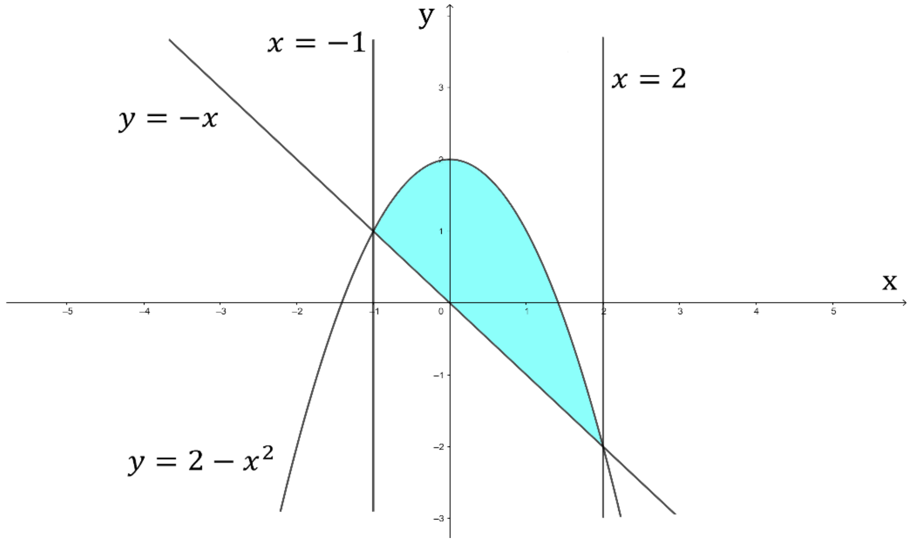
$\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{p}(t) \Rightarrow \overrightarrow{r'}(t) = [(t^2 + 1)\vec{p}(t)]' = (t^2 + 1)'\vec{p}(t) + (t^2 + 1)\overrightarrow{p'}(t)$

$$= 2t.(\sin 2t\,, \cos 2t\,, e^{-t}) + (t^2 + 1)(2\cos 2t\,, -2\sin 2t\,, -e^{t})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{r'}(0) = 2.0.(\sin 0\,, \cos 0\,, e^{-0}) + 1.(2\cos 0\,, -2\sin 0\,, -e^{0}) = (2,0,-1)$

Câu 4: Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_{-1}^{2} dx \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)dxdy$

<u>Giải:</u>



Miền

$$(D): \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ -x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$$

Đổi thứ tự lấy tích phân. Chia miền (D) thành 2 phần

$(D_1): \begin{cases} -\sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{2-y} \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$ và $(D_2): \begin{cases} -y \le x \le \sqrt{2-y} \\ -2 \le y \le 1 \end{cases}$

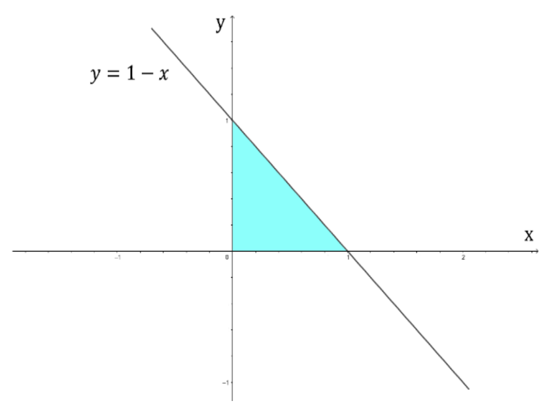
$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

Câu 5: Tính $\iint_D (3x + 2y)dxdy$, D giới hạn bởi:

$$x = 0, y = 0, x + y = 1$$

<u>Giải:</u>

Miền $(D): \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$



$$\iint_D (3x + 2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3x + 2y)dy$$

$$= \int_0^1 [3x(1-x) + (1-x)^2]dx = \frac{5}{6}$$

Câu 6: Tính $\iint_D (x+y)(x-2y-1)^2dxdy$, D giới hạn bởi $x+y=0, x+y=3, x-2y=1$, $x-2y=2$

Giải:

Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ x-2y=v \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow |J| = 1/3$

Miền (D') mới trong hệ tọa độ mới Ouv là (D'): $\begin{cases} 0 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint\limits_D (x+y)(x-2y-1)^2dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} u(v-1)^2dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 du\int_1^2 u(v-1)^2dv = \frac{1}{2}$$

Câu 7: Tính $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V giới hạn bởi $x^2+y^2=1, z=0, z=2$

Giải:

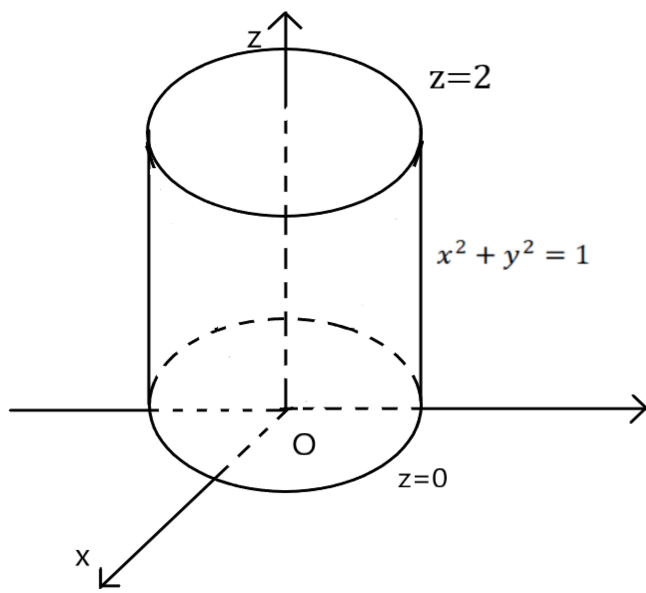
Hình chiếu của V lên Oxy là D: $x^2+y^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} J = r$. Miền (D): $\begin{cases} 0 \le r < 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ Miền (V) trong tọa độ trụ: $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 dr\int_0^2 z.r.rdz$$

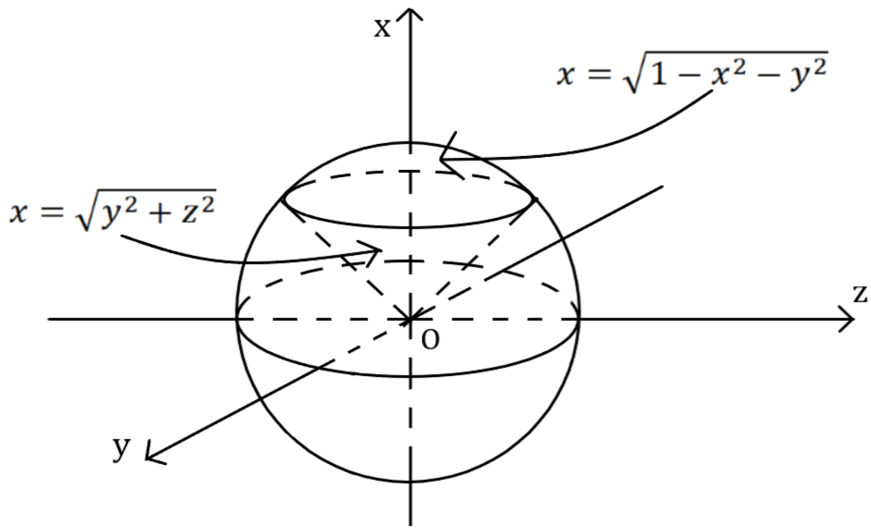
$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r^2dr = \frac{4\pi}{3}$$



Câu 8: Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi

$$x=\sqrt{y^2+z^2}, \qquad x=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Giải:



Hình minh họa miền V được vẽ lại theo quy tắc tam diện thuận

Đặt $\begin{cases} y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \\ x = r\cos\theta \end{cases}$ $|J| = r^2\sin\theta$. Miền (V): $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Thể tích miền V là:

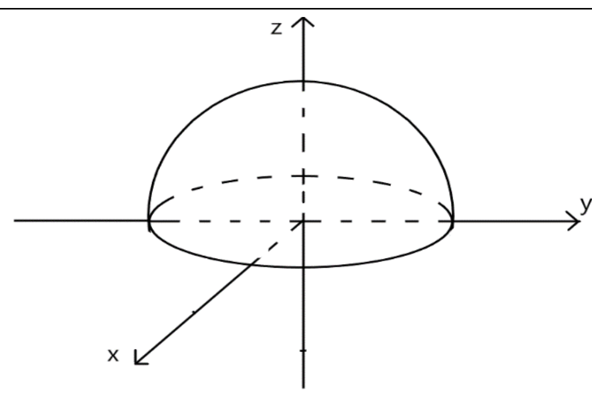
$$V_{(V)} = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta\, dr = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (đvtt)}$$

Câu 9: Tính

$$\iiint\limits_V \frac{3x^2 - y^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$$

Với V là nửa khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0$

Giải:



Khi đổi vai trò của x và y cho nhau thì miền V không thay đổi

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \frac{3x^2 - y^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz = \iiint\limits_V \frac{3y^2 - x^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz$$

$$\Rightarrow 2I = \iiint\limits_V \frac{3x^2 - y^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz + \iiint\limits_V \frac{3y^2 - x^2 + z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dxdydz = 2\iiint\limits_V dxdydz$$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V dxdydz = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi = \frac{2\pi}{3}$$

Câu 10: Tìm giới hạn

$$\lim_{y\to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1 + x^2 + y^2} dx$$

<u>Giải:</u>

$$\begin{cases} \cos x, \sin y \text{ liên tục } \forall y \in R \\ \dfrac{\arctan(x+y)}{1 + x^2 + y^2} \text{ liên tục trên } R^2 \end{cases} \Rightarrow I(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1 + x^2 + y^2} dx \text{ liên tục trên } R$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1 + x^2 + y^2} dx = \int_{\sin 0}^{\cos 0} \frac{\arctan(x+0)}{1 + x^2 + 0^2} dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \arctan(x)\, d(\arctan(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt = \frac{\pi^2}{32}$$

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ GIỮA KỲ 20182 (ĐỀ 2)

Câu 1: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $x^2 + y^2 - e^z - 2yxz = 0$ tại điểm $M(1,0,0)$.

Giải:

Đặt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - e^z - 2yxz \Rightarrow \begin{cases} F'_x = 2x - 2yz \\ F'_y = 2y - 2xz \\ F'_z = -e^z - 2yx \end{cases}$

Tại $M(1,0,0)$, ta có: $F'_x(M) = 2, F'_y(M) = 0, F'_z(M) = -1$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $M(1,0,0)$ là:

$$2(x - 1) + 0(y - 0) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 2 = 0$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $M(1,0,0)$ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$

Câu 2: Tìm hình bao của họ đường cong sau: $(x + C)^2 + (y - 2C)^2 = 5$.

Giải:

Đặt $F(x, y, c) = (x + c)^2 + (y - 2c)^2 - 5$

Xét $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + c) = 0 \\ 2(y - 2c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c \\ y = 2c \end{cases}$

Điểm $(-c, 2c)$ không thuộc họ đường tròn $(x + c)^2 + (y - 2c)^2 = 5$

$\Rightarrow$ Họ đường tròn không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F = 0 \\ F'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + (y - 2c)^2 - 5 = 0 \\ 2(x + c) - 4(y - 2c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + (y - 2c)^2 - 5 = 0 \\ x + c = 2(y - 2c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y - 4c)^2 + (y - 2c)^2 = 5 \\ x + c = 2(y - 2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2c)^2 = 1 \\ x = 2(y - 2c) - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1 + 2c \\ y = -1 + 2c \end{array} \right. \\ x = 2(y - 2c) - c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - c \\ y = 1 + 2c \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 - c \\ y = -1 + 2c \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x + 2 = c \\ \dfrac{y - 1}{2} = c \end{cases} \\ \begin{cases} -x - 2 = c \\ \dfrac{y + 1}{2} = c \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{y - 1}{2} + x - 2 = 0 \\ \dfrac{y + 1}{2} + x + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y + 2x + 5 = 0 \end{array} \right.$

Vậy hình bao của họ đường tròn là: $y = -2x + 5$ và $y = -2x - 5$

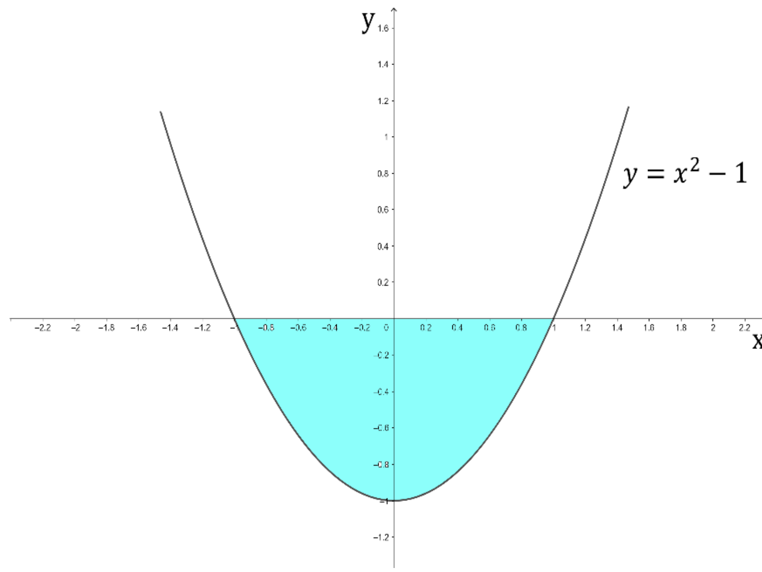
Câu 3: Tính tích phân kép $\iint_D (x-4y)dxdy$ trong đó D giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 1$ và trục Ox.

Giải:

Miền D: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 \le y \le 0 \end{cases}$

$$\iint_D (x-4y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{0} (x-4y)dy$$

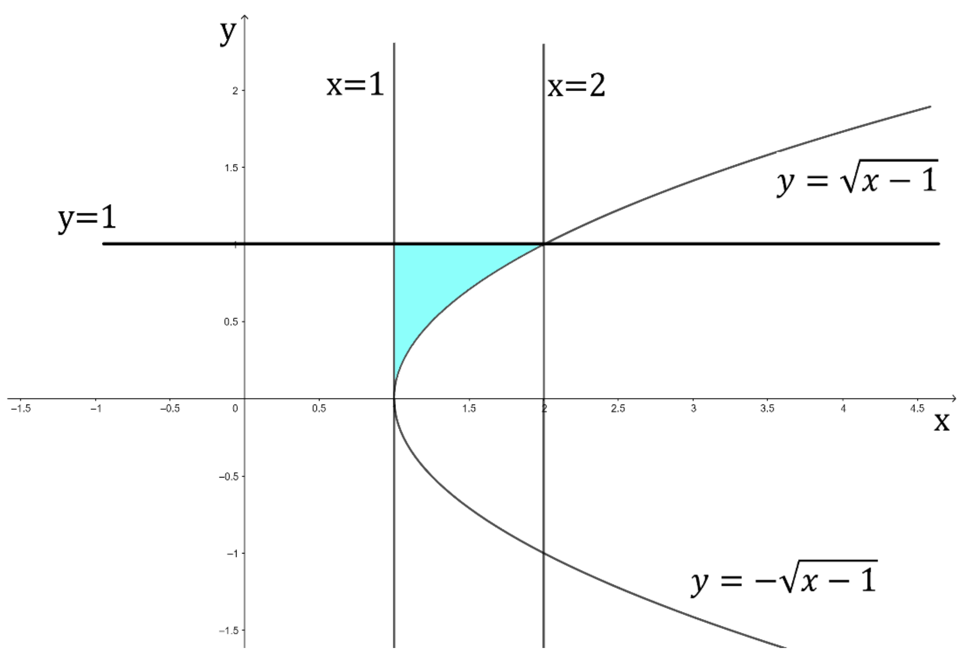
$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1-x^2) + 4.\frac{1}{2}(x^2-1)^2\right] dx = \frac{32}{15}$$



Câu 4: Tính tích phân lặp:

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^{1} \frac{1-\cos \pi y}{y^2} dy$$

Giải:



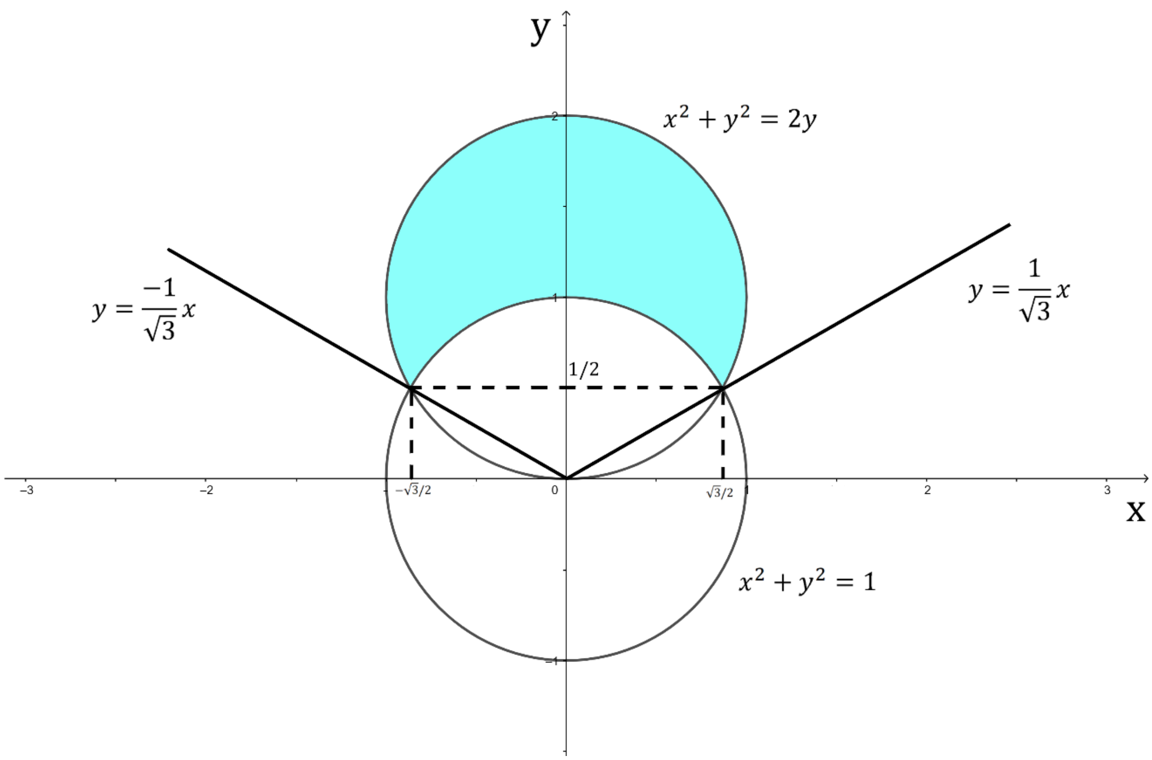
Đổi thứ tự lấy tích phân, miền D: $\begin{cases} 1 \leq x \leq y^2+1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^{1} \frac{1-\cos \pi y}{y^2} dy = \int_0^1 dy \int_1^{y^2+1} \frac{1-\cos \pi y}{y^2} dx = \int_0^1 \left(y^2 . \frac{1-\cos \pi y}{y^2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 (1-\cos \pi y) dy = 1$$

Câu 5: Tính diện tích phần hình tròn $x^2+y^2=2y$ nằm ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$

Giải:



Gọi miền cần tính diện tích là D.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $|J| = r$. Miền D: $\begin{cases} 1 \leq r \leq 2\sin\varphi \\ \pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6 \end{cases}$

Diện tích miền D là:

$$S=\iint_D dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{1}^{2\sin\varphi} rdr=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(4\sin^2\varphi-1)d\varphi=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{2(1-\cos 2x)}{2}-\frac{1}{2}\right)d\varphi$$

$$\Rightarrow S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\text{đvdt})$$

Câu 6: Tính các tích phân bội ba sau:

$a)\ \iiint_V (3x^2+2y)dxdydz$, trong đó miền V xác định bởi $0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le x^2$

Giải:

$$\iiint_V (3x^2+2y)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x^2}(3x^2+2y)dz=\int_0^1 dx\int_0^x x^2(3x^2+2y)dy$$

$$=\int_0^1 (3x^5+x^2.x^2)dx=\frac{7}{10}$$

$b)\ \iiint_V (x-y+2z)dxdydz$, trong đó V được giới hạn bởi các mặt

$$x-y=0, x-y=2, x+y=0, x+y=1, z=0, z=1$$

Giải:

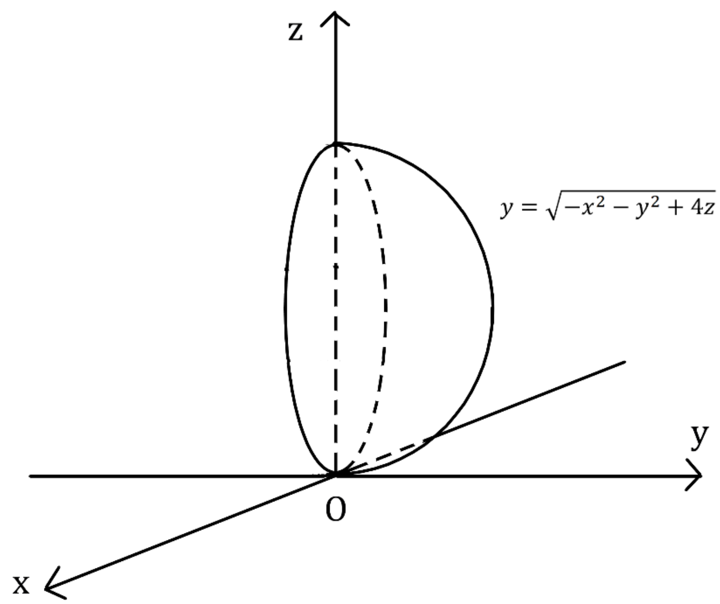
Đặt $\begin{cases} u=x-y\\ v=x+y\\ w=z\end{cases}\Rightarrow J^{-1}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z\\ v'_x & v'_y & v'_z\\ w'_x & w'_y & w'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\Rightarrow J=1/2$

Miền V trong tọa độ mới $Ouvw$ là $V_{uvw}:\begin{cases}0\le u\le 2\\ 0\le v\le 1\\ 0\le w\le 1\end{cases}$

$$\Rightarrow \iiint_V (x-y+2z)dxdydz=\iiint_{Vuvw}\frac{1}{2}(u+2w)dudvdw=\frac{1}{2}\int_0^2 du\int_0^1 dv\int_0^1 (u+2w)\,dw$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 du\int_0^1 (u+1)dv=\frac{1}{2}\int_0^2 (u+1)du=2$$

$c)\ \iiint\limits_V \frac{y^2}{\sqrt{4z-x^2-z^2}}dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 4z, y \ge 0$



Miền V: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4z \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le -x^2-z^2+4z \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y \le \sqrt{4-[x^2+(z-2)^2]}$

Hình chiếu của V lên Oxz là D: $x^2+(z-2)^2 \le 4$

Đặt $\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ y = 2 + r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, J = r$

$$V: \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{4-[x^2+(z-2)^2]} \\ D: x^2+(z-2)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{4-r^2} \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V \frac{y^2}{\sqrt{4-[x^2+(z-2)^2]}}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{y^2.r}{\sqrt{4-r^2}}dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{(4-r^2)r}{3}dr = \frac{8\pi}{3}$$

Câu 7: Tính độ cong tại điểm $M(-1,0,-1)$ của đường cong là giao của mặt trụ $4x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $x - 3z = 2$.

Giải:

Tham số hóa $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (do $x^2 + y^2/4 = 1$) $\Rightarrow$ Đường L có dạng $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{\cos t - 2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t\,, x'' = -\cos t \\ y' = 2\cos t\,,\ \ y'' = -2\sin t \\ z' = \dfrac{-\sin t}{3}, z'' = \dfrac{-\cos t}{3} \end{cases}$. Tại $M(-1,0,-1) \Leftrightarrow\ t = \pi \Rightarrow \begin{cases} x'(M) = 0, x''(M) = 1 \\ y'(M) = 2, y''(M) = 0 \\ z'(M) = 0, z''(M) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Áp dụng công thức tính độ cong:

$$C(M) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{10}}{12}$$

Câu 8: Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos(xy)}{x} dx$ khả vi trên R.

Giải:

Đặt $f(x,y) = e^{-x} \dfrac{1 - \cos(xy)}{x}$

Hàm $f(x,y)$ không xác định tại $x = 0$ nhưng

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = \lim_{x\to 0^-} f(x,y) = \lim_{x\to 0} e^{-x} \frac{1-\cos(xy)}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} \frac{x^2y^2}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} xy^2 = 0$$

Ta có: $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} \dfrac{1-\cos(xy)}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , x = 0 \end{cases}$, $f'_y = e^{-x}\sin(xy)$ liên tục trên R^2

$\begin{cases} |e^{-x}\sin(xy)| \le e^{-x}, \forall y \in R \\ \text{Mà } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(xy)\, dx$ hội tụ đều trên R

(theo tiêu chuẩn Weierstrass)

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx = \int_0^1 e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{e^{-x}\cos(xy)}{x}\right| \le e^{-x}, \forall y \in R \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \text{ hội tụ} \\ \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx \text{ hội tụ} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\frac{1-\cos(xy)}{x}dx \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow I(y) \text{ hội tụ}$$

Vậy $I(y)$ khả vi trên R

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20182 (ĐỀ 3)

Câu 1: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $x = \sin t\,, y = \cos t\,, z = e^{2t}$ tại điểm $M(0,1,1)$.

Giải:

Tại $M(0,1,1) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sin t \\ 1 = \cos t \Leftrightarrow t = 0 \\ 1 = e^{2t} \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x'(t) = \cos t \\ y'(t) = -\sin t \\ z'(t) = 2e^{2t} \end{cases}$. Tại $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$

Tại $M(0,1,1)$, phương trình tiếp tuyến của đường cong là:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Tại $M(0,1,1)$, phương trình pháp diện của đường cong L là:

$$x + 0.(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2z - 2 = 0$$

Câu 2: Tính độ cong của đường $x = t^2, y = t\ln t\,, t > 0$ tại điểm ứng với $t = e$

Giải:

Ta có $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t\ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2t\,, x'' = 2 \\ y' = \ln t + 1, y'' = 1/t \end{cases}$

Tại $t = e \Rightarrow \begin{cases} x'(e) = 2e\,, x''(e) = 2 \\ y'(e) = 2\,, y''(e) = 1/e \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại $t = e$ là:

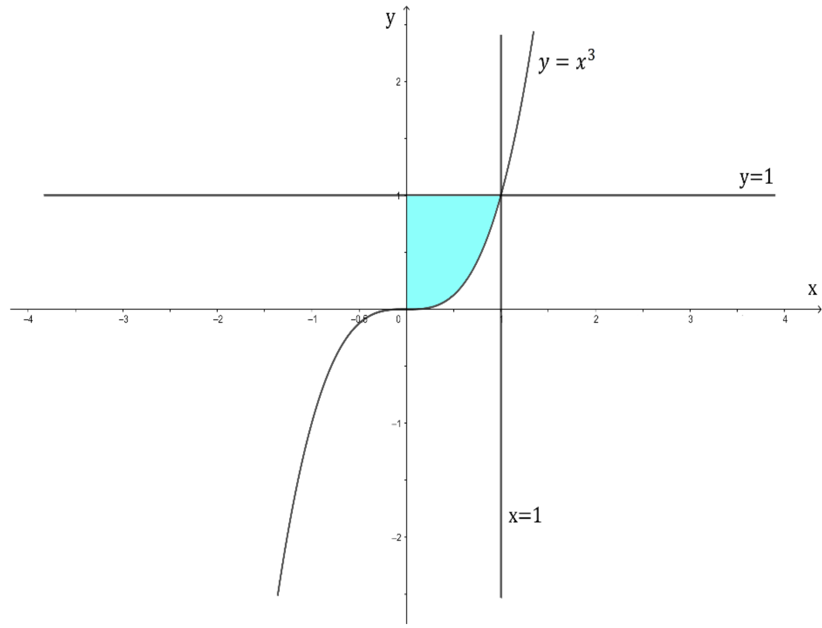
$$C(t=e) = \frac{\left|2e.\frac{1}{e} - 2.2\right|}{(4e^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4e^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Câu 3: Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x,y)dy$$

Giải:

Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^3 \le y \le 1 \end{cases}$



Thay đổi thứ tự lấy tích phân

Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt[3]{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$$

Câu 4: Tính các tích phân sau:

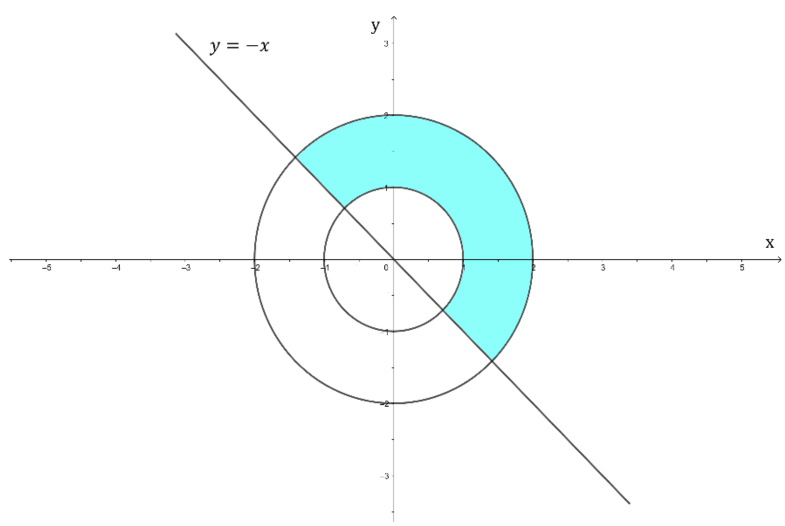
$a)\ \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4, x+y \ge 0$

$b)\ \iint_D |\cos(x+y)|dxdy$, trong đó $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Giải:

$a)\ \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4, x+y \ge 0$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r$



Miền D: $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \frac{-\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{r^2}.rdr = \frac{14\pi}{3}$$

$b)\ \iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$, trong đó $D = \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có: $\begin{cases} |\cos(x+y)| = \cos(x+y) \text{ khi } \frac{-\pi}{2} \le x+y \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} - x \le y \le \frac{\pi}{2} - x \\ |\cos(x+y)| = -\cos(x+y) \text{ khi } \frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \le y \le \frac{3\pi}{2} - x \end{cases}$

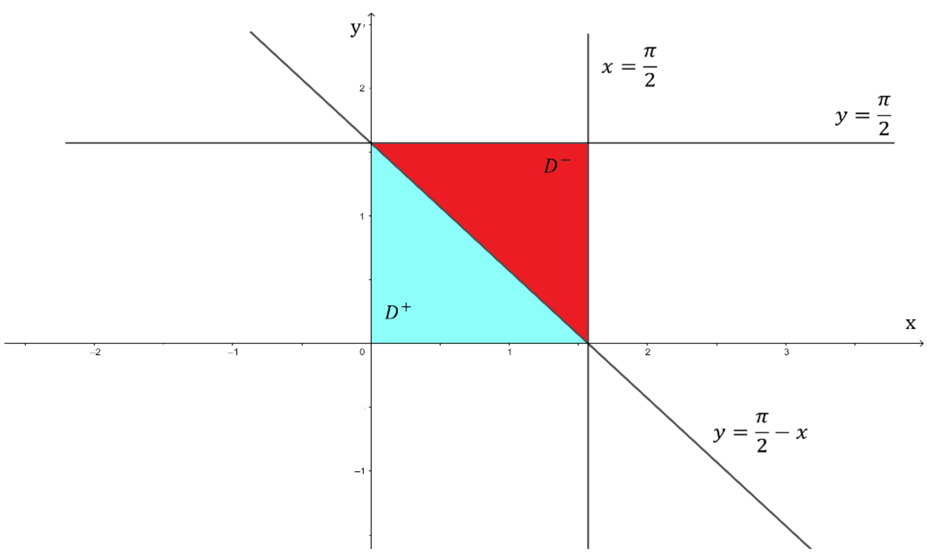
Kết hợp cùng miền $D = \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, *ta có*:

$|\cos(x+y)| = \cos(x+y) \text{ khi } \begin{cases} 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$|\cos(x+y)| = -\cos(x+y) \text{ khi } \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Chia miền D thành:

$D^+: \begin{cases} 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ và $D^-: \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy = \iint\limits_{D^+} \cos(x+y)\, dxdy + \iint\limits_{D^-} -\cos(x+y)\, dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2}\right] dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$$

Câu 5: Tính tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)dy$$

<u>Giải:</u>

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^2 (y+z)dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^{1-x} (y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left[\left(yz + \frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^{1-x}\right] dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \left[y(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dy$$

$$= \int_0^1 [2(1-x) + (1-x)^2] dx = \frac{4}{3}$$

Câu 6: Tính thể tích của miền giới hạn bởi hai parabol $x = 1 + y^2 + z^2$ và $x = 2(y^2 + z^2)$

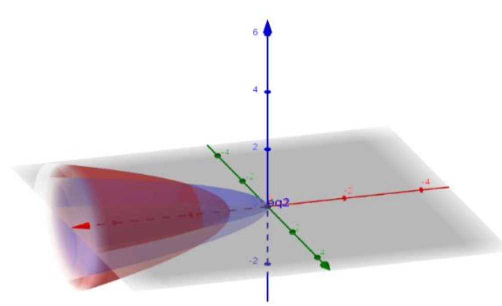
<u>Giải:</u>

Xét giao tuyến của $x = 1 + y^2 + z^2$ và $x = 2(y^2 + z^2)$

$$1 + y^2 + z^2 = 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 1$$

Hình chiếu của V lên Oyz là D: $y^2 + z^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$



Thể tích vật thể V là:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D [(1 + y^2 + z^2) - 2(y^2 + z^2)]dydz$$

$$= \iint\limits_D (1 - y^2 - z^2)dydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - r^2)rdr = \frac{\pi}{2} \text{ (đvtt)}$$

Câu 7: Cho hàm vecto khả vi $\overrightarrow{r(t)}: R \to R^3\backslash\{\vec{0}\}$. Ký hiệu $|\vec{r}(t)|$ là độ dài của $\vec{r}(t)$. Chứng minh:

$$\frac{d(|\vec{r}(t)|)}{dt} = \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\vec{r}(t).\overrightarrow{r'}(t).$$

Giải:

Đặt $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \\ \overrightarrow{r'}(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) \end{cases}$

Biến đổi tương đương

$$\frac{d(|\vec{r}(t)|)}{dt} = \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\vec{r}(t).\overrightarrow{r'}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}\right) = \frac{x'(t).x(t) + y'(t).y(t) + z'(t).z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x'(t).x(t) + 2y'(t).y(t) + 2z'(t).z(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} = \frac{x'(t).x(t) + y'(t).y(t) + z'(t).z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'(t).x(t) + y'(t).y(t) + z'(t).z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} = \frac{x'(t).x(t) + y'(t).y(t) + z'(t).z(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}}$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Câu 8: Tính tích phân $\iiint_V (2y - z)^2dxdydz$ trong đó V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Giải:

$$\iiint\limits_V (4y^2 - 4yz + z^2)dxdydz = \iiint\limits_V (4y^2 + z^2)dxdydz + \iiint\limits_V (-4yz)dxdydz$$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = -4yz \text{ là hàm lẻ với biến } y \\ \text{Miền } V \text{ đối xứng qua } Oxz \end{cases} \Rightarrow \iiint\limits_V (-4yz)dxdydz = 0$$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $J = -r^2\sin\theta$

Miền V trong tọa độ cầu là $V: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_V (4y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 [4(r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2]\, r^2 \sin\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[\frac{4}{5}(\sin\theta\sin\varphi)^2 + \frac{1}{5}(\cos\theta)^2\right] \sin\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{16}{15}(\sin\varphi)^2 + \frac{2}{15}\right] d\varphi = \frac{4}{3}\pi$$

Câu 9: Chứng minh rằng hàm số $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx$ khả vi trên R.

Giải:

Đặt $f(x,y) = e^{-x}\dfrac{\sin(xy)}{x}$

Hàm $f(x,y)$ không xác định tại $x = 0$ nhưng

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = \lim_{x\to 0^-} f(x,y) = \lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{xy}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}y = y$$

Ta có: $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x \ne 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$, $f'_y = e^{-x}\cos(xy)$ liên tục trên R^2

$$\begin{cases} |e^{-x}\cos(xy)| \le e^{-x}, \forall y \in R \\ \text{Mà } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 \text{ hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)\,dx \text{ hội tụ đều trên } R$$

(theo tiêu chuẩn Weierstrass)

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx = \int_0^1 e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{e^{-x}\sin(xy)}{x}\right| \le e^{-x}, \forall y \in R \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \text{ hội tụ} \Rightarrow I(y) = \int_0^1 e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin(xy)}{x}dx \text{ hội tụ} \\ \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \text{ hội tụ} \end{cases}$$

Vậy $I(y)$ khả vi trên R

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KỲ 20183 (ĐỀ 1)

Câu 1: Tìm hình bao của họ đường thẳng $x - cy + c^3 = 0$

Giải:

Đặt $F(x, y, c) = x - cy + c^3$

Xét $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm $\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - cy + c^3 = 0 \\ -y + 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - c.3c^2 + c^3 = 0 \\ y = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = c^3 \\ \dfrac{y}{3} = c^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{3}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow y^3 = \dfrac{27}{4}x^2$

Vậy hình bao của họ đường cong là đường $y^3 = \dfrac{27}{4}x^2$

Câu 2: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của tại điểm $A(1; 0; 1)$ của mặt $z = xe^{\sin 2y}$

Giải:

Đặt $F(x, y, z) = z - xe^{\sin 2y} \Rightarrow \begin{cases} F'_x = -e^{\sin 2y} \\ F'_y = -2x\cos y\, e^{\sin 2y} \\ F'_z = 1 \end{cases}$

Tại $A(1; 0; 1)$, ta có: $\begin{cases} F'_x(A) = -1 \\ F'_y(A) = -2 \\ F'_z(A) = 1 \end{cases}$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $A(1; 0; 1)$ là:

$$-1.(x - 1) - 2.(y - 0) + 1.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + z = 0$$

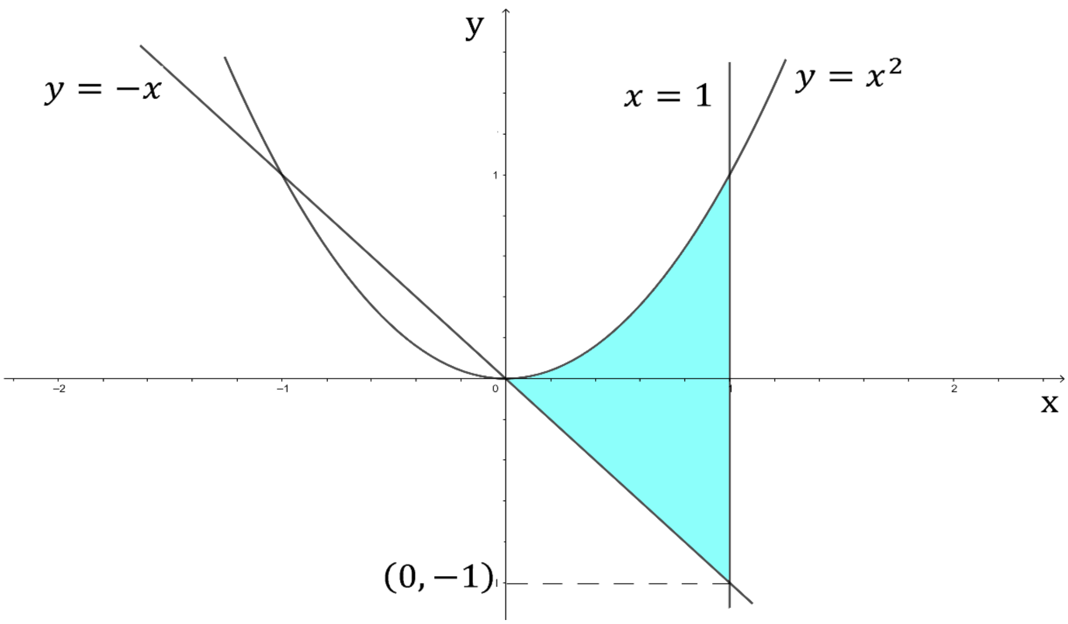
Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $A(1; 0; 1)$ là:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 1}{1}$$

Câu 3: Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy$$

Giải:



Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le x^2 \end{cases}$

Đổi thứ tự lấy tích phân, chia D thanh hai miền D_1: $\begin{cases} -y \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 0 \end{cases}$ và D_2: $\begin{cases} \sqrt{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

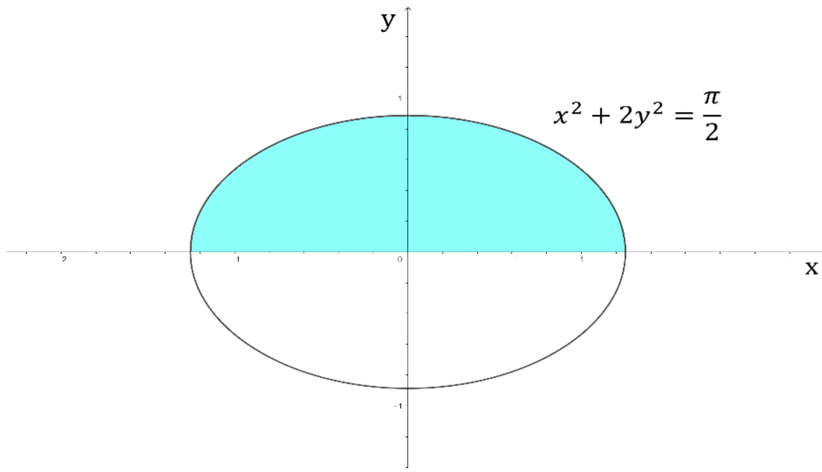
$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$$

Câu 4: Tính $\iint_D \sin(x^2 + 2y^2)\, dxdy$, với D là miền:

$$x^2 + 2y^2 \le \frac{\pi}{2}, \qquad y \ge 0$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ \sqrt{2}y = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases}, J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}r$



Miền D trong tọa độ cực suy rộng D: $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

$$\iint\limits_D \sin(x^2 + 2y^2)\,dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(r^2).\frac{r}{\sqrt{2}}dr = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(r^2)\,d(r^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Câu 5: Tính

$$\iiint\limits_V \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)z}dxdydz$$

Với V xác định bởi $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le e$

Giải:

$$\iiint\limits_V \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)z}dxdydz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_1^e \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)z}dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_1^2 \left[\frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}\ln z\right]\Bigg|_1^e dy = \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{(x+1)+(y+1)}{(x+1)(y+1)}dy = \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{1}{y+1}dy + \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{1}{x+1}dy$$

$$= \int_0^1 (\ln 3 - \ln 2)dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = (\ln 3 - \ln 2) + \ln 2 = \ln 3$$

Câu 6: Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt $x = -(y^2 + z^2)$ và $x = -1$

Giải:

Xét giao tuyến của hai mặt $x = -(y^2 + x^2)$ và $x = -1$

$\Rightarrow -(y^2 + z^2) = -1 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 1$

Hình chiếu của miền V lên Oyz là D: $y^2 + z^2 \le 1$

Thể tích miền V là:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D [1 - (y^2 + z^2)]\, dydz$$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \iiint_V dxdydz = \iint_D [1 - (y^2 + z^2)]\, dydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2).rdr = \frac{\pi}{2} \text{ (đvtt)}$$

Câu 7: Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)dx$

Giải:

Đặt $I(y) = \displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)dx$

Ta có: $\begin{cases} f(x,y) = \arctan(x - y) \text{ liên tục với } (x,y) \in R^2 \\ \cos y \text{ liên tục với y} \in \text{R} \\ \sin y \text{ liên tục với y} \in \text{R} \end{cases} \Rightarrow I(y)$ liên tục trên R

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)dx = I(0) = \int_0^1 \arctan x\, dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1 + x^2}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = x.\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}d(x^2) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{y\to 0}\int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x-y)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Câu 8: Tìm điểm có độ cong nhỏ nhất của đường $x^2 + 4y^2 = 4x$

<u>Giải:</u>

Ta có: $x^2 + 4y^2 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2\sin t\,, x'' = -2\cos t \\ y' = \cos t\,, y'' = -\sin t \end{cases}$

Độ cong của đường cong tại một điểm ứng với t bất kỳ là:

$$C = \frac{|x'y'' - x''.y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{3/2}} = 2.\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{-3/2}$$

Xét $C'(t) = 2.\frac{-3}{2}.\frac{3}{2}.2.\sin 2t\,.\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{-5/2} = \frac{-9\sin 2t}{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{5/2}} = \frac{-18\sin t\,.\cos t}{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{5/2}}$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t = 0 \\ t = \pi \\ t = \pm\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right.$

(Để bài toan bớt phức tạp, chỉ xét giá trị của t trong một vòng lượng giác)

t		-2π		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π	
$C'(t)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−
$C(t)$	↗		↘		↗		↘		↗		

Từ bảng biến thiên ⇒ $C(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm làm cho $\cos t = 1$

$\left(t = \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots\right)$

Với $\cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = -1 \\ x = 2, y = 1 \end{array}\right.$

Vậy đường cong có độ cong nhỏ nhất tại điểm $(2, -1)$ hoặc $(2,1)$

Câu 9: Tính

$$\iiint \frac{(y+1)^2}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz$$

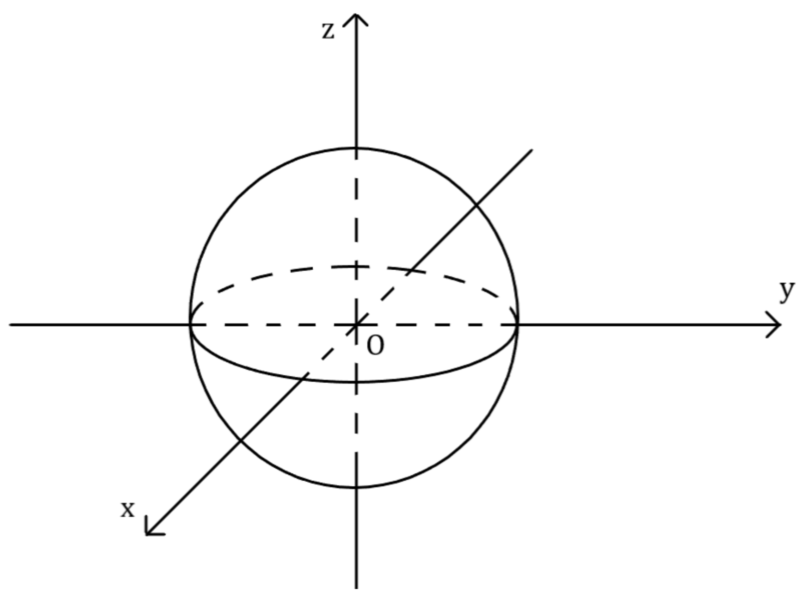
Với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Giải:

Đặt $I = \iiint\limits_V \frac{(y-1)^2}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz$

$$I = \iiint\limits_V \frac{y^2+2y+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = \iiint\limits_V \frac{y^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz + \iiint\limits_V \frac{2ydxdydz}{x^2+y^2+z^2+3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+3} \text{ lẻ với biến } y \\ \text{Miền } V \text{ đối xứng qua } Oxz \end{cases} \Rightarrow \iiint\limits_V \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = 0$$



$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \frac{y^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz \ \ (1)$$

Đổi vai trò của x, y miền V không thay đổi

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \frac{x^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz \ \ (2)$$

Đổi vai trò của y, z miền V không thay đổi

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \frac{z^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz \quad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 3I = \iiint\limits_V \frac{x^2+y^2+z^2+3}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow I = \frac{4}{9}\pi$$

Câu 10: Cho hàm số $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$. Tính $I'(1)$

Giải:

Đặt $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{1+x^2} \Rightarrow f'_y(x,y) = \dfrac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$

Ta có: $\begin{cases} f(x,y) \text{ liên tục, khả vi trên } [0;2]\times[0;2] \\ f'_y(x,y) \text{ liên tục trên } [0;2]\times[0;2] \\ y_2 = y \text{ liên tục, khả vi trên } [0;2] \end{cases} \Rightarrow I(y)$ khả vi với $y \in [0;2]$

$$I'(y) = f(y_2(y),y).y'_2(y) - f(y_1(y),y).y'_1(y) + \int\limits_{y_1(1)}^{y_2(y)} f'_y(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow I'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} - \frac{\ln 1}{1}.0 + \int\limits_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx$$

$$\Rightarrow I'(1) = \frac{\ln 2}{2} + \int\limits_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx = \int\limits_0^1 \frac{-1}{2(1+x)} dx + \int\limits_0^1 \frac{x+1}{2(1+x^2)} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}.\arctan 1$$

$$\Rightarrow I'(1) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$$

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20192 (ĐỀ 2)

Câu 1: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $x^3 + y^3 = 9xy$ tại điểm $(4,2)$

Giải:

Đặt $F(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy \Rightarrow F'_x = 3x^2 - 9y, F'_y = 3y^2 - 9x$

Tại $(4,2)$, tai có $F'_x(4,2) = 30, F'_y = -24$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $(4,2)$ là:

$$30(x-4) - 24(y-2) = 0 \Leftrightarrow 30x - 24y - 72 = 0$$

Phương trình pháp tuyến của đường cong tại $(4,2)$ là:

$$\frac{x-4}{30} = \frac{y-2}{-24}$$

Câu 2: Tính độ cong của đường $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$

Giải:

Ta có $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 - 2\cos t \\ y'(t) = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t) = 2\sin t \\ y''(t) = 2\cos t \end{cases}$

Tại $t = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,, x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,, y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Độ cong của L tại $t = \pi/2$ là:

$$C(t=0) = \frac{|2.0 - 2.2|}{(2^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^2}{2^{\frac{9}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Câu 3: Tìm hình bao của họ đường cong

$$2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2 = 0, c \text{ là tham số}, c \neq 0$$

Giải:

Đặt $F(x,y,c) = 2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2$ với $c \neq 0$

Xét $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4c = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \\ y = 0 \end{cases}$

Điểm $(c, 0)$ không thuộc họ đường cong $2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2 = 0$

$\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2 = 0 \\ -4x + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4xc + 2y^2 + c^2 = 0 \\ c = 2x \end{cases}$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x.2x + 2y^2 + (2x)^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$

Do $c \neq 0$ nên $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Vậy hình bao của họ đường cong là đường $y = \pm x$ trừ $O(0,0)$

Câu 4: Tìm giới hạn

$$\lim_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x^2y + 3x + y^2)dx$$

Giải:

Ta có: $f(x,y) = \cos(x^2y + 3x + y^2)$ là hàm số liên tục trên $[0; \pi/2] \times R$

$\Rightarrow I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x^2y + 3x + y^2)dx$ là hàm số liên tục trên R.

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x^2y + 3x + y^2)dx = I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)dx = \frac{-1}{3}$$

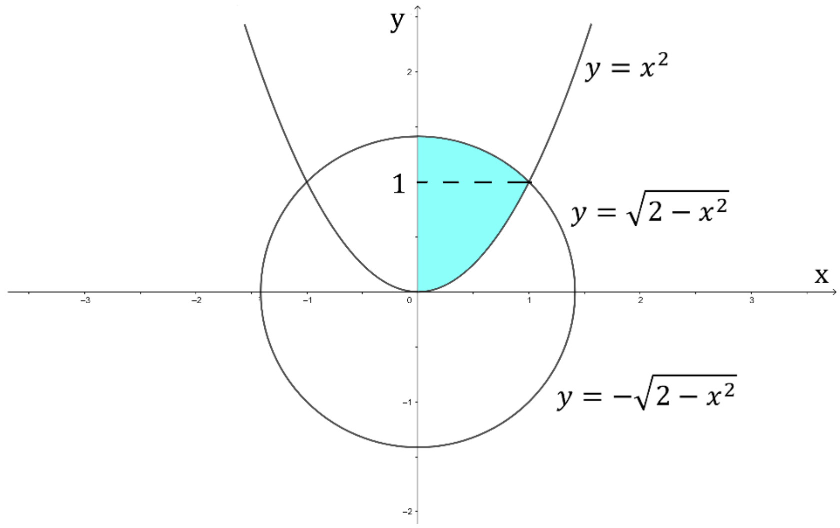
Câu 5: Đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Giải:

Miền D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \end{cases}$

Đổi thứ tự lấy tích phân



Chia miền D thành hai miền

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}, D_2: \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{2 - y^2} \\ 1 \le y \le \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

Câu 6: Tính diện tích phần mặt $z = x^2 + y^2 + 2$ nằm trong mặt $x^2 + y^2 = 9$

Giải:

Hình chiếu của phần mặt $z = x^2 + y^2 + 2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$ lên Oxy là:

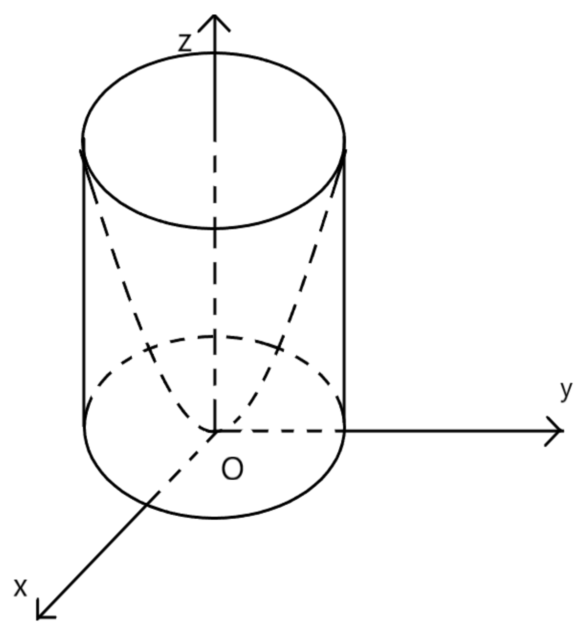
$$D: x^2 + y^2 \le 9$$

Ta có: $z'_x = 2x, z'_y = 2y$

Diện tích cần tính là:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

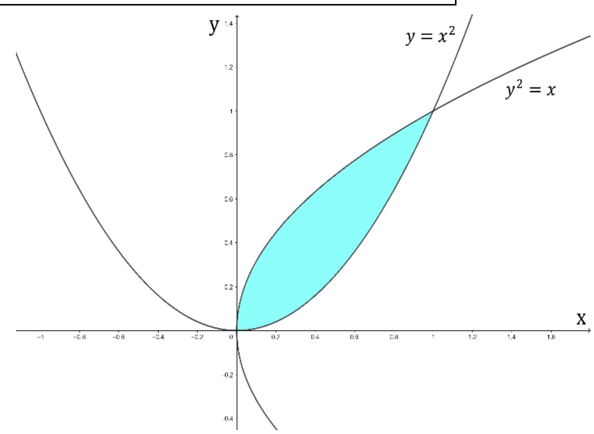


$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}.rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}d(r^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^9 \sqrt{1+4u}du = \frac{1}{2}.2\pi.\frac{1}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right) = \frac{\left(37\sqrt{37}-1\right)\pi}{6} \text{ (đvdt)}$$

Câu 7: Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, x = y^2, z = x^2$ và mặt Oxy

Giải:



Gọi miền cần tính thể tích là V.

Hình chiếu của V lên Oxy là miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow D: \begin{cases} x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Miền V: $\begin{cases} 0 \leq z \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

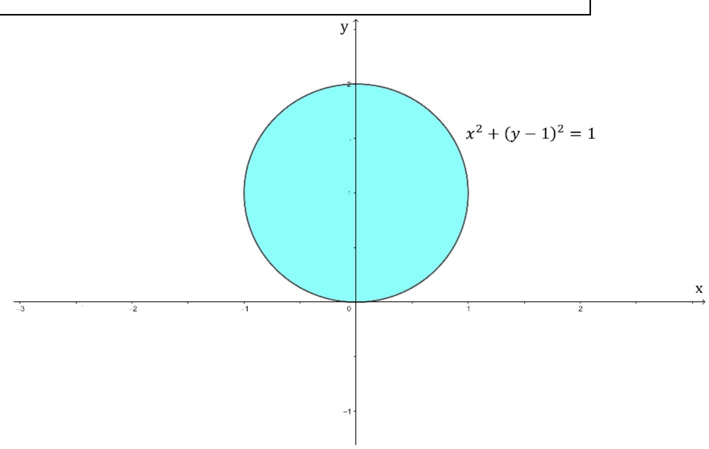
Thể tích miền V là:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D x^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{3}{35} \text{ (đvtt)}$$

Câu 8: Tính $\iint_D (2y^2+3)dxdy$, với D là miền xác định bởi

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

Giải:



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 1 + r\sin\varphi \end{cases}, J = r$

Miền D: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iint_D (2y^2+3)dxdy = 2\iint_D y^2 dxdy + 3.S_D$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + r\sin\varphi)^2 . rdr + 3.\pi.1^2 = 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi\right) d\varphi + 3\pi$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 3\pi = \frac{11}{2}\pi$$

Câu 9: Tính $\iiint_V zdxdydz$ với V xác định bởi

$$x^2 + y^2 \le 1, \qquad y^2 + z^2 \le 4, \qquad z \ge 0$$

Giải:

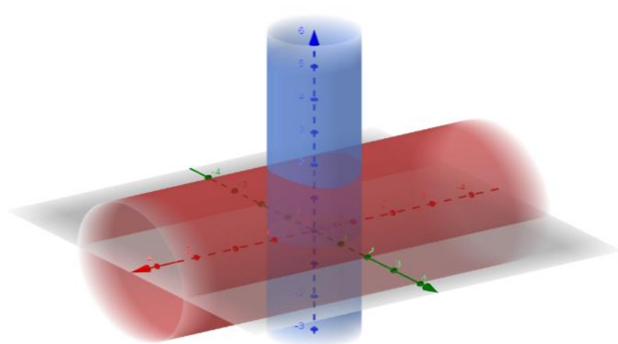
Hình chiếu của V lên Oxy là $D: x^2 + y^2 \le 1$

Miền V: $\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{4 - y^2} \\ D: x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iiint_V zdxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\iint_D (4 - y^2)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, J = r \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [4 - (r\sin\varphi)^2].rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2 - \frac{1}{4}(\sin\varphi)^2\right] d\varphi = \frac{1}{2}.\frac{15\pi}{4} = \frac{15\pi}{8}$$



Hình vẽ minh họa

Câu 10: Tính tích phân bội ba $\iiint_V \; y^2 e^z dxdydz$, trong đó

$$V: 0 \le x \le 1, x \le y \le 1, \le z \le xy + 2$$

Giải:

Miền V: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \\ 1 \le z \le xy + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \\ 1 \le z \le xy + 2 \end{cases}$ (Đổi thứ tự lấy tích phân x và y)

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_1^{xy+2} y^2 e^z dz = \int_0^1 dy \int_0^y y^2 (e^{xy+2} - e) dx$$

$$\int_0^y y^2 (e^{xy+2} - 1) dx = \int_0^y y^2 e^{xy+2} dx - \int_0^y y^2 dx = \int_0^y y e^{xy+2} d(xy+2) - e.y^3$$

$$= y e^{xy+2} \Big|_0^y - e.y^3 = y e^{y^2+2} - e^2 y - e.y^3$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dy \int_0^y y^2 (e^{xy+2} - 1) dx = \int_0^1 \left(y e^{y^2+2} - e^2 y - y^3 \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2+2} d(y^2) - \frac{e^2}{2} - \frac{e}{4}$$

$$= \frac{1}{2} e^3 - e^2 - \frac{e}{4}$$

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI GIỮA KÌ 20192 (ĐỀ 3)

Câu 1: Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của đường cong
$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ tại $t = \frac{\pi}{2}$

Giải:

$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 - 2\cos t \\ y'(t) = 2\sin t \end{cases}$.

Tại $t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$

Tại $t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{phương trình tiếp tuyến: } \dfrac{x - \pi + 2}{2} = \dfrac{y - 2}{2} \Leftrightarrow y = x - \pi + 4 \\ \text{phương trình pháp tuyến: } \dfrac{x - \pi + 2}{2} = -\dfrac{y - 2}{2} \Leftrightarrow y = \pi - x \end{cases}$

Câu 2: Tính độ cong của đường cong $y = e^{2x}$ tại $A(0,1)$

Giải:

$y = e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 2e^{2x}, y''(x) = 4e^{2x}$. Tại $A(0,1) \Rightarrow y'(0) = 2, y''(0) = 4$

Độ cong của đường cong tại điểm $A(0,1)$ là:

$$C(A) = \frac{|y''(0)|}{(1 + y'(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

Câu 3: Tìm hình bao của họ đường cong
$y = 4cx^3 + c^4$, với c là tham số

Giải:

Đặt $F(x, y, c) = y - 4cx^3 - c^4$

Xét $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12cx^2 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm $\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F = 0 \\ F'_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4cx^3 - c^4 = 0 \\ -4x^3 - 4c^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4cx^3 - c^4 = 0 \\ -x = c \end{cases}$

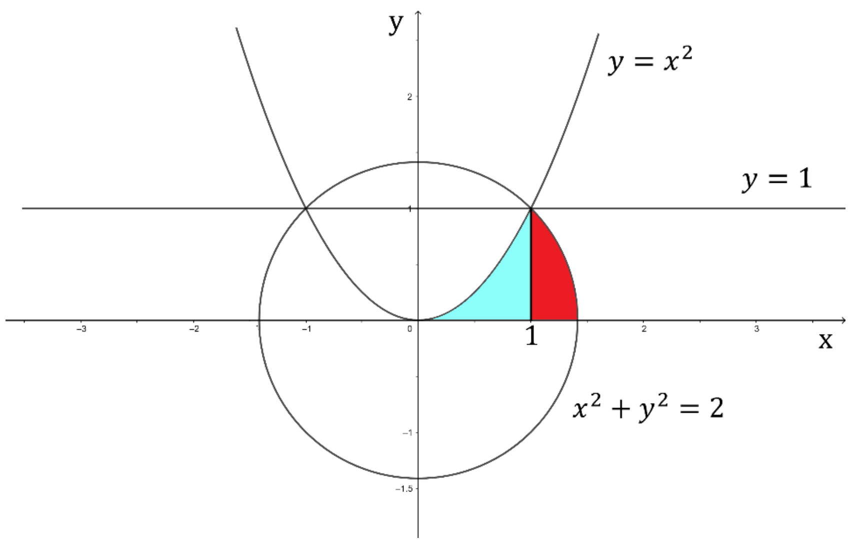
$\Rightarrow y - 4(-x)x^3 — x4 = 0 \Leftrightarrow y + 4x^4 - x^4 = 0$

Vậy hình bao của họ đường cong là $y = -3x^4$

Câu 4: Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

<u>Giải:</u>



Miền lấy tích phân (D): $\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Đổi thứ tự lấy tích phân, chia miền (D) thành 2 phần:

(D_1): $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$ và (D_2): $\begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Câu 5: Tính $\iint_D 4ydxdy$, với D là miền xác định bởi:

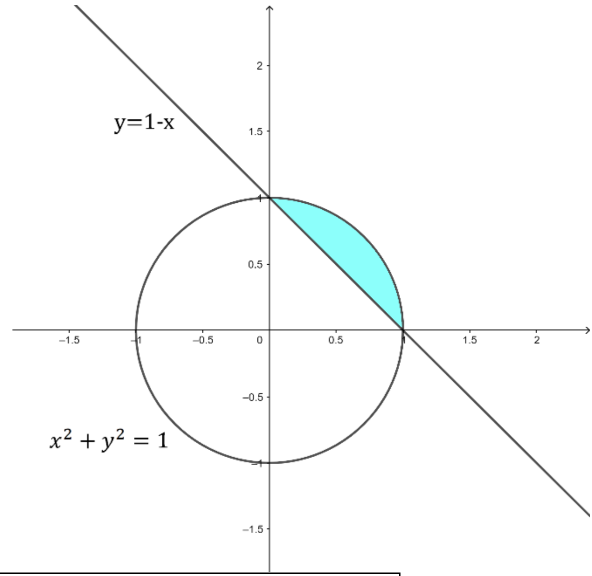
$$x^2+y^2\le 1,\qquad x+y\ge 1$$

<u>Giải:</u>

Miền D: $\begin{cases} 1-x\le y\le \sqrt{1-x^2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$

$$\iint\limits_D 4y\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 4ydy \;=\int_0^1\left(2x^2\Bigg|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=2\int_0^1[(1-x^2)-(1-x)^2]dx=\frac{2}{3}$$



Câu 6: Tính thể tích miền V giới hạn bởi mặt Oxy và mặt $z=x^2+y^2-4$

<u>Giải:</u>

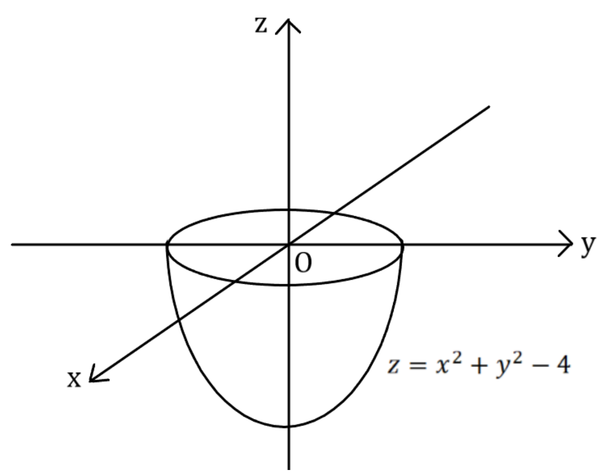
Miền (V): $x^2+y^2-4\le z\le 0$

Hình chiếu của (V) lên Oxy là: (D): $x^2+y^2\le 4$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ $J=r$. Miền (D): $\begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

Miền (V) trong tọa độ trụ là: (V): $\begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ r^2-4\le z\le 0 \end{cases}$

Thể tích miền V là:



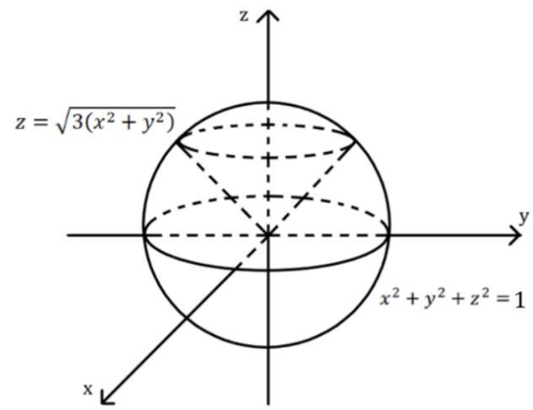
$$V_{(V)}=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 dr\int_{r^2-4}^0 rdz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(-r^2+4)dr=8\pi\text{ (đvtt)}$$

Câu 7: Tính

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

Với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 1, \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z$

Giải:



Miền V: $\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

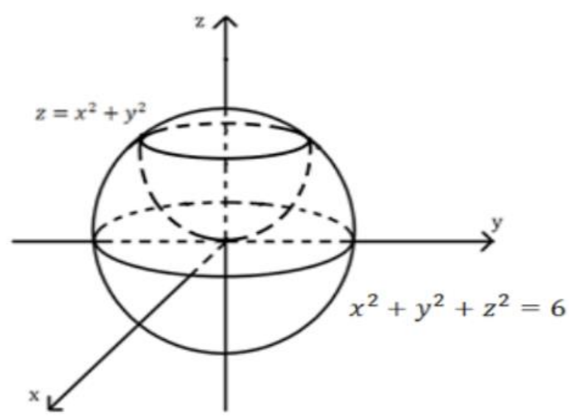
Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $|J| = r^2\sin\theta$

Miền (V): $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 r.r^3\sin\theta\, dr = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\pi$$

Câu 8: Tính $\iiint_V zdxdydz$, với V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 6, z \geq x^2+y^2$

Giải:



Miền (V) xác định bởi $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 6 \\ z \geq x^2+y^2 \end{cases}$

Hình chiếu của (V) lên Oxy là: (D): $x^2+y^2 \leq 2$

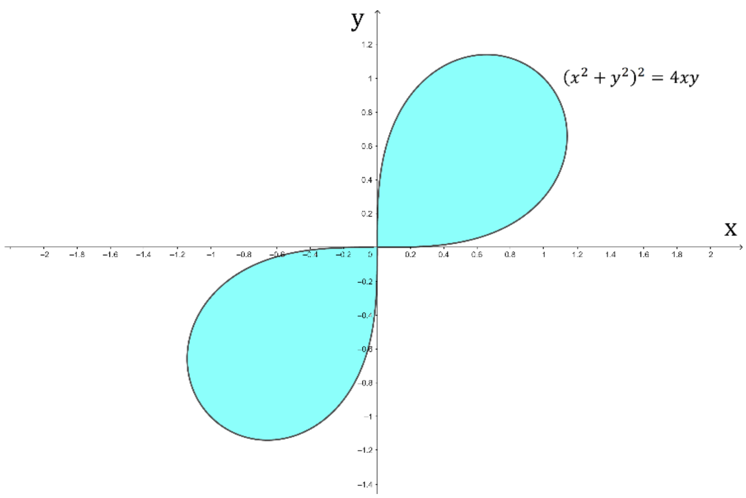
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $J = r \Rightarrow$ Miền

(V): $\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq \sqrt{6-r^2} \end{cases}$

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z.rdz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (6-r^2-r^4).rdr = \frac{11}{3}\pi$$

Câu 9: Tính diện tích của miền giới hạn bởi $$(x^2+y^2)^2 = 4xy$$

Giải:



Miền (D) giới hạn bởi $(x^2+y^2)^2 = 4xy$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $J = r \Rightarrow$ Miền (D) được giới hạn bởi đường $r = \sqrt{2\sin 2\varphi}$

Ta có: $\sin 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \sin\varphi\cos\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\varphi \geq 0 \\ \cos\varphi \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\varphi \leq 0 \\ \cos\varphi \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Miền (D) được chia thành 2 phần (D_1): $\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2\sin 2\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$ và (D_2): $\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2\sin 2\varphi} \\ \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{cases}$

$$S_{(D_1)} = \iint\limits_{D_1} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} rdr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2\varphi \, d\varphi = 1$$

$$S_{(D_2)} = \iint\limits_{D_2} dxdy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} rdr = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 2\sin 2\varphi \, d\varphi = 1$$

$\Rightarrow S_{(D)} = S_{(D_1)} + S_{(D_2)} = 2$

Câu 10: Cho hàm số $I(y)=\int_y^1 \sin(x^2+xy+y^2)dx$. Tính $I'(0)$

Giải:

Đặt $f(x,y)=\sin(x^2+xy+y^2) \Rightarrow f'_y=(x+2y)\cos(x^2+xy+y^2)$

Ta có: $\begin{cases} f(x,y) \text{ liên tục, khả vi trên } [-1,1]\times[-1,1] \\ a(y)=y,\ b(y)=1 \text{ liên tục, khả vi trên } [-1,1] \\ f'_y(x,y) \text{ liên tục trên } [-1,1]\times[-1,1] \end{cases} \Rightarrow$ Hàm $I(y)$ khả vi trên $[-1,1]$

$$I'(y)=f(b(y),y).b'_y(y)-f(a(y),y).a'_y(y)+\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx$$

$$\Rightarrow I'(y)=f(1,y).0-f(y,y).1+\int_y^1 (x+2y)\cos(x^2+xy+y^2)\,dx$$

$$\Rightarrow I'(0)=f(1,0).0-f(0,0).1+\int_0^1 x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(x^2)\,d(x^2)=\frac{\sin 1}{2}$$

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ GIỮA KÌ 20193 (ĐỀ 1)

Câu 1: Xác định độ cong tại đường cong $x = \sqrt{4y} + 1$ tại điểm $(3,1)$

<u>Giải:</u>

$x = \sqrt{4y} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{4y} = x - 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{(x-1)^2}{4}\ (x \geq 1)$

$\Rightarrow y'(x) = \dfrac{x-1}{2}\ , y''(x) = \dfrac{1}{2}$

Tại $(3,1) \Rightarrow y' = 1, y'' = \dfrac{1}{2}$

Độ cong của đường cong tại $(3,1)$ là:

$$C(3,1) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Câu 2: Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $y^2 = 3(x^2 + z^2)$ tại điểm $(\sqrt{2}, 3,1)$

<u>Giải:</u>

Đặt $F(x,y,z) = y^2 - 3(x^2 + z^2) \Rightarrow \begin{cases} F'_x = -6x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = -6z \end{cases}$

Tại $(\sqrt{2}, 3,1)$, ta có: $F'_x = -6\sqrt{2},\ F'_y = 6,\ F'_z = -6$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $(\sqrt{2}, 3,1)$ là:

$$\frac{x - \sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{-6} \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $(\sqrt{2}, 3,1)$ là:

$$-6\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 6(y-3) - 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x + y - z = 0$$

Câu 3: Tìm hình bao của họ đường cong: $y = (2x + 3c)^4$

<u>Giải:</u>

Đặt $F(x,y,c) = y - (2x + 3c)^4$

Xét $\begin{cases} F'_x(x,y,c)=0 \\ F'_y(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8(2x+3c)^3=0 \\ 1=0 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm

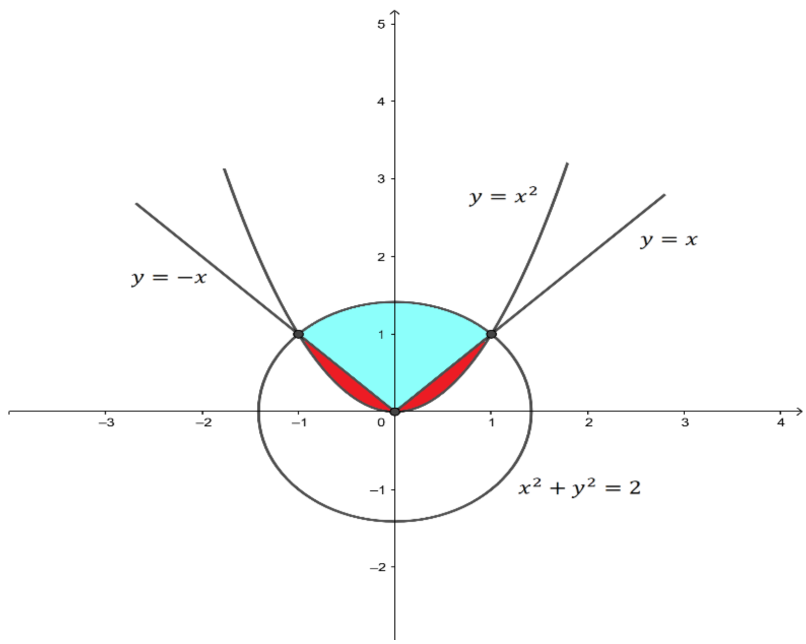
$\Rightarrow$ Họ đường cong không có điểm kì dị.

Xét $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=(2x+3c)^4 \\ -12(2x+3c)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=(2x+3c)^4 \\ \dfrac{-2}{3}x=c \end{cases} \Rightarrow y=\left(2x-\dfrac{3.2}{3}x\right)^4=0$

Vậy hình bao của họ đường cong là đường $y=0$

Câu 4: Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với D là miền phía trên parabol $y=x^2$ và nằm phía trong đường tròn $x^2+y^2=2$

Giải:



Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ $|J|=r$

Chia D thành hai miền:

$$D_1: \begin{cases} 0\le r\le \dfrac{\sin\varphi}{(\cos\varphi)^2} \\ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right] \end{cases} \text{ và } D_2: \begin{cases} 0\le r\le\sqrt{2} \\ \dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi)^2}} r.rdr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi)^2}} r.rdr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r.rdr$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\varphi)^3}{(\cos\varphi)^6}d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^3}{(\cos\varphi)^6}d\varphi + \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$= \frac{-1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^6}d(\cos\varphi) - \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^6}d(\cos\varphi) + \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$= \frac{-1}{3}\int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-u^2}{u^6}du - \frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1} \frac{1-u^2}{u^6}du + \frac{\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{4+4\sqrt{2}}{45} + \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

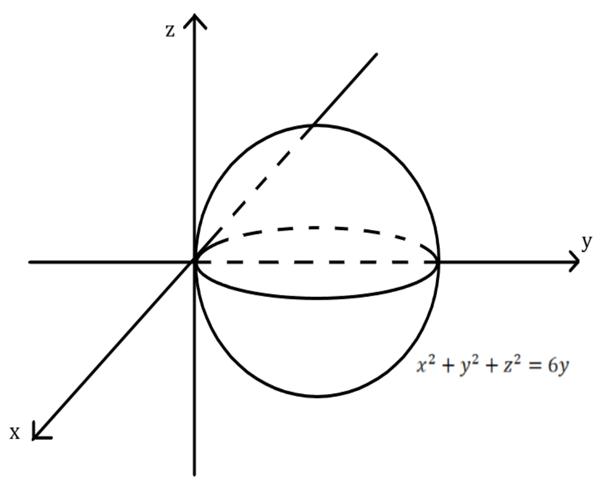
Câu 5: Tính $\iiint\limits_V \sqrt{6y-x^2-y^2-z^2}dxdydz$ với $V: x^2+y^2+z^2 \le 6y$

Giải:

Miền $V: x^2+y^2+z^2 \le 6y \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+z^2 \le 9$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3 + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $J = -r^2\sin\theta$

Miền V trong tọa độ cầu suy rộng là $V: \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$



$$\Rightarrow I = \iiint\limits_V \sqrt{9-x^2-(y^2-6y+9)-z^2}dxdydz$$

$$= \iiint\limits_V \sqrt{9-[x^2+(y-3)^2+z^2]}dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{3} \sqrt{9 - r^2}.r^2 \sin\theta \, dr$$

Đặt $r = 3\sin t \Rightarrow dr = 3\cos t \, dt$

r	3	0
t	$\frac{\pi}{2}$	0

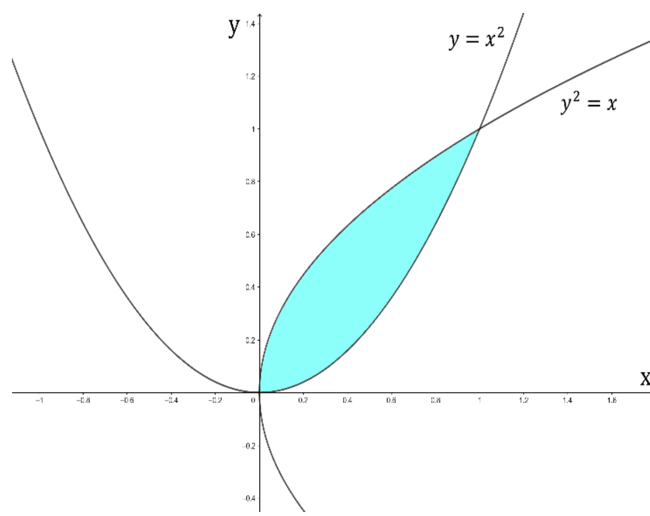
$$\Rightarrow \int_0^{3} \sqrt{9 - r^2}.r^2 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9(\sin t)^2}.9(\sin t)^2.3\cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\,.9(\sin t)^2.3\cos t \, dt$$

$$= 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^2 dt = 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{81\pi}{16}$$

$$\Rightarrow I = \frac{81\pi}{16}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{81}{4}\pi^2$$

Câu 6: Tính diện tích miền giới hạn bởi hai đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$

Giải:



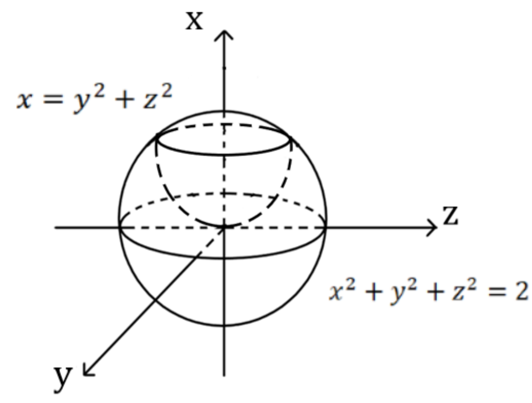
Miền D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

Diện tích miền D là:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{1}{3}(\text{đvdt})$$

Câu 7: Tính thể tích miền giới hạn bởi các mặt cong $x = y^2 + z^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nằm trong phần không gian có x không âm.

Giải:



Xét giao tuyến của hai mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x = y^2 + z^2$

$\Rightarrow (y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 = 2 \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$

Hình chiếu của V lên Oyz là $D: y^2 + z^2 \le 1$

Đặt $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases}, \ J = r$

Miền V: $\begin{cases} y^2 + z^2 \le x \le \sqrt{2 - (y^2 + z^2)} \\ D: y^2 + z^2 \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Miền V trong tọa độ trụ là V: $\begin{cases} r^2 \le x \le \sqrt{2 - r^2} \\ D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \end{cases}$

Thể tích miền V là:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\sqrt{2 - r^2} - r^2\right) dr$$

$$\int_0^1 r\left(\sqrt{2 - r^2} - r^2\right) dr = \int_0^1 r\sqrt{2 - r^2} dr - \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2 - r^2} d(r^2) - \frac{1}{4} = \frac{-7 + 8\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\sqrt{2 - r^2} - r^2\right) dr = \frac{-7 + 8\sqrt{2}}{6}\pi \text{ (đvtt)}$$

Câu 8: Tính diện tích mặt cong $z = 2x^2 - 2y^2$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$

Giải:

Hình chiếu của phần mặt $2x^2 - 2y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ lên Oxy là: $D: x^2 + y^2 \le 1$

Ta có: $z'_x = 4x, z'_y = 4y$

Diện tích cần tính là:

$$S=\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy=\iint_D \sqrt{1+16x^2+16y^2}dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}, J=r \Rightarrow D: \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+16r^2}.rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+16r^2}d(r^2)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+16u}du$$

$$=\frac{1}{2}.2\pi.\frac{1}{24}\left(17\sqrt{17}-1\right)=\frac{\left(17\sqrt{17}-1\right)\pi}{24} \text{ (đvdt)}$$

Câu 9: Tính $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 (x+3y)\sqrt{x^2+y^3+1}dx$

<u>Giải:</u>

Ta có: $(x+3y)\sqrt{x^2+y^3+1}$ liên tục trên miền $[0,1]\times[-1,1]$

$\Rightarrow I(y)=\int_0^1 (x+3y)\sqrt{x^2+y^3+1}dx$ liên tục trên $[-1,1]$ chứa $y=0$

$\Rightarrow I(y)=\int_0^1 (x+3y)\sqrt{x^2+y^3+1}dx$ liên tục tại $y=0$

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 (x+3y)\sqrt{x^2+y^3+1}dx=I(0)=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x^2+1}d(x^2)=\frac{-1+2\sqrt{2}}{3}$$

Câu 10: Khảo sát tính liên tục và khả vi của hàm số:

$$g(y)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$$

<u>Giải:</u>

Đặt $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

*Khảo sát tính liên tục:

Xét hàm số $g(y)$ tại $y \neq 0$

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} \Big|_0^1 = \frac{1}{y} \arctan \frac{1}{y}$$

Xét hàm số $g(y)$ tại $y = 0$

$$g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big|_0^1 = -\infty$$

$\Rightarrow g(y)$ không xác định tại $y = 0$

Vậy hàm số $g(y)$ liên tục với $y \neq 0$

*Khảo sát tính khả vi:

Xét hàm số $g(y)$ tại $y \neq 0$

$$\begin{cases} \text{Với } y \in R\backslash\{0\}, f(x,y) \text{ là hàm số liên tục trên } [0;1] \\ f'_y = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \text{ là hàm số liên tục trên } [0;1] \times (-\infty;0) \text{ và } [0;1] \times (0;+\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow g(y)$ là hàm số khả vi với $y \neq 0$

Xét hàm số $g(y)$ tại $y \neq 0$

Với $y = 0 \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{x^2}$ bị gián đoạn tại $x = 0$

$\Rightarrow$ Với $y = 0$ thì $f(x,y)$ không liên tục trên $[0;1]$

$\Rightarrow g(y)$ không khả vi tại $y = 0$

Vậy hàm số $g(y)$ khả vi với $y \neq 0$