Tuần 4

Chương 2: Ma trận - Định thức - Hệ PTTT

Hệ phương trình tuyến tính

I Tổng quát

Hệ m phương trình, n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{1n} & = b_1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + ... + a_{2n} & = b_2 \\ ... \\ a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + ... + a_{mn} & = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Hệ (1) còn có thể được viết là

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$$AX = B$$

II Hệ Cramer

Hệ (1) là hệ Cramer khi $m = n$ và $\det A \neq 0$

► **Định lí**

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$ hay $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}, \forall i = \overline{1, n}$

(Trong đó A_i là ma trận thay cột i của A bằng vecto cột B)

III Giải HPTTT bằng phương pháp Gauss

$\mathbf{B_1}$ Viết ma trận A cạnh vecto cột B được ma trận $\overline{A}$

$\mathbf{B_2}$ Biến đổi sơ cấp trên hàng đưa A về ma trận bậc thang

$\mathbf{B_3}$ Biện luận theo rank$A$

▶ **Định lí Kronecker - Capelli**

Nếu rank$A \neq$ rank$\overline{A}$ thì hệ (1) vô nghiệm

Nếu rank$A =$ rank$\overline{A} = n$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất

Nếu rank$A =$ rank$\overline{A} < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm

IV Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ (1) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nếu $B = \mathcal{O}$. Có hai trường hợp

Nếu rank$A = n$: hệ có nghiệm duy nhất $X = \mathcal{O}$

Nếu rank$A < n$: hệ có vô số nghiệm

Hệ quả Nếu A là ma trận vuông cấp n, hệ $AX = \mathcal{O}$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

V Các ví dụ

1. Giải các hệ phương trình sau bằng hệ *Cramer*

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 13 \end{cases}$

Giải

a) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ta có $\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ đã cho là hệ *Cramer*

Ta có $\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3$

Vậy $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{\det A_1}{\det A}, \dfrac{\det A_2}{\det A}, \dfrac{\det A_3}{\det A}\right) = (1, 0, 1)$ là nghiệm duy nhất của hệ

b) Xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, ta có $\det B = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Hệ đã cho là hệ *Cramer*

Ta có $\det B_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 13 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \det B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -12$

Vậy $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{\det B_1}{\det B}, \dfrac{\det B_2}{\det B}, \dfrac{\det B_3}{\det B} \right) = (1, 0, 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 8 \end{cases}$

Giải

a) Xét ma trận bổ sung $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

$$\overline{A} \xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nhận thấy $\text{rank} A = \text{rank} \overline{A} = 3$ nên hệ phương trình có duy nhất nghiệm

Từ ma trận sau khi biến đổi sơ cấp, ta được hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_3 &= 1 \end{cases}$

Giải hệ, ta được nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

b) Xét ma trận bổ sung $\overline{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right)$. Thực hiện biến đổi sơ cấp, ta có

$$\overline{B} \xrightarrow[h_3 - 2h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{3h_3 - 2h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 18 \end{array} \right)$$

Do đó hệ có vô số nghiệm thỏa mãn. Đặt $x_4 = t$, khi đó từ ma trận bổ sung sau khi biến đổi sơ cấp, ta được nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1 + \dfrac{4t}{3}, 2 - \dfrac{16t}{3}, 6 - \dfrac{11t}{3}, t \right)$

3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= b \\ mx_1 + x_2 + x_3 &= c \end{cases}$$

trong đó $a, b, c, m \in \mathbb{R}$.

a) a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Cho $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

<u>Giải</u>

a) Xét ma trận tạo bởi các hệ số của các ẩn $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -3m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

b) Với $m \neq -2$ thì $\det A \neq 0$ nên hệ phương trình là hệ *Cramer*, do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

Với $m = -2$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thấy hệ này có vô số nghiệm