TÀI LIỆU GT3 BÁ VJP PRO NO1

I. Chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$

Điều kiện cần để 1 chuỗi hội tụ: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\rightarrow$ *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *hoặc không tồn tại* $\rightarrow$ *Chuỗi phân kì*

(Trước khi làm 1 câu về chuỗi có thể nhẩm nhanh giới hạn này trước khi làm)

1. Chuỗi số

Một số chuỗi số có sẵn

Chuỗi Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha > 1 \rightarrow \text{Chuỗi hội tụ} \\ \alpha \leq 1 \rightarrow \text{Chuỗi phân kì} \end{cases}$$

Chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Chuỗi hội tụ} \\ |q| \geq 1 \rightarrow \text{Chuỗi phân kì} \end{cases}$$

a) Chuỗi số dương

Có $u_n \geq 0 \ \forall\, n \geq n_0$

Các tiêu chuẩn áp dụng cho chuỗi số dương:

Tiêu chuẩn D' Alembert (Áp dụng tốt cho hàm có mũ, giai thừa)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \rightarrow \begin{cases} D < 1 \rightarrow \text{Chuỗi hội tụ} \\ D > 1 \rightarrow \text{Chuỗi phân kì} \\ D = 1 \rightarrow \text{Không kết luận} \end{cases}$$

Note: Cách nhớ là un+1/un < 1 suy ra un+1 < un nghĩa là số đằng sau nhỏ hơn số đằng trước => Dãy cứ giảm dần giảm dần => Hội tụ

Tiêu chuẩn Cauchy (Áp dụng tốt cho hàm cần hạ bậc n)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = C \rightarrow \begin{cases} C < 1 \rightarrow \text{Chuỗi hội tụ} \\ C > 1 \rightarrow \text{Chuỗi phân kì} \\ C = 1 \rightarrow \text{Không kết luận} \end{cases}$$

Note: Từ cách nhớ của TC D' Alembert rồi suy ra Cauchy tương tự =))

Tiêu chuẩn tích phân

(Theo mình thấy thì TC này thường áp dụng cho dạng dưới đây nên mình không nói TCTP về mặt lí thuyết nữa)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\,ln^a n}$$

$Có\ u_n = \dfrac{1}{n.\,ln^a n} > 0\ \forall n \geq 2 \rightarrow Chuỗi\ là\ chuỗi\ dương$

$Xét\ f(x) = \dfrac{1}{x.\,ln^a x}\ , x \geq 2$

$$Chỉ\ ra \begin{cases} f(x)\ liên\ tục, dương, đơn\ điệu\ giảm\ \forall\ x \geq 2 \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ \int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \dfrac{1}{x.\,ln^a x} dx = \int_2^{\infty} \dfrac{1}{\ln^a x} d(\ln x) = I \end{cases}$$

Nếu I hội tụ => $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.ln^a n}\ hội\ tụ$

I phân kì => $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.ln^a n}\ phân\ kì$

Tiêu chuẩn so sánh

Đặt $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n\ (1)\ ;\ \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n\ \ (2)$

+ TC1 : $\begin{cases} Nếu\ u_n \leq v_n \forall n\ , v_n\ hội\ tụ \rightarrow u_n\ hội\ tụ \\ Nếu\ u_n \leq v_n \forall n\ , u_n\ phân\ kì \rightarrow v_n\ phân\ kì \end{cases}$

Note: Cách nhớ: chuỗi dài hơn to hơn mà hội tụ thì chuỗi nhỏ hơn cũng phải hội tụ. Chuỗi bé hơn nhỏ hơn mà phân kì thì chuỗi lớn hơn cũng phải phân kì

+ TC2 : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \rightarrow \begin{cases} 0 < k < +\infty \rightarrow (1), (2)\ cùng\ HT, PK \\ k = 0 \rightarrow (2)\ HT \rightarrow (1)\ HT \\ k = +\infty \rightarrow (2)\ PK \rightarrow (1)\ PK \end{cases}$

Một dạng khá phổ biến sử dụng TC2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a} = \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

$Nếu\ a < 1 \rightarrow Chọn\ v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\ với\ 1 < \alpha < a$

$Nếu\ a > 1 \rightarrow Chọn\ v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\ với\ 0 < \alpha < 1$

$\rightarrow Xét\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \rightarrow sử\ dụng\ TC2$

b) Chuỗi đan dấu

$$u_n \text{ có } (-1)^n \to \textit{Không phải chuỗi dương}$$

Một số tiêu chuẩn cho chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n . u_n \ \text{ với } u_n > 0\ \forall\, n \geq n_0$$

Tiêu chuẩn Leibnitz (Phát triển từ tiêu chuẩn Dirichlet mục d)

$$\text{Nếu} \begin{cases} u_{n+1} \leq u_n\ \forall n \\ \textit{hay } \{u_n\} \text{ là dãy đơn điệu giảm } \forall n \geq n_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$$

$\to$ *Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz*

Tiêu chuẩn D’ Alembert và Cauchy mở rộng

(Khi sử dụng sẽ loại bỏ được $(-1)^n$ nhờ dấu trị tuyệt đối. Thường dùng trong các bài xét sự HTTĐ nhưng mình vẫn thấy phù hợp cho chuỗi đan dấu)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt{a_n}\right| = k$$

$$\text{Khi đó} \begin{cases} k < 1 \to \textit{Chuỗi hội tụ, hơn nữa còn hội tụ tuyệt đối} \\ k > 1 \to \textit{Chuỗi } \ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ và } \ \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \textit{ phân kì} \end{cases}$$

c) Sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \textit{ hội tụ tuyệt đối } \leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \textit{ hội tụ}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \textit{ hội tụ nhưng } \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \textit{ phân kì} \to \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \ \textit{ bán hội tụ}$$

$$\to \text{Định lí: } \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \textit{ hội tụ} \to \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \ \textit{ hội tụ}$$

$$\textit{Tuy nhiên nếu } \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \textit{ phân kì thì không suy ra } \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \ \textit{ phân kì được}$$

$$\textit{Nhưng nếu } \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \textit{ phân kì theo TC D'Alembert hay Cauchy mở rộng}$$

$$\to \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \ \textit{ cũng phân kì}$$

d) Một vài tiêu chuẩn nâng cao (Sưu tầm by Trần Bá Hiếu)

Tiêu chuẩn Dirichlet và Abel

$$Cho\ chuỗi\ số \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n$$

$$-Dirichlet:$$

$$+)\ \ Dãy\ các\ tổng\ riêng\ của\ chuỗi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \ là\ bị\ chặn$$

$$+)\ \ b_n\ là\ dãy\ đơn\ điệu\ hội\ tụ\ đến\ 0$$

$$=> \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n\ là\ một\ chuỗi\ số\ hội\ tụ$$

$$-Abel:$$

$$+)\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \ hội\ tụ$$

$$+)\ \ b_n\ là\ một\ dãy\ số\ đơn\ điệu\ bị\ chặn$$

$$=> \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n\ hội\ tụ$$

Tiêu chuẩn chuỗi số mở rộng

$$Cho\ 2\ chuỗi\ số\ dương \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \ và \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ \ thỏa\ mãn$$

$$+)\ \ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$$

$$+)\ \ Dãy\ số\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\Bigg|_{n=n_0}^{+\infty}\ \ là\ đơn\ điệu$$

$$=> \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \ và \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ \ cùng\ phân\ kỳ, hoặc\ bán\ hội\ tụ, hoặc\ cùng$$

$$hội\ tụ\ tuyệt\ đối$$

Tiêu chuẩn Raabe

$$Cho\ chuỗi\ số\ dương\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ và\ \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=k$$

$nếu\ k>1\ thì\ chuỗi\ số\ hội\ tụ$

$nếu\ k<1\ thì\ chuỗi\ số\ phân\ kỳ$

Tiêu chuẩn Bertrand

$$Cho\ chuỗi\ số\ dương\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ và\ \lim_{n\to+\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=k$$

$nếu\ k>1\ thì\ chuỗi\ số\ hội\ tụ$

$nếu\ k<1\ thì\ chuỗi\ số\ phân\ kỳ$

Tiêu chuẩn A

$$Cho\ chuỗi\ số\ dương\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ và\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt[n]{a^n}\right)=k$$

$nếu\ k>1\ thì\ chuỗi\ số\ hội\ tụ$

$nếu\ k<1\ thì\ chuỗi\ số\ phân\ kỳ$

Tiêu chuẩn B

$$Cho\ chuỗi\ số\ dương\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ và\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}\left[\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt[n]{a^n}\right)-1\right]=k$$

$nếu\ k>1\ thì\ chuỗi\ số\ hội\ tụ$

$nếu\ k<1\ thì\ chuỗi\ số\ phân\ kỳ$

2. Chuỗi hàm

$$Có\ dạng\ \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)$$

a) Sự hội tụ đều

Định nghĩa

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)\ \text{hội tụ đều đến } S(x) \text{ trên tập } X \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ bé tùy ý}$$

$\exists\, n_0(\varepsilon) \in N: \forall n > n_0(\varepsilon), ta\ có\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in X$

Một vài tiêu chuẩn xét sự hội tụ đều

TC Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I$

$\exists n_0: |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0, \forall p \in N$

$$\rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)\ \text{hội tụ đều trên } I$$

TC Weierstrass (Thường sử dụng)

Nếu $\begin{cases} |u_n(x) \leq a_n \forall n \in N, \forall x \in I \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\ \ \text{hội tụ} \end{cases}$

$$\rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)\ \text{hội tụ đều trên } I$$

Note: Bài toán tìm miền hội tụ, sử dụng đến tính chất của sự hội tụ đều thường áp dụng cho dạng đặc biệt của chuỗi hàm đó là chuỗi lũy thừa nên mình không nói sâu về chuỗi hàm nữa mà nói vào chuỗi lũy thừa luôn

b) Chuỗi lũy thừa

$$\text{Có dạng } \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n . x^n$$

+) *Bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa*:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| \text{ hoặc } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

Khi đó chuỗi lũy thừa hội tụ $\forall x \in (-R; R)$

Xét tại các điểm x=R và x=-R => Miền hội tụ

+) *Lúc này ta sử dụng tính chất chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên miền hội tụ và tính chất của một chuỗi hội tụ đều ta có:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n . x^n\right) dx = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\int_a^b u_n . x^n dx\right)$$

hoặc

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n . x^n\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_n . x^n)$$

Đây chính là tính chất sử dụng cho dạng bài tính tổng và khai triển Taylor hay Maclaurin. Các bài về dạng này thì vô số kể, có thể làm trong đề cương trên Sami là đủ rồi còn muốn MacBook hay HBTN thì mình chịu nhé =))

Bảng khai triển Maclaurin thường gặp

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in R$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$	$x \in R$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$x \in R$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\|x\| < 1$
$\ln(1+x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\|x\| < 1$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$\|x\| \leq 1$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$\|x\| < 1$

3. Chuỗi Fourier

Tổng quát

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ \forall a_n, b_n \in R$$

Một số bổ đề $\forall p, k \in Z$

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0, \quad k \neq 0$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx . \sin px\, dx = 0$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx . \cos px = \begin{cases} 0 \,, k \neq p \\ \pi, k = p \neq 0 \end{cases}$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx . \sin px = \begin{cases} 0, k \neq p \\ \pi, k = p \neq 0 \end{cases}$

Các trường hợp đặc biệt

Hàm số f(x) tuần hoàn với chu kì 2π (Thường gặp)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \; với \; n = 1,2,3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \; với \; n = 1,2,3, \ldots$$

(*) Định lý Dirichlet:

Cho $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi; \pi]$

$\Rightarrow$ chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi; \pi]$ và có $S(x) = f(x)$, tại điểm liên tục của $f(x)$.

Còn tại điểm gián đoạn $x = c$ có $S(c) = \frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$

(*) Đẳng thức Parseval:

Nếu f(x) thỏa mãn định lý Dirichlet thì thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Hàm số f(x) tuần hoàn với chu kì 2l bất kì

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{=l}^{l} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \; dx \; với \; n = 1,2,3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \; dx \; với \; n = 1,2,3, \ldots$$

Hàm số f(x) là hàm chẵn

$\rightarrow f(x) \cos nx \; là \; hàm \; chẵn \,, f(x) \sin nx \; là \; hàm \; lẻ$

$$\to a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\,;\, b_n = 0\ \forall n \in N$$

Hàm số f(x) là hàm lẻ

$\to f(x)\cos nx$ *là hàm lẻ*, $f(x)\sin nx$ *là hàm chẵn*

$$\to b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx\,;\, a_n = 0\ \forall n \in N$$

II. Phương trình vi phân cấp một

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hoặc } y' = f(x; y)$$

1. Phương trình vi phân khuyết

$$F(x, y') = 0$$

$+)\ y' = f(x) \to y = \int f(x)dx$

$+)\ x = f(y')$, đặt $y' = t \to x = f(t); y = \int t f'(t)dt$

$$F(y, y') = 0$$

$+)\ y' = f(y) \to \frac{dy}{dx} = f(y) \to dx = \frac{dy}{f(y)} \to x = \int \frac{1}{f(y)}dy$

$+)\ y = f(y')$, đặt $y' = t \to y = f(t);\ x = \int \frac{f'(t)}{t}dt$

$+)\ F(y, y') = 0$, đặt $y = f(t) \to y' = g(t) \to x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt$

2. Phương trình vi phân phân li biến số

$$f(y)dy = g(x)dx$$

$\to F(y) = \int g(x)dx$

3. Phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất)

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$+)$ Đặt $v = \frac{y}{x} \to y' = v + xv'$

$+)$ *Khi đó ptvp trở thành ptvp phân li*

4. Phương trình vi phân tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)\ \text{ hoặc } x' + p(y)x = q(y)$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[\int \left(q(x).e^{\int p(x)dx}\right)dx + C\right]$$

5. Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \text{ hoặc } x' + p(y)x = q(y)x^{\alpha}$$

$+)$ *Nếu* $\alpha = 1 \to y' + y[p(x) - q(x)] = 0 \to$ *PTVP thuần nhất*

$+)\ Nếu\ \alpha \neq 1 \rightarrow y^{-\alpha}.y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$

$Đặt\ z = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y' \rightarrow y^{-\alpha}.y' = \frac{z'}{1-\alpha}$

$Thay\ vào\ PT\ ta\ được:$

$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x) \rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$

$\rightarrow PTVP\ tuyến\ tính$

6. PTVP toàn phần

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\ thỏa\ mãn\ Q'_x = P'_y$$

$Nghiệm\ của\ PTVP\ là:$

$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$

$hoặc\ \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dy = C\ trong\ đó\ x_0, y_0\ tùy\ chọn$

(*)Nhân tử tích phân: PT $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ không phải là PTVP toàn phần nếu tồn tại hàm số h(x,y) sao cho:

$$h(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0\ là\ PTVP\ toàn\ phần$$

$[h(x,y)P(x,y)]'_y = [h(x,y)Q(x,y)]'_x \rightarrow h(x,y)\ gọi\ là\ nhân\ tử$

(*)Cách tìm nhân tử h(x,y)

$TH1: Nếu \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = I\ chỉ\ phụ\ thuộc\ vào\ x\ thì\ h(x) = e^{-\int I dx}$

$TH2: Nếu \frac{P'_y - Q'_x}{P} = I'\ chỉ\ phụ\ thuộc\ vào\ y\ thì\ h(y) = e^{\int I' dy}$

CHÚC MỌI NGƯỜI THI TỐT, FULL A+ <3

- From NTĐ with love -