LỜI GIẢI CHI TIẾT MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ - Thi thử Cuối kỳ 20231

Thực hiện bởi team Xác suất thống kê - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1:

Gọi A_i là sự kiện trong hộp có i quyển sách, $i = \overline{0;2}$

Gọi B_i là sự kiện khách đoán trong hộp có i quyển sách, $i = \overline{0;2}$

Theo đề bài, ta có các xác suất sau:

$$P(A_0|B_0) = 0,4 \qquad P(A_1|B_1) = 0,4 \qquad (1)$$
$$P(A_2|B_2) = 0,4 \qquad P(A_2|B_0) = 0,4$$
$$P(A_0|B_2) = 0,4$$

a) gọi C là sự kiện khách có sách mang về. Ta thấy $\{B_0, B_1, B_2\}$ là một nhóm đầy đủ. Do đó ta có:

$$P(C) = \sum_{i=0}^{2} P(B_i).P(C|B_i)$$

Ta thấy $P(C|B_i)$ cũng chính bằng $P(A_i|B_i)$; do khách đoán đúng trong hộp chứa bao nhiêu quyển sách mới được có sách mang về. Vì vậy ta có:

$$P(C) = \sum_{i=0}^{2} P(B_i).P(C|B_i) = 0,4.(P(B_1) + P(B_2) + P(B_0)) = 0,4$$

b) Theo giả thiết, ta có $P(A_1 + A_2) = 0,4$ và $P(A_2|A_1 + A_2) = 0,4$

Mặt khác, $\{A_0, A_1, A_2\}$ là một nhóm đầy đủ nên suy ra $P(A_2|A_1 + A_2) = \dfrac{P(A_2)}{P(A_1 + A_2)}$

$\Rightarrow P(A_2) = 0,4$

$\Rightarrow P(A_1) = P(A_1 + A_2) - P(A_2) = 0,24$

Ta có:

$$P(A_0|B_0) = P(A_2|B_0) = 0,4 \Rightarrow P(A_1|B_0) = 0,2 \qquad (2)$$
$$P(A_2|B_2) = P(A_0|B_2) = 0,4 \Rightarrow P(A_1|B_2) = 0,2 \qquad (3)$$

Đặt $P(B_1) = x$ và $P(B_0) = y$. Theo giả thiết, $P(B_2) = 2x \Rightarrow y + 3x = 1$ (4)

Từ $(1), (2), (3)$ ta có $P(A_1) = \sum_{i=0}^{2} P(B_i).P(A_1|B_i) \Leftrightarrow 0,24 = 0,2y + 0,4x + 2x.0,2$ (5)

Từ $(1), (5)$ ta tính được $x = 0,2$ và $y = 0,4$.

Vậy xác suất cần tính là:

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1C)}{P(C)} = \frac{P(A_1).P(C|A_1)}{P(C)} = \frac{P(A_1).P(B_1|A_1)}{P(C)} = \frac{P(B_1).P(A_1|B_1)}{P(C)} = P(B_1) = 0,2.$$

Câu 2:

a) Gọi X là phần thưởng của C khi tham gia làm cả 3 bài thi, ta có bảng phân phối xác suất của X:

X	0	80	100	150	180	230	250	330
$p(X)$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7

Gọi A_i là sự kiện C nhận được thưởng của bài thứ i, $i = \overline{1,3}$

$P(A_1) = \sum_{k=18}^{30} C_{30}^{k}.0,6^k.0,4^{30-k} = 0,5785$ $\qquad$ $P(A_2) = \sum_{k=9}^{15} C_{15}^{k}.0,5^k.0,5^{15-k} = 0,3036$

$P(A_3) = 0,4^3 = 0,064$

Do các sự kiện A_1, A_2, A_3 độc lập nhau nên ta có:

$p_0 = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0,2747$ $\qquad$ $p_4 = P(A_1.A_2.\overline{A_3}) = 0,1644$

$p_1 = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = 0,3771$ $\qquad$ $p_5 = P(A_1.\overline{A_2}.A_3) = 0,0258$

$p_2 = P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) = 0,1198$ $\qquad$ $p_6 = P(\overline{A_1}.A_2.A_3) = 0,0082$

$p_3 = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) = 0,0188$ $\qquad$ $p_7 = P(A_1.A_2.A_3) = 0,0112$

Từ đó, ta dễ tính được $E(X) = 86,24$

b) Gọi $A_1^{'}$ là sự kiện C được nhận thưởng ở bài 1 sau khi ôn luyện.

$$P(A_1^{'}) = \sum_{k=18}^{30} C_{30}^{k}.\left(0,6 + \frac{a}{100}\right)^k.\left(0,4 - \frac{a}{100}\right)^{30-k}$$

Ta cần tìm a nhỏ nhất thỏa mãn giả thiết, và $P(A_1^{'}) \geq 0,95 \Rightarrow \min a = 13$

Câu 3:

a)

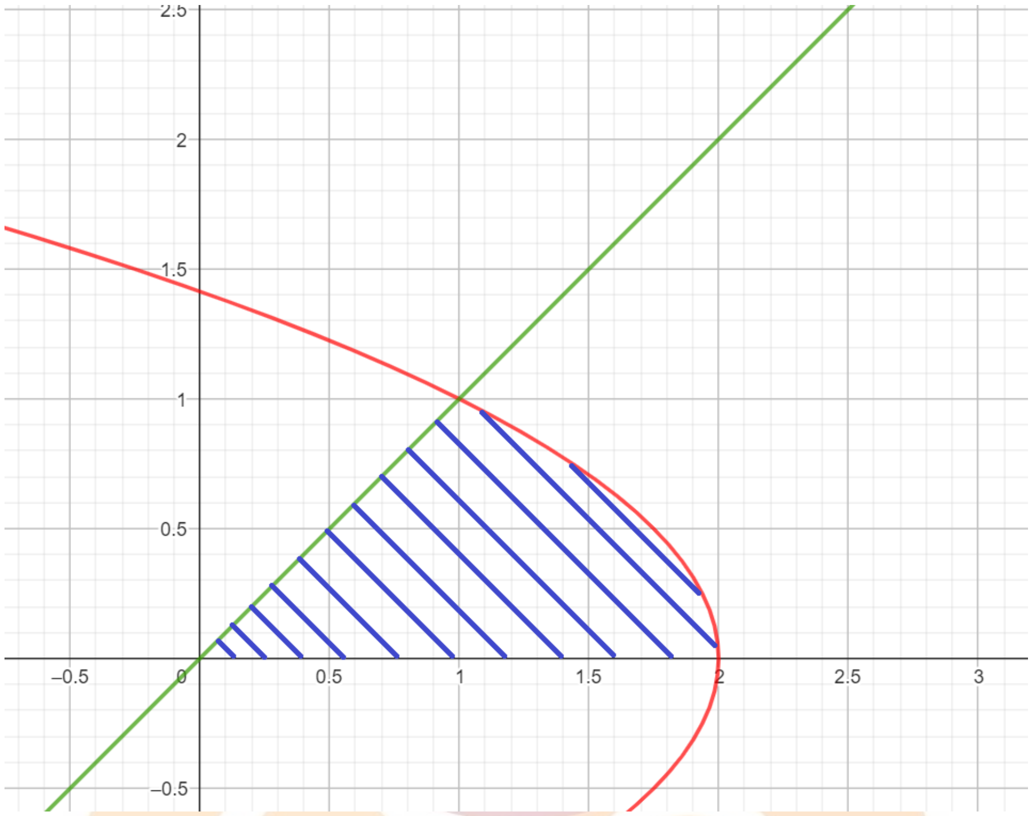
$$f_{XY}(x,y) \begin{cases} kx & (0 < y < x < 2 - y^2) \\ 0 & \text{trái lại} \end{cases}$$

Có $f_{XY}(x,y) \geq 0, \forall x, y \Rightarrow k \geq 0$

Mặt khác, từ hình vẽ ta có:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x kx\,dy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-x}} kx\,dy\right)dx$$
$$= \frac{k}{3} + \int_1^2 kx\sqrt{2-x}\,dx = \frac{k}{3} + \frac{14}{15}k = \frac{19}{15}k$$

$\Rightarrow k = \dfrac{15}{19}$ (thỏa mãn điều kiện $k \geq 0$)



b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x kx^2\,dy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-x}} kx^2\,dy\right)dx$$
$$= \frac{15}{19}\left(\frac{1}{4} + \int_1^2 x^2\sqrt{2-x}dx\right)$$

Xét $I = \displaystyle\int_1^2 x^2\sqrt{2-x}dx$

Đặt $t = \sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2 - t^2;\ dx = -2tdt$

Đổi cận

x	1	2
t	1	0

$I = \displaystyle\int_0^1 (2-t^2)^2.t.(2t)\,dt = \frac{142}{105}$

Từ đó, $E(X) = \dfrac{15}{19}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{142}{105}\right) = \dfrac{673}{532} \approx 1,2650$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x kxy\,dy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-x}} kxy\,dy\right)dx$$
$$= \frac{15}{19}\left(\int_0^1 \frac{x^3}{2}dx + \int_1^2 \frac{x(2-x)}{2}dx\right) = \frac{15}{19}.\frac{11}{24} = \frac{55}{122} \approx 0,3618$$

Câu 4:

a) Gọi p là tỷ lệ học sinh đeo thẻ.

Kiểm tra $nf = 1000.\dfrac{967}{1000} = 967 > 5$ và $n(1-f) = 1000.\dfrac{33}{1000} = 33 > 5$

Chọn thống kê $U = \dfrac{f-p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n}$. Thống kê $U \sim \mathcal{N}(0;1)$

Khoảng tin cậy đối xứng của xác suất p là $\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}; f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right)$

Trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc.

Với $n = 1000, m = 967, f = \dfrac{m}{n} = \dfrac{967}{1000}$, suy ra khoảng tin cậy cần tìm là

$$\left(0,967 - 1,96.\sqrt{\frac{0,967.0,033}{1000}}; 0,967 + 1,96.\sqrt{\frac{0,967.0,033}{1000}}\right) = (0,9559; 0,9781)$$

Kết luận: vậy tỷ lệ số sinh viên đeo thẻ của trường với độ tin cậy 95% nằm trong khoảng từ $95,59\%$ đến $97,81\%$

b) Do độ dài khoảng tin cậy đối xứng là $0,02$, nên $2\varepsilon = 0,02 \Rightarrow \varepsilon = 0,01$

Gọi n là số sinh viên thoả mãn, ta có $n \geq \dfrac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}.f.(1-f)}{\varepsilon^2}$

Trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,576;\ f = \dfrac{967}{1000};\ \varepsilon = 0,01 \Rightarrow n \geq 2117,5425$
$\Rightarrow n = 2118$ (do n là số nguyên)

Câu 5:

Gọi X_1, X_2 lần lượt là biến ngẫu nhiên đại diện cho điểm môn Giải tích I và Đại số của Đại học Bách khoa Hà Nội học kì 20231.

Từ đề bài ta tính được: $n_1 = 140, \overline{x_1} = 5.65, s_1^2 = 3.5097, n_2 = 144, \overline{x_2} = 5.6111, s_2^2 = 3.7358$

Ta thấy $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Đây là bài toán so sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trong trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n_1 = 140 > 30, n_2 = 144 > 30$

Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, đối thuyết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Nếu giả thuyết H_0 là đúng : $U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Với $\alpha = 0,01$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,576$.

Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -2,576) \cup (2,576; +\infty)$$

Từ đề bài ta tính được giá trị quan sát:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{5.65 - 5.6111}{\sqrt{\dfrac{3.5097}{140} + \dfrac{3.7358}{144}}} = 0,1722$$

Với $u_{qs} = 0,1722 \notin W_\alpha$ nên chưa có đủ cở sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Vậy với mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$ ta có thể kết độ khó của hai môn là như nhau.