GIẢI TÍCH I

TS. Lê Văn Tứ

Hanoi University of Science and Technology

Tháng 9 Năm 2022

Nội dung

Nội dung của mục này

Bài toán mở đầu

Bài toán

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa $1,5$ kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Bài toán mở đầu

Bài toán

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa $1,5$ kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Lời giải

Tìm $\min(2x+y)$ với $x, y \geq 0$ thoả mãn $\begin{cases} x \leq 1,5 \\ y \leq 1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ y + 2y \geq 1 \end{cases}$

Bài toán mở đầu

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 3$

Bài toán mở đầu

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 3$

Đặt $F = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow F' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}$.

Bài toán mở đầu

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 3$

Đặt $F = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow F' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}$. Do $y'' = 3 - y$, $F' = \begin{bmatrix} y' \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Bài toán mở đầu

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 3$

Đặt $F = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow F' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}$. Do $y'' = 3 - y$, $F' = \begin{bmatrix} y' \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow F' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bài toán mở đầu

Giải phương trình vi phân $y'' + y = 3$

Đặt $F = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow F' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}$. Do $y'' = 3 - y$, $F' = \begin{bmatrix} y' \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow F' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vậy, ta tìm $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thoả mãn

$$F' = AF + v$$

với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Tổng quan về hàm nhiều biến

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i$$

Đại số tuyến tính

$$f_j(x) = P(x), \sin, \cos, e^x, \ldots$$

Phép tính vi phân hàm nhiều biến

- $n = 1$: Hàm m biến.
- $n \geq 2$: Hàm vector n chiều m biến.

Các khái niệm cơ bản

Không gian $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mỗi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ được xác định bởi hai giá trị x, y được gọi là các toạ độ của điểm.

Các khái niệm cơ bản

Không gian $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mỗi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ được xác định bởi hai giá trị x, y được gọi là các toạ độ của điểm.

Khoảng cách

Cho hai điểm $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$, khoảng cách giữa A, B là

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Các khái niệm cơ bản

Không gian $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mỗi điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ được xác định bởi hai giá trị x, y được gọi là các toạ độ của điểm.

Khoảng cách

Cho hai điểm $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$, khoảng cách giữa A, B là

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Các chuẩn trên $\mathbb{R}^2$

Cho điểm $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $p \in (0, +\infty]$. Định nghĩa

- Với $p \in (0, +\infty) : \|A\|_p = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$.
- Với $p = \infty$, $\|A\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

Các khái niệm cơ bản

Ta sẽ sử dụng chủ yếu hai chuẩn $p = 2$ và $p = +\infty$.

$$\|A\|_2 = d(O, A), \|A\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Ta cũng có thể viết gọn $\|A\|$ cho trường hợp $p = 2$.

Các khái niệm cơ bản

Ta sẽ sử dụng chủ yếu hai chuẩn $p = 2$ và $p = +\infty$.

$$\|A\|_2 = d(O, A), \|A\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Ta cũng có thể viết gọn $\|A\|$ cho trường hợp $p = 2$.

Mệnh đề

$(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_\infty = 0.$

Các khái niệm cơ bản

Ta sẽ sử dụng chủ yếu hai chuẩn $p = 2$ và $p = +\infty$.

$$\|A\|_2 = d(O, A), \|A\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Ta cũng có thể viết gọn $\|A\|$ cho trường hợp $p = 2$.

Mệnh đề

$(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_\infty = 0.$

Hình cầu đóng, hình cầu mở

Cho điểm $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Hình cầu mở* tâm A bán kính $r > 0$ là

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) < r\}.$$

Các khái niệm cơ bản

Ta sẽ sử dụng chủ yếu hai chuẩn $p = 2$ và $p = +\infty$.

$$\|A\|_2 = d(O, A), \|A\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

Ta cũng có thể viết gọn $\|A\|$ cho trường hợp $p = 2$.

Mệnh đề

$(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 = 0 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_\infty = 0.$

Hình cầu đóng, hình cầu mở

Cho điểm $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Hình cầu mở* tâm A bán kính $r > 0$ là

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) < r\}.$$

Hình cầu đóng tâm A bán kính r là

$$\overline{B}(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) \leq r\}.$$

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$.

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$. Tập các điểm trong kí hiệu là $Int(D)$.

$$Int(D) = \{A \in D \mid \exists r > 0, B(A, r) \subset D\}.$$

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$. Tập các điểm trong kí hiệu là $Int(D)$.

$$Int(D) = \{A \in D \mid \exists r > 0, B(A, r) \subset D\}.$$

Điểm $A \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *điểm biên* nếu với mọi $r > 0, B(A, r)$ chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D.

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$. Tập các điểm trong kí hiệu là $Int(D)$.

$$Int(D) = \{A \in D \mid \exists r > 0, B(A, r) \subset D\}.$$

Điểm $A \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *điểm biên* nếu với mọi $r > 0, B(A, r)$ chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D. Tập các điểm biên của D kí hiệu là $b(D)$.

$$b(D) = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(A, r) \cap D \neq \emptyset \wedge B(A, r) \cap D^c \neq \emptyset\}.$$

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$. Tập các điểm trong kí hiệu là $Int(D)$.

$$Int(D) = \{A \in D \mid \exists r > 0, B(A, r) \subset D\}.$$

Điểm $A \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *điểm biên* nếu với mọi $r > 0$, $B(A, r)$ chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D. Tập các điểm biên của D kí hiệu là $b(D)$.

$$b(D) = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(A, r) \cap D \neq \emptyset \wedge B(A, r) \cap D^c \neq \emptyset\}.$$

Tập mở – Lân cận

Tập $U \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm $A \in U$ đều là điểm trong của U.

$$U \text{ là tập mở} \Leftrightarrow \forall A \in U, \exists r > 0, B(A, r) \subset U.$$

Các khái niệm cơ bản

Điểm trong – Điểm biên

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A \in D$ được gọi là *điểm trong* nếu tồn tại $r > 0$ thoả mãn $B(A, r) \subset D$. Tập các điểm trong kí hiệu là $Int(D)$.

$$Int(D) = \{A \in D \mid \exists r > 0, B(A, r) \subset D\}.$$

Điểm $A \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *điểm biên* nếu với mọi $r > 0, B(A, r)$ chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D. Tập các điểm biên của D kí hiệu là $b(D)$.

$$b(D) = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(A, r) \cap D \neq \emptyset \wedge B(A, r) \cap D^c \neq \emptyset\}.$$

Tập mở – Lân cận

Tập $U \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm $A \in U$ đều là điểm trong của U.

$$U \text{ là tập mở} \Leftrightarrow \forall A \in U, \exists r > 0, B(A, r) \subset U.$$

Tập $U \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là một *lân cận của* A nếu U mở và $A \in U$.

Giới hạn dãy điểm trong $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa

Cho dãy điểm $A_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Ta nói dãy A_n hội tụ về điểm $A_0 = (x_0, y_0)$ khi và chỉ khi dãy x_n hội tụ về x_0, dãy y_n hội tụ về y_0.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Giới hạn dãy điểm trong $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa

Cho dãy điểm $A_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Ta nói dãy A_n hội tụ về điểm $A_0 = (x_0, y_0)$ khi và chỉ khi dãy x_n hội tụ về x_0, dãy y_n hội tụ về y_0.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Ví dụ

- Dãy $(\frac{1}{n^2}, \sin(\frac{1}{n}))$ hội tụ về $(0, 0)$.
- Dãy $(\frac{1}{n}, \cos n)$ không hội tụ.

Giới hạn dãy điểm trong $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa

Cho dãy điểm $A_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Ta nói dãy A_n hội tụ về điểm $A_0 = (x_0, y_0)$ khi và chỉ khi dãy x_n hội tụ về x_0, dãy y_n hội tụ về y_0.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Ví dụ

- Dãy $(\frac{1}{n^2}, \sin(\frac{1}{n}))$ hội tụ về $(0, 0)$.
- Dãy $(\frac{1}{n}, \cos n)$ không hội tụ.

Tiêu chuẩn

Cho dãy $\{(x_n, y_n)\}_n \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \|(x_n - x_0, y_n - y_0)\| \to 0 \Leftrightarrow \|(x_n - x_0, y_n - y_0)\|_\infty \to 0.$$

Hàm hai biến

Định nghĩa

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Một hàm $f: D \to \mathbb{R}$ là một phép cho tương ứng mỗi phần tử $A \in D$ với duy nhất một giá trị $f(A) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}.$$

Hàm hai biến

Định nghĩa

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Một hàm $f: D \to \mathbb{R}$ là một phép cho tương ứng mỗi phần tử $A \in D$ với duy nhất một giá trị $f(A) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}.$$

VD: Từ hàm một biến thành hàm hai biến

Cho $g(x) = x^2$. Ta có thể định nghĩa $f(x, y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bởi

$$f(x, y) = x^2.$$

Đặc biệt, các hàm $\pi_1(x, y) = x, \pi_2(x, y) = y$ còn được gọi là các *phép chiếu chính tắc.*

Hàm hai biến

VD: Từ hàm hai biến về hàm một biến

Cho hàm $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2y$. Khi đó, với giá trị x hoặc y cố định, ta có thể có các hàm một biến. Ví dụ

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x,2) = 2x^2.$$

hoặc

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(y) = f(2,y) = 4y.$$

Hàm vector hai chiều hai biến

Định nghĩa

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ và $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ là hai hàm hai biến xác định trên D. Khi đó, một hàm $u \colon D \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$u(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

được gọi là một hàm vector với f_1, f_2 là các hàm toạ độ.

Hàm vector hai chiều hai biến

Định nghĩa

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ và $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ là hai hàm hai biến xác định trên D. Khi đó, một hàm $u \colon D \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$u(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

được gọi là một hàm vector với f_1, f_2 là các hàm toạ độ.

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{u} \boxed{\text{2 giá trị}}.$$

Hàm vector hai chiều hai biến

Định nghĩa

Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ và $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ là hai hàm hai biến xác định trên D. Khi đó, một hàm $u \colon D \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$u(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

được gọi là một hàm vector với f_1, f_2 là các hàm toạ độ.

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{u} \boxed{\text{2 giá trị}}.$$

Ví dụ

Ánh xạ tuyến tính $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{bmatrix}.$$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ là một hàm vector với các hàm toạ độ g_1, g_2 và $f(x, y)$ là một hàm hai biến. Khi đó, $f \circ g$ là một hàm hai biến.

$$f \circ g(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$$

$$\boxed{2 \text{ giá trị}} \xrightarrow{g} \boxed{2 \text{ giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{1 \text{ giá trị}}$$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ là một hàm vector với các hàm toạ độ g_1, g_2 và $f(x, y)$ là một hàm hai biến. Khi đó, $f \circ g$ là một hàm hai biến.

$$f \circ g(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{g} \boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

- Cho $f(x, y) = x^2 y, g(x, y) = (y, x)$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ là một hàm vector với các hàm toạ độ g_1, g_2 và $f(x,y)$ là một hàm hai biến. Khi đó, $f \circ g$ là một hàm hai biến.

$$f \circ g(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{g} \boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

- Cho $f(x,y) = x^2y, g(x,y) = (y,x) \Rightarrow f \circ g(x,y) = y^2x$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ là một hàm vector với các hàm toạ độ g_1, g_2 và $f(x,y)$ là một hàm hai biến. Khi đó, $f \circ g$ là một hàm hai biến.

$$f \circ g(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{g} \boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

- Cho $f(x,y) = x^2y, g(x,y) = (y,x) \Rightarrow f \circ g(x,y) = y^2x.$
- Cho $f(x,y) = xy, g(x,y) = (x+y, x-y)$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ là một hàm vector với các hàm toạ độ g_1, g_2 và $f(x,y)$ là một hàm hai biến. Khi đó, $f \circ g$ là một hàm hai biến.

$$f \circ g(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{g} \boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

- Cho $f(x,y) = x^2y, g(x,y) = (y,x) \Rightarrow f \circ g(x,y) = y^2x$.
- Cho $f(x,y) = xy, g(x,y) = (x+y, x-y) \Rightarrow f \circ g(x,y) = x^2 - y^2$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x, y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x, y) = h(f(x, y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x, y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x, y) = h(f(x, y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

Xét hàm $F(x, y) = e^{\sin x + y^2}$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x,y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x,y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x,y) = h(f(x,y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

Xét hàm $F(x,y) = e^{\sin x + y^2}$. Khi đó, ta có thể phân tích F theo dạng hàm hợp sau

- $g(x,y) = (\sin x, y^2), f(x,y) = e^{x+y}$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x,y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x,y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x,y) = h(f(x,y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

Xét hàm $F(x,y) = e^{\sin x + y^2}$. Khi đó, ta có thể phân tích F theo dạng hàm hợp sau

- $g(x,y) = (\sin x, y^2), f(x,y) = e^{x+y} \Rightarrow F(x,y) = f \circ g(x,y).$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x, y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x, y) = h(f(x, y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

Xét hàm $F(x, y) = e^{\sin x + y^2}$. Khi đó, ta có thể phân tích F theo dạng hàm hợp sau

- $g(x, y) = (\sin x, y^2), f(x, y) = e^{x+y} \Rightarrow F(x, y) = f \circ g(x, y).$
- $f(x, y) = \sin x + y^2, h(x) = e^x$

Hợp thành của các hàm nhiều biến

Cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến và $h(x)$ là một hàm một biến, khi đó $h \circ f(x, y)$ là một hàm một biến

$$h \circ f(x, y) = h(f(x, y)).$$

$$\boxed{\text{2 giá trị}} \xrightarrow{f} \boxed{\text{1 giá trị}} \xrightarrow{h} \boxed{\text{1 giá trị}}$$

VD

Xét hàm $F(x, y) = e^{\sin x + y^2}$. Khi đó, ta có thể phân tích F theo dạng hàm hợp sau

- $g(x, y) = (\sin x, y^2), f(x, y) = e^{x+y} \Rightarrow F(x, y) = f \circ g(x, y)$.
- $f(x, y) = \sin x + y^2, h(x) = e^x \Rightarrow F(x, y) = h \circ f(x, y)$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2}{y^3}, f_1(x) = \arctan(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2}{y^3}, f_1(x) = \arctan(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.
   - $g_2(x,y) = (x^2, y^3), f_1(x) = \arctan(\frac{x}{y}) \Rightarrow F = f_2 \circ g_2$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$, $f_1(x) = \arctan(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.
   - $g_2(x,y) = (x^2, y^3)$, $f_1(x) = \arctan(\frac{x}{y}) \Rightarrow F = f_2 \circ g_2$.
2. $F(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2}{y^3}, f_1(x) = \arctan(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.
   - $g_2(x,y) = (x^2, y^3), f_1(x) = \arctan(\frac{x}{y}) \Rightarrow F = f_2 \circ g_2$.
2. $F(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, f_1(x) = \ln(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.

Hợp thành của các hàm nhiều biến

VD: Phân tích các hàm sau thành hàm hợp

1. $F(x,y) = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2}{y^3}, f_1(x) = \arctan(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.
   - $g_2(x,y) = (x^2, y^3), f_1(x) = \arctan(\frac{x}{y}) \Rightarrow F = f_2 \circ g_2$.
2. $F(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$.
   - $g_1(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, f_1(x) = \ln(x) \Rightarrow F = f_1 \circ g_1$.
   - $g_2(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2), f_2(x) = \ln(\frac{x}{y}) \Rightarrow F = f_2 \circ g_2$.

Miền xác định

Định nghĩa

Cho f là một hàm hai biến. Miền xác định của f kí hiệu là D_f

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{biểu thức của } f \text{ có nghĩa}\}.$$

Cho hàm vector $g = (g_1, g_2)$ với các hàm toạ độ g_1, g_2. Khi đó,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2}.$$

Miền xác định

Định nghĩa

Cho f là một hàm hai biến. Miền xác định của f kí hiệu là D_f

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{biểu thức của } f \text{ có nghĩa}\}.$$

Cho hàm vector $g = (g_1, g_2)$ với các hàm toạ độ g_1, g_2. Khi đó,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2}.$$

VD

- Cho $f = \arctan(\frac{x^2}{y^3})$

Miền xác định

Định nghĩa

Cho f là một hàm hai biến. Miền xác định của f kí hiệu là D_f

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{biểu thức của } f \text{ có nghĩa}\}.$$

Cho hàm vector $g = (g_1, g_2)$ với các hàm toạ độ g_1, g_2. Khi đó,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2}.$$

VD

- Cho $f = \arctan(\frac{x^2}{y^3}) \Rightarrow D_f = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$.

Miền xác định

Định nghĩa

Cho f là một hàm hai biến. Miền xác định của f kí hiệu là D_f

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{biểu thức của } f \text{ có nghĩa}\}.$$

Cho hàm vector $g = (g_1, g_2)$ với các hàm toạ độ g_1, g_2. Khi đó,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2}.$$

VD

- Cho $f = \arctan(\frac{x^2}{y^3}) \Rightarrow D_f = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$.
- Cho $f = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

Miền xác định

Định nghĩa

Cho f là một hàm hai biến. Miền xác định của f kí hiệu là D_f

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{biểu thức của } f \text{ có nghĩa}\}.$$

Cho hàm vector $g = (g_1, g_2)$ với các hàm toạ độ g_1, g_2. Khi đó,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2}.$$

VD

- Cho $f = \arctan(\frac{x^2}{y^3}) \Rightarrow D_f = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$.
- Cho $f = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) \Rightarrow D_f = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

Đồ thị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến. Đồ thị G_f được định nghĩa bởi

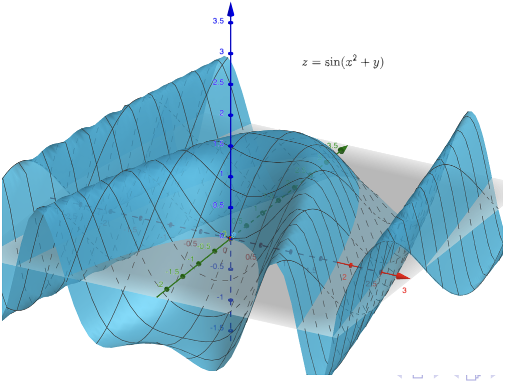
$$G_f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Đồ thị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến. Đồ thị G_f được định nghĩa bởi

$$G_f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$



Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa theo dãy

Cho $f: D \to \mathbb{R}^2$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $A \in D \cup b(D)$.

Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa theo dãy

Cho $f: D \to \mathbb{R}^2$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $A \in D \cup b(D)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến A khi và chỉ khi với mọi dãy $\{A_n\} \subset D$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n) = l$.

Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa theo dãy

Cho $f: D \to \mathbb{R}^2$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $A \in D \cup b(D)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến A khi và chỉ khi với mọi dãy $\{A_n\} \subset D$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n) = l$.

Định nghĩa theo $\epsilon - \delta$

Cho $f: D \to \mathbb{R}^2$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $A \in D \cup b(D)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến A khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(A, \delta) \cap D, |f(x) - l| < \epsilon.$$

Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to A} f(x,y) = l}$$

Các tính chất của giới hạn hàm hai biến

Dựa vào định nghĩa theo dãy, ta có thể chuyển các tính chất của giới hạn dãy sang giới hạn của hàm hai biến

Mệnh đề

Cho hai hàm hai biến f_1, f_2 và giả sử các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1(x,y) = l_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_2(x,y) = l_2$ tồn tại và hữu hạn.

Các tính chất của giới hạn hàm hai biến

Dựa vào định nghĩa theo dãy, ta có thể chuyển các tính chất của giới hạn dãy sang giới hạn của hàm hai biến

Mệnh đề

Cho hai hàm hai biến f_1, f_2 và giả sử các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1(x,y) = l_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_2(x,y) = l_2$ tồn tại và hữu hạn.

- Giới hạn nếu tồn tại thì là duy nhất.

Các tính chất của giới hạn hàm hai biến

Dựa vào định nghĩa theo dãy, ta có thể chuyển các tính chất của giới hạn dãy sang giới hạn của hàm hai biến

Mệnh đề

Cho hai hàm hai biến f_1, f_2 và giả sử các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1(x,y) = l_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_2(x,y) = l_2$ tồn tại và hữu hạn.

- Giới hạn nếu tồn tại thì là duy nhất.
- $\lim\limits_{(x,y)\to A} Cf_1 + f_2 = Cl_1 + l_2$.

Các tính chất của giới hạn hàm hai biến

Dựa vào định nghĩa theo dãy, ta có thể chuyển các tính chất của giới hạn dãy sang giới hạn của hàm hai biến

Mệnh đề

Cho hai hàm hai biến f_1, f_2 và giả sử các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1(x,y) = l_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_2(x,y) = l_2$ tồn tại và hữu hạn.

- Giới hạn nếu tồn tại thì là duy nhất.
- $\lim\limits_{(x,y)\to A} Cf_1 + f_2 = Cl_1 + l_2$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1 \cdot f_2 = l_1.l_2$.

Các tính chất của giới hạn hàm hai biến

Dựa vào định nghĩa theo dãy, ta có thể chuyển các tính chất của giới hạn dãy sang giới hạn của hàm hai biến

Mệnh đề

Cho hai hàm hai biến f_1, f_2 và giả sử các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1(x,y) = l_1, \lim\limits_{(x,y)\to A} f_2(x,y) = l_2$ tồn tại và hữu hạn.

- Giới hạn nếu tồn tại thì là duy nhất.
- $\lim\limits_{(x,y)\to A} Cf_1 + f_2 = Cl_1 + l_2$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to A} f_1 \cdot f_2 = l_1.l_2$.
- Nếu $l_2 \neq 0$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to A} \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Các ví dụ giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Các ví dụ giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và điểm $(0,0)$ nằm trên biên tập xác định.

Các ví dụ giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và điểm $(0,0)$ nằm trên biên tập xác định. Ta có đánh giá

$$|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}| \leq x^2+y^2.$$

Các ví dụ giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và điểm $(0,0)$ nằm trên biên tập xác định. Ta có đánh giá

$$|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}| \le x^2+y^2.$$

Xét một dãy (x_n, y_n) bất kì thuộc $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$. Khi đó, $\|(x_n, y_n)\|^2 = x^2 + y^2 \to 0$.

Các ví dụ giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Hàm f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và điểm $(0,0)$ nằm trên biên tập xác định. Ta có đánh giá

$$|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}| \leq x^2+y^2.$$

Xét một dãy (x_n, y_n) bất kì thuộc $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$. Khi đó, $\|(x_n, y_n)\|^2 = x^2 + y^2 \to 0$. Theo nguyên lí kẹp và $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^2$, ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$,

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$.

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$.
- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0),$

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$.
- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{2}{5}$.

Các ví dụ về giới hạn hàm hai biến

VD. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và $(0,0)$ là một điểm biên.

- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$.
- Xét dãy $(x_n, y_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(x_n, y_n) \to \frac{2}{5}$.

Do đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Quy trình xác định giới hạn hàm hai biến

Xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Quy trình xác định giới hạn hàm hai biến

Xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- Xét các dãy con $(x_n, y_n) = (x_n, kx_n)$ với $x_n \to 0$, nếu giới hạn $f(x_n, kx_n)$ phụ thuộc vào k thì giới hạn không tồn tại.

Quy trình xác định giới hạn hàm hai biến

Xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- Xét các dãy con $(x_n, y_n) = (x_n, kx_n)$ với $x_n \to 0$, nếu giới hạn $f(x_n, kx_n)$ phụ thuộc vào k thì giới hạn không tồn tại.
- Nếu như giới hạn $f(x_n, kx_n)$ không tồn tại với phép chọn k, thử với một số dãy $(x_n, f(x_n))$ với $x_n \to 0, f(x_n) \to 0$.

Quy trình xác định giới hạn hàm hai biến

Xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- Xét các dãy con $(x_n, y_n) = (x_n, kx_n)$ với $x_n \to 0$, nếu giới hạn $f(x_n, kx_n)$ phụ thuộc vào k thì giới hạn không tồn tại.
- Nếu như giới hạn $f(x_n, kx_n)$ không tồn tại với phép chọn k, thử với một số dãy $(x_n, f(x_n))$ với $x_n \to 0, f(x_n) \to 0$.
- Nếu giới hạn không phụ thuộc vào các phép chọn dãy (x_n, y_n), áp dụng các kĩ thuật kẹp và đánh giá chuẩn để tìm giới hạn.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y),\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ta đã chứng minh giới hạn bội $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y), \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ta đã chứng minh giới hạn bội $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

- $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0.$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ta đã chứng minh giới hạn bội $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

Ta phân biệt các giới hạn sau

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Giới hạn thứ hai và ba được gọi là các giới hạn lặp, ta cố định biến x rồi cho biến y tiến về 0 hoặc ngược lại.

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ta đã chứng minh giới hạn bội $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Như vậy, giới hạn lặp tồn tại không suy ra được giới hạn bội tồn tại.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x \sin \frac{1}{y}$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x \sin \frac{1}{y}$

Ta có thể dùng nguyên lí kẹp để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x \sin \frac{1}{y}$

Ta có thể dùng nguyên lí kẹp để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$. Tuy nhiên,

- $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} x \sin \frac{1}{y}$ không tồn tại.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x \sin \frac{1}{y}$

Ta có thể dùng nguyên lí kẹp để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$. Tuy nhiên,

- $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} x \sin \frac{1}{y}$ không tồn tại.
- $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} = 0.$

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x\sin\frac{1}{y}$

Ta có thể dùng nguyên lí kẹp để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0$. Tuy nhiên,

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ không tồn tại.
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} = 0.$

Như vậy, giới hạn bội tồn tại không suy ra được các giới hạn luôn tồn tại.

Giới hạn bội - Giới hạn lặp

VD. Xét các giới hạn bội và lặp của $x \sin \frac{1}{y}$

Ta có thể dùng nguyên lí kẹp để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0$. Tuy nhiên,

- $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} x \sin \frac{1}{y}$ không tồn tại.
- $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} = 0.$

Như vậy, giới hạn bội tồn tại không suy ra được các giới hạn luôn tồn tại.

Ghi chú

Khi xét giới hạn bội, có thể sử dụng giới hạn lặp để **dự đoán** giá trị có thể có của giới hạn bội, nhưng **không** dùng giới hạn lặp để tính toán giới hạn bội

Hàm hai biến liên tục

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói hàm f liên tục tại điểm $A \in D$ nếu $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to A} f(x, y) = f(A)$.

Hàm hai biến liên tục

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói hàm f liên tục tại điểm $A \in D$ nếu $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to A} f(x,y) = f(A)$.

Hàm f liên tục trên D nếu như nó liên tục tại mọi điểm $A \in D$.

Tương tự như với hàm một biến, ta có các tính chất sau của hàm liên tục hai biến.

Hàm hai biến liên tục

Định nghĩa

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói hàm f liên tục tại điểm $A \in D$ nếu $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to A} f(x,y) = f(A)$.

Hàm f liên tục trên D nếu như nó liên tục tại mọi điểm $A \in D$.

Tương tự như với hàm một biến, ta có các tính chất sau của hàm liên tục hai biến.

Mệnh đề

Cho hàm f, g là hai hàm liên tục trên $U \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó,

- $f + g, f.g$ là các hàm liên tục trên U.
- $\frac{f}{g}$ liên tục trên $U \setminus \{g = 0\}$.

Hàm hai biến liên tục

Mệnh đề

Cho $f\colon D \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên một tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in D, |f(x)| \leq M.$$

Hơn nữa, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, tức là tồn tại $x_1, x_2 \in D$ sao cho

$$f(x_1) = \min\{f(x), x \in D\}, f(x_2) = \max\{f(x), x \in D\}.$$

Định lí giá trị trung bình

Cho $f\colon B(a,r) \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Nếu tồn tại $x, y \in B(a,r)$ sao cho $f(a).f(b) < 0$, khi đó tồn tại $c \in B(a,r)$ sao cho $f(c) = 0$.

Nội dung của mục này

1. Hàm nhiều biến liên tục
   - Các khái niệm cơ bản
   - Giới hạn - Hàm hai biến liên tục
2. Phép tính vi phân của hàm nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Vi phân
   - Tính toán đạo hàm riêng
   - Đạo hàm riêng của hàm ẩn
   - Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao
   - Khai triển Taylor của hàm nhiều biến
3. Cực trị hàm nhiều biến
   - Cực trị tự do
   - Cực trị có điều kiện
   - Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Nếu hàm g khả vi trong một lân cận của x_0, ta gọi đạo hàm của g tại x_0 là đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$$

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Nếu hàm g khả vi trong một lân cận của x_0, ta gọi đạo hàm của g tại x_0 là đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Nếu hàm g khả vi trong một lân cận của x_0, ta gọi đạo hàm của g tại x_0 là đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_x.

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Nếu hàm g khả vi trong một lân cận của x_0, ta gọi đạo hàm của g tại x_0 là đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_x.

Ví dụ: Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ của các hàm sau

- $f(x, y) = y^2$.
- $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Đạo hàm của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Xét hàm

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Nếu hàm g khả vi trong một lân cận của x_0, ta gọi đạo hàm của g tại x_0 là đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_x.

Ví dụ: Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ của các hàm sau

- $f(x, y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$
- $f(x, y) = e^{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}.$

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Ta định nghĩa tương tự cho đạo hàm riêng theo biến y của hàm $f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_y.

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Ta định nghĩa tương tự cho đạo hàm riêng theo biến y của hàm $f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_y.

Ví dụ: Tính $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ của các hàm sau

- $f(x, y) = x^2$.
- $f(x, y) = \arcsin(x)y$.

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Ta định nghĩa tương tự cho đạo hàm riêng theo biến y của hàm $f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Ta cũng có thể dùng kí hiệu f'_y.

Ví dụ: Tính $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ của các hàm sau

- $f(x,y)=x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$
- $f(x,y)=\arcsin(x)y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\arcsin x.$

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Với các hàm được định xác định bởi nhiều biến hơn, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng theo cách tương tự. Cho hàm $f(x, y, z)$ được xác định bởi 3 biến.

- Coi x, y là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial z}$ (hay f'_z).

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Với các hàm được định xác định bởi nhiều biến hơn, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng theo cách tương tự. Cho hàm $f(x, y, z)$ được xác định bởi 3 biến.

- Coi x, y là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial z}$ (hay f'_z).
- Coi x, z là các hằng số, đạo hàm theo biến y ta được $\frac{\partial f}{\partial y}$ (hay f'_y).

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Với các hàm được định xác định bởi nhiều biến hơn, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng theo cách tương tự. Cho hàm $f(x, y, z)$ được xác định bởi 3 biến.

- Coi x, y là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial z}$ (hay f'_z).
- Coi x, z là các hằng số, đạo hàm theo biến y ta được $\frac{\partial f}{\partial y}$ (hay f'_y).
- Coi y, z là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial x}$ (hay f'_x).

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Với các hàm được định xác định bởi nhiều biến hơn, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng theo cách tương tự. Cho hàm $f(x, y, z)$ được xác định bởi 3 biến.

- Coi x, y là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial z}$ (hay f'_z).
- Coi x, z là các hằng số, đạo hàm theo biến y ta được $\frac{\partial f}{\partial y}$ (hay f'_y).
- Coi y, z là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial x}$ (hay f'_x).

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của hàm f

- $f(x, y, z) = xyz$.
- $f(x, y, z) = \sin(xy)z$.
- $f(x, y, z) = x \arctan(ye^z)$.

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Với các hàm được định xác định bởi nhiều biến hơn, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng theo cách tương tự. Cho hàm $f(x, y, z)$ được xác định bởi 3 biến.

- Coi x, y là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial z}$ (hay f'_z).
- Coi x, z là các hằng số, đạo hàm theo biến y ta được $\frac{\partial f}{\partial y}$ (hay f'_y).
- Coi y, z là các hằng số, đạo hàm theo biến z ta được $\frac{\partial f}{\partial x}$ (hay f'_x).

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của hàm f

- $f(x, y, z) = xyz \Rightarrow f'_x = yz, f'_y = xz, f'_z = xy$.
- $f(x, y, z) = \sin(xy)z \Rightarrow f'_x = yz\cos(xy), f'_y = xz\cos(xy), f'_z = \sin(xy)$.
- $f(x, y, z) = x\arctan(ye^z) \Rightarrow f'_x = \arctan(ye^z), f'_y = \frac{xe^z}{1+y^2e^{2z}}, f'_z = \frac{xye^z}{1+y^2e^{2z}}$.

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ đủ nhỏ, đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ đủ nhỏ, đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Nếu tồn tại các hằng số $A, B \in \mathbb{R}$, các hàm $\alpha, \beta \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ thoả mãn

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Định nghĩa

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ đủ nhỏ, đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Nếu tồn tại các hằng số $A, B \in \mathbb{R}$, các hàm $\alpha, \beta \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ thoả mãn

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

thì ta nói f khả vi tại (x_0, y_0) và

$$df = A\Delta x + B\Delta y$$

là vi phân toàn phần của f tại (x_0, y_0).

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Định lí

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0), các đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0) tồn tại và

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Định lí

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0), các đạo hàm riêng của f tại (x_0, y_0) tồn tại và

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ: Tính vi phân toàn phần của $f(x, y)$

- $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.
- $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Hàm khả vi - Vi phân toàn phần

Tương tự như với hàm một biến, ta sẽ tìm vi phân toàn phần của hàm $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$.

$$dx(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial x}{\partial y}\Delta y = \Delta x.$$

Tương tự $dy(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$. Khi đó,

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0, y_0)dx(\Delta x, \Delta y) + f'_y(x_0, y_0)dy(\Delta x, \Delta y).$$

Biểu thức vi phân toàn phần

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

hay

$$df = f'_x dx + f_y dy.$$

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0.$

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

Tuy nhiên f không liên tục tại $(0, 0)$.

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Tuy nhiên f không liên tục tại $(0,0)$. Thật vậy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$ nhưng $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \to \frac{2}{5}$. Do đó, f không khả vi tại $(0,0)$.

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Tuy nhiên f không liên tục tại $(0,0)$. Thật vậy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$ nhưng $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \to \frac{2}{5}$. Do đó, f không khả vi tại $(0,0)$.

Định lí

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f có các đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0)

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Tuy nhiên f không liên tục tại $(0,0)$. Thật vậy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$ nhưng $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \to \frac{2}{5}$. Do đó, f không khả vi tại $(0,0)$.

Định lí

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f có các đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0) và $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **liên tục** tại (x_0, y_0)

Tính khả vi và các đạo hàm riêng

Với hàm một biến, tính khả vi và việc đạo hàm tồn tại là tương đương nhau. Tuy nhiên, điều này không đúng với hàm nhiều biến.

Có đạo hàm riêng như không khả vi

Xét hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Dễ thấy $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Tuy nhiên f không liên tục tại $(0,0)$. Thật vậy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$ nhưng $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \to \frac{2}{5}$. Do đó, f không khả vi tại $(0,0)$.

Định lí

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f có các đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0) và $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **liên tục** tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Mệnh đề

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền D và khả vi trong một lận cận của $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y)$ đủ nhỏ, ta có thể xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Mệnh đề

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền D và khả vi trong một lận cận của $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y)$ đủ nhỏ, ta có thể xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ: Áp dụng vi phân tính xấp xỉ $e^{1.01^2+\sin(0.02)}$

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Mệnh đề

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền D và khả vi trong một lận cận của $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y)$ đủ nhỏ, ta có thể xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ: Áp dụng vi phân tính xấp xỉ $e^{1.01^2+\sin(0.02)}$

Xét $f(x, y) = e^{x^2+\sin y}, (x_0, y_0) = (1, 0), (\Delta x, \Delta y) = (0.01, 0.02).$

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Mệnh đề

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền D và khả vi trong một lận cận của $(x_0, y_0) \in D$. Với $(\Delta x, \Delta y)$ đủ nhỏ, ta có thể xấp xỉ

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ: Áp dụng vi phân tính xấp xỉ $e^{1.01^2+\sin(0.02)}$

Xét $f(x, y) = e^{x^2+\sin y}, (x_0, y_0) = (1, 0), (\Delta x, \Delta y) = (0.01, 0.02)$. Ta có $f'_x(1, 0) = 2e, f'_y(1, 0) = e$.

$$2.829\ldots \approx f(1.01, 0.02) \approx f(1, 0)+0.01\cdot f'_x(1, 0)+0.02\cdot f'_y(1, 0) = 1.04\cdot e \approx 2.827\ldots$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.
- $h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.
- $h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$.
- $h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.
- $h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$.
- $h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$.

$h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.
- $h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$.
- $h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$.

$h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của $\cos(x^2 + e^y)$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Ta có các tình huống cơ bản sau:

- $h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$.
- $h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$.
- $h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$.

$h = f \circ g$ với $g = g(x, y), f = f(t)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của $\cos(x^2 + e^y)$

$h'_x = -2x\sin(x^2 + e^y), h'_y = -e^y \sin(x^2 + e^y)$.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))g_2't(t).$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t)) g_2' t(t).$$

hay

$$h' = f_x' \cdot g_1' + f_y' \cdot g_2'.$$

VD: Tính h' với $h = f \circ g, f(x, y) = \ln(x + y), g(t) = (\sin t, \cos t)$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(t) = (g_1(t), g_2(t)), f = f(x, y)$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t))g_2't(t).$$

hay

$$h' = f_x' \cdot g_1' + f_y' \cdot g_2'.$$

VD: Tính h' với $h = f \circ g, f(x, y) = \ln(x + y), g(t) = (\sin t, \cos t)$

$$h'(t) = \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} + \frac{-\sin t}{\sin t + \cos t}.$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

hoặc dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} h'_x & h'_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), f = f(x, y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

hoặc dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} h'_x & h'_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

Ma trận $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$ còn được gọi là ma trận Jacobi của g.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

$h = f \circ g$ với $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), f = f(x,y)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

hoặc dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} h'_x & h'_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

Ma trận $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$ còn được gọi là ma trận Jacobi của g.

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của $e^{\sin x + \cos y}$ bằng ma trận Jacobi

Xét $f = e^{x+y}, g(x,y) = (\sin x, \cos y)$.

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y)$

Cho hàm ẩn $y(x)$ được cho bởi $F(x, y) = 0$.

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y)$

Cho hàm ẩn $y(x)$ được cho bởi $F(x, y) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $y = y(x)$ khả vi trong một lân cận của x_0 và

$$y'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y)$

Cho hàm ẩn $y(x)$ được cho bởi $F(x, y) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $y = y(x)$ khả vi trong một lân cận của x_0 và

$$y'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ tại $(1, 2)$

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y)$

Cho hàm ẩn $y(x)$ được cho bởi $F(x, y) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $y = y(x)$ khả vi trong một lân cận của x_0 và

$$y'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ tại $(1, 2)$

Xét $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Do $F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$ nên $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

Đạo hàm của hàm ẩn

Trong một số trường hợp, hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một phương trình $F(x, y) = 0$. Ta gọi y là hàm ẩn theo biến x. Tương tự, với điều kiện thích hợp, phương trình $F(x, y, z) = 0$ có thể định nghĩa hàm ẩn z theo biến x, y. Sử dụng vi phân của F, ta có thể tính đạo hàm của hàm ẩn khi nó tồn tại.

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y)$

Cho hàm ẩn $y(x)$ được cho bởi $F(x, y) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $y = y(x)$ khả vi trong một lân cận của x_0 và

$$y'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ tại $(1, 2)$

Xét $F(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Do $F'_y(1, 2) = 4 \neq 0$ nên $y'(1) = -\frac{1}{2}$. Do đó tiếp tuyến có dạng

$$g = y'(1)(x - 1) + y(1) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$.

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ý tưởng: Do $F(x, y, z) = 0$ là hàm hằng, đạo hàm riêng theo biến x của F cũng là hàm hằng 0.

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ý tưởng: Do $F(x, y, z) = 0$ là hàm hằng, đạo hàm riêng theo biến x của F cũng là hàm hằng 0. Ta có

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ý tưởng: Do $F(x, y, z) = 0$ là hàm hằng, đạo hàm riêng theo biến x của F cũng là hàm hằng 0. Ta có

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x, y, z) = 0$

Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ được cho bởi $F(x, y, z) = 0$. Nếu $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ý tưởng: Do $F(x, y, z) = 0$ là hàm hằng, đạo hàm riêng theo biến x của F cũng là hàm hằng 0. Ta có

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng của z cho bởi $x^2 + y^2 + z = e^z$

Đạo hàm của hàm ẩn

Hàm ẩn định nghĩa bởi $F(x,y,z)=0$

Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ được cho bởi $F(x,y,z)=0$. Nếu $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ thì $z=z(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x_0,y_0).

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ý tưởng: Do $F(x,y,z)=0$ là hàm hằng, đạo hàm riêng theo biến x của F cũng là hàm hằng 0. Ta có

$$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0\Rightarrow z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng của z cho bởi $x^2+y^2+z=e^z$

Tại (x,y,z) với $z\neq 1$, hàm $z=z(x,y)$ có đạo hàm riêng

$$z'_x=\frac{2x}{e^z-1},z'_y=\frac{2y}{e^z-1}.$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0). \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0). \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0). \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết gọn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng tại điểm $(x_0, y_0) \in D$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x}$ có đạo hàm riêng tại (x_0, y_0), ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết gọn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$.

Ta định nghĩa tương tự các đạo hàm cấp cao hơn $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ldots$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

- $f'_x = \cos(y)e^{x\cos y}$, $f'_y = -x\sin(y)e^{x\cos y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

- $f'_x = \cos(y)e^{x\cos y}, f'_y = -x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xx} = \cos^2(y)e^{x\cos y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

- $f'_x = \cos(y)e^{x\cos y}$, $f'_y = -x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xx} = \cos^2(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xy} = -\sin(y)e^{x\cos y} - \cos(y)\cdot x\sin(y)e^{x\cos y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

- $f'_x = \cos(y)e^{x\cos y}$, $f'_y = -x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xx} = \cos^2(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xy} = -\sin(y)e^{x\cos y} - \cos(y)\cdot x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{yy} = -x\cos(y)e^{x\cos y} + x^2\sin^2(y)e^{x\cos y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $e^{x\cos y}$

- $f'_x = \cos(y)e^{x\cos y}$, $f'_y = -x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xx} = \cos^2(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{xy} = -\sin(y)e^{x\cos y} - \cos(y)\cdot x\sin(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{yy} = -x\cos(y)e^{x\cos y} + x^2\sin^2(y)e^{x\cos y}$.
- $f''_{yx} = -\sin(y)e^{x\cos y} - x\sin(y)\cdot\cos(y)e^{x\cos y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Tổng quát hơn, nếu f có đạo riêng đến n tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp n đều liên tục tại (x_0, y_0) thì thứ tự lấy đạo hàm không thay đổi giá trị của đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Tổng quát hơn, nếu f có đạo riêng đến n tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp n đều liên tục tại (x_0, y_0) thì thứ tự lấy đạo hàm không thay đổi giá trị của đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ với $f(x, y) = ye^{\cos x}$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Tổng quát hơn, nếu f có đạo riêng đến n tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp n đều liên tục tại (x_0, y_0) thì thứ tự lấy đạo hàm không thay đổi giá trị của đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ với $f(x, y) = ye^{\cos x}$

Do đạo hàm riêng của f các cấp đều là tích của các hàm sơ cấp nên f có đạo hàm riêng liên tục mọi cấp.

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Tổng quát hơn, nếu f có đạo riêng đến n tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp n đều liên tục tại (x_0, y_0) thì thứ tự lấy đạo hàm không thay đổi giá trị của đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ với $f(x, y) = ye^{\cos x}$

Do đạo hàm riêng của f các cấp đều là tích của các hàm sơ cấp nên f có đạo hàm riêng liên tục mọi cấp. Do đó

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial y} ye^{\cos x}\right)$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Định lí Schwartz

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đạo hàm riêng cấp 2 tại $(x_0, y_0) \in D$. Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục tại (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Tổng quát hơn, nếu f có đạo riêng đến n tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp n đều liên tục tại (x_0, y_0) thì thứ tự lấy đạo hàm không thay đổi giá trị của đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ với $f(x, y) = ye^{\cos x}$

Do đạo hàm riêng của f các cấp đều là tích của các hàm sơ cấp nên f có đạo hàm riêng liên tục mọi cấp. Do đó

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial y} ye^{\cos x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\cos x} = (-\cos x + \sin^2 x)e^{\cos x}.$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi tại điểm (x_0, y_0). Khi đó, nếu vi phân toàn phần của f khả vi tại (x_0, y_0), ta định nghĩa vi phân cấp 2 của f tại (x_0, y_0) là

$$d^2 f(x_0, y_0) := d(df(x_0, y_0)).$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại điểm (x_0, y_0). Khi đó, nếu vi phân toàn phần của f khả vi tại (x_0, y_0), ta định nghĩa vi phân cấp 2 của f tại (x_0, y_0) là

$$d^2 f(x_0, y_0) := d(df(x_0, y_0)).$$

Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa vi phân cấp n nếu như vi phân cấp $n-1$ của hàm f khả vi.

$$d^n f(x_0, y_0) := d(d^{n-1} f(x_0, y_0)).$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại điểm (x_0, y_0). Khi đó, nếu vi phân toàn phần của f khả vi tại (x_0, y_0), ta định nghĩa vi phân cấp 2 của f tại (x_0, y_0) là

$$d^2 f(x_0, y_0) := d(df(x_0, y_0)).$$

Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa vi phân cấp n nếu như vi phân cấp $n-1$ của hàm f khả vi.

$$d^n f(x_0, y_0) := d(d^{n-1} f(x_0, y_0)).$$

Định nghĩa

Một hàm $f: D \to \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi liên tục cấp n* nếu nó có đạo hàm riêng đến n và các đạo hàm riêng đó đều liên tục.

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi tại điểm (x_0, y_0). Khi đó, nếu vi phân toàn phần của f khả vi tại (x_0, y_0), ta định nghĩa vi phân cấp 2 của f tại (x_0, y_0) là

$$d^2 f(x_0, y_0) := d(df(x_0, y_0)).$$

Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa vi phân cấp n nếu như vi phân cấp $n-1$ của hàm f khả vi.

$$d^n f(x_0, y_0) := d(d^{n-1} f(x_0, y_0)).$$

Định nghĩa

Một hàm $f: D \to \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi liên tục cấp n* nếu nó có đạo hàm riêng đến n và các đạo hàm riêng đó đều liên tục.

Như vậy, hàm f khả vi liên tục cấp n thì nó sẽ có vi phân cấp n.

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$d(df) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right)$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\big(f'_x dx + f'_y dy\big) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\big(f'_x dx + f'_y dy\big) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\big(f'_x dx + f'_y dy\big) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$d(f'_x) = \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_y)dy$:

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_y)dy$:

$$d(f'_y) = \frac{\partial f'_y}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_y}{\partial y}dy = f''_{yx}dx + f''_{yy}dy$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_y)dy$:

$$\begin{aligned} d(f'_y) &= \frac{\partial f'_y}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_y}{\partial y}dy = f''_{yx}dx + f''_{yy}dy \\ \Rightarrow d(f'_y)dy &= f''_{yx}dxdy + f''_{yy}dy^2. \end{aligned}$$

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_y)dy$:

$$\begin{aligned} d(f'_y) &= \frac{\partial f'_y}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_y}{\partial y}dy = f''_{yx}dx + f''_{yy}dy \\ \Rightarrow d(f'_y)dy &= f''_{yx}dxdy + f''_{yy}dy^2. \end{aligned}$$

- Do f''_{xy}, f''_{yx} liên tục, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Tính toán vi phân cấp cao

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2. Ta sẽ tính toán vi phân cấp 2 của f.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= d(f'_x)dx + f'_y d^2x + d(f'_y)dy + f'_y d^2 y. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_x)dx$:

$$\begin{aligned} d(f'_x) &= \frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy = f''_{xx}dx + f''_{xy}dy \\ \Rightarrow d(f'_x)dx &= f''_{xx}dx^2 + f''_{xy}dxdy. \end{aligned}$$

- Tính $d(f'_y)dy$:

$$\begin{aligned} d(f'_y) &= \frac{\partial f'_y}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_y}{\partial y}dy = f''_{yx}dx + f''_{yy}dy \\ \Rightarrow d(f'_y)dy &= f''_{yx}dxdy + f''_{yy}dy^2. \end{aligned}$$

- Do f''_{xy}, f''_{yx} liên tục, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

$$\Rightarrow d(f'_x)dx + d(f'_y)dy = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp 2 cho hàm hai biến

- Nếu x, y là biến độc lập, tức là $d^2x = d^2y = 0$:

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp 2 cho hàm hai biến

- Nếu x, y là biến độc lập, tức là $d^2x = d^2y = 0$:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp 2 cho hàm hai biến

- Nếu x, y là biến độc lập, tức là $d^2x = d^2y = 0$:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

- Nếu x, y là các hàm phụ thuộc vào một hoặc hai biến, tức là $d^2x, d^2y \neq 0$ (và cần được tính cụ thể như với d^2f):

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp 2 cho hàm hai biến

- Nếu x, y là biến độc lập, tức là $d^2x = d^2y = 0$:

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

- Nếu x, y là các hàm phụ thuộc vào một hoặc hai biến, tức là $d^2x, d^2y \neq 0$ (và cần được tính cụ thể như với d^2f):

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y.$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm hai biến

Nếu x, y là các biến độc lập, ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm hai biến

Nếu x, y là các biến độc lập, ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}dx\right]^i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^j\right) f = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j.$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm hai biến

Nếu x, y là các biến độc lập, ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}dx\right]^i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^j\right) f = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 3 của hàm $f(x, y)$ khả vi liên tục cấp 3

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm hai biến

Nếu x, y là các biến độc lập, ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}dx\right]^i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^j\right) f = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 3 của hàm $f(x, y)$ khả vi liên tục cấp 3

$$d^3 f \quad = \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm hai biến

Nếu x, y là các biến độc lập, ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}dx\right]^i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^j\right) f = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 3 của hàm $f(x, y)$ khả vi liên tục cấp 3

$$\begin{aligned} d^3 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f \\ &= f'''_{xxx}dx^3 + 3f'''_{xxy}dx^2dy + 3f'''_{xyy}dxdy^2 + f'''_{yyy}dy^3. \end{aligned}$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm m biến

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^m$ bởi m biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ khả vi liên tục đến cấp n.

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm m biến

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^m$ bởi m biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ khả vi liên tục đến cấp n. Khi đó:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm m biến

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^m$ bởi m biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ khả vi liên tục đến cấp n. Khi đó:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 2 của $f(x, y, z)$ khả vi liên tục cấp 2

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm m biến

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^m$ bởi m biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ khả vi liên tục đến cấp n. Khi đó:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 2 của $f(x, y, z)$ khả vi liên tục cấp 2

$$d^2 f = \left(\tfrac{\partial}{\partial x} dx + \tfrac{\partial}{\partial y} dy + \tfrac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f$$

Tính toán vi phân cấp cao

Công thức vi phân cấp n cho hàm m biến

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^m$ bởi m biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ khả vi liên tục đến cấp n. Khi đó:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f.$$

Ví dụ: Tính vi phân cấp 2 của $f(x, y, z)$ khả vi liên tục cấp 2

$$\begin{aligned} d^2 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f \\ &= f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{yz}dydz + 2f''_{xz}dxdz. \end{aligned}$$

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố định $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố định $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta)t^3, \theta \in [0,1].$$

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố định $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta)t^3, \theta \in [0,1].$$

- $\varphi'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df(x_0, y_0)(h, k).$

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố đinh $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét φ: $[0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta)t^3, \theta \in [0,1].$$

- $\varphi'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df(x_0, y_0)(h, k)$.
- $\varphi''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}k^2 = d^2f(x_0, y_0)(h, k)$.

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f: D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố định $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta)t^3, \theta \in [0,1].$$

- $\varphi'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df(x_0, y_0)(h, k)$.
- $\varphi''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}k^2 = d^2f(x_0, y_0)(h, k)$.

Thay $t = 1$,

Khai triển Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor cấp 2

Xét hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in D$. Cố đinh $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Xét $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Xét khai triển Maclaurin cấp 2 của φ.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta)t^3, \theta \in [0,1].$$

- $\varphi'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = df(x_0, y_0)(h, k)$.
- $\varphi''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}k^2 = d^2 f(x_0, y_0)(h, k)$.

Thay $t = 1$, ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{3!}\varphi^{(3)}(\theta).$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$.

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad f(x_0, y_0)$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k)$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k)$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ &\quad + \frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) + \ldots \\ & + \ldots + \tfrac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h, k) \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(h,k) + \tfrac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(h,k) \\ &\quad + \tfrac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0)(h,k) + \ldots \\ &\quad + \ldots + \tfrac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)(h,k) \\ &\quad + o(\|h,k\|^n). \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Peano

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$. Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) + \ldots \\ & + \ldots + \tfrac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + o(\|h, k\|^n). \end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết dưới dạng thu gọn

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + df(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2 f}{2}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{d^n f}{n!}(\boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^n).$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n và có vi phân cấp $n+1$ trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$.

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n và có vi phân cấp $n+1$ trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$.Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, tồn tại h', k' thoả mãn $0 < \frac{h'}{h}, \frac{k'}{k} < 1$ và

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ &\qquad + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n và có vi phân cấp $n+1$ trong một lân cận của $\mathbf{x} = (x_0, y_0) \in D$.Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, tồn tại h', k' thoả mãn $0 < \frac{h'}{h}, \frac{k'}{k} < 1$ và

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) + \dots \\ & + \dots + \tfrac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h, k) \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n và có vi phân cấp $n+1$ trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$.Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, tồn tại h', k' thoả mãn $0 < \frac{h'}{h}, \frac{k'}{k} < 1$ và

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h,k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h,k) \\ &\quad + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h,k) + \dots \\ &\quad + \dots + \tfrac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h,k) \\ &\quad + \tfrac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0, y_0)(h', k'). \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cấp n và có vi phân cấp $n+1$ trong một lân cận của $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0) \in D$.Khi đó, với (h, k) đủ nhỏ, tồn tại h', k' thoả mãn $0 < \frac{h'}{h}, \frac{k'}{k} < 1$ và

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + \tfrac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)(h, k) + \ldots \\ & + \ldots + \tfrac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h, k) \\ & + \tfrac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0, y_0)(h', k'). \end{aligned}$$

Ta cũng có thể viết dưới dạng thu gọn

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + df(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2 f}{2}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{d^n f}{n!}(\boldsymbol{x}) + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\boldsymbol{z})$$

với $\boldsymbol{z} = t\boldsymbol{x} + (1 - t)\boldsymbol{y}$.

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1,1) = 0$.

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1, 1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1, 1) = 0$.
- $f'_x(1, 1) = f'_y(1, 1) = 0$.

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1, 1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1, 1) = 0.$
- $f'_x(1, 1) = f'_y(1, 1) = 0.$
- $f''_{xx}(1, 1) = 2, f''_{xy}(1, 1) = 3, f''_{yy}(1, 1) = 0.$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1,1) = 0.$
- $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0.$
- $f''_{xx}(1,1) = 2, f''_{xy}(1,1) = 3, f''_{yy}(1,1) = 0.$
- $f'''_{xxx}(1,1) = 0, f'''_{xxy}(1,1) = 4, f'''_{xyy}(1,1) = 0, f'''_{yyy}(1,1) = 6.$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1,1) = 0.$
- $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0.$
- $f''_{xx}(1,1) = 2, f''_{xy}(1,1) = 3, f''_{yy}(1,1) = 0.$
- $f'''_{xxx}(1,1) = 0, f'''_{xxy}(1,1) = 4, f'''_{xyy}(1,1) = 0, f'''_{yyy}(1,1) = 6.$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)\right)$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1,1) = 0.$
- $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0.$
- $f''_{xx}(1,1) = 2, f''_{xy}(1,1) = 3, f''_{yy}(1,1) = 0.$
- $f'''_{xxx}(1,1) = 0, f'''_{xxy}(1,1) = 4, f'''_{xyy}(1,1) = 0, f'''_{yyy}(1,1) = 6.$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)\right) + \\ &\quad + \tfrac{1}{3!}\left(3f'''_{xxy}(x-1)^2(y-1) + f'''_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right) \end{aligned}$$

Công thức Taylor cho hàm hai biến

Ví dụ: Khai triển Taylor tại $(1,1)$ của $2x^2y - x^2 - xy - x + y^3 - 3y^2 + 2y + 1$

- $f(1,1) = 0$.
- $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0$.
- $f''_{xx}(1,1) = 2, f''_{xy}(1,1) = 3, f''_{yy}(1,1) = 0$.
- $f'''_{xxx}(1,1) = 0, f'''_{xxy}(1,1) = 4, f'''_{xyy}(1,1) = 0, f'''_{yyy}(1,1) = 6$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)\right) + \\ &\quad + \tfrac{1}{3!}\left(3f'''_{xxy}(x-1)^2(y-1) + f'''_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right) \\ &= (x-1)^2 + 3(x-1)(y-1) + 2(x-1)^2(y-1) + (y-1)^3. \end{aligned}$$

Nội dung của mục này

Cực trị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M \in D$ được gọi là **điểm cực trị** của f nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho
$\forall z \in B(M, \epsilon) \setminus \{M\}, f(z) - f(M)$ không đổi dấu.

Cực trị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M \in D$ được gọi là **điểm cực trị** của f nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho $\forall z \in B(M, \epsilon) \setminus \{M\}, f(z) - f(M)$ không đổi dấu.Cụ thể, ta gọi

- **cực đại** nếu $f(z) - f(M) < 0$.

Cực trị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M \in D$ được gọi là **điểm cực trị** của f nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho $\forall z \in B(M, \epsilon) \setminus \{M\}, f(z) - f(M)$ không đổi dấu.Cụ thể, ta gọi

- **cực đại** nếu $f(z) - f(M) < 0$.
- **cực tiểu** nếu $f(z) - f(M) > 0$.

Cực trị của hàm hai biến

Định nghĩa

Cho hàm $f\colon D \to \mathbb{R}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M \in D$ được gọi là **điểm cực trị** của f nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho
$\forall z \in B(M,\epsilon) \setminus \{M\}, f(z) - f(M)$ không đổi dấu.Cụ thể, ta gọi

- **cực đại** nếu $f(z) - f(M) < 0$.
- **cực tiểu** nếu $f(z) - f(M) > 0$.

Giá tri $f(M)$ được gọi là giá trị cực trị.

Một số ví dụ

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Một số ví dụ

Ví dụ: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Điểm $(0, 0)$ là điểm cực tiểu của f. Hàm f không có điểm cực đại.

Một số ví dụ

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Điểm $(0,0)$ là điểm cực tiểu của f. Hàm f không có điểm cực đại.

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Một số ví dụ

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Điểm $(0,0)$ là điểm cực tiểu của f. Hàm f không có điểm cực đại.

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Điểm $(0,0)$ không là cực đại, do điểm này là cực tiểu của hàm một biến định nghĩa bởi f hạn chế lên đường thẳng $\{y = 0\}$.

Một số ví dụ

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Điểm $(0,0)$ là điểm cực tiểu của f. Hàm f không có điểm cực đại.

Ví dụ: $f(x,y) = x^2 - y^2$

Điểm $(0,0)$ không là cực đại, do điểm này là cực tiểu của hàm một biến định nghĩa bởi f hạn chế lên đường thẳng $\{y = 0\}$.
Điểm $(0,0)$ không là cực tiểu, do điểm này là cực đại của hàm một biến định nghĩa bởi f hạn chế lên đường thẳng $\{x = 0\}$.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện cần)

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện cần)

Cho hàm $f = f(x, y)$ có đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0). Nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của f thì

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện cần)

Cho hàm $f = f(x, y)$ có đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0). Nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của f thì

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ví dụ

- Điểm $(0, 0)$ là cực tiểu của $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dễ thấy $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện cần)

Cho hàm $f = f(x, y)$ có đạo hàm riêng trong một lân cận của (x_0, y_0). Nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của f thì

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ví dụ

- Điểm $(0, 0)$ là cực tiểu của $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dễ thấy $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.
- Hàm $g(x, y) = x^2 - y^2$ thoả mãn $g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$. Tuy nhiên, $(0, 0)$ không là cực trị của g.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.
  - Nếu $R < 0$ thì M là cực đại.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.
  - Nếu $R < 0$ thì M là cực đại.
  - Nếu $R > 0$ thì M là cực tiểu.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.
  - Nếu $R < 0$ thì M là cực đại.
  - Nếu $R > 0$ thì M là cực tiểu. Với $RT > S^2$, ta có thể thay điều kiện $R > 0$ bằng $T > 0$.

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.
  - Nếu $R < 0$ thì M là cực đại.
  - Nếu $R > 0$ thì M là cực tiểu. Với $RT > S^2$, ta có thể thay điều kiện $R > 0$ bằng $T > 0$.
- $S^2 - RT = 0$ thì M có thể là cực trị hoặc không (trường hợp nghi ngờ).

Các định lí xác định cực trị

Định lí (Điều kiện đủ)

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp 2 trong một lân cận của $M \in D$. Giả sử $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Đặt

$$R = f''_{xx}(M), \quad S = f''_{xy}(M), \quad T = f''_{yy}(M).$$

- Nếu $S^2 - RT > 0$, điểm M không là cực trị.
- Nếu $S^2 - RT < 0$, điểm M là cực trị.
  - Nếu $R < 0$ thì M là cực đại.
  - Nếu $R > 0$ thì M là cực tiểu. Với $RT > S^2$, ta có thể thay điều kiện $R > 0$ bằng $T > 0$.
- $S^2 - RT = 0$ thì M có thể là cực trị hoặc không (trường hợp nghi ngờ).

Ý tưởng chứng minh: Sử dụng khai triển Taylor và dấu của dạng toàn phương $Rdx^2 + 2Sdxdy + Tdy^2$.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
    - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
  - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
  - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
    - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
    - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.
- Trong các trường hợp còn lại: Xét dấu $\Delta f = f(M + \Delta M) - f(M)$.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
    - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
    - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.
- Trong các trường hợp còn lại: Xét dấu $\Delta f = f(M + \Delta M) - f(M)$.
    - Chứng minh M là cực trị bằng định nghĩa.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
    - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
    - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.
- Trong các trường hợp còn lại: Xét dấu $\Delta f = f(M + \Delta M) - f(M)$.
    - Chứng minh M là cực trị bằng định nghĩa.
    - Hoặc chứng minh M không là cực trị:

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
  - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
  - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.
- Trong các trường hợp còn lại: Xét dấu $\Delta f = f(M + \Delta M) - f(M)$.
  - Chứng minh M là cực trị bằng định nghĩa.
  - Hoặc chứng minh M không là cực trị:
    - Cách 1: Cách chỉ ra hay dãy điểm M_n, M_k hội tụ về M sao cho với mọi n thì $f(M_n) > 0$ và với mọi k thì $f(M_k) < 0$.

Bài toán tìm cực trị

Tìm cực trị của hàm $f = f(x, y)$

- Tìm miền xác định của D_f.
- Tính f'_x, f'_y và xác định các điểm mà $f'_x = f'_y = 0$ hoặc một trong hai đạo hàm riêng f'_x, f'_y không tồn tại.
- Tại các điểm M mà $f'_x = f'_y = 0$, tính $f''_{xx}(M) = R, f''_{xy}(M) = S, f''_{yy}(M) = T$.
  - Nếu $S^2 - RT < 0$, kết hợp với dấu của R để kết luận.
  - Nếu $S^2 - RT > 0$, kết luận điểm không phải cực trị.
- Trong các trường hợp còn lại: Xét dấu $\Delta f = f(M + \Delta M) - f(M)$.
  - Chứng minh M là cực trị bằng định nghĩa.
  - Hoặc chứng minh M không là cực trị:
    - Cách 1: Cách chỉ ra hay dãy điểm M_n, M_k hội tụ về M sao cho với mọi n thì $f(M_n) > 0$ và với mọi k thì $f(M_k) < 0$.
    - Cách 2: Chỉ ra hai đường cong $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ đi qua M sao cho $f(x, \varphi_1(x)) > 0$ và $f(x, \varphi_2(x)) < 0$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

- Tập xác định $D_f = \mathbb{R}^2$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tập xác định $D_f = \mathbb{R}^2$.
- $f'_x = 4x^3 - 4(x-y), f'_y = 4y^3 - 4(x-y)$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tập xác định $D_f = \mathbb{R}^2$.
- $f'_x = 4x^3 - 4(x-y), f'_y = 4y^3 - 4(x-y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases}$$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

- Tập xác định $D_f = \mathbb{R}^2$.
- $f'_x = 4x^3 - 4(x - y), f'_y = 4y^3 - 4(x - y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 - (x - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2x = 0.$$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tập xác định $D_f = \mathbb{R}^2$.
- $f'_x = 4x^3 - 4(x-y), f'_y = 4y^3 - 4(x-y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2x = 0.$$

Hàm f có 3 điểm tới hạn $(0,0,\sqrt{2},(-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Ta có

$$R = f''_{xx} = 12x^2 - 4, S = f''_{xy} = 4, T = f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

- Ta có

$$R = f''_{xx} = 12x^2 - 4, S = f''_{xy} = 4, T = f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

- Tại $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, ta có

$$\Rightarrow S^2(M_1) - R(M_1)T(M_1) = -384 < 0, R(M_1) = 20 > 0.$$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Ta có

$$R = f''_{xx} = 12x^2 - 4, S = f''_{xy} = 4, T = f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

- Tại $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, ta có

$$\Rightarrow S^2(M_1) - R(M_1)T(M_1) = -384 < 0, R(M_1) = 20 > 0.$$

Do đó, M_1 là cực tiểu.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Ta có

$$R = f''_{xx} = 12x^2 - 4, S = f''_{xy} = 4, T = f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

- Tại $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, ta có

$$\Rightarrow S^2(M_1) - R(M_1)T(M_1) = -384 < 0, R(M_1) = 20 > 0.$$

Do đó, M_1 là cực tiểu.

- Tại $M_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, tương tự ta kết luận M_2 là cực tiểu.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Ta cần xét dấu $z(M) - z(M_3)$ với M nằm trong một lân cận của M_3.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Ta cần xét dấu $z(M) - z(M_3)$ với M nằm trong một lân cận của M_3.

- Với $M = (x, -x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0$ với mọi $x \neq 0$ đủ nhỏ (VD: $|x| < 2$).

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Ta cần xét dấu $z(M) - z(M_3)$ với M nằm trong một lân cận của M_3.

- Với $M = (x,-x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4-x^2) < 0$ với mọi $x \neq 0$ đủ nhỏ (VD: $|x| < 2$).
- Với $M = (x,x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Ta cần xét dấu $z(M) - z(M_3)$ với M nằm trong một lân cận của M_3.

- Với $M = (x,-x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4-x^2) < 0$ với mọi $x \neq 0$ đủ nhỏ (VD: $|x| < 2$).
- Với $M = (x,x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Nói cách khác, ta có thể chỉ ra được hai dãy điểm $M_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \geq 2$ và $M_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ hội tụ về M_3 và $z(M_n) < 0, z(M_k) > 0$.

Bài toán tìm cực trị

Ví dụ: Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

- Tại $M_3 = (0,0)$, ta có

$$S^2(M_3) - R(M_3)T(M_3) = 0.$$

Ta cần xét dấu $z(M) - z(M_3)$ với M nằm trong một lân cận của M_3.

- Với $M = (x, -x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0$ với mọi $x \neq 0$ đủ nhỏ (VD: $|x| < 2$).
- Với $M = (x, x), z(M) - z(M_3) = 2x^4 > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Nói cách khác, ta có thể chỉ ra được hai dãy điểm $M_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \geq 2$ và $M_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ hội tụ về M_3 và $z(M_n) < 0, z(M_k) > 0$.
Như vậy, M_3 không là cực trị của z.

Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong một lân cận của M. Điểm M được gọi là *cực trị của f với điều kiện $g(x, y) = 0$* nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho với mọi $z \in B(M, \epsilon) \cap \{g(x, y) = 0\}$, $f(z) - f(M)$ không đổi dấu.

- Nếu $f(z) - f(M) < 0$, M gọi là cực đại có điều kiện.
- Nếu $f(z) - f(M) > 0$, M gọi là cực tiểu có điều kiện.

Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong một lân cận của M. Điểm M được gọi là *cực trị của f với điều kiện* $g(x, y) = 0$ nếu tồn tại một lân cận $B(M, \epsilon)$ sao cho với mọi $z \in B(M, \epsilon) \cap \{g(x, y) = 0\}$, $f(z) - f(M)$ không đổi dấu.

- Nếu $f(z) - f(M) < 0$, M gọi là cực đại có điều kiện.
- Nếu $f(z) - f(M) > 0$, M gọi là cực tiểu có điều kiện.

Ví dụ

Xét hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ với điều kiện là $y = 2x$. Khi đó,
$f(x, y) = f(x, 2x) = -3x^2$ và $(0, 0)$ là một điểm cực đại có điều kiện.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x, y) = 0$ có thể đưa về dạng $y = y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x) = f(x, y(x))$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x, y) = 0$ có thể đưa về dạng $y = y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x) = f(x, y(x))$.

Ví dụ: Tím cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^2$ biết $xy = 3$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x, y) = 0$ có thể đưa về dạng $y = y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x) = f(x, y(x))$.

Ví dụ: Tím cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^2$ biết $xy = 3$

Do $xy = 3$, suy ra $x \neq 0$ và $y = \frac{3}{x}$. Xét

$$h(x) = f(x, \frac{3}{x}) = x^2 + \frac{9}{x^2}.$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x,y)=0$ có thể đưa về dạng $y=y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x)=f(x,y(x))$.

Ví dụ: Tím cực trị của $f(x,y)=x^2+y^2$ biết $xy=3$

Do $xy=3$, suy ra $x\neq 0$ và $y=\frac{3}{x}$. Xét

$$h(x)=f(x,\frac{3}{x})=x^2+\frac{9}{x^2}.$$

$h'(x)=\frac{2x^4-18}{x^3}$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x, y) = 0$ có thể đưa về dạng $y = y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x) = f(x, y(x))$.

Ví dụ: Tím cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^2$ biết $xy = 3$

Do $xy = 3$, suy ra $x \neq 0$ và $y = \frac{3}{x}$. Xét

$$h(x) = f(x, \frac{3}{x}) = x^2 + \frac{9}{x^2}.$$

$h'(x) = \frac{2x^4 - 18}{x^3}$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
Sử dụng bảng biến thiên, ta kết luận h có hai cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{3}$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Đưa về một biến

Nếu điều kiện $g(x,y)=0$ có thể đưa về dạng $y=y(x)$, ta xét bài toán tìm cực trị tự do một biến x của $h(x)=f(x,y(x))$.

Ví dụ: Tím cực trị của $f(x,y)=x^2+y^2$ biết $xy=3$

Do $xy=3$, suy ra $x\neq 0$ và $y=\frac{3}{x}$. Xét

$$h(x)=f(x,\frac{3}{x})=x^2+\frac{9}{x^2}.$$

$h'(x)=\frac{2x^4-18}{x^3}$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.
Sử dụng bảng biến thiên, ta kết luận h có hai cực tiểu tại $x=\pm\sqrt{3}$.
Như vậy, với điều kiện $xy=3$, $f(x,y)$ có hai điểm cực tiểu $\pm(\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử hàm $f = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M = (x_0, y_0)$ với x, y thoả mãn $g(x, y) = 0$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử hàm $f = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M = (x_0, y_0)$ với x, y thoả mãn $g(x, y) = 0$. Nếu

- f khả vi liên tục tại M.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử hàm $f = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M = (x_0, y_0)$ với x, y thoả mãn $g(x, y) = 0$. Nếu

- f khả vi liên tục tại M.
- $\frac{\partial g}{\partial y}(M) \neq 0$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử hàm $f = f(x, y)$ đạt cực trị tại $M = (x_0, y_0)$ với x, y thoả mãn $g(x, y) = 0$. Nếu

- f khả vi liên tục tại M.
- $\frac{\partial g}{\partial y}(M) \neq 0$.

Khi đó,

$$\det \begin{pmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ g'_x(M) & g'_y(M) \end{pmatrix} = 0$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Định lí (Điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử hàm $f = f(x,y)$ đạt cực trị tại $M = (x_0, y_0)$ với x, y thoả mãn $g(x,y) = 0$. Nếu

- f khả vi liên tục tại M.
- $\frac{\partial g}{\partial y}(M) \neq 0$.

Khi đó,

$$\det \begin{pmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ g'_x(M) & g'_y(M) \end{pmatrix} = 0$$

Nói cách khác, tồn tại $\mu \in \mathbb{R}^*$ thoả mãn

$$\begin{cases} f'_x(M) = \mu g'_x(M) \\ f'_y(M) = \mu g'_y(M) \end{cases}.$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

1. Xét hàm $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

1. Xét hàm $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
2. Tìm các điểm tới hạn của h: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

1. Xét hàm $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
2. Tìm các điểm tới hạn của h: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Bài toán: Tìm cực trị của $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$.

1. Xét hàm $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.
2. Tìm các điểm tới hạn của h: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Mệnh đề

Nếu $N(x_0,y_0,\lambda_0)$ là điểm cực trị của $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ thì $M(x_0,y_0)$ là cực trị của f với điều kiện $g(x,y)=0$.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Đặt $M = (x_0, y_0)$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Đặt $M = (x_0, y_0)$. Với (x, y) thoả mãn $g(x, y) = 0$ và $g'_y \neq 0$, ta có

$$g'_x(M)dx + g'_y(M)dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{g'_x(M)}{g'_y(M)}dx.$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Đặt $M = (x_0, y_0)$. Với (x, y) thoả mãn $g(x, y) = 0$ và $g'_y \neq 0$, ta có

$$g'_x(M)dx + g'_y(M)dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{g'_x(M)}{g'_y(M)}dx.$$

Thế vào biểu thức của d^2L, ta có

$$d^2L(N) = G(N)dx^2.$$

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Đặt $M = (x_0, y_0)$. Với (x, y) thoả mãn $g(x, y) = 0$ và $g'_y \neq 0$, ta có

$$g'_x(M)dx + g'_y(M)dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{g'_x(M)}{g'_y(M)}dx.$$

Thế vào biểu thức của d^2L, ta có

$$d^2L(N) = G(N)dx^2.$$

4. Nếu $G(N) > 0, M$ là cực tiểu có điều kiện của f. Nếu $G(N) < 0$, M là cực đại có điều kiện của f.

Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

3. Tại điểm tới hạn $N = (x_0, y_0, \lambda_0)$, xét dấu d^2L:

$$d^2L(N) = L''_{xx}(N)dx^2 + 2L''_{xy}(N)dxdy + L''_{yy}(N)dy^2.$$

Đặt $M = (x_0, y_0)$. Với (x, y) thoả mãn $g(x, y) = 0$ và $g'_y \neq 0$, ta có

$$g'_x(M)dx + g'_y(M)dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{g'_x(M)}{g'_y(M)}dx.$$

Thế vào biểu thức của d^2L, ta có

$$d^2L(N) = G(N)dx^2.$$

4. Nếu $G(N) > 0, M$ là cực tiểu có điều kiện của f. Nếu $G(N) < 0$, M là cực đại có điều kiện của f.
Xử lí tương tự nếu $g'_x(M) \neq 0$.

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} .$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Từ $y + y\lambda = 0$, ta giải được 4 nghiệm của hệ:

$$N_1(-1, 0, -\frac{1}{2}),$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Từ $y + y\lambda = 0$, ta giải được 4 nghiệm của hệ:

$$N_1(-1, 0, -\frac{1}{2}), N_2(1, 0, 0),$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Từ $y + y\lambda = 0$, ta giải được 4 nghiệm của hệ:

$$N_1(-1, 0, -\frac{1}{2}), N_2(1, 0, 0), N_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3}, -1),$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Xét hàm $L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$.
- Xét hệ

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 2y\lambda = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Từ $y + y\lambda = 0$, ta giải được 4 nghiệm của hệ:

$$N_1(-1, 0, -\frac{1}{2}), N_2(1, 0, 0), N_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3}, -1), N_4(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, -1).$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Tính d^2L:

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Tính d^2L: $L''_{xx} = 2 + 8\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2 + 2\lambda$.

$$d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Tính d^2L: $L''_{xx} = 2 + 8\lambda$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 2 + 2\lambda$.

$$d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$$

Với (x, y) thoả mãn $4x^2 + y^2 = 4$, lấy vi phân hai vế, ta có

$$4xdx + ydy = 0.$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- Tính d^2L: $L''_{xx} = 2 + 8\lambda$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 2 + 2\lambda$.

$$d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$$

Với (x, y) thoả mãn $4x^2 + y^2 = 4$, lấy vi phân hai vế, ta có

$$4xdx + ydy = 0.$$

Nếu $x \neq 0$, ta có

$$dx = -\frac{y}{4x}dy.$$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_1 = (-1, 0, -\frac{1}{2})$:

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_1 = (-1, 0, -\frac{1}{2})$:
  - $2 + 8\lambda = -2, 2 + 2\lambda = 1.$
  - $dx = 0.$
  - $d^2L = dy^2.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_1 = (-1, 0, -\frac{1}{2})$:
  - $2 + 8\lambda = -2, 2 + 2\lambda = 1.$
  - $dx = 0.$
  - $d^2L = dy^2.$

Do đó, N_1 là cực tiểu của L và $M_1(-1, 0)$ là cực tiểu có điều kiện của f.

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$, $dx = -\frac{y}{4x}dy$.
- Tại $N_1 = (1, 0, 0)$:

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_1 = (1, 0, 0)$:
  - $2 + 8\lambda = 2, 2 + 2\lambda = 2.$
  - $dx = 0.$
  - $d^2L = 2dy^2.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy$.
- Tại $N_1 = (1, 0, 0)$:
  - $2 + 8\lambda = 2, 2 + 2\lambda = 2$.
  - $dx = 0$.
  - $d^2L = 2dy^2$.

Do đó, N_2 là cực tiểu của L và $M_2(1, 0)$ là cực tiểu có điều kiện của f.

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$, $dx = -\frac{y}{4x}dy$.
- Tại $N_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3}, -1)$:

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3}, -1)$:
  - $2 + 8\lambda = -6, 2 + 2\lambda = 0.$
  - $dx = -\sqrt{2}dy.$
  - $d^2L = -12dy^2.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2$, $dx = -\frac{y}{4x}dy$.
- Tại $N_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3}, -1)$:
  - $2+8\lambda = -6, 2+2\lambda = 0$.
  - $dx = -\sqrt{2}dy$.
  - $d^2L = -12dy^2$.

Do đó, N_3 là cực đại của L và $M_3(-\frac{1}{3}, \frac{-4\sqrt{2}}{3})$ là cực đại có điều kiện của f.

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_4(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, -1)$:

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy.$
- Tại $N_4(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, -1)$:
  - $2 + 8\lambda = -6, 2 + 2\lambda = 0.$
  - $dx = \sqrt{2}dy.$
  - $d^2L = -12dy^2.$

Bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của $f = (x-1)^2 + y^2$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 4$

- $d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)dy^2, dx = -\frac{y}{4x}dy$.
- Tại $N_4(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, -1)$:
  - $2+8\lambda = -6, 2+2\lambda = 0$.
  - $dx = \sqrt{2}dy$.
  - $d^2L = -12dy^2$.

Do đó, N_4 là cực đại của L và $M_4(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ là cực đại có điều kiện của f.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Bài toán

Cho miền D đóng được giới hạn bởi các phương trình $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_k(x, y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Bài toán

Cho miền D đóng được giới hạn bởi các phương trình $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_k(x, y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên D.

Cách làm:

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Bài toán

Cho miền D đóng được giới hạn bởi các phương trình $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_k(x, y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên D.

Cách làm:

- Tìm các điểm tới hạn của f trong phần trong của D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Bài toán

Cho miền D đóng được giới hạn bởi các phương trình $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_k(x, y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên D.

Cách làm:

- Tìm các điểm tới hạn của f trong phần trong của D.
- Giải k bài toán: "Tìm các điểm tới của f với điều kiện $g_i = 0$" với $1 \leq i \leq k$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Định lí

Cho hàm f liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

Bài toán

Cho miền D đóng được giới hạn bởi các phương trình $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_k(x, y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên D.

Cách làm:

- Tìm các điểm tới hạn của f trong phần trong của D.
- Giải k bài toán: "Tìm các điểm tới của f với điều kiện $g_i = 0$" với $1 \leq i \leq k$.
- So sánh các giá trị cực trị để kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.
- $f'_x = xy(8 - 3x - 2y), f'_y = x^2(4 - x - 2y)$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.
- $f'_x = xy(8 - 3x - 2y), f'_y = x^2(4 - x - 2y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4-x-y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.
- $f'_x = xy(8-3x-2y), f'_y = x^2(4-x-2y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{x = 0\} \cup \{(4, 0), (2, 1)\}.$$

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.
- $f'_x = xy(8 - 3x - 2y), f'_y = x^2(4 - x - 2y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{x = 0\} \cup \{(4, 0), (2, 1)\}.$$

Các điểm $(0, y), (4, 0)$ nằm trên biên của D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Hàm f liên tục trên D.
- $f'_x = xy(8 - 3x - 2y), f'_y = x^2(4 - x - 2y)$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{x = 0\} \cup \{(4, 0), (2, 1)\}.$$

Các điểm $(0, y), (4, 0)$ nằm trên biên của D. Điểm $(2, 1)$ nằm ở phần trong của D.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4-x-y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x,0), x \in [0,6]\}$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, x \in [0, 6]\}$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, x \in [0, 6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x, 0) = 0$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, x \in [0, 6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x, 0) = 0$.
- $f|_{D_2} = f(0, y) = 0$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, x \in [0, 6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x, 0) = 0$.
- $f|_{D_2} = f(0, y) = 0$.
- $f|_{D_3} = f(x, 6 - x) = 2x^3 - 12x^2, x \in [0, 6]$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4 - x - y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x, 0), x \in [0, 6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0, y), y \in [0, 6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, x \in [0, 6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x, 0) = 0$.
- $f|_{D_2} = f(0, y) = 0$.
- $f|_{D_3} = f(x, 6 - x) = 2x^3 - 12x^2, x \in [0, 6]$. Hàm này đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0, f(0, 6) = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 4, f(4, 2) = -64$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4-x-y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x,0), x \in [0,6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0,y), y \in [0,6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x,y) \mid y = 6-x, x \in [0,6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x,0) = 0$.
- $f|_{D_2} = f(0,y) = 0$.
- $f|_{D_3} = f(x,6-x) = 2x^3 - 12x^2, x \in [0,6]$. Hàm này đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0, f(0,6) = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 4, f(4,2) = -64$.
- $f(2,1) = 4$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất trên miền đóng

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của $f = x^2y(4-x-y)$ trong miền $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

- Biên D bao gồm
  1. $D_1 = \{(x,0), x \in [0,6]\}$.
  2. $D_2 = \{(0,y), y \in [0,6]\}$.
  3. $D_3 = \{(x,y) \mid y = 6-x, x \in [0,6]\}$.
- $f|_{D_1} = f(x,0) = 0$.
- $f|_{D_2} = f(0,y) = 0$.
- $f|_{D_3} = f(x,6-x) = 2x^3 - 12x^2, x \in [0,6]$. Hàm này đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0, f(0,6) = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 4, f(4,2) = -64$.
- $f(2,1) = 4$.

Kết luận: Hàm f trên D đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại $(2,1)$, giá trị nhỏ nhất bằng -64 tại $(4,2)$.