Đề giải tích 3 giữa kì 2022.2 kíp 1 20/5

Saturday, May 20, 2023 9:15 AM

Câu1 (2đ). Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+7}{\sqrt{10n^2+3n+2}}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(2n+1)}{(n+1)!}$.

a) ta có: khi n chẵn:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+7}{\sqrt{10n^2+3n+2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

khi n lẻ:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+7}{\sqrt{10n^2+3n+2}} = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+7}{\sqrt{10n^2+3n+2}}$

Nên: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+7}{\sqrt{10n^2+3n+2}}$ phân kì (vi phạm ĐK cần)

b) Đặt $a_n = \frac{3^n(2n+1)}{(n+1)!} > 0 \ \forall n \geq 1$

$\to$ chuỗi số là chuỗi số dương

Xét: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.(2n+3)}{(2n+1)(n+2)} = 0 < 1$

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (theo chuẩn D'Alambert)

Câu 2(2đ). Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y - xy' = x\cos\frac{y}{x}$ b) $(4-e^y)(1+\tan^2 x)dx + 5e^y \tan x dy = 0$.

a) TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Đặt: $t = \frac{y}{x} \to t' = \frac{y'.x - y}{x^2}$

$\to y - xy' = -t'.x^2$

$$\to y - xy' = -t'.x^2$$

(1) trở thành: $-t'.x^2 = x.\cos t$ (2)

Khi $\cos t = 0 \to t' = 0 \to$ (2) luôn đúng

$\to \cos t = 0$ là 1 no kì dị của (2)

Khi $\cos t \neq 0$: (2) $\Leftrightarrow \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\cos t}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{\cos t} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t}\right) d(\sin t) = -\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin t+1} + \frac{1}{1-\sin t}\right) d(\sin t) = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{1-\sin t}\right| = -\ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin(\frac{y}{x})+1}{1-\sin(\frac{y}{x})}\right) + \ln|x| = C, \ C \in R.$$

Vậy tp tổng quát của pt (1) là: $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sin\frac{y}{x}+1}{1-\sin\frac{y}{x}}\right) + \ln x = C, C \in R$

và nghiệm kì dị của (1): $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

b) $(4-e^y).(\tan^2 x+1)dx + 5e^y.\tan x\,dy = 0$.(2), TXĐ: $R \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in Z\}$

Nếu $y = \ln 4 \to$ (2) luôn đúng

$\to y = \ln 4$ là nghiệm kì dị của pt (2)

Nếu $y \neq \ln 4 \to$ (2) trở thành: $\dfrac{(\tan^2+1)dx}{\tan x} = -\dfrac{5e^y dy}{4-e^y}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\tan x}{\tan x} = 5\frac{d(4-e^y)}{4-e^y}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{d\tan x}{\tan x} = 5\int\frac{d(4-e^y)}{4-e^y}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d \tan x}{\tan x} = 5 \int \frac{d e^y}{4-e^y}$$

$$\Leftrightarrow \ln|\tan x| = 5\ln|4-e^y| + C$$

Vậy tích phân tổng quát của pt(2) là: $5\ln|4-e^y| - \ln|\tan x| + C = 0$

và nghiệm kì dị $y = \ln 4$

Câu 3(1,5đ). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+2n}{2n(n+1)}\left(\frac{2x-1}{1+x}\right)^n$. (1)

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đặt: $y = \frac{2x-1}{1+x}$

(1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2n(n+1)} \cdot y^n$ (2) là chuỗi lũy thừa.

Đặt: $a_n = \frac{2n+5}{2n(n+1)}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+7)\,2n(n+1)}{(2n+5)(2n+2)(n+2)}\right| = 1$$

→ khi $|y| < \rho = 1$ thì chuỗi (2) hội tụ

→ $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 1$ thì (1) hội tụ.

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow |2x-1| < |x+1| \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \quad (*)$$

Khi $x = 0$, (1) trở thành: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+5)}{2n(n+1)}$ là chuỗi đan dấu.

Ta có: $f(x) = \frac{2x+5}{2x(x+1)} > 0 \ \forall x > 0 \rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2 - 20x - 10}{(2x(x+1))^2} < 0 \ \forall x > 0$

do đó: $\frac{2n+5}{2n(n+1)}$ dương, giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{2n(n+1)} = 0$

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.(2n+5)}{2n(n+1)}$ hội tụ (tiêu chuẩn Leibniz)

khi $x=2 \to (1)$ trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2n(n+1)}$ là chuỗi số dương

ta có: $\frac{2n+5}{2n(n+1)} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$

mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì (chuỗi điều hòa)

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2n(n+1)}$ phân kì (tiêu chuẩn so sánh)

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số là: $[0;2)$

Câu 4(1,5đ). Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

$f(x)=2|x| \quad \forall x \in [-2;2]$ tuần hoàn chu kỳ bằng 4.

$f(x)$ là hàm chẵn tuần hoàn chu kì $T=4$

$\to b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2x\,dx = 4$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x).\cos\frac{n\pi x}{2}dx = 2\int_0^2 x.\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= 2\left(\frac{2}{n\pi}.\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) = \frac{8}{n^2.\pi^2}.(1-(-1)^n)$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục nên theo tiêu chuẩn Dirichlet, chuỗi Fourier hội tụ đến $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} = 2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right]$$

Câu 5(1đ). Xét sự hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}+1-\sin^3 3x}$$

ta có: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n^5}+1-\sin^3 3x}\right| \le \left|\dfrac{1}{\sqrt{n^5}}\right| = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ hội tụ $\left(\alpha = \frac{5}{2} > 1\right)$

$\to$ chuỗi hàm số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}+1-\sin^3 3x}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ (tiêu chuẩn Weierstrass)

Câu 6 (1đ). Tính tổng $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+6}}{4^{2n}(2n+1)}$ với $-4 < x < 4$.

Xét chuỗi hàm số: $S(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ hội tụ trên $(-1;1)$

$$\left\{\begin{array}{l} S(y) \text{ liên tục trên } (-1;1) \\ \dfrac{y^{2n+1}}{2n+1} \text{ liên tục trên } (-1;1) \\ \left(\dfrac{y^{2n+1}}{2n+1}\right)' = y^{2n} \text{ liên tục trên } (-1;1) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y^{2n} \text{ liên tục trên } (-1;1) \end{array}\right. \Rightarrow S(y) \text{ khả vi trên } (-1;1)$$

$$\to S'(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in (-1;1)$$

$S(0)=0$, $S(y)=\int S'(y)\,dy=\int \frac{1}{1-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C$

$S(0)=0 \to C=0 \to S(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\quad \forall y\in(-1;1)$

Thay $y=\frac{x}{4} \to S\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{4+x}{4-x}\quad \forall x\in(-4;4)$

$$\to \frac{1}{2}\ln\frac{4+x}{4-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^{2n+1}.(2n+1)}$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+6}}{4^{2n}(2n+1)}=4x^5\,\frac{1}{2}\ln\frac{4+x}{4-x}=2x^5\ln\frac{4+x}{4-x}\quad \forall x\in(-4;4)$$

Câu 7(1đ). Giải phương trình vi phân $y'+\cot y=\frac{x}{\sin y}$. (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $y'.\sin y+\cos y=x$ (2)

Đặt : $\cos y=t \to y'.\sin y=-t'$

$\to$ (2) trở thành : $-t'+t=x \Leftrightarrow t'-t=-x$ (3)

(3) là ptvp tuyến tính cấp 1 có $p(x)=-1$, $q(x)=-x$

Tích phân tổng quát của pt (3) là:

$$t=e^{-\int(-1)dx}.\left(\int e^{\int(-1)dx}.(-x)dx+C\right)$$

$$=e^{x}\left(\int e^{-x}.(-x)\,dx+C\right)$$

$$=e^{x}\left((-e^{-x}).(-x)-\int e^{-x}dx+C\right)$$

$$=e^{x}.\left(x.e^{-x}+e^{-x}+C\right)$$

$$=x+1+C.e^{x},\ C\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \cos y=x+1+C.e^{x}$

Vậy tích phân tổng quát của pt (1) là: $\cos y=x+1+C.e^{x}$, $C\in\mathbb{R}$.