ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

# Toán Rời Rạc

## Tô màu đỉnh của đồ thị

# Tài liệu tham khảo

- Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2002.

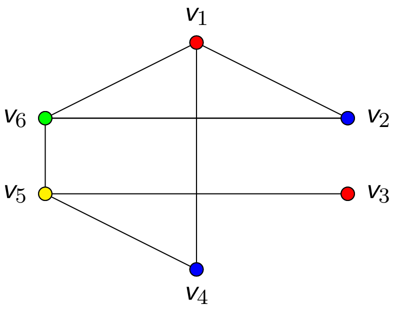
# Nội dung

1. Định nghĩa và ví dụ
2. Thuật toán tham lam tô màu đỉnh
3. Đồ thị hai phần
4. Bài tập

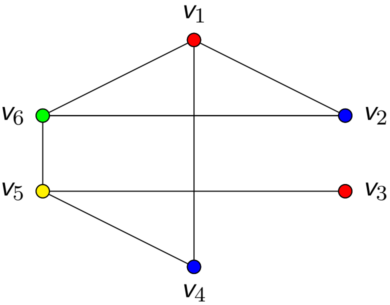
## Ví dụ

Trường BK muốn xếp giờ học cho sáu môn học $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ biết rằng có một vài sinh viên học các môn :

$$v_1 \text{ và } v_2, \quad v_1 \text{ và } v_4, \quad v_3 \text{ và } v_5, \quad v_2 \text{ và } v_6,$$
$$v_4 \text{ và } v_5, \quad v_5 \text{ và } v_6, \quad v_1 \text{ và } v_6.$$



# Xếp lịch học




| Tiết 1 | Tiết 2 | Tiết 3 | Tiết 4 |
|---|---|---|---|
| $v_1$ và $v_3$ | $v_2$ và $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |

# Xếp lịch học

- Ta tìm cách phân hoạch tập đỉnh thành $4$ phần sao cho không phần nào chứa cặp đỉnh kề nhau.
- Một cách hình thức, đây là một hàm

$$c : \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

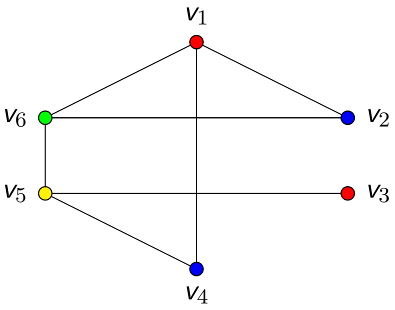
  gán mỗi đỉnh với một giờ học.
- Không mất tổng quát ta dùng các số nguyên dương cho các màu.

## Định nghĩa

Một cách ***tô màu*** đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ là một hàm

$$c : V \longrightarrow \mathbb{N}$$

thỏa mãn tính chất : Nếu $\{x, y\} \in E$ thì $c(x) \neq c(y)$.



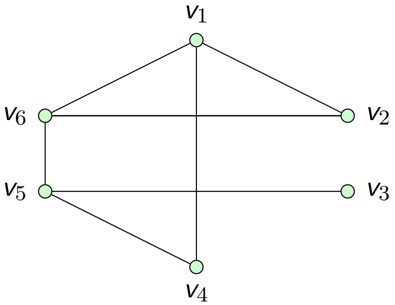
## Định nghĩa

***Sắc số*** của đồ thị $G$, ký hiệu là $\chi(G)$, là số nguyên $k$ nhỏ nhất thỏa mãn có một cách tô màu $G$ dùng $k$ màu.

Nói cách khác, $\chi(G) = k$ nếu và chỉ nếu có một cách tô màu $c$ từ $V$ tới tập $\{1, 2, \ldots, k\}$, và $k$ là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này.

## Ví dụ

Tìm sắc số của đồ thị



# Tìm số màu

Để chứng minh rằng sắc số của một đồ thị là $k$ thì ta phải:

1. tìm một cách tô màu dùng $k$ màu;
2. chứng minh rằng không có cách tô màu nào dùng ít hơn $k$ màu.

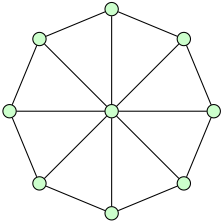
## Bài tập

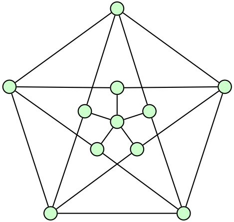
Tìm sắc số của các đồ thị sau:

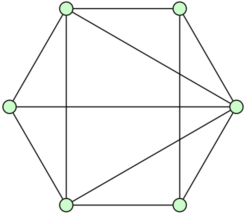
1. đồ thị đầy đủ $K_n$;
2. đồ thị vòng $C_{2r}$;
3. đồ thị vòng $C_{2r+1}$;

## Bài tập

Tìm sắc số của các đồ thị sau:







### Bài tập

Hãy mô tả tất cả các đồ thị $G$ có $\chi(G) = 1$.

# Nội dung

## Bài toán

Cho đồ thị $G$. Hãy tìm $\chi(G)$.

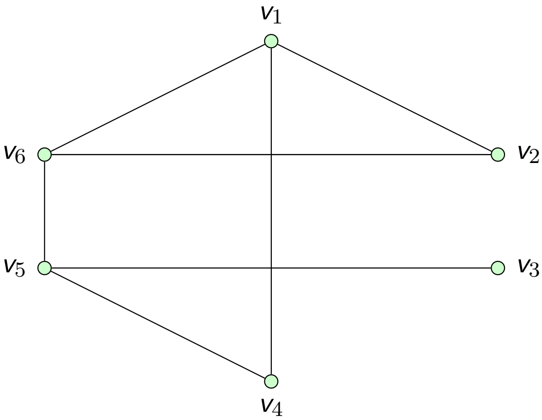
Đây là bài toán khó. Người ta chưa biết thuật toán "nhanh" nào để giải nó, và hầu hết mọi người đều tin rằng không có thuật toán như vậy.

## Thuật toán tham lam

1. Sắp thứ tự các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \cdots, v_n$.
2. `for` $i = 1, 2, \ldots, n$ :
3.     Gán màu hợp lệ nhỏ nhất cho $v_i$.

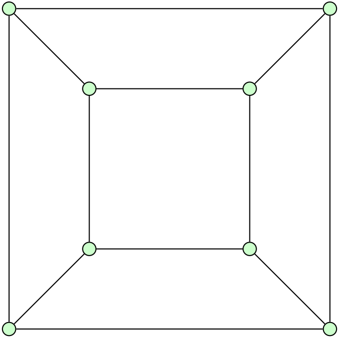
## Bài tập

Dùng thuật toán tham lam để tô màu đồ thị sau:



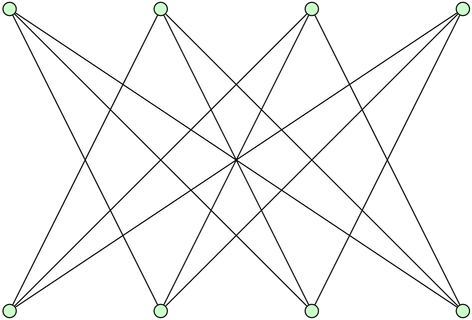
## Bài tập

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



## Bài tập

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



## Mệnh đề

Nếu mọi đỉnh trong $G$ đều có bậc $\leq k$, thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

## Thử chứng minh bằng quy nạp theo $k$

Đặt $P(k) =$ "nếu mọi đỉnh trong $G$ đều có bậc $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu"

Bước cơ sở : $P(0)$ đúng. Tại sao?

Bước quy nạp : Giả sử $P(k)$ đúng để chứng minh $P(k+1)$ !!!

# Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

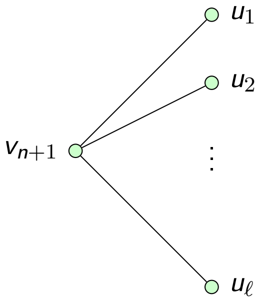
Đặt $P(n)$ = "Đồ thị $G$ với $n$ đỉnh và bậc mọi đỉnh trong $G$ đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì $G$ không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét $G$ là đồ thị bất kỳ với $n+1$ đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
- Xóa đỉnh $v_{n+1}$ khỏi $G$ ta thu được đồ thị $G'$.
- Đồ thị $G'$ cũng có bậc lớn nhất $\leq k$. Tại sao?
- Theo quy nạp, thuật toán tham lam tô màu $G'$ dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

# Chứng minh (tiếp)




$v_{n+1}$ có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh $v_{n+1}$ và các cạnh liên quan vào lại $G'$ để được $G$.
- Đỉnh $v_{n+1}$ có $\leq k$ hàng xóm. Tại sao?
- Vậy tồn tại một màu hợp lệ trong $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ để tô cho $v_{n+1}$.
- Vậy thuật toán tham lam tô màu $G$ dùng không quá $k+1$ màu. ✓

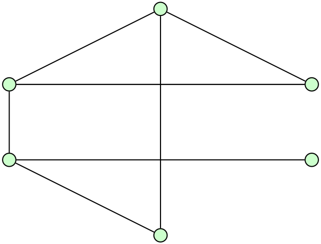
## Bài tập

- Một đồ thị có ***độ rộng*** $k$ nếu các đỉnh có thể sắp xếp

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

  sao cho mỗi đỉnh $v_i$ có cạnh nối với nhiều nhất $k$ đỉnh đứng trước nó.

- Hãy dùng quy nạp để chứng minh rằng mọi đồ thị với độ rộng nhỏ hơn hoặc bằng $k$ đều có thể tô bằng $k+1$ màu.



## Mệnh đề

Cho $G$ là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$. Nếu $G$ liên thông và không chính quy, vậy thì $\chi(G) \leq k$.

### Mệnh đề

Cho $G$ là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$. Nếu $G$ liên thông và không chính quy, vậy thì $\chi(G) \leq k$.

### Ý tưởng chứng minh

Ta tìm một cách sắp thứ tự

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

cho các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu cho $G$ dùng không quá $k$ màu.

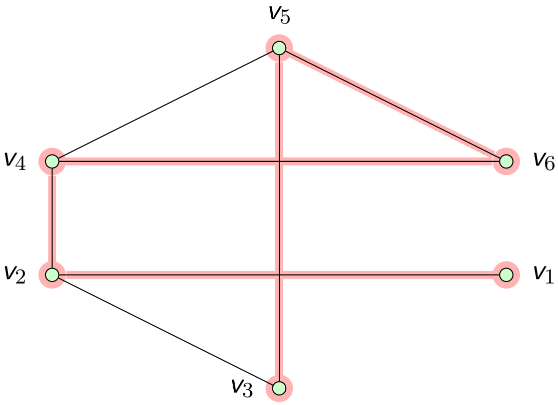
## Sắp thứ tự các đỉnh

- Chọn một đỉnh trong $G$ có bậc $\leq k-1$. Gán nó là $v_n$.
- Liệt kê cho các hàng xóm của $v_n$ theo thứ tự:

$$v_{n-1}, v_{n-2}, \cdots, v_{n-r}.$$

- Liệt kê các hàng xóm của $v_{n-1}$ (trừ $v_n$). Có $\leq k-1$ đỉnh.
- Liệt kê các hàng xóm của $v_{n-2}$ chưa được liệt kê.
  Có $\leq k-1$ đỉnh.
- Và cứ thế đến khi mọi đỉnh của $G$ được liệt kê. (do $G$ liên thông)

## Ví dụ



## Khẳng định

Với cách sắp xếp thứ tự đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ như trên, mỗi đỉnh $v_i$ chỉ nối với nhiều nhất $k-1$ đỉnh đứng trước nó.

Có nghĩa rằng đồ thị này có độ rộng $k-1$.

### Định lý

Nếu $G$ là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$, thì

1. $\chi(G) \leq k+1$;
2. nếu $G$ liên thông và không chính quy, thì $\chi(G) \leq k$.

# Nội dung

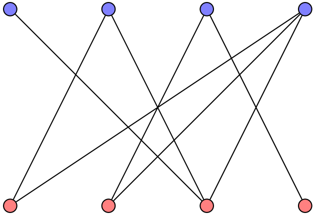
1. Định nghĩa và ví dụ
2. Thuật toán tham lam tô màu đỉnh
3. **Đồ thị hai phần**
4. Bài tập

## Định nghĩa

Đồ thị $G$ là ***đồ thị hai phần*** nếu $\chi(G) \leq 2$.

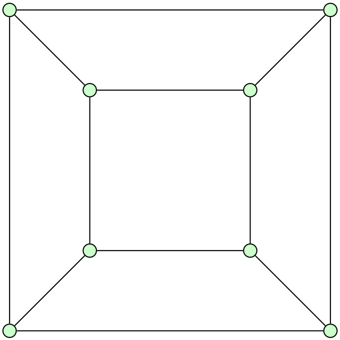
Khi đó tập đỉnh $V$ của $G$ được phân hoạch thành hai phần

$$V = V_{\text{đỏ}} \cup V_{\text{xanh}}$$



## Ví dụ

Đồ thị sau có phải đồ thị hai phần không?

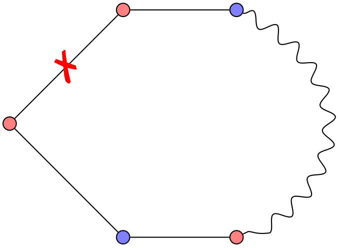


### Định lý

$G$ là đồ thị hai phần nếu và chỉ nếu nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

# Chứng minh

Nếu $G$ có chu trình độ dài lẻ



Mâu thuẫn với tính chất $\chi(G) \leq 2$.

# Chứng minh (tiếp)

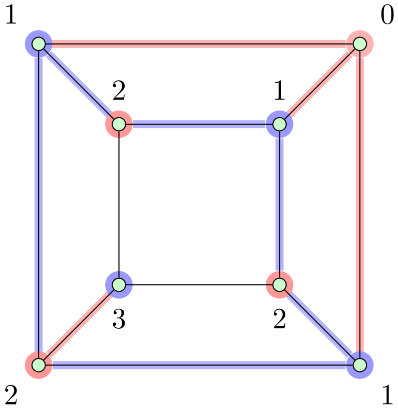
Ngược lại, giả sử $G$ không có chu trình độ dài lẻ. Ta xây dựng thứ tự đỉnh để thuật toán tham lam tô $G$ bằng hai màu.

## Sắp thứ tự các đỉnh

- Chọn một đỉnh bất kỳ gọi là $v_1$; ta nói rằng $v_1$ có mức $0$.
- Liệt kê các hàng xóm của $v_1$, gọi là $v_2, v_3, \ldots, v_r$; các đỉnh này có mức là $1$.
- Liệt kê các hàng xóm của các đỉnh ở mức $1$ (trừ $v_1$); các đỉnh này có mức là $2$.
- Tổng quát, các đỉnh có mức $\ell$ là hàng xóm của mức $\ell - 1$, trừ những đỉnh đã liệt kê ở mức $\ell - 2$.
- Khi không còn đỉnh nào được liệt kê vào, ta đã sắp thứ tự cho cho các đỉnh trong một thành phần liên thông $G_0$ của $G$. Tiếp tục như vậy với thành phần liên thông tiếp theo.

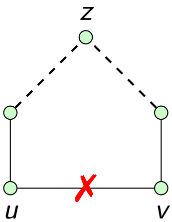
## Ví dụ

Đồ thị dưới đây có thể tô bằng hai màu: các đỉnh có mức chẵn được tô màu đỏ, các đỉnh có mức lẻ được tô màu xanh.



# Chứng minh (tiếp)

- Các đỉnh mức $\ell$ chỉ nối với đỉnh mức $\ell - 1$ hoặc $\ell + 1$.
- Các đỉnh mức $\ell$ không nối với nhau; ngược lại đồ thị sẽ có chu trình độ dài lẻ.

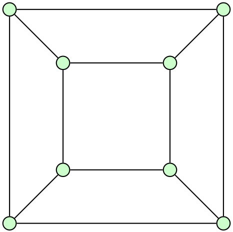



- Với cách sắp thứ tự các đỉnh như vậy, thuật toán tô màu sẽ chỉ dùng hai màu: các đỉnh có mức chẵn được tô màu đỏ, các đỉnh có mức lẻ được tô màu xanh.

# Nội dung

## Bài tập

Tìm $3$ cách đánh số thứ tự các đỉnh của đồ thị lập phương dưới đây để thuật toán tham lam dùng $2, 3,$ và $4$ màu.



## Bài tập

Chứng minh rằng với mọi đồ thị $G$ ta luôn có cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu $G$ dùng đúng $\chi(G)$ màu. [Gợi ý: dùng một cách tô màu dùng $\chi(G)$ màu để xác định thứ tự đỉnh cho thuật toán tham lam.]

## Bài tập

Có sáu trạm phát sóng radio $A, B, C, D, E, F$ với khoảng cách giữa các trạm (tính theo dặm) được cho bởi bảng sau

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | - | 85 | 175 | 100 | 50 | 100 |
| $B$ | 85 | - | 125 | 175 | 100 | 130 |
| $C$ | 175 | 125 | - | 100 | 200 | 250 |
| $D$ | 100 | 175 | 100 | - | 210 | 220 |
| $E$ | 50 | 100 | 200 | 210 | - | 100 |
| $F$ | 100 | 130 | 250 | 220 | 100 | - |

Giả sử những trạm phát ở cách nhau *ít hơn* 150 dặm *phải* phát ở tần số khác nhau. Hãy tìm cách gán tần số cho mỗi trạm để số tần số là ít nhất.

## Bài tập

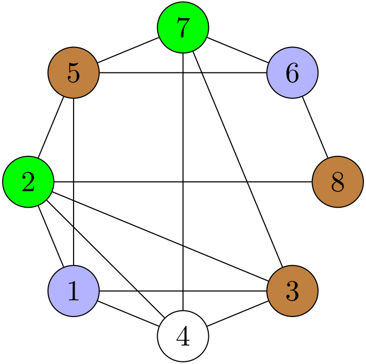
Viện CNTT&TT lên lịch bảo vệ khóa luận cho sinh viên K56. Các giáo sư $A, B, \ldots, J$ sẽ là thành viên của $8$ hội đồng bảo vệ dưới đây:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hội đồng 1 : | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | 5 : | $A$ | $H$ | $J$ |
| 2 : | $A$ | $C$ | $D$ | $E$ | 6 : | $H$ | $I$ | $J$ |
| 3 : | $B$ | $D$ | $F$ | $G$ | 7 : | $G$ | $H$ | $J$ |
| 4 : | $C$ | $D$ | $F$ | $G$ | 8 : | $E$ | $I$ | |

Thời gian bảo vệ của mỗi hội đồng là một ngày. Hai hội đồng có thể bảo vệ cùng ngày nếu **không có chung thành viên**. Hãy tìm số ngày **ít nhất** để tất cả các hội đồng có thể bảo vệ xong. Giải thích câu trả lời của bạn.

# Số hội đồng bảo vệ

- Xét đồ thị với tập đỉnh là các hội đồng, giữa hai dỉnh có cạnh nối nếu hai hội đồng có chung thành viên.
- Bài toán tương đương với bài toán tìm số màu ít nhất để tô đồ thị này.
- Đồ thị này có chứa clique $\{1, 2, 3, 4\}$ có kích thước $4$ nên số ngày bằng $4$ là ít nhất có thể.



### Bài tập

Ký hiệu $e_i(G)$ là số đỉnh của đồ thị $G$ có bậc lớn hơn $i$. Dùng thuật toán tham lam để chỉ ra rằng nếu tồn tại $i$ để $e_i(G) \leq i + 1$ thì $\chi(G) \leq i + 1$.

## Bài tập

Đồ thị $M_r$ $(r \geq 2)$ đạt được từ đồ thị chu trình $C_{2r}$ bằng cách thêm các cạnh nối giữa mỗi cặp đỉnh đối nhau. Chứng minh rằng

1. $M_r$ là đồ thị hai phần khi $r$ là số lẻ.
2. $\chi(M_r) = 3$ khi $r$ chẵn và $r \neq 2$.
3. $\chi(M_2) = 4$.