CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

§ 1. ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC

1.1. Tiếp tuyến của một đường tại một điểm

1.1.1. Điểm chính quy, điểm kì dị

- Cho $f(x,y)=0$ có đồ thị L. Điểm $M_{\mathrm{O}}\,(x_o,y_o)\in L$ được gọi là:
+ Điểm chính quy nếu: $f'_x(x_o,y_o)^2+f'_y(x_o,y_o)^2\neq 0$
+ Điểm kì dị nếu:

$$\begin{cases} f'_x(x_o,y_o)=0 \\ f'_y(x_o,y_o)=0 \end{cases}$$

- Cho (L) dạng tham số: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ và $M_{\mathrm{O}}\ (x_o(t_o),y_o(t_o))$ là điểm chính quy nếu tồn tại $\begin{cases} x'_t(t_o) \\ y'_t(t_o) \end{cases}$

1.1.2. Các công thức

* Tiếp tuyến tại điểm $M_{\mathrm{O}}\,(x_o,y_o)$ là điểm chính quy
$(d_1): f'_x(x-x_o)+f'_y(y-y_o)=0$

$(d_2): \dfrac{x-x(t_o)}{x'_t(t_o)}=\dfrac{y-y(t_o)}{y'_t(t_o)}$

(d_3) : Nếu $y=f(x)$ thì $y=y_o+f'(x_o).(x-x_o)$

* Pháp tuyến tại $M_{\mathrm{O}}\,(x_o,y_o)$ chính quy
$(n_1): \dfrac{x-x_o}{f'_x(M_{\mathrm{O}})}=\dfrac{y-yo}{f'_y(M_{\mathrm{O}})}$

$(n_2): x'(t_o)(x-x(t_o))+y'(t_o)(y-y(t_o))=0$

1.2. Độ cong của đường cong

1.2.1. Khái niệm

Cho L là:
- Đường cong không tự giao nhau (Jordan)
- Có tiếp tuyến tại mọi điểm
- Chọn một chiều chạy trên L làm chiều dương
- Trên tiếp tuyến của L chọn một hướng tương ứng hướng dương của $L \Rightarrow$ " tiếp tuyến dương"

1.2.2. Công thức tính

1. Dạng: $y=f(x)$ thì: $C(M)=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

2. Dạng tham số: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ thì: $C(M)=\dfrac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

3. Dạng tọa độ cực $r = r(\varphi)$

   Có: $\begin{cases} x = r(\varphi).\cos\varphi \\ y = r(\varphi).\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r'(\varphi).\cos\varphi - r(\varphi).\sin\varphi \\ y' = r(\varphi).\sin\varphi + r'(\varphi).\cos\varphi \end{cases}$

   Khi đó:

   $C(M) = \dfrac{|r^2 + 2r'^2 - r.r''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$

Bài tập: Tính độ cong của các hàm sau:

Bài tập 1.1 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ *tại một điểm bất kì.*

Bài tập 1.2 $y = -x^3$ *tại* $x = \dfrac{1}{2}$

Bài tập 1.3 $r = a.e^{ba}$ $(a, b > 0)$ *tại điểm bất kì.*

Bài tập 1.4 (2015-2) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$ *tại* $M\,(0, 1)$

Giải

1. $\begin{cases} x' = a(t - \cos t) \\ y' = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = a\sin t \\ y' = a\cos t \end{cases}$

   $\Rightarrow C = \dfrac{|x'.y'' - x''.y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\cos t - 1|}{2\sqrt{2}a(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{|4a.\sin\dfrac{t}{2}|}$

   Xác định tại những điểm ứng với $t \neq 0$

2. $y = -x^3$ có $y' = -3x^2$; $y" = -6x$

   $C(M) = \dfrac{\left|y''\left(\frac{1}{2}\right)\right|^{\frac{3}{2}}}{\left[1 + y'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|-3|}{\left[1 + \dfrac{9}{16}\right]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{192}{125}$

3. $r' = a.b.e^{bq}; r'' = ab^2.e^{bq} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\sqrt{1 + b^2}.r}$

4. $\begin{cases} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 6t \end{cases} \Rightarrow M\,(0, 1) \Leftrightarrow t_o = 1$

   $C = \dfrac{|x'.y'' - y'.x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|2.6 - 3.2|}{(2^2 + 3^2)^t frac32} = \dfrac{6}{\sqrt{13^3}}$

1.3. Hình bao của họ đường cong phụ thuộc tham số

1.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1 *Cho đường cong L phụ thuộc một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong họ (L) đều tiếp xúc và đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc E đều tồn tại 1 đường cong họ (L) tiếp xúc (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).*

1.3.2. Quy tắc tìm

Định lý 1.1 *Cho họ đường cong* $F(x, y, c) = 0$ *với c là tham số. Nếu họ đường cong này không có điểm kì dị thì đường bao được xác định bằng hệ sau:*

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Chú ý 1.1 *Nếu các đường thẳng $F(x,y,c)=0$ có điểm kì dị thì hệ bao gồm phương trình (E) - hình bao và quỹ tích của các điểm kì dị.*

Ví dụ 1.1 $(L): \quad (y-c)^2=(x-c)^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y,c)=(x-c)^3-(y-c)^2=0 \\ F'_c(x,y,c)=3(x-c)^2-2(y-c)=0 \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (y-c)=\dfrac{3}{2}(x-c)^2$ *thay vào (1) ta có:*

$$(x-c)^3-\frac{9}{4}(x-c)^4=0 \Leftrightarrow (x-c)^3.\left[1-\frac{9}{4}(x-c)\right]=0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c \\ y=c \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x=c+\dfrac{9}{4} \\ y=c+\dfrac{8}{27} \end{cases}$

Mà $y=x$ *là quỹ tích của các điểm kỳ dị của họ* (L).

Vậy phương trình hình bao là: $x-y=\dfrac{4}{27}$.

Ví dụ 1.2 $(L): \quad c.x^2+c^2.y=1$ *(Nhận xét:* $c\neq 0$*)*

$\begin{cases} F(x,y,c)=c.x^2+c^2.y-1=0 \\ F'_c(x,y,c)=x^2+2c.y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=-2cy$

Xét $\begin{cases} F'_x(x,y,c)=0 \\ F'_y(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2cx &=0 \\ c^2 &=0 \end{cases} \Rightarrow c=x=0$ *là những điểm kì dị nhưng* $x=c=0\notin(L) \Rightarrow (L)$ *không chứa điểm kì dị.*

Giải hệ $\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &=\dfrac{2}{c} \\ y &=\dfrac{-1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{-x^2}{4}$

Vậy đường bao là $y=\dfrac{-x^2}{4}$ *trừ điểm* $O\,(0,0)$.

Bài tập 1.5 (20152 - 1) *Tìm hình bao của họ đường cong*

$$(L_c) \quad y=\frac{x}{c}+\frac{1}{c}+c^2 \quad \textit{(tham số c)}$$

Bài tập 1.6 (20162 - 1) *Tìm hình bao của họ đường cong*

$$x^2+y^2-x\cos\alpha-y\sin\alpha-2=0$$

Bài tập 1.7 (20142 - 3) *Tìm hình bao của họ đường cong*

$$2x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$$

Bài tập 1.8 (20142 - 5) *Tìm tập các điểm kì dị của họ* (L_c)

$$(x+c)^2=(y-c)^3$$

Bài tập 1.9 *Xét họ quỹ đạo của viên đạn bắn từ một khẩu pháo với vận tốc* v_o*, phụ thuộc góc bắn* α*. Hãy tìm phương trình hình bao của họ quỹ đạo của viên đạn.*

Giải

5. $(L_c): \quad y=\dfrac{x}{c}+\dfrac{1}{c}+c^2 \quad (c\neq 0)$

   $F(x,y,c)=\dfrac{x}{c}-y+\dfrac{1}{c}+c^2$

   Xét hệ $\begin{cases} F'_x=\dfrac{1}{c}\neq 0 \\ F'_y=-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Không có điểm kì dị

$$\begin{cases} F'_c(x,y,c)=0 \\ F(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{c^2}+2c=0 \\ \dfrac{x}{c}-y+\dfrac{1}{c}+c^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2c^3 \\ y=3c^2+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}-\sqrt{\dfrac{y-1}{3}}=0$ là phương trình đường bao.

6. $x^2+y^2-x\cos\alpha-y\sin\alpha-2=0$

$F'_\alpha(a,y,\alpha)=x.\sin\alpha-y\cos\alpha$

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \quad (1) \\ F'_\alpha(a,y,\alpha)=0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2)\Rightarrow x=y\tan\alpha \\ (1)\Rightarrow x^2+x^2\tan^2\alpha-x\cos\alpha-x\tan\alpha sin\alpha-2=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2\left(1+\tan\alpha\right)-x\cos\alpha-x\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}-2=0$

$\Leftrightarrow x^2\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{x}{\cos\alpha}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+1\right)\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha \quad \text{và} \quad y=-\sin\alpha \\ x=2\cos\alpha \quad \text{và} \quad y=2\sin\alpha \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right.$ là phương trình hình bao.

$$\begin{cases} F'_x(a,y,\alpha)=0 \\ F'_y(a,y,\alpha)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\cos\alpha=0 \\ 2y-\sin\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha \\ y=\dfrac{1}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

hay $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ là tập các điểm kì dị.

7. Ta có $\begin{cases} F(x,y,\alpha)=2x\cos\alpha+y\sin\alpha-1 \quad (1) \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=-2x\sin\alpha+y\cos\alpha \quad (2) \end{cases}$

Xét $\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2) \quad y=2x\tan\alpha \\ (1)\Rightarrow 2x.\cos\alpha+2x\tan\alpha\sin\alpha-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x\cos^2\alpha+2x\sin^2\alpha-\cos\alpha=0$

$\Leftrightarrow 2x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow (2x)^2+y^2=1$ là phương trình hình bao.

8. $F(x,y,c)=(x+c)^2-(y-c)^3$

$\begin{cases} F'_x(x,y,c)=0 \\ F'_y(x,y,c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+c\right)=0 \\ -3\left(x+c\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-c \\ y=c \end{cases} \Rightarrow y=-x$ là quỹ tích các điểm kì dị.

9. $\begin{cases} x=v_o.t.\cos\alpha \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_o.t.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow y=x.\tan\alpha-\dfrac{g}{2.v_o^2.\cos^2\alpha}.x^2$

Đặt $c=\tan\alpha \Rightarrow y=c.x-\dfrac{g}{2.v_o^2}\left(1+c^2\right)x^2$

Lấy đạo hàm hai vế theo c suy ra $c=\dfrac{v_o^2}{gx}$

Thay vào phương trình: $y=\dfrac{v_o^2}{2g}-\dfrac{g}{2v_o^2}x^2$. Đây là phương trình bao quỹ đạo của viên đạn.

§ 2. ỨNG DỤNG TRONG KHÔNG GIAN

2.1. Hàm vectơ

Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Ánh xạ

$$\begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

được gọi là một hàm vectơ với biến t

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Giới hạn của hàm vectơ
$\overrightarrow{\mathbf{a}}$ được gọi là giới hạn của $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)$ khi $t \to t_o$ nếu

$$\lim_{t \to t_o} \left| \overrightarrow{\mathbf{r}}(t) - \overrightarrow{\mathbf{a}} \right| = 0$$

kí hiệu $\lim\limits_{t \to t_o} \overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{a}}$

Đạo hàm của hàm vectơ
Kí hiệu $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)$ hay $\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)}{dt}$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) - \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t_o)}{t - t_o} = \left(x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o)\right)$$

Ý nghĩa: $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t_o)$ là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến đường tốc đồ của hàm $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ tại $t = t_o$

Nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_o thì $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)$ khả vi tại t_o

Ví dụ 2.1 *Cho* $\overrightarrow{p} = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ *và* $\overrightarrow{q} = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$. *Ta có*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{p}.\overrightarrow{q} & = & x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 \\ \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q} & = & \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \end{array}$$

Chứng minh:
Ta có:

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{p}.\overrightarrow{q}\right] = \overrightarrow{p}.\frac{dp}{dt} + \overrightarrow{q}.\frac{dq}{dt} \qquad \text{và} \qquad \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q}\right] = \overrightarrow{p} \wedge \frac{dq}{dt} + \frac{dp}{dt} \wedge \overrightarrow{p}$$

2.2. Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

Cho đường cong : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ và $M_O\left(x_0, y_0, z_0\right)$ là điểm chính quy

1. Phương trình tiếp tuyến tại M:
   (d): $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$
2. Pháp diện tại M là mặt phẳng vuông góc với tiếp tuyến d tại M_0 chứa mọi pháp tuyến của L tại M_0
   (P) $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$

3. Độ cong:

$$C = \frac{\left(\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{[(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

2.3. Pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong S: $f(x, y, z) = 0$ tại $M(x_0; y_0; z_0)$
Mặt phẳng tiếp diện: chứa mọi tiếp tuyến của S tại M_0
Pháp tuyến: đường thẳng qua M_0 và cùng hướng $\overrightarrow{n} = (f'_x, f'_y, f'_z)$
Phương trình pháp tuyến tại M
$(d') : \dfrac{x - x_0}{f'_x(M)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(M)} = \dfrac{z - z_0}{f'_z(M)}$
Phương trình tiếp diện tại M
$(P') : f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) + f'_z(M)(z - z_0) = 0$

Chú ý 2.1 *Nếu mặt S: $z = z(x, y)$ thì mặt phẳng pháp diện có phương trình là:*

$$f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) = z - z_0$$

2.4. Tiếp tuyến và pháp diện cho đường cong là giao của hai mặt phẳng

Cho L; $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ $\overrightarrow{n_f}$: pháp tuyến của mặt phẳng pháp diện của f và $\overrightarrow{n_g}$: pháp tuyến của mặt phẳng pháp diện của g thì $\overrightarrow{n_f} \wedge \overrightarrow{n_g}$: vectơ chỉ phương của L

PTTQ: $\begin{cases} f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) + f'_z(M)(z - z_0) = 0 \\ g'_x(M)(x - x_0) + g'_y(M)(y - y_0) + g'_z(M)(z - z_0) = 0 \end{cases}$

PTCT : $\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(M) & f'_z(M) \\ g'_y(M) & g'_z(M) \end{vmatrix}} = \dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f'_z(M) & f'_x(M) \\ g'_z(M) & g'_x(M) \end{vmatrix}} = \dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ g'_x(M) & g'_y(M) \end{vmatrix}}$

Bài tập 2.1 (20152-1) *Viết phương trình tiếp diện của mặt cong* $(S) : \quad x^2 + 2y^3 - yz = 0$ *tại* $M(1, 1, 3)$

Bài tập 2.2 (20152-3) *Tìm pháp diện của đường cong* $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ *tại* $A(1; 1; -1)$

Bài tập 2.3 (20152-3) *Tìm tiếp tuyến của đường cong* $(L) : \begin{cases} x^2 + y + z^2 = 3 \\ x + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$ *tại* $M(1, 1, 1)$

Bài tập 2.4 (20124-1) *Tìm tiếp tuyến và pháp diện của đường cong* (L)

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \\ z = 2\sin t + 3 \end{cases} \qquad tại \quad t = \pi$$

Bài tập 2.5 (20142-3) *Tính độ cong của* $(L) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ *tại* $t = 0$