LỜI GIẢI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20182

Câu 1.

- **(0,5 điểm)**

Ta có: $\begin{cases} x'_t = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y'_t = \sin 2t + 2t\cos 2t \\ z'_t = 3 \end{cases}$

Tại $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ có: $\begin{cases} x(t_0) = -\dfrac{\pi}{2} \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x'(t_0) = -1 \\ y'(t_0) = -\pi \\ z'(t_0) = 3 \end{cases}$

- **(0,5 điểm)**

Phương trình tiếp tuyến: $\dfrac{x+\dfrac{\pi}{2}}{-1} = \dfrac{y+\pi}{-\pi} = \dfrac{z+\dfrac{3\pi}{2}}{3}$

Phương trình pháp tuyến: $-\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \pi y + 3\left(z - \dfrac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -x - \pi y + 3z - 5\pi = 0$

Câu 2.

- **(1 điểm)**

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^4)^4} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4}.4x^3dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{x^{-1}}{(1+x^4)^4}d(x^4) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(1+t)^4}dt \\
&= \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4};\frac{13}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}.\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{1}{4}.\frac{\frac{9}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3!} \\
&= \frac{15}{512}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{15\sqrt{2}}{1024}\pi
\end{aligned}$$

Câu 3.

- **(0,5 điểm)**

  Ta có: $\vec{F} = (2xy - z^2)\vec{i} + (3x^2 + 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k} \Rightarrow rot\vec{F} = (-4y; 2z; 4x)$

- **(0,5 điểm)**
  Những điểm không phải điểm xoáy thì $rot\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$
  Vậy $O(0;0;0)$ không phải điểm xoáy của trường vecto trên.

Câu 4.

- **(0,5 điểm)**

  $I = \iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}.\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$ với miền $D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

- **(0,5 điểm)**

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (1 + x^2 + y^2) dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 (1 + x^2 + y^2) dy \\
&= \int_0^1 \Big(1 + x^2 + \frac{1}{3} dx \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Câu 5.

- **(1 điểm)**
  Khối lượng đường cong vật chất là:

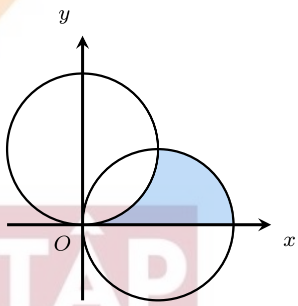
$$\begin{aligned}
M &= \int_C \rho(x,y)ds = \int_C (x+y)ds \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\frac{t}{2}}\cos t + e^{\frac{t}{2}}\sin t\right).\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\frac{t}{2}}dt \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t(\sin t + \cos t)dt \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}e^t \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}.e^{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Câu 6.

- **(0.5 điểm)**

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $|J| = r$miền $D \to D'$ $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin\varphi \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$

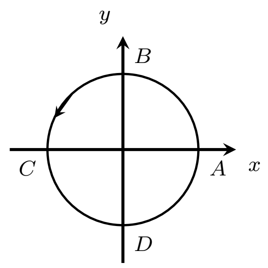
- **(0,5 điểm)**



$$\begin{aligned}
I = \iint_D (y^2 - x^2)dxdy &= \iint_{D'} (r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi).rd\varphi dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{2\cos\varphi} r^3(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi).4.(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi)\, d\varphi \\
&= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Câu 7.

- **(0.5 điểm)**



Đặt: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t \\ dy = \cos t \end{cases}$

Vì vậy:

$$I = \oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CD}} + \int_{\widehat{DA}}$$

- **(0.5 điểm)**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t - \cos t} dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{-\sin t + \cos t} dt$$
$$= 0$$

Câu 8.

- **(0.5 điểm)**

Ta có: $V : \begin{cases} (x+2y)^2 + 4z^2 = 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}\sqrt{1 - (x+2y)^2} \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$

Ta có:

$$I = \iiint_V z dx dy dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{1-(x+2y)^2}}{2}} z dz$$

- **(0.5 điểm)**

$$I = \frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} 1 - (x+2y)^2 dy$$
$$= \frac{1}{64}$$

Câu 9.

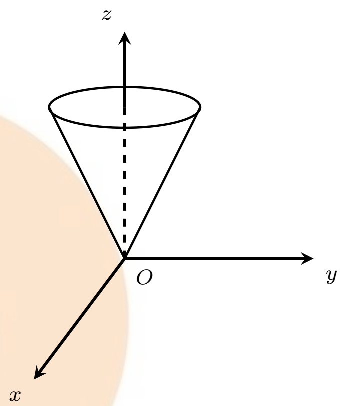
- **(0.5 điểm)**

  Dựng mặt S' : $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ hướng theo chiều dương trục Oz

  Ta cũng có:

  $$\iint_{S \cup S'} = \iint_S + \iint_{S'}$$

  Áp dụng công thức Osbogrodsky ta có:

  $$\iint_{S \cup S'} = \iiint_V 2dxdydz \text{ với } V : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

  $$\iint_{S \cup S'} = 2V = \frac{2\pi}{3}$$

- **(0.5 điểm)**

  Ta có:

  $$\iint_{S'} = \iint_D dxdy = \pi \text{ với } D : x^2 + y^2 \leq 1$$

  $$\Rightarrow \iint_S = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

Câu 10.

- **(0.5 điểm)**

  Áp dụng công thức Stokes:

  $$I = \iint_S 2(y - z)dydz + 2(z - x)dzdx + 2(x - y)dxdy$$

  Trong đó S là phần mặt cầu phía trên hướng theo trục Oz
  Ta có $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

  $$\widehat{(\vec{n}, \vec{Oz})} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

- **(0.5 điểm)**

$$\Rightarrow |\vec{n}| = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (x(y-z) + y(z-x) + z(x-y))dS = 0$$