GIẢI TÍCH I
BÀI 5

§10. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG (TIẾP THEO)

Đặt vấn đề

1° "Cấu trục thế giới hoàn hảo nhất, được sáng tạo bởi người thông minh nhất. Không có gì xảy ra trên thế giới mà không có sự tham gia của lí thuyết cực đại, cực tiểu" – Euler

2° Tia sáng qua gương: Heron, cực tiểu đường đi, thế kỉ 1 trước công nguyên

3° Tia sáng qua nước, Fermat 1657, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} = const$, cực tiểu thời gian

2. Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lí. $f(x)$ có $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, ..., n$) liên tục tại x_0 và có $f^{(n+1)}(x)$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

c ở giữa x_0 và $x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 \le \theta \le 1$.

Khi $x_0 = 0$ ta có công thức Maclaurin.

Ví dụ 1. Viết công thức Taylor $f(x) = x^4$ tại $x_0 = 1$.

Ví dụ 2. Viết công thức Maclaurin $f(x) = xe^x$ đến x^2.

Công thức Maclaurin của một số hàm

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, c giữa 0 và x;

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dfrac{\sin\left(c + (2n+2)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$,
c giữa 0 và x;

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{\cos\left(c + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;
c giữa 0 và x;

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$,
ở đó $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$, c giữa 0 và x;

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$,
c giữa 0 và x.

Ví dụ 3. Tính gần đúng sin40° với sai số $\delta < 0,0001$.

- $\sin 40^\circ = \sin\dfrac{2\pi}{9}$
- $\dfrac{\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)^7}{7!} < \dfrac{0,7^7}{7!} < 0,0000163$
- $\sin 40^\circ \approx \dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)^5 \approx 0,6428$.

Ví dụ 4. Tính gần đúng e với sai số $\delta < 0,00001$.

Ví dụ 5 . a) Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax^4 - \sin^2 x}{x^2 \ln(1 + x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

khả vi tại $x = 0$. $\left(a = -\dfrac{1}{3}\right)$

b) Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax^4 - \ln(1 + x^2)}{x^3 (e^{2x} - 1)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

khả vi tại $x = 0$. $\left(a = -\dfrac{1}{2}\right)$

3. Quy tắc L'Hospital, ứng dụng khai triển hữu hạn

a) Quy tắc L'Hospital

Định lí L'Hospital 1. $f(x)$, $g(x)$ khả vi $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) \neq 0$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

Định lí L'Hospital 2. $f(x)$, $g(x)$ khả vi $U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

- **Chú ý.**
  – Quy tắc L'Hospital vẫn đúng khi thay $x_0 = \infty$
  – Có thể áp dụng nhiều lần quy tắc L'Hospital
  – Quy tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \cos x}{3x}$

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{2009}}$

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$

Ví dụ 5. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

Ví dụ 6. $\lim\limits_{x \to 0^+} (|\ln x|)^{2x}$

Ví dụ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ **Ví dụ 8.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$

Ví dụ 9 . $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\sin x}$ **(1)**

Ví dụ 10 . a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cot x}$ **(1)** **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}$ **(1)**

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$ **(1)**

Ví dụ 11 . $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$ **(**$e^{-\frac{2}{\pi}}$**)**

Ví dụ 12 .

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$ **(**$\sqrt{e}$**)** **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\sin^2 x)^{\cot^2 x}$ **(**$e^{-\frac{3}{2}}$**)**

Ví dụ 13 .

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin x-\sin\sqrt{1+x^2}\right)$ **(0)** **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x-1}-\cos\sqrt{x+1}\right)$ **(0)**

Ví dụ 14 .

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ **(**$-\dfrac{1}{12}$**)** **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ **(**$e^{-\frac{1}{2}}$**)**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1-2t)dt}{x\sin^3 x}$ **(–1)** **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\dfrac{1}{2-x}\right]$ **(**$\dfrac{1}{2}$**)**

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\dfrac{1}{x-1}\right]$ **(**$\dfrac{1}{2}$**)**

Ví dụ 15 . a) CMR: Bất phương trình $x<\int_1^x\ln\left(3-\dfrac{1}{t}\right)dt$ có nghiệm $x>1$.

b) CMR: Bất phương trình $x<\int_2^x\ln\left(3-\dfrac{2}{t}\right)dt$ có nghiệm $x>2$.

4. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa.

$f(x)$ tăng (đồng biến) trên $[a\,;b]\Leftrightarrow\forall\,x_1,x_2\in[a\,;b],\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

$f(x)$ giảm (nghịch biến) trên $[a\,;b]\Leftrightarrow\forall\,x_1,x_2\in[a\,;b],\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ đơn điệu trong $[a\,;\,b]\Leftrightarrow$ trên đoạn này hàm số chỉ tăng (giảm, không tăng, không giảm)

Định lí 1. $f(x)$ liên tục trong $[a\,;b]$, khả vi trong $(a\,;b)$

Nếu $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a\,;\,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$)

Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) trong $(a\,;\,b)$, có ít nhất một điểm x để $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\Rightarrow f(b) > f(a)$ ($f(b) < f(a)$)

Hệ quả. 1) $f(a) \leq g(a)$, $f'(x) \leq g'(x)$, $x \in (a\,;\,b) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, $x \in [a\,;\,b]$

2) $f(a) < g(a)$, $f'(x) < g'(x)$, $x \in (a\,;\,b) \Rightarrow f(x) < g(x)$, $x \in [a\,;\,b]$

Ví dụ 1 . a) $x \geq y > 0$. CMR $\operatorname{arccot} x^4 - \operatorname{arccot} y^4 \geq \ln\dfrac{y^2}{x^2}$

b) $x \geq y > 0$. CMR $\arctan x^4 - \arctan y^4 \leq \ln\dfrac{x^2}{y^2}$

Ví dụ 2 . a) CMR: $\forall x > 0$ có $3\arctan x + \arctan(x+2) < 4\arctan(x+1)$

b) CMR: $\forall x > 0$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x+2) > 3\operatorname{arccot}(x+1)$

5. Bất đẳng thức hàm lồi

Định nghĩa. $f(x)$ xác định trên $[a\,;\,b]$, $f(x)$ lồi trong $[a\,;\,b] \Leftrightarrow \forall\, t \in [0\,;\,1]$ ta có

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b)$$

Nếu dấu "≤" thì ta có $f(x)$ lõm trong $[a\,;\,b]$

Định lí. Nếu $f''(x) > 0$ trong khoảng $I \Rightarrow f(x)$ lồi trong $[a\,;\,b]$, $\forall a, b \in I$, $a < b$.

Nếu $f''(x) < 0$ trong khoảng $I \Rightarrow f(x)$ lõm trong $[a\,;\,b]$, $\forall a, b \in I$, $a < b$.

Ví dụ 1 . a) CMR: $\forall x$ có $3\arctan x + \arctan(x+2) < 4\arctan(x+1)$

b) CMR: $\forall x$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x+2) > 3\operatorname{arccot}(x+1)$

6. Cực trị

Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $(a\,;\,b)$, đạt cực đại tại $x_0 \in (a\,;\,b) \Leftrightarrow \exists U_{\varepsilon_0}(x_0)$ để có $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$

tương tự thì $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0

Định lí. $f(x)$ liên tục trong $[a\,;\,b]$, khả vi trong $(a\,;\,b)$ (có thể trừ ra hữu hạn điểm). Khi x biến thiên qua c, $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – thì $f(x)$ đạt cực đại tại $x = c$.

Tương tự khi $f'(x)$ đổi dấu ngược lại thì ta có $f(x)$ đạt giá trị cực tiểu tại $x = c$.

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x biến thiên qua c thì không có cực trị tại $x = c$.

Ví dụ 1. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$

Định lí 2. $f^{(n)}(x)$ liên tục trên $U_{\varepsilon_0}(c)$ và có $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Nếu n chẵn, đạt cực tiểu tại $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) > 0$

đạt cực đại tại $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) < 0$

Nếu n lẻ thì không đạt cực trị tại $x = c$.

Ví dụ 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 450m^2 được rào lại để thỏ không vào phá vườn. Biết cạnh của mảnh vườn là một bức tường. Hỏi kích thước chiều dài cần rào ngắn nhất là bao nhiêu?

Ví dụ 3. Một kg khoai tây cửa hàng nhập vào có giá 70 cent, người bán hàng có thể bán được 500kg khoai tây với giá 1,5đôla/1kg. Biết rằng với mỗi cent mà người bán hàng hạ giá thì số lượng bán được sẽ tăng gấp 25 lần. Hỏi người bán hàng cần đưa ra giá khuyến mãi là bao nhiêu để thu được nhiều lợi nhuận nhất.

Ví dụ 4. Một tia sáng đi từ *A* đến mặt gương phẳng và đến *B* theo luật phản xạ. CMR: đó là đường đi ngắn nhất từ *A* đến *B* qua gương. Có kết luận gì khi thay mặt gương bằng mặt nước và điểm *B* nằm ở dưới nước?

Ví dụ 5. Tìm cực trị:

a) $y = \left(x\sqrt[3]{4+x}\right)^2$ $\quad$ ($y_{min}(-4) = y_{min}(0) = 0$; $y_{max}(-3) = 9$)

b) $y = \left(x\sqrt[3]{8+x}\right)^2$ $\quad$ ($y_{min}(0) = y_{min}(8) = 0$; $y_{max}(6) = 36\sqrt[3]{4}$)

c) $y = x\sqrt[3]{(1-x)^2}$ $\quad$ ($y_{min}(1) = 0$; $y_{max}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$)

d) $y = (1-x)\sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ ($y_{min}(0) = 0$; $y_{max}\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$)

Ví dụ 6 . a) Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất $y = \pi - 3x^2 - 6\operatorname{arccot} x^2$, $-1 \le x \le \sqrt[4]{3}$

(max $f = -3 - \dfrac{\pi}{2}$; min $f = -2\pi$)

b) Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất $y = 2\pi + 3x^2 - 6\operatorname{arccot} x^2$, $-\sqrt[4]{3} \le x \le 1$

(max $f = 2\pi$, min $f = 3 + \dfrac{\pi}{2}$)

c) Chứng minh rằng $2x^2 \arctan x^2 \ge \ln(1 + x^4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Chứng minh rằng $2x^3 \arctan x^3 \ge \ln(1 + x^6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!