ĐỀ THI THỬ CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20222

Nhóm ngành 1 và 3 **Thời gian làm bài: 90 phút**

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (2 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4n^4+10}{6n^4+5}\right)^n$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2+\cos n}{n^3}$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-2}\left(\frac{3x+5}{2x}\right)^{2n}$$

Câu 3. (1 điểm) Cho $f(x)=x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $T=\pi$. Khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

Câu 4. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y\ln y = x(2y-y')$

b) $y''-4y=2\cos^2(x)$

c) $\left[2x\sin(xy)+x^2y\cos(xy)\right]dx+x^3\cos(xy)dy=0$

Câu 5. (1 điểm).Giải phương trình vi phân sau:

$$y'''+y=\sin(t) \text{ với } y(0)=y'(0)=0=y''(0)=0$$

Câu 6. (1 điểm).Sử dụng phép biến đổi Laplace để tìm hàm $y(t)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$y(t)=e^{-3t}+3e^{-3t}\int_0^t y(u)e^{3u}du$$

Câu 7. (1 điểm). Xét trên trường số thực, ta biết rằng phép cộng có tính chất giao hoán. Ví dụ $3+5=5+3=8$ hay $4+6=6+4=10$.

Cho chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là một chuỗi hội tụ đến L. Giả sử ta đảo chỗ các hạng tử trong chuỗi, thì chuỗi mới thu được liệu có hội tụ đến L không ?

—— Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi ——

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN1 - Thi thử Giữa kỳ 20222

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1.

a)

+) Ta có: $u_n = \left(\dfrac{4n^4+10}{6n^4+5}\right)^n > 0 \Rightarrow$ Chuỗi đã cho là chuỗi số dương

+) Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{4n^4+10}{6n^4+5}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^4+10}{6n^4+5} = \dfrac{2}{3} < 1.$

+) Vậy chuỗi số đã cho hội tụ (Theo tiêu chuẩn Cauchy) $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

b)

Ta có: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2 + \cos n}{n^3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n n^2}{n^3} + \dfrac{\cos n}{n^3}\right)$

* Xét $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3}$

+) $u_n = \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n} > 0, \forall n \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3}$ là chuỗi đan dấu.

+) $u_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = u_{n+1}, \forall n \geq 2 \Rightarrow \{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm khi $n \to \infty$

+) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz (1).

* Xét $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^3}$

Ta có: $0 \leq \left|\dfrac{\cos n}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}, \forall n \geq 2$, mà $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ hội tụ (vì $\alpha = 3 > 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\dfrac{\cos n}{n^3}\right|$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^3}$ hội tụ tuyệt đối (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2 + \cos n}{n^3}$ hội tụ.

Câu 2.

Đặt $Y = \left(\dfrac{3x+5}{2x}\right)^2$ ĐKXĐ: $x \neq 0$

Chuỗi ban đầu trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2-2} Y^n$.(*)

Ta có: $a_n = \dfrac{n}{n^2-2}$.Bán kính hội tụ của chuỗi là:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n}{n^2-2}}{\frac{n+1}{(n+1)^2-2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}}\right| = 1$$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của (*) là: (-1,1)

Xét tại $Y = 1$,

Chuỗi (*) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2-2}$ là chuỗi số dương với $u_n = \dfrac{n}{n^2-2} > 0, \forall n \geq 2$

Ta có khi $n \to \infty$ thì $u_n \sim \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì (do $\alpha = 1$)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2-2}$ phân kì theo TCSS

$\Rightarrow$ Chuỗi (*) phân kì tại $Y = 1$

Do $Y \geq 0$ nên không cần xét tại $Y = -1$

$\Rightarrow$ (*) hội tụ $\Leftrightarrow 0 \leq Y < 1 \Leftrightarrow 0 \leq \left(\dfrac{3x+5}{2x}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{3x+5}{2x} < 1$

$\Rightarrow -5 < x < -1$ thỏa mãn điều kiện $x \neq 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-5, -1)$.

Câu 3. Hàm số $f(x) = x, \forall x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2L = \pi$. Dễ thấy $f(x)$ là một hàm lẻ, do đó khai triển Fourier của $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2nx dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Khai triển Fourier của hàm số đã cho là

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(2nx)$$

Câu 4.

a)

$$y\ln y = x(2y - y')$$
$$\iff \ln y = 2x - x\frac{y'}{y}$$

Đặt $\ln y = t$, ta có $t' = \dfrac{y'}{y}$ Suy ra

$$xt' + t = 2x$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, ta có

$$t' + \frac{t}{x} = 2$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, nghiệm của phương trình vi phân là

$$\begin{aligned}
t &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int 2e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right] \\
&= \frac{x^2 + C}{x}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{x + \frac{C}{x}}$$

b) Phương trình ban đầu tương đương:

$$y'' - 4y = 1 + cos(2x) \quad (1)$$

Xét phương trình vi phân thuần nhất: $y'' - 4y = 0 \quad (2)$

Ta xét phương trình đặc trưng của (2) : $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

Nghiệm tổng quát của (2) là: $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Do $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = \pm 2i$ đều không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng của (1) có dạng :

$$Y = A + B\cos(2x) + C\sin(2x)$$

Ta có:

$$Y' = -2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)$$
$$Y'' = -4B\cos(2x) - 4C\sin(2x)$$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$$-4B\cos(2x) - 4C\sin(2x) - 4[A + B\cos(2x) + C\sin(2x)] = 1 + \cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow -4A - 8B\cos(2x) - 8C\sin(2x) = 1 + \cos(2x) \quad \forall x$$
$$\Leftrightarrow A = \frac{-1}{4}, B = \frac{-1}{8}, C = 0$$
$$\Rightarrow \text{nghiệm riêng của (1) là } Y = \frac{-1}{4} + \frac{-1}{8}\cos(2x)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là:

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{-1}{4} + \frac{-1}{8}\cos(2x)$$

c) $\left[2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy)\right]dx + x^3\cos(xy)dy = 0$ (*)

Ta có: $P(x,y) = 2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy), \quad Q(x,y) = +x^3\cos(xy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{P'}_y = 2x^2\cos(xy) + x^2\left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right] = 3x^2\cos(xy) - x^3 y\sin(xy) \\ \text{Q'}_x = 3x^2\cos(xy) - x^3 y\sin(xy) \end{cases}$$

$\Rightarrow P'_y = Q'_x, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ (*) là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$, tích phân tổng quát của phương trình có dạng:

$$\int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = C$$
$$\Longleftrightarrow \int_0^x 0dt + \int_0^y \left[x^3\cos(xt)\right]dt = C$$

$$\iff x^2 \sin(xy) = C$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là: $x^2 \sin(xy) = C$

Câu 5.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s) \\
\mathcal{L}\{y'''\} &= s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y(s) \\
\mathcal{L}\{\sin(t)\} &= \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Tác động phép biến đổi Laplace lên hai vế của phương trình vi phân ta được:

$$\begin{aligned}
s^3Y(s) + Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
\Leftrightarrow (s^3+1)Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^3+1)} \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s^2-s+1)} \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{\frac{1}{6}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}s}{s^2-s+1} \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của phương trình vi phân là:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\cdot e^{\frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

Câu 6

Thực hiện biến đổi Laplace hai vế, ta có

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) + \mathcal{L}\left\{3e^{-3t}\int_0^t y(u)e^{3u}du\right\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{3e^{-3t}\int_0^t y(u)e^{3u}du\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{3\int_0^t y(u)e^{3u}du\right\}(s+3) \\
&= \frac{\mathcal{L}\{3y(t)e^{3t}\}(s+3)}{(s+3)} \\
&= \frac{\mathcal{L}\{3y(t)\}(s)}{(s+3)} \\
&= \frac{3F(s)}{s+3}
\end{aligned}$$

Từ đó ta giải được $F(s) = \frac{1}{s}$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược, ta thu được $y(t) = 1$

Câu 7

Ví dụ, ta xét chuỗi sau:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{1}$$

Xét tổng riêng

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x} \tag{2}$$

Thay $x = -x$, ta có:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1+x} \tag{3}$$

Tích phân hai vế cận từ 0 đến 1, ta có:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} dx \tag{4}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = -\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \tag{5}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2 = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \tag{6}$$

Từ đó ta có

$$0 \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2 \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \tag{7}$$

Cho $n \to \infty$, dễ thấy chuỗi (1) hội tụ đến $L = \ln 2$. Sau đó, ta tiến hành đảo chỗ các hạng tử trong chuỗi (1) như sau:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} S_1 \end{aligned}$$

Dễ thấy, chuỗi (2) hội tụ đến $\dfrac{L}{2}$.