ĐỀ 1

Hỗ trợ Sinh viên Bách Khoa
CLB Hỗ trợ Học tập

ĐỀ THI THỬ CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 - Học kì 20212

Nhóm ngành 1 Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (1 điểm) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t + \sin t \\ z = t \end{cases}$ tại điểm $A(1;0;0)$.

Câu 2. (1 điểm) Tính đạo hàm theo hướng của hàm $u = 2x^3 + 4z^2 + xyz$ theo hướng $\vec{l} = (3;4;0)$ tại $A(1;1;1)$.

Câu 3. (1 điểm) Tính $I = \iint\limits_D 2xdxdy$ với D là miền giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \le x + y \le 1 \\ y \le x \le y + 1 \end{cases}$.

Câu 4. (1 điểm) Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, V là miền giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2 \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 5. (1 điểm) Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x \cos^5 x}dx$.

Câu 6. (1 điểm) Tính $\int\limits_C (x^3 + y^3)ds$ với C là đường cong thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$.

Câu 7. (1 điểm) Tính $I = \iint\limits_S z^2(x^2 + y^2)dS$ với S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với $x \ge 0, y \ge 0$.

Câu 8. (1 điểm) Tính tích phân:

$$I = \int\limits_{A\overset{\frown}{mO}nB} (e^x \sin y + 2y + \frac{1}{4x^2 + 1})dx + (e^x \cos y + 5x + \frac{3}{4y^2 + 1})dy$$

với cung $\overset{\frown}{AmO}$ là phần nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ nằm phía trên trục Ox từ điểm $A(4,0)$ đến điểm $O(0,0)$ và cung $\overset{\frown}{OnB}$ là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ nằm phía trên trục Ox từ $O(0,0)$ đến $B(2,0)$.

Câu 9. (1 điểm) Cho trường vector $\vec{F} = (x^3 + y)\vec{i} + (y^3 + 2z)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy hướng lên phía trên.

Câu 10. (1 điểm) Tính tích phân:

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2 + yz)dx + (x^2 + y^2 + z^2 + xz)dy + (x^2 + y^2 + z^2 + xy)dz$$

trong đó C là giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt $z = x^2 + (y-1)^2$ có hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc O.

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

Giải câu 1. *Giả sử A ứng với* $t = t_0$

Khi đó: $\begin{cases} x(t_0) = 1 \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 + \cos t_0 = 1 \\ t_0 + \sin t_0 = 0 \\ t_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = 0$

Ta có: $\begin{cases} x'(t) = 1 - \sin t \\ y'(t) = 1 + \cos t \\ z'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ z'(0) = 1 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong là: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$

Giải câu 2. $u = 2x^3 + 4z^2 + xyz \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 6x^2 + yz \\ u'_y = zx \\ u'_z = 8z + xy \end{cases}$

Tại điểm $A(1;1;1)$*:* $\begin{cases} u'_x(A) = 7 \\ u'_y(A) = 1 \\ u'_z(A) = 9 \end{cases}$

Ta có: $\vec{l} = (3;4;0) \Rightarrow |\vec{l}| = 5$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \cos\beta = \dfrac{4}{5} \\ \cos\gamma = 0 \end{cases}$ *với* α, β, γ *là góc tạo bởi* $\vec{l}$ *với các tia* Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 7.\dfrac{3}{5} + 1.\dfrac{4}{5} + 9.0 = 5$

Giải câu 3.

- *Đổi biến* $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

- *Khi đó miền D biến thành miền* $D' = \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$

$$I = \iint_D 2xdxdy = \iint_{D'} \frac{u+v}{2} dudv$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^1 (u+v)dv$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(uv + \frac{u^2}{2}\right)\Big|_{v=0}^{v=1} du$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 u + \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}$$

Giải câu 4. *Giao tuyến của 2 mặt* $x^2 + y^2 = 4z^2$ *và* $z = 2$ *là*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Hình chiếu của V xuống Oxy là* $x^2 + y^2 \le 16$.

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow$ *Miền* $V_{r,\phi,z} = \begin{cases} 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 4 \\ \frac{r}{2} \le z \le 2 \end{cases}$

Do đó $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^4 dr \int_{\frac{r}{2}}^2 r^2 dz = 2\pi \int_0^4 r^2(2 - \frac{r}{2})dr = \frac{64}{3}\pi$

Giải câu 5.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x \cos^5 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{7}{2}} x \cos^{\frac{5}{2}} x dx = \frac{1}{2}\mathbf{B}(p,q)$ *với*

$\begin{cases} 2p - 1 = \frac{7}{2} \\ 2q - 1 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{9}{4} \\ q = \frac{7}{4} \end{cases}$. *Khi đó* $I = \frac{1}{2}\mathbf{B}.\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\frac{9}{4} - 1}{\frac{9}{4} + \frac{7}{4} - 1}.\mathbf{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$

$= \frac{5}{24}.\frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{5}{4} + \frac{7}{4} - 1}.\mathbf{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{5}{192}.\mathbf{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{5}{192}.\frac{\frac{7}{4} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{7}{4} - 1}\ \mathbf{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$= \frac{5}{256}\ \mathbf{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{256}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{256}\pi$$

Giải câu 6.

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 1 (C')$

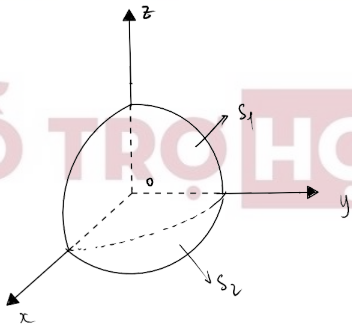
$$I = \int_{C'} \left[(u+1)^3 + (v+1)^3\right] ds = \int_{C'} (u^3 + 3u^2 + 3u + 1 + v^3 + 3v^2 + 3v + 1) ds$$

$= \int_{C'} (u^3 + v^3 + 3u + 3v + 5) ds.$ *Đặt* $\begin{cases} u = \cos t \\ v = \sin t \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + 3\sin t + \cos^3 t + 3\cos t + 5)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + 3\sin t + \cos^3 t + 3\cos t + 5) dt = 10\pi$$

Giải câu 7.



Chia S thành 2 phần: $\begin{cases} S_1 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0 \\ S_2 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \leq 0 \end{cases}$

Ta có: $I_1 = \iint_{S_1} z^2(x^2 + y^2) dS = \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$

với D_1 *là hình chiếu của mặt* S_1 *lên mặt phẳng* Oxy:

$$D_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \quad \text{và } z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow I_1 = \iint_{D_1} (1-x^2-y^2)(x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2)dxdy$$

Đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ |J| = r \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr$$

Đặt $t = \sqrt{1-r^2} \Rightarrow rdr = tdt \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2}.\int_0^1 (1-t^2).t^2dt = \frac{\pi}{2}.\frac{2}{15} = \frac{\pi}{15}$ (1)

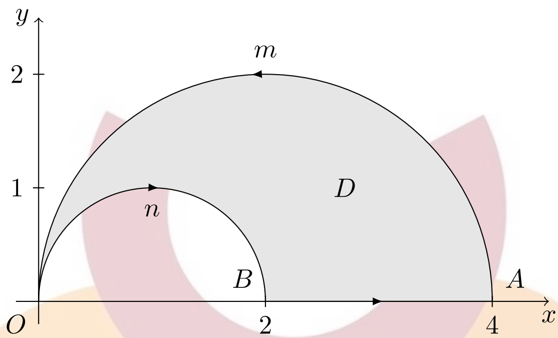
Tương tự: $I_2 = \iint_{S_2} z^2(x^2+y^2)dS = \iint_{D_2}(1-x^2-y^2)(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

với $D_2: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \quad \text{và } z_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; z_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{D_2} (1-x^2-y^2)(x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = I_1 = \frac{\pi}{15}(2)$$

Từ (1) và (2): $I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi}{15}$

Giải câu 8.



Đặt $\begin{cases} P = e^x \sin y + 2y + \dfrac{1}{4x^2+1} \\ Q = e^x \cos y + 5x + \dfrac{3}{4y^2+1} \end{cases}$

Khi đó ta có: $I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AmOnBA}} P\,dx + Q\,dy - \int_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy$

Xét $I_1 = \displaystyle\int_{BA} P\,dx + Q\,dy = \int_2^4 \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan 2x\Big|_2^4 = \frac{1}{2}(\arctan 8 - \arctan 4)$

Xét $I_2 = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AmOnBA}} P\,dx + Q\,dy$

Theo công thức Green:

$$I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (e^x \cos y + 5 - e^x \cos y - 2)\,dxdy = \iint_D 3\,dxdy$$

với $D : \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 4x \\ y \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$. *Khi đó miền D trở thành* $D' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} 3r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\left(16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi\right) d\varphi = \frac{9\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_2 - I_1 = \frac{9\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan 8 + \frac{1}{2}\arctan 4$$

Giải câu 9.

Thông lượng của F qua mặt S là:

$\phi = \iint\limits_S (x^3 + y)\,dydz + (y^3 + 2z)\,dzdx + (x + y + z)\,dxdy$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta được:

$\phi = \iiint\limits_V \left(3x^2 + 3y^2 + 1\right)\,dxdydz - \iint\limits_{S'} (x^3 + y)\,dydz + (y^3 + 2z)\,dzdx + (x + y + z)\,dxdy$

với V là nửa khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0$ *và* S' *là mặt* $z = 0 (x^2 + y^2 \le 1)$, *hướng xuống dưới*

+) *Tính* $I_1 = \iiint\limits_V \left(3x^2 + 3y^2 + 1\right)\,dxdydz$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$. *Khi đó miền V thành* $V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz + \iiint\limits_V dxdydz \\
&= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi \\
&= \frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{22}{15}\pi
\end{aligned}$$

+) *Tính* $I_2 = \iint\limits_{S'} (x^3+y)\,dydz + (y^3+2z)\,dzdx + (x+y+z)\,dxdy$

Vectơ pháp tuyến của S' *là* $(0;0;-1) \Rightarrow \cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1$, *ta có:*
$I_2 = \iint\limits_{S'} -(x+y+z)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} -(x+y)\,dxdy = 0 \Rightarrow \phi = I_1 + I_2 = \dfrac{22}{15}\pi$

Giải câu 10.

Đặt $\begin{cases} P = x^2+y^2+z^2+yz \\ Q = x^2+y^2+z^2+xz \\ R = x^2+y^2+z^2+xy \end{cases}$

Áp dụng công thức Stoke với S *là phần mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=4$ *có biên là* C*. Khi đó* S *là mặt cong trơn* P, Q, R *là các hàm liên tục và có đạo hàm liên tục trên mặt* S*.*

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_y - P'_x)\,dxdy \\
&= \iint\limits_S 2(y-z)\,dydz + 2(z-x)\,awww + 2(x-y)\,dxdy
\end{aligned}$$

trong đó S *hướng lên trên khi nhìn từ gốc* 0 *theo hướng tia* Oz

Ta có $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Do $(\vec{n}, \vec{Oz}) < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x;' -z'_y;1) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}; \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}; 1\right)$

$\Rightarrow |\vec{n}| = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{2} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{2} \end{cases}$ *, với* α, β, γ *là góc hợp bởi* $\vec{n}$ *và các trục* Ox, Oy, Oz

Áp dụng mối liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S [(y-z)x + (z-x)y + (x-y)z]\, dS \\ &= \iint\limits_S 0\, dS = 0 \end{aligned}$$