Chương 5
KHÔNG GIAN EUCLID VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

2024

1. KHÔNG GIAN EUCLID

Trên không gian các véc tơ thông thường, chúng ta đã nghe quen thuộc với các khái niệm như tích vô hướng, góc các véc tơ, độ dài, quan hệ trực giao, hình chiếu trực giao,...Một câu hỏi tự nhiên là trên các không gian véc tơ tổng quát có các khái niệm này không? Các khái niệm được xây dựng và ứng dụng như thế nào?

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm tích vô hướng định nghĩa không gian Euclide và các vấn đề cần xem xét trên không gian Euclid
- Kĩ năng: Kiểm tra tích vô hướng, xem xét quan hệ trực giao trên không gian Euclide như hệ trực giao, trực giao hóa, không gian trực giao, hình chiếu trực giao, phép biến đổi trực giao, bài toán chéo hóa trực giao.

1. KHÔNG GIAN EUCLID

Nội dung

Khái niệm dạng song tuyến tính (Tham khảo)

- Cho V là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v), \end{aligned}$$

được gọi là dạng song tuyến tính trên V nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)\ \forall u, v, w \in V;$
2. $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v),\ \forall u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R};$
3. $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w),\ \forall u, v, w \in V;$
4. $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v),\ \forall u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Nếu f thỏa mãn thêm điều kiện $f(u, v) = f(v, u),\ \forall u, v \in V$, thì f sẽ được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng trên V.

1.1. Khái niệm tích vô hướng và định nghĩa không gian Euclide

Định nghĩa tích vô hướng. Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian. Tích vô hướng trên V là một dạng song tuyến tính đối xứng mà dạng toàn phương của nó là xác định dương.

Ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

   là một dạng song tuyến tính đối xứng, xác định dương trên $\mathbb{R}^2$, nên là một tích vô hướng

2. Tổng quát, cho $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \dots,$ và A là một ma trận đối xứng cấp n có các định thức con chính đều dương. Ta xét dạng sau: $f(x, y) = x^TAy$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$. Ngược lại, khi chọn trước cơ sở của không gian V, mỗi tích vô hướng sẽ tương ứng với một ma trận A đối xứng cấp n có các định thức con chính đều dương.
3. Cho $V = P_2[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau: $f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng nhưng không xác định dương (ví dụ như $f(x^2 - x, x^2 - x) = 0$ nhưng $x^2 - x \neq 0$). Do đó, đây không phải là một tích vô hướng
4. Cho $V = C_{[a;b]}$ là không gian véc tơ các hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(x), g(x) \in V$. Khi đó dạng sau: $T(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với T là $\phi(f(x)) = \int_a^b [f(x)]^2 dx$ xác định dương nên T là một tích vô hướng trên V.

1.1. Khái niệm tích vô hướng và định nghĩa không gian Euclide

Định nghĩa. Một không gian vectơ thực mà trên đó đã cho một tích vô hướng được gọi là một *không gian Euclid* n chiều. Tích vô hướng trên không gian Euclid thường được ký hiệu là $\langle u, v\rangle$.
Ví dụ 1. Trong không gian $V = \mathbb{R}^n$, với $u = (x_1, ..., x_n)$, $v = (y_1, ..., y_n)$, ta đặt:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$\langle u, v\rangle$ là một tích vô hướng, tích này được gọi là tích vô hướng *chính tắc* của $\mathbb{R}^n$. Khi đó ta có không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

1.2. Độ dài và góc của các véc tơ

Tích vô hướng $\langle u, u\rangle$ được gọi là *bình phương vô hướng* của véc tơ u, ký hiệu là u^2.
Độ dài của vectơ u, ký hiệu $\|u\|$, được xác định bởi

$$\|u\| = \sqrt{u^2}.$$

Nhận xét:

- $\|u\| = 0$ khi và chỉ khi $u = 0$
- $\|ku\| = |k|\|u\|$, $k \in \mathbb{R}$
- $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$ (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Bất đẳng thức tam giác)

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz suy ra rằng

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|.\|v\|} \le 1.$$

Bởi vậy, số thực $r = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$ có thể xem như cosin của một góc α, nghĩa là tồn tại một góc α, $0 \le \alpha \le \pi$, sao cho:

$$cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}.$$

Số α xác định như vậy gọi là *góc* giữa hai véc tơ u, v.

Ví dụ

Cho $V = P_2[x]$ là một không gian Euclide với tích vô hướng $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.
Xét 2 véc tơ $p(x) = 1 + 2x - x^2, q(x) = 3 + x^2$. Ta có

$$\|p(x)\| = \sqrt{p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2} = \sqrt{6},$$

$$\|q(x)\| = \sqrt{q(0)^2 + q(1)^2 + q(2)^2} = \sqrt{84},$$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = 1.3 + 2.4 + 1.7 = 18,$$

Góc α của 2 véc tơ có

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{6.84}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

1.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Cho không gian Euclide V với tich vô hướng $\langle , \rangle$.

1. Hai vectơ u, v gọi là *trực giao* nếu tích vô hướng $\langle u, v\rangle = 0$.
2. Hệ vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_s (s \geq 2)$ được gọi là *trực giao* nếu các vectơ của hệ khác véc tơ không và đôi một trực giao, tức là $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ với $i \neq j$. Ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng: Hệ véc tơ trực giao là độc lập tuyến tính.
3. Vectơ u gọi là *chuẩn* hay *đơn vị* nếu $||u|| = 1$. Đối với vectơ $u \neq \theta$ thì các vectơ

$$\frac{u}{||u||}, \frac{u}{-||u||}$$

   đều là vectơ đơn vị, và được gọi là *chuẩn hóa* của vectơ u. Hệ vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_s (s \geq 2)$ được gọi là *trực chuẩn* nếu nó là một hệ trực giao và mỗi vectơ đều là chuẩn, tức là

$$u_i.u_j = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

4. Một cơ sở là hệ trực giao thì gọi là một cơ sở trực giao. Một cơ sở là hệ trực chuẩn thì gọi là cơ sở trực chuẩn.

1.3. Quan hệ trực giao trên không gian Euclide

Cho không gian Euclide V với tích vô hướng $\langle , \rangle$, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V.

1. Tọa độ của véc tơ $[u]_B^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$ thì $x_i = \langle u, u_i \rangle$.
2. Cho $[u]_B^T = x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$,$[v]_B^T = y = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)$ thì $\langle u, v\rangle = x^T y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Trực giao hóa Gram - Schmidt Trong một không gian véc tơ Euclide, từ mỗi cơ sở đều có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn. Điều này có thể được thực hiện bởi phương pháp *trực giáo hóa Gram - Schmidt* Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là một cơ sở nào đó của không gian Euclide V. Từ cơ sở này chúng ta sẽ xây dựng một hệ trực giao như sau:

- Đặt $e_1 = u_1$. Ta tìm véc tơ e_2 sao cho $\langle e_2, e_1\rangle = 0$ bằng cách đặt $e_2 = u_2 + k_{21}e_1$. Do $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ nên $\langle e_1, u_2\rangle + k_{21}e_1^2 = 0 \Rightarrow k_{21} = -\dfrac{\langle e_1, u_2\rangle}{e_1^2}$.
- Tiếp đó ta tìm véc tơ e_3 sao cho hệ e_1, e_2, e_3 trực giao bằng cách đặt $e_3 = u_3 + k_{31}e_1 + k_{32}e_2$. Từ $\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2.e_3\rangle = 0$ suy ra $\langle e_1, u_3\rangle + k_{31}e_1^2 = 0, \langle e_2, u_3\rangle + k_{32}e_2^2 = 0$. Từ đó $k_{31} = -\dfrac{e_1.u_3}{e_1^2}, \ k_{32} = -\dfrac{\langle e_2, u_3\rangle}{e_2^2}$.
- Quá trình này được tiếp tục để xác định tới e_{r-1}. Khi đó e_r được xác định sao cho $\langle e_i, e_r\rangle = 0, i = 1, 2, \ldots, r-1$ bằng cách đặt $e_r = u_r + k_{r1}e_1 + k_{r2}e_2 + \cdots + k_{r(r-1)}e_{r-1}$, với $k_{rj} = -\dfrac{\langle e_j, u_r\rangle}{e_j^2}, \ j = 1, 2, \ldots, r-1$. Như vậy chúng ta đã dựng được một hệ véc tơ trực giao $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

  Sau khi chuẩn hóa hệ véc tơ này ta thu được một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide V.

Cho V là một không gian Euclide và U là một không gian con của nó. Véc tơ $w \in U$ được gọi là *hình chiếu* của vectơ v lên không gian con U nếu véc tơ $v - w$ trực giao với mọi véc tơ của U, ký hiệu $Ch_U(v)$.

Nhận xét:

- Hình chiếu trực giao $Ch_U(v)$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Nếu $v \in U$ thì $Ch_U(v) = v$.
- Trong trường hợp U có cơ sở là $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ thì ta có thể trực chuẩn hóa G-S rồi áp dụng công thức bên trên hoặc tìm hình chiếu bằng định nghĩa bằng việc đặt $Ch_U(v) = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_pv_p$. Dựa trên điều kiện $v - Ch_U(v)$ trực giao với U ta suy ra $Ch_U(v).v_i = v.v_i$, qua đó xác định các x_i bằng việc giải một hệ Cramer.

Ví dụ: Trên không gian $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc.
Cho $U = span(v_1 = (1;2;1), v_2 = (1;1;3))$,$v = (3;5;7)$. Xác định $Ch_U(v)$.
Lời giải
Đặt $Ch_U(v) = x_1(1;2;1) + x_2(1;1;3)$. Do $Ch_U(v).v_i = v.v_i, i = 1,2$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 20 \\ 6x_1 + 11x_2 = 29 \end{cases}$$

Giải ra ta có $x_1 = \frac{23}{15}, x_2 = \frac{9}{5}$. Do đó

$$Ch_U(v) = \frac{23}{15}(1;2;1) + \frac{9}{5}(1;1;3) = (\frac{10}{3}; \frac{73}{15}; \frac{104}{15}).$$

1.4. Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

Định nghĩa: Ma trận vuông A gọi là ma trận trực giao nếu thỏa mãn $A.A^t = E$ hay $A^{-1} = A^t$. Ta có các khẳng định sau là tương đương

- A là ma trận trực giao.
- Các cột của ma trận A là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc.
- Các hàng của ma trận A là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Nhận xét: Cho A, B là các ma trận trực giao thì ta có

- $|A|^2 = 1$.
- A^{-1}, AB là ma trận trực giao.

1.4. Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

Định nghĩa: Cho không gian Euclid V với tích vô hướng $\langle , \rangle$. Phép biến đổi tuyến tính f trên V gọi là một phép biến đổi trực giao nếu thỏa mãn $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.
Ta có các khẳng định sau là tương đương:

- f là phép biến đổi trực giao.
- f bảo toàn tích vô hướng, nghĩa là $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V$.
- ma trận của f đối với 1 cơ sở trực chuẩn B của V là một ma trận trực giao.

1.4. Ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao

Ví dụ: Xét phép biến đổi tuyến tính trên $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

1.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Định nghĩa: Cho không gian Euclid V với tích vô hướng $\langle , \rangle$. Toán tử tuyến tính f trên V gọi là một biến đổi đối xứng nếu thỏa mãn $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle, \forall u, v \in V$.
Ta có các khẳng định sau là tương đương:

- f là một biến đổi đối xứng.
- Ma trận của f đối với 1 cơ sở trực chuẩn B của V là một ma trận đối xứng.

Ví dụ: Xét biến đổi tuyến tính trên $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

1.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Cho f là biến đổi đối xứng trên không gian Euclide V (tương ứng của ma trận A đối xứng). Ta có các tính chất sau:

- Mọi giá trị riêng của f (tương ứng của A) đều là số thực. Hay khi đó ta có đa thức đặc trưng có dạng:

$$P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lambda)^{r_i}$$

- Các không gian riêng phân biệt của f (tương ứng của A) là trực giao với nhau.
- f (tương ứng ma trận A) chéo hóa được.

1.5. Phép biến đổi đối xứng và bài toán chéo hóa trực giao

Bài toán chéo hóa trực giao: Cho ma trận đối xứng A, tìm ma trận C trực giao sao cho $C^T AC$ chéo.

- Bước 1: Xác định đa thức đặc trưng của ma trận A và tìm các giá trị riêng.
- Bước 2: Với mỗi giá trị riêng tìm được, ta đi tìm cơ sở trực chuẩn của các không gian riêng tương ứng.
- Bước 3: Ghép các cơ sở trực chuẩn của các không gian riêng để thu được cơ sở trực chuẩn B của không gian V gồm toàn các véc tơ riêng của A. Khi đó C là ma trận các véc tơ cột của B.

Ví dụ: Chéo hóa trực giao ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- Bước 1: Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 25 = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2$.

  Các giá trị riêng là $\lambda = -1; \lambda = 5$.
- Bước 2:
  - Với $\lambda = -1$ ta có không gian riêng $V_A(-1)$ có cơ sở trực chuẩn là $B_1 = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})\}$
  - Với $\lambda = 5$ ta có không gian riêng $V_A(5)$ có cơ sở trực chuẩn là $B_2 = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$

- Bước 3: Cơ sở trực chuẩn $B = B_1 \cup B_2$ của không gian V gồm toàn các véc tơ riêng của A. Ma trận trực giao $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ chéo hóa A và $C^{-1}AC = C^TAC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Dạng toàn phương là một đa thức nhiều biến với các số hạng đều là các đa thức bậc 2. Trong bài này, chúng ta sẽ đến với dạng toàn phương dưới một góc nhìn từ phía không gian véc tơ và dạng song tuyến tính đối xúng. Qua đó ta xem xét một số các đặc tính của dạng toàn phương trong mối liên hệ với các ma trận đối xứng.

Mục tiêu

- Kiến thức: Sinh viên hiểu được khái niệm dạng toàn phương, các đặc tính của dạng toàn phương
- Kĩ năng: Xác định mối quan hệ giữa dạng toàn phương và dạng song tuyến tính đối xúng, các phương pháp đưa dạng toàn phương về biểu thức chính tắc, xem xét dạng toàn phương xác định dương, xác định âm.

2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Nội dung

2.1. Khái niệm dạng toàn phương và mối liên hệ với dạng song tuyến tính đối xứng

Cho f sẽ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V, $f(u,v) = f(v,u),\ \forall u, v \in V$ điều này tương đương với f có ma trận A đối xứng đối với cơ sở B do

$$f(u,v) = x^T Ay; f(v,u) = y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T y.$$

Ta định nghĩa dạng toàn phương ϕ là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \phi : V &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \phi(u) = f(u,u) \end{aligned}$$

được gọi là dạng toàn phương trên V ứng (liên kết) với dạng song tuyến tính đối xứng f.
Ngược lại, khi cho trước dạng toàn phương ϕ ta có dạng song tuyến tính

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[\phi(u+v) - \phi(u) - \phi(v)]$$

gọi là dạng song tuyến tính đối cực của ϕ.

Ví dụ

1. Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Ta xét dạng sau:

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

   là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó ta có dạng toàn phương $\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$.
2. Tổng quát, cho $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ và A là một ma trận đối xứng cấp n. Ta xét dạng sau: $f(x, y) = x^T Ay$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}^n$ và $\phi(x) = x^T Ax$ là dạng toàn phương liên kết với f và ngược lại.
3. Cho $V = P_n[x]$, $p(x), q(x)$ là hai đa thức của V. Khi đó dạng sau: $f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với f là $\phi(p(x)) = p(0)^2 + p(1)^2$.
4. Cho $V = C_{[a;b]}$ các hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(x), g(x) \in V$. Khi đó dạng sau: $T(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ là một dạng song tuyến tính đối xứng và dạng toàn phương liên kết với T là $\phi(f(x)) = \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

2.2. Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

- **Định nghĩa:** Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V,ϕ là dạng toàn phương liên kết với f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V. khi đó ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ của f đối với cơ sở B cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương ϕ đối với cơ sở B.

2.2. Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

- **Ví dụ:** Cho $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$. Ta xét dạng toàn phương sau:

$$\phi(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2.$$

Ma trận của ϕ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Ma trận và biểu thức của dạng toàn phương

Cho V là một không gian véc tơ hữu hạn chiều có $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của V,ϕ là một dạng toàn phương trên V liên kết với dạng song tuyến tính đối xứng f và A là ma trận của ϕ đối với cơ sở B. Với véc tơ bất kỳ $u \in V$ ta có tọa độ đối với cơ sở B là

$$[u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Khi đó $\phi(u) = f(u,u) = f(\sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n x_j u_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j f(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$. hay $\phi(u) = [u]_B^T.A.[u]_B = x^T Ax$. gọi là biểu thức của dạng toàn phương ϕ đối với cơ sở B. Trong trường hợp $A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là ma trận chéo ta có $\phi(u) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$ gọi là biểu thức chính tắc của dạng toàn phương. Đặc biệt $a_i \in \{-1; 0; 1\}, \forall i = 1, \dots, n$ thì ta gọi là biểu thức chuẩn tắc của dạng toàn phương.

Phương pháp Lagrange (tham khảo): Sử dụng các đổi biến $x = Cy$ thích hợp để đưa dạng toàn phương $\phi = x^T Ax$ thành $\phi = y^T(C^T AC)y$ có dạng chính tắc. Phương pháp Lagrange dựa trên 2 phép xử lý cơ bản là:

1. $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$
2. $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$

Ví dụ 1. Cho $\phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Đưa biểu thức về dạng chính tắc.

Lời giải. Ta có

$$\phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

$$= x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2.$$

Ta đặt $y_1 = x_1 - x_2 + x_3, y_2 = x_2 + 2x_3, y_3 = x_3$ thì ta có $\phi = y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$ có dạng chính tắc.

Ví dụ 2. Cho $\phi = x_1x_2 - 2x_2x_3$. Đưa biểu thức về dạng chính tắc.
Lời giải. Ta đặt $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$ ta có

$$\begin{aligned}\phi = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3 &= (y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 + 2y_2y_3 - y_3^2 \\ &= (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2\end{aligned}$$

Ta đặt $z_1 = y_1 - y_3$,$z_2 = y_2 - y_3$,$z_3 = y_3$ thì ta có $\phi = z_1^2 - z_2^2$ có dạng chính tắc.
Nhận xét:

1. Các phép đổi biến dạng $y = C^{-1}x$ hoặc $x = Cy$ trong đó C là các ma trận khả nghịch tương ứng với việc chuyển cơ sở từ cơ sở ban đầu sang cơ sở mới.
2. Mọi biểu thức của dạng toàn phương đều đưa được về dạng chính tắc, chuẩn tắc.
3. Cho ma trận A đối xứng, luôn tồn tại ma trận khả nghịch C để C^TAC có dạng chéo.
4. Cho dạng toàn phương ϕ liên kết với dạng song tuyến tính đối xứng f, khi đó luôn tồn tại cơ sở $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ của V thỏa mãn $f(u_i, u_j)$=0,$\forall i \neq j$.

Phương pháp Jacobi: Phương pháp Jacobi dựa trên việc xây dựng lần lượt các véc tơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ trong cơ sở B của V thỏa mãn $f(u_i, u_j) = 0, \forall i \neq j$. Phương pháp Jacobi được áp dụng cho trường hợp các định thức con chính của ma trận A đều khác 0. *Định thức con chính* cấp r của ma trận vuông A là định thức

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

2.3. Các phương pháp đưa biểu thức dạng toàn phương về biểu thức chính tắc

Định lý Jacobi: *Giả sử đối với cơ sở* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *của không gian* V *đã cho dạng toàn phương*

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} = \phi(u_i, u_j).$$

Hơn nữa, giả sử các định thức con chính $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ *của ma trận* $A = (a_{ij})$ *đều khác không. Khi đó tồn tại cơ sở* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *của* V *sao cho dạng toàn phương* $\phi(u, u)$ *viết được dưới dạng*

$$\phi(u) = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + ... + k_ny_n^2,$$

và các hệ số k_i *xác định bởi* $k_i = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \quad i = 1, 2, ..., n,$ *trong đó ta quy ước* $\Delta_0 = 1$.

2.4. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

- **Định nghĩa:** Dạng toàn phương $\phi(u)$ gọi là xác định *dương* (*âm*) nếu với mọi vectơ $u \neq 0$ thì $\phi(u) > 0$ (tương ứng, $\phi(u) < 0$).
- **Nhận xét:** *Một dạng toàn phương là xác định dương (âm) khi và chỉ khi các hệ số của dạng chính tắc của nó đều dương (tương ứng, đều âm).*
- **Tiêu chuẩn Sylvester:** *Để một dạng toàn phương là xác định dương điều kiện cần và đủ là tất cả các định thức con chính của nó đều dương. Để một dạng toàn phương là xác định âm điều kiện cần và đủ là tất cả mọi định thức con chính cấp chẵn đều dương và tất cả mọi định thức con chính cấp lẻ đều âm.*

2.4. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

- **Ví dụ.** Cho dạng toàn phương

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

Ma trận của ϕ là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

có các định thức con chính $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 20$, bởi vậy dạng toàn phương đã cho xác định dương.