LỜI GIẢI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH 2 - HỌC KÌ: 20183

Câu 1:

- **(0,5 điểm)**

  Điểm $A(-1;2;1)$ ứng với $t=0$

  Ta có: $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2-\sin t \\ z = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -\cos t \\ z'(t) = 2e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$

- **(0,5 điểm)**

  Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(-1;2;1)$:

  $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

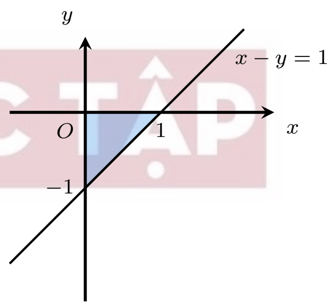
  Phương trình tiếp diện tại điểm $A(-1;2;1)$:

  $$(x+1)-(y-2)+2(z-1)=0 \text{ hay } x-y+2z+1=0$$

Câu 2:

- **(1 điểm)**

  Ta có miền D : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x-1 \le y \le 0 \end{cases}$



$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (x-2y)dy \\ &= \int_0^1 \left(xy - y^2\right)\Big|_{y=x-1}^{y=0} dx \\ &= \int_0^1 \left[-x^2+x+(x-1)^2\right] dx \\ &= \int_0^1 (1-x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 3:

- **(0,5 điểm)**

$$I = \iiint_V \frac{z^3}{1+x^2+y^2} dxdydz \ ; \ \text{miền } V: \ x \geq 0 \ ; \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

$$\text{Ta có}: \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hình chiếu của } V \text{ lên } Oxy \text{ là } D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, |J| = r, V \to V': \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ r \leq z \leq 1 \end{cases}$$

- **(0,5 điểm)**

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 \frac{z^3 r}{1+r^2} dz \\ &= \pi \int_0^1 \frac{z^4 r}{4(1+r^2)}\Big|_{z=r}^{z=1} dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{(1-r^4)r}{1+r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-r^2) r dr \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Câu 4:

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^4} dx$

- **(1 điểm)**

  Đặt: $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}$

  $\Rightarrow I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{5}{4}}}{4t^{\frac{3}{4}}}.e^{-t} dt = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}}.e^{-t} dt = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{x} dx$

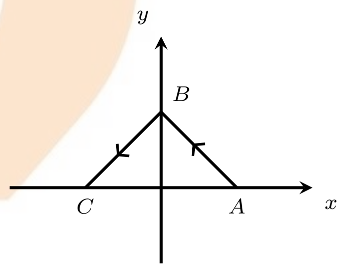
- **(1 điểm)**

$$\text{Ta có: } \int_2^3 t^{-x-1} dt = \frac{t^{-x}}{-x}\Big|_2^3 = \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{x}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_2 &= \int_0^{\infty} \Big(\int_2^3 t^{-x-1} dt \Big) dx \\
&= \int_2^3 \Big(\int_0^{\infty} t^{-x-1} dx \Big) dt \\
&= \int_2^3 \Big(\frac{t^{-x-1}}{-\ln t}\Big|_0^{\infty} \Big) dt \\
&= \int_2^3 \frac{dt}{t.\ln t} = \ln\Big(\ln t\Big)\Big|_2^3 = \ln\Big(\frac{\ln 3}{\ln 2}\Big)
\end{aligned}$$

Câu 5:

- **(0,5 điểm)**
  Bổ sung thêm đoạn CA, ta được đường kín
  Áp dụng công thức Green, ta có:
  $$I_1 = \int_{ABCA} 2ydx - 3xdy = -\iint_D 5dxdy = -5S_{ABC} = -5$$



- **(0,5 điểm)**
  Xét trên CA: $I_2 = \displaystyle\int_{CA} 2ydx - 3xdy = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$
  $\Rightarrow I = I_1 - I_2 = -5$

Câu 6:

$$I = \iiint_V \left(x - y + 2z\right)^3 \left(dydz + dxdz + dxdy\right); \;\; S : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \text{hướng ngoài}$$

- **(0,5 điểm)**

  Do S là mặt kín, miền không gian giới hạn bởi S là $V : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1$

  Áp dụng công thức Ostrogradsky:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V \left[3\left(x - y + 2z\right)^2 - 3\left(x - y + 2z\right)^2 + 6\left(x - y + 2z\right)^2\right] dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x - y + 2x\right)^2 dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 4xz\right) dxdydz \\
&= 6 \iiint_V \left(x^2 + y^2 + 4z^2\right) dxdydz \;\; (\text{do } -2xy, -4yz, 4xz \;\text{ là các hàm lẻ})
\end{aligned}$$

- **(0,5 điểm)**

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \dfrac{r}{2}\cos\theta \end{cases}, |J| = \frac{r^2}{2}\sin\theta, V \to V' \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2.\frac{r^2}{2}\sin\theta dr \\
&= 6.2\pi.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=1}\right) d\theta \\
&= 6\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{5} d\theta \\
&= \frac{12\pi}{5}
\end{aligned}$$

Câu 7:

- **(0.5 điểm)**

  $\vec{F} = \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$

  Ta xét:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\right)$$
$$= \left(\frac{-2zy+2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2zx+2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2xy+2yx}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$
$$= (0,0,0)$$

  $\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế

- **(0.5 điểm)**

  Ta có hàm thế vị:

$$u = \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt$$
$$= \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt + \int_0^y \frac{t}{1+x^2+t^2}dt + \int_0^z \frac{t}{1+x^2+y^2+t^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+t^2)\Big|_0^y + \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+t^2)\Big|_0^z + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2) + C$$

Câu 8:

- **(0.5 điểm)**

  Ta có lưu số của $\vec{F}$:

  $I = \displaystyle\int_L (2z-y)dx + (2x-z)dy + (2y-x)dz$

  Áp dụng công thức Stokes, ta có:

  $I = \displaystyle\iint_S 3dydx + 3dxdy + 3dzdx \ = 3\iint_S dxdy + dydz + dzdx$

  Với $S: x+2y+2z=0$ hướng về phía $z<0$ nằm trong L

- **(0.5 điểm)**

  Ta có: $z = -\frac{x}{2} - y \Rightarrow \vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

  $\widehat{(\vec{n}, Oz)} > \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

  $\Rightarrow I = 3\iint\limits_S \left(\frac{-1}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{3}\right) dS = -5\iint\limits_S dS = -5S_S = -15\pi$

Câu 9:

- **(0.5 điểm)**

  Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le \pi)$

  Từ đó ta có:

$$I = \int_0^\pi \frac{(10\cos^4 t - 8\sin t)(-\sin t) + \left(7\cos^8 t - 1024\sin^7 t\right)(2\cos t)}{2} dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (8\sin^2 t - 10\cos^4 t\sin t + 14\cos^9 t - 2048\sin^7 t)dt$$

- **(0.5 điểm)**

$$I = 4\int_0^\pi \sin^2 tdt - 5\int_0^\pi \cos^4 t\sin tdt + 7\int_0^\pi \cos^9 tdt - 1024\int_0^\pi \sin^7 t\cos tdt$$
$$= 2\pi - 2$$