



# **BÀI 5**

## **TÍNH NHÂN QUẢ VÀ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG RỜI RẠC**

TS. Nguyễn Hồng Quang  
PGS. TS. Trịnh Văn Loan  
TS. Đoàn Phong Tùng  
Khoa Kỹ thuật máy tính

## ❑ Nội dung bài học

---

1. Tính nhân quả của hệ thống rời rạc
2. Tính ổn định của hệ thống rời rạc

## ❏ Mục tiêu bài học

---

Sau khi học xong bài này, các em sẽ nắm được những vấn đề sau:

- Khái niệm về hệ thống nhân quả.
- Phương pháp khảo sát tính nhân quả của hệ thống và cách tính đáp ứng của hệ thống nhân quả.
- Khái niệm và phương pháp khảo sát tính ổn định của hệ thống

# 1. Hệ không nhớ

---

- Tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở cùng thời điểm:

$$y(n) = T[x(n), n]$$

- Hệ thống tĩnh (Static systems)
- Ví dụ:  $y(n) = A \cdot x(n)$

# Hệ có nhớ

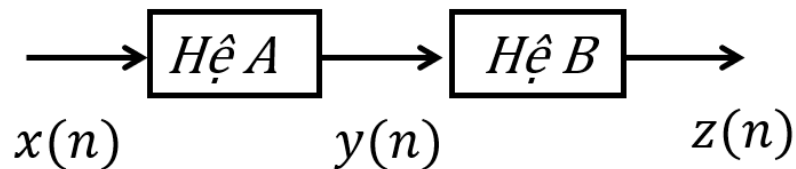
---

- Tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở nhiều thời điểm
- Hệ thống động (Dynamic systems)
- Ví dụ:  $y(n) = x(n) - x(n - 1)$
- Hệ thống có nhớ chiều dài  $N$  (memory of duration  $N$ )
  - $0 < N < \infty$  : hệ thống có bộ nhớ hữu hạn
  - $N = \infty$  : hệ thống có bộ nhớ vô hạn

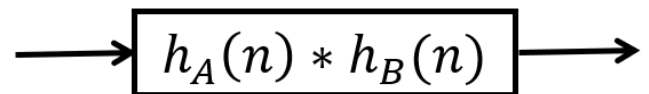
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n - k)$$

# Tính khả đảo và hệ đảo

- Hệ đồng nhất là hệ thống cho tín hiệu ra bằng tín hiệu vào:  $y(n) = x(n)$
- Hệ A là đảo của hệ B nếu mắc nối tiếp hai hệ này ta được một hệ đồng nhất



$$x(n) = z(n)$$



$$h(n) = h_A(n) * h_B(n) = \delta(n)$$

- Bài tập: Hệ thống có phương trình vào ra  $y(n) = 2x(n) + 3x(n - 1)$ . Tìm hệ đảo của hệ này.

# Hệ nhân quả

---

- Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở hiện tại và quá khứ
  - Chưa có tác động thì chưa có đáp ứng
  - Đáp ứng không xảy ra trước tác động
- Hệ không nhân quả: tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào ở các thời điểm hiện tại, quá khứ và tương lai
- Hệ phản nhân quả: tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở các thời điểm tương lai
- Chỉ có hệ nhân quả thì mới thực hiện được trên thực tế
- Ví dụ:

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n - 1)$$

$$y(n) = 4x(n + 1) + 5x(n + 2)$$

# Đáp ứng xung của hệ tuyến tính bất biến nhân quả

- Nếu  $x(n) = 0$  với  $n < n_0$  thì  $y(n) = 0$  với  $n < n_0$
- Nếu hệ nhân quả thì  $y(n)$  không phụ thuộc  $x(k)$  với  $k > n$

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- $h(n-k) = 0$  với  $k > n$  tức là  $h(n) = 0$  với  $n < 0$

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0-k) \\ &= [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0-1) + \dots] + [[h(0)x(n_0+1) + h(1)x(n_0+2) + \dots]] \end{aligned}$$



# Hệ nhân quả

- Đáp ứng của hệ nhân quả  $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

$h(n) = 0$  với  $n < 0$ :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Tín hiệu nhân quả:  $x(n) = 0$  với  $n < 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)$$



$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

## 2. Tính ổn định

---

- Định nghĩa: hệ thống là ổn định  $\Leftrightarrow$  với tín hiệu vào có giá trị hữu hạn thì tín hiệu ra cũng có giá trị hữu hạn

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y(n)| \leq M_y < \infty$$

- Hệ không ổn định
  - Gây tràn số
  - Làm cho hệ thống có biểu hiện bất thường

# Đáp ứng xung của hệ tuyến tính bất biến ổn định

- Giả thiết  $|x(n)| < B$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

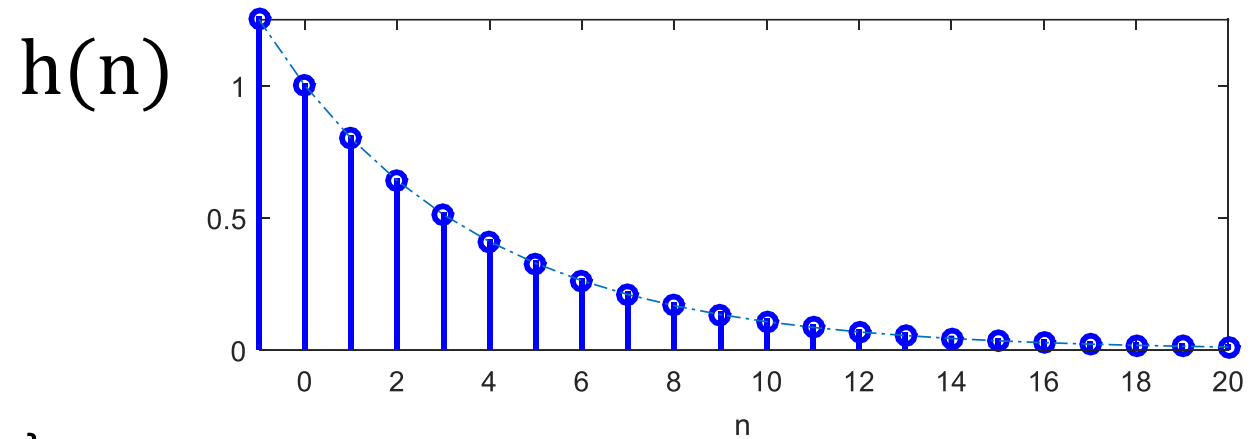
$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

$$|y(n)| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

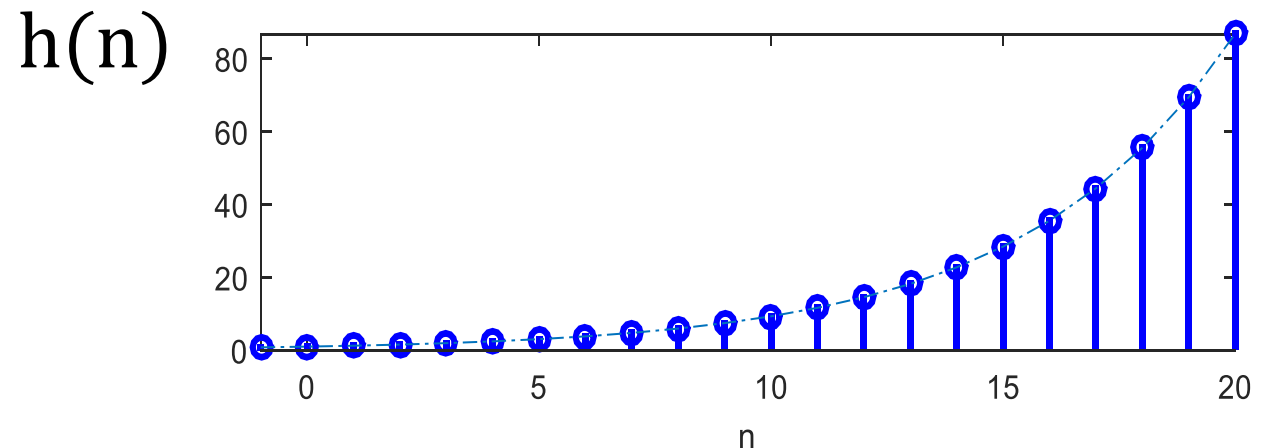
- Để  $y(n)$  có giá trị hữu hạn :  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

# Đáp ứng xung của hệ thống

- Đáp ứng xung của hệ ổn định

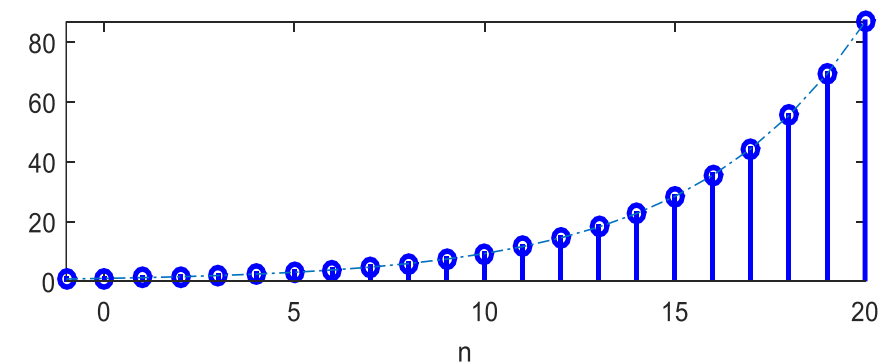
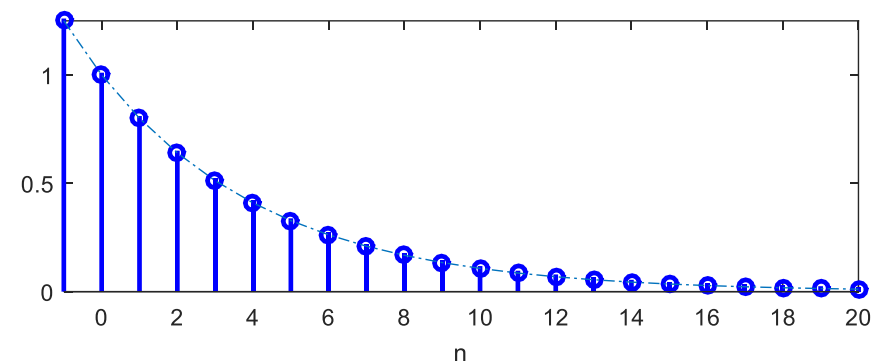


- Đáp ứng xung của hệ không ổn định



# Ví dụ

- Xét tính nhân quả và ổn định của hệ có đáp ứng xung  $h(n) = \alpha^n u(n)$
- Đây là hệ nhân quả vì  $h(n) = 0$  với  $n < 0$
- Xét tính ổn định:
  - $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n$
  - Đây là chuỗi lũy thừa, chuỗi này
    - Hội tụ nếu  $|\alpha| < 1$
    - Phân kỳ nếu  $|\alpha| > 1$
  - $\Rightarrow$  Hệ chỉ ổn định nếu  $|\alpha| < 1$



## 4. Tổng kết

- Hệ thống là nhân quả khi tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở hiện tại và quá khứ. Chỉ có hệ thống nhân quả mới thực hiện được trong thực tế. Hệ nhân quả nếu  $h(n) = 0$  với  $n < 0$ .
- Hệ thống là ổn định khi với tín hiệu vào có giá trị hữu hạn sẽ cho ra tín hiệu cũng hữu hạn. Hệ ổn định nếu  $h(n)$  là chuỗi khả tổng tuyệt đối.

# 5. Bài tập

- Bài tập 1

□ Tính đáp ứng xung  $h(n)$  và khảo sát tính nhân quả của các hệ thống sau

a.  $y(n] = 2x(n) + 3x(n - 1)$

b.  $y(n] = 4x(n + 1) + 5x(n + 2)$

c.  $y(n] = 4x(n + 1) + 2x(n) + 3x(n - 1)$

d.  $y(n] - ay(n - 1) = x(n)$

# Bài tập về nhà

---

- Bài tập 2

a. Tìm điều kiện của  $a$  để hệ nhân quả sau là ổn định

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

b. Kiểm tra điều kiện của  $a$  và  $b$  để hệ thống sau là ổn định:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$



*Bài học tiếp theo. BÀI* 6

# THỰC HIỆN HỆ THỐNG RỜI RẠC

**Tài liệu tham khảo:**

- **Nguyễn Quốc Trung (2008), Xử lý tín hiệu và lọc số, Tập 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Chương 1 Tín hiệu và hệ thống rời rạc.**
- **J.G. Proakis, D.G. Manolakis (2007), Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications, 4<sup>th</sup> Ed, Prentice Hall, Chapter 1 Introduction.**



TRƯỜNG CÔNG NGHỆ THÔNG  
TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

*Chúc các bạn học tốt!*