Lời giải đề thi cuối kì Giải tích 2 - Học kì: 20172 Đề 1

Câu 1:

Ta có: $\begin{cases} z = 30 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = z - 30 + x^2 + y^2 = 0 \\ G = z - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Xét $F = z - 30 + x^3 + y^2 = 0$ có: $\begin{cases} F'_x = 2x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x(M) = 6 \\ F'_y(M) = 8 \\ F'_z(M) = 1 \end{cases}$

Vectơ pháp tuyến của mặt $F = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{a} = (6, 8, 1)$

Xét $G = z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$ có: $\begin{cases} G'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ G'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ G'_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G'_x(M) = -\dfrac{3}{5} \\ G'_y(M) = -\dfrac{4}{5} \\ G'_z(M) = 1 \end{cases}$

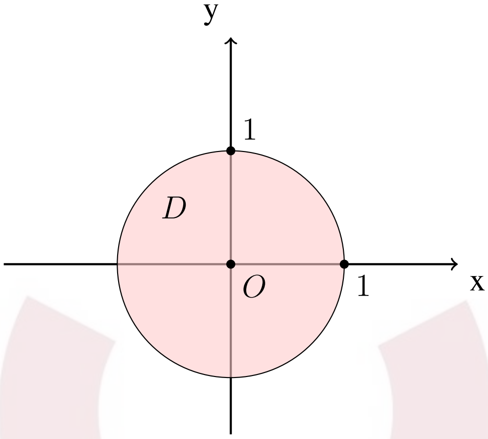
Vectơ pháp tuyến của mặt $G = 0$ tại điểm M là $\overrightarrow{b} = (-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 1)$

Coi $\overrightarrow{u}$ là vectơ chỉ phương tiếp tuyến của đường $\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$ tại điểm $M(3, 4, 5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (\dfrac{44}{5}, -\dfrac{33}{5}, 0) = \dfrac{11}{5}(4, -3, 0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

Câu 2:



Chuyển sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\to$ Miền D trở thành D' $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ và $|J| = r$

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D |x+y|\,dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |r\cdot(cos\theta + \sin\theta)| \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| r\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right| \cdot r\,drd\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 r^2dr \int_0^{2\pi} |\sin(x+\frac{\pi}{4})|d\theta \\
&= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\theta\right) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Câu 3:

Ta có: $x = y^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} x'_y = 2y \\ x'_z = 2z \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} = \sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2} = \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}$

$\Rightarrow$ Diện tích của phần mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ thỏa mãn $x \leq 1$ là:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dydz \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)}\, dydz \end{aligned}$$

Với D là miền $y^2 + z^2 \leq 1$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi\left(\frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

Câu 4:

$I = \iiint\limits_V xz\, dxdydz$ trong đó V là miền: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$.

Có $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1$. Ta đổi biến:

$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = 1 + r\sin\varphi\sin\theta \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases}$ khi đó miền V trở thành V' $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$, $|J| = r^2\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint\limits_{V'} (1 + r\cos\varphi\sin\theta)(1 + r\cos\varphi)\cdot|J|\ dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r\cos\varphi\sin\theta)\,(1 + r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \big(r\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta + r^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 1\big)\cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2\sin\theta\,dr$$

$$= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3} \quad = \quad \frac{4\pi}{3}$$

Câu 5:

$$I = \int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2} \qquad \text{Đặt} \quad t = x^2 \to x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt \quad = \quad \frac{1}{2}B(\frac{7}{2};\frac{3}{2})$$

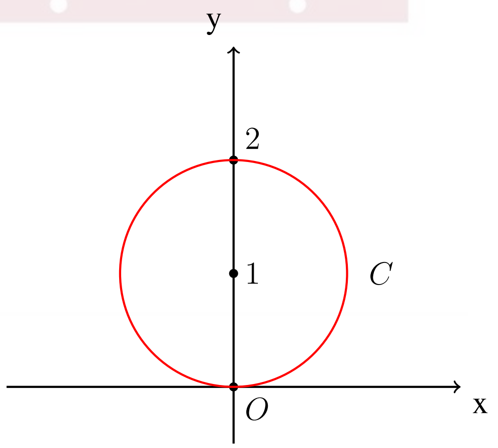
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(5)} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{4!}$$

$$= \frac{5\sqrt{\pi}}{256}$$

Câu 6:

$$I = \int\limits_C (x+y)ds \qquad \text{trong đó} \quad C: x^2 + y^2 = 2y$$

Ta đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -\sin t \\ y'_t = \cos t \end{cases}$



Khi đó:

$$I = \int_0^{2\pi} (x(t) + y(t)) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt \quad = \quad \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + 1)\, dt \quad = \quad 2\pi$$

Câu 7:

$$\overrightarrow{F} = e^{x^2+y^2+z^2} \left[\left(2x^2yz + yz\right) \overrightarrow{i} + \left(2xy^2z + xz\right) \overrightarrow{j} + \left(2xyz^2 + xy\right) \overrightarrow{k} \right]$$

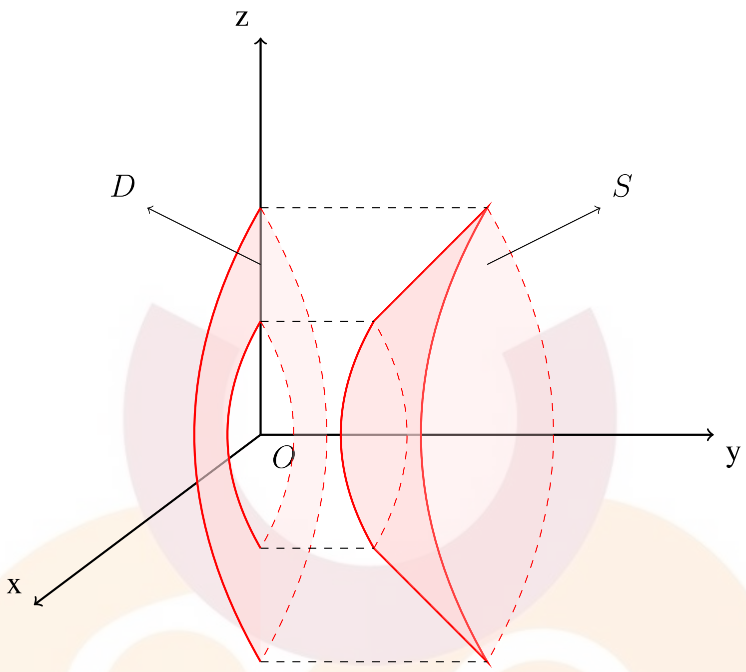
$$\Rightarrow \begin{cases} P = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2x^2yz + yz\right) \\ Q = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2xy^2z + xz\right) \\ R = e^{x^2+y^2+z^2} \left(2xyz^2 + xy\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} P_y' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(z + 4x^2y^2z + 2x^2z + 2y^2z\right) \\ P_z' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(y + 4x^2yz^2 + 2x^2y + 2yz^2\right) \end{cases} \\ \begin{cases} Q_x' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(z + 4x^2y^2z + 2x^2z + 2y^2z\right) \\ Q_z' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(x + 2xy^2z^2 + 2xy^2 + 2xz^2\right) \end{cases} \\ \begin{cases} R_x' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(y + 4x^2yz^2 + 2x^2y + 2yz^2\right) \\ R_y' = e^{x^2+y^2+z^2} \left(x + 2xy^2z^2 + 2xy^2 + 2xz^2\right) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_y' = Q_x' \\ P_z' = R_x' \\ Q_z' = R_y' \end{cases} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{F} \text{ là trường thế.}$$

Tìm hàm thế vị u, ta chọn $(x_0; y_0; z_0) = (0; 0; 0)$:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P(t;0;0)\, dt + \int_0^y Q(x;t;0)\, dt + \int_0^z R(x;y;t)\, dt + C \\ &= \int_0^x 0\, dt + \int_0^y 0\, dt + \int_0^z e^{x^2+y^2+t^2} \left(2xyt^2 + xy\right)\, dt + C \\ &= e^{x^2+y^2+t^2} xyt \Big|_0^z + C \\ &= e^{x^2+y^2+z^2} xyz + C \end{aligned}$$

Câu 8:



Ta có: $I = \iint\limits_S x^2y\, dS$, ở đó S là phần mặt nón $y = \sqrt{x^2+z^2}$, $1 \le y \le 2$

Do có: $\begin{cases} y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ y'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint\limits_S x^2y\, dS \\ &= \iint\limits_D x^2\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dzdx \\ &= \iint\limits_D \sqrt{2}x^2\sqrt{x^2+z^2}\, dzdx \quad \text{trong đó} \quad D: \begin{cases} 1 \le x^2+z^2 \le 4 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$ và miền D trở thành D' : $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{2}\cdot r\cdot (r\cos\varphi)^2\cdot r\cdot dr$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4(\cos\varphi)^2 dr$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{31}{5}(\cos\varphi)^2 d\varphi$$
$$= \frac{31\sqrt{2}\pi}{5}$$

Câu 9:

Trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2+z)\overrightarrow{i} + (x^2y+z)\overrightarrow{j}$

Gọi S là mặt paraboloid $z = x^2+y^2, z \leqslant 1$ hướng lên trên,

S' là mặt paraboloid $z = x^2+y^2, z \leqslant 1$ hướng xuống dưới.

Khi đó thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt S là:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot dS = -\iint_{S'} \overrightarrow{F}\cdot dS$$

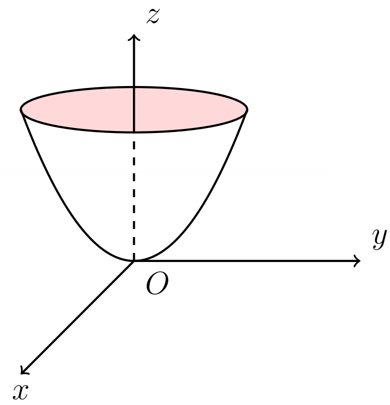
Gọi K là mặt giới hạn bởi $x^2+y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên.

Khi đó: $\iint_{S'} \overrightarrow{F}\cdot dS = \iint_{S'\cup K} \overrightarrow{F}\cdot dS - \iint_K \overrightarrow{F}\cdot dS$

$S'\cup K$ là mặt kín nên áp dụng công thức Ostrogradski cho mặt này ta được:

$$-\iint_{S'\cup K} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S'} = -\iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$
$$= -\iiint_D y^2 + x^2\, dxdydz \quad \text{trong đó } D \text{ là miền bao bởi } S' \text{ và } K$$

Chuyển sang hệ tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, |J| = r$



Miền D trở thành miền D': $\{r^2 \leqslant z \leqslant 1; 0 \leqslant r \leqslant 1; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$
Khi đó:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S'\cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS &= \iiint\limits_{D'} r^2 \cdot r\, drd\theta dz \\
&= \iint r^3 \cdot (1-r^2)\, drd\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^3(1-r^2)dr \\
&= \theta\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Vì K là mặt giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 1$, hướng lên trên nên ta có:

$$\iint\limits_K \overrightarrow{F} \cdot dS = \iint\limits_K (xy^2 + z)dydz + (x^2y + z)dzdx = 0$$

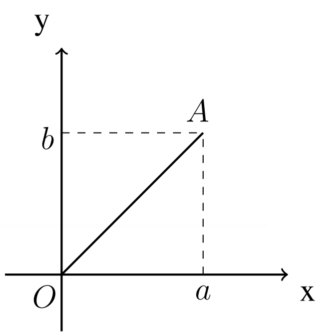
Vậy $\displaystyle\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot dS = -\iint\limits_{S'} \overrightarrow{F} \cdot dS = -\left(\iint\limits_{S'\cup K} \overrightarrow{F} \cdot dS - \iint\limits_K \overrightarrow{F} \cdot dS\right) = -\frac{\pi}{6}$

Câu 10:
Ta có: $I = \displaystyle\int\limits_L f(x+y)(dx+dy)$ có miền xác định $D = \mathbb{R}^2$

Coi: $\begin{cases} P = f(x+y) \Rightarrow P'_y = f'(x+y) \\ Q = f(x+y) \Rightarrow Q'_x = f'(x+y) \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Tích phân I không phụ thuộc vào đường đi

Chọn đường đi $OA : y = \frac{b}{a}x$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^a f\left(x + \frac{b}{a}x\right)\left(\frac{b}{a}+1\right)dx = \int\limits_0^a f\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)x\right] d\left(x + \frac{b}{a}x\right)$$



Coi $u = \left(1 + \frac{b}{a}\right)x$

khi $x = a \Rightarrow u = a + b$

khi $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow I = \int\limits_L f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(u)du \text{ (đpcm)}$$