Chương 4: Tích phân đường

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Nội dung

4.1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$.
- Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = A_0$, A_1, ..., $A_n = B$. Gọi độ dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ của chúng lần lượt là Δs_i.
- Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i.$$

- Nếu khi $\max \Delta s_i \to 0$, tổng $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ tiến tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$, và được ký hiệu là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds.$$

Trong trường hợp này ta nói f khả tích trên $\overset{\frown}{(AB)}$.

Chú ý

- Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x, y)$ liên tục trên cung trơn (từng khúc) $\overset{\frown}{AB}$ thì f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.
- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Chiều dài của cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính theo công thức $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định: tuyến tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự.

4.1.2. Cách tính

- Nếu cung $\overparen{AB}$ xác định bởi phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$ thì

$$\int\limits_{\overparen{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

- Nếu cung $\overparen{AB}$ xác định bởi phương trình $x = x(y)$, $c \le y \le d$ thì

$$\int\limits_{\overparen{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy.$$

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

- Đôi khi cần chia cung AB thành các cung nhỏ hơn để áp dụng công thức của một trong ba dạng trên.

- Tích phân đường loại một của hàm số $f(x,y,z)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian được định nghĩa tương tự.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Ví dụ (CK20152)

Tính tích phân đường $\int\limits_C (x+y)ds$, trong đó C là nửa đường tròn $x = 2 + 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \leq t \leq \pi$.

- $I = \int\limits_0^\pi (2 + 2\cos t + 2\sin t)\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt = 4\int\limits_0^\pi (1 + \cos t + \sin t)dt = 4\pi + 8.$

4.2.1. Định nghĩa

- Cho hai hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$, hướng từ A đến B.
- Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = A_0$, A_1, ..., $A_n = B$. Đặt $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$.
- Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ và lập tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$.
- Nếu khi $\max|\Delta x_i| \to 0$, $\max|\Delta y_i| \to 0$, tổng $\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$ tiến tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ dọc cung $\overset{\frown}{AB}$, và được ký hiệu là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Chú ý

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

- Tích phân đường loại hai có các tính chất: tuyến tính, cộng tính.
- (Ý nghĩa vật lý) Cho chất điểm M di chuyển dọc theo cung phẳng L từ A đến B dưới tác dụng của lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$. Giả sử $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$. Khi đó công của lực $\vec{F}$ làm chất điểm di chuyển từ A đến B là

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.1.2. Cách tính

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu ứng với $x = a$ và điểm cuối ứng với $x = b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right) dx.$$

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu ứng với $y = c$ và điểm cuối ứng với $y = d$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_c^d \left(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),x)\right) dy.$$

Ví dụ (GK20181)

Tính $\int\limits_C ydx - 2xdy$, C là đường $y = \sin x$ từ điểm $O(0,0)$ đến $A(\pi, 0)$.

$$I = \int\limits_0^\pi \sin xdx - 2x\cos xdx = -\cos x|_0^\pi - 2x\sin x|_0^\pi + \int_0^\pi 2\sin xdx = 6.$$

Cách tính

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = \alpha$ và $t = \beta$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right) dt.$$

- Đôi khi cần chia cung AB thành các cung nhỏ hơn để áp dụng công thức của một trong ba dạng trên.

Định lý ("Định lý cơ bản của tích phân đường")

Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

- $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$
- Giả sử cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = \alpha$ và $t = \beta$.
- $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \dfrac{dy}{dt} \right) dt =$
  $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \dfrac{du(x(t), y(t))}{dt} dt = u(x(\beta), y(\beta)) - u(x(\alpha), y(\alpha)) = u(B) - u(A).$

Ví dụ (CK20182)

Tính tích phân đường $\int\limits_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2=1$ định hướng dương.

- Tham số hóa $x=\cos t$, $y=\sin t$, t từ 0 đến 2π.
- $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sin t+\cos t}{|\sin t|+|\cos t|}dt=\int\limits_0^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}+\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}+\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}$
- $I_2+I_4=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{-\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}dt+\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{-\sin t+\cos t}{-\sin t+\cos t}dt=0.$
- $I_1+I_3=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{-\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt+\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\frac{-\sin t+\cos t}{-\sin t-\cos t}dt=$
  $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{-\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}dt+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{-\sin(t+\pi)+\cos(t+\pi)}{-\sin(t+\pi)-\cos(t+\pi)}dt=0.$

Trong không gian

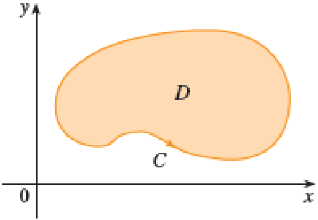
- Tích phân đường loại hai

$$\int\limits_{\overset{\frown}{(AB)}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

  được định nghĩa hoàn toàn tượng tự.

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = x(t)$ điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = \alpha$ và $t = \beta$ thì
  $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$
  $\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt +$
  $\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt.$

4.2.3. Công thức Green



Cho C là đường cong đơn kín, trơn từng khúc, định hướng dương trong mặt phẳng. Gọi D là miền chặn bởi C. Nếu hai hàm P và Q có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa D thì ta có

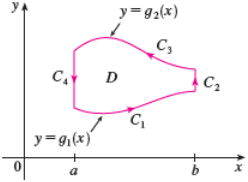
$$\boxed{\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}. \quad (1)$$

Chứng minh cho trường hợp D là hình thang cong cạnh song Ox và Oy

$$\int_{C_1} Pdx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

$$\int_{C_3} Pdx = -\int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

$$\int_{C_2} Pdx = 0 = \int_{C_4} Pdx$$



- $$\int_C Pdx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

- $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]dx$$

- Như vậy

$$\int\limits_C Pdx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \qquad (2)$$

- Tương tự

$$\int\limits_C Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

Ví dụ(CK20161)

Tính $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (2x + 3)dy$, trong đó L là đường gấp khúc $ABCA$ với $A(0,0)$, $B(1,1)$ và $C(0,2)$.

- Theo công thức Green $I = \iint_D (2 - 1 - x)dxdy$, với $D: 0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 2 - x$.
- $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} (1-x)dy = 2\int\limits_0^1 (1-x)^2 dx = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ (CK20192)

Tính $\int\limits_C (2e^x + y^2)dx + (x^4 + e^y)dy$, với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(-1, 0)$ đến $B(1, 0)$.

- $P = 2e^x + y^2$, $Q = x^4 + e^y$. Bổ sung thêm đoạn BA. Công thức Green (chú ý hướng âm):
$$J = \int\limits_{BA\cup C} Pdx + Qdy = -\iint\limits_D (4x^3 - 2y)dxdy,$$
với $D : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt[4]{1 - x^2}$.
- D đối xứng qua trục Oy và x^3 lẻ đối với x nên
$$J = 2\iint\limits_D ydxdy = 2\int\limits_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt[4]{1-x^2}} ydy = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = \pi/2.$$
- $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{-1}^{1} 2e^x dx = 2e - \dfrac{2}{e}$.
- $I = \pi/2 + 2e - 2/e$.

Hệ quả

Diện tích S của hình phẳng D có biên C định hướng dương, bằng

$$S = \int\limits_C xdy = -\int\limits_C ydx = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx.$$

Một số bài tập

- (CK20192) Tính $\int\limits_C (e^x + y^2)dx + x^2 e^y dy$, với C là biên của miền giới hạn bởi $y = 1 - x^2$ và $y = 0$, có chiều dương.
- (CK20181) Tính $\int\limits_{ABCDA} \dfrac{2ydx - xdy}{|x| + |y|}$, $ABCDA$ là đường gấp khúc với $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.
- (CK20171) Tính $\int\limits_C (\arctan\dfrac{x}{y})(xdx + ydy)$, C là đường $x = 3 + \sqrt{2}\cos t$, $y = 3 + \sqrt{2}\sin t$ theo chiều t tăng từ $-\dfrac{3\pi}{4}$ đến $\dfrac{\pi}{4}$.
- (CK20152) Tính $\int\limits_C (e^y - 3x^2y)dx + (3xy^2 + xe^y)dy$, trong đó C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, đi từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$.
- (CK20182*) Cho $\alpha > 0$. Tính tích phân đường $\int\limits_{C_\alpha} \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, trong đó C_α là đường $x^2 + \alpha y^2 = 1$.

4.2.4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lý

Cho hai hàm P, Q liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên miền (mở) đơn liên D. Các khẳng định sau là tương đương.

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B mà không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B, với $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong D.
2. $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$, với mọi đường cong kín, trơn từng khúc C nằm trong D.
3. $Q'_x(M) = P'_y(M)$, với mọi $M \in D$.
4. Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó trong miền D.

- Chứng minh: (4) $\overset{Schwarz}{\Rightarrow}$ (3) $\overset{Green}{\Rightarrow}$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4).
- $1 \Rightarrow (4)$: $u(x,y) = \int\limits_A^M Pdx + Qdy + C$, ở đây $A(x_0, y_0)$ cố định, $M(x,y)$ chạy trong D.
- Giả sử các điều kiện tương đương trong định lý trên được thỏa mãn.

Hệ quả

Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ cho bởi công thức

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + C,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0, t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t,y)dt + C,$$

Ví dụ (CK20152)

Tính tích phân đường $\int\limits_C e^{2x+y^2}[(1+2x)dx + 2xydy]$, trong đó C là đường cong $x = y^3$ đi từ $O(0,0)$ đến $N(1,1)$.

- $P = (1+2x)e^{2x+y^2}$, $Q = 2xye^{2x+y^2}$.
- $Q'_x = 2ye^{2x+y^2} + 2xy \cdot 2e^{2x+y^2}$.
- $P'_y = (1+2x)2ye^{2x+y^2} = Q'_x$.
- Tích phân không phụ thuộc vào đường đi. Chọn đường đi là đường OAN với $A = (1,0)$.
- $I = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AN} = \int\limits_0^1 (1+2x)e^{2x}dx + \int\limits_0^1 e^{2+y^2}2ydy = e^2 + (e^3 - e^2) = e^3$.
- (Nếu chọn đường đi OBN với $B(0,1)$ thì

  $I = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BN} = 0 + \int\limits_0^1 (1+2x)e^{1+2x}dx = e^3$.)

Ví dụ (CK20171)

Tìm a để biểu thức

$$\left(y^3 + \frac{y}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(axy^2 + \frac{x}{1+x^2y^2}\right)dy$$

là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$, tìm hàm số $u(x, y)$ đó.

- $P = y^3 + \frac{y}{1+x^2y^2}$, $Q = axy^2 + \frac{x}{1+x^2y^2}$.
- $P'_y = 3y^2 + \frac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{1+x^2y^2}$, $Q'_x = ay^2 + \frac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{1+x^2y^2}$
- $P'_y = Q'_x \Leftrightarrow a = 3$.
- $u = \int\limits_0^x P(x,0)dx + \int\limits_0^y Q(x,y)dy + C =$
  $0 + \int\limits_0^y (3xy^2 + \frac{x}{1+x^2y^2})dy + C = xy^3 + \arctan(xy) + C$

Ví dụ (CK20162)

Tính tích phân $\int\limits_C (y^2 - e^y \sin x)dx + (x^2 + 2xy + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y - y^2}$, đi từ $O(0,0)$ đến $P(0,2)$.

- $P = y^2 - e^y \sin x,\ Q = x^2 + 2xy + e^y \cos x$.
- $P'_y = 2y - e^y \sin x,\ Q'_x = 2x + 2y - e^y \sin x$.
- $I = I_1 + \int\limits_C x^2 dy$, với $I_1 = \int\limits_C P dx + Q_1 dy$ không phụ thuộc vào đường đi, ở đây $Q_1 = 2xy + e^y \cos x$.
- Tính I_1: Chọn đường đi là đoạn thẳng OP, suy ra $I_1 = \int\limits_0^2 e^y dy = e^2 - 1$.
- Tính $\int\limits_C x^2 dy = \int\limits_0^2 (2y - y^2) dy = 4/3$.
- $I = e^2 + 1/3$.

Một số bài tập

- (CK20162) Tính $\int\limits_C \dfrac{(2x+y^2e^x)dx + 2ye^x dy}{\sqrt{1+x^2+e^x y^2}}$, trong đó C là nửa dưới đường tròn $(2x-1)^2+(2y-1)^2=2$ đi từ $O(0,0)$ đến $M(1,1)$.
- (CK20142) Tìm a, b để tích phân đường sau không phụ thuộc vào đường đi: $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^x\left[(2x+ay^2+1)dx+(bx+2y)dy\right]$.

I my free time I do differential and integral calculus.

I my free time I do differential and integral calculus.

KARL MARX