CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

GIẢI

ĐỀ THI CUỐI KỲ

môn XSTK

HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

GIẢI ĐỀ CUỐI KỲ XSTK MI2020 [20171-20201]

Tác giả:

Made by Team XSTK

Tài liệu tham khảo:

- *Giáo trình XSTK - Tống Đình Quỳ*
- *Bài giảng XSTK - Nguyễn Thị Thu Thủy*

Hà Nội, 31 tháng 5 năm 2021

Mục lục

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20171

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Xác suất làm việc của một hệ thống trong khoảng thời gian xác định nào đó được gọi là xác suất tin cậy (XSTC) của hệ thống đó.

a) Tính XSTC của một mạng gồm 2 linh kiện mắc nối tiếp cùng có XSTC là 0,95.

b) Mắc song song với mạng trên một mạng dự phòng gồm 2 linh kiện mắc nối tiếp cùng có XSTC là 0,94. Tính XSTC của mạng mới đó.

Câu 2. Một lô hàng gồm 16 sản phẩm loại A và 12 sản phẩm loại B. Chọn ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm.

a) Tính xác suất để trong 3 sản phẩm đó có ít nhất 2 sản phẩm loại A.

b) Chọn tiếp ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm trong số sản phẩm còn lại. Tính xác suất để trong số 3 sản phẩm được chọn lần hai có ít nhất 1 sản phẩm loại A.

Câu 3. Theo điều tra của một hãng bảo hiểm ô tô tỷ lệ xe bị tai nạn trong năm là 0,15. Trong số xe bị tai nạn có: 80% được bồi thường tai nạn bằng 20% giá trị xe, 12% được bồi thường bằng 60% giá trị xe và 8% được bồi thường bằng 100% giá trị xe.

a) Hỏi trung bình phải bồi thường tai nạn bằng bao nhiêu cho một xe có giá trị 600 triệu đồng?

b) Đối với chiếc xe trên phải quy định phí bảo hiểm là bao nhiêu để hãng không bị lỗ?
(Chỉ kể chi phí bồi thường, không kể các chi phí khác).

Câu 4. Thống kê ở một vùng trong 500 xe ô tô đăng ký có 68 xe thể thao. Với độ tin cậy 95% hãy xác định khoảng tin cậy đối xứng cho tỷ lệ xe thể thao ở vùng đó. Theo anh (chị) có cách nào để nâng cao độ chính xác của khoảng tin cậy cho tỷ lệ trên?

Câu 5. Đo thời gian phản ứng (giây) đối với hai loại thuốc kích thích của 8 người tham gia thí nghiệm (giả sử thời gian phản ứng đối với mỗi loại thuốc được coi là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn), ta có bộ số liệu cặp:

Thuốc	3,1	1,5	2,9	2,6	1,7	2,3	3,8	2,4
Thuốc	4,1	2,2	3,5	1,8	2,7	2,5	3,4	3,2

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, có thể cho rằng thời gian phản ứng trung bình đối với 2 loại thuốc là như nhau hay không?

Giải đề cuối kì 20171

Câu 1. Gọi $A_i = \{\text{Linh kiện i hoạt động tốt}\}, i = 1,2$

a) Gọi A ={Mạng làm việc tốt}

$\Rightarrow P(A) = A_1A_2$

$\Rightarrow P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0,95.0,95 = 0,9025$ (do tính độc lập)

b)

* Gọi B ={Mạng dự phòng hoạt động tốt}

$B_i = \{\text{Linh kiện i của mạng dự phòng hoạt động tốt}\}, i = 1,2$

$\Rightarrow P(B) = B_1B_2$

$\Rightarrow P(B) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0,94.0,94 = 0,883$

* Gọi $C = \{\text{Mạng mới làm việc tốt}\}$

$\Rightarrow C = A + B$

$\Rightarrow P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
$= 0,9025 + 0,8836 - 0,9025.0,8836 = 0,9887$

Câu 2.

Xét phép thử ngẫu nhiên chọn ra 3 sản phẩm

Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{28}^3 = 3276$ *cách*

a) Gọi A_i={Trong 3 sản phẩm có ít nhất 2 sản phẩm loại A}

Số kết cục thuận lợi cho A là: $m = C_{16}^2.12 + C_{16}^3 = 2000$ *cách*

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{2000}{3276} = \dfrac{500}{819} = 0,1605$

b) Gọi $B_i = \{\text{Trong 3 sản phẩm lần đầu lấy ra có i sản phẩm loại B}\}, \quad i = 0,1,2,3$

Hệ $\{B_i\}$ tạo thành hệ đầy đủ với:

$$P(B_0) = \frac{C_{16}^3}{C_{28}^3} = \frac{20}{117}; \ P(B_1) = \frac{C_{16}^2.12}{C_{28}^3} = \frac{40}{91}; \ P(B_2) = \frac{16.C_{12}^2}{C_{28}^3} = \frac{88}{273}; \ P(B_3) = \frac{C_{12}^3}{C_{28}^3} = \frac{55}{819}$$

Gọi $B = \{\text{Trong 3 sản phẩm lần 2 có ít nhất 1 sản phẩm loại A}\}$

$\Rightarrow \overline{B} = \{\text{Trong 3 sản phẩm lần 2 có 0 sản phẩm loại A}\}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(\overline{B}) = P(B_0)P(\overline{B}|B_0) + P(B_1)P(\overline{B}|B_1) + P(B_2)P(\overline{B}|B_2) + P(B_3)P(\overline{B}|B_3)$$

trong đó:

$$P(B_0)P(\overline{B}|B_0) = \frac{C_{12}^3}{C_{25}^3} = \frac{11}{115}; \qquad P(B_1)P(\overline{B}|B_1) = \frac{C_{11}^3}{C_{25}^3} = \frac{33}{460};$$

$$P(B_2)P(\overline{B}|B_2) = \frac{C_{10}^3}{C_{25}^3} = \frac{6}{115}; \qquad P(B_3)P(\overline{B}|B_3) = \frac{C_9^3}{C_{25}^3} = \frac{21}{575}.$$

$$\Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{20}{117}.\frac{11}{115} + \frac{40}{91}.\frac{33}{460} + \frac{88}{273}.\frac{6}{115} + \frac{55}{819}.\frac{21}{575} = 0,0672$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,0672 = 0,9328$$

Câu 3:

a) Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ chi phí bồi thường cho chiếc xe 600 triệu. $X = \{120, 360, 600\}$

$P(X = 120) = 0,8$

$P(X = 360) = 0,12$

$P(X = 600) = 0,08$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	120	360	600
P	0,8	0,12	0,08

$\Rightarrow E(X) = 120.0,8 + 360.0,12 + 600.0,08 = 187,2$

Vậy trung bình phải bồi thường tai nạn cho một xe có giá trị 600 triệu đồng là 187,2 triệu đồng.

b) Gọi x là phí bảo hiểm. Để không lỗ thì:

$$x - 0,15.E(X) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 0,15.187,2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 28,08 \text{ triệu đồng}$$

Câu 4:

Gọi p là tỷ lệ xe thể thao ở vùng đó. Kiểm tra điều kiện:

$nf = 500.0,136 = 68 > 5$; $n(1-f) = 500.864 = 432 > 5$.

- Chọn thống kê: $Z = \dfrac{f-p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n}.Z \sim N(0,1)$

- Khoảng tin vậy đối xứng của xác suất p là:

$$\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}};\ f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$$

trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng phân phối chuẩn tắc.

- Với $n = 500$; $m = 68$; $f = \dfrac{m}{n} = 0,136$ suy ra khoảng tin cậy đối xứng của p là:

$$\left(0,136 - 1,96.\sqrt{\frac{0,136(1-0,136)}{500}};\ 0,136 + 1,96.\sqrt{\frac{0,136(1-0,136)}{500}}\right) = (0,1060; 0,1660)$$

- Vậy với mức ý nghĩa 5% tỷ lệ xe thể thao ở vùng đó từ 10,6% đến 16,6%

Để nâng cao độ chính xác của khoảng tin cậy cho tỷ lệ trên cần tăng cỡ mẫu hoặc giảm độ tin cậy (hoặc đồng thời cả hai).

Câu 5:

Gọi X, Y lần lượt là thời gian phản ứng (giây) đối với hai loại thuốc kích thích, Ta có:

$$X \sim N(\mu_1;\sigma_2^2);\;\; Y \sim N(\mu_2;\sigma_2^2)$$
$$n_1 = n_2 = 8$$

Đặt Z = X - Y, thiết lập hiệu $z_i = x_i - y_i, \quad i = 1,2,...,8$:

X	3,1	1,5	2,9	2,6	1,7	2,3	3,8	2,4
P	4,1	2,2	3,5	1,8	2,7	2,5	3,4	3,2
Z	-1,0	-0,7	-0,6	0,8	-1,0	-0,2	0,4	-0,8

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$; đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 0$.

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{Z} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $T \sim (n-1)$

- Với $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối Student ta được $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^7_{0,975} = 2,365$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$W_\alpha = \left(-\infty; -t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right) = (-\infty; -2,365) \cup (2,365; +\infty)$$

- Từ số liệu đầu bài, tính toán ta được: $n = 8$; $\overline{z} = -0,3875$; $s = 0,6686$ với $\mu_0 = 0$ suy ra giá trị quan sát là:

$$t_{qs} = \frac{\overline{z} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{-0,3875 - 0}{0,6686}\sqrt{8} = -1,6393$$

- Vì $t_{qs} = -1,6393 \notin W_{qs}$ nên chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể cho rằng thời gian phản ứng trung bình đối với 2 loại thuốc là như nhau hay với mức ý nghĩa 5%

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20172

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Một hộp có n áo trắng và $2n$ áo xanh. Chia ngẫu nhiên các áo thành n nhóm (mỗi nhóm 3 áo).

a) Tính xác suất để trong mỗi nhóm đều có áo trắng.

b) Áp dụng có $n = 5$.

Câu 2. Một xí nghiệp có 4 chiếc máy tiện với xác suất bị sự cố trong ngày của mỗi máy tương ứng là 0,01; 0,05; 0,1 và 0,1.

a) Trong một ngày nào đó theo dõi một máy. Tính xác suất để máy đó bị sự cố.

b) Khi theo dõi 2 máy thì có đúng 1 máy bị sự cố. Tính xác suất chiếc máy bị sự cố đó là máy thứ nhất.

Câu 3. Xét một phần tư hình tròn tâm $\mathrm{O}(0;0)$ bán kính bằng a, kí hiệu OAB, với tọa độ tương ứng là $\mathrm{A}(a;0)$ và $\mathrm{B}(0;a)$.

a) Trên đoạn OA lấy ngẫu nhiên một điểm C. Tìm phân phối xác suất của độ dài đoạn OC.

b) Dựng một đường đi qua C, vuông góc với OA và cắt cung tròn tại điểm D. Tính kỳ vọng và phương sai của độ dài đoạn CD.

Câu 4. Tiến hành 120 phép đo như nhau, độc lập, thì thấy sự kiện A xuất hiện 42 lần.

a) Xác định khoảng tin cậy đối xứng 99% cho tỷ lệ xuất hiện A.

b) Tính xác suất để sai số ước lượng của tỷ lệ trên bé hơn 10% tần suất mẫu.

Câu 5. Cân 150 con vịt người ta thu được bộ số liệu sau:

Khối lượng	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
Số lượng	2	6	24	35	39	24	14	6

Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng khối lượng trung bình của lứa vịt trên lớn hơn 2 kg được không?

Giải đề cuối kì 20172

Câu 1.

Xét phép thử chia ngẫu nhiên các áo thành n nhóm (mỗi nhóm 3 áo).

Tổng số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{3n}^3.C_{3n-3}^3...C_3^3$

a) Gọi A= {Trong mỗi nhóm đều có áo trắng}

Số kết cục thuận lợi cho A là:

$m = n.C_{2n}^2.(n-1).C_{2n-2}^2...1.C_2^2$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n.C_{2n}^2.(n-1).C_{2n-2}^2...1.C_2^2}{C_{3n}^3.C_{3n-3}^3...C_3^3} = \frac{n.\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}.(n-1).\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}...1.\frac{2!}{2!}}{\frac{(3n)!}{3!(3n-3)!}.\frac{(3n-3)!}{3!(3n-6)!}...\frac{3!}{3!}}$$

$$= \frac{\frac{n!.(2n)!}{(2!)^n}}{\frac{(3n)!}{(3!)^n}} = 3^n.\frac{n!(2n)!}{(3n)!} = \frac{3^n}{C_{3n}^n}$$

b) Với $n = 5$: $\qquad P(A) = \dfrac{3^5}{C_{15}^5} = \dfrac{81}{1001}$

Câu 2.

a) Gọi $A_i = \{$Máy theo dõi là máy i$\}$, $\quad i = 1,2,3,4$

Hệ $\{A_i\}$ tạo thành hệ đầy đủ với:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

Gọi H = {Máy bị sự cố}

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2) + P(A_3)P(H|A_3) + P(A_4)P(H|A_4)$$

trong đó:

$P(H|A_1) = 0,01;\qquad P(H|A_2) = 0,05;\qquad P(H|A_3) = 0,1;\qquad P(H|A_4) = 0,1.$

$$\Rightarrow P(H) = \frac{1}{4}.0,01 + \frac{1}{4}.0,05 + \frac{1}{4}.0,1 + \frac{1}{4}.0,1 = \frac{13}{200} = 0,065$$

b) Hệ $\{A_1A_2, A_1A_3, A_1A, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4\}$ tạo thành hệ đầy đủ với:

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1A_4) = P(A_2A_3) = P(A_2A_4) = P(A_3A_4) = \frac{1}{6}$$

Gọi K = {Có đúng 1 máy bị sự cố khi theo dõi 2 máy}

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(K) = P(A_1A_2)P(k|A_1A_2) + P(A_1A_3)P(k|A_1A_3) + P(A_1A_4)P(k|A_1A_4) + P(A_2A_3)P(k|A_2A_3) + P(A_2A_4)P(k|A_2A_4) + P(A_3A_4)P(k|A_3A_4)$$

trong đó:

$P(K|A_1A_2) = 0,01.0,95 + 0,99.0,05 = 0,059$

$P(K|A_1A_3) = 0,01.0,90 + 0,99.0,1 = 0,108$

$P(K|A_1A_4) = 0,01.0,90 + 0,99.0,1 = 0,108$

$P(K|A_2A_3) = 0,05.0,9 + 0,95.0,1 = 0,14$

$P(K|A_2A_4) = 0,05.0,9 + 0,95.0,1 = 0,14$

$P(K|A_3A_4) = 0,1.0,9 + 0,9.0,1 = 0,18$

$\Rightarrow P(K) = 0,1225$

Gọi C = {Trong 2 máy thì máy bị sự cố là máy thứ nhất}

$\Rightarrow CK = \{$Có đúng máy thứ nhất bị sự cố khi theo dõi 2 máy$\}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(CK) = P(A_1A_2)P(CK|A_1A_2) + P(A_1A_3)P(CK|A_1A_3) + P(A_1A_4)P(CK|A_1A_4) + P(A_2A_3)P(CK|A_2A_3) + P(A_2A_4)P(CK|A_2A_4) + P(A_3A_4)P(CK|A_3A_4)$$

trong đó:

$P(CK)|A_1A_2) = 0,01.0,95 = 0,0095$

$P(CK)|A_1A_3) = 0,01.0,90 = 0,009$

$P(CK)|A_1A_4) = 0,01.0,90 = 0,009$

$P(CK)|A_2A_3) = 0$

$P(CK)|A_2A_4) = 0$

$P(CK)|A_3A_4) = 0$

$\Rightarrow P(CK) = \dfrac{11}{2400}$

Xác suất cần tính là: $P(C|K) = \dfrac{P(CK)}{P(K)} = \dfrac{\frac{11}{2400}}{0,1225} = 0,0374$

Câu 3.

a) Gọi X là độ dài đoạn OC thì X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều, $X \sim U[0,a]$, Hàm mật độ xác suất của X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

b) Gọi Y là độ dài đoạn CD thì Y là biến ngẫu nhiên thỏa mãn điều kiện:

$$Y = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2}, & x \in [0, a] \\ 0, \quad x \notin [0, a] \end{cases}$$

Kì vọng của Y: $E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y f_X(x) dx = \int\limits_{0}^{a} \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$

Đặt $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt$

$E(Y) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a}.a^2.\cos^2 t dt = a \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a\pi}{4}$

Có: $E(Y^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y^2 f_X(x) dx = \int\limits_{0}^{a} \frac{1}{a}(a^2 - x^2) dx = \frac{1}{a}.\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a} = \frac{2a^2}{3}$

$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - E(Y^2) = \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2\pi^2}{16} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}\right) a^2$

Câu 4.

a) Gọi p là tỷ lệ cây cà phê có thu hoạch thấp. $f = \frac{42}{120} = 0,35$. Kiểm tra điều kiện:

$$nf = 42 > 5; \qquad n(1 - f) = 78 > 5$$

- Chọn thống kê $Z = \frac{f - p}{\sqrt{f(1 - p)}} \sqrt{n}.Z \sim N(0, 1)$

- Khoảng tin vậy đối xứng của xác suất p là:

$$\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1 - f)}{n}}; \ f + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1 - f)}{n}}\right)$$

trong đó $\alpha = 0,01$; $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,575$ được tra từ bảng phân phối chuẩn.

- Với $n = 120$; $m = 42$; $f = 0,35$ suy ra khoảng tin cậy đối xứng của p là:

$$\left(0,35 - 2,575.\sqrt{\frac{0,35.0,65}{120}}; \ 0,35 + 2,575.\sqrt{\frac{0,35.0,65}{120}}\right) = (0,2379; 0,4621)$$

Vậy với độ tin cậy 95%, tỷ lệ cây cà phê có thu hoạch thấp từ 23,79% đến 46,21%

b) Xác suất cần tính là: $P(|\overline{p} - p| < \varepsilon) = 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\widehat{\sigma_{\overline{p}}}}\right)$

trong đó:

$$\varepsilon = 0,1.0,35 = 0,035; \quad \widehat{\sigma_{\overline{p}}} = \sqrt{\frac{0,35.0,65}{120}} = 0,0435$$

$\Rightarrow P(|\overline{p} - p| < \varepsilon) = 2\phi(0,8046) = 0,602$

Câu 5.

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ khối lượng trung bình của lứa vịt trên. $E(X) = \mu$

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$. Đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$ với $\mu_0 = 2$

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0,1)$

- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối chuẩn tắc có $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ H_0 là:

$$W_s = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$$

- Từ số liệu đã cho, có: $\mu_0 = 2$; $n = 150$; $\overline{x} = 2,185$; $s = 0,3781$ suy ra giá trị quan sát:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{2,185 - 2}{0,3781}\sqrt{150} = 5,9925$$

- Vì $u_{qs} \in W_s$ nên bác bỏ H_0, chấp nhận H_1, nghĩa là có thể cho rằng khối lượng trung bình của lứa vịt trên lớn hơn 2kg với mức ý nghĩa 5%.

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20173

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Một lô hàng có 15 sản phẩm gồm 6 loại A, 5 loại B và 4 loại C. Chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) ra 4 sản phẩm.

a) Tính xác suất trong 4 sản phẩm đươc chọn có đúng 2 sản phẩm loại B.

b) Biết trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại A. Tính xác suất để trong 4 sản phẩm đó có đúng 1 sản phẩm loại C.

Câu 2. Một nhóm học sinh có 5 loại giỏi, 4 khá và 2 trung bình. Chọn ngẫu nhiên ra một nhóm gồm 2 học sinh.

a) Tính giá trị trung bình của số học sinh giỏi trong nhóm đó.

b) Biết trong nhóm 2 học sinh có ít nhất 1 loại khá. Tính xác suất để trong nhóm đó có đúng 1 học sinh giỏi.

Câu 3. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ (phân phối Rayleigh)

$$f(x) = \begin{cases} A.e^{\frac{-x^2}{4}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số A.

b) Tính các đặc trưng định vị: E(X) và mod(X).

Câu 4. Số liệu dưới đây cho tỷ lệ phần trăm một hóa chất trong 11 mẫu một loại xi măng:

Tỷ lệ (%)	6	15	8	8	6	9	17	18	4	8	10

Với độ tin cậy 95% hãy tìm ước lượng khoảng cho tỷ lệ phần trăm trung bình của loại hóa chất trên (giả sử tỷ lệ đó là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn).

Câu 5. Một mẫ gồm $n = 64$ sản phẩm có 4 sản phẩm lỗi. Có đủ bằng chứng để chấp nhận giá thuyết "$p > 5\%$" được không?
Cho mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, p ký hiệu tỷ lệ sản phẩm lỗi.

Giải đề cuối kỳ 20173

Câu 1.

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) ra 4 sản phẩm.

Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{15}^4 = 1365$ cách

a) Gọi B ={Trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại B}

Số kết cục thuận lợi cho B là: $m = C_5^2.C_{10}^2 = 450$ cách

$$\Rightarrow P(B) = \frac{m}{n} = \frac{450}{1365} = \frac{30}{91}$$

b) Gọi A ={Trong 4 sản phẩm được chọn có đúng 2 sản phẩm loại A}

Số kết cục thuận lợi cho A là: $p = C_6^2.C_9^2 = 540$ cách

$$\Rightarrow P(A) = \frac{p}{n} = \frac{540}{1365} = \frac{36}{91}$$

Gọi H ={Trong 4 sản phẩm đó có đúng 1 sản phẩm loại C}

Xác suất cần tính là:

$$P(H|A) = \frac{P(AH)}{P(A)}$$

trong đó:

$$P(AH) = \frac{C_6^2.C_4^1.C_5^1}{C_{15}^4} = \frac{20}{91}$$

$$\Rightarrow P(H|A) = \frac{P(AH)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{91}}{\frac{36}{91}} = \frac{5}{9}$$

Câu 2.

a) Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số học sinh giỏi trong số 2 người được chọn.

Gọi A_i ={Trong 2 người được chọn có i học sinh giỏi}, i={0,1,2}

$$P(X=0) = P(A_0) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{11}$$

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{5.6}{C_{11}^2} = \frac{6}{11}$$

$$P(X=2) = P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{2}{11}$$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2
P	3/11	6/11	2/11

$\Rightarrow E(X) = 0.\frac{3}{11} + 1.\frac{6}{11} + 2.\frac{2}{11} = \frac{10}{11}$

b) Gọi H ={Trong 2 người được chọn có ít nhất 1 học sinh khá}

Xác suất cần tính là:

$$P(A_1|H) = \frac{P(A_1H)}{P(H)}$$

trong đó:

$$P(A_1H) = \frac{5.4}{C_{11}^2} = \frac{4}{11}$$

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{11}^2} = \frac{34}{35}$$

$$\Rightarrow P(A_1|H) = \frac{P(A_1H)}{P(H)} = \frac{\frac{4}{11}}{\frac{34}{35}} = \frac{10}{17}$$

Câu 3.

a) Vì $f(x)$ là hàm mật độ xác suất nên:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad (1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow A.e^{\frac{-x^2}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0$

(2):

Đặt $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}}$ *là hàm mật độ xác suất của BNN X có phân phối chuẩn.*

$X \sim N(0; (\sqrt{2})^2)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = 1$

Có: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} A.e^{\frac{-x^2}{4}} dx = \int_{0}^{+\infty} A.2\sqrt{\pi}.\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = A\sqrt{\pi}\, 2.\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx$

Do $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}}$ là hàm chẵn nên:

$2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = A\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow A\sqrt{\pi} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ (TM)}$$

Vậy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}}, \ x \geq 0 \\ 0, \ \textit{trái lại} \end{cases}$$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x x e^{\frac{-x^2}{4}} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \frac{-x}{2} e^{\frac{-x^2}{4}} dx = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} d(e^{\frac{-x^2}{4}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Hàm mật độ xác suất có:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}}, \ x \geq 0 \\ 0, \ \textit{trái lại} \end{cases}$$

đổi dấu sang âm khi đi qua $x = 0$, do đó đạt cực đại tại điểm này, nên $modX = 0$

Câu 4. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ tỷ lệ phần trăm một hóa chất trong các mẫu xi măng.

$X \sim N(\mu; \sigma^2). E(X) = \mu$

- Chọn thống kê $T = \frac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n}$. Vì $n = 11 < 30$ nên T có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do

- Sử dụng khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$

$$\left(\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

trong đó $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = t_{0,975}^{10} = 2,228$ được xác định từ bảng phân phối Student.

- Tính toán ta được: $\overline{x} = 9,9091; s = 4,6788; n = 11$. Khoảng tin cậy đối xứng là:

$$\left(9,9091 - 2,228\frac{4,6788}{\sqrt{11}}; 9,9091 + 2,228\frac{4,6788}{\sqrt{11}}\right) = (6,77; 13,05)$$

- Vậy với độ tin cậy 95%, tỷ lệ phần trăm trung bình một hóa chất trong các mẫu xi măng từ 6,77% đến 13,05%.

Câu 5.

Gọi p là tỷ lệ sản phẩm lỗi

- Đặt giả thuyết $H_0 : p = p_0$. Đối thuyết $H_1 : \ p > p_0$ với $p_0 = 0,05$

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0;1)$

- Với $\alpha = 0,05, u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$ tra từ bảng phân phối chuẩn tắc. Miền bác bỏ H_0 là:

$$W_s = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,645; +\infty)$$

- Từ số liệu đề bài, ta có: $n = 64; m = 4 \Rightarrow f = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{64} = 0,0625$ suy ra giá trị quan sát:

$u_{qs} = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \dfrac{0,0625 - 0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{64} = 0,4588$

- Vì $u_{qs} \notin W_s$ nên chưa đủ cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là có đủ bằng chứng để chấp nhận giả thuyết "$p > 5\%$".

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20181

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Ở một địa phương đàn ông chiếm 55% dân số. Theo thống kê tỷ lệ đàn ông bị bạch tạng là 0,4%, còn tỷ lệ trên của đàn bà là 0,32%.

a) Tìm tỷ lệ người bị bệnh bạch tạng ở địa phương đó.

b) Gặp ngẫu nhiên một người bị bạch tạng, tính xác suất đó là đàn ông.

Câu 2. Một máy đếm người vào một siêu thị có tỷ lệ đếm sót là 0,018. Giả sử trong vòng 1 giờ nào đó có 500 khách vào siêu thị.

a) Tính kỳ vọng và phương sai của số người được máy đếm trong số 500 người nói trên.

b) Tính xác suất để máy này đếm sót từ 6 đến 10 người trong số 500 người đó.

Câu 3. Một linh kiện điện tử có thời gian hoạt động X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ của X là: $f(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}, x > 0$.

a) Xác định phân phối xác suất cho thời gian hoạt động của một mạng gồm 2 linh kiện loại trên mắc song song.

b) Tính kỳ vọng và phương sai của thời gian hoạt động của mạng đó.

Câu 4. Ở một trung tâm giống cây trồng, theo dõi 3070 cây cà phê thì có 1135 cây cho thu hoạch thấp.

a) Với độ tin cậy 95% hãy xác định khoảng tin cậy cho tỷ lệ cây cà phê có thu hoạch thấp.

b) Tần suất cà phê có thu hoạch thấp có là ước lượng không chệch của tỷ lệ cây cho thu hoạch thấp không? Tại sao?

Câu 5. Theo dõi thời gian bắt đầu có tác dụng của một loại thuốc trên một nhóm bệnh nhân trước và sau khi mổ dạ dày, ta thu được bộ số liệu (giả sử thời gian trên có phân phối chuẩn):

Bệnh nhân	1	2	3	4	5	6	7	8
Trước mổ	44	51	52	55	66	68	70	71
Sau mổ	52	64	60	74	55	67	75	65

Hỏi thời gian tác dụng của thuốc trước và sau mổ có khác nhau không với mức ý nghĩa 1%?

Phụ lục: trích Bảng hàm phân phối chuẩn

x	1,282	1,645	1,96	2	2,576	3
$\Phi(x)$	0,90	0,95	0,975	0,9772	0,995	0,9987

Hàm Laplace $\phi(x) = \Phi(x)$ - 0,5.

Giải đề cuối kỳ 20181

Câu 1.

Gọi A_1 ={Gặp được đàn ông}; A_2 ={Gặp được đàn bà}

Hệ A_1; A_2 tạo thành hệ đầy đủ với:

$P(A_1) = 0,55;\ P(A_2) = 0,45$

a) Gọi A ={Gặp được người bị bạch tạng}

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2)$$

trong đó:

$P(A|A_1) = 0,4;\ P(A|A_2) = 0,32$

$\Rightarrow P(A) = 0,55.0,4 + 0,45.0,32 = 0,364$

b) Xác suất cần tính là:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{P(A)} = \frac{0,55.0,4}{0,364} = 0,6044$$

Câu 2.

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số người do máy đếm được. $X \sim B(n;p)$ với $n = 500;\ p = 0,982$

a) $E(X) = np = 500.0,982 = 491$ người

$V(X) = np(1-p) = 500.0,982 = 0,018 = 8,838$

b) Sự kiện Máy này đếm sót từ 6 đến 10 người trong số 500 người tương đương với máy đếm được 490 đến 494người trong số 500 người đó.

Xác suất cần tính là:

$$P(490 \le X \le 494) \ = \sum_{k=490}^{494} C_{500}^{k}.0,982^{k}.0,018^{500-k} = 0,5936$$

Câu 3.

a) Gọi $X_1,\ X_2$ lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của 2 linh kiện trong mạch.

Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của mạng lắp song song. Khi đó ta có:

$$Y = max(X_1,\ X_2) > 0$$

Có:

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X_1 < y;\ X_2 < y) = P(X_1 < y)P(X_2 < y)$ (do tính độc lập)

$= \left(\int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{y} \lambda e^{-\lambda x}dx\right)^2 = (1-e^{-\lambda y})^2$

Vậy ta có hàm phân phối xác suất:

$$F_Y(y) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda y})^2,\ y > 0 \\ 0,\ \textit{trái lại} \end{cases}$$

b) Từ hàm phân phối xác suất, ta có hàm mật độ:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda y}\,(1-e^{-\lambda y}),\ y > 0 \\ 0,\ \textit{trái lại} \end{cases}$$

Có: Hàm Gamma: $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} 2\lambda ye^{-\lambda y}dy - \int_0^{+\infty} 2\lambda ye^{-2\lambda y}dy = \frac{2}{\lambda}\Gamma(2) - \frac{1}{2\lambda}\Gamma(2) = \frac{3}{2\lambda}$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} 2\lambda y^2e^{-\lambda y}dy - \int_0^{+\infty} 2\lambda y^2e^{-2\lambda y}dy = \frac{2}{\lambda^2}\Gamma(3) - \frac{1}{4\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{7}{2\lambda^2}$

$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}$

Câu 4.

a) Gọi p là tỷ lệ cây cà phê có thu hoạch thấp. $f = \frac{1135}{3070} = 0,3697$. Kiểm tra điều kiện:

$nf = 1135;\ n(1-f) = 1935 > 5$

- Chọn thống kê $Z = \frac{f-p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n}$. $Z \sim N(0;1)$

- Khoảng tin cậy đối xứng của xác suất p là:

$$\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}};\ f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$$

trong đó $\alpha = 0,05$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng phân phối chuẩn.

- Với $n = 3070$, $m = 1135$, $f = 0,3697$ suy ra khoảng tin cậy đối xứng của p là:

$\left(0,3697 - 1,96.\sqrt{\frac{0,3697.0,6303}{3070}};\ 0,3697 + 1,96.\sqrt{\frac{0,3697.0,6303}{3070}}\right) = (0,3526; 0,3868)$

Vậy với độ tin cậy 95% tỷ lệ cây cà phê có thu hoạch thấp từ 35,26% đến 38,68%

b) Có: $f = \frac{m}{n}$ mà $m \sim B(n;p)$

$\Rightarrow E(f) = \frac{E(m)}{n} = p$ nên f là ước lượng không chệch của p.

Câu 5.

Gọi X, Y lần lượt là thời gian bắt đầu có tác dụng của một loại thuốc trước và sau khi mổ dạ dày.

Ta có: $X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$; $Y \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$.$n_1 = n_2 = 8$

Đặt $Z = X - Y$, thiết lập hiệu $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, ..., 8$:

X	44	51	52	55	66	68	70	71
Y	52	64	60	74	55	67	75	65
Z	-8	-13	-8	-19	11	1	-5	6

- Đặt giả thuyết H_0: $\mu = \mu_0$; đối thuyết H_1: $\mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 0$.

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{Z} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $T \sim T(n-1)$

- Với $\alpha = 0,01$ Tra bảng phân phối Student ta được $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{7}_{0,995} = 3,499$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$W_\alpha = \left(-\infty;\ -t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}};\ +\infty\right) = (-\infty;\ -3,499) \cup (3,499;\ +\infty)$$

- Từ số liệu đầu bài, tính toán ta được: $n = 8$; $\overline{z} = -4,375$; $s = 9,913$ với $\mu_0 = 0$ suy ra giá trị quan sát:

$$t_{qs} = \frac{\overline{z} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{-4,375 - 0}{9,913}\sqrt{8} = -1,2483$$

- Vì $t_{qs} = -1,2483 \notin W_{qs}$ nên chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là số liệu này có thể cho rằng thời gian tác dụng của thuốc trước và sau mổ là như nhau với mức ý nghĩa 1%.

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20182

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Cho 3 sự kiện A, B, C độc lập từng đôi (2 sự kiện bất kỳ luôn độc lập với nhau) thỏa mãn: $P(A) = P(B) = P(C) = p$ và $P(ABC) = 0$.

a) Tính $P(A.B.\overline{C})$, $P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C})$.

b) Tìm giá trị p lớn nhất có thể có.

Câu 2. Một nhà máy có hai phân xưởng cùng sản xuất bóng đèn. Số bóng đèn do phân xưởng 2 sản xuất gấp 2 lần số bóng đèn do phân xưởng 1 sản xuất. Tỷ lệ phế phẩm của 2 phân xưởng tương ứng là 0,005 và 0,008. Lấy ngẫu nhiên 1 bóng đèn của nhà máy để kiểm tra thì thấy là phế phẩm. Tính xác suất bóng đèn đó do phân xưởng 2 sản xuất.

Câu 3. Có hai lô hàng I và II, mỗi lô chứa rất nhiều sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm loại A có trong hai lô I và II lần lượt là 70% và 80%. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô 2 sản phẩm.

a) Tính xác suất để số sản phẩm loại A lấy từ lô I lớn hơn số sản phẩm loại A lấy từ lô II.

b) Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 4 sản phẩm được lấy ra. Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Câu 4. Khảo sát trọng lượng X(kg) của 200 con lợn xuất chuồng ta được bảng số liệu sau:

X(kg)	[85-95)	[95-105)	[105-115)	[115-125)	[125-135)	[135-145)
Số lợn	10	30	45	80	30	5

Với độ tin cậy 90% hãy ước lượng khoảng cho trọng lượng trung bình của đàn lợn xuất chuồng.

Câu 5. Với số liệu ở câu 4 và mức ý nghĩa 5%, liệu có thể khẳng định rằng tỷ lệ lợn xuất chuồng có trọng lượng thấp hơn 115kg là ít hơn 50% hay không?

Phụ lục: trích Bảng phân phối chuẩn

x	1,282	1,645	1,96	2	2,576	3
$\Phi(x)$	0,90	0,95	0,975	0,9772	0,995	0,9987

Hàm Laplace $\phi(x) = \Phi(x) - 0,5$.

Giải đề cuối kì 20182

Câu 1:

a,

- $P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = P(AB) = P(A).P(B) = p^2$
- $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A+B+C)$
$$= 1 - [P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$
$$= 1 - 3p + 3p^2$$

b,

- $P(A\overline{B}\,\overline{C}) = P(A) - P(ABC) - P(AB\overline{C}) - P(A\overline{B}C) = p - 2p^2$

Vậy:

- $P(ABC) = 0$
- $P(AB\overline{C}) = P(A\overline{B}C) = P(\overline{A}BC) = p^2$
- $P(A\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{A}\,\overline{B}C) = p - 2p^2$
- $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - 3p + 3p^2$

Điều kiện: Các xác suất thuộc [0;1] $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le p^2 \le 1 \\ 0 \le p - 2p^2 \le 1 \\ 0 \le 1 - 3p - 3p^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ 0 \le p \le \dfrac{1}{2} \right. \Rightarrow p_{max} = \dfrac{1}{2}$

Câu 2:

Gọi H = {Sản phẩm đó là phế phẩm}

Gọi A_i = {Sản phẩm đó do phân xưởng i sản xuất}, i = {1, 2}

Hệ $\{A_i\}$ tạo thành hệ đầy đủ với:

$$\begin{cases} 2P(A_1) = P(A_2) \\ P(A_1) + P(A_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A_1) = \dfrac{1}{3} \\ P(A_2) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(H) = P(A_1)P(H|A_1) + P(A_2)P(H|A_2)$$

với: $P(H|A_1) = 0,005; \quad P(H|A_2) = 0,008$

$\Rightarrow P(H) = \dfrac{1}{3}.0,005 + \dfrac{2}{3}.0,008 = 0,007$

Xác suất cần tính là:

$$P(A_2|H) = \frac{P(A_2H)}{P(H)} = \frac{P(A_2)P(H|A_2)}{P(H)} = \frac{\frac{2}{3}.0,008}{0,007} = \frac{16}{21}$$

Câu 3:

Gọi X_1, X_2 lần lượt là số sản phẩm loại A được lấy từ lô hàng I và II. $X_1 \sim B(2;0,7);\ X_2 \sim B(2;0,8)$

a, Xác suất cần tính là:

$$\begin{aligned} P(X_1 > X_2) &= P(X_1 = 1,\ X_2 = 0) + P(X_1 = 2,\ X_2 = 0) + P(X_1 = 2,\ X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) \quad \text{(Do tính độc lập)} \\ &= C_2^1.0,7^1.0,3^1.C_2^0.0,8^0.0,2^2 + C_2^2.0,7^2.0,3^0.C_2^0.0,8^0.0,2^2 + C_2^2.0,7^2.0,3^0.C_2^0.0,8^1.0,2^1 \\ &= 0,1932 \end{aligned}$$

b, X là số sản phẩm loại A có trong 4 sản phẩm được lấy ra. $\Rightarrow X = X_1 + X_2$

Do tính độc lập nên:

- $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2.0,7 + 2.0,8 = 3$
- $V(X) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2.0,7.0,3 + 2.0,8.0,2 = 0,74$

Câu 4:

- Gọi X là trọng lượng lợn trong trại nuôi. $X \sim N(\mu, \sigma^2);\ E(X) = \mu$
- Chọn thống kê: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n}$. Vì n = 200 > 30 nên thống kê $U \sim N(0;1)$
- Khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$ là:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_1}{\sqrt{n_1}};\ \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)$$

  trong đó, $\alpha = 0,1;\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,95} = 1,645$ được tra từ bảng phân phối chuẩn tắc.
- Tính toán ta được: $\overline{x} = 115,25;\ s_1 = 11,4276;\ n_1 = 200$. Khoảng tin cậy đối xứng:

$$\left(115,25 - 1,645.\frac{11,4276}{\sqrt{200}};\ 115,25 + 1,645.\frac{11,4276}{\sqrt{200}}\right) = (113,9208;\ 116,5792)$$

- Với độ tin cậy 90%, trọng lượng trung bình của đàn lợn xuất chuồng từ 113,9208 đến 116,5792 kg.

Câu 5:

- Gọi p là tỷ lệ lợn xuất chuồng có trọng lượng thấp hơn 115kg.
- Đặt giả thuyết $H_0 : p = p_0$. Đối thuyết $H_1 : p < p_0$ với $p_0 = 0,5$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. Vì $n.p_0 = n(1-p_0) = 200.0,5 = 100$ khá lớn nên $U \sim N(0;1)$
- Với $\alpha = 0,05;\ u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$ tra từ bảng phân phối chuẩn tắc. Miền bác bỏ H_0 là:

$$W_s = (\infty;\ -u_{1-\alpha}) = (\infty;\ -1,645)$$

- Từ số liệu đề bài ta có: $n = 200;\ m = 85 \Rightarrow f = \dfrac{m}{n} = \dfrac{85}{200} = 0,425$ suy ra giá trị quan sát:

$$u_{qs} = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{0,425 - 0,5}{0,5(1-0,5)}\sqrt{200} = -2,21$$

- Vì $u_{qs} \in W_s$ nên bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là có thể khẳng định rằng tỷ lệ lợn xuất chuồng có trọng lượng thấp hơn 115kg là ít hơn 50% với mức ý nghĩa 5

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20183

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Có một nhóm 4 sinh viên, mỗi người có một chiếc mũ giống hệt nhau để trên giá. Khi ra khỏi phòng, mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ để đội. Tính xác suất để:

a) Sinh viên thứ nhất và sinh viên thứ ba lấy đúng mũ của mình.

b) Có ít nhất một sinh viên lấy đúng mũ của mình.

Câu 2. Một kiện hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 7 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Tiền lãi khi bán được mỗi sản phẩm loại I là 50 nghìn đồng, mỗi sản phẩm loại II là 20 nghìn đồng.

a) Ngày thứ nhất lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 3 sản phẩm và đã bán hết cả 3 sản phẩm đó. Tìm kỳ vọng của số lãi thu được.

b) Ngày thứ hai lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 2 sản phẩm. Tính xác suất để thu được 100 nghìn đồng tiền lãi khi bán 2 sản phẩm này.

Câu 3. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục $(X.Y)$ có hàm mật độ xác suất là:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}x^2, & \text{nếu } -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tính $P\left(Y \le \dfrac{1}{4}\right)$

Câu 4. Một công ty dự định mở một siêu thị tại khu dân cư A. Để đánh giá khả năng mua hàng của khách hàng tại khu vực này, người ta đã điều tra ngẫu nhiên thu nhập trong một tháng của 100 gia đình và thu được bảng số liệu sau:

Thu nhập (triệu đồng)	34,0	34,5	35,0	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5
Số gia đình	5	10	15	20	29	10	6	5

a) Theo bộ phận tiếp thị thì chỉ nên mở siêu thị tại A nếu thu nhập trung bình của các gia đình phải lớn hơn 35,5 triệu đồng/tháng. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho biết có nên mở siêu thị tại khu dân cư A hay không?

b) Tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ các gia đình có thu nhập $\ge$ 35,5 triệu đồng/tháng với độ tin cậy 95%.

Câu 5. Điều tra ngẫu nhiên thu nhập của 100 hộ gia đình ở khu dân cư B thấy thu nhập bình quân là 35,8 triệu đồng/tháng và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 1,1055 triệu đồng. Với mức ý nghĩa 5%, có thể kết luận thu nhập bình quân ở khu dân cư B cao hơn ở khu dân cư A (với số liệu câu 4) hay không?

Phụ lục: trích Bảng phân phối chuẩn

x	1,000	1,585	1,645	1,960	2,377	2,575
$\Phi(x)$	0,8413	0,9429	0,9500	0,9750	0,9933	0,9950

Giải đề cuối kì 20183

Câu 1:

a, Xét phép thử mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ để đội.

- Số kết cục đồng khả năng là: $n = 4! = 24$ cách
- Gọi A = {Sinh viên thứ nhất và thứ ba lấy đúng mũ của mình}
- Số kết cục thuận lợi cho A là: $m = 1.1.2.1 = 2$ cách

  $\Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

b, Gọi B = {Có ít nhất một sinh viên lấy đúng mũ của mình}
Gọi A_i = {Sinh viên thứ i lấy đúng mũ của mình}, i = {1,2,3,4}
Xác suất cần tính là:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\\ &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3) - P(A_2A_4) - P(A_3A_4)\\ &\quad + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)\end{aligned}$$

Trong đó:

- $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$
- $P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1A_4) = P(A_2A_3) = P(A_2A_4) = P(A_3A_4) = \frac{1.1.2.1}{24} = \frac{1}{12}$
- $P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = P(A_1A_3A_4) = P(A_2A_3A_4) = \frac{1.1.1.1}{24} = \frac{1}{24}$
- $P(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1.1.1.1}{24} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow P(B) = 4.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{12} + 4.\frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}$

Câu 2:

a, Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số tiền lãi thu được. X = {60, 90, 120, 150}
Gọi A_i = {Trong ngày đầu bán được i sản phẩm loại I}, i = {0, 1, 2, 3}

- $P(X = 60) = P(A_0) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$
- $P(X = 90) = P(A_1) = \frac{7.C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{40}$
- $P(X = 120) = P(A_2) = \frac{C_7^2.3}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$
- $P(X = 150) = P(A_3) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	60	90	120	150
P	1/120	7/40	21/40	7/24

$\Rightarrow E(X) = 60.\dfrac{1}{120} + 120.\dfrac{21}{40} + 150.\dfrac{7}{24} = 123$

b, Gọi A = {Ngày thứ hai thu được 100 nghìn đồng tiền lãi khi bán 2 sản phẩm}

Hệ $\{A_i\}$ tạo thành hệ đầy đủ.

$$P(A) = P(A_0)P(A|A_0) + P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$$
$$= \frac{1}{120}.\frac{C_7^2}{C_7^2} + \frac{7}{40}.\frac{C_6^2}{C_7^2} + \frac{21}{40}.\frac{C_5^2}{C_7^2} + \frac{7}{24}.\frac{C_4^2}{C_7^2}$$
$$= \frac{7}{15}$$
$$= 0,4667$$

Câu 3:

a, Ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2}.x^2 \geq 0, \text{ với} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2}.x^2\,dx\,dy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \frac{k}{2}.x^2\,dy = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 5 \text{ (Thoả mãn)}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5}{2}.x^2, \text{ với} \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases} \\ 0, \text{ trái lại} \end{cases}$$

b, Ký hiệu D là miền trên đó $f_{X,Y}(x,y) \neq 0$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\Rightarrow P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) = \iint\limits_{D \cap \left(y \leq \frac{1}{4}\right)} f_{X,Y}(x,y) = 2.\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{x^2} \frac{5}{2}.x^2\,dy + 2.\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{5}{2}.x^2\,dy$$
$$= 2.\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5}{2}.x^4\,dx + 2.\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{5}{8}.x^2\,dx$$
$$= 0,3958$$

Câu 4:

a, Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ thu nhập trong một tháng của các hộ gia đình tại A. $E(X) = \mu_1$

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_0$. Đối thuyết $H_1 : \mu_1 > \mu_0$ với $\mu_0 = 35,5$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0;1)$
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối chuẩn tắc, có $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ H_0 là:

$$W_s = (u_{1-\alpha};\ +\infty) = (1,65;\ +\infty)$$

- Từ số liệu đã cho, có: $\mu_0 = 35,5;\ n_1 = 100;\ \overline{x_1} = 35,685;\ s_1 = 0,8547$ suy ra giá trị quan sát:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x_1} = \mu_0}{s_1}\sqrt{n_1} = \frac{35,685 - 35,5}{0,8547}\sqrt{100} = 2,1645$$

- Vì $u_{qs} \in W_s$ nên bác bỏ H_0, chấp nhận H_1, nghĩa là có nên mở siêu thị tại khu dân cư A với mức ý nghĩa 5%.

b, Gọi p là tỷ lệ các gia đình có thu nhập $\geq$ 35,5 triệu đồng/tháng ở khu A. Kiểm tra điều kiện:

$$n_1 f = 100.0,7 = 70 > 5;\ n_1(1-f) = 100.0,3 = 30 > 5$$

- Chọn thống kê: $Z = \dfrac{f - p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n}$. $Z \sim N(0;1)$
- Khoảng tin cậy đối xứng của xác suất p là:

$$\left(f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}};\ f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)$$

trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được tra từ bảng phân phối chuẩn tắc.

- Với $n_1 = 100;\ m = 70;\ f = \dfrac{m}{n_1} = 0,7$ suy ra khoảng tin cậy đối xứng của p là:

$$\left(0,7 - 1,96.\sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{100}};\ 0,7 + 1,96.\sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{100}}\right) = (0,6102;\ 0,7898)$$

- Vậy với mức ý nghĩa 5%, tỷ lệ các gia đình có thu nhập $\geq$ 35,5 triệu đồng/tháng ở khu A từ 61,02% đến 78,98%

Câu 5:

- Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ thu nhập trong một tháng của các hộ gia đình tại B. $E(Y) = \mu_2$. Giả sử $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Đối thuyết $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim N(0;1)$

- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$. Miền bác bỏ H_0 là:

$$W_s = (-\infty;\ -u_{1-\alpha}) = (-\infty;\ -1,645)$$

- Từ số liệu đã cho, có: $n_1 = 100;\ n_2 = 100;\ \overline{x} = 35,685;\ s_1 = 0,8547;\ \overline{y} = 35,8;\ s_2 = 1,1055$

$$\Rightarrow u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{35,685 - 35,8}{\sqrt{\dfrac{0,8547^2}{100} + \dfrac{1,1055^2}{100}}} = -0,8230$$

- Vì $u_{qs} \notin W_s$ nên chưa có cơ sở bác bỏ H_0, nghĩa là chưa thể kết luận thu nhập bình quân ở khu dân cư B cao hơn ở khu dân cư A với mức ý nghĩa 5%.

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20191

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Có ba hộp I, II, III đựng bóng đèn. Hộp I có 8 bóng đèn màu đỏ, 2 bóng đèn màu xanh; hộp II có 7 bóng đèn màu đỏ, 3 bóng đèn màu xanh; hộp III có 6 bóng đèn màu đỏ, 4 bóng đèn màu xanh.

a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một bóng đèn. Tính xác suất để được 3 bóng cùng màu.

b) Lấy ngẫu nhiên ra một hộp rồi từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 bóng đèn thì được 2 bóng màu đỏ, 1 bóng màu xanh. Tính xác suất để các bóng đèn này được lấy từ hộp I.

Câu 2. Cho hàm mật độ xác suất $f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ của biến ngẫu nhiên liên tục X và định nghĩa $Y = [X]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá X (nghĩa là $[x] = 0$ nếu $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ nếu $1 \leq x < 2...$).

a) Tính $P(Y = 0)$ b) Tính $E(Y)$

Câu 3. Cho U và V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, độc lập với nhau và có cùng phân phối đều trên [10;30].

a) Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{U,V}(u,v)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (U,V).

b) Tính $P(|U - V| < 10)$

Câu 4. Để điều tra doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta khảo sát 100 gia đình kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng của năm 2019 thu được bảng số liệu:

Doanh thu (triệu VNĐ)	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Số gia đình	4	9	17	25	20	10	8	4	3

a) Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng doanh thu trung bình/tháng của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B.

b) Một tài liệu thống kê cho biết doanh thu trung bình/tháng của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B là 40 triệu VND. Hãy cho kết luận về tài liệu nói trên với mức ý nghĩa 5%.

Câu 5. Điều tra doanh thu của 200 gia đình kinh doanh loại mặt hàng A ở địa phương C, người ta tính được doanh thu trung bình/tháng là 43 triệu VNĐ và độ lệch tiêu chuẩn của mẫu hiệu chỉnh là 8,912 triệu VNĐ. Doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương C và B (với số liệu ở câu 4) có như nhau hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

Phụ lục: trích Bảng phân phối chuẩn

x	1,000	1,585	1,645	1,960	2,377	2,575
$\Phi(x)$	0,8413	0,9429	0,9500	0,9750	0,9933	0,9950

Giải đề cuối kì 20191

Câu 1:

a, Xét phép thử lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một bóng đèn.
Tổng số kết cục đồng khả năng là: $n = 10.10.10 = 1000$ cách.
Gọi A = {Lấy được 3 bóng cùng màu}.
Số kết cục thuận lợi cho A là: $m = 8.7.6 + 2.3.4 = 360$ cách

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} = \frac{360}{1000} = 0,36$$

b, Gọi A_i = {Số bóng lấy ra được lấy từ hộp i}, $i = 1,2,3$.
Hệ $\{A_i\}$ tạo thành hệ đầy đủ với:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Gọi B = {Lấy ra được 2 bóng màu đỏ, 1 bóng màu xanh}
Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

với:

$$P(B|A_1) = \frac{C_8^2.2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15} \quad P(B|A_2) = \frac{C_7^2.3}{C_{10}^3} = \frac{21}{40} \quad P(B|A_3) = \frac{C_6^2.4}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}.\frac{7}{15} + \frac{1}{3}.\frac{21}{40} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = 0,4972$$

Xác suất cần tính là:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{7}{15}}{0,4972} = 0,3129$$

Câu 2:

a, $Y = 0$ xảy ra khi $0 \le X < 1$

$$P(Y=0) = P(0 \le X < 1) = \int_0^1 3.e^{-3x}dx = 1 - e^{-3} = 0,9502$$

b, Ta có:

$$P(Y=y) = P(y \le X < y+1) = \int_y^{y+1} 3.e^{-3x}dx = \left(1 - e^{-3}\right)e^{-3y}, \quad y = 0,1,2\ldots$$

$$\Rightarrow E(Y) = \left(1 - e^{-3}\right)\sum_{y=0}^{\infty} ye^{-3y}$$

Có:

$$\sum_{y=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{y=0}^{\infty}\left(x^k\right)' = \left(\sum_{y=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\sum_{y=0}^{\infty} x^k - 1\right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow E(Y) = \left(1-e^{-3}\right)\sum_{y=0}^{\infty} ye^{-3y} = \left(1-e^{-3}\right)\sum_{y=1}^{\infty} ye^{-3y} = e^{-3}\left(1-e^{-3}\right)\sum_{y=1}^{\infty} ye^{-3(y-1)}$$
$$= e^{-3}\left(1-e^{-3}\right).\frac{1}{\left(1-e^{-3}\right)^2} = \frac{1}{e^3-1} = 0,0524$$

Câu 3:

a, Vì U và V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, có phân phối đều trên $[10;30]$ nên:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{20}, u \in [10;30] \\ 0, trai\,lai \end{cases} \quad f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{20}, u \in [10;30] \\ 0, trai\,lai \end{cases}$$

Mặt khác vì U và V độc lập nên:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{400}, (u,v) \in [10;30]^2 \\ 0, trai\,lai \end{cases}$$

b,

$$P(|U-V|<10) = \iint\limits_{D\cap S_{U,V}} f_{U,V}(u,v)\,dudv, D = \left\{(u,v)\in R^2 : |u-v|<10\right\}$$

Sử dụng tính chất của tích phân hai lớp ta được:

$$P(|U-V|<10) = \frac{1}{400}.\left(20^2-10^2\right) = \frac{3}{4} = 0,75$$

Câu 4:

a, Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B. $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$. $E(X) = \mu_1$.

- Chọn thống kê $U = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$. Vì $n = 100 > 30$ nên $U \sim N(0,1)$
- Sử dụng khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu_1$:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_1}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right)$$

  Trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được xác định từ bảng phân phối chuẩn tắc.

- Từ số liệu vừa tính toán ta có khoảng tin cậy đối xứng là:

$$\left(42,4 - 1,96.\frac{9,2245}{\sqrt{100}}; 42,4 + 1,96.\frac{9,2245}{\sqrt{100}}\right) = (40,5920; 44,2080)$$

Vậy với độ tin cậy 95%, doanh thu trung bình của các hộ gia đình từ 40,5920 đến 44,2080.

b,

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$; đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 40$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng.$U \sim N(0;1)$
- Với $\alpha = 0{,}05$, tra bảng phân phối chuẩn tắc ta có $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1{,}96$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$\mathrm{W}_\alpha = \left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right) = (-\infty; -1{,}96) \cup (1{,}96; +\infty)$$

- Từ số liệu đầu bài, tính toán ta được:$n_1 = 100$; $\overline{x} = 42{,}4$; $s_1 = 9{,}2245$ với $\mu_0 = 40$:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{42{,}4 - 40}{9{,}2245}.\sqrt{100} = 2{,}6018$$

Vì $u_{qs} \in \mathrm{W}_s$ nên bác bỏ giả thuyết H_0 nghĩa là tài liệu kia không đúng với mức ý nghĩa 5%. **Câu 5:** Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương C.$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. $E(Y) = \mu_2$

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$; đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0;1)$
- Với $\alpha = 0{,}01$, tra bảng phân phối chuẩn tắc ta có $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2{,}58$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$\mathrm{W}_\alpha = \left(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right) = (-\infty; -2{,}58) \cup (2{,}58; +\infty)$$

- Từ số liệu đầu bài, tính toán ta được:$n_1 = 100$; $\overline{x} = 42{,}4, \overline{y} = 43$ $s_1 = 9{,}2245, s_2 = 8{,}912$ với $\mu_0 = 40$:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{42{,}4 - 43}{\sqrt{\dfrac{9{,}2245^2}{100} + \dfrac{8{,}912^2}{100}}} = -0{,}5371$$

Vì $u_{qs} \notin \mathrm{W}_s$ nên chưa có cơ sở bác bỏ H_0, nghĩa là có thể kết luận doanh thu trung bình loạimặt hàng A ở địa phương C và B là như nhau.

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20192

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Cho biết xác suất để một sinh viên mượn một cuốn sách Kỹ thuật ở thư viện là 0,8; còn xác suất mượn một cuốn sách Văn học là 0,2. Một ngày có 5 sinh viên đến mượn sách tại thư viện, mỗi người mượn 2 cuốn sách.

a) Tính xác suất để trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học.

b) Biết trong 5 người có ít nhất 2 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật. Tính xác suất để trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn 1 cuốn sách Kỹ thuật và 1 cuốn sách Văn học.

Câu 2. Có hai nhóm sinh viên. Nhóm I có 5 sinh viên nam và 3 sinh viên nữ; nhóm II có 4 sinh viên nam và 2 sinh viên nữ. Từ nhóm I chọn ngẫu nhiên ra 2 sinh viên, từ nhóm II chọn ra 1 sinh viên.

a) Hỏi trung bình chọn được bao nhiêu sinh viên nữ trong 3 sinh viên được chọn.

b) Biết trong 3 sinh viên được chọn có ít nhất 1 sinh viên nữ. Tính xác suất để trong 3 sinh viên đó có đúng 1 sinh viên nam.

Câu 3. Thời gian hoạt động $X_i, i = 1,2,3$ của linh kiện điện tử I, II, II là các biến ngẫu nhiên độc lập, tuân theo luật phân phối mũ với hàm mật độ xác suất tương ứng là $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda_i x}, x > 0, \lambda_i > 0$.

a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của một hệ thống gồm 3 linh kiện trên mắc nối tiếp.

b) Tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của hệ thống đó.

Câu 4. Đo độ xa X (đơn vị đo là mm) từ điểm trúng bia đến tâm bia của 16 lần bắn ta thu được số liệu sau:

2,10	1,95	2,07	2,03	1,91	2,08	1,98	2,10
2,06	1,92	1,95	2,11	2,00	1,96	2,08	1,91

a) Hãy ước lượng độ xa trung bình với độ tin cậy 95%. Giả sử độ xa X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

b) Tính xác suất để độ xa X lớn hơn 2mm.

Câu 5. Số lượng người mắc bệnh sốt xuất huyết ở địa phương A là 15 người trên một mẫu 200 người; số lượng này ở địa phương B là 20 người trên một mẫu 250 người. Hỏi tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết ở 2 địa phương trên có được coi là như nhau hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$.
Phụ lục: trích các bảng số

Phân vị chuẩn $\Phi(x)$				Phân vị Student $P(X < t_\alpha^{(n)}) = \alpha$			
x	0,178	1,165	1,645	n \ α	0,950	0,975	0,995
$\Phi(x)$	0,5695	0,8780	0,9500	8	1,860	2,306	3,355
x	1,960	2,377	2,575	14	1,761	2,145	2,977
$\Phi(x)$	0,9750	0,9933	0,9950	15	1,753	2,131	2,947

Giải đề cuối kì 20192

Câu 1:
Xác suất để một người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học:

$$p = 2.0,2.0,8 = 0,32$$

a, Gọi A = {Trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học}
Bài toán thoả lược đồ Bernoulli với: $n = 5; p = 0,32; q = 1 - p = 0,68$

$$\Rightarrow P(A) = P_5(2) = C_5^2.0,32^2.0,68^3 = 0,3220$$

b, Gọi B = {Trong 5 người có ít nhất 2 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật}
Bài toán thoả lược đồ Bernoulli với: $n = 5$; $p = 0,8^2 = 0,64$; $q = 1 - p = 0,36$; $k_1 = 2$; $k_2 = 5$

$$\Rightarrow P(B) = P_5(2;5) = C_5^2.0,64^2.0,36^3 + C_5^3.0,64^3.0,36^2 + C_5^4.0,64^4.0,36^1 + C_5^5.0,64^5.0,36^0 = 0,9402$$

Xác suất cần tính là: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
Trong đó: AB = { Trong 5 người đó có đúng 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học, ít nhất 2 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật}

- Trường hợp 1: 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học; 2 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật; 1 người mượn 2 cuốn Văn học.

$$P_{TH1} = C_5^2.0,32^2.C_3^2 0,64^2.C_1^1.0,04 = 0,0503$$

- Trường hợp 2: 2 người, mỗi người mượn một cuốn sách Kỹ thuật và một cuốn sách Văn học; 3 người, mỗi người mượn 2 cuốn sách Kỹ thuật.

$$P_{TH2} = C_5^2.0,32^2.C_3^3 0,64^3 = 0,2684$$

$$\Rightarrow P(AB) = 0,0503 + 0,2684 = 0,3187$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,3187}{0,9402} = 0,3390$$

Câu 2:
a, Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số sinh viên nữ được chọn $.X = \{0,1,2,3\}$
Gọi A_i = {Chọn được i sinh viên nữ từ nhóm I}.
Gọi B_i = {Chọn được i sinh viên nữ từ nhóm II}.

$$P(X=0) = P(A_0B_0) = P(A_0).P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2}.\frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{5}{21}$$

$$P(X=1) = P(A_1B_0 + A_0B_1) = P(A_1).P(B_0) + P(A_01).P(B_1) = \frac{5.3}{C_8^2}.\frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_5^2}{C_8^2}.\frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{10}{21}$$

$$P(X=2) = P(A_2B_0 + A_1B_1) = P(A_2).P(B_0) + P(A_1).P(B_1) = \frac{C_3^2}{C_8^2}.\frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{5.3}{C_8^2}.\frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = P(A_2B_1) = P(A_2).P(B_1) = \frac{C_3^2}{C_8^2}.\frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{1}{28}$$

Ta có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
Y	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow E(X) = 0.\frac{5}{21} + 1.\frac{10}{21} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{28} = \frac{13}{12}$$

Vậy trung bình có $\frac{13}{12}$ sinh viên nữ được chọn trong số 3 sinh viên.

b, Gọi A = {Trong 3 sinh viên được chọn có ít nhất 1 sinh viên nữ}.

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

Gọi B = {Trong 3 sinh viên đó có đúng 1 sinh viên nam}.

$$\Rightarrow P(B) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Xác suất cần tính là:

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{16}{21}} = \frac{21}{64}$$

Câu 3:

a, Gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của 3 linh kiện trong mạch. Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian hoạt động của mạng lắp nối tiếp. Ta có:

$$Y = \min(X_1, X_2) > 0$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = 1 - P(Y \geqslant y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y)P(X_3 > y)$$
$$= 1 - \left(\int_y^{+\infty} f_{X_1}(x)\,dx\right)\left(\int_y^{+\infty} f_{X_2}(x)\,dx\right)\left(\int_y^{+\infty} f_{X_3}(x)\,dx\right) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}$$

Vậy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}, y > 0 \\ 0, \qquad\qquad trai\,lai \end{cases}$$

b, Từ hàm phân phối, ta tìm được hàm mật độ xác suất:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}, y > 0 \\ 0, \qquad\qquad trai\,lai \end{cases}$$

- Cách 1: Dễ thấy Y là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ. $Y \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$
  Suy ra:

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \qquad V(Y) = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}$$

- Cách 2: Ta có hàm Gamma: $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{y}\mathrm{f}_Y(y)dy = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{y}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}dy \\
&= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
E(Y^2) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{y}^2\mathrm{f}_Y(y)dy = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{y}^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}dy \\
&= \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}.\Gamma(3) = \frac{2}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2} - \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2} = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}$$

Câu 4:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ độ xa từ điểm trúng bia đến tâm bia. $X \sim N(\mu,\sigma^2), E(X) = \mu$

Ta tính toán được: $n = 16; \bar{x} = 2,0131; s = 0,0735$

a,

- Chọn thống kê $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$. Vì $n = 16 < 30$ nên T có phân phối *Student* với $n-1$ bậc tự do.
- Sử dụng khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$:

$$\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}.\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Trong đó $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = t_{0,975}^{1}5 = 2,131$ được xác định từ bảng phân phối *Student*.

- Từ số liệu vừa tính toán ta có khoảng tin cậy đối xứng là:

$$\left(2,0131 - 2,131.\frac{0,0735}{\sqrt{16}}; 2,0131 + 2,131.\frac{0,0735}{\sqrt{16}}\right) = (1,9739; 2,0522)$$

Vậy với độ tin cậy 95%, tuổi thọ trung bình của ắc quy của công ty A từ 1,9739 đến 2,0522.

b, $\bar{x}$ là ước lượng không chệch của μ và s là ước lượng không chệch của σ.

Xác suất cần tính là:

$$P(X > 2) = P(2 < X < +\infty) = 0,5 - \phi\left(\frac{2-\bar{x}}{s}\right) = 0,5 - \phi\left(\frac{2-2,0131}{0,0735}\right)$$

$$= 0,5 - \phi(-0,178) = 0,5 + \phi(0,178) = 0,5 + \Phi(0,178) - 0,5 = \Phi(0,178) = 0,5695$$

Câu 5:

Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ người mắc bệnh sốt xuất huyết ở địa phương A và B.

- Đặt giả thuyết $H_0: p_1 = p_2$; đối thuyết $H_1: p_1 \neq p_2$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $Z = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0,1)$

- Với $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối chuẩn tắc ta có $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:
$$\mathrm{W}_\alpha = \left(-\infty; -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty)$$

- Theo bài ra
$$n_1 = 200, n_2 = 250, m_1 = 15, m_2 = 20, f_1 = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}, f_2 = \frac{20}{250} = \frac{2}{25}$$
$$\overline{f} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \frac{15+20}{450} = \frac{7}{90}$$
$$\Rightarrow z_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}\left(1-\overline{f}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = -0,1968$$

Vì $z_{qs} \in \mathrm{W}_s$ nên bác bỏ H_0 nghĩa là không thể chấp nhận tỷ lệ mắc sốt xuất huyết ở hai địa phương là như nhau với mức ý nghĩa 5%.

Đề 1

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20193

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Từ kinh nghiệm quá khứ biết rằng có 20% khách đến cửa hàng có quyết định mua ô tô. Tìm xác suất để số khách hàng mua xe không vượt quá 2 nếu trong một lần:

a) có 5 khách hàng đến cửa hàng.

b) có 5 khách hàng đến cửa hàng và biết có không quá 4 người mua xe.

Câu 2. Một phân xưởng có hai lô hàng: lô I có 9 chính phẩm và 2 phế phẩm; lô II có 8 chính phẩm và 1 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô I chuyển sang lô II.

a) Tính xác suất để trong lô II có đúng 2 phế phẩm.

b) Tìm số phế phẩm trung bình của lô II.

Câu 3. Cho thời gian làm việc (hoạt động) T của một con chíp máy tính tuân theo luật phân phối mũ với hàm mật độ có dạng $f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, x > 0, E(T) = 800$ giờ.

a) Tìm tham số λ và hàm phân phối xác suất của T.

b) Tìm tỷ lệ các con chíp có thời gian hoạt động lớn hơn 1600 giờ.

Câu 4. Một nhà bán lẻ kiểm tra tuổi thọ (đơn vị tháng) của 10 ắc quy ô tô của công ty A và thu được bộ số liệu là:

27,6	28,7	34,7	29,0	22,9	29,6	29,4	30,3	36,5	34,7

a) Tìm ước lượng không chệch của độ lệch chuẩn của tuổi thọ trên.

b) Với độ tin cậy 95%, xác định khoảng tin cậy cho tuổi thọ trung bình của loại ắc quy đó, biết tuổi thọ trên là biến ngẫu tuân theo luật phân phối chuẩn.

Câu 5. Cho một nhóm sinh viên gồm 11 người thi tiếng Anh trong hai vòng thi, kết quả như sau:

Sinh viên	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Lần 1	45	64	86	96	40	57	73	32	28	89	66
Lần 2	56	68	84	97	36	60	70	39	27	92	75

a) Có thể cho rằng kết quả hai vòng thi là giống nhau, biết rằng điểm thi tuân theo luật phân phối chuẩn ($\alpha = 0,05$)?

b) Có thể kết luận vòng thi 2 cho kết quả tốt hơn ($\alpha = 0,01$)?
Phụ lục: trích các bảng số

Phân vị chuẩn $\Phi(x)$			
x	1,000	1,645	1,880
$\Phi(x)$	0,8413	0,950	0,970
x	1,960	2,326	2,575
$\Phi(x)$	0,975	0,990	0,995

Phân vị Student $P(X < p) = t(n;p)$			
n \ p	0,95	0,975	0,99
9	1,833	2,262	2,821
10	1,812	2,228	2,764
11	1,796	2,201	2,718
20	1,725	2,086	2,528
21	1,721	2,080	2,518

Giải đề cuối kì 20193

Câu 1:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số khách đến mua ô tô. $X \sim B(n,p)$

a)Gọi A ={Số khách mua xe không vượt quá 2 nếu trong một lần có 5 khách đến cửa hàng}.

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(A) &= P(X \le 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\ &= C_5^0.0,2^0.(1-0,2)^5 + C_5^1.0,2^1.(1-0,2)^4 + C_5^2.0,2^2.(1-0,2)^3 = 0,9421\end{aligned}$$

b) Gọi B ={Số khách mua xe không vượt quá 4 nếu trong một lần có 5 khách đến cửa hàng }.

$$\Rightarrow P(B) = P(X \le 4) = 1 - P(X>4) = 1 - P(X=5) = 1 - C_5^5.0,2^5.(1-0,2)^0 = 0,9997$$

$\Rightarrow$Xác suất cần tính là: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{0,9421}{0,9997} = 0,9424$

Câu 2:

Gọi A_i = {Trong 2 sản phẩm lấy được từ lô I có i chính phẩm},$i = 0,1,2$.

Hệ $\{A_i\}$ tạo thành một hệ đầy đủ với:

$$P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}, P(A_1) = \frac{2.9}{C_{11}^2} = \frac{18}{55}, P(A_2) = \frac{C_9^2}{C_{11}^2} = \frac{36}{55}$$

a) Gọi A = {Trong lô II có đúng 2 phế phẩm}.

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) = \frac{18}{55}$$

b) Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số phế phẩm của lô II.$X = 1,2,3$.

$$P(X=1) = P(A_2) = \frac{36}{55}$$
$$P(X=2) = P(A_1) = \frac{18}{55}$$
$$P(X=3) = P(A_0) = \frac{1}{55}$$

Ta có bảng:

X	1	2	3
P	$\frac{36}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{1}{55}$

$$\Rightarrow E(X) = 1.\frac{36}{55} + 2.\frac{18}{55} + 3.\frac{1}{55} = \frac{15}{11} = 1,3636$$

Vậy trung bình có 1,3636 phế phẩm trong lô II.

Câu 3:

a, T là biến ngẫu nhiên liên tục tuân theo phân phối mũ với:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}.e^{\frac{-x}{\lambda}}, \quad x>0$$

Có: $E(T) = 800$ mà $E(T) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda \Rightarrow \lambda = 800$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{800}.e^{\frac{-x}{800}}, \quad x>0$$

Với $x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{800}.e^{\frac{-t}{800}}dt = -\left. e^{\frac{-t}{800}} \right|_0^x = 1 - e^{\frac{-x}{800}}$$

Với $x \le 0$: $F(x) = 0$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x}{800}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

b, Gọi A = {Các con chíp có thời gian hoạt động lớn hơn 1600 giờ}

$$\Rightarrow P(A) = P(T > 1600) = 1 - P(T \le 1600) = 1 - \left(1 - e^{\frac{-1600}{800}}\right) = 0,1353$$

Câu 4:
Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ tuổi thọ của ắc quy ô tô của công ty A. $X \sim N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$
Ta tính toán được: $n = 10; \bar{x} = 30,34; s = 4,0103$
a, Ước lượng không chệch của độ lệch chuẩn của tuổi thọ trên là: $s = 4,0103$.
b,

- Chọn thống kê $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Vì $n = 10 < 30$ nên T có phân phối *Student* với $n - 1$ bậc tự do.
- Sử dụng khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$:

$$\left(\bar{x} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

  Trong đó $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^9_{0,975} = 2,262$ được xác định từ bảng phân phối *Student*.

- Từ số liệu vừa tính toán ta có khoảng tin cậy đối xứng là:

$$\left(30,34 - 2,262.\frac{4,0103}{\sqrt{10}}; 30,34 + 2,262.\frac{4,0103}{\sqrt{10}}\right) = (27,4714; 33,2086)$$

Vậy với độ tin cậy 95%, tuổi thọ trung bình của ắc quy của công ty A từ 27,4714 đến 33,2086.
Câu 5:
Gọi X, Y lần lượt là kết quả thi của người thi tiếng Anh trong vòng thi thứ nhất, thứ hai. Ta có:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2); \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2); \quad n_1 = n_2 = 11$$

Đặt $Z = X - Y$, thiết lập hiệu $z_i = x_i - y_i, \quad i = 1, 2, ...11$:

X	45	64	86	96	40	57	73	32	28	89	66
Y	56	68	84	97	36	60	70	39	27	92	75
Z	-11	-4	2	-1	4	-3	3	-7	1	-3	-6

a,

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$; đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với μ_0
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định$T = \dfrac{\bar{z} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $T \sim T(n-1)$

- Với $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối *Student* ta có $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{10}_{0,975} = 2,228$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:
$$\mathrm{W}_\alpha = \left(-\infty; t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right) = (-\infty; -2,228) \cup (2,228; +\infty)$$

- Từ số liệu đầu bài, tính toán ta được:$n = 11$; $\overline{z} = -2,5455$; $s = 4,9470$ với $\mu_0 = 0$:
$$t_{qs} = \frac{\overline{z} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{-2,5455 - 0}{4,9470}.\sqrt{11} = -1,7066$$

Vì $t_{qs} = -1,7066 \notin \mathrm{W}_{qs}$ nên chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể cho rằng kết quả hai vòng thi là giống nhau với mức ý nghĩa 5%.
b,

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$; đối thuyết $H_1 : \mu < \mu_0$ với μ_0
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định$T = \dfrac{\overline{z} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $T \sim T(n-1)$
- Với $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối *Student* ta có $t^{n-1}_{1-\alpha} = t^{10}_{0,99} = 2,764$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:
$$\mathrm{W}_\alpha = \left(-\infty; t^{n-1}_{1-\alpha}\right) = (-\infty; -2,764)$$

Vì $t_{qs} = -1,7066 \notin \mathrm{W}_{qs}$ nên bác bỏ giả thuyết H_1, nghĩa là chưa thể kết luận vòng thi 2 cho kết quả tốt hơn với mức ý nghĩa 5%

Đề 2

ĐỀ THI CUỐI KỲ - 20201

Mã học phần: MI2020

Câu 1. Điểm thi của 100 sinh viên (thi độc lập nhau) được cho ở bảng dưới:

Điểm	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
Số sinh viên	2	4	12	21	28	20	9	4

Lấy ngẫu nhiên điểm thi của 6 sinh viên để khảo sát. Tính xác suất trong 6 điểm thi đó:

a) Có hai điểm thi cao hơn 5,5 và một điểm thi thấp hơn 4,0.

b) Có cả điểm 6 và điểm 6,5.

Câu 2. Một lô hàng với số lượng sản phẩm lớn có ba loại 1, 2 và 3 chiếm tỷ lệ tương ứng là 50%, 20% và 30%. Lấy nhiên 6 sản phẩm để kiểm tra và gọi X và Y tương ứng chỉ số sản phẩm loại 1 và loại 2 có trong 6 sản phẩm được lấy ra.

a) Tính trung bình của $Z = X + Y$ b) Tính phương sai và mốt của Y.

Câu 3. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (U,V) có hàm mật độ xác suất là:

$$f(u,v) = \begin{cases} ku^2v, & \text{nếu } 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k. b) Tính $P\left(max(U,V) \le \dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 4. Để kiểm tra trọng lượng loại sản phẩm S do nhà máy Q sản xuất trong quý IV năm 2020, người ta cần thử 100 sản phẩm loại này thu được bảng số liệu:

Trọng lượng (gam)	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10	10 - 11	11 - 12	12 - 13
Số sản phẩm	5	10	15	20	29	10	6	5

a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng trọng lượng trung bình của loại sản phẩm S do nhà máy Q sản xuất tại thời điểm kiểm tra.

b) Nếu yêu cầu sai số của ước lượng ở ý a) là 0,24 thì cần phải cân thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

Câu 5. Một công ty có hai phân xưởng I và II sản xuất cùng loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên 1000 sản phẩm do phân xưởng I sản xuất thấy 35 sản phẩm loại B; kiểm tra 900 sản phẩm do phân xưởng II sản xuất thấy 20 sản phẩm loại B. Có thể xem tỷ lệ sản phẩm loại B do phân xưởng I sản xuất cao hơn tỷ lệ sản phẩm loại B do phân xưởng II sản xuất hay không với mức ý nghĩa 1%?

Phụ lục: trích các bảng số

Phân vị chuẩn $\Phi(x)$					Phân vị Student $P(X < t_\alpha^{(n)}) = p$			
x	1,645	1,960	2,330	2,575	n \ p	0,950	0,990	0,995
$\Phi(x)$	0,9500	0,9750	0,9900	0,9950	15	1,753	2,602	2,947

Giải đề cuối kì 20201

Câu 1:
Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 6 sinh viên để khảo sát.
Số kết cục đồng khả năng là: $n = C_{100}^6$ cách.
a,
Gọi A = {Có hai điểm thi cao hơn 5,5 và một điểm thi thấp hơn 4,0}
Số kết cục thuận lợi cho A là: $m = C_{13}^2.C_6^1.C_{81}^3$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{13}^2.C_6^1.C_{81}^3}{C_{100}^6} = 0.0335$$

b,
Gọi B = {Có cả điểm 6 và điểm 6,5}
Gọi C = {Không có điểm 6}
Gọi D = {Không có điểm 6,5}

$$\Rightarrow B = \overline{C}.\overline{D} \Rightarrow P(B) = P\left(\overline{C}.\overline{D}\right) = P\left(\overline{C+D}\right) = 1 - P(C+D) = 1 - P(C) - P(D) + P(DC)$$

Số kết cục thuận lợi cho C là: $c = C_{91}^6 \quad \Rightarrow P(C) = \dfrac{c}{n} = \dfrac{C_{91}^6}{C_{100}^6}$

Số kết cục thuận lợi cho D là: $d = C_{96}^6 \quad \Rightarrow P(D) = \dfrac{d}{n} = \dfrac{C_{96}^6}{C_{100}^6}$

Số kết cục thuận lợi cho CD là: $e = C_{96}^6 \quad \Rightarrow P(CD) = \dfrac{e}{n} = \dfrac{C_{87}^6}{C_{100}^6}$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{C_{91}^6}{C_{100}^6} - \frac{C_{96}^6}{C_{100}^6} + \frac{C_{87}^6}{C_{100}^6} = 0,0868$$

Câu 2:
a, Gọi T là biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm loại 3 trong 6 sản phẩm được lấy ra. $T \sim B(n,p)$ với $n = 6; p = 0,3$

$$\Rightarrow X + Y + T = 6$$
$$\Rightarrow E(X+Y) = E(6-T) = 6 - E(T) = 6 - np = 6 - 6.0,3 = 4,2$$

b, $Y \sim B(n,p)$ với $n = 6; p = 0,2$

$$\Rightarrow V(Y) = npq = 6.0,2.0,8 = 0,96$$

Theo bài ra ta có: $\mathrm{np} - \mathrm{q} = 6.0,2 - 0,8 = 0,4 \notin Z$
Vậy số sản phẩm loại 2 có khả năng nhất trong 6 sản phẩm là:$y_0 = [\mathrm{np} - \mathrm{q}] + 1 = 1$.
Vậy $modY = y_0 = 1$. **Câu 3:**
a, Ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ku^2v \geq 0, \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ku^2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k\int\limits_0^1 u^2du \int\limits_0^1 vdv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \dfrac{k}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 6(TM)$$

Vậy:

$$f(u,v) = \begin{cases} 6u^2v, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 \\ 0,\ trai lai \end{cases}$$

b,

$$P\left(\max(U,V) \le \tfrac{2}{3}\right) = P\left(U \le \tfrac{2}{3}, V \le \tfrac{2}{3}\right)$$
$$= \int_0^{\frac{2}{3}}\int_0^{\frac{2}{3}} 6u^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 6\int_0^{\frac{2}{3}} u^2du \int_0^{\frac{2}{3}} vdv = 6.\frac{8}{81}.\frac{2}{9} = 0,1317$$

Câu 4:

a, Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ trọng lượng loại sản phẩm S do nhà máy Q sản xuất trong quý IV năm 2020. $X \sim N(\mu, \sigma^2), E(X) = \mu$

- Chọn thống kê $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Vì $n = 100 > 30$ nên $U \sim N(0,1)$
- Sử dụng khoảng tin cậy đối xứng cho $E(X) = \mu$:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

  Trong đó $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ được xác định từ bảng phân phối chuẩn tắc.

- Từ số liệu vừa tính toán ta có khoảng tin cậy đối xứng là:

$$\left(8,87 - 1,96.\frac{1,7095}{\sqrt{100}}; 8,87 + 1,96.\frac{1,7095}{\sqrt{100}}\right) = (8,5349; 9,2051)$$

Vậy với độ tin cậy 95%, trọng lượng trung bình của loại sản phẩm S do nhà máy Q sản xuất tại thời điểm kiểm tra từ 8,5349g đến 9,2051g. b, Sai số của ước lượng là

$$\varepsilon = u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_1}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow n = \frac{\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2.s^2}{\varepsilon^2} \ge \frac{1,96^2.1,7095^2}{0,24^2} = 194,9$$

Vậy nếu yêu cầu sai số của ước lượng ở ý a) là 0,24 thì cần phải cân thêm 195 – 100 = 95 sản phẩm nữa. **Câu 5:**

Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ sản phẩm loại B do phân xưởng I và II sản xuất.

- Đặt giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$; đối thuyết $H_1 : p_1 > p_2$
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $Z = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}\left(1-\overline{f}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu H_0 đúng. $U \sim N(0,1)$
- Với $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối chuẩn tắc ta có $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$\mathrm{W}_\alpha = (z_{1-\alpha}; +\infty) = (1,645; +\infty)$$

- Theo bài ra

$$n_1 = 1000, n_2 = 900, m_1 = 35, m_2 = 20, f_1 = \frac{35}{1000} = \frac{7}{200}, f_2 = \frac{20}{900} = \frac{1}{45}$$
$$\overline{f} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \frac{35+20}{1900} = \frac{11}{380}$$
$$\Rightarrow z_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}\left(1-\overline{f}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = 1,6587$$

Vì $z_{qs} \in \mathrm{W}_s$ nên bác bỏ H_0 nghĩa là có thể xem tỷ lệ sản phẩm loại B do phân xưởng I sản xuất cao hơn tỷ lệ sản phẩm loại B do phân xưởng II sản xuất với mức ý nghĩa 5%.