GIẢI TÍCH 2
BÀI 5
CHƯƠNG III. TÍCH PHÂN BỘI
A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TÍCH PHÂN KÉP)

Đặt vấn đề.

- Trong GT 1, có $S = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx, y(x) \geq 0.$

- Đối với mặt cong không tròn xoay, có tính được diện tích ?

- $f(x) = \begin{cases} e^x & x \in [0;1) \\ 2 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \int\limits_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = ?$

3.0. Tính thể tích bằng tích phân lặp

- Đã biết công thức tính thể tích vật thể trong Giải tích I:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (0.1)$$

- Diện tích tiết diện thẳng $S(x)$ được tính như sau:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (0.2)$$

- Thay (0.2) vào (0.1) ta có

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy$$

Ví dụ 1. Tính tích phân lặp $I = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} 2y dy$

Giải

+) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 2y\,dy \right) dx = \int_0^1 y^2 \Big|_{x^2}^{x} dx$

+) $= \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Ví dụ 2. Sử dụng tích phân lặp tính thể tích tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng

$$x + y + z = 1.$$

Giải

+)

$$I=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} zdy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right)dx$$

+) $$=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx$$

+) $$=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}dx=\frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

3.1. Tích phân hai lớp trên hình chữ nhật đóng

3.1.1. Định nghĩa

a) Phân hoạch π chia hình chữ nhật $R = [a\,;\,b] \times [c\,;\,d]$ thành hữu hạn các hình chữ nhật đóng, đôi một không có phần trong chung và có $|R| = \sum_{i=1}^{n} \Delta R_i$,

ΔR_i là diện tích hình chữ nhật thứ i, $|R|$ là diện tích hình chữ nhật R;

d_i là đường chéo hình chữ nhật ΔR_i, $d(\pi) = \sup\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$.

Hàm f(x,y) xác định và bị chặn trên R.

b) Tổng tích phân

$$\sigma = \sigma(f, \pi, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i, p_i(\xi_i, \eta_i)$$

c) Các tổng Đacbu

- Tổng Đacbu dưới: $s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i$
- Tổng Đacbu trên: $S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i$, ở đó

$$m_i = \inf_{\Delta R_i} f(x, y), M_i = \sup_{\Delta R_i} f(x, y),$$

$$m = \inf_R f(x, y), M = \sup_R f(x, y)$$

thì có

$$m|R| \le s(\pi) \le \sigma(f, \pi, p_1, \ldots, p_n) \le S(\pi) \le M|R|$$

d) Tổng trên không tăng, tổng dưới không giảm

• Ta bảo phân hoạch π' mịn hơn π nếu mỗi hình chữ nhật trong phân hoạch π' luôn nằm trong hình chữ nhật nào đấy của phân hoạch π

• Khi π' mịn hơn π, ta có $s(\pi) \le s(\pi') \le S(\pi') \le S(\pi)$.

e) Dãy chuẩn tắc các phép phân hoạch

Cho $\{\pi_n\}$ là dãy các phân hoạch hình chữ nhật R. Dãy $\{\pi_n\}$ được gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

f) Định nghĩa tích phân kép

Cho f xác định trên hình chữ nhật đóng R, Nếu có

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\left(f, \pi_n, p_1, \dots, p_n\right) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta R_i = I$$ (số

thực hữu hạn) với mọi dãy chuẩn tắc

$$\{\pi_n\}: \pi_n = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_{p_n}\},$$

với mọi cách chọn điểm $p_i = (\xi_i ; \eta_i) \in \Delta R_i$, thì ta có hàm f khả tích trên R và viết $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = I$.

Ví dụ 3. Tính $\iint\limits_R 2dx\, dy$, ở đó $R: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

Giải

+) Với mọi dãy chuẩn tắc

$$\{\pi_n\}:\ \pi_n = \{\Delta R_1,\ \Delta R_2,\ \ldots,\ \Delta R_{p_n}\},$$

với mọi cách chọn điểm $p_i = (\xi_i\ ;\ \eta_i) \in \Delta R_i$, thì ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\left(f, \pi_n, p_1, \ldots, p_n\right) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta R_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} 2\Delta R_i = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \Delta R_i = 2 \times 2 = 4$$

+) $\Rightarrow \iint\limits_R 2dx\,dy = 4.$

3.1.2. Điều kiện khả tích

Định lí 1. Hàm f khả tích trên R đóng $\Rightarrow$ f bị chặn

Định nghĩa. $\{\pi_n\}$ là dãy chuẩn tắc bất kì. Ta gọi $\lim\limits_{n\to\infty} s(\pi_n)$ ($\lim\limits_{n\to\infty} S(\pi_n)$) là tích phân dưới hai lớp (tích phân trên hai lớp) và kí hiệu là

$$\underline{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy} \quad \left(\overline{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy}\right)$$

Định lí 2. Ta có

1°/ $s(\pi) \le \underline{\iint\limits_R f(x,y)dxdy} \le \overline{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy} \le S(\pi)$, $\forall \pi$.

2°/ $\sup\limits_{\mathcal{P}(R)} s(\pi) = \underline{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy}$,

$\inf\limits_{\mathcal{P}(R)} S(\pi) = \overline{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy}$,

$\mathcal{P}(R)$ là tập tất cả các phân hoạch của R.

Định lí 3.

Cho f bị chặn trên $\bar{R}$. Khi đó f khả tích trên R

$$\Leftrightarrow \underline{\iint_R f(x,y)dxdy} = \overline{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy}.$$

Khi đó ta có

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \underline{\iint_R f(x,y)dxdy} = \overline{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy}.$$

Định lí 4. Cho f bị chặn trên $\bar{R}$. Khi đó f khả tích trên $R \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, bé tuỳ ý, $\exists$ phân hoạch π của R sao cho $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$

Định lí 5. f liên tục trên $\bar{R}$ thì f khả tích trên R.

Định lí 6. f xác định và bị chặn trên $\bar{R}$, có f liên tục trên $R \backslash E$, ở đó $E \subset R$ và $|E| = 0 \Rightarrow f$ khả tích trên R.

3.2. Độ đo Peanno – Jourdan

• **Độ đo.** Tìm lớp $M \subset \mathbb{R}^2$ để $\forall A \subset M$ có độ đo là $m(A)$ thoả mãn:

1°/ $0 \le m(A) \le +\infty$

2°/ Mọi hình chữ nhật $\Delta \in M$ và có $m(\Delta) = |\Delta|$

3°/ Mọi $A, B \in M$, rời nhau thì có

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

• **Độ đo Peanno – Jordan.** Cho $A \subset \mathbb{R}^2$, ta gọi độ đo ngoài của nó là $m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i \supset A\right\}$, ở đó Δ_i là những hình chữ nhật.

Nếu $A \subset \Delta_0$ nào đó thì ta gọi độ đo trong của nó là

$$m_*(A) = |\Delta_0| - m^*(\Delta_0 \setminus A).$$

Tập A được gọi là đo được $\Leftrightarrow$ $m^*(A) = m_*(A)$ và khi đó ta định nghĩa $m(A) = m^*(A) = m_*(A)$

Độ đo Peanno-Jordan thoả mãn các tiên đề về độ đo.

3.3. Tích phân hai lớp trên tập hợp giới nội

a) Định nghĩa. R là hình chữ nhật đóng, tập giới nội $D \subset R$, hàm f xác định trên D, và

$$f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in D \\ 0, \quad (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Nếu f_0 khả tích trên R thì ta bảo f khả tích trên D và định nghĩa

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f_0(x, y)\,dx\,dy$$

Định lí 7. D giới nội trong R, f bị chặn, $f \geq 0$ trên D. Nếu f khả tích trên D thì tập

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

đo được theo nghĩa Jordan trong $\mathbb{R}^3$ và thể tích của A là $|A| = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$

Định lí 8. Tập D giới nội trong $\mathbb{R}^2$, $X_D(x, y) = 1$, $(x, y) \in D$. Tập D đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow X_D$ khả tích trên D, khi đó ta có

$$|D| = \iint\limits_D X_D(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D dx\,dy$$

Nhận xét.

- Là công thức tổng quát nhất tính diện tích miền phẳng.
- Công thức tổng quát tính độ dài đoạn thẳng là

$$\left\|[a;b]\right\| = \int_a^b dx = b - a.$$

Hệ quả 1. Tập D giới nội trong $\mathbb{R}^2$ thì D đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow |\partial D| = 0$

Hệ quả 2. Hàm số $f : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ khả tích trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì đồ thị Γ của f có diện tích 0.

Hệ quả 3. D giới nội trong $\mathbb{R}^2$, ∂D là hợp của hữu hạn cung được xác định bởi các hàm số liên tục thì D là tập hợp đo được.

Miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$ thoả các điều kiện của Hệ quả 3 được gọi là miền chính quy trong $\mathbb{R}^2$

b) Tính chất

1°/ Cộng tính. $D = D_1 \cup D_2$ giới nội trong $\mathbb{R}^2$, $|D_1 \cap D_2| = 0$, f khả tích trên D_1, $D_2 \Rightarrow f$ khả tích trên D và có

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

2°/ Tuyến tính. D giới nội trong $\mathbb{R}^2$, f, g khả tích trên $D \Rightarrow \alpha f + \beta g$ khả tích trên D và có

$$\iint\limits_{D} \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] dx\,dy$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3°/ Bảo toàn thứ tự. Hai hàm *f*, *g* khả tích trên tập giới nội $D \subset \mathbb{R}^2$, và có $f(x, y) \le g(x, y),\ \forall (x, y) \in D$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Hệ quả 4. Nếu $m \le f(x, y) \le M,\ \forall (x, y) \in D$, thì có

$$m|D| \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le M|D|$$

Hệ quả 5.

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

4°/ Khả tích.

Định lí 9. D là tập đo được trong $\mathbb{R}^2$, f liên tục, bị chặn trên D $\Rightarrow$ f khả tích trên D.

Định lí 10.

$|D| = 0$, f bị chặn trên $D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Định lí 11. g bị chặn trên D, f khả tích trên D, $|E| = 0$, $E \subset D$, $g(x, y) = f(x, y)$, $\forall\ (x, y) \in D\backslash E \Rightarrow g$ khả tích trên D và có $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Ví dụ 4. Tính $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, ở đó

$$D = (0;2)\times(0;2),\ f(x,y) = \begin{cases} 1 & khi\,(x;y)\in D,\ y = -x+1 \\ 2 & khi\,(x;y)\in D, y = -x+2 \\ 3 & khi\,(x;y)\in D,\quad (x;y)\neq \end{cases}$$

Giải

+) Từ hệ quả 2,có $\left|(0;2)\right| = 0,$

$\left|(x;y): y = -x+1, 0 \le x \le 1\right| = 0,$

$\left|(x;y): y = -x+2, 0 \le x \le 2\right| = 0.$

+) Từ Định lí 11, có

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D g(x,y)\,dx\,dy = \iint_R g(x,y)\,dx\,dy,$$

$R = [0;2]\times[0;2],\ g(x;y) = 3,\ \forall (x;y) \in R.$

+) $\Rightarrow I = \iint_R g(x,y)\,dx\,dy = \iint_R 3\,dx\,dy$

$$= 3\iint\limits_R dx\,dy = 3 \times 4 = 12. \quad \text{(ĐL 8)}$$

5°/ Các định lí giá trị trung bình

Định lí 12. D là tập hợp đo được, f khả tích trên D và có $m \le f(x, y) \le M$, $\forall (x, y) \in D$.

Khi đó $\exists\ \mu \in [m, M]$ sao cho $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \mu|D|$

Định lí 13. Cho D đóng, đo được, liên thông, f liên tục trên $D \Rightarrow \exists\ p(\xi, \eta) \in D$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = f(p)|D|.$$

Ví dụ 5.

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\in[0;1) \\ 2 & x=1 \end{cases} \Rightarrow \exists\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = ?$$

Từ ĐL 11 $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e-1.$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!