ĐỀ THI THỬ GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH III - Học kì 2022.2

Nhóm ngành 2 Thời gian làm bài: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải kí xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. [3đ] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{2^n+1}}$

Câu 2. [2đ] Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-xn^2}}{x+n^2}$

Câu 3. [3đ] Giải các phương trình vi phân sau:

a) $e^{-x}\cos y dx + \sqrt{e^{-2x}+1}dy = 0$

b) $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$

c) $\displaystyle\left(\frac{y}{\tan^2(e^x+x)+1} + e^y\cos^2(e^x+x)\right)y' + e^x + 1 = 0$

Câu 4. [1đ] Khai triển hàm $f(x) = \ln(2x+\sqrt{4x^2+9})$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5. [1đ] Tính tổng $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(n+1)}{(2n)!!(2n+1)4^n}$

Chúc các bạn hoàn thành tốt bài thi

LỜI GIẢI CHI TIẾT - GT3 - NN2 - Thi thử Giữa kỳ 20222

Thực hiện bởi team GT3 - CLB Hỗ trợ Học tập

Câu 1. [3đ] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$

+) Xét $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}\right|$ là chuỗi số dương

+) Ta có: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)}\right| = \frac{5}{8} < 1$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}\right|$ hội tụ (theo tiêu chuẩn D'Alembert)

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$ hội tụ

b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

+) Xét hàm số $f(x) = \ln(x) - \sqrt{x}, (x > 5) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow$ với $x > 4$ thì hàm số nghịch biến

$\Rightarrow f(x) < f(5) < 0 \,, x > 5 \Rightarrow \ln(n) < \sqrt{n} \,, n > 5$

+) Với $n > 5$: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} > 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ là chuỗi số dương

Có: $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} > \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n} > 0$

Mà $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ phân kì theo tiêu chuẩn so sánh

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{2^n+1}}$

+) Xét $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{2^n+1}} > 0$ và $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad (1)$

+) Xét $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2^x+1}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2.2^x + 2 - 2^x.x.ln2}{2(2^x+1)\sqrt{2^x+1}}$

Với $x > 10$: $2 - x\ln(2) < 2 - 10\ln(2) < -4 \Rightarrow 2^x(2 - x\ln(2)) < -4$

$\Rightarrow 2^x(2 - x\ln(2)) + 2 < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm giảm với $x > 10$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy giảm với $n > 10 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{2^n+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Câu 2. [2đ]Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+3^n}\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^n$

+) Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

+) Đặt $X = \dfrac{2x}{x-1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+3^n} \cdot X^n$ là chuỗi luỹ thừa.

+) Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = 3$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ: $R = 3$

Khi đó chuỗi số trên hội tụ với $|X| < 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2x}{x-1}\right| < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

+) Với $X = 3 \Rightarrow x = 3$ chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+3^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi phân kì (vi phạm điều kiện cần)

+) Với $X = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{5}$ chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^n+3^n}$

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^n+3^n}$ không xác định $\Rightarrow$ chuỗi phân kì (vi phạm điều kiện cần)

+) Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-\infty; \dfrac{3}{5}) \cup (3; +\infty)$

b, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2}$

+) Tập xác định: $x \neq -k^2 (k \in \mathbb{N}^*)$

+) Xét $x < 0$ thì:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2} = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2}$ phân kì (vi phạm điều kiện cần)

+) Xét $x \geq 0$ thì:

$a_n = \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2}$ là chuỗi số dương

$0 < a_n = \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-xn^2}}{x+n^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là: $[0;+\infty)$

Câu 3. [3đ] Giải các phương trình vi phân sau:

a) $e^{-x}\cos y dx + \sqrt{e^{-2x}+1}dy = 0$

+) Với y = $\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì thoả mãn phương trình

+) Với y $\neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phương trình tương đương:

$$\frac{-e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{dy}{\cos y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{d(\sin y)}{1-\sin^2 y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{d(\sin y)}{(1-\sin y)(1+\sin y)}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln|(1-\sin y)(1+\sin y)| + c \ (c \in \mathbb{R})$$

Vậy phương trình có tích phân tổng quát là:

$\ln\left(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right) = \dfrac{1}{2}\ln|(1-\sin y)(1+\sin y)| + c \ (c \in \mathbb{R})$

và có nghiệm kì dị là: y = $\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $(x^2+y^2)dx + xydy = 0$

+) Với $x, y \neq 0$ ta có: $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

Đặt $y = ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$, khi đó phương trình có dạng:

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u + u + \frac{1}{u} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{dx}{x} &= -\frac{udu}{1+2u^2} \\
\Rightarrow \int \frac{dx}{x} &= \int -\frac{udu}{1+2u^2} \\
\Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| &= -\frac{1}{4}\ln(1+2u^2)
\end{aligned}$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta được tích phân tổng quát của PTVP là: $\quad x^4 = \dfrac{C^4 x^2}{x^2 + 2y^2}$

+) Với $x = 0$ là nghiệm riêng của phương trình

c) $\left(\dfrac{y}{\tan^2(e^x + x) + 1} + e^y \cos^2(e^x + x)\right) y' + e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(y \cos^2(e^x + x) + e^y \cos^2(e^x + x)\right) y' + e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y + e^y)\cos^2(e^x + x) dy = -(e^x + 1) dx$

$\Leftrightarrow (y + e^y) dy = -\dfrac{e^x + 1}{\cos^2(e^x + x)} dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{2} + e^y = -\tan(e^x + x) + C$

Vậy tích phân tổng quát của PTVP là: $\dfrac{y^2}{2} + e^y + \tan(e^x + x) = C$

Câu 4. [1đ] Khai triển hàm $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 9})$ thành chuỗi Maclaurin.

Ta có:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) \\
\Rightarrow \quad f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 9}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 + 1}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right) \ldots \left(\dfrac{1}{2} - n\right)}{n!} \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (2n-1)!!}{9^n \cdot n!} \cdot x^{2n} \left(\text{Với } \left(\frac{2x}{3}\right)^2 < 1\right)
\end{aligned}
$$

Khi đó ta có:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (2n-1)!!}{9^n \cdot n!} \cdot x^{2n}\right) dx \\
&= \frac{2}{3} x + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (2n-1)!!}{9^n \cdot (2n+1) \cdot n!} \cdot x^{2n+1} + C
\end{aligned}
$$

Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 3 \Rightarrow C = \ln 3$

Vậy $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (2n-1)!!}{9^n \cdot (2n+1) \cdot n!} \cdot x^{2n+1} + \ln 3 \qquad \left(\text{Với } -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{3}{2}\right)$

Câu 5. [1đ] Tính tổng $S = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!(n+1)}{(2n)!!(2n+1)4^n}$

Với $|x| < 1$, ta có: $\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ khả vi trên $(-1;1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n}}{(2n)!!}$$

$$\Rightarrow \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!}$$

$$\Rightarrow \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(2n+2)x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$$

Thay $x = \dfrac{1}{2}$ ta được: $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!(2n+2)}{(2n)!!(2n+1)2^{2n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!(n+1)}{(2n)!!(2n+1)4^n} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$