教学讨论　平行轴定理的正确运用

中央民族学院　俞 琛

摘要：本文通过对一个典型例题的深入分析，指出平行轴定理的应用是有条件的，即只有在刚体绕质心轴转动与绕另一平行轴转动有相同的角速度时，公式才是正确的.

计算刚体转动惯量的平行轴定理$I=I_C+md^2$（其中m为刚体质量，I_C为刚体对过质心轴的转动惯量，I则为刚体对另一平行轴的转动惯量，d为二平行轴之间的垂直距离.）理论上很简单，同学接受起来也没有什么困难，但是如何深入理解它的物理意义并正确加以运用，对初学者来说就往往存在着一些问题，必须加以解决.

一、问题的提出.

运用平行轴定理解题时，一般不会遇到问题，但是要解决某些具体问题，有时又会出现一些困惑，现举一例说明如下.

如图1所示，一质量为m、半径为r的小球，在半径为R的半球形碗的底部作往复的无滑滚动. 若角φ很小，试证明：小球质心的运动为简谐振动，并确定振动的固有频率.

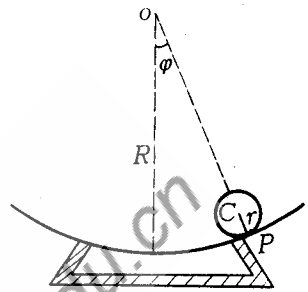

图 1

此题的解法甚多，既可以采用分析力学的方法（如运用拉格朗日方程求解）也可以运用牛顿力学的方法. 当然，在普物力学中比较恰当的方法是采用机械能守恒求解或运用对瞬时轴的转动定理求解. 即

$$mgr\sin\varphi=-I_P\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

参 考 文 献

[1] B.Simon, *Quantum Mechanics for Hamiltonian Defined as Quadratic Forms*, Princeton Univ.(1971), p.204.

[2] R.D.Richtmeyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer (1978), V.Ⅰ, Chap. 7, p.127.

[3] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic (1972), V.Ⅰ, p.255.

[4] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Pitman (1980), V.Ⅰ., pp.128, 156.

[5] F.Riesz, B. Sz-Nagy, *leçons d'Analyse Fonctionelle*, Gauthier-Villars (1972), p.305; *Functional Analysis*, Ungar (1955).

[6] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic (1975), V.Ⅱ, p.135.

[7] B.Dewitt, *Phys. Rev*. 85 (1952) 653.

[8] I.Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Macmillan (1967), p.145.

[9] G.Hellwig, *Differential Operators of Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1967), pp.84, 174.

[10] B.Simon, in *Mathematics of Contemporary Physics*, R.F.Streater, *ed*., Academic (1972), p.20.

[11] G.R.Gruber, *Found. Phys*. 1 (1971) 227.

[12] J.Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Space*, Springer (1980), p.73.

[13] E.J. Saletan, A.H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, Wiley (1971), p.61.

[14] I.S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis*, Wiley (1964), p.51.

[15] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. (1976), p.153.

[16] R.H.Dicke, J.P.Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1963), p.143.

[关洪译自：*Foundations of Physics*, 14 (1984) 147－154.

有关内容亦可参阅：P.Roman, *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, Pergamon (1975), V.Ⅱ, Chap. 12, 特别是 pp.544－549 等]

http://dxwl.bnu.edu.cn 大学物理

其中I_P为小球对过P点且与纸面相垂直的瞬轴的转动惯量．依平行轴定理可求得为

$$I_P=\frac{2}{5}mr^2+mr^2=\frac{7}{5}mr^2$$

ω为小球绕瞬时轴P转动的角速度(当然,这个角速度也就是小球绕质心转动的角速度)．

由于已知小球在碗内作无滑滚动,故有

$$(R-r)\dot{\varphi}=\omega r$$

当φ角很小时有

$$\sin\varphi \doteq \varphi$$

则(1)式化为

$$\ddot{\varphi}+\frac{5g}{7(R-r)}\varphi=0 \qquad (2)$$

显然,根据简谐振动的特点,可以判断方程(2)所描述的小球质心的运动确为一简谐振动,其角频率为

$$\Omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \qquad (3)$$

但是,也有的同学在解此题时不是采用上述的方法,而是把小球的运动视为绕过O点,且垂直于纸面的轴线的转动,计算过程如下

$$mg(R-r)\sin\varphi=-I_O\ddot{\varphi} \qquad (4)$$

I_O为小球对过O点且垂直于纸面的轴线的转动惯量，依平行轴定理

$$I_O=\frac{2}{5}mr^2+m(R-r)^2 \qquad (5)$$

仍以φ代替$\sin\varphi$，则可解得

$$\ddot{\varphi}+\frac{(R-r)g}{\frac{2}{5}r^2+(R-r)^2}\varphi=0 \qquad (6)$$

相应的角频率为

$$\Omega=\sqrt{\frac{(R-r)g}{\frac{2}{5}r^2+(R-r)^2}} \qquad (7)$$

这个结果(7)与结果(3)完全不同,显然(7)式是错误的，但错在哪里呢?

二、错误之所在

事实上,后一种方法的错误就发生在计算小球对过O点,且垂直于纸面的轴线(以下简称为O轴)的转动惯量上．想当然地运用平行轴定理求出小球对O轴的转动惯量I_O，而不去过问这个公式的物理意义和适用条件,以为不论物体如何运动,都可以运用平行轴定理求出对O轴的转动惯量．我们仔细地考察一下推导平行轴定理的过程,就可以明确,式(5) $I_O=\frac{2}{5}mr^2+m(R-r)^2$只有在小球绕$O$轴作定轴转动的情况下才是正确的，而本题的情况是小球不仅绕O轴转动，同时还有绕质心轴的转动(换言之,这两个转动的角速度不相等)这时直接运用平行轴定理求I_O是不允许的，因为这样算出的转动惯量只相当于用一根长为$R-r$的轻绳系一质量为m、半径为r的小球使之绕O点在纸面内摆动时(如图2所示)的转动惯量(当然要求$R-r>r$.)它将小于该小球在半径为R的碗内作无滑滚动时小球对O轴的转动惯量．这里我们不妨把后者称之为"等效转动惯量"以区别于一般意义下的转动惯量．

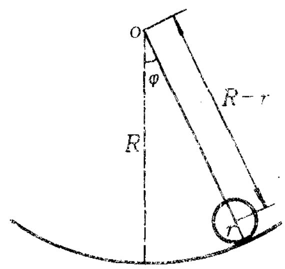

图 2

这个"等效转动惯量"可以用以下方法求出:即利用小球绕O轴转动的动能等于小球质心动能与小球绕质心转动的动能之和．

$$\frac{1}{2}I_O'\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$$

$$v_C=r\omega$$

$$I_C=\frac{2}{5}mr^2$$

$$\text{且有 } r\omega=(R-r)\dot{\varphi}$$

则可解出"等效转动惯量"$I_O'=\frac{7}{5}m(R-r)^2$ (8)

求出I_O'以后,再运用对O轴的转动定理即可求出小球质心作简谐振动的角频率．即

$mg(R-r)\sin\varphi=-\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\varphi}$ 仍取 $\sin\varphi\doteq\varphi$

则可解出 $\ddot{\varphi}+\frac{5g}{7(R-r)}\varphi=0$

评译文《热力学第一定律中的内能》

南京大学　　梁昆淼

［**编者按**］ 我刊1987年第四期刊登了H.Erlichson的《热力学第一定律中的内能》一文后，收到闽东技校古田分校林长财和南京大学梁昆淼的来稿．两稿的观点基本一致，主要论点有：⑴、传统的热力学第一定律都是认为系统是整体不动的，因此文中表达式(8)式并无问题；⑵、为讨论运动的系统，引入(7)式亦无不可，但似无必要将(7)式说成是对热力学第一定律表达式的修正．至于修正热力学中内能的概念则更不可取．⑶、原文对三个例子的解释有一些毛病．林文对例一和例二，梁文对例三进行了评论．云南民族学院的王正昌，黑河师专的王柏生及西北电业职工大学的梁振中等同志也于较晚的时间寄来内容相近的稿件．

现将梁文发表于下，供读者参考．

一、引言

本刊1987年第4期所载译文《热力学第一定律中的内能》认为公认的内能 U 的定义与广泛使用的热力学第一定律的表达式

$$\Delta U = Q - W \tag{8}$$

［公式编号悉依原文］是矛盾的．该文在结论中说，如要保留表达式(8)，必须修改 U 的定义，明确指出内能 U 包括系统的质心动能；

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

角频率 $$\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \tag{9}$$

显然式(9)与式(3)是一致的，虽然如此，但我们并不主张采用上述方法去求解，也不提倡再引入一个所谓的"等效转动惯量"以免引起不必要的混乱，在此只是为了说明问题的方便而暂用一下这个名词罢了．

三、结　论

从上面的讨论中，可以得出以下结论：即当运用平行轴定理$I_O = I_C + md^2$这一公式时，要求刚体绕质心轴转动与绕另一平行轴线（O 轴）转动有相同的角速度，否则公式是不适用的．当刚体绕质心轴转动的角速度 ω 大于绕 O 轴转动的角速度 $\dot{\varphi}$ 时，（例如本文例题所示之情况）小球对O 轴的转动惯量将比按公式算出的为大

如要保留内能 U 不包括质心动能的通常定义，则表达式(8)应订正为

$$\Delta U + \Delta K_{质心} = Q - W \tag{7}$$

我以为该文作者对广泛使用的热力学第一定律的表达式(8)有所误解，他所建议的修订并不必要．

二、热力学第一定律

该文的式(7)是正确的，文中推导(7)是从

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

（从转动惯量的物理意义上看，这也是显然的）反之若 $\omega < \dot{\varphi}$（例如图2所示的例子中，若使小球在绕O 轴摆动的过程中，小球对质心轴也可作自由转动，使小球始终保持为平动，则 $\omega=0$）这时小球对O 轴的转动惯量将比按公式算出的为小（它将简化的一个质量为 m、距 O 为 $R-r$ 的质点对O 轴的转动惯量．）这是必须加以注意的．

参考文献

［1］周衍柏编，理论力学教程，第二版，高等教育出版社（1985）．

［2］蔡伯濂编著，力学，湖南教育出版社（1985）．

［3］［美］D.Kleppner．R.J.Kolenkow，合著，力学引论（中译本），人民教育出版社（1981）．

［4］［美］F.J.Bueche 著；物理学导论（中译本）（上册），人民教育出版社（1979）．

http://dxwl.bnu.edu.cn