$\boxed{4.17}$ X_L and X_R ~ Poisson with rate G

X_L and X_R are independent

$X_L + X_R$ ~ Poisson with rate $2G$

- $\mathbb{P}(X_L+X_R \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X_L+X_R=0) - \mathbb{P}(X_L+X_R=1) = 1 - e^{-2G} - 2Ge^{-2G}$
- $\mathbb{P}(X_L=0, X_L+X_R \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_L=0, X_R \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_L=0)\,\mathbb{P}(X_R \geqslant 2) = e^{-G}(1-e^{-G}-Ge^{-G})$
- $\mathbb{P}(X_L=1, X_L+X_R \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_L=1, X_R \geqslant 1) = \mathbb{P}(X_L=1)\,\mathbb{P}(X_R \geqslant 1) = Ge^{-G}(1-e^{-G})$
- $\mathbb{P}(X_L \geqslant 2, X_L+X_R \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_L \geqslant 2) = 1 - e^{-G} - Ge^{-G}$

(a) $$\mathbb{P}(X_L=0 \mid X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_L=0, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{e^{-G}(1-e^{-G}-Ge^{-G})}{1-e^{-2G}-2Ge^{-2G}}$$

(b) $$\mathbb{P}(X_L=1 \mid X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_L=1, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{Ge^{-G}(1-e^{-G})}{1-e^{-2G}-2Ge^{-2G}}$$

(c) $$\mathbb{P}(X_L \geqslant 2 \mid X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_L \geqslant 2, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{1-e^{-G}-Ge^{-G}}{1-e^{-2G}-2Ge^{-2G}}$$

(d) $$\mathbb{P}(X_R=1 \mid X_L=1, X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_R=1, X_L=1, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L=1, X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{\mathbb{P}(X_R=1)\,\mathbb{P}(X_L=1)}{\mathbb{P}(X_L=1)\,\mathbb{P}(X_R \geqslant 1)}$$

$$= \frac{Ge^{-G}}{1-e^{-G}}$$

(e) $$\mathbb{P}(X_R=i \mid X_L=0, X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_R=i, X_L=0, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L=0, X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{\mathbb{P}(X_R=i)\,\mathbb{P}(X_L=0)}{\mathbb{P}(X_L=0)\,\mathbb{P}(X_R \geqslant 2)}$$

$\underline{i \geqslant 2}$

$$= \frac{(e^{-G}G^i/i!)}{1-e^{-G}-Ge^{-G}}$$

(f) $$\mathbb{P}(X_R=i \mid X_L=2, X_L+X_R \geqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(X_R=i, X_L=2, X_L+X_R \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L=2, X_L+X_R \geqslant 2)} = \frac{\mathbb{P}(X_R=i)\,\mathbb{P}(X_L \geqslant 2)}{\mathbb{P}(X_L \geqslant 2)}$$

$$= \frac{G^i e^{-G}}{i!}$$