Introdução à teoria das probabilidades

- **Introdução**
- **Conceitos fundamentais**
- **Conceitos de probabilidade**
- **Teoremas para o cálculo de probabilidades**
- Probabilidade condicional e independência
- Teorema de Bayes

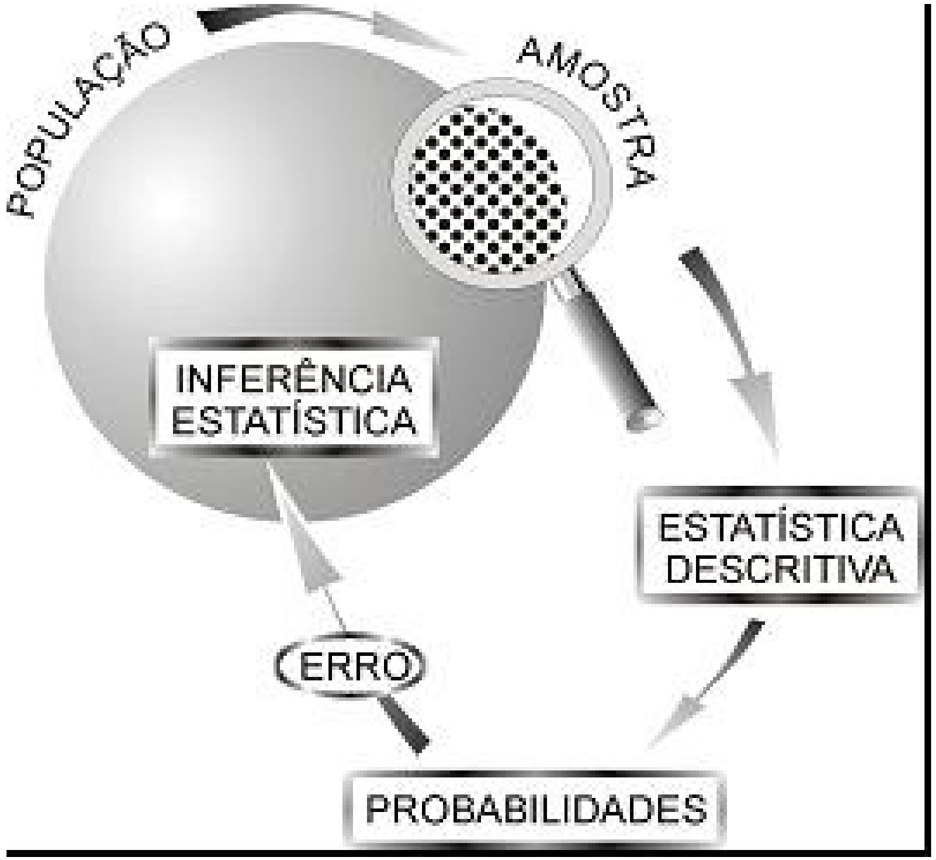
⇨ O termo PROBABILIDADE é utilizado todos os dias de forma intuitiva, pois nos mais variados aspectos da nossa vida está presente a **incerteza**:

- ⇨dizemos que existe uma pequena probabilidade de ganhar a Mega Sena;
- ⇨dizemos que existe uma grande probabilidade de chover num dia carregado de nuvens;
- ⇨o político quer saber qual a probabilidade de ganhar as próximas eleições;
- ⇨o aluno interroga-se sobre qual a probabilidade de obter resultado positivo num teste múltipla escolha, para o qual não estudou e responde aleatoriamente.

⇨Todos estes exemplos têm uma característica comum, que é o fato de não conseguirmos prever com exatidão e de antemão qual o resultado. No entanto os métodos probabilísticos vão nos permitir quantificar essa incerteza.

Divisão da Estatística

- **Descritiva**
- **Inferência**



Matemática → **Criação de modelos**

Estudo dos fenômenos da natureza

Probabilidade → **Modelos Probabilísticos**

Modelos Determinísticos

Experimentos Probabilísticos

Experimentos Determinísticos

Modelo determinístico: é aquele em que ao conhecermos as variáveis de entrada é possível determinar as variáveis de saída (os seus resultados).

⇨ Em **experimentos determinísticos** existe a **certeza** do resultado que ocorrerá

⇨ **Física clássica** → fenômenos determinísticos

Exemplo: Distância percorrida no tempo em função da velocidade

Modelo aleatório, probabilístico ou estocástico: é aquele em que, mesmo conhecendo as condições do experimento, não é possível determinar o seu resultado final.

⇨ Em **experimentos aleatórios** só é possível determinar a **chance** de ocorrência de um resultado.

⇨ **Biologia** → fenômenos probabilísticos

Exemplo: Sexo de uma criança ao nascer.

A modelagem de um experimento aleatório implica em responder três questões fundamentais:

- ✓ Quais as suas possíveis formas de ocorrência?
- ✓ Quais são as chances de cada ocorrência?
- ✓ De que forma se pode calcular essas chances?

Descrição do experimento $\rightarrow$ **ação** e **observação**

Exemplos:

E_1: Ação: jogar um dado de seis faces

observação: face voltada para cima

E_2: Ação: selecionar uma carta do baralho

observação: valor e naipe da carta

E_3: Ação: lançar uma moeda até que apareça cara

observação: número de lançamentos

E_4: Ação: acender uma lâmpada

observação: tempo decorrido até que ela se apague

Espaço amostral (S)

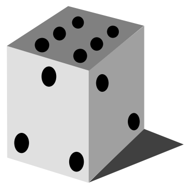
É o conjunto de **todos os possíveis resultados** de um experimento aleatório.

⇨ É o **conjunto universo** relativo aos resultados de um experimento.

A cada experimento aleatório está associado um conjunto de resultados possíveis ou espaço amostral.

Exemplos:

E_1: Jogar um dado e observar a face voltada para cima.



S_1={1,2,3,4,5,6} ← enumerável e finito

E_2: Selecionar uma carta do baralho e observar o seu valor e naipe.

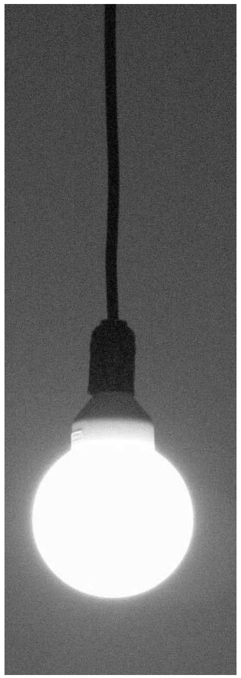
S_2={ás de ouro,..., rei de ouro, ás de paus,..., rei de paus,..., ás de espada,..., rei de espada, ás de copas,..., rei de copas} ← enumerável e finito

E_3: Lançar uma moeda até que apareça cara e observar o número de lançamentos.

Cara | Coroa Cara | Coroa Coroa Cara

1 | 1 2 | 1 2 3 ← lançamentos

S_3={1,2,3,4,5,...} ← enumerável e infinito



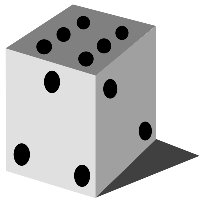
E_4: Acender uma lâmpada e observar o tempo decorrido até que ela se apague.

S_4={t; t>0} ← contínuo e infinito

Evento ou ocorrência: é todo conjunto particular de resultados de **S** ou ainda todo subconjunto de **S**.

- ⇨ É designado por uma letra maiúscula (A, B, C).
- ⇨ A todo evento será possível associar uma probabilidade.

Exemplo: Lançamento de um dado



S={1,2,3,4,5,6} ← **Espaço amostral**

A = Ocorrência de face ímpar = {1, 3, 5}

B = Ocorrência de face maior que 4 = {5, 6}

Eventos

Ponto amostral: é qualquer resultado particular de um experimento aleatório

⇨ Todo espaço amostral e todo evento são constituídos por pontos amostrais.

Exemplo: **S={1,2,3,4,5,6}** $\leftarrow$ seis pontos amostrais

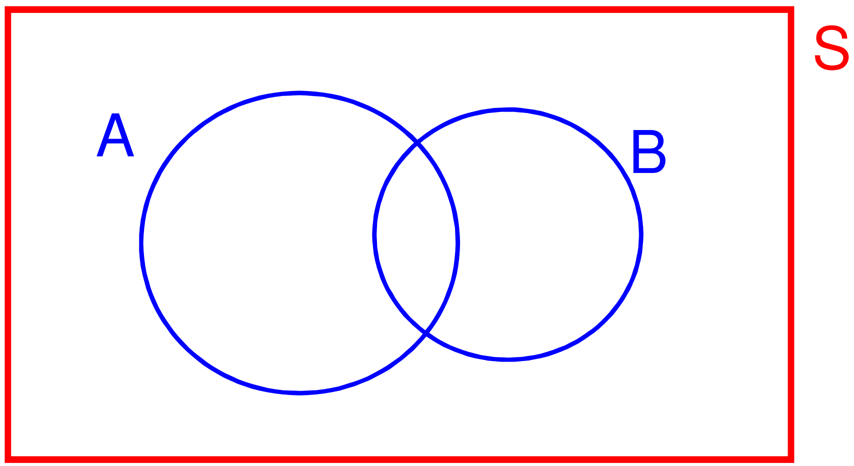
A = {1,3,5} $\leftarrow$ três pontos amostrais

B = {5,6} $\leftarrow$ dois pontos amostrais

Álgebra de Eventos

Como o espaço amostral S e os eventos são conjuntos, as mesmas operações realizadas com conjuntos são válidas para os eventos.

Exemplo: **A** e **B** são eventos de **S**



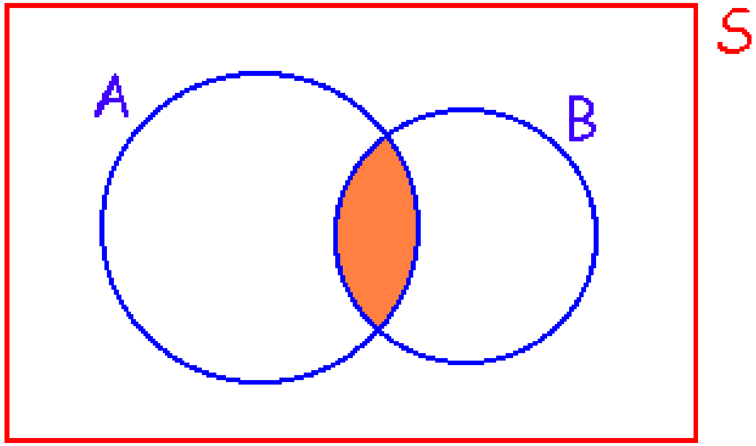
S={1,2,3,4,5,6}

A={1,3,5}

B={5,6}

Os **diagramas de Venn** são úteis para dar intuição geométrica sobre a relação entre conjuntos.

⇨ **Intersecção:** Ocorre **A∩B**, se ocorrer **A e B**.



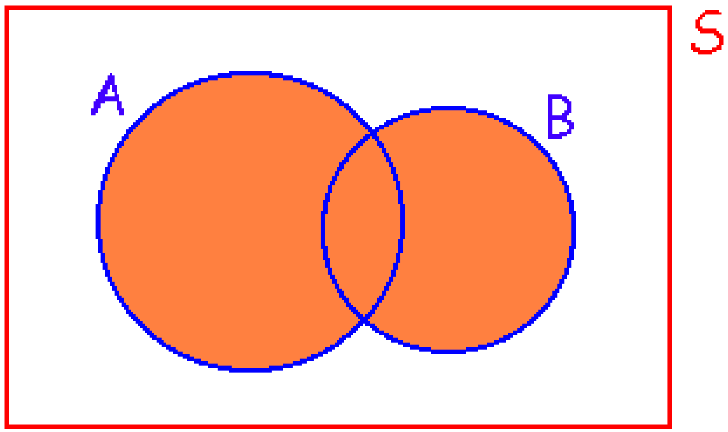
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {1, 3, **5**}

B = {**5**, 6}

A∩B = {5}

⇨ **União:** Ocorre **A∪B**, se ocorrer **A ou B** (ou ambos).



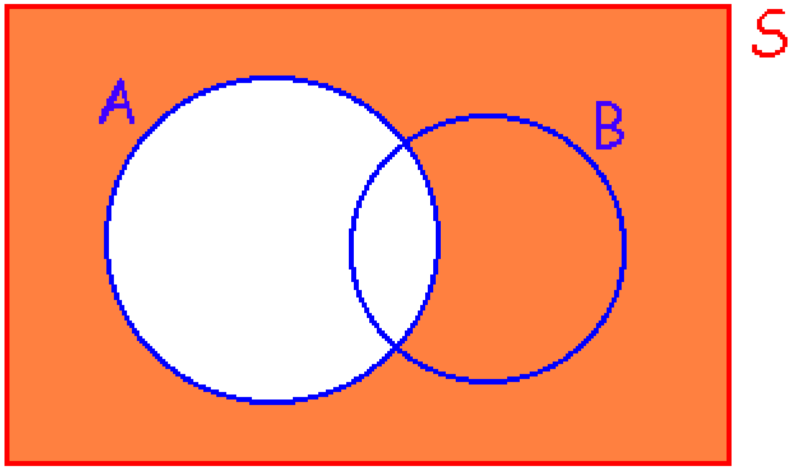
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {**1,3,5**}

B = {**5,6**}

A∪B = {1, 3, 5, 6}

⇨ **Complemento:** Ocorre $\bar{A}$, se ocorrer **S**, mas **não** ocorrer **A**.

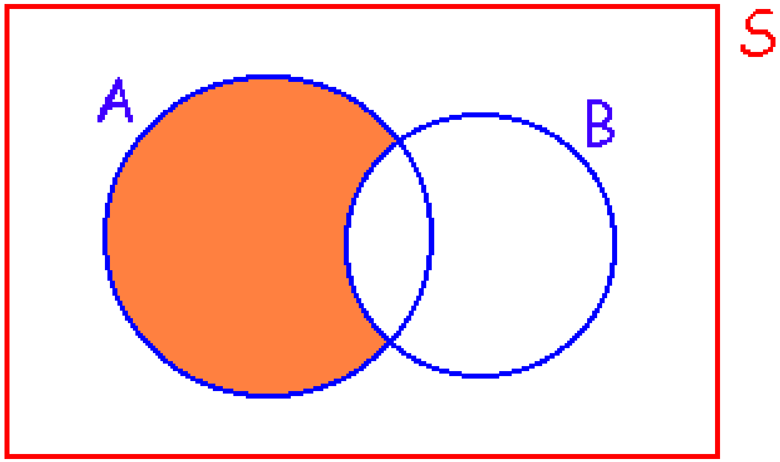


S = {1, **2**, 3, **4**, 5, **6**}

A = {1, 3, 5}

$\bar{A} = A^c = \{2, 4, 6\}$

⇨ **Diferença:** Ocorre **A-B**, se ocorrer **A**, mas **não** ocorrer **B**.



S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {**1**, **3**, 5}

B = {5, 6}

A-B = {1, 3}

Eventos Especiais

Evento Impossível: é aquele evento que nunca irá ocorrer, é também conhecido como o conjunto vazio ($\varnothing$).

⇨ É um evento porque é subconjunto de qualquer conjunto, portanto é subconjunto de **S** ($\varnothing \subset S$).

Exemplo: $A_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 < 0\}$

Evento Certo: é aquele evento que ocorre toda vez que se realiza o experimento, portanto, esse evento é o próprio **S**.

⇨ É um evento porque todo conjunto é subconjunto de si mesmo ($S \subset S$).

Exemplo: $A_2 = \{(x, y); x^2 + y^2 \geq 0\}$

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos **A** e **B** associados a um mesmo espaço amostral **S**, são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um **impede** a ocorrência do outro ($A \cap B = \varnothing$).

Exemplos:

Exp.1. Lançamento de uma moeda e observação do resultado

S={K,C}

A = Ocorrência de cara   A = {K}

B = Ocorrência de coroa   B = {C}

A e B são mutuamente exclusivos

Exp.2. Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

A = ocorrência de um nº ímpar = {1, 3, **5**}

B = ocorrência de um nº maior que 4 = {**5**, 6}

$A \cap B = \{5\}$ $\rightarrow$ A e B não são mutuamente exclusivos

Exercício: No lançamento de um dado, sejam:

A: saída de uma face par

B: saída de uma face menor que 4

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Determine:

$$A \cup B = \{ 1,2,3,4,6 \}$$

$$A \cap B = \{ 2 \}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{ 5 \}$$

$$\overline{A \cup B} = \{ 5 \}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{ 1,3,4,5,6 \}$$

$$\overline{A \cap B} = \{ 1,3,4,5,6 \}$$

$$B - A = \{ 1,3 \}$$

$$B \cap \overline{A} = \{ 1,3 \}$$

$$A - B = \{ 4,6 \}$$

$$A \cap \overline{B} = \{ 4,6 \}$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Análise combinatória

Técnicas de contagem $\rightarrow$ determinar o número de elementos de um conjunto ou o número de resultados possíveis de um experimento.

Seja A um conjunto com n elementos distintos entre si.

A = { a, b, c, d }

Se são retirados x elementos do conjunto **A** é possível formar grupos de três tipos:

- Permutações
- Arranjos
- Combinações

ordem $\begin{cases} (b, c) \text{ e } (c, b) \\ (a, b, c) \text{ e } (a, c, b) \end{cases}$

$A = \{ a, b, c, d \}$

natureza $\begin{cases} (b, c) \text{ e } (b, d) \\ (a, b, c) \text{ e } (a, b, d) \end{cases}$

Permutações $\rightarrow$ ordem $\rightarrow$ $(x = n)$

$$P_n = n!$$

{(a, b, c, d) , (a, b, d, c) , (a, c, b, d), ...

24 grupos

Arranjos $\rightarrow$ ordem e natureza $\rightarrow$ $(x < n)$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

{(a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a), ...

12 grupos

Combinações $\rightarrow$ natureza $\rightarrow$ $(x < n)$

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

{(a, b) , (a, c) , (a, d), ...

6 grupos

Conceitos de probabilidade

Jogos de azar

⇕

Teoria das probabilidades

} Conceito clássico ou probabilidade *a priori*

Laplace (1812) → **Teoria Analítica das probabilidades**
→ sistematizou os conhecimentos da época sobre probabilidades

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Conceitos de probabilidade

1.Conceito clássico ou probabilidade *a priori*

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **S** o espaço amostral a ele associado, com **n pontos amostrais**, todos equiprováveis.
Se existe, em **S**, **m pontos favoráveis** à realização de um evento **A**, então a probabilidade de **A**, indicada por **P(A)**, será:

pontos favoráveis

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{número de elementos de A} \\ \leftarrow \text{número de elementos de S} \end{array}$$

pontos possíveis

Pressuposições básicas:

1. O espaço amostral S é **enumerável** e **finito**.
2. Os resultados do espaço amostral S são todos **equiprováveis**.

Exemplo:

Experimento: Lançar uma moeda não viciada duas vezes e observar a face voltada para cima em cada lançamento.

S = {KK,KC,CK,CC}

$$P(KK) = P(KC) = P(CK) = P(CC) = 1/4$$

A = ocorrência de uma cara

A = {KC,CK}

S = {KK,KC,CK,CC}

A = {KC,CK}

n = número de pontos possíveis = **#S=4**

m = número de pontos favoráveis à ocorrência de A = **#A=2**

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de ocorrer uma cara em dois lançamentos de uma moeda não viciada é $\frac{1}{2}$.

Outra situação:

O espaço amostral se refere ao **número de caras** que pode ocorrer em dois lançamentos de uma moeda não viciada.

A = ocorrer uma cara

#S=3

S={0,1,2}

A = {1}

#A=1

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \cancel{\frac{1}{3}}$$

Não é possível usar o conceito clássico para calcular a probabilidade de A

As pressuposições foram atendidas?

$$\left.\begin{aligned} P(0) &= P(CC) = \frac{1}{4} \\ P(1) &= P(KC) + P(CK) = \frac{1}{2} \\ P(2) &= P(KK) = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

Espaço amostral não equiprovável

Exercício:

Retira-se ao acaso duas cartas (sem reposição) de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de obtermos um par de damas?

$$\# S = C_{52,2} = \frac{52!}{50!\,2!} = 1326$$

A = retirada de duas damas e $\#A = C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

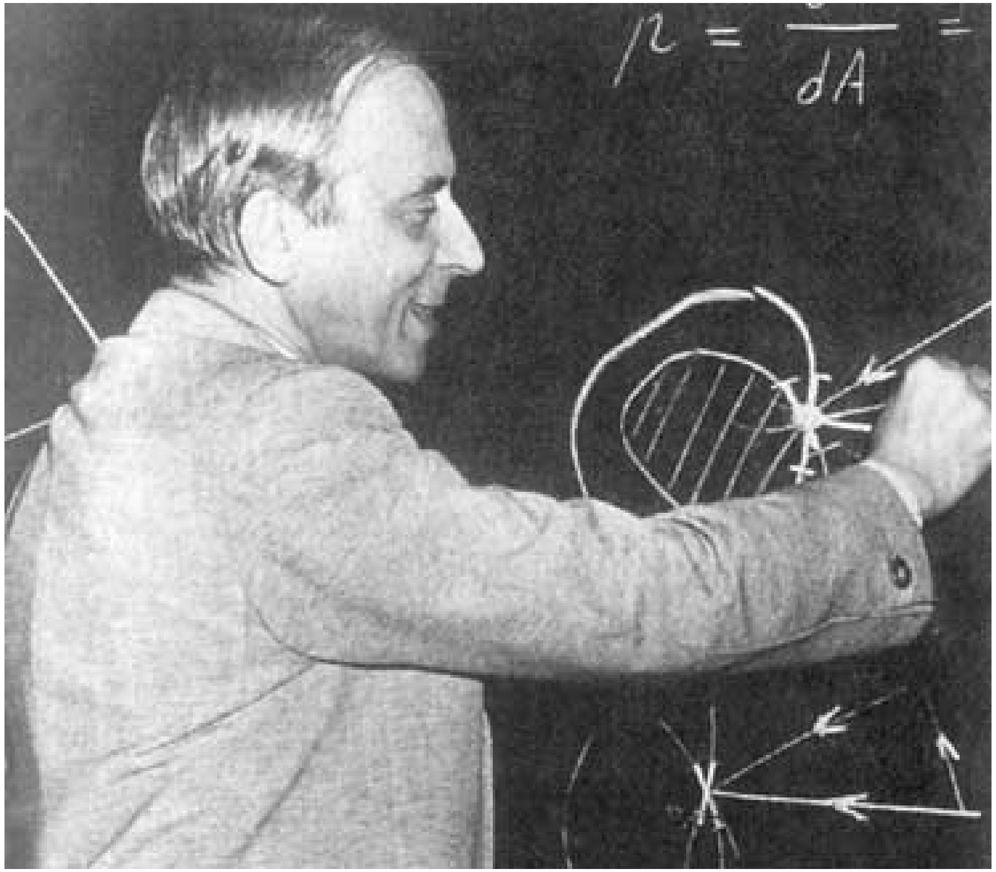
$$P(A) = 6/1326 = 0,0045$$

R: A probabilidade de se obter um par de damas é 0,45%.

2.Frequência relativa ou probabilidade *a posteriori*

O conceito de frequência relativa como **estimativa de probabilidade** surgiu através do físico alemão

Richard Von Mises
(1883-1953)



2.Frequência relativa ou probabilidade *a posteriori*

Definição: Seja **E** um experimento aleatório e **A** um evento.

Se após **n repetições** do experimento **E** (sendo n suficientemente grande), forem observados **m resultados favoráveis** ao evento **A**, então uma **estimativa** da probabilidade **P(A)** é dada pela frequência relativa

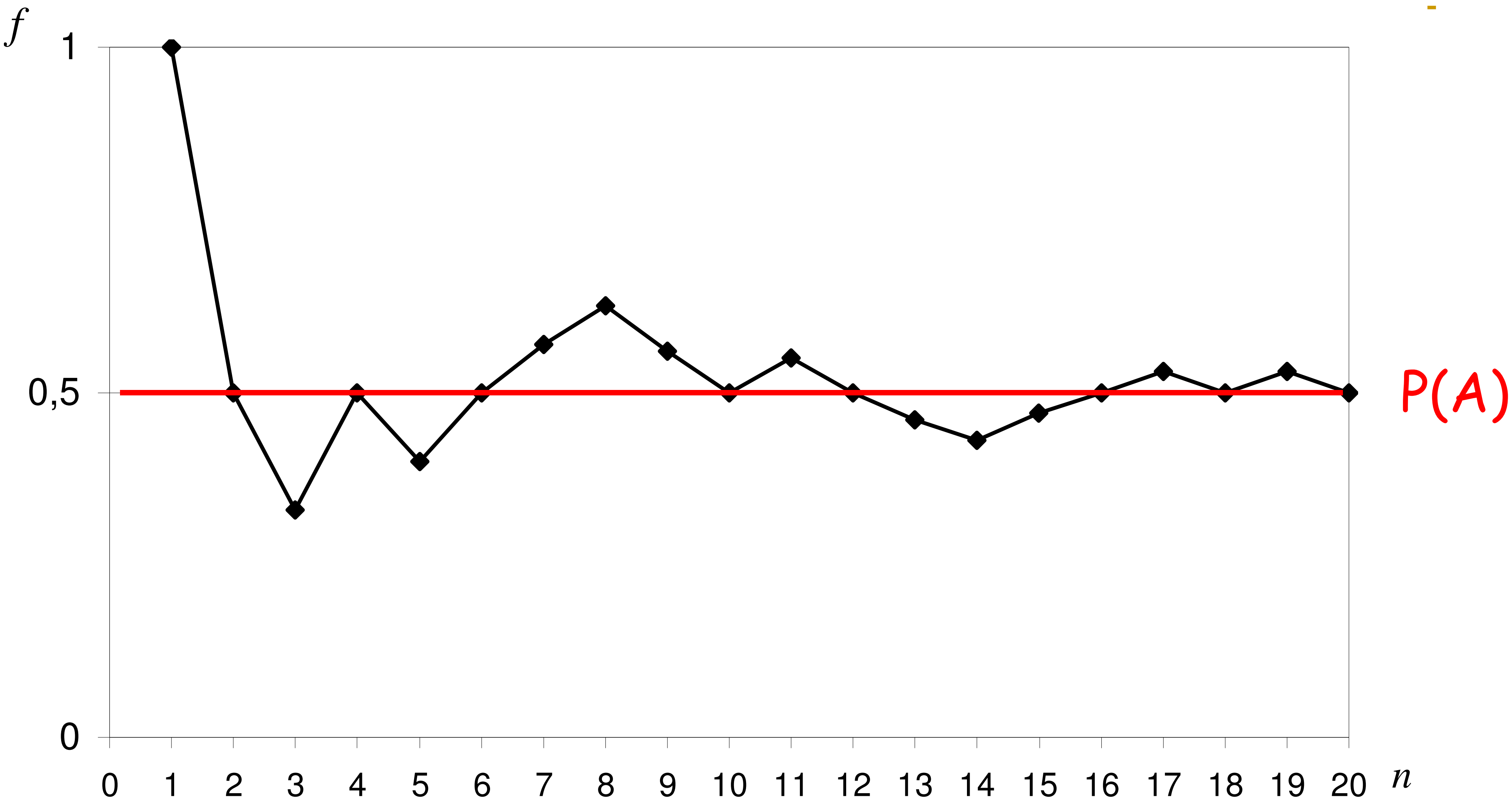
$$f_r = \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ocorrências de A} \\ \leftarrow \text{repetições de E} \end{array}$$

Exemplo: Lançamento de uma moeda honesta.

A = ocorrência de cara

P(A) = 0,5

Repetições do exper.	Resultado	Ocorrências de A	Frequência relativa f_r
1	K	1	1
2	C	1	1/2
3	C	1	1/3
4	K	2	2/4
5	C	2	2/5
6	K	3	3/6
7	K	4	4/7
8	K	5	5/8
...	...	...	...
n	-	m	m/n



Estabilização da frequência relativa f_r quando n cresce.

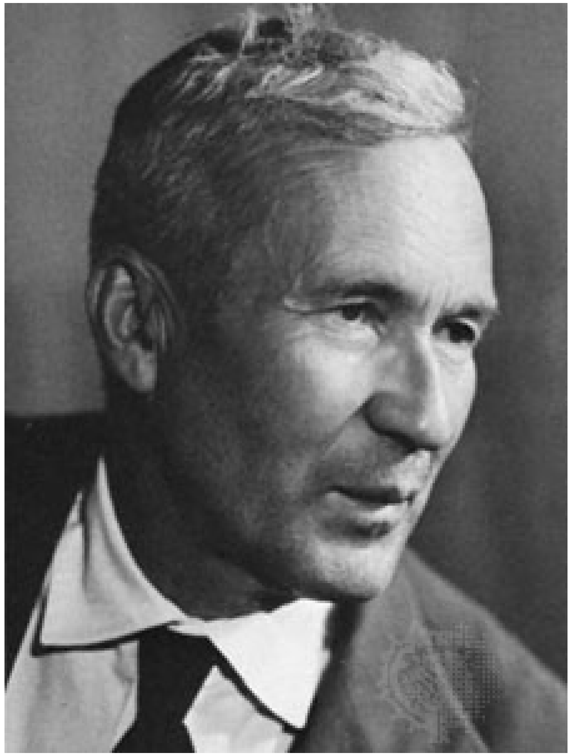
Pressuposição: n deve ser suficientemente grande para que se possa obter um resultado com margem de erro razoável.

Exercício:

Se os registros indicam que 504, dentre 813 lavadoras automáticas de pratos vendidas por uma grande loja de varejo, exigiram reparos dentro da garantia de um ano, qual é a probabilidade de uma lavadora dessa loja não exigir reparo dentro da garantia?

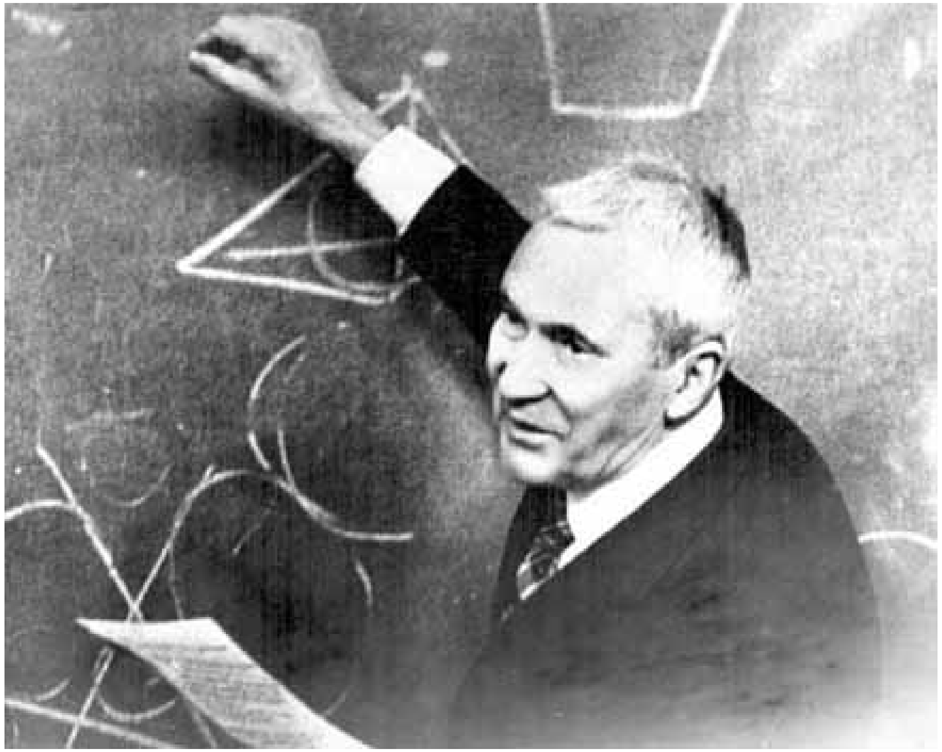
$$\boxed{f = \frac{m}{n} = \frac{309}{813} = \frac{103}{271} = 0{,}3801}$$

3. Conceito moderno ou axiomático



Andrei N. Kolmogorov
(1903–1987)

No século XX, Andrei Kolmogorov conceituou probabilidade através de axiomas rigorosos, tendo por base a teoria da medida.



3. Conceito moderno ou axiomático

Definição: Se **A** é um evento do espaço amostral **S**, então o número real **P(A)** será denominado probabilidade da ocorrência de **A**, se satisfizer os seguintes axiomas:

Axioma 1. $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Axioma 2. $\mathbf{P(S)=1}$

Axioma 3. Se **A** e **B** são eventos de **S** <u>mutuamente exclusivos</u>, então,

$\mathbf{P(A \cup B) = P(A)+P(B)}$

$\boxed{A \cap B = \varnothing}$

⇨ O conceito axiomático não fornece formas e sim **condições** para o cálculo das probabilidades. Os conceitos *a priori* e *a posteriori* se enquadram no conceito axiomático.

Exemplo:

Lançamento de um dado e observação da face voltada para cima

S={1,2,3,4,5,6}

A={2}

B={1,3,5}

P(A∪B)=?

Primeiro axioma

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{3}{6}$$

Terceiro axioma

P(A∪B)=P(A)+P(B)

P(A∪B)=1/6 + 3/6

P(A∪B)=4/6

Exercício: Três cavalos (A, B, C) estão numa corrida. O cavalo A é duas vezes mais provável de ganhar que B, e o cavalo B é duas vezes mais provável que C. Qual a probabilidade de que B ou C ganhe?

S = { A ganha, B ganha, C ganha } ⇨ mutuamente exclusivos

$P(A) = 2.P(B)$ e $P(B) = 2.P(C)$

$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow 4p + 2p + p = 1 \Rightarrow p = 1/7$

$P(A) = 4/7$ e $P(B) = 2/7$ e $P(C) = 1/7$

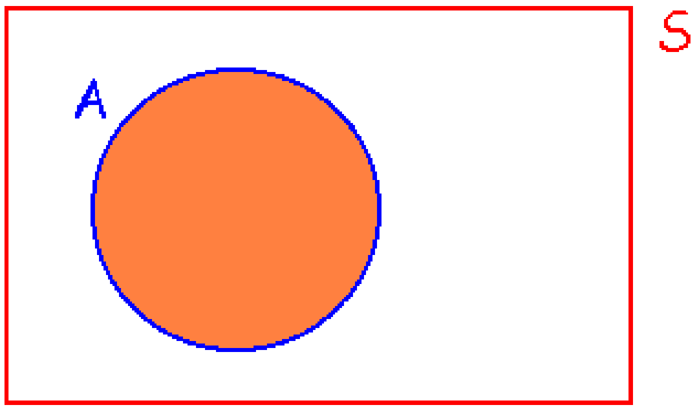
Então $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 2/7 + 1/7 = 3/7 = 0,4285$

R: A probabilidade de que o cavalo B ou o C ganhe a corrida é 42,85%.

Teoremas para o cálculo de probabilidades

Teorema 1. Se $\varnothing$ é um evento impossível, então **$P(\varnothing)=0$**.

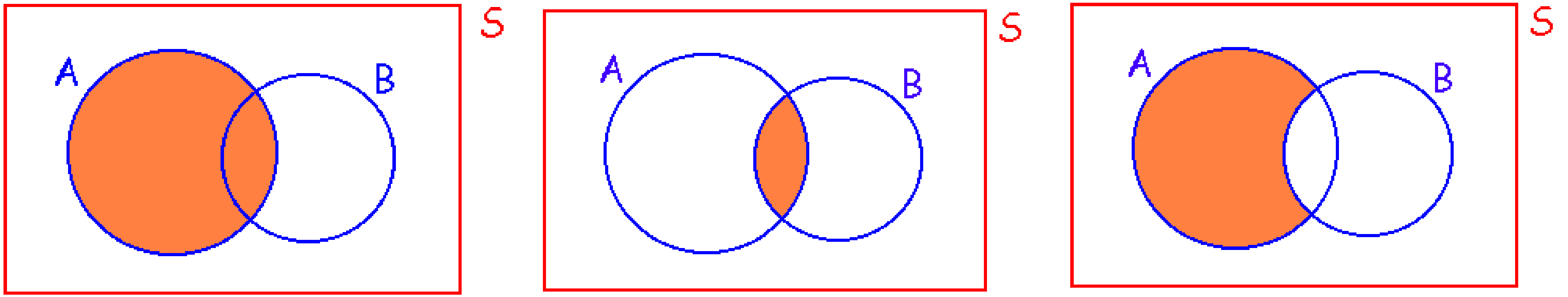
Teorema 2. Se **$\bar{A}$** é o complemento de **A**, então **$P(\bar{A})=1-P(A)$**.



Teorema 3. Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$\mathbf{P(A\text{-}B) = P(A)\text{-}P(A \cap B).}$$

Demonstração:



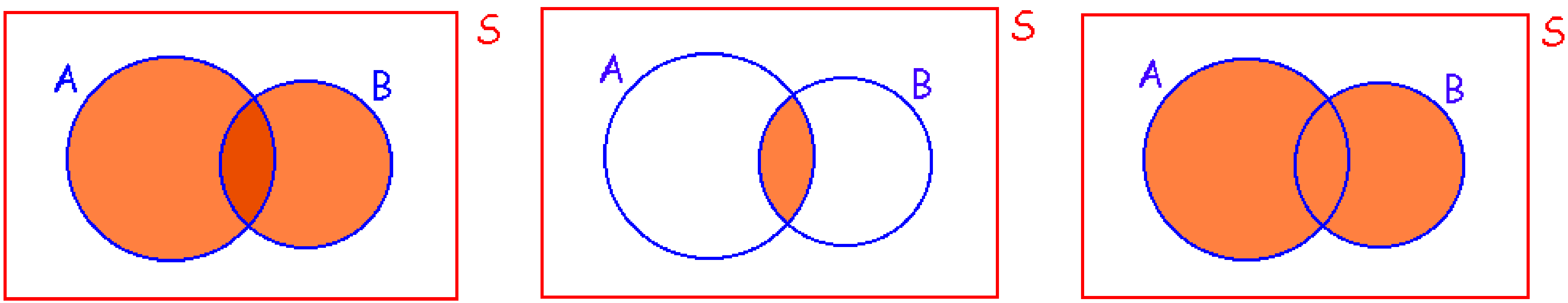
P(A) **– P(A∩B)** **= P(A–B)**

Teorema 4. Soma das Probabilidades

Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração:



$P(A)+P(B)$ $- P(A \cap B)$ $= P(A \cup B)$

Exercício:

A probabilidade de ocorrer um acidente em uma competição de carros é 0,18; a probabilidade de chover em um dia de competição é 0,28; e a probabilidade de ocorrer acidente e chuva em um dia de competição é 0,08.

Determine a probabilidade de:

0,82 a) não ocorrer acidente na próxima competição;

0,38 b) chover ou ocorrer um acidente na próxima competição;

0,62 c) não chover e não ocorrer acidente na próxima competição;

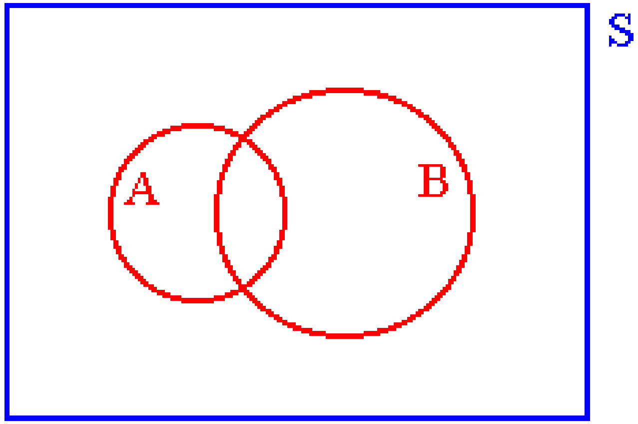
0,20 d) chover, mas não ocorrer acidente na próxima competição

Solução: Sejam os eventos

A: ocorrer um acidente em uma competição

B: ocorrer chuva no dia da próxima corrida

A∩B: ocorrer acidente e chuva em um dia de competição

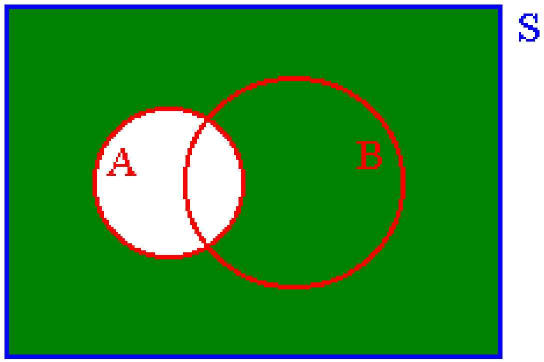


$P(A) = 0,18$

$P(B) = 0,28$

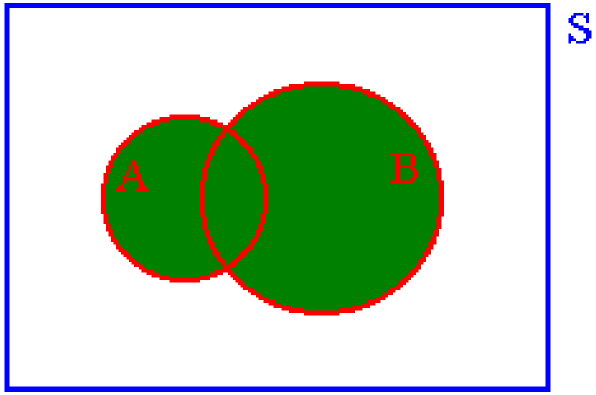
$P(A \cap B) = 0,08$

a) P(não ocorrer acidente na próxima competição)



$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,18 = 0,82$

b) P(chover ou ocorrer um acidente)

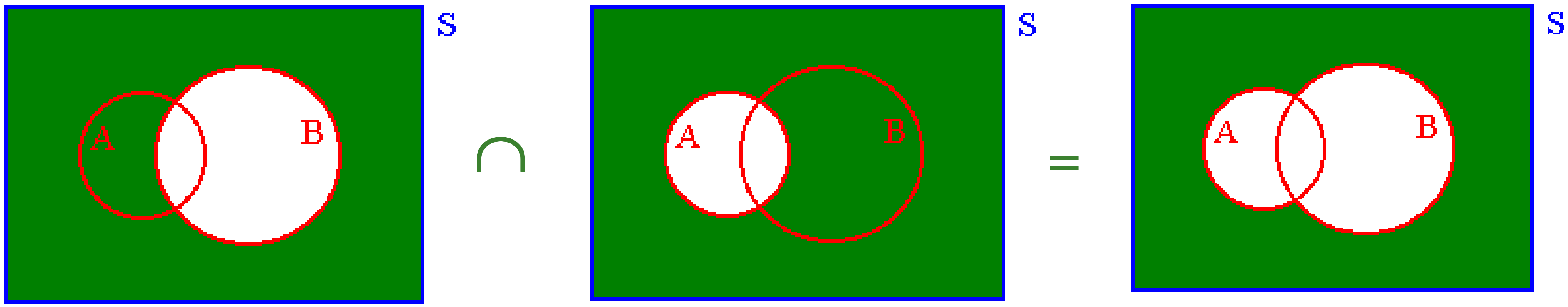


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0{,}18 + 0{,}28 - 0{,}08$$

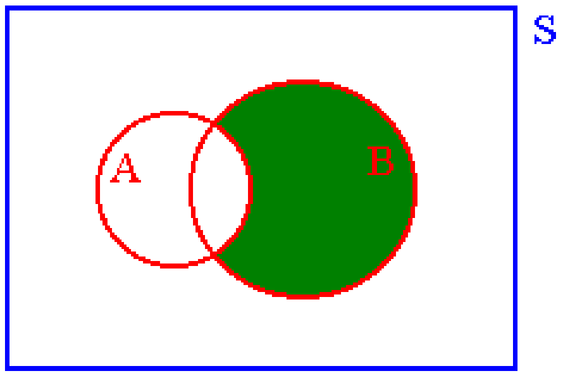
$$= 0{,}38$$

c) P(não chover e não ocorrer acidente)



$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$$

d) P(chover, mas não ocorrer acidente)



$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}28 - 0{,}08 = 0{,}20$$

Exercício: Retira-se ao acaso uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um rei ou uma carta de espadas?

S = { 52 cartas }

A = tirar um rei = { K♣,K♦,K♥,K♠ } e

B = tirar uma carta de espadas = { A♠,2♠, ..., K♠}

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) = 4/52$ e $P(B) = 13/52$ e $P(A \cap B) = 1/52$

Então $P(A \cup B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52 = 0{,}3076$

R: A probabilidade de se retirar um rei ou uma carta de espadas é 30,76%.