Inferência Estatística – Testes de Hipóteses

- Introdução: hipóteses e erros de conclusão
- **Testes de hipóteses para uma e duas médias**
- Testes de hipóteses para uma e duas variâncias
- Testes de hipóteses para uma e duas proporções

Passos para construção de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses estatísticas.

2. Fixar a taxa de erro aceitável (α - nível de significância).

3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.

4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.

5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

Situações comuns em testes de hipóteses a respeito de μ

1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

- σ^2 conhecida ou $n > 30$
- σ^2 desconhecida e $n \leq 30$

2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

- Duas amostras independentes
  - σ_1^2 e σ_2^2 **conhecidas**
  - σ_1^2 e σ_2^2 **desconhecidas**, mas **iguais**
  - σ_1^2 e σ_2^2 **desconhecidas**, mas **diferentes**
- Duas amostras dependentes (pareadas)

1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal e variância σ^2 **conhecida** (ou n > 30)

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Valor que deve ser calculado na amostra

1. Comparação de uma média (μ) com um valor padrão (μ_0)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal e variância σ^2 **desconhecida** (e $n \leq 30$)

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu = \mu_0$

Estatística do teste: $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t_\nu$$

onde:

$\nu = n - 1$

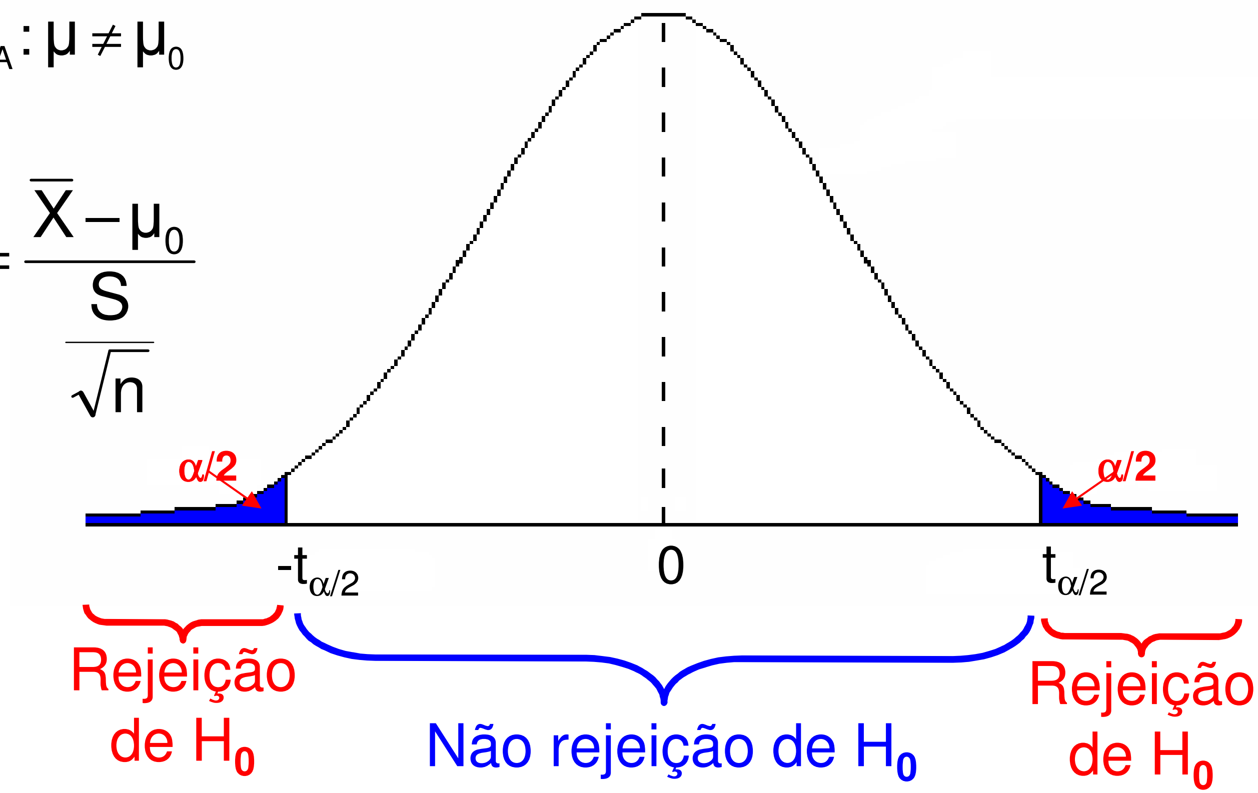
Valor que deve ser calculado na amostra

Critério de decisão – Teste bilateral

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_A: \mu \neq \mu_0$$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$



H_A bilateral supõe que a diferença $\overline{X} - \mu_0$ é **negativa ou positiva**.

Mas quão grande será essa diferença para ser considerada significativa?

Este limite é dado pelos valores críticos.

⇨ Se o valor t (calculado na amostra) estiver entre $-t_{\alpha/2}$ e $t_{\alpha/2}$, não temos motivos para rejeitar H_0

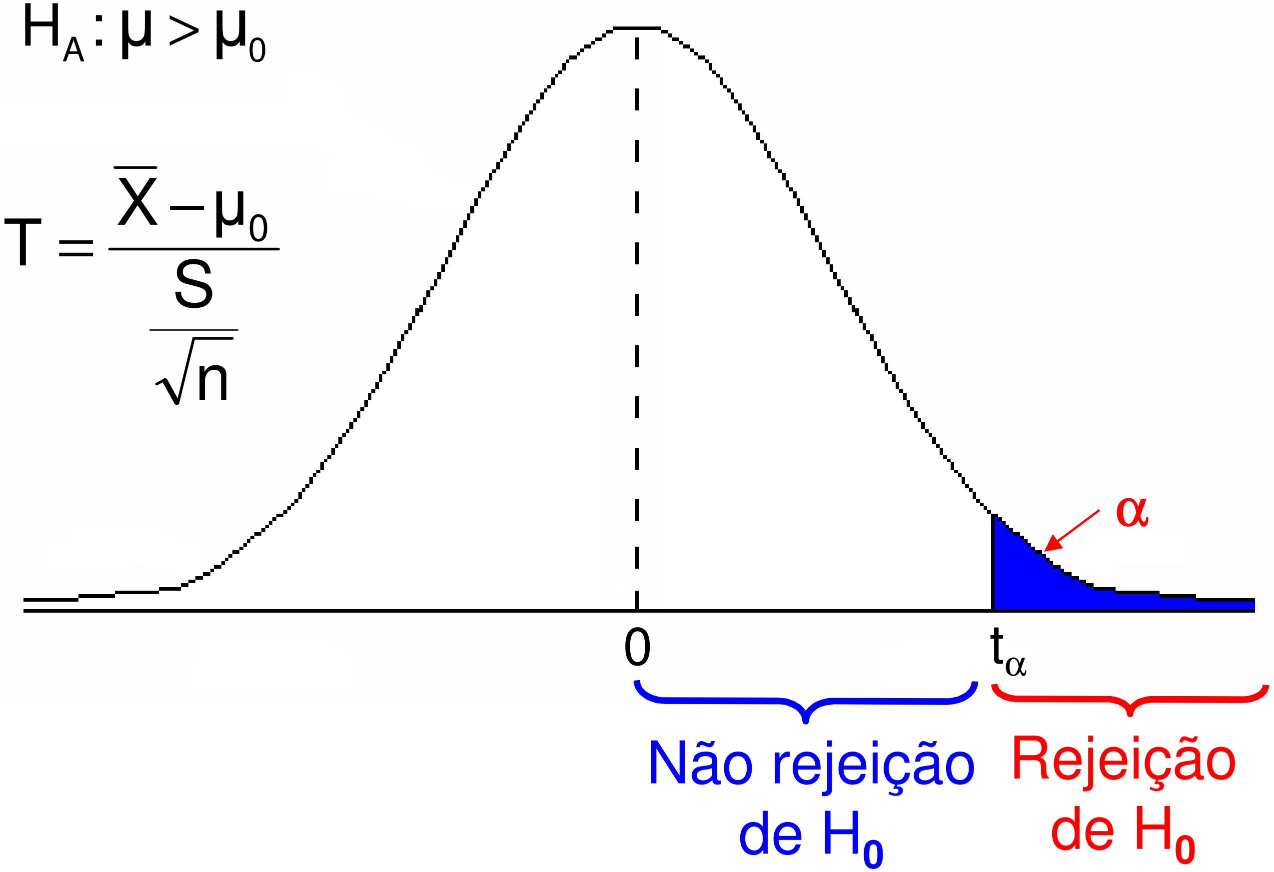
⇨ Se o valor t (calculado na amostra) for menor que $-t_{\alpha/2}$ ou maior que $t_{\alpha/2}$, rejeitamos H_0

Critério de decisão – Teste unilateral

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_A: \mu > \mu_0$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$



H_A unilateral **direita** supõe que a diferença

$$\bar{X} - \mu_0$$

é um valor **positivo**.

Mas quão grande será essa diferença para ser considerada significativa?

Este limite é dado pelo valor crítico.

⇨ Se o valor t (calculado na amostra) for menor que t_α, não temos motivos para rejeitar H_0

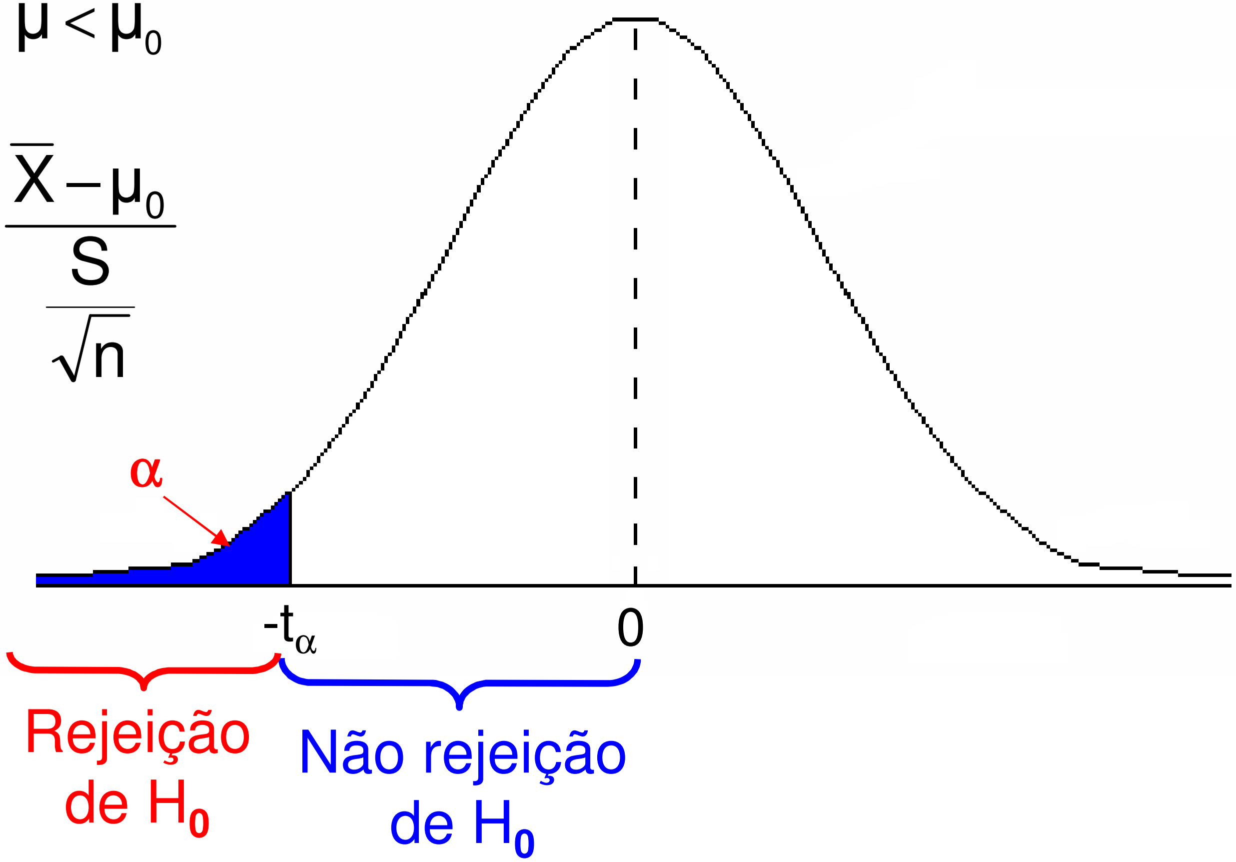
⇨ Se o valor t (calculado) for maior que t_α, rejeitamos H_0

Critério de decisão – Teste unilateral

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_A: \mu < \mu_0$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$



H_A unilateral **esquerda** supõe que a diferença $\overline{X} - \mu_0$ é um valor **negativo**.

Mas quão grande será essa diferença para ser considerada significativa?

Este limite é dado pelo valor crítico.

⇨ Se o valor t (calculado na amostra) for maior que $-t_\alpha$, não temos motivos para rejeitar H_0

⇨ Se o valor t (calculado) for menor que $-t_\alpha$, rejeitamos H_0

Exemplo: Um processo deveria produzir bancadas com 0,85 m de altura. O engenheiro desconfia que as bancadas que estão sendo produzidas são diferentes que o especificado. Uma amostra de 8 valores foi coletada e indicou média de 0,87 e desvio padrão de 0,010. Sabendo-se que os dados seguem a distribuição normal, teste a hipótese do engenheiro usando um nível de significância α=0,05.

Solução:

3) Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

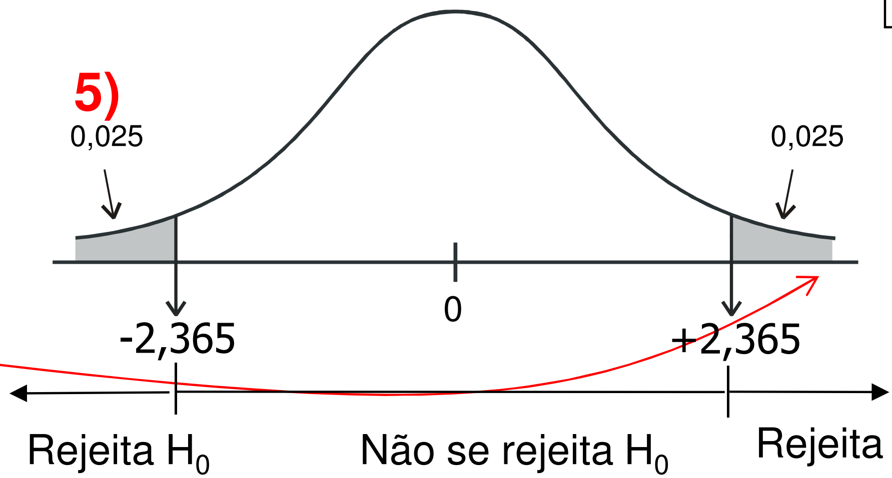
$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

1) H_0: $\mu = 0{,}85$

H_A: $\mu \neq 0{,}85$

2) α=0,05

5)



ν=n-1=7

4) $$t_c = \frac{0{,}87 - 0{,}85}{0{,}010/\sqrt{8}} = 5{,}66$$

<u>Conclusão</u>: Ao nível de 5% de significância, conclui-se que as bancadas que estão sendo produzidas devem ter altura **diferente** do especificado, **maiores** que 0,85m.

Exemplo: A associação dos proprietários de indústrias metalúrgicas está preocupada com o tempo perdido em acidentes de trabalho, cuja média, nos últimos tempos, tem sido da ordem de 60 horas/homem por ano com desvio padrão de 20 horas/homem, segundo a distribuição normal. Tentou-se um programa de prevenção de acidentes e, após o mesmo, tomou-se uma amostra de 9 indústrias e mediu-se o número de horas/homem perdidas por acidente, que foi de 50 horas. Você diria, ao nível de 5%, que há evidência de melhora?

3) 3)

Solução:

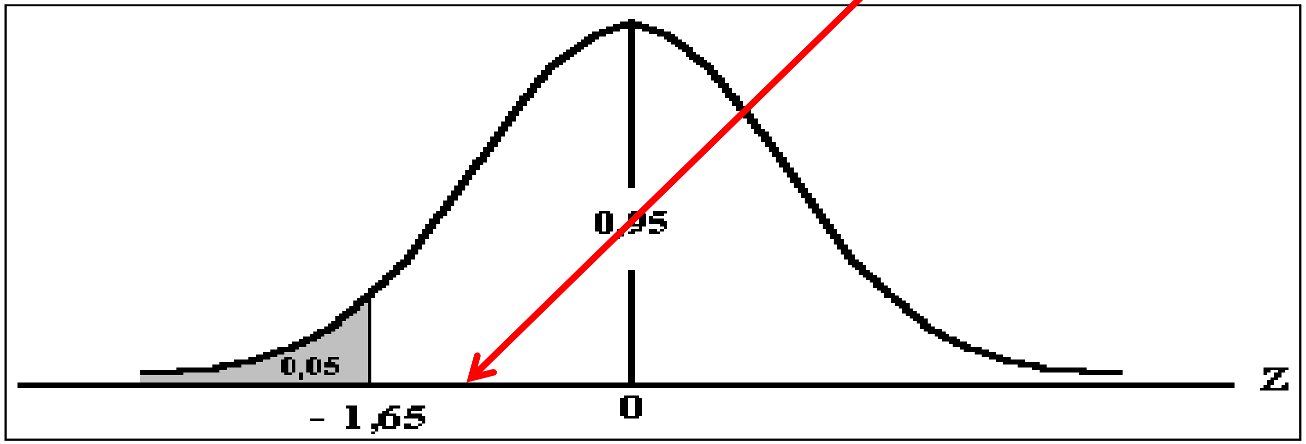
As hipóteses a serem testadas são:

1)
$$\begin{cases} H_0: \mu = 60 \text{ hora/homens} \\ H_A: \mu < 60 \text{ hora/homens} \end{cases}$$

2) α=0,05

Solução:

4) $$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{50 - 60}{20 / \sqrt{9}} = -1{,}50$$

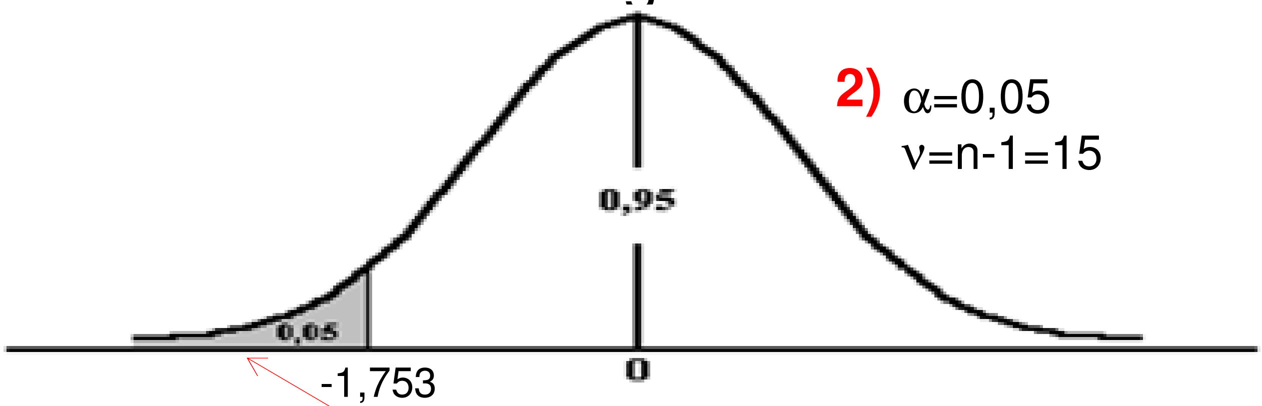


5) Isto quer dizer que a diferença apresentada na amostra não é suficientemente grande para provar que a campanha de prevenção deu resultado. Então a conclusão é:

"Não é possível, ao nível de 5% de significância, afirmar que a campanha deu resultado. "

Exemplo: O tempo médio, por operário, para executar uma tarefa, tem sido 100 minutos, segundo a **3)** distribuição normal. Introduziu-se uma modificação para diminuir este tempo, e, após certo período, sorteou-se uma amostra de **3)** 16 operários, medindo-se o tempo de execução gasto por cada um. O tempo médio da amostra foi 91 minutos com desvio padrão de 12 minutos. Este resultado evidencia uma melhora no tempo gasto para realizar a tarefa? Apresente as conclusões ao nível de 5% de significância.

Solução:



2) $\alpha=0{,}05$
$\nu=n-1=15$

1) $\begin{cases} H_0: \mu = 100 \\ H_A: \mu < 100 \end{cases}$

4) $$T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{91-100}{12/\sqrt{16}} = -3$$

5) Rejeita-se H_0 ao nível de 5% de significância e pode-se concluir que a modificação deve ter diminuído o tempo de execução da tarefa.

Exercício: Medidos os diâmetros de 31 eixos de um lote aleatório, produzido pela empresa "Sofazredondo S.A." obteve-se a distribuição abaixo:

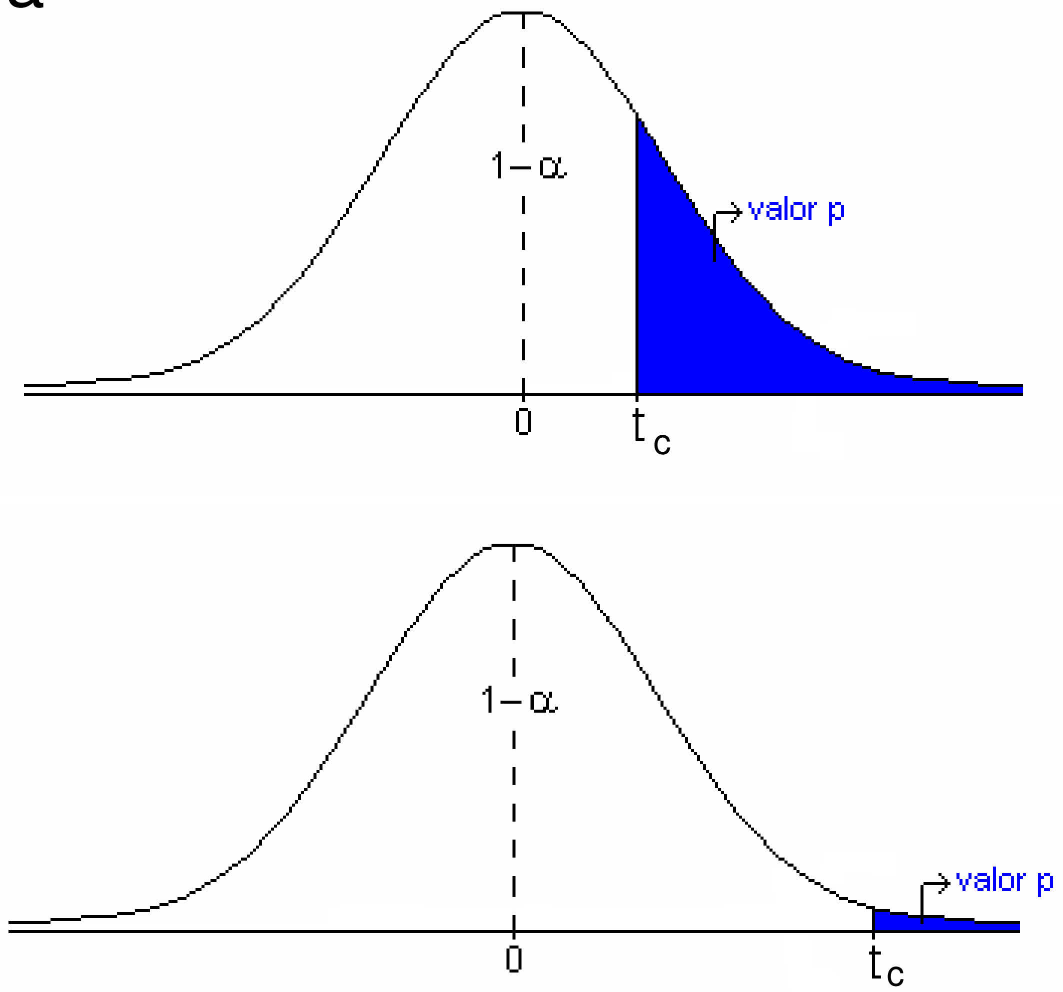
Diâmetros (em mm)	56,5	56,6	56,7	56,8	56,9	57,0	57,1	57,2	57,3
Número de eixos	1	2	2	4	10	5	4	2	1

Ao nível de significância de 5%, há evidência de que o diâmetro médio dos eixos esteja fora da especificação de 57 mm?

$Z_c = -2,557$

Outro critério de decisão

Valor p: Probabilidade de que seja obtido um valor de T mais extremo que o valor observado, dado que H_0 é verdadeira



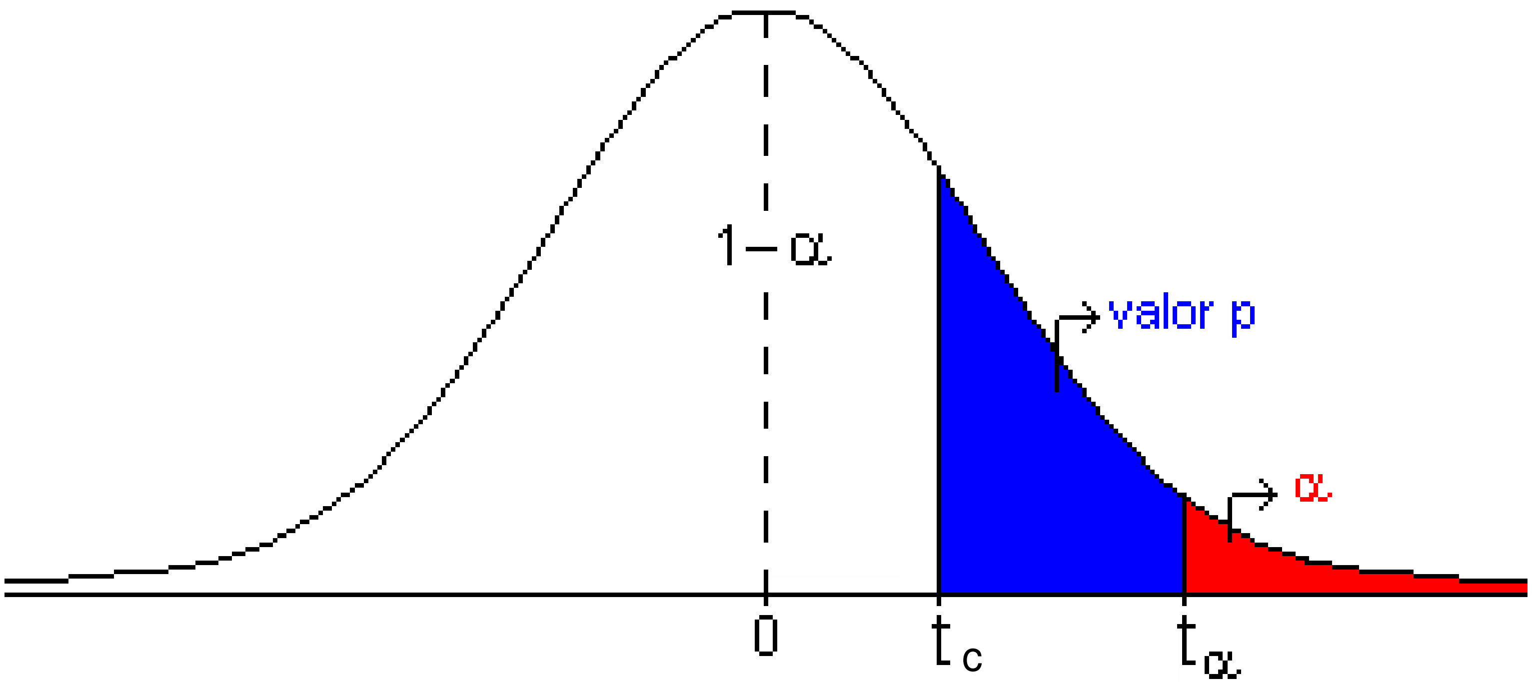
Como tomar a decisão a respeito de H_0?

⇨ Se o **valor p** for maior ou igual a α: **não rejeitamos** a hipótese nula, pois t_c está em uma região de alta probabilidade

Se $p \geq \alpha$

⇩

Não rejeitamos a hipótese de nulidade



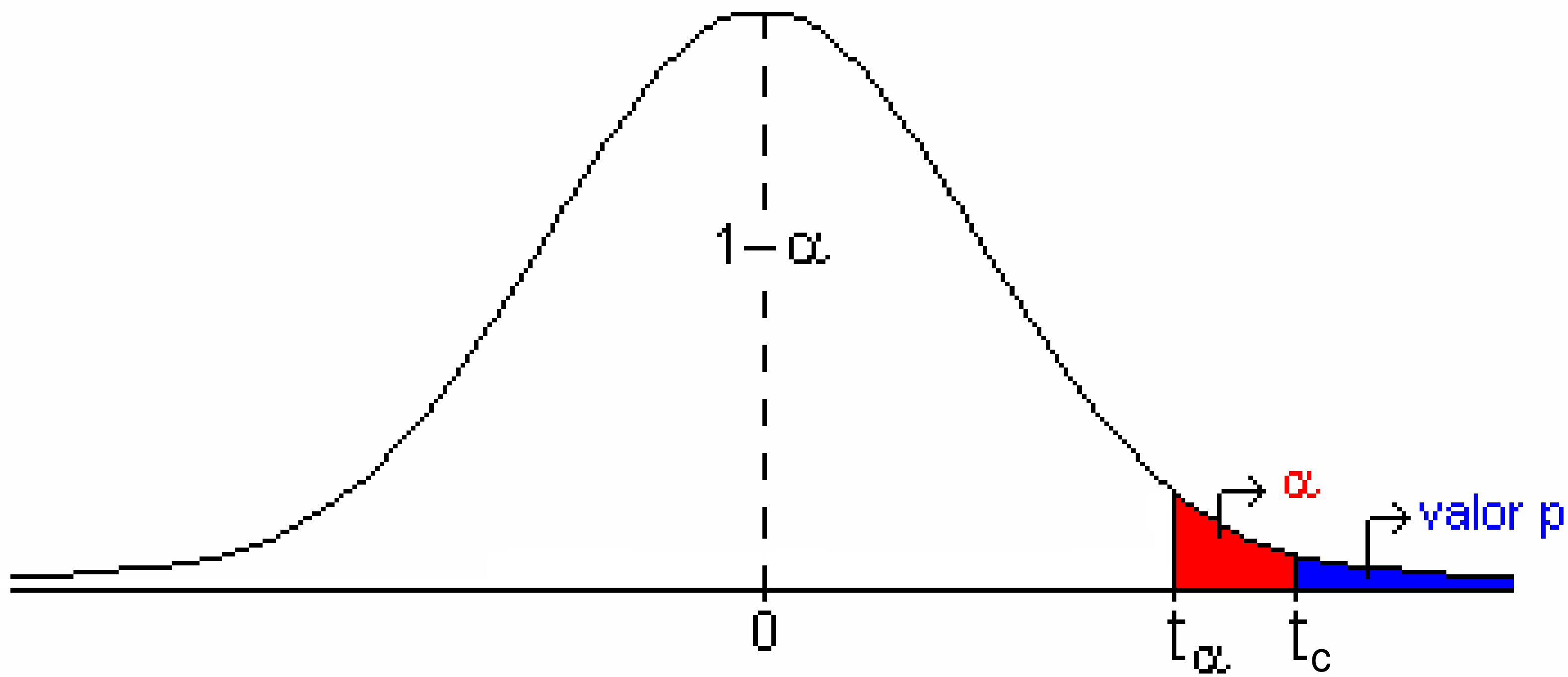
Como tomar a decisão a respeito de H_0?

⇨ Se o **valor p** for menor que α: **rejeitamos** a hipótese nula, pois t_c está em uma região de baixa probabilidade

Se $p < \alpha$

⇩

Rejeitamos a hipótese de nulidade

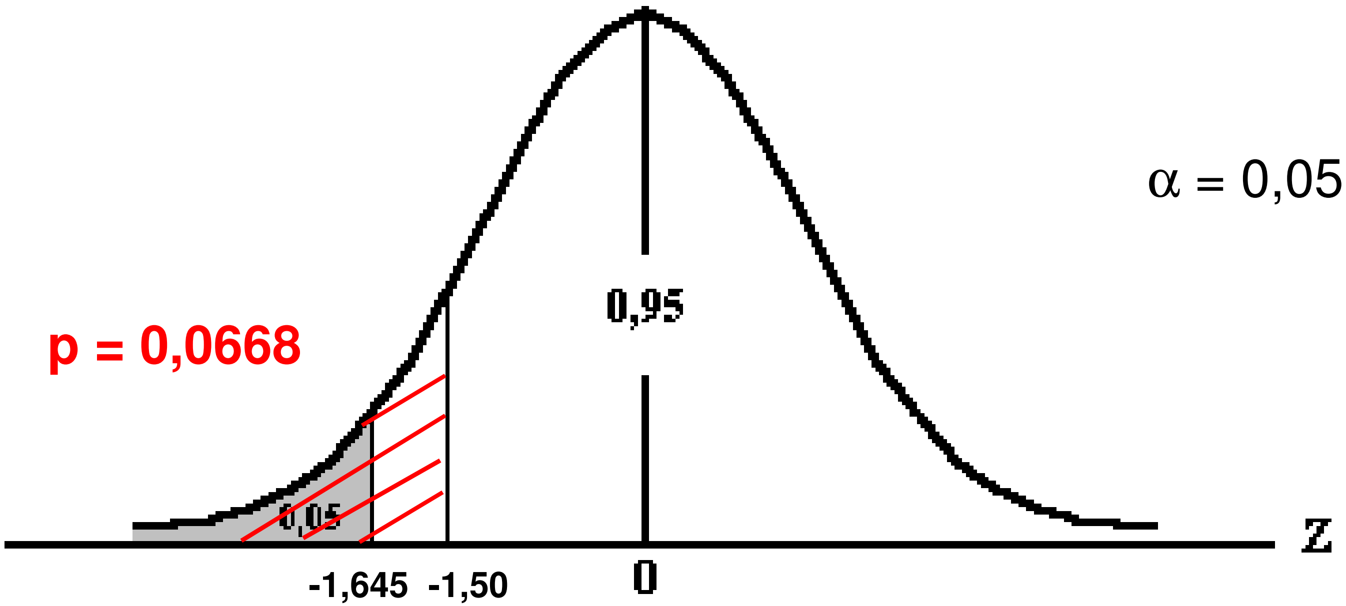


Exemplo: programa de prevenção de acidentes

H_0: μ = 60 hora/homens
H_A: μ < 60 hora/homens

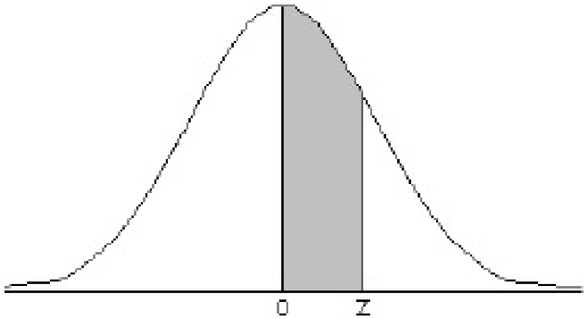
$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{50 - 60}{20 / \sqrt{9}} = -1,50$$

α = 0,05



“Não é possível, ao nível de 5% de significância, afirmar que a campanha deu resultado. ”

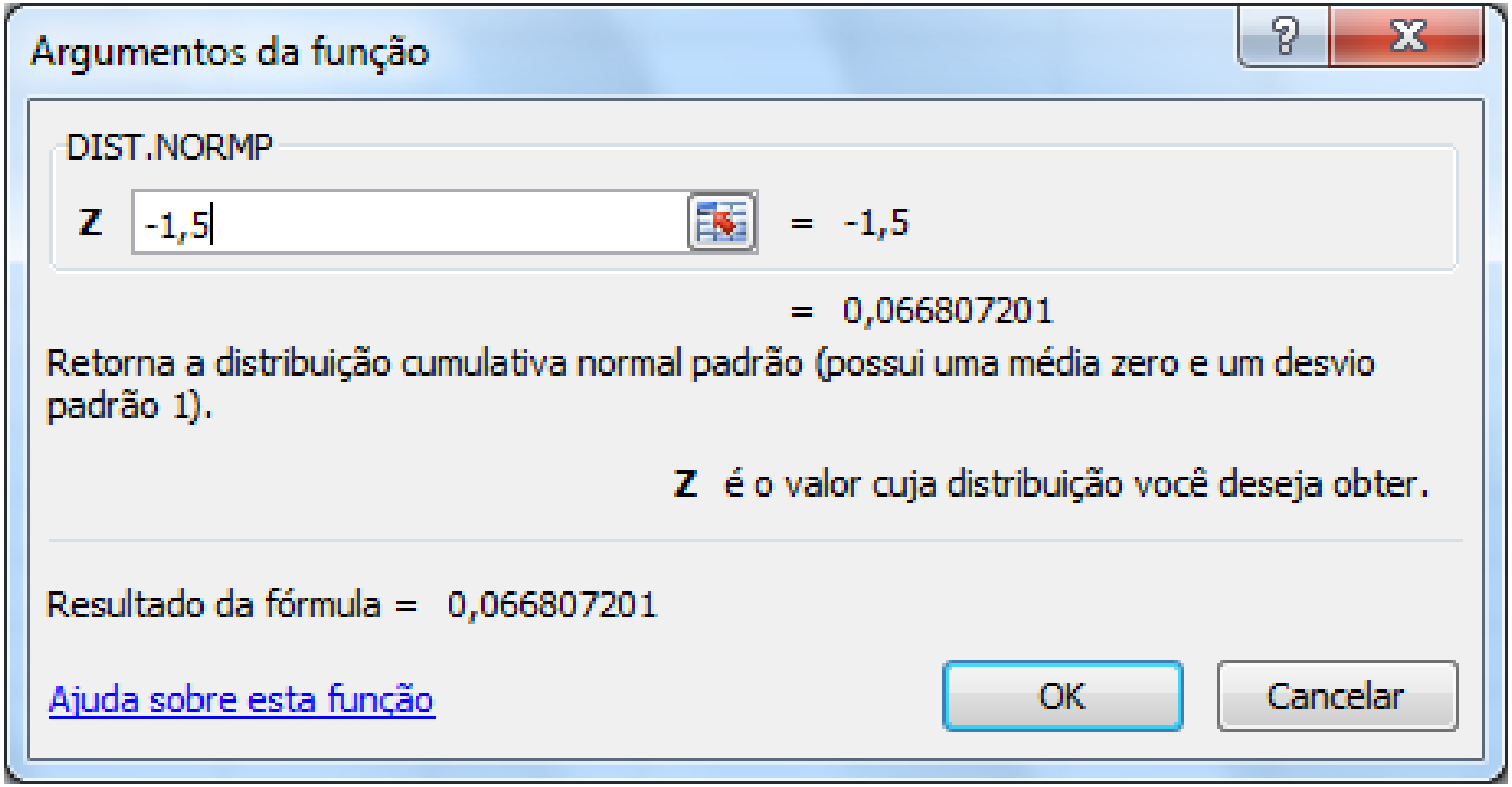
Tabela I. Área sob a curva normal padrão de 0 a **z**, P(0 ≤ Z ≤ **z**).



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2133	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633

Utilizando o Excel para obter o valor p:

$z_c = -1{,}5 \qquad \alpha = 0{,}05$ (unilateral)

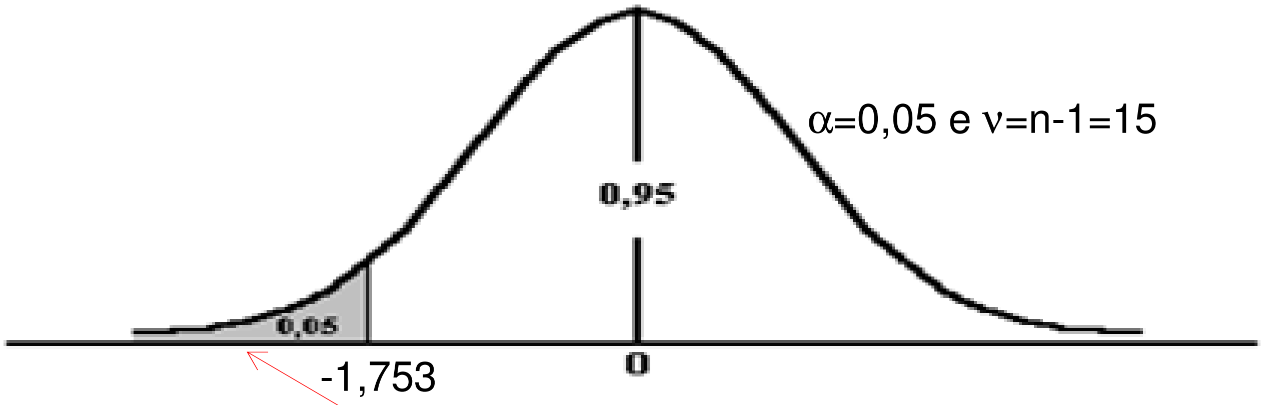


Conclusão: Como a significância do resultado (6,68%) é maior que a significância do teste (5%), não é possível rejeitar a hipótese nula.

Exercício: O tempo médio, por operário, para executar uma tarefa, tem sido 100 minutos, segundo a distribuição normal. Introduziu-se uma modificação para diminuir este tempo, e, após certo período, sorteou-se uma amostra de 16 operários, medindo-se o tempo de execução gasto por cada um. O tempo médio da amostra foi 91 minutos com desvio padrão de 12 minutos. Este resultado evidencia uma melhora no tempo gasto para realizar a tarefa? Apresente as conclusões ao nível de 5% de significância.

Solução:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 100 \\ H_A: \mu < 100 \end{cases}$$



$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{91 - 100}{12/\sqrt{16}} = -3$$

Qual o valor p?

$p < \alpha$

$p \cong 0{,}005$ (0,5%)

Rejeita-se H_0 ao nível de 5% de significância e pode-se concluir que a modificação deve ter diminuído o tempo de execução da tarefa.

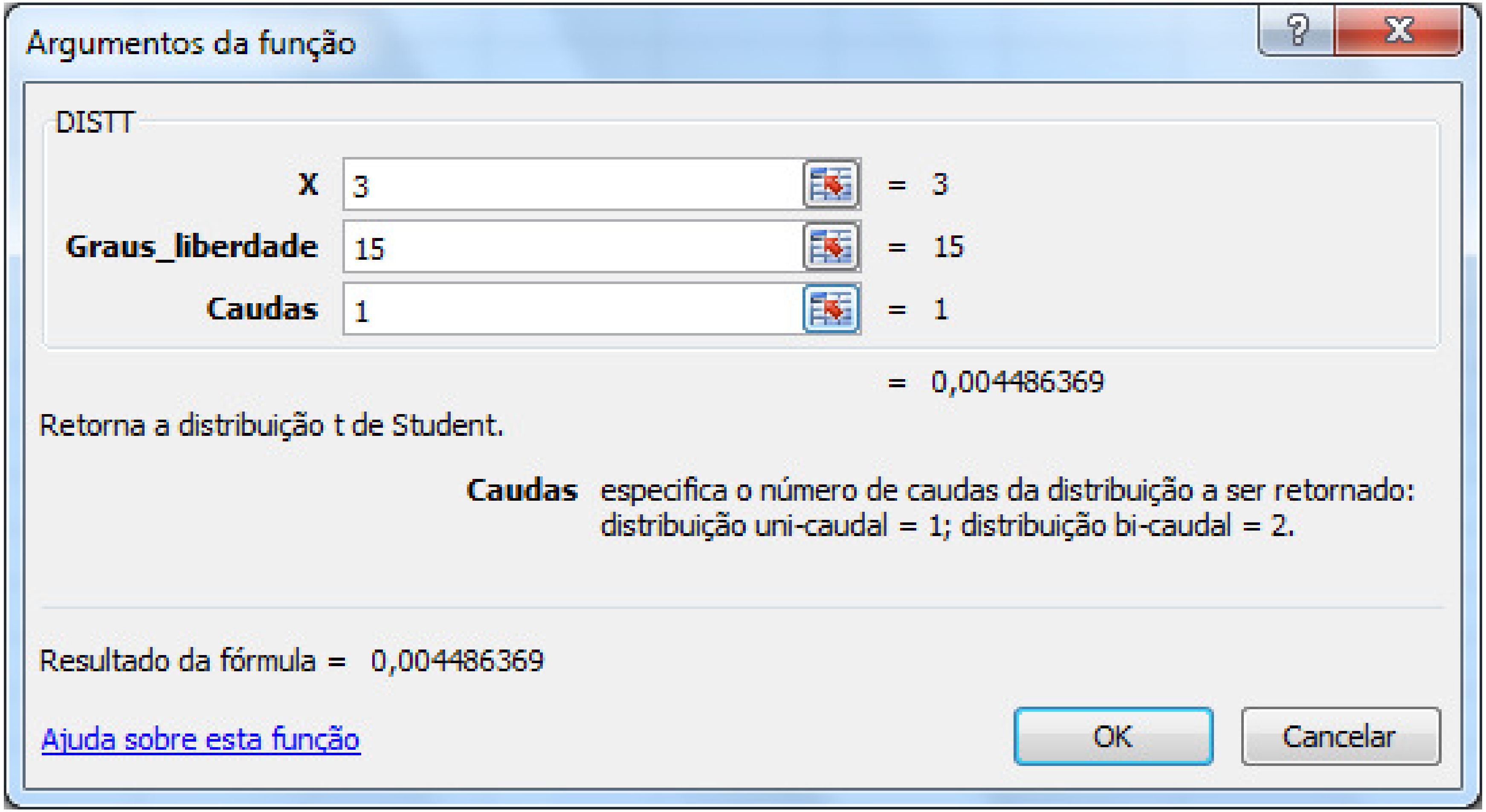
Graus de Liberdade (ν)	0,25	0,10	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,373
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326
15	0,691	1,341	1,753	2,132	2,490	2,602	2,947	3,286
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,223
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,406	2,508	2,819	3,119
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	3,078
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,705	2,971
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660	2,915
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617	2,860
...	0,674	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807

Nível de Significância (α)

Limites unilaterais: $P(|t| > t_{\alpha})$

Utilizando o Excel para obter o valor p:

$t_c = -3$ $\alpha = 0{,}05$ (unilateral) $\nu = n\text{-}1 = 15$



Conclusão: Como a significância do resultado (0,45%) é menor que a significância do teste (5%), é possível rejeitar a hipótese nula.

2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

A variável em estudo tem distribuição normal

As variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são **conhecidas**

As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Estatística do teste: $$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Valor que deve ser calculado na amostra

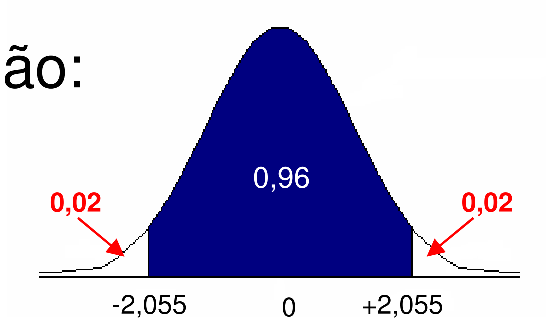
Exemplo: Um fabricante produz dois tipos de pneus. Para o pneu do tipo A o desvio padrão 3) da durabilidade é de 2500 km e para o pneu do tipo B é de 3000 km, seguindo a 3) distribuição normal. Uma empresa de táxis testou 50 pneus do tipo A e 40 do tipo B, obtendo 24000 km de média para o tipo A e 26000 para o tipo B. Adotando $\alpha = 4\%$ testar a hipótese de que a duração média dos dois tipos é a mesma.

Solução:

As hipóteses são:

1) $H_0: \mu_A = \mu_B$

$H_A: \mu_A \neq \mu_B$



4)

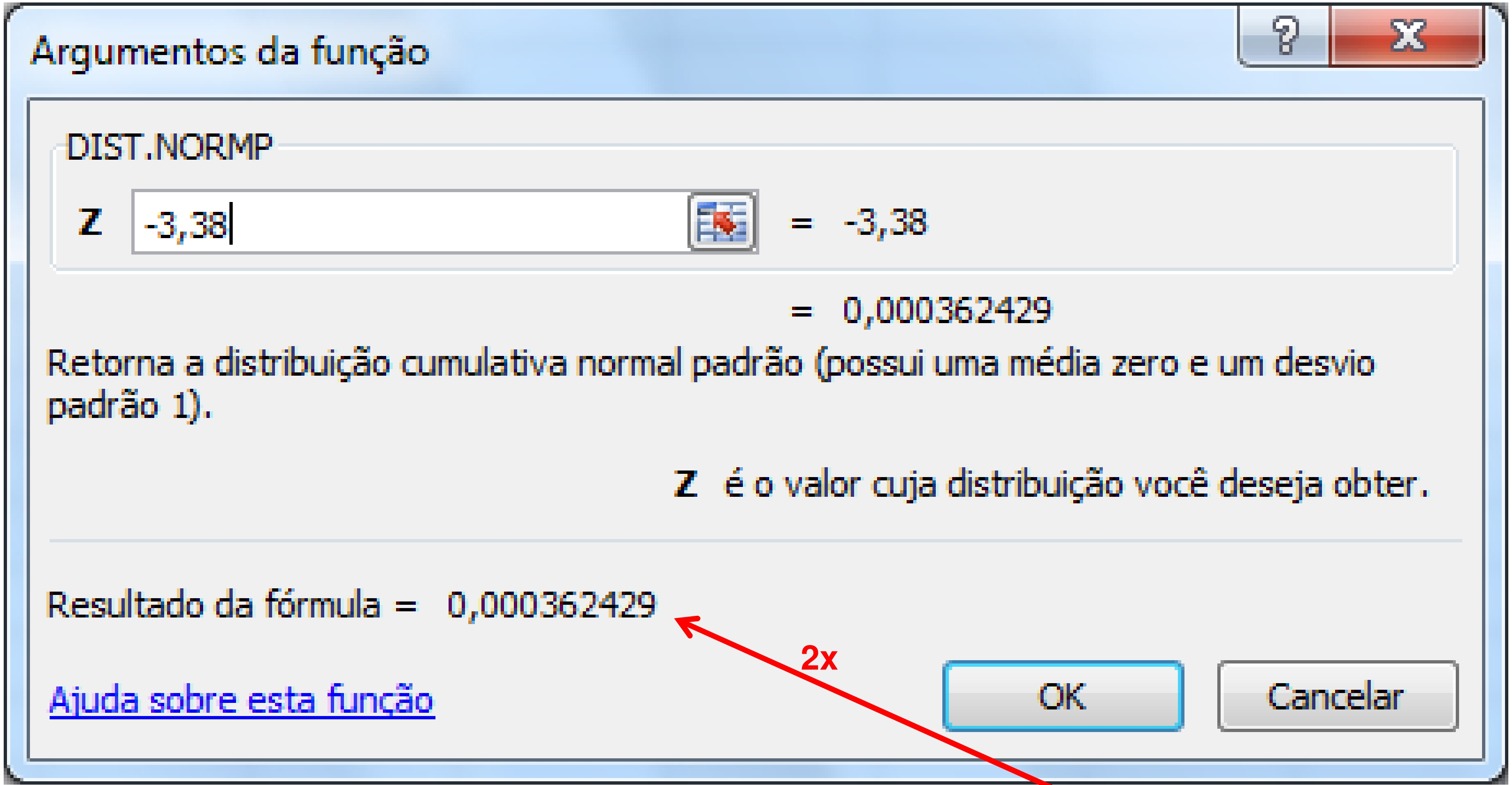
$$z_c = \frac{24000 - 26000}{\sqrt{\frac{2500^2}{50} + \frac{3000^2}{40}}} = -3,38$$

2) $\alpha = 4\%$

5) Portanto, rejeita-se a hipótese de igualdade entre as durações médias dos dois tipos de pneus. Com base nestas amostras, pode-se afirmar, ao nível de 4% de significância, que os dois tipos de pneus diferem quanto a durabilidade média, sendo o tipo B melhor que o tipo A.

Utilizando o Excel para obter o valor p:

$z_c = -3{,}38 \qquad \alpha = 0{,}04$ (bilateral)



Conclusão: Como a significância do resultado (0,07%) é menor que a significância do teste (4%), é possível rejeitar a hipótese nula.

2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

A variável em estudo tem distribuição normal

As variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são **desconhecidas** mas supostas **iguais**

As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Estatística do teste:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}} \sim t_\nu$$

onde:

$\nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$

$$S^2 = \frac{S_1^2 (n_1 - 1) + S_2^2 (n_2 - 1)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Valor que deve ser calculado na amostra

Exemplo:

Dez cobaias adultas criadas em laboratório, foram separadas, aleatoriamente, em dois grupos: um foi tratado com ração normalmente usada no laboratório (padrão) e o outro grupo foi submetido a uma nova ração (experimental). As cobaias foram pesadas no início e no final do período de duração do experimento. Os ganhos de peso (em gramas) observados foram os seguintes:

Ração experimental	220	200	210	220	210
Ração padrão	200	180	190	190	180

Utilize um teste de hipótese, ao nível $\alpha = 0{,}01$, para verificar se as duas rações diferem entre si quanto ao ganho de peso.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0{,}01$

Experimental	Padrão
$\bar{x}_1 = 212$	$\bar{x}_2 = 188$
$s_1^2 = 70$	$s_2^2 = 70$
$n_1 = 5$	$n_2 = 5$

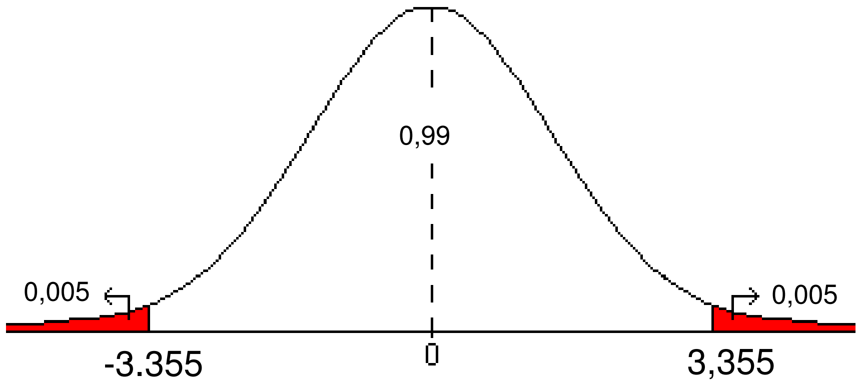
Pressuposições: variável ganho de peso com distribuição normal, amostras independentes e supõe-se que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

$$s^2 = \frac{70\times(5-1)+70\times(5-1)}{(5-1)+(5-1)} = 70$$

$$S^2 = \frac{S_1^2(n_1-1)+S_2^2(n_2-1)}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

$$t_c = \frac{212-188}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)70}} = 4{,}54$$

$$T = \frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2}}$$



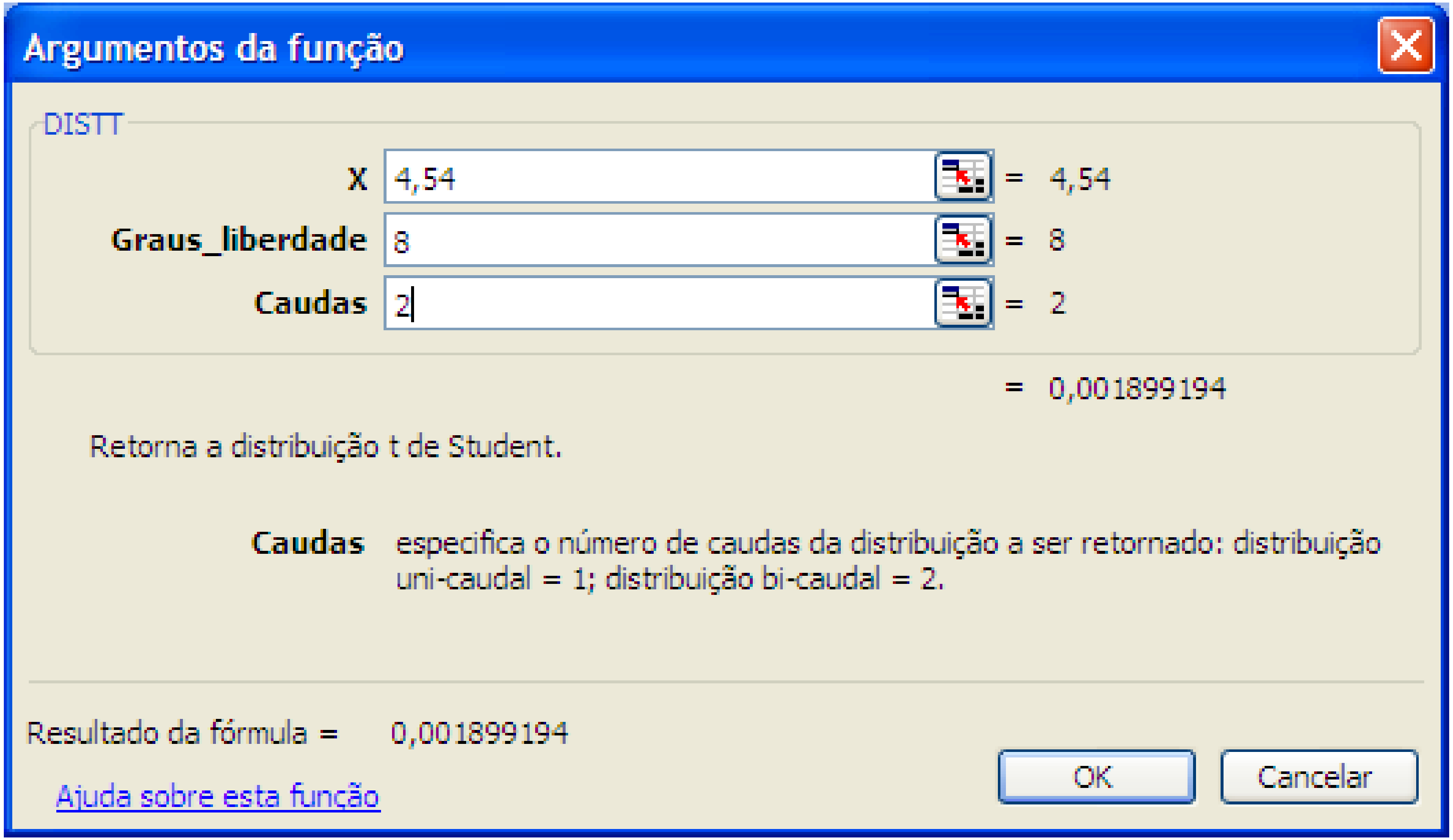
α=0,01 e $\nu=(n_1-1)+(n_2-1)=8$

$\Rightarrow H_0$ é rejeitada

Conclusão: ao nível de 1%, conclui-se que a ração experimental deve dar maior ganho de peso que a ração padrão.

Utilizando o Excel para obter o valor p:

$t_c = 4{,}54 \quad \alpha = 0{,}01 \qquad \nu = (n_1-1)+(n_2-1) = 8$



Conclusão: Como a significância do resultado (0,19%) é menor que a significância do teste (1%), é possível rejeitar a hipótese nula.

Exercício: Um engenheiro desconfia que a qualidade de um material pode depender da matéria-prima utilizada. Há dois fornecedores de matéria-prima sendo usados. Testes com 10 observações de cada fornecedor indicaram:

$$\bar{x}_1 = 39 \qquad \bar{x}_2 = 43 \qquad s_1 = 7 \qquad s_2 = 9$$

Use um nível de significância $\alpha = 0{,}05$ e teste a hipótese do engenheiro.

Obs.: Considere que as duas variâncias populacionais iguais.

$$t_c = 1{,}11 < t_{0,025;18} = 2{,}101$$

2. Comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

Pressuposições:

A variável em estudo tem distribuição normal

As variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são **desconhecidas** e **desiguais**

As amostras retiradas das populações são independentes

Hipótese sob verificação: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Estatística do teste: $$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$$

Valor que deve ser calculado na amostra

onde:

$$\nu = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Exemplo: As resistências de dois tipos de concreto, que segue o modelo normal, foram medidas, mostrando os resultados da tabela. Fixado um nível de significância de 10%, existe evidências de que o concreto do tipo X seja mais resistente do que o concreto do tipo Y?

Tipo X	54	55	58	50	61
Tipo Y	51	54	55	52	53

Os dados obtidos da tabela são:

$\overline{X} = 55{,}6$ e $\overline{Y} = 53{,}0$

$S_X^2 = 17{,}3$ e $S_Y^2 = 2{,}5$

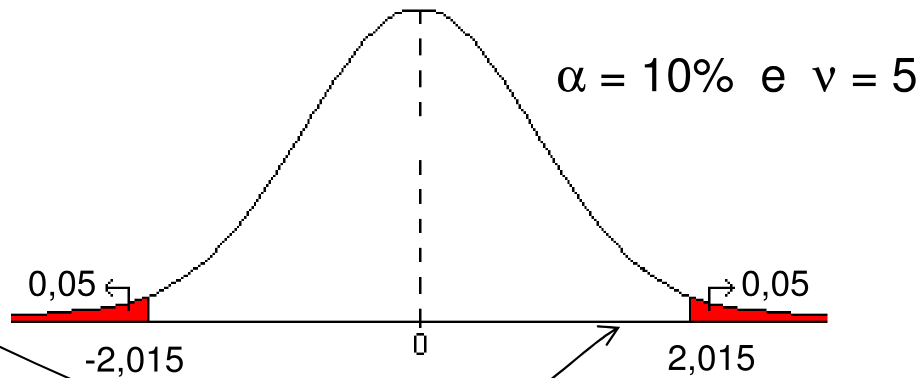
$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_A: \mu_X \neq \mu_Y$

$$\nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} = \frac{(17{,}3/5 + 2{,}5/5)^2}{\frac{(17{,}3/5)^2}{4} + \frac{(2{,}5/5)^2}{4}} = \frac{15{,}6816}{3{,}0554} = 5{,}13$$

$\alpha = 0{,}10$

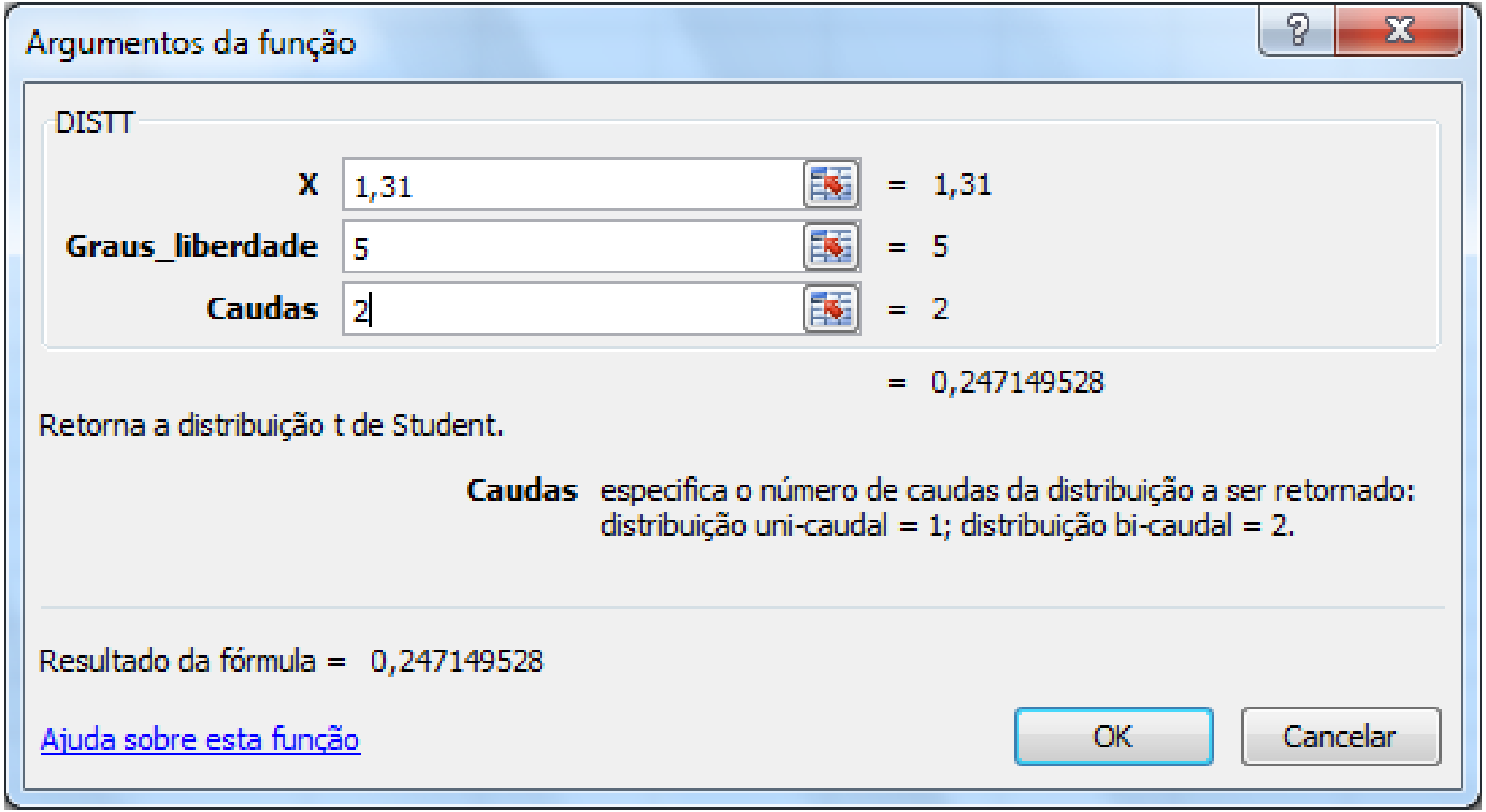
$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{55{,}6 - 53{,}0}{\sqrt{\frac{17{,}3}{5} + \frac{2{,}5}{5}}} = 1{,}31$$



Com estas amostras, ao nível de 10% de significância, não é possível afirmar que o concreto do tipo X seja mais resistente do que o concreto do tipo Y.

Utilizando o Excel para obter o valor p:

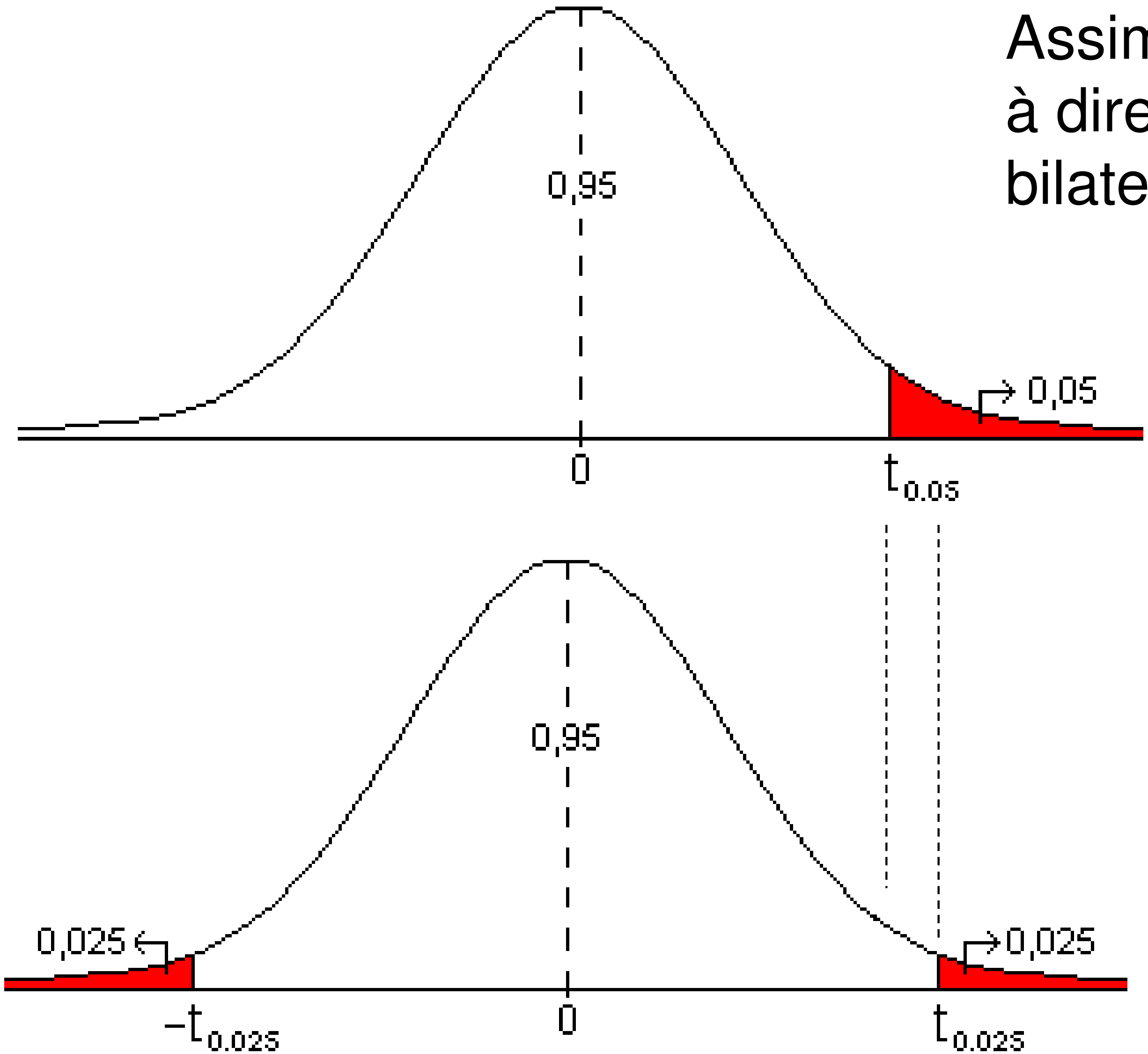
$t_c = 1{,}31 \quad \alpha = 0{,}10$ (bilateral) $\quad \nu = 5$



Conclusão: Como a significância do resultado (24,71%) é maior que a significância do teste (10%), não é possível rejeitar a hipótese nula.

$\alpha = 0,05$

No teste unilateral o valor t crítico é menor porque a área a sua direita deve corresponder a todo α. Assim, esta área é o dobro da área à direita do valor t crítico do teste bilateral.



Como consequência, um valor t não rejeitado no teste bilateral pode ser rejeitado no teste unilateral.
Portanto, o teste unilateral é mais poderoso que o teste bilateral.

Considerações

⇨ Os intervalos de confiança e os testes de hipóteses **bilaterais** são procedimentos estatísticos relacionados.

⇨ Se forem utilizados para analisar os mesmos dados, ao mesmo nível de significância, devem conduzir aos mesmos resultados.

⇨ O intervalo de confiança para uma média está relacionado com o teste de hipóteses que compara uma média com um valor padrão.

$\mathbf{H_0}$ não rejeitada $\Leftrightarrow$ valor padrão está coberto pelo intervalo

⇨ O intervalo de confiança para a diferença entre duas médias está relacionado com o teste de hipóteses que compara duas médias.

$\mathbf{H_0}$ não rejeitada $\Leftrightarrow$ zero está coberto pelo intervalo

Intervalo de confiança para uma média (μ)

$$IC\ (\mu;\ 1-\alpha):\ \overline{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Estatística T para comparação de média (μ) com valor padrão (μ_0)

$$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$$

Valor crítico: $t_{\alpha/2}$

⇨ Se no teste de hipóteses, ao nível de 1% de significância, rejeitamos H_0, significa que a diferença entre a média e o valor padrão não é zero, ou seja, média e valor padrão são diferentes.

⇨ Construindo o intervalo de confiança para μ, ao nível de 99%, devemos esperar que o valor padrão (μ_0) esteja fora do intervalo. Caso contrário, os resultados seriam contraditórios.

Intervalo de confiança para a diferença entre duas médias ($\mu_1 - \mu_2$)

$$IC\,(\mu_1 - \mu_2;\, 1-\alpha):\ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2}$$

Estatística T para a comparação entre duas médias (μ_1 e μ_2)

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2}}$$

Valor crítico: $t_{\alpha/2}$

⇨ Se no teste de hipóteses, ao nível de 5% de significância, não rejeitamos H_0, significa que a diferença entre as duas médias é zero, ou seja, as médias devem ser iguais.

⇨ Construindo o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para a diferença entre as médias ($\mu_1 - \mu_2$), devemos esperar que o valor zero seja coberto pelo intervalo.

Exemplo: Um novo funcionário foi contratado para gerir os estoques da empresa. Ele recebeu a informação de que a quantidade semanal vendida de determinado produto é de 9,6kg. Para testar a veracidade da informação, tomou uma amostra aleatória de 30 semanas e verificou que a venda média do produto foi de 9,3kg, com desvio padrão de 3,2kg. Considerando que a variável em estudo segue a distribuição normal:

a) Verifique, utilizando **teste de hipóteses** ao nível de 5% de significância, se a informação recebida pelo funcionário é verdadeira.

b) Verifique se a informação é verdadeira, utilizando **intervalo de confiança** ao nível de 95%.

c) Houve **coerência entre os resultados** do teste de hipóteses e do intervalo de confiança?

a) Teste de Hipótese

Variável em estudo: X = venda do produto (kg)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal

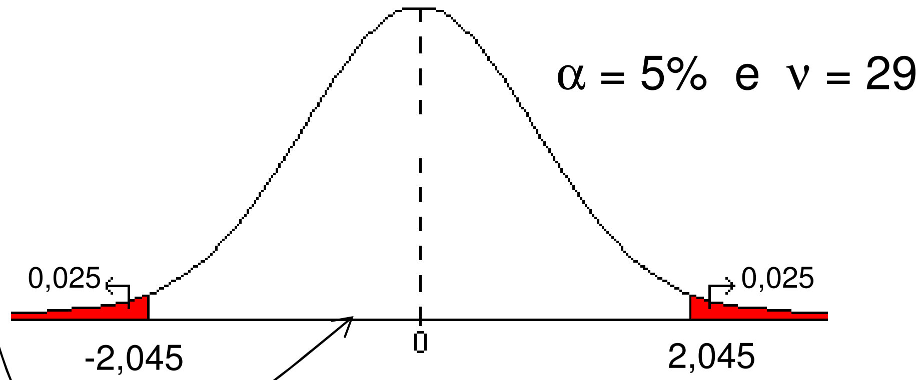
1. Hipóteses estatísticas: $\begin{cases} H_0 : \mu = 9{,}6 \\ H_A : \mu \neq 9{,}6 \end{cases}$

2. Taxa de erro aceitável: $\alpha = 0{,}05$

a) Teste de Hipótese

4. Estatística do teste

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{9{,}3 - 9{,}6}{3{,}2/\sqrt{30}} = -0{,}5135$$



5. Decisão e conclusão

Não rejeitamos H_0. Concluímos, ao nível de 5% de significância, que a quantidade média de venda semanal do produto não difere significativamente do valor informado (9,6kg). Portanto, a informação recebida pelo funcionário pode ser verdadeira.

b) Intervalo de confiança

Variável em estudo: X = venda do produto (kg)

Pressuposição: A variável em estudo tem distribuição normal.

$$IC(\mu; 1-\alpha): \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Estimativas:

$$\bar{x} = 9{,}3$$

$$\nu = 30 - 1 = 29$$

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}2}{\sqrt{30}} = 0{,}5842$$

$$t_{0,025\ (29)} = 2{,}045$$

b) Intervalo de confiança

$$IC(\mu;1-\alpha): \bar{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$IC\ (\mu;\ 0{,}95):\ 9{,}3 \pm 2{,}045 \times 0{,}5842$$

$$\text{Limite inferior} = 9{,}3 - 1{,}195 = 8{,}11$$

$$\text{Limite superior} = 9{,}3 + 1{,}195 = 10{,}50$$

$$P(8{,}11 < \mu < 10{,}50) = 0{,}95$$

Concluímos que o intervalo de confiança, ao nível de 95%, para a verdadeira quantidade média semanal vendida do produto é de 8,11 a 10,50 kg.

c) Sim, o resultado do teste de hipóteses esta coerente com o do intervalo de confiança, pois o valor padrão 9,6, que segundo o teste de hipótese não difere de μ, está dentro do intervalo de confiança, ou seja, é um valor possível para μ.

Comparação de Pares de Observações

(Comparação de duas médias para amostras pareadas)

Em algumas situações os dados de duas populações são coletados e comparados em pares. Isso é feito para impedir que fatores não controláveis inflacionem as estimativas das variâncias.

Exemplo: desempenho dos alunos com método 1 e 2

X

hidratação da pele com creme 1 e 2

A hipótese testada é se existe diferenças significativas entre os pares de observações, tendo como suposição que os dados seguem a distribuição normal.

$$H_0: \mu_d = 0 \quad (\mu_1 = \mu_2)$$

$$H_A: \mu_d \neq 0 \quad (\mu_1 \neq \mu_2)$$

$$\mu_d > 0 \quad (\mu_1 > \mu_2)$$

$$\mu_d < 0 \quad (\mu_1 < \mu_2)$$

O teste baseia-se na estatística:

$$\boxed{T = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Exemplo: Cinco operadores de máquinas foram treinados em duas máquinas de diferentes fabricantes, para verificar qual delas apresentava maior facilidade de aprendizagem. Mediu-se o tempo que cada um dos operadores gastou na realização de uma mesma tarefa com cada um dos dois tipos de máquinas. Os resultados estão na tabela. Ao nível de 5%, é possível afirmar que a tarefa realizada na máquina X demora mais do que na máquina Y?

Operador	Maq. X	Maq. Y	d_i
1	80	75	**5**
2	72	70	**2**
3	65	60	**5**
4	78	72	**6**
5	85	78	**7**

Solução:

$H_0: \mu_X = \mu_Y \ (\mu_d = 0)$

$H_A: \mu_X \neq \mu_Y \ (\mu_d \neq 0)$

$\alpha = 5\%$

$$T = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

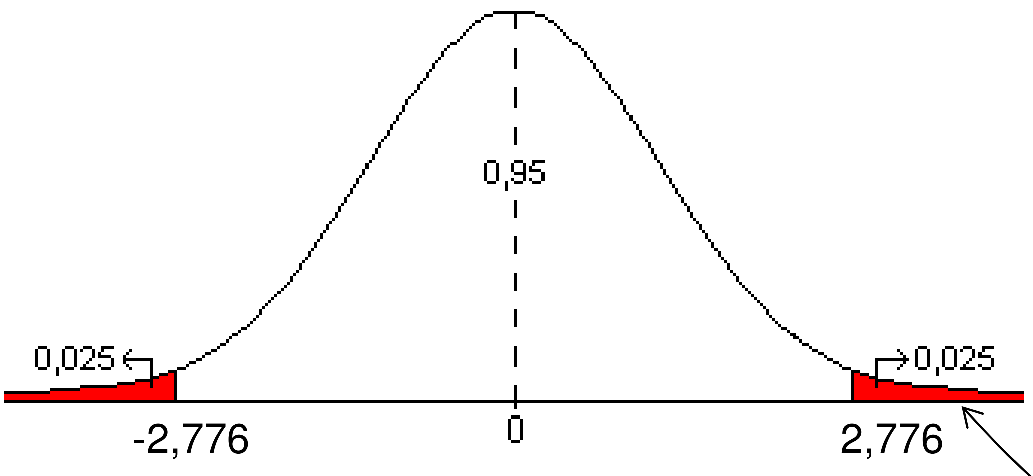
$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \qquad S_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

Operador	Maq. X	Maq. Y	d_i
1	80	75	**5**
2	72	70	**2**
3	65	60	**5**
4	78	72	**6**
5	85	78	**7**

⇨ $\bar{d} = 5$ e $s_d = 1{,}8708$

⇨ $\alpha = 5\%$ e $\nu = n - 1 = 4$

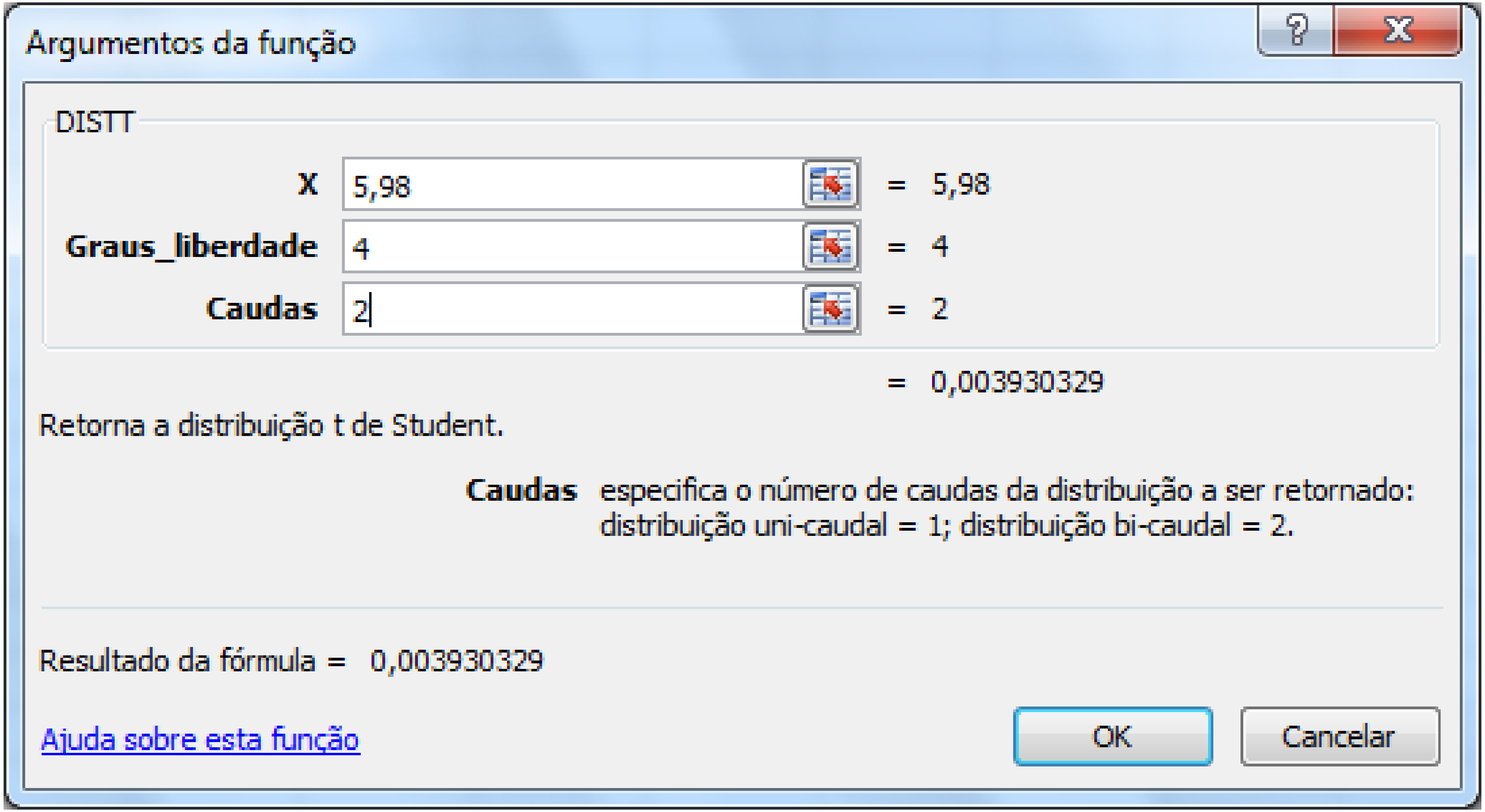
$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{5}{1{,}8708/\sqrt{5}} = 5{,}98$$



Com 5% de significância, rejeita-se H_0, e conclui-se que realizar a tarefa com a máquina X deve demorar mais do que com a máquina Y.

Utilizando o Excel para obter o valor p:

$t_c = 5{,}98 \quad \alpha = 0{,}05$ (bilateral) $\quad \nu = 4$



Conclusão: Como a significância do resultado (0,39%) é menor que a significância do teste (5%), é possível rejeitar a hipótese nula.

Exercício: Uma empresa quer verificar se o conhecimento de seus funcionários a respeito de um determinado assunto melhorou após 30 horas de treinamento. Para isso foi realizado com os quinze alunos do treinamento um teste antes e após o treinamento. Os dados a seguir representam as notas obtidas. Conclua a respeito da eficiência do treinamento, utilizando 5% de significância.

Func.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes	6,5	6,7	7,0	7,0	6,5	7,3	7,8	6,9	6,7	7,2	7,5	7,5	7,2	7,0	6,8
Depois	7,5	7,7	7,9	8,0	7,4	8,3	8,8	8,9	7,7	8,2	8,5	8,5	8,2	8,0	8,8
Difer.	1,0	1,0	0,9	1,0	0,9	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0

$$\bar{d} = 1{,}12$$

$$S_d = 0{,}36$$

Exercício: Duas espécies de um certo tipo de cereal estão sendo testadas quanto ao seu crescimento. O experimento foi feito escolhendo 10 blocos de terreno e plantando em cada bloco mudas de ambas as espécies. Os resultados a seguir são as alturas medidas ao final do primeiro mês. Utilizar $\alpha = 0,05$

Terreno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Espécie 1	22	27	18	33	25	21	15	33	21	24
Espécie 2	21	31	24	32	29	23	19	37	22	27

Os dados deste experimento foram coletados aos pares para impedir que as diferenças de fertilidade entre os blocos de terreno (que podem ser grandes) mascarem os resultados.

$$t_c = 3{,}54 > t_{0,025;9} = 2{,}262$$