Introdução à teoria das probabilidades

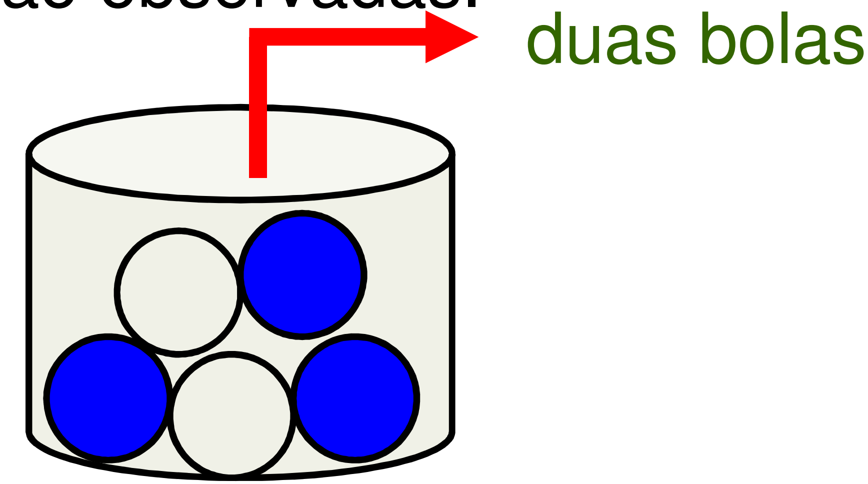
- Introdução
- Conceitos fundamentais
- Conceitos de probabilidade
- Teoremas para o cálculo de probabilidades
- **Probabilidade condicional e independência**
- **Teorema de Bayes**

Probabilidade condicional e independência

Sejam **A** e **B** dois eventos associados a um mesmo espaço amostral **S**. Se **A** e **B** não são eventos mutuamente exclusivos (**A**$\cap$**B** $\neq \varnothing$), então **A** e **B** poderão ser eventos **independentes** ou **condicionados**.

Exemplo:

Experimento: Uma caixa contém cinco bolas equiprováveis, sendo três azuis e duas brancas. Duas bolas são retiradas, uma a uma, e suas cores são observadas.



Definimos, então, dois eventos:

A_1: a primeira bola é azul

B_2: a segunda bola é branca

As probabilidades dos eventos **A_1** e **B_2** serão calculadas em duas situações: retiradas **sem** e **com reposição** da primeira bola.

Situação 1. Consideremos que a primeira bola retirada não é reposta $\rightarrow$ **retirada sem reposição**

$S = \{B, B, A, A, A\}$ $\leftarrow$ enumerável, finito e equiprovável

$A_1 = \{A, A, A\}$

$$P(A_1) = \frac{\# A_1}{\# S} = \frac{3}{5}$$

A probabilidade do $\mathbf{B_2}$ depende da ocorrência ou não do $\mathbf{A_1}$?

⇨ Se ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(B_2/A_1)$

S = {B, B, A, A}

B_2/A_1 = {B, B}

$$P(B_2/A_1) = \frac{\#B_2/A_1}{\#S} = \frac{2}{4}$$

⇨ Se não ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(B_2)$

S = {B, A, A, A }

B_2 = {B}

$$P(B_2) = \frac{\#B_2}{\#S} = \frac{1}{4}$$

Se a bola **não for reposta**, a probabilidade de ocorrência do B_2 fica **alterada** pela ocorrência ou não do A_1

$$P(B_2/A_1) \neq P(B_2)$$

Eventos condicionados

Definição: dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são condicionados quando a ocorrência de um **altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

A probabilidade condicional de **A** é denotada por

P(A/B)

(lê-se probabilidade de A dado que ocorreu B)

A_1: a primeira bola é azul

B_2: a segunda bola é branca

Situação 2. Consideremos que a primeira bola retirada é reposta antes de tirar a segunda $\rightarrow$ **retirada com reposição**.

$S = \{B, B, A, A, A\}$

$A_1 = \{A, A, A\}$

$$P(A_1) = \frac{\# A_1}{\# S} = \frac{3}{5}$$

A probabilidade do $\mathbf{B_2}$ depende da ocorrência do $\mathbf{A_1}$?

- Se ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(B_2/A_1)$

  $S = \{B, B, A, A, A\}$

  $B_2/A_1 = \{B, B\}$

$$P(B_2/A_1) = \frac{\#B_2/A_1}{\#S} = \frac{2}{5}$$

- Se não ocorreu $\mathbf{A_1}$, então temos $P(B_2)$

  $S = \{B, B, A, A, A\}$

  $B_2 = \{B, B\}$

$$P(B_2) = \frac{\#B_2}{\#S} = \frac{2}{5}$$

Se a bola **for reposta**, a probabilidade de ocorrência do B_2 **não é alterada** pela ocorrência ou não do A_1

$$P(B_2/A_1) = P(B_2)$$

Eventos independentes

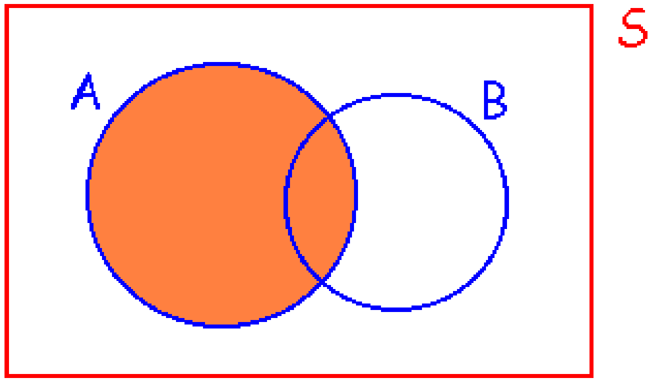
Definição: Dois eventos quaisquer, **A** e **B**, são independentes quando a ocorrência de um **não altera** a probabilidade de ocorrência do outro.

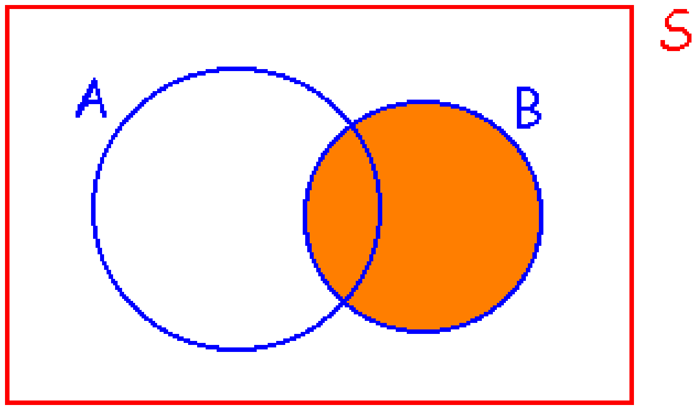
$$P(A/B)=P(A) \quad \text{e} \quad P(B/A)=P(B)$$

Teorema do Produto das Probabilidades

Se **A** e **B** são dois eventos quaisquer, então

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





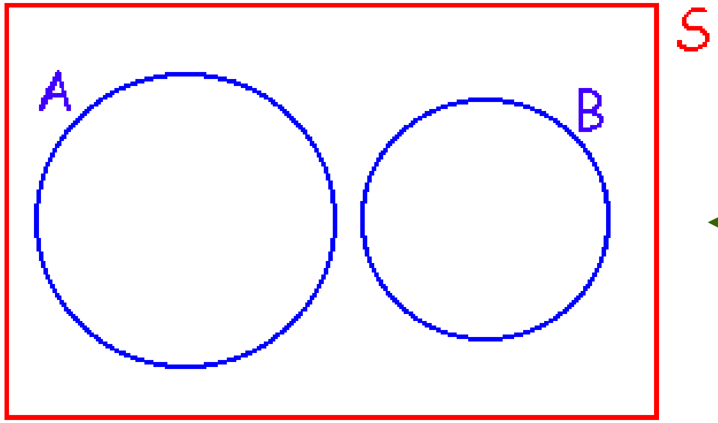
$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)} \qquad \mathbf{P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)}$$

Caso particular:

A e B são independentes $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P(B/A)=P(B) \text{ e } P(A/B)=P(A) \\ \Downarrow \\ P(A \cap B)=P(A)\,P(B) \end{cases}$

mutuamente exclusivos

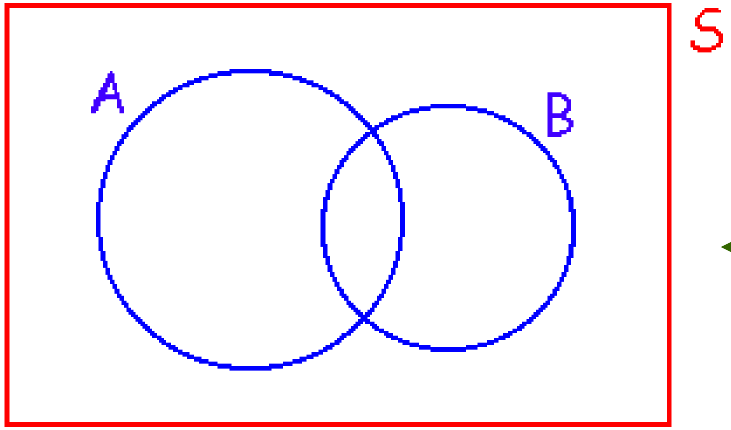
$A \cap B = \varnothing$



Grau máximo de dependência entre dois eventos: a ocorrência de um impede a ocorrência do outro

não mutuamente exclusivos

$A \cap B \neq \varnothing$



Condicionados: a ocorrência de um altera a probabilidade de ocorrência do outro

Independentes: a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro

Exercício: Dois dígitos são selecionados aleatoriamente de 1 a 9 sem repeti-los. Se a soma é par encontre a probabilidade de ambos os números serem ímpares.

$\# S = C_{9,2} = 36$

A = ambos são ímpares $\Rightarrow$ $\#A = C_{5,2} = 10$

B = soma é par $\Rightarrow$ $\#B = C_{5,2} + C_{4,2} = 10 + 6 = 16$

$A \cap B$ = ambos ímpares com soma par

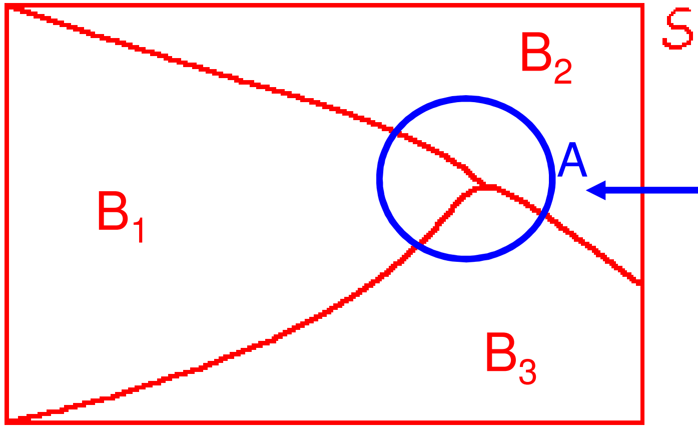
$\Rightarrow \# A \cap B = C_{5,2} = 10$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10/36}{16/36} = \frac{10}{16} = 0{,}625$$

Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Seja S um espaço amostral, com n partições, onde está definido o evento A.

Thomas Bayes
(1702 –1761)



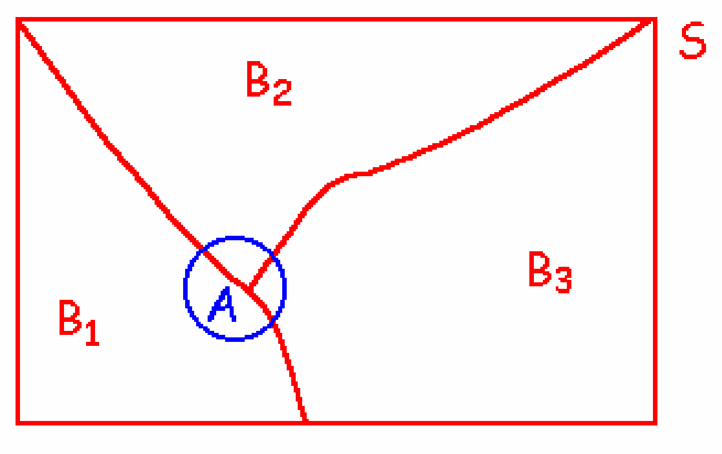
Evento de interesse

n=3

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \cap B_2 = \varnothing \\ B_1 \cap B_3 = \varnothing \\ B_2 \cap B_3 = \varnothing \end{array}\right\} B_i \cap B_j = \varnothing$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas 1, 2 e 3 produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



S = produção total da fábrica

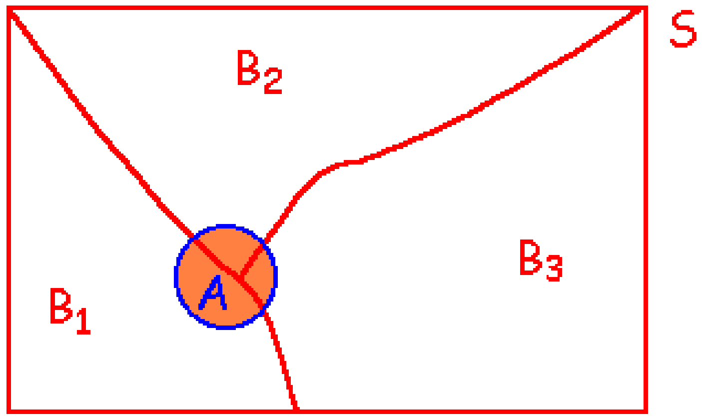
B_1 = produção da máquina 1

B_2 = produção da máquina 2

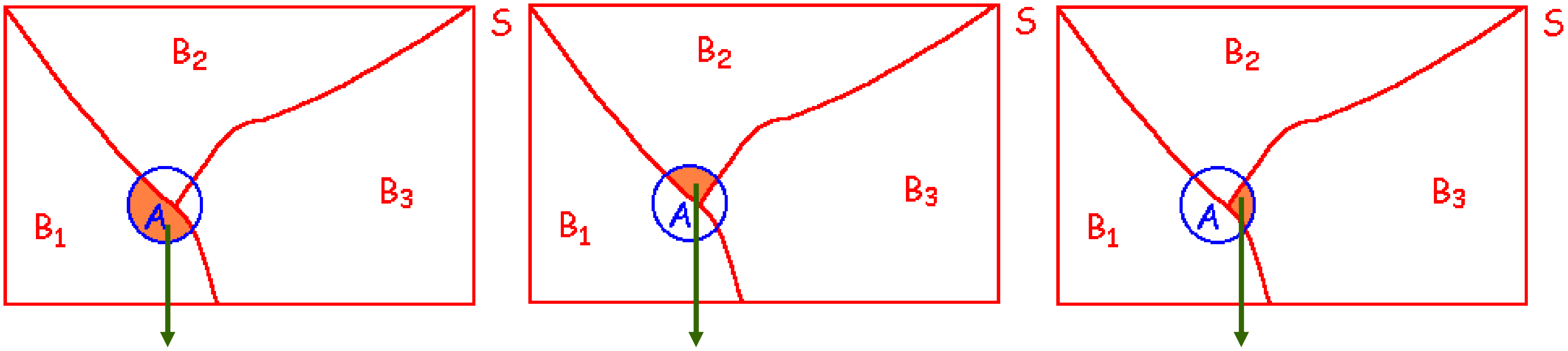
B_3 = produção da máquina 3

A = produção defeituosa

Se escolhemos ao acaso um parafuso desta fábrica, qual é a probabilidade de que este parafuso seja defeituoso?



P(A) ?



$B_1 \cap A$ $\quad$ $B_2 \cap A$ $\quad$ $B_3 \cap A$

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

$$P(A) = ?$$

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)] = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) . P(A/B)$$

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1) . P(A/B_1)$$

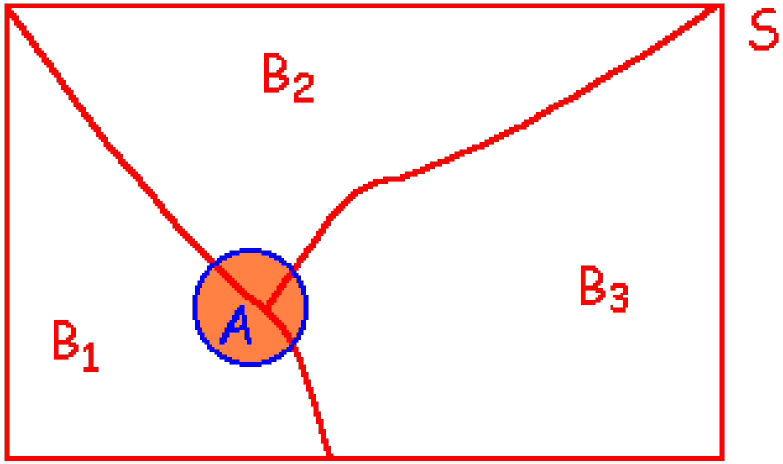
$$P(B_2 \cap A) = P(B_2) . P(A/B_2)$$

$$P(B_3 \cap A) = P(B_3) . P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1) . P(A/B_1) + P(B_2) . P(A/B_2) + P(B_3) . P(A/B_3)$$

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + P(B_2) \,.\, P(A/B_2) + P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas 1, 2 e 3 produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



$P(B_1)=0,25$

$P(B_2)=0,35$

$P(B_3)=0,40$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina 1

$\rightarrow P(A/B_1) = 0,05$

Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina 2

$\rightarrow P(A/B_2) = 0,04$

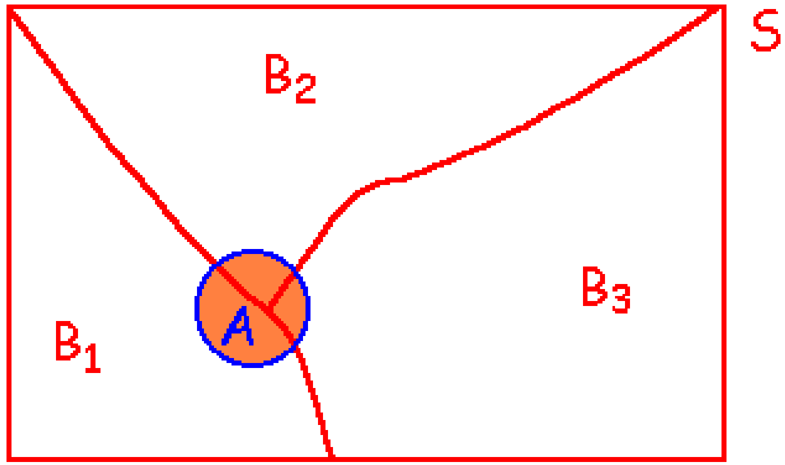
Probabilidade de ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina 3

$\rightarrow P(A/B_3) = 0,02$

$P(B_1)=0{,}25$ $\quad P(A/B_1) = 0{,}05$

$P(B_2)=0{,}35$ $\quad P(A/B_2) = 0{,}04$

$P(B_3)=0{,}40$ $\quad P(A/B_3) = 0{,}02$



$$P(A) = P(B_1)\,.\,P(A/B_1) + P(B_2)\,.\,P(A/B_2) + P(B_3)\,.\,P(A/B_3)$$

$$P(A) = 0{,}25\,.\,0{,}05 + 0{,}35\,.\,0{,}04 + 0{,}40\,.\,0{,}02$$

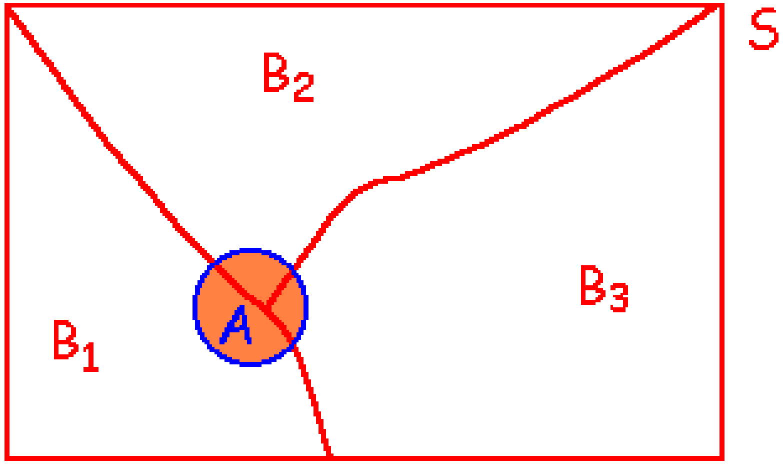
$$P(A) = 0{,}0345$$

3,45% da produção de parafusos da fábrica é defeituosa

Teorema da Probabilidade Total:

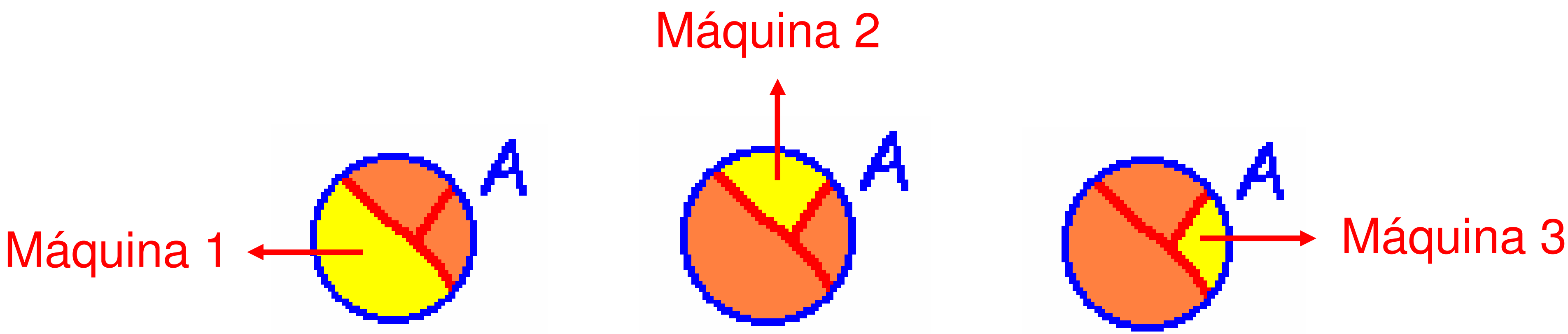
$$P(A) = P(B_1)\,.\,P(A/B_1) + P(B_2)\,.\,P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)\,.\,P(A/B_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

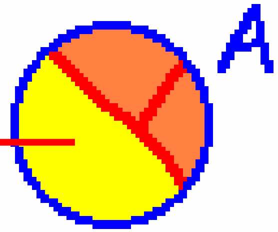


B_1 = máquina 1
B_2 = máquina 2
B_3 = máquina 3

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina 1, da máquina 2 e da máquina 3?



$P(B_1/A) = ?$ $P(B_2/A) = ?$ $P(B_3/A) = ?$



$P(B_1/A)$

Qual é a probabilidade de ocorrer B_1, sabendo-se que ocorreu A?

Probabilidade condicionada:

$P(B_1/A) = ?$

$$\boxed{P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)}}$$

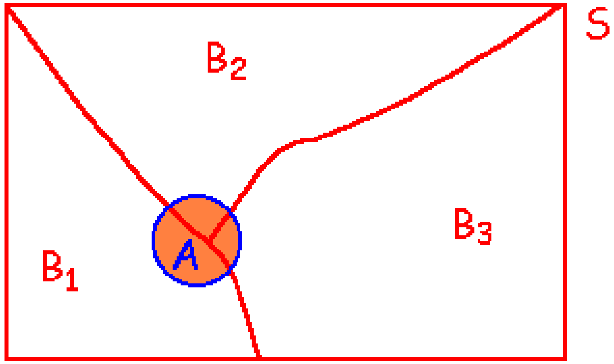
$$P(B_1 \cap A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A/B_i)$$

Teorema de Bayes

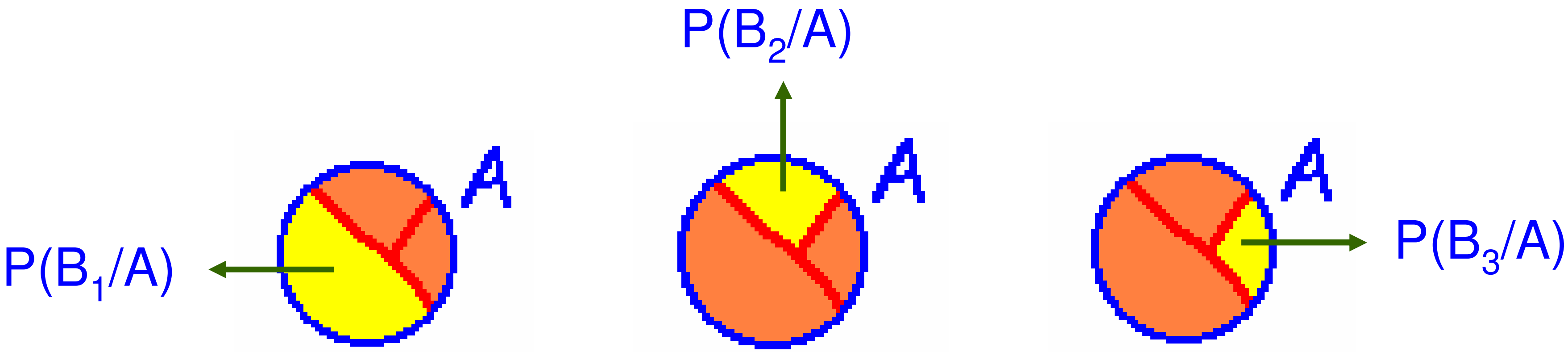
$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i).P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$$

Exemplo: Em uma fábrica de parafusos, as máquinas 1, 2 e 3 produzem 25%, 35% e 40% do total produzido. Da produção de cada máquina, 5%, 4% e 2%, respectivamente, são defeituosos.



B_1 = produção da máquina 1
B_2 = produção da máquina 2
B_3 = produção da máquina 3
A = produção defeituosa

Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que ele é defeituoso. Qual é a probabilidade de que seja da máquina 1, da máquina 2 e da máquina 3?



Solução: $P(B_1)=0,25$ $P(B_2)=0,35$ $P(B_3)=0,40$

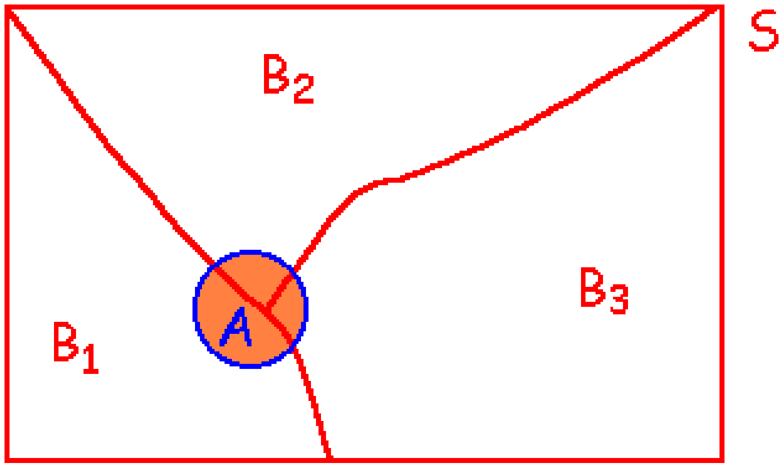
$P(A/B_1) = 0,05$ $P(A/B_2) = 0,04$ $P(A/B_3) = 0,02$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0,25.0,05}{0,0345} = 0,3623$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2).P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0,35.0,04}{0,0345} = 0,4058$$

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3).P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{0,40.0,02}{0,0345} = 0,2319$$

Se o parafuso é defeituoso, a probabilidade de ter sido fabricado pela Máquina 1 é 0,3623; pela Máquina 2 é 0,4058 e pela Máquina 3 é 0,2319



Exercício:

Em uma certa comunidade, 6 % de todos os adultos com mais de 45 anos têm diabetes. Um novo teste diagnostica corretamente 84% das pessoas que têm diabetes e 98% das que não tem a doença.

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa diagnosticada como diabética no teste, ter de fato a doença? 0,7283

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa que faça o teste seja diagnosticada como não diabética? 0,9308

DD – 0,84

D – 0,06

DND – 0,16

DD – 0,02

ND – 0,94

DND – 0,98

D – 0,06 → DD – 0,84 ; DND – 0,16

ND – 0,94 → DD – 0,02 ; DND – 0,98

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa diagnosticada como diabética no teste, ter de fato a doença?

$$P(D/DD) = \frac{P(D).P(DD/D)}{P(D).P(DD/D) + P(ND).P(DD/ND)}$$

$$= \frac{0{,}06 \times 0{,}84}{(0{,}06 \times 0{,}84) + (0{,}94 \times 0{,}02)} = \frac{0{,}0504}{0{,}0504 + 0{,}0188} = \frac{0{,}0504}{0{,}0692} = 0{,}7283 = 72{,}83\%$$

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa que faça o teste seja diagnosticada como não diabética?

$$P(DND) = P(D).P(DND/D) + P(ND).P(DND/ND)$$

$$= 0{,}06 \times 0{,}16 + 0{,}94 \times 0{,}98 = 0{,}0096 + 0{,}9212 = 0{,}9308 = 93{,}08\%$$