

# Inferência Estatística – Testes de Hipóteses

- Introdução: hipóteses e erros de conclusão
- Testes de hipóteses para uma e duas médias
- **Testes de hipóteses para uma e duas variâncias**
- Testes de hipóteses para uma e duas proporções

# Teste para a variância de uma população

Para aplicar o teste para a variância é necessário supor a **normalidade** da população de onde será extraída a amostra.

Uma hipótese testada com frequência é que a variância tenha um valor especificado.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

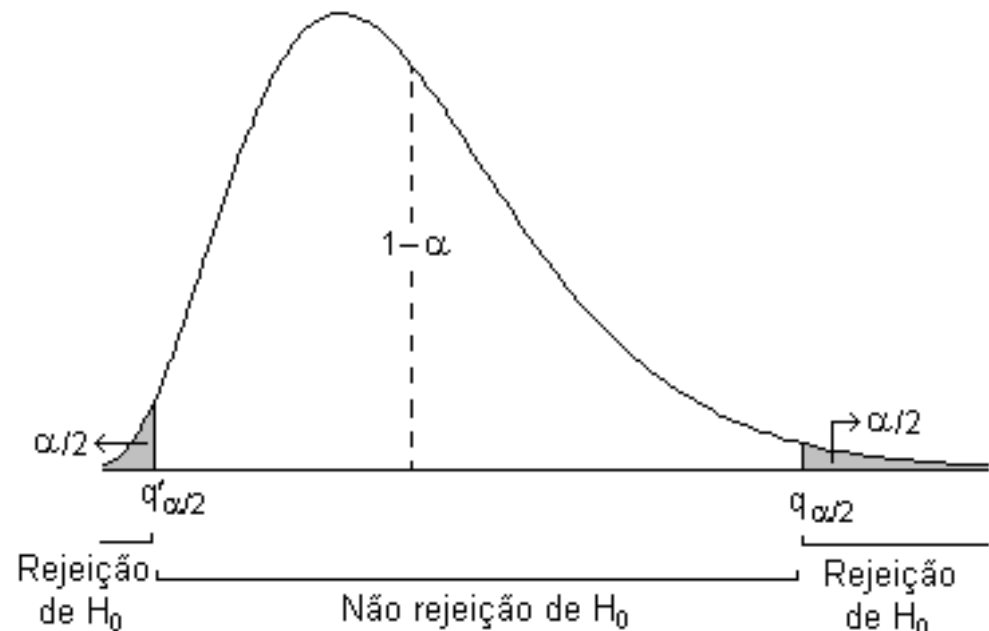
$$\sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 < \sigma_0^2$$

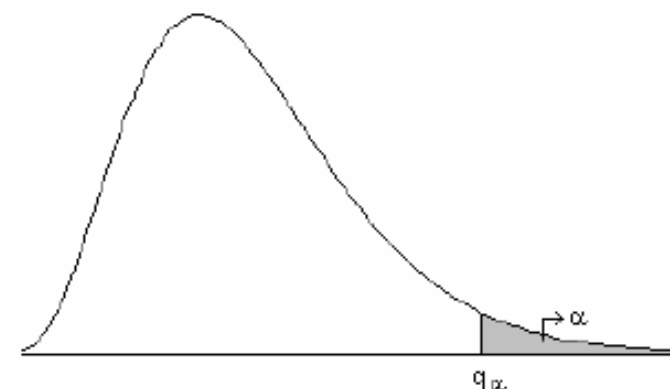
$H_0$  é rejeitada se  $q_c$  ultrapassar o valor crítico da distribuição qui-quadrado :

A estatística do teste é

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$



**Tabela III.** Limites unilaterais da distribuição qui-quadrado ( $\chi^2$ ).



Graus de Liberdade (v)	Nível de Significância ( $\alpha$ )									
	Esquerda ( $q'$ )					Direita ( $q$ )				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
■ ■ ■										

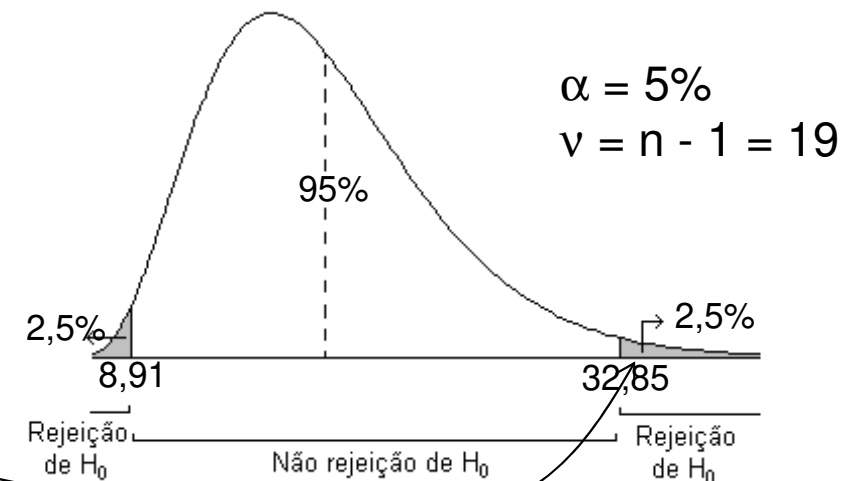
Nota: Se o teste for bilateral, o valor de  $\alpha$  deve ser dividido por dois.

**Exercício:** A quantidade mensal de produtos entregues por uma empresa segue uma distribuição Normal com média e variância desconhecidas. Analise os dados a seguir, que representam uma amostra de 20 meses e teste a hipótese de que o desvio padrão da quantidade mensal de produtos entregues pela empresa é de 1 unidade, utilizando nível de significância de 5%.

17,4	18,2	18,3	18,8	19,0	19,2	19,3	19,6	19,6	19,9	$\bar{X} = 20,01$
20,2	20,2	20,5	20,7	20,9	21,0	21,3	21,5	21,9	22,6	$S = 1,34$

**Solução:**  $H_0: \sigma^2 = 1$   
 $H_A: \sigma^2 \neq 1$

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)1,34^2}{1} = 34,12$$



Com 5% de significância, rejeita-se  $H_0$ , isto é, é possível afirmar que o desvio padrão da quantidade mensal de produtos entregues pela empresa é maior que 1 unidade.

Graus de Liberdade (v)	Nível de Significância ( $\alpha$ )									
	Esquerda (q')					Direita (q)				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00

## Utilizando o Excel para obter o valor p:

$$q_c = 34,12 \quad \alpha = 0,05 \quad v = 19$$

**Argumentos da função**

DIST.QUI

X	34,12	= 34,12
Graus_liberdade	19	= 19

= 0,017787655

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

**Graus\_liberdade** é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10<sup>10</sup>, excluindo 10<sup>10</sup>.

Resultado da fórmula = 0,017787655

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar

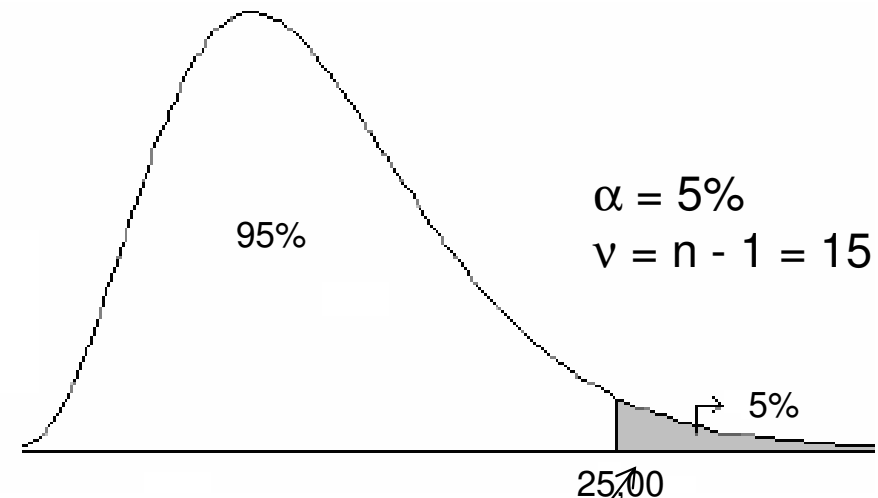
Como a significância do resultado (3,56%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.

**Exemplo:** Uma das maneiras de controlar a qualidade de um produto é controlar a sua variabilidade. Uma máquina de empacotar café está regulada para encher os pacotes com média de 500 g e desvio padrão de 10 g, onde o peso de cada pacote distribui-se normalmente. Colhida uma amostra de  $n=16$ , observou-se uma variância de  $169 \text{ g}^2$ . É possível afirmar com este resultado que a máquina está desregulada quanto a variabilidade, supondo uma significância de 5%?

**Solução:**  $H_0: \sigma^2 = 100$

$H_A: \sigma^2 > 100$

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15)169}{100} = 25,35$$



Com 5% de significância, rejeita-se  $H_0$ , ou seja, é possível afirmar que a máquina está desregulada.



Graus de Liberdade (v)	Nível de Significância ( $\alpha$ )									
	Esquerda (q')					Direita (q)				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00



## Utilizando o Excel para obter o valor p:

$$q_c = 25,35 \quad \alpha = 0,05 \quad v = 15$$

**Argumentos da função**

DIST.QUI

X	25,35	= 25,35
Graus_liberdade	15	= 15

= 0,045435921

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

X é o valor no qual se deseja avaliar a distribuição, um número não-negativo.

Resultado da fórmula = 0,045435921

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar

Como a significância do resultado (4,54%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.

# Teste de homogeneidade de variâncias

Considerando duas estimativas  $s_1^2$  e  $s_2^2$ , frequentemente, temos interesse em verificar se tais estimativas são homogêneas.

Assim, as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

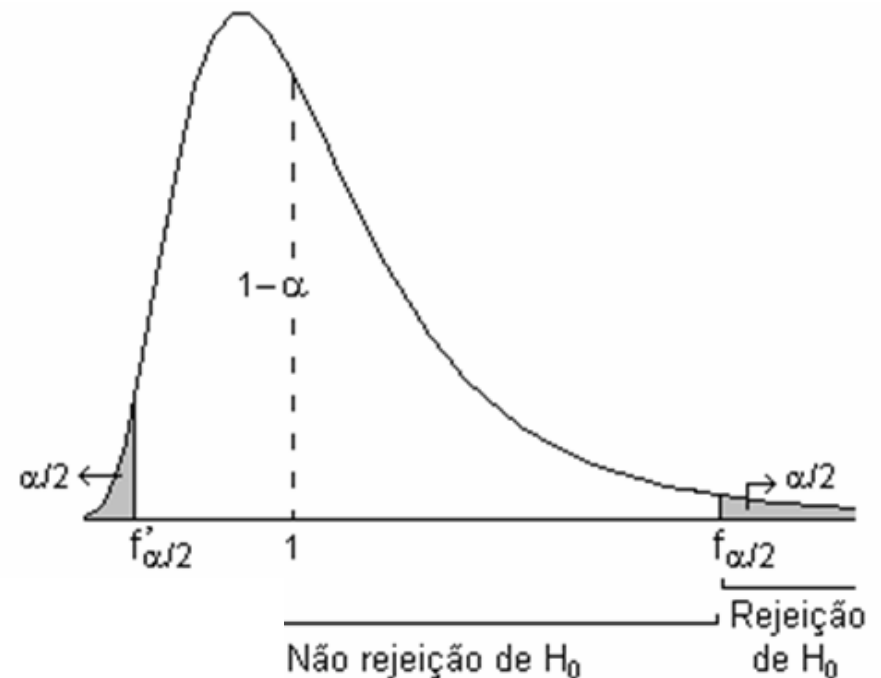
$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$H_0$  é rejeitada se  $f_c$  ultrapassar o valor crítico da distribuição F:

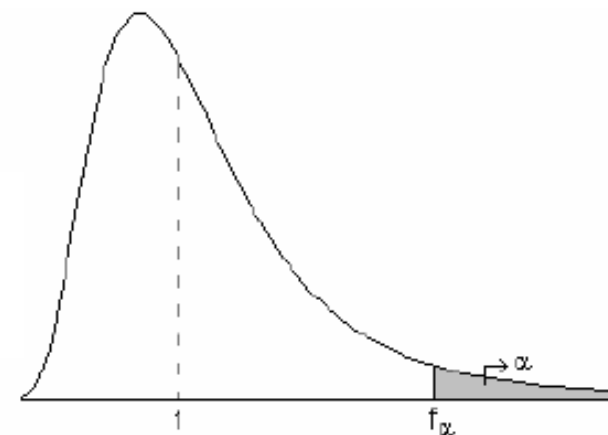
A estatística do teste é

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

**Atenção:** sempre  
variância maior  
sobre variância  
menor



**Tabela IV. Limites unilaterais superiores da distribuição F:**  
 $P[F > f_{\alpha}]$



$v_2$	$\alpha$	$v_1$																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	Inf.
1	0,05	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
	0,025	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	984,9	993,1	997,2	1001,	1006,	1010,	1014,	1018,
	0,01	4052,	5000,	5403,	5625,	5764,	5859,	5928,	5982,	6022,	6056,	6082,	6106,	6157,	6209,	6235,	6261,	6287,	6313,	6339,	6366,
	0,001	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6084*	6107*	6158*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
	0,001	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	13,93	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
	0,001	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,8	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
4	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
	0,001	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05

■ ■ ■

**Exemplo:** As resistências de dois tipos de concreto foram medidas, mostrando os resultados da tabela. Fixado um nível de significância de 10%, teste a hipótese de igualdade das variâncias, considerando que os dados seguem a distribuição normal?

<b>Tipo X</b>	54	55	58	50	61
<b>Tipo Y</b>	51	54	55	52	53

Os dados obtidos da tabela são:

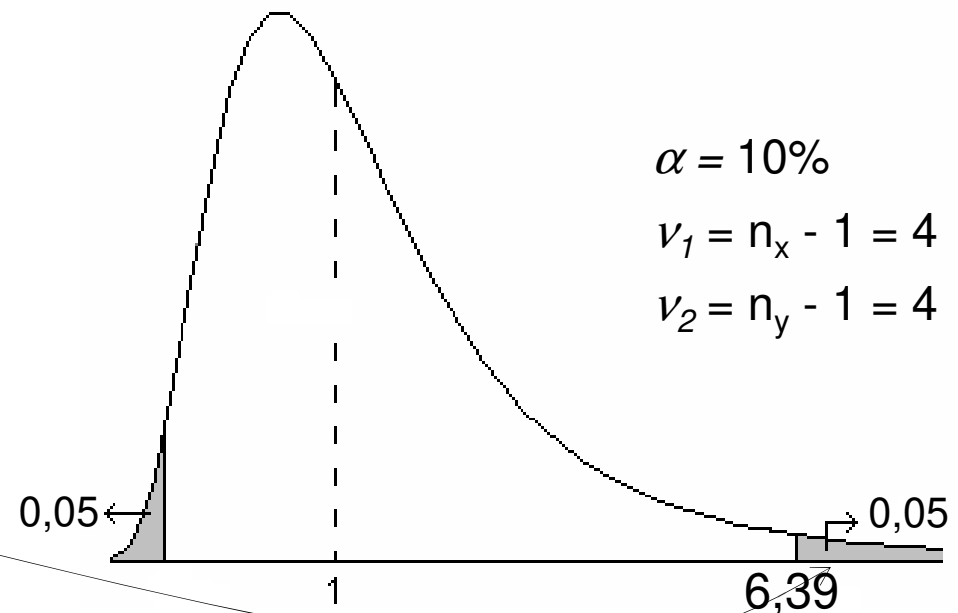
$$\bar{X} = 55,6 \text{ e } \bar{Y} = 53,0$$

$$S_X^2 = 17,3 \text{ e } S_Y^2 = 2,5$$

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

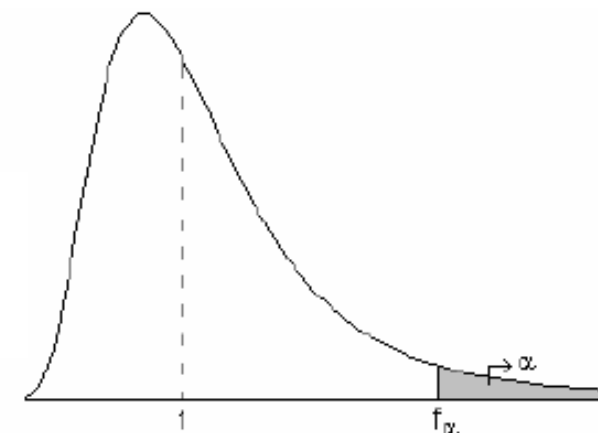
$$H_A: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{17,3}{2,5} = 6,92$$



Neste caso, rejeita-se  $H_0$ , ao nível de 10% de significância, e assume-se que as variâncias populacionais são diferentes.

**Tabela IV.** Limites unilaterais superiores da distribuição F:  
 $P[F > f_{\alpha}]$

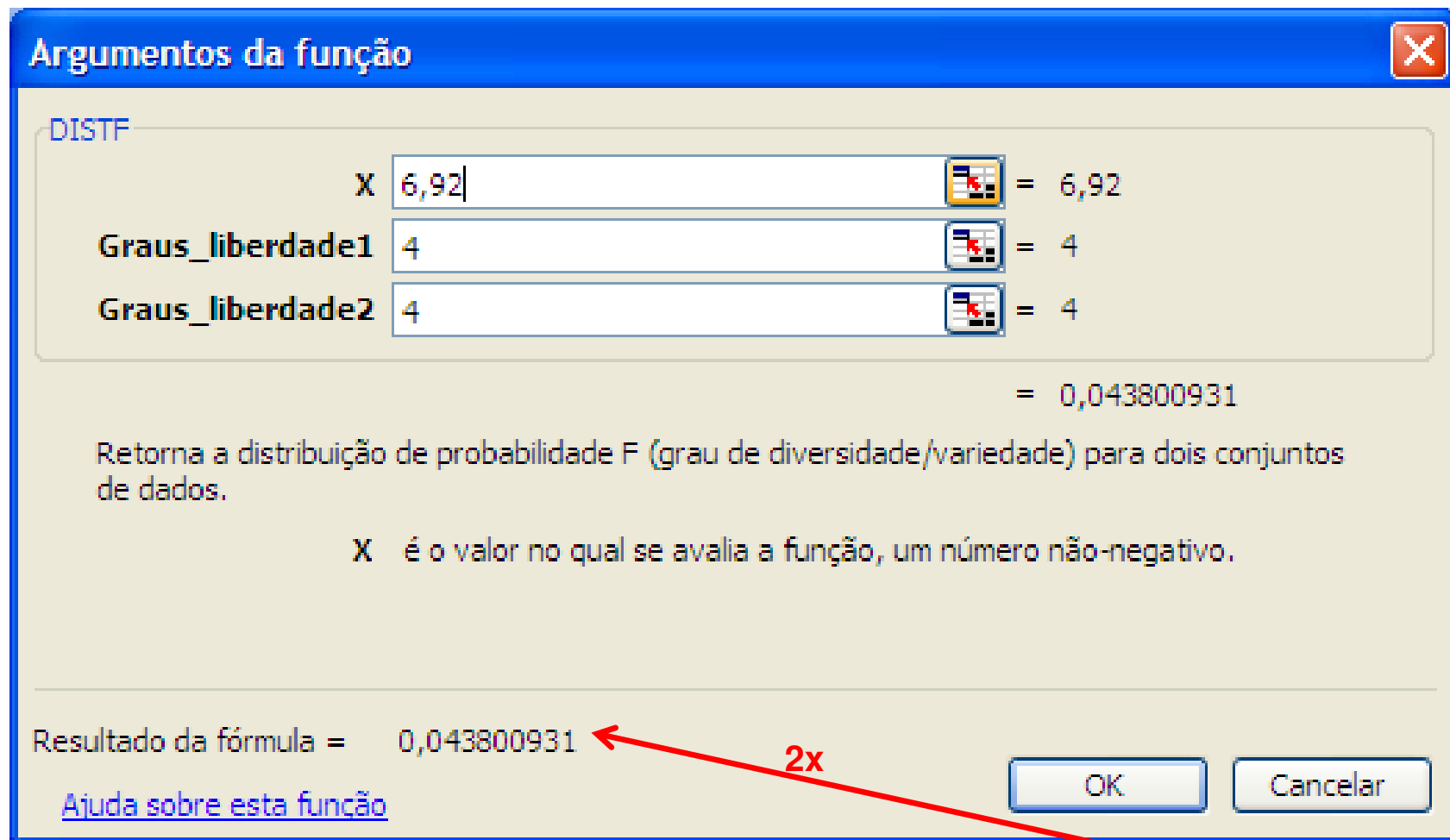


$v_2$	$\alpha$	$v_1$																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	120	Inf.
1	0,05	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
	0,025	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	984,9	993,1	997,2	1001,	1006,	1010,	1014,	1018,
	0,01	4052,	5000,	5403,	5625,	5764,	5859,	5928,	5982,	6022,	6056,	6082,	6106,	6157,	6209,	6235,	6261,	6287,	6313,	6339,	6366,
	0,001	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6084*	6107*	6158*	6209*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
	0,025	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
	0,001	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
3	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
	0,025	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	13,93	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
	0,001	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	128,8	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0	123,5
4	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
	0,025	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
	0,001	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40	44,05

■ ■ ■

## Utilizando o Excel para obter o valor p:

$$f_c = 6,92 \quad \alpha = 10\% \quad \nu_1 = n_x - 1 = 4 \quad \nu_2 = n_y - 1 = 4$$



The image shows the 'Argumentos da função' (Function Arguments) dialog box in Excel for the F.DIST function. The dialog box has a blue title bar and a close button (X) in the top right corner. Inside, the function name 'DISTF' is shown in the top left. The arguments are as follows:

Argument	Value	Formula
X	6,92	= 6,92
Graus_liberdade1	4	= 4
Graus_liberdade2	4	= 4

Below the arguments, the result of the formula is displayed: = 0,043800931. A red arrow points from the text '2x' to this result. The description of the function is: 'Retorna a distribuição de probabilidade F (grau de diversidade/variedade) para dois conjuntos de dados.' Below this, it says: 'X é o valor no qual se avalia a função, um número não-negativo.' At the bottom, the 'Resultado da fórmula =' is shown as 0,043800931, with a red arrow pointing to it from the text '2x'. There are two buttons at the bottom right: 'OK' and 'Cancelar'. A link 'Ajuda sobre esta função' is at the bottom left.

Conclusão: Como a significância do resultado (8,76%) é menor que a significância do teste (10%), é possível rejeitar a hipótese nula.

**Exercício 1:** Uma alta quantidade de nitrato introduzida na alimentação animal tem mostrado possuir efeitos danosos incluindo baixa produção de tiroxina, aumento de incidência de cianose em recém nascidos e baixa produção de leite. Os dados que seguem referem-se a medida de ganho de peso percentual em ratos de laboratório, submetidos a uma dieta padrão e a uma dieta com 2000 ppm de nitrato na água de beber.

Nitrato: 12,7 19,3 20,5 10,5 14,0 10,8 16,6 14,0 17,2  
 Controle: 18,2 32,9 10,0 14,3 16,2 27,6 15,7.

$\bar{X}_N = 15,07$	$s_N^2 = 12,66$
$\bar{X}_C = 19,27$	$s_C^2 = 64,85$

- a) Verifique, através do teste F, se as variâncias das populações são iguais (Utilize alfa de 5% para os testes).  
 b) Verifique, através do teste t, o efeito do nitrato sobre o ganho de peso.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}}$$

$$S^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$



**Exercício 2:** Calculadoras eletrônicas utilizam dois métodos diferentes de entrada e processamento numérico. Vamos denominar um dos métodos de “método algébrico” (MA) e o outro de “método polonês” (MP). Para comparar qual deles é mais eficaz é feito um teste com 20 usuários sem experiência prévia com calculadoras, onde 10 vão utilizar calculadoras de um tipo e o outros 10 as de outro tipo. A tabela mostra o tempo em segundos que cada operador gastou para realizar um conjunto padrão de cálculos. Testar a hipótese de existência de diferença entre os dois métodos no que se refere ao tempo de operação, utilizando uma significância de 5%.

<b>MA</b>	12	16	15	13	16	10	15	17	14	12
<b>MP</b>	10	17	18	16	19	12	17	15	17	14

$$\begin{array}{l} \bar{x}_A = 14,00 \quad s_A = 2,21 \\ \bar{x}_P = 15,50 \quad s_P = 2,80 \end{array}$$

**Exercício 3:** Os valores a seguir representam os tempos de produção de duas máquinas. Analise os dados e conclua a respeito da variabilidade das máquinas 1 e 2. Utilize alfa de 5%.

M1	91,0	90,3	90,2	92,1	91,8	91,3	89,3	91,0	91,2	89,6
M2	91,8	91,2	89,4	89,2	90,7	92,6	91,3	91,2		

$$S_1^2 = 0,8307$$

$$S_2^2 = 1,316$$

## Respostas dos exercícios:

### Exercício 1:

a)  $f_{0,025} = 4,65$        $f_c = 5,123$

Pode-se considerar a desigualdade de variâncias

b)  $t_{0,025} = 2,306$        $t_c = -1,287$

Não se rejeita  $H_0$ . Com significância de 5%, não foi possível verificar se existe efeito significativo do nitrato sobre o ganho de peso.

### Exercício 2:

a)  $f_{0,025} = 4,03$        $f_c = 1,605$

Pode-se considerar a igualdade de variâncias

b)  $t_{0,025} = 2,101$        $t_c = -1,33$

Não se rejeita  $H_0$ . Com significância de 5%, não foi possível verificar se existe diferença significativa de tempo de operação entre os dois métodos pesquisados.

### Exercício 3:

a)  $f_{0,025} = 4,20$        $f_c = 1,585$

Pode-se considerar a igualdade de variâncias

b)  $t_{0,025} = 2,120$        $t_c = -0,299$

Não se rejeita  $H_0$ . Com significância de 5%, não foi possível verificar se existe diferença significativa de tempo de produção entre as duas máquinas.