

# Esfera Condutora em Movimento: Campos, Potenciais e Dúvidas

A moving conducting sphere: fields, potentials and questions

G.F. Leal Ferreira

*guilherm@if.sc.usp.br*

*Instituto de Física de São Carlos, USP*

*CP 369, 13560-970, São Carlos, SP*

Recebido em 22 de dezembro de 2000. Aceito em 05 de fevereiro de 2001

Os potenciais e os campos de uma esfera metálica carregada em movimento são obtidos das fórmulas de transformação relativísticas. Mostra-se que no sistema estacionário é a força de Lorentz sobre a carga superficial que é normal ao elipsóide – como é vista a esfera em movimento –, não o campo elétrico. Dúvida aparece na interpretação do potencial vetor que adquire a ‘esfera’ para o referencial estacionário. Faz-se uma breve apreciação do significado das transformações de Lorentz conforme sugerido por J.S. Bell e L. Jánossy, no quadro inicialmente intentado por Lorentz-Poincaré. Com ele, livra-se a Teoria da Relatividade, como usualmente apresentada, de paradoxo gritante.

Fields and potentials of a moving conducting sphere are obtained from the relativistic transformation formulae. It is shown that for a stationary system the Lorentz force over the superficial charge is normal to the ellipsoid –how the moving sphere is then seen–, and not the electric field. Questions appear in the interpretation of the vector potential, attributed by the stationary system to the moving ‘sphere’. A brief account of the meaning of the Lorentz transformation, as suggested by J. S. Bell and L. Jánossy, within the line initially pursued by Lorentz and Poincaré, is carried out. With it, a way out of a rather crude paradox in the as presented Relativity Theory is found.

## I Introdução

A descoberta dos metais como condutores elétricos por Grey [1] foi de importância fundamental no desenvolvimento teórico do Eletromagnetismo. Através dela o conceito de potencial elétrico foi estabelecido, dando origem à Teoria do Potencial Eletrostático. Assim, um condutor colocado em um campo elétrico (ou carregado eletricamente) adquire um potencial. Tomemos, por exemplo, uma esfera condutora carregada. Todo seu interior está a um mesmo potencial, que sabemos calcular. Vamos supor, porém, que ela seja colocada em movimento, adquirindo velocidade constante. Qual o seu novo potencial em relação à terra? Usando as fórmulas de transformação relativísticas dos potenciais [2] obtém-se facilmente a resposta desejada, mas um problema se apresenta: o de como se interpreta fisicamente as grandezas em movimento. Mais ainda: enquanto no referencial em que a esfera é estacionária o vetor potencial pode ser ignorado, agora ele já não é nulo em um referencial em que a vê em movimento, inclusive com o interior da massa condutora adquirindo um valor constante. Que sentido tem ele?

No que segue, além da obtenção dos potenciais e

campos elétrico e magnético, no sistema K, mostraremos que a normal ao elipsóide metálico, achatado na direção do movimento, – como a esfera é vista em K –, é paralela à força de Lorentz que age sobre as cargas superficiais. O artigo termina com considerações sobre a origem dos campos em K, sobre os problemas de interpretação física do potencial eletrostático e do potencial vetor. Além disso, é feita uma breve discussão sobre o sentido das transformações de Lorentz e a forma de livrar alguns paradoxos da Teoria da Relatividade.

## II Os potenciais

No sistema  $K'$  há uma esfera condutora de raio  $R$ , carregada com carga  $Q$  e portanto ao potencial  $V_0 = Q/R$ , no sistema CGS gaussiano adotado aqui. O seu centro ocupa permanentemente a posição  $x' = y' = z' = 0$ . O sistema  $K$  vê o sistema  $K'$  se deslocar com velocidade  $v$  na direção  $+x$  e o centro da ‘esfera’ está em  $x = y = z = 0$  quando  $t = 0$ , Fig. 1. Se os potenciais são  $\Phi'(\vec{x}', t')$ ,  $\vec{A}'(\vec{x}', t')$  em  $K'$ , as fórmulas de transformação [2] dão para os potenciais  $\Phi(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  em

$K$ , sendo  $c$  a velocidade da luz,

$$A_x(\vec{x}, t) = \frac{\gamma \nu \Phi'(\vec{x}')}{c} \quad (1)$$

$$A_y(\vec{x}, t) = A_z(\vec{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \gamma \Phi'(\vec{x}') \quad (3)$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} \quad (4)$$

é o potencial coulombiano

$$\Phi'(\vec{x}') = \frac{Q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad r' \geq R \quad (5)$$

$$\Phi'(\vec{x}') = \frac{Q}{R} \quad r' \leq R \quad (6)$$

$\vec{x}', t'$  e  $\vec{x}, t$  estão relacionados pela transformação de Lorentz

$$x' = \gamma(x - \nu t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (7)$$

em especial a superfície da ‘esfera’ é vista como um elipsóide em  $K$ , achatado na direção  $x$ , de equação

$$\gamma^2(x_0 - \nu t)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \quad (8)$$

Para se achar os potenciais em  $K$ , as Eqs. 1-3, e a Eqs. 7 devem ser usadas. Em particular, os potenciais constantes na ‘esfera’ são

$$A_x = \frac{\gamma \nu Q}{cR}, \quad A_y = A_z = 0, \quad \Phi = \frac{\gamma Q}{R} \quad (9)$$

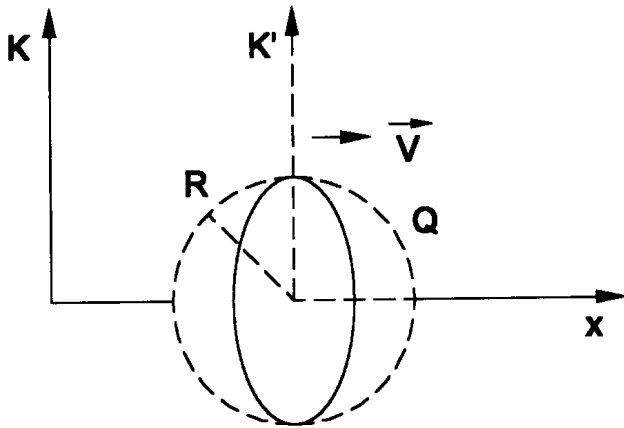


Figura 1. A esfera de raio  $R$ , carregada com carga  $Q$ , representada em tracejado, está em repouso no sistema  $K'$ , o qual se move em relação a  $K$  com velocidade  $\vec{v}$ .  $K$  vê a esfera como um elipsóide (traço cheio) contraído na direção do movimento.

### III Os campos

No exterior da esfera condutora em  $K'$  o campo é puramente eletrostático. No sistema  $K$  este campo será o de uma carga em movimento com velocidade  $v$ , de expressão bem conhecida [2,3] (ou deriváveis dos potenciais da seção anterior). Sem perda de generalidade vamos por  $t = 0$ . Os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$  são

$$\vec{E} = \frac{Q\gamma(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (10)$$

e

$$\vec{B} = \frac{\nu x \vec{E}}{c} \quad (11)$$

para pontos exteriores ao elipsóide, Eq. 8. No interior  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são nulos.

Com a finalidade de estudar as forças sobre as cargas superficiais, vamos começar por achar a normal ao elipsóide condutor. O gradiente  $\vec{N}$  da Eq. 8

$$\vec{N} = \gamma^2 x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} \quad (12)$$

Por outro lado o campo efetivo  $\vec{E}_f$  sobre as cargas superficiais é

$$\vec{E}_f(x_0, y_0, z_0) = \vec{E}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(x_0, y_0, z_0) \quad (13)$$

Usando-se a Eq. 11

$$\vec{E}_f(x_0, y_0, z_0) = \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right) \vec{E}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\gamma \nu^2 x_0 Q \hat{i}}{c^2 R^3} \quad (14)$$

e agora usando-se explicitamente a Eq. 10

$$\vec{E}_f(x_0, y_0, z_0) = \frac{Q}{\gamma R^3} (\gamma^2 x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}) \quad (15)$$

que comparada com a Eq. 12 mostra que  $E_f$  é paralelo a  $\vec{N}$ . Isto é, é o campo efetivo e não o campo elétrico que é normal ao condutor.

Já a descontinuidade do campo elétrico na superfície do condutor deve estar relacionada com a densidade de carga superficial  $\sigma$ , ou seja

$$4\pi\sigma = \frac{\vec{E}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} \quad (16)$$

e usando as Eqs. 10 e 12  $\sigma$  será

$$\sigma = \frac{Q\gamma}{4\pi R \sqrt{\gamma^4 x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \quad (17)$$

A integral de  $\sigma$  na superfície do elipsóide de revolução [4], isto é,

$$2\pi \int_{-R}^{+R} \rho \sigma(x_0(\rho), \rho) \sqrt{1 - \left(\frac{\partial x_0(\rho)}{\partial \rho}\right)^2} d\rho \quad (18)$$

é de fato igual a  $Q$ , com  $\rho = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ .

## IV Discussão

### IV.a Os campos

É interessante notar que os campos elétrico e magnético se combinam na força de Lorentz, produzindo força normal ao elipsóide, como discutido na seção anterior, mas no interior eles são, separadamente, nulos. E se, generalizando demonstração conhecida no caso da esfera, consideramos os campos gerados pelas cargas nas duas seções na superfície do elipsóide determinadas pelos ângulos sólidos elementares convergentes de cada lado a um ponto interior qualquer, ver-se-á que de fato eles se anulam.

### IV.b Os potenciais

Mais interessante é a discussão dos potenciais porque nela entra, adicionalmente, a relevância dos mesmos como entidades físicas [5]. Na Introdução afirmamos que a descoberta dos metais como condutores de eletricidade foi de muita importância para a teoria do potencial. Mas na verdade os metais ou os eletrons metálicos fazem mais do que conduzem bem: eles são sensíveis ao potencial. Uma pequena esfera neutra condutora, trazida às vizinhanças de um corpo eletrizado, adquire o potencial que existia no local, sem que tenha havido passagem de carga para ela e sem que seja um efeito de campo elétrico. Uma ligação dela à terra mostrará que seu potencial era de fato não nulo. Por isso podemos dizer que os eletrons metálicos sentem o potencial. Tudo isso parece claro com os condutores parados. Os potenciais da seção 2, Eqs. 1-3, satisfazem a condição de Lorentz (vale dizer, os potenciais são retardados e não instantâneos). Apesar disso, a densidade de carga superficial da Eq. 17 é a de um elipsóide equipotencial eletrostático com carga  $Q$ ,  $\sigma_e$ , que é dada por [6]

$$\sigma_e = \frac{Q}{4\pi ab^2} \left( \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2 + z_0^2}{b^4} \right)^{-1/2} \quad (19)$$

sendo  $a$  o semi-eixo achatado e  $b$  o de revolução, que é igual a  $\sigma$  na Eq. 17, com  $b = R$  e  $\gamma = b/a$ . Porém, o potencial eletrostático  $\Phi_e$  correspondente [6] seria

$$\Phi_e = \frac{Q \arccos a/b}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{Q \arccos \nu/c}{\nu R} \quad (20)$$

menor do que o da Eq. 9. Concluimos então que o retardo aumenta o potencial além do valor esperado pela simples contração da esfera em elipsóide. Que o valor do potencial retardado seja maior que o instantâneo parece paradoxal se simplesmente relocizamos a posição da carga no tempo retardado, pois isto daria para o potencial retardado em relação ao instantâneo valor menor quando a carga se aproximasse do ponto e maior quando se afastasse. Mas quando raciocinamos com cargas localizadas devemos corrigir o potencial pelo fator  $(1 - \vec{v} \cdot \hat{n}/c)^{-1}$  da fórmula de Liénard-Wiechert, com

$\hat{n}$  versor da direção que aponta da carga ao ponto considerado na posição retardada. Pode-se mostrar que este fator faz com que o potencial retardado  $U_r$  da carga em movimento torne-se, surpreendentemente, no mínimo, igual ao instantâneo, sem distinção entre aproximação e afastamento. Ele é

$$U_r(r, \theta) = \frac{Q}{r \sqrt{1 - \frac{\nu^2 \sin^2 \theta}{c^2}}} \quad (21)$$

sendo  $r$  e  $\theta$  as coordenadas polares agora instantâneas do ponto considerado, estando o eixo polar na direção e sentido de  $\vec{v}$  e a origem na carga em movimento. Para  $\theta = 0$ ,  $U_r$  é igual ao instantâneo mas para  $\theta > 0$ ,  $U_r$  se torna maior, e tanto maior quanto maior for  $\nu/c$ . E se ligássemos por um fio condutor a 'esfera' em movimento a uma outra, idêntica a ela e igualmente carregada, porém parada no sistema  $K$ , haveria passagem de carga da 'esfera' de  $K'$  para a de  $K$ ? Parece que este deveria ser o caso. É interessante notar que no problema que estamos discutindo ocorre com o potencial diferentemente do que ocorre com a temperatura em termodinâmica relativística [7]: nesta a temperatura atribuída a um corpo em movimento é menor do que a temperatura própria do mesmo, de forma que o calor tenderia a passar do corpo parado ao em movimento.

As coisas ficam mais complicadas - a menos que seja por desconhecimento do autor - com o potencial vetor, inexistente em  $K'$  mas diferente de zero em  $K$ . Este atribui mesmo à massa metálica um valor para essa grandeza, Eq. 9, mas isso não quer dizer que os eletrons metálicos sejam sensíveis a este potencial (embora o sejam a sua derivada no tempo, indução eletromagnética), como são ao escalar. Mas os eletrons em pares bosônicos dos metais no estado supercondutor [8] são sensíveis ao potencial vetor, que tende a se anular no seu interior. E neste caso, o que  $K$  poderia dizer do potencial vetor que atribui à massa metálica em movimento? Estas perguntas aparentemente sem resposta indicariam que ainda estaríamos um pouco longe de entendermos bastante *Zur elektrodynamik bewegter Körper* (sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento) [9], apesar dos progressos realizados nesses quase cem anos.

## V A transformação de Lorentz e paradoxos

O problema que estivemos estudando tem a virtude de colocar frente a frente a realidade macroscópica com conceitos que usualmente requerem uma revisão dramática da forma com que encaramos aquela realidade. Referimo-nos aqui às transformações de Lorentz entre pontos abstratos do espaço-tempo de dois referenciais. J.S. Bell [10] defende o ensino da Teoria da

Relatividade que começasse reconhecendo que, idealmente, a órbita circular do elétron no átomo de hidrogênio em movimento seria vista como elíptica, achatada na direção do movimento. E, qualitativamente, isto aconteceria pelo aumento da força entre o próton e o elétron na direção normal e sua diminuição na direção do movimento (como na Eq. 10, para o campo elétrico). É a linha inicialmente tentada por Lorentz e Poincaré [11], mas logo abandonada ‘pelo fascinante arrojo do ... ponto de partida’ da concepção de Einstein [12], à qual o próprio Lorentz veio a aderir [13]. A linha Lorentz-Poincaré foi cuidadosamente reintroduzida por Jánossy [14], que claramente estabelece que a transformação opera entre as coordenadas espaço-temporais  $\bar{x}_i, \bar{t}_i$  no sistema  $K'$ , de pontos materiais  $i$ , que têm coordenadas  $\bar{x}_i, \bar{t}$  isto é, simultâneas, em  $K$ . Para se justificar a passagem da contração da órbita do átomo de hidrogênio à contração de Lorentz, envolvendo corpos rígidos, pode-se invocar o Teorema de Feynman [15], (ou Teorema de Hellmann-Feynman) pelo qual, no quadro da Mecânica Quântica não relativística, as forças intra e intermoleculares são de natureza elétrica. A restrição ‘não relativística’ seria relevada pelo fato das interações em jogo serem de curtíssimo alcance. Tem que ser reconhecido que essa interpretação encerra um certo caráter conspiratório, qual seja o da Natureza providenciar a contração de Lorentz e a dilatação do tempo dos relógios em movimento de forma a fornecer em todos os sistemas em movimento uniforme relativo o mesmo valor para a velocidade da luz. Esse inconveniente é no entanto mitigado pela bem superior base física com que fundamenta a teoria quando comparada à arrojada mas bastante abstrata concepção de Einstein.

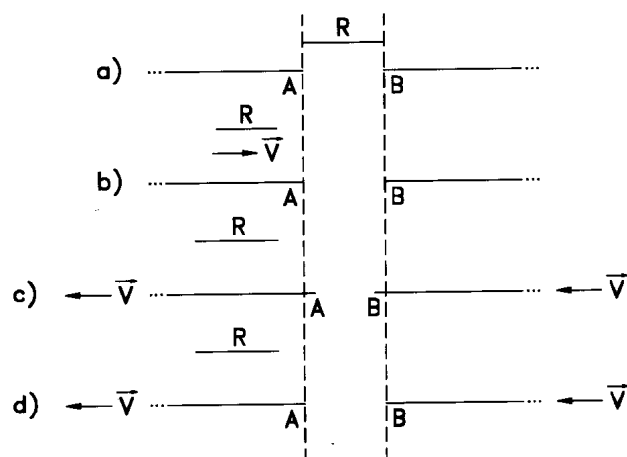


Figura 2. a) a régua  $R$  tem o mesmo comprimento que o orifício  $AB$ , quando em repouso; b)  $R$  é vista encolhida pelo chão, quando se move em relação a ele, com a predição que cairá quando passar por ele; c) porém, segundo  $R$ , é  $AB$  que se contrai quando está em movimento para a esquerda; d) o paradoxo é resolvido impondo-se que a contração se dá nos corpos sólidos, isto é, à esquerda de  $A$  e à direita de  $B$ .

A clara atribuição da contração à matéria livra a

teoria de indesejáveis paradoxos, como o da régua e do orifício que discutimos agora brevemente. Na Fig. 2a, a régua  $R$  tem comprimento igual ao do orifício  $AB$ , praticado no chão, quando ela está em repouso. Em 2b ela se move paralelamente ao chão com velocidade  $v$ , em direção ao orifício, como vista do chão. Como ela está em movimento e se contrai, a conclusão é que deverá cair ao passar por  $AB$ . Em 2c vê-se a situação do ponto de vista da régua em movimento: ela vê o chão movendo-se com  $-v$ , e como  $AB$  está contraído porque em movimento, a expectativa, conflitante com a análise anterior, é que ela não cairá ao  $AB$  se situar por debaixo dela. Aqui atribuímos a contração ao espaço  $AB$ , mas para Lorentz-Poincaré é a matéria que se contrai. Assim, é o chão à esquerda de  $A$  e à direita de  $B$  que se contraem e a conclusão que a régua tira, Fig. 2d, é a que cairá no orifício, extinguindo o paradoxo. Em [10] uma outra situação constrangedora é discutida.

### Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq a bolsa de produtividade.

### References

- [1] P. Devaux, *Histoire de l'Électricité*, Presses Universitaires de France, coleção 'Que sais je' 1954, cap.II.
- [2] W.G.V. Rosser, *Classical Electromagnetism*, Butterworths, Londres, 1968, Cap.6.
- [3] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures*, vol.II, Addison-Wesley, Reading (1965), Cap.26.
- [4] R. Courant, *Cálculo Diferencial e Integral*, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1952, Cap.IV
- [5] E.J. Konopinski, *Amer. J. Phys.*, **46**, 499 (1978).
- [6] L. Landau e E. Lifchitz, *Électrodynamique des milieux continus*, Edições MIR, 1969, Cap.1
- [7] R. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford at Clarendon Press, 1934, parágrafos 69 e 70.
- [8] Ref. 3, Vol.III, Cap.21.
- [9] H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weil, *The Principle of Relativity*, Dover Public., pg.35.
- [10] J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, Cap.9.
- [11] H.A. Lorentz, *The theory of electrons*, Dover Publ., Nova York, 1952, Cap.V.
- [12] Ref.10, parágrafo 194, pag.230.
- [13] Ref.10, 'Notes', parágrafo 72\*, pag.321
- [14] L. Jánossy, *Theory of Relativity based on Physical Reality*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
- [15] R.P. Feynman, *Phys. Rev.*, **56**, 340 (1939).