NASJONAL DIGITAL LÆRINGSARENA

Matematikk R1

Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpemidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

Dette dokumentet er en tekstutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til http://ndla.no.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpemidler. I modell 1 er alle hjelpemidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.

Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpemidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Disse fagene følger modell 2 for hjelpemiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.

Innholdsfortegnelse

Geometri

Teori

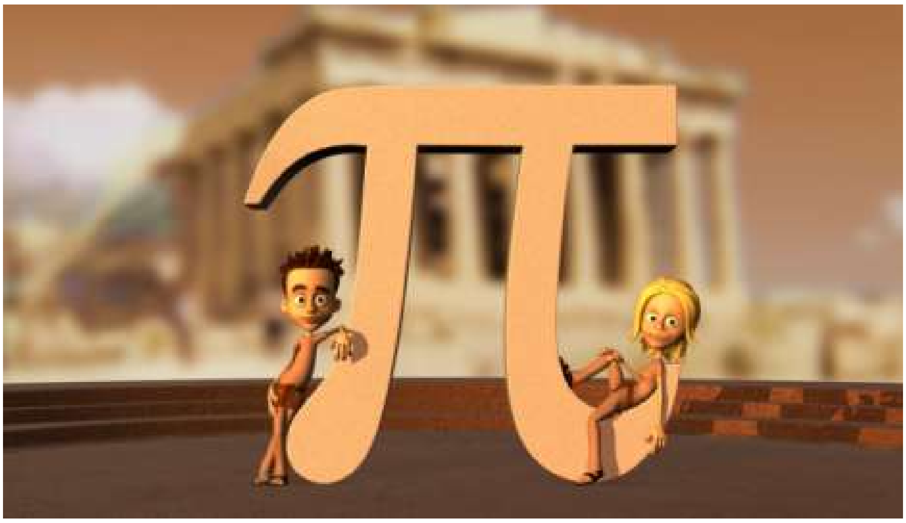
Innledning

Innledning

Innledning (97834)

Ordet **geometri** betyr «**måling av jord**». De eldste beretninger om jordmåling vi kjenner til, stammer fra det gamle Egypt for ca. 4000 år siden. Jordeierne her betalte skatt etter hvor mye jord de eide, og jordarealene måtte måles opp. Nilen gikk ofte over sine bredder, og det medførte at landarealene til mange jordeiere endret seg. Det måtte derfor stadig foretas nye oppmålinger, og de gamle egypterne fikk etter hvert masse kunnskap om geometri. De utviklet metoder for å beregne areal av kvadrater, trekanter og andre figurer.

Fra de tidligste tider har mennesker vært opptatt av former og figurer i naturen. Da egypterne, og også de gamle babylonerne, utviklet kunnskaper om jordmåling, ble interessen for geometri som fag større.



En spesiell form i naturen fasinerte spesielt. Det var sirkelen, solas og månens form. Det svært spesielle med sirkelen var at det så ut til å finnes et bestemt forhold mellom omkretsen til sirkelen og dens diameter. Det samme forholdet så ut til å finnes i alle sirkler uansett størrelse. Unøyaktige målemetoder gjorde det vanskelig å finne dette tallet nøyaktig eller vite om det virkelig fantes et slikt tall.

Jakten på dette forholdstallet, som etter hvert har fått betegnelsen π, er kanskje den enkeltsak i matematikken som har opptatt flest matematikere gjennom tidene. Resultatet av jakten er til nå at tallet π er bestemt som et desimaltall med mange milliarder desimaler. Ingen har funnet noe system i desimalsifrene, og fortsatt er det personer som leter etter nye desimaler. Det kanskje mest imponerende er japaneren som lærte seg 420 000 desimaler utenat. Han måtte bruke 9 timer for å si dem fram.

Det eldste og mest berømte læreverket i geometri heter «**Elementer**» og ble skrevet av den greske matematikeren **Euklid** ca. 300 år f. Kr. Euklid bodde og arbeidet i Alexandria i Egypt. Euklids «Elementer» er det mest innflytelsesrike verket i matematikkens historie og trolig verdens mest kjente fagbok. Læreverket, som består av 13 bøker, ble brukt i europeiske skoler nesten helt fram til vår tid. Det er kun Bibelen som har hatt større plass i europeisk skole enn dette verket.

Euklid samlet og systematiserte den geometrien som var kjent på hans tid. Han startet med å gi presise definisjoner av geometriske begreper. Et punkt definerte han som et geometrisk objekt uten utstrekning. Videre definerte han en linje som en kontinuerlig rekke med punkter. Han definerte også begreper som sirkel, plan, diameter i sirkel, parallelle linjer osv.

Euklid skrev ned noen selvinnlysende setninger. Det er grunnleggende påstander som vi aksepterer som sanne uten at vi trenger å bevise dem. Slike påstander kalles aksiomer. Et eksempel på et aksiom fra plangeometrien er at vi mellom to punkter alltid kan trekke en rett linje. Ut fra definisjoner, aksiomer og logisk tenkning førte så Euklid beviser for setninger eller teoremer. En velkjent setning sier at når to rette linjer skjærer hverandre, er toppvinklene like store. En annen kjent setning sier at summen av vinklene i en trekant er 180 grader.

I tillegg til Euklid er det to andre personer som også må nevnes. Det er **Thales fra Milet** (624 -547 f.Kr.) og **Pytagoras** (580 - 500 f.Kr.). Begge var greske filosofer og matematikere. Thales er den første greske filosofen vi kjenner til. Han regnes som selve grunnleggeren av gresk filosofi og dermed også som grunnleggeren av vestlig filosofi. Thales og Pytagoras levde nærmest samtidig ca. 200 år før Euklid. Begge har fått kjente matematiske setninger oppkalt etter seg. Pytagoras setning handler om rettvinklede trekanter og er kanskje den setningen du kjenner best. Thales setning handler om vinkler i sirkler. Begge setninger er meget sentrale i dette kurset.

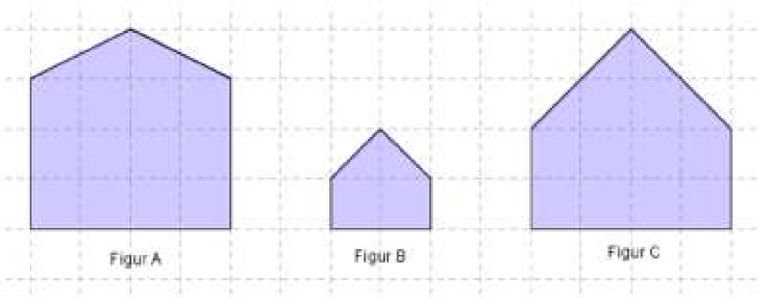
Geometrien i R1 bygger på geometrien fra 1T.

Formlikhet

Formlikhet

[Formlikhet (97839)](#)

Studer figurene *A*, *B* og *C*. Beskriv forskjeller og likheter mellom figurene.



Som du sikkert har funnet ut, så er det en likhet mellom figur B og figur C. Disse figurene har samme form. Forskjellen er at figur C er en forstørret utgave av figur B. Figur A har en annen form.

> To figurer er **formlike** når vi ved å **forstørre** eller **forminske** den ene figuren kan få en figur som er lik den andre.

Formlike trekanter

Formlike trekanter (97844)

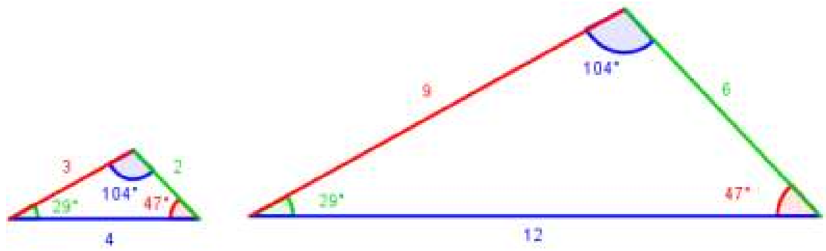
Figuren nedenfor viser to formlike trekanter. Som du ser, er to og to vinkler like store.

> *Dersom to trekanter har parvis like store vinkler, er trekantene formlike.*

Den store trekanten er et forstørret bilde av den lille trekanten og den lille trekanten er et forminsket bilde av den store trekanten.

Hvis vi kan vise at vinklene i to trekanter er parvis like store, har vi vist at trekantene er formlike.

Det er nok å vite at to par av vinkler i to trekanter er like store. På grunn av setningen om at summen av vinklene i en trekant alltid er lik 180 grader, må nemlig også det tredje paret av vinkler være like store.



To sider som ligger «motsatt» av to vinkler som er like store, ligger på «tilsvarende» plasser i de to trekantene, og vi kaller dem for **tilsvarende** sider eller **samsvarende** sider.

De blå sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de blå vinklene som er like store.
De røde sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de røde vinklene som er like store.
De grønne sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de grønne vinklene som er like store.

Vi regner ut forholdet mellom lengdene av tilsvarende sider

$\frac{12}{4} = 3$ $\frac{9}{3} = 3$ $\frac{6}{2} = 3$

Vi ser at forholdet er konstant lik 3. Vi kaller dette tallet for **målestokken**. Et annet navn er det lineære forholdstallet.

Sidene i den største trekanten er altså tre ganger så lange som sidene i den minste trekanten.

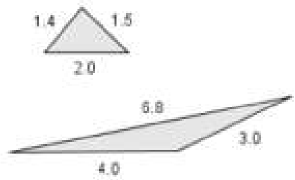
(Legg merke til at hvis vi ser på den lille trekanten som et bilde av den store trekanten, så er målestokken lik $\frac{1}{3}$.)

Følgende gjelder alltid for formlike trekanter:

> *I to formlike trekanter er **forholdet mellom samsvarende sider** alltid det samme.*
> *Dette forholdet kaller vi **målestokken**.*

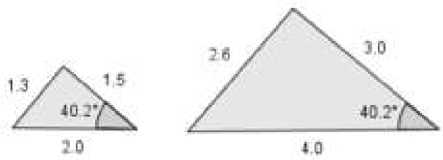
For å vise at to trekanter er formlike, kan vi derfor også bruke setningen nedenfor.

> *Hvis **forholdet mellom tre par av sider** i to trekanter er **det samme**, er trekantene **formlike**.*



For å vise at to trekanter er formlike, er det **ikke tilstrekkelig** å vise at forholdet mellom **to par av sider** er det samme. På figuren til høyre ser du to trekanter hvor forholdet mellom to par av sider er det samme. Disse trekantene er ikke formlike.

For at trekantene skal være formlike må i tillegg vinklene mellom de aktuelle sidene være like store. Se figuren nedenfor.

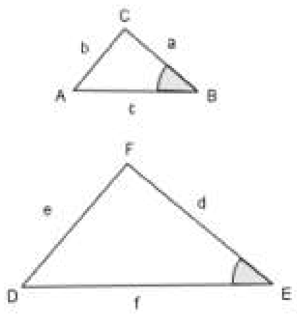


> *Hvis **forholdet mellom to par av sider er det samme**, og **vinklene mellom de aktuelle sidene** i tillegg er **like** store, er to trekanter formlike.*

Vi kan vise at dette er riktig ved for eksempel å bruke cosinussetningen.

Bevis

Gitt ABC og DEF slik at $\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = k$ og $\angle B = \angle E$.



I følge cosinussetningen har vi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\mathrm{ac} \cdot \cos\mathrm{B}$$

og

$$e^2 = d^2 + f^2 - 2df \cdot \cos E$$

Siden $\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = k$, vil $a = kd$ og $c = kf$.

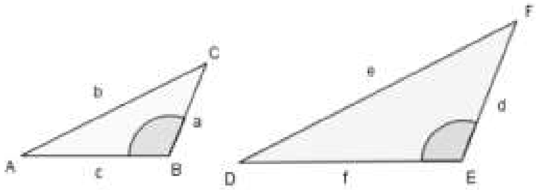
Da har vi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$b^2 = (kd)^2 + (kf)^2 - 2(kd) \cdot (kf) \cdot \cos E$$
$$b^2 = k^2 d^2 + k^2 f^2 - 2k^2 df \cdot \cos E$$
$$b^2 = k^2 (d^2 + f^2 - 2df \cdot \cos E)$$
$$b^2 = k^2 e^2$$
$$b = \sqrt{k^2 e^2} = ke$$

Vi har vist at $b = \mathrm{k}e$ og derfor at $\frac{b}{e} = k$.

Det betyr at forholdene mellom alle tre par av samsvarende sider er det samme, og derfor at trekantene er formlike.

Vi kan også vise at ***to trekanter er formlike dersom forholdet mellom to par av samsvarende sider er det samme, og de motstående vinklene til de lengste av disse sidene er like store****.*



Se figuren nedenfor.

For å vise at dette er riktig, kan vi bruke sinussetningen.

Bevis

Gitt *ABC* og *DEF* slik at $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k$ og $\angle B = \angle E$.

I følge sinussetningen har vi

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin B = \frac{\sin A}{a} \cdot b$$

og

$$\frac{\sin E}{e} = \frac{\sin D}{d}$$

$$\sin E = \frac{\sin D}{d} \cdot e$$

Siden $\angle B = \angle E$ er

$$\sin B = \sin E$$

$$\frac{\sin A}{a} \cdot b = \frac{\sin D}{d} \cdot e$$

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ gir at $\frac{b}{a} = \frac{e}{d}$, og da har vi

$$\frac{\sin A}{a} \cdot b = \frac{\sin D}{d} \cdot e$$

$$\sin A = \sin D$$

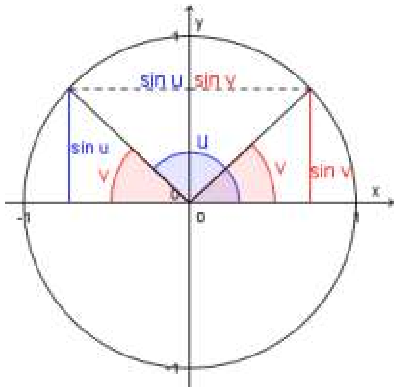
To vikler som har samme sinusverdi, er ikke nødvendigvis like store.

I 1T brukte vi enhetssirkelen og fant at

$\sin u = \sin(180^\circ - u)$

Se figuren til høyre.

I vårt tilfelle vil $\angle A = \angle D$ fordi



$$\angle A < \angle B$$
$$\angle A < 180^\circ - \angle A - \angle C \qquad \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C \text{ fordi vinkelsummen i en trekant er } 180^\circ.$$
$$2\angle A < 180^\circ - \angle C$$
$$\angle A < 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$$

og tilsvarende

$$\angle D < \angle E$$

$$\angle D < 180^\circ - \angle D - \angle F$$

$$2\angle D < 180^\circ - \angle F$$

$$\angle D < 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle F$$

Legg merke til hvordan vi her får bruk for at det er de motstående vinklene til de lengste sidene som i utgangspunktet er like.

Dette viser at både $\angle A$ og $\angle D$ er mindre enn 90°.

Siden $\mathrm{sinA} = \mathrm{sinD}$, er de to vinklene da like store. Vi har nå vist at to par vinkler er like store. Da er trekantene formlike.

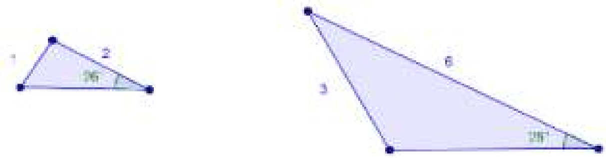
Setninger om formlike trekanter

[Setninger om formlike trekanter (97998)]

Vi har nå sett på **fire krav** til formlike trekanter. **Hvis ett av disse kravene er oppfylt, er trekantene formlike:**

- **To vinkler** er parvis like store.
- Forholdet mellom alle **tre par av samsvarende sider** er det samme.
- Forholdet mellom **to par av samsvarende sider** er det samme, og **vinklene mellom** disse sidene er like store.
- Forholdet mellom **to par av samsvarende sider** er det samme, og **de motstående vinklene til de lengste av disse sidene** er like store.

Følgende eksempel viser to trekanter hvor forholdet mellom to par av sider er det samme og hvor ett par av vinkler er like store. Trekantene er likevel ikke formlike.

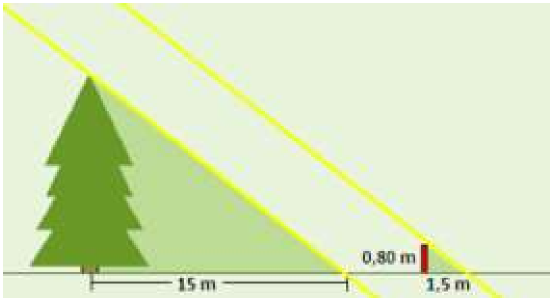


Bruk av formlikhet

Bruk av formlikhet (98001)

Formlikhet kan brukes til å beregne ukjente sider i trekanter.

Eksempel 1



Et tre står på en horisontal slette. Vi skal finne ut hvor høyt treet er ved hjelp av sola og et metermål.

Vi setter en pinne loddrett ned i bakken litt bortenfor treet og måler avstanden skyggen kaster ved pinnen og ved treet.

Figuren viser de to formlike trekantene vi får. Hvorfor er trekantene formlike?

Alternativ 1

Vi setter høyden av treet lik *x*, og får

$$\frac{x}{0{,}80} = \frac{15}{1{,}5}$$

$$x = \frac{15}{1{,}5} \cdot 0,80$$

$$x = 8,0$$

Treet er 8,0 meter høyt.

Alternativ 2

Vi kan først regne ut det lineære forholdstallet (målestokken).

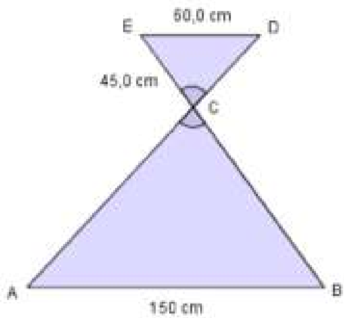
$\frac{15\ m}{1{,}5\ m} = 10$

Det betyr at høyden av treet er $0,80\ m \cdot 10 = 8,0\ m.$

Eksempel 2

Gitt ABC og DEC som vist på figuren til høyre. *AB* og *ED* er parallelle. *AD* og *BE* går begge gjennom *C*.

Vis at ABC og DEC er formlike, og bruk dette til å regne ut lengden av en av de ukjente sidene i ABC.



Løsning

$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{DCE}$ siden disse er toppvinkler.
$\angle B = \angle E$ fordi disse er samsvarende vinkler ved parallelle vinkelbein. Sidene *BC* og *EC* er da samsvarende sider. Hvorfor? Det samme er sidene *AB* og *DE*.

Dette gir oss to like forhold

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{BC}}{45{,}0\ \mathrm{cm}} = \frac{150\ \mathrm{cm}}{60{,}0\ \mathrm{cm}}$$

$$\frac{\mathrm{BC}\cdot \cancel{45{,}0\ \mathrm{cm}}}{\cancel{45{,}0\ \mathrm{cm}}} = \frac{150\ \mathrm{cm}\cdot 45{,}0\ \mathrm{cm}}{60{,}0\ \mathrm{cm}}$$

$$\mathrm{BC} = 113\ \mathrm{cm}$$

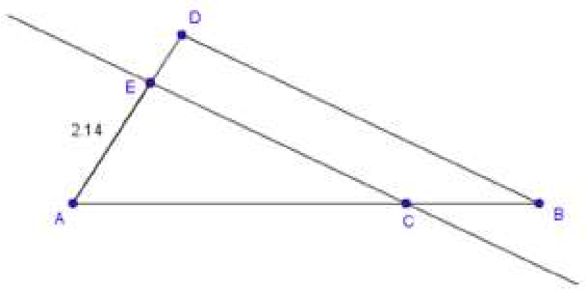
Som du ser, fikk vi her bruk for setningen om **toppvinkler** og setningen om **samsvarende vinkler ved parallelle linjer**. Hvis du har behov for å repetere litt når det gjelder **vinkler og formlikhet**, kan du finne fram kapittel 2.1 fra 1T.

I eksempelet nedenfor ser du hvordan vi kan bruke formlikhet og bestemme lengden av et linjestykke ved konstruksjon.

Eksempel 3

Bestem ved konstruksjon lengden av linjestykket *x* slik at $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$.

Konstruksjon i GeoGebra



Konstruksjonsforklaring

Avsetter linjestykkene *AB*=7,0 og *AC*=5,0. *C* ligger på *AB*.

1. Avsetter linjestykket *AD*=3,0. *D* ligger ikke på *AB*.
2. Trekker *BD* og en linje gjennom *C* parallell med *BD*.
3. Kaller skjæringspunktet mellom denne linja og *AD* for *E*.

Da er ACE formlik med ABD siden vinklene i de to trekantene er parvis like store.

Vi har da

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$

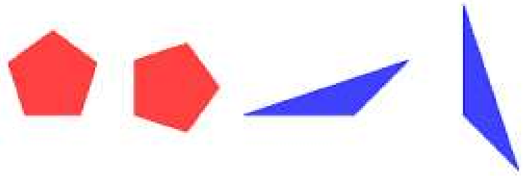
$$\frac{x}{3{,}0} = \frac{5{,}0}{7{,}0}$$

Utregning viser at *x*=*AE*=2,14

Kongruente trekanter

Kongruente trekanter (98017)

To figurer er **kongruente** når de i tillegg til å være **formlike**, også er **like store**.



Figuren viser to kongruente femkanter og to kongruente trekanter. Kongruente figurer vil kunne **dekke hverandre fullstendig** hvis de legges oppå hverandre.

Vi har sett at **to trekanter er formlike** dersom en av følgende fire betingelser er oppfylt:

- **To vinkler** er parvis like store.
- Forholdet mellom alle **tre par av samsvarende sider** er det samme.
- Forholdet mellom **to par av samsvarende sider** er det samme og **vinklene mellom** disse sidene like store.
- Forholdet mellom **to par av samsvarende sider** er det samme, og **de motstående vinklene til de lengste av disse sidene** er like store.

Setninger om kongruente trekanter

Tilsvarende gjelder at **to trekanter er kongruente** hvis en av følgende fire betingelser er oppfylt:

- **To vinkler** er parvis like store, og **en side** i den ene trekanten er like lang som den samsvarende siden i den andre trekanten.
- **Sidene** er parvis like lange.
- **To sider** er parvis like lange, og **vinklene mellom** disse sidene er like store.
- **To sider** er parvis like lange, og **de motstående vinklene til de lengste av disse sidene** er like store.

Disse fire betingelsene for kongruens kalles **kongruenssetningene**.

En naturlig konsekvens av kongruenssetningene er at hvis ett av følgende fire sett med opplysninger for en trekant er kjent, så er **trekanten entydig bestemt** og kan kun konstrueres på en bestemt måte:

- To vinkler og en side
- Alle tre sidene
- To sider og vinkelen mellom dem
- To sider og den motstående vinkelen til den lengste av disse sidene

Vi fører her ikke bevis for påstandene ovenfor. Vi mener at det vil være å gå ut over kompetansemålene for R1. For den neste setningen vi kommer til, Pytagoras' setning, står det derimot klart i kompetansemålene at du skal kunne føre bevis.

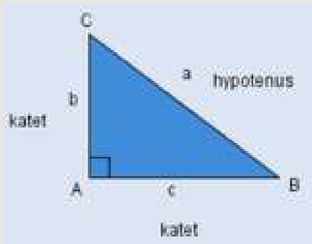
Pytagoras´ setning

Pytagoras´ setning

Pytagoras´ setning (98024)

Pytagoras´setning handler om rettvinklede trekanter. I slike trekanter er det en spesiell sammenheng mellom lengden av sidene. Denne sammenhengen var kjent i de tidligste sivilisasjoner. Historikere mener å ha bevis for at babylonerne kjente til, og brukte, setningen 1000 år før Pytagoras. Også kineserne kjente setningen og kunne bevise setningen 500 år før Pytagoras. Det er likevel grekeren Pytagoras (ca. 500 år f. Kr.) som har fått navnet sitt knyttet til setningen.

Den lengste siden i en rettvinklet trekant kalles for **hypotenusen**. De to korteste sidene kalles **kateter**.



Pytagoras´ setning:

$$\text{hypotenus}^2 = \text{katet}^2 + \text{katet}^2$$

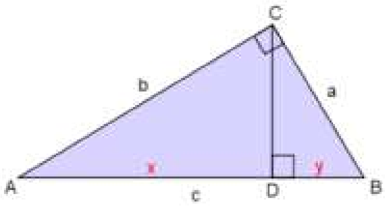
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ulike bevis for Pytagoras’ setning

[Ulike bevis for Pytagoras’ setning (98029)]

Det finnes mange bevis for Pytagoras setning. Vi skal først se på et der vi tar utgangspunkt i formlike trekanter.

Bevis ved hjelp av formlike trekanter



L a ABC være en rettvinklet trekant der $\angle C = 90^\circ$. Trekanten har sidelengder *a*, *b* og *c*. Ved å nedfelle normalen fra *C* på linjestykket *AB*, får vi til sammen tre formlike trekanter.

ABC er formlik med ACD siden $\angle A$ er felles, og begge trekantene har en vinkel på 90°.

ABC er også formlik med CBD siden $\angle B$ er felles, og begge trekantene har en vinkel på 90°. Da må også ACD og CBD være formlike.
Vi setter *AD*$=$*x* og *DB*$=$*y*.

Siden forholdet mellom samsvarende sider i formlike trekanter er det samme, gjelder

$$\frac{a}{c} = \frac{y}{a} \quad \text{og} \quad \frac{b}{c} = \frac{x}{b}$$

$$\frac{a}{c} \cdot c = \frac{y}{a} \cdot c \quad \text{og} \quad \frac{b}{c} \cdot c = \frac{x}{b} \cdot c$$

$$\frac{a}{\cancel{c}} \cdot \cancel{c} = \frac{y}{a} \cdot c \quad \text{og} \quad \frac{b}{\cancel{c}} \cdot \cancel{c} = \frac{x}{b} \cdot c$$

$$a \cdot a = \frac{y \cdot c}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} \quad \text{og} \quad b \cdot b = \frac{x \cdot c}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}$$

$$a^2 = y \cdot c \quad \text{og} \quad b^2 = x \cdot c$$

Vi adderer de to likningene. Siden $\mathrm{AD} + \mathrm{DB} = \mathrm{AB}$, er $x + y = c$.

Dette medfører at

$$a^2 + b^2 = y \cdot c + x \cdot c = (y + x) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Geometrisk bevis / arealbetraktninger

Lag et kvadrat med sidelengder *a*$+$*b*. Se figur. Du kan for eksempel klippe ut av et stivt papir, eller du kan tegne i GeoGebra.

Del sidelengdene i to deler *a* og *b*, trekk linjer (klipp ut) som figuren viser, slik at du får 4 kongruente rettvinklede trekanter. Hypotenusen i trekantene kaller du *c*.

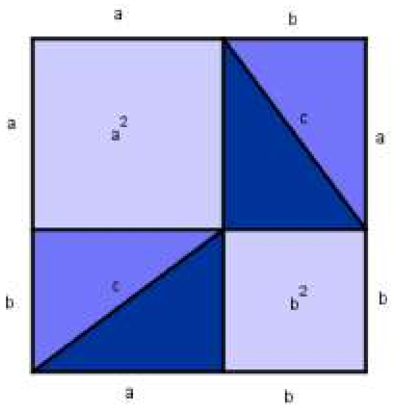
Det lyseblå arealet er et kvadrat. Hvorfor? Kvadratet har sidelengde *c* og areal a^2.

Flytt på trekantene inne i det store kvadratet som vist på neste figur. (I GeoGebra lager du en ny tegning. Bruk rutenett.)

Arealet i de to store kvadratene er like store siden sidelengdene er lik *a*$+$*b*.

Samlet areal til de 4 rettvinklede trekantene er like store i begge figurene.

Det må bety at det lyseblå arealet i de to figurene er like stort, altså at $a^2 + b^2 = c^2$. Dette er nettopp Pytagoras' setning for rettvinklede trekanter.



Algebraisk bevis

Ved å ta utgangspunkt i den samme figuren som ovenfor, kan vi føre et algebraisk bevis på følgende måte:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

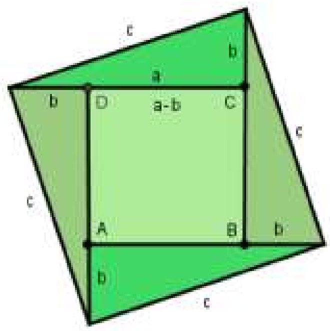
$$a^2 + 2\text{ab} + b^2 = c^2 + 2\,\text{ab}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gammelt kinesisk bevis

I 3000 år gamle kinesiske skrifter finner vi figuren til høyre.

Gitt den øverste rettvinklede trekanten med sidelengder *a*, *b* og *c*. *a* deles i to deler, den ene med lengde *b* og den andre med lengde *a*_*b*.



Vi lager et kvadrat *ABCD* som figuren viser. Sidelengdene i kvadratet forlenges med lengden *b*. Det gir opphav til tre nye trekanter, alle kongruente med den opprinnelige trekanten.

Til sammen danner alle figurene et nytt kvadrat. Hvorfor?

Arealet av det nye kvadratet er summen av arealene til det innerste kvadratet og de fire trekantene rundt, og vi får

$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$c^2 = a^2 - 2\text{ab} + b^2 + 2\,\text{ab}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

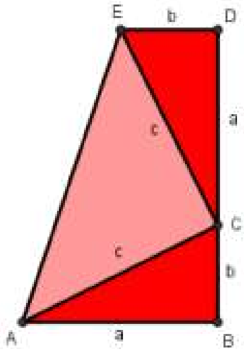
$$c^2 = a^2 - 2\text{ab} + b^2 + 2\,\text{ab}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

President Garfields bevis

Den amerikanske presidenten Garfield er kjent for i 1876 å ha oppdaget et pent bevis for Pytagoras´ setning.

Gitt $\triangle ABC$ med sidelengder *a*, *b* og *c* og $\angle B = 90^\circ$. $\triangle CDE$ er kongruent med $\triangle ABC$ og konstrueres slik at *CD* er en forlengelse av *BC*. Setningen om at vinkelsummen i en trekant alltid er 180°, gir grunnlag for å vise at i $\triangle ACE$ er $\angle ACE = 90^\circ$.



Arealet av trapeset *ABDE* kan regnes ut på to måter:

- Ved å bruke trapesformelen:
  $\text{Arealet} = \frac{a+b}{2}\left(a+b\right)$
- Ved å regne ut arealene til de tre trekantene:
  $\text{Arealet} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$

Disse to uttrykkene må være like, og vi får

$$\frac{a+b}{2}\left(a+b\right) = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\left(a+b\right)^2 = 2\text{ab} + c^2$$

$$a^2 + 2\text{ab} + b^2 = 2\text{ab} + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hva kan vi bruke setningen til?

[Hva kan vi bruke setningen til? (98089)]

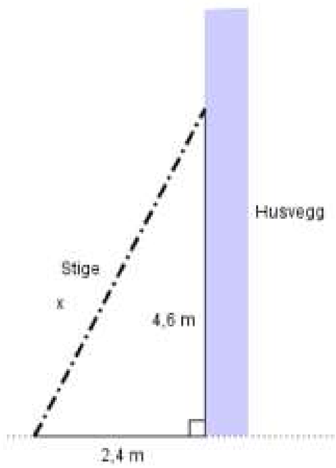
Den pytagoreiske læresetningen er meget sentral i geometrien. Vi skal derfor repetere litt og se hva vi kan bruke setningen til.

Å finne en ukjent side i en rettvinklet trekant

Pytagoras' setning kan brukes for å finne en ukjent side i en rettvinket trekant når to av sidene er kjent.

Eksempel

En stige skal plasseres 2,4 meter fra en husvegg slik at den akkurat når opp til vinduskarmen i et vindu i andre etasje. Vinduskarmen er 4,6 meter over bakken.



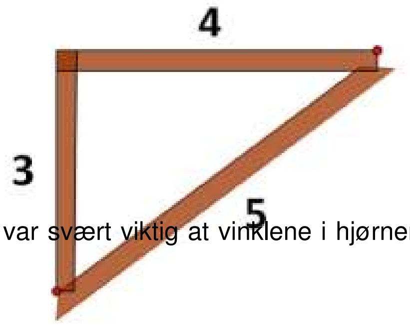
Hvor lang må stigen være?

La stigen være *x* meter lang. Pytagoras´ setning gir

$$x^2 = 4,6^2 + 2,4^2$$
$$x^2 = 21,16 + 5,76$$
$$x^2 = 26,92$$
$$x = \sqrt{26,92}$$
$$x = 5,2$$

Stigen må være 5,2 meter lang.

Hvordan lage rette vinkler?



Noen ganger brukes Pytagoras' setning for å kontrollere om vinkler er 90 grader.

Eksempel

Snekker Pettersen skulle bygge en garasje. Det var svært viktig at vinklene i hjørnene ble rette.

Han saget til to bordlengder, den ene på 3 meter og den andre på 4 meter. Han festet bordlengdene i endene som vist på figuren til høyre og la dem slik at avstanden mellom de røde punktene ble 5 meter. Han brukte til slutt en tredje bordlengde og spikret dette sammen.

Forklar hvordan Pettersen brukte Pytagoras' setning for å lage en rett vinkel.

Tallene (*3*, *4*, *5*) er et eksempel på et pytagoreisk talltrippel. Et pytagoreisk trippel (*a*, *b*, *c*) består av tre positive heltall som oppfyller likningen $a^2 + b^2 = c^2$. Pytagoreiske tripler har en
interessant historie i matematikken. Du kan finne mye stoff om disse tallene på internett.

Setningen om periferivinkler og Thales´ setning

Setningen om periferivinkler og Thales´ setning

[Setningen om periferivinkler og Thales´ setning (98090)]

I Wikipedia står følgende å lese om Thales fra Milet:

«**Thales fra Milet** (624–547 f.Kr) regnes for å være den første filosofen i vestlig filosofi/gresk filosofi som vi kjenner til, og far til vitenskapen.

Thales er den første greske filosofen, vitenskapsmannen og matematikeren vi kjenner til, skjønt han hadde sitt virke som ingeniør. Han var den første naturfilosofen i den miletiske skolen. Ingen av hans verker har overlevd til i dag, så det er vanskelig å være sikker på hans matematiske oppdagelser. »

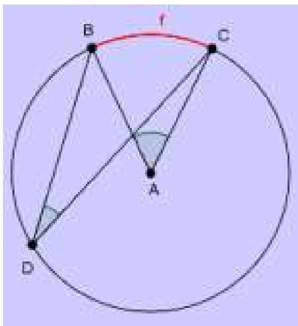
Kilde:

http://no.wikipedia.org/wiki/Thales

Thales' setning handler om vinkler i sirkler.

Noen definisjoner

En **sentralvinkel** i en sirkel er en vinkel med toppunkt i sirkelens sentrum. På figuren er $\angle \mathrm{BAC}$ en sentralvinkel.



En **periferivinkel** i en sirkel er en vinkel med toppunkt på sirkelperiferien. På figuren er $\angle \mathrm{BDC}$ en periferivinkel.

Den buen som en vinkel spenner over, er den del av sirkelperiferien som ligger mellom skjæringspunktene for vinkelens ben og sirkelperiferien.

På figuren spenner både sentralvinkelen $\angle \mathrm{BAC}$ og periferivinkelen $\angle \mathrm{BDC}$ over den samme buen, *f*, markert med rødt.

Før vi presenterer setningen til Thales, skal vi se på en viktig sammenheng mellom periferivinkler og sentralvinkler.

Oppgave

Bruk GeoGebra og lag tilsvarende figur som vist ovenfor.
La *B*, *C* og *D* være frie punkter på sirkelperiferien. Velg knappen «Vinkel» og mål sentralvinkelen $\angle \mathrm{BAC}$ og periferivinkelen $\angle \mathrm{BDC}$ som spenner over den samme buen.

Dra i punktene *B*, *C* og *D* samtidig som du observerer størrelsen på vinklene du måler. Hva oppdager du?

Sentralvinkler og periferivinkler

Når en **periferivinkel** og en **sentralvinkel** i en sirkel spenner over den **samme sirkelbuen**, er sentralvinkelen **dobbelt så stor** som periferivinkelen.

Alle periferivinkler som spenner over samme bue, er like store.

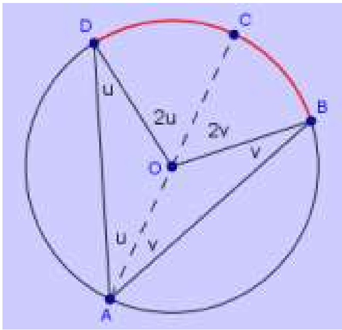
Ca 550 år f.Kr. formulerte Thales en setning som er et spesialtilfelle av setningen om sentralvinkler og periferivinkler.

Thales´ setning

En periferivinkel som spenner over en bue på 180°, er 90°.

Bevis for setningen

La *A*, *B* og *D* være tilfeldige punkter på sirkelperiferien til en sirkel med sentrum i *O*. La *B* og *D* ligge på hver sin side av diameteren gjennom *AO*. Vi skal vise at sentralvinkelen *BOD* er dobbelt så stor som periferivinkelen *BAD*.



Vi trekker diameteren gjennom *AO* som en hjelpelinje, og kaller $\angle \mathrm{OAB}$ for *v*.

Vi ser av figuren at $\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OBA} = v$ fordi OAB er likebenet. Siden vinkelsummen i en trekant alltid er 180∘, vil $\angle \mathrm{AOB} = 180^\circ - 2v$.

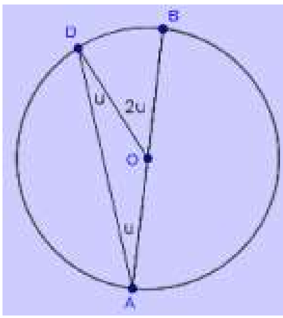
Vi får da

$$\angle \mathrm{BOC} = 180^\circ - \angle \mathrm{AOB} = 180^\circ - (180^\circ - 2v) = 2v.$$

Tilsvarende er $\angle \mathrm{DOC}$ dobbelt så stor som $\angle \mathrm{DAC}$.

Vi har da vist at $\angle \mathrm{BOD} = 2 \cdot \angle \mathrm{BAD}$.

I beviset ovenfor forutsatte vi at *B* og *D* lå på hver sin side av diameteren gjennom *AO*. Vi skal nå la ett av punktene, for eksempel *B*, ligge på diameteren slik at *B* og *C* blir sammenfallende.



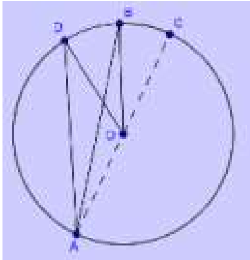
Samme argumenter som ovenfor viser at også nå er $\angle \mathrm{BOD} = 2 \cdot \angle \mathrm{BAD}$.

Vi må til slutt se på det tilfelle at *B* og *D* ligger på samme side av diameteren gjennom *AO*.

På grunnlag av det vi til nå har bevist, kan vi sette opp $\angle \mathrm{COD} = 2 \cdot \angle \mathrm{CAD} \quad \text{og} \quad \angle \mathrm{COB} = 2 \cdot \angle \mathrm{CAB}.$

Dette medfører at

$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{BOD} &= \angle \mathrm{COD} - \angle\, \mathrm{COB} \\
&= 2 \cdot \angle \mathrm{CAD} - 2 \cdot \angle\, \mathrm{CAB} \\
&= 2 \cdot (\angle \mathrm{CAD} - \angle\, \mathrm{CAB}) \\
&= 2 \cdot \angle\, \mathrm{BAD}
\end{aligned}
$$



Vi har dermed vist at Thales setning gjelder for alle tilfeller.

Geometriske steder

Geometriske steder

[Geometriske steder (98105)](#)

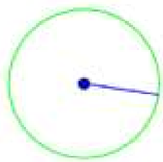
Vi vet at alle punkt på en sirkelperiferi har samme avstand fra sentrum i sirkelen. Denne avstanden er radius, *r*, i sirkelen. Det er ingen andre punkt i planet som har den samme avstanden fra sentrum i denne sirkelen. Vi kan bruke dette til å forklare begrepene **krav** og **geometrisk sted**.

Et geometrisk sted er **mengden av alle punkter som oppfyller ett eller flere krav**.

Konstruksjon av geometriske steder brukes når vi skal konstruere figurer med bestemte egenskaper.

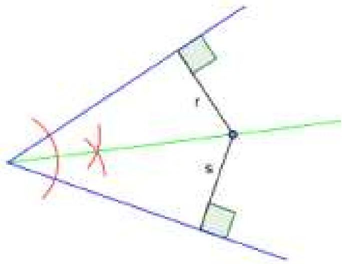
Fem geometriske steder

- Sirkelen er det geometriske stedet for alle punkter som ligger i en gitt avstand fra et gitt punkt.



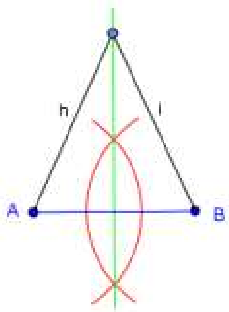
- Halveringslinjen for en vinkel er det geometriske stedet for alle punkter som ligger like langt fra vinkelens bein.

  $r = s$

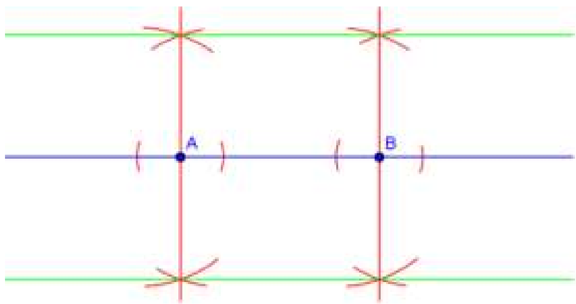


- Midtnormalen på et linjestykke er det geometriske stedet for alle de punkter som ligger like langt fra linjestykkets endepunkter.

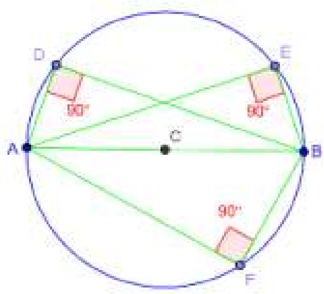
  $h = i$



- De parallelle linjene med en bestemt avstand til en gitt linje er det geometriske stedet for alle punkter som ligger i en bestemt avstand fra den gitte linjen.



- Det geometriske stedet for toppunktet til en rett vinkel med vinkelbein som går gjennom to punkter og , er sirkelperiferien til en sirkel med linjestykket som diameter. (Dette er Thales' setning.)



Kunnskap om geometriske steder gir grunnlag for å konstruere og analysere trekanter og andre figurer i planet som er gitt med bestemte egenskaper.

Konstruksjoner

Konstruksjoner (98143)

Utdanningsdirektoratet presiserer i «Vurderingsveiledning 2012» hva som kreves til eksamen i R1 når det gjelder konstruksjonsoppgaver:

«Konstruksjonsoppgaver skal i Del 1 løses med passer, blyant og linjal. Eleven skal alltid legge ved konstruksjonsforklaring. Besvarelse av konstruksjonsoppgaver i Del 1 bør skje på blankt papir slik at konstruksjonen kommer fram så klart som mulig.

Ved tegning av geometriske figurer med dynamisk geometriprogram («Tegn ...») under Del 2 av eksamen tillates alle funksjonstastene/kommandoer direkte brukt i programvaren. Eksempler på slike er funksjonstaster/kommandoer som tegner normaler, halverer vinkler, lager midtnormal, tegner parallelle linjer og så videre. Elevene må legge ved en oversikt over hva som er gjort i programvaren, i besvarelsen sin.

Elevene vil bli prøvd i klassisk konstruksjon med passer og linjal under Del 1.»

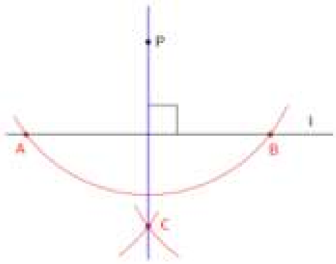
I dette avsnittet viser vi noen grunnleggende konstruksjoner utført med passer og linjal. Mer sammensatte konstruksjonsoppgaver kan løses ved kombinasjoner av disse konstruksjonsteknikkene.

Normal linje

Vi skal konstruere normalen til linjen *l* gjennom punktet *P* som ligger utenfor linjen.

- Vi slår en sirkel om punktet *P* slik at sirkelen skjærer linjen *l* i to punkter, *A* og *B*.
- Vi slår så to sirkler med samme radius om punktene *A* og *B*. Sirklene skjærer hverandre i *C*.

Linjen gjennom *P* og *C* er normalen til linjen *l* gjennom punktet *P*.

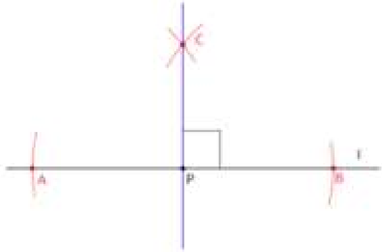


Rett vinkel

Vi skal konstruere normalen til linjen *l* gjennom punktet *P* som ligger på *l*. Dette er det samme som å konstruere en rett vinkel i *P*. $\angle P = 90^\circ$

- Vi slår en sirkel om punktet *P* slik at sirkelen skjærer linjen *l* i to punkter, *A* og *B*.
- Vi slår så to sirkler med samme radius om punktene *A* og *B*. Sirklene skjærer hverandre i *C*.

Linjen gjennom *P* og *C* er normalen til linjen *l* gjennom punktet *P*.

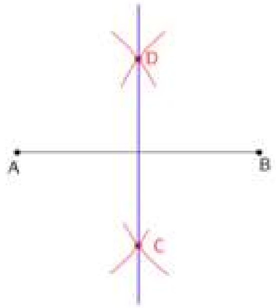


Midtnormal

Vi skal konstruere midtnormalen til linjestykket *AB*.

- Vi slår to sirkler med samme radius om punktene *A* og *B*. Sirklene skjærer hverandre i punktene *C* og *D*.

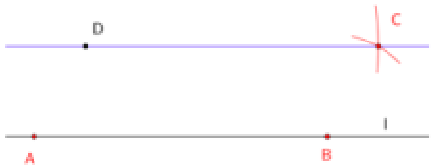
Linjen gjennom *C* og *D* er midtnormalen til linjestykket *AB*.



Parallell linje

Vi skal konstruere en parallell linje til linjen *l* gjennom punktet *D*.

- Vi avsetter to punkter, *A* og *B* på linjen *l*.
- Vi slår så en sirkel om punktet *D* med radius *AB* og en sirkel om punktet *B* med radius *AD*. Sirklene skjærer hverandre i punktet *C*.

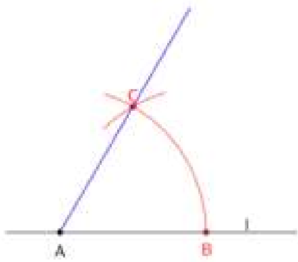


Linjen gjennom *C* og D er en parallell linje til linjen *l* gjennom punktet *D*.

En vinkel på 60°

Vi skal konstruere en vinkel på 60° med toppunkt i *A* og med linjen *l* som høyre vinkelbein.

- Vi avsetter punktet *B* på linjen *l*. Vi slår en sirkel om punktet *A* med radius *AB* og en sirkel om punktet *B* med samme radius. Sirklene skjærer hverandre i punktene *C*.

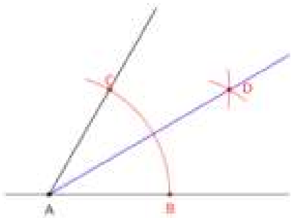


$\angle \mathrm{BAC} = 60^\circ$ fordi linjestykkene *AB*, *BC* og *AC* danner en likesidet trekant hvor alle vinklene er 60°.

Halvering av vinkel

Vi skal halvere en gitt vinkel med toppunkt i *A*.

- Vi slår en sirkel med tilfeldig radius om punktet *A*. Sirkelen skjærer vinkelbeina i henholdsvis *B* og *C*.
- Vi slår så to nye sirkler med samme radius om punktene *B* og *C*. Sirklene skjærer hverandre i punktet *D*.

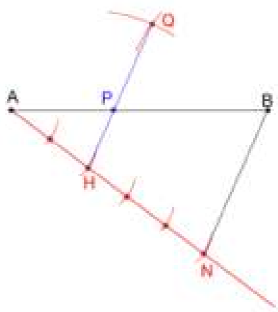


Linjen *AD* halverer $\angle \mathrm{BAC}$. Vi har at $\angle \mathrm{BAD} = \mathrm{DAC}$
.

Deling av linjestykke

Vi skal ved konstruksjon dele linjestykket *AB* i to deler *AP* og *PB* slik at $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = \frac{2}{3}$.

- Vi trekker en stråle fra *A*, bruker passeren, og avsetter med utgangspunkt i *A* fem like påfølgende linjestykker langs strålen.
- Vi avsetter linjestykket *BN* og konstruerer en parallell til *BN* gjennom *H*.



Punktet *P* blir nå skjæringspunktet mellom linjestykkene *HQ* og *AB*.

Skjæringssetninger i trekanter

Skjæringssetninger i trekanter

[Skjæringssetninger i trekanter (98149)]

I et av kompetansemålene i læreplanen står det at du skal kunne utlede og bruke skjæringssetningene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant.

Gjennom å gjøre fire oppgaver i GeoGebra vil du forhåpentligvis selv oppdage disse setningene. Selv om du kan lese løsningene som teori, så vil vi sterkt oppfordre til å gjøre dette!

Oppgave 1: Omsenteret

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer **midtnormalene** på sidene i trekanten. Hva observerer du?
b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?
c) Kall skjæringspunktet mellom midtnormalene for *S*. Konstruer en sirkel med sentrum i *S* og med radius lik avstanden til et av hjørnene. Hva observerer du?
d) Dra igjen i hjørnene i trekanten. Hva observerer du?
e) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese (en setning du tror gjelder) for alle trekanter?
f) Prøv å bevise hypotesen.

Løsning [Midtnormalene og den omskrevne sirkelen]

Oppgave 2: Innsenteret

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer halveringslinjene til vinklene i trekanten. Hva observerer du?
b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?
c) Nedfell en normal fra skjæringspunkt *S* mellom **vinkelhalveringslinjene** til en av sidene i trekanten. Normalen treffer siden i punktet *D*. Konstruer en sirkel med sentrum i *S* og med radius *SD*. Hva observerer du?
d) Dra igjen i hjørnene i trekanten. Hva observerer du?
e) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?
f) Prøv å bevise hypotesen.

Løsning [Vinkelhalveringslinjene og den innskrevne sirkelen]

Oppgave 3: Ortosenteret

Tegn en trekant i GeoGebra

a) Konstruer de tre **høydene** i trekanten. Hva observerer du?
b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?
c) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?
d) Prøv å bevise hypotesen.

Linjestykket fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden, kalles en **median**. En trekant har alltid tre medianer.

Løsning Høydene

Oppgave 4: Tyngdepunktet

Tegn en trekant i GeoGebra

a) Konstruer de tre **medianene** til trekanten. Hva observerer du?
b) Dra i hjørnene i trekanten slik at den forandrer form. Hva observerer du?
c) Skjæringspunktet mellom medianene deler medianene i to deler. Prøv å finne ut noe om forholdet mellom disse to delene.
d) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?
e) Prøv å bevise hypotesen.

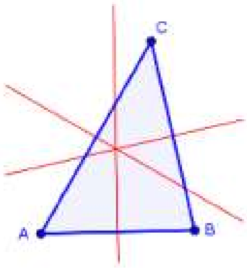
Løsning Medianene

Midtnormalene og den omskrevne sirkelen

[Midtnormalene og den omskrevne sirkelen (98156)](#)

Løsning, Oppgave 1

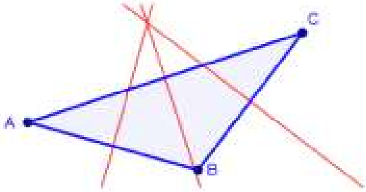
Vi tegner en $\triangle ABC$ i GeoGebra.



a) Vi konstruerer så **midtnormalene** på sidene i trekanten.

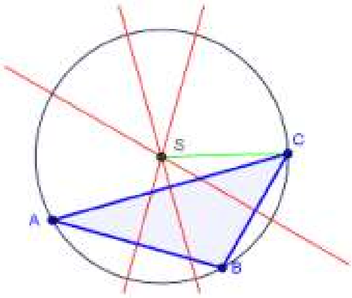
Vi observerer at midtnormalene skjærer hverandre i ett punkt!

b) Vi drar i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form.



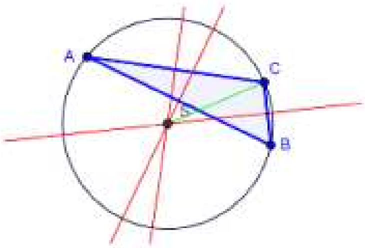
Vi observerer at midtnormalene skjærer hverandre i ett punkt uansett hvilken form trekanten har. Det felles skjæringspunktet ligger ikke alltid inne i trekanten.

c) Vi kaller skjæringspunktet mellom midtnormalene for *S* og konstruerer en sirkel med sentrum i *S* og radius *SC*.



Vi observerer at sirkelen går gjennom alle tre hjørnene i trekanten!

d) Vi drar igjen i hjørnene i trekanten.



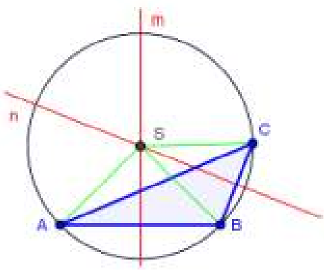
Sirkelen går alltid gjennom alle tre hjørnene i trekanten!

e) På grunnlag av observasjonene våre formulerer vi følgende hypotese:

I alle trekanter vil midtnormalene skjære hverandre i ett punkt.

En sirkel med sentrum i dette felles skjæringspunktet *S* og med radius lik avstanden fra *S* til et av hjørnene i trekanten, vil gå gjennom de to andre hjørnene.

f) Bevis



La $\triangle ABC$ være en vilkårlig trekant. La *m* være midtnormalen til *AB* og *n* midtnormalen til *BC*. La *S* være skjæringspunktet mellom disse to midtnormalene.

Vi husker at midtnormalen på et linjestykke er det geometriske stedet for alle de punktene som ligger like langt fra de to endepunktene til linjestykket.

Det må bety at $\mathrm{AS} = \mathrm{BS}$ og $\mathrm{BS} = \mathrm{CS}$. Men da må $\mathrm{AS} = \mathrm{CS}$. Dette betyr at midtnormalen til *AC* også går gjennom punktet *S*, og at alle midtnormalene skjærer hverandre i ett punkt.

Videre må det bety at sirkelen med sentrum i *S* og radius lik *AS* også går gjennom hjørnene *B* og *C*.

Vi har da vist at hypotesen er riktig og vi har følgende setning:

Setningen om midtnormalene i en trekant

I alle trekanter vil midtnormalene skjære hverandre i ett punkt.

En sirkel med sentrum i dette felles skjæringspunktet *S* og med radius lik avstanden fra *S* til et av hjørnene i trekanten, vil gå gjennom de to andre hjørnene.

Vi kaller denne sirkelen for trekantens **omskrevne sirkel.**

Punktet hvor midtnormalene møtes, sentrum i den omskrevne sirkelen, kaller vi trekantens **omsenter**.

Vinkelhalveringslinjene og den innskrevne sirk..

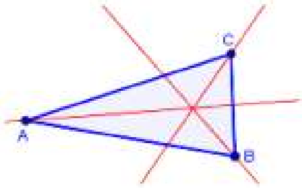
[Vinkelhalveringslinjene og den innskrevne sirkelen (98168)](#)

Løsning, Oppgave 2

Vi tegner en $\triangle ABC$ i GeoGebra.

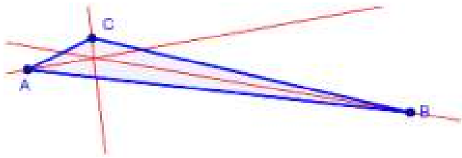
a) Vi konstruerer så halveringslinjene til vinklene i trekanten.

Vinkelhalveringslinjene skjærer hverandre i ett punkt!



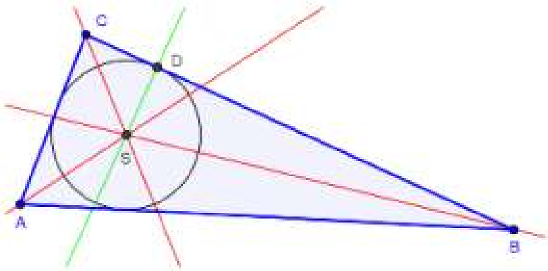
b) Vi drar i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form.

Vinkelhalveringslinjene møtes i ett punkt uansett hvilken form trekanten har. Det felles skjæringspunktet ligger alltid inne i trekanten.



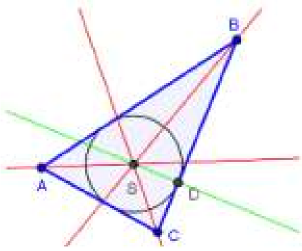
c) Vi nedfeller normalen fra skjæringspunktet *S* mellom **vinkelhalveringslinjene** til siden *BC*. Normalen skjærer *BC* i punktet *D*. Vi konstruerer så en sirkel med sentrum i *S* og radius *SD*.

Sirkelen tangerer alle sidene i trekanten!



d) Vi drar igjen i hjørnene i trekanten.

Sirkelen tangerer alle sidene i trekanten uansett hvilken form trekanten har.



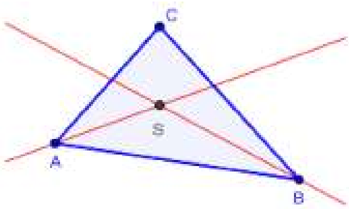
e) På grunnlag av observasjonene våre formulerer vi følgende hypotese:

I alle trekanter vil vinkelhalveringslinjene skjære hverandre i ett punkt.

En sirkel med sentrum i dette felles skjæringspunktet *S* og med radius lik avstanden fra *S* til en av sidene i trekanten, vil også tangere de to andre sidene i trekanten.

f) Bevis

La $\triangle ABC$ være en vilkårlig trekant.
Vi husker at vinkelhalveringslinjen er det geometriske stedet for alle de punktene som ligger like langt fra vinkelens bein.



La *S* være skjæringspunktet mellom halveringslinjene for $\angle \mathbf{CAB}$ og $\angle \mathbf{ABC}$.
Da ligger *S* like langt fra *AB* som fra *AC*. *S* må også ligge like langt fra *AB* som fra *BC*. Da må avstanden fra *S* til *AC* og *BC* være lik, og dermed ligger *S* på halveringslinjen for $\angle \mathbf{ACB}$. Siden avstandene fra *S* til hver av sidene i trekanten er den samme, må *S* være sentrum i sirkelen.

Vi har da vist at hypotesen er riktig, og vi har følgende setning:

Setningen om vinkelhalveringslinjene i en trekant

I alle trekanter vil vinkelhalveringslinjene skjære hverandre i ett punkt.

En sirkel med sentrum i dette felles skjæringspunktet *S* og med radius lik avstanden fra *S* til en av sidene i trekanten, vil også tangere de to andre sidene i trekanten.

Vi kaller denne sirkelen for trekantens **innskrevne sirkel**.

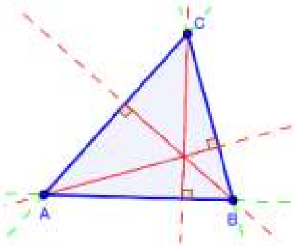
Punktet hvor vinkelhalveringslinjene møtes, sentrum i den innskrevne sirkelen, kaller vi trekantens **innsenter**.

Høydene

[Høydene (98203)]

Løsning, Oppgave 3

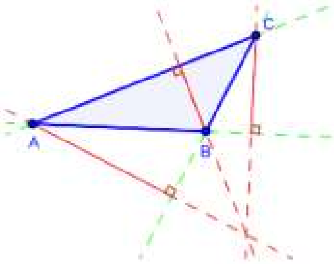
Vi tegner en ABC i GeoGebra.



a) Vi konstruerer så de tre **høydene** i trekanten.

De tre høydene skjærer hverandre i ett punkt!

b) Vi drar i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form.



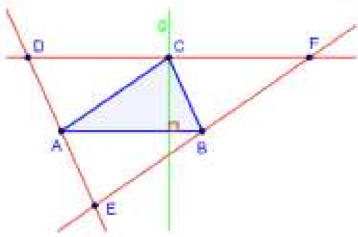
De tre høydene, eller forlengelsene av dem, møtes i ett punkt uansett hvilken form trekanten har. Det felles skjæringspunktet ligger ikke alltid inne i trekanten.

c) På grunnlag av observasjonene våre formulerer vi følgende hypotese:

Høydene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.

d) Bevis

La ABC være en vilkårlig trekant.
Vi konstruerer en linje gjennom *C* som er parallell m e d *AB*. Tilsvarende konstruerer vi en linje gjennom *A* som er parallell med *BC* og en linje gjennom *B* som er parallell med *AC*. Se figur.



Firkanten *ABCD* er et parallellogram. Det medfører a t *DC*=*AB*. Firkanten *ABFC* er også et parallellogram, og *CF*=*AB*. Da er *DC*=*CF*, og høyden fra *C* på *AB* i ABC faller sammen med midtnormalen på siden *FD* i EFD, linjen *g* på figuren.

Vi kan tilsvarende vise at høyden fra *B* på *AC* faller sammen med midtnormalen på siden *EF* og at høyden fra *A* på *BC* faller sammen med midtnormalen på siden *ED*.

Vi vet at midtnormalene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt. Da må også høydene i ABC skjære hverandre i ett punkt siden de faller sammen med midtnormalene i EFD.

Vi har da vist at hypotesen er riktig og vi har følgende setning:

Setningen om høydene i en trekant

Høydene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.

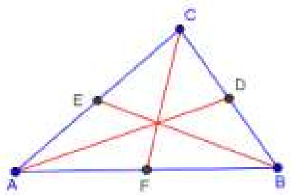
Dette punktet kalles trekantens **ortosenter**.

Medianene

Medianene (98252)

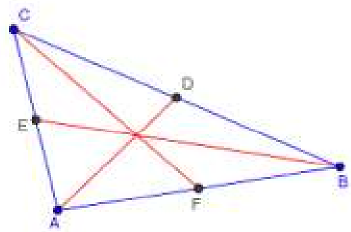
Løsning, Oppgave 4

Vi tegner en ABC i GeoGebra.



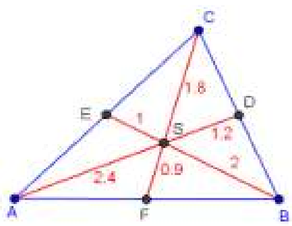
a) Vi konstruerer så midtpunktene på sidene i trekanten og trekker linjestykkene fra hjørnene i trekanten til midtpunktene på motsatte sider.

Vi ser av figuren at alle medianene skjærer hverandre i ett punkt!



b) Vi drar i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form.

De tre medianene skjærer hverandre i ett punkt uansett hvilken form trekanten har. Det felles skjæringspunktet ligger alltid inne i trekanten.



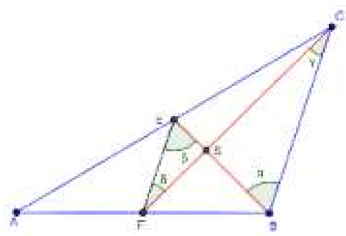
c) Vi måler lengdene til de to delene som medianene ble delt i.

Det kan se ut som om den største delen alltid er dobbelt så lang som den minste delen.

d) På grunnlag av observasjonene våre formulerer vi følgende hypotese:

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.
Dette skjæringspunktet deler medianene i forholdet 2 : 1.

e) Bevis



La ABC være en vilkårlig trekant. Medianene *BE* og *CF* skjærer hverandre i punktet *S*.

Siden *F* er midtpunktet på *AB*, må *AB* være dobbelt så lang som *AF*. Av samme grunn er forholdet mellom *AC* og *AE* også lik 2 : 1.

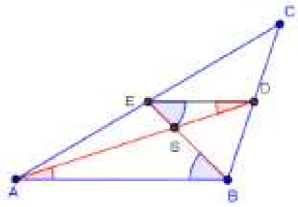
ABC og AFE er formlike fordi forholdet mellom to par av samsvarende sider er det samme, og vinkelen mellom de aktuelle sidene er den samme i begge trekantene.

Dette betyr at $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FE}} = \frac{2}{1}$ og $\mathrm{FE} \parallel \mathrm{BC}$ (*FE* er parallell med *BC*).

Videre er SBC og SEF formlike. $\angle\mathrm{BSC} = \angle\mathrm{ESF}$ siden disse vinklene er toppvinkler. Vinklene α og β er like fordi de er samsvarende vinkler ved parallelle linjer, og av samme grunn er også vinklene δ og γ like.

Dette medfører at $\frac{\mathrm{SB}}{\mathrm{SE}} = \frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SF}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}} = \frac{2}{1}$, og betyr at medianene *BE* og *CF* skjærer hverandre i et punkt som deler medianene i forholdet 2 : 1.

Vi kan føre tilsvarende resonnement som ovenfor ved å ta utgangspunkt i medianene *AD* og *BE*.



Vi vil da se at medianene *BE* og *AD* skjærer hverandre i et punkt som deler disse medianene i forholdet 2 : 1.

Alle medianene må dermed skjære hverandre i ett punkt.

Vi har da vist at hypotesen er riktig og vi har følgende setning:

Setningen om medianene i en trekant

De tre medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.
Dette skjæringspunktet deler medianene i forholdet 2 : 1.

Dette punktet kalles trekantens **tyngdepunkt**.

Vektorer

Vektorer

[Vektorer (98266)](#)

Tenk deg en flyreise som starter i Kristiansand, går via Oslo og Bergen og ender i Stavanger. Reisen kan illustreres med piler som vist på kartet.

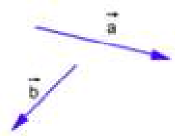
Pilene illustrerer de aktuelle **forflytningene**. **Lengdene på pilene** forteller om lengdene på flyreisene, og **retningene på pilene** forteller om retningene på reisene.

Kilde: Statens kartverk

Hvis formålet med flyreisene var å forflytte seg fra Kristiansand til Stavanger, kunne alle flyreisene vært erstattet av en eneste flyreise, nemlig direkte fra Kristiansand til Stavanger. Den røde pilen viser denne reisen, som vi kan si er «sluttresultatet» eller «summen» av alle reisene.

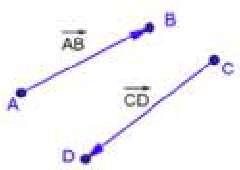
Forflytning er et eksempel på en størrelse hvor vi må kjenne til **både lengden og retningen** for å beskrive størrelsen fullstendig. Fra naturfag (fysikk) kjenner du begrepene kraft, fart og akselerasjon. Dette er også størrelser med retning. Det har vist seg svært hensiktsmessig å tegne disse størrelsene som piler. Slike størrelser som har både lengde og retning kaller vi **vektorer**, og størrelsene kaller vi **vektorstørrelser** eller bare **vektorer**.

En størrelse som ikke har retning, kalles en **skalar**. Et pengebeløp er et eksempel på en skalar.



Når vi skal gi vektorer navn, bruker vi bokstaver med en pil over. Det er vanlig å bruke små bokstaver som figuren viser.

Når en vektor går fra et punkt til et annet, bruker vi store bokstaver. Vektoren mellom to punkter *A* og *B* får navnet $\overrightarrow{AB}$. Denne vektoren har **utgangspunkt i *A*** og **endepunkt i *B***. Hva er forskjellen på $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$?



Vektorene er tegnet i GeoGebra.

En vektor har altså både **lengde** og **retning**. La $\vec{s}$ være forflytning 3 km vestover. Vi sier at lengden av vektoren er 3 km, og at retningen er vestover. Når vi skal beskrive en vektor, er det viktig å skille klart mellom disse to egenskapene.

Absoluttverditegn brukes for å angi lengden av en vektor

$$(\vec{s}) = 3\ \mathbf{km}$$

Absoluttverdien av en vektor er altså en skalar.

En vektor er altså bestemt ved en lengde og en retning. Det betyr at hvis du kan parallellforskyve en vektor slik at den dekker en annen vektor, er de to vektorene like.

En størrelse som har en **bestemt lengde** og en **bestemt retning** kalles en **vektor**.

En **skalar** er en størrelse uten retning.

Eksempler på vektorer er forflytning, fart og kraft.

Eksempler på skalarer er temperatur, areal og volum.

Vi kan tegne en vektor som en pil.

En vektor er **ikke «stedbunden»**. Om vi flytter en vektor slik at den beholder både lengde og retning, så er det fortsatt samme vektor.

Med $(\vec{s})$ mener vi **lengden** av $\vec{s}$.

Med $-\vec{s}$ mener vi en vektor som er **parallell** med og har **samme lengde** som $\vec{s}$, men er **motsatt rettet**.

Nullvektoren er en vektor med lengde null. Den har ingen retning og skrives som $\vec{0}$.

Regning med vektorer

[Regning med vektorer (98272)](#)

I eksemplet med flyreiser så vi at vektoren fra Kristiansand direkte til Stavanger kunne oppfattes som en sum av forflytninger. Vi kan altså finne summen av forflytningene ved å «henge alle forflytningsvektorene etter hverandre». Sumvektoren går fra den første vektorens utgangspunkt til den siste vektorens endepunkt.

Det gir altså mening å regne med vektorer. Men før vi kan gjøre det, må regneoperasjonene defineres presist.

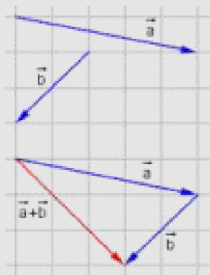
Addisjon av vektorer

Definisjon

Gitt to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

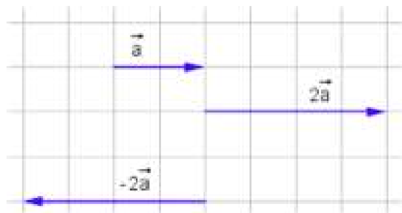
Vi finner **summen av vektorene**, $\vec{a}+\vec{b}$, ved å parallellforskyve $\vec{b}$ slik at den får sitt utgangspunkt der $\vec{b}$ har sitt endepunkt.

Summen av vektorene, $\vec{a}+\vec{b}$, er lik vektoren som går **fra utgangspunktet** til $\vec{a}$ **til endepunktet** til $\vec{b}$.



Multiplikasjon av vektor med tall

$t2\vec{a}$ er en vektor som er dobbelt så lang som$\vec{a}$ og har samme retning som$\vec{a}$. $-2\vec{a}$ er en vektor som er dobbelt så lang som $\vec{a}$ og har motsatt retning.



Definisjon

Gitt en vektor $\vec{a}$ og et tall $t \in$ ˚.

$t \cdot \vec{a}$ er en vektor med lengde lik absoluttverdien til t multiplisert med lengden til $\vec{a}$.

Hvis $t > 0$, har $t \cdot \vec{a}$ samme retning som $\vec{a}$.
Hvis $t < 0$, har $t \cdot \vec{a}$ og $\vec{a}$ motsatt retning.

Hvis $t = 0$, er $t \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

$\vec{0}$ kaller vi «**nullvektoren**». Denne vektoren har ingen størrelse og ingen retning. Den er parallell med og står vinkelrett på enhver annen vektor.

Parallelle vektorer

Fra forrige avsnitt følger en setning som du får bruk for når du skal undersøke om to vektorer er parallelle.

To vektorer er **parallelle** hvis og bare hvis det finnes et reelt tall *t* slik at den ene vektoren kan skrives som *t* multiplisert med den andre vektoren.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{tb}} \text{ hvor } t \in \mathbb{R}$$

Vektordifferanse

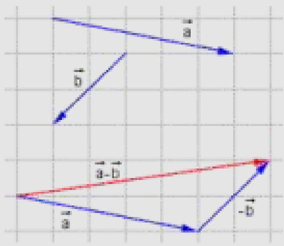
Definisjon

Vi definerer **differansen mellom to vektorer** på følgende måte:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

Det betyr at vi kan finne vektordifferansen $\vec{a} - \vec{b}$ ved å finne summen $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Se figuren til høyre.



Regneregler for vektorer

For addisjon av vektorer og multiplikasjon av en vektor med et tall, gjelder regneregler tilsvarende reglene som gjelder for addisjon og multiplikasjon av tall.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$s\vec{a} + t\vec{a} = (s+t)\vec{a}$$
$$s\left(\overrightarrow{\mathrm{ta}}\right) = (s \cdot t)\vec{a}$$
$$s\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{\mathrm{sa}} + \overrightarrow{\mathrm{sb}}$$

Skalarproduktet

[Skalarproduktet (98295)]

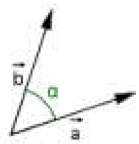
Til nå har vi funnet summen av vektorer, differansen mellom vektorer, og vi har multiplisert en vektor med et tall. I alle tilfeller har vi fått en ny vektor som resultat.

Vi skal nå definere det som kalles **skalarproduktet** mellom vektorer. Det minner litt om multiplikasjon mellom tall, men siden tall og vektorer er forskjellige størrelser, er det ikke det samme.

Skalarproduktet mellom to vektorer gir ikke en ny vektor som resultat, men en skalar. Derfor kalles det for skalarprodukt. Et annet navn er **prikkprodukt**. Vi sier at vi «prikker» to vektorer med hverandre.

Merk!

Med vinkelen mellom to vektorer menes **den minste vinkelen** mellom dem når vektorene plasseres med samme utgangspunkt.



Vinkelen mellom to vektorer er altså alltid mindre eller lik 180 grader.

Definisjon

Gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. La α være vinkelen mellom vektorene.

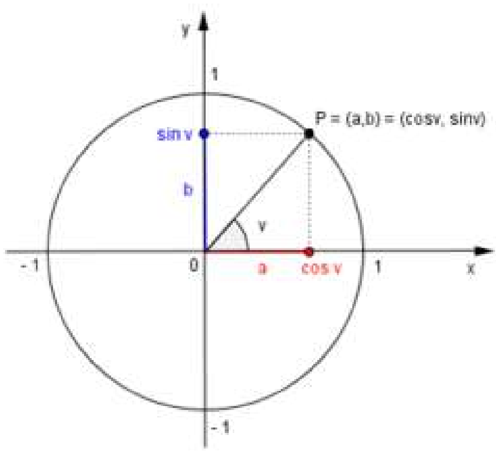
Skalarproduktet eller **prikkproduktet** mellom vektorene er definert som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos\alpha$$

Skalarproduktet mellom to vektorer finner vi altså ved å multiplisere lengdene til de to vektorene med cosinus til vinkelen mellom dem.

Cosinus

Når du skal regne ut skalarproduktet mellom to vektorer, må du finne cosinus til vinkelen mellom vektorene. I 1T definerte vi cosinus til en vilkårlig vinkel ved hjelp av enhetssirkelen.
Se figur.



Du kan alltid finne cosinus til en vinkel ved å bruke et digitalt verktøy. Noen cosinusverdier bør du likevel klare å finne ved hjelp av enhetssirkelen. Slå opp i geometrikapittelet i 1T hvis du er usikker. Bruk enhetssirkelen og finn $\cos 0\,^{\circ}$, $\cos 90\,^{\circ}$ og $\cos 180\,^{\circ}$

For hvilke vinkler er cosinusverdien, og dermed også skalarproduktet negativt?

For hvilke vinkler er cosinusverdien, og dermed også skalarproduktet positivt?

Skalarproduktet har stor betydning i fysikkfaget. For eksempel er arbeid i fysikken definert som skalarproduktet mellom vektorene kraft og strekning.

Ortogonale vektorer

Ortogonale vektorer (98510)

Når to vektorer står ortogonalt (normalt, vinkelrett) på hverandre, er vinkelen mellom vektorene 90°. Siden $\cos 90^\circ = 0$ (se enhetssirkelen), vil skalarproduktet også bli lik 0

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos 90^\circ \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0
\end{aligned}$$

Motsatt må det også være slik at hvis skalarproduktet er lik 0 og begge vektorer er forskjellig fra nullvektor, må cosinus til vinkelen mellom dem være 0, og vinkelen må være 90°.

To vektorer som står ortogonalt på hverandre, kalles **ortogonale** vektorer. Det matematiske symbolet er $\perp$.

Vi kan da oppsummere dette slik:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Her forutsetter vi at $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Regneregler for skalarproduktet

Regneregler for skalarproduktet (98511)

Det kan vises at følgende regneregler gjelder for skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$(s\vec{a}) \cdot \left(t\vec{b}\right) = (s \cdot t)\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

og

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \overrightarrow{a^2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{b^2}$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \overrightarrow{a^2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{b^2}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2}$$

Lengden av en vektor

Lengden av en vektor (98513)

Vi har sett at **skalarproduktet** eller **prikkproduktet** mellom to vektorer er definert som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos\alpha$$

Når en vektor prikkes med seg selv, får vi en spesiell situasjon. Vinkelen α er da 0°.
Som du ser av enhetssirkelen ovenfor, er $\cos 0^\circ = 1$. Vi får derfor

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a}) \cdot (\vec{a}) \cdot \cos\left(0^\circ\right)$$

$$\vec{a}^2 = (\vec{a})^2 \cdot 1$$

$$\vec{a}^2 = (\vec{a})^2$$

$$(\vec{a}) = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Vi skal senere bruke dette resultatet til å bestemme lengde av en vektor.

Legg merke til skrivemåten $\vec{a}^2$ for $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

Vektorer på koordinatform

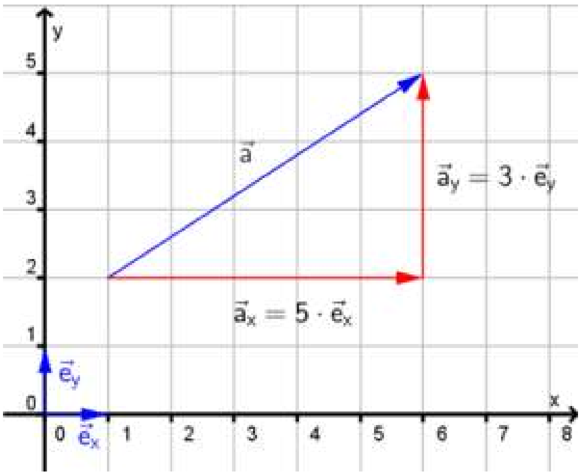
Vektorer på koordinatform

[Vektorer på koordinatform (98519)](#)

Det er ikke særlig effektivt å regne med vektorer på den måten vi har gjort hittil. For eksempel har vi måttet parallellforskyve vektorer for å finne sum og differanse.

Det hadde vært mye enklere hvis vektorer kunne beskrives bare med tall på en slik måte at vi kunne regne oss fram til sum, differanse og skalarprodukt.

Det oppnår vi ved å plassere vektorene i et koordinatsystem.



I koordinatsystemet til høyre har vi plassert to vektorer med utgangspunkt i origo. Vektoren

$\vec{e}_x$ går fra origo til punktet (1,0) o g $\vec{e}_y$ går fra origo til punktet (0,1).

Disse vektorene har lengde 1, er parallelle med henholdsvis *x*-aksen og *y*-aksen og står normalt på hverandre. Vi kaller dem **enhetsvektorer**. (Vi plasserer vanligvis enhetsvektorene med utgangspunkt i origo, men de kunne like gjerne vært plassert et annet sted i koordinatsystemet.)

I koordinatsystemet har vi også tegnet $\vec{a}$.
Vi ser at vi kan skrive $\vec{a}$ som en sum av de to vektorene $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = 5 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$$

Alle vektorer kan på tilsvarende måte skrives som en kombinasjon av enhetsvektorene.

Når vi skal tegne $\vec{a}$, kan vi starte hvor som helst i koordinatsystemet og så gå 5 enheter mot høyre og 3 enheter oppover for å finne vektorens endepunkt. Når tallene 5 og 3 er kjent, er vektoren bestemt. Vi innfører en forenklet skrivemåte for $\vec{a}$

$$\vec{a} = (5, 3)$$

Denne skrivemåten likner på måten punkt angis på, men det er en viktig forskjell. For vektorer bruker vi klammeparenteser mens vi for punkt bruker vanlige parenteser.

(5,3) kalles punktkoordinater og angir punktet som har *x*-koordinat lik 5 og *y*-koordinat lik 3.

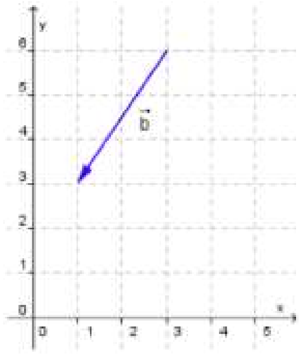
$(5, 3)$ kalles **vektorkoordinater** og betyr det samme som vektoren $5 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$.

Eksempel

$\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + -3 \cdot \vec{e}_y$

$\vec{b} = (-2, -3)$

Når vi skal tegne $\vec{b}$, kan vi starte hvor som helst i koordinatsystemet og så gå 2 enheter mot venstre og 3 enheter nedover for å finne vektorens endepunkt.



Definisjon

Alle vektorer kan skrives som en vektorsum av enhetsvektorer. Dette gir grunnlag for innføring av **vektorkoordinater**

$$(x, y) = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

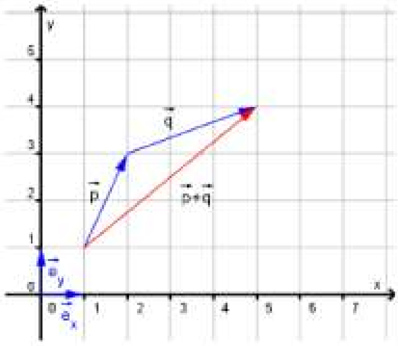
Vi bruker klammeparenteser for å betegne en vektor mens vi bruker vanlige parenteser for å betegne et punkt.

Addisjon av vektorer på koordinatform

[Addisjon av vektorer på koordinatform (98521)](#)

Gitt vektorene

$$\vec{p} = (1, 2) \quad \text{og} \quad \vec{q} = (3, 1)$$

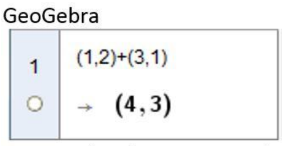


Vi ser av tegningen at

$$\vec{p} + \vec{q} = (4, 3)$$

Vi har altså at

$$(1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$$



Legg merke til parentesene!

Ser du sammenhengen?

$$(1, 2) + (3, 1) = (1 + 3, 2 + 1) = (4, 3)$$

Vi finner summen av to vektorer på koordinatform ved å addere 1.koordinatene og 2.koordinatene hver for seg

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Vi kan vise at denne setningen er riktig ved å skrive vektorene som en sum av enhetsvektorer

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) + (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) \\ &= x_1 \cdot \vec{e}_x + x_2 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + y_2 \cdot \vec{e}_y \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \vec{e}_x + (y_1 + y_2) \cdot \vec{e}_y \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\end{aligned}$$

Differansen mellom vektorer på koordinatform

Differansen mellom vektorer på koordinatform (98533)

Gitt vektorene

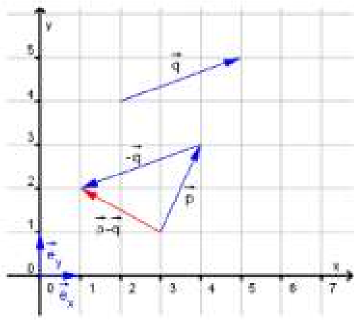
$$\vec{p} = (1,2) \quad \text{og} \quad \vec{q} = (3,1)$$

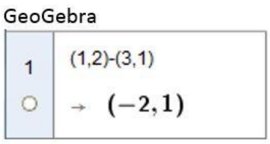
Vi ser at

$$\vec{p} - \vec{q} = (-2,1)$$

Vi har altså at

$$(1,2) - (3,1) = (-2,1)$$





Du ser sikkert sammenhengen her også

$$(1,2) - (3,1) = (1-3, 2-1) = (-2,1)$$

Vi finner differansen mellom to vektorer på koordinatform ved å subtrahere 1.koordinatene og 2.koordinatene hver for seg

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Vi kan vise at denne setningen er riktig ved å skrive vektorene som en sum av enhetsvektorer.

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) - (x_2, y_2) &= (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) - (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) \\ &= x_1 \cdot \vec{e}_x - x_2 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y - y_2 \cdot \vec{e}_y \\ &= (x_1 - x_2) \cdot \vec{e}_x + (y_1 - y_2) \cdot \vec{e}_y \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\end{aligned}$$

Multiplikasjon av vektor med tall

[Multiplikasjon av vektor med tall (98549)]

Gitt vektoren

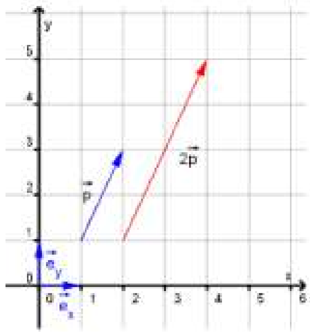
$$\vec{p} = (1,2)$$

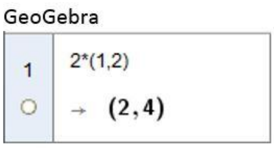
Vi ser at

$$2 \cdot \vec{p} = (2,4)$$

Vi har altså at

$$2 \cdot (1,2) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2,4)$$





Vi multipliserer en vektor med et tall ved å multiplisere begge vektorkoordinatene med tallet.

$$t \cdot (x,y) = (t \cdot x, t \cdot y)$$

Vi kan vise at denne setningen er riktig ved å skrive vektorene som en sum av enhetsvektorer.

$$\begin{aligned} t \cdot (x,y) &= t \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) \\ &= (t \cdot x \cdot \vec{e}_x + t \cdot y \cdot \vec{e}_y) \\ &= (t \cdot x, t \cdot y) \end{aligned}$$

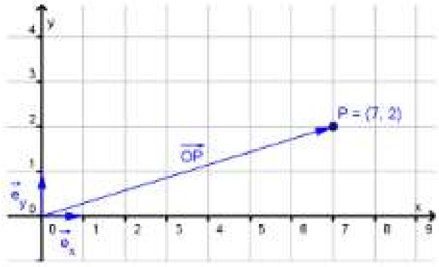
Posisjonsvektoren

[Posisjonsvektoren (98560)](#)

Vektoren fra origo *O*(0,0) til punktet *P*=(7,2), har koordinater

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 7 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y = (7, 2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ kalles for **posisjonsvektoren** til punktet *P*.



Posisjonsvektoren til et punkt er vektoren fra origo til punktet. Denne vektoren viser punktets posisjon i forhold til origo.

Posisjonsvektoren til et punkt (x, y) har koordinatene (x, y).

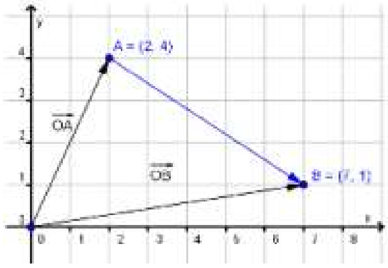
Vektorer mellom punkter

[Vektorer mellom punkter (98563)]

Gitt punktene *A*(2,4) og *B*(7,1).

Vi skal finne koordinatene til vektoren som har utgangspunkt i *A* og endepunkt i *B*, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Dette kan vi gjøre ved «å gå en omvei om origo».



Vi har

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

Vektoren fra punkt *A* til punkt *B*, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, kan uttrykkes ved hjelp av posisjonsvektorene til punktene *A* og *B*.

Det medfører at $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ kan skrives på koordinatform.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (7,1) - (2,4) = (7-2, 1-4) = (5, -$$

La nå punktene *A* og *B* være gitt som to generelle punkter i planet $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$. Også nå kan $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ uttrykkes ved hjelp av posisjonsvektorene til punktene *A* og *B*.

På koordinatform får vi

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Gitt punktene $A\,(x_1, y_1)$ og $B\,(x_2, y_2)$.

Da er $\qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Skalarproduktet til vektorer gitt på koordinat..

Skalarproduktet til vektorer gitt på koordinatform (98580)

Vi får en enkel regneregel for skalarproduktet når vektorene er gitt med koordinater.

(Husk at enhetsvektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ står vinkelrett på hverandre, og at enhetsvektorene har lengden 1.)

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y) \cdot (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y) \\
&= x_1\vec{e}_x \cdot x_2\vec{e}_x + x_1\vec{e}_x \cdot y_2\vec{e}_y + y_1\vec{e}_y \cdot x_2\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y \cdot y_2\vec{e}_y \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_y \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot y_2 \cdot 0 + y_1 \cdot x_2 \cdot 0 + y_1 \cdot y_2 \cdot 1 \\
&= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2
\end{aligned}
$$

For skalarproduktet mellom vektorer gitt med vektorkoordinater gjelder

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Eksempel

$$(2, 3) \cdot (4, 5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$$

Lengden av en vektor gitt på koordinatform

[Lengden av en vektor gitt på koordinatform (98584)]

Vi har tidligere vist at vi kan regne ut lengden av en vektor ved først å «prikke vektoren med seg selv» og så finne kvadratrota.

$$(\vec{a}) = \sqrt{\vec{a}^2}$$

For en vektor gitt på koordinatform får vi da

$$((x, y)) = \sqrt{(x, y)^2} = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lengden av vektoren (x, y) finner vi slik

$$((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eksempel

$((6, 8)) = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

GeoGebra

Avstanden mellom punkter i planet

[Avstanden mellom punkter i planet (98601)]

Vi har sett hvordan vi finner vektoren mellom to punkter i planet, og hvordan vi finner lengden av en vektor. **Avstanden mellom to punkter er det samme som lengden av vektoren mellom punktene.**

Gitt punktene $A\left(x_1, y_1\right)$ og $B\left(x_2, y_2\right)$. **Avstanden** mellom *A* og *B* er

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \left(\left(-x_1 + x_2, -y_1 + y_2\right)\right) = \sqrt{\left(-x_1 + x_2\right)^2 + \left(-y_1 + y_2\right)^2}$$

Eksempel

Gitt punktene *A*(2,3) og *B*(5,7). Avstanden mellom *A* og *B* er

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \left(\left(-2 + 5, -3 + 7\right)\right) = \sqrt{\left(-2 + 5\right)^2 + \left(-3 + 7\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} =$$

Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform

[Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform (98603)](#)

Formlene for lengden av, og skalarproduktet mellom, vektorer gitt på koordinatform gjør det enkelt å finne vinkelen mellom to vektorer.

Eksempel

Gitt vektorene

$$\vec{p} = (1, 2) \quad \text{og} \quad \vec{q} = (3, 1)$$

La α være vinkelen mellom vektorene.

Definisjonen av skalarproduktet gir da

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{p}) \cdot (\vec{q}) \cdot \cos\alpha$$

$$(1, 2) \cdot (3, 1) = ((1, 2)) \cdot ((3, 1)) \cdot \cos\alpha$$

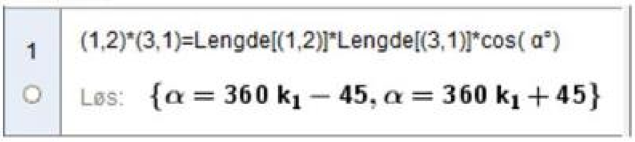
$$\cos\alpha = \frac{(1,2)\cdot(3,1)}{((1,2))\cdot((3,1))}$$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{45^\circ}}$$

GeoGebra



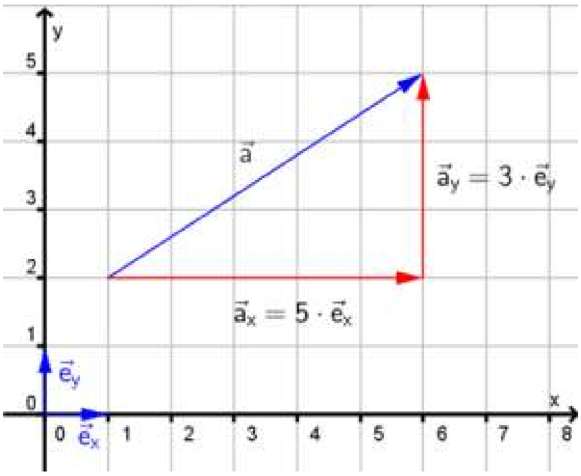
Dekomponering av vektorer

Dekomponering av vektorer (98606)

Da vi innførte vektorkoordinater, så vi hvordan en vektor, $\vec{a}$, kunne skrives som en sum av de to vektorene $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$. Av figuren ser vi at

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Når vi skriver en vektor som en sum, sier vi at vi dekomponerer vektoren.



Her er $\vec{a}$skrevet som en sum av to vektorer som er parallelle med koordinataksene. (Når vi dekomponerer en vektor, kan komponentene i prinsippet ha en hvilken som helst retning.)

På koordinatform kan vi skrive

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$
$$(5, 3) = (5, 0) + (0, 3)$$

Ortogonale og parallelle vektorer

[Ortogonale og parallelle vektorer (98611)](#)

Setningene om ortogonale og parallelle vektorer som vi har sett på tidligere, gjelder også når vektorene er plassert i et koordinatsystem.

Forutsatt at alle vektorene har lengde forskjellig fra null, gjelder:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t \cdot \vec{b} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Eksempel

Undersøk om $\vec{a} = (3, 4)$ og $\vec{b} = (6, 8)$ er parallelle.

Løsning

$$2 \cdot (3, 4) = (6, 8)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ fordi } 2 \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

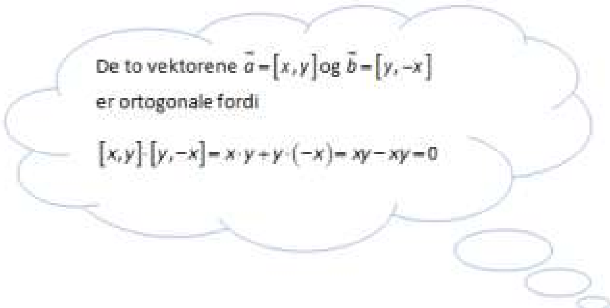
Eksempel

Undersøk om $\vec{a} = (3, 4)$ og $\vec{b} = (4, -3)$ er ortogonale.

Løsning

$$(3, 4) \cdot (4, -3) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ fordi } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Vektorregning anvendt på geometriske problemstillinger

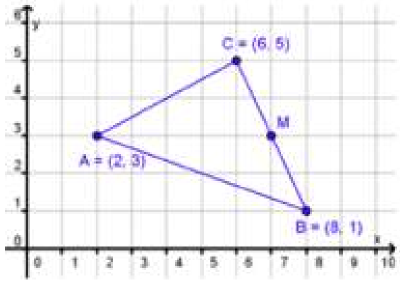
Hvordan finne koordinatene til et punkt?

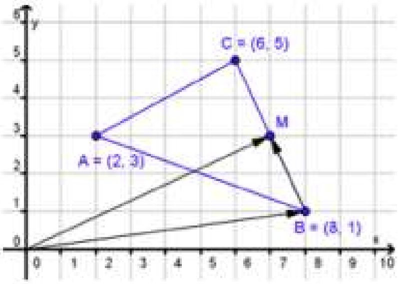
[Hvordan finne koordinatene til et punkt? (98641)]

Vi bruker ofte vektorregning for å løse geometriske problemstillinger. Her kommer noen eksempler som viser nyttige regneteknikker.

Gitt ABC i koordinatsystemet til høyre.
La *M* være midtpunktet på *BC*.

Vi ønsker å finne punktkoordinatene til punktet *M*.





Posisjonsvektoren til punktet *M* er

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$= (8,1) + \tfrac{1}{2}\,(6-8, 5-1)$$

$$= (8,1) + \tfrac{1}{2}\,(-2,4)$$

$$= (8,1) + (-1,2) = (7,3)$$

Dette betyr at punktet *M* har koordinatene (7,3).

Tips!

Når du skal finne koordinatene til et punkt, er det ofte lurt å finne posisjonsvektoren til punktet.

Å uttrykke en vektor på flere måter kan gi res..

[Å uttrykke en vektor på flere måter kan gi resultater (98656)]

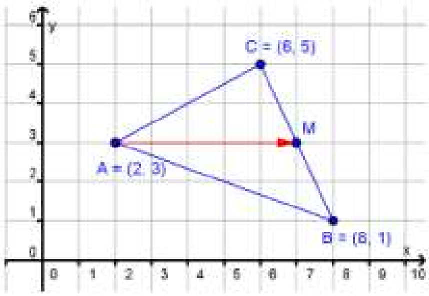
Vi bruker ofte vektorregning for å løse geometriske problemstillinger. Her kommer noen eksempler som viser nyttige regneteknikker.

Vi ønsker å uttrykke vektoren $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ved hjelp av vektorene $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
M er midtpunktet på *BC*. Se figuren.

Vektoren $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ kan uttrykkes på to måter
$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}$

Vektorene $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ er like lange og motsatt rettet. Det betyr at

$$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}$$
$$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BM}}$$
$$2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



Tips!

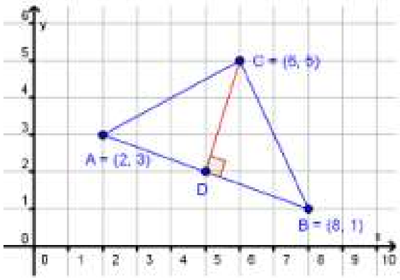
Mange geometriske problemstillinger kan løses ved å uttrykke en vektor på to ulike måter. Vi «følger to veier» for å komme fra utgangspunkt til endepunkt.

[Hvordan finne høyden i en trekant eller avstanden fra et punkt til en linje? (98678)]

Vi bruker ofte vektorregning for å løse geometriske problemstillinger. Her kommer noen eksempler som viser nyttige regneteknikker.

Vi fortsetter med samme trekant som ovenfor. Setningene for parallelle og ortogonale vektorer kan brukes til å finne en høyde i trekanten. Vi ønsker å finne høyden fra *C* på *AB*. Denne høyden er det samme som lengden av $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

Siden *D* ligger på $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, må vektorene $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ være parallelle. Det gir grunnlag for å sette opp følgende uttrykk for $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}} &= \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{CA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (-4, -2) + t\,(6, -2) \\ &= (-4 + 6t, -2 - 2t)\end{aligned}$$

Vektorene $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ er ortogonale.

Det gir

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0 \\ (-4 + 6t, -2 - 2t) \cdot (6, -2) &= 0 \\ (-4 + 6t) \cdot 6 + (-2 - 2t) \cdot (-2) &= 0 \\ -24 + 36t + 4 + 4t &= 0 \\ 40t &= 20 \\ t &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Posisjonsvektoren til punktet *D* blir $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 3) + \frac{1}{2}\,(6, -2) = (5, 2)$.

Det betyr at punktet *D* har koordinatene $(5, 2)$. Høyden i trekanten blir lik lengden av $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) = ((5 - 6, 2 - 5)) = ((-1, -3)) = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Tips!

Setningene for parallelle og ortogonale vektorer kan brukes i flere sammenhenger, for eksempel til å finne høyden i en trekant. Samme metode kan også brukes til å finne avstanden fra et punkt til en linje når vi kjenner, eller kan finne, to punkter på linja.

Vektorer i klatring

Forfatter: Anne Birgitte Fyhn
[Vektorer i klatring (46168)]

Filmen tar utgangspunkt i aktiviteten klatring, den avdekker noe av den tilsynelatende skjulte matematikken i klatring. Filmens bidrag til forståelse ligger ikke i at den vil vise alle aspekter ved vektorer, men at den kan være grundig på enkelte områder.

Vektorer i klatring
Kilde: Anne Fyhn

Om filmen "vektorer i klatring"

Av Anne Fyhn
Førsteamanuensis matematikkdidaktikk
Universitetet i Tromsø

Filmen tar utgangspunkt i aktiviteten klatring, den avdekker noe av den tilsynelatende skjulte matematikken i klatring. Filmens bidrag til forståelse ligger ikke i at den vil vise alle aspekter ved vektorer, men at den kan være grundig på enkelte områder. Utgangspunktet er 'kroppsgeometri': geometri som bygger på erfaringer elevene har med at kroppen deres lever og er til stede i verden. Filmen presenterer matematisk arkeologi (Skovsmose, 1994) på tre eksempler fra klatring, og den vil derfor trolig være mest relevant for elever som selv har noe klatreerfaring.

Ett læreplanmål er at elevene skal kunne "regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform". Mesteparten av filmen fokuserer på forståelse av hvordan vektorer kan adderes. Dette må være på plass før elevene kan lykkes med vektorregning. Filmen har ikke tatt utgangspunkt i læreplanmålene, men i en aktivitet som er populær bant en del ungdommer. Klatring er en aktivitet som de fleste elever vil kunne forestille seg, selv om de ikke har egen erfaring i klatring utendørs eller på klatrevegg. Noe av hensikten er å vise vektorer i denne aktiviteten. I etterkant har filmen blitt analysert i forhold til internasjonal forskning om undervisning om vektorer. Sammenhengen mellom trekantmetoden, parallellogram-metoden og dekomponering er viktig (Poynter & Tall, 2005). Filmen framhever relasjoner mellom disse tre aspektene ved vektorer.

Et annet læreplanmål er at elevene skal kunne "beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer". Filmen fokuserer på sammenhenger mellom begrepene vinkel og vektor, noe som samsvarer med Poynter & Talls (2005) konklusjon om at et av målene med undervisningen om vektorer må være å skape relasjoner mellom begreper. Virkningen av at en vinkel endrer størrelse blir problematisert, og elevene blir oppfordret til å finne ut hva som skjer. Dette er relevant for den grunnleggende ferdigheten å kunne uttrykke seg muntlig.

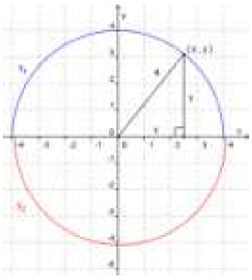
Referanser

Poynter, A. & Tall, D. (2005). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching, i D. Hewitt & A. Noyes (Red.) Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education, University of Warwick, s. 128-135. Lastet ned 11.januar 2009 fra http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip25-1/BSRLM-IP-25-1-17.pdf Skovsmose, O. (1994). Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

En sirkel i planet

En sirkel i planet

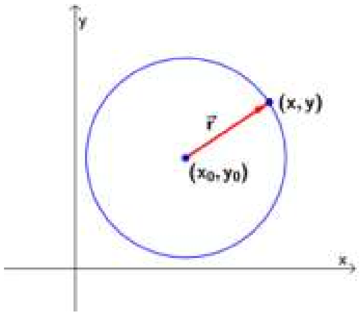
[En sirkel i planet (97340)]



Vi gjør oppmerksom på at vi har lagt til et nytt avsnitt, "1.9 En sirkel i planet" i geometrikapittelet i R1.

Utdanningsdirektoratet presiserer i "Vurderingsveiledning 2012" at eksamenskandidatene i R1 må kunne utlede sirkellikningen gjennom vektorregning på koordinatform, omforme en sirkellikning ved å bruke fullstendige kvadraters metode og kunne beskrive sirkelen som grafen til to funksjoner ved å omforme en sirkellikning fra implisitt form.

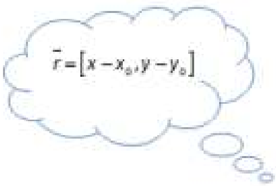
Til høyre ser du en sirkel med sentrum i punktet (x_0, y_0). Vi setter radius i sirkelen lik *r*. Sirkelen er samlingen av, eller det geometriske stedet for, alle punkter (x, y) som har avstanden *r* fra punktet (x_0, y_0).



Vi lar $\vec{r}$ være vektoren fra sentrum i sirkelen, (x_0, y_0), til et vilkårlig punkt på sirkelen, (x, y).

Da er $(\vec{r}) = r$.

Dette gir

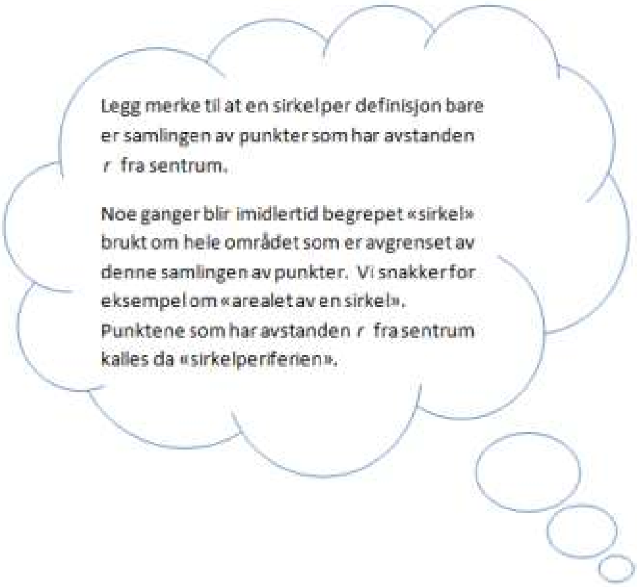


$$(\vec{r}) = r$$

$$((x - x_0, y - y_0)) = r$$

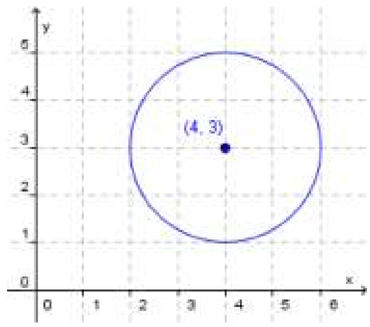
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Eksempel 1

En sirkel har sentrum i $(4,3)$. Radius i sirkelen, $r = 2$. Finn likningen for sirkelen.



Løsning

Vi finner likningen for sirkelen ved å sette $(\vec{r}) = 2$

$$(\vec{r}) = 2$$

$$((x-4, y-3)) = 2$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 2$$

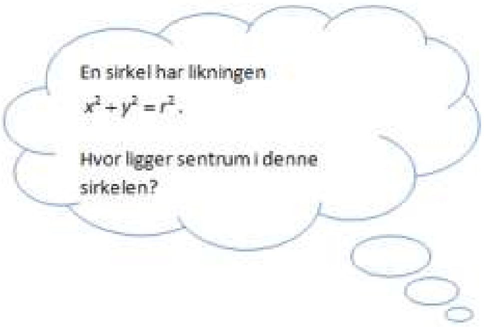
$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = 2^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

Eksempel 2

Likningen for en sirkel er gitt ved $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 5^2$. Bestem sentrum og radius i sirkelen.

Løsning



Hvis vi sammenlikner med likningen $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, ser vi at $x_0 = 2$, $y_0 = -4$ og $r = 5$.

Sirkelen har sentrum i $(2,-4)$ og $r = 5$
.

Når likningen for en sirkel er gitt på formen ovenfor, er det lett å finne sentrum og radius i sirkelen.

Men, en sirkel kan også for eksempel være gitt ved

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = -1$$

Gå videre i menyen for å finne svar på dette.

Omforme en sirkellikning ved å bruke fullstend..

[Omforme en sirkellikning ved å bruke fullstendige kvadraters metode (97374)]

Men, en sirkel kan også for eksempel være gitt ved

$$x^2+2x+y^2-6y=-1$$

Hvordan kan vi se at dette er likningen for en sirkel? Og - hvordan kan vi finne sentrum og radius i sirkelen?

Siden både *x* og *y* er opphøyd i andre potens (og har like koeffisienter), må dette være likningen for en sirkel.

For å finne sentrum og radius i sirkelen, må vi skrive om likningen slik at vi får den på formen $(x-x_0)^2+(y-y_0)=r^2$.

Uttrykkene $(x-x_0)^2$ og $(y-y_0)^2$ kalles fullstendige kvadrater.

I 1T lærte du å skrive om uttrykk for å lage fullstendige kvadrater. Nedenfor har vi tatt med to eksempler, men hvis du er usikker, bør du finne fram kapittelet «Tall og algebra» fra 1T og repetere dette skikkelig!

Eksempel 1

Er x^2-6x+9 et fullstendig kvadrat?

Løsning

Her er førstegradsleddet negativt. Vi må derfor prøve med andre kvadratsetning.

Siden andregradsleddet er x^2 og konstantleddet er 9, må $a=\sqrt{x^2}=x$ og $b=\sqrt{9}=3$.

Vi må da sjekke om førstegradsleddet er «det dobbelte produkt», det vil si 2*ab*.

Her er $2\mathrm{ab}=2\cdot x\cdot 3=6x$, altså lik førstegradsleddet i uttrykket x^2-6x+9.

Da er $x^2-6x+9=(x-3)^2$ og vi har et fullstendig kvadrat.

Eksempel 2

Legg til et konstantledd slik at uttrykket x^2+10x blir et fullstendig kvadrat.

Løsning

Her er førstegradsleddet positivt. Vi må derfor bruke første kvadratsetning.

Siden andregradsleddet er x^2, må $a=\sqrt{x^2}=x$.

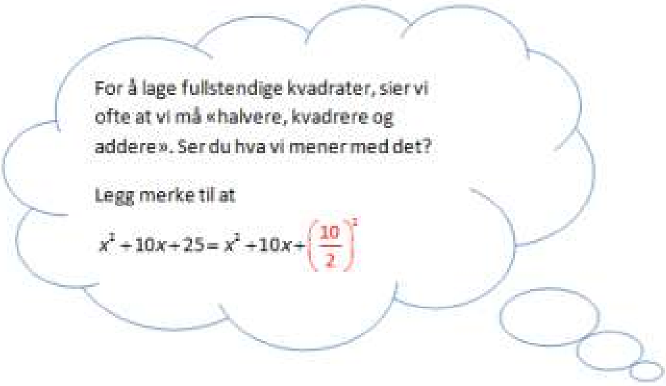
«Det dobbelte produktet», $2\mathrm{ab}=10x$.

Da er

$$b = \frac{10x}{2a} = \frac{10x}{2x} = 5$$

Vi får da at $b^2 = 25$ og det fullstendige kvadratet blir

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$



Så tilbake til sirkelen gitt ved likningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = -1$$

Vi sorterer leddene, og legger til det vi mangler for å få fullstendige kvadrater.

$$x^2+2x+y^2-6y=-1$$

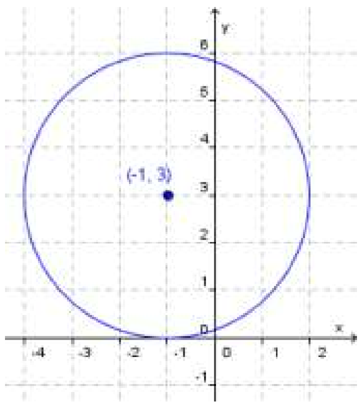
$$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$x^2+2x+1^2+y^2-6y+3^2=-1+1^2+3^2$$

$$\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}+\underbrace{y^2-6y+9}_{(y-3)^2}=-1+1+9$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$$

Dette er altså likningen for en sirkel med sentrum i $(-1, 3)$ og radius $r = 3$.



Sirkelen beskrevet med funksjoner

[Sirkelen beskrevet med funksjoner (97379)](#)

I forrige avsnitt beskrev vi sirkler ved å bruke algebraiske likninger. Vi skal nå undersøke om det er mulig å beskrive en sirkel ved hjelp en funksjon.

Vi tar utgangspunkt i sirkellikningen, $(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$ og ser om vi kan uttrykke *y* som funksjon av *x*.

$$(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(y-3)^2=9-(x+1)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$y=\pm\sqrt{9-(x+1)^2}+3 \quad , \; x\in[-4,2]$$

For at *y* skal være en funksjon av *x*, så må hver verdi av *x* gi én verdi av *y*.

Vi trenger derfor to funksjoner for å beskrive sirkelen

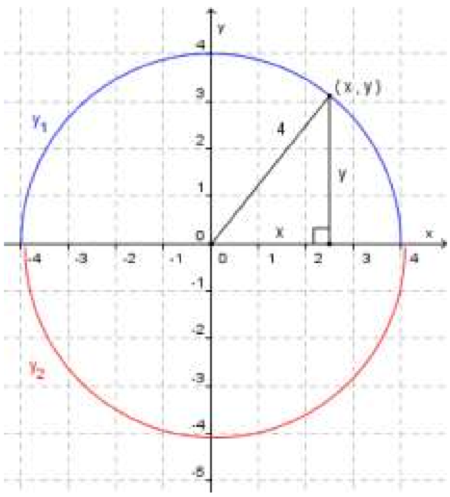
$$y_1=+\sqrt{9-(x+1)^2}+3$$

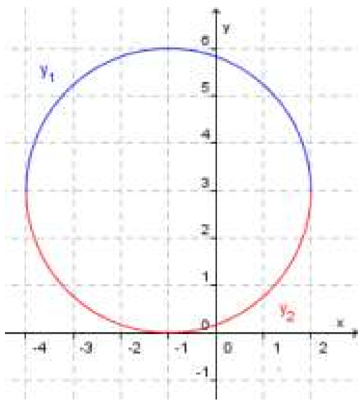
$$y_1=-\sqrt{9-(x+1)^2}+3$$

Vi tegner disse to funksjonene i et koordinatsystem og ser at de beskriver hver sin halvdel av sirkelen.

Sirkelen har sentrum i $(-1,3)$ og radius lik $\sqrt{9}=3$.

På samme måte kan en sirkel med sentrum i origo og radius fire beskrives ved likningen





$x^2+y^2=16$.

Eller ved de to funksjonene

$$y_1 = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$$

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet inn en rettvinklet trekant. Bruk Pytagoras' setning til å finne y uttrykt ved x.

Ser du at du får de to funksjonene ovenfor?

Algebra

Teori

Innledning

Innledning

Innledning (105502)

Ordet **algebra** har vi fått fra det arabiske ordet «al-jabr», som betyr å gjenopprette eller gjøre fullstendig. Den arabiske matematikeren Al-Khwârizmî (ca. år 800 e.Kr.) brukte ordet om den operasjonen han utførte for å forenkle likninger ved at han la til eller trakk fra like mye på begge sider av likhetstegnet.

Hva tenker du på når du hører ordet «algebra»? Bokstavregning? Likninger? Formler?

I dette kapitlet skal vi repetere noe av det du har lært tidligere. I tillegg skal du lære mer om hvordan du kan forenkle uttrykk, løse likninger og ulikheter og regne med logaritmer. Du skal også lære litt om implikasjon og ekvivalens, og hvordan du gjennomfører et matematisk bevis.

Hva tenker du på når du hører ordet «algebra»?

Mye av det vi skal arbeide med i dette kapittelet, er helt grunnleggende for matematikken. Jobb godt og lær deg dette skikkelig – det vil du ha igjen for senere når du skal arbeide med andre deler av faget!

Faktorisering

Faktorisering

Faktorisering (105507)

I matematikken trenger vi ofte å omforme, forenkle og trekke sammen uttrykk. For å gjøre det, må vi kunne **faktorisere**.

> **Å faktorisere vil si å skrive et uttrykk som et produkt av faktorer.**

Faktorisering av tall og enkle bokstavuttrykk

Fra grunnskolen er du kjent med brøker som bare består av tall. Du husker hvordan du kan skrive teller og nevner som produkt av primtall, for deretter å forkorte faktor mot faktor. Det du egentlig gjør, er å dele med samme tall i teller og nevner gjentatte ganger

$$\frac{504}{84}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{7}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{7}}=2\cdot 3=6$$

Når vi arbeider med matematiske uttrykk, erstatter vi ofte tall med bokstaver. De samme regnereglene gjelder fortsatt. Bokstavuttrykket nedenfor kan derfor faktoriseres og forkortes på samme måte

$$\frac{a^3b^2cd}{a^2bd}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot b\cdot c\cdot\cancel{d}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{d}}=a\cdot b\cdot c=abc$$

Ofte er uttrykk sammensatt av både tall og bokstaver, men alle uttrykk som inneholder bare **ett ledd**, faktoriseres etter samme mønster

$$36a^3b^2=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$$

Faktorisering av uttrykk som inneholder flere ledd

[Faktorisering av uttrykk som inneholder flere ledd (105546)](#)

Når et uttrykk består av **flere enn ett ledd**, bør du begynne med å sjekke om det er mulig å faktorisere ved hjelp av en eller flere av de tre metodene som er vist nedenfor.

1. Når **alle ledd** i uttrykket inneholder **samme faktor**, kan den felles faktoren settes utenfor parentes.

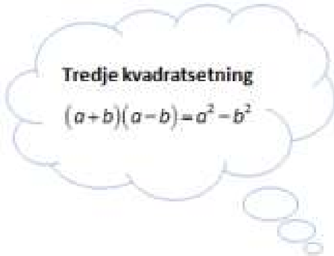
   Eksempel

   $2x^2 - 12x = 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x = 2x\,(x-6)$
   Ved å multiplisere kan du sjekke at du har faktorisert riktig.

   $2x\,(x-6) = 2x \cdot x - 2x \cdot 6 = 2x^2 - 12x$

2. Når uttrykket består av **2 kvadratledd med minustegn mellom**, kan du bruke **tredje kvadratsetning (konjugatsetningen)** baklengs.

   Eksempel

   $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)\,(x-2)$
   $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)\,(2x-5)$
   $(x+1)^2 - 9 = (x+1)^2 - 3^2$
   $= (x+1+3)\,(x+1-3) = (x+4)\,(x-2)$
   $x^2 - 3 = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x+\sqrt{3}\right)\,\left(x-\sqrt{3}\right)$

   $3x^2 - 27 = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 3^2 = 3\left(x^2 - 3^2\right) = 3\,(x+3)\,(x-3)$
   Merk at her satte vi felles faktor utenfor parentes først.

3. Når uttrykket er **et fullstendig kvadrat**, kan du bruke **første eller andre kvadratsetning** baklengs.

   Eksempel

   $x^2 - 12x + 36$
   $= x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2$
   $= (x-6)^2$
   $2x^2 + 12x + 18$
   $= 2\left(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2\right)$
   $= 2(x+3)^2$

Faktorisering av andregradspolynomer med nullpunktmetoden

Faktorisering av andregradspolynomer med nullpunktmetoden (105595)

Et **polynom** består av et eller flere ledd der hvert ledd er av typen $\text{konstant} \cdot x^n$, der *n* er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket kalles graden. Uttrykket $x - 4 + 2x^3$ er et **tredjegradspolynom**, fordi den høyeste eksponenten av *x* her er tre.

Uttrykket $3x + 3$ er et **polynom av første grad**, fordi *x* er av første grad. Uttrykket $2x^2 - 2x + 4$ er et **polynom av andre grad**, fordi vi har et ledd hvor *x* er opphøyd i andre potens. Tallet to er den høyeste eksponenten *x* har. Et eksempel på **et tredjegradspolynom** er $x - 4 + 2x^3$, fordi den høyeste eksponenten av *x* her er tre.

Det er få andregradspolynomer som lar seg faktorisere ved å bruke kvadratsetningene baklengs, og/eller ved å sette felles faktor utenfor parentes. Men i 1T lærte du en metode som ofte kalles **nullpunktmetoden**, fordi vi starter med å **finne nullpunktene** til utrykket som skal faktoriseres.

Nullpunktmetoden

$$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

der x_1 og x_2 er løsningene av den generelle andregradslikningen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$.

Når det bare finnes én løsning av andregradslikningen, er $x_1 = x_2$.

Når andregradslikningen ikke har løsninger, kan ikke uttrykket faktoriseres.

Når du bruker nullpunktmetoden til å faktorisere andregradsuttrykk, kan du finne nullpunktene ved å bruke *abc*-formelen eller ved hjelp av et digitalt verktøy. Digitale verktøy har dessuten ofte egne kommandoer for å faktorisere uttrykk. (Finn ut om du kan faktorisere uttrykk direkte ved hjelp av det digitale verktøyet du bruker!)

Eksempel

Vi skal faktorisere uttrykket $2x^2 - x - 3$ ved å bruke nullpunktmetoden.
Vi setter uttrykket lik 0, får en andregradslikning og løser denne.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ x_1 &= \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 &= \frac{1-5}{4} = -1 \end{aligned}$$

Dette betyr at
$2x^2 - x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - (-1)\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + 1\right) = \left(2x - 3\right)\left(x + 1\right)$.

Faktorisering av tredjegradspolynomer

Faktorisering av tredjegradspolynomer (105607)

Polynomet $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ er et eksempel på et tredjegradspolynom. Den høyeste eksponenten har, er tre. Polynomet inneholder et tredjegradsledd, et andregradsledd, et førstegradsledd og et konstantledd.

Vi har sett at vi kan faktorisere andregradspolynomer ved å bruke nullpunktmetoden. Vi må da løse andregradslikninger. Tilsvarende kan tredjegradspolynomer faktoriseres ved først å løse tredjegradslikninger. Å løse tredjegradslikninger ligger utenfor kompetansemålene i R1. Når vi skal faktorisere tredjegradspolynomer, bruker vi derfor en annen metode.

Vi har sett at for et generelt andregradspolynom gjelder

$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ hvor x_1 og x_2 er nullpunkter til $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$.

Tilsvarende kan det vises at for et generelt tredjegradspolynom gjelder

$\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)$ hvor x_1, x_2 og x_3 er nullpunktene til $\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$.

Dette betyr at hvis vi kan finne et **nullpunkt** x_1 , for tredjegradspolynomet (for eksempel ved prøving og feiling), så vet vi at $\left(x - x_1\right)$ må være en faktor i uttrykket. Med andre ord er det mulig å dividere polynomet vårt med $\left(x - x_1\right)$. Dette kalles **polynomdivisjon**. Det vi da står igjen med er et andregradspolynom som vi kan faktorisere ved å bruke **nullpunktmetoden**.

Polynomdivisjon

Polynomdivisjon (105623)

Du har tidligere lært å dividere tall. Nå skal vi dividere polynomer. Framgangsmåten er ganske lik. Du husker sikkert også at noen divisjoner «gikk opp», vi fikk ingen rest når vi dividerte. I slike tilfeller kunne vi bruke resultatet av divisjonen til å faktorisere tallet vi startet med.

Eksempel

$$\begin{array}{l} 231 : 7 = 33 \\ \underline{21} \\ \ \ 21 \\ \ \ \underline{21} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

Dette betyr at $231 = 33 \cdot 7$.

På tilsvarende måte skal vi bruke polynomdivisjon når vi skal faktorisere tredjegradspolynomer.

Eksempel

Vi ser på tredjegradspolynomet $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

Vi setter inn $x = 1$ i polynomet og får $2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 2 - 7 + 2 + 3 = 0$.

Dette betyr at $x = 1$ er et nullpunkt for polynomet. $(x - 1)$ er en faktor i $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3)$ og divisjonen $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) : (x - 1)$ vil «gå opp».

Vi skal nå se på hvordan vi utfører selve divisjonen.

Selve divisjonen:

$$\begin{array}{l} (2x^3-7x^2+2x+3):(x-1)=2x^2-5x-3 \\ \underline{-(2x^3-2x^2)} \\ \qquad -5x^2+2x+3 \\ \qquad \underline{-(-5x^2+5x)} \\ \qquad\qquad -3x+3 \\ \qquad\qquad \underline{-(-3x+3)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Forklaring:

$2x^2 \cdot x = 2x^3$ (Hva må du gange x med for å få $2x^3$?)

$\underline{(x-1)\cdot 2x^2 = (2x^3-2x^2)}$

$(2x^3-7x^2+2x+3)-(2x^3-2x^2) = -5x^2+2x+3$

$\underline{-5x \cdot x = -5x^2 \text{ og } (x-1)\cdot(-5x) = -5x^2+5x}$

$-5x^2+2x+3-(-5x^2+5x) = -3x+3$

$\underline{(x-1)\cdot(-3) = -3x+3}$

$-3x+3-(-3x+3) = 0$

Vi fikk «rest lik 0». Det betyr at divisjonen «gikk opp».

Vi kan da skrive

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x - 3)\,(x - 1)$$

Tredjegradspolynomet er dermed faktorisert i et andregradspolynom og et førstegradspolynom.
Andregradspolynomet kan vi nå faktorisere ved hjelp av nullpunktmetoden.

Vi setter $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Ved å bruke *abc*-formelen får vi

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$
$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Det betyr at
$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x-3\right)\left(x-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = 2\left(x-3\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = \left(x-3\right)\left(2x+1\right)$$

Her har vi multiplisert inn 2-tallet i den siste parentesen.

Fullstendig faktorisering av tredjegradsuttrykket blir

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = \left(2x^2 - 5x - 3\right)\left(x-1\right) = \left(x-3\right)\left(2x+1\right)\left(x-1\right)$$

Forkorte og trekke sammen rasjonale uttrykk

Rasjonale uttrykk som inneholder andregradspolynomer

[Forkorte og trekke sammen rasjonale uttrykk (105808)](#)

Vi skal nå se på hvordan vi kan forenkle og trekke sammen **brøker med polynomer både i teller og nevner**. Slike uttrykk kaller vi **rasjonale uttrykk**.

Vi får bruk for det vi har lært om faktorisering og brøkregning.

Vi ser først på uttrykk som bare inneholder første - og andregradspolynomer.

Rasjonale uttrykk som inneholder andregradspolynomer

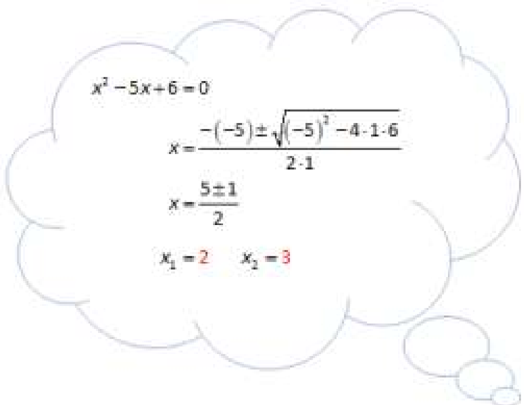
Gjennom tre eksempler skal vi illustrere hvordan du kan omforme og forenkle rasjonale uttrykk som inneholder andregradspolynomer.

Eksempel 1

Forkort brøken

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

Løsning
Først faktoriserer vi telleren.
Telleren x^2-5x+6 har nullpunktene $x=2$ og $x=3$.



Dermed er

$$x^2-5x+6=(x-1)(x-3)$$

Da er

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=x-2$$

Eksempel 2

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2}$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-3\pm1}{2}$$

$$x_1=-1 \qquad x_2=-2$$

Løsning
Telleren x^2+3x+2 har nullpunktene
$x=-1$ og $x=-2$.

Dermed er

$$\begin{aligned} x^2+3x+2 &= (x-(-1))\,(x-(-2)) \\ &= (x+1)\,(x+2) \end{aligned}$$

Da er

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2}=\frac{\cancel{(x+1)}\,(x+2)}{2\,\cancel{(x+1)}}=\frac{x+2}{2}$$

Merk at her måtte vi først sette 2 utenfor parentes i nevneren.

Eksempel 3

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Løsning
Nevneren x^2-4x+3 har nullpunktene $x=1$ og $x=3$.

$$x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{4\pm2}{2}$$

$$x_1=1 \qquad x_2=3$$

Det gir at

$$x^2-4x+3=(x-1)\,(x-3)$$

Da er

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3} \\
&=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} && \text{Fellesnevner er } 2\,(x-1)\,(x-3). \\
&=\frac{1\cdot(x-3)}{2(x-1)\cdot(x-3)}+\frac{2\cdot2(x-1)}{(x-3)\cdot2(x-1)}-\frac{(x-2)\cdot2}{(x-1)(x-3)\cdot2} && \text{Vi utvider hver brøk med den} \\
&=\frac{x-3}{2(x-1)(x-3)}+\frac{4x-4}{2(x-3)(x-1)}-\frac{(2x-4)}{2(x-1)(x-3)} && \text{faktoren som mangler } i \text{ fellesnev} \\
&=\frac{x-3+4x-4-(2x-4)}{2(x-1)(x-3)} && \text{Vi setter på felles brøkstrek.} \\
&=\frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)} && \text{Vi trekker sammen } i \text{ teller.} \\
&=\frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)} \\
&=\frac{3\left(\cancel{x-1}\right)}{2\,\cancel{(x-1)}\,(x-3)} && \text{Vi forkorter der det er mulig.} \\
&=\frac{3}{2(x-3)}
\end{aligned}$$

Du husker vel hvordan vi **utvider** og **forkorter brøker**?

1. Vi **utvider en brøk** ved å multiplisere teller og nevner med samme tall.
   Da endrer ikke brøken verdi!

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$
$5 = \frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{20}{4}$

2. VI **forkorter en brøk** ved å dividere teller og nevner med samme tall.
   Da endrer ikke brøken verdi!

   $\frac{4}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{4}}{2 \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{2}$

Rasjonale uttrykk som inneholder tredjegradspolynomer

[Rasjonale uttrykk som inneholder tredjegradspolynomer (105839)]

Når vi skal forenkle rasjonale uttrykk som inneholder polynomer, må vi først faktorisere polynomene.

Eksempel 1

Vi ønsker å forkorte brøken

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^2-4x}$$

Nevneren kan faktoriseres ved å sette felles faktor utenfor parentes

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^2-4x}=\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x(x-4)}$$

Hvis brøken skal kunne forkortes, må telleren inneholde minst en av faktorene i nevneren. Vi ser først at telleren ikke blir null når vi setter inn $x=0$. Det betyr at teller ikke er delelig med x.

Vi undersøker så om telleren er delelig med $x-2$.

Hvis telleren er delelig med $x-2$, vil polynomet x^3-x^2-4x+4 være lik 0 når $x=2$.

Vi setter inn $x=2$ og regner ut

$$2^3-2^2-4\cdot 2+4=0$$

Svaret ble 0. Da vil følgende polynomdivisjon «gå opp»

$$\begin{array}{l}
\quad x^3-x^2-4x+4:(x-2)=x^2+x-2\\
-\underline{\left(x^3-2x^2\right)}\\
\qquad x^2-4x+4\\
\quad -\underline{\left(x^2-2x\right)}\\
\qquad\quad -2x+4\\
\qquad\quad -\underline{(2x+4)}\\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi har da faktorisert tredjegradpolynomet i telleren og funnet at

$$x^3-x^2-4x+4=(x-2)\left(x^2+x-2\right)$$

Vi kan da forkorte brøken

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^2-4x}=\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x-2\right)}{2x\,\cancel{(x-2)}}=\frac{x^2+x-2}{2x}$$

Eksempel 2

Vi ønsker å forkorte brøken

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-1}$$

Nevneren kan faktoriseres ved å bruke tredje kvadratsetning

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-1}=\frac{x^3-3x^2-x+3}{(x-1)(x+1)}$$

Hvis brøken skal kunne forkortes, må telleren inneholde minst en av faktorene i nevneren.

Vi undersøker først om telleren er delelig med $x - 1$.

Hvis telleren er delelig med $x-1$, vil polynomet $x^3 - 3x^2 - x + 3$ være lik 0 når $x = 1$.

Vi setter inn $x = 1$ og regner ut

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$$

Svaret ble 0. Da er polynomet delelig med $x - 1$.

Vi undersøker så om telleren er delelig med $x + 1$.

Vi setter inn $x = -1$ og regner ut

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$$

Svaret ble 0. Da er polynomet også delelig med $x + 1$.

Siden polynomet er delelig både med $x - 1$ og $x + 1$, må det være delelig med produktet $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$.

Vi utfører divisjonen

$$\begin{array}{l} \quad x^3 - 3x^2 - x + 3 : \left(x^2 - 1\right) = x - 3 \\ \underline{-\left(x^3 - x\right)} \\ \qquad -3x^2 + 3 \\ \quad \underline{-\left(-3x^2 + 3\right)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Vi har nå faktorisert tredjegradspolynomet fullstendig

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x-1)(x-3)$$

Vi kan da forkorte brøken

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}\ \cancel{(x+1)}\ (x-3)}{\cancel{(x-1)}\ \cancel{(x+1)}} = x - 3$$

Likninger

Tredjegradslikninger

Likninger (107296)

I 1T arbeidet du med likninger av første og andre grad og med likninger som inneholdt brøkuttrykk.

Nå skal du lære å løse noen tredjegradslikninger. Du skal også bli bedre kjent med likninger med rasjonale uttrykk.

Husker du hvordan vi løser andregradslikninger?

Tredjegradslikninger

En **tredjegradslikning** er en likning som kan ordnes slik at vi får et **tredjegradspolynom** på venstre side av likhetstegnet og 0 på høyre side. En generell tredjegradslikning ser da slik ut

$$\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d = 0$$

Vi har lært å faktorisere tredjegradspolynomer når vi har et kjent nullpunkt. Da er vi også i stand til å løse tredjegradslikninger med et kjent nullpunkt.

Siden $\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)$ hvor x_1, x_2 og x_3 er nullpunktene til $\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$, blir løsningen av likningen

$$\begin{aligned} \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d &= 0 \\ a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) &= 0 \\ x = x_1, \quad x = x_2 \quad &\text{eller } x = x_3 \end{aligned}$$

Vi faktoriserte tidligere uttrykket $2x^3 + 7x^2 + 2x + 3$, og fikk at

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 2\left(x - 3\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(x - 1\right)$$

Tredjegradslikningen $2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 0$ kan da løses slik

$$\begin{aligned} 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 &= 0 \\ 2\left(x - 3\right)\left(x + \tfrac{1}{2}\right)\left(x - 1\right) &= 0 \\ x = 3, \quad x = -\tfrac{1}{2} \quad &\text{eller } x = 1 \end{aligned}$$

Vi tar med et eksempel som viser hele framgangsmåten.

Eksempel

Vi skal løse tredjegradslikningen $3x^3 + 2x^2 = 3x + 2$.

Først ordner vi likningen slik at vi får 0 på høyre side.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 &= 3x + 2 \\ 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Så må vi ved hjelp av prøving og feiling finne en løsning av likningen.

Det er ofte lurt å prøve med $(x - 1)$ først.

$$\begin{aligned} &\text{Venstre side: } 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0 \\ &\text{Høyre side: } 0 \end{aligned}$$

Full klaff med en gang! Vi har dermed vist at $(x-1)$ er en faktor i uttrykket $3x^3+2x^2-3x-2$, og vi foretar polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
\left(3x^3+2x^2-3x-2\right):(x-1)=3x^2+5x+2 \\
-\underline{\left(3x^3-3x^2\right)} \\
\quad 5x^2-3x-2 \\
\quad -\underline{\left(5x^2-5x\right)} \\
\qquad 2x-2 \\
\qquad -\underline{(2x-2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Vi har altså

$$3x^3+2x^2-3x-2=(x-1)\left(3x^2+5x+2\right)$$

Vi finner så nullpunktene til $3x^2+5x+2$

$$\begin{aligned}
3x^2+5x+2&=0 \\
x&=\tfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\tfrac{-5\pm1}{6} \\
x_1&=-1 \quad x_2=-\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Tredjegradslikningen blir

$$\begin{aligned}
3x^3+2x^2&=3x+2 \\
3x^3+2x^2-3x-2&=0 \\
3\,(x-1)\,(x+1)\left(x+\tfrac{2}{3}\right)&=0
\end{aligned}$$

og har altså løsningene $x=1,\ \ x=-1\ \ \text{eller}\ x=-\frac{2}{3}$

Rasjonale likninger

Rasjonale likninger (107305)

Rasjonale likninger er **likninger som inneholder rasjonale uttrykk**.

Ved å **multiplisere med fellesnevneren** på begge sider av likhetstegnet får vi **en likning uten brøker**. For å finne fellesnevneren må vi faktorisere nevnerne.

Nevneren i en brøk kan aldri være null. Det er derfor **utelukket at en løsning av likningen kan være et tall som gir null i en nevner**. (Dette kalles av og til for «falske løsninger».) Når vi har funnet fellesnevneren på faktorisert form, er det lett å se hvilke verdier for den ukjente som må utelukkes.

Eksempel 1 (uten falske løsninger)

Vi skal løse likningen $\frac{1}{x^2-1}+\frac{x+4}{4x-4}=1$

Vi begynner med å faktorisere nevnerne og finne fellesnevner

$$\begin{array}{lll} & x^2-1=(x-1)(x+1) & \textbf{3. kvadratsetning} \\ & \underline{4x-4=4(x-1)} & \textbf{Felles faktor} \\ \textbf{Fellesnevner} & 4(x-1)(x+1) & \end{array}$$

Fellesnevneren blir $4(x-1)(x+1)$, og da ser vi fort at $x\neq -1$ **og** $x\neq 1$ fordi tallene –1 og 1 gir 0 i nevneren.

Vi fortsetter med å multiplisere hvert ledd på begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren og forkorter så faktor mot faktor i hvert ledd

$$\begin{gathered} \frac{1}{x^2-1}+\frac{x+4}{4x-4}=1 \quad x\neq -1,\ x\neq 1 \\ \frac{1}{\cancel{(x-1)(x+1)}}\cdot 4\,\cancel{(x-1)(x+1)}+\frac{x+4}{\cancel{4(x-1)}}\cdot \cancel{4(x-1)}\,(x+1)=1\cdot 4(x-1)(x+1) \\ 4+(x+4)(x+1)=4\cdot\left(x^2-1\right) \\ 4+x^2+x+4x+4=4x^2-4 \\ -3x^2+5x+12=0 \\ x_1=-\frac{4}{3}\ \ x_2=3 \end{gathered}$$

Til slutt kontrollerer vi svaret vårt: I dette eksempelet gir ingen av våre løsninger null i nevner, så begge løsningene aksepteres.

Legg merke til hvor elegant vi omformer den rasjonale likningen til en likning uten brøker ved å multiplisere alle ledd i likningen med fellesnevneren. **Du må huske på at dette kan du bare gjøre med likninger, og ikke med rasjonale uttrykk**. Rasjonale uttrykk må behandles, som vist ovenfor, ved at brøker utvides og forkortes. Det er mange som gjør feil her!

Eksempel 2 (to falske løsninger)

Vi skal løse likningen $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x^2+x-2}$

Nevneren $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, og dette blir også fellesnevneren. Vi ser da at tallene 1 og –2 må utelukkes som eventuelle løsninger av likningen.

Vi fortsetter med å multiplisere hvert ledd på begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren og forkorter faktor mot faktor i hvert ledd

$$\frac{x}{\cancel{x-1}}\cancel{(x-1)}\,(x+2)-\frac{1}{\cancel{x+2}}(x-1)\,\cancel{(x+2)}=\frac{3}{\cancel{x^2+x-2}}\cancel{(x-1)\,(x+2)}\quad x\neq$$

$$
\begin{aligned}
x\,(x+2)-(x-1)&=3\\
x^2-2x-x+1-3&=0\\
x^2+x-2&=0\\
x&=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}\\
x&=\frac{-1\pm3}{2}\\
x_1&=1\ \ x_2=-2
\end{aligned}
$$

Vi kontrollerer igjen svaret, og ser at vi har allerede utelukket begge disse løsningene.
Likningen har dermed ingen løsning.

Ulikheter

Ulikheter av første grad

Ulikheter (107361)

I 1T kurset lærte du hvordan du løser ulikheter av første og andre grad. Vi begynner med litt repetisjon.

Hva er en ulikhet?

Ulikheter av første grad

I 1T lærte du at du kan løse **ulikheter av første grad** nesten på samme måte som du løser likninger av første grad. Den eneste forskjellen er at du må snu ulikhetstegnet hvis du multipliserer eller dividerer med negative tall.

Eksempel

Gitt ulikheten

$$x < 5x - 4$$

Løsning

$$\begin{aligned} x &< 5x - 4 \\ x - 5x &< -4 \\ -4x &< -4 \\ \frac{-4x}{-4x} &> \frac{-4}{-4} \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Ulikheter av andre grad

Ulikheter av andre grad (107367)

I eksempelet om ulikheter av første grad kunne vi altså løse ulikheten direkte. Men for ulikheter av høyere grad må vi gjøre det på en annen måte.

Gitt ulikheten

$$x^2 < 5x - 4$$

Vi ordner ulikheten slik at vi får null på høyre side.

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Vi finner så nullpunktene til uttrykket $x^2 - 5x + 4$ ved å bruke for eksempel *abc*-formelen

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Vi vet nå at uttrykket $x^2 - 5x + 4$ er lik 0 når $x = 1$ og når $x = 4$. Det er bare for disse *x*-verdiene et slikt andregradsuttrykk kan skifte fortegn.

Det betyr at uttrykket enten er positivt eller negativt for alle *x*-verdier i hvert av de tre intervallene $(\leftarrow, 1)$,$(1, 4)$ og $(4, \rightarrow)$. For å avgjøre om uttrykket er positivt eller negativt i hvert av intervallene, kan vi ta «stikkprøver» for en *x*-verdi i hvert intervall.

Vi vet at uttrykket kan faktoriseres slik at $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$. Det er lettest å bruke det faktoriserte uttrykket når vi tar stikkprøvene.

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

For $x = 0$ får vi

$$(0 - 4)(0 - 1) = (-4) \cdot (-1) \text{ Uttrykket er positivt.}$$

For $x = 2$ får vi

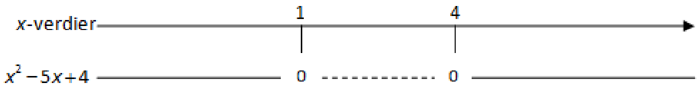
$$(2 - 4)(2 - 1) = (-2) \cdot (1) \text{ Uttrykket er negativt.}$$

For $x = 5$ får vi

$$(5 - 4)(5 - 1) = (1) \cdot (4) \text{ Uttrykket er positivt.}$$

Det er ikke nødvendig å regne ut verdien i parentesene. Det som betyr noe er fortegnene på parentesuttrykkene.

For å få en oversikt over situasjonen setter vi opp et **fortegnsskjema**. Det består av en **tallinje** som viser -verdiene, og en **fortegnslinje** som viser fortegnet til uttrykket i de aktuelle intervallene. **Heltrukket linje** markerer at uttrykket er positivt i dette tallintervallet, og **stiplet linje** markerer at uttrykket er negativt. En «0» viser at uttrykket er lik null for denne *x* -verdien.



Vår oppgave var å finne ut for hvilke verdier av *x* det stemte at $x^2 < 5x - 4$. Det er det samme som å finne ut når $x^2 - 5x + 4 < 0$. Ut fra fortegnslinjen er det nå lett å finne løsningen på oppgaven.

Løsningen på oppgaven er at *x* må ligge mellom 1 og 4, dvs. $x \in (1, 4)$. Merk at siden uttrykket vårt skulle være mindre enn null så skal ikke 1 og 4 være med i løsningen.

Ulikheter av tredje grad

Ulikheter av tredje grad (107375)

Ulikheter av tredje grad løses på tilsvarende måte som ulikheter av andre grad.

Eksempel

Vi skal løse ulikheten

$$-4x^2 < x - 4 - x^3$$

Vi ordner ulikheten slik at vi får null på høyre side. Da kan vi faktorisere venstresiden, og ulikheten kan løses ved å studere fortegnet til det faktoriserte uttrykket.

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0$$

Vi prøver oss fram og finner at uttrykket $x^3 - 4x^2 - x + 4$ blir null for $x = 1$.

$$1^3 - 4 \cdot 1^2 - 1 + 4 = 1 - 4 - 1 + 4 = 0$$

Det viser at $(x - 1)$ er en faktor i $x^3 - 4x^2 - x + 4$.

Vi utfører så polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 4x^2 - x + 4\right) : (x - 1) = x^2 - 3x - 4 \\ \underline{-\left(x^3 - x\right)} \\ \quad -3x^2 - x + 4 \\ \quad \underline{-\left(-3x^2 + 3x\right)} \\ \qquad -4x + 4 \\ \qquad \underline{-(-4x + 4)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Vi setter $x^2 - 3x - 4 = 0$ og finner nullpunktene

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ x &= \tfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \tfrac{3 \pm 5}{2} \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Vi har dermed nullpunktene $x = -1$, $x = 1$ og $x = 4$.

Det betyr at

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x + 1)(x - 1)(x - 4)$$

Ulikheten kan nå skrives slik

$$\begin{aligned} x^3 - 4x - x + 4 &< 0 \\ (x + 1)(x - 1)(x - 4) &< 0 \end{aligned}$$

Vi tar nå «stikkprøver» for å finne ut hvilket fortegn uttrykket $(x + 1)(x - 1)(x - 4)$ har i hvert av de fire intervallene $(\leftarrow, -1),\ (-1, 1),\ (1, 4)\ \text{og}\ (4, \rightarrow)$.

For $x = -2$ får vi

$$(-2 + 1)(-2 - 1)(-2 - 4) = (-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \text{ Uttrykket er negativt.}$$

For $x = 0$ får vi

$$(0 + 1)(0 - 1)(0 - 4) = (+1) \cdot (-1) \cdot (-4) \text{ Uttrykket er positivt.}$$

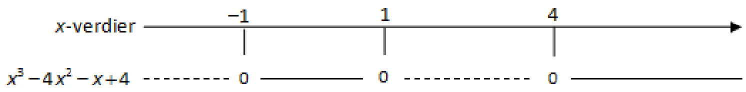
For $x = 2$ får vi

$$(2+1)\,(2-1)\,(2-4)=(+3)\cdot(+1)\cdot(-2)$$ Uttrykket er negativt.

For $x=5$ får vi

$$(5+1)\,(5-1)\,(5-4)=(+6)\cdot(+4)\cdot(+1)$$ Uttrykket er positivt.

For å få en oversikt over situasjonen setter vi opp et **fortegnsskjema**.



Vår oppgave var å finne ut for hvilke verdier av *x* det var slik at $-4x^2<x-4-x^3$, det vil si at $x^3-4x^2-x+4<0$. Løsningen på oppgaven blir da at *x* må være mindre enn –1 eller ligge mellom 1 og 4.

Løsning $x\in(\leftarrow,-1)\cup(1,4)$

Rasjonale ulikheter

Rasjonale ulikheter (107384)

Når vi skal løse en rasjonal likning, multipliserer vi først med fellesnevneren på begge sider av likhetstegnet for å få en likning uten brøker. Det kan vi ikke gjøre når vi har en brøkulikhet med *x* i nevner. Hvorfor?

Jo, problemet er at når vi har en brøkulikhet med *x* i nevner, vil nevneren være negativ for noen *x*-verdier og positiv for andre *x*-verdier. Da blir det vanskelig å forholde seg til regelen som sier at vi må snu ulikhetstegnet når vi multipliserer en ulikhet med et negativt tall.

Vi løser **rasjonale ulikheter** på tilsvarende måte som andregrads- og tredjegradsulikheter. Vi må samle alle ledd på den ene siden av ulikhetstegnet og faktorisere.

Eksempel

Vi skal løse ulikheten

$$\frac{x+1}{2x-1} \geqslant 1 \quad x \neq \frac{1}{2}$$

Vi må forutsette at *x* er forskjellig fra $\frac{1}{2}$, for ellers får vi null i nevneren.

Vi ordner ulikheten slik at vi får null på høyre side

$$\frac{x+1}{2x-1} \geqslant 1$$
$$\frac{x+1}{2x-1} - 1 \geqslant 0$$

Vi trekker sammen til **en** brøk og faktoriserer teller og nevner hvis nødvendig

$$\frac{x+1}{2x-1} - 1 \cdot \frac{(2x-1)}{(2x-1)} \geqslant 0$$
$$\frac{x+1-2x+1}{2x-1} \geqslant 0$$
$$\frac{2-x}{2x-1} \geqslant 0$$

Telleren er null når $2 - x = 0$, det vil si når $x = 0$. Nevneren er null når $2x - 1 = 0$, det vil si når $x = \frac{1}{2}$. Det er bare for disse verdiene av *x* at brøken kan skifte fortegn. Vi tar «stikkprøver» og undersøker fortegnet til brøken i de aktuelle intervallene $\left(\leftarrow, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ og $(2, \rightarrow)$.

For $x = 0$ får vi

$$\frac{2-0}{2\cdot(0)-1} = \frac{(+2)}{(-1)}$$ Uttrykket er negativt.

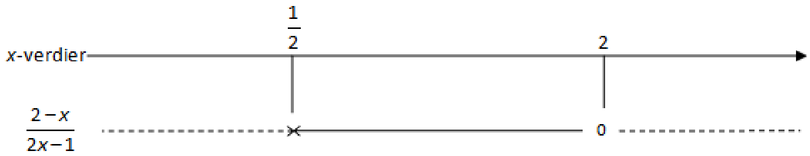
For $x = 1$ får vi

$$\frac{2-1}{2\cdot(1)-1} = \frac{(+1)}{(+1)}$$ Uttrykket er positivt.

For $x = 3$ får vi

$$\frac{2-3}{2\cdot(3)-1} = \frac{(-1)}{(+5)}$$ Uttrykket er negativt.

Vi setter opp et fortegnsskjema for brøken $\frac{2-x}{2x-1}$



NB! Legg merke til at brøken $\frac{2-x}{2x-1}$ **ikke** er **definert** når nevneren blir 0 . I fortegnsskjemaet markerer vi dette med **to pilspisser som møtes**.

Vår oppgave var å finne ut for hvilke verdier av *x* brøken $\frac{x+1}{2x-1} \geqslant 1$ det vil si at $\frac{2-x}{2x-1} \geqslant 0$. Løsningen på oppgaven blir at *x* må være større enn $\frac{1}{2}$ og mindre enn eller lik 2,$x \in \langle \frac{1}{2}, 2]$,

Merk at her kunne uttrykket vårt være null, og da tar vi med 2 i løsningen.

Logaritmer

Logaritmer

Logaritmer (107392)

På begynnelsen av 1600-tallet ble teleskopet oppfunnet. Det skjedde store fremskritt innenfor astronomien. Arbeid med astronomi, navigasjon og trigonometriske beregninger førte til at matematikere, fysikere og astronomer etter hvert fikk behov for å regne med tall med mange siffer. Utregningene ble lange. Ofte ble det gjort feil undervegs. For å lette arbeidet, fant noen ut at ved å bruke regnereglene for potensregning kunne **multiplikasjon reduseres til addisjon** og **divisjon til subtraksjon**.

Eksempel

Du skal multiplisere to store tall

$$10\,000 \cdot 100\,000$$

Fra potensregningen vet du at $10\,000 = 10^4$ og $100\,000 = 10^5$.

Du vet at potenser med samme grunntall multipliseres ved å addere eksponentene og beholde grunntallet. Multiplikasjonen blir slik

$$10\,000 \cdot 100\,000 = 10^4 \cdot 10^5 = 10^{4+5} = 10^9 = 1000\,000\,000$$

Multiplikasjonen blir redusert til addisjon av eksponentene i tierpotenser.

I 1T brukte vi logaritmer til å løse eksponentiallikninger. Vi skal nå arbeide videre med logaritmeregning.

Det var skotten John Napier (1550 – 1617) som begynte å regne med logaritmer. Han fant ut at alle tall kan skrives som potenser, og han begynte arbeidet med såkalte logaritmetabeller. Engelskmannen Henry Briggs (1561 – 1630) fortsatte dette arbeidet. Briggs brukte 10 som grunntall, og i 1624 utgav han boken *Arithmetica Logarithmica* som blant annet inneholder en tabell med logaritmene til tall fra 1 til 20 000.

John Napier (1550 - 1617)

Briggs var først og fremst interessert i arbeidet med logaritmer, fordi han skjønte at logaritmeregning kunne være til stor nytte når en skulle utføre til dels lange og kompliserte beregninger innenfor navigasjon. Navigasjon var spesielt viktig for engelskmennene med tanke på landets sikkerhet og forsvar.

Når vi bruker 10 som grunntall, har vi for eksempel at $2 \approx 10^{0{,}3010}$ og $3 \approx 10^{0{,}4771}$.

En logaritmetabell for hele tall fra 1 til 10 kan se slik ut
(Briggs opererte med en nøyaktighet på 14 desimaler i sine logaritmetabeller!)

x	eksponent
1	**0,0000**
2	**0,3010**
3	**0,4771**
4	**0,6021**
5	**0,6990**
6	**0,7782**
7	**0,8451**
8	**0,9031**
9	**0,9542**
10	**1,0000**

For å multiplisere tallene 2 og 3 kan vi da regne slik

$$2 \cdot 3 \approx 10^{0{,}3010} \cdot 10^{0{,}4771} = 10^{0{,}310+0{,}4771} = 10^{0{,}7781} \approx 6$$

Multiplikasjon blir erstattet av addisjon. Den siste overgangen finner vi ved å bruke tabellen baklengs.

Nå tenker du sikkert at det helt klart hadde vært enklere å multiplisere direkte. Det er selvfølgelig riktig akkurat for dette eksempelet, men tenk deg at du skulle multiplisere to tall med mange siffer, uten kalkulator (!). Da hadde det vært lurt å kunne erstatte multiplikasjon med addisjon.

Det tallet som 10 må opphøyes i for å gi et tall *a* , kalles for **den briggske logaritmen** til *a* . Hvor tror du navnet «briggske» kommer fra?

D e n **briggske logaritmen** symboliseres på norsk med **lg**. Vi har at $\lg\ 2 \approx 0,3010$ fordi $10^{0{,}3010} \approx 2$, $\lg\ 100 = 2$ fordi $100 = 10^2$ osv.

Logaritmetabeller ble brukt i norsk skole fram til 1970-tallet. Da overtok kalkulatoren. Spør noen voksne du kjenner om de husker logaritmetabellene. Kanskje noen har en gammel tabell liggende?

Logaritmer er fortsatt aktuelle. I dag kan du finne alle logaritmeverdier ved hjelp av kalkulator eller andre digitale verktøy. På kalkulatorer brukes gjerne **log** som er den internasjonale betegnelsen for logaritmer med 10 som grunntall.

Logaritmetabeller og regnestaver ble brukt i norsk skole fram til 1970 - tallet. Da overtok kalkulatoren.

Vi skal bruke logaritmer til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter.

Briggske logartimer

Briggske logaritmer (107402)

Den **briggske logaritmen** til et positivt tall *a* er eksponenten i den potensen av **10** som er lik *a*. Den briggske logaritmen betegnes på norsk med **lg**.

$$\text{Hvis } 10^x = a, \text{ så er } x = \lg a$$

Vi kan altså skrive

$$a = 10^{\lg a} \text{ for alle } a \in (0, \rightarrow)$$

Den briggske logaritmen til 100 er lik 2 fordi $100 = 10^2$ $100 = 10^{\lg 100}$ $\lg 100 = 2$

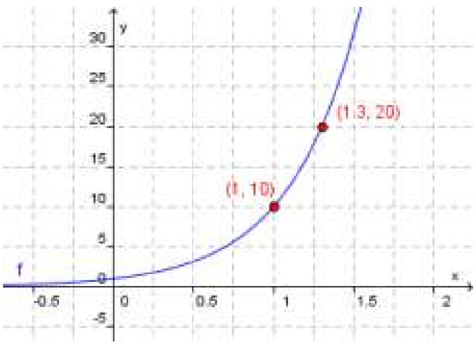
Den briggske logaritmen til 1000 er lik 3 fordi $1000 = 10^3$ $1000 = 10^{\lg 1000}$ $\lg 100 = 3$

Den briggske logaritmen til 10 er lik 1 fordi $10 = 10^1$ $10 = 10^{\lg 10}$ $\lg 10 = 1$

Den briggske logaritmen 1 er lik 0 fordi $1 = 10^0$ $1 = 10^{\lg 1}$ $\lg 1 = 0$

Den briggske logaritmen 2 er lik 0,3010 fordi $2 = 10^{0{,}3010}$ $2 = 10^{\lg 2}$ $\lg 2 = 0{,}3010$

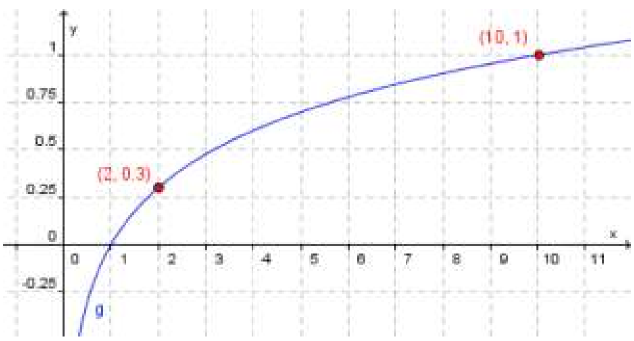
Til høyre har vi tegnet grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = 10^x$. Langs *x*-aksen kan vi lese av logaritmeverdiene til tallene langs *y*-aksen.



Grafen viser for eksempel at $10^1 = 10$ og $10^{1{,}3} \approx 20$. Det viser at $\lg 10 = 1$ og $\lg 20 \approx 1{,}3$.

Legg merke til at det bare er positive tall vi kan finne logaritmer til. Grunnen er at funksjonen *f* aldri er negativ. Verdimengden til *f*, $V_f = (0, \rightarrow)$ mens definisjonsmengden er alle reelle tall, $D_f = R$.

Vi kan også tegne grafen til logaritme-funksjonen $g(x) = \lg x$. Da kan vi lese av logaritmeverdiene direkte.



Ved å finne koordinatene til punktene $(2, g(2))$ og $(10, g(10))$ finner du logaritmeverdiene til 2 og 10. Du ser at vi får samme verdier som ovenfor.

Legg også merke til at logaritmefunksjonen bare eksisterer for positive tall. Definisjonsmengden til g, $D_g = (0, \rightarrow)$ mens verdimengden er alle reelle tall, $V_f = R$.

Av grafene ser vi også at begge funksjonene vokser i hele definisjonsområdet.

Naturlige logaritmer

Naturlige logaritmer (107405)

Vi kunne like gjerne brukt et annet tall enn 10 som grunntall i potensene. Det viser seg faktisk at tallet 2,718 281 828 459 ... er mer «naturlig» å bruke.

Dette tallet har fått navnet **e**. Det er et irrasjonalt tall slik som pi, og har derfor et uendelig antall siffer. **Den naturlige logaritmen** med **e som grunntall** betegnes med ln.

Du lurer sikkert på hvor dette tallet **e** kommer fra. Det kan du lese mer om her: Tallet e

I dette kapitlet skal vi bruke logaritmer til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter. Det er i denne sammenhengen likegyldig hva slags logaritmer vi bruker. Vi har valgt å bruke briggske logaritmer.

I kapitlet om funksjoner skal vi bli bedre kjent med naturlige logaritmer. Vi skal se at tallet e og den naturlige logaritmefunksjonen er sentrale ved derivasjon av potenser.

Den **naturige logaritmen** til et positivt tall *a* er eksponenten i den potensen av $e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459$ som er lik *a*.

Den naturlige logaritmen betegnes med **ln**.

$a = e^{\ln\ a}$ for alle $a \in (0, \rightarrow)$

Den naturlige logaritmen til 100 er lik 4,6052 fordi $100 = e^{4{,}6052}$ $100 = e^{\ln\ 100}$ $\ln\ 100 = 4,6052$

Den naturlige logaritmen til 2 er lik 0,6931 fordi $2 = e^{0{,}6931}$ $2 = e^{\ln\ 2}$ $\ln\ 2 = 0,6931$

Den naturlige logaritmen til 1 er lik 0 fordi $1 = e^{0}$ $1 = e^{\ln\ 1}$ $\ln\ 1 = 0$

Den naturlige logaritmen til e er lik 1 fordi $e = e^{1}$ $e = e^{\ln\ e}$ $\ln\ e = 1$

Logaritmesetningene

Logaritmesetningene (107409)

Ved å bruke **tre logaritmesetninger** kan vi forenkle mange uttrykk og løse likninger og ulikheter som vi til nå ikke har kunnet løse uten digitale hjelpemidler.

Første logaritmesetning

$$\lg(a \cdot b) = \lg\ a + \lg\ b$$

Andre logaritmesetning

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg\ a - \lg\ b$$

Tredje logaritmesetning

$$\lg\ a^x = x\lg\ a$$

I kompetansemålene for R1 står det at du skal kunne utlede disse setningene.

Utledning av første logaritmesetning

Definisjonen av logaritmer gir at $a = 10^{\lg\ a}$, $b = 10^{\lg\ b}$ og $a \cdot b = 10^{\lg(a \cdot b)}$.

Reglene for potensregning gir videre at $a \cdot b = 10^{\lg\ a} \cdot 10^{\lg\ b} = 10^{\lg\ a + \lg\ b}$.

Vi har da to uttrykk for $a \cdot b$, og disse uttrykkene må være like.

$10^{\lg(a \cdot b)} = 10^{\lg\ a + \lg\ b}$

To like potenser med samme grunntall må ha like eksponenter.

Det betyr at $\lg(a \cdot b) = \lg\ a + \lg\ b$.

Utledning av andre logaritmesetning

Definisjonen på logaritmer gir at $a = 10^{\lg\ a}$, $b = 10^{\lg\ b}$ og $\frac{a}{b} = 10^{\lg\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Reglene for potensregning gir videre at $\frac{a}{b} = \frac{10^{\lg\ a}}{10^{\lg\ b}} = 10^{\lg\ a - \lg\ b}$.

Vi har da to uttrykk for $\frac{a}{b}$, og disse uttrykkene må være like.

$10^{\lg\left(\frac{a}{b}\right)} = 10^{\lg\ a - \lg\ b}$

To like potenser med samme grunntall må ha like eksponenter.

Det betyr at $\lg\ \left(\frac{a}{b}\right) = \lg\ a - \lg\ b$.

Utledning av tredje logaritmesetning

Definisjonen på logaritmer gir oss to skrivemåter for a^x

$$a^x = 10^{\lg\ a^x} \quad \text{og} \quad a^x = \left(10^{\lg\ a}\right)^x$$

Reglene for potensregning gir videre at

$$\left(10^{\lg\ a}\right)^x = 10^{(\lg\ a)\cdot x} = 10^{x\cdot\lg\ a}$$

Vi har da to uttrykk for a^x , og disse to uttrykkene må være like.

$$10^{\lg\ a^x} = 10^{x\cdot\lg\ a}$$

To like potenser med samme grunntall må ha like eksponenter.

Det betyr at $\lg\ a^x = x \cdot \lg\ a$.

Forenkling av logaritmeuttrykk

[Forenkling av logaritmeuttrykk (107431)]

Uttrykk som inneholder logaritmer, kan ofte forenkles ved hjelp av logaritmesetningene. Vi viser bare hvordan vi forenkler uttrykk med briggske logaritmer, men regningen blir den samme om **lg** er erstattet med **ln**.

Eksempel

Vi ønsker å skrive uttrykket $\lg\ 4x + 4\ \lg\ \frac{2}{x} - \lg\ x^3 + 2\lg\ \sqrt{x}$ så enkelt som mulig. Siden logaritme bare er definert for positive tall, må vi her forutsette at *x* er større enn null.

$$\begin{aligned}\lg\ 4x + 4\ \lg\ \left(\frac{2}{x}\right) - \lg\ x^3 + 2\lg\ \sqrt{x} &= \lg\ 4 + \lg\ x + 4\left(\lg\ 2 - \lg\ x\right) - 3\lg\ x + \\ &= \lg\ 2^2 + \lg\ x + 4\lg\ 2 - 4\lg\ x - 3\lg\ x + 2\lg\ x^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\lg\ 2 + \lg\ x + 4\lg\ 2 - 4\lg\ x - 3\lg\ x + \lg\ x \\ &= 6\lg\ 2 - 5\lg\ x\end{aligned}$$

Her har vi altså brukt at $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, og vi har trukket sammen ledd med $\lg\ 2$ og ledd med $\lg\ x$.

Eksponentiallikninger

[Eksponentiallikninger (107462)](#)

Likninger med potensuttrykk der eksponenten er ukjent, kalles **eksponentiallikninger**. Vi kan bruke logaritmesetningen til å løse slike likninger.

Gitt eksponentiallikningen

$$a^x = b$$

Siden logaritmen til to like tall er like, er

$$\lg\ a^x = \lg\ b$$

Tredje logaritmesetningen gir da at

$$x\lg\ a = \lg\ b$$

Det gir løsningen på eksponentiallikningen

$$x = \frac{\lg\ b}{\lg\ a}$$

Vi kan også her like gjerne bruke den naturlige logaritmen.

Eksempel 1

Anne har plassert kroner på en konto i banken. Renten er 6,0 % per år. Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?

Vi finner vekstfaktoren

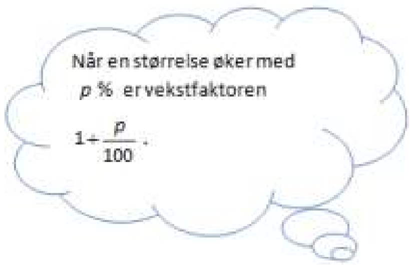
$$1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

Vi kan da sette opp følgende likning der *x* er tiden pengene må stå i banken

$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

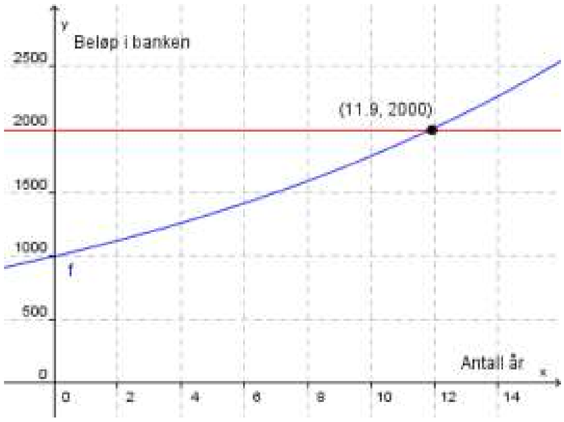
Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?

Vi løser likningen som vist nedenfor.



$$\begin{aligned}
1000 \cdot 1,06^x &= 2 \cdot 1000 \\
1,06^x &= \frac{2000}{1000} && \text{Vi ordner likningen slik at vi får potensen} \\
1,06^x &= 2 && \text{alene på venstre side.} \\
\lg\ 1,06^x &= \lg\ 2 && \text{Logaritmen til like tall er like.} \\
x \cdot \lg\ 1,06 &= \lg 2 && \text{Vi bruker tredje logaritmesetning.} \\
x &= \frac{\lg\ 2}{\lg\ 1{,}06} && \text{Her må vi bruke digitalt verktøy.} \\
x &\approx 12
\end{aligned}$$

Pengene må altså stå ca. 12 år i banken før beløpet er fordoblet.



Vi kan også løse likningen grafisk. Se koordinatsystemet til høyre. Her har vi tegnet grafen til funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=1000\cdot1,06^{x}$ og løst likningen $f\left(x\right)=2000$ grafisk.

Eksempel 2

Vi antar at innbyggertallet i Småby vokser med 1,5 % hvert år. Det bor i dag 13 000 personer i Småby. Hvor mange år går det før innbyggertallet er 15 000?

Vi finner vekstfaktoren

$$1+\frac{1{,}5}{100}=1,015$$

og vi kan sette opp og løse følgende likning

$$\begin{aligned}13\ 000\cdot1,015^{x}&=15\ 000\\1,015^{x}&=\frac{15\ 000}{13\ 000}\\\lg\ 1,015^{x}&=\lg\ 1,154\\x\cdot\lg\ 1,015&=\lg\ 1,154\\x&=\frac{\lg\ 1{,}154}{\lg\ 1{,}015}\\x&=9,6\end{aligned}$$

Innbyggertallet vil være 15 000 om snaue 10 år.

Eksempel 3

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilen har sunket i verdi med 10 prosent hvert år siden den var ny, og Kari regner med at denne verdireduksjonen vil fortsette de neste årene.

Hvor mange år vil det gå før bilens verdi er halvert?

Vekstfaktoren blir

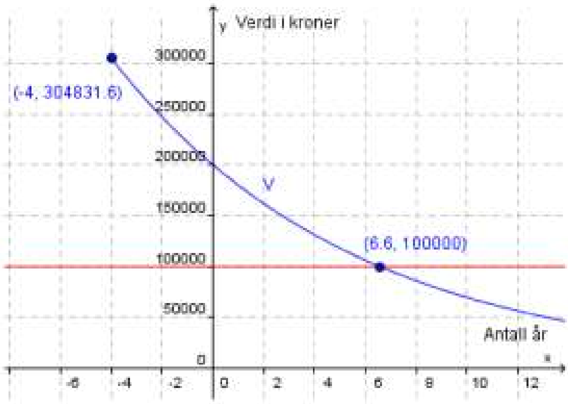
$$1-\frac{10}{100}=0,90$$

Bilens verdi $V\left(x\right)$,*x* antall år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved

$$V\left(x\right)=200\ 000\cdot0,90^{x}$$

Av grafen til *V* kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, dvs. når $x=-4$, altså da den var ny, var nærmere 305 000 kroner.



Vi skal også se hvordan vi kan regne ut dette.

Vi regner først ut hvor lang tid det går før bilens verdi har sunket til 100 000 kroner

$$\begin{aligned} 200\ 000 \cdot 0,90^x &= 100\ 000 \\ 0,90^x &= \tfrac{100\ 000}{200\ 000} \\ 0,90^x &= 0,5 \\ x \cdot \lg\ 0,90 &= \lg\ 0,5 \\ x &= \tfrac{\lg\ 0,5}{\lg\ 0,90} \\ x &= 6,6 \end{aligned}$$

Dette var det samme som vi fant grafisk.

Så regner vi ut hvor mye bilen var verdt for 4 år siden

$$200\ 000 \cdot 0,90^{-4} \approx 305\ 000$$

Dette var også det samme som vi fant grafisk.

I eksempel 4 skal vi se litt på en annerledes eksponentiallikning.

Eksempel 4

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x &= 3 \cdot 4^x \\ \lg\left(2 \cdot 3^x\right) &= \lg\left(3 \cdot 4^x\right) \\ \lg\ 2 + \lg\ 3^x &= \lg\ 3 +\ \lg\ 4^x \\ \lg\ 2 + x \cdot \lg\ 3 &= \lg\ 3 + x \cdot \lg\ 4 \\ x \cdot \lg\ 3 - x \cdot \lg\ 4 &= \lg\ 3 - \lg\ 2 \\ x\left(\lg\ 3 - \lg\ 4\right) &= \lg\ 3 - \lg\ 2 \\ x &= \tfrac{\lg\ 3 - \lg\ 2}{\lg\ 3 - \lg\ 4} \end{aligned}$$

Vi har her gitt svaret på **eksakt form**. Det kan ofte være greit når vi arbeider med teoretiske problemstillinger. På Del 1 av en prøve eller eksamen må du av og til oppgi svar på eksakt form, fordi du ikke kan regne ut en tilnærmingsverdi uten bruk av digitalt verktøy. I praktiske oppgaver er det vanlig å bruke tilnærmingsverdier. I så fall kan vi oppgi svaret som $x = -1,4$.

Eksempel 5

Av og til får du bruk for å løse likninger hvor det er flere ledd med potensuttrykk, som for eksempel

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 12 = 0$$

Hva slags likning er dette? Her må vi tenke oss litt om.

Vi ser at i likningen inngår både 3 opphøyd i 2*x* og 3 opphøyd i *x*. Fra potensregningen vet du at $3^{2x} = \left(3^x\right)^2$. Likningen vår blir da

$$\left(3^x\right)^2 - 4 \cdot 3^x - 12 = 0$$

Vi kaller nå 3^x for *u*. Likningen blir da

$$u^2 - 4 \cdot u - 12 = 0$$

Nå ser vi at vi har en **andregradslikning** med *u* som den ukjente.

Andregradslikningen har løsningen

$$\begin{aligned} u^2 - 4 \cdot u - 12 &= 0 \\ u &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \\ u &= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \\ u_1 &= -2 \quad u_2 = 6 \end{aligned}$$

Nå er det viktig at vi tenker litt igjen …

Vi begynte med å sette $3^x = u$. Når vi nå har funnet at $u = -2 \text{ eller } u = 6$, må det bety at $3^x = -2 \text{ eller } 3^x = 6$.

Løsningen $3^x = -2$ gir ingen mening siden potensen alltid er positiv.

Løsningen blir $\qquad 3^x = 6 \;\Rightarrow\; x = \frac{\lg\ 6}{\lg\ 3} \approx 1,6$

Også her kunne vi oppgitt svaret på eksakt form som $x = \frac{\lg\ 6}{\lg\ 3}$

Metoden her går altså ut på å skifte variabel ved å sette *u* = *u*(*x*), for å få en enklere likning. Når vi har løst denne og funnet *u*, må vi gå tilbake og finne *x*.

Merk at oppgaver av denne typen da gjerne kan inngå i **Del 1** av en prøve eller en eksamen.

Logaritmelikninger

Logaritmelikninger (107486)

Logaritmelikninger er likninger som inneholder **logaritmen til den ukjente**. I slike likninger må vi ofte bruke de tre logaritmesetningene både «forlengs» og «baklengs». Etter hvert finner vi en verdi for logaritmen til den ukjente eller en funksjon av den ukjente.

Hvis vi finner at $\lg\ x = 2$ og vår oppgave er å finne *x*, utnytter vi det faktum at hvis to uttrykk er like, så er 10 opphøyd i uttrykkene også like. Videre bruker vi definisjonen på logaritmer for å finne den ukjente.

Vi må også alltid huske at vi bare kan finne logaritmer til positive tall!

Eksempel 1

$$\begin{aligned} \lg\ x &= 2 && \text{Vi ser her at } x \text{ må være større enn 0.} \\ 10^{\lg x} &= 10^2 && \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.} \\ x &= 100 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \end{aligned}$$

Løsningen kan brukes siden 100 er større enn 0.

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \lg\ x^2 + 2\lg\ x - 2 &= 0 && x \text{ må være større enn 0. Vi bruker tredje logaritmesetning.} \\ 2\lg\ x + 2\lg\ x &= 2 && \text{Vi samler leddene med } x \text{ på venstre side.} \\ 4\lg\ x &= 2 && \text{Vi trekker sammen.} \\ \lg\ x &= \tfrac{2}{4} && \text{Vi dividerer for } \textit{å} \text{ få } \lg\ x \text{ alene på venstre side.} \\ 10^{\lg x} &= 10^{\frac{1}{2}} && \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.} \\ x &= \sqrt{10} && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \end{aligned}$$

Løsningen kan brukes siden $\sqrt{10}$ er større enn 0.

Eksempel 3

$$\begin{aligned} \lg(x+2) - \lg(2) &= 2 && x \text{ må være strørre enn } -2. \\ \lg\left(\tfrac{x+2}{2}\right) &= 2 && \text{Vi bruker andre logaritmesetning baklengs.} \\ 10^{\lg\left(\frac{x+2}{2}\right)} &= 10^2 && \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.} \\ \tfrac{x+2}{2} &= 10^2 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \\ x &= 200 - 2 \\ x &= 198 \end{aligned}$$

Løsningen kan brukes siden 198 er større enn −2.

Eksempel 4

$$\begin{aligned} \lg\ x + \lg(5-x) &= \lg\ 6 && x \text{ må være større enn 0 og mindre enn 5.} \\ \lg(x\cdot(5-x)) &= \lg\ 6 && \text{Vi bruker første logaritmesetning baklengs.} \\ 10^{\lg(x\cdot(5-x))} &= 10^{\lg\ 6} && \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.} \\ x\cdot(5-x) &= 6 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler.} \\ 5x - x^2 &= 6 \\ -x^2 + 5x - 6 &= 0 \\ x &= \tfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2} \\ x_1 = 2 \quad x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Begge løsningene kan brukes siden begge ligger mellom 0 og 5.

Ulikheter med eksponentialuttrykk

[Ulikheter med eksponentialuttrykk (107498)]

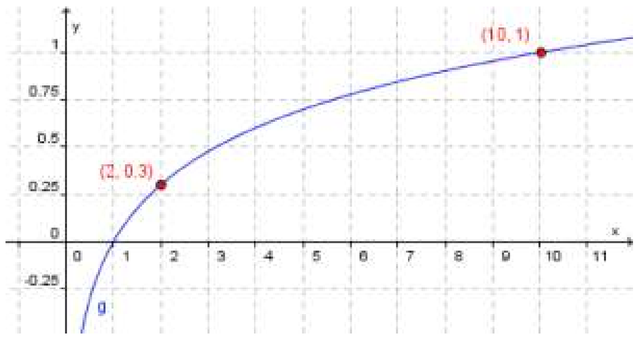
En sentral teknikk ved løsing av eksponentiallikninger er å «ta logaritmen» på begge sider av likhetstegnet. Dette kan vi gjøre fordi logaritmene til like tall er like. Se eksempelet nedenfor, som vi har sett på tidligere.

Eksempel

$$\begin{aligned} 2\cdot 3^x &= 3\cdot 4^x \\ \lg\left(2\cdot 3^x\right) &= \lg\left(3\cdot 4^x\right) \qquad \text{Logaritmene til like tall er like.} \\ \lg\ 2+\lg\ 3^x &= \lg\ 3+\lg\ 4^x \\ \lg\ 2+x\cdot\lg\ 3 &= \lg\ 3+x\cdot\lg\ 4 \\ x\cdot\lg\ 3-x\cdot\lg\ 4 &= \lg\ 3-\lg\ 2 \\ x\left(\lg\ 3-\lg 4\right) &= \lg\ 3-\lg\ 2 \\ x &= \frac{\lg\ 3-\lg\ 2}{\lg\ 3-\lg\ 4} \end{aligned}$$

Hvordan er det så med logaritmene til to tall som er forskjellige?

For å svare på det, må vi igjen se på funksjonen *g* gitt ved $g\left(x\right)=\lg\ x$. Grafen til *g* vokser for økende verdier av *x* i hele definisjonsområdet.



Det betyr at **hvis $a>b$, så er** $\lg\ a>\lg\ b$.

På grafen til høyre ser du at siden 10 er større enn 2, så er logaritmen til 10 større enn logaritmen til 2.

Motsatt må det da også gjelde at **hvis $a<b$, så er** $\lg\ a<\lg\ b$.

Hvis $\lg\ a<\lg\ b$ har vi også

$$\begin{aligned} \lg\ a &< \lg\ b \\ \lg\ a-\lg\ b &< 0 \\ \lg\frac{a}{b} &< 0 \qquad \text{Bruker andre logaritmesetning baklengs.} \end{aligned}$$

Ut fra dette kan vi slå fast at logaritmen til et tall mellom 0 og 1 er negativ, fordi alle tall mellom 0 og 1 kan skrives som ekte brøker, dvs. brøker hvor telleren er mindre enn nevneren. **På samme måte kan vi vise at logaritmen til et tall som er større enn 1 alltid vil være positiv.**

Dette er viktig å vite når vi skal avgjøre om **vi må snu ulikhetstegnet** eller ikke hvis vi multipliserer eller dividerer med samme tall på begge sider i en ulikhet.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 2\cdot 3^x &> 3\cdot 4^x \\ \lg\left(2\cdot 3^x\right) &> \lg\left(3\cdot 4^x\right) \qquad a>b\Rightarrow\lg\ a>\lg\ b \\ lg\,2+\lg\ 3^x &> \lg\ 3+\lg\ 4^x \\ \lg\ 2+x\cdot\lg\ 3 &> \lg\ 3+x\cdot\lg\ 4 \\ x\cdot\lg\ 3-x\cdot\lg\ 4 &> \lg\ 3-\lg\ 2 \\ x\left(\lg\ 3-\lg\ 4\right) &> \lg\ 3-\lg\ 2 \qquad \lg\ 3-\lg\ 4<0 \\ x &< \frac{\lg\ 3-\lg 2}{\lg 3-\lg\ 4} \qquad \text{Vi må snu ulikhetstegnet.} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Eksponentialulikheter med vekstfaktor større enn 1

I eksempel 1 i avsnittet om eksponentiallikninger fant vi ut hvor lenge et beløp på 1000 kroner måtte stå i banken for å fordobles når renten var 6 % per år. Hvis vi alternativt spør hvor lang tid det tar før beløpet overstiger 2000 kroner, har vi en ulikhet

$$\begin{aligned}
1000 \cdot 1,06^x &> 2 \cdot 1000 \\
1,06^x &> 2 \\
\lg\ 10,6^x &> \lg\ 2 \\
x \cdot \lg\ 1,06 &> \lg\ 2 \qquad \lg\ 1,06 > 0 \\
x &> \frac{\lg\ 2}{\lg\ 1{,}06} \approx 12 \quad \text{Vi trenger ikke snu ulikhetstegnet.}
\end{aligned}$$

Eksempel 3

Eksponentialulikheter med vekstfaktor mindre enn 1

I eksempel 3 i avsnittet om eksponentiallikninger fant vi hvor mange år det ville ta før verdien av Karis bil var sunket til 100 000 kroner. Kari kjøpte bilen for 200 000 kroner. Bilens verdi synker med 10 prosent hvert år.

Hvis vi alternativt spør hvor lang tid det tar før bilens verdi har blitt mindre enn 100 000 kroner, så har vi en ulikhet

$$\begin{aligned}
200\,000 \cdot 0,90^x &< 100\,000 \\
0,90^x &< 0,5 \\
x \cdot \lg\ 0,90 &< \lg\ 0,5 \qquad \lg\ 0,90 < 0 \\
x &> \frac{\lg\ 0{,}5}{\lg\ 0{,}90} \approx 6,6 \quad \text{Vi må snu ulikhetstegnet.}
\end{aligned}$$

Eksempel 4

Vi vil løse ulikheten

$$\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x}{x-3} \geqslant \frac{4}{x-3} \qquad x \neq 3$$

Vi kan ikke multiplisere med nevneren på begge sider av ulikhetstegnet $x - 3$ fordi uttrykket kan være positivt eller negativt alt etter hvilken verdi *x* har.

Vi må trekke sammen, faktorisere og bruke fortegnsskjema.

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x}{x-3} &\geqslant \frac{4}{x-3} \\
\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x}{x-3} - \frac{4}{x-3} &\geqslant 0 \qquad \text{0 på høyre side.} \\
\frac{(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4}{x-3} &\geqslant 0 \qquad \text{Vi setter } u = 2^x \text{ og faktoriserer telleren.} \\
u^2 - 3 \cdot u - 4 &= 0 \\
u &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \\
u &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\
u_1 = -1 \quad & u_2 = 4 \\
\frac{(2^x+1)(2^x-4)}{x-3} &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Nevneren blir 0 for $x = 3$. I telleren kan faktoren $2^x + 1$ ikke bli 0 eller negativ siden 2^x alltid er positiv. Telleren kan derfor bare skifte fortegn når

$$\begin{aligned}
2^x - 4 &= 0 \\
2^x &= 4 \\
x \cdot \lg\ 2 &= \lg\ 2^2 \\
x &= \frac{2\,\cancel{\lg\ 2}}{\cancel{\lg\ 2}} = 2
\end{aligned}$$

Vi tar «stikkprøver» i intervallene $(\leftarrow, 2),\ \ (2, 3)$ og $(3, \rightarrow)$.

For $x = 0$ får vi

$$\frac{(2^0-4) \cdot (2^0+1)}{0-3} = \frac{(1-4) \cdot (1+1)}{-3} = \frac{(-3) \cdot (+2)}{-3} \text{ Uttrykket er positivt.}$$

For $x = 2,5$ får vi

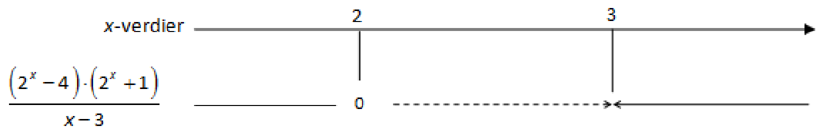
$$\frac{(2^{2,5}-4)\cdot(2^{2,5}+1)}{2,5-3} = \frac{(2^{2,5}-3)\cdot(2^{2,5}+1)}{-0,5}$$

Uttrykket er negativt siden $\mathbf{2^{2,5} > 2^2 = 4 \text{ siden } 2^x}$ alltid vokser.

For $x = 4$ får vi

$$\frac{(2^4-4)\cdot(2^4+1)}{4-3} = \frac{(+12)\cdot(+17)}{+1}$$ Uttrykket er positivt.

Fortegnsskjema



Løsningen på oppgaven blir at *x* må være mindre enn eller lik 2 eller større enn 3.
Løsning $x \in \langle\leftarrow, 2] \cup [3, \rightarrow\rangle$.

Ulikheter med logaritmeuttrykk

Ulikheter med logaritmeuttrykk (107548)

Da vi løste likninger med logaritmer, utnyttet vi at to tierpotenser med like eksponenter er like.

Eksempel

$$\begin{aligned} \lg\ x &= 2 \\ 10^{\lg\ x} &= 10^2 \quad \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.} \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Vi vet at funksjonen *f* gitt ved $f(x) = 10^x$ vokser i hele definisjonsområdet. Det vil si at hvis $a > b$, så er $10^a > 10^b$, og tilsvarende hvis $a < b$, så er $10^a < 10^b$. Dette får vi bruk for når vi skal løse ulikheter med logaritmeuttrykk.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} \lg\ x &< 2 && x \text{ må være større enn } 0. \\ 10^{\lg\ x} &< 10^2 && a < b \Leftrightarrow 10^a < 10^b \\ x &< 100 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \end{aligned}$$

$\text{Løsning } x \in (0, 100)$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \lg\ x^2 + 2\lg\ x - 2 &> 0 && x \text{ må være større enn } 0. \\ 2\lg\ x + 2\lg\ x &> 2 && \text{Vi bruker tredje logaritmesetning.} \\ 2\lg\ x &> 2 \\ \lg\ x &> \tfrac{1}{2} \\ 10^{\lg\ x} &> 10^{\frac{1}{2}} && a > b \Leftrightarrow 10^a > 10^b \\ x &> \sqrt{10} && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \end{aligned}$$

$\text{Løsning } x \in \left(\sqrt{10}, \rightarrow\right)$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} \lg(x+2) - \lg(2) &< 2 && x \text{ må være større enn } -2. \\ \lg\left(\tfrac{x+2}{2}\right) &< 2 && \text{Vi bruker andre logaritmesetning baklengs.} \\ 10^{\lg\left(\frac{x+2}{2}\right)} &< 10^2 && a < b \Leftrightarrow 10^a < 10^b \\ \tfrac{x+2}{2} &< 100 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \\ x + 2 &< 200 \\ x &< 198 \end{aligned}$$

$\text{Løsning } x \in (-2, 198)$

Eksempel 4

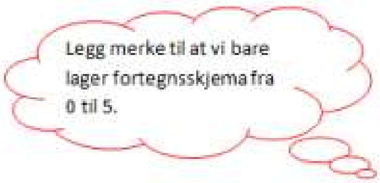
$$\begin{aligned} \lg\ x + \lg(5-x) &\geqslant \lg\ 6 && x \text{ må være større enn } 0 \text{ og mindre enn } 5. \\ \lg(x \cdot (5-x)) &\geqslant \lg\ 6 && \text{Vi bruker første logaritmesetning baklengs.} \\ 10^{\lg(x\cdot(5-x))} &\geqslant 10^{\lg\ 6} && a \geqslant b \Leftrightarrow 10^a \geqslant 10^b \\ x \cdot (5-x) &\geqslant 6 && \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler venstre side.} \\ -x^2 + 5x - 6 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

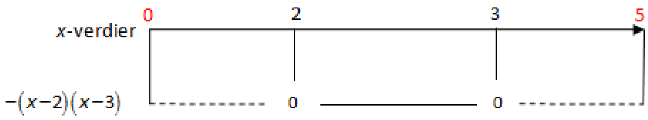
Setter $-x^2 + 5x - 6 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} \ \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 3$

Ulikheten blir da slik:

$-(x-2)(x-3) \geqslant 0$

Et fortegnsskjema gir oversikten

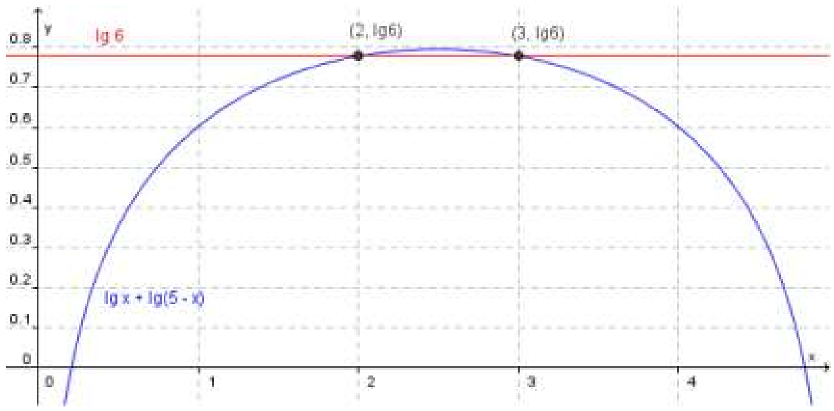




Løsning $x \in (2,3)$

Ulikheter kan også løses grafisk

I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \lg\ x + \lg(5-x)$ (utrykket på venstre side i ulikheten ovenfor). I tillegg har vi tegnet den vannrette linja $y = \lg\ 6$ (høyre side i ulikheten).



Vi ser også **grafisk** at $\lg\ x + \lg(5-x) \geqslant \lg\ 6$ for $x \in (2,3)$.

Eksempel 5

Vi ønsker å løse andregradsulikheten $(\lg\ x)^2 + 2\lg\ x - 3 < 0 \quad x > 0$

Først løser vi likningen $(\lg\ x)^2 + 2\lg\ x - 3 = 0$. Vi bruker igjen metoden med variabelskifte ved å sette $u = \lg\ x$.

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$
$$u = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\begin{array}{lcll} \lg\ x = 1 & \vee & \lg\ x = -3 & \quad \textbf{Siden } u = \lg\ x \\ x = 10^1 & \vee & x = 10^{-3} & \\ x = 10 & \vee & x = 0,001 & \end{array}$$

Grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = (\lg\ x)^2 + 2\lg\ x - 3$ er sammenhengende, derfor er det bare i nullpunktene at uttrykket $(\lg\ x)^2 + 2\lg\ x - 3$ kan skifte fortegn.

Vi tar «stikkprøver» i intervallene $(0,\ 0,001)$, $(0,001,\ 10)$ og $(10, \rightarrow)$, og lager fortegnsskjema.

For $x = 0,0001$ får vi

$$(\lg\ 0,0001)^2+2\lg\ 0,0001-3=(-4)^2+2\cdot(-4)-3=16-8-3=5$$

Uttrykket er positivt.

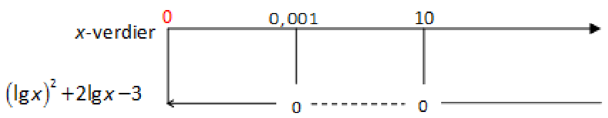
For $x=1$ får vi

$(\lg\ 1)^2+2\lg\ 1-3=0^2+2\cdot 0-3=-3$ Uttrykket er negativt.

For $x=100$ får vi

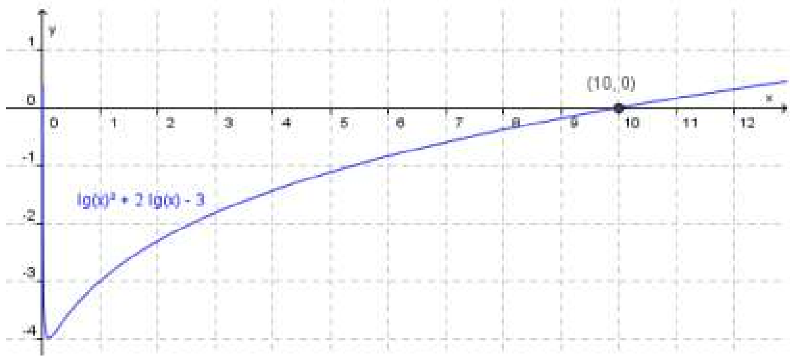
$(\lg\ 100)^2+2\lg\ 100-3=3^2+2\cdot 2-3=5$ Uttrykket er positivt.

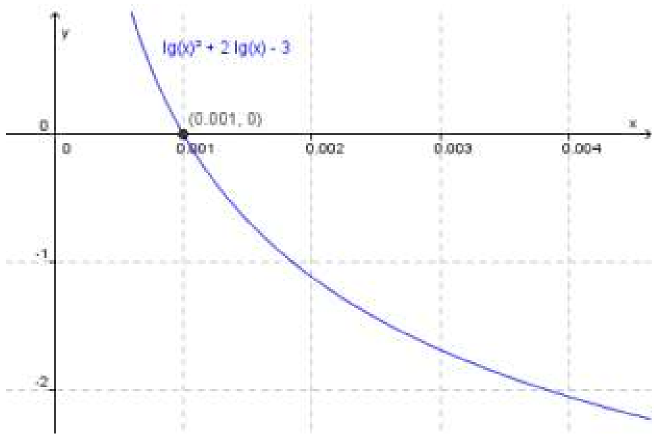
I et fortegnsskjema kan vi illustrere dette slik



Løsning $(\lg\ x)^2+2\lg\ x-3<0$ **når** $x\in(0,001,\ 10)$

Nedenfor har vi tegnet grafen til uttrykket $(\lg\ x)^2+2\lg\ x-3$. Det er vanskelig å finne begge nullpunktene i samme bildet. Vi har derfor først tegnet grafen og funnet det ene nullpunktet $(10,0)$, så har vi tegnet et forstørret bilde av grafen i et lite område for å finne det andre nullpunktet $(0,001,\ 0)$.





Implikasjon, ekvivalens og noen matematiske bevistyper

Implikasjon

Implikasjon (107595)

Hvis Kaja bor i Bergen, bor Kaja i Norge. Vi har da det vi kaller en **implikasjon**. At Kaja bor i Bergen medfører at Kaja bor i Norge. Vi har et eget tegn for «**medfører at**». Dette tegnet er «⇒» og kalles en **implikasjonspil**.
Vi skriver

Kaja bor i Bergen ⇒ Kaja bor i Norge


At Kaja bor i Bergen medfører at Kaja bor i Norge.

Vi kan også si at «Kaja bor i Bergen» og «Kaja bor i Norge» er to utsagn. Utsagn kan enten være sanne eller usanne. Vi kan gi utsagnene navn. Vi bruker da små bokstaver.

p: Kaja bor i Bergen

q: Kaja bor i Norge

Vi kan da skrive at *p* medfører *q*

$$p \Rightarrow q$$

Vi har da fått en kortfattet skrivemåte som forteller at hvis det er sant at Kaja bor i Bergen, da er det også sant at Kaja bor i Norge.

Ekvivalens

Ekvivalens (107600)

Hvis den logiske slutningen gjelder begge veier, sier vi at vi har en **ekvivalens**.
Tegnet «⇔» kalles en **ekvivalenspil**.

Eksempel

$$x = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$$

Vi leser $x = 2$ **er ekvivalent med** at $2x = 4$.

Dette betyr at det er **implikasjon begge veier**

$$x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \text{ og } 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Vi har ikke ekvivalens i det første eksemplet fordi «Kaja bor i Norge» medfører ikke at «Kaja bor i Bergen».

Noen matematiske bevistyper

[Noen matematiske bevistyper (107606)]

I matematikken har vi en rekke påstander eller setninger. Et eksempel er setningen som sier at summen av vinklene i en trekant er 180 grader. Vi godtar ikke slike påstander uten videre. Vi krever bevis. Vi skal nå se på to måter å føre matematiske bevis på.

Direkte bevis

Dette er den mest vanlige formen for bevisførsel, og det er egentlig dette vi gjør når vi for eksempel løser likninger.

Eksempel 1

Vi sier: Løs likningen

$$2x + 4 = 6$$

Vi kunne like gjerne sagt: Bevis påstanden

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Det vi gjør, er å løse likningen på vanlig måte. **Vi antar at noe er sant og trekker logiske slutninger fram til konklusjonen**. Vi bruker implikasjonstegnet for å vise at vi trekker en logisk slutning. Løsning av en likning kunne vi ført på følgende måte

$$\begin{gathered} 2x+4=6 \\ \Downarrow \\ 2x=6-4 \\ \Downarrow \\ 2x=2 \\ \Downarrow \\ x=1 \end{gathered}$$

I dette tilfellet har vi også ekvivalens hele veien. Det betyr at den motsatte implikasjonen også gjelder: $x = 1 \Rightarrow 2x + 4 = 6$. Det vil si at $x = 1$ er en løsning på likningen.

Vi kunne altså like gjerne skrevet

$$\begin{gathered} 2x+4=6 \\ \Updownarrow \\ 2x=6-4 \\ \Updownarrow \\ 2x=2 \\ \Updownarrow \\ x=1 \end{gathered}$$

Eksempel 2

En setning i matematikken sier at for et naturlig tall *n* gjelder

$$n \text{ er et partall} \Rightarrow n^2 \text{ er delelig med } 4$$

Et direkte bevis for denne påstanden kan føres slik

n er et partall

$\Downarrow$ Vi kan skrive n som $2t$ hvor t er et

$n=2t$ helt tall fordi 2 er en faktor i alle partall.

$\Downarrow$

$n^2=4t^2$ 4 er en faktor i n^2. Det må bety at n^2 er delelig med 4.

I dette beviset brukte vi at ethvert **partall** kan skrives som $2t$ hvor t er et helt tall. Tilsvarende kan ethvert **oddetall** skrives som $2t+1$ eller $2t-1$. Se nedenfor.

Partall og oddetall

Et helt tall n er partall hvis og bare hvis det finnes et helt tall t slik at $n = 2t$.

Et helt tall n er oddetall hvis og bare hvis det finnes et helt tall t slik at $n = 2t + 1$ eller $n = 2t - 1$

Eksempel 3

Det kan ofte være lett å trekke gale slutninger. Det gjelder for eksempel når vi løser **irrasjonale likninger**.

Likninger hvor **den ukjente befinner seg under ett eller flere rottegn**, kalles irrasjonale likninger.

Gitt likningen

$$\sqrt{x+1} = -3$$

For å løse slike likninger må vi kvadrere på begge sider av likhetstegnet

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (-3)^2$$

Vi får da

$$\begin{aligned} x+1 &= 9 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Hvis vi nå setter prøve, får vi

$$\begin{aligned} &\text{venstre side}: \ \sqrt{x+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3 \\ &\text{høyre side}: \ -3 \end{aligned}$$

Vi ser at $x = 8$ ikke er en løsning av likningen. Hvordan kan det henge sammen?

Forklaring

Alle er enige om at

$$-5 \neq 5$$

Men samtidig er

$$(-5)^2 = 5^2$$

Vi ser altså at når vi kvadrerer tall som er forskjellige, kan kvadratene bli like. Men $(-5)^2 = 5^2$ medfører ikke at $-5 = 5$.

Med implikasjons- og ekvivalenstegn ser vi at **problemet er at vi ikke har ekvivalens når vi kvadrerer.**

$$\sqrt{x+1} = -3$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (-3)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$x+1 = 9$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 8$$

Eksempelet viser at det kan **være viktig å være klar over når vi har implikasjon, og når vi har ekvivalens**.

Når vi løser irrasjonale likninger, har vi bare implikasjon når vi kvadrerer. Det betyr at kvadreringen kan føre til at vi får en falsk løsning. Du må derfor alltid **sette prøve på svaret** når du løser irrasjonale likninger.

Kontrapositive bevis

«Alle bergensere heier på Brann» eller «Ingen som ikke heier på Brann, er bergensere» …?

Påstand 1
Alle bergensere heier på Brann.

På «matematikkspråket» kan vi skrive dette slik

Per er bergenser $\Rightarrow$ Per heier på Brann

Påstand 2
Ingen som ikke heier på Brann, er bergensere.

På «matematikkspråket»

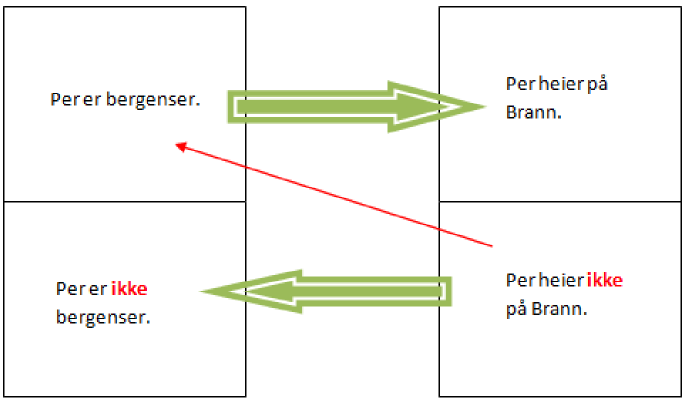
Per heier **ikke** på Brann $\Rightarrow$ Per er **ikke** bergenser

Hva er forskjellen på påstand 1 og påstand 2?

La oss gå ut fra at påstand 1 er riktig, og at påstand 2 er gal.

At påstand 2 er gal, betyr at Per kan være bergenser selv om han ikke heier på Brann (rød pil på figuren nedenfor), men ifølge påstand 1 heier han da på Brann, og vi har en selvmotsigelse. (Enten heier man på Brann eller så gjør man det ikke.)

Påstand 2 kan altså ikke være gal hvis påstand 1 er riktig. Tilsvarende kan vi vise at påstand 1 ikke kan være gal hvis påstand 2 er riktig. Det er altså ingen forskjell på påstand 1 og påstand 2.



I noen tilfeller er det vanskelig å føre et direkte bevis for en påstand, mens det derimot kan være mye enklere å føre et bevis for den kontrapositive («motsatte») påstanden.

Vi kan generalisere eksempelet ovenfor ved å kalle setningen «Per er Bergenser» for p, og setningen «Per heier på Brann» for q. Da kan vi på logikkspråket kalle setningen «Per er ikke Bergenser» for ikke p, og «Per heier ikke på Brann» for ikke q.

Vi har da vist følgende:

Vi vil bevise påstanden

$$p \Rightarrow q$$

Dette er det samme som å bevise at

$$\text{ikke } q \Rightarrow \text{ikke } p$$

Eksempel

Vi skal vi bevise at

$$n^2 \text{ er partall} \Rightarrow n \text{ er partall}$$

Det kan vi gjøre ved å vise at

$$n \text{ er ikke partall} \Rightarrow n^2 \text{ er ikke partall}$$

Bevis

$$n \text{ er ikke partall}$$
$$\Downarrow$$
$$n \text{ er oddetall}$$
$$\Downarrow$$
$$n = 2t + 1 \text{ (} t \text{ er et helt tall)}$$
$$\Downarrow$$
$$n^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2\left(2t^2 + 2t\right) + 1$$

Det siste uttrykket må være et oddetall.
Altså er n^2 ikke partall, og setningen er bevist.

Bevis med moteksempel

Påstand
«Ingen elever i min klasse bruker briller.»

Vi kan bevise at denne påstanden er gal, hvis vi kan finne en elev i klassen som bruker briller.

Merk!

Vi kan motbevise en påstand met et moteksempel.

Vi kan aldi bevise en påstand med et eksempel.

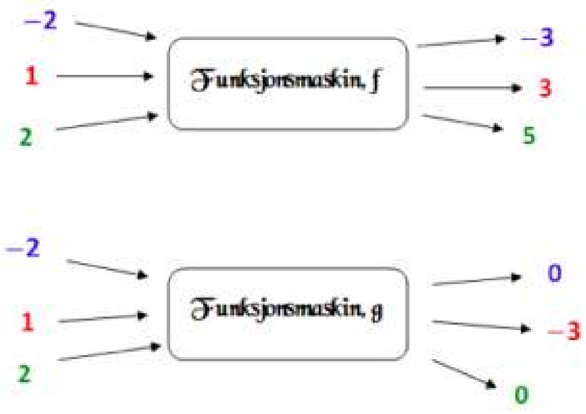
Funksjoner

Teori

Innledning

Innledning

Innledning (110001)



Ovenfor ser du to «Funksjonsmaskiner», *f* o g *g*. Når vi putter en verdi inn i en av maskinene, kommer en annen verdi ut. Prøv og finn ut hva maskinene gjør med verdiene vi putter inn. Finner du ut hvordan hver av maskinene er «programmert»?

Funksjonskapittelet handler om hvordan en størrelse varierer avhengig av en annen. Vi skal se på hvordan sammenhenger mellom størrelser fra algebra, geometri og praktiske situasjoner kan beskrives ved hjelp av funksjoner.

Funksjoner brukes i mange sammenhenger for å lage matematiske modeller av virkeligheten og i forbindelse med det vi kaller matematisk analyse. I dette kapittelet skal vi se på ulike typer funksjoner med forskjellige egenskaper.

Kapittelet bygger på funksjonskapittelet fra 1T. Du skal blant annet lære om grenseverdier, kontinuitet og asymptoter. Du skal lære å derivere ulike typer funksjoner og du skal lære mer om hva den førstederiverte og den andrederiverte forteller om forløpet til en funksjon.

Til slutt skal vi se litt på parameterfremstilling av kurver og på vektorfunksjoner.

Funksjoner

Funksjoner (110009)

I 1T forklarte vi funksjonsbegrepet ved hjelp av en funksjon som viste sammenhengen mellom strekningen en jogger hadde tilbakelagt og hvor lenge hun hadde løpt. Vi forutsatte at hun løp med jevn fart.

Tilbakelagt strekning varierte i forhold til tiden etter formelen

$$S(t) = 160t \quad D_s = (0, 100)$$

der t stod for antall minutter og $S(t)$ for strekningen i meter som var tilbakelagt etter t minutter. Joggeren løp med en jevn fart på 160 m/min.

En funksjon kan for eksempel vise sammenheng mellom strekning og tid.

Generelt sier vi at y **er en funksjon av** x dersom **hver verdi av** x **gir nøyaktig en verdi av** y.

Funksjonen S ovenfor er representert ved en formel eller et funksjonsuttrykk. Vi kan også la funksjoner være representert ved verditabeller og/eller ved grafer. I tillegg kan en funksjon være representert ved en verbal beskrivelse, dvs. med ord som beskriver sammenhengen mellom størrelsene som inngår i funksjonsuttrykket.

Grenseverdier, asymptoter og kontinuerlige funksjoner

Grenseverdier

Grenseverdier (110015)

Gitt funksjonen

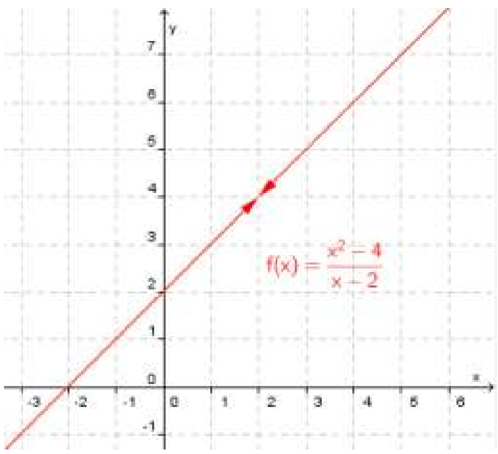
$$f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

Funksjonen er ikke definert for *x* = 2, for da blir nevneren lik null. Det er likevel aktuelt å spørre seg hva som skjer med verdiene til funksjonen når *x* - verdiene nærmer seg 2.

Vi bruker regneark og regner ut noen funksjonsverdier for *x* nær 2.

x	1,9900000	1,9999000	1,9999999	2	2,000010	2,0001000	2,0100000
f(*x*)	3,9900000	3,999000	3,999999	Ikke definert	4,000010	4,0001000	4,0100000

Ut fra tabellen kan det synes som om jo nærmere *x* - verdiene kommer tallet 2, jo nærmere kommer funksjonsverdiene tallet 4. Eller sagt på en annen måte. Det kan synes som om *f*(*x*) har 4 som grenseverdi når *x* nærmer seg 2.



I så tilfelle skriver vi dette som

$$\lim_{x\to 2}\ f\left(x\right)=4 \text{ eller}$$
$$f\left(x\right)\to 4 \text{ når } x\to 2$$

Lim er forkortelse for det latinske ordet «**limes**» som betyr **grense**.

Grenseverdibegrepet er meget sentralt i matematikken, og matematikere strevde lenge med å lage en presis definisjon.

Litt upresist kan vi si:

> Hvis vi kan få *f*(*x*) så nærme *A* vi måtte ønske, bare vi velger *x* tilstrekkelig nærme *a*, så har *f*(*x*) *A* som grenseverdi når *x* nærmer seg *a*. Vi skriver
>
> $$\lim_{x\to a}\ f\left(x\right)=A \text{ eller } f\left(x\right)\to A \text{ når } x\to a$$
>
> Vi leser «Grenseverdien for *f*(*x*) når *x* går mot *a* (liten a) er lik *A* (stor A)» eller «*f*(*x*) går mot *A* når *x* går mot *a*».

Vi forutsetter at *x* er med i definisjonsmengden til *f*, men det er ikke nødvendig at *a* er med i definisjonsmengden.

Definisjonen sier at *A* er grenseverdi hvis vi kan få forskjellen mellom *f*(*x*) og *A* så liten vi bare måtte ønske, forutsatt at vi velger *x* tilstrekkelig nærme *a*, men ikke lik a.

Metoden vi ovenfor brukte, med å regne ut noen funksjonsverdier, er på ingen måte en pålitelig metode for å finne grenseverdier.

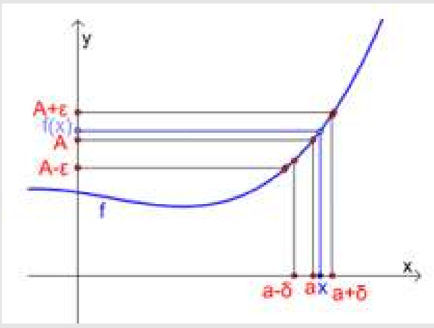
Matematikere har kommet fram til en presis definisjon av grenseverdi som gjør det mulig å lage regneregler og dermed regne ut grenseverdier. Denne definisjonen ligger egentlig utenfor dette kurset, men vi tar den med for spesielt interesserte. Denne definisjonen omtales ofte som epsilon-delta-definisjonen, siden vi bruker de greske bokstavene ε (epsilon) og δ (delta) i definisjonen.

Vi sier at funksjonen *f*(*x*) har tallet *A* som grenseverdi når *x* nærmer seg verdien *a,* hvis det til ethvert tall ε > 0 finnes et tall δ > 0 slik at

$$(f(x) - A) < \varepsilon$$

$$\text{når } \ (x-a) < \delta \text{ og } \ (x-a) > 0$$

Bare vi velger *x* nærme nok *a*, så havner altså *f*(*x*) så nærme *A* vi måtte ønske.



Med utgangspunkt i denne definisjonen kan det bevises et sett med regneregler som vi kan bruke for å regne ut grenseverdier.

For eksempel kan det vises at hvis $\lim\limits_{x \to a} f(x)$og $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ eksisterer, så er

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \text{ forutsatt at } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Grenseverdi for ulike funksjoner

[Grenseverdier for ulike funksjoner (110071)]

Grenseverdier til polynomfunksjoner

> En regel sier at grenseverdien til en polynomfunksjon $f(x)$, når x går mot en bestemt verdi a, kan vi finne ved å regne ut $f(a)$
>
> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ når f er en polynomfunksjon

Eksempel

$$\lim_{x \to 4} \left(x^2 - 3x + 3\right) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 3 = 7$$

Grenseverdien til en rasjonal funksjon

Rasjonale funksjoner består av polynomfunksjoner i teller og nevner. Vi kan også her finne grenseverdier ved innsetting. Forutsetningen er at vi **ikke får null i nevner**.

Vi skiller mellom tre ulike situasjoner.

1. Grenseverdi for en brøk der nevneren ikke går mot null

Eksempel

Vi ser på brøkene $\frac{x+5}{x-1}$ og $\frac{x-3}{x-1}$ når x går mot 3. Her kan vi finne grenseverdiene direkte ved å sette inn 3 i stedet for x og regne ut

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x-1} = \frac{3+5}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x-1} = \frac{3-3}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$$

2. Grenseverdi for en brøk der nevneren går mot null, men telleren ikke går mot null

Vi ser på brøken $\frac{2x-1}{x^2-4}$. Hva skjer med brøken når x går mot 2?

$$\frac{2 \cdot 2{,}001 - 1}{2{,}001^2 - 4} \approx 750$$

$$\frac{2 \cdot 2{,}000\,001 - 1}{2{,}000\,001^2 - 4} \approx 750\,000$$

$$\frac{2 \cdot 2{,}00\,000\,001 - 1}{2{,}00\,000\,001^2 - 4} \approx 75\,000\,000$$

Når x går mot 2, vil telleren gå mot 3, mens nevneren blir mindre og mindre. Det betyr at verdien til brøken blir større og større. Utregningene ovenfor viser dette. Det viser seg at det ikke eksisterer noen grenseverdi. Brøkens verdi vokser over alle grenser.

Det betyr at $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-1}{x^2-4}$ ikke eksisterer.

En brøk har ingen grenseverdi for $x = a$ hvis vi, når vi setter inn tallet a, får null i nevner og et tall forskjellig fra null i teller. Da vil brøkens verdi gå mot enten pluss eller minus uendelig når x nærmer seg a.

Eksempel

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x-2}$$

$$2^2 - 6 = -2$$
$$2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x-2} \ \text{eksisterer ikke}$$

3. Grenseverdi for en brøk der både teller og nevner går mot null

En regel sier at hvis to funksjoner f og g er like for alle verdier i nærheten av a, men ikke nødvendigvis for $x = a$, så er $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$

Vi ser på brøken $\frac{x^2-16}{2x-8}$. Når $x = 4$, får vi null i både teller og nevner.

Dette betyr at vi kan faktorisere og forkorte, og vi får

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\cancel{x-4}\right)(x+4)}{2\left(\cancel{x-4}\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$$

Her er $f(x) = \frac{x^2-16}{2x-8}$ og $g(x) = \frac{(x+4)}{2}$

Eksempel

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$$

$$2^2 + 2 - 6 = 0$$
$$2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-16}{2x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\cancel{x-2}\right)(x+3)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} \ (x+3) = 2+3 = 5$$

Eksempel

$$\lim_{x \to 4} \frac{6(\sqrt{x}-2)}{3x-12}$$

$$6\left(\sqrt{4}-2\right)=0$$
$$3 \cdot 4-12=0$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{6(\sqrt{x}-2)}{3x-12}=\lim_{x \to 4} \frac{6(\sqrt{x}-2)}{3(x-4)}=\lim_{x \to 4} \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\,\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{3}\left(\sqrt{x}+2\right)\cancel{(\sqrt{x}-2)}}$$

$$=\lim_{x \to 4} \frac{2}{(\sqrt{x}+2)}=\frac{2}{(\sqrt{4}+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Grenseverdi for en brøk når x går mot pluss uendelig eller minus uendelig

Grenseverdi for en brøk når x går mot pluss uendelig eller minus uendelig (110073)

Vi er ofte også interessert i å finne ut hvordan det går med funksjoner når den variable vokser eller avtar uten grenser. Det vil si at den variable går mot pluss uendelig eller minus uendelig. For noen funksjoner vil funksjonsverdiene også da nærme seg en bestemt grenseverdi.

Vi sier at *f*(*x*) nærmer seg *A* som grenseverdi når *x* blir uendelig stor, hvis det er slik at vi kan på avstanden mellom *f*(*x*) og *A* så liten vi bare måtte ønske, hvis vi velger *x* stor nok.

Vi skriver

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Tilsvarende når den variable blir uendelig liten, går mot minus uendelig.

For rasjonale funksjoner vil dette ofte være tilfelle.

I det rasjonale uttrykket $\frac{6x^2}{2x^2+4}$ vil tallet 4 i nevneren få svært liten betydning når absoluttverdien til *x* blir veldig stor. Brøken vil da oppføre seg som brøken $\frac{6x^2}{2x^2}$ som igjen er lik $\frac{6}{2} = 3$. Dette indikerer at $\frac{6x^2}{2x^2+4}$ har tallet 3 som grenseverdi når *x* enten blir uendelig stor eller uendelig liten.

En annen måte å begrunne dette på er å dividere teller og nevner med den høyeste potens av *x* som forekommer i uttrykket. I dette tilfellet er det x^2 . Vi får at

$$\frac{6x^2}{2x^2+4} = \frac{\frac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{4}{x^2}} = \frac{6}{2+\frac{4}{x^2}}$$

Når *x* vokser over alle grenser, vil $\frac{4}{x^2}$ gå mot null. Da vil brøken $\frac{6x^2}{2x^2+4}$ nærme seg $\frac{6}{2} = 3$. Det samme resonnementet gjelder om *x* går mot minus uendelig. Vi har derfor at

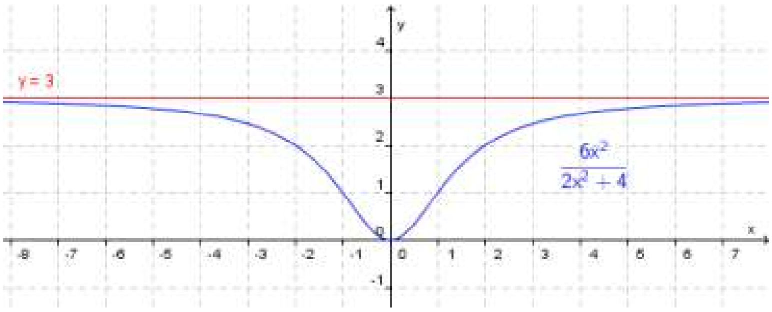
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2}{2x^2+4} = 3$$

Denne skrivemåten betyr at grenseverdien er lik 3 både når *x* går mot pluss uendelig og mot minus uendelig.

Vi kan føre regningen på følgende måte

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2+\frac{4}{x^2}}=\frac{6}{2+0}=3$$

Vi sier at den horisontale linjen $y=3$ er en horisontal **asymptote** til grafen til uttrykket når *x* går mot ∞ eller $-\infty$.



Rasjonale funksjoner og vertikal asymptote

Rasjonale funksjoner og vertikal asymptote (110448)

En **rasjonal funksjon** er en funksjon som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er polynomer.

Polynomene kan ha grad null, derfor er for eksempel også funksjonen $\frac{1}{x}$ en rasjonal funksjon.

Vertikal asymptote

Vi undersøker funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Vi undersøker om $f(x)$ har noen grenseverdi når *x* nærmer seg –2.

$$(-2) - 2 = -4$$
$$(-2) + 2 = 0$$

Det betyr at $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x-2}{x+2}$ ikke eksisterer.

Når *x* nærmer seg verdien –2 fra venstre, vokser funksjonsverdiene over alle grenser.

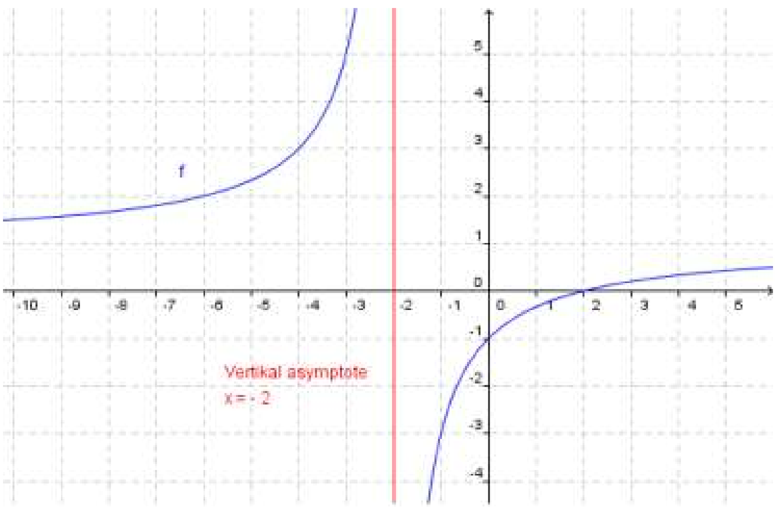
Vi skriver

$$f(x) \to \infty \text{ når } x \to -2^- \text{ eller } \lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$$

(Legg merke til hvordan vi markerer at nærmer seg -2 fra venstre.)

Når *x* nærmer seg verdien –2 fra høyre, avtar funksjonsverdiene uten grenser.

Vi skriver $f(x) \to -\infty \text{ når } x \to -2^+ \text{ eller } \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$



Hvis en funksjon $f(x) \to \infty \text{ eller } -\infty \text{ når } x \to a$ fra den ene eller andre siden, så er linjen $x = a$ en **verrikal asymptote** for grafen til *f*.

Når *x* nærmer seg *a*, så vil grafen nærme seg linjen $x = a$.

Dette betyr at linjen $x = -2$ er en vertikal asymptote for grafen til $f(x)$.

Ut fra ovenstående kan vi si at $x = a$ er en **vertikal asymptote** for en rasjonal funksjon $f(x)$ hvis nevneren blir null og telleren blir et tall forskjellig fra null for $x = a$.

Eksempel

$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - x}$

Vi finner når nevneren er lik null.

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \ &\vee \ x - 1 = 0 \\ x = 0 \ &\vee \ x = 1 \end{aligned}$$

Det er her to mulige vertikale asymptoter, $x = 0 \text{ og } x = 1$.

Vi undersøker først om $x = 1$ er en vertikal asymptote.

$3 \cdot 1^2 = 3$

Telleren er et tall forskjellig fra null og nevneren er null for $x = 1$, så $x = 1$ er en vertikal asymptote.

Vi undersøker så om $x = 0$ er en vertikal asymptote.

$3 \cdot 0^2 = 0$

Både teller og nevner er null for $x = 0$.

Funksjonen kan da ha en grenseverdi når *x* nærmer seg null.

Grenseverdien finner vi slik

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \cdot x \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot (x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \cdot x}{(x-1)} = \frac{3 \cdot 0}{0-1} = 0$

Grenseverdien eksisterer og vi får ingen asymptote for $x = 0$.

Horisontal asymptote

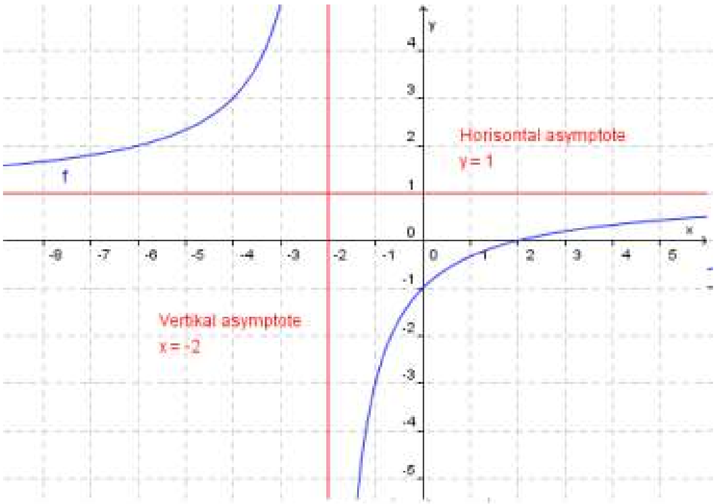
[Horisontal asymptote (110581)]

Horisontale asymptoter finner vi ved å la *x* gå mot et uendelig stort positivt eller negativt tall.

> Linjen $y = a$ er en horisontal asymptote for funksjonen *f* dersom $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

Vi har tidligere sett hvordan vi finner grenseverdien for en brøk når *x* går mot pluss eller minus uendelig. Ved å finne denne grenseverdien, finner vi altså den horisontale asymptoten.

For funksjonen har vi at $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ har vi at $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x+2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$



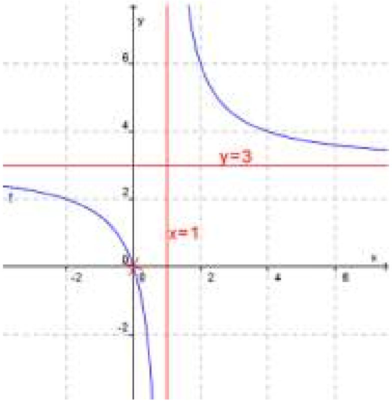
Eksempel

$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-x}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{x}} = \frac{3}{1-0} = 3$

Når *x* går mot pluss eller minus uendelig vil grafen nærme seg linjen $y = 3$.

Linjen $y = 3$ er en horisontal asymptote for $f(x)$.


y
y=3
x=1
f
x

Et praktisk eksempel på en rasjonal funksjon

Et praktisk eksempel på en rasjonal funksjon (110618)

Et mobilabonnement har en fastpris per måned på 79 kroner og en samtaleavgift på 39 øre per minutt.

Gjennomsnittsprisen per minutt, *P*, for mobilbruk en måned, er en funksjon av antall samtaleminutter, *x*.

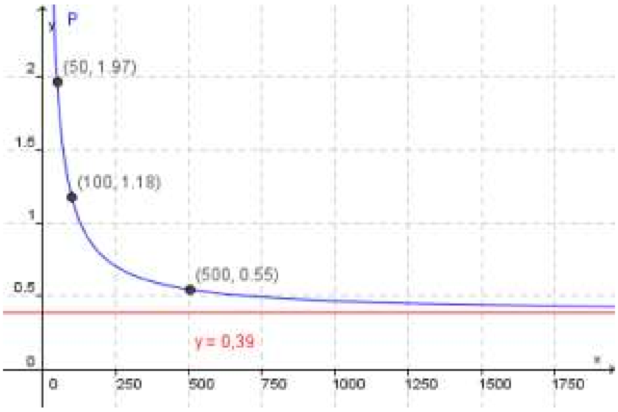
Funksjonsuttrykket blir et rasjonalt uttrykk

$$P\left(x\right)=\frac{0{,}39x+79}{x}$$

Definisjonsmengden til funksjonen avhenger av forventet total samtaletid. La oss anta at total samtaletid ikke overstiger 900 minutter, slik at definisjonsmengden er fra 0 til og med 900.

Vi tegner grafen til funksjonen.

Et mobilabonnement har en fastpris per måned på 79 kroner og en samtaleavgift på 39 øre per minutt.



Grafen viser at ved en total samtaletid på 50 minutter, blir minuttprisen 1,97 kroner. Ved total samtaletid på 100 minutter, blir minuttprisen 1,18 kroner og ved total samtaletid på 500 minutter, blir minuttprisen 0,55 kroner.

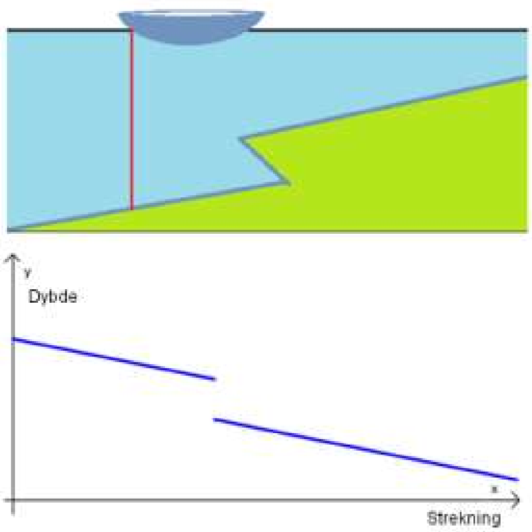
Gjennomsnittlig minuttpris avtar med økende bruk. Grafen synker veldig fort til å begynne med, for så å flate ut.

Grafen har horisontal asymptote $y=0,39$. Dette svarer til den gjennomsnittlige minuttprisen når total samtaletid er stor. Dette er også den samtaleavgiften som oppgis i abonnementet. Ved å ringe veldig mye nærmer minuttprisen seg 39 øre, men minuttprisen vil aldri bli lik 39 øre. Fastprisen får mindre og mindre betydning jo større den totale samtaletiden er.

Kontinuitet

Kontinuitet (110677)

Fra en båt loddes dybden ned til havbunnen mens den beveger seg inn mot land. Dybden avtar jevnt, bortsett fra når båten passerer et fjellutspring som gjør at dybden endrer seg brått. Se figur.



Vi tenker oss dybden som funksjon av den strekningen båten tilbakelegger. Grafen til denne funksjonen ville da kunne se ut som vist på figuren. Grafen er **ikke sammenhengende**. Funksjonsverdiene gjør et plutselig hopp for en spesiell verdi av *x*. Men til hver *x* - verdi måles en bestemt dybde.

Vi sier at dybdefunksjonen ikke er **kontinuerlig**.

En funksjon *f* er **kontinuerlig** for $x = a$ hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En funksjon som ikke er kontinuerlig i et punkt er diskontinuerlig i punktet.

Funksjonen *f* er **kontinuerlig i et intervall** dersom *f* er **kontinuerlig i alle punkt i intervallet**.

En funksjon er kontinuerlig hvis den er kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde.

En funksjon kan ha to ulike grenseverdier når *x* nærmer seg en verdi *a*, avhengig av om nærmer seg *a* fra høyre eller fra venstre.

Vi får derfor at

En funksjon *f* er **kontinuerlig** for $x = a$ hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ betyr grenseverdien for $f(x)$ når *x* går mot *a* fra venstre.

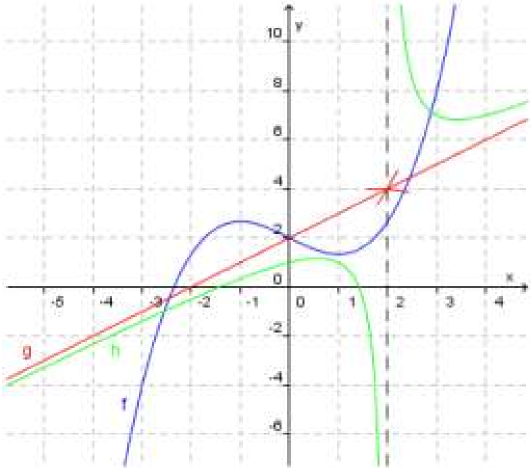
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ betyr grenseverdien for $f(x)$ når *x* går mot *a* fra høyre.

Funksjonene *f*, *g* og *h* er gitt ved

$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-x+2$

$g\left(x\right)=\frac{x^2-4}{x-2}$

$h\left(x\right)=\frac{x^2-2}{x-2}$



Fra teorien om grenseverdier har vi setningen

> Grenseverdien til en polynomfunksjon $f\left(x\right)$, når *x* går mot en bestemt verdi *a*, kan vi finne ved å regne ut $f\left(a\right)$

Det betyr at *f* er kontinuerlig i sitt definisjonsområde. Funksjonen er kontinuerlig. Funksjonen er også definert for alle reelle tall slik at grafen til *f* er en sammenhengende kurve.

Funksjonene *g* og *h* er ikke definert for $x=2$ fordi nevnerne blir 0 for $x=2$. *g* har en grenseverdi for $x=2$, mens grafen til *h* har asymptoten $x=2$. På figuren markerer at funksjonen *g* ikke er definert for $x=2$.

Vi kan finne grenseverdiene til funksjonene *g* og *h* når *x* går mot en bestemt verdi *a*, forskjellig fra 2, ved å regne ut $f\left(a\right)$.

Det betyr at funksjonene *g* og *h* er kontinuerlige i sine definisjonsområder, og er derfor kontinuerlige funksjoner.

Funksjoner med delt forskrift

Funksjoner med delt forskrift (110778)

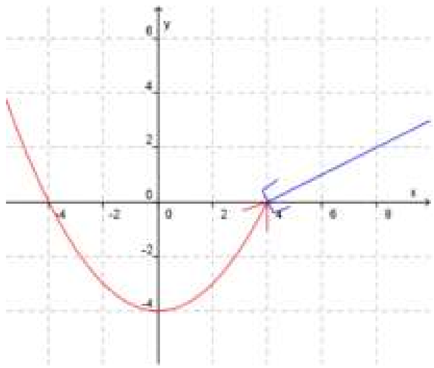
Funksjoner med «delt forskrift» vil si funksjoner som er definert med ett funksjonsutrykk for noen verdier av x og et annet funksjonsutrykk for andre verdier av x.

Eksempel 1

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x^2 - 4 & x < 4 \\ \frac{1}{2}x - 2 & x \geqslant 4 \end{pmatrix}$$

Vi skal undersøke om funksjonen *f* er kontinuerlig for $x = 4$.

Vi finner



Grenseverdien når *x* går mot 4 fra venstre

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - 4\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot 16 - 4 = 0$$

Grenseverdien når *x* går mot 4 fra høyre

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \left(\tfrac{x}{2} - 2\right) = \tfrac{4}{2} - 2 = 0$$

Funksjonsverdien i punktet der $x = 4$

$$f(4) = \tfrac{1}{2} \cdot 4 - 2 = 0$$

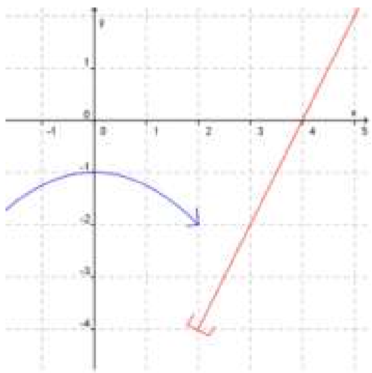
De to grenseverdiene og funksjonsverdien er like. Funksjonen *f* er dermed kontinuerlig for $x = 4$.

De to symbolene på grafen i punktet (4,0) markerer at den blå grafen gjelder for $x \in [4, \rightarrow>$, og den røde grafen gjelder for $x \in (\leftarrow, 4)$.

Eksempel 2

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^2 - 1 & x < 2 \\ 2x - 8 & x \geq 2 \end{pmatrix}$$

Vi finner



Grenseverdien når *x* går mot 2 fra venstre

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(-\tfrac{1}{4}x^2 - 1\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4} \cdot 2^2 - 1 = -2$$

Grenseverdien når *x* går mot 2 fra høyre

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 8) = 2 \cdot 2 - 8 = -4$$

Funksjonsverdien i punktet der $x = 2$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 8 = -4$$

De to grenseverdiene er ikke like. Funksjonen *f* er dermed ikke kontinuerlig for $x = 2$.

Vi kan også se dette av grafen til *f* som ikke er sammenhengende.

Derivasjon

Derivasjon

Derivasjon (110786)

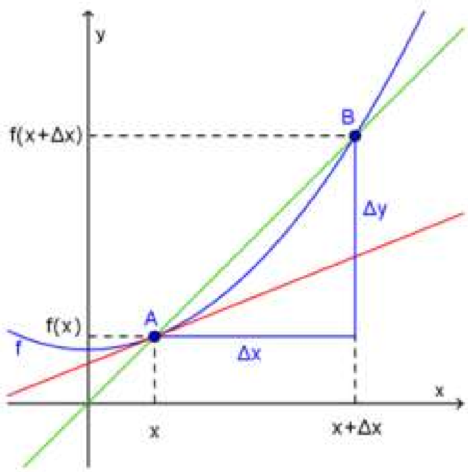
I 1T arbeidet vi med den momentane vekstfarten, eller den deriverte, til en funksjon. Vi starter med litt repetisjon.

Vi ønsker å finne den momentane vekstfarten til funksjonen *f* i punktet $A\left(x, f\left(x\right)\right)$.

Vi gir *x* et tillegg $\Delta\mathrm{x}$, og får et nytt punkt på grafen

$B = \left(x + \Delta\mathrm{x}, f\left(x + \Delta\mathrm{x}\right)\right)$

Vi trekker en sekant (grønn linje) gjennom punktene *A* og *B*.



Vi regner ut stigningstallet til denne linjen

$a = \frac{\Delta\mathrm{y}}{\Delta\mathrm{x}} = \frac{f(x+\Delta\mathrm{x})-f(x)}{(x+\Delta\mathrm{x})-x} = \frac{f(x+\Delta\mathrm{x})-f(x)}{\Delta\mathrm{x}}$

Vi har da funnet et uttrykk for **gjennomsnittlig vekstfart** fra *A* til *B*.

Vi lar nå punktet *B* nærme seg punktet *A*. Vi lar altså $\Delta\mathrm{x}$ gå mot null.

Da vil sekanten (grønn) gradvis nærme seg til å bli en tangent (rød linje) til kurven i *A*.

Stigningstallet til denne tangenten forteller hvor fort grafen vokser akkurat i punktet *A*. Vi kaller dette stigningstallet for **den momentane veksten** eller **den deriverte** til *f* i punktet *A*. Vi skriver $f'\left(x\right)$og leser « *f* derivert av *x* ». Legg merke til tegnet for den deriverte, en liten apostrof på *f*, f'.

Den deriverte

Vi ser på grafen ovenfor.

$f'\left(x\right)$ er den verdien $\frac{\Delta\mathrm{y}}{\Delta\mathrm{x}} = \frac{f(x+\Delta\mathrm{x})-f(x)}{\Delta\mathrm{x}}$ nærmer seg mot når $\Delta\mathrm{x}$ går mot null.

Definisjon

$$f'\left(x\right) = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0} \frac{\Delta\mathrm{y}}{\Delta\mathrm{x}} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0} \frac{f(x+\Delta\mathrm{x})-f(x)}{\Delta\mathrm{x}}$$

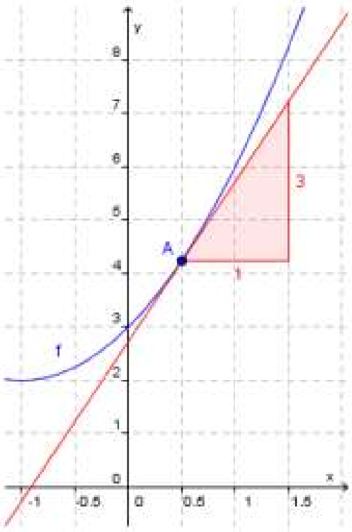
Den deriverte i et punkt er **stigningstallet til tangenten** til grafen i dette punktet.

Den **deriverte** og **den momentane vekstfarten** er det samme.

Hvordan finne den deriverte grafisk?

Hvordan finne den deriverte grafisk? (110856)

Den momentane vekstfarten eller den deriverte til funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=x^2+2x+3$ når for eksempel $x=0,5$, er altså det samme som stigningstallet til tangenten til kurven når $x=0,5$.



Vi kan finne denne verdien grafisk ved å tegne grafen til *f* og tangenten til *f* for $x=0,5$.

Vi ser at tangenten har stigningstallet 3. Den deriverte til $f\left(x\right)$ når $x=0,5$ er altså 3.

Vi skriver

$$f'\left(0,5\right)=3$$

Hvordan regne ut verdier for den deriverte ved å bruke av definisjonen?

Hvordan regne ut verdier for den deriverte ved å bruke definisjonen? (111071)

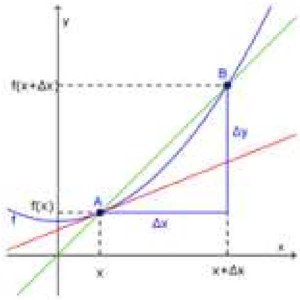
Vi vil nå regne oss frem til den deriverte til funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=x^2+2x+3$ når $x=0,5$.

Definisjonen av den deriverte sier at $f'\left(x\right)$ er den verdien som $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=\frac{f(x+\Delta \mathrm{x})-f(x)}{\Delta \mathrm{x}}$ nærmer seg mot når $\Delta \mathrm{x}$ går mot null.

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=\lim_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{f(x+\Delta \mathrm{x})-f(x)}{\Delta \mathrm{x}}$$

Hvordan finner vi så $f\left(x+\Delta \mathrm{x}\right)$?

$f\left(x+\Delta \mathrm{x}\right)$er det uttrykket du får når du bytter ut *x* med $x+\Delta \mathrm{x}$ i funksjonsuttrykket.



Det gir

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)+3-(x^2+2x+3)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2x+2\cdot\Delta x+3-x^2-2x-3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2\cdot\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2\cdot x+\Delta x+2)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2\cdot x+\Delta x+2)}{\cancel{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+2)\\
&= 2x+2
\end{aligned}$$

Dette betyr at når $f\left(x\right)=x^2+2x+3$, så er $f'\left(x\right)=2x+2$.

Vi kan da finne $f'\left(0,5\right)=2\cdot 0,5+2=3$. Dette var det samme som vi fant grafisk (forrige side i menyen).

Derivasjonsregler

Derivasjonsregler (111075)

Det er ikke nødvendig å bruke definisjonen av den deriverte hver gang vi skal derivere et uttrykk.

Ved å bruke definisjonen på noen generelle uttykk, kan vi komme fram til generelle derivasjonsregler, eller formler, for hvordan vi skal derivere uttrykk. Det er disse formlene vi vanligvis bruker.

I kompetansemålene står det:

Eleven skal kunne bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene.

Du skal altså kunne **bruke** formlene. Ved hjelp av definisjonen til den deriverte er det mulig å bevise formlene. Vi gjennomfører ikke bevisene her, men lenger fram får du se eksempler på liknende bevis.

Nedenfor har vi laget en oversikt over de derivasjonsreglene du **må huske** og som du må kunne **bruke**. Etter oversikten følger eksempler og/eller forklaringer på hvordan reglene brukes.

Definisjon	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
Konstant funksjon	$f(x)=k$	$f'(x)=0$
Potensfunksjon	$f(x)=x^r$	$f'(x)=r\cdot x^{r-1}$
Funksjon multiplisert med konstant	$f(x)=k\cdot g(x)$	$f'(x)=k\cdot g'(x)$
Summer og differanser	$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$
Produkt	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
Kvotienter (Brøk)	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
Eksponentialfunksjoner	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$
Logaritmefunksjonen	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
Kjerneregglen Sammensatte funksjoner	$f(x)=g(u(x))$	$f'(x)=g'(u)\cdot u'(x)$

Den deriverte til en konstant funksjon

Den deriverte til en konstant funksjon (111077)

Konstant funksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$

Eksempel 1

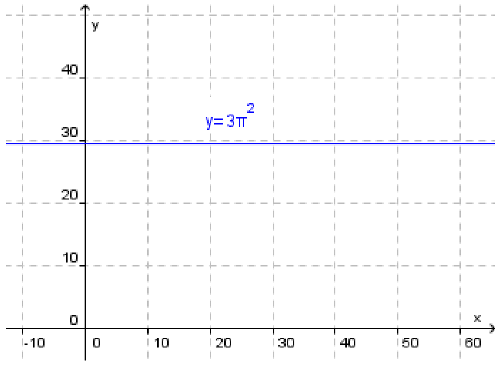
$y = 3$
$y' = 0$

Eksempel 2

$y = \pi$
$y' = 0$

Eksempel 3

$y = 3\pi^2$
$y' = 0$



Grafen til en konstant funksjon er en vannrett linje. En slik linje har stigning lik null, derfor er den deriverte til en konstant funksjon lik null.

Den deriverte til en potensfunksjon

[Den deriverte til en potensfunksjon (111081)]

Potensfunksjon	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

Vi har tidligere sett (se algabrakapittelet) at

- når *a* er et reelt tall forskjellig fra 0 og *n* et naturlig tall, er $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$
- når *a* er et positivt reelt tall, *n* et naturlig tall og *m* et helt tall, så er $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Dette gjør at regelen for derivasjon av potensuttrykk kan brukes i svært mange tilfeller.

Eksempel 1

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

Eksempel 2

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Eksempel 3

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^4$$

Eksempel 4

$$f(x) = x = x^1$$
$$f'(x) = x^{1-1} = 1x^0$$
$$f'(x) = 1$$

Eksempel 5

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Eksempel 6

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = -1\cdot x^{-2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Resultatene rammet inn i sirkel bør du lære deg utenat!

Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant

Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant (111085)

Summer og differanser	$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

Potensfunksjon multiplisert med konstant	$f(x)=k\cdot x^n$	$f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot n\cdot x^{n-1}$

Vi deriverer summer av og differenser mellom funksjoner ved å derivere ledd for ledd. Legg merke til at vi her også får bruk for regelen for derivasjon av en potensfunksjon multiplisert med en konstant.

Eksempel 1

$$f(x)=3-x^2$$
$$f'(x)=0-2x$$
$$f'(x)=-2x$$

Eksempel 2

$$f(x)=x^3+5x^2$$
$$f'(x)=3x^2+5\cdot 2x$$
$$f'(x)=3x^2+10x$$

Den deriverte av et produkt av to funksjoner

[Den deriverte av et produkt av to funksjoner (111108)]

Produkt	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$ $f=u\cdot v$	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ $f'=u'\cdot v+u\cdot v'$

f, *u* og *v* er funksjoner av *x* og skal deriveres med hensyn på *x*. I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Eksempel 1

$$f(x)=\left(x^2+3x\right)\cdot\left(x^3+1\right)$$
$$f'(x)=\left(x^2+3x\right)'\cdot\left(x^3+1\right)+\left(x^2+3x\right)\cdot\left(x^3+1\right)'$$
$$f'(x)=(2x+3)\cdot\left(x^3+1\right)+\left(x^2+3x\right)\cdot 3x^2$$
$$f'(x)=2x^4+2x+3x^3+3+3x^4+9x^3$$
$$f'(x)=5x^4+12x^3+2x+3$$

Eksempel 2

$$f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$$
$$f'(x)=(x-1)'\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot(\sqrt{x})'$$
$$f'(x)=1\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x)=\frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x)=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

I det første eksemplet ovenfor kunne vi like gjerne multiplisert ut parentesene før vi deriverte.

Den deriverte til en kvotient (brøk)

Den deriverte til en kvotient (brøk) (111123)

Kvotienter (Brøk)	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ $f=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$ $f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

f, *u* og *v* er funksjoner av *x* og skal deriveres med hensyn på *x*. I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Den deriverte til en brøk blir en ny brøk der nevneren er kvadratet av den opprinnelige nevneren. Telleren likner på uttrykket til den deriverte av et produkt, men med en klar forskjell. Det står minustegn mellom leddene. Det er derfor viktig med rett rekkefølge på leddene i teller. Begynn med å derivere telleren.

Eksempel 1

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{\left(x^3+2\right)'\cdot x^2-\left(x^3+2\right)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2-\left(x^3+2\right)\cdot 2x}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{3x^4-2x^4-4x}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{x^4-4x}{x^4} = \frac{x\left(x^3-4\right)}{x^4} = \frac{x^3-4}{x^3}$$

Eksempel 2

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{(x+1)'\cdot(x+2)-(x+1)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Kjerneregelen

Kjerneregelen (111139)

Mange funksjoner er mer kompliserte enn dem vi har studert til nå, men ved nærmere ettersyn viser det seg ofte at de er satt sammen av enklere funksjoner.

For eksempel kan funksjonen *f* gitt ved $f(x) = (x^3+2)^4$ oppfattes som en sammensatt funksjon. Først skal en gitt *x* - verdi opphøyes i tredje potens og adderes til tallet 2. Vi kaller denne funksjonen for *u* og sier at $u(x) = x^3+2$ er **kjernefunksjonen**.

Da er for eksempel

$$u(1) = 1^3 + 2 = 3$$

Andre trinn er at det resultatet som *u* gir, skal opphøyes i 4.potens. Vi oppfatter også dette som en egen funksjon, og kaller denne funksjonen for *g*. Men denne funksjonen er ikke en funksjon av *x*, den er en funksjon av *u*, og vi får at $g(u) = u^4$.

Da er

$$g(3) = 3^4 = 81$$

Den opprinnelige funksjonen *f* er da gitt ved $f(x) = g(u(x))$ og

$$f(1) = g(u(1)) = g(1^2+2) = g(3) = 3^4 = 81$$

Poenget er at både *u* gitt ved $u(x) = x^3+2$ og *g* gitt ved $g(u) = u^4$ er funksjoner som vi kan derivere

$u'(x) = 3x^2$

$g'(x) = 4u^3$

Funksjonen *u* er derivert med hensyn på *x* og funksjonen *g* er derivert med hensyn på u.

Det kan bevises at følgende regel gjelder for derivasjon av sammensatte funksjoner

KjerneregIen Sammensatte funksjoner	$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Eksempel 1

$f(x) = (x^3 + 2)^4$

$g(u) = (u)^4, \qquad u = x^3 + 2$
$g'(u) = 4u^3, \qquad u' = 3x^2$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = \left((u)^4\right)' \cdot u'$
$f'(x) = 4u^3 \cdot u'$
$f'(x) = 4(x^3 + 2)^3 \cdot (3x^2)$
$f'(x) = 12x^2 (x^3 + 2)^3$

Eksempel 2

$f(x) = \sqrt{x - 1}$

$g(u) = \sqrt{u}, \qquad u = x - 1$
$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \qquad u' = 1$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = (\sqrt{u})' \cdot u'$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Den deriverte til eksponentialfunksjonen

[Den deriverte til eksponentialfunksjonen (111210)](#)

Den deriverte til eksponentialfunksjonen.

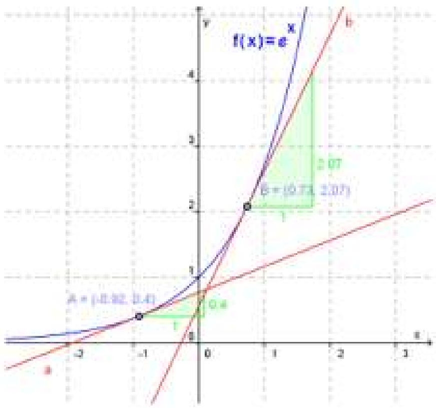
En eksponentialfunksjon er en funksjon gitt på formen

$$f(x) = k \cdot a^x$$

hvor variabelen *x* opptrer som eksponent i en potens. Grunntallet i eksponenten, *a*, er en konstant større enn null, og *k* er en konstant.

Det er et tall som peker seg spesielt ut som grunntall i eksponentialfunksjonen, og det er tallet
e = 2,718 281 828 549... .

Til høyre ser du grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = e^x$. *A* og *B* er to vilkårlige punkt på grafen, og linjene *a* og *b* er tangenter til grafen i disse punktene. Ser du at stigningstallet til tangentene i punktene *A* og *B* har samme verdi som funksjonsverdiene i *A* og *B*?



Du kan selv tegne grafen i GeoGebra. Ved å dra punktene *A* og *B* langs grafen, vil du se at dette gjelder i alle de punktene du kan undersøke. Faktisk gjelder det helt generelt, uten at vi skal føre bevis for det her.

Eksponentialfunksjonen *f* gitt ved $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte.

Eksponentialfunksjoner	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Dette gjør tallet *e* til et av de viktigste tallene i matematikken. Husk at tallet *e* også er grunntallet til den naturlige logaritmen.

Legg også merke til at når $f(x) = \mathrm{k}e^x$, hvor *k* er en konstant, så er $f'(x) = \mathrm{k}e^x$. Når eksponenten er en funksjon av *x*, bruker vi kjerneregelen

Eksempel

$$f(x) = e^{4x}$$
$$g(u) = e^{u} \qquad u = 4x$$
$$g'(u) = e^{u} \qquad u' = 4$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$
$$f'(x) = e^{u} \cdot 4$$
$$f'(x) = 4e^{4x}$$

Den enkle regelen for derivasjon av eksponentialfunksjonen med e som grunntall, gir enkle regler for derivasjon av eksponentialfunksjoner med andre grunntall.

Definisjonen av naturlig logaritme sier at ethvert tall, $a > 0$, kan skrives som *e* opphøyd i logaritmen til *a*, $a = e^{\ln a}$.

Det gir at

$$a^{x} = \left(e^{\ln a}\right)^{x} = e^{x \ln a}$$

Vi bruker så kjerneregelen

$$f(x) = a^{x} = e^{x \ln a}$$

$$g(u) = e^{u} \qquad u = x \ln a$$
$$g'(u) = e^{u} \qquad u' = \ln a$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$
$$f'(x) = e^{u} \cdot u'$$

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a$$
$$f'(x) = e^{\ln a^{x}} \cdot \ln a$$
$$f'(x) = a^{x} \cdot \ln a$$

Eksponentialfunksjoner	$f(x) = a^{x} \qquad a > 0$	$f'(x) = a^{x} \cdot \ln a$

Eksempel 1

$$f(x) = 5^{x}$$

$$f'(x) = 5^{x} \ln 5$$

Eksempel 2

$$f(x) = 3^{4x}$$

$$g(u) = 3^{u} \qquad u = 4x$$
$$g'(u) = 3^{u} \cdot \ln 3 \qquad u' = 4$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$
$$f'(x) = 3^{u} \cdot \ln 3 \cdot 4$$
$$f'(x) = 4 \cdot 3^{4x} \cdot \ln 3$$

Den deriverte til logaritmefunksjonen

Den deriverte til logaritmefunksjonen (111231)

Logaritmefunksjonen	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

Bevis

Definisjonen på naturlig logaritme sier at ethvert positivt tall, *x*, kan skrives som *e* opphøyd i logaritmen til *x*. Det gir at

$$x = e^{\mathrm{lnx}}$$

Når to funksjoner er like, så er også deres deriverte funksjoner like. Vi deriverer venstre og høyre side hver for seg.

Venstre side: $x' = 1$

Høyre side: $\left(e^{\mathrm{lnx}}\right)' = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot u' = e^{\mathrm{lnx}} \cdot (\ln\ x)' = x \cdot (\ln\ x)'$

Men da er

$$x \cdot (\ln\ x)' = 1$$

$$\Downarrow$$

$(\ln\ x)' = \frac{1}{x}$

Eksempel

$f(x) = 2\ln\left(x^2+2\right)$

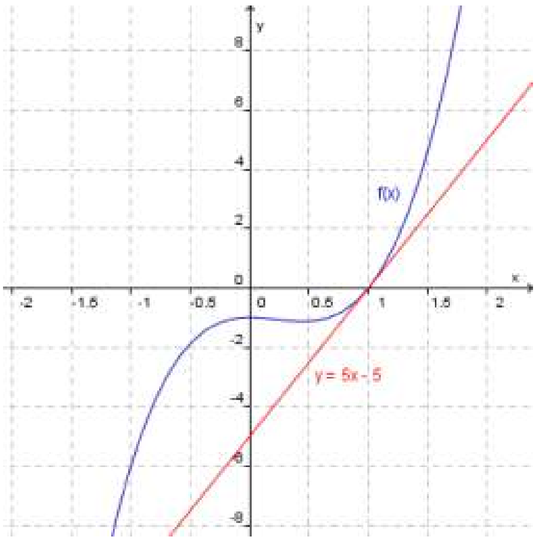
$g(u) = 2\,\mathrm{lnu} \qquad u = x^2+2$
$g'(u) = 2 \cdot \frac{1}{2} \qquad u' = 2x$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x$
$f'(x) = \frac{4x}{x^2+2}$

Lilkningen for tangenten til en graf i et punkt

[Likningen for tangenten til en graf i et punkt (111236)]

En funksjon *f* er gitt ved $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Vi vil finne likningen for tangenten til grafen når $x = 1$.



Tangenten går gjennom punktet $(1, f(1))$. Vi finner først $f(1)$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 \\ &= 3 - 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vi vet at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet. Vi finner derfor $f'(x)$

$$f'(x) = 9x^2 - 4x$$

Vi skal finne tangenten når $x = 1$. Vi regner ut $f'(1)$

$$f'(1) = 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

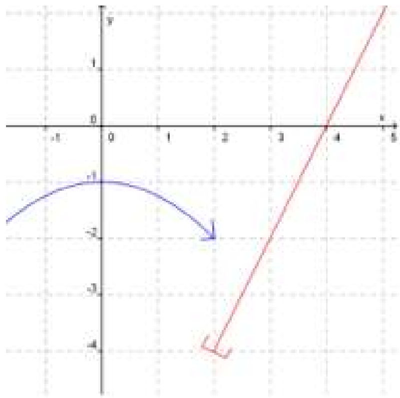
Nå vet vi at tangenten går gjennom punktet $(1, 0)$ og har stigningstall 5 . Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - 0 &= (x - x_1) \\ y &= 5x - 5 \end{aligned}$$

Deriverbarhet

Deriverbarhet (111280)

Er det slik at alle funksjoner er deriverbare i alle punkter?
La oss først se på en funksjon som ikke er kontinuerlig.



Vi har tidligere vist at funksjonen

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^2 - 1 & x < 2 \\ 2x - 8 & x \geq 2 \end{pmatrix}$$

ikke er kontinuerlig for $x = 2$.

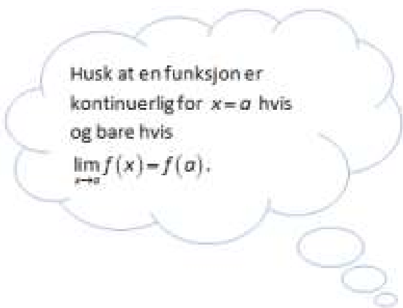
Hvis funksjonen skal være deriverbar for $x = 2$, må grenseverdien $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ eksistere.

Fra læren om grenseverdier har vi at siden nevneren går mot null, så må også telleren gå mot null for at denne grenseverdien skal eksistere. Vi må altså ha at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(2 + \Delta x) - f(2) = 0$. Men dette er det samme som at $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = 2$.

Vi må få samme grenseverdi om *x* nærmer seg verdien 2 fra høyre eller fra venstre.

Når *x* nærmer seg verdien 2 fra venstre, må vi bruke funksjonsuttrykket $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$.

Vi har at $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(-\frac{1}{4}x^2 - 1\right) = -\frac{1}{2}2^2 - 1 = -2$ og $f(2) = 2x - 8 = 2 \cdot 2 - 8 = -4$.



Siden $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$ har vi altså at funksjonen ikke er deriverbar for $x = 2$. Resonnementet ovenfor gjelder generelt. Hvis en funksjon *f* skal være deriverbar for $x = a$, må grenseverdien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ eksistere. Siden nevneren i brøken går mot null, må også telleren i brøken $\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ gå mot null når Δx går mot null. Hvis ikke det skjer, vil verdien av brøken gå mot uendelig. Se kapitlet om grenseverdier.

Men at telleren går mot null, er jo nettopp definisjonen på at en funksjon er kontinuerlig for $x = a$.

Det må bety at funksjonen er kontinuerlig for $x = a$.

Det er nødvendig at en funksjon er **kontinuerlig** for $x = a$, for at den skal være **deriverbar** for $x = a$.

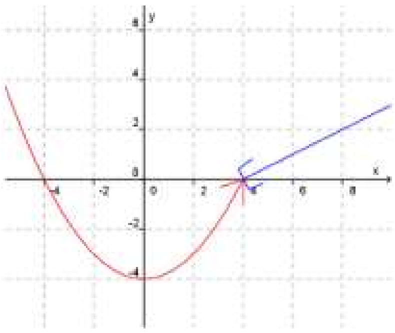
En annen måte å si dette på:

Hvis en funksjon *f*(*x*) **ikke er kontinuerlig** for $x = a$, så er den heller **ikke deriverbar**.

(Det kontrapositive utsagnet).

Men er det alltid slik at en funksjon er deriverbar hvis den er kontinuerlig?

Vi har tidligere vist at funksjonen $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x^2 - 4 & x < 4 \\ \frac{1}{2}x - 2 & x \geq 4 \end{pmatrix}$ er kontinuerlig for $x = 4$.



Den deriverte til en funksjon i et punkt er det samme som stigningstallet til tangenten i punktet. Men i punktet $(4, 0)$ er det ikke mulig å tegne en entydig tangent til grafen. Grafen har en «knekk» i dette punktet, og det er uendelig mange linjer som tangerer grafen. Funksjonen er derfor ikke deriverbar i punktet, selv om den er kontinuerlig.

Vi har at

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & x < 4 \\ \frac{1}{2} & x > 4 \end{pmatrix}$$

Hvis $f'(x)$ skulle eksistert for $x = 4$, måtte vi fått samme grenseverdi for $f'(x)$ når *x* nærmet seg tallet 4 fra begge sider.

Vi har at $\lim_{x \to 4^-} f'(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ og $\lim_{x \to 4^+} f'(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dette viser at funksjonen ikke er deriverbar for $x = 4$.

Drøfting av funksjoner på grunnlag av derivasjonsregler

Monotoniegenskaper og drøfting av polynomfunksjoner

Monotoniegenskaper og drøfting av polynomfunksjoner (111463)

Vi kan bruke den deriverte til å finne topp- og bunnpunkter på grafen til en funksjon og til å bestemme hvor grafen stiger og synker. Dette kan vi gjøre ved regning, uten å tegne grafen.

Monotoniegenskaper

Å finne ut hvor grafen stiger og hvor grafen synker, kalles for å drøfte funksjonens **monotoniegenskaper**.

Å **drøfte en funksjon** betyr gjerne at vi skal undersøke monotoniegenskapene og bestemme topp- og bunnpunkter. Vi kan også bli bedt om å bestemme nullpunkter, definisjonsmengde, krumming og vendepunkt (se avsnittet om krumningsforhold og vendepunkt).

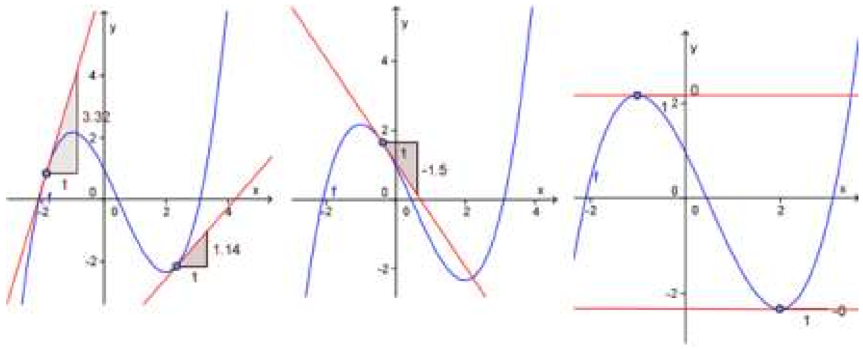
Drøfting av polynomfunksjoner

Utfordring

Tegn grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Tegn deretter tangenter til grafen for noen *x*- verdier mellom –2 og 3.

Undersøk om det er en sammenheng mellom tangentenes stigningstall og hvorvidt grafen stiger, synker eller har topp-/bunnpunkter.



Du vil oppdage at

- stigningstallet til tangenten er positivt når grafen stiger
- stigningstallet til tangenten er negativt når grafen synker
- stigningstallet til tangenten er 0 i topp- og bunnpunkt

Tangentens stigningstall = den deriverte til funksjonen

Når **grafen stiger**, er **den deriverte positiv**.

Når **grafen synker**, er **den deriverte negativ**.

Når grafen har **topp- eller bunnpunkt**, er **den deriverte lik 0**.

Dette betyr at vi kan finne ut for hvilke verdier av *x* grafen til en funksjon stiger, for hvilke verdier av *x* den synker, og når den har topp- eller bunnpunkt ved å se påfortegnet til den deriverte. Vi viser dette gjennom noen eksempler.

Eksempel 1

Finn ved regning, når funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=-x^2+4x-3$ stiger, og når den synker. Finn også eventuelle topp- og bunnpunkter.

Løsning

Vi deriverer $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=-x^2+4x-3$$
$$f'\left(x\right)=-2x+4$$

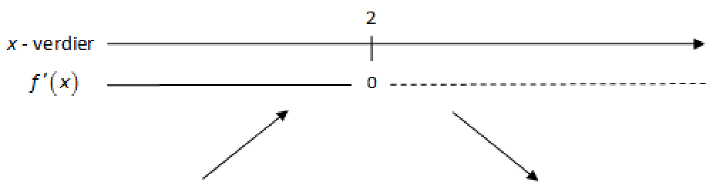
Vi setter så $f'\left(x\right)=0$

$$\begin{aligned} f'\left(x\right)&=0 \\ -2x+4&=0 \\ -2x&=-4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige *x* - verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow,2)$ og $(2,\rightarrow)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$f'\left(0\right)=-2\cdot0+4=4>0$$
$$f'\left(3\right)=-2\cdot3+4=-2<0$$

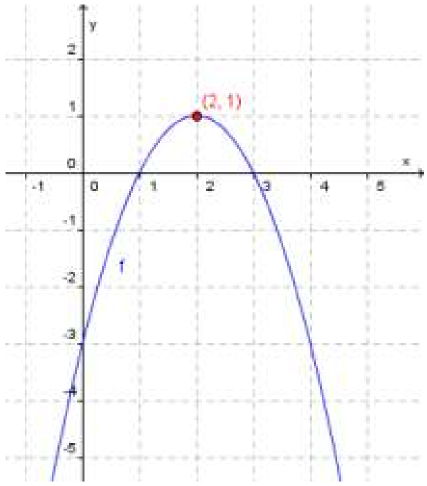
Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'\left(x\right)$



Vi ser av fortegnslinjen at $f\left(x\right)$ vokser for $x\in(\leftarrow,2)$ og at $f\left(x\right)$ minker når $x\in(2,\rightarrow)$.

$f\left(x\right)$ har derfor et toppunkt når $x=2$. Toppunktet er $(2,f\left(2\right))=(2,1)$ fordi $f\left(2\right)=-2^2+4\cdot2-3=1$

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



Eksempel 2

Funksjonen *f* er gitt ved $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

Drøft monotoniegenskapene til *f* og finn eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

Løsning

Vi deriverer $f\left(x\right)$

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1\\
f'\left(x\right) &= \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^1-2\\
f'\left(x\right) &= x^2-x-2
\end{aligned}
$$

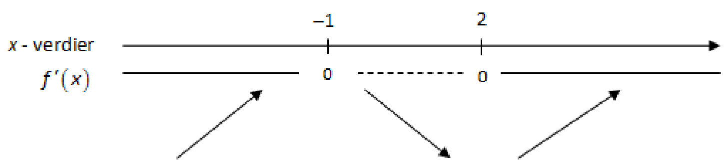
Vi setter så $f'\left(x\right)=0$

$$
\begin{aligned}
f'\left(x\right) &= 0\\
x^2-x-2 &= 0\\
x &= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}\\
x &= \frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\\
x_1 &= -1\\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow,-1)$, $(-1,2)$ og $(2,\rightarrow)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$
\begin{aligned}
f'\left(-2\right) &= \left(-2\right)^2-\left(-2\right)-2=4>0\\
f'\left(0\right) &= \left(0\right)^2-\left(0\right)-2=-2<0\\
f'\left(3\right) &= \left(3\right)^2-\left(3\right)-2=4>0
\end{aligned}
$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'\left(x\right)$



Vi ser av fortegnslinjen at

- Grafen stiger for $x\in(\leftarrow,-1)\cup(2,\rightarrow)$
- Grafen synker for $x\in(-1,2)$

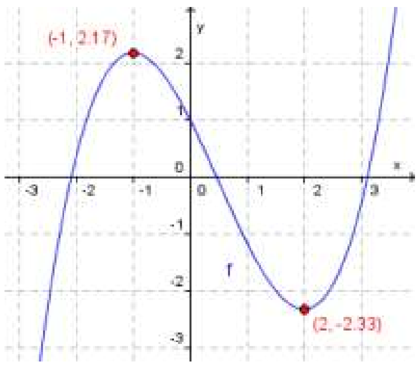
$f(x)$ har altså et toppunkt når $x = -1$ og et bunnpunkt når $x = 2$.

$$f(1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1$$
$$= -\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6} + \frac{6}{6} = \frac{13}{6}$$
$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + 1$$
$$= \frac{16}{6} - \frac{12}{6} - \frac{24}{6} + \frac{6}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

Toppunktet er $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{13}{6}\right)$

Bunnpunktet er $(2, f(2)) = \left(2, -\frac{7}{3}\right)$

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



Ekstremalpunkter og stasjonære punkter

Ekstremalpunkter og stasjonære punkter (111486)

Ekstremalpunkter

Toppunkter og bunnpunkter kaller vi ofte **ekstremalpunkter**. Andrekoordinaten til et toppunkt er en **maksimalverdi** til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er en **minimalverdi**. Noen funksjoner kan ha flere topp- eller bunnpunkter. Derfor er maksimal- og minimalverdiene ofte bare **lokale maksimal- og minimalverdier**. Det vil si at de er maksimal- og minimalverdier i et intervall omkring ekstremalpunktet.

Eksempel 3

Finn ved regning når funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$ vokser, og når den avtar. Finn også eventuelle ekstremalpunkter.

Løsning

Vi deriverer $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \tfrac{5}{3} \\ f'(x) &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

Vi setter så $f'(x) = 0$

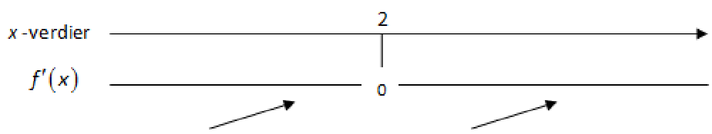
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vi får bare én løsning.

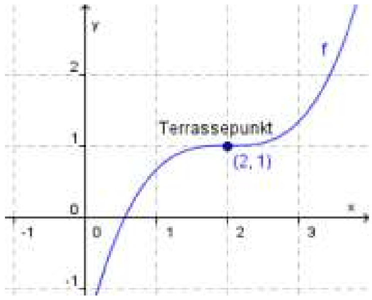
Vi tar stikkprøver i hvert av de to intervallene $(\leftarrow 2)$ og $(2 \rightarrow)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0)^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \\ f'(3) &= (3)^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Denne fortegnslinjen er spesiell siden **den deriverte ikke skifter fortegn i nullpunktet**. Den deriverte er positiv for $x \neq 2$. Det betyr at funksjonen vokser overalt bortsett fra når $x = 2$. Grafen har verken topp- eller bunnpunkt for $x = 2$. Men siden den deriverte er lik null, er tangenten til grafen horisontal for $x = 2$. Et slikt punkt på grafen kalles for et **terrassepunkt.**



Stasjonære punkter

Et **stasjonært punkt** på en graf karakteriseres ved at **den deriverte er null** i punktet. I slike punkter er det ingen endring i veksten til funksjonen. Hvis den deriverte skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **ekstremalpunkt**. Hvis den deriverte ikke skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **terrassepunkt**.

Krumningsforhold og vendepunkter

Krumningsforhold og vendepunkter (111502)

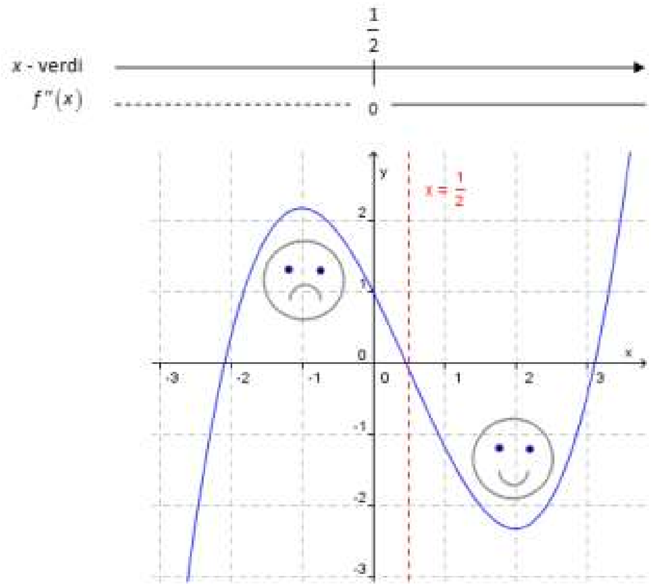
Vi fortsetter med funksjonen *f* fra Eksempel 2 gitt ved

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

Vi **deriverer** funksjonen **2 ganger**. Da får vi **den andrederiverte** eller **den dobbeltderiverte** f " $\left(x\right)$.
Legg merke til skrivemåten, nå med to apostrofer.

$$\begin{aligned}&f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1\\&f'\left(x\right)=x^2-x-2\\&f''\left(x\right)=2x-1\end{aligned}$$

Vi setter opp fortegnslinja til $f''\left(x\right)$



Det viser seg at

- grafen **vender sin hule side opp** når $f''\left(x\right)>0$
- grafen **vender sin hule side ned** når $f''\left(x\right)<0$
- grafen har et **vendepunkt** når $f''\left(x\right)=0$

At grafen vender sin hule side opp, $f''\left(x\right)>0$, betyr at den deriverte stiger. Det vil si at selve funksjonen stiger mer og mer eller synker mindre og mindre.

At grafen vender sin hule side ned, $f''\left(x\right)<0$, betyr at den deriverte synker. Det vil si at selve funksjonen synker mer og mer eller stiger mindre og mindre.

Et punkt på grafen hvor grafen skifter mellom å vende sin hule side ned og å vende sin hule side opp, eller motsatt, kalles for et **vendepunkt**. Tangenten til grafen i et slikt punkt kalles for en vendetangent.

Den deriverte har enten sin største verdi eller sin minste verdi i vendepunktet. Det vil si at funksjonen **vokser raskest** eller **avtar raskest** i vendepunktet.

Vendetangent

Vendetangent (111534)

I oppgaver blir vi ofte bedt om å finne likningen for en vendetangent . En vendetangent er en tangenten til funksjonen i et vendepunkt.

Vi vil finne likningen for vendetangenten til funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

Vi deriverer først funksjonen to ganger

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1\\ f'\left(x\right)&=x^2-x-2\\ f''\left(x\right)&=2x-1\end{aligned}$$

Vi setter så den dobbeltderiverte lik null for å finne vendepunktet

$$\begin{aligned}f''\left(x\right)&=0\\ 2x-1&=0\\ x&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vi finner 2. koordinaten til vendepunktet

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{1}{12}$$

Det betyr at koordinatene til vendepunktetet er $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{12}\right)$.

Vi regner så ut stigningstallet til tangenten i vendepunktet

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=-\frac{9}{4}$$

Nå vet vi at vendetangenten går gjennom punktet $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{12}\right)$ og har stigningstallet $-\frac{9}{4}$.
Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten

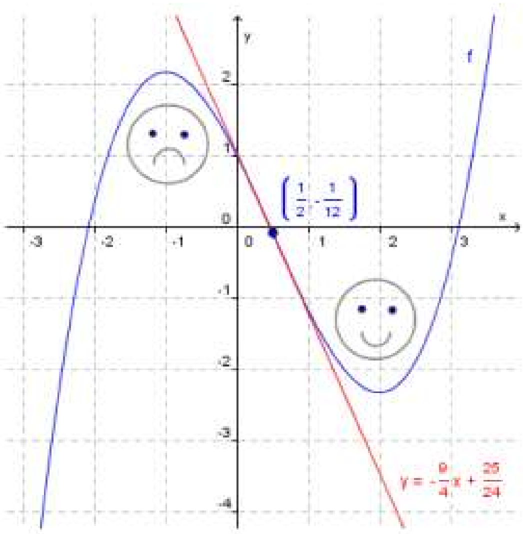
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

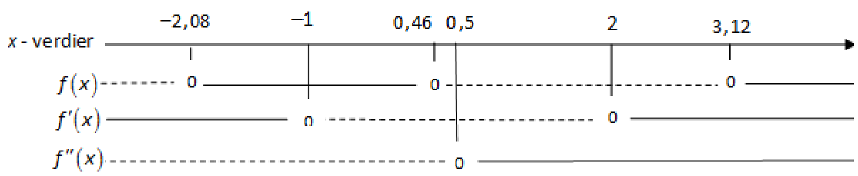
$$y - \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{12} = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{8}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{1}{12}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{25}{24}$$





Vi har til slutt tatt med en oversikt over fortegnslinjen til selve funksjonsuttrykket sammen med fortegnslinjene til den første- og andrederiverte.

På grunnlag av fortegnslinjene er det mulig å tegne en skisse av grafen.

Motsatt kan vi ut fra grafen tegne de tre fortegnslinjene. Ved hjelp av grafen kan vi altså tolke grunnleggende egenskaper ved funksjonen.

Drøfting av rasjonale funksjoner

Drøfting av rasjonale funksjoner (111582)

Som eksempel skal vi drøfte den rasjonale funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{3x}{x-1}$.

Definisjonsmengde

Når $x=1$, blir nevneren null. Funksjonen er ikke definert for $x=1$. $D_f=\mathbb{R}\backslash\left(1\right)$.

Vertikal asymptote

Linjen $x=a$ er en vertikal asymptote hvis nevneren blir null og telleren blir et tall forskjellig fra null for $x=a$.

For $x=1$ blir telleren lik $3\cdot x=3\cdot 1=3$, og nevneren blir $x-1=1-1=0$.

Det betyr at $x=1$ er en vertikal asymptote.

Horisontal asymptote

Linja $y=a$ er en horisontal asymptote for en funksjon *f* dersom $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=a$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{x}}=\frac{3}{1-0}=3$$

Det betyr at $y=3$ er horisontal asymptote.

Verdimengde

f kan ha alle funksjonsverdier unntatt 3. Verdimengden er derfor $V_f=\mathbb{R}\backslash\left(3\right)$.

Monotoniegenskaper og topp- og bunnpunkter

Vi undersøker fortegnet til $f'\left(x\right)$

$$f'\left(x\right)=\frac{(3x)'\cdot(x-1)-3x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{3\cdot(x-1)-3x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Nevneren $\left(x-1\right)^2$ er alltid positiv, og telleren er alltid negativ.

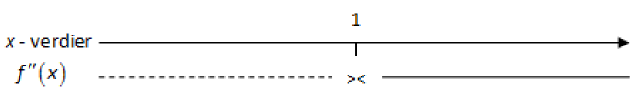
Det betyr at grafen alltid synker i sitt definisjonsområde, og grafen har derfor ikke topp- eller bunnpunkter.

Krumningsforhold og vendepunkter

Vi undersøker fortegnet til $f''\left(x\right)$

$$f''\left(x\right)=\frac{(-3)'\cdot(x-1)^2-(-3)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=\frac{3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}$$

Nevneren $\left(x-1\right)^3$ er negativ for $x\in\left(\leftarrow,1\right)$ og positiv for $x\in\left(1,\rightarrow\right)$. Telleren er alltid positiv. Det gir følgende fortegnslinje for $f''\left(x\right)$



Av fortegnslinja kan vi lese at grafen vender sin hule side ned for $x \in (\leftarrow, 1)$ og sin hule side opp for $x \in (1, \rightarrow)$. Et eventuelt vendepunkt måtte vært for $x = 1$, men for denne verdi er ikke funksjonen definert. Det vil si at grafen ikke har noen vendepunkter.

Skjæringspunkt mellom grafen og koordinataksene

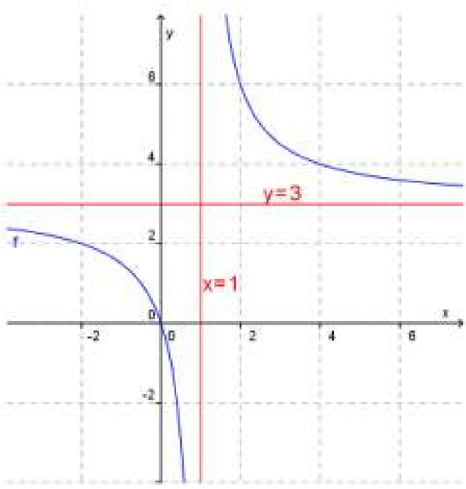
Det kan også være nyttig å ta med eventuelle skjæringspunkt med koordinataksene i drøftingen.

Skjæring med y - aksen

$f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0-1} = 0$

Skjæring med x - aksen

fx=03xx-1=0   3x=0   x=0
()



Nå kjenner vi så mye til grafens forløp at det er relativt enkelt å tegne en skisse av grafen for hånd. (Grafen er tegnet i GeoGebra.)

Drøfting av logaritmefunksjoner

Drøfting av logaritmefunksjoner (111593)

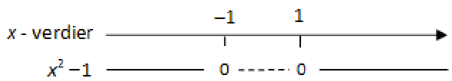
Som eksempel skal vi drøfte funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-1\right)$.

Definisjonsmengde

Ifølge definisjonen til den naturlige logaritmen, $a=e^{\ln a}$, er den naturlige logaritmen til et tall, *a*, det tallet du må opphøye tallet *e* i for å få tallet *a* . Siden $e^{\ln a}$ alltid er positivt, så må også *a* alltid være positivt. Det vil si at den naturlige logaritmen bare er definert for positive tall.

Vår funksjon *f* gitt ved $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-1\right)$, er altså bare definert for $x^2-1>0$.

Vi tegner fortegnslinjen for x^2-1.



Funksjonen er definert for $x\in\left(\leftarrow,-1\right)\cup\left(1,\rightarrow\right)$.

Nullpunkter

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= 0 \\ \ln\left(x^2-1\right) &= 0 \\ x^2-1 &= 1 \\ x^2 &= 2 \\ x &= -\sqrt{2} \;\vee\; x=\sqrt{2} \end{aligned}$$

Monotoniegenskaper og topp- og bunnpunkter

Vi undersøker fortegnet til $f'\left(x\right)$.

Når vi skal derivere $f\left(x\right)$, må vi bruke kjerneregelen.

$$f(x)=\ln(x^2-1)$$

$$g(u)=\ln(u), \qquad u=x^2-1$$

$$g'(u)=\frac{1}{u} \qquad u'=2x$$

$$f(x)=g(u(x))$$

$$f'(x)=g'(u)\cdot u'(x)$$

$$f'(x)=g'(u)\cdot u'(x)$$

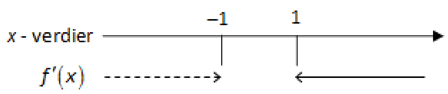
$$f'(x)=(\ln(u))'\cdot u'$$

$$f'(x)=\frac{1}{u}\cdot u'$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x$$

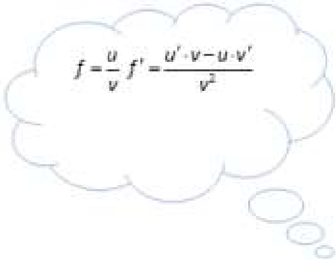
$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

Vi tegner så fortegnslinjen for $f'\left(x\right)$



Av fortegnslinjen til $f'(x)$ kan vi lese at grafen synker i intervallet $(\leftarrow, -1)$ og stiger i intervallet $(1, \rightarrow)$. Vi får ikke topp- eller bunnpunkter.

Krumningsforhold og vendepunkter



Vi undersøker fortegnet til $f''(x)$

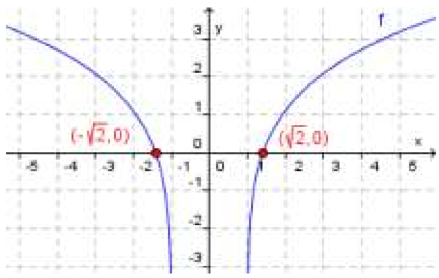
$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

Når vi skal finne den andrederiverte, bruker vi regelen for kvotient (brøk)

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)}$$

Nevneren i denne brøken er alltid positiv i definisjonsområdet. Faktoren x^2+1 i telleren er også alltid positiv. Det betyr at den dobbeltderiverte alltid er negativ og grafen vil derfor alltid vende sin hule side ned. Grafen har ikke noen vendepunkt.

Nå kjenner vi så mye til grafens forløp at det er relativt enkelt å lage en skisse av grafen for hånd. (Grafen er her laget i GeoGebra.)



Tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner

Vekstfarten til et tre

Vekstkurven til et tre (111659)

Jacob plantet et morelltre i 2006. Treet var 1 meter høyt da han plantet det.

Funksjonen *h* gitt ved

$$h(x) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \quad x \in (0, 20)$$

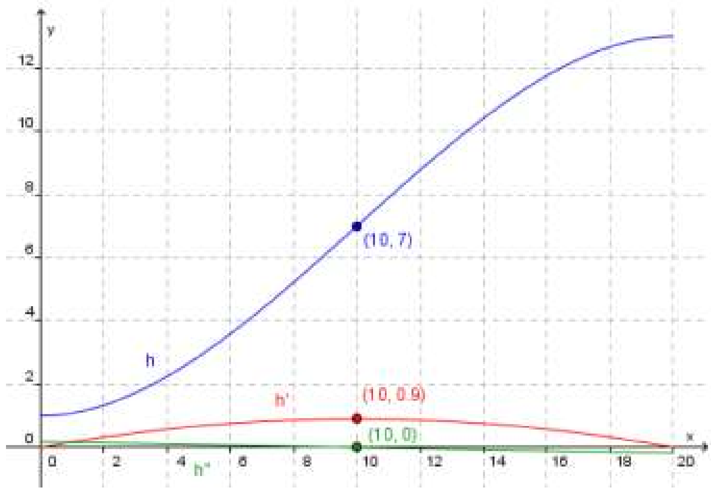
kan brukes som en modell for å beregne treets høyde de neste 20 årene. *x* er antall år etter planting og $h(x)$ gir treets høyde i meter.

Vi ønsker å finne ut hvilket år treet får sin maksimale vekst og hvor stor veksten er da.

Vi vil finne dette både grafisk og ved regning.

Morelltre i motlys.Hvilket år treet får sin maksimale vekst og hvor stor veksten er da?

Grafisk løsning



For oversiktens skyld, tegner vi grafene til h, h' og h'' i samme koordinatsystem.

Grafen til *h* viser treets høyde *x* år etter at det er plantet. Grafen til h' viser hvor fort treet vokser.

Grafen til *h* er brattest etter ca. 10 år. Da må treet ha sin største vekst. Vi ser dette enda tydeligere ved å studere grafen til h'. Den deriverte er jo nettopp vekstfarten. Vi ser at vekstfarten har en maksimalverdi etter 10 år. Treet har sin maksimale vekst når $h'(x)$ har sin største verdi. Vi ser grafisk at det er etter 10 år, og den årlige veksten er da 0,9 meter per år.

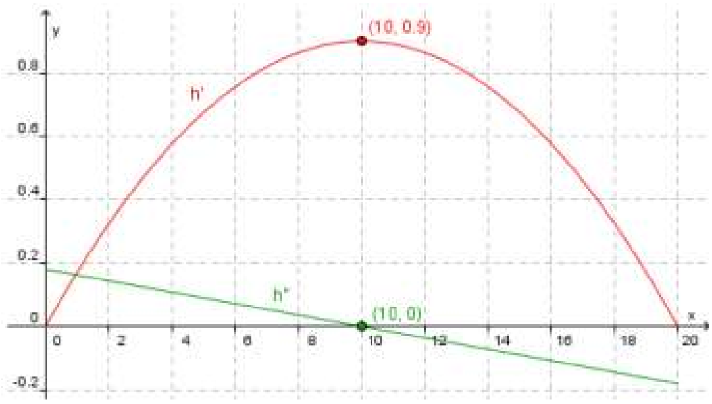
Vi ser også at grafisk at $h''(x)$ er 0 etter 10 år. Det bekrefter at grafen til h' har et toppunkt her.

Alle tre kurvene kan altså fortelle oss når treet får sin maksimale vekst.

Når den dobbeltderiverte er positiv, så stiger den deriverte og selve vekstkurven blir brattere og brattere.

Når den dobbeltderiverte er negativ, så synker den deriverte og selve vekstkurven flater ut.

Forstørret bilde av grafen til h' og grafen til h ''



Algebraisk løsning

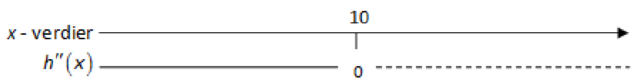
Vi starter med å derivere $h\,(x)$

$$\begin{aligned}&h\,(x) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \quad x \in (0,20)\\&h\text{'}\,(x) = -0,009x^2 + 0,18x\\&h\text{ ''}\,(x) = 0,018x + 0,18\end{aligned}$$

Så setter vi $h\text{ ''}\,(x) = 0$ og finner vendepunktet

$$-0,018 + 0,18 = 0$$
$$x = \frac{0{,}18}{0{,}018} = 10$$

Vi tegner fortegnslinjen til den andrederiverte



Fortegnslinja til $h\text{ ''}\,(x)$ viser at $h\text{'}\,(x)$ har en maksimalverdi etter 10 år. Det betyr at treet har maksimal vekst etter 10 år.

Vi kan også finne hvor stor veksten var etter 10 år

$h\text{'}\,(x) = -0,009 \cdot 10^2 + 0,18 \cdot 10 = -0,9 + 1,8 = 0,9$

Det betyr at veksten er 0,9 meter per år etter 10 år.

Strekning, fart og akselrasjon

Strekning, fart og akselrasjon (111698)

Når vi beveger oss, for eksempel ved å gå, løpe eller kjøre bil, sier vi at vi forflytter oss en strekning. Vi bruker ofte bokstaven *s* om **strekningen vi forflytter oss**.

Farten er lik den deriverte til strekningen. Akselerasjon er lik den deriverte til farten.

Hvor raskt vi forflytter oss, kaller vi farten. **Farten er altså lik den deriverte til strekningen**. Vi bruker gjerne bokstaven *v* om farten. Hvor raskt vi endrer farten, kaller vi akselerasjonen, *a*. **Akselerasjon er lik den deriverte til farten**.

Tiden *t* er her den variable. Av den grunn får vi $s(t)$, $v(t)$ og $a(t)$.

Thomas skal kjøre en tur med bilen sin. De 10 første sekundene av turen bruker han til å øke farten til lovlig fartsgrense.

Strekningen $s(t)$ han tilbakelegger mens han øker farten, er gitt ved

$$s(t) = -0,01t^3 + 0,3t^2 + 8t \quad t \in (0,10)$$

hvor *t* er tiden i sekunder.

Den deriverte til funksjonen *s* viser hvor fort tilbakelagt strekning endrer seg etter *t* sekunder, altså farten etter *t* sekunder.

$$v(t) = s'(t)$$

Den deriverte til fartsfunksjonen *v* viser hvor raskt farten endrer seg etter *t* sekunder, dvs. akselerasjonen etter *t* sekunder.

$$a(t) = v'(t)$$

Vi vil finne tilbakelagt strekning, fart og akselerasjon etter 10 sekunder

$$s(t) = -0,01 \cdot 10^3 + 0,3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 = 100$$

$$v(t) = s'(t) = -0,03t^2 + 0,6t + 8$$
$$v(10) = -0,03 \cdot 10^2 + 0,6 \cdot 10 + 8 = 11 \quad \text{Utregningene til venstre viser at}$$

$$\text{Thomas brukte } 100\, m \text{ for } \mathring{a} \text{ (nesten)}$$
$$11\frac{m}{s} = 11 \cdot \frac{\frac{1}{1000}\text{km}}{\frac{1}{3600}h} = 39,6\frac{\text{km}}{h} \qquad \text{nå lovlig fartsgrense på } 40\frac{\text{km}}{h}.$$

$$a(t) = v'(t) = -0,06t + 0,6 \qquad \text{Akselrasjonen ble null. Det viset at}$$
$$a(10) = -0,06 \cdot 10 + 0,6 = 0 \qquad \text{Thomas holdt konstant fart etter}$$
$$\text{10 sekunder.}$$

Inntekt, kostnad og overskudd

Inntekt, kostnad og overskudd (111717)

Bedrifter som produserer og selger varer ønsker ofte funksjoner som beskriver kostnader, inntekter og overskudd ved produksjon og salg av et visst antall enheter.

Vi bruker gjerne funksjoner med navn *K*, *I* og *O* som modeller for å beskrive kostnader, inntekter og overskudd.

Eksempel

Ved en bedrift blir det produsert en vare. Funksjonene *K* og *I* gitt ved

$$\begin{aligned} K(x) &= 1,02^x \\ I(x) &= 0,12x \end{aligned}$$

kan brukes som modeller for inntekter og kostnader ved produksjon og salg av denne varen. $I(x)$ og $K(x)$ er henholdsvis inntekter og kostnader gitt i tusen kroner ved produksjon og salg av *x* enheter av varen.

Vi ønsker å finne ut hvor mange enheter som må produseres for å få størst mulig overskudd. Vi ønsker også å vite hva overskuddet da blir.

Overskudd er inntekter minus kostnader

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ O(x) &= 0,12x - 1,02^x \end{aligned}$$

For å beregne når overskuddet blir størst mulig, finner vi toppunktet til overskuddsfunksjonen. Vi setter den deriverte lik 0 og lager fortegnslinje

$$\begin{aligned} O'(x) &= 0,12 - 1,02^x \cdot \ln\ 1,02 \\ O'(x) &= 0 \\ 0,12 - 1,02^x \cdot \ln\ 1,02 &= 0 \\ \ln\ 1,02 \cdot 1,02^x &= 0,12 \\ 1,02^x &= 6,06 \\ x &= \frac{\lg\ 6,06}{\lg\ 1,02} \\ x &= 91 \end{aligned}$$

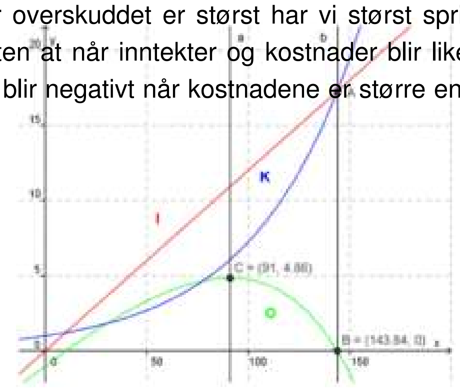
Vi får størst overskudd når bedriften produserer 91 enheter av varen.

Overskuddet er da

$$O(91) = 0,12 \cdot 91 - 1,02^{91} \approx 4,858,\ \text{dvs. ca. } 4\,858 \text{ kroner.}$$

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet grafene
til funksjonene *K*, *I* og *O*.

Punktet C er toppunktet på grafen til *O*. Når overskuddet er størst har vi størst sprik mellom kostnader og inntekter. Vi ser dessuten at når inntekter og kostnader blir like, punkt A, er overskuddet lik null. Overskuddet blir negativt når kostnadene er større enn inntektene.



Vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet

Parameterframstilling av kurver

[Parameterframstilling av kurver (111776)]

Vi har til nå framstilt kurver i planet ved hjelp av likninger. I likningen $y = 2x + 3$ er *y* en funksjon av *x*. Til hver *x* - verdi regner vi ut en *y* - verdi, og vi får punkter i planet som til sammen danner grafen til funksjonen, en kurve i planet. For eksempel vil $y = 2x + 3$ beskrive en rett linje i planet.

Vi kan også framstille kurver ved at *x* - og *y* - koordinatene er funksjoner av en tredje størrelse. Denne tredje størrelsen vil ofte være tiden, så derfor bruker vi som regel bokstaven *t*. Vi kaller *t* en **parameter** og vi snakker om **parameterframstilling** av kurver.

Det er mange fordeler ved å bruke parameterfremstilling i stedet for likningsfremstilling. Eksemplene nedenfor og oppgavene til dette avsnittet vil vise det.

Ved parameterframstillingen er altså *x* - og *y* - koordinatene funksjoner av en tredje størrelse.

Eksempel

$$x = t + 1 \quad \wedge \quad y = 2t - 2$$

Vi lager en tabell som viser *x* - og *y* - koordinatene for utvalgte verdier av *t* .

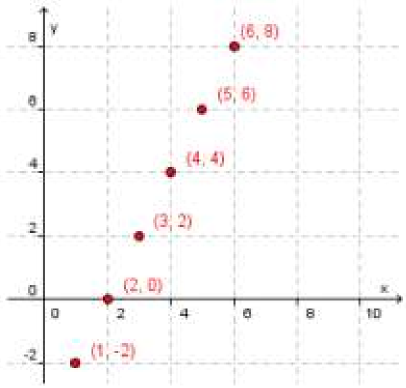
t	0	1	2	3	4	5
x	1	2	3	4	5	6
y	-2	0	2	4	6	8

Med papir og blyant kan vi plotte punktene, *x* - og *y* - koordinatene, i et koordinatsystem, og trekke en kurve gjennom punktene. I dette tilfelle blir kurven en rett linje.

Vi kan også bruke regnearket i GeoGebra til å lage verditabellen. I kolonne A velger vi verdier for *t*. I celle B2 skriver vi formelen $= \mathrm{A2} + 1$. Denne formelen kopierer vi så til cellene B3 til B7. Tilsvarende skrives formelen $= 2 \cdot \mathrm{A2} - 2$ i celle C2. Også denne formelen kopieres nedover i kolonnen.

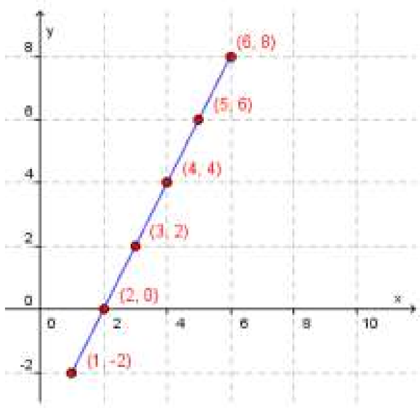
	A	B	C
1	t - verdi	x - verdi	y - verdi
2	0	1	-2
3	1	2	0
4	2	3	2
5	3	4	4
6	4	5	6
7	5	6	8

Dersom vi vil tegne punktene i koordinatsystemet, kan vi merke cellene som inneholder *x* - og *y* -verdier (B2 til C7), høyreklikke og velge «Lag liste med punkter».



For å tegne en kurve gitt på parameterform i GeoGebra, kan vi bruke kommandoen **Kurve[]**. For å få tegnet denne parameterframstillingen for $t \in (0, 5)$, kan vi skrive

Vi oppgir altså uttrykket for *x*, utrykket for *y*, parameteren og minste og største verdi parameteren kan ha. Vi får da tegnet kurven gjennom punktene.



Denne kurven kan for eksempel beskrive reiseruten til en båt. Et punkt på kurven gir båtens posisjon for gitte verdier av tiden, *t*. Legg merke til at du ikke kan lese av *t* -verdiene fra koordinatsystemet.

Eksempel

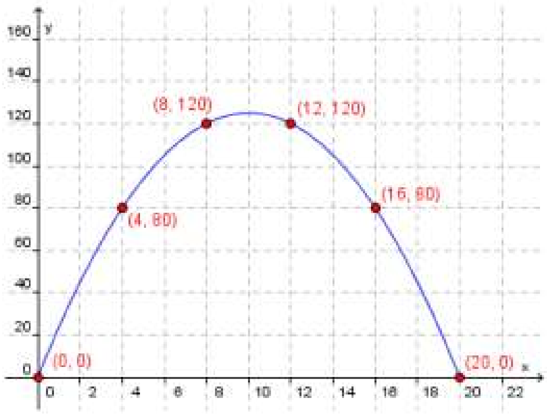
Vi tar også med et eksempel hvor *x* - koordinaten er av første grad og *y* - koordinaten er av andre grad.

$x = 2t \quad \wedge \quad y = 50t - 5t^2$

Vi går frem på tilsvarende måte i GeoGebra.

	A	B	C
1	t-verdi	x-verdi	y-verdi
2	0	0	0
3	2	4	80
4	4	8	120
5	6	12	120
6	8	16	80
7	10	20	0

Her blir ikke listepunktene liggende på en rett linje.



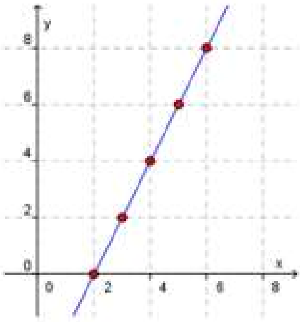
Denne parameterfremstillingen viser kastebanen til en gjenstand som kastes/skytes skrått opp i luften. Av grafen kan vi se at når gjenstanden treffer bakken, har den beveget seg 20 meter i positiv x - retning. Tabellen viser at det skjer etter 10 sekunder. Grafen viser også at gjenstanden når en maksimalhøyde på litt over 120 meter.

Vektorfunksjoner

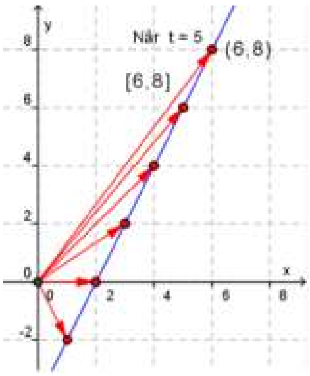
Vektorfunksjoner (111781)

Vi så innledningsvis at parameterframstillingen

$x = t + 1 \ \ \wedge \ \ y = 2t - 2$ beskrev kurven til høyre.



Vi skal nå se på vektoren $(x, y) = (t + 1, 2t - 2)$.



Når *t* varierer, får vi en samling av vektorer. Vi kaller disse vektorene **posisjonsvektorer**. Vi tenker oss vektorene plassert i koordinatsystemet med start i origo.

Endepunktene til vektorene vil for hver *t* - verdi angi et punkt på kurven. For eksempel vil posisjonsvektoren når $t = 5$, være vektoren $(6, 8)$. Endepunktet til vektoren vil være punktet $(6, 8)$. Vektorkoordinatene og punktkoordinatene har samme tallverdier for samme *t* -verdi.

Endepunktene til posisjonsvektorene vil altså beskrive den rette linjen.

Dette betyr at en parameterframstilling av kurver i planet kan gis på to former, på koordinatform og på vektorform.

Vi sier at $(x, y) = (t + 1, 2t - 2)$ er en **vektorfunksjon** med parameteren *t*. Til hver verdi for *t* svarer en bestemt vektor (x, y). Koordinatformen for den samme kurven er

$$x = t + 1 \ \ \wedge \ \ y = 2t - 2$$

eller

$$\begin{pmatrix} x = t + 1 \\ y = 2t - 2 \end{pmatrix}$$

Siden (x, y) er en posisjonsvektor til punktet (x, y), bruker vi ofte betegnelsen $\vec{r}$ eller $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ om (x, y). Siden $\vec{r}$ er en funksjon av *t* skriver vi ofte $\vec{r}\,(t) = (x\,(t), y\,(t))$.

Men det er mest vanlig bare å skrive $\vec{r} = (x, y)$.

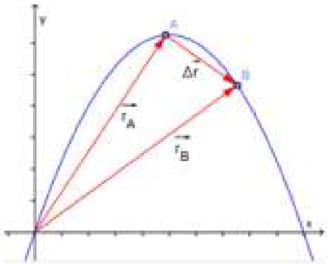
Vi bruker altså vektorfunksjoner til å framstille kurver på parameterform.

Fart og akselrasjon

[Fart og akselrasjon (111787)](#)

Du har sett tidligere i menyen at vi kan fremstille en kurve i planet på parameterform, enten på koordinatform eller som en vektorfunksjon. Begge fremstillingene gir den samme kurven. Vi kan klare oss med koordinatform hvis vi bare skal fremstille kurver. Grunnen til at vi innfører vektorfunksjoner, er at da kan vi også finne fart og akselerasjon til legemer hvis kurven beskriver bevegelsen.

Den blå kurven til høyre viser bevegelsen til et legeme i forhold til et koordinatsystem. La posisjonsvektoren $\overrightarrow{r_A}$ angi posisjonen til legemet etter tiden *t*, og $\overrightarrow{r_B}$ angi posisjonen etter tiden $t+\Delta\mathrm{t}$.



Vi definerer gjennomsnittsfart som forflytning dividert med tid, også når bevegelsen ikke følger en rett linje.

I vårt tilfelle er forflytningen en vektor; $\varDelta\vec{r}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}$ og tiden som forflytningen har tatt er $t+\Delta\mathrm{t}-t=\Delta\mathrm{t}$.

Gjennomsnittsfarten fra A til B defineres da som $\overline{\vec{v}}=\frac{\varDelta\vec{r}}{\Delta\mathrm{t}}$, hvor **streken over vektortegnet** for *v* markerer at det er **gjennomsnittsfarten**.

Momentanfarten i punktet A defineres som grenseverdien gjennomsnittsfarten nærmer seg mot når $\Delta\mathrm{t}$ går mot null. Altså, den deriverte av $\vec{r}$.

$$\vec{v}=\vec{r}'=\lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0}\frac{\varDelta\vec{r}}{\Delta\mathrm{t}}$$

Når $\Delta\mathrm{t}$ går mot null, vil punktet B flytte seg langs kurven mot punktet A. Da vil $\varDelta\vec{r}$ nærme seg og bli en tangent til kurven i punktet A. Farten (momentanfarten) i punktet A har retning som en tangent til banen som legemet følger.

Definisjonen av den deriverte og vektorer på koordinatform samt regneregler for vektorer på koordinatform gir følgende

$$\vec{v}=\vec{r}'=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{\varDelta\vec{r}}{\Delta\mathrm{t}}=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}}{\Delta\mathrm{t}}=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{(x(t+\Delta\mathrm{t}),y(t+\Delta\mathrm{t}))-(x(t),y(t))}{\Delta\mathrm{t}}$$

$$=\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta\mathrm{t})-x(t)}{\Delta\mathrm{t}},\frac{y(t+\Delta\mathrm{t})-y(t)}{\Delta\mathrm{t}}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{x(t+\Delta\mathrm{t})-x(t)}{\Delta\mathrm{t}},\lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{y(t+\Delta\mathrm{t})-y(t)}{\Delta\mathrm{t}}\right)$$

$$=(x'(t),y'(t))$$

Vi kan gjøre tilsvarende resonnementer når det gjelder akselerasjon, og samlet får vi da følgende regler for fart og akselerasjon til legemer hvis bevegelse kan beskrives med en vektorfunksjon

La $\vec{r}\,(t)=(x\,(t),y\,(t))$ være **posisjonsvektoren** til et legeme som beveger seg langs en kurve.

Farten til legemet i et punkt er gitt ved vektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}' = (x'(t), y'(t))$. Farten har retning som en tangent til kurven i punktet. Lengden til fartsvektoren kalles for **banefarten**.

Akselerasjonen til partikkelen i et punkt er gitt ved vektoren $a(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$

Som eksempel kan vi se på vektorfunksjonen vi har studert tidligere i menyen. Vektorfunksjonen kunne beskrive reiseruten til en båt.

La $\vec{r} = (t+1, 2t-2)$. Vi deriverer *x* - og *y* - koordinatene hver for seg, og får fartsvektoren

$$\vec{v} = \vec{r}' = (1, 2)$$

Denne vektoren viser hvor fort *x* - og *y* - verdiene endrer seg når *t* endrer seg. Når *t* øker med én enhet, øker *x* med én enhet og *y* med to enheter. Sjekk tabell og kurve og se at det stemmer.

Banefarten er lengden til fartsvektoren $v = (\vec{v}) = ((1,2)) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Vi fortsetter med å derivere fartsvektoren og finner **akselerasjonsvektoren** som viser hvor fort farten endrer seg for hver av *x* - og *y* - retningen.

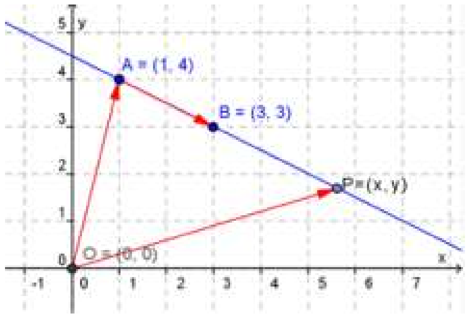
Akselerasjonsvektoren blir $\vec{a} = \vec{v}' = (2,1)' = (0,0)$, og akselerasjonen er lengden akselerasjonsvektoren $a = (\vec{a}) = ((0,0)) = 0$. Dette betyr at båtens fart er konstant.

Parameterframstillingen til en rett linje

Parameterframstillingen til en rett linje (111798)

Gitt to punkter *A* og *B*. La *P* være et vilkårlig punkt på linjen gjennom *A* og *B*. Da vil det alltid finnes en *t* slik at

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



Posisjonsvektoren til punktet *P* kan da skrives som

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Vektorfunksjonen $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ beskriver linjen gjennom *A* og *B*. Når *t* gjennomløper alle verdier, vil *P* gjennomløpe hele linjen.

La *A* ha koordinatene $(1, 4)$, og la *B* ha koordinatene $(3, 3)$.

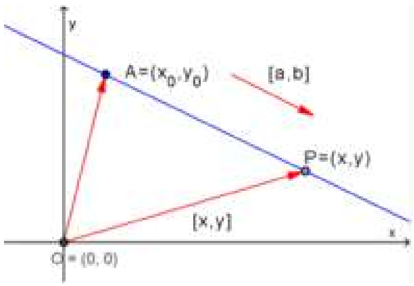
Vektorfunksjonen for linjen gjennom *A* og *B* blir

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = (1.4) + t\,(-\,(1,4) + (3,3))$$
$$= (1,4) + t\,(2,-1) = (1+2t, 4-t)$$

På koordinatform får vi

$$x = 1 + 2t \quad \wedge \quad y = 4 - t$$

I stedet for å kjenne to punkter på linjen, er det nok å kjenne et punkt $A = (x_0, y_0)$ på linjen og en tilfeldig vektor (a, b) som er parallell med linjen. Vi kaller en slik vektor for en **retningsvektor** for linjen.



Vektorfunksjonen for linjen blir:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$$
$$(x, y) = (x_0 + \mathrm{at}, y_0 + \mathrm{bt})$$

På koordinatform får vi $x = x_0 + \mathrm{at} \quad \wedge \quad y = y_0 + \mathrm{bt}$

En linje gjennom punktet $A = (x_0, y_0)$ med retningsvektor (a, b), har parameterframstillingen $x = x_0 + \mathrm{at} \quad \wedge \quad y = y_0 + \mathrm{bt}$ på koordinatform og $(x, y) = (x_0 + \mathrm{at}, y_0 + \mathrm{bt})$ på vektorform.

Legg merke til at når du får oppgitt parameterframstillingen for en rett linje, så kan du lett finne en retningsvektor for linjen og et punkt på linjen.

Skjæring med koordinataksene

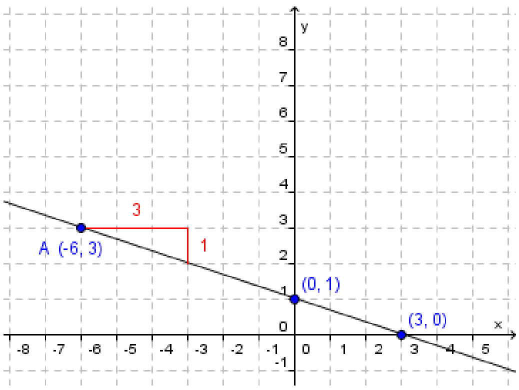
[Skjæring med koordinataksene (111802)](#)

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet en rett linje gitt ved parameterframstillingen

$$\begin{pmatrix} x = -6 + 3t \\ y = 3 - t \end{pmatrix}$$

(Av parameterframstillingen ser du at linja går gjennom punktet $(-6, 3)$ og a t $(3, -1)$ er en retningsvektor for linja.)

I koordinatsystemet har vi markert punktene der linja skjærer *x* - og *y* - aksen. Hvordan kan vi finne skjæringspunktene med koordinataksene ved regning?



Skjæring med x-aksen

Vi vet at der en kurve skjærer *x* - aksen, er andrekoordinaten lik 0, altså $y = 0$.

Vi får

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 3 - t &= 0 \\ -t &= -3 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

For å finne *y* - verdien setter vi $t = 3$ inn i utrykket for *x*.

$$x = -6 + 3t = -6 + 3 \cdot 3 = 3$$

Skjæringspunktet er da $(3, 0)$

Skjæring med y-aksen

Vi vet at i punkt hvor en kurve skjærer *y* - aksen er førstekoordinaten lik 0, altså $x = 0$.

Vi får da

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ -6 + 3t &= 0 \\ 3t &= 6 \\ \frac{3t}{3} &= \frac{6}{3} \\ t &= 2 \end{aligned}$$

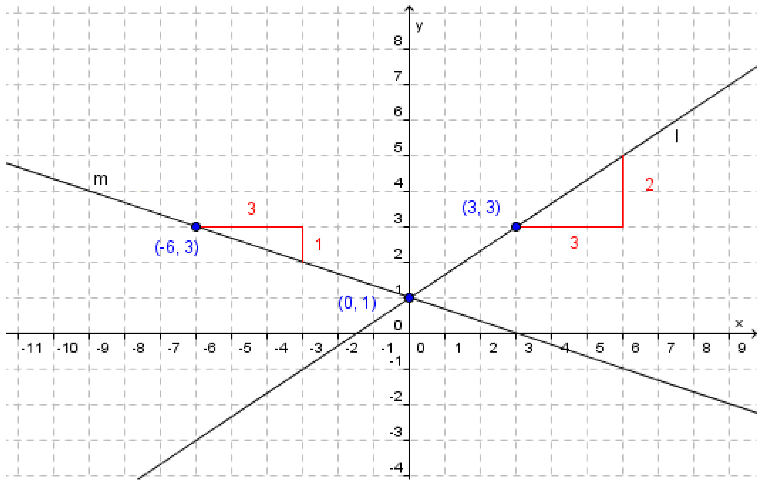
For å finne *y* - verdien setter vi $t = 2$ inn i utrykket for *y*

$$y = 3 - t = 3 - 2 = 1$$

Skjæringspunktet er da $(0, 1)$.

Skjæring mellom to kurver

[Skjæring mellom to kurver (111810)](#)



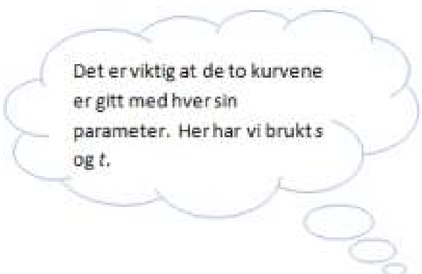
I koordinatsystemet ovenfor har vi tegnet de to rette linjene *m* og *l* gitt ved parameterframstillingene nedenfor

$$m : \begin{pmatrix} x = -6 + 3t \\ y = 3 - t \end{pmatrix} \qquad i : \begin{pmatrix} x = 3 + 3s \\ y = 3 + 2s \end{pmatrix}$$

I koordinatsystemet har vi markert skjæringspunktet mellom linjene. Hvordan kan vi finne dette skjæringspunktet ved regning?

I skjæringspunkt mellom kurver er både *x* - koordinatene og *y* - koordinatene like hverandre.

Når vi setter koordinatene like hverandre, får vi to likninger med to ukjente, her *s* og *t*. Vi løser likningssettet.



$$-6 + 3t = 3 + 3s \quad |:3 \quad \wedge \qquad 3 - t = 3 + 2s$$

$$-2 + t = 1 + s \quad \wedge \qquad 3 - t = 3 + 2s$$

$$-t = 3 + 2s - 3$$

$$-t = 2s$$

$$t = -2s$$

$$-2 + t = 1 + s$$

$$-2 + (-2s) = 1 + s$$

$$-2 - 2s = 1 + s$$

$$-2s - s = 1 + 2$$

$$-3s = 3$$

$$\frac{-3s}{-3} = \frac{3}{-3}$$

$$s = -1$$

$$t = -2s = -2 \cdot (-1) = 2$$

Vi kan nå bruke enten *t* - eller *s* - verdien for å finne *x* - og *y* - koordinatene til skjæringspunktet. (Resultatet vil bli det samme om vi bruker *s* eller *t*.)

Vi kan sette inn $t = 2$ i parameterframstillingen for *m* eller …

vi kan sette inn $s = -1$ i parameterframstillingen for *l*

m:

$$x = -6 + 3t - 6 + 3 \cdot 2 = 0$$
$$y = 3 - t = 3 - 2 = 1$$

Skjæringspunktet er $(0, 1)$.

Noe å tenke på …

Tenk deg at du har to kurver representert med hver sin parameterframstilling. Kurvene viser reiseruten for to ulike båter. Kurvene skjærer hverandre i et punkt. Hva betyr dette i praksis?

Kolliderer båtene?

Hvordan kan du undersøke om båtene vil kollidere?

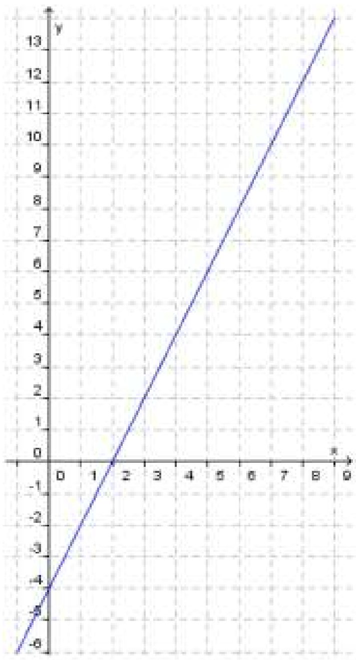
Å finne likningsfremstillingen til en linje som er gitt på parameterform

Å finne likningsfremstillingen til en linje som er gitt på parameterform (111817)

Til høyre har vi tegnet den rette linjen gitt ved parameterframstillingen for

$$\begin{pmatrix} x = t + 1 \\ y = 2t - 2 \end{pmatrix} \quad \text{for } \ t \in (-2, 8)$$

Som du ser, er dette en rett linje med stigningstall 2. Linjen skjærer *y* - aksen i punktet $(0, -4)$.



Fra tidligere vet du at denne linjen da kan utrykkes ved likningen $y = 2x - 4$.

Hvordan kan vi finne likningsfremstillingen for linjen ved regning?

Vi tar utgangspunkt i parameterframstillingen

$$\begin{pmatrix} x = t + 1 \\ y = 2t - 2 \end{pmatrix}$$

og starter med å uttrykke *t* ved hjelp av *x*

$$x = t + 1$$

gir

$$t = x - 1$$

Vi setter dette utrykket for *t* inn i utrykket for *y*, og får

$$y = 2t - 2$$
$$y = 2(x - 1) - 2$$
$$y = 2x - 2 - 2$$
$$y = 2x - 4$$

Kombinatorikk og sannsynlighet

Teori

Produktsetningen for uavhengige hendelser

Produktsetningen for uavhengige hendelser (108200)

Fra 1T kjenner vi forsøket hvor vi kaster to terninger, en rød og en blå, og bestemmer summen av antall øyne.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Utfallsrommet er illustrert i tabellen til høyre. Det er 36 mulige utfall. Grønn rute i tabellen viser for eksempel at vi får 3 øyne på blå terning og 2 øyne på rød terning.

De gule rutene viser at det er 5 kombinasjoner som gir summen 8, mens oransje rute viser den ene kombinasjonen som gir sum antall øyne lik 12.

Ved å bruke regelen om «gunstige over mulige» kan vi finne sannsynligheten for å få summen 12, det vil si sekser på begge terningene.

$$P\left(\text{Sekser på begge terningene}\right)=\frac{g}{m}=\frac{1}{36}$$

Sannsynligheten for å få en sekser når vi kaster den røde terningen er $\frac{1}{6}$. Sannsynligheten for å få en sekser når vi kaster den blå terningen er også $\frac{1}{6}$. Dette gjelder **uavhengig** av om det ble en sekser på rød terning eller ikke. Om vi kaster rød terning først og får en sekser, endrer ikke dette sjansene for å få en sekser på den blå terningen.

Vi sier at hendelsene «å få sekser på rød terning» og «å få sekser på blå terning» er **uavhengige hendelser**.

Vi så ovenfor at sannsynligheten for å få sekser i begge kastene er lik $\frac{1}{36}$. Denne sannsynligheten får vi også ved å multiplisere sannsynlighetene for å få sekser på hver av terningene.

$$\begin{aligned}&P\left(\text{Sekser på rød terning og sekser på blå terning}\right)\\&=P\left(\text{Sekser på rød terning}\right)\cdot\left(\text{Sekser på blå terning}\right)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\end{aligned}$$

Dette gjelder generelt og kalles produktsetningen for uavhengige hendelser.

To hendelser er **uavhengige** hvis en opplysning om at den ene har inntruffet ikke endrer sannsynligheten for at den andre skal inntreffe.

For to **uavhengige hendelser,** A og B er

$$P\left(A\text{ og }B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

A **og** *B* betyr at **både** A og B inntreffer.

Vi erstatter ordet «og» med symbolet «∩» og får

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

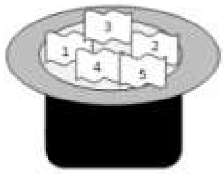
Setningen gjelder også for en **serie** av hendelser.

$P(A \cap B)$ leses også som «***A* snitt *B***».

Betinget sannsynlighet og den generelle produktsetningen

Betinget sannsynlighet og den generelle produktsetningen (108205)

Celine og Maren trekker hver sin lapp fra en hatt som inneholder fem lapper med tallene fra 1 til 5.



Vi definerer hendelsene

A: På Celines lapp står det et partall
B: På Marens lapp står det et partall

Hvis Celine trekker den første lappen, er det i hatten 2 lapper med partall og 3 lapper med oddetall. Sannsynligheten for å trekke en lapp med partall er

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

Hvis Celine trekker et partall, er det igjen 1 lapp med partall og 3 lapper med oddetall når Maren trekker og sannsynligheten for at Maren også trekker et partall er lik $\frac{1}{4}$.

Hvis Celine **ikke** trekker et partall, er det igjen 2 lapper med partall og 2 lapper med oddetall når Maren trekker og sannsynligheten for at Maren trekker et partall er lik $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Sannsynligheten for *B* **avhenger** av om hendelsen *A* inntreffer eller ikke. Vi sier at **hendelsene *A* og *B* er avhengige**.

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* har inntruffet er lik $\frac{1}{4}$.

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* **ikke** har inntruffet er lik $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Vi kaller dette **betinget sannsynlighet**. Vi bruker skrivemåten $P(B|A)$ som vi leser «sannsynligheten for B gitt A». Vi har at

$$P(B|A) = \frac{1}{4}$$

Vi bruker skrivemåten $\overline{A}$ for **ikke *A***. Da er

$$P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for at det skal stå et partall på **begge** lappene, det vil si at både hendelse *A* **og** hendelse *B* inntreffer, finner vi ved å multiplisere sannsynlighetene

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Hvis Maren trekker den første lappen, gjelder tilsvarende at

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

Tilsvarende blir nå

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \text{ og } P(A|\overline{B}) = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for at det skal stå et partall på begge lappene, det vil si at **både** hendelse *B* **og** hendelse *A* inntreffer finner vi ved å multiplisere sannsynlighetene

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Betinget sannsynlighet

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* har inntruffet skriver vi som $P\left(B|A\right)$ og leses som «sannsynligheten for *B* gitt *A*». Vi kaller det for betinget sannsynlighet.

Den generelle produktsetningen for sannsynligheter

Sannsynligheten for at to hendelser, **både** *A* **og** *B* skal inntreffe, er

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)$$

For uavhengige hendelser er $P\left(B|A\right)=P\left(B\right),\ \text{og}\ P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$

Bayes' setning

Bayes' setning (108221)

Vi har nå sett to eksempler på at **både *A* og *B*** betyr det samme som **både *B* og *A***.

Siden altså $A \cap B = B \cap A$, så er

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

I eksemplet ovenfor får vi at

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{\cancel{2}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 6}{\frac{3}{6} \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

Det stemmer med det vi fant ved å bruke regelen om «gunstige over mulige»

Bayes' lov eller Bayes' setning

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{P(A) \cdot P\left(B \middle| A\right)}{P(B)}$$

Bayes' setning handler om to hendelser. Når du kjenner sannsynlighetene for de to hendelsene og betinget sannsynlighet for den ene hendelsen, kan du ved Bayes' setning regne ut betinget sannsynlighet for den andre hendelsen.

Eksempel

På en skole går det 840 elever, 360 jenter og 480 gutter. Det viser seg at 5 av jentene er fargeblinde og 34 av guttene er fargeblinde.

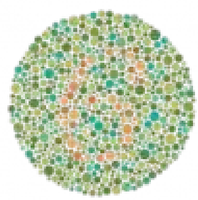
Vi trekker tilfeldig en elev ved skolen og det viser seg at denne eleven er fargeblind.

Hva er sannsynligheten for at denne eleven i tillegg er en jente?

Det vil si: Hva er $P(J|F)$?

Vi har å gjøre med to hendelser

J: Eleven er en jente
F: Eleven er fargeblind



Personer med normalt fargesyn skal i dette bildet se tallet 6. Personer som er fargeblinde for røde og grønne nyanser, ser ikke noe tall.

Vi kjenner sannsynligheten for jente, sannsynligheten for fargeblind og betinget sannsynlighet for fargeblind gitt jente

$P(J) = \frac{360}{840},\ P(F) = \frac{34+5}{840} = \frac{39}{840}$ og $P(F|J) = \frac{5}{360}$

Da kan vi bruke Bayes' setning til å finne sannsynligheten for jente gitt fargeblind

$$P(J|F) = \frac{P(J) \cdot P(F|J)}{P(F)} = \frac{\frac{360}{840} \cdot \frac{5}{360}}{\frac{39}{840}} = \frac{\frac{\cancel{360}}{\cancel{840}} \cdot \frac{5}{\cancel{360}}}{\frac{39}{\cancel{840}}} = \frac{5}{39}$$

Vi kan også sette opplysningene i oppgaven inn i en krysstabell.

	Jenter	**Gutter**	**Sum**
Fargeblinde	5	34	39
Normalt fargesyn	355	446	801
Sum	360	480	840

Da kan vi bruke «gunstige over mulige» og lese direkte fra tabellen at vi har regnet riktig

$$P(J|F) = \frac{5}{39}$$

I Norge foretas det av og til masseundersøkelser av hele eller deler av befolkningen for å finne ut hvem som lider av bestemte sykdommer. Det kan være undersøkelser for å avdekke tuberkulose, brystkreft hos kvinner, andre former for kreft osv. Dette er positivt med tanke på å oppdage sykdommer på et tidlig stadium og derved øke sjansene for helbredelse. Problemet er at testene for sykdommene ofte slår ut på mennesker som er friske.

Eksempel

La oss anta at 5 % av befolkningen lider av en sykdom. Vi benytter en test som slår ut for 96 % av dem som virkelig er syke, men den slår også ut for 10 % av dem som er friske.

Hvis vi for eksempel lar 1 000 personer ta testen, så vil statistisk sett 50 av disse være syke, mens 950 er friske.

Testen vil statistisk sett gi utslag for 50 · 0,96 = 48 av de personene som er syke, og for 950 · 0,10 = 95 av de personene som er friske.

Testen gir utslag for 143 personer. Bare 48 av disse er syke. Det er altså omtrent dobbelt så mange friske som syke blant de som får utslag. Disse blir utsatt for unødig belastning. Dette er grunnen til at slike tester er omstridte.

Bayes' setning er velegnet til å regne sannsynligheter i slike tilfeller.

Vi definerer de to hendelsene

S: En person er syk
U: Testen gir positivt utslag

Vi kjenner sannsynlighetene

$P(S) = 0,05,\ P(U|S) = 0,96,\ P\left(U|\overline{S}\right) = 0,10$ og $P\left(\overline{S}\right) = 1 - P(S) = 1 - 0,05 = 0,95$

Vi trenger også å vite sannsynligheten for om testen slår ut på en tilfeldig person. Da kombinerer vi addisjonssetningen fra 1T med produktsetningen. (Det er også lurt å sette opp et valgtre)

$$
\begin{aligned}
&P(U) = P(S \cap U) + P\left(\overline{S} \cap U\right) \\
&P(U) = P(S) \cdot P(U|S) + P\left(\overline{S}\right) \cdot P\left(U|\overline{S}\right) \\
&P(U) = 0,05 \cdot 0,96 + 0,95 \cdot 0,10 \\
&P(U) = 0,143
\end{aligned}
$$

Da kan vi ved Bayes' setning finne sannsynligheten for om en person som får positivt utslag på testen, virkelig er syk.

$$P(S|U) = \frac{P(S) \cdot P(U|S)}{P(U)} = \frac{0,05 \cdot 0,96}{0,143} = 0,336$$

Det er altså bare 33,6 % sjanse for at en person er syk selv om testen viser utslag for sykdommen!!!

Kombinatorikk

Kombinatorikk (108229)

2B har vunnet en reise for seks personer. I klassen er det 25 elever. Alle elevene ønsker å reise, derfor bestemmer læreren at de seks elevene som får dra, skal trekkes ut tilfeldig. Kåre og Janne går i 2B. De er kjærester. De er litt bekymret og lurer på hvor stor sannsynligheten er for at bare én av dem får være med på turen.

Hva er sannsynligheten for at bare en av de to kjærestene får være med på turen?

Alle elevene har like stor sjanse for å bli trukket ut. Vi har en uniform sannsynlighetsmodell. Vi vet at sannsynligheten for en hendelse i en uniform sannsynlighetsmodell er lik antall gunstige utfall for hendelsen dividert med antall mulige utfall.

Kåre og Janne er interessert i sjansene for hendelsen «at bare én av dem blir trukket ut». De vil da vite hvor mange gunstige utfall det er for denne hendelsen, og hvor mange mulige utfall det er.
Hvor mange kombinasjoner av seks elever kan vi lage ut fra 25 elever, og hvor mange av disse er bare én av de to kjærestene med i?

Kombinatorikk er et område innenfor matematikken som kan hjelpe oss med slike telleproblemer. Vi skal lære hvordan vi kan finne antall mulige kombinasjoner.

Vi skal først se på noen viktige begreper i kombinatorikken.

Ordnet og uordnet utvalg, med og uten tilbakelegging

Ordnet og uordnet utvalg, med og uten tilbakelegging (108417)

Ordnet og uordnet utvalg

Tenk deg at vi fra en klasse på 30 elever skal trekke ut tre elever til skolelaget i fotball. Vi gir alle elevene et nummer fra 1 til 30, legger 30 lapper nummerert fra 1 til 30 i en hatt og trekker så ut tre lapper. Det er likegyldig om vi trekker rekkefølgen 3, 5 og 7, eller om vi først trekker nummer 7, så nummer 5 og så elev nummer 3. Det blir elevene nummerert som 3, 5 og 7 som blir tatt ut på laget.

Er det derimot et lotteri hvor den første som trekkes ut, vinner førstepremien, den andre som trekkes ut, vinner andrepremien og den tredje vinner tredjepremien, betyr rekkefølgen noe. Da er det ikke likegyldig om vi trekker 3, 5 og 7, eller om vi trekker 7, 5 og 3.

Dersom rekkefølgen til tallene ikke har noen betydning, har vi et **uordnet utvalg**. Dvs. at 3, 5, 7 er det samme som 7, 3, 5.

Dersom rekkefølgen har noe å si, er 3, 5, 7 forskjellig fra 7, 3, 5 og vi har et **ordnet utvalg**.

Med og uten tilbakelegging

I klasselotteriet ovenfor må vi bestemme oss for om samme elev kan vinne flere premier. Hvis det skal være mulig, må vi legge tilbake lappen vi har trukket ut før vi trekker neste. Hvis det ikke skal være mulig å vinne flere premier, legger vi ikke tilbake en lapp som er trukket ut.

Dersom du ikke kan trekke en lapp mer enn en gang, har vi et **utvalg uten tilbakelegging**.

Dersom du kan trekke den samme lappen to ganger eller mer, har vi et **utvalg med tilbakelegging**.

Produktregelen for kombinasjoner og fakulet

Produktregelen for kombinasjoner og fakulet (108418)

Produktregelen for kombinasjoner

Tenk deg at du skal kjøpe ny mobiltelefon, og at det finnes to produsenter å velge mellom. Hver av disse produsentene har tre modeller, og hver modell kan fås i fire farger. Hvor mange forskjellige mobiltelefoner kan du ende opp med?

For hver produsent kan du velge tre modeller. Det gir $2 \cdot 3$ kombinasjonsmuligheter. For hver av disse mulighetene kan du velge fire farger. Antall kombinasjonsmuligheter totalt blir da $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Du kan ende opp med 24 forskjellige mobiltelefoner.

Hvor mange forskjellige mobiltelefoner kan du ende opp med?

Produktregelen for kombinasjoner

Når vi skal foreta **to valg etter hverandre**, og det er *m* valgmuligheter i første valg og *n* muligheter i andre valg, er det til sammen

$m \cdot n$ kombinasjonsmuligheter

Hvis vi fortsetter med **flere valg**, fortsetter vi å multiplisere med antall muligheter.

Fakultet

Produktet av alle naturlig tall fra 1 til *n* kaller vi *n*-fakultet. Som symbol bruker vi **utropstegn**. Utropstegnet setter vi etter tallet. For eksempel skriver vi 3-fakultet som **3!**, og vi har at $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Vi definerer 0-fakultet til å være lik 1.

Definisjon

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \ldots \cdot n$$

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1$$

Definisjonen av *n*-fakultet som produktet av alle naturlig tall fra 1 til *n*, har ingen mening for $n = 0$. Du skal senere se at definisjonen av 0! som tallet 1 gjør det mulig å lage gunstige formler i kombinatorikken.

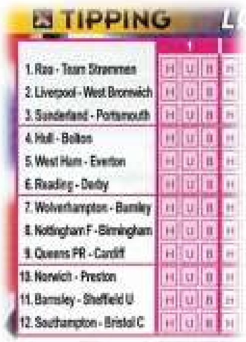
Tre typer utvalg

[Tre typer utvalg (108445)](#)

1. Ordnet utvalg med tilbakelegging

Tenk deg at du skal fylle ut en tippekupong med tolv fotballkamper helt tilfeldig.

Du legger tre lapper i en hatt. På den ene lappen står det H for hjemmeseier, på den andre står det U for uavgjort, og på den tredje lappen står det B for borteseier.



Den første lappen du trekker, skal angi resultatet i kamp nummer 1. Lappen må så legges tilbake i hatten før resultatet i kamp nummer 2 trekkes. Vi har derfor et utvalg med tilbakelegging. Det betyr også noe hvilken rekkefølge lappene trekkes i. Det er ikke likegyldig om du først trekker H og så U, eller om du først trekker U og så H. Det vil si at utvalget er ordnet.

Vi har da **et ordnet utvalg med tilbakelegging**. Etter produktregelen for kombinasjoner blir antall kombinasjonsmuligheter da lik $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{12}$

> Antall kombinasjonsmuligheter av et **ordnet utvalg med tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt ved n^r.

2. Ordnet utvalg uten tilbakelegging

I en klasse med 30 elever skal vi velge et styre bestående av leder, nestleder og sekretær. Vi velger først leder. Da har vi 30 mulige utfall. Så velger vi nestleder. Da er det 29 elever igjen å velge mellom siden lederen ikke også kan være nestleder. For hver av de 30 mulige lederne kan vi få 29 mulige nestledere, altså 30·29 kombinasjonsmuligheter. Til slutt velger vi sekretær. Da er det 28 elever igjen å velge mellom (28 lapper igjen i hatten).

Siden rekkefølgen betyr noe, og en person ikke kan inneha flere verv, har vi altså **et ordnet utvalg uten tilbakelegging**.

Produktregelen sier at antall mulige styresammensetninger blir 30·29·28. Dette kan også skrives som

$$30 \cdot 29 \cdot 28 = 30 \cdot (30-1) \cdot (30-2) = 30 \cdot (30-1) \cdot (30-3+1)$$

Vi tenker nå at vi skal velge et styre på *r* antall elever ut fra en gruppe *n* på elever. Kriteriene er de samme som ovenfor. Antall mulige styresammensetninger blir da

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

Formelen blir mer «brukervennlig» hvis vi multipliserer med $(n-1)!$ i teller og nevner. Da får vi nemlig n-fakultet i teller.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1 \cdot (n-1)!)}{1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Antall kombinasjonsmuligheter i disse situasjonene betegnes med nPr hvor IP står for permutasjoner.

Antall mulige kombinasjoner for et **ordnet utvalg uten tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt ved

$$\mathbf{nPr} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-1)!}$$

I GeoGebra er kommandoen $\mathbf{nPr}[< \mathbf{Tall} >, < \mathbf{Tall} >]$ hvor det første tallet er *n* og det andre tallet *r*.

Formelen må også gjelde for det tilfelle at $r = n$. Da er $(n - r)! = 0!$ Dette krever en definisjon av 0!. Ved å definere $0! = 1$, blir formelen rett også for det tilfelle at $r = n$.

Når $r = n$, er

$$\mathbf{nPr} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Dette vil for eksempel gjelde dersom vi skal finne ut hvor mange rekkefølger elever i en klasse kan stille seg opp i.

3. Uordnet utvalg uten tilbakelegging

I en klasse med 30 elever skal vi nå bare velge et styre bestående av tre elever. Rekkefølgen på de som blir trukket ut betyr ikke noe. En person kan ikke inneha flere verv. Vi har da en situasjon med **et uordnet utvalg uten tilbakelegging**.

Dersom dette hadde vært et ordnet utvalg uten tilbakelegg, slik som i forrige eksempel, ville antall kombinasjoner vært gitt ved

$$\mathbf{nPr} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = 30 \cdot 29 \cdot 28$$

I dette tilfellet, når rekkefølgen ikke har noen betydning, faller det bort noen kombinasjoner. Når vi trekker ut tre elever, kan disse tre elevene kombineres på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ ulike måter. Disse seks kombinasjonene innholder de samme tre elevene. Når rekkefølgen ikke har noe å si, er disse seks kombinasjonene like.

Vi får derfor $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}$ kombinasjonsmuligheter i dette tilfellet.

Generelt får vi at antall mulige kombinasjoner for et uordnet utvalg uten tilbakelegging av elementer fra elementer er gitt med formelen

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Det tallet som denne formelen gir, kalles for binomialkoeffisienten av *n* og *r*. Skrivemåten er $\binom{n}{r}$, som leses «*n* over *r*». Binomialkoeffisienten betegnes også med *nCr* hvor *C* står for kombinasjoner.

I Lotto er det $\binom{34}{7}$ mulige måter å fylle ut en lottokupong på.

I lagspill er det $\binom{20}{11}$ mulige lagoppstillinger for lag med 11 spillere av en spillerstall på 20.

Vi har nå funnet en formel for binomialkoeffisienten som vi kan bruke til å regne «for hånd». Dette er nyttig på del 1 av eksamen.

Antall mulige kombinasjoner for et **uordnet utvalg uten tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt med formelen

$$\binom{n}{r} = \mathbf{nCr} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

I GeoGebra er kommandoen $\mathbf{nCr}[< \mathbf{Tall} >, < \mathbf{Tall} >]$ hvor det første tallet er *n* og det andre tallet *r*.

Oppsummering

Oppsummering (108457)

Vi kan oppsummere de tre ulike situasjonene med ulike utvalg med et eksempel.

Vi trekker to lapper fra en hatt med seks lapper nummerert fra 1 til 6. Alle kombinasjonsmulighetene er illustrert i en tabell.

2. trekk \ 1. trekk	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

- **Et ordnet utvalg med tilbakelegg** vil si alle kombinasjonene i tabellen.
  Vi kan finne antall kombinasjoner ved regning

  $$n^r = 6^2 = 36$$

- **Et ordnet utvalg uten tilbakelegg** gir kombinasjonene i de røde og blå rutene i tabellen. Til sammen 30 ruter. Kombinasjonene i de grå rutene faller bort. Vi kan igjen finne antall kombinasjoner ved regning

  $$\mathrm{nPr} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 6 \cdot 5 = 30$$

- **Et uordnet utvalg uten tilbakelegg** gir kun 15 kombinasjoner. Kombinasjonene i de grå rutene faller bort, og kombinasjonene i de røde og de blå rutene blir identiske fordi for for eksempel $(1,2) = (2,1)$.
  Antall kombinasjoner ved regning

  $$6\mathrm{C}2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{4!}} = \frac{30}{2} = 15$$

De tre ulike situasjonene er oppsummert i tabellen nedenfor.

Et utvalg på r elementer fra n elementer	Ordnet utvalg (Rekkefølgen betyr noe)		Uordnet utvalg (Rekkefølgen betyr ikke noe)
	Med tilbakelegging	Uten tilbakelegging	Uten tilbakelegging
Eksempel	- Fotballtipping - Nummerskilt på biler - Koder og passord	- Valg av leder, nestleder og sekretær	- Lotto - Laguttak - Valg av styre
Formel for antall kombinasjoner	n^r	$nPr = n(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-r+1)$ $= \frac{n!}{(n-r)!}$	$nCr = \binom{n}{r} = \frac{nPr}{r!}$ $= \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$
Excel		PERMUTER$(n\,;r)$	KOMBINASJON$(n\,;r)$
GeoGebra		nPr	nCr

Sannsynlighetsberegninger

Sannsynlighetsberegninger (108473)

Fra avsnitt 1T har vi følgende setning:

I en uniform sannsynlighetsmodell er alle utfall like sannsynlige.

Sannsynligheten for en hendelse *A* er gitt ved

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

Nå skal vi se hvordan vi kan beregne sannsynligheter i uniforme sannsynlighetsmodeller ved å bruke setningen ovenfor, sammen med det vi har lært om kombinatorikk.

Eksempel 1

Vi skal tippe resultater i fotballkamper. Vi tipper helt tilfeldig 12 kamper. Hva er sannsynligheten for å få 12 rette?

Løsning
Vi har et ordnet utvalg med tilbakelegging.
Antall mulige kombinasjoner er

$$n^r = 3^{12} = 531441$$

Vi definerer hendelsen *A*.

A: Vi får 12 rette

Det er bare én rekke som gir 12 rette.

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{1}{3^{12}} = \frac{1}{531441} \approx 1,9 \cdot 10^{-6}$$

Eksempel 2

I klasse 1B er det 30 elever. Klassen skal velge leder og nestleder til klasserådet. Den første som blir trukket ut, blir leder. Hva er sannsynligheten for at Aase blir leder og Adrian nestleder?

Løsning
Vi har et ordnet utvalg uten tilbakelegging. Antall mulige kombinasjoner er

$$30\text{P}2 = 30 \cdot 29 = 870$$

Vi definerer hendelsen *A*.

A: Aase blir leder og Adrian nestleder.

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{1}{30\,\text{P}2} = \frac{1}{870} \approx 0,001$$

Eksempel 3

Til høyre ser du en lottokupong. Når du fyller ut én lottorekke, velger du 7 tall. Det laveste tallet du kan velge, er 1 og det høyeste er 34.

Finn sannsynligheten for å få rette i Lotto når du leverer inn én lottorekke.

Løsning
Vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging.

Antall mulige lottorekker er

$$34\text{C}7 = \binom{34}{7} = 5379616$$

Vi definerer hendelsen *A*.

A: Få 7 rette i lotto.

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{1}{\binom{34}{7}} = \frac{1}{5379616} \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$$

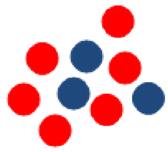
Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell

[Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell (108476)]

Når vi skal ta et **tilfeldig utvalg** fra **en mengde med to ulike elementer**, får vi en sannsynlighetsfordeling som vi kaller hypergeometrisk.

Eksempel

Det ligger ni kuler i en boks. Tre av kulene er blå. Resten er røde. Vi skal trekke fem kuler fra boksen tilfeldig.



Hva er sannsynligheten for at vi trekker to blå og tre røde kuler?

Vi må her regne med at utvalget fra boksen er uordnet (rekkefølgen betyr ikke noe), og vi har ikke tilbakelegging. Antall mulige måter å trekke 5 kuler fra boksen på, er

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\cdot(9-5)!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4!}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4!}} = 3\cdot 2\cdot 7\cdot 3 = 63\cdot 2 = 126$$

Hvor mange gunstige måter finnes det?

Vi skal trekke to blå kuler av i alt tre blå kuler.

Dette kan gjøres på $\binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ forskjellige måter.

Vi skal trekke tre røde kuler av i alt seks røde kuler.

Dette kan gjøres på $6\text{C}3 = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 2\cdot 5 = 20$ forskjellige måter.

Etter produktregelen for kombinasjoner er det da $3\cdot 20 = 60$ forskjellige gunstige måter å trekke ut tre røde og to blå kuler på.

Vi definerer hendelsen *A*.

A: Av de fem uttrukne kulene er to blå og tre røde

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{9}{5}} = \frac{3\cdot 20}{126} \approx 0,476$$

Mange situasjoner fra virkeligheten tilsvarer i prinsippet denne situasjonen med kuler.

En skoleklasse består av noen jenter og noen gutter. Når vi fra klassen skal trekke et utvalg på et bestemt antall elever, har vi en typisk hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Vi kan da regne som i eksemplet ovenfor og beregne sannsynligheter for fordeling av gutter og jenter i utvalget.

I Vurderingsveiledningen fra Utdanningsdirektoratet finner du en oversikt over «Formler som forutsettes kjent ved Del 1 av eksamen i Matematikk S1». Her står det at dersom hypergeometrisk fordeling inngår i Del 1 av eksamen, vil aktuell formel bli oppgitt som vist nedenfor.

Hypergeometrisk fordeling

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Formelen kan forstås på følgende måte:

Vi har en mengde med *n* elementer (for eksempel 9 kuler i en boks). *m* av disse elementene er av en type (3 av kulene er blå), og *n* – *m* av elementene er av en annen type (9 – 3 = 6, kuler er røde).

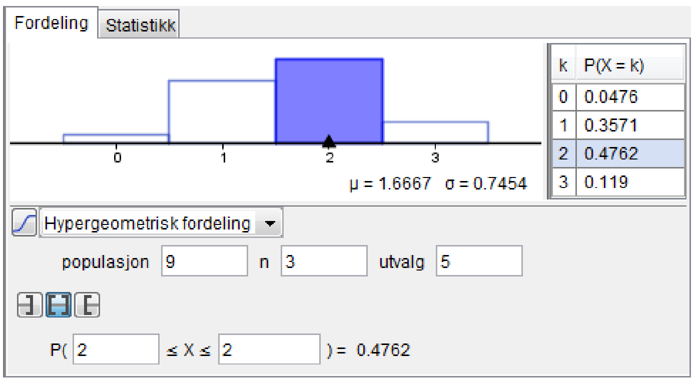
Vi skal trekke *r* elementer tilfeldig. (Vi trekker 5 kuler tilfeldig.)

La *x* være antall av de uttrukne kuler som er blå. Vi kan da finne sannsynligheten for at X = 2 slik

$$P(X=2)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{9-3}{5-2}}{\binom{9}{5}}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{9}{5}}=0,476$$

Formelen er altså en generell oppskrift som alltid kan brukes når vi har hypergeometriske sannsynlighetsfordelinger.

Du kan velge «Hypergeometrisk fordeling» i sannsynlighetskalkulatoren til GeoGebra.
Her kalles samlet antall elementer for «populasjon». Det svarer til *n* i formelen fra Udir.
Antall elementer av «en spesiell type» kalles for *n*. OBS! Det svarer til *m* i formelen fra Udir.
Antall elementer som trekkes ut kalles for «utvalg». Det svarer til *r* i formelen fra Udir.
Bokstaven *X* betegner også her antall elementer i utvalget som er av «en spesiell type».



Vi finner også nå at i eksemplet ovenfor, så er sannsynligheten for at X=2 lik 0,476.

Du kan også sette *n* = 6, de røde kulene. Du må da finne *P*(*X* = 3). Se om det stemmer!

Vi kan også tenke på denne måten dersom vi skal ta et utvalg fra en mengde som inneholder mer enn to ulike typer elementer.

Eksempel

Elevrådet ved en skole består av åtte elever fra Vg1, seks elever fra Vg2 og to elever fra Vg3. Seks elever fra elevrådet skal være med å arrangere OD-dagen. De seks elevene velges ut tilfeldig.

Finn sannsynligheten for at to elever fra hvert klassetrinn blir valgt ut.

2 av de 6 fra Vg2

2 av de 8 fra Vg1 2 av de 2 fra Vg3

$$P(\text{2 elever fra hvert klassetrinn blir valgt ut}) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{16}{6}} = \frac{28\cdot 15\cdot 1}{8008} \approx 0{,}052$$

Til sammen 6 av de 16

Legg merke til at $8 + 6 + 2 = 16$ og $2 + 2 + 2 = 6$.

Du vil alltid kunne summere på denne måten dersom du har satt opp uttrykket på rett måte!

Du kan alltid tenke på denne måten når du arbeider med oppgaver der et utvalg skal trekkes fra en mengde hvor elementene kan deles inn i grupper etter visse kriterier.

Vi avslutter med et eksempel hentet fra en eksamensoppgave. Som du ser, kan vi nå finne sannsynligheten for at bare én av to kjærester får være med på tur!

Eksempel

I klassen til Kåre, Janne og Ane er det 15 jenter og 10 gutter.
Klassen har vunnet en tur til Hellas for 6 elever. De elevene trekkes ut ved loddtrekning.

1) Finn sannsynligheten for at Ane får være med på turen.
2) Finn sannsynligheten for at akkurat 3 jenter og 3 gutter får være med på turen.

Kåre og Janne er kjærester.

3) Finn sannsynligheten for at bare én av dem får være med på turen.

(Eksamen 2T, Høsten 2009)

Løsning

$$P\left(\text{Ane får være med på turen}\right) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{24}{5}}{\binom{25}{6}} = 0{,}240$$

Her kunne vi også funnet svaret ved å tenke «gunstige delt på mulige»

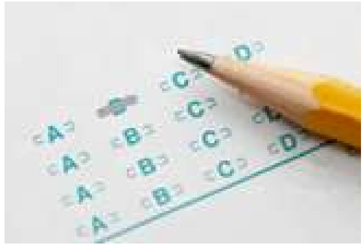
$$P\left(\text{Ane får være med på turen}\right) = \frac{g}{m} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

$$P\left(\text{3 jenter og 3 gutter får være med}\right) = \frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}308$$

$$P\left(\text{Bare en av de to kjærestene får være med}\right) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{23}{5}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}380$$

Binomisk sannsynlighetsmodell

[Binomisk sannsynlighetsmodell (108486)](#)



Tenk deg at du får en matematikkprøve med fire oppgaver. Hver oppgave har fire svaralternativer, og du skal krysse av for riktig svaralternativ.

Du er ikke forberedt, og alle svaralternativene virker like sannsynlige. Vi regner med uavhengighet. Det vil si at hva du svarer på en oppgave, ikke påvirker svaret ditt på den neste.

Du krysser av helt tilfeldig. Sannsynligheten for å svare riktig på en oppgave er da $\frac{1}{4}$, og sannsynligheten for å svare galt er $\frac{3}{4}$.

Hva er sannsynligheten for å få null, ett, to, tre og fire riktige svar?

Det er bare én måte du kan få fire riktige svar på.

$$P\left(\mathrm{RRRR}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^4$$

Det er også bare én måte du kan få null riktige svar på.

$$P\left(\mathrm{GGGG}\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^4$$

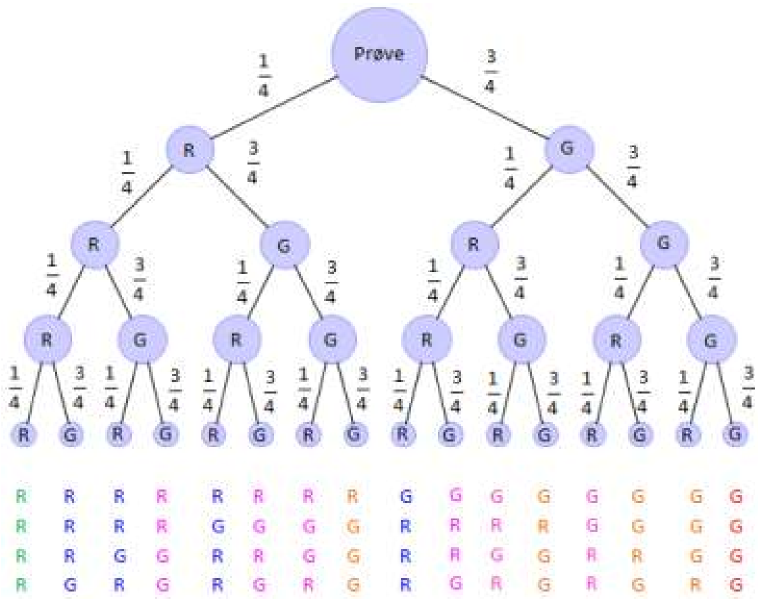
Men, hvor mange måter kan du få to riktige svar på?

Sannsynligheten for å svare riktig på det to første oppgavene (og galt på de to neste) er

$$P\left(\mathrm{RRGG}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

Men, det er flere måter å få to riktige svar på. Du kan for eksempel svare riktig på de to siste oppgavene *GGRR*, på første og siste oppgave *RGGR* osv.

For å telle opp antall måter, kan du lage et valgtre.



Valgtreet ovenfor viser hvor mange måter du kan få null, ett, to, tre og fire riktige svar på. Vi teller opp og samler resultatene i en tabell.

Antall rette	0	1	2	3	4
Antall måter	1	4	6	4	1
Antall måter	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

At binomialkoeffisientene dukker opp her er ikke så underlig. Å finne antall måter å få to rette svar på er det samme som å finne antall måter vi kan velge to plasser av fire hvor det skal stå *R*.

Dette blir samme problemstilling som å regne ut hvor mange måter vi kan velge ut 11 spillere fra en spillerstall på 20, 7 av 34 tall på en lottokupong osv.

Vi får altså at

$$P\left(\text{To riktige svar}\right)=\binom{4}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

På samme måte vil da

$$P\left(\text{Tre riktige svar}\right)=\binom{4}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^1$$

Det gjelder helt generelt. Vi antar at vi har en prøve med *n* oppgaver som besvares helt uavhengig av hverandre. For hver oppgave er det to muligheter, enten svarer vi riktig eller så svarer vi galt.

Sannsynligheten for å svare riktig er lik hele tiden. Vi kan kalle denne sannsynligheten for *p*.

Da blir sannsynligheten for å svare galt på en oppgave lik 1 – *p*, og vi får at

$$P\left(k\text{ riktige svar}\right)=\binom{n}{k}\cdot(p)^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Sammensatte forsøk som for eksempel å besvare flervalgsprøven ovenfor kaller vi binomiske forsøk. Nedenfor finner du en oppsummering som viser hva som kjennetegner binomiske forsøk.

Binomisk forsøk og binomisk sannsynlighet

I et binomisk forsøk har vi *n* delforsøk.

Eksempel: Svare på fire oppgaver, *n* = 4

- Alle delforsøkene har to mulige utfall, $A \text{ eller } \overline{A}$ (ikke A).
  Eksempel: Riktig eller galt svar på en oppgave
- Sannsynligheten for *A* er den samme hele tiden. Vi setter $p=P\left(A\right)$. Da er $P\left(\overline{A}\right)=1-p$.
  Eksempel: $P\left(\text{Riktig svar}\right)=\frac{1}{4}$ og $P\left(\text{Galt svar}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- De enkelte delforsøkene er uavhengige.

La *X* være antall ganger *A* inntreffer.

Sannsynligheten for at *A* skal inntreffe *k* ganger er da gitt ved:

Eksempel: Sannsynligheten for et bestemt antall riktige svar

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ «*n* over *k*» kaller vi binomialkoeffisienten.

Eksempel: Sannsynligheten for å svare riktig på to av fire oppgaver når hver oppgave har fire svaralternativer er

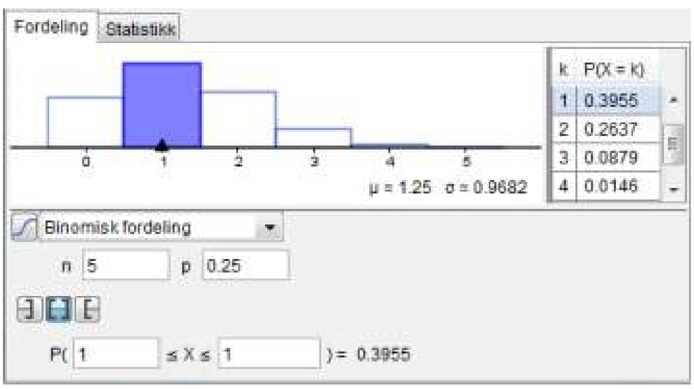
$$P(\text{To riktige svar}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

Å kaste en terning et bestemt antall ganger, og se om vi får sekser eller ikke på hvert enkelt kast, er et annet eksempel på et binomisk forsøk. Vi kan bruke formelen ovenfor til å beregne sannsynligheten for å få et bestemt antall seksere.

Å kaste en mynt et bestemt antall ganger og se om vi får «kron» eller «mynt» på hvert enkelt kast, er et også et eksempel på et binomisk forsøk. Vi kan bruke formelen ovenfor til å beregne sannsynligheten for å få et bestemt antall «kron».

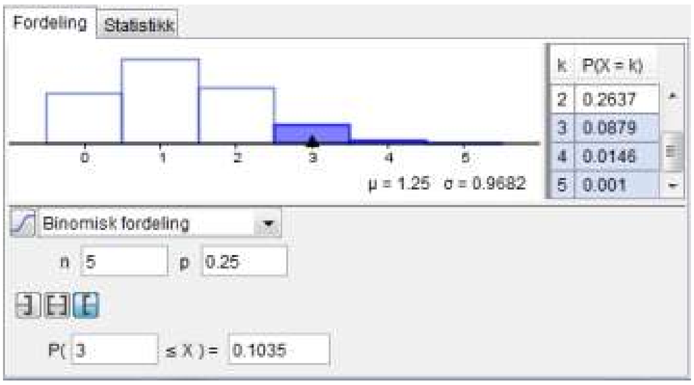
Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra for å regne ut binomisk sannsynlighet.

En flervalgsprøve har fem oppgaver med fire svaralternativer på hver oppgave. Du besvarer flervalgsprøven ved ren gjetning.
Du skal finne sannsynligheten for å svare riktig på akkurat én av oppgavene. Du velger «Binomisk fordeling» og fyller inn som vist nedenfor



Skjermbilde fra GeoGebra: Sannsynligheten er 0,3955.

Sannsynligheten for å få mer enn to riktige svar



Skjermbilde fra GeoGebra: Sannsynligheten er 0,1035.

Førerprøven

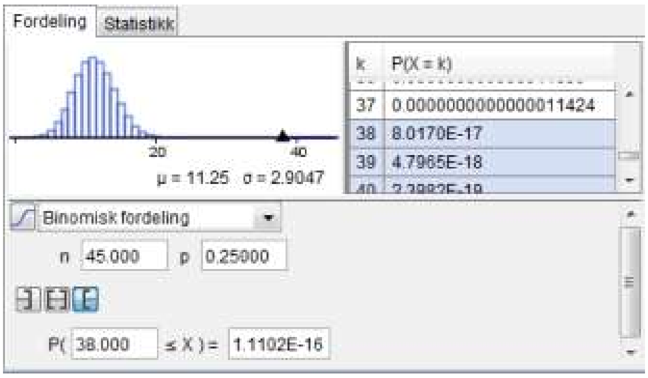
Førerprøven (108489)

Når du skal opp til den teoretiske førerprøven for bil, får du 45 spørsmål. Hvert spørsmål har fire svaralternativer. For å bestå prøven må du ha minst 38 riktige svar.
Hva blir sannsynligheten for å bestå prøven med ren gjetning på alle spørsmålene?

Førerprøven omfatter i de fleste klasser både en teoretisk og en praktisk prøve. Du må bestå teoriprøven før du kan ta den praktiske prøven!

Ved ren gjetning blir prøven å betrakte som et binomisk forsøk. Sannsynligheten for å svare riktig på ett enkeltspørsmål blir $\frac{1}{4}$.
De enkelte spørsmålene besvares uavhengig av hverandre.

Sannsynligheten for 38 rette kan vi finne ved sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



Sannsynligheten er $1,1 \cdot 10^{-16}$.

Svaret viser at det ikke er lurt å gå opp til førerprøven uten å forberede seg.