NASJONAL DIGITAL LÆRINGSARENA

Matematikk R2

Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpemidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

Dette dokumentet er en tekstutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til http://ndla.no.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpemidler. I modell 1 er alle hjelpemidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.

Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpemidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Disse fagene følger modell 2 for hjelpemiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.

Innholdsfortegnelse

Innholdsfortegnelse **2**

Geometri **7**

Teori 7

Vektorer 7

Vektorer 7

Regning med vektorer 9

Regning med vektorer 9

Skalarproduktet 11

Ortogonale vektorer, regneregler for skalarproduktet og lengden av en vektor 13

Vektorer på koordinatform 15

Vektorer på koordinatform 15

Addisjon av vektorer på koordinatform 17

Differansen mellom vektorer på koordinatform 18

Multiplikasjon av vektor med tall 19

Posisjonsvektoren 20

Vektorer mellom punkter 21

Skalarproduktet av vektorer gitt på koordinatform 22

Lengden av en vektor gitt på koordinatform 23

Avstanden mellom punkter i planet 24

Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform 25

Dekomponering av vektorer 26

Ortogonale og parallelle vektorer 27

Tredimensjonale vektorkoordinater, definisjon og regneregler 28

Vektorprodukt 32

Vektorprodukt 32

Vektorproduktet på koordinatform 34

Arealberegning 37

Volumberegning 40

Pyramider 42

Regneregler for vektorprodukt 43

Parallelle vektorer 46

Vektorproduktet i fysikken 47

LInjer i rommet 48

Linjer i planet 48

Vektorfunksjoner og parameterframstilling for kurver i rommet 50

En parameterfremstilling for en rett linje 51

Avstanden fra et punkt til en rett linje 54
Vinkelen mellom to linjer 57
Skjæring med koordinatplanene 58
Avstand mellom to linjer 59
Plan i rommet 61
Plan gitt ved normalvektor og punkt i planet 61
Plan gitt ved tre punkter 64
Skjæring mellom linje og plan 66
Skjæring mellom plan og koordinatakse 67
Vinkelen mellom plan 68
Vinkelen mellom linje og plan 69
Avstanden fra et punkt til et plan 71
Formel for avstand fra punkt til plan 74
Parameterfremstilling for plan 76
Skjæring mellom to plan. Mer om likningsfremstilling av linjer 78
Kuleflater 80
Likningsfremstilling for en kuleflate 80
Parameterfremstilling for kuleflate 82

Algebra 85
Teori 85
Tallfølger 85
Tallfølger 85
Rekursiv og eksplisitt formel 87
Oversikt over tallfølger og formler 89
Fra eksplisitt formel til rekursiv formel 91
Aritmetiske tallfølger 93
Geometriske tallfølger 94
Tallrekker 95
Tallrekker 95
Eksempel 98
Aritmetiske rekker 99
Geometriske rekker 102
Praktiske problemer knyttet til rekker 104
Prosentvise endringer 104
Sparing 105
Avbetaling 108
Nåverdier 110

Serielån 112
Annuitetslån 114
Utslipp av gasser 116
Uendelige geometriske rekker 118
Uendelige geometriske rekker 118
Konvergente og divergente geometriske rekker 120
Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker 121
Uendelige geometriske rekker med variable kvotienter 123
Induksjonsbevis 125
Induksjonsbevis 125

Funksjoner 128

Teori 128
Trigonometriske definisjoner 128
Sinus, cosinus og tangens til vinkler mellom 0˚ og 90˚ 128
Enhetssirkelen 129
Vinkler med samme trigonometriske verdi 132
Negative vinkler 134
Vinkler som ikke ligger mellom 0˚ og 360˚ 135
Kvadranter 136
Absolutt vinkelmål 137
Trigonometriske sammenhenger 139
Eksakte verdier 139
Komplementvinkler 142
Enhetsformelen 143
Sum og differanse av vinkler 145
Trigonometriske likninger 148
Trigonometriske likninger 148
Funksjonsdrøfting 152
Den deriverte 152
Den deriverte til en konstant funksjon 154
Den deriverte til en potensfunksjon 155
Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant 156
Den deriverte til et produkt av to funksjoner 157
Den deriverte til en kvotient (brøk) 158
Kjerneregelen 159
Den deriverte til eksponentialfunksjonen 161
Den deriverte til logaritmefunksjonen 162

De trigonometriske funksjonene 163
Sinusfunksjonen 165
Cosinusfunksjonen 166
Tangensfunksjonen 167
Periode, amplitude, likevektslinje og faseforskyvning 168
Derivasjon av trigonometriske funksjoner 172
Toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt 175
Alternativ metode for å finne topp- og bunnpunkter til «rene» sinus- eller cosinusfunksjoner 178
Omforme trigonometriske uttrykk av typen asinkx+bcoskx 179
Omforme trigonometriske uttrykk av typen a sin kx + b cos kx 179
Modellering 182
Ubestemte integraler 184
Ubestemte integraler 184
Regneregler for integrasjon 186
Den antideriverte til de trigonometriske funksjonene 189
Finne den antideriverte ved integrasjon med variabelskifte 191
Finne den antideriverte ved delvis integrasjon 194
Finne den antideriverte ved delbrøksoppspalting 196
Bestemte integraler 198
Bestemte integraler 198
Ubestemte og bestemte integraler 202
Integraler med digitalt verktøy 204
Arealberegninger og andre anvendelser av bestemte integraler 206
Areal mellom en graf og x - aksen 206
Arealet mellom grafer 209
Samlet mengde 211
Volum 214
Volum av omdreiningslegemer 216
Matematiske modeller 218
Matematiske modeller 218
Lineære modeller og lineær regresjon 219
Kan vi stole på matematiske modeller? 222
Potensfunksjon som modell 223
Eksponentialfunksjon som modell 224
Polynomfunksjon som modell 226
Trigonometrisk funksjon som modell 227
Differensiallikninger 229

Teori 229
Hva er en differensiallikning? 229
Hva er en differensiallikning? 229
Førsteordens differensiallikninger 231
Første ordens differensiallikninger 231
Differensiallikningen y'= q(x) 232
Integralkurver 233
Initialbetingelser 234
Retningsdiagrammer 235
Generell løsning av lineære førsteordens differensiallikninger 237
Separable differensiallikninger 242
Absoluttverdi 244
Modellering 246
Fart og akselrasjon 246
Proporsjonal vekst 248
Populasjonsvekst. Logistisk vekst 250
Fall i tyngdefeltet 256
Andreordens homogene differensiallikninger 259
Andreordens homogene differensiallikninger 259
Eksempel. To reelle løsninger 262
Eksempel. Én reel løsning 264
Eksempel. Komplekse løsninger 267
Newtons andre lov beskriver frie svingninger 269
Harmoniske svingninger 270
Dempete svingninger 273
Veiledninger og verktøy **277**
Forslag til årsplan 277

Geometri

Teori

Vektorer

Vektorer

Vektorer (106883)

Introduksjon til vektorer / video
http://ndla.no/nb/node/132350

I R1 innførte vi et helt nytt matematisk begrep,**vektorbegrepet**. Vi lærte å regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og på koordinatform. Vi lærte også å beregne lengder og vinkler, og å avgjøre om to vektorer er parallelle eller ortogonale.

I R2 skal vi **utvide vektorbegrepet fra vektorer i planet til vektorer i rommet**. Du vil se at alt du lærte om vektorer i planet, også gjelder for vektorer i rommet. Vi kan finne skalarproduktet av to vektorer i rommet på samme måte som mellom to vektorer i planet. I tillegg skal vi finne det vi kaller vektorproduktet. Da kan vi beregne lengder, vinkler – og areal og volum.

Vi begynner med litt repetisjon.

En **vektor** er et linjestykke med en bestemt **lengde** og en bestemt **retning**.

Størrelser som lar seg representere ved hjelp av vektorer, kaller vi **vektorstørrelser** eller bare vektorer.

En **skalar** er en størrelse uten retning.

Eksempler på vektorer er forflytning, fart og krefter.

Eksempler på skalarer er temperatur, areal og volum.

Vi kan oppfatte en vektor som en pil.

Hvis vi flytter en vektor, men beholder både lengde og retning, har vi fortsatt samme vektor.

Med $(\vec{s})$ mener vi lengden av $\vec{s}$.

Med $-\vec{s}$ mener vi vektoren som er parallell med og har samme lengde som $\vec{s}$, men er motsatt rettet.

På vei sørover 80 km/h. Fart er en vektorstørrelse.

Regning med vektorer

Regning med vektorer

Regning med vektorer (106922)

Vektoraddisjon og vektordifferanse / video
http://ndla.no/nb/node/132351

Her er litt mer repetisjon og en oversikt over regnereglene som gjelder for vektorer.

Addisjon av vektorer

Definisjon

Gitt to vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Vi finner **summen av vektorene**, $\vec{a}+\vec{b}$, ved å parallellforskyve $\vec{b}$ slik at den får sitt utgangspunkt der $\vec{a}$ har sitt endepunkt.

Summen av vektorene, $\vec{a}+\vec{b}$, er lik vektoren som går **fra utgangspunktet** til $\vec{a}$ **til endepunktet** til $\vec{b}$.

Se figuren til høyre.

Vektordifferanse

Definisjon

Vi definerer **differansen mellom to vektorer**

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

Det betyr at vi kan finne vektordifferansen $\vec{a}-\vec{b}$ ved å finne summen $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Se figuren til høyre.

Multiplikasjon av vektor med tall

$2\vec{a}$ er en vektor som er dobbelt så lang som $\vec{a}$ og har samme retning som $\vec{a}$.

$-2\vec{a}$er en vektor som er dobbelt så lang som $\vec{a}$ og har motsatt retning.

Definisjon

Gitt en vektor $\vec{a}$ og et tall $t \in \mathbb{R}$.

$t \cdot \vec{a}$ er en vektor med lengde lik $|t|$ multiplisert med $|\vec{a}|$.

Hvis $t > 0$, har $t \cdot \vec{a}$ samme retning som $\vec{a}$.

Hvis $t < 0$, har $t \cdot \vec{a}$ og $\vec{a}$ motsatt retning.

Hvis $t = 0$, er $t \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

$\vec{0}$ kaller vi «**nullvektoren**». Denne vektoren har lengde (absoluttverdi) lik null og ingen retning. Den er parallell med og står vinkelrett på enhver annen vektor.

Parallelle vektorer

Fra forrige avsnitt følger en setning som du får bruk for når du skal undersøke om to vektorer er parallelle.

To vektorer er **parallelle** hvis og bare hvis det finnes et reelt tall *t* slik at den ene vektoren kan skrives som *t* multiplisert med den andre vektoren.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t \cdot \vec{b} \quad \text{hvor} \quad t \in \mathbb{R}$$

Regneregler for vektorer

For addisjon av vektorer og multiplikasjon av en vektor med et tall, gjelder regneregler tilsvarende reglene som gjelder for addisjon og multiplikasjon av tall.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$s\vec{a} + t\vec{a} = (s + t)\vec{a}$$
$$s\,(t\vec{a}) = (s \cdot t)\vec{a}$$
$$s\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

Skalarproduktet

Skalarproduktet (106932)

Skalarproduktet / video
http://ndla.no/nb/node/132355

Når vi finner summen av vektorer, differansen mellom vektorer, og multipliserer en vektor med et tall, får vi en ny vektor som resultat.

Vi skal nå definere det som kalles **skalarproduktet** av vektorer. Det minner litt om multiplikasjon mellom tall, men siden tall og vektorer er forskjellige størrelser, er det ikke det samme.

Skalarproduktet av to vektorer gir ikke en ny vektor som resultat, men en skalar. Derfor kalles det skalarprodukt. Et annet navn er **prikkprodukt**. Vi sier at vi «prikker» to vektorer med hverandre.

Definisjon

Gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. La α være vinkelen mellom vektorene.

Skalarproduktet eller **prikkproduktet** av vektorene er definert som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos\alpha$$

Skalarproduktet av to vektorer finner vi altså ved å multiplisere produktet av lengdene til de to vektorene med cosinus til vinkelen mellom dem.

Cosinus

Når vi skal finne skalarproduktet av to vektorer, må vi finne cosinus til vinkelen mellom vektorene. I 1T definerte vi cosinus til en vilkårlig vinkel ved hjelp av enhetssirkelen. Se figuren til høyre.

Vi kan alltid finne cosinus til en vinkel ved å bruke et digitalt verktøy. Noen cosinusverdier bør du likevel klare å finne ved hjelp av enhetssirkelen. Slå opp i geometrikapittelet i 1T hvis du er usikker.

Skalarproduktet har stor betydning i fysikkfaget. For eksempel er arbeid i fysikken definert som skalarproduktet av vektorene kraft og strekning.

Ortogonale vektorer, regneregler for skalarproduktet og lengden av en vektor

Ortogonale vektorer, regneregler for skalarproduktet og lengden av en vektor (106933)

Regneregler for skalarproduktet / video
http://ndla.no/nb/node/132357

Når to vektorer står ortogonalt (normalt, vinkelrett) på hverandre, er vinkelen mellom vektorene 90°. Siden $\cos 90^\circ = 0$ (se enhetssirkelen), vil skalarproduktet av vektorene være lik null:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos 90^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot 0$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Motsatt må det også være slik at hvis skalarproduktet er lik null, og begge vektorer er forskjellig fra nullvektor, må cosinus til vinkelen mellom dem være null, og vektorene står ortogonalt på hverandre.

To vektorer som står ortogonalt på hverandre, kalles **ortogonale** vektorer. Det matematiske symbolet er $\perp$.

Oppsummering

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Regneregler for skalarproduktet

Det kan vises at regnereglene nedenfor gjelder for skalarproduktet.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$(s\vec{a}) \cdot \left(t\vec{b}\right) = (s \cdot t)\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

og

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{b^2}$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{b^2}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2}$$

Lengden av en vektor

Vi har sett at **skalarproduktet** eller **prikkproduktet** av to vektorer er definert som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \cos\alpha$$

Når en vektor «prikkes med seg selv», får vi en spesiell situasjon. Vinkelen α er da 0°.
Som du ser av enhetssirkelen ovenfor, er $\cos 0^\circ = 1$. Vi får derfor

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^\circ$$

$$\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot 1$$

$$\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$$

Vi snur likningen og får et uttrykk for lengden av en vektor.

Legg merke til skrivemåten $\vec{a^2}$ for $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

Vektorer på koordinatform

Vektorer på koordinatform

Vektorer på koordinatform (106941)

Vektorer på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132356

I R1 lærte du å beskrive **vektorer i planet** ved hjelp av **vektorkoordinater**. Det ble da for eksempel mulig å addere vektorer uten å henge piler etter hverandre.

Vi innførte en rekke regneregler for å kunne regne med vektorer i planet på koordinatform. Vi skal utvide disse regnereglene til også å gjelde **tredimensjonale vektorer**. Vi innfører en ekstra koordinat slik at hvis *x*- og *y*-koordinatene beskriver planet, så vil *x*-, *y*- og *z*-koordinatene beskrive rommet.

Vi repeterer først innføringen av vektorkoordinater fra R1, og så ser vi mer på hvordan det blir med en ekstra koordinat.

I koordinatsystemet til høyre har vi plassert to vektorer med utgangspunkt i origo. Vektoren $\vec{e}_x$ går fra origo til punktet (1,0), og $\vec{e}_y$ går fra origo til punktet (0,1).

Disse vektorene har lengde 1, er parallelle med henholdsvis *x*-aksen og *y*-aksen og står normalt på hverandre. Vi kaller dem **enhetsvektorer**. (Vi plasserer vanligvis enhetsvektorene med utgangspunkt i origo, men de kunne like gjerne vært plassert et annet sted i koordinatsystemet.)

I koordinatsystemet har vi også tegnet $\vec{a}$.

Vi ser at vi kan skrive $\vec{a}$ som en sum av de to vektorene $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = 5 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$$

Alle vektorer kan på tilsvarende måte skrives som en kombinasjon av enhetsvektorene.

Når vi skal tegne $\vec{a}$, kan vi starte hvor som helst i koordinatsystemet og så gå 5 enheter mot høyre og 3 enheter oppover for å finne vektorens endepunkt. Når tallene 5 og 3 er kjent, er vektoren bestemt. Vi innfører en forenklet skrivemåte for $\vec{a}$:

$$\vec{a} = (5, 3)$$

Denne skrivemåten likner på måten punkt angis på, men det er en viktig forskjell. For vektorer bruker vi hakeparenteser mens vi for punkt bruker vanlige parenteser.

(5,3) kalles punktkoordinater og angir punktet som har *x*-koordinat lik 5 og *y*-koordinat lik 3.

[5,3] kalles **vektorkoordinater** og betyr det samme som vektoren $5 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$.

Eksempel

$$\vec{b} = -2 \cdot \vec{e}_x + -3 \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{b} = \left[-2, -3\right]$$

Når vi skal tegne $\vec{b}$, kan vi starte hvor som helst i koordinatsystemet og så gå 2 enheter mot venstre og 3 enheter nedover for å finne vektorens endepunkt.

Definisjon

Alle vektorer kan skrives som en vektorsum av enhetsvektorer. Dette gir grunnlag for innføring av **vektorkoordinater**

$$[x, y] = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

Vi bruker hakeparenteser for å betegne en vektor mens vi bruker vanlige parenteser for å betegne et punkt.

Addisjon av vektorer på koordinatform

Addisjon av vektorer på koordinatform (106944)

Addisjon på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132358

Gitt vektorene

$\vec{p} = [1, 2]$ og $\vec{q} = [3, 1]$

Vi ser av tegningen at

$\vec{p} + \vec{q} = [4, 3]$

Vi har altså at

$[1, 2] + [3, 1] = [4, 3]$

Ser du sammenhengen?

$$[1, 2] + [3, 1] = [1 + 3, 2 + 1] = [4, 3]$$

Vi finner **summen av to vektorer på koordinatform** ved å addere 1.koordinatene og 2.koordinatene hver for seg

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

Differansen mellom vektorer på koordinatform

Differansen mellom vektorer på koordinatform (106948)

Differanse mellom vektorer på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132746

Gitt vektorene

$$\vec{p} = [1, 2] \quad \text{og} \quad \vec{q} = [3, 1]$$

Vi ser at

$$\vec{p} - \vec{q} = [-2, 1]$$

Vi har altså at

$$[1, 2] - [3, 1] = [-2, 1]$$

Du ser sikkert sammenhengen her også

$$[1, 2] - [3, 1] = [1 - 3, 2 - 1] = [-2, 1]$$

Vi finner **differansen mellom to vektorer på koordinatform** ved å subtrahere 1.koordinatene og 2.koordinatene hver for seg

$$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

Multiplikasjon av vektor med tall

Multiplikasjon av vektor med tall (106953)

Multiplikasjon av en vektor med et tall / video
http://ndla.no/nb/node/132359

Gitt vektoren

$$\vec{p} = [1, 2]$$

Vi ser at

$$2 \cdot \vec{p} = [2, 4]$$

Vi har altså at

$$2 \cdot [1, 2] = [2 \cdot 1, 2 \cdot 2] = [2, 4]$$

Vi **multipliserer en vektor med et tall** ved å multiplisere begge vektorkoordinatene med tallet.

$$t \cdot [x, y] = [t \cdot x, t \cdot y]$$

Posisjonsvektoren

Posisjonsvektoren (106958)

Posisjonsvektor / video
http://ndla.no/nb/node/132360

Vektoren fra origo *O* (0,0) til punktet *P* (7,2) har koordinater

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 7 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 7, 2 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ kalles for **posisjonsvektoren** til punktet *P*.

Posisjonsvektoren til et punkt er vektoren fra origo til punktet. Denne vektoren viser punktets posisjon i forhold til origo.

Posisjonsvektoren til et punkt (*x*,*y*) har koordinatene [*x*,*y*].

Vektorer mellom punkter

Vektorer mellom punkter (106970)

Vektor mellom punkter / video
http://ndla.no/nb/node/132363

Gitt punktene *A* (2,4) og *B* (7,1).
Vi skal finne koordinatene til vektoren som har utgangspunkt i *A* og endepunkt i *B*, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Dette kan vi gjøre ved «å gå en omvei om origo».

Vi har

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = -\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{AO}} = -\overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

Vektoren fra punkt *A* til punkt *B*, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, kan uttrykkes ved hjelp av posisjonsvektorene til punktene *A* og *B*.

Det medfører at $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ kan skrives på koordinatform.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} = -\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}} = \Big[7,1\Big] - \Big[2,4\Big] = (7-2, 1-4] = [5,-3)$$

La nå punktene *A* og *B* være gitt som to generelle punkter i planet $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$. Også nå kan $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ uttrykkes ved hjelp av posisjonsvektorene til punktene *A* og *B*.

På koordinatform får vi

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AO}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} = -\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}} = \Big[x_2, y_2\Big] - \Big[x_1, y_1\Big] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1])$$

Gitt punktene $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$.

Da er

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \Big[x_2 - x_1, y_2 - y_1\Big]$$

Skalarproduktet av vektorer gitt på koordinatform

Skalarproduktet av vektorer gitt på koordinatform (106973)

Skalarproduktet av vektorer gitt på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132668

Vi får en enkel regneregel for skalarproduktet

når vektorene er gitt med koordinater.

$$
\begin{aligned}
[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] &= (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y) \cdot (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y) \\
&= x_1\vec{e}_x \cdot x_2\vec{e}_x + x_1\vec{e}_x \cdot y_2\vec{e}_y + y_1\vec{e}_y \cdot x_2\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y \cdot y_2\vec{e}_y \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_y \cdot \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot y_2 \cdot 0 + y_1 \cdot x_2 \cdot 0 + y_1 \cdot y_2 \cdot 1 \\
&= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2
\end{aligned}
$$

For skalarproduktet til vektorer gitt med vektorkoordinater gjelder

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Eksempel

$$[2, 3] \cdot [4, 5] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$$

Lengden av en vektor gitt på koordinatform

Lengden av en vektor gitt på koordinatform (107005)

Lengden av en vektor på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132673

Vi har tidligere vist at vi kan regne ut lengden av en vektor ved først å «prikke vektoren med seg selv» og så finne kvadratrota.

$$(\vec{a}) = \sqrt{\vec{a}^2}$$

For en vektor gitt på koordinatform får vi da

$$\left|[x, y\,]\right| = \sqrt{[x, y]^2} = \sqrt{[x, y] \cdot [x, y]} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lengden av vektoren [x,y] er gitt ved

$$\left|\left[x,\ y\right]\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eksempel

$$\left|\left[6, 8\,\right]\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Avstanden mellom punkter i planet

Avstanden mellom punkter i planet (107007)

Avstanden mellom punkter i planet / video
http://ndla.no/nb/node/132674

Vi har sett hvordan vi finner vektoren mellom to punkter i planet, og hvordan vi finner lengden av en vektor.

Avstanden mellom to punkter er det samme som lengden av vektoren mellom punktene.

Gitt punktene $A\ (x_1, y_1)$ og $B\ (x_2, y_2)$. **Avstanden** mellom *A* og *B* er

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Eksempel

Gitt punktene *A* (2,3) og *B* (5,7). Avstanden mellom *A* og *B* er

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\left[5 - 2, 7 - 3\ \right]\right| = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform

Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform (107010)

Vinkel mellom vektorer gitt på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132675

Formlene for lengden av, og skalarproduktet av, vektorer gitt på koordinatform gjør det enkelt å finne vinkelen mellom to vektorer.

Eksempel

Gitt vektorene

$$\vec{p} = [1, 2] \text{ og } \vec{q} = [3, 1]$$

La α være vinkelen mellom vektorene.

Definisjonen av skalarproduktet gir da

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\left[1, 2\right] \cdot \left[3, 1\right] = \left|[1, 2]\right| \cdot \left|[3, 1]\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{[1,2] \cdot [3,2]}{\left|[1,2]\right| \cdot \left|[3,1]\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2} \cdot \sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

Dekomponering av vektorer

Dekomponering av vektorer (107015)

Dekomponering av vektorer / video
http://ndla.no/nb/node/132676

Da vi innførte vektorkoordinater, så vi hvordan en

vektor, $\vec{a}$, kunne skrives som en sum av de to vektorene $\vec{a}_x$ og $\vec{a}_y$.

Av figuren ser vi at

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Når vi skriver en vektor som en sum, sier vi at vi dekomponerer vektoren.

Her er $\vec{a}$ skrevet som en sum av to vektorer som er parallelle med koordinataksene. (Når vi dekomponerer en vektor, kan komponentene i prinsippet ha en hvilken som helst retning.)

På koordinatform kan vi skrive

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$[5, 3] = [5, 0] + [0, 3]$$

Ortogonale og parallelle vektorer

Ortogonale og parallelle vektorer (107020)

Ortogonale og parallelle vektorer og oppsummering / video
http://ndla.no/nb/node/132679

Setningene om ortogonale og parallelle vektorer som vi har sett på tidligere, gjelder også når vektorene er plassert i et koordinatsystem.

Forutsatt at alle vektorene har lengde forskjellig fra null, gjelder

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t \cdot \vec{b} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Eksempel

Undersøk om $\vec{a} = [3, 4]$ og $\vec{b} = \left[6, 8\right]$ er parallelle.

Løsning

$$2 \cdot [3, 4] = [6, 8]$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ fordi } \vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$$

Eksempel

Undersøk om $\vec{a} = [3, 4]$ og $\vec{b} = \left[4, -3\right]$ er ortogonale.

Løsning

$$[3, 4] \cdot [4, -3] = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ fordi } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Tredimensjonale vektorkoordinater, definisjon og regneregler

Tredimensjonale vektorkoordinater, definisjon og regneregler (107038)

Tredimensjonale koordinatsystem / video
http://ndla.no/nb/node/132678

Alle vektorer kan skrives som en vektorsum av enhetsvektorer.

Dette gir grunnlag for innføring av **vektorkoordinater**.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[x, y, z\right] = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot$$

Addisjon av vektorer på koordinatform

$$[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$$

Subtraksjon av vektorer på koordinatform

$$[x_1, y_1, z_1] - [x_2, y_2, z_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$$

Multiplikasjon av vektor med tall

$$t \cdot [x, y, z] = [t \cdot x, t \cdot y, t \cdot z]$$

Vektorer mellom punkter

Gitt punktene $A(x_1, y_1, z_1)$ og $B(x_2, y_2, z_2)$.

Da er

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right]$$

Posisjonsvektoren

Vi ser spesielt at vektoren fra origo *O* (0,0,0) til et punkt *P* (x,y,z) er

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[x, y, z\right].$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ kalles for **posisjonsvektoren** til punktet *P*.

Legg merke til at punktet og posisjonsvektoren til punktet har «samme» koordinater, men med en viktig forskjell. Punktet har punktkoordinater, og vi bruker vanlige parenteser.

Vektoren har vektorkoordinater, og vi bruker hakeparenteser.

Skalarproduktet av vektorer gitt på koordinatform

[x1,y1,z1]·[x2,y2,z2]=x1·x2+y1·y2+z1·z2Eksempel

$$[2, 3, 4] \cdot [4, 5, 6] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 47$$

Lengden til en vektor gitt på koordinatform

Lengden til vektoren [x,y,z] er gitt ved

$$\left|\ [x,y,z]\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Eksempel

$$\left|\ [3,4,5]\right| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Vinkelen mellom vektorer gitt på koordinatform

Eksempel

Gitt vektorene

$$\vec{p} = [1,2,3] \text{ og } \vec{q} = [3,1,5]$$

La α være vinkelen mellom vektorene.

Definisjonen på skalarproduktet gir da

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \left|\ \vec{p}\right|\cdot\ \left|\vec{q}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\left[1,2,3\right]\cdot\left[3,1,5\right] = \left|\ [1,2,3]\right|\cdot\left|\ [3,1,5]\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{[1,2,3]\cdot[3,1,5]}{\left|\ [1,2,3]\right|\cdot\left|\ [3,1,5]\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 5}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+5^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}$$

$$\alpha = 25,4^\circ$$

Avstanden mellom punkter i rommet

Gitt punktene $A(x_1,y_1,z_1)$ og $B(x_2,y_2,z_2)$

Da er $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right]$

Avstanden, *d*, mellom *A* og *B* er

$$d = \left|\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Til slutt skal vi ta med de setningene vi bruker når vi skal avgjøre om to vektorer eller linjer står ortogonalt på hverandre, eller om de er parallelle. Vi forutsetter at alle vektorene har lengde forskjellig fra null.

Ortogonalitet og parallellitet

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t \cdot \vec{b} \qquad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

Farget lys på svart bakgrunn. Ortogonalitet og parallellitet?

Vektorprodukt

Vektorprodukt

Vektorprodukt (107052)

Vektorprodukt og høyrehåndsregel / video
http://ndla.no/nb/node/132685

Vi innfører nå en **ny operasjon på to vektorer i rommet** som vi kaller for **vektorproduktet**. Som symbol for operasjonen bruker vi et kryss, $\times$. Derfor kaller vi også vektorproduktet for **kryssproduktet**.

Vektorprodukt med determinant / video
http://ndla.no/nb/node/132688

Vektorproduktet er, på samme måte som skalarproduktet, en operasjon på to vektorer. Mens skalarproduktet av to vektorer gir et tall (en skalar), gir vektorproduktet en **ny vektor**. Den nye vektoren står vinkelrett på begge de opprinnelige vektorene, og lengden til den nye vektoren er lik produktet av lengdene til de opprinnelige vektorene multiplisert med sinus til vinkelen mellom dem.

Vektorprodukt med vxMaxima / video
http://ndla.no/nb/node/132690

Du skal senere i kapitlet se at ved å definere vektorproduktet på denne måten, får vi et effektivt redskap til å regne ut arealet til flatefigurer plassert i rommet og til å regne ut volumet til legemer i rommet.

Definisjon

La $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer. La $\vec{c}$ være vektorproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
Vi skriver

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

La vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være θ. Da er

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\theta$$

$\vec{c}$ står **vinkelrett** på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ danner et **høyrehåndssystem** (Se nedenfor).

Et høyrehåndssystem

Du lurer sikkert på hva vi mener med «et høyrehåndssystem». Du så ovenfor at $\vec{c}$ står **vinkelrett** på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Men hvordan vet vi at den peker «oppover» (se figuren ovenfor) og ikke «nedover»? For å avgjøre retningen til $\vec{c}$, kan vi bruke høyre hånd.

L a **pekefingeren** peke i samme retning som den første vektoren og **langfingeren** i samme retning som den andre. **Tommelen** peker da i samme retning som kryssproduktet.

Når du bruker **høyrehåndsregelen**, vil du se at h v i s $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, så vil $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$. «**Faktorenes orden**» er altså **ikke likegyldig** når vi arbeider med vektorprodukt.

Vektorproduktet på koordinatform

Vektorproduktet på koordinatform (107143)

Vektorprodukt på koordinatform / video
http://ndla.no/nb/node/132684

Gitt $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ og $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

Vi vil finne vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$

Her bruker vi først at

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

(Vi viser ikke denne setningen her.)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= [x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] \\
&= (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z) \times (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z) \\
&= x_1\vec{e}_x \times x_2\vec{e}_x + x_1\vec{e}_x \times y_2\vec{e}_y + x_1\vec{e}_x \times z_2\vec{e}_z \\
&\quad + y_1\vec{e}_y \times x_2\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y \times y_2\vec{e}_y + y_1\vec{e}_y \times z_2\vec{e}_z \\
&\quad + z_1\vec{e}_z \times x_2\vec{e}_x + z_1\vec{e}_z \times y_2\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z \times z_2\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Så bruker vi definisjonen av vektorproduktet og høyrehåndsregelen.

Forklar hvorfor vi da for eksempel får at

$$\left|\vec{e}_x \times \vec{e}_x\right| = 0$$

$$\left|\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right| = 1 \text{ og } \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
&= x_1x_2\left(\vec{e}_x \times \vec{e}_x\right) + x_1y_2\left(\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right) + x_1z_2\left(\vec{e}_x \times \vec{e}_z\right) \\
&\quad + y_1x_2\left(\vec{e}_y \times \vec{e}_x\right) + y_1y_2\left(\vec{e}_y \times \vec{e}_y\right) + y_1z_2\left(\vec{e}_y \times \vec{e}_z\right) \\
&\quad + z_1x_2\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_x\right) + z_1y_2\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_y\right) + z_1z_2\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_z\right) \\
&= \vec{0} + x_1y_2\vec{e}_z + x_1z_2\left(-\vec{e}_y\right) + y_1x_2\left(-\vec{e}_z\right) + \\
&\quad \vec{0} + y_1z_2\vec{e}_x + z_1x_2\vec{e}_y + z_1y_2\left(-\vec{e}_x\right) + \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1y_2\vec{e}_z + x_1z_2\left(-\vec{e}_y\right) + y_1x_2\left(-\vec{e}_z\right) + y_1z_2\vec{e}_x + z_1x_2\vec{e}_y + z_1y_2\left(-\vec{e}_x\right) \\
&= \left(y_1z_2 - z_1y_2\right)\vec{e}_x + \left(z_1x_2 - x_1z_2\right)\vec{e}_y + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\vec{e}_z \\
&= \left[y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2\right]
\end{aligned}$$

Til slutt trekker vi sammen og skriver vektoren på koordinatform.

Ikke noe problem å huske dette, eller … ?

Kanskje det er lettere å huske dersom vi bruker noe vi kaller **determinanter**?

Vi skriver

Ser du at dette er den samme vektoren som vi fant ovenfor?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \left(y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1\right) \cdot \vec{e}_x - \left(x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1\right) \cdot \vec{e}_y + \left(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1\right) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \left[y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1, -\left(x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1\right), x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1\right]$$

Ser du systemet?

Vi prøver med et eksempel.

Eksempel

$$\vec{a} = [2, 3, 4]$$
$$\vec{b} = [5, 6, 7]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

$$= (3 \cdot 7 - 6 \cdot 4) \cdot \vec{e}_x - (2 \cdot 7 - 5 \cdot 4) \cdot \vec{e}_y + (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) \cdot \vec{e}_z$$

$$= [-3, 6, -3]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Merk fortegn
$+\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z$

Det kan være lurt å gjøre det til en vane å bruke skalarprodukt til å kontrollere at den vektoren vi finn er vinkelrett på de to vektorene vi starta med. Dett er jo fort gjort og vil avsløre om en eventuelt har regnet feil.

$$(2, 3, 4) \cdot (-3, 6, -3) = -6 + 18 - 12 = 0$$
$$(6, 5, 7) \cdot (-3, 6, -3) = -15 + 36 - 21 = 0$$

Bruk metoden ovenfor og vis at

$$(1, 3, 5) \times (2, 4, 6) = (-2, 4, -2)$$

Vektorprodukt med digitalt verktøy

Vi kan finne vektorproduktet direkte ved hjelp av et digitalt verktøy.

Nedenfor ser du hvordan vi kan bruke wxMaxima for å finne vektorproduktet $(2, 3, 4) \times (5, 6, 7)$

```
express([2,3,4]~[5,6,7]);

[-3,6,-3]
```

Arealberegning

Arealberegning (107182)

Areal av trekanter / video
http://ndla.no/nb/node/132687

I 1T brukte vi arealsetningen til å regne ut arealet av en trekant når vi kjente to sider og vinkelen mellom sidene.

Arealsetningen

$$\text{Arealet} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin v$$

Eksempel

Regn ut arealet av $\mathbf{ABC}$ når $\mathbf{AB = 4,\ AC = 5}$ og $\angle A = 53,13^\circ$.

$$\text{Arealet} = \frac{1}{2}\text{AB} \cdot \text{AC} \cdot \sin\text{A}$$
$$= \frac{1}{2}4 \cdot 5 \cdot \sin 53,13^\circ \approx 8,0$$

Fra definisjonen av vektorproduktet har vi at hvis $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, så er $(\vec{c}) = (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \sin\theta$, hvor θ er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Sammenlikner vi dette uttrykket med arealsetningen, ser vi at arealet av trekanten blir halvparten av lengden til $\vec{c}$.

$$\text{Arealet} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a}) \cdot \left(\vec{b}\right) \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Ser vi på trekanten i eksempelet ovenfor, får vi da at

$$\text{Arealet} = \frac{1}{2} \cdot ((4,0,0) \times (3,4,0))$$

$$(4,0,0) \times (3,4,0) = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

$$= (0,0,16)$$

Forklar hvorfor $\vec{a}$ har koordinatene $[4, 0, 0]$, og $\vec{b}$ har koordinatene $[3, 4, 0]$.

Vi ser at vi får samme resultat som ovenfor.
Dette gjelder helt generelt for vektorer i rommet.

Areal av trekant

La $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i rommet. Arealet av trekanten **utspent** av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt ved

$$\text{Areal}_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Areal av parallellogram / video
http://ndla.no/nb/node/132691

På tilsvarende måte kan vi også finne arealet av parallellogrammer.

Areal av parallellogram

Arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt ved

$$\text{Areal}_{\text{parallellogram}} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Se på figuren til venstre og prøv å forklare hvorfor dette må bli riktig.

Et rektangel er et parallellogram. Du vet at vi kan regne ut arealet av et rektangel ved å multiplisere lengde og bredde. Hvordan samsvarer dette med resultatet ovenfor?

Volumberegning

Volumberegning (107192)

Volum av parallellepiped / video
http://ndla.no/nb/node/132707

Romfiguren utspent av vektorene $\vec{p}$, $\vec{q}$ og $\vec{r}$ kalles et **parallellepiped**. Sideflatene består av seks parvis kongruente parallellogrammer. Hvis vinklene mellom vektorene $\vec{p}$, $\vec{q}$ og $\vec{r}$ er rette, vil parallellogrammene være rektangler, og vi har da et **rettvinklet parallellepiped**. Hvis vektorene $\vec{p}$, $\vec{q}$ og $\vec{r}$ i tillegg er like lange, har vi en **terning**.

Volumet av parallellepipedet er grunnflaten multiplisert med høyden.

$$V = G \cdot h$$

Grunnflaten er her det parallellogrammet som er utspent av vektorene $\vec{p}$ og $\vec{q}$.
Vi har altså at

$$G = (\vec{p} \times \vec{q})$$

Vi ser av figuren at høyden er

$$h = (\vec{r}) \cdot \cos\alpha$$

Vi får at

$$V = G \cdot h$$
$$V = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r}) \cdot \cos\alpha$$

Dette uttrykket kjenner vi igjen som skalarproduktet av vektorene $\vec{p} \times \vec{q}$ og $\vec{r}$.
Vi får

$$V = G \cdot h$$
$$V = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r}) \cdot \cos\alpha$$
$$V = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$$

Volum av parallellepiped

Når et parallellepiped er utspendt av tre vektorer $\vec{p}$, $\vec{q}$ og $\vec{r}$, er volumet gitt ved

$$V = ((\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r})$$

Vi setter absoluttverditegn rundt skalarproduktet fordi vi kan få negativt skalarprodukt.
Husk at skalarproduktet er et tall.

Det er likegyldig hvilken rekkefølge vi har på vektorene $\vec{p}$, $\vec{q}$ og $\vec{r}$ fordi det er likegyldig hvilken side vi velger som grunnflate.

Pyramider

Pyramider (107244)

En pyramide utspent av tre vektorer kan ha en grunnflate som er trekantet eller firkantet.

Volum av pyramider / video
http://ndla.no/nb/node/132708

Volumet av en pyramide er gitt ved formelen

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Volum av en pyramide med firkantet grunnflate

$$V = \frac{1}{3}\left((\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}\right)$$

Volum av en pyramide med trekantet grunnflate (tetraeder)

$$V = \frac{1}{6}\left((\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}\right)$$

Regneregler for vektorprodukt

Regneregler for vektorprodukt (107255)

Regneregler for vektorproduktet / video
http://ndla.no/nb/node/132709

Når vi multipliserer tall, og når vi regner ut skalarproduktet av vektorer, er «**faktorenes orden likegyldig**». For eksempel er
$\mathbf{2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6}$.

I begynnelsen av dette avsnittet så vi at dette **ikke** gjelder for vektorproduktet.

Hvis du bruker **høyrehåndsregelen**, vil du se at hvis $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, så vil $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$.
«**Faktorenes orden**» er altså **ikke likegyldig** når vi arbeider med vektorprodukt.

Vi ser også dette tydelig dersom vi bruker et digitalt verktøy.

```
express([2,3,4]~[5,6,7]);
```

```
[-3,6,-3]
```

```
express([5,6,7]~[2,3,4]);
```

```
[3,-6,3]
```

Regneregler for vektorprodukt

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Vektorproduktet oppfyller ikke den kommutative lov.

Husk figuren ovenfor. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, mens $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$.

$(k \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k \cdot \vec{v}) = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

Multiplikasjon med en skalar (et tall).

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Vektorproduktet oppfyller den distributive lov med hensyn på vektoraddisjon.

$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$

Vi kan fort se at denne vektoren har lengde lik null:

$(\vec{v} \times \vec{v}) = (\vec{v}) \cdot (\vec{v}) \cdot \sin(0) = (\vec{v}) \cdot (\vec{v}) \cdot 0 = 0$

Vektoren har da heller ingen retning.

Parallelle vektorer

Parallelle vektorer (107264)

Ortogonale og parallelle vektorer og oppsummering / video
http://ndla.no/nb/node/132679

Parallelle vektorer

Følgende setning følger av definisjonen når $\vec{u} \neq \vec{0}$ og $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

Vektorproduktet i fysikken

Vektorproduktet i fysikken (107277)

Vi nevner til slutt at dere som studerer **fysikk**, vil møte igjen vektorproduktet. For eksempel er den kraften $\vec{F}$ som virker på en partikkel med ladning *q*, og som beveger seg med farten $\vec{v}$ i et magnetfelt $\vec{B}$, gitt ved

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Her vil vektorene være gitt som piler og ikke på koordinatform. Da må du lære deg «høyrehåndsregelen» for å finne retningen til kraftvektoren.

Figuren er for *positiv* ladning *q*. Dersom *q* var *negativ*, ville $\vec{F}$ få stikk motsett retning! (Dette er på grunn av faktoren *q* i formelen.)

LInjer i rommet

Linjer i planet

Linjer i planet (107287)

Linjer i planet / video
http://ndla.no/nb/node/132716

Før vi tar for oss linjer i rommet, skal vi repetere litt av det vi lærte om linjer i planet i R1.

Likningen $y = 2x - 4$ beskriver en rett linje i planet.

I R1-kurset så vi at vi kan bruke **parameterframstilling** i stedet for **likningsfremstilling** når vi skal framstille en kurve i planet. *x*- og *y*-koordinatene er da funksjoner av en tredje størrelse som vi kaller en **parameter**.

Eksempel

En rett linje er gitt ved parameterframstillingen

$$x = t + 1 \quad \wedge \quad y = 2t - 2$$

Vi lager en tabell som viser *x*- og *y*- koordinatene for utvalgte verdier av *t*.

Vi kan så plotte punktene, *x*- og *y*- koordinatene, i et koordinatsystem, og trekke en rett linje gjennom dem.

	A	B	C
1	t - verdi	x - verdi	y - verdi
2	0	1	-2
3	1	2	0
4	2	3	2
5	3	4	4
6	4	5	6
7	5	6	8

Parameterframstillingen $x = t + 1 \ \wedge \ y = 2t - 2$ kan vi også skrive på vektorform som $(x, y) = (t + 1, 2t - 2)$.

Når *t* varierer, får vi en samling av vektorer. Vi tenker oss vektorene plassert i koordinatsystemet med start i origo. Vi kaller disse vektorene **posisjonsvektorer**.

Endepunktene til vektorene vil for hver *t*-verdi angi et punkt på linjen.
For eksempel vil posisjonsvektoren når $t = 5$, være vektoren $(6, 8)$. Endepunktet til vektoren vil være punktet $(6, 8)$. Vektorkoordinatene og punktkoordinatene har samme tallverdier for samme *t*-verdi.

Endepunktene til posisjonsvektorene vil altså beskrive den rette linjen.

Vi sier at $(x, y) = (t + 1, 2t - 2)$ er en **vektorfunksjon** med parameteren *t*. Til hver verdi for *t* svarer en bestemt vektor (x, y).

Siden (x, y) er en posisjonsvektor til punktet (x, y), bruker vi ofte betegnelsen $\vec{r}$ eller $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ om (x, y). Siden $\vec{r}$ er en funksjon av *t*, skriver vi ofte $\vec{r}\,(t) = (x\,(t), y\,(t))$ eller $\vec{r} = (x, y)$.

Vektorfunksjoner og parameterframstilling for kurver i rommet

Vektorfunksjoner og parameterframstilling for kurver i rommet (107316)

Vi ser på vektoren $(4-2t, 1+t, -2+3t)$.

Når *t* varierer, får vi en samling av vektorer. Vi tenker oss at vi plasserer disse vektorene i et koordinatsystem og lar alle vektorene starte i origo. Endepunktene til vektorene vil for hver *t*-verdi angi et punkt. Vi kaller derfor disse vektorene for **posisjonsvektorer**.

Hvis vi plotter samlingen av alle **endepunktene til posisjonsvektorene**, får vi **en kurve i rommet**. I vårt eksempel får vi en rett linje, *l*.
Se figur.

På bildet nedenfor har vi plottet posisjonsvektoren når $t = 0$.

Vi kan skrive koordinatene til vektoren $(4-2t, 1+t, -2+3t)$ hver for seg.

Vi sier at vi har **en parameterfremstilling** for linjen

$$x = 4-2t \;\wedge\; y = 1+t \;\wedge\; z = -2+3t$$

Når parameteren *t* bare opptrer i første grad, får vi rette linjer. Vi kan få andre romkurver hvis *t* opptrer i andre grad. Dette ligger utenfor dette kurset.

En parameterfremstilling for en rett linje

En parameterframstilling for en rett linje (107414)

Parameterfremstilling for en rett linje 1 / video
http://ndla.no/nb/node/132711

Gitt to punkter *A* og *B*. La *P* være et vilkårlig punkt på linjen gjennom*A* og *B*. Da vil det alltid finnes en *t* slik at

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Vi har at

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Når *t* gjennomløper alle verdier, vil *P* gjennomløpe hele linjen. **Vektorfunksjonen** $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ beskriver derfor linjen gjennom *A* og *B*.

Parameterfremstilling for en rett linje 2 / video
http://ndla.no/nb/node/132712

Eksempel

En linje går gjennom punktene *A* (3,4,2) og *B* (5,8,10).

En vektorfunksjon for linjen er

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3,4,2) + t\,(5-3, 8-4, 10-2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3,4,2) + t\,(2,4,8)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3+2t, 4+4t, 2+8t)$$

En parameterfremstilling for linjen er

$$x = 3 + 2t \;\wedge\; y = 4 + 4t \;\wedge\; z = 2 + 8t$$

I stedet for å kjenne **to punkter** på linjen er det nok å kjenne **ett punkt** $A(x_0, y_0, z_0)$ på linjen og en tilfeldig vektor (a, b, c) som er parallell med linjen. Vi kaller en slik vektor for en **retningsvektor** for linjen.

En vektorfunksjon for linjen blir

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a, b, c)\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (x_0 + \mathrm{at}, y_0 + \mathrm{bt}, z_0 + \mathrm{ct})\end{aligned}$$

En parameterfremstilling for linjen blir

$$x = x_0 + \mathrm{at} \quad \wedge \quad y = y_0 + \mathrm{bt} \quad \wedge \quad z = z_0 + \mathrm{ct}$$

Retningsvektor og punkt på linje

Når en linje er gitt på parameterform, ønsker vi ofte å **finne et punkt på linjen og en retningsvektor for linjen**.

I eksempelet ovenfor ser du at vi enkelt kan finne et punkt på linjen ved å sette $t = 0$. Vi får da punktet $(3, 4, 2)$. Tallene som står «sammen med *t*», danner en retningsvektor for linjen, nemlig vektoren $(2, 4, 8)$.

Fra R1 husker du at fartsvektoren var den deriverte til posisjonsvektoren. $\vec{v} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)'$.

Vi får at

$$\vec{v} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)' = (x_0 + \mathrm{at}, y_0 + \mathrm{bt}, z_0 + \mathrm{ct})' = (a, b, c)$$

Generelt er $\vec{v} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)' = (x_0 + \mathrm{at}, y_0 + \mathrm{bt}, z_0 + \mathrm{ct})' = (a, b, c)$ en retningsvektor for linjen.

Et punkt på linjen kan vi, som nevnt ovenfor, finne ved å sette parameteren lik null. Vi får da punktet (x_0, y_0, z_0).

Likningsfremstilling til en linje gitt på parameterform

Eksempel

Gitt en linje *m* på parameterform

$$m: \begin{pmatrix} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 2 + 8t \end{pmatrix}$$

Vi kan regne slik

$$x = 3 + 2t \Rightarrow t = \frac{x-3}{2}$$

$$y = 4 + 4t \Rightarrow t = \frac{y-4}{4}$$

$$z = 2 + 8t \Rightarrow \frac{z-2}{8}$$

Som gir

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-2}{8}$$

Vi får ikke en likningsfremstilling bestående av en likning. Vi får i stedet to(tre) likninger som til sammen kan betraktes som en likningsfremstilling for linjen. Det er derfor oftest hensiktsmessig å beskrive linjer i rommet på parameterform.

En likning i rommet som inneholder x, y og z, vil gi et plan i rommet. Vi skal se på dette senere.

Avstanden fra et punkt til en rett linje

Avstanden fra et punkt til en rett linje (107449)

Avstanden fra et punkt til en rett linje / video
http://ndla.no/nb/node/132713

Med avstanden fra et punkt *A* til en rett linje *l* mener vi den korteste avstanden vi kan få fra *A* til et punkt på *l*. Denne avstanden måler vi langs normalen fra *A* ned på linja.

Vi skal her vise to metoder for å finne denne avstanden. Det er viktig at du lærer deg begge metodene fordi dette er generelle metoder som kan brukes på andre problemstillinger.

Avstand fra punkt til linje 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133045

Metode 1

I forrige avsnitt, i oppgave 1.4.11, så vi hvordan vi kunne finne denne avstanden ved å bruke vektorproduktet. Idéen var å sette opp **to ulike måter for å finne arealet av en trekant**.

Eksempel (Oppgave 1.4.11)

Gitt punktene *A* (4,0,2), *B* (3,5,1) og *C* (0,7,2) i et koordinatsystem. Finn avstanden fra *C* til linjen gjennom *A* og *B*.

Avstanden fra *C* til linjen gjennom *A* og *B* er høyden i trekanten utspent av $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ og $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.
For å bestemme høyden finner vi først arealet av trekanten ved å bruke vektorproduktet, $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}}$. Så finner vi lengden av grunnlinjen $\mathbf{AB}$, $\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right)$.

Når vi har funnet areal og grunnlinje, kan vi «snu på», og sette inn i, formelen $A = \frac{g \cdot h}{2}$ for å finne høyden.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (3-4, 5-0, 1-2) = (-1, 5, -1)$$
$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = (0-4, 7-0, 2-2) = (-4, 7, 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,5,-1) \times (-4,7,0)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

$$= (5 \cdot 0 - 7 \cdot (-1)) \cdot \vec{e}_x - ((-1) \cdot 0 - (-4) \cdot (-1)) \cdot \vec{e}_y + ((-1) \cdot 7 - (-4) \cdot 5)\vec{e}_z$$

$$= (7,4,13)$$

Arealet av ABC

$$\tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot ((7,4,13)) = \tfrac{1}{2}\sqrt{7^2+4^2+13^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{234}$$

Lengden av grunnlinjen *AB*

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \sqrt{(-1)^2+5^2+(-1)^2} = \sqrt{27}$$

Arealet av en trekant er gitt ved

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Da er

$$\frac{g \cdot h}{2} = A$$

$$h = \frac{2 \cdot A}{g}$$

S i d e n $A = \frac{1}{2}\sqrt{234}$ og $g = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \sqrt{27}$, får vi

$$h = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{234}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{234}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 26}}{\sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{3\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{26}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{78}}{3}$$

Metode 2

I den andre metoden bruker vi følgende fremgangsmåte:

- Vi finner et uttrykk for vektoren fra punktet *A* til et vilkårlig punkt *P* (*x*,*y*,*z*) på linja *l*.
- Vi finner deretter den verdien av parameteren som gjør at denne vektoren står vinkelrett på *l*. Vi bruker da at skalarproduktet $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{v}_l = 0$, der $\vec{v}_l$ er en retningsvektor for linja *l*.
- Lengden av den vektoren vi da får, er avstanden fra *A* til *l*.

Eksempel

Gitt en linje på parameterform

$$x = 4 - t \;\wedge\; y = 0 + 5t \;\wedge\; z = 2 - t$$

Finn avstanden fra punktet *A* (0,7,2) til et punkt *P* på linja.

Vi finner først $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = ((4-t)-0, (0+5t)-7, (2-t)-2) = (4-t, 5t-7, -t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ skal stå vinkelrett på retningsvektoren til linja, som er $\vec{v} = (-1, 5, -1)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(4-t, 5t-7, -t) \cdot (-1, 5, -1) = 0$$

$$(4-t) \cdot (-1) + (5t-7) \cdot 5 + (-t) \cdot (-1) = 0$$

$$-4 + t + 25t - 35 + t = 0$$

$$27t = 39$$

$$t = \tfrac{13}{9}$$

$t = \frac{13}{9}$ gir $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(4 - \frac{13}{9}, 5 \cdot \frac{13}{9} - 7, -\frac{13}{9}\right) = \left(\frac{23}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{13}{9}\right)$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \sqrt{\left(\tfrac{23}{9}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{9}\right)^2 + \left(-\tfrac{13}{9}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{702}{9^2}} = \sqrt{\tfrac{78 \cdot 9}{9^2}} = \tfrac{\sqrt{78}}{3}$$

Avstanden fra punktet A til linjen l er $\frac{\sqrt{78}}{3}$.

Vinkelen mellom to linjer

Vinkelen mellom to linjer (107477)

Vinkelen mellom to linjer / video
http://ndla.no/nb/node/132714

Hvis to linjer i et plan ikke er parallelle, vil de ha et skjæringspunkt. Merk at slik er det ikke i rommet. To linjer i rommet trenger ikke å skjære hverandre, selv om de ikke er parallelle. Det er «god plass» i rommet! (Slike linjer i rommet som ikke er parallelle og heller ikke har et skjæringspunkt, kaller vi «vindskjeve».)

La *u* være vinkelen mellom to retningsvektorer til to linjer, *m* og *n*.

Vi definerer vinkelen *w* mellom linjene *m* og *n* slik at
$w = u$ hvis $u \leq 90^\circ$
og

$w = 180^\circ - u$ hvis $u > 90^\circ$

Grunnen til denne definisjonen er at hvis $\vec{v}$ er en retningsvektor for en linje, så er $-\vec{v}$ en like god retningsvektor for linjen. Det betyr at det alltid finnes retningsvektorer til to linjer som danner en vinkel som ikke er større enn 90°. Definisjonen sørger for at vi alltid får den vinkelen som er lik eller mindre enn 90 grader.

Eksempel

Gitt to linjer i rommet

$$m: \begin{pmatrix} x = 1 + 1t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 - 3t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad n: \begin{pmatrix} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 2 + 8t \end{pmatrix}$$

Linjen *m* har retningsvektoren $\vec{v}_m = (1, 2, -3)$, og linjen *n* har retningsvektoren $\vec{v}_n = (2, 4, 8)$.

Vinkelen mellom retningsvektorene finner vi ved å bruke skalarproduktet.

$$\vec{v}_m \cdot \vec{v}_n = (\vec{v}_m) \cdot (\vec{v}_n) \cdot \cos u$$

$$\cos u = \frac{\vec{v}_m \cdot \vec{v}_n}{(\vec{v}_m) \cdot (\vec{v}_n)}$$

$$u = \cos^{-1}\left(\frac{(1,2,-3)\cdot(2,4,8)}{((1,2,-3))\cdot((2,4,8))}\right) = 114,1^\circ$$

Vinkelen *u* er større enn 90°. Det betyr at vinkelen mellom linjene *m* og *n* er lik $180^\circ - 114,1^\circ = 65,9^\circ$.

Skjæring med koordinatplanene

Skjæring med koordinatplanene (107483)

En linje er gitt ved parameterframstillingen

$$x = x_0 + \mathrm{at} \quad \wedge \quad y = y_0 + \mathrm{bt} \quad \wedge \quad z = z_0 + \mathrm{ct}$$

For å finne hvor en linje skjærer *xy*-planet, setter vi *z*-koordinaten lik null og finner verdien til *t*. Vi setter denne verdien for *t* inn i uttrykket for *x*- og *y*-koordinatene, og vi har skjæringspunktet med *xy*-planet.

Avstand mellom to linjer

Avstand mellom to linjer (107485)

Avstand mellom to linjer i rommet / video
http://ndla.no/nb/node/132722

Vi måler avstanden mellom to linjer *m* og *n* langs en linje som står vinkelrett på både *m* og *n*.

Framgangsmåten er slik:

- Vi lar *P* være et punkt på *m*, og *Q* et punkt på *n*.
- Vi setter opp et uttrykk for $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$.
- Vi bruker $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ at står vinkelrett på retningsvektorene for både *m* og *n*.
- Vi finner $\left(\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\right)$.

Eksempel

Vi skal finne avstanden mellom to linjer i rommet gitt ved

$$m: \begin{pmatrix} x = t \\ y = 1 + t \\ x = 2 + 2t \end{pmatrix} \qquad n: \begin{pmatrix} x = 3 + s \\ y = s \\ z = -2s \end{pmatrix}$$

Linjen *m* har retningsvektor $\vec{v}_m = (1, 1, 2)$, og linjen *n* har retningsvektoren $\vec{v}_n = (1, 1, -2)$.

$P\,(t, 1 + t, 2 + 2t)$ er et vilkårlig punkt på *m*, og $Q\,(3 + s, s, -2s)$ er et vilkårlig punkt på *n*.

Vi finner først $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= ((3 + s) - t, s - (1 + t), -2s - (2 + 2t)) \\ &= (s - t + 3, s - t - 1, -2s - 2t - 2) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{v}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \cdot \vec{v}_m = 0$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \cdot \vec{v}_m &= 0 \\ (s - t + 3, s - t - 1, -2s - 2t - 2) \cdot (1, 1, 2) &= 0 \\ s - t + 3 + s - t - 1 - 4s - 4t - 4 &= 0 \\ -2s - 6t - 2 &= 0 \\ -s - 3t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{v}_n \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \cdot \vec{v}_n = 0$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \cdot \vec{v}_n &= 0 \\ (s - t + 3, s - t - 1, -2s - 2t - 2) \cdot (1, 1, -2) &= 0 \\ s - t + 3 + s - t - 1 + 4s + 4t + 4 &= 0 \\ 6s + 2t + 6 &= 0 \\ 3s + t + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss altså to likninger med to ukjente.

Vi løser likningssettet og finner de verdiene for s og t som er slik at $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{v}_m$ og $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} \perp \vec{v}_n$.

$$-s - 3t - 1 = 0 \qquad \wedge \qquad 3s + t + 3 = 0$$

$$s = -3t - 1$$

$$\begin{aligned} 3(-3t - 1) + t + 3 &= 0 \\ -9t - 3 + t + 3 &= 0 \\ -8t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= -3t - 1 \\ s &= -3 \cdot 0 - 1 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Vi får at $t = 0 \quad \wedge \quad s = -1.$

Vi setter disse verdiene inn i utrykket for $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ for å finne koordinatene til den vektoren som står normalt på retningsvektorene til de to linjene.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{PQ}} &= (s - t + 3, s - t - 1, -2s - 2t - 2) \\ &= (-1 - 0 + 3, -1 - 0 - 1, -2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 - 2) \\ &= (2, -2, 0) \end{aligned}$$

Til slutt finner vi lengden av $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\right) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Avstanden mellom de to linjene er $2\sqrt{2}$.

Plan i rommet

Plan gitt ved normalvektor og punkt i planet

Plan gitt ved normalvektor og punkt i planet (107497)

Plan gitt ved punkt og normalvektor - Eksempel / video
http://ndla.no/nb/node/132725

La α være et plan i rommet. La videre $Q\left(x_0, y_0, z_0\right)$ være et fast punkt i planet og $\vec{n}=(a, b, c)$ en normalvektor til planet, det vil si en vektor som står normalt på planet.

For et tilfeldig punkt, $P(x, y, z)$ som ligger i planet, gjelder

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \cdot \vec{n}=0$$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot(a, b, c)=0$$

$$a \cdot(x-x_0)+b \cdot(y-y_0)+c \cdot(z-z_0)=0$$

Vi har fått en likning som beskriver planet α. Alle punkter (x, y, z) som tilfredsstiller likningen, ligger i planet.

Vi kan erstatte de konstante leddene i likningen med en konstant, og vi får likningen for planet gitt på den mest vanlige formen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

$$\mathrm{ax} - \mathrm{ax}_0 + \mathrm{by} - \mathrm{by}_0 + \mathrm{cz} - \mathrm{cz}_0 = 0$$

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} - (\mathrm{ax}_0 + \mathrm{by}_0 + \mathrm{cz}_0) = 0$$

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + d = 0$$

Likningen for et plan

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

er likningen for et plan som går gjennom punktet $Q\,(x_0, y_0, z_0)$

og har normalvektor $\vec{n} = (a, b, c)$.

Når vi multipliserer ut parentesene, får vi en likning gitt på formen

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + d = 0$$

der $d = -\,(\mathrm{ax}_0 + \mathrm{by}_0 + \mathrm{cz}_0)$

Eksempel

L a $\vec{n}\,(2, 3, 4)$ være en normalvektor til planet β. Punktet $Q\,(1, 2, 3)$ ligger i planet. La $P\,(x, y, z)$ være et vilkårlig punkt i planet.

Vi har da

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (2, 3, 4) = 0$$

$$2\,(x - 1) + 3\,(y - 2) + 4\,(z - 3) = 0$$

$$2x - 2 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$$

$$2x + 3y + 4z - 20 = 0$$

som er likningen for planet.

Dette kunne vi også funnet ved å sette direkte inn i likningen for et plan

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

$$2\,(x - 1) + 3\,(y - 2) + 4\,(z - 3) = 0$$

$$2x - 2 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$$

$$2x + 3y + 4z - 20 = 0$$

Legg merke til at tallene foran x, y, z er koordinatene til normalvektoren!

Hvordan vil du gå fram for å finne ut, ved regning, om to plan er parallelle?

Plan gitt ved tre punkter

Plan gitt ved tre punkter (107508)

Plan gitt ved tre punkter / video
http://ndla.no/nb/node/132723

Noen ganger har vi bare oppgitt tre punkter i planet.

Vi skal finne likningen for et plan α som går gjennom punktene

A(4,0,0), *B*(2,3,0) og *C*(0,0,2).

Vi må da først finne en normalvektor for planet.

Siden $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ og $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ er parallelle med planet, vil $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ være en normalvektor for planet.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (2-4, 3-0, 0-0) = (-2, 3, 0)$$
$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = (0-4, 0-0, 2-0) = \left[-4, 0, 2\right]$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \left[-2, 3, 0\right] \times \left[-4, 0, 2\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_x - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_y + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z$$

$$= (3 \cdot 2 - 0 \cdot 0) \cdot \vec{e}_x - ((-2) \cdot 2 - (-4) \cdot (0)) \cdot \vec{e}_y + ((-2) \cdot 0 - (-4) \cdot 3) \cdot \vec{e}_z$$

$$= [6, 4, 12] = 2[3, 2, 6]$$

[6,4,12] og [3,2,6] er begge normalvektorer for planet α.

Vi bruker så at likningen for et plan kan skrives som

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

Som punktet (x_0, y_0, z_0) kan vi bruke et av de tre punktene *A*, *B* eller *C*. Vi velger her å bruke punktet *A*(4,0,0) og får

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$
$$3\,(x - 4) + 2\,(y - 0) + 6\,(z - 0) = 0$$
$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

Her er det bra å ha for vane å kontrollere at alle de tre punktene passer i planlikninga. Det er ikke mye arbeid og vil avsløre om noe er blitt feil.

For eksempel ser vi at $A(4,0,0)$ passer i planlikninga fordi $\mathbf{3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12 = 12 - 12 = 0}$.

Skjæring mellom linje og plan

Skjæring mellom linje og plan (107510)

Vi skal finne skjæringspunktet mellom linja l og planet β gitt ved

$$I: \begin{pmatrix} x = 5 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 1 - 5t \end{pmatrix}$$

$$\beta: \quad 2x + 3y - z - 1 = 0$$

Vi finner den verdien for t som gjør at koordinatene til l passer i likningen for β

$$2(5 + t) + 3(6 + 2t) - (1 - 5t) - 1 = 0$$

$$10 + 2t + 18 + 6t - 1 + 5t - 1 = 0$$

$$13t = -26$$

$$t = -2$$

Dette gir

$$x = 5 + (-2) = 3$$

$$y = 6 + 2 \cdot (-2) = 2$$

$$z = 1 - 5 \cdot (-2) = 11$$

Skjæringspunktet er altså (3, 2, 11).

Skjæring mellom plan og koordinatakse

Skjæring mellom plan og koordinatakse (107524)

Skjæring mellom plan og koordinatakse / video
http://ndla.no/nb/node/132724

Figuren nedenfor viser et utsnitt av planet i eksemplet på forrige side i menyen. På figuren har vi merket av skjæringspunktene mellom planet og hver av de tre koordinataksene.

Når planet skjærer *z*-aksen, er *x*- og *y*-koordinatene lik null.

Likningen for planet er

$$2x + 3y - z - 1 = 0$$

Når $x = 0$ og $y = 0$, får vi

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - z - 1 = 0$$
$$z = -1$$

Skjæringspunktet blir (0,0,-1).

Vinkelen mellom plan

Vinkelen mellom plan (107530)

Vinkelen mellom to plan i rommet / video
http://ndla.no/nb/node/132741

La *u* være vinkelen mellom to normalvektorer til to plan, α og β.

Vi definerer vinkelen *v* mellom α og β slik at
$v = u$ her $u \leq 90^\circ$
og

$v = 180^\circ - u$ hvis $u > 90^\circ$

Figuren til høyre viser to plan, α og β.

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad x + y + z - 4 = 0 \\ \beta: &\quad 2x + 3y + 4z - 20 = 0 \end{aligned}$$

$\vec{n}_\alpha = [1, 1, 1]$ er normalvektor til α
og

$\vec{n}_\beta = [2, 3, 4]$ er normalvektor til β.

Vi regner ut

skalarproduktet og finner vinkelen *u* mellom normalvektorene.

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = \left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right| \cdot \cos u$$

$$\cos u = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|} = \frac{[1,1,1] \cdot [2,3,4]}{\left|(1,1,1)\right| \cdot \left|(2,3,4)\right|}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{87}}$$

$$u = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{87}}\right) \approx 15,2^\circ$$

Vinkelen *u* er mindre enn 90°. Det betyr at vinkelen mellom planene α og β er lik $15{,}2^o$.

Vinkelen mellom linje og plan

Vinkelen mellom linje og plan (107542)

Vinkel mellom plan og linje / video
http://ndla.no/nb/node/132742

Vinkelen mellom en linje i rommet, *l*, og en linje, *n*, i et plan er avhengig av hvilken linje i planet du velger.

Tegn figuren til høyre i GeoGebra. Du kan flytte på punktet *F* i planet og se at vinkelen mellom linjene *m* og *n* endrer verdi.

Den linjen i planet som danner den minste vinkelen med *l*, er den linjen som sammen med *l* danner et normalplan til planet α.

Vi definerer vinkelen μ, mellom en linje *l* og et plan α, som vinkelen mellom linjen *l* og den linjen i planet som sammen med *l* danner et normalplan til planet α.

La *m* være den linjen i planet som danner den minste vinkelen med linjen *l*.

La $\vec{n}$ være en normalvektor til α og $\vec{v}$ en retningsvektor til *l*.

$\vec{n}$ er også normalvektor til *m*, og linjene *l* og *m*, sammen med normalvektoren $\vec{n}$, vil **danne et plan** som figuren viser.

Kan du forklare hvorfor dette er riktig?

Vi kan regne ut vinkelen φ(gresk «phi») mellom $\vec{n}$ og $\vec{v}$ ved å bruke skalarproduktet.

Vi må skille mellom to retninger på normalvektoren som figurene viser.

Vi regner ut vinkelen φ(gresk «phi») mellom $\vec{n}$ og $\vec{v}$, og kan så finne μ ut fra figurene.
Vi ser at

$$\varphi \leq 90^\circ \Rightarrow \mu = 90^\circ - \varphi \qquad \varphi > 90^\circ \Rightarrow \mu = \varphi - 90^\circ$$

Avstanden fra et punkt til et plan

Avstanden fra et punkt til et plan (107556)

Hva kom dere fram til?

Avstand mellom punkt og plan / video
http://ndla.no/nb/node/132743

Vi har tidligere lært at en avstand mellom to objekter i matematikken alltid er den korteste avstanden mellom objektene. Den korteste avstanden fra et punkt til et plan måler vi langs normalen fra punktet til planet.

Kan vi finne et uttrykk for en linje n som går gjennom A og står normalt på planet β?
En linje i rommet uttrykker vi enklest ved hjelp av en parameterframstilling. Hvilke opplysninger trenger vi for å sette opp en parameterframstilling for linja n?
Hvis vi nå har en parameterframstilling for linja n, hva trenger vi i tillegg for å finne avstanden fra punktet A til planet β?

Hvis du står fast, kan du kanskje få noen tips ved å se på figuren nedenfor.

(I eksemplet nedenfor kan du se hele utregningen.)

Eksempel

Vi skal regne ut avstanden fra punktet *A*(2,-8,7) til planet β gitt ved
$2x+3y-z-1=0$

Vektoren [2,3,-1] er en normalvektor til β. Da er den også en retningsvektor for en normal *n* som går gjennom *A* og står vinkelrett på β.

Vi setter opp en parameterframstilling for normalen *n*.

$$x=2+2t \ \wedge \ y=-8+3t \ \wedge \ z=7-t$$

For å finne skjæringspunktet *S* mellom *n* og β setter vi parameteruttrykket for *n* inn i likningen for β.

$$2x+3y-z-1=0$$

$$2(2+2t)+3(-8+3t)-(7-t)-1=0$$

$$4+4t-24+9t-7+t-1=0$$

$$t=\frac{28}{14}=2$$

Vi setter $t=2$ i parameterframstillingen og får

$$x=2+2\cdot 2=6 \quad \wedge \quad y=-8+3\cdot 2=-2 \quad \wedge \quad z=7-2=5$$

Skjæringspunktet *S* har koordinatene $(6,-2,5)$.

$$\overrightarrow{SA}=(2-6,(-8)-(-2),7-5)=(-4,-6,2)$$

Avstanden fra *A* til planet er

$$\left|\overrightarrow{SA}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

Formel for avstand fra punkt til plan

Formel for avstand fra punkt til plan (107559)

Formel for avstand mellom punkt og plan i rommet / video
http://ndla.no/nb/node/132744

Vi har også en formel for avstanden fra et punkt til et plan.
La $P(x_1, y_1, z_1)$ være et punkt i rommet.
La α være et plan i rommet gitt ved$\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz} + d = 0$.

Da er avstanden fra *P* til α gitt ved

$$q = \left| \frac{\mathbf{ax}_1 + \mathbf{by}_1 + \mathbf{cz}_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Bevis

La *S*(*x*,*y*,*z*) være det punktet i planet som er slik at $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ står normalt på planet. Da er avstanden fra punktet til planet $q = \left| \overrightarrow{\mathrm{SP}} \right|$.

Siden *S*(*x*,*y*,*z*) ligger i planet, har vi at

$$\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz} + d = 0$$
$$d = -(\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz})$$

Vi har også at $\vec{n} = [a, b, c]$ er normalvektor til planet.

Vi kan finne skalarproduktet av $\vec{n}$ og $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ på to måter. Vi kan bruke definisjonen på skalarproduktet, eller vi kan regne med vektorkoordinater.

Hvis vi bruker definisjonen på skalarprodukt, får vi

$$\overrightarrow{\mathrm{SP}} \cdot \vec{n} = \left| \overrightarrow{\mathrm{SP}} \right| \cdot \left| \vec{n} \right| \cdot \cos(0^\circ \text{ eller } 180^\circ)$$

Hvis vi regner med vektorkoordinater, får vi

$$\overrightarrow{\mathrm{SP}} \cdot \vec{n} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \cdot (a, b, c)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{SP}}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(0^\circ \text{ eller } 180^\circ\right) = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \cdot (a, b, c)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{SP}}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot (1 \text{ eller } -1) = a \cdot (x_1 - x) + b \cdot (y_1 - y) + z \cdot (z_1 - z)$$

$$q \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (1 \text{ eller } -1) = \mathrm{ax}_1 + \mathrm{by}_1 + \mathrm{cz}_1 - (\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz})$$

$$q = \left| \frac{\mathrm{ax}_1 + \mathrm{by}_1 + \mathrm{cz}_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Eksempel

Eksempel - Formel for avstand mellom punkt og plan / video
http://ndla.no/nb/node/132745

Vi kan også regne ut avstanden fra punktet $A\,(2, -8, 7)$ til planet β gitt ved $2x + 3y - z - 1 = 0$ ved å bruke formelen ovenfor

$$q = \left| \frac{\mathrm{ax}_1 + \mathrm{by}_1 + \mathrm{cz}_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$q = \left| \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot (-8) + (-1) \cdot 7 + (-1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} \right|$$

$$q = \left| \frac{4 - 24 - 7 - 1}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \right|$$

$$q = \left| \frac{-28}{\sqrt{14}} \right|$$

$$q = \left| \frac{-28 \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \right|$$

$$q = \left| \frac{-28 \cdot \sqrt{14}}{14} \right| = 2\sqrt{14}$$

Parameterfremstilling for plan

Parameterfremstilling for plan (107568)

Parameterfremstilling for et plan / video
http://ndla.no/nb/node/132747

Det er mest vanlig å beskrive et plan med en likningsfremstilling, men vi kan også bruke parameterfremstilling for plan.

Vi trenger da to vektorer som ikke er parallelle og som ligger i planet.

Dette kan være to oppgitte vektorer, eller to vektorer vi kan lage ut fra tre oppgitte punkter i planet.

La A, B og C være tre punkter i et plan β. La p være et vilkårlig punkt i planet.

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AP}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

Når parameterne t og s gjennomløper alle verdier, vil P gjennomløpe hele planet. Vektorfunksjonen $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ beskriver derfor planet β.

Eksempel

Eksempel - Parameterfremstilling for plan i rommet / video
http://ndla.no/nb/node/132748

La $A(3,4,2)$, $B(5,8,10)$ og $C(4,5,6)$ være tre punkter i et plan.

Se figuren til høyre.

Vektorfunksjonen for planet blir

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (3,4,2) + t\,(5-3, 8-4, 10-2) \\ &\quad + s\,(4-3, 5-4, 6-2)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3,4,2) + t\,(2,4,8) + s\,(1,1,4)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3+2t+s, 4+4t+s, 2+8t+4s)$$

Parameterfremstillingen for planet blir

$$x = 3+2t+s \quad \wedge \quad y = 4+4t+s \quad \wedge \quad z = 2+8t+4s$$

Legg merke til at når du kjenner parameterfremstillingen for et plan, kjenner du også to vektorer og et punkt i planet. Du kan derfor finne en likningsfremstilling for planet. Hvordan?

Vis at $8x - 2z - 20 = 0$ er en likningsframstilling for planet i eksemplet ovenfor.

Hvordan kan vi finne en parameterfremstilling for et plan når vi kjenner en likningsfremstilling for planet? (Se **Oppgave 1.6.6.**)

Skjæring mellom to plan. Mer om likningsfremstilling av linjer

Skjæring mellom to plan. Mer om likningsfremstilling av linjer (107574)

Skjæring mellom plan / video
http://ndla.no/nb/node/132720

I avsnittet En parameterframstilling for en rett linje så vi at det ikke er mulig å beskrive en linje i rommet ved hjelp av én likning. (Husk at en likning som inneholder *x*, *y* og *z*, gir et plan i rommet!)

Når to plan skjærer hverandre i rommet, blir mengden av fellespunktene en rett linje. Det betyr at vi kan oppfatte to likninger for to plan som et likningssett som beskriver en rett linje.

Eksempel - Parameterfremstilling for plan i rommet / video
http://ndla.no/nb/node/132748

To plan α og β er gitt ved

$$\begin{aligned} \alpha: &\quad 2x+3y+4z+4=0 \\ \beta: &\quad 6x-7y-8z-4=0 \end{aligned}$$

En likningsfremstilling for en rett linje *l* i rommet kan for eksempel være gitt ved likningssettet

$$\begin{pmatrix} 2x+3y+4z+4=0 \\ 6x-7y-8z-4=0 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne en parameterfremstilling for linjen *l*.

Dette gjør vi på følgende måte:

- En retningsvektor for skjæringslinjen mellom to plan må være parallell med begge planene. Retningsvektoren må derfor stå normalt på normalvektorene til begge planene. Vi finner en retningsvektor for linjen som vektorproduktet av normalvektorene til de to planene.
- Vi finner et punkt på linjen ved å sette en av koordinatene lik null, og så løse likningssettet. (Hvorfor er dette riktig?). Merk! Dette vil ikke alltid fungere første forsøk. Hvis vi setter $z=0$ og linja er vinkelrett på *z*-aksen, kan det være slik at ingen punkt på linja har $z=0$. Men da er det bare å prøve på nytt med å sette $y=0$.
- Vi har da det vi trenger for å finne parameterfremstillingen for linjen.

Vis at linjen l kan utrykkes ved parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = -0{,}5 + t \\ y = -1 + 10t \\ z = -8t \end{cases}$$

Kuleflater

Likningsfremstilling for en kuleflate

Likningsfremstilling for en kuleflate (107582)

Likningsfremstilling for en kuleflate / video
http://ndla.no/nb/node/132750

En kule har sentrum i P_0 og radius *r*. Kuleflaten er samlingen av alle punkter *P* som har avstanden *r* fra P_0.

Vi vil finne en likning for en slik kuleflate.

Vi lar *P*(*x*,*y*,*z*) være et punkt på kuleflaten.

Da vet vi at $\left|\overrightarrow{P_0P}\right| = r$.

Dette gir

$$\left|\overrightarrow{P_0P}\right| = r$$

$$\left|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\right| = r$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Vi har likningen for kuleflaten.

Hvis origo er sentrum i kulen, blir likningen for kuleflaten

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Når likningen for en kuleflate er gitt på formen ovenfor, er det lett å finne sentrum og radius i kulen.

Vanligvis er parentesene regnet ut. Hvordan finner vi da sentrum og radius?
Vi skal se på et eksempel.

Eksempel

Likningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 = -1$$

beskriver en kuleflate.

Vår oppgave blir å lage «fullstendige kvadrater» slik at vi får likningen på formen
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 = -1$$

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - 6y + 3^2 + z^2 = -1 + 1^2 + 3^2$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} + z^2 = -1 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3^2$$

Dette er altså likningen for en kuleflate med sentrum i $(-1, 3, 0)$ og med radius 3.

Parameterfremstilling for kuleflate

Parameterfremstilling for kuleflate (107597)

Parameterfremstilling for ei kuleflate / video
http://ndla.no/nb/node/132751

Husker du hvordan vi finner en parameterframstilling for en rett linje i planet eller i rommet? Vi finner en vektorfunksjon for en vektor fra origo til et punkt P på linja, $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, uttrykt ved en
parameter. På samme måte så vi i avsnittet Parameterfremstilling for plan at vi kan finne en parameterframstilling for et plan. Vektoren fra origo til et punkt i planet er uttrykt ved hjelp av to parametere.

Når vi skal finne en parameterframstilling for en kuleflate, går vi fram på samme måte. Vi finner en vektorfunksjon for en vektor fra origo til et punkt P på kuleflaten, $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, uttrykt ved to parametre.

På figuren ovenfor ser du en kule med radius r plassert med sentrum i origo og et plan som er parallelt med yz-planet. Vi vil lage en parameterfremstilling for kula. Dette gjør vi ved å beskrive et vilkårlig punkt på kula ved hjelp av to parametre.

Den første parameteren kaller vi for t, og vi lar den ganske enkelt være en erstatning for x-koordinaten. Parameteren t vil da løpe fra $-r$ til r.

Sirkelen til venstre nedenfor forestiller kulen med radius r plassert med sentrum i origo.

For hver verdi av *t* vil vi få en mengde punkter på kuleflaten som ligger på en sirkel med radius *a*. Denne sirkelen får vi ved å la et plan parallelt med *yz*-planet (blått, se 3D figur ovenfor) skjære kuleflaten. Sirkelen er tegnet med blått til høyre i figuren nedenfor. Denne sirkelen ligger i et plan som er parallelt med *yz*-planet.

Vi innfører nå parameteren α og lar denne løpe fra 0° til 360° eller fra 0 til 2π.
Da vil *P* gjennomløpe den blå sirkelen.

Vi oppnår altså at *P* gjennomløper alle punkter på kuleflaten.

$$\cos\alpha = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} \qquad \sin\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{hosliggende katet}}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{a}$$

$$\text{hosliggende katet} = a\cos\alpha \qquad \text{motstående katet} = a\sin\alpha$$

Ut fra tegningen ovenfor kan vi finne koordinatene til *P* uttrykt med parameterne.

$$x = t$$
$$y = a\cos\alpha$$
$$z = a\sin\alpha$$

I tillegg ser vi at vi kan bruke Pytagoras' setning.

$$r^2 = a^2 + t^2$$
$$a^2 = r^2 - t^2$$
$$a = \sqrt{r^2 - t^2}$$

Vi får da

$$x = t$$
$$y = a\cos\alpha = \sqrt{r^2 - t^2}\cos\alpha$$
$$z = a\sin\alpha = \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha$$

Vektorfunksjonen blir

$$\overrightarrow{OP} = \left(t, \sqrt{r^2 - t^2}\cos\alpha, \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha\right)$$

Parameterfremstillingen blir

$$x = t \quad \wedge \quad y = \sqrt{r^2 - t^2}\cos\alpha \quad \wedge \quad z = \sqrt{r^2 - t^2}\sin\alpha$$

Eksempel

En kuleflate med radius lik 5 cm og sentrum i origo
har vektorfunksjonen

$$\overrightarrow{OP} = \left(t, \sqrt{5^2 - t^2}\cos\alpha, \sqrt{5^2 - t^2}\sin\alpha\right)$$

Vi kan flytte sentrum i kula til punktet (7,7,7) ved å endre vektorfunksjonen til

$$\overrightarrow{OP} = \left[7 + t, 7 + \sqrt{5^2 - t^2}\cos\alpha, 7 + \sqrt{5^2 - t^2}\sin\alpha\right]$$

Oppsummering

Generelt er en kuleflate med radius *r* og sentrum i (x_0, y_0, z_0) gitt ved vektorfunksjonen

$$\overrightarrow{OP} = \left(x_0 + t, y_0 + \sqrt{r^2 - t^2}\cos\right.$$

En parameterfremstilling for kuleflaten er

$$x = x_0 + t \quad \wedge \quad y = y_0 + \sqrt{r^2 - t^2}\cos\alpha$$

Singapore River, 1. juledag 2010. Hvert år kastes ca. 20 000 små og store kuler med jule- og nyttårsønsker ut i elva.

Algebra

Teori

Tallfølger

Tallfølger

Tallfølger (115035)

Tallfølger / video
http://ndla.no/nb/node/132825

Tall plassert etter hverandre i en bestemt rekkefølge, kaller vi en **tallfølge**. Ditt første møte med tallfølger var kanskje da du lærte å telle.

Tallene 1, 2, 3 og 4 er et eksempel på en tallfølge eller bare e n **følge**. Legg merke til at rekkefølgen av tallene er vesentlig.

Tallene i en tallfølge kalles **ledd**, og leddene **følger som oftest et bestemt mønster**.

Vi kan ha tallfølger med et endelig antall **ledd, endelige tallfølger**, som for eksempel tallfølgen

2, 3, 5, 7, 11, 13

eller tallfølgen

2, 4, 6, 8, ..., 100

og vi kan ha tallfølger med uendelig mange ledd, **uendelige tallfølger**, som for eksempel tallfølgen

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

De tre prikkene etter det siste leddet viser at tallfølgen fortsetter etter samme mønster.

Tallfølge	Mønster
2, 3, 5, 11, 13	Tallfølgen består av alle primtall mindre enn eller lik 13.
2, 4, 6, 8, ..., 100	Tallfølgen består av alle positive partall mindre enn eller lik 100.
1, 4, 9, 16, 25, 36,	

...	Tallfølgen består av alle kvadrattall.

	Tallfølge	**Mønster**
a)	1, 2, 3, ...	
b)	1, 4, 9, 16, ...	
c)	2, 4, 8, ...	
d)	3, 9, 27, ...	
e)	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	
f)	5, 10, 15, 20, ...	
g)	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	
h)	1, 3, 6, 10, ...	
i)	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	

Rekursiv og eksplisitt formel

Rekursiv og eksplisitt formel (115153)

Rekursiv og eksplisitt formel / video
http://ndla.no/nb/node/132826

Det er vanlig å gi **de enkelte leddene** i en tallfølge **navn**. Det første leddet kaller vi a_1, det andre leddet a_2 osv. Ledd nummer n i tallfølgen får betegnelsen a_n, hvor n er et naturlig tall.

For tallfølgen 1, 2, 3, ... er

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 3$$
$$\ldots$$

Vi skal nå lage en formel for det n- te leddet, a_n. Dette kan gjøres på to måter.

Rekursiv formel

Vi ser at hvert ledd i tallfølgen er lik leddet foran pluss tallet 1. For eksempel er $a_4 = a_3 + 1$. Det betyr at vi for denne følgen kan skrive at $a_n = a_{n-1} + 1$.

	A
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

	A
1	1
2	=A1+1
3	=A2+1
4	=A3+1
5	=A4+1
6	=A5+1

Denne type formel kalles **rekursiv**. Når vi kjenner ett ledd i tallfølgen, gir formelen det neste leddet. Det betyr at når vi kjenner det første leddet i tallfølgen, kan vi finne resten av leddene ved hjelp av den rekursive formelen.

Det kan være tidkrevende å finne verdien til et ledd langt ute i en tallfølge ved å bruke en rekursiv formel.

Rekursive formler egner seg derimot godt i et regneark. Vi kan for eksempel få fram tallfølgen i tabellen ved å skrive tallet 1 i rute A1 og deretter skrive formelen som vist i rute A2. Når vi kopierer denne formelen nedover, får vi formlene og verdiene du ser i tabellen.

Eksplisitt formel

Vi ser også at hvert ledd i følgen er lik nummeret på leddet. For eksempel er $a_4 = 4$. Det betyr at vi for denne følgen kan skrive at $a_n = n$. Denne type formel kalles **eksplisitt**. Ved å bruke en eksplisitt formel kan vi finne verdien til et ledd i en tallfølge direkte når vi kjenner nummeret på leddet i følgen.

Eksempel

Tallfølgen 1, 4, 9, 16, ... består av kvadrattallene.

Kvadrattallene kan angis rekursivt ved at oddetall adderes etter følgende mønster:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + 3 = 1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4$$
$$a_3 = 4 + 5 = 4 + 2 \cdot 3 - 1 = 9$$
$$a_4 = 9 + 7 = 9 + 2 \cdot 4 - 1 = 16$$
$$a_5 = 16 + 9 = 16 + 2 \cdot 5 - 1 = 25$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n - 1$$

Vi lar kolonne A i et regneark gi *n*- verdiene. Kolonne B gir kvadrattallene etter den rekursive formelen.

Eksplisitt formel for ledd nummer *n* er $a_n = n^2$. Kolonne C gir kvadrattallene etter den eksplisitte formelen.

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	9	9
4	4	16	16
5	5	25	25
6	6	36	36

	A	B	C
1	1	=1	=A1^2
2	=A1+1	=B1+2*A2-1	=A2^2
3	=A2+1	=B2+2*A3-1	=A3^2
4	=A3+1	=B3+2*A4-1	=A4^2
5	=A4+1	=B4+2*A5-1	=A5^2
6	=A5+1	=B5+2*A6-1	=A6^2

Prøv selv å finne rekursive og eksplisitte formler for resten av tallfølgene i oppgaven innledningsvis. Sammenlign resultatene dine med tabellen på neste side.

Oversikt over tallfølger og formler

Oversikt over tallfølger og formler (115155)

	Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel	Type tallfølge
a)	1, 2, 3, ...	$a_1 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + 1$	$a_n = n$	Aritnetisk
b)	1, 4, 9, 16, ...	$a_1 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n - 1$	$a_n = n^2$	Annet
c)	2, 4, 8, ...	$a_1 = 2 \;\; a_n = a_{n-1} \cdot 2$	$a_n = 2^n$	Geometrisk
d)	3, 9, 27, ...	$a_1 = 3 \;\; a_n = a_{n-1} \cdot 3$	$a_n = 3^n$	Geometrisk
e)	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	$a_1 = \frac{1}{2} \;\; a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$	$a_n = \frac{n}{n+1}$	Annet
f)	5, 10, 15, 20, ...	$a_1 = 5 \;\; a_n = a_{n-1} + 5$	$a_n = 5 \cdot n$	Aritmetisk
g)	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...			Primtallene
h)	1, 3, 6, 10, ...	$a_1 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + n$	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$	Trekanttallene
i)	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	$a_1 = a_2 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \; n > 2$		Fibonaccitallene

Siste kolonne i tabellen ovenfor har vi kalt «type tallfølge». Det er to typer tallfølger vi skal jobbe mye med, det e**aritmetiske og geometriske tallfølger**.

I en **aritmetisk tallfølge** er hvert ledd i følgen lik leddet foran **addert med** en konstant.
I en **geometrisk tallfølge** er hvert ledd i følgen lik leddet foran **multiplisert med** en konstant.

I tabellen finner du også tre spesielle tallfølger, **fibonaccitallene**, **trekanttallene** og **primtallene**. Du kan finne masse stoff om disse tallfølgene på internett. Legg for eksempel merke til at ingen har ennå funnet en eksplisitt formel for primtall nummer *n*.

Trekanttallene

Fibonaccitallene

Leonardo Fibonacci (ca. 1170 - 1259) regnes som den fremste europeiske matematikeren i middelalderen. Han er kanskje først og fremst kjent for å ha introdusert det indiske tallsystemet som araberne hadde videreutviklet (og som vi bruker i dag), for Europa. Han gav en innføring i de nye regneteknikkene og argumenterte for at dette tallsystemet var bedre enn romertallene. Fibonaccitallene kommer fra et problem Fibonacci brukte som eksempel i en av sine bøker. Problemet handler om hvor fort kaniner kan formere seg under ideelle forhold.

Se Fibonaccitallene

Fra eksplisitt formel til rekursiv formel

Fra eksplisitt formel til rekursiv formel (115335)

Når vi kjenner den eksplisitte formelen, kan vi finne den rekursive ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$.

Eksempel

Vi ser først på tallfølgen som består av alle kvadrattallene.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
1, 4, 9, 16, ...	$a_1 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n - 1$	$a_n = n^2$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$a_n - a_{n-1} = n^2 - (n-1)^2$$
$$a_n - a_{n-1} = n^2 - (n^2 - 2n + 1)$$
$$a_n - a_{n-1} = n^2 - n^2 + 2n - 1$$
$$a_n - a_{n-1} = 2n - 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$$

Så ser vi på trekanttallene.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
1, 3, 6, 10, ...	$a_1 = 1 \;\; a_n = a_{n-1} + n$	$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2}$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1) - (n-1) \cdot (n)}{2}$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{n^2 + n - (n^2 - n)}{2}$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} + n}{2} = \frac{2n}{2} = n$$
$$a_n = a_{n-1} + n$$

Til slutt ser vi på tallfølgen med brøker fra tabellen ovenfor.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$	$a_n = \frac{n}{n+1}$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{n-1+1}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n \cdot n}{(n+1) \cdot n} - \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$$

Aritmetiske tallfølger

Aritmetiske tallfølger (115341)

Aritmetiske og geometriske tallfølger / video
http://ndla.no/nb/node/132827

En tallfølge der differansen mellom et ledd og leddet foran er konstant, kalles en**aritmetisk tallfølge**.

Tallfølgen 2, 4, 6, 8, ... er en aritmetisk følge med **differanse** $d = 2$.

Differansen mellom to ledd som følger etter hverandre i en aritmetisk tallfølge, er gitt ved

$$d = a_n - a_{n-1} \quad n > 1$$

En **rekursiv formel** for en aritmetisk tallfølge blir derfor

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Vi systematiserer og finner følgende mønster:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

I en aritmetisk tallfølge er ledd nummer n gitt ved formelen

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Geometriske tallfølger

Geometriske tallfølger (115345)

Geometriske tallfølger / video
http://ndla.no/nb/node/133041

En tallfølge der forholdet mellom et ledd og leddet foran er konstant, kalles en**geometrisk tallfølge**.
Tallfølgen 1, 2, 4, 8, ... er en geometrisk tallfølge med**kvotient**

$$k = \frac{2}{1} = \frac{4}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

I en geometrisk tallfølge kan vi alltid finne neste ledd i tallfølgen ved å multiplisere med kvotienten, *k*.

Den rekursive formelen for en geometrisk tallfølge blir derfor

$$a_n = a_{n-1} \cdot k$$

Vi systematiserer og finner følgende mønster:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot k \\
a_3 &= a_2 \cdot k = (a_1 \cdot k) \cdot k = a_1 \cdot k^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot k = (a_1 \cdot k^2) \cdot k = a_1 \cdot k^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot k^{(n-1)}
\end{aligned}$$

I en geometrisk tallfølge er ledd nummer *n* gitt ved formelen

$$a_n = a_1 \cdot k^{(n-1)}$$

Tallrekker

Tallrekker

Tallrekker (115355)

Tallrekker / video
http://ndla.no/nb/node/133042

Når vi adderer leddene i en tallfølge, får vi en **tallrekke**. Vi bruker vanligvis bare ordet rekke. Vi skiller mellom **uendelige rekker** og **endelige rekker**.

En **uendelig rekke** består av uendelig mange ledd slik som 1 + 2 + 3 + 4 +...
En **endelig rekke** består av et endelig antall ledd slik som 2 + 4 + 8 + 10 + 12 eller 2 + 4 + 6 + 8 +... + 100.

Vi bruker de samme symbolene for leddene i en rekke som for leddene i en tallfølge. Det første leddet betegnes a_1, det andre leddet a_2 osv.

Summen av de n første leddene i en rekke betegnes med symbolet S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Vi kan finne summen av tallrekker med og uten digitale hjelpemidler.

For å finne summen av en endelig rekke uten digitale hjelpemidler kan vi sette tallene under hverandre og summere på vanlig måte.
(Hvis rekken har mange ledd, kan dette fort bli en stor jobb.)

For noen rekker, for eksempel aritmetiske og geometriske, har vi formler som vi kan bruke for å finne summer. Dette skal vi komme tilbake til.

Som et digitalt hjelpemiddel kan du for eksempel bruke **regneark**. Da plasserer du tallrekken i en rad eller i en kolonne, og raden eller kolonnen summeres. Nedenfor ser du hvordan vi har funnet summen av de 10 første trekanttallene i et regneark. Til høyre kan du se hvilke formler vi har brukt i de ulike cellene i regnearket.

	A	B
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55
11		
12	S_{10} =	220

	A	B
1	1	=A1*(A1+1)/2
2	2	=A2*(A2+1)/2
3	3	=A3*(A3+1)/2
4	4	=A4*(A4+1)/2
5	5	=A5*(A5+1)/2
6	6	=A6*(A6+1)/2
7	7	=A7*(A7+1)/2
8	8	=A8*(A8+1)/2
9	9	=A9*(A9+1)/2
10	10	=A10*(A10+1)/2
11		
12	S_{10} =	=SUMMER(B1:B10)

Når den eksplisitte formelen er kjent, kan du enklere og raskere finne summen av rekken ved å bruke en kommando i et digitalt verktøy som for eksempel wxMaxima. Se tabellen nedenfor.

Dersom du vil finne summen av de ti første trekanttallene i wxMaxima, kan du skrive kommandoen **sum** etterfulgt av et parentesuttrykk direkte i skrivefeltet nederst i skjermbilde

Du kan også bruke dialogboksen sum. (Velg «Funksjonsanalyse» og «Beregn sum».)

I tabellen nedenfor ser du hvordan vi kan bruke wxMaxima for å finne summen av ulike tallrekker.

Tallrekke	Eksplisitt formel	Kommando i digitalt verktøy	Sum
1+2+3+4+5	$a_n = n$	wxMaxima Skriv inn: `sum(n,n,1,5)`	$S_5 = 15$
1+4+9+16+25+36	$a_n = n^2$	wxMaxima Skriv inn: `sum(n^2,n,1,6)`	$S_6 = 91$
2+4+8+16+32+64+128	$a_n = 2^n$	wxMaxima Skriv inn: `sum(2^n,n,1,7)`	$S_7 = 254$
1+3+6+10+...+55	$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$	wxMaxima Skriv inn: `sum(n*(n+1)/2,n,1,10)`	$S_{10} = 220$
5+10+15	$a_n = 5 \cdot n$	wxMaxima Skriv inn: `sum(5n,n,1,3)`	$S_3 = 30$

Matematikere bruker gjerne den greske bokstaven $\sum$ (stor sigma) for sum. Da markerer vi under og over sigmategnet hvilket ledd vi starter med, og hvilket ledd som er det siste. For eksempel skriver vi summen av de seks første leddene i rekken med eksplisitt formel lik n^2 på følgende måte:

$$S_6 = \sum_{n=1}^{6} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

Eksempel

Eksempel (115408)

Tenk deg at du får tilbud om å ta en sommerjobb over fire uker, dvs. 20 arbeidsdager. Arbeidsgiveren er litt rar og sier at du får 1 krone første dag du jobber. Så dobler han daglønnen din for hver dag du er på jobb. Det vil si at du får 2 kroner andre dag du jobber, 4 kroner den tredje dagen osv. Slik holder du på i 20 dager.

Samlet lønn etter *n* dager er summen av rekken

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + a_n$$
$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$$

Vi ser at eksplisitt formel for ledd nummer *n* er $a_n = 2^{n-1}$.

Vi vil finne samlet lønn den første uka, dvs. de 5 første dagene.

$$S_5 = 2^{(1-1)} + 2^{(2-1)} + 2^{(3-1)} + 2^{(4-1)} + 2^{(5-1)} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Lønnen den første uka blir på 31 kroner! Kanskje en litt underbetalt jobb?

Vi ønsker å finne samlet lønn i hele perioden, altså 20 dager. Det vil da være fornuftig å bruke et digitalt hjelpemiddel.

Vi bruker wxMaxima og får

$$\sum_{n=1}^{20} 2^{n-1} = 1048575$$

En samlet lønn på 1 048 575 kroner!

Kanskje noe å satse på likevel.

Aritmetiske rekker

Aritmetiske rekker (115418)

Aritmetiske tallrekker / video
http://ndla.no/nb/node/133043

Når vi adderer leddene i en aritmetisk tallfølge, får vi en **aritmetisk rekke**.

Et eksempel på en slik rekke er 2 + 5 + 8 + 11 + ...
Vi ser at differansen *d* mellom et ledd og det foregående leddet er 3.

I kapittelet Aritmetiske tallfølger fant vi at ledd nummer i en aritmetisk tallfølge var gitt ved $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Denne formelen gjelder på samme måte for ledd nummer *n* i en aritmetisk rekke.

Summen av en aritmetisk rekke

Vi ønsker å finne en formel for summen av de *n* første leddene i en aritmetisk rekke. Vi finner først en formel for summen av de 5 første leddene.

Vi skriver summen av de 5 første leddene på to måter. Først leddene i stigende rekkefølge, så leddene i synkende rekkefølge.

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
$$S_5 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

Vi summerer venstresidene og høyresidene og får

$$S_5 + S_5 = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + (a_3 + a_3) + (a_4 + a_2) + (a_5 + a_1)$$

I en aritmetisk rekke er differansen, *d*, mellom hvert ledd lik. I parentesene på høyresiden vil de «blå leddene» øke med *d* for hver parentes fra venstre mot høyre mens de «røde leddene» vil avta med *d*. Det betyr at summen i hver av parentesene er like.

$$(a_1 + a_5) = (a_2 + a_4) = (a_3 + a_3) = (a_4 + a_2) = (a_5 + a_1)$$

Høyresiden blir da lik $5 \cdot (a_1 + a_5)$, og siden venstresiden kan skrives som $2 \cdot S_5$, får vi at

$$2 \cdot S_5 = 5 \cdot (a_1 + a_5)$$

Ved å dividere med 2 på begge sider av likhetstegnet får vi

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2}$$

Resonnementet ovenfor gjelder på samme måte om vi bytter ut antall ledd i rekken med et hvilket som helst annet naturlig tall enn 5.

Summen av de *n* første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved formelen

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Eksempel

I 2008 solgte en forhandler 3 000 sykler. Vi antar at salget vil øke med 300 sykler per år i noen år framover.

1) Hvor mange sykler vil forhandleren til sammen selge fram til og med år 2013?

2) Når vil det årlige salget være på 3 900 sykler?

3) Hvor mange år vil det gå før forhandleren til sammen har solgt 32 400 sykler?

Hvor mange sykler?

Løsning

1) Fra og med 2008 til og med 2013 vil si en periode på seks år. De årlige salgstallene danner en aritmetisk rekke der $a_1 = 3000$ og $d = 300$.

Vi finner først a_6 dvs. salget i 2013

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot 300 = 3000 + 5 \cdot 300 = 4500$$

Samlet salg blir

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)}{2} \cdot 6 = \frac{(3000 + 4500)}{2} \cdot 6 = 7500 \cdot 3 = 22\,500$$

Forhandleren vil selge 22 500 sykler fram til og med år 2013.

2) Et uttrykk for salget om *n* år er $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 300 = 3000 + 300n - 300 = 300n + 2700$

Vi kan finne når det årlige salget er 3 900 sykler ved å sette $a_n = 3900$ og løse likningen

$$\begin{gathered} 300n + 2700 = 3900 \\ 300n = 1200 \\ n = 4 \end{gathered}$$

Husk at vi teller fra og med år 2008, slik at *n* = 4 blir i år 2011.

3) Vi vil nå finne når summen av salget blir 32 400 sykler.

Vi finner først et uttrykk for S_n

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1+a_n)}{2} \cdot n \\ &= \frac{(3000+(300n+2700))}{2} \cdot n \\ &= \frac{300n+5700}{2} \cdot n \\ &= 150n^2 + 2850n \end{aligned}$$

Vi setter så $S_n = 32400$ og finner

$$150n^2 + 2850n = 32400 \text{ som gir } n = -27 \text{ og } n = 8$$

Her kan vi bare bruke den positive løsningen. Summen av salget vil nå 32 400 sykler ved utgangen av 2015.

Geometriske rekker

Geometriske rekker (115446)

Geometriske rekker / video
http://ndla.no/nb/node/133044

Når vi adderer leddene i en geometrisk tallfølge, får vi en **geometrisk tallrekke**. I en geometrisk rekke er forholdet mellom et ledd og det foregående leddet konstant. Vi kaller dette forholdstallet for rekkens **kvotient**, *k*.

Et eksempel på en geometrisk rekke er 20 + 40 + 80 + 160 + ...

Hvert ledd i denne rekken er lik leddet foran multiplisert med 2. Vi har altså en geometrisk rekke med $a_1 = 20$ og $k = 2$.

I avsnittet Geometriske tallfølger kom vi fram til at ledd nummer *n* i en geometrisk tallfølge er gitt ved

$$a_n = a_1 \cdot k^{(n-1)}$$

Denne formelen gjelder også for ledd nummer *n* i en geometrisk rekke. Det betyr at når vi kjenner a_n og *k* i en geometrisk rekke, kan vi finne alle leddene i rekken.

Eksempel

Vi skal bestemme kvotienten og det første leddet i en geometrisk rekke der $a_5 = 243 \text{ og } a_8 = 6\,561$.

Det er 8 - 5 = 3 plasser fra a_5 til a_8.

Det gir at

$$\begin{aligned} a_8 &= a_5 \cdot k^3 \\ k^3 &= \frac{a_8}{a_5} = \frac{6561}{243} = 27 \end{aligned}$$

Vi kan da finne a_1

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 \cdot k^{5-1} \\ a_1 &= \frac{a_5}{k^4} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3 \end{aligned}$$

Den geometriske rekken blir da 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 +...

Summen av en geometrisk rekke

Vi ønsker å finne en formel for summen av de *n* første leddene i en geometrisk rekke. Vi finner først summen av de 5 første leddene.

Vi har at

$$\begin{aligned} S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_5 &= a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 \end{aligned}$$

Vi multipliserer begge sidene i likningen med *k*

$$\begin{aligned} k \cdot S_5 &= k \cdot \left(a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4\right) \\ k \cdot S_5 &= a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5 \end{aligned}$$

Vi finner så differansen mellom $k \cdot S_5$ og S_5

$$k \cdot S_5 - S_5 = \left(a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5\right) - \left(a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4\right)$$
$$k \cdot S_5 - S_5 = a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5 - a_1 - a_1 \cdot k - a_1 \cdot k^2 - a_1 \cdot k^3 - a_1 \cdot k^4$$

Her opptrer de fleste leddene i par. Ledd markert med samme farge har samme verdi, men motsatt fortegn og faller bort. Dette gir

$$k \cdot S_5 - S_5 = a_1 \cdot k^5 - a_1$$
$$S_5\,(k-1) = a_1 \cdot \left(k^5 - 1\right)$$
$$S_5 = \frac{(k^5-1)}{k-1} \quad k \neq 1$$

Vi kan ikke ha en brøk med null i nevner. Derfor gjelder formelen bare når $k \neq 1$. Dersom $k = 1$, blir alle leddene i rekken like. Summen av rekken blir da $S_5 = 5 \cdot a_1$.

Resonnementet ovenfor gjelder på samme måte om vi bytter ut antall ledd i rekken med et hvilket som helst annet naturlig tall enn 5.

Summen av de *n* første leddene i en geometrisk rekke er gitt ved formelen

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1} \quad \text{når } k \neq 1$$

Når *k* = 1 blir $S_n = n \cdot a_1$.

Praktiske problemer knyttet til rekker

Prosentvise endringer

Prosentvise endringer (116156)

Prosentvise endringer

Eksempel

Hvis du setter 1 000 kroner i banken i dag og får 6 % rente på pengene, vil beløpet om ett år ha vokst til

$$1000\ \mathrm{kr} + 1000\ \mathrm{kr} \cdot \frac{6}{100} = 1060\ \mathrm{kr}$$

Vi kan også regne slik

$$1000\ \mathrm{kr} + 1000\ \mathrm{kr} \cdot \frac{6}{100} = 1000\ \mathrm{kr} \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)$$

$$= 1000\ \mathrm{kr} \cdot (1 + 0,06) = 1000\ \mathrm{kr} \cdot 1,06$$

Tallet $1 + \frac{6}{100} = 1,06$ kaller vi for **vekstfaktoren**. Vi kan altså enkelt finne hvor mye beløpet har vokst til etter ett år ved å **multiplisere med vekstfaktoren**.

For å finne hvor mye vi har i banken etter to år, må vi multiplisere beløpet vi hadde etter ett år, med vekstfaktoren, og slik fortsetter vi.

Etter tre år i banken har beløpet vokst til $1000\ \mathrm{kr} \cdot 1,06^3 = 1191\ \mathrm{kr}$.

Vekstfaktor

Når en størrelse øker med *p* %, blir vekstfaktoren $1 + \frac{p}{100}$.

Når en størrelse reduseres med *p* %, blir vekstfaktoren $1 - \frac{p}{100}$.

Vi multipliserer med vekstfaktor for å finne ny verdi.

Sparing

Sparing (116179)

Eksempel 1

Sparing / video
http://ndla.no/nb/node/133046

Tenk deg at du setter inn 8 000 kroner på en konto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet setter du inn i 2011. Du får en fast årlig rente på 3 %.

1) Hvor mye er det på kontoen før du setter inn penger i 2015?

2) Hvor mange år tar før det står minst 60 000 kroner på kontoen?

Løsning

Vi skal nå se hvordan vi kan finne svar på disse problemstillingene ved å bruke en geometrisk rekke.

Norges bank - 50 millioner kroner i tusenlapper på hver pall!

1) Du setter inn fire beløp i banken i denne perioden. Det første beløpet du setter inn, vil stå i banken i 4 år, det andre beløpet i 3 år, det tredje i 2 år og det siste i 1 år.

For å få oversikt er det helt nødvendig å tegne et skjema, gjerne for hånd på et kladdeark. Skjemat viser hva de enkelte innskuddene har vokst til ved starten av 2015. Det må gå klart fram om beløpene settes inn/tas ut i begynnelsen eller i slutten av et år.

Samlet beløp i banken i begynnelsen av 2015 er summen av de beløpene som hvert enkelt innskudd har vokst til. Du ser av skjemaet at **disse beløpene danner en geometrisk rekke** med kvotient k = 1,03 og første ledd a_1= 8000·1,03. Antall ledd i rekken er fire fordi du har satt inn fire beløp.

Summen blir da

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$
$$S_4 = 8000 \cdot 1,03 \cdot \frac{(1,03^4 - 1)}{(1,03 - 1)} = 34\,473$$

I begynnelsen av 2015 vil det stå 34 473 kroner på kontoen.

Det er svært viktig å lese denne type oppgaver nøye. Husk at n står for antall ledd i rekken. Hvordan det første leddet i rekken blir, vil være avhengig av om vi skal finne beløpet på kontoen i begynnelsen eller i slutten av et år.

I eksempelet ovenfor ville det første leddet vært $a_1 = 8000$, mens n fortsatt ville vært 4, dersom en spurte om beløpet rett etter at det siste beløpet ble satt i 2014.

2) Du velger å fortsette sparingen og ønsker å vite hvor lang tid det tar før det står minst 60 000 kroner på kontoen.

Forutsetningene er som ovenfor, men nå vet vi ikke hvor mange ganger du må sette inn penger. Vi lar derfor antall ledd i rekken være ukjent. Siden vi kjenner summen av rekken, får vi en likning som kan løses med et digitalt hjelpemiddel

$$S_n = 60\,000$$
$$a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 60\,000$$
$$8000 \cdot 1,03 \cdot \frac{(1,03^n - 1)}{1,03 - 1} = 60\,000$$
$$n = 6,7$$

Du må altså sette inn sju beløp. Kontobeløpet vil da passere 60 000 kroner i 2017.

Eksempel 2

Mads ønsker å spare til bolig. Han oppretter en BSU-konto (boligsparing for ungdom) i sin lokale bank og setter inn 20 000 kroner på denne kontoen 1. januar hvert år i 10 år. Vi regner med en årlig rente på 5 %.

Et drømmehus?

Vi ønsker å finne ut hvor mye det er på BSU-kontoen rett etter at Mads har satt inn det 10. beløpet.

Vi tar da for oss de enkelte innskuddene og ser hva hvert beløp har vokst til rett etter at Mads har satt inn penger for 10. gang. Når det siste beløpet settes inn, har det første beløpet Mads satte inn, stått på kontoen i 9 år. Det neste i 8 år osv. Det første beløpet har altså vokst til $20\,000 \cdot 1,05^9$, det neste til $20\,000 \cdot 1,05^8$ osv. Det siste beløpet Mads satte inn, har ennå ikke forrentet seg. Vi kan illustrere dette med et skjema:

Samlet innskudd i banken ved begynnelsen av det 10. året blir lik summen av de beløpene som hvert innskudd har vokst til. Du ser av skjemaet at **disse beløpene danner en geometrisk rekke** med kvotient k = 1,05 og a_1= 20 000. Antall ledd i rekken er 10 fordi Mads har satt inn 10 beløp.

Ved å bruke sumformelen for en geometrisk rekke kan vi regne ut hvor mye som står på kontoen rett etter at det 10. beløpet er satt inn

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$
$$S_{10} = 20\,000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1}$$
$$S_n = 251\,558$$

Det vil stå 251 558 kroner rett etter at Mads har satt inn det 10. beløpet.

Avbetaling

Avbetaling (116189)

Avbetaling / video
http://ndla.no/nb/node/133047

Tenk deg at du skal kjøpe en brukt bil som koster 100 000 kroner. Du får tilbud om å kjøpe bilen på avbetaling over fem år. Du skal betale fem like store årlige beløp. Det første beløpet betaler du om ett år. Selgeren beregner seg 5 % rente per år. Vi forutsetter at denne renten er fast.

Hvor mye må du betale for bilen?

Hva koster det å kjøpe en brukt bil til 100 000 kroner på avbetaling?

Sett det beløpet du skal betale inn hvert år, lik x kroner. For å få en oversikt over hva du må betale til sammen, kan du finne et uttrykk for størrelsen til hvert beløp du betaler inn, med utgangspunkt i det året du skal gjøre siste innbetaling. (Det er egentlig likegyldig hvilket år du regner beløpene om til.)

Vi lager et skjema for å få en oversikt

Samlet innbetaling blir summen av den geometriske rekken

$$x + x \cdot 1,05 + x \cdot 1,05^2 + x \cdot 1,05^3 + x \cdot 1,05^4$$

Her er $a_1 = x$ og $k = 1,05$.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$
$$S_5 = x \cdot \frac{(1,05^5 - 1)}{1,05} - 1$$

Bilen kostet 100 000 kroner da avtalen ble inngått. Etter 5 år tilsvarer dette en pris på

$$100\ 000\ \text{kr} \cdot 1,05^5 \approx 127\ 628\ \text{kr}$$

Summen av innbetalinger er lik prisen for bilen når $S_5 = 127\ 628$

$$S_5 = 127\ 628$$
$$x \cdot \frac{(1,05^5 - 1)}{1,05 - 1} = 127\ 628$$
$$x = 23\ 097$$

Hvert år må du betale 23 097 kroner.

Du må til sammen betale $23\,097 \cdot 5$ **kroner** $\approx 115\,500$ **kroner**.

Nåverdier

Nåverdier (116236)

Nåverdi / video
http://ndla.no/nb/node/133048

I eksemplet Avbetaling regnet vi verdien av alle beløpene om til samme år for å sammenlikne verdien av samlet innbetaling med prisen på bilen.

Vi kunne like gjerne regnet om innbetalingene til for eksempel det året avbetalingsavtalen ble inngått. Dette kalles for **nåverdiene** til innbetalingene. Da må vi huske på å dividere med vekstfaktoren for hvert år beløpet føres bakover.

For å betale bilen må nå

$$\frac{x}{1{,}05^1}+\frac{x}{1{,}05^2}+\frac{x}{1{,}05^3}+\frac{x}{1{,}05^4}+\frac{x}{1{,}05^5}=100\,000$$

Siden samlede innbetalinger, venstresiden i likningen, danner en geometrisk rekke med $a_1=\frac{x}{1{,}05}$ og $k=\frac{1}{1{,}05}$, får vi at

$$S_5=100\,000$$
$$\frac{\frac{x}{1{,}05}\cdot\left(\left(\frac{1}{1{,}5}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{1{,}05}-1}=100\,000$$
$$x=23\,097$$

Vi ser at vi får samme resultat som i nevnte eksempel.

Når vi skal vurdere ulike betalingstilbud eller lånetilbud, er det helt avgjørende å sammenlikne tilbudene på **samme tidspunkt.** Det er da naturlig å sammenlikne enten sluttverdiene eller nåverdiene av tilbudene.

Serielån

Serielån (116250)

Serielån / video
http://ndla.no/nb/node/133049

Hvis du tar opp et **serielån**, betaler du like store avdrag gjennom hele låneperioden. Etter hvert som lånet blir nedbetalt, vil renteutgiftene bli mindre.

Terminbeløpene, som er summen av avdrag og renter, vil dermed bli lavere og lavere.

Avdraget på lånebeløpet holder seg altså konstant gjennom hele låneperioden mens rentedelen endres.

Til høyre ser du en enkel regnearkmodell som du selv kan lage for et serielån på 100 000 kroner som skal nedbetales over 16 år. Vi har regnet med en lånerente på 5 % per år. Lånebeløp, nedbetalingstid og rentesats kan endres. For enkelhetsskyld regner vi med bare én termin i året selv om det er vanlig med flere terminer per år.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp	kr 100 000			
2	Rentesats	5 %			
3	Antall år	16			
4	Årlige avdrag	kr 6 250			
5					
6	År	Restlån	Renter	Avdrag	Totalt
7	1	kr 100 000	kr 5 000	kr 6 250	kr 11 250
8	2	kr 93 750	kr 4 688	kr 6 250	kr 10 938
9	3	kr 87 500	kr 4 375	kr 6 250	kr 10 625
10	4	kr 81 250	kr 4 063	kr 6 250	kr 10 313
11	5	kr 75 000	kr 3 750	kr 6 250	kr 10 000
12	6	kr 68 750	kr 3 438	kr 6 250	kr 9 688
13	7	kr 62 500	kr 3 125	kr 6 250	kr 9 375
14	8	kr 56 250	kr 2 813	kr 6 250	kr 9 063
15	9	kr 50 000	kr 2 500	kr 6 250	kr 8 750
16	10	kr 43 750	kr 2 188	kr 6 250	kr 8 438
17	11	kr 37 500	kr 1 875	kr 6 250	kr 8 125
18	12	kr 31 250	kr 1 563	kr 6 250	kr 7 813
19	13	kr 25 000	kr 1 250	kr 6 250	kr 7 500
20	14	kr 18 750	kr 938	kr 6 250	kr 7 188
21	15	kr 12 500	kr 625	kr 6 250	kr 6 875
22	16	kr 6 250	kr 313	kr 6 250	kr 6 563
23	Sum	kr 0	kr 42 500	kr 100 000	kr 142 500

Regnearkmodellen viser hvor stort restlånet er, og hvor mye du må betale i renter og avdrag hvert år. Fra modellen kan du også finne ut hvor store de samlede rentekostnadene blir, og hva du til sammen må betale for lånet.

Nedenfor kan du se hvilke formler vi har brukt i de ulike cellene i regnearket.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp	100000			
2	Rentesats	0,05			
3	Antall år	16			
4	Årlige avdrag	=B1/B3			
5					
6	År	Restlån	Renter	Avdrag	Totalt
7	1	=B1	=B7*$B$2	=$B$4	=C7+D7
8	2	=B7-$B$4	=B8*$B$2	=$B$4	=C8+D8
9	3	=B8-$B$4	=B9*$B$2	=$B$4	=C9+D9
10	4	=B9-$B$4	=B10*$B$2	=$B$4	=C10+D10
11	5	=B10-$B$4	=B11*$B$2	=$B$4	=C11+D11
12	6	=B11-$B$4	=B12*$B$2	=$B$4	=C12+D12
13	7	=B12-$B$4	=B13*$B$2	=$B$4	=C13+D13
14	8	=B13-$B$4	=B14*$B$2	=$B$4	=C14+D14
15	9	=B14-$B$4	=B15*$B$2	=$B$4	=C15+D15
16	10	=B15-$B$4	=B16*$B$2	=$B$4	=C16+D16
17	11	=B16-$B$4	=B17*$B$2	=$B$4	=C17+D17
18	12	=B17-$B$4	=B18*$B$2	=$B$4	=C18+D18
19	13	=B18-$B$4	=B19*$B$2	=$B$4	=C19+D19
20	14	=B19-$B$4	=B20*$B$2	=$B$4	=C20+D20
21	15	=B20-$B$4	=B21*$B$2	=$B$4	=C21+D21
22	16	=B21-$B$4	=B22*$B$2	=$B$4	=C22+D22
23	Sum	=B22-$B$4	=SUMMER(C7:C22)	=SUMMER(D7:D22)	=SUMMER(E7:E22)

Vi kan også bruke det vi har lært om aritmetiske tallfølger og tallrekker til å behandle serielån.

År	Restlån
1	kr 100 000
2	kr 93 750
3	kr 87 500
4	kr 81 250
5	kr 75 000
6	kr 68 750
7	kr 62 500
8	kr 56 250
9	kr 50 000
10	kr 43 750
11	kr 37 500
12	kr 31 250
13	kr 25 000
14	kr 18 750
15	kr 12 500
16	kr 6 250
Sum	kr 0

Ser du at de årlige restlånene danner en aritmetisk tallfølge der $a_1 = 100\,000$ og $d = -6\,250$?

I regnearket finner vi de årlige restlånene rekursivt ved å trekke det årlige avdraget fra foregående års restlån. For eksempel viser tabellen at restlånet i år 7 etter at lånet er tatt opp, er 62 500 kroner. Dette kan vi også finne ved å bruke formelen for ledd nummer 7 i den aritmetiske tallfølgen:

En generell formel for restlånet i år *n* etter at lånet er tatt opp, er

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot(-6250) = 100\,000 - 6250\cdot n + 6250 = 106250 - 6250\cdot n$$

Rentene i år *n* utgjør 5 % av restlånet. Rentene i år *n*, r_n, er da

$$r_n = (106250 - 6250\cdot n)\cdot\frac{5}{100}$$
$$r_n = 5312,5 - 312,5\cdot n$$

Vi ser at rentene danner en aritmetisk rekke med

$$a_1 = 5312,5 - 312,5\cdot 1 = 5000 \text{ og } a_{16} = 5312,5 - 312,5\cdot 16 = 312,5$$

Samlet rentebeløp i låneperioden finner vi ved å bruke sumformelen for en aritmetisk rekke

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$
$$S_{16} = \frac{16\cdot(5000+312,5)}{2} = 5312,5\cdot 8 = 42\,500$$

For å finne ut hva du til sammen må betale for lånet, må du addere samlede rentekostnader og avdrag. Avdragene er til sammen lik lånets størrelse, så vi får at

Samlet tilbakebetaling = 42 500 + 100 000 kr = 142 500 kr

Dette er det samme som regnearkmodellen viser.

Annuitetslån

Annuitetslån (116282)

Hvis du tar opp et **annuitetslån**, betaler du like store terminbeløp gjennom hele låneperioden. Etter hvert som lånet blir betalt ned, vil renteutgiftene bli mindre. Når terminbeløpet skal være like stort gjennom hele låneperioden, vil avdragsdelen øke når rentedelen går ned.

Drøft i klassen hva som er eventuelle fordeler og ulemper ved serielån kontra annuitetslån.

Det finnes ulike lånekalkulatorer hvor du kan legge inn lånebeløp, nedbetalingstid, antall terminer per år og rentesats. Lånekalkulatoren beregner så terminbeløpet du må betale.

Du finner lånekalkulatorer på nettsidene til de fleste bankene. NDLA har også laget egne lånekalkulatorer som du kan finne på Regnearkmodeller.

Når bankene skal beregne terminbeløpet for et annuitetslån, bruker de teorien om geometriske rekker.

I begynnelsen av et år tar vi opp et annuitetslån på kr 100 000. Lånet skal betales tilbake med 16 like store terminbeløp, *x*, i slutten av hvert år i 16 år framover.

For å sammenlikne verdien av terminbeløpene omregner vi alle terminbeløpene til verdien de ville hatt da lånet ble tatt opp. Disse verdiene kaller vi **nåverdiene** til terminbeløpene.

Det er lurt å lage en oversikt som vist nedenfor.

Nåverdiene til terminbeløpene danner en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{x}{1{,}05}$, $k = \frac{1}{1{,}05}$ og $n = 16$

Summen av denne rekken finner vi med formelen $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$.

Summen må være lik lånets verdi

$$a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 100\,000$$

$$\frac{x}{1{,}05} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} = 100\,000$$

Vi får en likning med én ukjent. Vi kan bruke et digitalt hjelpemiddel for å løse likningen. Vi får da at $x = 9227$.

Terminbeløpene blir altså på 9 227 kroner.

NB!

Vi valgte at terminbeløpene skulle betales i slutten av året. Hvis terminbeløpene for eksempel skal betales i begynnelsen av hvert år, vil første ledd i rekken bli x og ikke $\frac{x}{1{,}05}$.

Utslipp av gasser

Utslipp av gasser (116319)

Utslipp / video
http://ndla.no/nb/node/133050

En bedrift har i en periode sluppet ut 1 000 tonn CO_2 hvert år. Hvis dette fortsetter, vil det samlede utslippet de neste seks årene bli
6 000 tonn CO_2.

Bedriften får pålegg om at samlet utslipp i disse seks årene ikke må overstige 5 000 tonn.

Bedriften satser på å redusere utslippsmengden med en fast prosentsats hvert år.

Vi vil finne denne prosentsatsen.

Ved prosentvis reduksjon er vekstfaktoren

$$k = 1 - \frac{p}{100}$$

Vi multipliserer med vekstfaktoren for å finne nytt utslipp.

Tabellen viser utslippene i de seks aktuelle årene.

De globale CO2-utslippene økte etter at verden kom seg ut av finanskrisen i 2010. I følge det internasjonale energibyrået IEA var utslippene dette året på 30,6 gigatonn. Bildet er fra et kullkraftverk i Gelsenkirchen, Tyskland. Rensing av utslipp fra kullkraftverk er ansett som en av de viktigste utfordringene i arbeidet med å redusere CO2-utslipp.

År	1	2	3	4	5	6
Utslipp i tonn	1000	$1000 \cdot k$	$1000 \cdot k^2$	$1000 \cdot k^3$	$1000 \cdot k^4$	$1000 \cdot k^5$

Summen av utslippene danner en geometrisk rekke med $a_1 = 1000$.

Et samlet utslipp på 5 000 tonn i perioden gir likningen

$$\begin{aligned} S_6 &= 5000 \\ a_1 \frac{k^6-1}{k-1} &= 5000 \\ 1000 \cdot \frac{k^6-1}{k-1} &= 5000 \end{aligned}$$

Vi løser denne likningen ved et digitalt hjelpemiddel og får $k = 0{,}9265$.

For å finne den prosentvis reduksjonen løser vi likningen

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p}{100} &= 0,9265 \\ 100 - p &= 92,65 \\ p &= 100 - 92,65 \\ p &= 7,35 \end{aligned}$$

Bedriften må altså redusere utslippet med 7,35 % per år for å nå kravet om utslipp på 5 000 tonn.

Uendelige geometriske rekker

Uendelige geometriske rekker

Uendelige geometriske rekker (116321)

Uendelige geometriske rekker / video
http://ndla.no/nb/node/133051

De geometriske rekkene vi har sett på til nå har stort sett bestått av et endelig antall ledd. Vi skal nå studere **geometriske rekker med uendelig mange ledd**.

La oss først se på en rekke hvor $a_1 = 2$, og kvotienten $k = \frac{1}{2}$. Ledd nummer n er gitt ved formelen

$$a_n = a_1 \cdot k^{(n-1)}$$
$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$$

De første leddene i denne rekken blir

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Summen av de 10 første leddene i rekken er

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 3,99609375$$

Summen av de 30 første leddene i rekken er

$$S_{30} = \sum_{n=1}^{30} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 3,99999999627470$$

Hvis vi regner ut summen av de 100 første leddene, får vi

$$S_{100} = \sum_{n=1}^{100} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 4$$

Det skal ikke så mange ledd til før summen blir tilnærmet lik tallet 4. Det er begrenset hvor mange siffer vi kan ta med i svaret, derfor får vi svaret avrundet til 4 når vi får mange nok ledd.

Men uansett hvor mange ledd vi tar med, vil aldri summen overstige tallet 4. Prøv selv!

Forklaringen på dette kan vi finne ved å bruke formelen for summen av en endelig geometrisk rekke

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$
$$S_n = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$S_n = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}$$
$$S_n = -4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$
$$S_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$$
$$S_n = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Når n blir veldig stor, vil leddet $\frac{1}{2^n}$ bli mindre og mindre, og summen vil derfor nærme seg 4. Men summen vil alltid være litt mindre enn 4.

I matematikken bruker vi symbolet ∞ for uendelig. Vi bruker pil for å peke på hva et utrykk går mot. Da kan vi skrive

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 4 \text{ når } n \to \infty$$

Siden vi kan få summen så nærme 4 vi bare vil, så sier vi at rekken har sum lik 4, og ved å bruke «lim» (latin *limes*, engelsk *limit*) for grenseverdi skriver vi ar summen S er

$$S = \lim_{n\to\infty} 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4$$

Konvergente og divergente geometriske rekker

Konvergente og divergente rekker (116349)

Når en uendelig rekke nærmer seg en bestemt sum når $n \to \infty$, sier vi at rekken **konvergerer**.

Når en uendelig rekke **ikke** nærmer seg en bestemt sum når $n \to \infty$, sier vi at rekken **divergerer**.

Konvergente og divergente rekker / video
http://ndla.no/nb/node/133052

Vi ser nærmere på sumformelen for geometriske rekker

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ når } k \neq 1$$

Hva skjer med summen når *n* blir veldig stor?

Når $n \to \infty$, er det bare leddet k^n som vil endre seg. Hvis $k \in (-1, 1)$, vil $k^n \to \infty$ når $n \to \infty$. Summen av rekken blir da

$$S = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_1 \cdot \frac{0 - 1}{k - 1} = \frac{-a_1}{k - 1} = \frac{a_1}{1 - k}$$

Rekken går altså mot en bestemt sum og er derfor konvergent.

En uendelig geometrisk rekke hvor $k \in (-1, 1)$, er konvergent og har sum

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

Vi kan også vise at rekken vil divergere for alle andre verdier av *k* (vi forutsetter her at $a_1 \neq 0$)

- Når $k \in (\leftarrow, -1)$ eller $k \in (1, \rightarrow)$, vil $k^n \to \infty$ når $n \to \infty$.
  Grenseverdien for summen vil da ikke eksistere, og rekken divergerer.
- Når $k = 1$, blir summen $S_n = n \cdot a_1$
  Summen $\to \infty$ eller $-\infty$ når $n \to \infty$. Rekken divergerer.
- Når $k = -1$, blir summen $S = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \ldots = a_1 - a_1 + a_1 - \ldots$
  Summen vil bli a_1 eller 0. Da eksisterer det ikke noen bestemt grenseverdi for summen, og rekken divergerer.

Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker

Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker (116379)

Uendelige geometriske rekker er nyttige i mange sammenhenger. Vi skal se på et par eksempler.

Medisin

Eksempel

Praktiske problem - Medisinering / video

http://ndla.no/nb/node/133053

En person tar medisin hver dag. Medisinen han tar, er ikke skadelig så lenge det ikke er mer enn 100 mg medisin i kroppen. Kroppen skiller ut 20 % av medisinen hvert døgn.

Vi tenker oss at personen har tatt en mengde a_1 av medisinen hver dag i uendelig lang tid. Av medisinmengden a_1 han tok i går, er bare $a_1 \cdot 0,8$ igjen i kroppen i dag siden 20 % skilles ut per døgn. Av medisinmengden a_1 han tok for to dager siden, er bare $a_1 \cdot 0,8^2$ igjen i kroppen.

Lykkepiller?

Samlet mengde medisin i kroppen er summen av det han tok i dag, det han tok i går osv. Siden $k = 0,8 < 1$, får vi en uendelig konvergent geometrisk rekke

$$a_1 + a_1 \cdot 0,8 + a_1 \cdot 0,8^2 + a_1 \cdot 0,8^3 + \ldots$$

Vi bruker sumformelen for uendelige konvergente geometriske rekker. Vi vet at summen ikke må overstige 100 mg, og vi kan da bestemme den høyeste daglige dosen som er forsvarlig å gi pasienten

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-k} \\ 100 &= \frac{a_1}{1-0,8} \\ a_1 &= 20 \end{aligned}$$

Den høyeste akseptable dosen per dag er 20 mg.

Utslipp

Eksempel

Praktiske problem - Oljeutslipp / video

http://ndla.no/nb/node/133054

En oljetank får en skade, og det begynner å lekke olje fra tanken. Det første minuttet lekker det ut 132 liter. Så avtar lekkasjen med 2 % for hvert minutt helt til tanken er tom.

1) Hvor mye olje vil lekke ut i løpet av den første timen?

2) Omtrent hvor mye olje var det i tanken før lekkasjen startet?

Olje på våt asfalt. Hvor kommer alle fargene fra?

Løsning

1) Antall liter olje som lekker ut den første timen, er summen av de 60 første leddene i en geometrisk rekke med $a_1 = 132 \text{ og } k = 0,98$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(k^n - 1)}{k - 1}$$
$$S_n = 132 \cdot \frac{(0{,}98^{60} - 1)}{(0{,}98 - 1)} \approx 4\,636$$

Det vil lekke ut ca. 4 636 liter olje den første timen.

2) Samlet oljemengde som lekker ut, er summen av den uendelige geometriske rekken med $a_1 = 132 \text{ og } k = 0,98$

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$
$$S = \frac{132}{1 - 0{,}98} = 6\,600$$

Det var omtrent 6 600 liter olje i tanken før lekkasjen startet.

Uendelige geometriske rekker med variable kvotienter

Uendelige geometriske rekker med variable kvotienter (116386)

Variable kvotienter / video
http://ndla.no/nb/node/133055

Tidligere i dette kapitlet har vi sett at det er verdien på kvotienten *k* som bestemmer om en uendelig geometrisk rekke konvergerer eller divergerer.

En uendelig geometrisk rekke vil konvergere dersom $k \in (-1, 1)$.

I den uendelige geometriske rekken

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots \quad x \neq 0$$

er kvotienten $k = \frac{1}{x}$. Det betyr at rekken konvergerer når $\frac{1}{x} \in (-1, 1)$. Vi må altså løse denne dobbeltulikheten for å finne for hvilke verdier av *x* rekken konvergerer. Disse verdiene kalles rekkens konvergensområde.

Dobbeltulikheten kan løses som to enkle ulikheter

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{1}{x} \\ -1 - \frac{1}{x} &< 0 \\ \frac{x+1}{x} &> 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{x} &< 1 \\ \frac{1}{x} - 1 &< 0 \\ \frac{1-x}{x} &< 0 \end{aligned}$$

Den første ulikheten gir at $x \in (\leftarrow, -1) \cup (0, \rightarrow)$.

Den andre ulikheten gir at $x \in (\leftarrow, 0) \cup (1, \rightarrow)$.

Det betyr at rekken konvergerer når $x \in (\leftarrow, -1) \cup (1, \rightarrow)$.

Rekken har da summen

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_1}{1-k} \\ S(x) &= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)} \\ S(x) &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Summen er en funksjon av *x*. Nedenfor har vi tegnet grafen til *S* i rekkens konvergensområde.

Vi kan bruke grafen til å finne hva summen av rekken er for gitte verdier av x. Vi kan også finne de x - verdiene som gir en bestemt sum.

Det samme kan vi finne ved regning.

Forutsetningen er at vi hele tiden bruker x - verdier som ligger i konvergensområdet.

Induksjonsbevis

Induksjonsbevis

Induksjonsbevis (116395)

Induksjonsbevis / video
http://ndla.no/nb/node/133056

Når vi har arbeidet med tallfølger og tallrekker, har du sett mange formler som inneholder variabelen*n*, der *n* står for et naturlig tall større enn eller lik 1. For eksempel har du sett flere eksplisitte formler for ledd nummer *n* i en tallfølge.

Matematikerne har kommet fram til mange av disse formlene ved å føre en type bevis som vi kaller **induksjonsbevis**.

Induksjonsbevis - Eksempel / video
http://ndla.no/nb/node/133272

Denne bevistypen bygger på **induksjonsaksiomet**. Et aksiom er en grunnleggende setning som er selvinnlysende og godtas uten bevis.

Induksjonsaksiomet

Vi ønsker å bevise at en setning som omhandler et naturlig tall *n*, gjelder for alle naturlige tall. Et induksjonsbevis foregår over to trinn.

Trinn 1

Vi viser at formelen gjelder for $n = 1$.

Dette kalles **induksjonsgrunnlaget**.

Trinn 2

Vi antar at formelen gjelder for et vilkårlig tall $n = t \text{ der } t \geq 1$.

Vi viser at da må formelen også gjelde for $n = t + 1$.

Dette kalles **induksjonstrinnet**.

Induksjonsaksiomet sier at vi nå kan konkludere med at formelen gjelder for alle $n \geq 1$.

Hvorfor kan vi si at formelen nå gjelder for alle $n \geq 1$?

- I trinn 2 viser vi at hvis formelen gjelder for en verdi av *n*, så gjelder den også for den neste verdien av *n*.
- I trinn 1 har vi vist at formelen gjelder når *n* = 1. Det vi har vist i trinn 2, må bety at formelen da også gjelder for *n* = 2. Men siden formelen gjelder for *n* = 2 , må den også gjelde for *n* = 3. Slik kan vi holde på i det uendelige, og formelen må derfor gjelde for alle $n \geq 1$.

Eksempel 1

Vi vil bruke induksjon til å vise at summen av en geometrisk rekke med $a_1 = 1 \text{ og } k = 2$ kan skrives som

$$S_n = 2^n - 1$$

Vi skal altså vise at

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Trinn 1, Induksjonsgrunnlaget
Vi skal vise at formelen gjelder for *n* = 1.

Bevis

Når *n* = 1, har vi bare ett ledd på venstre side.

Venstre side = 1

Høyre side = $2^1 - 1 = 1$

Formelen gjelder for *n* = 1.

Trinn 2, Induksjonstrinnet

Vi antar at formelen gjelder for *n* = *t*.

Vi antar altså at

$$S_t = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{t+1-1} = 2^{t+1} - 1$$

Vi må vise at formelen gjelder for *n* = *t* +1.

Vi må altså vise at

$$S_{t+1} = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{t+1-1} = 2^{t+1} - 1$$

Bevis

Dette er en geometrisk rekke med *k* = 2.

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + a_{t+1} \\ &= 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{t-1} + 2^{t-1} \cdot 2 \\ &= 2^t - 1 + 2^{t-1+1} \\ &= 2^t - 1 + 2^t \\ &= 2 \cdot 2^t - 1 \\ &= 2^{t+1} - 1 \end{aligned}$$

Vi har dermed vist at formelen gjelder for *n* = *t* +1.
I følge induksjonsprinsippet gjelder formelen da for alle verdier av $n \geq 1$.

Eksempel 2

En rekke er gitt ved $a_1 = 2 \text{ og } a_{n+1} = a_n + n + 2$.

Vi skal bruke induksjon til å vise at ledd nummer n kan skrives som $a_n = \frac{n(n+3)}{2}$.

Trinn 1, Induksjonsgrunnlaget

Vi skal vise at formelen gjelder for $n = 1$.

Bevis

Venstre side = $a_1 = 2$

Høyre side $= \frac{1(1+3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Formelen gjelder for $n = 1$.

Trinn 2, Induksjonstrinnet
Vi antar at formelen gjelder for $n = t$.

Det betyr at

$$a_t = \frac{t(t+3)}{2}$$

Vi må vise at formelen gjelder for $n = t + 1$.

Vi må altså vise at

$$a_{t+1} = \frac{(t+1)((t+1)+3)}{2} = \frac{(t+1)(t+4)}{2} = \frac{t^2+5t+4}{2}$$

Bevis

Vi vet at

$$a_{n+1} = a_n + n + 2$$

Da må vi også ha at

$$a_{t+1} = a_t + t + 2$$

$$a_{t+1} = a_t + t + 2$$

$$= \frac{t(t+3)}{2} + t + 2$$

$$= \frac{t(t+3)}{2} + \frac{(t+2)\cdot 2}{2}$$

$$= \frac{t^2 + 3t + 2t + 4}{2}$$

$$= \frac{t^2 + 5t + 4}{2}$$

Vi har dermed vist at formelen gjelder for $n = t + 1$.
I følge induksjonsprinsippet gjelder formelen da for alle verdier av $n \geq 1$.

Funksjoner

Teori

Trigonometriske definisjoner

Sinus, cosinus og tangens til vinkler mellom 0˚ og 90˚

Sinus, cosinus og tangens til vinkler mellom 0˚ og 90˚ (116573)

I 1T definerte vi sinus, cosinus og tangens til vinkler mellom 0˚ og 90˚.

$$\sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos A = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{a}{c}$$

Enhetssirkelen

Enhetssirkelen (116623)

Enhetssirkelen / video
http://ndla.no/nb/node/133270

Vi starter med en vinkel $v \in (0°, 90°)$. Vi oppretter så motstående katet slik at vi får en rettvinklet trekant med hypotenus lik 1.

Vi kaller katetene for *a* og *b*.

Vi får da

$$\sin v = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos v = \frac{a}{1} = a$$

Vi legger et koordinatsystem med origo i toppunktet til vinkelen slik at vinkelens høyre bein blir liggende langs den positive x-aksen. Deretter tegner vi en sirkel med radius lik 1 og sentrum i origo. Vi kaller denne sirkelen for **enhetssirkelen**.

Vi lar P være skjæringspunktet mellom enhetssirkelen og venstre vinkelbein til v.

Punktet P har koordinatene (a,b).

Vi ser da at cosinus til vinkelen blir lik førstekoordinaten til P, og at sinus til v blir lik andrekoordinaten til P. Det betyr at $P = (\cos v, \sin v)$.

Definisjon

Sinus, cosinus og tangens til en vinkel *v*

Vi plasserer vinkel *v* i et koordinatsystem sammen med en enhetssirkel slik figuren til høyre viser.

Punktet *P* er skjæringspunktet mellom vinkelens venstre vinkelbein og enhetssirkelen.

v er vinkelen mellom den positive *x*- aksen og linjestykket *OP*.

Vi har da

$$\text{cosv} = \text{førstekoordinaten til } P = a$$

$$\text{sinv} = \text{andrekoordinaten til } P = b$$

$$\text{tanv} = \frac{\text{sinv}}{\text{cosv}} \text{ når cosv} \neq 0$$

Med denne definisjonen definerer vi også cosinus, sinus og tangens til vinkler som ikke ligger mellom 0° og 90°.

For en vinkel mellom 90° og 180° ser vi at cos$v$ = a blir negativ, og sin$v$ = b blir positiv.

Kan du se at sin90° = 1, og at sin180° = 0?

Hva er cos90°?

Hva er cos180°?

For en vinkel mellom 180° og 270° ser vi at både cos$v$ = a og sin$v$ = b blir negative.

Kan du se at cos270° = 0, og at sin270° = –1?

Hvordan blir fortegnene til sinus og cosinus til vinkler mellom 270° og 360°?

Vinkler med samme trigonometriske verdi

Vinkler med samme trigonometriske verdi (116751)

Vinkler med samme sinusverdi

Ulike vinkler med samme trigonmetriske verdi 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133271

Den utvidede definisjonen av sinus til vinkler innebærer at to ulike vinkler kan ha**samme sinusverdi.**

Ulike vinkler med samme trigonmetriske verdi 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133273

På figuren ser du at sin$u$ = sin$v$.

Ulike vinkler med samme trigonmetriske verdi 3 / video
http://ndla.no/nb/node/133274

Siden $u + v = 180°$, er $u = 180° - v$, og vi får at $\sin v = \sin(180° - v)$.

Vinkler med samme cosinusverdi

På samme måte kan vi vise at to vinkler kan ha **samme cosinusverdi**.

På figuren til høyre ser du at cos*u* = cos*v.*

Vinkler med samme tangensverdi

I oppgave 3.1.2 skal du forklare at $\tan v = \tan(v + 180°)$

Oppsummering

Følgende sammenhenger gjelder for alle vinkler:

$$\sin v = \sin(180° - v)$$

$$\cos v = \cos(360° - v)$$

$$\tan v = \tan(v + 180°)$$

Negative vinkler

Negative vinkler (116773)

På enhetssirkelen innfører vi en **positiv rotasjonsretning, mot urviseren**.

Negativ rotasjonsretning er med urviseren.

Vi kan si at den positive vinkel u oppstår ved at vi roterer punktet P fra punktet (1,0) i positiv retning på enhetssirkelen til punktet P_1.

u er vinkelen mellom den positive x - aksen og linjestykket OP_1.

Den negative vinkelen $-u$ oppstår ved at vi roterer punktet P fra punktet (1,0) i negativ retning på enhetssirkelen til punktet P_2.

Diskuter med en medelev og ta stilling til følgende påstander:

Påstand	Riktig	Galt
$\sin(-u) = \sin u$	☐	☐
$\sin(-u) = -\sin u$	☐	☐
$\cos(-u) = \cos u$	☐	☐

Vinkler som ikke ligger mellom 0˚ og 360˚

Vinkler som ikke ligger mellom 0° og 360° (116781)

Kvadranter og vinkler som er større enn 360° / video
http://ndla.no/nb/node/133278

En rotasjon på 360° kalles et **omløp**. En vinkel $v \in [0^\circ, 360^\circ >$ er en vinkel i **første omløp**.

Vi kan også la et punkt rotere mer enn en 360° på enhetssirkelen. Vi får da vinkler som er større enn 360°.

Figuren viser vinkelen v = 495° tegnet i et koordinatsystem. Vinkelbeina til en vinkel på 495° er de samme som vinkelbeina til en vinkel på 495°-360° = 135°.

Vi sier at vinkelen på 135° ligger i første omløp, og vinkelen på 495° ligger i **andre omløp**.

Generelt vil vinkelbeina til to vinkler u og v falle sammen dersom

$$u = v + n \cdot 360^\circ$$ der n er et helt tall.

Disse vinklene får da samme verdier for sinus, cosinus og tangens.

Kvadranter

Kvadranter (116793)

I det videre arbeidet med vinkler i koordinatsystemet vil det være nyttig å dele koordinatsystemet i fire **kvadranter**. Se figuren. **Nummereringen følger den positive rotasjonsretningen i enhetssirkelen.**

Vi plasserer en vinkel med toppunkt i origo og et vinkelbein langs den positive x -aksen. Hvis det andre vinkelbeinet ligger i 2. kvadrant, sier vi at vinkelen ligger i 2. kvadrant. (For eksempel vil vinkler mellom 90° og 180° ligge i 2. kvadrant.)

Absolutt vinkelmål

Absolutt vinkelmål (116860)

Absolutt vinkelmål og radianer / video
http://ndla.no/nb/node/133281

Fram til nå har vi målt vinkelstørrelser i grader. I mange situasjoner er det mer hensiktsmessig å måle vinkler ved såkalt **absolutt vinkelmål**. Vi sier at vi måler vinklene i **radianer**.

Vi slår en sirkel med sentrum i toppunktet til vinkel *v*.

Vinkel *v* i absolutt vinkelmål defineres da slik

$$v = \frac{b}{r}$$

Absolutt vinkelmål er altså forholdet mellom buelengden *b* og radien *r*.

Hvis radius er 1 enhet slik den er i enhetssirkelen, blir det absolutte vinkelmålet

$$v = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

En vinkel på 360° har en buelengde på $2\pi r$. I radianer svarer dette til $v = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

En vinkel på 180° har buelengde på $\frac{2\pi r}{2}$. I radianer svarer dette til $v = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$.

En vinkel på 90° har buelengde på $\frac{2\pi r}{4}$. I radianer svarer dette til $v = \frac{2\pi r}{4r} = \frac{\pi}{2}$.

Absolutt vinkelmål er egentlig et ubenevnt tall, men det er vanlig å si at vinklene måles i radianer.

Hva er sammenhengen mellom grader og radianer?

En vinkel på 180° er lik π når vinkelen måles i radianer.
Da er 1° lik $\frac{\pi}{180}$ når vinkelen måles i radianer.

Det betyr at omregning fra grader til radianer skjer ved å multiplisere med $\frac{\pi}{180}$, og omvendt fra radianer til grader ved multiplikasjon med $\frac{180}{\pi}$.

Det er svært viktig at du kjenner sammenhengen mellom vinkler målt i grader og vinkler målt i radianer. Du må uten å nøle kunne radiantallet til vinklene som er markert på figuren ovenfor.

Digitale verktøy kan regne med grader (degree) og med radianer. Finn ut hvordan du endrer innstillingene i det digitale verktøyet du bruker! Husk å sjekke at innstillingene er riktige når du skal regne oppgaver.

Trigonometriske sammenhenger

Eksakte verdier

Eksakte verdier (116875)

Eksakte verdier 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133282

Vi skal nå se hvordan vi ved hjelp av to kjente rettvinklede trekanter kan finne eksakte verdier for sinus, cosinus og tangens til vinkler på 30°, 45° og 60° eller i radianer $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{3}$.

Vi starter med en rettvinklet trekant der hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste kateten.

Eksakte verdier 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133284

Vi setter den korteste kateten lik *x*. Hypotenusen blir da 2*x*.

$$\sin A = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Hvilken vinkel i 1. kvadrant har sinusverdi lik $\frac{1}{2}$?

$$\cos C = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Hvilken vinkel i 1. kvadrant har cosinusverdi lik $\frac{1}{2}$?

De spisse vinklene er 30° og 60°.

Den lengste kateten, *AB*, finner vi ved å bruke Pytagoras læresetning

$$\begin{aligned} AB^2 &= (2x)^2 - x^2 \\ AB &= \sqrt{4x^2 - x^2} \\ AB &= \sqrt{3}x \end{aligned}$$

Definisjonen av sinus, cosinus og tangens gir oss da følgende eksakte verdier:

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{x}{2x} = \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{3}\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{2x} = \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \frac{\sqrt{3}\cancel{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{3}$$

Vi kunne også ha brukt at $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ når $\cos v \neq 0$

Så tar vi utgangspunkt i en rettvinklet, likebeint trekant der de spisse vinklene er 45°.

Vi setter katetene lik og finner hypotenusen, *AB*

$$AC^2 = x^2 + x^2$$

$$AC = \sqrt{2x^2}$$

$$AC = \sqrt{2}x$$

Definisjonen av sinus, cosinus og tangens gir oss følgende eksakte verdier:

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{2}\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{2}\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{x}{x} = 1$$

Ved hjelp av symmetri kan du nå finne de eksakte verdiene til mange av vinklene på enhetssirkelen. Husk at du finner verdiene til cosinus på *x* - aksen og verdiene til sinus på
y - aksen.

Her ser vi at $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = 0,5$.

Kan du finne flere vinkler som har sinusverdi lik 0,5? Kan du finne vinkler som har sinusverdi lik $-0,5$?

Komplementvinkler

Komplementvinkler (116903)

To vinkler som til sammen er 90°, kaller vi **komplementvinkler**.

Komplement og suplementvinkler / video
http://ndla.no/nb/node/133370

Gitt en rettvinklet trekant. Vi setter den ene av de spisse vinklene lik *v*. Den andre spisse vinkelen blir da $90^\circ - v$
.

Vi har

$$\sin v = \frac{a}{b}$$

$$\cos(90^\circ - v) = \frac{a}{b}$$

Vi har altså at $\sin v = \cos(90^\circ - v)$

Tilsvarende kan vi finne

$$\cos v = \frac{c}{b} \quad \text{og} \quad \sin(90^\circ - v) = \frac{c}{b}$$

Vi har da at $\cos v = \sin(90^\circ - v)$

Sinus til en vinkel er lik cosinus til komplementvinkelen dvs. $\sin v = \cos(90^\circ - v)$

Cosinus til en vinkel er lik sinus til komplementvinkelen dvs. $\cos v = \sin(90^\circ - v)$

Her har vi bare vist at setningen gjelder for vinkler mellom 0° og 90°, men det er mulig å vise at setningen gjelder for alle vinkler *v*.

Enhetsformelen

Enhetsformelen (116935)

Til høyre ser du figuren vi brukte da vi definerte sinus og cosinus til en vilkårlig vinkel *v*.

Enhetsformelen / video
http://ndla.no/nb/node/133371

Gitt en rettvinklet trekant med hypotenus lik 1.

$\mathbf{sinv} = \frac{a}{1} = a$

$\mathbf{cosv} = \frac{c}{1} = c$

Pytagoras læresetning gir oss at

$$a^2 + c^2 = 1$$

Dette betyr at

$$(\mathbf{sinv})^2 + (\mathbf{cosv})^2 = 1$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Formelen sier altså at kvadratene til sinus og cosinus til den samme vinkelen *v* til sammen alltid er 1.

Bruk figurene nedenfor til å forklare at denne sammenhengen gjelder for alle vinkler *v*.

Enhetsformelen

$$(\text{sinv})^2 + (\text{cosv})^2 = 1$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Sum og differanse av vinkler

Sum og differanse av vinkler (116970)

Vi har følgende sammenhenger for sinus og cosinus til summer og differanser av vinkler:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

$$\sin(2u) = 2\sin u \cdot \cos u$$
$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

Bevis for $\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$

Differanse av vinkler / video
http://ndla.no/nb/node/133372

Figuren viser en enhetssirkel med vinklene *u*, *v* og *u*—*v*.

Sum av vinkler / video
http://ndla.no/nb/node/133375

Sum og differanse av vinkler - Oppsummering / video
http://ndla.no/nb/node/133377

Punktet P har koordinater
(cos$u$, sin$u$), og
Punktet Q har koordinater
(cos$v$, sin$v$).

Vi har at

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\mathrm{cosu}, \mathrm{sinu})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\mathrm{cosv},\ \mathrm{sinv})$$

Skalarproduktet på koordinatform gir

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\mathrm{cosu}, \mathrm{sinu}) \cdot (\mathrm{cosv}, \mathrm{sinv}) = \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} + \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{sinv}$$

Definisjonen av skalarproduktet gir, når $u - v$ er lik eller mindre enn 180°

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) \cdot \cos(u - v)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \cos(u - v)$$

Vi har da vist at $\cos(u - v) = \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} + \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{sinv}$

Når $u - v$ er større enn 180°, er det vinkel z på figuren som er den minste vinkelen mellom vektorene.

Da er

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \mathrm{cosz}$$

Men $z + u - v = 360°$

Det betyr at $z = 360° - (u - v)$

Da er

$$\cos(z) = \cos(360^\circ - (u - v)) = \cos(-(u - v)) = \cos(u - v)$$

Det vil si at også nå er $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \cos(u - v)$, og setningen gjelder generelt.

Bevis for $\cos(u + v) = \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} - \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{sinv}$

Vi har tidligere sett at

$$\cos(-v) = \mathrm{cosv}$$
$$\sin(-v) = -\mathrm{sinv}$$

Se figur.

Vi bruker formelen for cos($u - v$) som vi beviste ovenfor.

$$\cos(u-v) = \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} + \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{sinv}$$

Vi setter $u + v = u - (-v)$ og får

$$\begin{aligned}\cos(u+v) = \cos(u-(-v)) &= \mathrm{cosu} \cdot \cos(-v) + \mathrm{sinu} \cdot \sin(-v) \\ &= \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} + \mathrm{sinu} \cdot (-\mathrm{sinv}) \\ &= \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{cosv} - \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{sinv}\end{aligned}$$

Trigonometriske likninger

Trigonometriske likninger

[Trigonometriske likninger (117451)]

Eksempel 1

Trigonometriske likninger 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133378

Vi skal finne løsningene til likningen

$2\sin x - 1 = 0$ når $x \in [0, 2>$.

$2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi$

$L = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

Eksempel 2

Vi skal finne løsningene til likningen $2\sin x - 1 = 0$ når $x \in \mathbb{R}$.

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi$$

$$L = \left(\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi\right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vi kaller disse løsningene **de generelle løsningene** til likningen.

Det er svært viktig at du legger merke til **hvilket intervall du skal finne løsninger i**. Det varierer fra oppgave til oppgave. I det første eksempelet skulle vi finne løsningene i første omløp, $x \in [0, 2\pi >$.

I det andre eksempelet skulle vi finne alle løsninger.

Eksempel 3

Trigonometriske likninger 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133380

Finn de generelle løsningene til likningen

$$4\cos 2x + 2 = 0.$$

$$4\cos 2x + 2 = 0$$

$$4\cos 2x = -2$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 2x = 240^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$X = 60^\circ + n \cdot 180^\circ \quad \vee \quad x = 120^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$L = (60^\circ + n \cdot 180^\circ, 120^\circ + n \cdot 180^\circ)$$

Ved å utnytte at $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ når $\cos v \neq 0$, kan vi lø

se likninger av typen $a\cos v + b\sin v = 0$.

Eksempel 4

Trigonometriske likninger 3 / video
http://ndla.no/nb/node/133381

Vi skal finne løsningene til likningen $4\cos 2x + 2\sin 2x = 0$ når $x \in [0, 4\pi >$.

$$2\cos 2x + 2\sin 2x = 0$$

$$\frac{2\cos 2x}{\cos 2x} + \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x} \quad \cos 2x \neq 0$$

$$2 + 2\tan 2x = 0$$

$$2\tan 2x = -2$$

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$L = \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{19\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}, \frac{27\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}\right)$$

Vi må også sjekke om likningen har løsning når $\cos 2x = 0$.

Når $\cos 2x = 0$ er $\sin 2x = 1 \quad \vee \quad \sin 2x = -1$.

Likningen har da ingen løsning.

$$L = \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{19\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}, \frac{27\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}\right)$$

Legg merke til at **høyre side i den gitte likningen er lik null**. Dersom høyre side ikke hadde vært lik null, kunne vi ikke ha løst likningen med denne metoden. Vi skal senere lære en metode for å løse sammensatte trigonometriske likninger der høyresiden ikke er lik null.

To tips for å løse sammensatte trigonometriske likninger

Ved å utnytte at $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ når $\cos \neq 0$, kan vi løse likninger av typen $a\cos v + b\sin v = 0$.

Husk at dersom du dividerer med $\mathbf{cosv}$, må du forutsette at $\mathbf{cosv} \neq \mathbf{0}$. Du må derfor undersøke om likningen også har løsning når $\mathbf{cosv} = \mathbf{0}$.

Hvis høyresiden ikke er lik null, kan du prøve å bruke enhetsformelen, $(\mathbf{sinv})^2 + (\mathbf{cosv})^2 = \mathbf{1}$, for å omforme likningen.

Eksempel 5

Vi skal finne løsningene til likningen $\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2$ når $x \in [0, 2\pi >$.

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2$$

$$1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x = -2$$

$$-4\sin^2 x = -3$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{sinx} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \vee \quad \mathbf{sinx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Funksjonsdrøfting

Den deriverte

Den deriverte (117489)

Den deriverte / video
http://ndla.no/nb/node/133402

I læreplanen står det at du skal kunne

- derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner

Vi starter med litt repetisjon.

Til høyre ser du grafen til funksjonen *f*.

Vi ønsker å finne den momentane vekstfarten til funksjonen i punktet $A = (x, f(x))$.

Vi gir *x* et tillegg x og får et nytt punkt på grafen $B = (x + x, f(x + x))$

Vi trekker **en sekant (grønn linje)** gjennom punktene *A* og *B*.

Vi finner stigningstallet til denne linjen.

$$a = \frac{y}{x} = \frac{f(x+x)-f(x)}{(x+x)-x} = \frac{f(x+x)-f(x)}{x}$$

Vi har nå funnet et uttrykk for **gjennomsnittlig vekstfart** fra *A* til *B*.

Vi lar så punktet *B* nærme seg punktet *A*. Vi lar altså x gå mot null.

Da vil **sekanten (grønn)** gradvis nærme seg til å bli **en tangent (rød linje)** til kurven i *A*.

Stigningstallet til denne tangenten forteller hvor fort grafen vokser akkurat i punktet *A*. Vi kaller dette stigningstallet for **den momentane veksten** eller **den deriverte** til *f* i punktet *A*.

Den deriverte

Vi ser på grafen ovenfor.

$f'(x)$ er den verdien $\frac{y}{x} = \frac{f(x+x)-f(x)}{x}$ nærmer seg mot når x går mot null.

Definisjon

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\ \ x)-f(x)}{x}$$

Den deriverte i et punkt er **stigningstallet til tangenten** til grafen i dette punktet.

Den **deriverte** og **den momentane vekstfarten** er det samme.

I definisjonen ser vi på hva som skjer i et punkt $(x, f(x))$. I punktet har grafen til funksjonen
stigningstallet $f'(x)$. For hver verdi av *x* får vi altså en bestemt verdi av $f'(x)$. Vi har da en ny
funksjon for alle *x* der $f'(x)$ eksisterer.
Denne funksjonen kaller vi den deriverte funksjonen til *f*.

I R1 lærte du å derivere sentrale funksjoner. Du brukte førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner. I tabellen nedenfor har vi samlet de derivasjonsreglene du lærte i R1 kurset.

Det er veldig viktig at du lærer deg disse reglene og bruken av dem.

Reglene må kort og godt pugges!

Konstant funksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Potensfunksjon	$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
Funksjon multiplisert med konstant	$f(x) = k \cdot g(x)$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$
Summer og differanser	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x$
Produkt	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) =$ $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot$
Kvotienter (Brøk)	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) =$ $\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
Eksponentialfunksjoner	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \mathrm{Ina}$
Logaritmefunksjonen	$f(x) = \mathrm{Inx}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Kjerneregelen Sammensatte funksjoner	$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Videre i menyen repeterer vi hvordan vi deriverer ulike typer funksjoner.

Den deriverte til en konstant funksjon

Den deriverte til en konstant funksjon (117502)

Konstant funksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$

Eksempel 1

$y = 3$

$y' = 0$

Eksempel 2

$y = \pi$

$y' = 0$

Eksempel 3

$y = 3\pi^2$

$y' = 0$

Grafen til en konstant funksjoner en vannrett linje. En slik linje har stigning lik null, derfor er den deriverte til en konstant funksjon lik null.

Den deriverte til en potensfunksjon

Den deriverte til en potensfunksjon (119823)

Potensfunksjon	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

Derivasjon - Eksempel 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133403

Vi har tidligere sett at

- når *a* er et reelt tall forskjellig fra 0 og *n* et naturlig tall, er $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$
- når *a* er et positivt reelt tall, *n* et naturlig tall og *m* et helt tall, så er $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Dette gjør at regelen for derivasjon av potensuttrykk kan brukes i svært mange tilfeller.

Eksempel 1

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

Eksempel 2

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Eksempel 3

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^4$$

Eksempel 4

$$f(x) = x = x^1$$
$$f'(x) = x^{1-1} = 1x^0$$
$$f'(x) = 1$$

Eksempel 5

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Eksempel 6

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Resultatene rammet inn i sirkel bør du lære deg utenat!

Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant

Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant (117507)

Summer og differanser	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Funksjon multiplisert med konstant	$f(x) = k \cdot g(x)$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$

Vi deriverer summer av og differenser mellom funksjoner ved å derivere ledd for ledd. Legg merke til at vi her også får bruk for regelen for derivasjon av en funksjon multiplisert med en konstant.

Eksempel 1

$f(x) = 3 - x^2$

$f'(x) = 0 - 2x$

$f'(x) = -2x$

Eksempel 2

$f(x) = x^3 + 5x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 5 \cdot 2x$

$f'(x) = 3x^2 + 10x$

Den deriverte til et produkt av to funksjoner

Den deriverte til et produkt av to funksjoner (117513)

Produkt	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f = u \cdot v$	$f'(x) =$ $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'$ $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

f, *u* og *v* er funksjoner av *x* og skal deriveres med hensyn på *x*. I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Derivasjon - Eksempel 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133405

Eksempel 1	**Eksempel 2**
$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot (x^3 + 1)$ $f(x) = (x^2 + 3x)' \cdot (x^3 + 1)$ $+ (x^2 + 3x)(x^3 + 1)'.$ $f'(x) = (2x + 3) \cdot (x^3 + 1)$ $+ (x^2 + 3x) \cdot 3x^2$ $f'(x) = 2x^4 + 2x + 3x^3 + 3$ $+3x^4 + 9x^3$ $f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 2x + 3$	$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$ $f'(x) = (x - 1)' \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot (\sqrt{}$ $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

Den deriverte til en kvotient (brøk)

Den deriverte til en kvotient (brøk) (117515)

Kvotienter (brøk)	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ $f' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

f, *u* og *v* er funksjoner av *x* og skal deriveres med hensyn på *x*. I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Den deriverte til en brøk blir en ny brøk der nevneren er kvadratet av den opprinnelige nevneren. Telleren likner på uttrykket til den deriverte av et produkt, men med en klar forskjell. Det står minustegn mellom leddene. Det er derfor viktig med rett rekkefølge på leddene i teller. Begynn med å derivere telleren.

Derivasjon - Eksempel 3 / video
http://ndla.no/nb/node/133404

Eksempel 1	**Eksempel 2**
$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2}$ $f(x) = \frac{(x^3+2)'\cdot x^2 - (x^3+2)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$ $f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+2)\cdot 2x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{3x^4 - 2x^4 - 4x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{x^4-4x}{x^4} = \frac{x(x^3-4)}{x^4} = \frac{x^3-4}{x^3}$	$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ $f'(x) = \frac{(x+1)'\cdot(x+2) - (x+1)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}$ $f'(x) = \frac{1\cdot(x+2) - (x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$ $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

Kjerneregelen

Kjerneregelen (117546)

Derivasjon - Eksempel 4 / video
http://ndla.no/nb/node/133408

For eksempel kan funksjonen *f* gitt ved $f(x) = (x^3 + 2)^4$ oppfattes som en sammensatt funksjon. Først skal en gitt*x* - verdi opphøyes i tredje potens og adderes til tallet 2. Vi kaller denne funksjonen for *u* og sier at $u(x) = x^3 + 2$ er **kjernefunksjonen**.

Da er for eksempel

$$u(1) = 1^3 + 2 = 3$$

Derivasjon - Eksempel 5 / video
http://ndla.no/nb/node/133409

Andre trinn er at det resultatet som *u* gir, skal opphøyes i 4.potens. Vi oppfatter også dette som en egen funksjon, og kaller denne funksjonen for *g*. Men denne funksjonen er ikke en funksjon av *x*, den er en funksjon av *u*, og vi får at $g(u) = u^4$.

Da er

$$g(3) = 3^4 = 81$$

Den opprinnelige funksjonen *f* er da gitt ved $f(x) = g(u(x))$ og

$$f(1) = g(u(1)) = g(1^2 + 2) = g(3) = 3^4 = 81$$

Poenget er at både *u* gitt ved $u(x) = x^3 + 2$ og *g* gitt ved $g(u) = u^4$ er funksjoner som vi kan derivere

$$u'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = 4u^3$$

Funksjonen *u* er derivert med hensyn på *x* og funksjonen *g* er derivert med hensyn på u.

Det kan bevises at følgende regel gjelder for derivasjon av sammensatte funksjoner:

Kjerneregelen Sammensatte funksjoner	$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Eksempel 1

$f(x) = \left(x^3 + 2\right)^4$

$g(u) = (u)^4, \qquad u = x^3 + 2$
$g'(u) = 4u^3, \qquad u' = 3x^2$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = \left((u)^4\right)' \cdot u'$
$f'(x) = 4u^3 \cdot u'$
$f'(x) = 4\left(x^3 + 2\right)^3 \cdot \left(3x^2\right)$
$f'(x) = 12x^2\left(x^3 + 2\right)^3$

Eksempel 2

$f(x) = \sqrt{x - 1}$

$g(u) = \sqrt{u}, \qquad u = x - 1$
$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \qquad u' = 1$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = (\sqrt{u})' \cdot u'$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Den deriverte til eksponentialfunksjonen

Den deriverte til eksponentialfunksjonen (117569)

En eksponentialfunksjon er en funksjon gitt på formen

$$f(x) = k \cdot a^x$$

der variabelen *x* opptrer som eksponent i en potens. Grunntallet i eksponenten, *a*, er en konstant større enn null, og *k* er en konstant.

Eksponentialfunksjonen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Eksponentialfunksjonen	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \mathrm{In}a$

Eksempel 1

$f(x) = e^{4x}$

$g(u) = e^u, \quad u = 4x$
$g'(u) = e^u, \quad u' = 4$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = e^u \cdot 4$
$f'(x) = 4e^{4x}$

Eksempel 2

$f(x) = 3^{4x}$

$g(u) = 3^u, \quad u = 4x$
$g'(u) = 3^u \cdot \mathrm{In}3, \quad u' = 4$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
$f'(x) = 3^u \cdot \mathrm{In}3 \cdot 4$
$f'(x) = 4\mathrm{In}3 \cdot 3^{4x}$

Den deriverte til logaritmefunksjonen

Den deriverte til logaritmefunksjonen (117623)

Logaritmefunksjonen	$f(x) = \text{Inx}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Eksempel

$f(x) = 2\,\text{In}\,(n^x + 2)$

$g(u) = 2\,\text{Inu} \qquad u = x^2 + 2$

$g'(u) = 2 \cdot \frac{1}{u} \qquad u' = 2x$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x$

$f'(x) = \frac{4x}{x^2+2}$

De trigonometriske funksjonene

De trigonometriske funksjonene (117685)

Du skal nå lære å derivere de trigonometriske funksjonene, men først skal vi se litt på grafene til disse funksjonene.

Nedenfor har vi tegnet grafene til de tre funksjonene f, g og h gitt ved $f(x)=\sin x$, $g(x)=\tan x$ og $h(x)=\cos x$.

Hvilken graf tilhører hvilken funksjon?

Bruk GeoGebra-filene sinx.ggb, cosx.ggb og tanx.ggb og studer sammenhengen mellom vinkler på enhetssirkelen og grafene til funksjonene f, g og h gitt ved $f(x)=\sin x$, $g(x)=\tan x$ og $h(x)=\cos x$.

Sinusfunksjonen

Sinusfunksjonen (117703)

Først ser vi på grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \sin x$ når $x \in [0, 2\pi >$.
Fra enhetssirkelen kjenner vi noen av funksjonsverdiene til *f*.

Vi vet for eksempel at $f(0) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ f(\pi) = 0$ osv.

Hvis vi merker av tilstrekkelig mange funksjonsverdier i et koordinatsystem, vil vi få grafen nedenfor. Vi har her vist sammenhengen mellom vinkler på enhetssirkelen og grafen til *f*. Vi endrer punktet *P* slik at vinkel *v* løper fra 0 til 2π på enhetssirkelen. Vi merker av
***y* - koordinatene** til punktet *P* i et koordinatsystem. Vi får da fram grafen til $\sin x$ for $x \in [0, 2\pi >$.

Legg merke til at buelengden på enhetssirkelen tilsvarer *x* - koordinatene til punktene på grafen.

Etter en runde på enhetssirkel vil funksjonsverdiene gjenta seg, og vi vil tegne den samme grafen om igjen. Vi sier derfor at funksjonen $f(x) = \sin x$ har en **periode** på 2π. Funksjoner som har grafer som gjentar seg om igjen og om igjen, kaller vi **periodiske funksjoner**. Funksjonen $f(x) = \sin x$ er en periodisk funksjon.

Vi bruker periodiske funksjoner for å beskrive periodiske fenomener som for eksempel tidevann.

Den lille byen Mont-Saint-Michel i Normandie har en av Frankrikes største tidevannsforskjeller. Tidevannet beveger seg inn og ut med en hastighet på 1 m/s, og stiger og synker inntil 14 m.

Mont-Saint-Michel var tidligere en øy halvparten av tiden og knyttet til fastlandet den andre halvparten, altså en "tidevannsøy".

Cosinusfunksjonen

Cosinusfunksjonen (117729)

Vi skal nå se på grafen til funksjonen *g* gitt ved $g(x) = \cos x$ når $x \in [0, 2\pi >$. Fra enhetssirkelen kjenner vi noen av funksjonsverdiene til *g*.

Vi vet for eksempel at $g(0) = 1,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ g(\pi) = -1$ osv.

Vi kan tegne grafen til cos*x* ved hjelp av enhetssirkelen. Vi endrer punktet *P* slik at vinkel *v* løper fra 0 til 2π på enhetssirkelen. Vi merker av ***x* - koordinatene** til punktet *P* i et koordinatsystem. Vi får da fram grafen til cos*x* for $x \in [0, 2\pi >$.

Cosinusfunksjonen *g* har også en periode på 2π. Grafen til funksjonen *g* vil dermed gjenta seg for hver gang den har løpt 2π.

Tangensfunksjonen

Tangensfunksjonen (117753)

Til slutt skal vi se på tangensfunksjonen $h(x) = \tan x$ i intervallet $[0, 2\pi >$. Som ovenfor tegner vi grafen til funksjonen *h* ved hjelp av enhetssirkelen.

Husk at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. For de verdier av *x* som gir at $\cos x = 0$, vil funksjonen *h* gitt ved $h(x) = \tan x$ derfor ikke være definert.

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ og $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to \pm\infty$ når $x \to \frac{\pi}{2}$ og når $x \to \frac{3\pi}{2}$.

Vi får de vertikale asymptotene $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$.

Fra tidligere vet vi at tan*x* gjentar seg for hver π. Perioden til funksjonen *h* er derfor π. Tangensfunksjonen *h* er altså en periodisk funksjon med periode π.

Vi skal nå se litt nærmere på grafer til ulike trigonometriske funksjoner om du går videre i menyen.

Periode, amplitude, likevektslinje og faseforskyvning

Periode, amplitude, likevektslinje og faseforskyvning (117763)

Periode - Amplitude - Likevektslinje / video
http://ndla.no/nb/node/133398

Vi vil nå studere en generell sinusfunksjon gitt ved $f(x) = \mathbf{A}\sin(\mathbf{kx} + \varphi) + d$ hvor *A* og *k* er positive størrelser.

Nedenfor har vi tegnet grafen til *f* når
$d = 3,\ A = \frac{3}{2},$
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ og $k = 2$.

Funksjonsuttrykket blir
$f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
med tilhørende graf.

Bruk GeoGebra-filen
A sinx (k x + φ) + d.ggb, og undersøk hvordan grafen til funksjonen endrer seg når vi endrer parameterne *d*, *A*, *k* og *φ*.

Likevektslinje

Tidligere har vi sett at grafen til sin*x* svinger rundt *x*-aksen. Denne grafen svinger rundt linja $y = 3$. Konstanten *d* bestemmer den horisontale linja grafen svinger rundt. Vi kaller denne linja for **likevektslinja**. Sinusverdiene svinger mellom -1 og 1. Da vil funksjonsverdiene svinge mellom $-\frac{3}{2} + 3$ og $\frac{3}{2} + 3$.

Fra grafen leser vi at i funksjonsuttrykket er $d = 3$.

Amplitude

Avstanden fra likevektslinja til et topp- eller bunnpunkt på grafen kaller vi **amplituden** til funksjonen. Svingningene i funksjonsverdiene gir denne avstanden lik $\frac{3}{2}$.

Fra grafen leser vi at amplituden er lik $\frac{3}{2}$. Det vil si at i funksjonsuttrykket er $A = \frac{3}{2}$.

Periode

Vi så tidligere at sin*x* har en periode på 2π. Det var fordi at etter at vinkelen *x* hadde løpt fra 0 til 2π, èn runde på enhetssirkelen, så begynte funksjonsverdiene å gjenta seg.

For funksjonen $\sin(\mathrm{kx} + \varphi)$ vil funksjonsverdiene begynne å gjenta seg når $\mathrm{kx} = 2\pi$, det vil si når$x = \frac{2\pi}{k}$.

Funksjonen $\mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + \varphi) + d$ **har derfor periode**$= \frac{2\pi}{k}$**.**

I vårt eksempel

Fra funksjonsuttrykket vet du at $k = 2$, og perioden er da lik $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Fra grafen kan du finne perioden ved for eksempel å se på avstanden mellom to påfølgende toppunkt eller lese av langs likevektslinja. Grafen ovenfor har periode $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$. Du kan da finne konstanten *k* i funksjonsuttrykket ved å sette $\frac{2\pi}{k} = \pi$. Ved å løse denne likningen får vi at $k = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Faseforskyvning

Alle sinusfunksjoner på formen $f_0(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + 0) + d$ skjærer *y*-aksen der likevektslinja skjærer *y*-aksen, og der f_0 er voksende. Leddet $\mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + 0) = 0$ når $x = 0$, og når *x*-verdiene øker fra null, så øker sinusverdiene og dermed funksjonsverdiene. Vi har altså at $f_0(0) = d$.

Tilsvarende skjæringspunkt med likevektslinja for $f(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + \varphi) + d$ er når $\mathrm{kx} + \varphi = 0$. Det vil si når $x = -\frac{\varphi}{k}$. Funksjonene *f* og f_0 har ellers like form, de har samme likevektslinje, amplitude og periode.

Det betyr at grafen til funksjonen *f*(*x*) er parallellforskjøvet en avstand lik $-\frac{\varphi}{k}$ langs *x*-aksen (likevektslinjen) i forhold til grafen til $f_0(x)$.

Vi sier at $f(x)$ har en faseforskyvning i forhold til $f_0(x)$ som er lik $-\frac{\varphi}{k}$. Faseforskyvningen er altså en *x*-verdi hvor *f*(*x*) skjærer likevektslinja for voksende funksjonsverdier.

Av uttrykket for faseforskyvning ser du at

Når φ er **negativ**, er faseforskyvningen positiv, og grafen er **forskjøvet mot høyre**.
Når φ er **positiv**, er faseforskyvningen negativ, og grafen er **forskjøvet mot venstre**.

Fra funksjonsuttrykket vet du at $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Da er faseforskyvningen $-\frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Forskyvningen er mot høyre siden φ er negativ.

Fra grafen kan du lese av faseforskyvningen som vist på figuren. Grafen viser at faseforskyvningen er $\frac{\pi}{4}$. Da er $-\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4}$ som gir $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Oppsummering

En funksjon *f* gitt ved $f(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + \varphi)$ har

$$\text{Likevekstlinje } y = d \;\; \text{Amplitude} = A \;\; \text{Periode} = \frac{2\pi}{k} \;\; \text{Faseforskyvning} = -\frac{\varphi}{l}$$

Når φ er **negativ**, er faseforskyvningen positiv, og grafen er **forskjøvet mot høyre**
Hvis φ er **positiv**, er faseforskyvningen negativ, og grafen er **forskjøvet mot venstre**

Når du skal lage en skisse av en graf til en sinusfunksjon på grunnlag av funksjonsuttrykket, kan det være lurt å starte med å avsette likevektslinjen og deretter faseforskyvningen på likevektslinjen.

Nedenfor har vi tegnet grafene til funksjonene *f* og *g* gitt ved $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$.

Kan du forklare hvorfor grafen til sinusfunksjonen er forskjøvet $\frac{\pi}{2}$ mot høyre sammenliknet med grafen til cosinusfunksjonen?

I avsnitt 3.2 så vi at $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.
Se figuren til høyre.

Vi så også at $\cos u = \cos(-u)$. Se enhetssirkelen nedenfor.

Vi får da at

$$\begin{aligned}\sin v &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - v\right)\\ &= \cos\left(-\left(\tfrac{\pi}{2} - v\right)\right)\\ &= \cos\left(v - \tfrac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Dette viser at grafen til sinusfunksjonen er forskjøvet $\frac{\pi}{2}$ mot høyre sammenliknet med grafen til cosinusfunksjonen.

Derivasjon av trigonometriske funksjoner

Derivasjon av trigonometriske funksjoner (117919)

Den deriverte av en trigonometrisk funksjon / video
http://ndla.no/nb/node/133399

Nedenfor har vi tegnet grafene til den deriverte av sin$x$, cos$x$ og tan$x$.

Nedenfor har vi tegnet grafene til $\cos x$, $\sin x$ og $-\sin x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$ og $1+\tan^2 x$.

Kan du ut fra grafene foreslå uttrykk for $(\cos x)'$, $(\sin x)'$ og $(\tan x)'$?

Vi har følgende formler for **derivasjon av trigonometriske uttrykk:**

$$(\text{sinx})' = \text{cosx}$$

$$(\text{cosx})' = -\text{sinx}$$

$$(\text{tanx})' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{eller} \quad (\text{tanx})' = 1 + \tan^2 x$$

Dersom vinklene er gitt ved *kx*, bruker vi **kjerneregelen** med $u = \mathrm{kx}$ og få

$$(\mathrm{sinkx})' = k \cdot \mathrm{coskx}$$

$$(\mathrm{coskx})' = -k \cdot \mathrm{sinkx}$$

$$(\mathrm{tankx})' = k \cdot \frac{1}{\cos^2 \mathrm{kx}} \quad \text{eller} \quad (\mathrm{tankx})' = k \cdot \left(1 + \tan^2 \mathrm{kx}\right)$$

Vis at

$$k \cdot \frac{1}{\cos^2 kx} = k \cdot \left(1 + \tan^2 kx\right)$$

Toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt

Toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt (117957)

Topp- bunn og vendepunkt grafisk / video
http://ndla.no/nb/node/133400

I eksempelet nedenfor skal vi vise hvordan vi finner**topp- og bunnpunkt** til en trigonometrisk funksjon ved å bruke **den førstederiverte**.

Vi skal så bruke den **andrederiverte** til å finne **vendepunkt**. Til slutt bruker vi **ettpunktsformelen** for å finne likningen for **vendetangenten**.

Topp- bunn og vendepunkt ved regning / video
http://ndla.no/nb/node/133401

Eksempel

Finn toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt til funksjonen

$$f(x) = 3\sin x + \cos x + 2 \qquad x \in [0, 2\pi >$$

Finn også likningen for vendetangenten.

Løsning

$$f(x) = 3\sin x + \cos x + 2$$
$$f'(x) = 3\cos x - \sin x$$

Vi finner eventuelle topp - og bunnpunkter ved å sette $f'(x) = 0$

$$3\cos x - \sin x = 0$$

$$\frac{3\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \qquad \cos x \neq 0$$

$$3 - \tan x = 0$$

$$\tan x = 3$$

$$x = 1,25 + n \cdot \pi$$

$$x = 1,25 \qquad \vee \qquad x = 4,39$$

$f'(x)$ har altså nullpunktene 1,25 og 4,39 i intervallet $[0, 2\pi >$.
($\cos x = 0$ er ikke løsning av likningen.)

Det er bare i nullpunktene $f'(x)$ kan skifte fortegn. Vi setter inn en *x*-verdi i hvert av intervallene $(\leftarrow,\ 1,25)$, $(1,25,\ 4,39)$ og $(4,39,\ \rightarrow)$ og setter opp en fortegnslinje for $f'(x)$.

$$f'(0) = 3\cos(0) - \sin(0) = 1 \qquad \leftarrow \text{ positiv}$$

$$f'(\pi) = 3\cos(\pi) - \sin(\pi) = -3 \qquad \leftarrow \text{ negativ}$$

$$f'\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \leftarrow \text{ positiv}$$

Grafen til *f* stiger når $x \in (\leftarrow,\ 1,25)$ for så å avta når $x \in (1,25,\ 4,39)$ og stige igjen når $x \in (4,39,\ \rightarrow)$.

Grafen til *f* har et toppunkt i $(1,25,\ f(1,25)) = (1,25,\ 5,16)$ og et bunnpunkt i $(4,39,\ f(4,39)) = (4,39,\ -1,16)$.

Vi finner vendepunkt ved å sette $f''(x) = 0$.

$$f(x) = 3\text{sinx} + \text{cosx} + 2$$

$$f'(x) = 3\text{cosx} - \text{sinx}$$

$$f''(x) = -3\text{sinx} - \text{cosx}$$

$$f''(x) = 0$$

$$-3\text{sinx} - \text{cosx} = 0$$

$$-3\text{tanx} = 1$$

$$\text{tanx} = \tfrac{1}{3}$$

$$x = -0,32 + n \cdot \pi$$

$$x = 2,82 \qquad \vee \qquad x = 5,96$$

Grafen til *f* har vendepunkt i $(2,82,\ f(2,82)) = (2,82,\ 2)$ og $(5,96,\ f(5,96)) = (5,96,\ 2)$.

Vi finner vendetangenten i punktet (2,28, 2).
Stigningstallet til tangenten er

$$f'(2,82)$$

$$= 3\cos(2,82) - \sin(2,82)$$

$$= -3,16$$

Vi bruker ettpunktsformelen $y - y_1 = a(x - x_1)$

$$y - 2 = -3,16(x - 2,82)$$

$$y = -3,16x + 10,91$$

Til slutt tegner vi grafen til $f(x) = 3\text{sinx} + \text{cosx} + 2 \quad x \in [0, 2\pi >$

y = -3.16x + 10.92
(1.25, 5.16)
y = 3.16x - 16.85
(4.39, -1.16)
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Alternativ metode for å finne topp- og bunnpunkter til «rene» sinus- eller cosinusfunksjoner

Alternativ metode for å finne topp- og bunnpunkter til «rene» sinus- eller cosinusfunksjoner (117959)

Fra enhetssirkelen vet vi at sinusfunksjonen gitt ved $f(x) = \sin x$ har sin største verdi 1 når $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ og sin minste verdi -1 når $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$. Vi kan finne disse verdiene ved å løse likningen $\sin x = 1$ evt. $\sin x = -1$. På samme måte kan vi finne når cosinusfunksjonen gitt ved $g(x) = \cos x$ har sin største verdi og sin minste verdi.

Eksempel

En sinusfunksjon *f* er gitt ved $f(x) = 2\sin(3x) + 1$

1. Finn den største og den minste verdien funksjonen *f* kan få.
2. Finn for hvilke verdier av *x* *f*(*x*) har den største verdien og den minste verdien.

Løsning

1. Vi vet at den største verdien sin(3*x*) kan få, er 1, og den minste verdien er -1.

   Den største verdien til *f* blir $2 \cdot 1 + 1 = 3$
   Den minste verdien til *f* blir $2 \cdot (-1) + 1 = -1$
2. Funksjonen *f* har størst verdi når $\sin(3x) = 1$. Vi løser denne likningen og finner

$$\sin(3x) = 1$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Funksjonen har altså sin største verdi 3 når $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

Vi går fram på samme måte når vi skal finne for hvilken verdi av *x* *f* har sin minste verdi.

Legg merke til at en funksjon *h* av typen $h(x) = -\sin x$ vil ha sin minste verdi -1 når $x = \frac{\pi}{2}$ og sin største verdi 1 ved $x = \frac{3\pi}{2}$.

Du kan også finne vendepunkter og stigningstall til vendetangenter ved å bruke denne metoden på den deriverte til rene sinus- og cosinusfunksjoner.

Omforme trigonometriske uttrykk av typen asinkx+bcoskx

Omforme trigonometriske uttrykk av typen a sin kx + b cos kx

Omforme trigonometriske uttrykk av typen a sin kx + b cos kx (118627)

Omforme trigonometriske uttrykk av typen asinkx+bcoskx / video
http://ndla.no/nb/node/133406

Tegn grafene til funksjonene f og g gitt ved

$$f(x) = \sin x + \cos x$$
$$g(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

i samme koordinatsystem.

Hva ser du?

Kan du bruke en av de trigonometriske sammenhengene du arbeidet med i 3.2, til å forklare dette?

Noen trigonometriske sammenhenger:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

Nedenfor har vi tegnet de to grafene. Vi ser at grafene er like. Hva betyr det?

Kan det bety at $f(x) = g(x)$? Hvordan kan vi undersøke om $f(x) = g(x)$?

$g(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Fra 3.2 har vi at $\sin(u+v) = \mathrm{sinu} \cdot \mathrm{cosv} + \mathrm{cosu} \cdot \mathrm{sinv}$.

Vi bruker dette og får

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\mathrm{sinx} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{cosx} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sinx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{cosx}\right) =$$

Vi kan vise at denne sammenhengen gjelder generelt

$$\begin{aligned}\mathrm{Asin}(\mathrm{kx} + \varphi) &= A(\mathrm{sinkx} \cdot \mathrm{cos}\varphi + \mathrm{coskx} \cdot \mathrm{sin}\varphi)\\ &= \underbrace{\mathrm{Acos}\varphi}_{a} \cdot \mathrm{sinkx} + \underbrace{\mathrm{Asin}\varphi}_{b} \cdot \mathrm{coskx}\\ &= \mathrm{asinkx} + \mathrm{bcoskx}\end{aligned}$$

Når vi altså setter $\mathrm{Acos}\varphi = a$, og $\mathrm{Asin}\varphi = b$, får vi

Generelt

$$\mathrm{asinkx} + \mathrm{bcoskx} = \mathrm{Asin}(\mathrm{kx} + \varphi)$$

Her er

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ og}$$

$$\mathrm{tan}\varphi = \frac{b}{a} \text{ når } \mathrm{cos}\varphi \neq 0.$$

NB!

Vi må passe på at vinkelen φ ligger i samme kvadrant som punktet (a, b).

For å vise at $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, kan vi bruke enhetsformelen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Husk at vi satte

$$a = \mathrm{A}\cos\varphi \text{ og } b = \mathrm{A}\sin\varphi$$

Vi får da at

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{(\mathrm{A}\cos\varphi)^2 + (\mathrm{A}\sin\varphi)^2} \\ &= \sqrt{A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} \\ &= \sqrt{A^2 \cdot 1} \\ &= A\end{aligned}$$

For å vise at $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ når $\cos\varphi \neq 0$,

bruker vi at

$$a = \mathrm{A}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{A}$$

$$b = \mathrm{A}\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{b}{A}$$

Vi vet at

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \cos\varphi \neq 0$$

og får da

$$\tan\varphi = \frac{\frac{b}{A}}{\frac{a}{A}} = \frac{b}{a}$$

Modellering

Modellering (118654)

Modellering / video
http://ndla.no/nb/node/133407

I praktiske forsøk undersøker vi ofte hvordan ulike størrelser varierer. Vi ønsker å finne ut om det er et mønster i variasjonene.

Vi kan for eksempel måle maksimumstemperaturen hver dag gjennom et år og prøve å finne en modell, en funksjon, som beskriver temperaturen som funksjon av hvilken dag i året det er. For å finne et funksjonsuttrykk kan vi markere sammenhørende verdier av de målte størrelsene i et koordinatsystem og trekke en kurve gjennom punktene.

Kurven vil i dette tilfelle mest sannsynlig likne på grafen til en sinusfunksjon. Vi har tidligere beskrevet hvordan vi kan finne funksjonsutrykket til en sinusfunksjon ut fra grafen til funksjonen.

Vi skal nå repetere og gå gjennom fremgangsmåten i detalj.

Du skal finne et funksjonsuttrykk av typen $f(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + \varphi) + d$ for denne grafen.

Du finner først **likevektslinjen** $y = d$ ved å ta middelverdien av $f_{\min}$ og $f_{\max}$.

$$d = \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Så leser du av **perioden** som avstanden langs likevektslinjen mellom to påfølgende skjæringspunkter mellom likevektslinjen og voksende graf.

Perioden til funksjonen er 12. Siden perioden er lik $\frac{2\pi}{k}$, får vi at $\frac{2\pi}{k} = 12$, som gir $k = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Så finner du **faseforskyvningen** som avstanden fra likevektslinjens skjæringspunkt med *y*-aksen til likevektslinjens skjæringspunkt med voksende graf. Grafen viser at faseforskyvningen er lik 2. Det betyr at $-\frac{\varphi}{k} = 2$, som gir $\varphi = -2 \cdot k$. Siden $k = \frac{\pi}{6}$, får vi at $\varphi = -2 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

Til slutt finner du **amplituden** ved å ta differansen mellom funksjonens største verdi og funksjonens laveste verdi og så dividere med to

$$A = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{5-(-1)}{2} = 3$$

Vi har nå funnet at $f(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{kx} + \varphi) + d = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Ubestemte integraler

Ubestemte integraler

Ubestemte integraler (118658)

$\int$

Fra grunnskolen kjenner du til regningsartene addisjon / subtraksjon og multiplikasjon / divisjon. Disse regningsartene opptrer i par slik at subtraksjon er den «motsatte» regningsarten til addisjon, og divisjon er den «motsatte» regningsarten til multiplikasjon.

Også derivasjon har en slik «motsatt» regningsart.

Ubestemt integral / video
http://ndla.no/nb/node/133410

For eksempel vet du at funksjonen $F(x) = x^2$ har funksjonen $f(x) = 2x$ som derivert. Funksjonen *f* er den deriverte til *F*. Den «motsatte» operasjonen går ut på å finne en funksjon som har 2*x* som derivert. Du ser at funksjonen $F(x) = x^2$ er en slik funksjon.

Det er naturlig å kalle funksjonen *F* **for en antiderivert til** *f*. Men av historiske grunner er det mer vanlig å si at *F* **er et ubestemt integral til** *f*. Vi sier at vi **integrerer** eller **antideriverer** når vi skal finne *F*.

Som symbol for et ubestemt integral, eller antiderivert, til *f* brukes $\int f(x)\,\mathrm{dx}$ og leses «det ubestemte integralet til *f*(*x*)». Symbolet $\int$ (lang S) kalles for et **integraltegn**, og funksjonen *f*(*x*) som skal integreres, kalles for **integranden**. Symbolet *dx* tas med blant annet for å vise at de funksjoner *F*(*x*) vi kommer fram til, er funksjoner av variabelen *x*. Det er *x* som er **integrasjonsvariabelen**. Du skal også se at dette er en praktisk skrivemåte i forbindelse med integrasjonsmetoder.

Vi så at funksjonen $F(x) = x^2$ er en antiderivert til $f(x) = 2x$. Men den deriverte til $x^2 + 3$ er også lik 2*x*. Derfor er også $x^2 + 3$ en antiderivert til 2*x*. Faktisk er enhver funksjon x^2 pluss en hvilken som helst konstant tall *C* en antiderivert til 2*x* fordi $(x^2 + C)' = 2x$. Vi sier at $x^2 + C$ er det **ubestemte** integralet til 2*x* fordi $x^2 + C$ ikke er én bestemt funksjon, men en hel klasse av funksjoner. Konstanten *C* kalles **integrasjonskonstanten**.

Definisjon av **ubestemt integral**

$$\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C \quad \text{hvis} \quad F'(x) = f(x)$$

Det ubestemte integralet av $f(x)$ er lik $F(x)$ pluss en konstant C. Symbolet $\int$ (lang S) kalles et **integraltegn**. Funksjonen $f(x)$ kalles **integranden**. Konstanten C kalles **integrasjonskonstanten**.

Vi sier at vi **integrerer** eller **antideriverer** $f(x)$ når vi finner $F(x)$. Symbolet dx viser at det er x som er **integrasjonsvariabelen**.

Eksempel

$$\int \left(x^2 + 3x + 4\right)\mathrm{dx} = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

fordi

$$\left(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + C\right)' = \tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + \tfrac{3}{2} \cdot 2x + 4 + 0 = x^2 + 3x + 4$$

Regneregler for integrasjon

Regneregler for integrasjon (118667)

Å kunne integrere funksjoner er like viktig som å kunne derivere funksjoner.

Det finnes integrasjonsregler tilsvarende derivasjonsreglene.

Her følger integrasjonsreglene du må kunne.

Integrasjon av en konstant *k*

$$\int k\,\mathrm{dx} = \mathrm{kx} + C$$

Regneregler for integrasjon / video
http://ndla.no/nb/node/133411

Integrasjon av potensfunksjoner

$$\int x^r\,\mathrm{dx} = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad r \neq -1$$

Når $r = -1$, gjelder

$$\int x^{-1}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \mathrm{Inx} + C \;\; x > 0$$

Integrasjon av eksponentialfunksjoner

$$\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x + C$$

$$\int e^{\mathrm{kx}}\mathrm{dx} = \frac{1}{k}e^{\mathrm{kx}} + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{Ina}}a^x + C \quad a > 0$$

Generelle regler

$$\int (f(x)+g(x))\mathrm{dx} = \int f(x)\mathrm{dx} + \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int (f(x)-g(x))\mathrm{dx} = \int f(x)\mathrm{dx} - \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int k\cdot f(x)\mathrm{dx} = k\cdot \int f(x)\,\mathrm{dx} \quad k \text{ er en konstant}$$

Du la sikkert merke til at integrasjonsregelen $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \mathrm{Inx} + C$ bare gjelder for positive *x*-verdier. Det kommer av at funksjonen In*x* bare er definert for positive verdier av *x*.

I R1-kapitlet om funksjoner beviste vi at $(\mathrm{Inx})' = \frac{1}{x}$ for positive *x*-verdier.

Vi repeterer beviset her.

Bevis

Fra definisjonen av den naturlige logaritmen har vi at ethvert positivt tall, *x*, kan skrives som *e* opphøyd i logaritmen til *x*

Når to funksjoner er like, er den deriverte av hver av funksjonene også like.

Vi deriverer venstre og høyre side hver for seg.

Venstre side: $x' = 1$

Høyre side: $\left(e^{\mathrm{Inx}}\right)' = (e^u)'\cdot u' = e^u\cdot u' = e^{\mathrm{Inx}}\cdot(\mathrm{Inx})' = x\cdot(\mathrm{Inx})'$

Da har vi

$$x\cdot(\mathrm{Inx})' = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{Inx})' = \frac{1}{x}$$

Men hva hvis $x \in (\leftarrow, 0)$?

Funksjonen $\mathrm{In}\,(x)$ er definert for alle verdier av *x* siden absoluttverdien av et negativt tall er lik det motsatte tallet som er positivt. Absoluttverdien av $-2, (-2)$, er for eksempel lik 2.

Til høyre ser du grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \mathrm{In}\,(x)$.

Vi har tegnet tangenter til grafen for $x = 2$ og for $x = -2$.

Stigningstallet til tangenten i et punkt er lik den deriverte i punktet.

Stigningstallet til tangenten når $x = -2$, er l i k $-0,5 = \frac{1}{-2}$. Det betyr at $f'(-2) = (\mathrm{In}\,(-2))' = \frac{1}{-2}$.

Stigningstallet til tangenten når $x = 2$, er lik $0,5 = \frac{1}{2}$. Det betyr at $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Det kan vises at det alltid gjelder at $(\mathrm{In}\,(x))' = \frac{1}{x}$.

Definisjonen av et ubestemt integral gir da at $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \mathrm{In}\,(x) + C$ for alle verdier av *x* forskjellig fra null.

Integrasjonsregel

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \mathrm{In}\,(x) + C$$

Prøv selv!
Bruk GeoGebra. Tegn grafen, velg et punkt og tegn tangenten til grafen i punktet. Du kan dra punktet langs grafen og finne stigningstallet til de ulike tangentene.

Den antideriverte til de trigonometriske funksjonene

Den antideriverte til de trigonometriske funksjonene (118668)

Antideriverte av trigonometriske funksjoner / video
http://ndla.no/nb/node/133412

Fra Derivasjon av trigonometriske funksjoner kjenner du derivasjonsreglene

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Hvis vi antideriverer cos$x$, får vi sin$x$ + C.

Hvis vi antideriverer $-\sin x$, får vi $\cos x + C$. Det betyr at den antideriverte til $\sin x$ blir $-\cos x + C$.

Ved å derivere **de trigonometriske funksjonene** finner vi altså følgende regler for integrasjon:

$$\int \sin x \ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \ dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \text{evt.} \quad \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + C$$

Eksempel

Når vi deriverer uttrykket sin2x, bruker vi kjerneregelen og får $(\sin u)' \cdot u' = 2\cos 2x$. Vi ser av svaret at vi har fått faktoren 2 i tillegg til det opprinnelige uttrykket. Når vi antideriverer, må vi multiplisere uttrykket med faktoren $\frac{1}{2}$ for å få det opprinnelige uttrykket.

$$\int 2\cos(2x) dx = 2\int \cos 2x \ dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2x + C = \sin 2x + C$$

Vi får da **følgende integrasjonsregler for trigonometriske funksjoner der vinkelen er et lineært uttrykk:**

$$\int \sin(kx + c) dx = -\frac{1}{k}\cos(kx + c) + C$$

$$\int \cos(kx + c) dx = \frac{1}{k}\sin(kx + c) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 kx} dx = \frac{1}{k}\tan kx + X \quad \text{evt.} \quad \int \left(1 + \tan^2 kx\right) dx = \frac{1}{k}\tan kx + C$$

Finne den antideriverte ved integrasjon med variabelskifte

Finne den anideriverte ved integrasjon med variabelskifte (118690)

Vi skal nå se på funksjoner som du ikke uten videre kan antiderivere ved hjelp av de reglene du har lært til nå. Du skal lære tre ulike metoder for å finne den antideriverte til slike funksjoner. Først Integrasjon med varialebskifte.

Integrasjon ved variabelskifte

Antiderivert med variabelskifte / video
http://ndla.no/nb/node/133413

Når vi integrerer med variabelskifte, bruker vi kjerneregelen «baklengs».
For å kunne bruke metoden benytter vi en ny skrivemåte for den deriverte.

Antiderivert med variabelskifte - Eksempel 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133414

Antiderivert med variabelskifte - Eksempel 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133415

Vi har tidligere definert den deriverte til en funksjon $y(x)$ i et punkt A som stigningstallet til tangenten til grafen i punktet.

$$y' = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x}$$

Vi kaller nå x for differensialet *dx* og definerer differensialet av funksjonen som $\mathrm{dy} = y' \cdot \mathrm{dx}$.

Vi får da at $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$. Hvis funksjonen har navnet *u*, så er $u' = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$ og $\mathrm{du} = u'\,\mathrm{dx}$.

Vi oppfatter altså *du* og *dx* som små størrelser som vi kan regne med. Hvis $u' = 2$, setter vi $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = 2$.

Vi kan da for eksempel løse denne likningen med hensyn på *dx* og få at $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{2}$.

Integrasjon ved variabelskifte kan brukes der hvor integranden kan skrives som et produkt av to uttrykk der det ene uttrykket inneholder «en kjerne *u*», og det andre uttrykket er den deriverte til denne kjernen.

Eksempel 1

$$\int 2x \cdot \sin\left(x^2 + 1\right) \mathrm{dx}.$$

Integranden er et produkt av to uttrykk, 2*x* og $\left(x^2 + 1\right)$. Vi setter kjernen $u = x^2 + 1$. Da er 2*x* lik den deriverte til kjernen.

Her må vi ha litt «teft» og se at den deriverte til $x^2 + 1$ er 2*x*.

Vi deriverer kjernen og får

$$u = x^2 + 1$$

$$u' = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = 2x$$

$$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{2x}$$

Vi erstatter vi $x^2 + 1$ med *u* og *dx* med $\frac{\mathrm{du}}{2x}$ og får

$$\int 2x \cdot \sin\left(x^2 + 1\right)\mathrm{dx} = \int \cancel{2x} \cdot \sin(u) \frac{\mathrm{du}}{\cancel{2x}} = \int \sin(u)\,\mathrm{du}$$
$$= -\mathrm{cosu} + C = -\cos\left(x^2 + 1\right) + C$$

Det at den deriverte av $x^2 + 1$ er 2*x*, gjør at variabelen *x* «forsvinner» i integranden slik at integranden kun inneholder variabelen *u*. Dette er selve «hemmeligheten» med metoden.

Metoden kan beskrives slik

Integrasjon med variabelskifte

$$\int f(u) \cdot u'\mathrm{dx} = \int f(u)\,\mathrm{du}, \quad \text{der} \quad \mathrm{du} = u'\,\mathrm{dx}$$

Eksempel 2

$$\int \frac{3x+6}{\sqrt{x^2+4x+5}}\mathrm{dx}$$

Vi setter $u = x^2 + 4x + 5$ og finner

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = 2x + 4$$

$$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{2x+4}$$

Vi får

$$\int \frac{3x+6}{\sqrt{x^2+4x+5}}\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+5}}\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4+5}}\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\int \frac{\cancel{2x+4}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\cancel{2x+4}} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Her er ikke den deriverte til kjernen nøyaktig lik $3x+6$, men den er av samme grad, og ved å sette faktoren $\frac{3}{2}$ utenfor integralet blir telleren lik den deriverte til kjernen slik at variabelen *x* «forsvinner» i integranden.

Du skjønner sikkert at det er en klar fordel å ha gode ferdigheter i derivasjon for å se om metoden kan brukes.

Vi antideriverer og finner

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{du} = \frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{du} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+} \cdot u^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{u} + C = 3\sqrt{x^2+4}$$

Eksempel 3

Vi kan bruke variabelskifte sammen med regelen om at $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln(x) \quad x \neq 0$ til å finne integralet $\int \frac{1}{\mathrm{ax}+b}\mathrm{dx}$ der *a* og *b* er konstante tall.

Vi setter $u = \mathrm{ax} + b$. Da er $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = a$, og vi får $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{a}$.

Det gir

$$\int \frac{1}{\mathrm{ax}+b}\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{\mathrm{ax}+b}\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\int \frac{\cancel{a}}{u}\frac{\mathrm{du}}{\cancel{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\mathrm{du} = \frac{1}{a}\ln(u) + C = \frac{1}{a}\ln(\mathrm{ax}+b) \cdot$$

Integrasjonsregel

$$\int \frac{1}{\mathrm{ax}+b}\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\ln(\mathrm{ax}+b) + C \quad x \neq 0 \quad a \neq 0$$

Finne den antideriverte ved delvis integrasjon

Finne den antideriverte ved delvis integrasjon (118703)

Vi skal nå se på funksjoner som du ikke uten videre kan antiderivere ved hjelp av de reglene du har lært til nå. Du skal lære tre ulike metoder for å finne den antideriverte til slike funksjoner. Dette er andre metode: Delvis integrasjon.

Delvis integrasjon

Antiderivert med delvis integrasjon / video
http://ndla.no/nb/node/133416

Denne metoden bygger på produktregelen for derivasjon.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\int (u \cdot v)' \mathrm{d}x = \int (u' \cdot v + u \cdot v') \, \mathrm{d}x$$

$$u \cdot v = \int (u' \cdot v) \mathrm{d}x + \int (u \cdot v') \, \mathrm{d}x$$

$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$

For oversiktens skyld skriver vi u istedenfor $u(x)$ og v istedenfor $v(x)$.

Antiderivert med delvis integrasjon - Eksempel / video
http://ndla.no/nb/node/133417

Regel

$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$

Eksempel

Vi skal finne $\int 2x \cdot \mathrm{lnxdx}$ ved bruk av delvis integrasjon .

La 2*x* være u' som gir $u = x^2$ og ln*x* være *v* som gir $v' = \frac{1}{x}$

Bruker formelen for delvis integrasjon og får

$$\int \overset{u'}{2x} \cdot \overset{v}{\mathrm{lnx}}\,\mathrm{dx} = \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v}{\mathrm{lnx}} - \int \overset{u}{x^2} \cdot \overset{v'}{\frac{1}{x}}\mathrm{dx}$$

$$= x^2 \cdot \mathrm{lnx} - \int \mathrm{xdx}$$

$$= x^2\mathrm{lnx} - \frac{1}{2}x^2 + C$$

Du bør tenke deg om før du velger hva du skal sette som *u´* og *v*.
Det kan ofte være både lurt og nødvendig å bytte rekkefølgen på uttrykkene i integranden.

Det gjelder å få et enklere uttrykk under integrasjonstegnet på høyre side. Virkemiddelet vi har, er at en av faktorene blir derivert i det nye integralet. Vi må altså finne ut hvilken av faktorene som derivert gir et enklere integrasjonsuttrykk.

Ovenfor så vi for eksempel at det var lurt å velge ln*x* som den faktoren som skal deriveres fordi $(\mathrm{lnx})' = \frac{1}{x}$.

Det er nødvendig at du regner mange oppgaver slik at du etter hvert ser hvilke uttrykk som lar seg integrere med delvis integrasjon.

Finne den antideriverte ved delbrøksoppspalting

Finne den antideriverte ved delbrøkoppspalting (118716)

Vi skal nå se på funksjoner som du ikke uten videre kan antiderivere ved hjelp av de reglene du har lært til nå. Du skal lære tre ulike metoder for å finne den antideriverte til slike funksjoner. Dette er tredje metode: Delbrøkoppspalting.

Delbrøksoppspalting

Antiderivert med delbrøkoppspalting / video
http://ndla.no/nb/node/133418

Vi har tidligere sett hvordan vi kan integrere brøkuttrykk der nevneren enten er en potensfunksjon eller en polynomfunksjon av første grad.

Nå skal vi se hvordan vi kan integrere brøkuttrykk der nevneren er en polynomfunksjon av høyere grad. Metoden forutsetter at vi kan skrive nevneren som et produkt av førstegradsuttrykk.

Vi viser metoden gjennom et eksempel.

Eksempel

Vi skal finne $\int \frac{1}{x^2-4}\mathrm{dx}$.

Vi kan faktorisere nevneren til $(x-2)(x+2)$ og kan da skrive

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Det gjelder nå å finne koeffisientene *A* og *B*.

Vi trekker sammen høyre side og får

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{B(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{\mathrm{Ax}+2A+\mathrm{Bx}-2B}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{0x+1}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

For at uttrykkene skal være like, må tellerne være like.
Telleren i brøken på venstre side har ikke noe *x*-ledd. Koeffisienten foran *x*-leddet er 0.

Det må bety at $(A+B)=0$.

Telleren på venstre side har konstanten 1, dvs. at $(2A-2B)=1$.

Vi har nå to likninger med to ukjente og finner

$$\begin{aligned}
A + B = 0 \quad &\wedge \quad 2A - 2B = 1 \\
A = -B \quad &\wedge \quad 2(-B) - 2B = 1 \\
A = -B \quad &\wedge \quad -4B = 1 \\
A = \tfrac{1}{4} \quad &\wedge \quad B = -\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vi setter *A* og *B* inn i det opprinnelige integralet og får

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{x^2-4}\mathrm{dx} &= \int \left(\tfrac{A}{x-2} + \tfrac{B}{x+2}\right)\mathrm{dx} \\
&= A\int \tfrac{1}{x-2}\mathrm{dx} + B\int \tfrac{1}{x+2}\mathrm{dx} \\
&= \tfrac{1}{4}\int \tfrac{1}{x-2}\mathrm{dx} - \tfrac{1}{4}\int \tfrac{1}{x+2}\mathrm{dx} \\
&= \tfrac{1}{4}\ln(x-2) - \tfrac{1}{4}\ln(x+2) + C \\
&= \tfrac{1}{4}\ln\left(\tfrac{x-2}{x+2}\right) + C
\end{aligned}$$

Metoden forutsetter, som nevnt ovenfor, at nevneren kan faktoriseres i førstegradsuttrykk. Du la kanskje også merke til at en forutsetning for å finne verdier for *A* og *B* var at telleren må ha lavere grad enn nevneren.

Bestemte integraler

Bestemte integraler

Bestemte integraler (118730)

Bestemte integraler / video
http://ndla.no/nb/node/133419

Vi ser på funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til *f* i et koordinatsystem.

Det blå området er avgrenset av grafen til *f*, *x* - aksen og linjene $x = 3$ og $x = 7$.

Vi kan finne en tilnærmet verdi for arealet hvis vi deler området under grafen inn i rektangler som vist på figuren nedenfor.

Bestemte integraler - Eksempel / video
http://ndla.no/nb/node/133420

Kan du, ved å bruke opplysningene på figuren, raskt regne ut arealet av disse fire rektanglene?

Vi kaller summen av de fire rektanglene for A_4. Vi får da

$$A_4 = f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + f(5) \cdot 1 + f(6) \cdot 1$$

$$A_4 = 3,25 + 4 + 5,25 + 7 = 19,5$$

Av figuren ser du at tilnærmingen vi gjorde for å finne arealet av området under grafen ikke er veldig god. Hva kan vi gjøre for å få en bedre tilnærming?

Tips: Se filen **Areal under graf.ggb**

For å få en bedre tilnærming kan vi dele området i stadig flere rektangler. Hvis du åpner filen **Areal under graf.ggb** i GeoGebra, kan du se hvordan arealet av rektanglene nærmer seg arealet under grafen, når antall rektangler øker.

Ved n = 30 fant vi at arealet av rektanglene var 21,94.

Vi tenker oss at vi fortsetter å øke antall rektangler «i det uendelige». Bredden til rektanglene, som vi kaller x, vil gå mot null, og summen av arealene til rektanglene vil nærme seg arealet under kurven som grenseverdi.

Matematikere bruker den greske bokstaven Σ (stor sigma) som betegnelse for sum av flere ledd. For ikke å gjøre det unødig komplisert, så forenkler vi det formelle matematiske språket og sier at $\sum_{3}^{7} f\left(x\right) \cdot \quad x$ skal betegne summen av arealene til rektanglene med bredde etter samme mønster som vist ovenfor.

Vi får da at

$$A = \lim_{x \to 0} \sum_{3}^{7} f(x) \cdot \quad x$$

Det er dette uttrykket som defineres som **det bestemte integralet** av $f(x)$ fra $x = 3$ til $x = 7$.

Det bestemte integralet fra *a* til *b* defineres som

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx} = \lim_{x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x) \cdot \quad x$$

Geometrisk vil det bestemte integralet $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{dx}$ representere det areal som er begrenset av x - aksen, linjene $x = a$ og $x = b$, og grafen til funksjonen $f(x)$.

Legg merke til skrivemåten for det bestemte integralet og spesielt likheten med skrivemåten for det ubestemte integralet. Vi kommer tilbake til grunnen til dette.

Ubestemte og bestemte integraler

Ubestemte og bestemte integraler (118734)

Fundamentalsetningen / video
http://ndla.no/nb/node/133421

Vi nevnte i forrige avsnitt at det er en sammenheng mellom ubestemte og bestemte integraler.

Vi ser igjen på funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 4m$$

Fundamentalsetningen - Eksempel / video
http://ndla.no/nb/node/133422

Vi finner det ubestemte integralet til *f*

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{dx} &= \int \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 4\right)\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C \\ &= \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + 4x + C\end{aligned}$$

Vi setter grenseverdiene 3 og 7 inn i uttrykket som vist nedenfor

$$\begin{aligned}\left(\frac{7^3}{12} - \frac{7^2}{2} + 4\cdot 7\right) - \left(\frac{3^3}{12} - \frac{3^2}{2} + 4\cdot 3\right) &= \frac{7^3-3^3}{12} - \frac{7^2-3^2}{2} + 4\cdot 7 - 4\cdot 3 \\ &= \frac{316}{12} - \frac{40}{2} + 16 \\ &= \frac{79}{3} - \frac{12}{3} = \frac{67}{3} \approx 22,33\end{aligned}$$

Dette er det samme resultatet som vi fikk da vi regnet ut det bestemte integralet tidligere.

Det kan vises at dette gjelder generelt. Dette er et grunnleggende resultat i matematikken, og vi kan formulere resultatet slik:

Fundamentalsetningen i matematisk analyse

La *f* være en kontinuerlig funksjon på intervallet (a, b)

La $F'(x) = f(x)$ for alle x i (a, b)

Da er $$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (F(x))_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi kan altså regne ut arealet, A, av området avgrenset av grafen til *f*, *x* - aksen og linjene
x = 3 og *x* = 7, som vist nedenfor

$$A = \int_3^7 \left(\tfrac{1}{4}x^2 - x + 4\right)\mathrm{dx}$$

$$= \left(\tfrac{x^3}{12} - \tfrac{x^2}{2} + 4x\right)_3^7$$

$$\left(\tfrac{7^3}{12} - \tfrac{7^2}{2} + 4\cdot 7\right) - \left(\tfrac{3^3}{12} - \tfrac{3^2}{2} + 4\cdot 3\right)$$

$$= \tfrac{7^3-3^3}{12} - \tfrac{7^2-3^2}{2} + 4\cdot 7 - 4\cdot 3$$

$$= \tfrac{316}{12} - \tfrac{40}{2} + 16$$

$$= \tfrac{79}{3} - \tfrac{12}{3}$$

$$= \tfrac{67}{3} \approx 22,33$$

Vi skal ikke bevise **fundamentalsetningen**, men vi kan illustrere den gjennom et eksempel.

Eksempel

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = 3x$.
Vi skal finne arealet avgrenset av grafen til *f* og *x* - aksen mellom *x* = 0 og *x* = 4.

Vi bruker formelen for arealet av en trekant og får

$$A = \tfrac{g\cdot h}{2} = \tfrac{4\cdot(3\cdot 4)}{2} = 24$$

Bruker vi en tilfeldig variabel *x* som grense i stedet for 4, får vi

$$A = \tfrac{x\cdot(3x)}{2} = \tfrac{3x^2}{2} = \tfrac{3}{2}x^2$$

Dette uttrykket er akkurat det samme som den antideriverte til 3*x* og

$$A = \int_0^4 3x\ \mathrm{dx} = \left(\tfrac{3}{2}x^2\right)_0^4 = \tfrac{3}{2}\cdot 4^2 = 24$$

Integraler med digitalt verktøy

Integraler med digitalt verktøy (118744)

Bestemte og ubestemte integraler med Geogebra / video
http://ndla.no/nb/node/133423

Du må kunne regne ut ubestemte og bestemte integraler i det digitale verktøyet du bruker.

I **GeoGebra** kan du finne det bestemte integralet ved kommandoen

Det ubestemte integralet finner du ved kommandoen

Integral[<Funksjon>]

For eksempel finner du integralet av 2*x* slik

h(x) = x²
Skriv inn: Integral[2x]

Arealberegninger og andre anvendelser av bestemte integraler

Areal mellom en graf og x - aksen

Areal mellom en graf og x - aksen (118752)

Areal over og under x-aksen / video
http://ndla.no/nb/node/133424

I Bestemte integraler så vi at bestemte integraler gjør det mulig for oss å beregne arealer avgrenset av krumme kurver.

Vi skal nå arbeide litt mer med arealberegninger.

Vi har sett at hvis $f(x) \geq 0$ for $x \in (a, b)$, kan vi finne arealet avgrenset av grafen til *f*, *x* - aksen og linjene *x* = *a* og *x* = *b* ved å regne ut det bestemte integralet

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

Eksempel

Til høyre har vi tegnet grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x) = x^2 + 2$.

Arealet av området som er markert med blått er

$$A = \int_2^4 f(x)\mathrm{dx} = \int_2^4 \left(x^2 + 2\right)\mathrm{dx}$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 2x\right)_2^4 = \tfrac{88}{3} - \tfrac{20}{3} = \tfrac{68}{3} \approx 22,7$$

Du prøvde kanskje å finne arealet ved å regne ut $\int_2^4 g(x)\,\mathrm{dx}$?

$$\int_2^4 g(x)\mathrm{dx} = \int_2^4 \left(-x^2 - 2\right)\mathrm{dx}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}x^3 - 2x\right)_2^4 = -\tfrac{88}{3} + \tfrac{20}{3} = -\tfrac{68}{3} \approx -22,7$$

Siden $g(x) < 0$ for $x \in (2,4)$, blir $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_2^4 g\left(x\right) \cdot \quad x = \int_2^4 g\left(x\right)\mathrm{dx} < 0$

Arealet er en positiv størrelse. Arealet er derfor **det negative integralet**

$$A = -\int_2^4 g\left(x\right)\mathrm{dx} = -\int_2^4 \left(-x^2 - 2\right)\mathrm{dx}$$

$$= -\left(-\tfrac{1}{3}x^3 - 2x\right)_2^4 = -\left(-\tfrac{88}{3} + \tfrac{20}{3}\right) = \tfrac{68}{3} \approx 22,7$$

Siden det ene området ligger over x - aksen, og det andre området ligger under x - aksen, må vi regne ut arealet av hvert område hver for seg. Vi må først finne ut hvor grafen til h skjærer x - aksen.

Vi finner skjæringspunktene med x - aksen

$$h(x) = 0$$

$$-x^2 + 10 = 0$$

$$x = -\sqrt{10} \ \vee \ x = \sqrt{10}$$

Arealet blir

$$A = \int_1^{\sqrt{10}} h\left(x\right)\mathrm{dx} - \int_{\sqrt{10}}^5 h\left(x\right)\mathrm{dx}$$

$$= \int_1^{\sqrt{10}} \left(-x^2 + 10\right)\mathrm{dx} - \int_{\sqrt{10}}^5 \left(-x^2 + 10\right)\mathrm{dx}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + 10x\right)_1^{\sqrt{10}} - \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + 10x\right)_{\sqrt{10}}^5$$

$$= \tfrac{20\sqrt{10}-29}{3} - \tfrac{25-20\sqrt{10}}{3}$$

$$= \tfrac{40\sqrt{10}}{3} - 18 \approx 24,2$$

$$\int_{1}^{3} h(x)\,dx = -\frac{4}{3}$$

Hva forteller det om arealene av de markerte områdene?

Arealet mellom grafer

Arealet mellom grafer (118759)

Areal mellom to funksjoner / video
http://ndla.no/nb/node/133425

Nedenfor har vi tegnet grafene til de to funksjonene *f* og *g* gitt ved
$f(x) = -x^2 + 12x + 10$ og
$g(x) = x^2 - 12x + 50.$

Vi må først finne ut hvor grafene skjærer hverandre

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 12x + 10 = x^2 - 12x + 50$$

$$-2x^2 + 24x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-2)(-40)}}{2(-2)} = \frac{-24 \pm 16}{-4}$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 10$$

Vi har tidligere sett at vi kan finne arealet som er markert med blått til venstre nedenfor ved å regne ut $\int_2^{10} f(x)\,\mathrm{dx}$. Arealet som er markert med rødt til høyre, finner vi ved å regne ut $\int_2^{10} g(x)\,\mathrm{dx}$.

Arealet av området mellom grafene er da

$$A = \int_2^{10} f(x)\mathrm{dx} - \int_2^{10} g(x)\mathrm{dx} = \int_2^{10} (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx}$$
$$= \int_2^{10} \left(-x^2 + 12x + 10 - \left(x^2 - 12x + 50\right)\right)\mathrm{dx}$$
$$= \int_2^{10} \left(-2x^2 + 24x - 40\right)\mathrm{dx} = \left(-\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{24}{2}x^2 - 40x\right)_2^{10} = \tfrac{400}{3} + \tfrac{112}{3} = \tfrac{512}{3}$$

Oppsummering

La $f(x) \geq 0$ for $x \in (a, b)$.

Arealet avgrenset av *x* - aksen, grafen til *f* og linjene *x* = *a* og *x* = *b* er

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

La $f(x) \leq 0$ for $x \in (a, b)$.

Arealet avgrenset av *x* - aksen, grafen til *f* og linjene *x* = *a* og *x* = *b* er

$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

La $f(x) \geq g(x)$ for $x \in (a, b)$.

Arealet mellom grafene fra *x* = *a* og *x* = *b* er

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx}$$

Legg merke til at hvis $g(x) \leq 0$, kan vi oppfatte *x* - aksen som $f(x) = 0$. Vi bruker regelen for arealer mellom grafer og får

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx}$$

$$A = \int_a^b (0 - g(x))\,\mathrm{dx}$$

$$A = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

Samlet mengde

Andre anvendelser av integrasjon, samlet mengde (119021)

$\int$

Vi har sett at ved å regne med bestemte integraler, kan vi finne arealet under kurver.

Vi kan også bruke bestemte integraler til å løse andre typer problemer.

Samlet mengde / video
http://ndla.no/nb/node/133426

Samlet menge

Eksempel

Erlend er ferdig med sin utdannelse og blir tilbudt jobb. Lønnsbetingelsene er å starte med en årlig inntekt på 270 000 kroner for deretter å stige i lønn med 7 % per år.

Hva vil den samlede inntekten til Erlend være de neste 20 årene?

Hva vil den samlede inntekten til Erlend være de neste 20 årene?

Løsning

Lønnen etter *x* år vil være gitt ved funksjonen $L(x) = 270\,000 \cdot 1,07^x$.

Samlet lønn for 20 år vil være

$$270\,000 \cdot 1 + 27\,000 \cdot 1,07 \cdot 1 + 270\,000 \cdot 1,07^2 \cdot 1 + \ldots + 270\,000 \cdot 1,07^{19} \cdot 1 = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \ldots + f(19) \cdot 1 \approx 11\,068\,783 \approx 11\,000\,000$$

Ser du at samlet lønn er representert med summen av arealene til rektanglene nedenfor?

For å regne ut den samlede lønnen kan vi bruke et digitalt verktøy.

I GeoGebra kan du bruke kommandoen **SumUnder[ ]**

I wxMaxima kan vi regne ut summen slik

```
L(x):=270000·1.07^x
sum(L(x), x, 0, 19), simpsum;
1.106878·10^+7
```

Vi får en **tilnærmingsverdi for samlet lønn** ved å regne ut hele arealet avgrenset av grafen til *L*, *x* - aksen, *y* - aksen og linjene *x* = *0* og *x* = *20*.

Dette gjør vi ved å regne ut det bestemte integralet for lønnsfunksjonen fra *x* = *0* til *x* = *20*

$$\begin{aligned}
\text{Samlet lønn} &\approx \int_0^{20} 270\,000 \cdot 1,07^x \,\mathrm{dx} \\
&= 270\,000 \int_0^{20} 1,07^x \,\mathrm{dx} \\
&= 270\,000 \left(\frac{1}{\ln 1,07} 1,07^x \right)_0^{20} \\
&= 270\,000 \cdot \frac{1}{\ln 1,07} \cdot \left(1,07^{20} - 1,07^0\right) \\
&\approx 11\,145\,182 \\
&\approx 11\,000\,000
\end{aligned}$$

Vi ser at denne tilnærmingsverdien er litt for stor. Men siden usikkerheten i lønnsutviklingen er stor, er det ikke riktig å ta med mer enn to siffer i svaret, og da blir resultatet det samme som da vi fant arealet av rektanglene ovenfor.

Hvis lønnen hadde vært justert hver måned, ville tilnærmingsverdien vært nesten helt riktig. Vi kunne da delt opp hvert rektangel i 12 mindre rektangler, og de små hvite feltene mellom kurven og rektanglene ville blitt veldig små. **Dersom lønnen hadde steget jevnt gjennom hele året, hadde det bestemte integralet gitt en helt riktig verdi av samlet lønn**.

Vi kan bruke ulike typer funksjoner for å beskrive en utvikling. Hvis en størrelse øker eller minker med **et fast antall** per tidsenhet, må vi bruke en **lineær funksjon**. Hvis en størrelse øker eller minker med en **fast prosent** per tidsenhet, bruker vi en **eksponentialfunksjon**. I andre situasjoner får vi bruk for **andre typer funksjoner**.

Uansett - hvis vi har **en funksjon av tiden**, *t*, kan vi bruke samme fremgangsmåte som ovenfor for å finne **samlet mengde over en tidsperiode**.

Oppsummering

Funksjonen $f(t)$ beskriver en **mengde per tidsenhet**. Vi finner **samlede mengde**, S, i tidsrommet fra $t = a$ til $t = b$ ved å regne ut det bestemte integralet

$$S = \int_a^b f\left(t\right) \mathrm{dt}$$

Volum

Andre anvendelser av integrasjon, volum (118783)

Vi har sett at ved å regne med bestemte integraler, kan vi finne arealet under kurver.

Vi kan også bruke bestemte integraler til å løse andre typer problemer.

Volum

Volum av kule / video
http://ndla.no/nb/node/133427

Tenk deg at du deler et egg med eggdeler. Da får du parallelle skiver med samme tykkelse, men med ulik størrelse. Skivene får tilnærmet form som sylindre.

Summen av volumene til alle skivene er lik volumet til egget.

Egget deles opp i skiver med samme tykkelse. Skivene får tilnærmet form som sylindre.

Av figuren ovenfor ser du at $A(x) \cdot \quad x$ er en tilnærmingsverdi for volumet av én skive.

En tilnærmingsverdi for det samlede volumet kan vi finne ved å summere volumet av alle skivene. Når x blir veldig liten, nærmer denne summen seg volumet av egget

$$V = \lim_{x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} A(x) \cdot \quad x = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,\mathrm{dx}$$

Volumet av en kule

Vi kan bruke dette til å vise at volumet av en kule er gitt ved $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Til høyre har vi tegnet en kule med radius *r*. Snittflaten i kulen er en sirkel. Radius i denne sirkelen kaller vi r_x.

Arealet av snittsirkelen er da

$$A(x) = \pi {r_x}^2$$

Vi bruker Pytagoras' setning og finner r_x uttrykt ved *r* og *x*

$${r_x}^2 = r^2 - x^2$$

$$r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Arealet av snittflaten er dermed gitt ved

$$A(x) = \pi \cdot {r_x}^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2$$
$$= \pi\left(r^2 - x^2\right)$$

Volumet blir

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right) \mathrm{dx}$$

$$= \int_{-r}^{r} \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dx} - \int_{-r}^{r} \pi \mathrm{x}^2 \, \mathrm{dx}$$

$$= \pi \mathrm{r}^2 \int_{-r}^{r} 1 \mathrm{dx} - \pi \int_{-r}^{r} x^2 \, \mathrm{dx}$$

$$= \pi \mathrm{r}^2 \cdot (x) - \left(\pi\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)_{-r}^{r}\right)_{-r}^{r}$$

$$= \pi \mathrm{r}^2 \cdot (r - (-r)) - \left(\pi \cdot \left(\tfrac{1}{3}r^3 - \left(-\tfrac{1}{3}r^3\right)\right)\right)$$

$$= \pi \mathrm{r}^3 + \pi \mathrm{r}^3 - \left(\tfrac{\pi \mathrm{r}^3}{3} + \tfrac{\pi \mathrm{r}^3}{3}\right)$$

$$= \tfrac{3\pi \mathrm{r}^3 + 3\pi \mathrm{r}^3 - \pi \mathrm{r}^3 - \pi \mathrm{r}^3}{3}$$

$$= \tfrac{4\pi \mathrm{r}^3}{3}$$

Husker du formlene for å regne ut volumet av de geometriske formene ovenfor? Hvilke av formlene kan vi se ved hjelp av integrasjon?

Volum av omdreiningslegemer

Andre anvendelser av integral, volum av omdreiningslegemer (118785)

$\int$

Vi har sett at ved å regne med bestemte integraler, kan vi finne arealet under kurver.

Vi kan også bruke bestemte integraler til å løse andre typer problemer.

Volum av omdreiningslegmer

Volum av omdreiningslegeme / video
http://ndla.no/nb/node/133428

Hvis vi dreier grafen til en funksjon 360° om x - aksen, får vi et **omdreiningslegeme**. Formen på omdreiningslegemet avhenger av formen på grafen. Hvis grafen er en rett linje, blir omdreiningslegemet en kjegle eller en avkortet kjegle. Se figurene nedenfor.

Hvis vi dreier en halvsirkel 360° om diameteren, får vi en kule.

La $f(x)$ være en vilkårlig funksjon som dreies 360° om x-aksen. Se figur.

Vi vil finne volumet av omdreiningslegemet som framkommer mellom x_1 og x_2.

Vi ser at radien til en snittsirkel er lik funksjonsverdien for den aktuelle
x - verdien

$$r = f(x)$$

Arealet av en snittsirkel blir

$$A\left(x\right) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(f\left(x\right)\right)^2$$

Vi får en **generell formel for volumet av omdreiningslegemer**

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A\left(x\right)\mathrm{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot \left(f\left(x\right)\right)^2 \mathrm{dx} = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(x\right)\right)^2 \mathrm{dx}$$

Matematiske modeller

Matematiske modeller

Matematiske modeller (118789)

Skyvelære

Matematiske modeller 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133431

Formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, som viser sammenhengen mellom radius i en kule og volumet av kula, er et eksempel på**en matematisk modell**. Hvis vi kjenner radius i en kule, kan vi bruke modellen til å regne ut volumet av kula. Motsatt kan modellen brukes til å regne ut radius når vi kjenner volumet.

Å lage matematiske modeller som viser sammenhengen mellom ulike størrelser kalles å **modellere**. Ved hjelp av en modell prøver vi å **beskrive virkeligheten med matematikk**.

Matematiske modeller 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133432

I dette kapittelet skal vi se på hvordan vi på grunnlag av observerte data kan formulere matematiske modeller.

Lineære modeller og lineær regresjon

Lineære modeller og lineær regresjon (118801)

En matematisk modell av typen

$$y = \mathbf{ax} + b$$

der *a* og *b* er konstanter, er **en lineær matematisk modell**. Grafen er en rett linje, derav navnet lineær modell.

Eksempel

Modell for omkretsen av en sirkel

Vi vil undersøke sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

For å samle inn data kan vi finne sirkelformede gjenstander og måle sammenhørende verdier av radius og omkrets.

Eller - vi kan gjøre det enklere og bruke GeoGebra til å finne noen sammenhørende verdier.

Tegn fire sirkler i GeoGebra med radius på henholdsvis 0,310, 1,40, 2,30 og 3,30.

Mål omkretsene og før resultatene i en tabell.

Radius	0,310	1,40	2,30	3,30
Omkrets	1,95	8,80	14,5	20,7

Plott verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

Punktene ligger på en rett linje.

Uansett hvor mange ulike sirkler vi måler, vil sammenhørende verdier av radius og omkrets ligge på den samme rette linjen.

Det betyr at det er en lineær sammenheng mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

Den rette linja skjærer *y*-aksen i origo.
Da er *b* = *0*.

Figuren viser at stigningstallet $a = 6{,}28$.

Likningen for den rette linjen blir altså $y = 6{,}28x$.

Vi har funnet at $y = 6{,}28x$ er en matematisk modell for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

Vi kan også bruke GeoGebra for å finne modellen.

Vi legger først verdiene fra tabellen ovenfor inn i regnearket i GeoGebra.

Merk alle dataene, høyreklikk, og velg «Lag liste med punkter». Punktene viser seg i grafvinduet, og det ser ut til at punktene ligger på en rett linje. I algebrafeltet ser du at samlingen av punkter har fått navnet «liste1».

	A	B	C	D
1	0.31	1.95		
2	1.4	8.8		
3	2.3	14.5		
4	3.3			
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Ved en metode som kalles **lineær regresjon**, kan du finne **den lineære modellen**.

I GeoGebra skriver du «**RegLin[liste1]**».

Den rette linjen gjennom punktene kommer nå opp, og likningen for linjen vises i algebrafeltet. Ved å høyreklikke på formelen for linjen, kan du velge at formelen skal gis på formen $y = ax + b$.

Likningen for linjen blir $y = 6{,}28x$.

Eksempel

Folketall i Norge

Tabellen nedenfor viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2010.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Folketall	3 249 954	3 567 707	3 863 221	4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 907 315

Vi lager en ny tabell der *x* er antall år etter 1950, og *f*(*x*) er folketallet i millioner.

x	0	10	20	30	40	50	60
f(x)	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5	4,9

Vi plotter punktene fra tabellen i et koordinatsystem.

Punktene ligger tilnærmet på en rett linje.

Vi bruker lineær regresjon og finner at

$$f(x) = 0,03x + 3,3$$

er en modell som tilnærmet beskriver utviklingen i folketallet i Norge fra 1950 til 2010.

Hva vil folketallet i Norge være i 2030 i følge denne modellen?

I år 2030 har det gått 80 år siden 1950.

I følge modellen vil folketallet da være

$$f(80) = 0,03 \cdot 80 + 3,3 = 5,7$$

Folketallet i Norge vil altså etter denne modellen være 5,7 millioner i 2030.

Kan vi stole på matematiske modeller?

Kan vi stole på matematiske modeller? (118808)

Formelen for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen er et eksempel på en matematisk modell som er svært nøyaktig.

Det har blitt gjort mange målinger som viser at vi kan stole på modellen.

Modellen vi fant for å beskrive hvordan folketallet i Norge utvikler seg, er mer usikker. For det første ser vi at linjen ikke treffer punktene fra tabellen helt nøyaktig. Den linjen som fremkommer ved lineær regresjon, er den som totalt sett har minst avvik fra punktene.

Den lineære modellen har stigningstall 0,03. Det betyr en vekst i folketallet på 0,03 millioner eller 30 000 per år. Er det realistisk at folketallet her i landet vil øke med ca. 30 000 per år i tiden framover? I tilfelle – hvor lenge vil denne utviklingen fortsette? Det er ikke lett å svare på dette. Her er det mange faktorer som kan virke inn. Vil politikerne begrense innvandringen til Norge, eller vil de åpne for fri innvandring? Hva med fødselspermisjoner og barnehagetilbud?

Vil det bli lettere eller vanskeligere å være småbarnsforeldre?

Vi kan stille liknende spørsmål til andre matematiske modeller. Vi må alltid vurdere om en matematisk modell er gyldig, og spesielt må vi ta hensyn til forhold som kan påvirke situasjonen før vi bruker en modell til å si noe om hva som vil skje i framtida.

Småbarnsforeldre

Potensfunksjon som modell

Potensfunksjon som modell (118812)

På figuren til høyre ser du en skisse av en pendel. Når du drar pendelkulen ut til siden slik figuren viser, og slipper den, vil kulen svinge fram og tilbake.

Svingetiden til pendelen er tiden det tar fra du slipper pendelkulen til den er tilbake i samme posisjon. Svingetiden måles i sekunder.

Svingetiden endrer seg når vi endrer lengden på snoren.

Hvis vi måler svingetiden ved ulike snorlengder og foretar en potensregresjon, finner vi en sammenheng tilnærmet gitt ved modellen *f* nedenfor

$$f(x) = 2,0 \cdot x^{0,5}$$

Denne modellen er en potensfunksjon.

Potensfunksjoner kan skrives på formen $f(x) = \mathrm{a}\mathrm{x}^b$, der *a* og *b* er konstante tall, og *x* er grunntallet i en potens.

For å foreta en potensregresjon skriver vi

i GeoGebra.

Eksponentialfunksjon som modell

Eksponentialfunksjon som modell (118816)

Eksempel

Eksponentialfunksjonen som modell / video
http://ndla.no/nb/node/133429

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilens verdi har sunket med 10 % hvert år siden den var ny. Vi regner med at denne verdireduksjonen vil fortsette de neste årene.

Bilens verdi $V(x)$, x år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved modellen

$$V(x) = 200\,000 \cdot 0,90^x$$

Av grafen til funksjonen V kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var nærmere 305 000 kroner.

Funksjonen V er en **eksponentialfunksjon**.

Eksponentialfunksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = a \cdot b^x \quad \text{der } a \text{ og } b \text{ er konstante tall.}$$

Legg merke til at x her er eksponent i potensen.

For å finne en eksponentiell modell ved regresjon må vi bruke eksponentialregresjon. Vi skriver da

i GeoGebra.

Solsikker i blomst. Toscana, Italia. Eksempel

Siv ville finne ut hvordan en solsikke hun hadde i hagen, vokste uke for uke. Hun målte høyden til solsikken hver uke i åtte uker. De observerte verdiene ser du i tabellen nedenfor.

Etter *x* uker	1	2	3	4	5	6	7	8
Høyde i cm	16	20	27	40	56	68	107	140

Vi markerer datamaterialet fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

Det ser ut som solsikken vokser raskere og raskere. Det er derfor naturlig å prøve med **eksponentiell regresjon**.

Eksponentiell regresjon i GeoGebra gir

$$f(x) = 11 \cdot 1,37^x$$

Solsikken var ca. 10,9 cm da Siv begynte å måle.
Dersom vi skriver funksjonsuttrykket på denne formen, ser vi at den har vokst med ca. 37 % hver uke.

Vi ser at kurven stemmer bra med de observerte verdiene, men det er viktig å legge merke til at modellen vi fant her bare gjelder i **et begrenset tidsintervall**.

Det vil være naturlig at veksten til solsikken vil avta og etter hvert stoppe helt opp. Da kan vi ikke bruke det samme funksjonsuttrykket.

Her må vi bruke sunn fornuft!

Polynomfunksjon som modell

Polynomfunksjon som modell (118819)

Polynomfunksjoner kan også brukes som modeller.

Noen ganger er det en andregradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser. En andregradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$$

Her er *a*, *b* og *c* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en andregradsfunksjon ved å skrive

```
RegPoly[liste1,2]
```

(Legg merke til at siden en andregradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 2, må vi skrive «,2» etter «liste1».)

Andre ganger er det en tredjegradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom størrelsene. En tredjegradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$$

Her er *a*, *b* og *c* konstanter, og $a \neq 0$. Du kan sjekke om punktene passer med en tredjegradsfunksjon ved å skrive

```
Skriv inn: RegPoly[liste1,3]
```

(Legg merke til at siden en tredjegradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 3, må vi skrive «,3» etter «liste1».)

Trigonometrisk funksjon som modell

Trigonometrisk funksjon som modell (118825)

Trigonometrisk funksjon som modell / video
http://ndla.no/nb/node/133430

Eksempel

x	0	1	4	7	9	10	12	13	15	17	20	22	24
T(°C)	19	17	15	17	19	21	25	26	27	26	24	22	18

Tabellen viser temperaturer målt gjennom et sommerdøgn ved Lindesnes fyr. Temperaturen, T, er målt i grader Celsius, og x er antall timer etter midnatt.

Nedenfor har vi markert datamaterialet fra tabellen ovenfor som punkter i et koordinatsystem.

Det er viktig at du kjenner egenskapene til grafene til de mest sentrale funksjonene.

Her er det naturlig å prøve om en sinusfunksjon eller en tredjegradsfunksjon kan passe med datamaterialet.

Vi prøver først med en sinusregresjon.

I GeoGebra legger vi inn punktene i liste1 og skriver i

Skriv inn: **RegSin[liste1]**

Vi får kurven til høyre og funksjonen *T* gitt ved
$T(x) = 21,27 + 6,0\sin(0,27x - 2,67)$.

Vi ser at kurven passer godt med punktene som er lagt inn.

Vi prøver så med regresjon for å finne en tredjegradsfunksjon som kan brukes som modell.

I GeoGebra skriver vi

Skriv inn: **RegPoly[liste1,3]**

Vi finner funksjonsuttrykket
$T(x) = -0,009x^3 + 0,26x^2 - 1,5x + 18,3$

Det er helt klart sinusfunksjonen som passer best med datamaterialet. Dette blir ekstra tydelig hvis vi studerer grafene for $x \notin (0, 24)$. Vi ser da fort at tredjegradsfunksjonen ikke er en realistisk modell.

Differensiallikninger

Teori

Hva er en differensiallikning?

Hva er en differensiallikning?

Hva er en differensiallikning? (119089)

Hva er en differensiallikning? / video
http://ndla.no/nb/node/133065

En vannbeholder inneholder 6000 liter væske. Vi åpner en kran slik at 30 liter væske renner ut per minutt.

La *y*(*t*), eller bare *y*, være den mengde væske som til enhver tid er igjen på tanken. Vi åpner kranen ved *t=0*.
Væsken renner ut med en konstant mengde på 30 liter per minutt.
Det betyr at $\frac{\Delta y}{\Delta t} = -30$ L/min er konstant og

$$y'(t) = -30$$

Likningen ovenfor inneholder **en beskrivelse av hvordan størrelsen y forandrer seg** og kalles en **differensiallikning**.

Å løse differensiallikningen går ut på å finne et uttrykk for *y*(*t*). For å klare dette, må vi integrere. Definisjonen av ubestemt integral gir

$$\begin{aligned} y' &= -30 \\ y &= \int -30 \ \mathrm{dt} \\ y &= -30t + C \end{aligned}$$

Uttrykket på høyresiden kjenner du igjen som det ubestemte integralet til en konstant.

Ved *t=0* var væskemengden *y*=6000 L. Det betyr at

$$\begin{aligned} y &= -30t + C \\ 6000 &= -30 \cdot 0 + C \\ C &= 6000 \end{aligned}$$

Likningen som viser resterende væskemengde etter tiden *t* blir da

$$y(t) = -30t + 6000$$

Når vi har funnet denne likningen, kan vi for eksempel beregne når tanken går tom ved å sette *y*(*t*)=0

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ -30t + 6000 &= 0 \\ t &= 200 \end{aligned}$$

Tanken går tom etter 200 minutter.

Løsningen av differensiallikningen var **en funksjon**, **en modell** som beskriver væskemengden i tanken som funksjon av tiden. Å sette opp og løse differensiallikninger kalles derfor også for å **modellere**. Overalt innen vitenskap og samfunnsliv er vi ute etter å finne modeller som beskriver sammenhenger mellom størrelser. Modellering ved å løse differensiallikninger regnes derfor ofte som et av de viktigste områdene innenfor matematikkfaget.

For å løse differensiallikningen måtte vi integrere. Å løse differensiallikninger oppfattes av mange som den store praktiske anvendelsen av integrasjon, og derivasjon.

I eksemplet ovenfor forutsatte vi at væskemengden rant ut av tanken med konstant hastighet. Det er kanskje mer realistisk at det renner mindre etter hvert som det blir mindre væske og dermed mindre trykk i tanken. I så fall kunne differensiallikningen vært på formen

$$y' = k \cdot y$$

Denne differensiallikning lar seg ikke løse med enkel integrasjon.

De fleste differensiallikninger inneholder både en funksjon og den deriverte til funksjonen. Ofte inneholder de også den dobbeltderiverte til funksjonen. Da kan det være utfordrende å løse likningene.

Dette kapittelet handler om å lære metoder for å løse differensiallikninger.

Du har sett at **å løse en differensiallikning går ut på å finne en ukjent funksjon**, i motsetning til en vanlig likning hvor oppgaven er å finne en ukjent verdi for en størrelse.

Det er vanlig å kalle den ukjente funksjonen for y og argumentet til funksjonen for x. Vi sløyfer ofte skrivemåtene $y(x)$ og $y'(x)$, og skriver bare y og y'.

Førsteordens differensiallikninger

Første ordens differensiallikninger

Førsteordens differensiallikninger (119098)

Førsteordens lineære differensiallikninger / video
http://ndla.no/nb/node/133066

En differensiallikning er **av første orden** hvis den førstederiverte av *y* inngår i likningen, men ikke den andrederiverte eller den deriverte av noen høyere orden.

Nedenfor ser du noen eksempler på første ordens differensiallikninger.

$y' + 2y = x$ $\quad y' + 3xy = \cos x$ $\quad y' = x^2$ $\quad y' + 2y = 0$

$(y')^2 + 3y = 2x$ $\quad y' + 2y^3 = \cos x$

$3y \cdot y' = x + 2$ $\quad \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x$

I likningene i første linje opptrer *y* og *y´* kun i første grad. Likningene i første linje kalles derfor for **lineære differensiallikninger**. Alle kan skrives på formen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Likningene i linje tre kan skrives på formen $g(y) \cdot y' = h(x)$. Slike likninger kalles for **separable differensiallikninger**.

Et av kompetansemålene i læreplanen sier at «du skal kunne løse lineære første ordens og separable differensiallikninger ved regning og gjøre rede for noen viktige bruksområder.» Det vil si at du skal kunne løse likningene i linje en og tre ovenfor.

Lineære førsteordens differensiallikninger

Kjennetegnet på **en lineær differensiallikning av første orden** er at den kan skrives på formen

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Hvis *q*(*x*) = 0 sier vi at likningen er **homogen**.

Differensiallikningen y’= q(x)

Differensiallikningen y’= q(x) (119102)

Differensiallikninger på formen y'=q(x) / video
http://ndla.no/nb/node/133067

De enkleste lineære første ordens differensiallikninger får vi når $p(x) = 0$. Hvis i tillegg $q(x) = k$, har vi den aller enkleste likningen som du så et eksempel på innledningsvis, men det er mer vanlig at $q(x)$ er en funksjon av x.

Alle slike differensiallikninger kan vi løse ved å **integrere høyresiden**.

Eksempel

Gitt differensiallikningen $y' = 2x$.
Vi løser likningen ved å integrere $2x$.

$$y' = 2x$$

$$y = \int 2x \ \mathrm{dx}$$

$$y = x^2 + C$$

Vi har nå funnet en generell løsning av differensiallikningen.

Integralkurver

Integralkurver (119105)

I eksempelet Differensiallikningen y'= g(x) ser vi at vi får mange løsninger. For hver verdi av konstanten *C* får vi en løsning representert ved en kurve som vist til høyre. Vi kaller disse kurvene for **integralkurver** og til sammen utgjør de en **kurveskare**.

Dette gjelder for alle differensiallikninger. Den generelle løsningen gir uendelig mange kurver, én kurve for hver verdi av *C*. Figuren viser noen integralkurver for noen heltallige verdier av *C*.

Felles for disse kurvene er at de til s a m m e *x*-verdi har den samme verdien for den deriverte, altså samme stigning.

Initialbetingelser

Initialbetingelser (119111)

Initialbetingelser / video
http://ndla.no/nb/node/133068

Hvis vi får oppgitt et par av sammenhørende verdier for x og y, kan vi sette disse verdiene inn i den generelle løsningen og finne verdien for integrasjonskonstanten C. Da har vi en entydig løsning.

I det innledende eksemplet var y=6000 ved t = 0. Vi fikk da den entydige løsningen på differensiallikningen, $y(t) = -30t + 6000$.

Hvis vi i eksemplet ovenfor får vite at for x = 1 er y = 3, kan vi finne C ved å sette $y(1)$ = 3.

Vi får da

$$y = x^2 + c$$

$$C = y - x^2$$

$$C = 3 - 1^2 = 2$$

Løsningen på differensiallikningen blir $y = x^2 + 2$.

Slike tilleggsopplysninger som gjør oss i stand til å finne den eksakte løsningen, kalles ofte for **initialbetingelser**.

Retningsdiagrammer

Retningsdiagrammer (119122)

Retningsdiagram / video
http://ndla.no/nb/node/133069

Det finnes også en mulighet for å danne seg et inntrykk av hvordan integralkurvene går uten å finne den generelle løsningen på differensiallikningen.

Vi bruker da at den deriverte er lik stigningstallet til tangenten til kurven i et punkt og i utvalgte punkter i koordinatsystemet tegner vi et lite linjestykke som viser retningen på tangenten til kurven i punktet.

I differensiallikningen ovenfor er $y' = 2x$. I alle punkter med x-koordinat lik -2, er da stigningstallet til tangenten lik –4. Vi tegner et lite linjestykke med stigningstall –4 i utvalgte punkter med x - koordinat lik –2. I utvalgte punktene der $x = 3$ tegner vi linjestykker med stigningstall 6 osv. Figuren nedenfor har vi tegnet i wxMaxima.

Mengden av alle disse små linjestykkene som viser retningen til integralkurvene gjennom punktene kalles for et **retningsdiagram** for integrallikningen.

På grunnlag av retningsdiagrammet er det mulig å skissere integralkurvene som figuren til høyre viser. Sammenlikn med integralkurvene ovenfor.

Generell løsning av lineære førsteordens differensiallikninger

Generell løsning av lineære førsteordens differensiallikninger (119188)

Generell løsning av førsteordens lineære differensiallikninger 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133070

En lineær differensiallikning av første orden kan skrives på formen

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Differensiallikningen $2y' = 12 + 4y$ er en slik likning og vi skal bruke denne til å vise hvordan vi generelt løser **lineære førsteordens differensiallikninger**.

Generell løsning av førsteordens lineære differensiallikninger 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133071

Vi lar her $p(x)$ og $q(x)$ være konstante tall for å gjøre fremstillingen så enkel som mulig, men fremgangsmåten er den samme om $p(x)$ og $q(x)$ er mer generelle funksjoner.

Eksempel

Et eksempel der $p(x)$ og $q(x)$ er konstante tall.

Generell løsning av førsteordens lineære differensiallikninger 3 / video
http://ndla.no/nb/node/133072

Generell løsning av førsteordens lineære differensiallikninger 4 / video
http://ndla.no/nb/node/133073

Gitt differensiallikningen $2y' = 12 + 4y$

Vi ordner likningen slik at vi får den på formen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Vi får $y' - 2y = 6$

Vi gjør nå et smart grep. Vi multipliserer alle ledd med konstanten *e* opphøyd i integralet til faktoren foran *y*, altså $e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}$.

Faktoren foran y, $p(x) = -2$.

Siden $\int -2\mathrm{dx} = -2x + C$ multipliserer vi alle ledd med e^{-2x}.

$$y' \cdot e^{-2x} - 2y \cdot e^{-2x} = 6 \cdot e^{-2x}$$

Ser du at venstresiden i likningen nå blir lik $\left(y \cdot e^{-2x}\right)'$?

Vi kan vise at dette er riktig ved derivasjon hvor vi bruker produktregelen og kjerneregelen

$$\left(y \cdot e^{-2x}\right)' = y' \cdot e^{-2x} + y \cdot \left(e^{-2x}\right)'$$

$$\left(y \cdot e^{-2x}\right)' = y' \cdot e^{-2x} + y \cdot e^{-2x} \cdot (-2x)'$$

$$\left(y \cdot e^{-2x}\right)' = y' \cdot e^{-2x} + y \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$\left(y \cdot e^{-2x}\right)' = y' \cdot e^{-2x} - 2y \cdot e^{-2x}$$

Nå kan vi løse likningen ved integrasjon

$$y' \cdot e^{-2x} - 2y \cdot e^{-2x} = 6 \cdot e^{-2x}$$

$$\left(y \cdot e^{-2x}\right)' = 6 \cdot e^{-2x}$$

$$y \cdot e^{-2x} = \int 6 \cdot e^{-2x}\,\mathrm{dx}$$

$$y \cdot e^{-2x} = \frac{6}{-2} \cdot e^{-2x} + C$$

$$y \cdot e^{-2x} = -3 \cdot e^{-2x} + C$$

$$y = -3 + \frac{C}{e^{-2x}}$$

$$y = C \cdot e^{2x} - 3$$

( )

Vi kan kontrollere at denne løsningen stemmer for alle verdier av *x* ved å sette løsningen inn i den opprinnelige differensiallikningen $2y' = 12 + 4y$

Venstre side

$$2y' = 2\left(\mathrm{Ce}^{2x} - 3\right)' = 2 \cdot \left(2\,\mathrm{Ce}^{2x}\right) = 4\,\mathrm{Ce}^{2x}$$

Høyre side

$$12 + 4y = 12 + 4\left(\mathrm{Ce}^{2x} - 3\right) = 12 + 4\,\mathrm{Ce}^{2x} - 12 = 4\,\mathrm{Ce}^{2x}$$

Vi ser dermed at den generelle løsningen $y = \mathrm{Ce}^{2x} - 3$ er en løsning av differensiallikningen for enhver verdi av *C*.

Figuren nedenfor viser noen integralkurver og et retningsdiagram for differensiallikningen.

Eksempel

Et eksempel hvor *q*(*x*) ikke er en konstant.

Vi skal løse differensiallikningen $y' + 2y - 6x = 0$.

Vi ordner først likningen slik at vi får den på formen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$y' + 2y = 6x$$

Faktoren foran *y*, $p(x) = 2$.

Siden $\int 2\mathrm{dx} = 2x + C$ multipliserer vi alle ledd med e^{2x} og får

$$y' + 2y = 6x$$

$$y' \cdot e^{2x} + 2y \cdot e^{2x} = 6x \cdot e^{2x}$$

$$\left(y \cdot e^{2x}\right)' = 6x \cdot e^{2x}$$

$$y \cdot e^{2x} = \int 6x \cdot e^{2x}\,\mathrm{dx}$$

Vi bruker nå delvis integrasjon for å regne ut integralet på høyre side i likningen

Delvis integrasjon

$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$

$u' = e^{2x} \Rightarrow u = \frac{1}{2}e^{2x}$

$v = 6x \Rightarrow v' = 6$

$$\int \overbrace{6x}^{v} \cdot \overbrace{e^{2x}}^{u'} \mathrm{dx} = \overbrace{6x}^{v} \cdot \overbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}^{u} - \int \overbrace{6}^{v'} \cdot \overbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}^{u} \mathrm{dx}$$

$$= 3x \cdot e^{2x} - \tfrac{3}{2}e^{2x} + C$$

Vi fortsetter på differensiallikningen og finner den generelle løsningen

$$y \cdot e^{2x} = \int 6x \cdot e^{2x} \, \mathrm{dx}$$

$$y \cdot e^{2x} = 3x \cdot e^{2x} - \tfrac{3}{2}e^{2x} + C$$

$$y = 3x - \tfrac{3}{2} + \tfrac{C}{e^{2x}}$$

$$y = 3x - \tfrac{3}{2} + \mathrm{Ce}^{-2x}$$

Retningsdiagram med noen integralkurver for

$y' + 2y = 6x$

$y' = 6x - 2y$

Legg merke til at siden både x og y inngår i uttrykket for y' har vi her langt større variasjon i retningene til linjestykkene.

Eksempel

Eksempel hvor *p*(*x*) ikke er en konstant.

Husk at du alltid må starte med å ordne likningen slik at du får den på formen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Gitt differensiallikningen $6x - 2\mathrm{xy} - y' = 0$.

$$6x - 2\mathrm{xy} - y' = 0$$

$$y' + 2\mathrm{xy} = 6x$$

Faktoren foran *y*, $p(x) = 2x$.

Siden $\int 2\mathrm{xdx} = x^2 + C$ multipliserer vi alle ledd med ex^2 og får

Smart grep!

$$y' \cdot e^{x^2} + 2x \cdot y \cdot e^{x^2} = 6x \cdot e^{x^2}$$

$$\left(y \cdot e^{x^2}\right)' = 6x \cdot e^{x^2}$$

$$y \cdot e^{x^2} = \int 6x \cdot e^{x^2} \, \mathrm{dx}$$

Vi bruker integrasjon med variabelskifte for å integrere høyresiden

$$y \cdot e^{x^2} = \int 6x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{dx}$$

$$y \cdot e^{x^2} = 3\int 2x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{dx}$$

$$y \cdot e^{x^2} = 3\int \cancel{2x} \cdot e^{u} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\cancel{2x}}$$

$$y \cdot e^{x^2} = 3\int e^{u}\,\mathrm{du}$$

$$y \cdot e^{x^2} = 3 \cdot e^{u} + C$$

$$y = \frac{3 \cdot \cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{x^2}}} + \frac{C}{e^{x^2}}$$

$$y = 3 + C \cdot e^{-x^2}$$

Integrasjon med variabelskifte

$\int f(u) \cdot u'\mathrm{dx} = \int f(u)\mathrm{du}$ der

$\mathrm{du} = u'\mathrm{dx}$

$u = x^2$

$f(u) = e^u$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

Separable differensiallikninger

Separable differensiallikninger (119455)

I likningen

$$\frac{y}{3} \cdot y' = x^2 + x$$

består venstresiden av en funksjon av *y* multiplisert med y' og høyresiden av en funksjon av *x*.

Separable differensiallikninger / video
http://ndla.no/nb/node/133081

Funksjonene er separert, skilt fra hverandre, av likhetstegnet.

Å separere betyr å skille fra hverandre

Differensiallikninger som kan skrives på denne formen kalles for **separable differensiallikninger**.

En **separabel differensiallikning** er en differensiallikning som kan skrives på formen

$$g(y) \cdot y' = h(x)$$

Fortsatt gjelder at *y* er en funksjon av *x*.

Vi løser separable differensiallikninger ved å utnytte at når integralene til to funksjoner er like for alle verdier av *x*, så må også funksjonene være like.

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow\ F(x) + C_1 = G(x) + C_2\ \Rightarrow\ F'(x) = G'(x)\ \Rightarrow\ f(x) = g(x)$$

Hvis

$$\int g(y)y'\mathrm{dx} = \int h(x)\,\mathrm{dx},\ \text{så er}\ g(y)y' = h(x)$$

Vi setter $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ og får

$$\int g(y)\frac{\mathrm{dy}}{\cancel{\mathrm{dx}}}\cancel{\mathrm{dx}} = \int h(x)\,\mathrm{dx}$$
$$\int g(y)\mathrm{dy} = \int h(x)\,\mathrm{dx}$$

Nå kan vi utføre intergasjonene på hver side og forsøke å finne løsninger til differensiallikningen.

I likningen ovenfor

$$\frac{y}{3} \cdot y' = x^2 + x$$

skriver vi $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, og får

$$\int \frac{y}{3} \cdot \frac{\mathrm{dy}}{\cancel{\mathrm{dx}}} \cancel{\mathrm{dx}} = \int \left(x^2 + x\right) \mathrm{dx}$$

Nå kan vi utføre integrasjonene på hver side

$$\int \frac{y}{3} \mathrm{dy} = \int \left(x^2 + x\right) \mathrm{dx}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} y^2 + C_1 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C_2$$

Vi setter $C = C_2 - C_1$ og får

$$y^2 = 2x^3 + 3x^2 + C$$

$$y = \pm\sqrt{2x^3 + 3x^2 + C}$$

Eksempel

Vi har tidligere løst differensiallikningen $2y' = 12 + 4y$. Vi kan vise at denne likningen også er en separabel differensiallikning

$$2y' = 12 + 4y$$

$$y' = 2y + 6$$

$$y' = 2\left(y + 3\right)$$

$$\frac{1}{y+3} \cdot y' = 2 \qquad y \neq -3$$

Likningen kan skrives på formen $g\left(y\right) \cdot y' = h\left(x\right)$ og er derfor en separabel differensiallikning.
Vi løser likningen ved å integrere på venstre og høyre side av likhetstegnet med hensyn på *x*.

$$\int \frac{1}{y+3} \cdot y' \mathrm{dx} = \int 2 \, \mathrm{dx}$$

Vi setter $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ og får

$$\int \frac{1}{y+3} \cdot \frac{\mathrm{dy}}{\cancel{\mathrm{dx}}} \cancel{\mathrm{dx}} = \int 2 \, \mathrm{dx}$$

$$\int \frac{1}{y+3} \mathrm{dy} = \int 2 \, \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{In}\left(y + 3\right) = 2x + C_1$$

$$e^{\mathrm{In}(y+3)} = e^{2x + C_1}$$

$$\left(y + 3\right) = e^{2x} \cdot e^{C_1}$$

$$y + 3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{2x}$$

$$y = C \cdot e^{2x} - 3 \quad \left(C = \pm e^{C_1}\right)$$

Vi får samme løsning (heldigvis) som vi fikk tidligere.

Absoluttverdi

Absoluttverdi (119483)

Definisjonen av et ubestemt integral gir at $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = F(x) + C$ der $(F(x) + C)' = \frac{1}{x}$.

Fra R1 husker du kanskje beviset for at $(\mathrm{Inx})' = \frac{1}{x}$ når $x \in (0, \rightarrow)$.

Logaritmefunksjonen	$f(x) = \mathrm{Inx} \quad x \in (0, \rightarrow)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Bevis

Definisjonen på naturlig logaritme sier at ethvert positivt tall, *x*, kan skrives som e opphøyd i logaritmen til *x*. Det gir at

$$x = e^{\mathrm{Inx}} \quad x \in (0, \rightarrow)$$

Når to funksjoner er like, så er også deres deriverte funksjoner like. Vi deriverer venstre og høyre side hver for seg.

Venstre side: $x' = 1$

Høyre side: $\left(e^{\mathrm{Inx}}\right)' = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot u' = e^{\mathrm{Inx}} \cdot (\mathrm{Inx})' = x \cdot (\mathrm{Inx})'$

Men da er

$$x \cdot (\mathrm{Inx})' = 1$$
$$\downarrow$$
$$(\mathrm{Inx})' = \frac{1}{x}$$

Men hva hvis $x \in (\leftarrow, 0)$?

Funksjonen $\mathrm{In}(x)$ er definert for alle verdier av *x* siden absoluttverdien av et negativt tall er lik det motsatte tallet som er positivt. Absoluttverdien av -2, skrives som (-2), er for eksempel lik 2.

Tegn grafen til $\mathrm{In}(x)$ i GeoGebra. Velg et punkt på grafen og tegn tangenten til grafen i punktet. Stigningstallet til tangenten er det samme som $(\mathrm{In}(x))'$. Stigningstallet til tangenten når for eksempel $x = -2$, er lik $-0,5 = \frac{1}{-2}$. Du kan dra punktet langs grafen og se at både for positive og negative verdier av *x* så er stigningstallet til tangenten$= (\mathrm{In}(x))' = \frac{1}{x}$.

Definisjonen av et ubestemt integral gir da at $\int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \mathrm{In}(x)$.

Du har kanskje også lurt på hvorfor for eksempel

$\int \frac{1}{2-x}\mathrm{dx} = -\mathrm{In}\,(2-x) + C$?

Vi benytter egentlig integrasjon ved variabelskifte.

Vi setter $u = 2 - x$ som gir $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = -1$ og $\mathrm{dx} = -\mathrm{du}$

Det gir

$$\int \frac{1}{2-x}\mathrm{dx} = \int -\frac{1}{u}\mathrm{du} = -\int \frac{1}{u}\mathrm{du} = -\mathrm{In}\,(u) + C = -\mathrm{In}\,(2-x) + C$$

Eksempel

Vi vil løse differensiallikningen $y' - \mathrm{cosx} \cdot y = 0$.

Vi sjekker først om likningen er separabel

$$y' = \mathrm{cosx} \cdot y$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \mathrm{cosx} \quad \text{når} \quad y \neq 0$$

Likningen er separabel og vi løser den slik

$$\int \frac{1}{y}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{cos}\ \ \mathrm{xdx}$$

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{dy} = \int \mathrm{cos}\ \ \mathrm{xdx}$$

$$\mathrm{In}\,(y) = \mathrm{sinx} + C_1$$

$$e^{\mathrm{In}(y)} = e^{\mathrm{sinx}+C_1}$$

$$(y) = e^{\mathrm{sinx}} \cdot e^{C_1}$$

$$y = \pm e^{c_1} e^{\mathrm{sinx}}$$

$$y = C \cdot e^{\mathrm{sinx}} \qquad \left(C = \pm e^{C_1}\right)$$

Vi forutsatte at $y \neq 0$. Vi må derfor sette inn og sjekke om også $y = 0$ kan være en løsning.

Den opprinnelige likningen var $y' - \mathrm{cosx} \cdot y = 0$.

Venstre side

$$y' - \mathrm{cosx} \cdot y = 0' - \mathrm{cosx} \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

Høyresiden er lik null.

Det betyr at $y = 0$ også er en løsning. Men vi ser at denne er dekket av den løsningen vi før har funnet, ved at konstanten *C* kan være 0. Det er altså ikke nødvendig å føre opp separat en løsning der *y* er konstant lik 0. Men det var prinsipielt viktig å undersøke dette!

Modellering

Fart og akselrasjon

Fart og akselerasjon (119499)

Modellering - fart og akselerasjon / video
http://ndla.no/nb/node/133082

Fra fysikk og dagligliv kjenner vi begrepet **akselerasjon**. Akselerasjonen forteller hvor fort farten til et legeme endrer seg med tiden. Det vil si at akselerasjonen er **den deriverte til farten** med hensyn på tiden. Noen ganger er akselerasjonen konstant, for eksempel ved **fritt fall uten luftmotstand**, hvor akselerasjonen er 9,8 m/s^2.

Vi betegner den konstante akselerasjonen med *a*, farten med *v* og tiden med *t*, og får at

$$a = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = v'.$$

$$v' = a$$

Det betyr at

$$v = \int a \ \mathrm{dt}$$

$$v = a \cdot t + C$$

Vi lar farten ved tiden *t*=0 være v_0.

Det betyr at

$$v = \mathrm{at} + C$$

$$C = v - \mathrm{at}$$

$$C = v_0 - a \cdot 0$$

$$C = v_0$$

Fritt fall?

Vi får et generelt uttrykk for **farten** til et legeme etter tiden *t*, med konstant akselerasjon *a* og begynnerfart v_0.

$$v = v_0 + \mathrm{at}$$

Farten til et legeme forteller hvor fort tilbakelagt strekning endrer seg med hensyn på tiden.

Vi kaller tilbakelagt strekning for *s* og får at

$$v = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = s'$$

$$s' = v$$

Det betyr at

$$s = \int v \ \mathrm{dt}$$

$$s = \int (v_0 + \mathrm{at})\, \mathrm{dt}$$

$$s = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 + C$$

Vi lar strekningen være null ved tiden null. Da er integrasjonskonstanten også null, og formelen for tilbakelagt strekning ved konstant akselerasjon er

$$s = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$

Vi har nå sett hvordan vi kommer fram til det vi kaller bevegelseslikningene ved konstant akslerasjon.

Bevegelseslikningene ved konstant akselerasjon

$$v = v_0 + \mathrm{at} \quad \text{og} \quad s = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$

Ved fritt fall i tyngdefeltet er $a = g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.

Disse formlene er eksempler på **matematiske modeller**. Selve prosessen kalles å **modellere**.

Vi har altså modellert praktiske situasjoner ved å omforme praktiske problemstillinger til differensiallikninger, løst dem og fått modeller som beskriver fart og tilbakelagt strekning for et legeme som starter med begynnerfarten v_0 ved tiden $t = 0$.

Denne prosessen viser hvor nyttige differensiallikninger er. Det fins mange praktiske situasjoner hvor vi kan gjøre tilsvarende og lage matematiske modeller. Vi skal gi noen eksempler.

Proporsjonal vekst

Proporsjonal vekst (119506)

Modellering - proporsjonal vekst / video
http://ndla.no/nb/node/133083

Tenk deg at du setter 10 000 kroner i banken. Pengene står urørt på en konto og du får en årlig rente på 8 %. Regning med vekstfaktor gir at etter *t* år i banken har beløpet vokst til $10\,000 \cdot 1,08^t$ kroner. Hvert år vokser beløpet med 8 % av beløpet som stod på kontoen året før. Når rentene blir beregnet på denne måten, tar en ikke hensyn til at beløpet egentlig vokser gjennom hele året; det beregnes ikke renter av de rentene som opparbeides gjennom året.

Noen banker gjør det litt annerledes. De beregner renter hver måned som en tolvdel av årsrenten, og legger disse rentene til innestående beløp. Neste måned blir det en høyere kapital å beregne renter av, og rentene blir høyere for denne måneden enn for den forrige. Vi sier at bankene **kapitaliserer rentene** hver måned.

Vokser pengene dine proporsjonalt?

Enda mer gunstig for kunden er det hvis rentene kapitaliseres hver dag, og mest gunstig hvis rentene kapitaliseres hele tiden.

Dette kan vi få til ved å sette opp en differensiallikning.

Vi lar *y* være innestående kapital og setter

$$y' = 0,08 \cdot y$$

Vi ordner differensiallikningen og løser den

$$y' - 0,08y = 0$$

$$y' \cdot e^{-0,08t} - 0,08y \cdot e^{-0,08t} = 0 \cdot e^{-0,08t}$$

$$\left(y \cdot e^{-0,08t}\right)' = 0$$

$$y \cdot e^{-0,08t} = \int 0 \, \mathrm{dt}$$

$$y \cdot e^{-0,08t} = C$$

$$y = \frac{C}{e^{-0,08t}}$$

$$y = C \cdot e^{0,08t}$$

Når $t = 0$ er beløpet i banken kr 10 000. Vi lar *y* angi beløpet i antall tusen kroner, og får

$$10 = C \cdot e^{0,08 \cdot 0}$$

$$10 = C \cdot 1$$

$$C = 10$$

Ved kontinuerlig vekst vil innestående beløp til enhver tid være gitt ved

$$y = 10 \cdot e^{0,08t}$$

Vi kan sammenlikne de to vekstkurvene grafisk og se hva som lønner seg for banken eller kunden.

Etter 40 år er forskjellen på kr 28 000 til fordel for kontinuerlig vekst, og etter 50 år er forskjellen på kr 77 000.

Kanskje bør du undersøke på hvilken måte pengene forrentes hvis du tenker på å sette et pengebeløp i banken med sikte på å trygge pensjonen din om 50 år!

Når veksten av en størrelse er proporsjonal med størrelsen selv, har vi differensiallikningen

Generell løsning av differensiallikningen er

Populasjonsvekst. Logistisk vekst

Populasjonsvekst. Logistisk vekst (119555)

I naturen utgjør en samling individer av en art innenfor et avgrenset område en **populasjon**.

Bakteriekultur under mikroskop. Er vekstfarten proporsjonal med størrelsen på populasjonen?

Hvis en art får formere seg under stabile forhold med jevn tilgang til mat i et stabilt klima og med fast prosentvis reduksjon på grunn av sykdommer og rovdyr, kan **vekstfarten** til antall individer i populasjonen være **proporsjonal med størrelsen på populasjonen**. Hvert individ genererer i gjennomsnitt like mange nye individer, og det er derfor antall individer til enhver tid som bestemmer veksten.

Proporsjonalitetskonstanten avhenger av de faktorer som har betydning for utviklingen.

Under slike stabile forhold, hvor vi lar *N* betegne antall individer i et område, kan utviklingen beskrives av differensiallikningen

$$N' = k \cdot N$$

Hvis vi løser denne likningen, får vi

$$\begin{aligned}
N' &= k \cdot N \\
N' - k \cdot N &= 0 \\
N' \cdot e^{-\mathrm{kt}} - k \cdot N \cdot e^{-\mathrm{kt}} &= 0 \cdot e^{-\mathrm{kt}} \\
\left(N \cdot e^{-\mathrm{kt}}\right)' &= 0 \\
N \cdot e^{-\mathrm{kt}} &= \int 0 \, \mathrm{dt} \\
N \cdot e^{-\mathrm{kt}} &= C \\
N &= \frac{C}{e^{-\mathrm{kt}}} \\
N &= C \cdot e^{\mathrm{kt}}
\end{aligned}$$

hvor *C* står for antall individer ved starten.

I naturen kan slike stabile forhold forekomme i et begrenset tidsintervall når en populasjon får utvikle seg med ubegrenset tilgang til mat og uten naturlige fiender og sykdommer. Et typisk eksempel kan være utviklingen av antall bakterier i en bakteriekultur i en tidlig utviklingsfase.

En vanlig utvikling er at når antall individer i en populasjon blir stort nok, så inntrer endringer. Tilgangen til næring begrenses på grunn av et stort antall individer og sykdommer oppstår. Ingen populasjoner kan vokse ubegrenset. **Bæreevnen**, *B*, for et område forteller hvor mange individer det aktuelle området maksimalt kan gi næring til.

Biologer har funnet ut at under ustabile forhold i et område med bæreevne *B*, vil en modell hvor veksten er proporsjonal med både antall individer og differensen mellom bæreevnen og antall individer, beskrive utviklingen på en god måte.

$$N' = k \cdot N \cdot (B - N)$$

Vi ser at etter denne modellen vil veksten være null
når antall individer har nådd bæreevnen.

Denne modellen for vekst kalles for **logistisk**.

Modellen for logistisk vekst kan også brukes for å beskrive veksten til for eksempel et tre. Treets høyde utvikler seg nærmest eksponentielt den første tiden. Siden flater veksten ut og treet nærmer seg gradvis sin maksimalhøyde.

Logistisk vekst?

Vi vil løse **differensiallikningen for logistisk vekst**. Antall individer er funksjon av tiden.

$$N' = k \cdot N \cdot (B - N)$$

Likningen er separabel og vi dividerer slik at vi får *N* og *N´* i ett ledd på venstre side

$$N' = k \cdot N \cdot (B - N)$$

$$\frac{1}{N(B-N)} N' = k$$

Vi spalter så i delbrøker før vi integrerer

$$\frac{1}{N(B-N)} = \frac{a}{N} + \frac{b}{B-N}$$

$$= \frac{a \cdot (B-N)}{N \cdot (B-N)} + \frac{b \cdot N}{(B-N) \cdot N}$$

$$= \frac{\mathrm{aB} - \mathrm{aN} + b \cdot N}{N \cdot (B-N)} = \frac{(b-a)N + \mathrm{aB}}{N \cdot (B-N)}$$

Siden telleren i brøken til venstre skal være lik telleren i brøken til høyre, må vi ha

$$\begin{pmatrix} b - a = 0 \\ a \cdot B = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = \frac{1}{B}$$

Vi får to brøker og kan integrere

$$\frac{1}{N(B-N)} N' = k$$

$$\left(\frac{\frac{1}{B}}{N} + \frac{\frac{1}{B}}{B-N} \right) \frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = k$$

$$\frac{1}{B} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{B-N} \right) \mathrm{dN} = \int k \ \mathrm{dt}$$

$$\frac{1}{B} \left(\int \frac{1}{N} \mathrm{dN} + \int \frac{1}{B-N} \mathrm{dN} \right) = \int k \ \mathrm{dt}$$

For å finne $\int \frac{1}{B-N} \mathrm{dN}$ bruker vi substitusjon

$$u = B - N$$

$$\mathrm{du} = -\,\mathrm{dN}$$

$$\mathrm{dN} = -\,\mathrm{du}$$

$$\int \frac{1}{B-N}\mathrm{dN} = -\int \frac{1}{u}\mathrm{du} = -\,\mathrm{In}\,(B-N)$$

Vi får da

$$\frac{1}{B}\left(\int \frac{1}{N}\mathrm{dN} + \int \frac{1}{B-N}\mathrm{dN}\right) = \int k\ \mathrm{dt}$$

$$\frac{1}{B}\left(/n\,(N) - \mathrm{In}\,(B-N)\right) = k \cdot t + C_1$$

$$\mathrm{InN} - \mathrm{In}\,(B-N) = B \cdot k \cdot t + C_2 \qquad N > 0 \text{ og } B - N > 0$$

$$\mathrm{In}\,\frac{N}{B-N} = B \cdot k \cdot t + C_2 \qquad (C_2 = B \cdot C_1)$$

$$e^{\mathrm{In}\,\frac{N}{B-N}} = e^{B \cdot k \cdot t + C_2}$$

$$\frac{N}{B-N} = e^{B \cdot k \cdot t + C_2}$$

$$N = e^{B \cdot k \cdot t + C_2}\,(B-N)$$

$$N = e^{\mathrm{Bkt}} \cdot e^{C_2} \cdot B - e^{\mathrm{Bkt}} \cdot e^{C_2} \cdot N$$

$$N + e^{\mathrm{Bkt}} \cdot C \cdot N = e^{\mathrm{Bkt}} \cdot C \cdot B \qquad \left(C = e^{C_2}\right)$$

$$N\left(1 + \mathrm{Ce}^{\mathrm{bkt}}\right) = \mathrm{BCe}^{\mathrm{Bkt}}$$

$$N = \frac{\mathrm{BCe}^{\mathrm{Bkt}}}{1 + \mathrm{Ce}^{\mathrm{Bkt}}}$$

$$N = \frac{B}{\mathrm{Ce}^{-\,\mathrm{Bkt}} + 1}$$

Vi har nå funnet den generelle løsningen på differensiallikningen som beskriver en logistisk modell.

Differensiallikningen nedenfor beskriver en **logistisk modell**

$$y' = k \cdot y \cdot (B - y) \quad y \in (0, B)$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen er

$$y = \frac{B}{\mathrm{Ce}^{-\,\mathrm{Bkt}} + 1}$$

Eksempel

Antall bakterier i en forurenset vannbeholder er til å begynne med 5 000. Den første timen øker antall bakterier med 900. Vi antar at antall bakterier følger en logistisk vekstmodell og at bæreevnen for antall bakterier i vannbeholderen er 50 000.

Bakterier under mikroskop.

Vi lar *N* være bakterieantallet etter *t* timer.
Etter en logistisk vekstmodell er

$$N' = k \cdot N \cdot (B - N)$$

I vår bakteriekultur får vi

$$900 = k \cdot 5000 \cdot (50\,000 - 5000)$$

$$k = 0,000\,004$$

Vekstmodellen blir nå

$$N' = 0,000\,004 \cdot N \cdot (50\,000 - N)$$

Den generelle løsningen er

$$N = \frac{50\,000}{\mathrm{C}e^{-50\,000 \cdot 0,000004t} + 1}$$

$$N = \frac{50\,000}{\mathrm{C}e^{-0,2t} + 1}$$

Det var 5000 bakterier ved tiden *t* = 0

$$5000 = \frac{50\,000}{\mathrm{C}e^{-0,2 \cdot 0} + 1}$$

$$C + 1 = \frac{50\,000}{5000}$$

$$C = 10 - 1$$

$$C = 9$$

Vi får da denne logistiske vekstmodellen

$$N = \frac{50\,000}{9e^{-0,2t} + 1}$$

Antall bakterier etter henholdsvis 3, 24 og 48 timer er

$$N(3) = \frac{50\,000}{1 + 9 \cdot e^{-0,20 \cdot 3}} \approx 8\,419 \quad N(24) = \frac{50\,000}{1 + 9 \cdot e^{-0,20 \cdot 24}} \approx 46\,552 \quad N\left(48\right) = \frac{50\,000}{1 + 9 \cdot e^{-0,20 \cdot 48}}$$

Vi ser også grafisk at antall bakterier etter hvert nærmer seg bæreevnen på 50 000 bakterier i vannbeholderen.

Eksempel

Antall ørret i et vann har økt kraftig etter at det ble begynt med kalking av vannet i 1996. Tabellen nedenfor viser antall ørret i vannet noen år etter 1996.

Årstall	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antall år etter 1996, *t*	0	2	4	6	8	10	12
Antall ørret i tusen, *N*	4	6,7	11,4	17	21,5	24,5	26

For å undersøke om utviklingen i bestanden følger en logistisk vekstmodell, bruker vi logistisk regresjon i GeoGebra.

Vi lager først en liste med punkter

$$\text{Liste} = ((0,4),\ (2,6.7),\ (4,11.4),\ (6,17),\ (8,21.5),\ (10,24.5),\ (12,26))$$

Så skriver vi RegLogist[Liste], og får modellen for logistisk vekst

$$N(t) = \frac{27{,}74}{1+6{,}6e^{-0{,}39t}}$$

Vi plotter listen med punkter sammen med grafen til funksjonen.

Vi ser at modellen beskriver den faktiske utviklingen ganske bra.

Når tiden blir stor vil $e^{-0,39t}$ bli mindre og mindre, og antall ørret i vannet vil nærme seg en grense på 27 740 ørret.

Fiskelykke? Isfestival i Korea. Rundt hundre tusen mennesker samles for å fiske ørret gjennom hull i isen på en frossen elv i Hwacheon nordøst for Seoul.

Fall i tyngdefeltet

Fall i tyngdefeltet (119635)

Modellering - Fall i tyngdefeltet / video
http://ndla.no/nb/node/133084

Vi tenker oss et legeme som faller i tyngdefeltet nær jordens overflate og som kun påvirkes av tyngdekraften og av luftmotstanden.

Tyngdekraften, eller gravitasjonskraften, er tiltrekningskraften til jorden og er proporsjonal med legemets masse *m*.

Proporsjonalitetskonstanten, *g*, varierer litt avhengig av hvor i jordens tyngdefelt legemet befinner seg, men en gjennomsnittlig verdi er 9,8 m/s^2 eller tilnærmet lik 10 m/s^2. Dette er akselerasjonen et legeme vil få i fritt fall uten luftmotstand.

En modell for luftmotstanden er at den er proporsjonal med farten, *v*, til legemet. Proporsjonalitetskonstanten, *k*, avhenger av legemets form og masse. En person med fallskjerm har for eksempel større luftmotstand enn en person uten fallskjerm. For en kule av bly som faller fra et par meters høyde kan man i praksis se bort fra luftmotstanden.

Newtons 2. lov, kjent fra naturfag og fysikk, sier at summen av alle krefter som virker på et legeme er lik legemets masse multiplisert med den akselerasjonen legemet får

$$F = m \cdot a$$

Her brukes *F* som betegnelse på summen av kreftene som virker på legemet og er ikke i seg selv en kraft.

Newtons 2. lov er på vektorform. Men siden vi her bare skal studere rettlinjet bevegelse, kan vi nøye oss med å definere positiv retning og si at en kraft er positiv hvis den virker i positiv retning og negativ hvis den virker i motsatt retning.

Vi definerer positiv retning mot jordas sentrum, og summen av kreftene blir da $\mathbf{mg - kv}$
.

Newtons 2. lov gir oss da følgende likning

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v$$

Akselerasjonen er den deriverte til farten, og vi får

$$m \cdot v' = m \cdot g - k \cdot v$$

$$m \cdot v' + k \cdot v = m \cdot g$$

$$v' + \frac{k}{m} v = g$$

Vi har nå fått en første ordens lineær differensiallikning som du kan løse!

Eksempel

Vi tenker oss et legeme som har masse 100 kg faller i tyngdefeltet og at proporsjonalitetskonstanten for luftmotstanden er 20.

Vi tenker oss videre at legemet har farten 6 meter per sekund når vi starter klokken.

Vi vil finne en modell som viser farten til legemet *t* sekunder etter at vi startet klokken.

Newtons 2. lov gir

$$F = m \cdot a$$
$$m \cdot g - k \cdot v = m \cdot a$$

Vi setter inn $m = 100,\ g = 10\ \text{og}\ k = 20$, og får

$$100 \cdot 10 - 20 \cdot v = 100 \cdot a$$
$$10 - 0,2v = v'$$
$$v' + 0,2v = 10$$

Vi løser likningen

$$v' \cdot e^{0,2t} + 0,2v \cdot e^{0,2t} = 10 \cdot e^{0,2t}$$

$$\left(v \cdot e^{0,2t}\right)' = 10 \cdot e^{0,2t}$$

$$v \cdot e^{0,2t} = \int 10 \cdot e^{0,2t}\,\mathrm{dt}$$

$$v \cdot e^{0,2t} = 10 \cdot e^{0,2t} \cdot \frac{1}{0,2} + C$$

$$v = 50 + C \cdot e^{-0,2t}$$

Siden farten er 6 meter per sekund når vi starter klokken, får vi

$$6 = 50 + C \cdot e^{-0,2} \Rightarrow\ C = -44$$

Modellen for farten *t* sekunder etter at vi startet klokken, blir da

$$v = 50 - 44 \cdot e^{-0,2t}$$

Generell løsning

Vi tar også med den generelle løsningen av likningen $v' + \frac{k}{m}v = g$.

$$v' \cdot e^{\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = g \cdot e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\left(v \cdot e^{\frac{k}{m}t}\right)' = g \cdot e^{\frac{k}{m}t}$$

$$v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = \int g \cdot e^{\frac{k}{m}t}\,\mathrm{dt}$$

$$v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = g \int e^{u} \cdot \frac{m}{k}\mathrm{du}$$

$$v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = \frac{\mathrm{mg}}{k} \int e^{u} \cdot \mathrm{du}$$

$$v \cdot e^{\frac{k}{m}t} = \frac{\mathrm{mg}}{k} \cdot e^{\frac{k}{m}t} + C$$

$$v = \frac{\mathrm{mg}}{k} + \mathrm{Ce}^{-\frac{k}{m}t}$$

Legg merke til at når tiden øker blir $e^{-\frac{k}{m}t}$ mindre og mindre, og farten vil etter hvert stabilisere seg som $v = \frac{\mathrm{mg}}{k}$.

Dette kan vi også se direkte av likningen $m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v$. Etter hvert som luftmotstanden bremser fartsøkningen vil akselerasjonen til slutt bli null.

Det gir

$$0 = m \cdot g - k \cdot v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{kv} = \mathrm{mg} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\mathrm{mg}}{k}$$

Andreordens homogene differensiallikninger

Andreordens homogene differensiallikninger

Andreordens homogene differensiallikninger (119645)

Gjenkjenne andreordens homogene differensiallikninger / video
http://ndla.no/nb/node/133086

En **andre ordens lineær** og **homogen** differensiallikning med **konstante koeffisienter** kan skrives på formen

$$y'' + by' + cy = 0$$

hvor koeffisientene *b* og *c* er reelle tall.

Generell løsning av andreordens lineære og homogene differensiallikninger / video
http://ndla.no/nb/node/133087

Likningen er av **andre orden** fordi den inneholder et ledd med y'' og ingen ledd med høyere orden av den deriverte.

Likningen er **lineær** fordi $y,\ y'$ og y'' ikke opptrer i

annen potens eller noen høyere potens.

Likningen er **homogen** fordi alle ledd inneholder enten $y,\ y'$ eller y'' .

At likningen har **konstante koeffisienter** betyr at *b* og *c* er reelle tall og ikke funksjoner av argumentet.

I forrige avsnitt løste vi første ordens differensiallikninger og fant blant annet en generell løsning på likningen $y' + ay = 0$ som $y = Ce^{-ax}$ der *C* er en vilkårlig konstant.

En alternativ måte å komme fram til denne løsningen på er å undersøke om likningen kan ha en løsning på formen $y = e^{rx}$, og så se hvilke betingelser vi da må sette.

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$

$y' + a \cdot y = 0 \Rightarrow re^{rx} + a \cdot e^{rx} = 0$
$\Rightarrow e^{rx}(r + a) = 0 \Rightarrow r + a = 0$
$\Rightarrow r = -a$

Vi kan løse første ordens differensiallikninger ved å undersøke om likningene kan ha en løsning på formen $y = e^{rx}$, og så se hvilke betingelser vi da må sette.

Metoden er at vi undersøker om $y = e^{r \cdot x}$ kan være en løsning. Vi får som svar at det kan den hvis $r + a = 0$. Det vil si hvis $r = -a$. Vi har altså fått samme løsning med denne metoden som med den metoden vi har brukt tidligere.

Vi ser at denne løsningen, multiplisert med en vilkålig konstant *C*, også er en løsning fordi

$$y = Ce^{-ax} \Rightarrow y' + a \cdot y = -Cae^{-ax} + Ca \cdot e^{-ax} = 0$$

Det er da fristende å forsøke denne metoden også på vår andreordens differensiallikning.

Vi prøver samme metode på andre ordens differensiallikninger. Vi antar altså at $y = e^{rx}$ er en løsning.

Vi ønsker å finne en løsning til likningen

$$y'' + by' + cy = 0$$

Vi antar at $y = e^{rx}$ er en løsning.

Da er

$$y' = re^{rx} \text{ og } y'' = r^2 e^{rx}$$

Innsatt i likningen får vi

$$y'' + by' + cy = 0$$

$$r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + br + c) = 0$$

Da e^{rx} aldri kan bli lik null, må derfor $r^2 + br + c = 0$ være lik null for at $y = e^{rx}$ skal være en løsning.

Likningen $r^2 + br + c = 0$ kalles for **den karakteristiske likningen** til differensiallikningen $y'' + by' + cy = 0$.

Karakteristisk likning!

Vi får en litt mer komplisert betingelse enn for første ordens differensiallikninger der den karakteristiske likningen var $r + a = 0$.

Vår andreordens differensiallikning har $y = e^{rx}$ som løsning hvis og bare hvis r er løsning av likningen $r^2 + br + c = 0$. Fra abc-formelen får vi to løsninger gitt ved

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Som kjent får vi to reelle verdier for *r* hvis det som står under rottegnet er positivt. Hvis det som står under rottegnet er lik null, får vi en verdi for *r*.

Det kan vises at

Når **den karakteristiske likningen**

$$r^2 + \mathrm{br} + c = 0$$

h a r **to reelle løsninger** r_1 og r_2, så har **differensiallikningen**

$$y'' + \mathrm{by}' + \mathrm{cy} = 0$$

den generelle løsningen

$$y = \mathrm{Ce}^{r_1 x} + \mathrm{De}^{r_2 x}$$

hvor koeffisientene *C* og *D* er vilkårlige konstanter.

Eksempel. To reelle løsninger

Eksempel. To reelle løsninger (119715)

To reelle løsninger på karakteristisk likning / video
http://ndla.no/nb/node/133089

Vi vil finne løsningen av differensiallikningen $y'' - 2y' - 3y = 0$ når $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$
.

Den karakteristiske likningen blir

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

Likningen har to reelle løsninger

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \qquad \text{Tallet under rottegnet er positivt.}$$

$$r_1 = -1 \quad \vee \quad r_2 = 3$$

De generelle løsningene av differensiallikningen er da

$$y = \mathrm{Ce}^{r_1 x} + \mathrm{De}^{r_2 x}$$

$$y = \mathrm{Ce}^{-x} + \mathrm{De}^{3x}$$

Startbetingelsene $y(0) = 2$ gir at

$$\mathrm{Ce}^{-0} + \mathrm{De}^{3 \cdot 0} = 2$$

$$C + D = 2$$

Vi regner ut *y´*

$$y = \mathrm{Ce}^{-x} + \mathrm{De}^{3x}$$

$$y' = -\mathrm{Ce}^{-x} + 3\,\mathrm{De}^{3x}$$

Når vi tar hensyn til startbetingelsen $y'(0) = 1$ får vi

$$y' = -\mathrm{Ce}^{-x} + 3\,\mathrm{De}^{3x}$$

$$-\mathrm{Ce}^{-0} + 3\,\mathrm{De}^{3 \cdot 0} = 1$$

$$-C + 3D = 1$$

Det gir to likninger og to ukjente

$$C + D = 2 \quad \wedge \quad -C + 3D = 1$$

$$C = 2 - D \quad \wedge \quad -(2 - D) + 3D = 1$$

$$C = 2 - D \quad \wedge \quad D + 3D = 3$$

$$C = \frac{5}{4} \quad \wedge \quad D = \frac{3}{4}$$

Vi setter så verdiene for konstantene inn i den generelle løsningen og får løsningen

$$y = \frac{5}{4}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{3x}$$

Det kan videre vises at

Når **den karakteristiske likningen**

$$r^2 + \mathrm{br} + c = 0$$

h a r **én reell løsning** *r*, så har differensiallikningen

$$y'' + \mathrm{by}' + \mathrm{cy} = 0$$

den generelle løsningen

$$y = \mathrm{Ce}^{\mathrm{rx}} + \mathrm{Dxe}^{\mathrm{rx}}$$

hvor koeffisientene *C* og *D* er vilkårlige konstanter.

Eksempel. Én reel løsning

Eksempel. Én reel løsning (119733)

En reell løsning på karakteristisk likning / video
http://ndla.no/nb/node/133090

Vi vil finne den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' - 2y' + y = 0$. Vi vil også sette prøve for å kontrollere at den løsningen vi har funnet er riktig.

Den karakteristiske likningen blir

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Likningen har to like løsninger

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \qquad \text{Tallet under rottegnet er null.}$$

$$r = 1$$

Den generelle løsningen blir

$$y = \mathrm{Ce}^{\mathrm{rx}} + \mathrm{Dxe}^{\mathrm{rx}}$$

$$y = \mathrm{Ce}^{1x} + \mathrm{Dxe}^{1x}$$

$$y = \mathrm{Ce}^{x} + \mathrm{Dxe}^{x}$$

For å sjekke om løsningen er riktig, regner vi ut y' og y'' setter inn i differensiallikningen

$$y = \mathrm{Ce}^{x} + \mathrm{Dxe}^{x}$$

$$y' = \mathrm{Ce}^{x} + \mathrm{De}^{x} + \mathrm{Dxe}^{x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \mathrm{Ce}^{x} + \mathrm{De}^{x} + \mathrm{De}^{x} + \mathrm{Dxe}^{x} \\ &= \mathrm{Ce}^{x} + 2\,\mathrm{De}^{x} + \mathrm{Dxe}^{x} \end{aligned}$$

Vi setter så inn i differensiallikningen $y'' - 2y' + y = 0$, for å sjekke at løsningen vår er riktig

Venstre side

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{Ce}^x + 2\,\mathrm{De}^x + \mathrm{Dxe}^x - 2\left(\mathrm{Ce}^x + \mathrm{De}^x + \mathrm{Dxe}^x\right) + \mathrm{Ce}^x + \mathrm{Dxe}^x$$
$$= \mathrm{Ce}^x + 2\,\mathrm{De}^x + \mathrm{Dxe}^x - 2\,\mathrm{Ce}^x - 2\,\mathrm{De}^x - 2\,\mathrm{Dxe}^x + \mathrm{Ce}^x + \mathrm{Dxe}^x$$
$$= 0$$

Siden venstresiden og høyresiden begge er lik null, er løsningen riktig.

Vi ser så på det tilfellet at det som står under rottegnet er negativt

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Du er vant med at vi da sier at andregradslikningen ikke har noen løsning. Problemet er at vi ikke kan trekke ut roten av et negativt tall. Det fins ikke noe tall som opphøyd i andre er lik -1.

Eller finnes det likevel?

Problemet kan sammenliknes med problemene rundt innføringen av de negative tallene. I de tidligste kulturene ble det bare brukt positive tall. Da behovet for negative tall og tallet null etter hvert oppstod, og matematikere begynte å innføre disse tallene, tok det flere hundre år før de ble fullt ut akseptert. Matematikere diskuterte om negative tall virkelig eksisterte, og helt fram mot 1800-tallet var det matematikere som ikke ville akseptere beregninger som inneholdt negative tall.

Problemet med å forstå negative tall henger sammen med at tall ikke er en konkret ting. Det er et abstrakt matematisk begrep. Vi må knytte tall til noe konkret for å få en følelse av å forstå dem.

For oss som har vokst opp med penger og termometer, er det lettere å forstå de negative tallene. Vi skjønner hva det betyr når det står minus foran saldoen på skjermen i minibanken og vi tar på oss en ekstra genser når søylen på termometeret går under null. Vi forbinder de negative tallene med noe konkret, og vi føler at vi forstår dem.

Matematikere har også foretatt en annen utvidelse av vår tallmengde. Ved å innføre komplekse tall, er problemet med negative tall under rottegnet i løsningsformelen for andregradslikninger løst.

Tallet $i = \sqrt{-1}$ ble innført.

Da er for eksempel $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$.

Et komplekst tall består av en reell del og en imaginær del og defineres som $A + Bi$ hvor A utgjør den reelle delen av tallet og Bi den imaginære delen. A og B er reelle tall.

Vi kan oppfatte de komplekse tallene som punkter i et koordinatsystem hvor er enheten langs andreaksen, den imaginære akse, og 1 er enheten langs førsteaksen, den reelle aksen.

Vi oppfatter da det komplekse tallet $A + Bi$ som et punkt med koordinatene (A,B).

Alle våre til nå kjente reelle tall ligger på den reelle aksen.

Det kan vises at

Når **den karakteristiske likningen**

$$r^2 + \mathrm{br} + c = 0$$

har **to komplekse løsninger** $r_1 = A + \mathrm{Bi}$ og $r_2 = A - \mathrm{Bi}$, så har differensiallikningen

$$y'' + \mathrm{by}' + \mathrm{cy} = 0$$

den generelle løsningen

$$y = e^{\mathrm{Ax}}\left(\mathrm{Csin}\left(\mathrm{Bx}\right) + \mathrm{Dcos}\left(\mathrm{Bx}\right)\right)$$

hvor koeffisientene *C* og *D* er vilkårlige konstanter

Eksempel. Komplekse løsninger

Eksempel. Komplekse løsninger (119743)

Komplekse løsninger på karakteristisk likning 1 / video
http://ndla.no/nb/node/133091

Vi ønsker å finne den generelle løsningen av differensiallikningen$y'' + 2y' + 5y = 0$. Vi vil også vise at løsningen blir $y = e^{-x}\left(0,25\sin 2x + 0,5\cos 2x\right)$ hvis $y = 0,5$ og $y' = 0$ når $x = 0$.

Den karakteristiske likningen blir

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

Komplekse løsninger på karakteristisk likning 2 / video
http://ndla.no/nb/node/133094

Likningen har to komplekse løsninger

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} \qquad \text{Tallet under rottegnet er negativt.}$$

$$r_1 = -1 + 2i \qquad r_2 = -1 - 2i$$

Den generelle løsningen blir

$$y = e^{\mathrm{Ax}}\left(\mathrm{C}\sin\left(\mathrm{Bx}\right) + \mathrm{D}\cos\left(\mathrm{Bx}\right)\right) = e^{-x}\left(\mathrm{C}\sin\left(2x\right) + \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right)$$

Vi har at $y = 0,5$ og $y' = 0$ når $x = 0$.

Vi regner først ut *y´*

$$y = e^{-x}\left(\mathrm{C}\sin\left(2x\right) + \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right)$$

$$y' = -e^{-x}\left(\mathrm{C}\sin\left(2x\right) + \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right) + e^{-x}\left(2\,\mathrm{C}\cos\left(2x\right) - 2\,\mathrm{D}\sin\left(2x\right)\right)$$

$$y' = e^{-x}\left(2\,\mathrm{C}\cos\left(2x\right) - 2\,\mathrm{D}\sin\left(2x\right) - \mathrm{C}\sin\left(2x\right) - \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right)$$

$$y' = e^{-x}\left(\left(2C - D\right)\cos\left(2x\right) - \left(2D + C\right)\sin\left(2x\right)\right)$$

$y = 0,5$ når $x = 0$

$$y = e^{-x}\left(\mathrm{C}\sin\left(2x\right) + \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right)$$

$$0,5 = e^{-0}\left(\mathrm{C}\sin\left(2\cdot 0\right) + \mathrm{D}\cos\left(2\cdot 0\right)\right)$$

$$0,5 = 1\left(0 + D\cdot 1\right)$$

$$D = 0,5$$

$y' = 0$ når $x = 0$

$$y' = e^{-x}\left(\left(2C - D\right)\cos\left(2x\right) - \left(2D + C\right)\sin\left(2x\right)\right)$$

$$0 = e^{-0}\left(\left(2C - D\right)\cos\left(2\cdot 0\right) - \left(2D + C\right)\sin\left(2\cdot 0\right)\right)$$

$$0 = 1\left(\left(2C - D\right)\cdot 1 - \left(2D + C\right)\cdot 0\right)$$

$$2C - D = 0$$

$$2C = 0,5$$

$$C = 0,25$$

Den spesielle løsningen er

$$y = e^{-x}\left(\mathrm{C}\sin\left(2x\right) + \mathrm{D}\cos\left(2x\right)\right) = e^{-x}\left(0,25\sin\left(2x\right) + 0,5\cos\left(2x\right)\right)$$

Newtons andre lov beskriver frie svingninger

Newtons andre lov beskriver frie svingninger (119752)

Har du noen gang forsøkt å presse sammen eller å strekke ut en stålfjær? Da har du sikkert oppdaget at fjæren har virket med en kraft på deg for å forsøke å komme tilbake til utgangsposisjonen.

Denne **fjærkraften** er alltid proporsjonal med lengden som fjæren er strukket ut eller presset sammen. Proporsjonalitetskonstanten eller **fjærkontanten**, *k*, sier noe om hvor stiv fjæren er.

Harmoniske svingninger

Harmoniske svingninger (119770)

Figur 1
En fjær henger i taket.

Figur 2
Et lodd med masse *m* henges i fjæren. På grunn av tyngden til loddet strekkes fjæren en lengde *s*. Fjærkraften, kraften på loddet fra fjæren, er proporsjonal med lengden *s*, og virker oppover. Tyngdekraften, *mg*, er rettet nedover.
Når loddet henger i ro i likevektsstillingen, sier Newtons første lov at summen av kreftene som virker på loddet er null. Det betyr at $\mathbf{mg} - \mathbf{ks} = \mathbf{0}$.

Figur 3
Loddet trekkes så nedover en strekning *y* fra likevektsstillingen og slippes. Da vil loddet svinge opp og ned om likevektsstillingen. Dette kan vi forklare slik:

Vi forutsetter at det bare er fjærkraften og tyngdekraften som virker på loddet. Tyngdekraften virker alltid nedover, mens fjærkraften kan skifte retning. Når fjæren er strukket, virker fjærkraften oppover og når fjæren er presset sammen, virker fjærkraften nedover. Fjærkraften er alltid proporsjonal med forlengelsen av fjæren, *y + s*.

Vi definerer positiv retning nedover. Da er alltid fjærkraften lik $-\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s})$ fordi at når fjæren er strukket, er *y + s* positiv og fjærkraften er negativ, peker oppover og når fjæren er presset sammen, er *y + s* negativ og fjærkraften er positiv, peker nedover.

Når loddet befinner seg under likevektsstillingen, er fjærkraften i absoluttverdi større enn tyngdekraften, og loddet trekkes oppover.
Når loddet befinner seg over likevektsstillingen, men mens fjæren er strukket, er tyngdekraften i absoluttverdi større enn fjærkraften og loddet trekkes nedover.
Hvis fjæren er sammenpresset, virker begge kreftene nedover.

Loddet trekkes altså alltid mot likevektsstillingen og vil svinge rundt denne.

Newtons andre lov sier at summen av kreftene som virker på loddet er lik massen multiplisert med akselerasjonen

$$\mathbf{ma} = \mathbf{mg} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})$$

$$\mathbf{ma} = \mathbf{mg} - \mathbf{ky} - \mathbf{ks} \quad \textbf{Husk at } \mathbf{mg} - \mathbf{ks} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{ma} = -\mathbf{ky}$$

Akselerasjonen *a* er den andrederiverte av strekningen *y* med hensyn på tiden *t*.

Det gir den andreordens homogene differensiallikningen

$$\mathbf{my}\,'' + \mathbf{ky} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{y}\,'' + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

Vi får en tilsvarende situasjon hvis fjæren er festet til en kloss som ligger på et friksjonsfritt bord og andre enden av fjæren er festet til en loddrett vegg.

Når klossen dras en strekning *y* i positiv retning og slippes, er -*ky* den eneste kraften som virker på klossen. Kraften virker i negativ retning når *y* er positiv, det vil si når fjæren er strukket og kraften virker i positiv retning når *y* er negativ, det vil si når fjæren er presset sammen.

Newtons andre lov sier at summen av kreftene som virker på klossen er lik massen multiplisert med akselerasjonen.

Vi får samme likning for svingebevegelsen som ovenfor, og loddet vil svinge rundt likevektsstillingen

$$\begin{aligned} \mathbf{ma} &= -\mathbf{ky} \\ \mathbf{my}'' + \mathbf{ky} &= 0 \\ y'' + \frac{k}{m}y &= 0 \end{aligned}$$

Eksempel

Et lodd med massen *m* = 1,0 kg. henger i en fjær. Fjærkonstanten er *k* = 4 N/m. Loddet dras 0,5 m nedover i positiv retning før det slippes.

Newtons andre lov gir

$$\begin{aligned} \mathbf{ma} &= \mathbf{mg} - k(y+s) \\ \mathbf{ma} &= \mathbf{mg} - \mathbf{ky} - \mathbf{ks} \qquad \mathbf{mg} - \mathbf{ks} = 0 \\ \mathbf{ma} &= -\mathbf{ky} \end{aligned}$$

Vi får likningen som beskriver svingebevegelsen

$$\begin{aligned} \mathbf{my}'' + \mathbf{ky} &= 0 \\ y'' + \frac{k}{m}y &= 0 \end{aligned}$$

Den karakteristiske likningen gir

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$r^2 + \frac{4}{1} = 0$$

$$r^2 = -4$$

$$r = \pm\sqrt{-4}$$

$$r = \pm 2\sqrt{-1}$$

$$r_1 = 0 + 2i \quad \wedge \quad r_2 = 0 - 2i$$

Den generelle løsningen blir

$$y = e^{\mathrm{At}}\left(\mathrm{Csin}\left(\mathrm{Bt}\right) + \mathrm{Dcos}\left(\mathrm{Bt}\right)\right) = e^{0t}\left(\mathrm{Csin}\left(2t\right) + \mathrm{Dcos}\left(2t\right)\right) = \mathrm{Csin}\left(2t\right) + \mathrm{Dc}$$

Startbetingelsen, $y(0) = 0,5$ gir

$$0,5 = \mathrm{Csin}(2 \cdot 0) + \mathrm{Dcos}\left(2 \cdot 0\right)$$

$$0,5 = 0 + D \cdot 1$$

$$D = 0,5$$

Ved tiden null er også farten null. Vi deriverer derfor uttrykket for *y* og setter $y'(0) = 0$

$$y = \mathrm{C}\sin(2t) + \mathrm{D}\cos(2t) = \mathrm{C}\sin(2t) + 0,5\cos(2t)$$

$$y' = 2\,\mathrm{C}\cos(2t) - 2 \cdot 0,5\sin(2t)$$

$$\begin{aligned} &0 = 2\,\mathrm{C}\cos(2 \cdot 0) - \sin(2 \cdot 0) \\ &0 = 2C \\ &C = 0 \end{aligned}$$

Likningen for avstanden fra likevektslinjen som funksjon av tiden blir da

$$y = \mathrm{C}\sin(2t) + \mathrm{D}\cos(2t)$$

$$y = 0,5\cos(2t)$$

Vi har fått en modell i form av en periodisk funksjon som viser avstanden fra likevektslinjen som funksjon av tiden for et lodd som henger i en fjær og som dras og slippes fra en avstand 0,5 m fra likevektslinjen.

Ifølge modellen, vist ved grafen nedenfor, vil loddet svinge rundt likevektstillingen i all evighet.

Dette kalles en **harmonisk svingning**.

Dempete svingninger

Dempete svingninger (119779)

Et lodd som henger i en fjær og beveger seg vil normalt alltid være påvirket av en friksjonskraft. Dette kan for eksempel være luftmotstanden. En modell for friksjonskraften, når farten ikke er for høy, er at den er proporsjonal med farten og alltid rettet mot fartsretningen

Friksjonskraften = $-bv$

der b er en konstant og v er farten.

Når klossen beveger seg i positiv retning, er farten positiv og friksjonskraften negativ. Når klossen beveger seg i negativ retning, er farten negativ og friksjonskraften positiv. Friksjonskraften virker altså alltid i motsatt retning av bevegelsesretningen.

Et lodd blir trukket nedover en strekning y fra likevektsstillingen, se Figur 3, og slippes.

Newtons andre lov sier at summen av kreftene som virker på loddet er lik $m \cdot a$..
Vi velger positiv retning nedover.

$$\mathbf{mg - bv} - k\,(y+s) = \mathbf{ma}$$

Når systemet fjær og lodd er i likevekt, se Figur 2, sier Newtons første lov at summen av kreftene som virker på loddet er null. Det gir $mg - ks = 0$.

Vi får da

$$\begin{aligned}\mathbf{mg - bv} - k\,(y+s) &= \mathbf{ma}\\ \mathbf{mg - bv - ky - ks} &= \mathbf{ma}\\ \mathbf{-bv - ky} &= \mathbf{ma}\end{aligned}$$

Vi får likningen som beskriver svingetiden

$$\mathbf{ma + bv + ky = 0}$$

$$\mathbf{my'' + by' + ky = 0}$$

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Eksempel

Et lodd med massen m = 1,0 kg. henger i en fjær. Fjærkonstanten er $k = 2\frac{N}{m}$. Loddet dras 0,5 m. nedover i positiv retning før det slippes ved t = 0. Friksjonstallet for luftmotstanden er b=0,05 Ns/m.

Newtons andre lov gir

$$\mathbf{mg - bv} - k\,(y+s) = \mathbf{ma}$$

$$\mathbf{mg - bv - ky - ks = ma} \qquad \mathbf{mg - ks = 0}$$

$$\mathbf{-bv - ky = ma}$$

Vi får likningen som beskriver svingebevegelsen

$$\mathbf{ma} + \mathbf{bv} + \mathbf{ky} = 0$$

$$\mathbf{my}\,'' + \mathbf{bv}\,' + \mathbf{ky} = 0$$

$$y\,'' + \tfrac{b}{m}y' + \tfrac{k}{m}y = 0$$

$$y\,'' + \tfrac{0{,}05}{1{,}0}y' + \tfrac{2}{1{,}0}y = 0$$

$$y\,'' + 0,05y' + 2y = 0$$

Den **karakteristiske** likningen blir

$$r^2 + 0,05r + 2 = 0$$

Den karakteristiske likningen har to komplekse løsninger

$$r^2 + 0,05r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-0{,}05 \pm \sqrt{0{,}0025 - 8}}{2}$$

$$r_1 = -0,025 + 1,41i \quad \wedge \quad r_2 = -0,0025 - 1,41i$$

Den generelle løsningen er

$$y = e^{\mathrm{Ax}}\left(\mathrm{Csin}\left(\mathrm{Bx}\right) + \mathrm{Dcos}\left(\mathrm{Bx}\right)\right) = e^{-0{,}025t}\left(\mathrm{Csin}1.41t + \mathrm{Dcos}1.41t\right)$$

Startbetingelsen, $y\left(0\right) = 0,5$, gir

$$0,5 = e^{-0{,}025\cdot 0}\left(\mathrm{Csin}\left(1,41 \cdot 0\right) + \mathrm{Dcos}\left(1,41 \cdot 0\right)\right)$$

$$0,5 = D$$

$$D = 0,5$$

Ved tiden null er også farten null. Vi deriverer derfor uttrykket for *y* og setter $y'\left(0\right) = 0$

$$y = e^{-0{,}025t}\left(\mathrm{Csin}\left(1,41t\right) + 0,5\cos\left(1,41t\right)\right)$$

$$\begin{aligned} y' = &-0,025e^{-0{,}025t}\left(\mathrm{Csin}\left(1,41t\right) + 0,5\cos\left(1,41t\right)\right) \\ &+ e^{-0{,}025t}\left(1,41\,\mathrm{Ccos}\left(1,41t\right) - 1,41 \cdot 0,5\sin\left(1,41t\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &-0,25e^{-0{,}025t}\left(\mathrm{Csin}\left(1,41 \cdot 0\right) + 0,5\cos\left(1,41 \cdot 0\right)\right) \\ &+ e^{-0{,}025\cdot 0}\left(1,41\,\mathrm{Ccos}\left(1,41 \cdot 0\right) - 1,41 \cdot 0,5\sin\left(1,41 \cdot 0\right)\right) \end{aligned}$$

$$0 = 0,025 \cdot 0,5 + 1,41C$$

$$C = \frac{0{,}025 \cdot 0{,}5}{1{,}41} = 0,00887$$

Likningen for avstanden fra likevektslinjen som funksjon av tiden blir da

$$y = e^{0{,}025t}\left(\mathrm{Csin}1.41t + \mathrm{Dcos}1.41t\right)e^{-0{,}025}\left(0,00887\sin1.41t + 0,5\cos1.41t\right)$$

Grafen viser at utslaget fra likevekttilstanden (amplituden) blir mindre og mindre. Dette kalles en **dempet svingning**.

Vi tenker oss nå at loddet med massen *m* = 1,0 kg. henger i en mindre stiv fjær inne i en beholder med seig væske slik at friksjonskoeffisienten er *b* = 1,5 Ns/m. Fjærkonstanten er $k = 0,5\frac{N}{m}$. Loddet dras 0,5 m nedover i positiv retning før det slippes ved *t* = 0.

Vi må nå løse differensiallikningen

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

$$y'' + \frac{1,5}{1,0}y' + \frac{0,5}{1,0}y = 0$$

$$y'' + 1,5y' + 0,5y = 0$$

Den **karakteristiske** likningen blir

$$r^2 + 1,5r + 0,5 = 0$$

Den karakteristiske likningen har nå to reelle løsninger

$$r^2 + 1,5r + 0,5 = 0$$

$$r = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25-2}}{2}$$

$$r_1 = -0,75 + 0,25 \quad \wedge \quad r_2 = -0,75 - 0,25$$

$$r_1 = -0,5 \qquad \wedge \quad r_2 = -1$$

Den generelle løsningen på posisjonslikningen er

$$y = \mathrm{C}e^{r_1 x} + \mathrm{D}e^{r_2 x} = \mathrm{C}e^{-0,5t} + \mathrm{D}e^{-t}$$

Startbetingelsen, $y = (0) = 0,5$, gir

$$0,5 = \mathrm{C}e^{-0,5\cdot 0} + \mathrm{D}e^{0}$$

$$0,5 = C + D$$

Ved tiden null er også farten null.
Vi deriverer derfor uttrykket for *y* og setter $y'(0) = 0$

$$y = \mathrm{C}e^{-0,5t} + \mathrm{D}e^{-1}$$

$$y' = -0,5\,\mathrm{C}e^{-0,5t} - \mathrm{D}e^{-t}$$

$$0 = -0,5\,\mathrm{C}e^{-0,5\cdot 0} - \mathrm{D}e^{-1\cdot 0}$$

$$0 = -0,5C - D$$

$$D = -0,5C$$

Vi kombinerer de to likningene med *C* og *D*

$$0,5 = C + (-0,5C)$$

$$C = 1$$

$$D = -0,5C$$

$$D = -0,5$$

Likningen for posisjonen til loddet som funksjon av tiden blir da

$$y = \mathrm{Ce}^{-0,5t} + \mathrm{De}^{-t} = e^{-0,5t} - 0,5e^{-t}$$

Grafen viser at loddet gradvis nærmer seg likevektslinjen. Friksjonen er så stor at loddet ikke vil svinge om likevektslinjen. Vi har **overdempet svingning**.

Oppsummering

Likningen for frie svingninger i et kloss-fjær-system er

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Her er *m* massen til klossen, *k* fjærkonstanten og *b* friksjonskonstanten.

Hvis $b = 0$, får vi harmoniske (udempede) svingninger.

Hvis $b > 0$, får vi dempede svingninger.

Veiledninger og verktøy

Forslag til årsplan

Forslag til årsplan (103017)

Forslag til årsplan for faget Matematikk R2 skoleåret 2012-2013. Ligger vedlagt i ulike filformat slik at du kan endre og redigere.

Forslag til årsplan / fil
http://ndla.no/nb/node/103014

Loading [MathJax]/extensions/MathZoom.js