NASJONAL DIGITAL LÆRINGSARENA

**Matematikk S1**

# Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpemidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

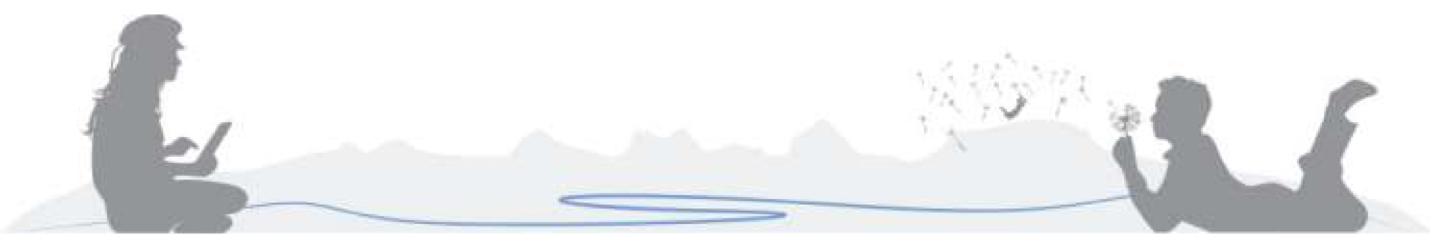
Dette dokumentet er en tekstutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til http://ndla.no.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

*Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpemidler. I modell 1 er alle hjelpemidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.*

*Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpemidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.*

*Disse fagene følger modell 2 for hjelpemiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.*



# Innholdsfortegnelse

# Algebra

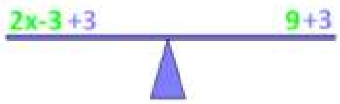
## Teori

### Innledning

### Innledning

Innledning (94806)

Ordet **algebra** har vi fått fra det arabiske ordet «al-jabr», som betyr å gjenopprette eller gjøre fullstendig. Den arabiske matematikeren Al-Khwârizmî (ca. år 800 e.Kr.) brukte ordet om en operasjon han utførte for å forenkle likninger (metoden med å legge til eller trekke fra samme tall på begge sider av likhetstegnet).




Hva tenker du på når du hører ordet algebra? Bokstavregning? Likninger? Formler?

I dette kapittelet skal vi repetere noe av det du har lært tidligere. I tillegg skal du lære mer om hvordan du kan forenkle uttrykk, løse likninger og ulikheter og regne med logaritmer. Du skal også lære litt om implikasjon og ekvivalens, og hvordan du gjennomfører et matematisk bevis.

Mye av det vi skal arbeide med i dette kapittelet er helt grunnleggende for matematikken. Jobb godt og lær deg dette skikkelig – det vil du ha igjen for senere når du skal arbeide med andre deler av faget!

# Potenser og kvadratrøtter

## Potenser

Potenser (94815)


Datamaskinene våre får stadig større kapasitet. Antall bytes som kan lagres på en harddisk øker. Mens det for få år siden var vanlig med en lagringskapasitet på noen millioner bytes, Megabytes, har det nå blitt vanlig å kunne lagre milliarder av bytes, Gigabytes. Vi får etter hvert svært store tall å forholde oss til.

Store tall skrevet på vanlig måte gir lange rekker med tallsifre. Dette er tungvint, og det er derfor behov for å skrive svært store tall på en mer kortfattet måte.

Det å skrive tall på potensform, er her et hjelpemiddel.

Vi kan som eksempel skrive tallet 81 som en **potens**. Vi har at siden $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, så skriver vi 81 som potens slik

$$81 = 3^4$$

Denne skrivemåten betyr at vi skal multiplisere tallet 3 med seg selv 4 ganger.

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} = 81$$

Å skrive $3^4$ er altså bare en annen måte å skrive tallet 81 på.

Tallet 3 kalles for **grunntallet**, og tallet 4 kalles for **eksponenten**. Eksponenten forteller hvor mange ganger grunntallet skal multipliseres med seg selv.

**Definisjon**

La *a* være et vilkårlig tall og *n* et naturlig tall. Da er

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ganger}}$$

Ved å skrive «*def*» over likhetstegnet forteller vi at dette er noe som er bestemt, definert, at skal gjelde.

## Regneregler for potenser

Regneregler for potenser (94830)

Vi kan regne med potenser

$$3^4 \cdot 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ ganger}} = 3^9$$

Vi ser at

$$3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$$

**Regneregel 1 for potenser**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Tilsvarende gjelder når vi dividerer potenser på hverandre

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$$

Vi ser at

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

**Regneregel 2 for potenser**

La *a* være et tall forskjellig fra null, og la *m* og *n* være naturlige tall, og foreløpig må vi ha at *m>n.*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hvordan blir utregningen hvis potensen i nevneren har større eksponent enn potensen i telleren?
Vi bytter om på potensene i eksemplet ovenfor. Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3^4}$$

Ved å bruke regneregelen for potenser, får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4}$$

Vi ønsker at regnereglel 2 for potenser også skal gjelde i slike tilfeller. Det betyr at $\frac{1}{3^4}$ og $3^{-4}$ må være samme tallet.

**Definisjon**

For alle tall *a ≠ 0* og naturlige tall *n* gjelder at

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Hva så hvis potensene i teller og nevner har like eksponenter? Vi ser på et eksempel.
Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 1$$

Ved å bruke regneregel 2, får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0$$

Vi ønsker også her at regnereglene for potenser skal gjelde. Det betyr at $3^0$ må være lik tallet 1.

**Definisjon**

For alle tall a ≠ 0 gjelder at

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Med disse to nye definisjonene gjelder regneregel 1 og 2 for alle heltallige eksponenter, også når *m* ikke er større enn *n*.

Studer følgende regnestykker hvor definisjonen på potenser er brukt gjentatte ganger sammen med vanlige regneregler

$$(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4}$$

Vi kan sette opp tilsvarende regnestykker hvor vi bytter ut tallene 2, 3 og 4 med hvilke som helst andre reelle tall, og vi får tre nye regneregler for potenser.
Vi kan da summere opp de definisjoner og regneregler vi har for potenser. Disse gjelder under de forutsetninger som er gitt ovenfor. Vi forutsetter også at vi ikke får null i nevner!

# Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering

[Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering (94854)]

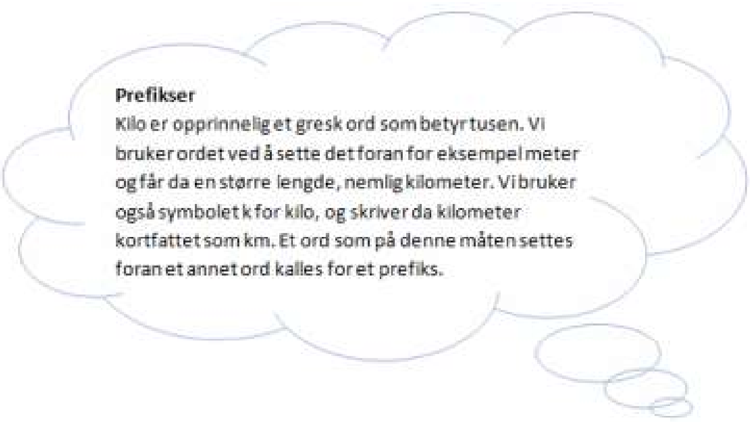
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Definisjoner** | $a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ganger}}$ | $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$ | $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ **Regneregler** | |
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ |

**Definisjonene og regnereglene er svært viktige og må læres!**

# Tierpotenser

[Tierpotenser (94902)](#)

Som nevnt i Potenser og kvadratrøtter, regner vi mange ganger med svært store tall. Andre ganger regner vi med svært små tall. Vi bruker da ofte potenser med grunntallet 10. Tabellen nedenfor viser tierpotenser av ulik størrelse. Disse har egne navn (prefikser). En del av disse bør du kunne.



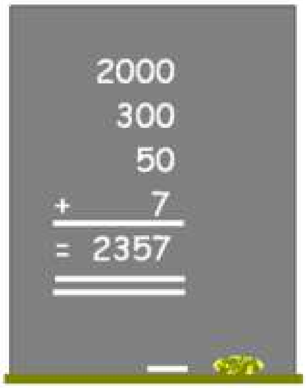

En oversikt over noen prefikser til tierpotenser:

| $10^n$ | Prefiks | Symbol | Navn | |
|---|---|---|---|---|
| $10^{15}$ | peta | P | billiard | 1 000 000 000 000 000 |
| $10^{12}$ | tera | T | billion | 1 000 000 000 000 |
| $10^9$ | giga | G | milliard | 1 000 000 000 |
| $10^6$ | mega | M | million | 1 000 000 |
| $10^3$ | kilo | k | tusen | 1 000 |
| $10^2$ | hekto | h | hundre | 100 |
| $10^1$ | deka | da | ti | 10 |
| $10^{-1}$ | desi | d | tidel | 0,1 |
| $10^{-2}$ | centi | c | hundredel | 0,01 |
| $10^{-3}$ | milli | m | tusendel | 0,001 |
| $10^{-6}$ | mikro | $\mu$ | milliondel | 0,000 001 |
| $10^{-9}$ | nano | n | milliarddel | 0,000 000 001 |

# Tall på standardform

[Tall på standardform (94908)](#)

Oversikten over Tierpotenser på forrige side viser hvordan noen svært store og svært små tall kan skrives kortfattet som tierpotenser.




Vi ønsker å kunne skrive alle tall på tilsvarende måte.

Vi ser på tallet 2357. Vårt tallsystem er et posisjonssystem. Det vil si at det er det enkelte siffers plassering som bestemmer verdien til sifferet. Det første sifferet, 2, har verdien 2000. Det neste, 3, har verdien 300. Sifferet 5 har verdien 50, mens det siste sifferet, 7, forteller at vi har 7 enere. Det første sifferet angir altså antall 1000, det neste antall 100, det tredje antall 10-ere og det siste antall enere.

Vi kan sette et kommategn etter sifferet 7. Da vil eventuelle siffer etter 7 angi antall tideler, hundredeler osv. avhengig av sifferets posisjon.

Kommategnet forteller altså hvor vi begynner å telle enere.

Vi kan flytte komma en plass til venstre, og skrive 235,7. Da har verdien av alle siffer blitt dividert med 10. Sifferet 3 har ikke lenger verdien 300, men har nå verdien 30. Tallet 235,7 kan få tilbake sin verdi som 2357 ved at vi multipliserer det med 10.

Vi kan fortsette slik

$2357 = 2357 \cdot 10^0$

$2357 = 235,7 \cdot 10^1$

$2357 = 23,57 \cdot 10^2$

$2357 = 2,357 \cdot 10^3$

I den siste linjen har vi skrevet tallet 2357 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi sier da at vi har skrevet tallet på **standardform**.

I begynnelsen av 2011 var folketallet i verden ca. 6 894 000 000.

Dette tallet kan vi skrive på standardform som

$$6\,894\,000\,000 = 6,894 \cdot 10^9 \approx 6,9 \cdot 10^9$$

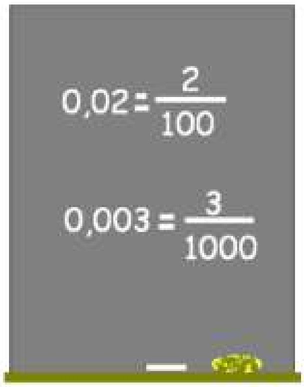
Ovenfor har vi avrundet til én desimal i desimaldelen av tallet. Vi må da huske på de reglene som gjelder for avrunding.

## Avrunding

Når vi avrunder et desimaltall, må vi se på **den desimalen som kommer nærmest etter den siste vi beholder**. Hvis denne desimalen er 5 eller høyere, så må vi øke den siste desimalen vi beholder, med 1.

## Små tall på standardform

Vi ser på tallet 0,023. Husk igjen at vårt tallsystem er et posisjonssystem. Kommategnet forteller hvor vi begynner å telle enere. Første plass etter komma er tidelsplassen som forteller hvor mange tideler vi har. Vi har i vårt eksempel 0 tideler. Andre plassen angir hundredeler. Vi har 2 hundredeler og siste siffer forteller at vi har 3 tusendeler.




Vi kan flytte komma en plass til høyre, og skrive 0,23. Da har verdien av alle sifre blitt multiplisert med 10. Sifferet 2 har ikke lenger verdien 2 hundredeler, men har nå verdien 2 tideler. For at tallet skal få tilbake sin opprinnelige verdi, må vi dividere hele tallet med 10. Det er det samme som å multiplisere det med $10^{-1}$. Tallet 2,3 kan få tilbake sin verdi som 0,023 ved at vi dividerer det med 100.

$$0{,}023 = 0{,}023 \cdot 10^{0}$$

$$0{,}023 = 0{,}23 \cdot 10^{-1}$$

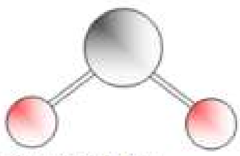
$$0{,}023 = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$$


I den siste linjen har vi skrevet tallet 0,023 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi har skrevet tallet på **standardform**.

Vann er bygd opp av vannmolekyler.

Massen til ett vannmolekyl er
$$m = 0{,}0000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,299 \text{ kg} = 2{,}99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Her ser du at det er hensiktsmessig å bruke standardform!


Vannmolekyl, $H_2O$

# Kvadratrøtter

[Kvadratrøtter (94921)](#)

> Gitt et ikke-negativt tall *a*.
> **Kvadratroten** til *a*, $\sqrt{a}$, er definert ved at $\sqrt{a}$ er **det ikke-negative tallet** som **opphøyd i andre** er lik *a*.
>
> $$(\sqrt{a})^2 = a \text{ og } \sqrt{a} \geqslant 0$$

## Eksempel

$\sqrt{9} = 3 \text{ fordi } 3 \cdot 3 = 9$ og fordi 3 ikke er negativt.

Merk at $(-3) \cdot (-3) = 9$, men –3 er et negativt tall og er dermed ikke definert som kvadratroten av 9.


## Regneregler for kvadratrøtter

Ved å bruke definisjonen på kvadratrøtter får vi at

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

Vi får samme svar hvis vi først multipliserer og så trekker ut roten

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

Dette gjelder også ved divisjon av kvadratrøtter.

Ved å bruke definisjonen på kvadratrøtter blir

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

Hvis vi først dividerer og så trekker ut roten, får vi

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Vi kan vise at dette gjelder generelt.

> **Regneregler for kvadratrøtter**
>
> Multiplikasjonsregelen
>
> $$\sqrt{\text{ab}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0 \text{ og } b \geq 0$$
>
> Divisjonsregelen
>
> $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0 \text{ og } b > 0$$

**Bevis for multiplikasjonsregelen**

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot$$

Vi har altså at

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a\cdot b}$$

Prøv å bevise divisjonsregelen på samme måte!

Per definisjon er da

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

Du må ofte bruke reglene motsatt vei. Da bør du, hvis det er mulig, skille ut **kvadrattallene**, de tallene som gir heltallig svar når du tar kvadratroten av dem.

Eksempel

$$\frac{\sqrt{18}}{3}=\frac{\sqrt{9\cdot 2}}{3}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$$

Test deg selv!

Skriv raskt ned de 13 minste kvadrattallene!

Eksempel

$$\begin{aligned}&3\sqrt{50}-2\sqrt{32}\\&=3\sqrt{25\cdot 2}-2\sqrt{16\cdot 2}\\&=3\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}\\&=3\cdot 5\cdot\sqrt{2}-2\cdot 4\cdot\sqrt{2}\\&=15\sqrt{2}-8\sqrt{2}\\&=7\sqrt{2}\end{aligned}$$

# Algebraiske uttrykk

## Addisjon og subtraksjon av brøker

[Addisjon og subtraksjon av brøker (94982)](#)

### Å trekke sammen brøker med samme nevner

Når vi for eksempel legger sammen 3 meter, 2 meter og 4 meter, verdier med **samme benevning**, trenger vi ikke å foreta oss noe før vi legger sammen. Vi får enkelt og greit 9 meter som svar.

3 m + 2 m +4 m = 9 m

På samme måte kan vi trekke sammen 4 tredeler, 1 tredel og 2 tredeler direkte til 7 tredeler.

$\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

### Å trekke sammen brøker med forskjellig nevner

### Utviding av brøker

Men hvis vi skal legge sammen 3 cm + 2 m + 4 dm, må vi først finne en felles benevning. Deretter kan vi legge sammen.

Vi må tenke på samme måte når vi legger sammen 3 halve + 2 tredjedeler + 1 femdel. Vi må først finne **en felles nevner** (eller benevning).

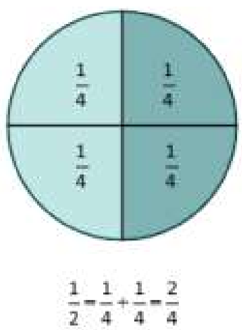
Hva må vi gjøre for å regne ut $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$?

Vi velger å la fellesnevner for 2, 3 og 5 være det minste tallet som disse tallene går opp i, altså 2 ·3 ·5 = 30.

Hver av brøkene skal altså skrives med nevner 30, men skal fortsatt ha samme verdi.

En brøk endrer ikke verdi når vi multipliserer med samme tall i teller og nevner.

Det kan vi illustrere ved å se på arealet av en sirkel.




Vi ser av figuren at halvparten av arealet til sirkelen er lik summen av 2 firedeler, $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Men siden $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, får vi at $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

Men det er nettopp det vi får når vi multipliserer brøken $\frac{1}{2}$ med 2 i teller og nevner.

$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}$

Vi kaller denne handlinngen «**å utvide en brøk**».

I dagligtale er å **utvide** det samme som å gjøre større, men i brøkregning har ordet utvide altså en annen betydning! Egentlig burde vi heller funnet et utrykk tilsvarende det engelske. På engelsk brukes «rename». Brøken får et annet navn, men den er like mye verd.


Vi utvider brøkene

$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{45}{30}$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$

Til slutt legger vi sammen og får

$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{45}{30} + \frac{20}{30} + \frac{6}{30} = \frac{45+20+6}{30} = \frac{71}{30}$

En brøk der teller er større en nevner, kaller vi en **uekte brøk**. En uekte brøk kan gjøres om til et **blandet tall**.

Vi får at

$\frac{71}{30} = \frac{60}{30} + \frac{11}{30} = 2 + \frac{11}{30} = 2\frac{11}{30}$ som betyr $2 + \frac{11}{30}$

Det er viktig at du ikke mekaniserer brøkregningen din. Kanskje du tidligere har gjort om det blandede tallet $2\frac{11}{30}$ til uekte brøk uten å være bevisst at **et blandet tall er et helt tall pluss en brøk**.

## Forkorting av brøker

Vi har at $\frac{6}{30} = \frac{6:\cancel{6}}{30:\cancel{6}} = \frac{1}{5}$.


Vi skjønner at vi kan dividere med samme tall i teller og nevner uten at brøken endrer verdi. Vi kaller denne handlingen «**å forkorte en brøk**».

I dagligtale er **å forkorte** det samme som å gjøre kortere eller mindre. Men i brøkregning har ordet forkorte en annen betydning. Her kunne vi også med fordel funnet et utrykk tilsvarende det engelske «simplify». Vi forenkler brøken, den er like mye verd.

## Oppsummering

Å **utvide** en brøk vil si å multiplisere med samme tall (ikke 0) i teller og nevner.

Å **forkorte** en brøk vil si å dividere med samme tall (ikke 0) i teller og nevner.
(For å forkorte faktoriserer vi gjerne først teller og nevner. Så «stryker» vi faktor mot faktor.)

Vi **adderer** og **subtraherer** brøker (trekker sammen brøker) ved å

1. Utvide brøkene slik at alle får samme nevner.
   Det kan være lurt å

- dividere hele tall med 1 slik at tallene kan oppfattes som brøker.
- gjøre blandede tall om til uekte brøker.

2. Addere/subtraherer tellerne og lar nevneren stå.

Til slutt må vi forkorte svaret.

Eksempel

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+3-\frac{2}{3}+\frac{5}{9} &= \frac{1}{2}+\frac{3}{1}-\frac{2}{3}+\frac{5}{9} \\ &= \frac{1\cdot9}{2\cdot9}+\frac{3\cdot18}{1\cdot18}-\frac{2\cdot6}{3\cdot6}+\frac{5\cdot2}{9\cdot2} \\ &= \frac{9}{18}+\frac{54}{18}-\frac{12}{18}+\frac{10}{18} \\ &= \frac{9+54-12+10}{18} \\ &= \frac{61}{18}\end{aligned}$$

# Multiplikasjon og divisjon med brøker

Multiplikasjon og divisjon med brøker (94994)

## Multiplikasjon med brøker

For å finne det dobbelte av 20 må du multiplisere 20 med 2.

Regnestykket blir

$20 \cdot 2 = 40$

For å finne halvparten av 20 må du dividere med 2 eller multiplisere med $\frac{1}{2}$.

Regnestykket blir

$20 : 2 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

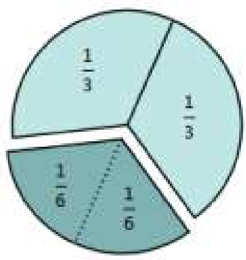
Tilsvarende, hvis du skal finne halvparten av en tredjedel, må du dividere $\frac{1}{3}$ med 2 eller multiplisere $\frac{1}{3}$ med $\frac{1}{2}$.

Regnestykket blir

$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Du kan se for deg en tredjedels pizza som du tar halvparten av.

Som figuren viser, får du bare sjetteparten av hele pizzaen.




$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Vi har altså at

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Du har tidligere lært at du kan multiplisere brøker ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner. Du ser at det er nettopp det vi må gjøre her for å få en sjettedel!

### Eksempel

En arving fikk en tredjedel av en fjerdedel av en arv. Hvor stor brøkdel av arven gikk til denne arvingen?

**Løsning**

Arvingen fikk

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

### Eksempel

To tredjedeler av elevene i en klasse er jenter. To femdeler av jentene kommer for sent til matematikktimen. Ingen gutter kommer for sent. Hvor stor del av elevene i klassen kommer for sent?

**Løsning**

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$\frac{4}{15}$ av elevene i klassen kommer for sent.

## Divisjon med brøker

Vi har 6 liter maling og skal fordele malingen i tolitersbokser. Hvor mange bokser trenger vi?

Regnestykket blir

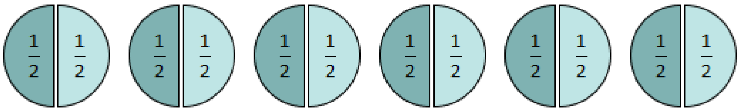
$\mathbf{6 : 2 = 3}$

Men hvis vi skal fordele malingen i halvlitersbokser, hvor mange bokser trenger vi da?

Regnestykket blir

$\mathbf{6 : \frac{1}{2}}$

Vi skjønner at svaret må bli 12 bokser.




$6 : \frac{1}{2} = 12$

Hvis vi skal regne på samme måte som ovenfor, er altså $\mathbf{6 : \frac{1}{2} = 12}$.

Å dividere med $\frac{1}{2}$ er altså det samme som å multiplisere med 2.

Vi kan skrive regnestykket slik:

$\mathbf{6 : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{12}{1} = 12}$

Vi ser altså at når vi skal dividere med en brøk, må vi multiplisere med den omvendte brøken for å få riktig resultat.

## Oppsummering

Vi **multipliserer** to brøker ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner.

Vi dividerer hele tall med 1, slik at tallene kan oppfattes som brøker.

Vi **dividerer** med en brøk ved å **multiplisere med den omvende brøken**.

## Eksempel

$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$

# Brudden brøk

[Brudden brøk (95010)](#)

Vi kan oppfatte divisjonstegnet som en brøkstrek.

Da kan vi skrive divisjonen

$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 6} =$

$\frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{1} = 2$

slik $\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{15}}$


En slik brøk, som består av brøker i teller og nevner, kalles en **brudden brøk**. Vi skiller mellom **hovedbrøken** og **småbrøkene**.

Småbrøkene, $\frac{4}{5}$ og $\frac{6}{15}$, er brøkene i teller og nevner i hovedbrøken.

Vi kan forenkle en brudden brøk ved å utvide hovedbrøken med fellesnevneren til småbrøkene.

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{15}} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 15}{\frac{6}{15} \cdot 15} = \frac{\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\frac{6}{\cancel{15}} \cdot \cancel{15}} = \frac{12}{6} = 2$$

Vi ser at vi får samme resultat som her [Multiplikasjon og divisjon med brøker](#).

# Regnerekkefølgen

Regnerekkefølgen (95016)

Marie og Mads har fått følgende regneoppgave:

$5 + 3 \cdot 4 - \frac{8}{2} =$


Mads får 28, mens Marie får 13. Hvem har regnet galt? Hva er det riktige svaret?

Du har tidligere lært at vi multipliserer og dividerer før vi adderer og subtraherer. Det betyr at den riktige måten å regne på er slik

$5 + 3 \cdot 4 - \frac{8}{2} = 5 + 12 - 4 = 13$

Det er ingen selvfølge at vi skal regne slik. Det kan jo være like naturlig å begynne med å addere 5 og 3, og så multiplisere svaret med 4. Problemet er at hvis ikke alle regner på samme måten, så vil det skape forviklinger!

Det har derfor blitt bestemt at alle skal følge de samme matematiske regnereglene. Vi skal multiplisere og dividere før vi adderer og subtraherer. Vi sier at **multiplikasjon og divisjon har høyere prioritet enn addisjon og subtraksjon**. Denne regelen ligger innebygget i de fleste digitale verktøy, men det finnes noen svært enkle kalkulatormodeller som ikke følger disse reglene, så vær litt påpasselig når du bruker slike.

## Parenteser

Det hender likevel at vi må regne annerledes.

## Eksempel

Det skal dannes 4 elevgrupper. Hver gruppe skal bestå av 2 jenter og 3 gutter. For å finne samlet antall elever i gruppene kan vi addere 2 og 3 og så multiplisere svaret med 4.

Da innfører vi **parenteser** som forteller at **vi skal begynne med å regne ut det som står inne i parentesene**

$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$

Når vi regner med brøker, hender det at vi unnlater å skrive parenteser når vi strengt tatt skulle gjort det. Du vil kunne oppleve å se et regnestykke på formen

$7 - \frac{12+3}{5}$

Det er jo hele telleren som skal divideres på 5, så vi må først regne ut det som står i telleren i brøken. Det kan vi markere ved å skrive brøken med parenteser i telleren.

$7 - \frac{(12+3)}{5}$

Det er ikke vanlig å skrive disse parentesene, så her må du være spesielt oppmerksom. Regningen går slik

$7 - \frac{12+3}{5} = 7 - \frac{15}{5} = 7 - 3 = 4$

Det er viktig å sette riktige parenteser når vi bruker digitale verktøy til å regne ut uttrykk som vist ovenfor. I mange slike verktøy skriver vi inn uttrykket på en linje, og vi må da for eksempel skrive uttrykket ovenfor på følgende måte:

$$7-(12+3)/5$$

Det hender også at det inngår potenser i en regneoppgave. Husker du at $3^4$ kalles en potens? Vi kan regne ut potensen, og får

$$3^4=\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{4\ \text{ganger}}=81$$

Vi skal regne mer med potenser senere. **Potenser har prioritet før multiplikasjon og divisjon**, så vi må regne ut potensene før vi multipliserer og dividerer.

### Regnerekkefølge

1. Regn ut det som står inne i parentesene
2. Regn ut potensene
3. Utfør multiplikasjonene og divisjonene
4. Utfør addisjonene og subtraksjonene

Nedenfor har vi tatt med noen eksempler på regneoppgaver hvor vi følger disse reglene. Her kan du først bruke hoderegning og se om du får samme resultat. Deretter bruker du et digitalt verktøy og ser om du da også får det samme.

$$2+3\cdot 4-7=2+12-7=7$$
$$8-2\cdot(2+3)-\frac{8-5}{3}=8-2\cdot 5-\frac{3}{3}=8-10-1=-3$$
$$\frac{12}{7-4}+\left(3^2-4\right)\cdot 3=\frac{12}{(7-4)}+(9-4)\cdot 3=\frac{12}{3}+5\cdot 3=4+15=19$$

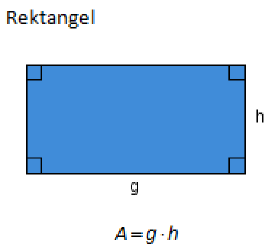
# Bokstavregning

[Bokstavregning (95033)](#)

Formelen for å regne ut arealet av et rektangel er

$A = g \cdot h$

Du må altså multiplisere grunnlinjen med høyden for å regne ut arealet.




## Eksempel

Vi skal regne ut arealet til en fotballbane hvor sidelengdene er 68 m og 105 m.

En fotballbane er rektangelformet. Vi lar den lengste siden være grunnlinjen, og den korteste siden være høyden.

Vi får at $A = g \cdot h = 105\ m \cdot 68\ m = 7140\ m^2$

Vi ser at bokstavene i formelen bare er erstatninger for tallstørrelser, og en formel er altså en oppskrift for hvordan vi skal regne ut en størrelse. Når vi kjenner grunnlinjen og høyden, kan vi regne ut arealet.

Sør Arena, Kristiansand

I mange tilfeller er det lurt å regne med bokstaver i stedet for tall. Dette kalles **algebra**.

# Hvordan regne med bokstaver

Hvordan regne med bokstaver (95041)

Når vi regner med bokstaver, må vi huske at bokstaver står for en tallstørrelse eller bare et tall. Det vil si at vi må regne med bokstaver som om de var tall.

Vi skal nå se på noen regler som forenkler regningen med bokstaver.

1. **Det er vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet mellom et tall og en bokstav.**
   Når vi skriver produktet mellom to tall, for eksempel $2 \cdot 3$, er multiplikasjonstegnet viktig. Uten multiplikasjonstegn ville det stått 23, som jo er noe ganske annet.
   Når vi erstatter 3-tallet med en bokstav, og får for eksempel $2 \cdot a$, er det derimot vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet og bare skrive $2a$.
   Det vil si at $2a$ betyr $2 \cdot a$.

2. **Vi kan forenkle uttrykk ved å addere og subtrahere like ledd.**
   Vi ser på følgende tallregning

   $$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20$$

   Vi ser at vi like gjerne kan regne på følgende måte

   $$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

   Hvis vi nå erstatter tallet 4 med bokstaven *a*, får vi

   $$2 \cdot a + 3 \cdot a = 2a + 3a = (2 + 3)a = 5a$$

   Dette betyr at **vi kan forenkle uttrykk ved å addere og subtrahere like ledd**. For eksempel kan følgende uttrykk forenkles slik

   $$2a + 3b - 2 \times +7 + 5 \times -2 - 7b + 2a = 4a - 4b + 3 \times +5$$

3. **Vi kan forkorte brøker ved å dividere med samme faktor i teller og nevner.**
   Vi er kjent med at vi kan forenkle brøker ved først å faktorisere og så dividere med samme faktorer i teller og nevner (vi «stryker» faktor mot faktor)

   $$\frac{420}{30} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 14$$

   Hvis vi nå erstatter tallet 3 med bokstaven *a* og tallet 5 med bokstaven *b*, får vi tilsvarende

   $$\frac{28\,\mathrm{ab}}{2\,\mathrm{ab}} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}} = 14$$

4. **Vi kan løse opp (fjerne) parenteser.**
   Vi ser på følgende regneoppgave med tall

   $$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2)$$

   Vi har tidligere sett (se Regnerekkefølgen) at det som står inne i parenteser alltid skal regnes ut først. Vi får derfor at

   $$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2) = 2 + 7 - 5 = 4$$

   Men følgende måte å regne på gir samme resultat

   $$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2) = 2 + 3 + 6 - 2 - 4 - 3 + 2 = 4$$

   Husk at fortegnet til 3-tallet og 4-tallet inne i parentesene egentlig er + siden det ikke står noe fortegn. Med fortegn blir regningen
   $$2 + (+3 + 6 - 2) - (+4 + 3 - 2) = 2 + 3 + 6 - 2 - 4 - 3 + 2 = 4$$

   Det viser seg at denne måten å regne på alltid blir riktig.

   > **En parentes,** inklusive **regnetegnet pluss foran** parentesen, kan fjernes ved at vi beholder alle leddene inne i parentesen og oppfatter plusstegn og minustegn som regnetegn.

**En parentes,** inklusive **regnetegnet minus foran** parentesen, kan fjernes ved at vi skifter tegnene foran alle leddene inne i parentesen og oppfatter disse som regnetegn.

5. **Vi kan multiplisere tall med parentesuttrykk.**
Vi ser på regneuttrykket $10 \cdot (3+2)$

Siden det som står inne i parentesen skal regnes ut først, får vi at $10 \cdot (3+2) = 10 \cdot 5 = 50$

Vi kan tolke dette geometrisk som arealet av hele det store rektangelet til høyre med grunnlinje 10 og høyde 5.

Dette arealet kan også betraktes som summen av arealene til de to små rektanglene. Disse er henholdsvis $10 \cdot 3$ og $10 \cdot 2$.

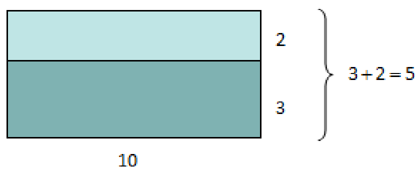
Det betyr at $10 \cdot (3+2) = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 2$

Vi erstatter tallene i regneoppgaven ovenfor med bokstaver. Samme geometriske tolking på figuren til høyre som på figuren ovenfor gir at

$a \cdot (c+d) = \mathrm{ac} + \mathrm{ad}$

Dette betyr at vi generelt kan si at

Når vi multipliserer et tall med et parentesuttrykk, må vi multiplisere tallet med alle leddene inne i parentesen.

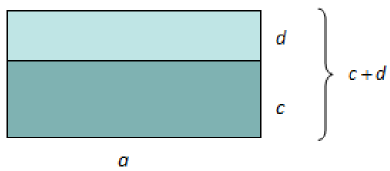



**Eksempel**
$3\times\left(2\times^2-4\times+2\right)$

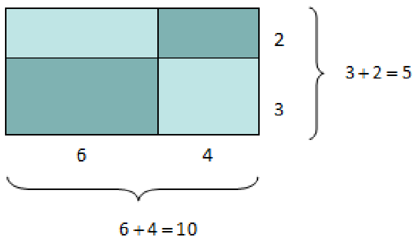
$=3\times\cdot 2\times^2-3\times\cdot 4\times+3\times\cdot 2$

$=6\times^3-12\times^2+6\times$

6. **Vi kan multiplisere to parentesuttrykk med hverandre.**
Vi ser på regneuttrykket $(6+4) \cdot (3+2)$.




Siden det som står inne i parentesen skal regnes ut først, får vi at $(6+4) \cdot (3+2) = 10 \cdot 5 = 50$

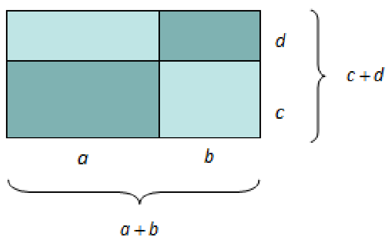



Geometrisk kan vi tolke dette som arealet av hele det store rektangelet ovenfor med grunnlinje 10 og høyde 5.

Men vi ser geometrisk at dette arealet kan betraktes som summen av arealene av fire mindre rektangler. Disse arealene er henholdsvis 6.3, 6.2, 4.3 og 4.2.

Det betyr at $(6+4) \cdot (3+2) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$

Vi erstatter tallene i regneoppgaven ovenfor med bokstaver. Samme geometriske tolking på figuren til høyre som på figuren ovenfor gir at Dette betyr at vi generelt kan si at




$(a+b) \cdot (c+d) =$
$\mathrm{ac} + \mathrm{ad} + \mathrm{bc} + \mathrm{bd}$

Dette betyr at vi generelt kan si at

Når vi multipliserer to parentesuttrykk med hverandre, må vi multiplisere hvert ledd i den ene parentesen med hvert ledd i den andre parentesen.

**Eksempel**

$(a+b)\cdot(c+d) =$ $\quad$ $(2\times -4)\cdot(3\times +2) =$

$\mathrm{ac}+\mathrm{ad}+\mathrm{bc}+\mathrm{bd}$ $\quad$ $2\times \cdot 3\times +2\times \cdot 2-4\cdot 3\times -4\cdot 2 =$

$6\times^2 +4\times -12\times -8$

$6\times^2 -8\times -8$

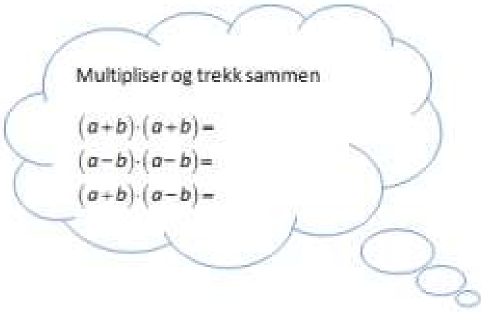
# Kvadratsetningene

Kvadratsetningene (95048)

Tidligere så vi hvordan vi multipliserer to parentesuttrykk med hverandre.

Generelt har vi at

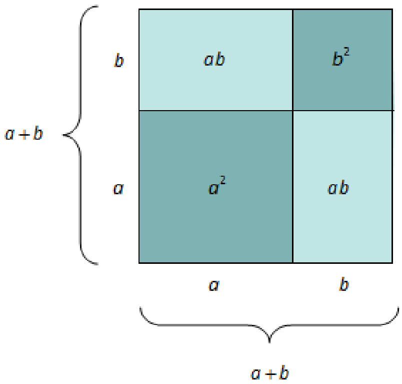
$$(a+b)\cdot(c+d)$$
$$=\mathrm{ac}+\mathrm{ad}+\mathrm{bc}+\mathrm{bd}$$




Hvordan blir resultatet dersom parentesuttrykkene er like eller nesten like?

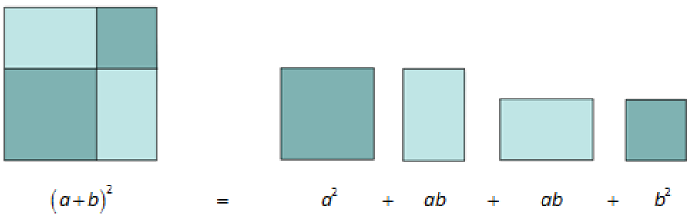
Når vi multipliserer $(a+b)$ med seg selv, får vi kvadratet $(a+b)^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\ &= a^2+\mathrm{ab}+\mathrm{ab}+b^2\\ &= a^2+2\mathrm{ab}+b^2\end{aligned}$$




Når vi multipliserer ut parentesene, får vi to like ledd, $\mathrm{ab}+\mathrm{ab}$, som vi slår sammen til $2\,\mathrm{ab}$.

Geometrisk ser du at arealet av det store kvadratet ovenfor med sidelengder $a+b$ er lik summen av arealene av de to like store lyse rektanglene og de to mørke kvadratene.




Dette resultatet er kjent som den første kvadratsetningen.

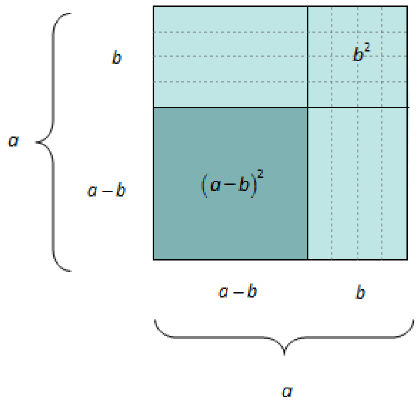
**Første kvadratsetning**

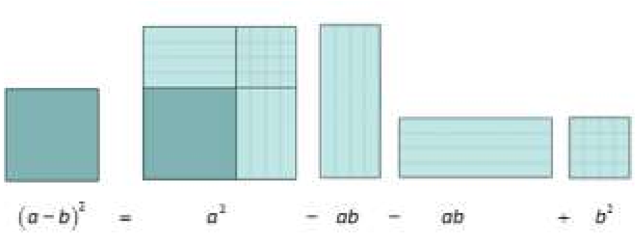
$$(a+b)^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$$

Vi multipliserer videre $(a-b)$ med seg selv og får kvadratet $(a-b)^2$.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 - \mathrm{ab} - \mathrm{ab} + b^2\\ &= a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2\end{aligned}$$

Her får vi to like ledd, $-\mathrm{ab}-\mathrm{ab}$ , som vi slår sammen til $-2\,\mathrm{ab}$.




Ser du at vi kan illustrere dette geometrisk hvis vi tar utgangspunkt i et kvadrat med sider *a*?

Dette resultatet er kjent som den andre kvadratsetningen.

**Andre kvadratsetning**

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2$$

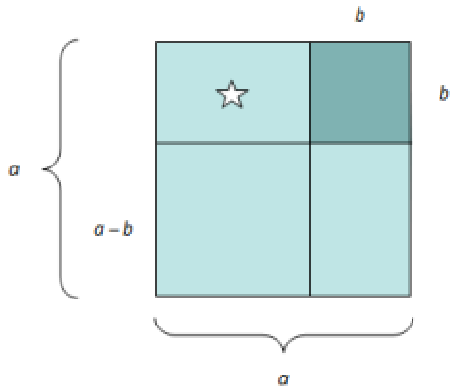
Vi multipliserer så $(a+b)$ med $(a-b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{ab} - b^2\\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

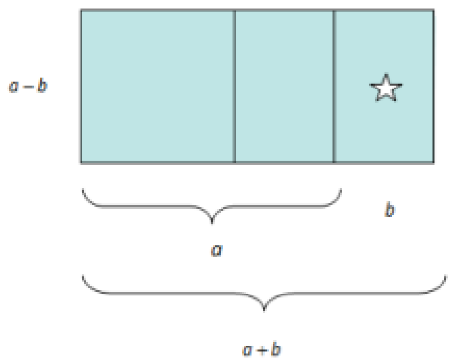
Her får vi leddene $\mathrm{ab}$ og $-\mathrm{ab}$, som til sammen blir lik null og faller bort.

Ser du at vi kan illustrere dette også geometrisk ved å starte med et kvadrat med sidekanter *a*?

$a^2 - b^2$ tilsvarer det lyse området i den første figuren nedenfor.




Hvis vi så tenker oss at vi flytter rektangelet som er merket med en stjerne, ser vi at det lyse området også tilsvarer $(a+b)\,(a-b)$.




Dette resultatet er kjent som konjugatsetningen eller også som den tredje kvadratsetningen.

**Konjugatsetningen (Tredje kvadratsetning)**

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Nå er det lett å falle for fristelsen til å la være å pugge kvadratsetningene og heller multiplisere hvert ledd i den ene parentesen med hvert ledd i den andre parentesen. Det vil ikke være særlig lurt.

Kvadratsetningene er nemlig spesielt nyttige til å faktorisere andregradsuttrykk, og da må du bruke dem «motsatt vei».


## Eksempel på bruk av kvadratsetningene

$$
\begin{aligned}
&4(x+2)^2+(2x-3)^2-3\,(x-2)\,(x+2)\\
&=4\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+\left((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2\right)-3\left(x^2-2^2\right)\\
&=4\left(x^2+4x+4\right)+\left(4x^2-12x+9\right)-3\left(x^2-4\right)\\
&=\left(4x^2+16x+16\right)+\left(4x^2-12x+9\right)-\left(3x^2-12\right)\\
&=4x^2+16x+16+4x^2-12x+9-3x^2+12\\
&=5x^2+4x+37
\end{aligned}
$$

# Faktorisering

[Faktorisering (95050)](#)

Når vi faktoriserer bruker vi ofte regnereglene for bokstavregning, inkludert kvadratsetningene, motsatt vei.

> Å **faktorisere** vil si å skrive et uttrykk som et **produkt av faktorer**. Uttrykket skrives som ett ledd, men hver av faktorene kan inneholde flere ledd.

## Uttrykk som består av bare ett ledd

Vi faktoriserer uttrykk som består av bare **ett ledd** ved å skrive alle tall som produkt av primtallsfaktorer, og splitte bokstavuttrykk på potensform i enkeltfaktorer.

**Eksempel**

$36a(\mathrm{ab})^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$

## Uttrykk som inneholder flere ledd

For uttrykk som inneholder **flere ledd** kan vi «gå motsatt vei» av det vi gjør når vi multipliserer et tall med et parentesuttrykk. Det betyr at hvis **alle ledd** i uttrykket inneholder **samme faktor**, kan vi sette denne felles faktoren utenfor parentes.

Eksempel2x2-12x=2·x·x-2·2·3·x=2xx-6

()

Uttrykket er nå faktorisert i ett ledd og består av produktet av faktorene 2, *x* og (*x* – 6).

Vi kan kontrollere at faktoriseringen er riktig ved å multiplisere faktorene:

$$2x\,(x-6) = 2x \cdot x - 2x \cdot 6 = 2x^2 - 12x$$

Vi får tilbake det opprinnelige uttrykket.

Pass på hvis du setter et negativt tall utenfor en parentes. Da må du skifte fortegn inne i parentesen

$$-2x^2 - 4x + 8 = -2\left(x^2 + 2x - 4\right)$$


Sjekk at dette er riktig ved å multiplisere faktorene ovenfor!

Vi faktoriserer uttrykk som består av mer enn to ledd på samme måte.

$$6a^2b - 3a^2b^2 + 6\,\mathrm{ab}^2 = 3\,\mathrm{ab}\,(2a - \mathrm{ab} + 2b)$$

# Faktorisering av andregradsuttrykk ved å bruke kvadratsetningene

[Faktorisering av andregradsuttrykk ved å bruke kvadratsetningene (95054)]

Et uttrykk som kan skrives på formen $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c \text{ der } a \neq 0$, kalles et **andregradsuttrykk**.

Et eksempel på et andregradsluttrykk er $x^2+4x-5$. $x^2$ kalles **andregradsleddet** og $a=1$. $4x$ kalles **førstegradsleddet** og $b=4$. $-5$ kalles **konstantleddet** og $c=-5$.

Et andregradsuttrykk inneholder alltid andregradsleddet, men førstegradsleddet og konstantleddet kan mangle, det vil si at *b* og/eller *c* kan være lik 0.

## Når konstantleddet mangler

Når konstantleddet mangler, vil faktoren *x* forekomme i begge ledd. Da kan vi sette *x* utenfor parentesen

$$2x^2-6x=2x(x-3)$$

## Når førstegradsleddet mangler

Hvis de to leddene har motsatt fortegn, kan vi faktorisere med konjugatsetningen.

**Eksempel**

$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

$4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x+5)(2x-5)$

$x^2-3=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

$-2x^2+18=-2\left(x^2-9\right)=$
$-2(x+3)(x-3)$


$(\mathrm{ab})^2-c^2=(\mathrm{ab}+c)(\mathrm{ab}-c)$

$(x+1)^2-9=(x+1)^2-3^2=(x+1+3)(x+1-3)=(x+4)(x-2)$

# Forenkling av rasjonale uttrykk

[Forenkling av rasjonale uttrykk (95095)](#)

Brøker med bokstavuttrykk i teller og nevner kalles rasjonale uttrykk. Du kan bruke de regnereglene du nå har lært, til å forenkle og trekke sammen rasjonale uttrykk. Regnereglene for brøkregning gjelder selvfølgelig også om du erstatter tall med bokstaver.

## Eksempel

Trekke sammen uttrykk

$$\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{2}{b}$$

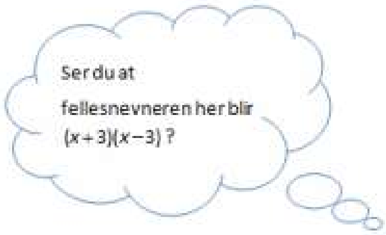

**Løsning**

$$\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{2}{b}=\frac{4b\cdot b}{a\cdot b}+\frac{a\cdot a}{b\cdot a}+\frac{2\cdot a}{b\cdot a}=\frac{4b^2}{\mathrm{ab}}+\frac{a^2}{\mathrm{ab}}+\frac{2a}{\mathrm{ab}}=\frac{4b^2+a^2+2a}{\mathrm{ab}}$$

## Eksempel

Trekk sammen uttrykkene

$$\frac{4x}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}$$




**Løsning**
Vi faktoriserer nevnerne, finner fellesnevneren og utvider brøkene slik at alle får samme nevner. Her må du kunne konjugatsetningen!

$$\frac{4x}{(x+3)(x-3)}-\frac{2\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

Vi trekker sammen brøkene ved å trekke sammen tellerne og beholde felles nevner.

$$\frac{4x-2(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{4x-2x+6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x+6}{(x+3)(x-3)}$$

Til slutt faktoriserer vi telleren og forkorter, faktor mot faktor, der dette er mulig.

$$\frac{2x+6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2\cdot x+2\cdot 3}{(x+3)(x-3)}=\frac{2\left(\cancel{x+3}\right)}{\left(\cancel{x+3}\right)(x-3)}=\frac{2}{x-3}$$

# Ligninger

# Likninger

[Likninger (94979)](#)

En likning består av et likhetstegn med et tall eller uttrykk på hver side. Et eksempel er likningen

$$3+5=8$$


En likning inneholder gjerne en eller flere ukjente størrelser symbolisert med bokstaver som for eksempel formelen

$$A=g\cdot h$$

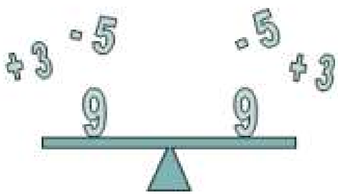
Det er vanlig å bruke bokstaven *x* for den ukjente når likningen har én ukjent størrelse. Et eksempel er

$$x+5=8$$

Å **løse** en likning går ut på å finne ut hvilke verdier *x* kan ha for at likningen skal være sann. For eksempel, hvilken verdi av *x* i likningen ovenfor gjør uttrykket *x* + 5 lik tallet 8.

## Metode for å løse likninger

I likningen $x+5=8$ ser vi umiddelbart at når *x* er lik tallet 3, er venstresiden og høyresiden like. Likningen har løsningen $x=3$.




I likningen $2x-3=9$ er det derimot ikke så enkelt å løse likningen direkte. Vi trenger en framgangsmåte.

Tenk deg at du har to like tall. Er du enig i de fire påstandene nedenfor?

- Hvis vi til to tall som er like, adderer det samme tallet, vil vi summene være to like tall. Siden $9=9$, så er $9+3=9+3$ .
- Hvis vi til to tall som er like, subtraherer det samme tallet, vil differensene være to like tall. Siden $9=9$, så er $9-5=9-5$.
- Hvis vi har to tall som er like og multipliserer dem med det samme tallet, vil produktene være to like tall. Siden $9=9$ , så er $9\cdot 3=9\cdot 3$.
- Hvis vi har to tall som er like og dividerer dem med det samme tallet, vil kvotientene være to like tall. Siden $9=9$ , så er $\frac{9}{3}=\frac{9}{3}$.

**Vi kan altså addere, subtrahere, multiplisere og dividere med samme tall på begge sider i en likning og fortsatt beholde likhet mellom venstresiden og høyresiden.**

Dette kan vi bruke til å løse likninger.

## Eksempel

Vi vil løse likningen $2x-3=9$.

| | |
|---|---|
| $2x-3=9$ | |
| $2x-3+3=9+3$ | Vi adderer tallet 3 på begge sider av likhetstegnet. |
| $2x=9+3$ | På venstresiden er $-3+3=0$. |
| $2x=12$ | Like ledd trekkes sammen, $9+3=12$. |
| $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{2}}$ | Vi dividerer med 2 på begge sider av likhetstegnet og forkorter. |
| $x=6$ | Vi har løst likningen. |

> Legg merke til resultatet av å addere 3 på begge sider. Tallet $-3$ er «flyttet» fra venstresiden til høyresiden, men har skiftet fortegn til $+3$.

## Eksempel

Når vi skal løse likninger som inneholder **brøker**, må vi multiplisere hvert ledd med fellesnevneren for å få en likning uten brøker.

| | |
|---|---|
| $\frac{2}{x}-4=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}$ | Fellesnevner er $2x$. |
| $\frac{2}{\cancel{x}}\cdot 2\cancel{x}-4\cdot 2x=-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x-\frac{1}{\cancel{2x}}\cdot\cancel{2x}$ | Vi multipliserer alle ledd med $2x$ og forkorter. |
| $4-8x=-3x-1$ | Vi er kvitt brøkene. |
| $4-8x-4+3x=-3x-1-4+3x$ | Nå ønsker vi å samle alle ledd med $x$ på venstresiden. De andre leddene samler vi på høyre side. Dette gjør vi ved å subtrahere 4 og addere $3x$ på beggge sider. |
| $-8x+3x=-1-4$ | Legg merke til at 4 fra venstresiden nå er $-4$ på høyresiden og at $-3x$ fra høyresiden nå er $+3x$ på venstresiden. Vi har nå samlet alle leddene med $x$ på venstre side av likhetstegnet. De andre leddene er samlet på høyre side. |
| $-5x=-5$ | Vi trekker sammen like ledd og dividerer med $-5$ på begge sider. |
| $\frac{-5x}{-5}=\frac{-5}{-5}$ | |
| $x=1$ | Vi har løst likningen. |

Fellesnevner er 2x.

Vi multipliserer alle ledd med $2x$ og forkorter.

Vi er kvitt brøkene.

Nå ønsker vi å samle alle ledd med $x$ på venstresiden. De andre leddene samler vi på høyre side. Dette gjør vi ved å subtrahere 4 og addere $3x$ på begge sider.

Legg merke til at +4 fra venstresiden nå er –4 på høyresiden og at $-3x$ fra høyresiden nå er $+3x$ på venstresiden.

Vi har nå samlet alle leddene med $x$ på venstre side av likhetstegnet. De andre leddene er samlet på høyre side.

Vi trekker sammen like ledd og dividerer med –5 på begge sider.

Vi har løst likningen.

## Eksempel

Når likningene inneholder **parentesuttrykk**, begynner vi med å løse opp parentesene.

$$
\begin{aligned}
x - 2(x-3) &= -2 \\
x - 2x + 6 &= -2 \\
x - 2x &= -2 - 6 \\
\frac{-x}{-1} &= \frac{-8}{-1} \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Fra linje 2 til linje 3 er tallet 6 subtrahert på begge sider. Legg også merke til divisjonen med −1.

## Oppsummering

Fremgangsmåten for å løse likninger blir da

1. Hvis likningen inneholder parenteser, må vi først løse opp disse.
2. Hvis likningen inneholder brøker, må vi multiplisere alle ledd med fellesnevneren.
3. Vi adderer og/eller subtraherer med samme tall på begge sider av likhetstegnet. Resultatet blir at ledd «flyttes» fra den ene siden av likhetstegnet til den andre siden, og leddet skifter fortegn. Formålet er å samle alle ledd som inneholder *x* på den ene siden av likhetstegnet, og alle ledd som bare består av tall på den andre siden.
4. Vi trekker sammen leddene.
5. Til slutt dividerer vi med tallet foran *x* på begge sider.

# Formelregning

[Formelregning (95174)]

Det finnes mange fysiske, kjemiske og matematiske formler som kan brukes i ulike situasjoner og sammenhenger.

**Eksempel**
Vi er på ferie i USA og opplever en varm sommerdag at temperaturen er 86 $^{\circ}$F. Vi ønsker å vite hvor mange celsiusgrader dette tilsvarer. I en reisehåndbok finner vi at sammenhengen mellom temperatur målt i grader fahrenheit og grader celsius er gitt ved formelen

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

28 ˚C er det samme som 82,4 ˚F.

Her står *C* for temperaturen målt i celsiusgrader og *F* for temperaturen målt i fahrenheitgrader.

En temperatur på 28 $^{\circ}$C vil da i fahrenheitgrader være

$$F = \frac{9}{5} \cdot 28 + 32 = 50,4 + 32 = 82,4$$

Men vårt problem var å finne temperaturen i celsiusgrader. Vi kan sette inn 86 $^{\circ}$F i formelen og får da

$$86 = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

Her kan vi ikke bare regne rett fram og finne *C*. Vi må løse en likning.

$$86 = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

$$86 \cdot 5 = \frac{9}{\cancel{5}} \cdot C \cdot \cancel{5} + 32 \cdot 5 \qquad \text{Vi multipliserer med fellesnevneren } i \text{ alle ledd.}$$

$$430 = 9C + 160$$

$$9C = 430 - 160$$

$$\frac{9C}{9} = \frac{270}{9}$$

$$C = 30$$

Vi har dermed regnet ut at 86 $^{\circ}$F er det samme som 30 $^{\circ}$C.

En annen metode er å snu på den opprinnelige formelen. Da får vi et uttrykk vi kan bruke generelt.

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

$$F \cdot 5 = \frac{9}{5} \cdot C \cdot 5 + 32 \cdot 5$$

$$5 \cdot F = 9 \cdot C + 160$$

$$\frac{9 \cdot C}{9} = \frac{5 \cdot F - 160}{9}$$

$$C = \frac{5 \cdot F - 160}{9}$$

Vi har nå funnet en formel for å regne ut temperaturen i grader celsius når vi kjenner temperaturen i grader fahrenheit.

Vi setter inn 86 $^{\circ}$F i formelen og finner

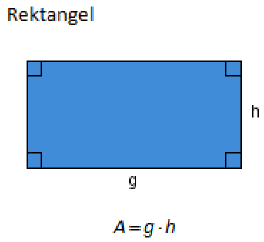
$$C = \frac{5 \cdot F - 160}{9} = \frac{5 \cdot 86 - 160}{9} = \frac{430 - 160}{9} = \frac{270}{9} = 30$$

Vi får også nå at 86 $^\circ$F er det samme som 30 $^\circ$C.

Formelen for areal av et rektangel er gitt ved $A = g \cdot h$.

Et uttrykk for høyden av rektanglet vil da bli $h = \frac{A}{g}$.

Dette får vi ved å snu på den opprinnelige formelen




$$A = g \cdot h$$

$$g \cdot h = A$$

$$\frac{\cancel{g} \cdot h}{\cancel{g}} = \frac{A}{g}$$

$$h = \frac{A}{g}$$

Vi har nå funnet en formel for høyden til et rektangel. Denne kan vi bruke hver gang arealet og grunnlinjen i et rektangel er oppgitt.

# Likningssett

[Likningssett (95175)](#)

En familie som består av tre barn og to voksne, betaler 380 kroner for å komme inn på en fotballkamp.


Billettpris?

En annen familie med 4 barn og 3 voksne betaler 540 kroner. Vi ønsker å finne ut hva billettprisen er for barn, og hva billettprisen er for voksne.

La $x$ være billettprisen i kroner for barn og $y$ billettprisen i kroner for voksne.

Prisen den første familien betaler gir likningen

$$3x + 2y = 380$$

Dette er en likning med to ukjente, og det finnes mange par av tall for $x$ og $y$ som passer i likningen. Prisen den andre familien betaler gir likningen

$$4x + 3y = 540$$

Det finnes også her mange par av tall for $x$ og $y$ som passer i likningen. Men det finnes bare ett par av tall for $x$ og $y$ som passer i begge likningene.

To likninger med de samme to ukjente størrelsene, kalles for et **likningssett**. Å løse et likningssett går ut på å finne de verdiene for $x$ og $y$ som passer i begge likningene.

En metode for å løse et likningssett ved regning er **innsettingsmetoden**.

Når vi bruker denne metoden, begynner vi med å finne et uttrykk for den ene ukjente uttrykt med den andre ukjente ved hjelp av en av likningene.

I vårt eksempel kan den første likningen gi

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 2y &= 380 - 3x \\ y &= 190 - \tfrac{3}{2}x \end{aligned}$$

S å **setter** vi dette uttrykket **inn** for $y$ i den andre likningen. Husk å bruke parenteser!


$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 540 \\ 4x + 3\left(190 - \tfrac{3}{2}x\right) &= 540 \end{aligned}$$

På denne måten får vi **én likning med én ukjent** og kan løse denne.

$$\begin{aligned} 4x + 570 - \tfrac{9}{2}x &= 540 \\ 2 \cdot 4x + 2 \cdot 570 - 2 \cdot \tfrac{9}{2}x &= 2 \cdot 540 \\ 8x - 9x &= 1080 - 1140 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Til slutt **setter** vi denne verdien for $x$ **inn** i uttrykket vi fant for $y$

$$\begin{aligned} y &= 190 - \tfrac{3}{2}x \\ y &= 190 - \tfrac{3}{2} \cdot 60 \\ y &= 100 \end{aligned}$$

Billettprisen for voksne er 100 kroner, og billettprisen for barn er 60 kroner.

Vær oppmerksom på at du kan velge både hvilken likning og hvilken ukjent du vil starte med. Noen prøver å velge slik at de unngår brøker. Da blir utregningen som oftest enklere.

Det finnes også andre metoder for å løse likningssett med regning.

I neste eksempel skal vi bruke en metode som kalles **addisjonsmetoden**.

## Eksempel

Mor til Kari var 32 år da Kari ble født. I dag er Kari og moren til sammen 64 år.

Hva er alderen til Kari og moren i dag?

**Løsning**

La *x* være alderen til Kari og *y* alderen til moren.

Kari og moren er til sammen 64 år. Dette gir likningen $x + y = 64$.

Kari ble født for *x* år siden. Da var mor til Kari 32 år. I dag er mor *y* år.

Dette gir likningen $32 + x = y$.

Vi har da

$$\begin{aligned} x + y &= 64 \\ 32 + x &= y \end{aligned}$$

Vi ordner likningene og får

$$\begin{aligned} x + y &= 64 \\ x - y &= -32 \end{aligned}$$

Siden venstresidene i begge likningene er lik høyresidene, må summen av venstresidene være lik summen av høyresidene. Vi adderer derfor venstresidene og høyresidene hver for seg og setter dem lik hverandre

$$\begin{aligned} x + x + y - y &= 64 - 32 \\ 2x &= 32 \\ x &= 16 \end{aligned}$$


Nå falt leddene med *y* bort, og likningen med bare *x* som ukjent gav at Kari er 16 år.

Vi kan nå finne ut hvor gammel moren er ved å bruke en av likningene.

$$\begin{aligned} 32 + x &= y \\ 32 + 16 &= y \\ y &= 48 \end{aligned}$$

Moren er 48 år.

Vi har altså vist at i dag er mor til Kari 48 år, og Kari er 16 år.

For at vi skal komme i mål med addisjonsmetoden, må leddene med en av de ukjente falle bort under addisjonen. Det kan vi som oftest få til å skje ved først å multiplisere likningene i likningssettet med passende tall. Innsettingsmetoden er allikevel den metoden som anbefales. Den fungerer alltid.

I kapitlet om funksjoner skal du se at likningssett også kan løses grafisk. Likningssett kan også løses ved å bruke et digitale verktøy.

# Grafisk og digital løsning av likningssett

[Grafisk og digital løsning av likningssett (95199)]

Vi har tidligere lært om funksjoner, og hvordan vi tegner grafer til funksjoner. Dette kan vi også bruke når vi skal løse likningssett. I hver likning oppfatter vi da den ene ukjente, gjerne *y*, som en funksjon av den andre ukjente, ofte *x*. Vi tegner så grafene til de to funksjonene. Koordinatene til skjæringspunktet mellom grafene må passe i begge likningene og er derfor løsning av likningssettet.

## Eksempel

Vi skal løse følgende likningssett grafisk

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 4x + 3y &= 540 \end{aligned}$$

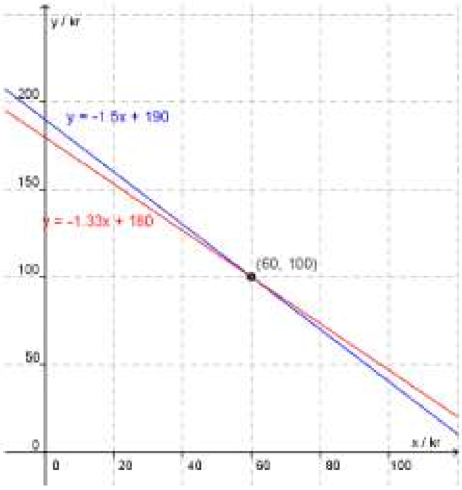
Vi ordner hver likning slik at *y* skrives som en funksjon av *x*.

**Likning 1**

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 2y &= -3x + 380 \\ y &= -\tfrac{3}{2}x + 190 \end{aligned}$$

**Likning 2**

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 540 \\ 3y &= -4x + 540 \\ y &= -\tfrac{4}{3}x + 180 \end{aligned}$$




Så tegner vi grafen til hver av funksjonene.

Skjæringspunktet (60, 100) gir løsningen på likningssettet.

$x = 60 \quad \text{og} \quad y = 100$

Det er ikke nødvendig å ordne likningene som vist ovenfor hvis du bruker et digitalt hjelpemiddel. I GeoGebra kan du bare skrive inn likningene på den opprinnelige formen. Koordinatene til skjæringspunktet vil fortsatt være løsningen til likningssettet.

De fleste digitale hjelpemidler kan også løse likningssett algebraisk. Nedenfor har vi løst likningssettet i wxMaxima.

Vi kan da fylle ut dialogboksen nedenfor


og får

$$\text{solve}\ \ ((3x+2y=380,\ 4x+3y=540),\ \ (x,y));$$

$$((x=60,\ y=100))$$

# Andregradslikninger

## Andregradslikninger

[Andregradslikninger (95200)]

En likning som kan skrives på formen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$ der $a \neq 0$, kalles en **andregradslikning**.

Et eksempel på en andregradslikning er $x^2 + 4x - 5 = 0$. Her er $a = 1,\ b = 4$ og $c = -5$. $x^2$ kalles andregradsleddet, $4x$ førstegradsleddet og $-5$ kalles konstantleddet.

Noen ganger må vi ordne andregradslikningene for å se hva tallene *a*, *b*, og *c* er lik.

Andregradslikningen

$$3 - x = \frac{-7x^2}{2}$$

kan ordnes til likningen

$$\begin{aligned} 6 - 2x &= -7x^2 \\ 7x^2 - 2x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

og her ser vi at $a = 7$, $b = -2$ og $c = 6$.

Å løse en andregradslikning vil si å finne ut hvilke verdier av den ukjente som passer i likningen.

En andregradslikning inneholder alltid andregradsleddet, men førstegradsleddet og konstantleddet kan mangle, det vil si at *b* og/eller *c* kan være lik null.

### Når kontantleddet mangler

Når konstantleddet mangler, kan vi samle første- og andregradsleddene på venstre side av likhetstegnet og faktorisere. Faktoren *x* finnes i begge ledd og kan settes utenfor parentes.
Vi benytter oss så av at når et produkt er lik null, må minst en av faktorene være lik null.

### Eksempel

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x = 0 \\ & x(x - 2) = 0 \\ & x = 0 \text{ eller } x - 2 = 0 \\ & x = 0 \text{ eller } x = 2 \end{aligned}$$


### Når førstegradsleddet mangler

Begynn med å ordne likningen slik at andregradsleddet står på venstre side av likhetstegnet og konstantleddet står på høyre side.

### Eksempel

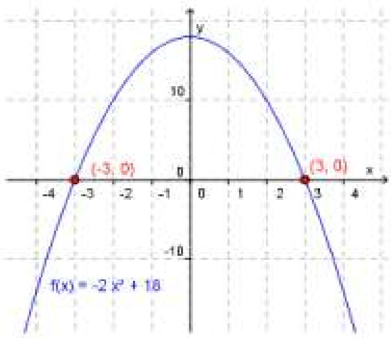
$$
\begin{aligned}
-2\times^2 + 18 &= 0 \\
-2\times^2 &= -18 \\
\times^2 &= 9 \\
\times = \sqrt{9} \quad &\text{eller} \quad \times = -\sqrt{9} \\
\times = 3 \quad &\text{eller} \quad \times = -3
\end{aligned}
$$

Hvis høyresiden blir null etter at likningen er ordnet, får vi bare én løsning, nemlig $\times = 0$. Hvis høyresiden blir negativ etter at likningen er ordnet, har likningen ikke noen løsninger.

Likningen kan løses grafisk ved å tegne grafen til funksjonen

$$y = -2x^2 + 18$$

Løsningen på likningen er de *x* - verdiene som gir $y = 0$, nullpunktene.



# Å løse andregradslikninger ved abc-formelen

Å løse andregradslikninger ved abc- formelen (95228)

I 1T brukte du *abc*- formelen for å løse andregradslikninger.

**_abc_ - formelen**

Andregradslikningen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$ har løsningen

$$\times = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,\mathrm{ac}}}{2a} \qquad \begin{array}{c} a \neq 0 \\ b^2 - 4\mathrm{ac} \geq 0 \end{array}$$

Vi bruker tegnet $\pm$for å spare skriving.

Når vi løser en andregradslikning med *abc* - formelen, ordner vi først likningen slik at den kommer på formen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0.$

Du husker at vi definerte kvadratroten bare til positive tall og null. Det vil si at andregradslikningen ikke har løsninger blant de reelle tall når det som står under rottegnet er mindre enn null.
Kanskje det digitale verktøyet du bruker da gir løsninger med bokstaven *i*? Det vil si at løsningen er imaginær.

Andregradslikningen har bare én løsning når det som står under rottegnet er lik null.

Vi skal nå se på noen eksempler på bruk av *abc* - formelen.

Eksempel 1

$$\times^2 = 5 - 4\times$$

$$\times^2 + 4\times - 5 = 0$$

$$\times = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1(-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$\times = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$\times \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\times = \frac{-4+6}{2} \quad \text{eller} \quad \times = \frac{-4-6}{2}$$

$$\times = 1 \quad \text{eller} \quad \times = -5$$

Likningen har to løsninger. Det er altså to verdier for *x* som passer i den opprinnelige likningen.

Til høyre ser du at den grafiske løsningen gir samme resultat.

Eksempel 2

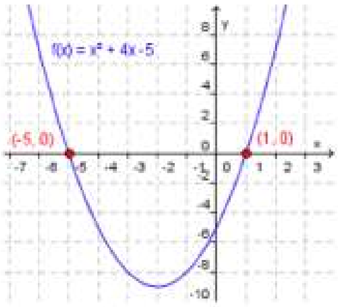
$x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

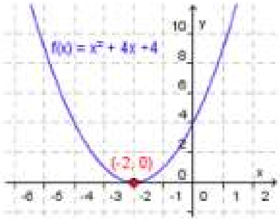
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

$$x = -2$$




Uttrykket under rottegnet er null, og vi får bare én løsning. Dette ser vi også av den digitale grafiske løsningen til høyre.




For å løse denne likningen kunne vi også brukt første kvadratsetning og fått

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 \\ x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Eksempel 3

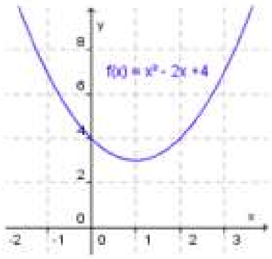
$x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\text{Ingen løsning}$$




Vi får $-12$ under rottegnet og $\sqrt{-12}$ er ikke definert når vi regner med reelle tall. Vi får derfor ingen løsning, dvs. at det ikke finnes noe reelt tall som er slik at andregradsuttrykket på venstre side i likningen blir null.

Dette kan vi også se grafisk. Grafen til funksjonen *f* gitt ved *f* $(x) = x^2 - 2x + 4$ skjærer ikke
*x* - aksen. Se koordinatsystemet ovenfor.

De fleste digitale hjelpemidler kan også løse andregradslikninger algebraisk. Nedenfor har vi løst de tre andregradslikningene vi nå har sett på i wxMaxima.


```
wx_compute_wrt(x^2=5-4x, x);
[x=-5, x=1]
```


```
wx_compute_wrt(x^2+4x+4=0, x);
```

$[x = -2]$


```
wx_compute_wrt(x^2-2x+4=0, x);
```

$[\ ]$

Som du ser, kommer wxMaxima også fram til at den siste likningen ikke har noen reelle løsninger.

# Likningssett av første og andre grad

Likningssett av første og andre grad (95244)

Vi er nå i stand til å løse likningssett der den ene likningen er av første grad, og den andre likningen er av andre grad.

Da vi løste likningssett med to likninger av første grad, brukte vi **innsettingsmetoden**. Denne metoden kan vi også bruke her. Det lureste er da ofte å finne et uttrykk for den ene ukjente ved hjelp av førstegradslikningen, og så sette dette inn i andregradslikningen.

## Eksempel

Vi har gitt likningssettet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 - 2x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{pmatrix}$$

Vi bruker førstegradslikningen til å finne et uttrykk for *y*

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

Vi setter uttrykket inn for *y* inn i andregradslikningen (bruk parenteser for å unngå fortegnsfeil)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x - y &= 3 \\ \frac{x^2}{2} - 2x - (1 - x) &= 3 \\ \frac{x^2}{2} - 2x - 1 + x &= 3 \\ \frac{x^2}{2} - x - 4 &= 0 \\ \frac{x^2}{2} \cdot 2 - x \cdot 2 - 4 \cdot 2 &= 0 \cdot 2 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

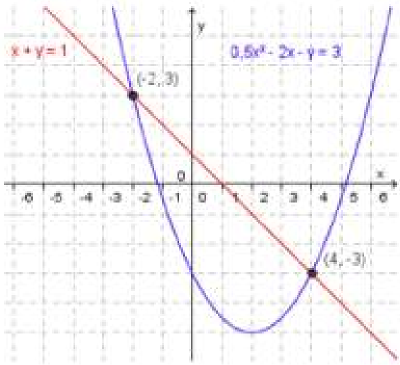
Vi får en andregradslikning med én ukjent, og denne kan vi løse ved å bruke *abc* - formelen. Det er ikke nødvendig å multiplisere med to i likningen, men fordelen er at da slipper vi å sette inn brøker i formelen.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 4$$

Vi setter disse løsningene inn i uttrykket for *y*

$$\begin{aligned} y &= 1 - x \\ y_1 &= 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 \\ y_2 &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$




Likningssettet har to sett med løsninger

$$\begin{aligned} x &= -2 \quad \text{og} \quad y = 3 \\ x &= 4 \quad \text{og} \quad y = -3 \end{aligned}$$

Som du ser til høyre, gir den grafiske løsningen av likningssettet samme resultat.

## Eksempel

Vi har gitt likningssettet

$$\begin{pmatrix} 2x^2 - 2x - y^2 = 8 \\ 2x - y = -2 \end{pmatrix}$$

Vi bruker førstegradslikningen til å finne et uttrykk for *y*

$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ -y &= -2 - 2x \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Vi setter så uttrykket for *y* inn i andregradslikningen

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - y^2 &= 8 \\ 2x^2 - 2x - (2x+2)^2 &= 8 \\ 2x^2 - 2x - (4x^2 + 8x + 4) &= 8 \\ 2x^2 - 2x - 4x^2 - 8x - 4 &= 8 \\ -2x^2 - 10x - 12 &= 0 \quad | :-2 \\ x^2 + 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Legg merke til at vi her dividerer med -2 i siste linje for å få greiere tall å arbeide med når vi skal bruke *abc* - formelen.

Vi bruker *abc* - formelen til å løse denne likningen

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ x &= \frac{-5 \pm 1}{2} \\ x &= -2 \quad \text{eller} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Vi setter så disse løsningene inn i uttrykket for *y*

$$\begin{aligned} y &= 2x + 2 \\ y_1 &= 2 \cdot (-2) + 2 = -2 \\ y_2 &= 2 \cdot (-3) + 2 = -4 \end{aligned}$$

Likningssettet har to sett med løsninger

$$x = -2 \;\wedge\; y = -2 \quad \vee \quad x = -3 \;\wedge\; y = -4$$


Vi kan også løse denne type likningssett ved hjelp av digitale verktøy.

Nedenfor ser du hvordan vi kan løse likningen fra forrige eksempel i wxMaxima.


```
solve([2x^2-2x-y^2=8, 2x-y=-2], [x,y]);
```

$[[x=-2, y=-2], [x=-3, y=-4]]$

I funksjonskapitlet skal du se hvordan vi kan løse likningssettet grafisk.

# Å faktorisere andregradsuttrykk med nullpunkt..

[Å faktorisere andregradsuttrykk med nullpunktmetoden (95332)]

De fleste andregradsuttrykk lar seg ikke faktorisere ved å bruke kvadratsetningene og/eller ved å sette felles faktor utenfor parentes.

## Eksempel

Vi ser på andregradsuttrykket $x^2 - 2x - 8$.

Vi starter med å finne nullpunktene.

Vi løser da likningen $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm 6}{2} \\ x_1 &= \frac{2-6}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{2+6}{2} = 4 \end{aligned}$$

Uttrykket $x^2 - 2x - 8$ er altså lik null når $x = -2$ og når $x = 4$.
Ser du at uttrykket $(x+2)(x-4)$ også er lik null når $x = -2$ og når $x = 4$?

Vi multipliserer og ser at

$$(x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

Vi har da at

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$$

Andregradsuttrykket er faktorisert!


## Eksempel

Vi ser på uttrykket $2x^2 - x - 3$.

Vi starter igjen med å finne nullpunktene, og løser likningen $2x^2 - x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ x_1 &= \frac{1-5}{4} = -1 \\ x_2 &= \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Uttrykket $2x^2 - x - 3$ er altså lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

Vi prøver samme metode som i forrige eksempel og ser at uttrykket $(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ også er lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

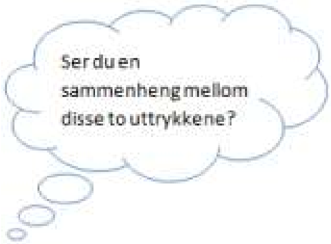
Vi multipliserer og får

$$(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{3}{2}x + x - \frac{3}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Dette er ikke det samme andregradsuttrykket som vi startet med.

Vi startet med

$$2x^2 - x - 3$$




Når vi multipliserer ut parentesene, får vi

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Ser du at vi kan multiplisere det siste uttrykket med 2, og få det andregradsuttrykket vi startet med?

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 2 \cdot \frac{3}{2} = 2x^2 - x - 3$$

Vi har da at

$$2x^2 - x - 3 = 2\left(x + 1\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$


Andregradsuttrykket er faktorisert!

Hvis vi ønsker et uttrykk uten brøk, kan vi multiplisere 2-tallet inn i den siste parentesen

$$2x^2 - x - 3 = 2\left(x + 1\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = \left(x + 1\right)\left(2x - 3\right)$$

Den metoden vi har brukt for å faktorisere i de to eksemplene ovenfor, kalles **nullpunktmetoden**. Du skjønner kanskje hvorfor?

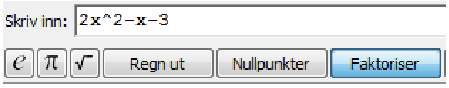
> Nullpunktmetoden
>
> $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$
>
> der $x_1$ og $x_2$ er løsningene av den generelle andregradslikningen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0.$

Når det bare finnes én løsning av andregradslikningen, er $x_1 = x_2$.

Når andregradslikningen ikke har løsninger, kan ikke uttrykket faktoriseres.


Når du bruker nullpunktmetoden til å faktorisere andregradsuttrykk, kan du finne nullpunktene ved å bruke *abc* - formelen, som vist ovenfor, eller ved hjelp av et digitalt verktøy. Digitale verktøy har dessuten ofte egne kommandoer for å faktorisere uttrykk.

I wxMaxima skriver vi inn uttrykket og velger «Faktoriser».




```
wx_factor(2x^2-x-3);
```

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)$$

Finn ut om du kan faktorisere uttrykk direkte ved hjelp av det digitale verktøyet du bruker!

# Mer om forenkling av rasjonale uttrykk

[Mer om forenkling av rasjonale uttrykk (95451)]

Vi skal nå se hvordan vi ved hjelp av reglene for brøkregning og faktorisering kan trekke sammen og forenkle rasjonale uttrykk som også inneholder andregradsuttrykk.

> Husker du at et tall som kan skrives som en brøk med hele tall i teller og nevner, kalles et **rasjonalt tall**?
>
> På samme måte er en brøk som kan skrives som $\frac{f(x)}{g(x)}$ hvor $f(x)$ og $g(x)$ er polynomer og $g(x) \neq 0$, et **rasjonalt uttrykk.**

## Eksempel 1

Vi skal forkorte brøken

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

Først faktoriserer vi telleren.
Telleren $x^2 - 5x + 6$ har nullpunktene $x = 2 \text{ og } x = 3$.
Dermed er
$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.
Da er

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-2)\left(\cancel{x-3}\right)}{\cancel{x-3}} = x - 2$$

## Eksempel 2

Vi skal forkorte brøken

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2}$$

Først faktoriserer vi telleren. Telleren $x^2 + 3x + 2$ har nullpunktene $x = -1 \text{ og } x = -2$.
Dermed er $x^2 + 3x + 2 = (x - (-1))(x - (-2)) = (x+1)(x+2)$.
Da er

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2} = \frac{\left(\cancel{x+1}\right)(x+2)}{2\left(\cancel{x+1}\right)} = \frac{x+2}{2}$$

## Eksempel 3

Vi skal trekke sammen og forkorte

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

> Fellesnevner er $2(x-1)(x-3)$

Først faktoriserer vi nevnerne. Nevneren $x^2 - 4x + 3$ har nullpunktene $x = 1 \text{ og } x = 3$.
Det gir at $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ .
Da er

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-3)}-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1\cdot(x-3)}{2(x-1)\cdot(x-3)}+\frac{2\cdot 2(x-1)}{(x-3)\cdot 2(x-1)}-\frac{(x-2)\cdot 2}{(x-1)(x-3)\cdot 2}$$

$$=\frac{x-3}{2(x-1)(x-3)}+\frac{4x-4}{2(x-1)(x-3)}-\frac{(2x-4)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3+4x-4-(2x-4)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)}$$

Husk å skifte fortegn!

$$=\frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{3\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(x-3)}$$

$$=\frac{3}{2(x-3)}$$

**Brøker som utvides og forkortes endrer ikke verdi**

Når en brøk utvides, multipliseres teller og nevner med samme tall. Brøken endrer ikke verdi.

Når en brøk forkortes, divideres teller og nevner med samme tall. Brøken endrer ikke verdi!

# Likninger med rasjonale uttrykk

Likninger med rasjonale uttrykk (95460)


En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Vi må derfor være spesielt oppmerksomme når vi løser likninger med rasjonale uttrykk hvor den ukjente opptrer i nevneren.

Vi ser på følgende likning

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Dette er de samme brøkene som vi arbeidet med i forrige eksempel (se forrige side i menyen), og vi vet at fellesnevneren er $2\,(x-1)\,(x-3)$.

Eventuelle løsninger som gir *x* = 1 eller *x* = 3 må da forkastes fordi en eller flere av brøkene ikke er definert for disse *x* - verdiene. Før vi går i gang og løser likningen, markerer vi dette ved å skrive $x \neq 1,\ x \neq 3$, øverst til høyre. (Se nedenfor.)

Så går vi i gang med selve løsningen! Det første vi gjør er å multiplisere med fellesnevneren på begge sider av likhetstegnet. Hvorfor er dette lurt? Jo, fordi vi da kan forkorte brøkene og står igjen med en likning uten rasjonale uttrykk.

$x \neq 1,\ x \neq 3$


$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

$$\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{2}\cancel{(x-1)}} + \frac{2\cdot 2(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \frac{(x-2)\cdot 2\cancel{(x-1)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-3)}}$$

$$x-3+4\,(x-1) = (x-2)\cdot 2$$
$$x-3+4x-4 = 2x-4$$
$$x+4x-2x = -4+3+4$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$


Likningen har ingen løsning fordi en eller flere av brøkene ikke er definert for $x = 1$.

Før vi går videre skal vi se en gang til på de to siste eksemplene vi har arbeidet med.

Først trakk vi sammen og forkortet

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Så løste vi likningen

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$


I begge tilfeller fant vi først fellesnevneren. Men hva gjorde vi så?

Da vi løste likningen, multipliserte vi med fellesnevneren på begge sider av likhetstegnet og fikk en enkel likning uten brøker. Dette kan vi gjøre i en likning fordi **vi kan multiplisere med samme uttrykk på begge sider i en likning og fortsatt beholde likhet mellom venstresiden og høyresiden.**

Når vi skal trekke sammen og forkorte, kan vi imidlertid ikke multiplisere med fellesnevneren fordi uttrykket da endrer verdi. Det vi gjorde her var å **utvide hver av brøkene** slik at alle fikk samme nevner, fellesnevneren. Så satte vi på felles brøkstrek og trakk sammen.

# Ulikheter

## Ulikheter

[Ulikheter (95466)]

En ulikhet består av et ulikhetssymbol med et tall eller uttrykk på hver side av symbolet. Et eksempel er ulikheten

$$3 < 8$$

Ulikheten leses som «3 er mindre enn 8».

Vi har fire ulikhetssymboler, $<$ som betyr «mindre enn», $>$ som betyr «større enn», $\leq$ som betyr «mindre enn eller lik» og $\geq$ som betyr «større enn eller lik».

Merk at «gapet» alltid peker mot det største tallet.

På barneskolen lærte du kanskje å tenke på $<$ som gapet til en krokodille. Krokodillen er sulten og vil alltid gape over det største tallet eller uttrykket!

Husk at krokodillen er sulten og alltid vil gape over det største tallet eller uttrykket!

En ulikhet inneholder gjerne en eller flere ukjente størrelser symbolisert med bokstaver. Det er vanlig å bruke bokstaven *x* for den ukjente når ulikheten har én ukjent størrelse.

Et eksempel er ulikheten

$$x + 3 \geq 8$$

Å **løse** en ulikhet går ut på å finne hvilke verdier *x* kan ha for at ulikheten skal være sann. For eksempel, hvilke verdier av *x* i ulikheten ovenfor gjør at $x + 3$ blir lik eller større enn 8?

### Metode for å løse ulikheter

Langt på vei kan vi løse ulikheter etter de samme prinsipper vi brukte for å løse likninger.

- Hvis vi **adderer** det samme tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $5 < 9, \text{ så er } 5\boxed{+3} < 9\boxed{+3}$.
- Hvis vi **subtraherer** det samme tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 5, \text{ så er } 9\boxed{-3} > 5\boxed{-3}$.
- Hvis vi **multipliserer** med det samme **positive** tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 5, \text{ så er } 9\boxed{\cdot 3} > 5\boxed{\cdot 3}$.
- Hvis vi **dividerer** med det samme **positive** tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 6, \text{ så er } \frac{9}{\boxed{3}} > \frac{6}{\boxed{3}}$.

Vi kan altså addere, subtrahere, multiplisere og dividere med samme **positive** tallet på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

Hva så hvis vi multipliserer eller dividerer med et **negativt** tall på begge sider i en ulikhet?

Vi ser på en tallinje.


Hvis vi velger to ulike tall, vet vi at det tallet som ligger lengst til høyre, er det største. Tallet 4 ligger til høyre for tallet 2 og er dermed større enn 2.

$$4 > 2$$

Vi multipliserer så begge tallene (begge sidene i ulikheten) med det negative tallet −1. Vi får at $4 \cdot (-1) = -4 \text{ og } 2 \cdot (-1) = -2$. Men −4 ligger til venstre for −2 på tallinjen og er da minst. Det betyr at

$$-4 < -2$$

Vi har altså måttet snu ulikhetstegnet for at ulikheten fortsatt skal være sann.

På samme måte kan du ta utgangspunkt i to hvilke som helst ulike tall og multiplisere dem eller dividere dem med samme negative tallet. Du vil se at du alltid må snu ulikhetstegnet for at ulikheten fortsatt skal være sann.

Dette betyr at de regler vi hadde for å løse likninger også kan brukes for å løse ulikheter med den forskjell at vi må snu ulikhetstegnet når vi multipliserer eller dividerer med et negativt tall.

• **Vi kan addere og subtrahere med samme tall** på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

• **Vi kan multiplisere og dividere med samme positive tall** på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

• **Vi må snu ulikhetstegnet hvis vi dividerer eller multipliserer med et negativt tall** på begge sider av ulikhetstegnet.

### Eksempel

Vi løser ulikheten

$$\begin{aligned}
2x + 3 &< 4x + 9 \\
&\qquad \text{Vi substraherer } 4x \text{ og } 3 \text{ på begge sider.} \\
2x - 4x &< 9 - 3 \\
&\qquad \text{Vi trekker sammen like ledd.} \\
-2x &< 6 \\
&\qquad \text{Vi dividerer med } -2 \text{ på begge sider} \\
&\qquad \text{og snur ulikhetstegnet.} \\
x &> -3
\end{aligned}$$

For alle verdier av *x* større enn −3 er ulikheten sann.

# Ulikheter av 2. grad

Ulikheter av 2. grad (95629)

Gitt ulikheten

$$x^2 < 5x - 4$$

Vi ordner først ulikheten slik at vi får null på høyre side.

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Vi bruker så for eksempel *abc* - formelen og finner nullpunktene til uttrykket $x^2 - 5x + 4$.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Vi vet nå at utrykket $x^2 - 5x + 4$ er lik 0 når *x* = 1 og når *x* = 4.
Det er bare for disse *x* - verdiene at uttrykket kan skifte fortegn.

Det betyr at uttrykket enten er positivt eller negativt for alle *x* - verdier i hvert av de tre intervallene $<\leftarrow, 1>, <1, 4> \text{ og } <4, \rightarrow>$. For å avgjøre om uttrykket er positivt eller negativt i hvert av intervallene, kan vi ta «stikkprøver» for en *x* - verdi i hvert intervall.

Vi vet at uttrykket kan faktoriseres slik at $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$. Det er lettest å bruke det faktoriserte uttrykket når vi tar stikkprøvene.

$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$

For $x = 0$ får vi

$(0-4)(0-1) = (-4) \cdot (-1)$ Uttrykket er positivt.

For $x = 2$ får vi

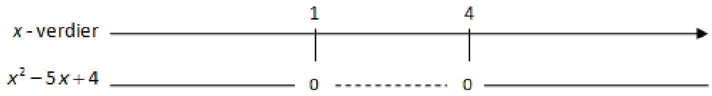
$(2-4)(2-1) = (-2) \cdot (1)$ Uttrykket er negativt.

For $x = 5$ får vi

$(5-4)(5-1) = (1) \cdot (4)$ Uttrykket er positivt.

Det er ikke nødvendig å regne ut verdien i parentesene. Det som betyr noe er fortegnene på parentesuttrykkene.

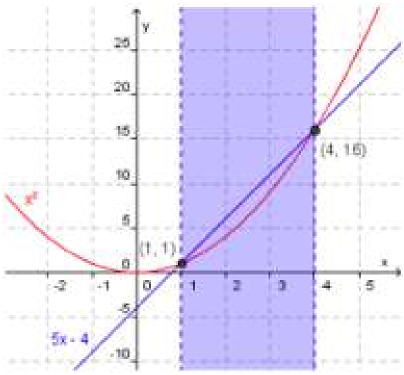
For å få en oversikt over situasjonen setter vi opp et såkalt **fortegnsskjema**. Det består av en **tallinje** som viser *x* - verdiene, og en **fortegnslinje** som viser fortegnet til uttrykket i de aktuelle intervallene. **Heltrukket linje** markerer at uttrykket er positivt i dette tallintervallet og **stiplet linje** markerer at uttrykket er negativt. En « 0 » viser at uttrykket er lik null for denne *x* - verdien.




Vår oppave var å finne ut for hvilke verdier av $x$ det stemte at $x^2 < 5x - 4$. Det er det samme som å finne ut når $x^2 - 5x + 4 < 0$. Ut fra fortegnslinjen er det nå lett å se løsningen på oppgaven.

Løsningen på oppgaven er at $x$ må ligge mellom 1 og 4, dvs. $x \in < 1, 4 >$.

Ved grafisk løsning tar vi utgangspunkt i den opprinnelige ulikheten. Løsningen blir det intervallet på $x$-aksen der grafen til $y = x^2$ ligger under grafen til $y = 5x - 4$.



# Logaritmer

## Logaritmer

[Logaritmer (95648)](#)

På begynnelsen av 1600-tallet ble teleskopet oppfunnet. Det skjedde store fremskritt innenfor astronomien. Arbeid med astronomi, navigasjon og trigonometriske beregninger førte til at matematikere, fysikere og astronomer etter hvert fikk behov for å regne med tall med mange siffer. Utregningene ble lange. Ofte ble det gjort feil undervegs. For å lette arbeidet fant noen ut at ved å bruke regnereglene for potensregning, **kunne multiplikasjon reduseres til addisjon** og **divisjon til subtraksjon.**

### Eksempel

Du skal multiplisere to store tall

10 000.100 000

Fra potensregningen vet du at $10\ 000 = 10^4$ og $100\ 000 = 10^5$.

Du vet at potenser med samme grunntall multipliseres ved å addere eksponentene og beholde grunntallet. Multiplikasjonen blir slik

$$10\ 000 \cdot 100\ 000 = 10^4 \cdot 10^5 = 10^{4+5} = 10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$$

**Multiplikasjonen blir redusert til addisjon** av eksponentene i tierpotenser.

I 1T brukte vi logaritmer til å løse eksponentiallikninger. Vi skal nå arbeide videre med logaritmeregning.

Det var skotten John Napier (1550 – 1617) som begynte å regne med logaritmer. Han fant ut at alle tall kan skrives som potenser, og han begynte arbeidet med såkalte logaritmetabeller. Engelskmannen Henry Briggs (1561 – 1630) fortsatte dette arbeidet. Briggs brukte 10 som grunntall, og i 1624 utgav han boken Arithmetica Logarithmica, som blant annet inneholder en tabell med logaritmene til tall fra 1 til 20 000.


John Napier (1550 - 1617)

Briggs var først og fremst interessert i arbeidet med logaritmer fordi han skjønte at logaritmeregning kunne være til stor nytte når en skulle utføre til dels lange og kompliserte beregninger innenfor navigasjon. Navigasjon var spesielt viktig for engelskmennene med tanke på landets sikkerhet og forsvar.

Når vi bruker 10 som grunntall, har vi for eksempel at $2 \approx 10^{0,3010}$ og $3 \approx 10^{0,4771}$.

En logaritmetabell for hele tall fra 1 til 10 kan se ut som vist nedenfor.
(Briggs opererte med en nøyaktighet på 14 desimaler i sine logaritmetabeller!)

| *x* | **lg (x)** |
|---|---|
| 1 | 0,0000 |
| 2 | 0,3010 |
| 3 | 0,4771 |
| 4 | 0,6021 |
| 5 | 0,6990 |
| 6 | 0,7782 |
| 7 | 0,8451 |
| 8 | 0,9031 |
| 9 | 0,9542 |
| 10 | 1,0000 |

For å multiplisere tallene 2 og 3 kan vi da regne slik

$$2 \cdot 3 \approx 10^{0,3010} \cdot 10^{0,4771} = 10^{0,3010+0,4771} = 10^{0,7781} \approx 6$$

Multiplikasjon blir erstattet av addisjon. Den siste overgangen finner vi ved å bruke tabellen baklengs.

Nå tenker du sikkert at det helt klart hadde vært enklere å multiplisere direkte. Det er selvfølgelig riktig akkurat for dette eksempelet, men tenk deg at du skulle multiplisere to tall med mange siffer, uten kalkulator. Da hadde det vært lurt å kunne erstatte multiplikasjon med addisjon.

Tallet som 10 må opphøyes i for å gi et tall *a*, kalles for **den briggske logaritmen** til *a*. Hvor tror du navnet «briggske» kommer fra?

Den **briggske logaritmen** symboliseres på norsk med **lg**. Vi har at $\lg 2 \approx 0,3010$ fordi $10^{0,3010} \approx 2,\ \lg 100 = 2$, fordi $100 = 10^2$ osv.

**Den briggske logaritmen til** *a*

$a = 10^{\lg\ a}$ for alle $a \in\ (0, \rightarrow)$

> Legg merke til at vi bare kan finne 10-logaritmen til positive tall, fordi $10^x$ alltid vil være positiv.

Logaritmetabeller ble brukt i norsk skole fram til 1970-tallet. Da overtok kalkulatoren. Spør noen voksne du kjenner om de husker logaritmetabellene. Kanskje noen har en gammel tabell liggende?

Logaritmer er fortsatt aktuelle. I dag kan du finne alle logaritmeverdier ved hjelp av kalkulator eller andre digitale verktøy. På kalkulatorer brukes gjerne **log** som er den internasjonale betegnelsen for logaritmer med 10 som grunntall.

Logaritmetabeller og regnestaver ble brukt i norsk skole fram til 1970-tallet. Da overtok kalkulatoren.

Vi skal bruke logaritmer til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter om du går videre i menyen.

# Briggske logaritmer

Briggske logaritmer (95685)

**Definisjon**
Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet

$$10^{\lg\ a} \overset{\text{def}}{=} a$$

## Eksempel

Logaritmen til 100 er lik 2 fordi $100 = 10^2$.

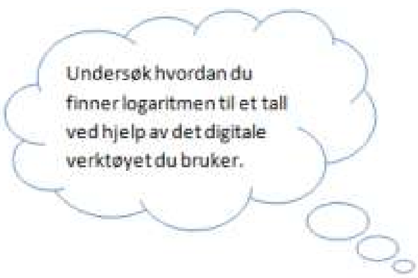
Logaritmen til 1000 er lik 3 fordi $1000 = 10^3$ .

Logaritmen til 1 er lik 0 fordi $1 = 10^0$.

Logaritmen til 2 er lik 0,3010 fordi $2 = 10^{0{,}3010}$.

På norsk bruker vi skrivemåten «lg» for den briggske logaritmen. Den briggske logaritmen har 10 som grunntall. Vi kan også definere logaritmer med andre grunntall enn 10.

Vi kan finne logaritmen til alle tall ved å bruke et digitalt verktøy. I wxMaxima finner vi for eksempel logaritmen til 2 slik:


Når vi skal løse eksponentiallikninger, bruker vi at logaritmen til en potens er lik eksponenten multiplisert med logaritmen til grunntallet

$$\lg\ a^x = x \cdot \lg\ a$$

Vi kan bevise at denne sammenhengen gjelder ved å ta utgangspunkt i definisjonen av logaritmer og regnereglene for potenser.

**Bevis**

Definisjonen av logaritmer gir at $a = 10^{\lg\ a}$.

Vi bruker så regnereglene for potenser og får

$$a^x = \left(10^{\lg\ a}\right)^x = 10^{(\lg\ a)x} = 10^{x\cdot\mathrm{lga}}$$

Du må altså opphøye 10 i $\mathrm{x}\lg\ a$ for å få $a^x$ .

Det betyr etter definisjonen at

$$\lg\ a^x = x \cdot \lg\ a$$

Setningen er nå bevist.

# Logaritmesetningene

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Logaritmesetningene (95703)

Ved å bruke **tre logaritmesetninger** kan vi forenkle mange uttrykk og løse likninger og ulikheter som vi til nå ikke har kunnet løse uten digitale hjelpemidler.

**Første logaritmesetning**

$$\lg\,(a \cdot b) = \lg\ a + \lg\ b$$

**Andre logaritmesetning**

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg\ a - \lg\ b$$

**Tredje logaritmesetning**

$$\lg\ a^x = \mathrm{x}\lg\ a$$

Det står ikke i kompetansemålene at du skal kunne utlede disse setningene. Utledningen av den første setningen er vist her Briggske logaritmer. Bevisene for de to andre setningene kan du finne i algebrakapittelet for R1.

## Forenkling av logaritmeuttrykk

Uttrykk som inneholder logaritmer, kan ofte forenkles ved hjelp av logaritmesetningene. Studer eksemplet, og gjør deretter mange nok oppgaver til at du behersker teknikken.

## Eksempel

Vi ønsker å skrive uttrykket $\lg\ 4x + 4\lg\frac{2}{x} - \lg\ x^3 + 2\lg\sqrt{x}$ så enkelt som mulig. Siden logaritme bare er definert for positive tall, må vi her forutsette at *x* er større enn null.

$$\begin{aligned}
\lg 4\times + 4\lg\left(\tfrac{2}{\times}\right) - \lg\times^3 + 2\lg\sqrt{\times} &= \lg 4 + \lg\times + 4\left(\lg 2 - \lg\times\right) - 3\lg\times + 2\lg\times \\
&= \lg 2^2 + \lg\times + 4\lg 2 - 4\lg\times - 3\lg\times + 2\cdot\tfrac{1}{2}\lg\times \\
&= 2\lg 2 + \lg\times + 4\lg 2 - 4\lg\times - 3\lg\times + \lg\times \\
&= 6\lg 2 - 5\lg\times
\end{aligned}$$

# Eksponentiallikninger

[Eksponentiallikninger (95706)](#)

Likninger med potensuttrykk der eksponenten er ukjent, kalles **eksponentiallikninger**.
Vi kan bruke logaritmesetningen til å løse slike likninger.

Gitt eksponentiallikningen

$$a^x = b$$

Siden logaritmen til to like tall er like, er

$$\mathrm{lga}^{\times} = \mathrm{lgb}$$

Tredje logaritmesetningen gir da at

$$\times \mathrm{lga} = \mathrm{lgb}$$

Det gir løsningen på eksponentiallikningen

$$\times = \frac{\mathrm{lgb}}{\mathrm{lga}}$$

## Eksempel 1

Anne har plassert 1000 kroner på en konto i banken. Renten er 6,0 % per år. Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?


Vi finner vekstfaktoren

$$1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

Vi kan da sette opp følgende likning der *x* er tiden pengene må stå i banken

$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

Dette er en eksponentiallikning.

$$1000 \cdot 1,06^{\times} = 2 \cdot 1000$$

$$1,06^{\times} = \frac{2000}{1000} \quad \text{Vi ordner likningen slik at vi får potenser alene på venstre side.}$$

$$1,06^{\times} = 2$$

$$\mathrm{lg}1,06^{\times} = \mathrm{lg}2 \quad \text{Logaritmene til like tall er like.}$$

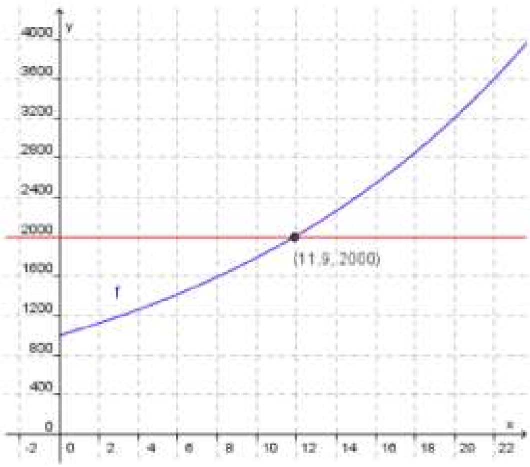
$$\times \cdot \mathrm{lg}1,06 = \mathrm{lg}1,10 \quad \text{Vi bruker tredje logaritmesetning.}$$

$$\times = \frac{\mathrm{lg}2}{\mathrm{lg}1,06} \quad \text{Her må vi bruke digitalt verktøy.}$$

$$\times \approx 12$$

Pengene må altså stå ca. 12 år i banken før beløpet er fordoblet.

Vi kan også løse likningen grafisk. Se koordinatsystemet til høyre. Her har vi tegnet grafen til funksjonen *f* gitt ved $f(x)=1000 \cdot 1{,}06^{x}$ sammen med den rette linjen $y=2000$ og markert løsningen av likningen.




### Eksempel 2

Vi antar at innbyggertallet i Småby vokser med 1,5 % hvert år. Det bor i dag 13 000 personer i Småby. Hvor mange år går det før innbyggertallet er 15 000?

Vi finner vekstfaktoren

$$1+\frac{1{,}5}{100}=1{,}015$$

Vi får da likningen

$$13\,000\cdot 1{,}015^{x}=15\,000$$

$$1{,}015^{x}=\frac{15\,000}{13\,000}$$

$$\lg 1{,}015^{x}=\lg 1{,}154$$

$$x\cdot \lg 1{,}015=\lg 1{,}154$$

$$x=\frac{\lg 1{,}154}{\lg 1{,}015}$$

$$x=9{,}6$$

Innbyggertallet vil være 15 000 om snaue 10 år.

### Eksempel 3

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilen har sunket i verdi med 10 % hvert år siden den var ny, og Kari regner med at denne verdireduksjonen vil fortsette de neste årene.


Vekstfaktoren blir

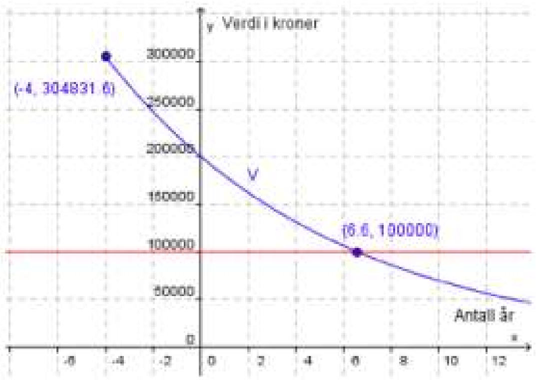
$$1-\frac{10}{100}=0{,}90$$

Bilens verdi $V(x)$, $x$ år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved

$$V(x)=200\,000\cdot 0{,}90^{x}$$

Av grafen til *V* kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså da den var ny, var nærmere 305 000 kroner.




Vi skal også se hvordan vi kan regne ut dette.

Vi regner først ut hvor lang tid det går før bilens verdi har sunket til 100 000 kroner

$$200\ 000 \cdot 0,90^{x} = 100\ 000$$

$$0,90^{x} = \frac{100\ 000}{200\ 000}$$

$$0,90^{x} = 0,5$$

$$x \cdot \lg 0,90 = \lg 0,5$$

$$x = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,90}$$

$$x = 6,6$$

Dette var det samme som vi fant grafisk.

Så regner vi ut hvor mye bilen var verdt for 4 år siden.

$$200\ 000 \cdot 0,90^{-4} \approx 305\ 000$$

Dette var også det samme som vi fant grafisk.

I eksempel 4 skal vi se litt på en annerledes eksponentiallikning.

## Eksempel 4

$$2 \cdot 3^{x} = 3 \cdot 4^{x}$$

$$\lg\left(2 \cdot 3^{x}\right) = \lg\left(3 \cdot 4^{x}\right)$$

$$\lg 2 + \lg 3^{x} = \lg 3 + \lg 4^{x}$$

$$\lg 2 + x \cdot \lg 3 = \lg 3 + x \cdot \lg 4$$

$$x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 4 = \lg 3 - \lg 2$$

$$x\left(\lg 3 - \lg 4\right) = \lg 3 - \lg 2$$

$$x = \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 3 - \lg 4}$$

Vi har her gitt svaret på **eksakt form**. Det kan ofte være greit når vi arbeider med teoretiske problemstillinger. På Del 1 av en prøve eller eksamen må du av og til oppgi svar på eksakt form fordi du ikke kan regne ut en tilnærmingsverdi uten bruk av digitalt verktøy. I praktiske oppgaver er det vanlig å bruke tilnærmingsverdier.

## Eksempel 5

Av og til får du bruk for å løse likninger hvor det er flere ledd med potensuttrykk, som for eksempel

$$3^{2\times} - 4 \cdot 3^x - 12 = 0$$

Hva slags likning er dette? Her må vi tenke oss litt om.

Vi ser at i likningen inngår både 3 opphøyd i 2*x* og 3 opphøyd i *x*. Fra potensregningen vet du at $3^{2\times} = (3^\times)^2$. Vi kaller nå $3^\times$ for *u*, og likningen vår blir slik

$$(3^\times)^2 - 4 \cdot 3^\times - 12 = 0$$
$$u^2 - 4 \cdot u - 12 = 0$$

Nå ser vi at vi har en **andregradslikning** med *u* som den ukjente.

Andregradslikningen har løsningen

$$u^2 - 4 \cdot u - 12 = 0$$

$$u = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$$u_1 = -2 \quad u_2 = 6$$

Nå er det viktig at vi tenker litt igjen ...

Vi begynte med å sette $3^\times = u$. Når vi nå har funnet at $u = -2$ eller $u = 6$, må det bety at $3^\times = -2$ eller $3^\times = 6$.

Løsningen $3^\times = -2$ gir ingen mening siden potensen alltid er positiv.

Løsningen blir $\qquad 3^\times = 6 \quad \Rightarrow \quad \times = \frac{\lg 6}{\lg 3} \approx 1,6$

Også her kunne vi oppgitt svaret på eksakt form som $\times = \frac{\lg 6}{\lg 3}$

Merk at oppgaver av denne typen da gjerne kan inngå i **Del 1** av en prøve eller en eksamen.

# Logaritmelikninger

Logaritmelikninger (95726)

**Logaritmelikninger** er likninger som inneholder **logaritmen til den ukjente**. I slike likninger må vi ofte bruke de tre logaritmesetningene både «forlengs» og «baklengs». Etter hvert finner vi en verdi for logaritmen til den ukjente eller en funksjon av den ukjente.

Hvis vi finner at $\lg x = 2$, og vår oppgave er å finne *x*, utnytter vi det faktum at hvis to uttrykk er like, så er 10 opphøyd i uttrykkene også like. Videre bruker vi definisjonen på logaritmer for å finne den ukjente.

Vi må også alltid huske at vi bare kan finne logaritmer til positive tall!

Eksempel 1

$\lg x = 2 \quad \text{Vi ser her at } x \text{ må være større enn } 0.$

$10^{\lg x} = 10^2 \quad \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.}$

$x = 100 \quad \text{Vi bruker definisjon på logaritme og forenkler venstre side.}$

Eksempel 2

$\lg x^2 + 2\lg x - 2 = 0 \quad x \text{ må være større enn } 0. \text{ Vi bruker tredje logaritmesetning.}$

$2\lg x + 2\lg x = 2 \quad \text{Vi samler leddene med } x \text{ på venstre side.}$

$4\lg x = 2 \quad \text{Vi trekker sammen.}$

$\lg x = \frac{2}{4} \quad \text{Vi dividerer for å få } \lg x \text{ alene på venstre side.}$

$10^{\lg x} = 10^{\frac{1}{2}} \quad \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.}$

$x = \sqrt{10} \quad \text{Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler på venstre side.}$

Eksempel 3

$\lg(x+2) - \lg(2) = 2 \quad x \text{ må være større enn } -2.$

$\lg\left(\frac{x+2}{2}\right) = 2 \quad \text{Vi bruker andre logaritmesetning "baklengs".}$

$10^{\lg\left(\frac{x+2}{2}\right)} = 10^2 \quad \text{To tierpotenser med like eksponenter er like.}$

$\frac{x+2}{2} = 10^2 \quad \text{Vi bruker definisjon på logaritme og forenkler venstre side.}$

$x = 200 - 2$

$x = 198$

Eksempel 4

$\lg \times + \lg(5 - \times) = \lg 6$ $\quad$ $\times$ må være større enn 0 og mindre enn 5.

$\lg(\times \cdot (5 - \times)) = \lg 6$ $\quad$ Vi bruker første logaritmesetning " baklengs ".

$10^{\lg(\times \cdot (5-x))} = 10^{\lg 6}$ $\quad$ To tierpotenser med like eksponenter er like.

$\times \cdot (5 - \times) = 6$ $\quad$ Vi bruker definisjonen på logaritme og forenkler

$5 \times - \times^2 = 6$

$- \times^2 + 5 \times -6 = 0$

$\times = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2}$

$\times_1 = 2 \quad \times_2 = 3$

Begge løsningene kan brukes siden begge ligger mellom 0 og 5

# Implikasjon og ekvivalens

## Implikasjon og ekvivalens

Implikasjon og ekvivalens (95737)

### Implikasjon

Hvis Kaja bor i Bergen, bor Kaja i Norge. Vi har da det vi kaller en **implikasjon**. At Kaja bor i Bergen, medfører at Kaja bor i Norge. Vi har et eget tegn for «**medfører at**». Dette tegnet er
«⇒» og kalles en **implikasjonspil**. Vi skriver

$$\text{Kaja bor i Bergen} \Rightarrow \text{Kaja bor i Norge}$$

Vi kan også si at «Kaja bor i Bergen» og «Kaja bor i Norge», er to utsagn. Utsagn kan enten være sanne eller usanne. Vi kan gi utsagnene navn. Vi bruker da små bokstaver.

**p:** Kaja bor i Bergen

**q:** Kaja bor i Norge

Vi kan da skrive

$$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$$

Vi har da fått en kortfattet skrivemåte som forteller at hvis det er sant at Kaja bor i Bergen, da er det også sant at Kaja bor i Norge.

### Ekvivalens

Hvis den logiske slutningen gjelder begge veier, sier vi at vi har en **ekvivalens**.
Tegnet «⇔» kalles en **ekvivalenspil**.

### Eksempel

$$\times = 2 \Leftrightarrow 2\times = 4$$

Vi leser $x = 2$ **er ekvivalent med** at $2x = 4$.

Dette betyr at det er **implikasjon begge veier**

$$\times = 2 \Rightarrow 2\times = 4 \quad \text{og} \quad 2\times = 4 \Rightarrow \times = 2$$

Vi har ikke ekvivalens i det første eksemplet fordi «Kaja bor i Norge» ikke medfører at «Kaja bor i Bergen».

# Matematiske bevis

[Matematiske bevis (95755)](Matematiske bevis (95755))

I matematikken har vi en rekke påstander eller setninger. Et eksempel er setningen som sier at summen av vinklene i en trekant er 180 grader. Vi godtar ikke slike påstander uten videre. Vi krever bevis.

## Direkte bevis

Dette er den mest vanlige formen for bevisførsel, og det er egentlig dette vi gjør når vi for eksempel løser likninger.

## Eksempel 1

Vi sier «Løs likningen»

$$2x + 4 = 6$$

Vi kunne like gjerne sagt «Bevis påstanden»

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Det vi gjør er å løse likningen på vanlig måte. **Vi antar at noe er sant og trekker logiske slutninger fram til konklusjonen**. Vi bruker implikasjonstegnet for å vise at vi trekker en logisk slutning. Løsning av en likning kunne vi ført slik

$$\begin{gathered} 2x+4=6 \\ \Downarrow \\ 2x=6-4 \\ \Downarrow \\ 2x=2 \\ \Downarrow \\ x=1 \end{gathered}$$

I dette tilfellet har vi også ekvivalens hele veien. Det betyr at $x = 1 \Rightarrow 2x + 4 = 6$. Det vil si at løsningen på likningen er korrekt.

Vi kunne altså like gjerne skrevet

$$\begin{gathered} 2x+4=6 \\ \Updownarrow \\ 2x=6-4 \\ \Updownarrow \\ 2x=2 \\ \Updownarrow \\ x=1 \end{gathered}$$

## Eksempel 2

En setning i matematikken sier at for et naturlig tall $n$ gjelder

$$n \text{ er et partall} \Rightarrow n^2 \text{ er delelig med } 4$$

Et direkte bevis for denne påstanden kan føres slik

$n$ er et partall

$\Downarrow$ Vi kan skrive $n$ som $2t$ hvor $t$ er et

$n = 2t$ helt tall fordi 2 er en faktor i alle partall.

$\Downarrow$

$n^2 = 4t^2$ 4 er en faktor i $n^2$. Det må bety at $n^2$ er delelig med 4.

I dette beviset brukte vi at ethvert **partall** kan skrives som $2t$ hvor $t$ er et helt tall. Tilsvarende kan ethvert **oddetall** skrives som $2t+1$ eller $2t-1$. Se nedenfor.

**Partall og oddetall**
Et helt tall $n$ er partall hvis og bare hvis det finnes et helt tall $t$ slik at $n=2t$.

Et helt tall $n$ er oddetall hvis og bare hvis det finnes et helt tall $t$ slik at
$n = 2t + 1$ eller $n = 2t - 1$.

## Eksempel 3

Det kan ofte være lett å trekke gale slutninger. Det gjelder for eksempel når vi løser **irrasjonale likninger.**

Likninger hvor **den ukjente befinner seg under ett eller flere rottegn**, kalles irrasjonale likninger.

Gitt likningen

$$\sqrt{x+1} = -3$$

For å løse slike likninger må vi kvadrere på begge sider av likhetstegnet

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (-3)^2$$

Vi får da

$$\begin{aligned} x+1 &= 9 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Hvis vi nå setter prøve, får vi

Venstre side: $\sqrt{x+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$
Høyre side: $-3$

Vi ser at $x = 8$ ikke er en løsning av likningen. Hvordan kan det henge sammen?

**Forklaring**

Alle er enige om at

$$-5 \neq 5$$

Men samtidig er

$$(-5)^2 = 5^2$$

Vi ser altså at når vi kvadrerer tall som er forskjellige, kan kvadratene bli like. Men $(-5)^2 = 5^2$ medfører ikke at $-5 = 5$.

Med implikasjons- og ekvivalenstegn ser vi at **problemet er at vi ikke har ekvivalens når vi kvadrerer**.

$$\sqrt{x+1} = -3$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (-3)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x+1 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 8$$

Eksempelet viser at det kan **være viktig å være klar over når vi har implikasjon, og når vi har ekvivalens**.

Når vi løser irrasjonale likninger, har vi bare implikasjon når vi kvadrerer. Kvadreringen kan føre til at vi får en falsk løsning. Du må derfor alltid **sette prøve på svaret** når du løser irrasjonale likninger.

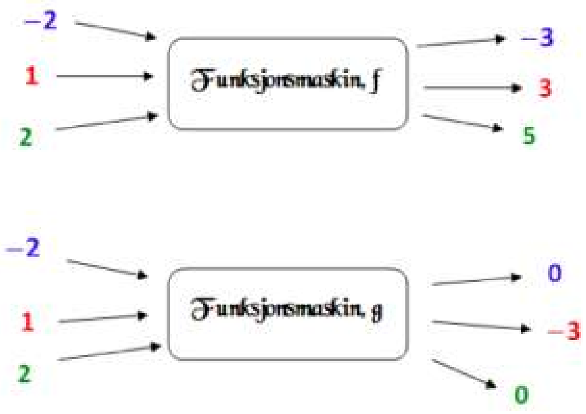
# Funksjoner

## Teori

## Innledning

## Innledning

[Innledning (99430)](Innledning (99430))




Ovenfor ser du to «funksjonsmaskiner», *f* og *g*. Når vi putter en verdi inn i en av maskinene, kommer en annen verdi ut. Prøv å finne ut hva maskinene gjør med verdiene vi putter inn. Finner du ut hvordan hver av maskinene er «programmert»?

Funksjonskapittelet handler om hvordan en størrelse varierer avhengig av en annen. Vi skal se på hvordan sammenhenger mellom størrelser fra algebra, geometri og praktiske situasjoner kan beskrives ved hjelp av funksjoner.

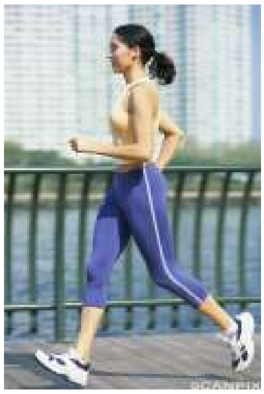
Funksjoner brukes i mange sammenhenger for å lage matematiske modeller av virkeligheten og i forbindelse med det vi kaller matematisk analyse. I dette kapittelet skal vi se på ulike typer funksjoner med forskjellige egenskaper.

Kapittelet bygger på funksjonskapittelet fra 1T. Du skal lære å derivere polynomfunksjoner og du skal lære mer om hva den førstederiverte og den andrederiverte forteller om forløpet til en funksjon.

# Funksjoner

## Funksjoner

Funksjoner (99515)



En funksjon kan for eksempel vise sammenheng mellom strekning og tid.

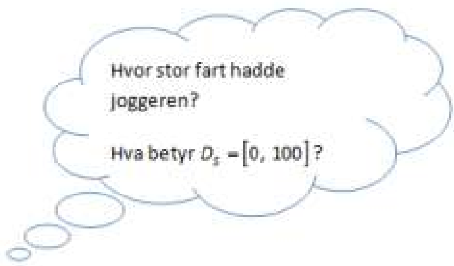
I 1T forklarte vi funksjonsbegrepet ved hjelp av en funksjon som viste sammenheng mellom strekningen en jogger hadde tilbakelagt og hvor lenge hun hadde løpt.

Vi forutsatte at hun løp med jevn fart.

Vi fant at sammenhengen kunne beskrives ved funksjonen $S$ gitt ved

$$S(t) = 160t \quad D_s = (0, 100)$$

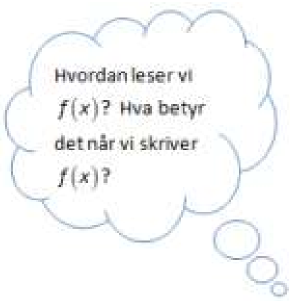
der $t$ stod for antall minutter og $S(t)$ for strekningen i meter som var tilbakelagt etter $t$ minutter.




Generelt sier vi at ***y* er en funksjon av *x*** dersom **hver verdi av *x* gir nøyaktig en verdi av *y***.

For å vise at $y$ er en funksjon av $x$, skriver vi ofte $y(x)$ (som vi leser «$y$ av $x$»).

Funksjonen $S$ ovenfor er en funksjon av $t$ og vi skriver $S(t)$. Denne funksjonen er her representert ved en formel eller et funksjonsuttrykk. Vi kan også la funksjoner være representert ved verditabeller og/eller ved grafer.



# Hvordan tegne grafer til funksjoner uten å bruke digitale verktøy

[Hvordan tegne grafer til funksjoner uten å bruke digitale verktøy (99532)]

Det er viktig å kunne tegne grafer til funksjoner uten å bruke digitale verktøy. Det gir en god forståelse av hva en **funksjon** egentlig er, nemlig **en beskrivelse av hvordan en størrelse varierer avhengig av en annen størrelse**.

Etter hvert som du blir kjent med de forskjellige funksjonstypene, skal du lære noen «knep» for hvordan du enklere kan tegne grafene. Det finnes imidlertid en generell metode som alltid kan brukes. Denne metoden sammen med «knepene» du senere skal lære, gir ofte det beste resultatet.

## En generell metode

Vi ser på funksjonen *S* gitt ved

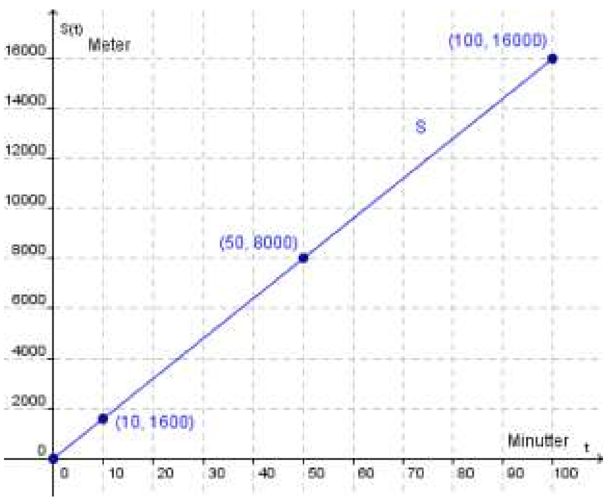
$$S(t) = 160t \quad D_s = (0, 100)$$

Vi kan lage en **verditabell** ved først å velge ut noen verdier for *t* som ligger i definisjonsområdet, og så regne ut de tilsvarende funksjonsverdiene, *S*(*t*). Verditabellen til høyre viser et utvalg av sammenhørende verdier for *t* og *S*(*t*).

| $t$ (minutter) | $S(t)=160t$ (meter) | $S(t)$ (meter) |
|---|---|---|
| 0 | $160\cdot 0$ | 0 |
| 10 | $160\cdot 10$ | 1600 |
| 50 | $160\cdot 50$ | 8000 |
| 100 | $160\cdot 100$ | 16000 |

De sammenhørende verdiene fra verditabellen merker vi av som **punkter i et koordinatsystem** hvor *t* avsettes langs førsteaksen og *S*(*t*) langs andreaksen.

Aksene må tilpasses slik at alle punktene i verditabellen «får plass» i grafvinduet.



I vårt eksempel ligger punktene på en rett linje. Vi trekker den rette linjen gjennom punktene. Denne linjen kalles for **grafen til funksjonen**.

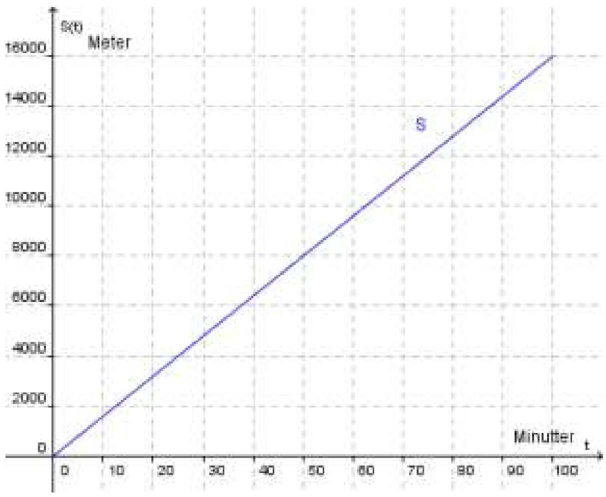
Hvis punktene ikke ligger på en rett linje, tegner vi en kurve som går gjennom punktene.


Langs førsteaksen finner vi *t*-verdiene, altså definisjonsmengden til funksjonen. Langs andreaksen finner vi funksjonsverdiene *S*(*t*). Vi ser at verdiene langs andreaksen går fra 0 til 16 000 når *t*-verdiene gjennomløper **definisjonsmengden**, $D_s = (0, 100)$. **Verdimengden** er derfor $V_s = (0, 16000)$.

# Hvordan tegne grafer og finne verditabeller til funksjoner ved hjelp av et digitalt verktøy

[Hvordan tegne grafer og finne verditabeller til funksjoner ved hjelp av et digitalt verktøy (99542)](#)

Vi kan enkelt tegne grafen til en funksjon ved hjelp av digitale verktøy. Her har vi tegnet grafen til funksjonen *S* gitt ved $S(t) = 160t$ i GeoGebra.



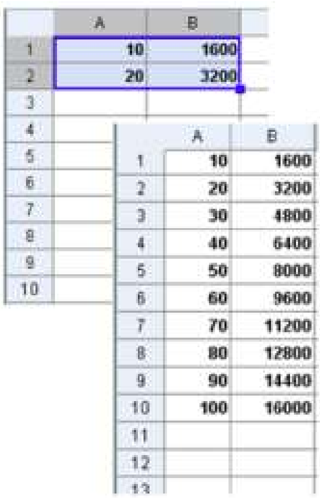

I GeoGebra må vi bruke punktum som desimalskilletegn og *x* som variabel.

Vi skriver $S(x) = 160x$ i inntastingsfeltet i GeoGebra og grafen tegnes når vi taster «Enter».


Vi kan også enkelt lage en verditabell i GeoGebra.

Skriv 10 i rute A1 og 20 i rute A2 i regnearket i GeoGebra.
I rute B1 skriver du *S*(10) og i rute B2 skriver du *S*(20). Funksjonsverdiene regnes ut og vises i rutene.

Merk så de fire rutene (blå ramme). Dra «håndtaket»(nederst i høyre hjørne i den blå rammen) ned til linje 10, og verditabellen er komplett.



| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 1600 |
| 2 | 20 | 3200 |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 1600 |
| 2 | 20 | 3200 |
| 3 | 30 | 4800 |
| 4 | 40 | 6400 |
| 5 | 50 | 8000 |
| 6 | 60 | 9600 |
| 7 | 70 | 11200 |
| 8 | 80 | 12800 |
| 9 | 90 | 14400 |
| 10 | 100 | 16000 |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |

Du står selvfølgelig fritt til å velge andre verdier for *t* i verditabellen.

# Lineære funksjoner

## Lineære funksjoner

Lineære funksjoner (99547)

Grafen til funksjonen vi har studert, ble en rett linje. Slike funksjoner kaller vi **lineære funksjoner**.


Lineære funksjoner har også det til felles at funksjonsverdien kan skrives som et konstant tall multiplisert med en variabel pluss et konstant tall.

En **lineær funksjon** er en funksjon som kan skrives på formen

$$f(x) = ax + b$$ der *a* og *b* er konstante tall.

Det er også vanlig å bruke bokstaven *y* for en generell funksjon.

Da brukes vanligvis skrivemåten

$$y = ax + b$$

Her er det underforstått at *y* er en funksjon av *x*.

## Stigningstall og konstantledd

[Stigningstall og konstantledd (99555)]

Som vi så ovenfor, kan en lineær funksjon skrives på formen


$$f(x) = \mathrm{ax} + b$$

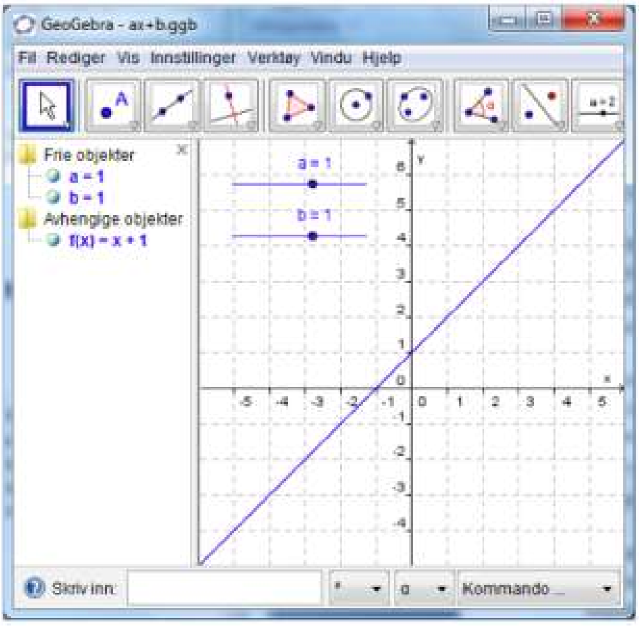
der *a* og *b* er konstant tall.

Ved hjelp av GeoGebra kan du undersøke hvordan grafen til en lineær funksjon endrer seg når du endrer *a* og *b*.

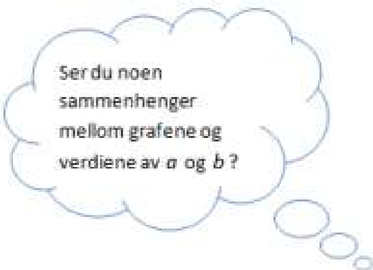
På skrivelinjen i GeoGebra skriver du $a = 1$ (og trykker «Enter»). Deretter skriver du $b = 1$. Skriv så inn $f(x) = a \cdot x + b$. Husk å skrive gangetegnet mellom *a* og *x*.

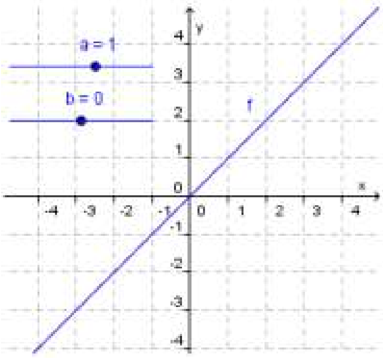
Høyreklikk på $a = 1$ i algebravinduet og huk av for «Vis objekt». Glideren *a* vises i grafvinduet.
Gjør det samme for *b*.

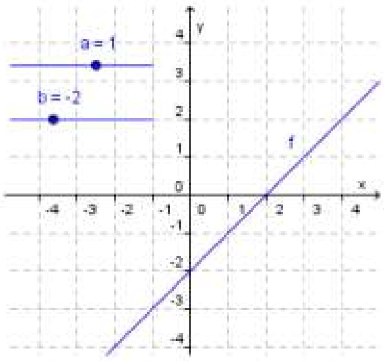
Velg «Flytt» på verktøylinjen og venstreklikk på glider *a*. Bruk piltastene eller «dra» i glideren for å endre verdien til *a*. Se hva som skjer. Gjør tilsvarende for glider *b*.

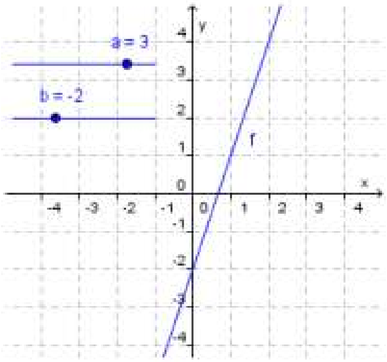


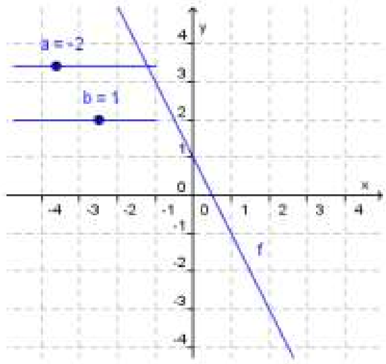

Nedenfor ser du grafen til funksjonen $f(x) = a \cdot x + b$ for noen ulike verdier av *a* og *b*.



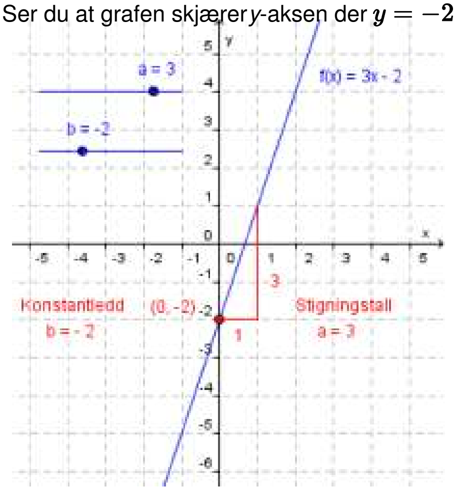



Til høyre har vi tegnet grafen til *f* for $a = 3$ og $b = -2$. Det betyr at $f(x) = 3 \cdot x - 2$. Ser du at grafen skjærer *y*-aksen der $y = -2$ ?


Grafen skjærer andreaksen når $x = 0$ og $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Tallet *b* kalles konstantleddet.

Tallet *a* viser hvor mye grafen stiger når *x* øker med 1 enhet. Tallet *a* kalles stigningstallet.

Hvis stigningstallet er negativt, synker grafen når *x* øker.


Du bør merke deg deg **to spesialtilfeller** av lineære funksjoner.

Det ene er når $b = 0$. Da er $y = \mathbf{ax}$ og *y* og *x* er **proposjonale størrelser**.

Tallet *a* kalles i dette tilfellet proporsjonalitetskonstanten.

Når $b = 0$, er $y = ax$.

Hvordan ser grafen til denne funksjonen ut?

Hva betyr det at to størrelser er proporsjonale?

Det andre spesialtilfellet er når $a = 0$. Da er $y = b$.

Når $a = 0$, er $y = b$.

Hvordan ser grafen til denne funksjonen ut?

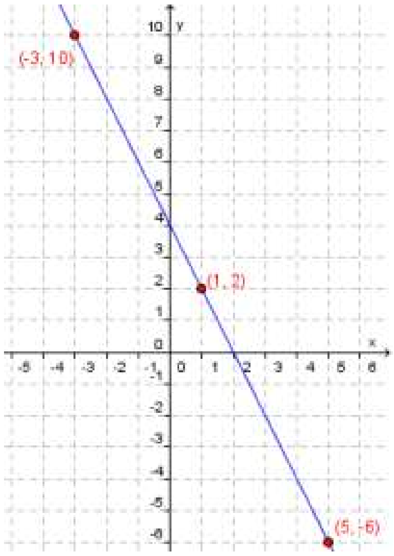
# Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon

[Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon (99586)]

Hvordan kan vi raskt tegne grafen til den lineære funksjonen *g* gitt ved $g(x) = -2x + 4$?

Metode 1

Vi tegner grafen på grunnlag av verditabellen

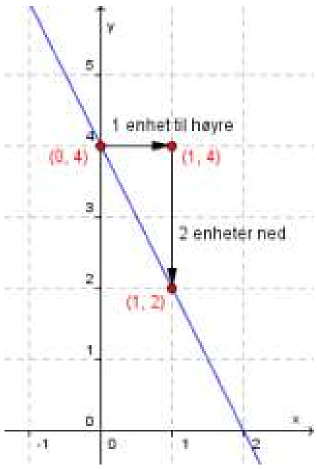



Vi vet at grafen blir en rett linje. Da er det egentlig nok med to punkter i verditabellen, men det er lurt å ta med et tredje punkt for kontrollens skyld.
Vi klarer oss godt med hoderegning her og fyller ut tabellen!

| $x$ | -3 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 10 | 2 | 6 |

Metode 2

Vi tegner grafen på grunnlag av stigningstall og konstantledd




Siden konstantleddet $b = 4$, skjærer grafen andreaksen for $y = 4$. Punktet (0,4) ligger derfor på grafen.

Stigningstallet er $-2$. Vi tar utgangspunkt i punktet (0,4) og går én enhet til høyre. Stigningstallet forteller at vi så må bevege oss parallelt med *y*-aksen to enheter nedover for igjen å treffe grafen. Vi kommer til punktet (1,2). Vi har da to punkter på grafen og kan trekke linjen gjennom disse punktene.

Metode 3

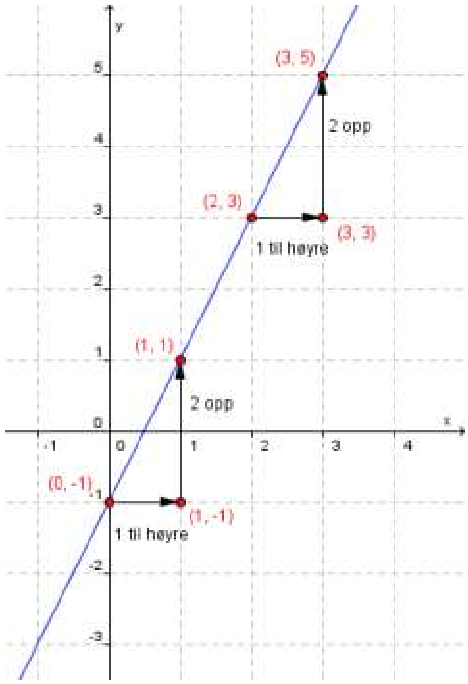
Vi tegner grafen med et digitalt verktøy

Skriv inn funksjonsuttrykket i det digitale verktøyet du bruker og tegn grafen.

# Hvordan finne funksjonsuttrykket til en lineær funksjon ut fra grafen

[Hvordan finne funksjonsuttrykket til en lineær funksjon ut fra grafen (99594)]

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet grafen til en lineær funksjon.


Grafen skjærer *y*-aksen i punktet (0,-1). Det betyr at $b=-1$.

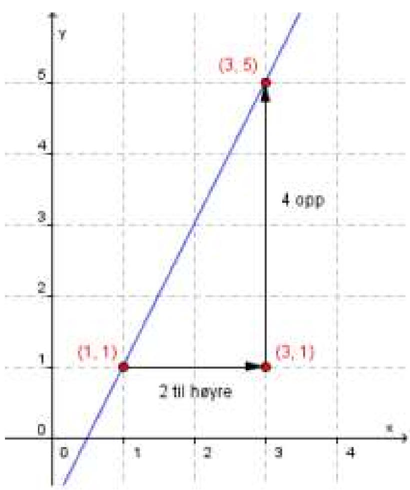
Når vi går én enhet til høyre fra (0,-1), må vi gå to enheter oppover parallelt med *y*-aksen for igjen å treffe grafen. Det betyr at $a=2$.

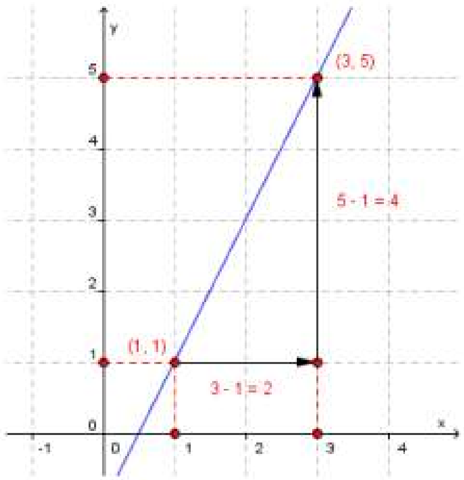
Funksjonsuttrykket blir derfor $f(x)=2x-1$ .

Legg merke til at vi like gjerne kan ta utgangspunkt i et annet punkt på grafen for å finne stigningstallet. Vi ser av grafen at vi får samme resultat om vi tar utgangspunkt i punktet (2,3).

Det er heller ikke nødvendig å gå én enhet til høyre for å finne stigningstallet. Ved å starte i punktet (1,1) og for eksempel gå to enheter til høyre, må vi gå fire enheter oppover parallelt m e d *y*-aksen for igjen å treffe grafen. Stigningstallet blir

$$a=\frac{4}{2}=2$$






Dette kan vi også regne oss fram til med utgangspunkt i de to punktene på grafen

$$a = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

I telleren har vi differensen mellom
*y*-koordinatene og i nevneren differensen mellom
*x*-koordinatene. Se koordinatsystemt til høyre.

# Mer om stigningstall og konstantledd

[Mer om stigningstall og konstantledd (99657)](#)

Vi kan alltid regne som vist ovenfor når vi skal finne stigningstallet til en rett linje.

Gitt en rett linje som går gjennom to punkter

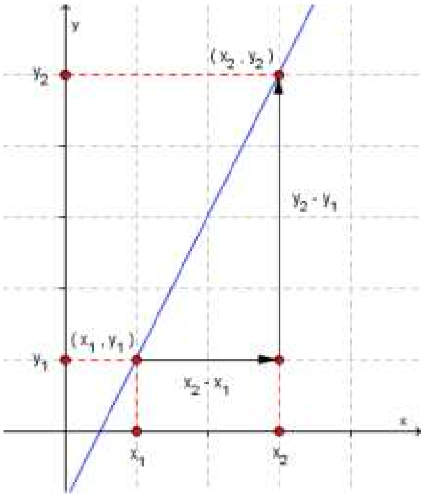
$(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$.

Det er vanlig å skrive punktkoordinatene på denne måten. Tallene 1 og 2 kalles for indekser, og vi sier punkt 1 og punkt 2.

I koordinatsystemet til høyre ser du at stigningstallet til linjen er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Konstantleddet, *b*, finner vi ved å se hvor grafen skjærer andreaksen.



# Likning for en rett linje. Ettpunktsformelen

Likning for en rett linje (99809)

I innledningen til dette kapitlet definerte vi en lineær funksjon som en funksjon som kan skrives på formen $f(x) = \mathbf{ax} + b$ hvor *a* og *b* er konstante tall. Grafen til en lineær funksjon er en rett linje.

Vi sa også at det er vanlig å bruke bokstaven *y* for en generell funksjon og at vi da bruker skrivemåten $y = \mathbf{ax} + b$.

Uttrykket $y = \mathbf{ax} + b$ kan også oppfattes som **en likning** med *x* og *y* som ukjente. Vi kaller dette uttrykket for **likningen for en rett linje**.

Når alle løsninger av likningen markeres i koordinatsystemet, får vi alle punktene på linjen, det vil si grafen til den lineære funksjonen.

Vi skal nå se hvordan vi finner likningen for en vilkårlig rett linje.

En rett linje går gjennom punktet $(x_1, y_1)$ og har stigningstall *a*.

La $(x, y)$ være et vilkårlig punkt på linjen.
Vi har da

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

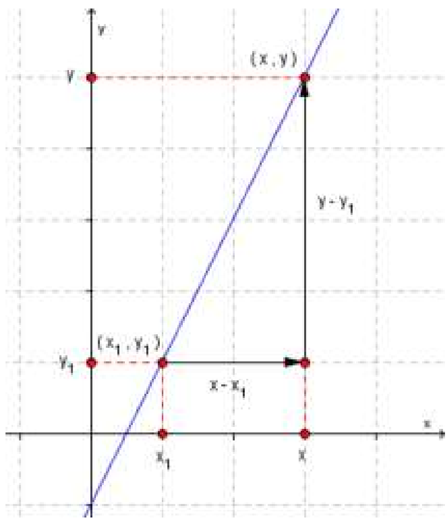
Vi multipliserer med nevneren $(x - x_1)$ på begge sider av likhetstegnet og får

$$a\,(x - x_1) - y - y_1$$

Dette kan vi snu på og får da

$$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$

Denne formelen kalles **ettpunktsformelen** for den rette linjen.




Når vi kjenner stigningstallet til en rett linje og et punkt på linjen, kan vi finne likningen for linjen ved å bruke ettpunktsformelen.

**Ettpunktsformelen**

Likningen for en rett linje gjennom punktet $(x_1, y_1)$ med stigningstall *a* er gitt ved

$$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$

**Hvis vi ikke kjenner stigningstallet, men får oppgitt at linjen går gjennom to oppgitte punkter** $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$, kan vi først finne stigningstallet ved formelen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Deretter setter vi denne verdien for *a* inn i ettpunktsformelen og bruker i tillegg et av de oppgitte punktene som kjent punkt.

# Alternative metoder for å finne likningen for en rett linje

[Alternative metoder for å finne likningen for en rett linje (101853)]

## 1. Stigningstallet og ett punkt på linjen er gitt

Du får oppgitt at en rett linje har stigningstall $a = 2$ og går gjennom punktet $(1, -3)$.

Finn likningen for linjen.

### Løsning

Generell likning for en rett linje er

$$y = \mathrm{ax} + b$$

$a = 2$ gir at likningen blir

$$y = 2x + b$$

Punktet $(1, -3)$ ligger på linjen og er derfor en løsning av likningen.  Vi setter in verdien i likningen og får

$$\begin{aligned}
&-3 = 2 \cdot 1 + b \\
&b = -3 - 2 \\
&b = -5
\end{aligned}$$

Likningen for linjen blir $y = 2x - 5$.

## 2. To punkter på linjen er gitt

Du får oppgitt at en rett linje går gjennom punktene $(-2, -3)$ og $(1, 3)$.

Finn likningen for linjen.

### Løsning

Siden punktene $(-2, -3)$ og $(1, 3)$ ligger på linjen, må koordinatene til disse punktene passe i den generelle likningen $y = \mathrm{ax} + b$.

Vi får et likningssett med to ukjente, *a* og *b*

$$\begin{array}{lcc}
-3 = a \cdot (-2) + b & & 3 = a \cdot 1 + b \\
-3 = -2a + b & & 3 = a \cdot 1 + (-3 + 2a) \\
b = -3 + 2a & \text{og} & 3 = a - 3 + 2a \\
& & 3a = 6 \\
b = -3 + 2 \cdot 2 & & a = 2 \\
b = 1 & &
\end{array}$$

Likningen for linjen blir $y = 2x + 1$.

# Skjæringspunktet mellom to rette linjer

Skjæringspunktet mellom to rette linjer (101864)

Vi kan finne skjæringspunktet mellom to rette linjer grafisk eller ved regning.

For å finne skjæringspunktet grafisk, tegner vi linjene i et koordinatsystem og leser av.

I skjæringspunktet har begge funksjonene samme verdi for *x* og samme verdi for *y*. Skal vi finne skjæringspunktet ved regning, setter vi derfor funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen vi da får.

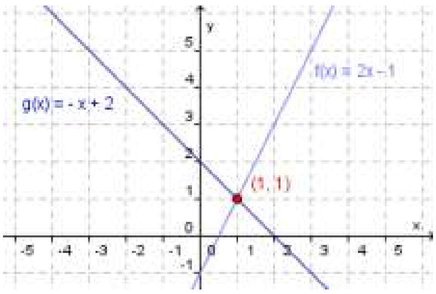
## Eksempel

Funksjonene *f* og *g* er gitt ved $f(x) = 2x - 1$ og $g(x) = -x + 2$.
Finn skjæringspunktet mellom de to linjene grafisk og ved regning.

## Grafisk løsning

Vi tegner de to linjene i et koordinatsystem, leser av og finner at linjene skjærer hverandre i punktet $(1, 1)$.

I GeoGebra kan du bruke kommandoen skjæring[f,g], eller knappen «Skjæring mellom to objekter».




## Ved regning

Vi setter funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x - 1 &= -x + 2 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vi kan så sette $x = 1$ inn i et av funksjonsuttrykkene (samme hvilket), for å finne *y*.

Vi velger å regne ut $f(1)$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Skjæringspunktet er $(1, 1)$.

## Eksempel

To firmaer leier ut selskapslokaler.

Firma A tar en fast leiepris på 3000 kroner og et timetillegg på 500 kroner.

Forklar hvorfor totalkostnadene i kroner $T_a$, ved leie av lokalet i *x* timer, kan beskrives med funksjonsuttrykket

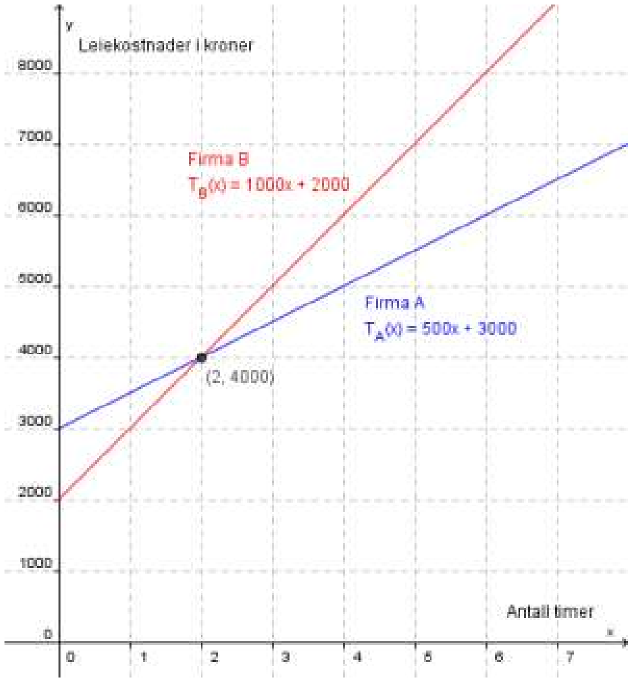
$$T_A(x) = 500x + 3000$$

Firma B tar en fast leiepris på 2000 kroner og et timetillegg på 1000 kroner. Totalkostnadene i kroner $T_B$ ved T leie av lokalet i *x* timer kan da beskrives med funksjonsuttrykket

$$T_B(x) = 1000x + 2000$$

For å kunne sammenlikne leieprisene tegner vi grafene til de to funksjonene
$T_A$ og $T_B$.

Vi ser at grafene skjærer hverandre når $x = 2$. Det betyr at hvis du skal leie lokaler i to timer, er det prismessig det samme hvilket firma du velger. Prisen er 4000 kroner hos begge firmaene.



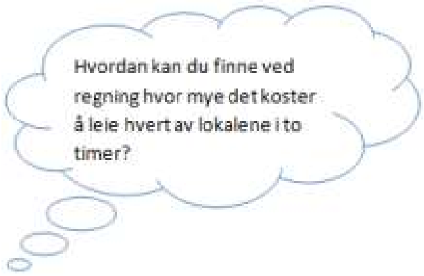

Hvis du skal leie lokale i mindre enn to timer, lønner det seg å velge firma B. Det ser vi ved at grafen til $T_B$ ligger under grafen til $T_A$ i dette området.

Hvis du skal leie lokale i mer enn to timer, lønner det seg å velge firma A. Det ser vi ved at grafen til $T_A$ ligger under grafen til $T_B$ i dette området.

Vi kan kontrollere den grafiske løsningen ved regning ved å løse likningen $T_A\left(x\right) = T_B\left(x\right)$.
Vi får

$$\begin{aligned}1000x + 2000 &= 500x + 3000\\ 1000x - 500x &= 3000 - 2000\\ 500x &= 1000\\ x &= \frac{1000}{500}\\ x &= 2\end{aligned}$$

Vi får også her at leieprisene er like når leietiden er to timer. Dette bekrefter den grafiske løsningen.



# Nullpunkt

Nullpunkt (101876)

**Definisjon**

Med et **nullpunkt** til en funksjon *f*, mener vi et punkt på grafen hvor **andrekoordinaten er lik null**. Det er med andre ord et punkt **hvor grafen til funksjonen skjærer *x*-aksen**. I nullpunktet er $f(x) = 0$.

## Eksempel

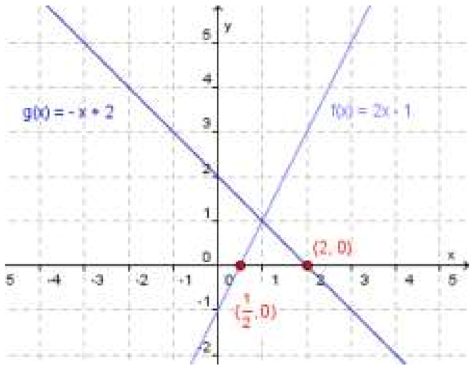
Grafen til $f(x) = 2x - 1$ skjærer *x*-aksen der $x = \frac{1}{2}$.

Grafen til $g(x) = -x + 2$ skjærer *x*-aksen der $x = 2$.

Nullpunktet til *f* blir $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Nullpunktet til *g* blir tilsvarende $(2, 0)$

I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoene nullpunkt[f] og nullpunkt[g].




Vi kan også finne nullpunktene ved regning, ved å sette funksjonsutrykket lik null

$$\begin{array}{cc} f(x) = 0 & g(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 & -x + 2 = 0 \\ 2x = 1 & -x = -2 \\ x = \frac{1}{2} & x = 2 \end{array}$$

Nullpunktene blir $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ og $(2, 0)$.

# Andregradsfunksjoner

## Andregradsfunksjoner

Andregradsfunksjoner (104159)

I første del av dette kapittelet har vi konsentrert oss om lineære funksjoner. Grafen til en lineær funksjon er alltid en rett linje. Vi skal nå ta for oss andre funksjonstyper og begynner med andregradsfunksjoner.

En funksjon der funksjonsuttrykket inneholder et **andregradsledd** som den høyeste potes av *x*, det vil si et ledd med $x^2$, kalles en **andregradsfunksjon**. Alle slike funksjoner kan skrives på formen

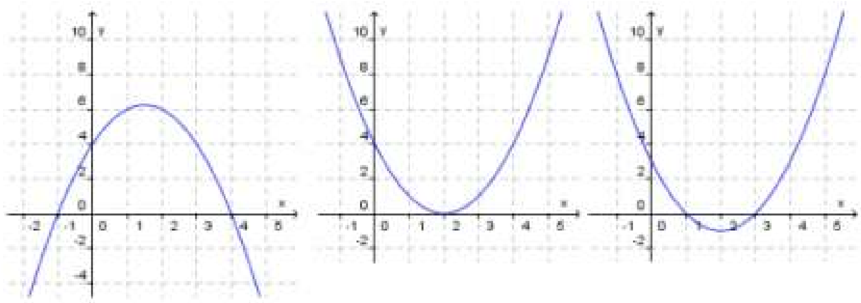
$$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c \quad \text{der} \quad a \neq 0$$

I tillegg til andregradsleddet har funksjonene vanligvis et førstegradsledd (et ledd med $x^1 = x$) og et konstantledd. Tallene *a*, *b* og *c*, er forskjellige fra funksjon til funksjon.

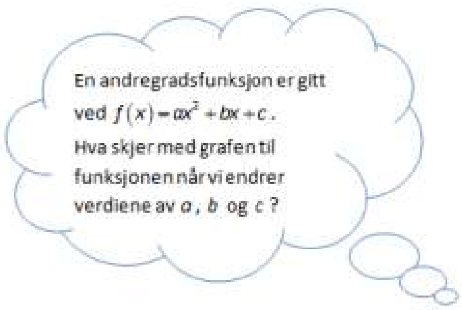
Grafen til en andregradsfunksjon kalles en **parabel**.

Nedenfor har vi tegnet grafene til andregradsfunksjonene *f*, *g* og *h* gitt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \ g(x) = -x^2 + 3x + 4 \ \text{og} \ h(x) = x^2 - 4x + 4$$



De mest karakteristiske trekkene ved parabler er at de har et **toppunkt** eller et **bunnpunkt** og at de er **symmetriske** om en linje parallell med *y*-aksen gjennom dette punktet.



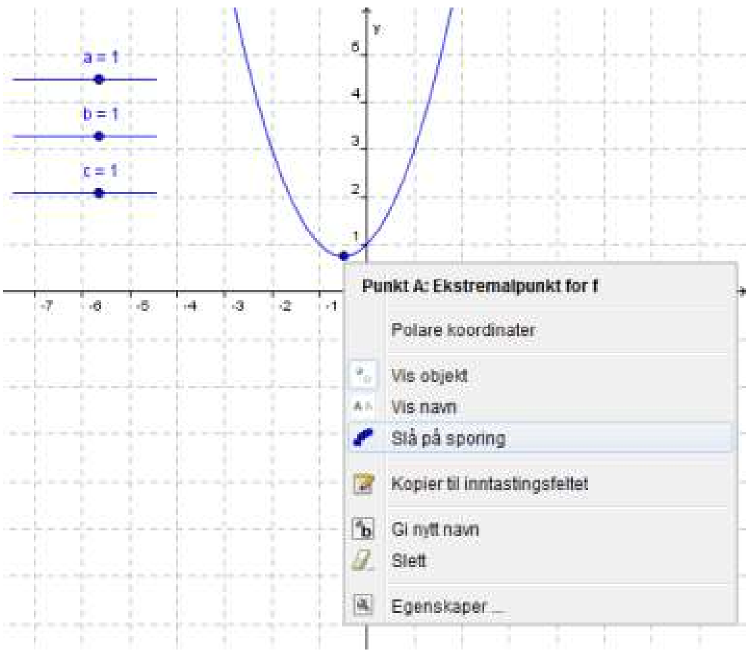

Du kan for eksempel bruke GeoGebra for å undersøke hva som skjer med grafen til en andregradsfunksjon når du endrer verdiene av *a*, *b* og *c*.

Først lager du tre glidere, en for *a*, en for *b* og en for *c*. Dette kan du gjøre slik vi beskrev i forbindelse med lineære funksjoner i avsnitt 2.2 eller ved å bruke knappen «Glider» på verktøylinjen. Se nedenfor.


Etterpå skriver du funksjonsuttrykket $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ i inntastingsfeltet nederst på siden. (Husk gangetegn mellom *a* og $x^2$, og mellom *b* og *x*.)

For å se tydelig hvordan grafen endrer seg når du endrer *a*, *b* og *c*, kan det være lurt å finne parabelens ekstremalpunkt og så slå på sporing på dette punktet.

For å finne ekstremalpunktet skriver du Ekstremalpunkt [f] i inntastingsfeltet nederst på siden. Etterpå høyreklikker du på punktet og velger «Slå på sporing». Se nedenfor.



**Spørsmål**

1. Hva skjer med grafen når du endrer verdien av *c*? Hvordan kan du finne konstantleddet *c* til en andregradsfunksjon ved å se på grafen til funksjonen?
2. Hva skjer med grafen når du endrer verdien av *a*? Hvordan ser grafen ut når $a > 0$ og $a < 0$? Hvorfor blir grafen en rett linje når $a = 0$?
3. Alle parabler har en symmetrilinje. Hva betyr det?
4. Hva skjer når du endrer verdien av *b*?


Klarte du å svare på alle spørsmålene ovenfor?

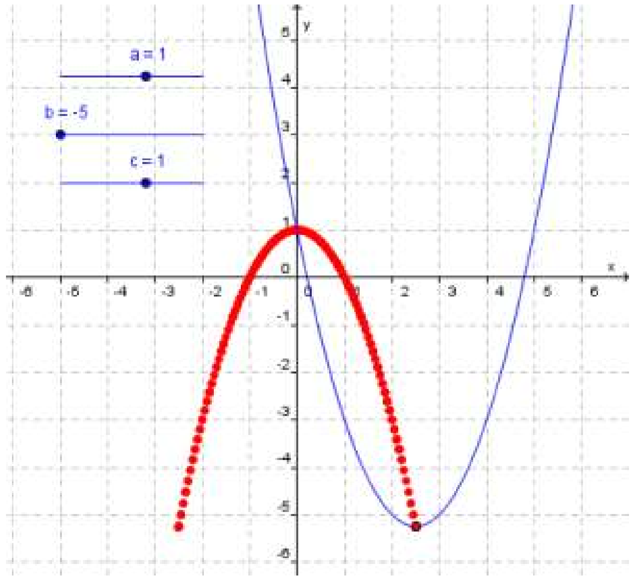
Her kommer en liten oppsummering.
Stemmer punktene nedenfor med det du fant ut?

- Tallet *c* forteller hvor grafen til andregradsfunksjonen skjærer *y*-aksen. Ser du hvorfor det må være slik? Når grafen skjærer *y*-aksen, er $x = 0$.
  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$
- Hvis tallet *a* er lik null, forsvinner andregradsleddet, og vi har en lineær funksjon.
  $f(x) = 0 \cdot x^2 + \text{bx} + c = \text{bx} + c$
- Hvis tallet *a* er positivt, har grafen et bunnpunkt. Det vil si et punkt hvor funksjonen har sin minste verdi. Grafen vender sin hule side opp, den «smiler».
- Hvis tallet *a* er negativt, har grafen et toppunkt. Det vil si et punkt hvor funksjonen har sin største verdi. Grafen vender sin hule side ned, den er «sur».
- Når $(a)$ øker, vil parabelen bli smalere.
  Når $(a)$ minker, vil parabelen bli bredere. (Husk at når $a = 0$, får vi en rett linje.)
- Grafen er symmetrisk om en linje parallell med *y*-aksen som går gjennom topp- eller bunnpunktet. Denne linjen kalles **symmetrilinjen**.

Hva fant du ut om *b*?

Nedenfor har vi valgt $a = 1$ og $c = 1$ og latt *b* variere fra –5 til 5. Vi har i tillegg slått på «sporing» på parabelens bunnpunkt.

Siden det bare er verdien av *b* som varierer, vil formen på parabelen og skjæringspunktet med *y* -aksen ikke endres.




Ser du at de røde «sporene», altså bunnpunktene til de parabelene vi får ved å endre verdien av *b*, danner en ny parabel med toppunkt?

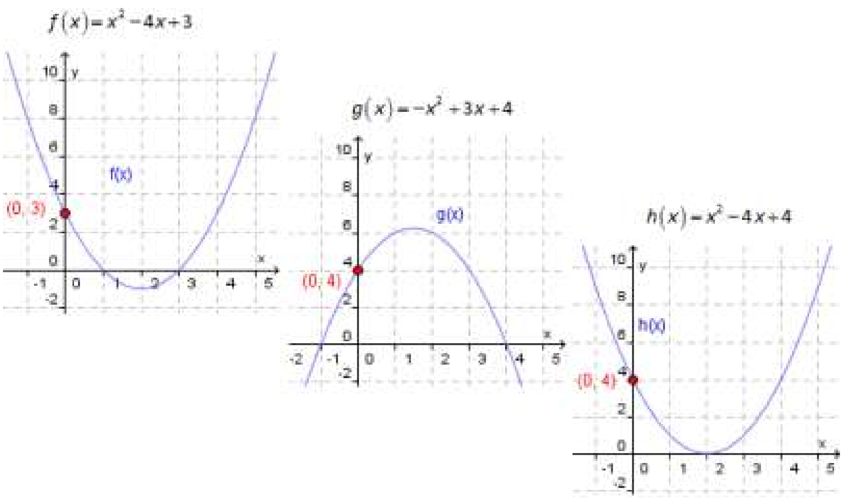
Hvorfor er det slik? Vil det alltid være slik?

Vi kommer tilbake til dette etter hvert, men først må du lære litt mer om funksjoner!

# Grafens skjæringspunkter med koordinataksene. Nullpunkter

[Grafens skjæringspunkter med koordinataksene. Nullpunkter (104236)]

Vi skal se nærmere på de tre funksjonene *f*, *g* og *h* gitt nedenfor.

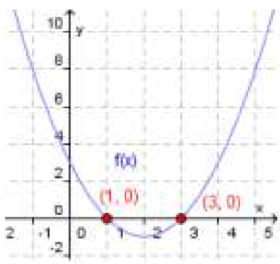



Legg merke til at grafene til funksjonene skjærer *y*-aksen i punktet (0,*c*), der *c* er konstantleddet i andregradsuttrykket, på samme måte som vi tidligere har sett at grafen til en lineær funksjon gitt ved $y = \mathbf{ax} + b$ skjærer *y*-aksen i punktet (0,*b*).


## Nullpunkt

Grafene skjærer *x*-aksen der funksjonsuttrykket er null. Disse punktene kalles **nullpunktene** til funksjonen.

Til høyre ser vi at grafen til funksjonen *f* skjærer førsteaksen når $x = 1$ og når $x = 3$. Dette er nullpunktene til *f*.




I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoen nullpunkt[f].

Ved regning finner vi nullpunktene ved å sette $f(x) = 0$.

Det betyr at vi må løse andregradslikningen

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Vi bruker *abc*-formelen og får

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 1$$

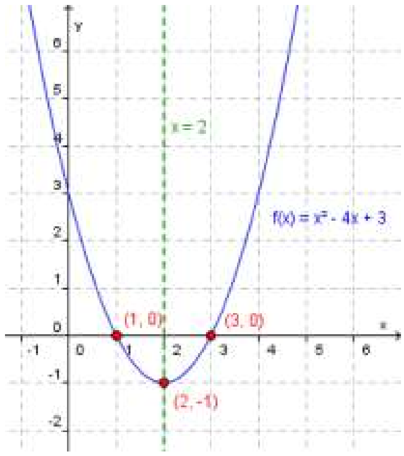
Det betyr at funksjonen *f* har nullpunktene (1,0) og (3,0).

# Topp- eller bunnpunkt?

[Topp- eller bunnpunkt? (104268)](#)

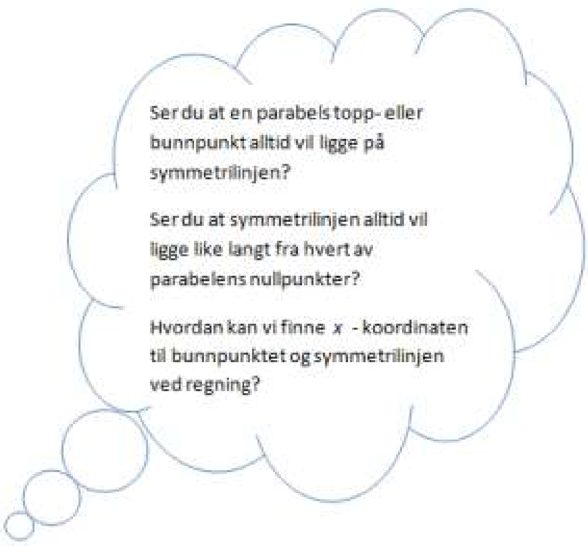

Vi fortsetter med funksjonen
$f\left(x\right)=x^2-4x+3$

Til høyre ser du at den laveste funksjonsverdien til funksjonen er $-1$. Denne verdien får vi for $x=2$.



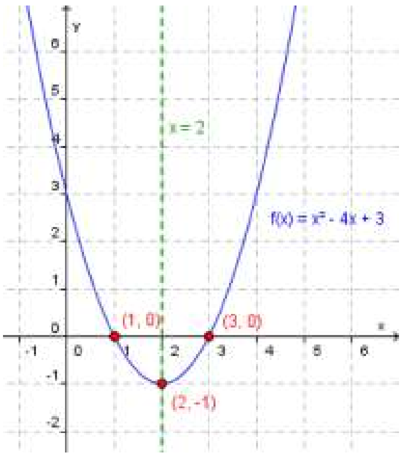

Vi sier da at grafen har **bunnpunkt** $(2,-1)$.

I GeoGebra kan du finne bunnpunktet med kommandoen ekstremalpunkt[f].



# Symmetrilinje

Symmetrilinje (104323)




I koordinatsystemet ovenfor har vi tegnet inn symmetrilinjen til *f*.

Bunnpunktet ligger på symmetrilinjen. Symmetrilinjen ligger også like langt fra hvert av parabelens nullpunkter.

Når vi skal finne parabelens nullpunkter, har vi sett at vi kan løse likningen

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-\left(-4\right) \pm \sqrt{\left(-4\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

Hvis vi stopper der, ser vi at $x = 2 \pm 1$.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 2 \pm 1$$


Det betyr at de to nullpunktene ligger like langt fra linjen $x = 2$, og denne linjen er altså parabelens symmetrilinje!

Det betyr at vi kan finne *x*-koordinaten til bunnpunktet og symmetrilinjen ved å fjerne kvadratroten i uttrykket vi får når vi setter *f*(*x*)

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

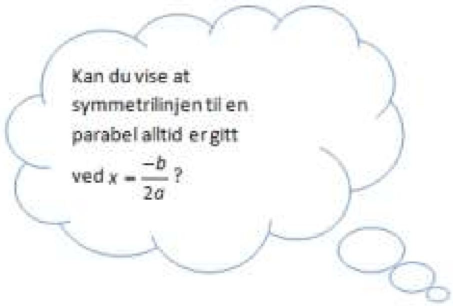
$$x = \frac{-\left(-4\right) \pm \sqrt{\left(-4\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

*x*-koordinaten til bunnpunktet og symmetrilinjen er da

$$x=\frac{-\left(-4\right)\pm\cancel{\sqrt{\left(-4\right)^2-4\cdot1\cdot3}}}{2\cdot1}$$

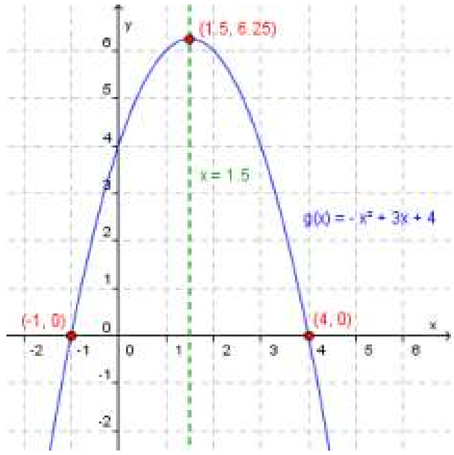
$$x=\frac{-(-4)}{2\cdot1}=2$$

Symmetrilinjen er linjen $x=2$.




Eksempel

Grafen til funksjonen $g\left(x\right)=-x^2+3x+4$
skjærer førsteaksen for $x=-1$ og for $x=4$




Vi finner nullpunktene ved å sette $g(x)=0$

$$g(x)=0$$

$$-x^2+3x+4=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot4}}{2\cdot(-1)}$$

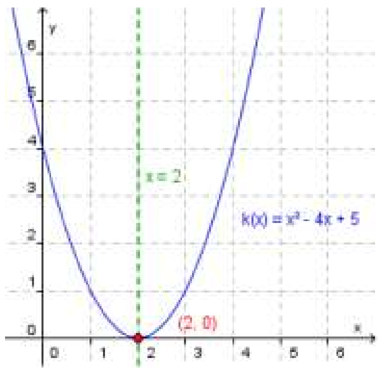
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2}$$

$$x=-1\quad\vee\quad x=4$$

Funksjonen har nullpunkter for $x=-1$ og for $x=4$.
Symmetrilinjen er $x=1,5$, som er *x*-verdien midt mellom $-1$ og $4$. Men, som vi har sett, trenger du ikke regne ut nullpunktene for å finne symmetrilinjen. Du kan bare «fjerne kvadratroten» i løsningsformelen og få *x*-verdien til toppunktet (symmetrilinjen) som $x=\frac{-3}{-2}=1,5$.

Vi ser på funksjonen *h* gitt ved $h\left(x\right)=x^2-4x+4$.

Vi finner nullpunkt ved å løse likningen




$$h(x)=0$$

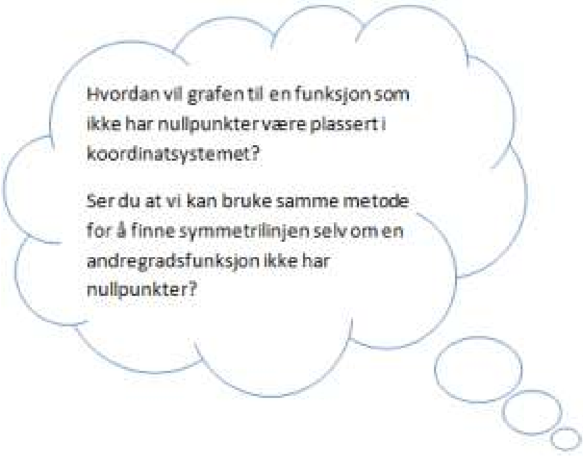
$$x^2-4x+4=0$$

$$x=\frac{-\left(-4\right)\pm\sqrt{\left(-4\right)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{0}}{2}=2$$

Når andregradslikningen bare har en løsning, har funksjonen bare ett nullpunkt. Dette punktet vil også være toppunktet eller bunnpunktet og ligge på symmetrilinjen.

Symmetrilinjen blir $x=2$.




Vi ser på funksjonen *k* gitt ved $k\left(x\right) = x^2 - 4x + 5$.

Vi finner eventuelle nullpunkter ved å løse likningen

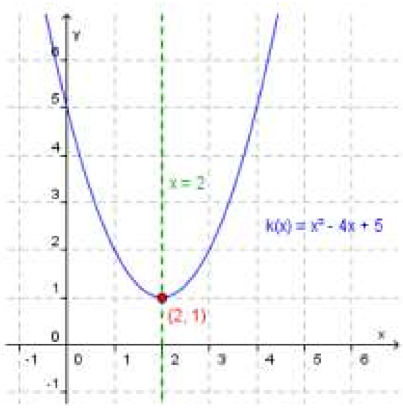
$$k(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-\left(-4\right) \pm \sqrt{\left(-4\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{3}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Vi får et negativt tall under rottegnet. Likningen har ingen løsning. Det betyr at funksjonen ikke har nullpunkter og grafen til funksjonen krysser aldri *x*-aksen.


Siden $c = 5$, vet vi at grafen skjærer *y*-aksen i punktet (0,5). Dette punktet ligger over *x*-aksen. Grafen ligger da over *x*-aksen for alle verdier av *x*.

Vi tegner grafen til *k* og finner at symmetrilinjen er $x = 2$.

Vi kunne også funnet symmetrilinjen ved å «fjerne kvadratroten» da vi løste likningen $k(x) = 0$

$$k(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

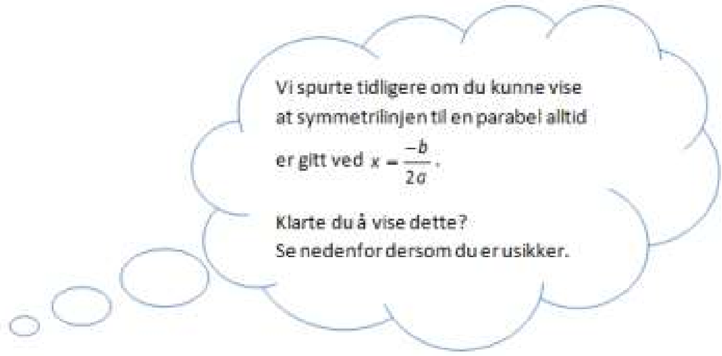
$$x = \frac{-\left(-4\right) \pm \sqrt{\left(-4\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{\text{bunnpunkt}} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

Symmetrilinjen blir $x = 2$.

Vi ser nå på den generelle




andregradsfunksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$ hvor $a \neq 0$.
For å finne eventuelle nullpunkter, løser vi likningen $f(x) = 0$.
Vi får da

$$f(x) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,\mathrm{ac}}}{2a}$$

Vi ser så bort fra rottegnet og får da at symmetrilinjen er gitt ved

$$x \frac{-b}{2a}$$

Toppunkter og bunnpunkter kalles **ekstremalpunkter**, det vil si punkter som har lokale maksimal- eller minimalverdier. Andrekoordinaten til et toppunkt er en **maksimalverdi** til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er en **minimalverdi**.

# Hvordan tegne grafen til en andregradsfunksjon

[Hvordan tegne grafen til en andregradsfunksjon (104352)]

Du kan enkelt tegne grafen til en andregradsfunksjon med et digitalt verktøy. I GeoGebra bruker du samme fremgangsmåte som du brukte for lineære funksjoner.

Når du skal tegne grafen til en andregradsfunksjon uten digitale verktøy er det lurt å starte med å regne ut koordinatene til eventuelle nullpunkter. Finn så symmetrilinjen og topp – eller bunnpunktet. Marker disse punktene i et koordinatsystem. Du kan også markere skjæringspunktet med *y*-aksen. Utnytt symmetriegenskapene og se om det er flere punkter du kan få på plass!

Hvis det er nødvendig kan du regne ut koordinatene til flere punkter. Du bør utnytte symmetriegenskapene slik at du bare regner ut punkter på den ene siden av symmetrilinjen. Lag gjerne en verditabell for å holde oversikten.


Til slutt trekker du kurven gjennom punktene.

## Eksempel

Gitt


andregradsfunksjonen $g(x) = x^2 - 4x + 3 \quad D_g = R$
Vi starter med å finne symmetrilinje, bunnpunktet og eventuelle nullpunkter.

$$g(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Symmetrilinjen er da

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

I bunnpunktet er

$$x = 2 \quad \text{og} \quad y = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

Det vil si at bunnpunktet er $(2, -1)$.

For å finne nullpunktene, fortsetter vi med uttrykket

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

og får

$$x = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \vee \quad x = \frac{4+2}{2} = 3$$

I tillegg ser vi av funksjonsuttrykket at grafen skjærer *y*-aksen i punktet (0,3).

Vi setter det vi har funnet inn i en verditabell

| $x$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | 3 | 0 | –1 | 0 | | |

Symmetrilinje og minimalverdi.

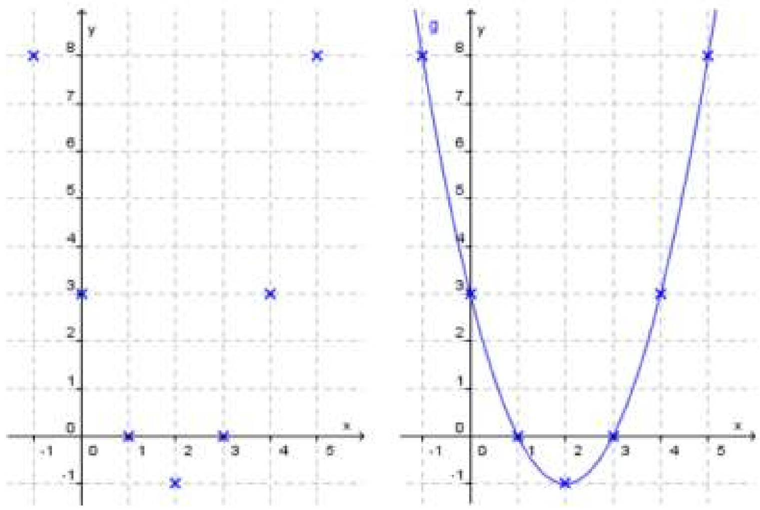
Vi regner ut $g(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$.

På grunn av symmetri er $g(-1) = g(5) = 8 \;\; \text{og} \;\; g(4) = g(0) = 3$.

Vi får da denne verditabellen

| $x$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 8 | 3 | 0 | –1 | 0 | 3 | 8 |

Vi har nå tilstrekkelig med punkter og kan tegne grafen til *g*.
Vi starter med å markere punktene i et koordinatsystem, og trekker så en kurve gjennom punktene.



# Lage og tolke funksjoner som beskriver praktiske problemstillinger

[Lage og tolke funksjoner som beskriver praktiske problemstillinger (104375)]

Vi skal se på tre praktiske problemstillinger som kan beskrives ved hjelp av andregradsfunksjoner.

## Eksempel 1

Bruk en tråd som er litt lengre enn 12 dm. Bind sammen endene slik at du kan lage rektangler med omkrets 12 dm.

1) Mål sidelengdene og regn ut arealet av rektanglene. Fyll ut tabellen nedenfor.

| Lengde (dm) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bredde (dm) | | | | | | | |
| Areal ($dm^2$) | | | | | | | |

2) Lag et koordinatsystem der *x*-aksen viser lengden av rektangelet og *y*-aksen viser arealet. Marker resultatene fra tabellen ovenfor som punkter i koordinatsystemet.

3) Forklar at hvis vi setter lengden av rektangelet lik *x* dm, vil bredden bli $(6-x)$ dm.

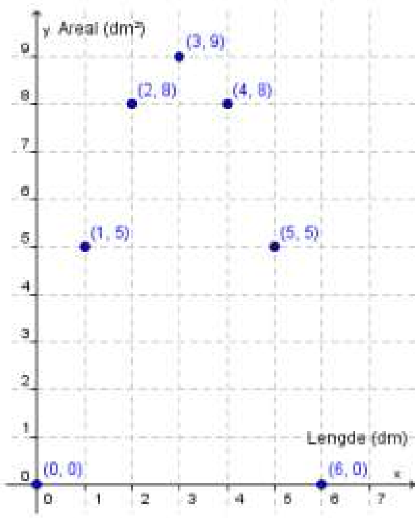
4) Finn et uttrykk for arealet av rektangelet, *A*(*x*).

5) Tegn grafen til *A* i samme koordinatsystem som du brukte i 2).


6) Hva er det største arealet rektangelet kan få?
Hvor lange er sidene i dette rektangelet?
Hva kaller vi et slikt rektangel?

7) Finn nullpunktene til *A*.
Hva forteller nullpunktene om arealet av rektangelet?

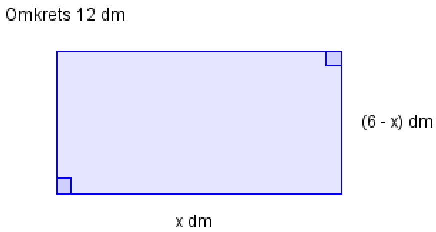
| Lengde (dm) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bredde (dm) | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Areal ($dm^2$) | 0 | 5 | 8 | 9 | 8 | 5 | 6 |




Vi setter lengden lik *l* og bredden lik *b*.
Siden omkretsen er 12, har vi at

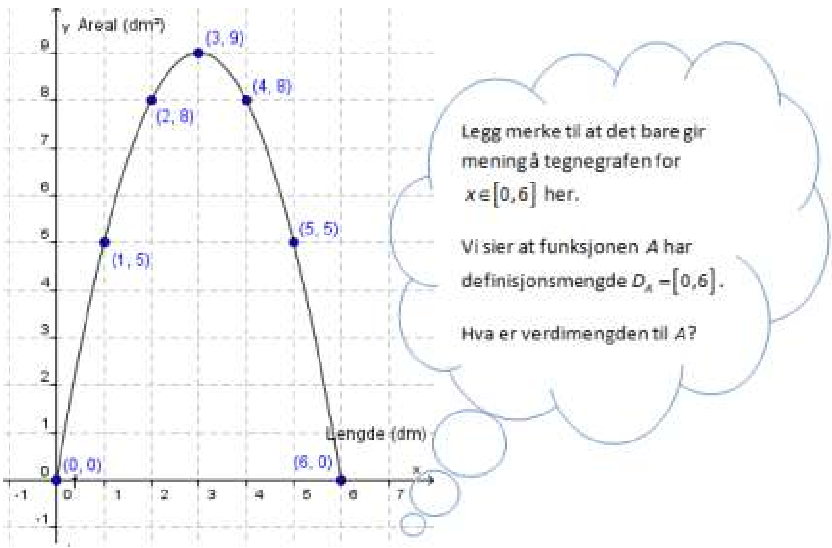
$$2l + 2b = 12$$

Vi setter $l = x$ og får




$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 12 \\ l + b &= 6 \\ x + b &= 6 \\ b &= 6 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= l \cdot b \\ A(x) &= x \cdot (6 - x) \\ A(x) &= -x^2 + 6x \end{aligned}$$




Vi ser at grafen har toppunkt i (3,9).
Det største arealet rektangelet kan få er 9 $dm^2$.
Lengden er da 3 dm og bredden er $b = (6 - x)\text{dm} = (6 - 3)\text{dm} = 3\,\text{dm}$.

Alle sidene er da like lange og rektangelet er et kvadrat.

Vi ser at grafen har nullpunktet (0,0) og (6,0). Det betyr at hvis lengden er 6 dm eller 0 dm blir arealet null. Vi har da ikke noe reelt rektangel.

## Eksempel 2

En kule skytes rett opp i luften med utgangsfart 25 m/s.

Kulens høyde over bakken er gitt ved

$$h(t) = 25t - 5t^2$$

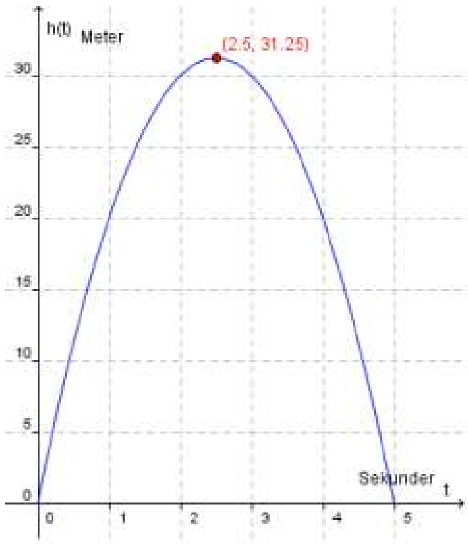
der *t* er tiden i sekunder etter at kulen ble skutt opp.

Vi har her en andregradsfunksjon fordi variabelen *t* er i andre potens.

Til høyre har vi tegnet grafen til funksjonen.

Grafen viser at kulens høyde over bakken øker de første 2,5 sekundene. Da når kulen sin største høyde, 31,3 meter. Så mister kulen høyde, og etter 5 sekunder har den nådd bakken igjen.

Høydekurven er bratt til å begynne med. Det betyr at høyden øker fort, altså at kulen har stor fart. Så mister kulen gradvis fart, og kurven flater ut. I toppunktet har kulen mistet all fart, men så øker farten gradvis igjen. Nå faller kulen og den får sin høyeste fart, kurven er brattest, like før den treffer bakken.




## Eksempel 3

En bedrift produserer *x* enheter av en vare per dag.

Funksjonen *K* gitt ved

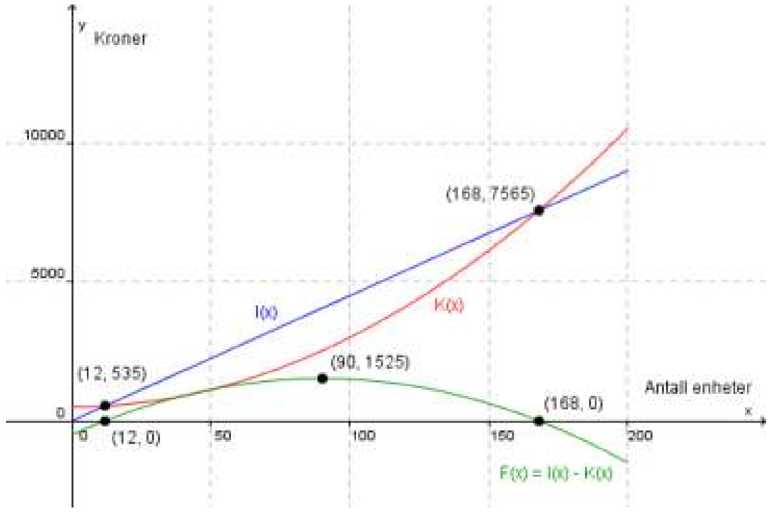
$$K(x) = 0,25x^2 + 500$$

viser kostnadene (kroner) ved produksjon av *x* enheter.
Bedriften kan maksimalt produseres 200 enheter per dag.
De produserte enhetene selges for 45 kroner per stk.
Inntektene er da gitt ved $I(x) = 45x$

Fortjeneste er differensen mellom inntekter og kostnader, og fortjenesten *F* er derfor gitt ved

$$F(x) = I(x) - K(x).$$

Nedenfor har vi tegnet grafene til *K*, *I* og *F*, og markert noen punkter.




Skjæringspunktene mellom grafene til *K* og *I* viser at kostnadene er like store som inntektene ved produksjon av 12 enheter og ved produksjon av 168 enheter. Fortjenesten er da lik null, og grafen til *F* har nullpunkter for $x$=12 og $x$=128.

Ved produksjon av mindre enn 12 enheter eller flere enn 168 enheter er kostnadene større enn inntektene og fortjenesten er negativ. Bedriften taper penger.

Grafen til *F* har toppunkt (90,1525). Bedriften oppnår maksimal fortjeneste ved å produsere 90 enheter per dag. Fortjenesten per dag er da 1525 kroner.

# Tredjegradsfunksjoner

## Polynomfunksjoner

Polynomfunksjoner (104415)

**Definisjon**

Et **polynom** er et uttrykk med ett eller flere ledd der hvert ledd består av en konstant multiplisert med $x^n$, der *n* er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket gir oss **graden til polynomet**. Uttrykket $x-4+2x^3$ er **et tredjegradspolynom**, fordi den høyeste eksponenten i uttrykket er tre.

En polynomfunksjon er en funksjon som har et polynom som funksjonsuttrykk.

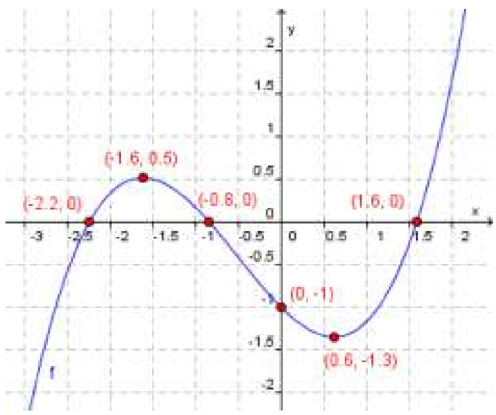
Uttrykket $3x+3$ er et polynom av første grad, fordi *x* er av første grad. Uttrykket $2x^2-2x+4$ er et polynom av andre grad, fordi vi her har et ledd der *x* er opphøyd i andre potens. To er den høyeste eksponenten i uttrykket. $x-4+2x^3$ er et eksempel på et tredjegradspolynom, fordi den høyeste eksponenten av *x* her er tre.

Det er vanlig å ordne et polynom slik at leddet med den høyeste eksponenten kommer først, leddet med nest høyest eksponent kommer som nummer to osv. Fjerdegradspolynomet $-5+3x^3-x^2+7x^4$ skriver vi på ordnet form som $7x^4+3x^3-x^2-5$. Tallene foran potensene av *x* kaller vi **koeffisienter**. I dette fjerdegradspolynomet er koeffisienten foran $x^2$ lik -1.

Lineære funksjoner og andregradsfunksjoner er polynomfunksjoner av henholdsvis første og andre grad. Tredjegradsfunksjoner er polynomfunksjoner av tredje grad.

Vi tegner grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x-1$$




### Nullpunkter

Funksjonen har nullpunkt der grafen skjærer *x*-aksen. Nullpunktene er (-2,2 , 0), (-0,8 , 0) og (1,6 , 0).

## Skjæring med y-aksen

Grafen skjærer $y$-aksen for $x = 0$. Skjæringspunktet er (0, -1).

## Ekstremalpunkter

Grafen har toppunkt (-1,6 , 0,5).
Grafen har bunnpunkt (0,6 , -1,3).

For andregradsfunksjoner sa vi at en funksjon hadde sin laveste verdi i bunnpunktet og høyeste verdi i toppunktet. En tredjegradsfunksjon kan ha høyere verdier enn i toppunktet andre steder på grafen. Vi sier allikevel at grafen har et toppunkt, selv om det bare er lokalt.

**Ekstremalpunkter**

Med ekstremalpunkter til en funksjon mener vi punkter hvor funksjonen har en maksimalverdi eller en minimalverdi innenfor et begrenset område.

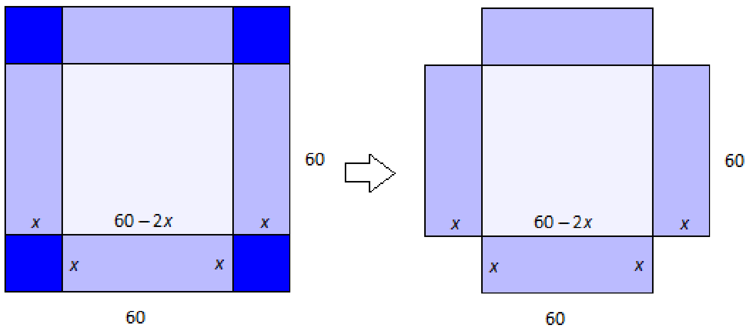
## Skjæring mellom grafer

Vi kan finne skjæringspunktene mellom grafene til to tredjegradsfunksjoner $f$ og $g$ grafisk eller ved å løse likningen $f(x) = g(x)$.

# Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon (104448)

Tenk deg at du skal lage en eske uten lokk av en kvadratisk papplate med sidelengder 60 cm. Du må da klippe bort et kvadrat i hvert hjørne. Du må altså klippe bort de fire mørkeblå kvadratene på tegningen til høyre. De lyseblå rektanglene bretter du opp, og du får da en eske med det lyse kvadratet i midten som bunn.




Formen på esken avhenger av hvor store kvadrater du klipper bort. Vi kaller sidene i kvadratene du klipper bort, for *x*. Hvis *x* er stor, vil esken få en liten bunn, men blir desto høyere. Hvis *x* er liten, vil esken få stor bunn, men den vil bli lav.

Volumet av esken vil være avhengig av *x*. Det vil si at volumet er en funksjon av *x*. Vi vil finne en formel for denne funksjonen.

Bunnen til esken blir et kvadrat med sider $60 - 2x$. Det kan vi lese ut av tegningen.

Arealet til bunnen, det vi kaller grunnflaten, blir da

$$\begin{aligned} G &= (60 - 2x) \cdot (60 - 2x) \\ &= 60 \cdot 60 - 60 \cdot 2x - 2x \cdot 60 - 2x \cdot (-2x) \\ &= 3600 - 240x + 4x^2 \end{aligned}$$

Høyden av esken blir *x*. Vi må multiplisere grunnflaten med høyden for å få volumet.

$$V(x) = \left(3600 - 240x + 4x^2\right) \cdot x$$

$$V(x) = 3600x - 240x^2 + 4 \times^3$$

$$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

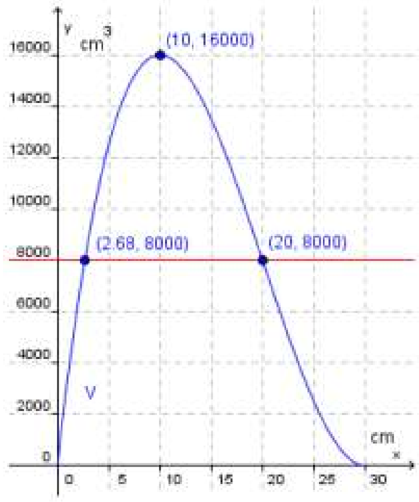
Volumet er altså en polynomfunksjon av tredje grad. Vi ser også at *x* må ligge mellom 0 cm og 30 cm for at vi skal få en eske. Definisjonsmengden er da $D_f = (0, 30)$. Hvis *x* er lik 0, klipper vi ikke bort noe, og hvis *x* er lik 30 cm, får vi ingen bunn.

Vi tegner grafen til volumfunksjonen.

Vi ser av grafen at verdimengden $V_f =< 0, 16000]$. Det vil si at volumet til esken er større enn $0 \text{ cm}^3$ og mindre enn eller lik $16000 \text{ cm}^3$.

Vi kan ellers se av grafen at

- Hvis vi ønsker en eske med størst mulig volum, må vi klippe bort kvadrater med sider 10 cm.
- Hvis vi ønsker esker med volum lik $8000\ \mathrm{cm}^3$, må vi klippe bort kvadrater med sider 2,68 cm eller 20,0 cm.
- Vi kan også gå motsatt vei og lese av hvor stort volum en bestemt verdi av *x* gir.



# Rasjonale funksjoner

## Asymptoter

[Rasjonale funksjoner (104518)](#)

En **rasjonal funksjon** er en funksjon som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er polynomer. Nevneren kan ikke være null.

Polynomet i telleren eller nevneren kan ha grad null, derfor er alle polynomfunksjoner, og også funksjoner som $\frac{1}{x}$, rasjonale funksjoner.

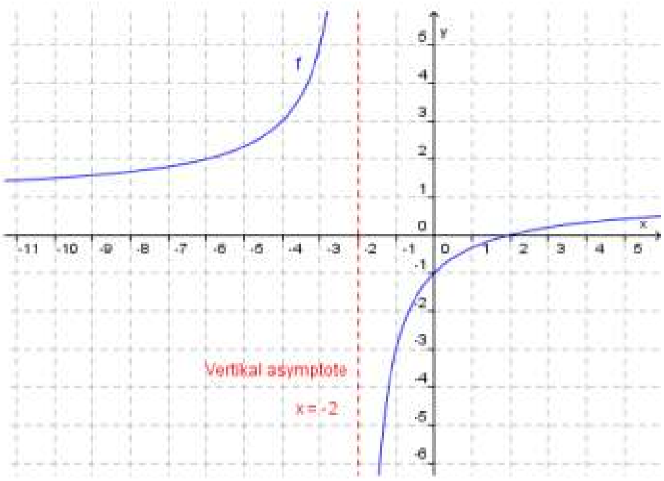
### Asymptoter

Rasjonale funksjoner kan ha asymptoter.

### Eksempel

Funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right) = \frac{x-2}{x+2}$ er en rasjonal funksjon.
En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Det betyr at $f(-2)$ ikke eksisterer. Grafen har ikke noe punkt for $x = -2$. Vi sier at grafen har et **brudd** for $x = -2$.

Vi tegner grafen til *f* i GeoGebra, sammen med den rette linjen $x = -2$




Når *x* nærmer seg verdien $-2$ fra venstre, ser du av grafen at funksjonsverdiene vokser over
alle grenser.

Vi skriver

$$f\left(x\right) \to \infty \text{ når } x \to -2^-$$

Videre ser du av grafen at funksjonsverdiene synker mot minus uendelig når *x* nærmer seg $-2$ fra høyre.

Vi skiver

$$f\left(x\right) \to -\infty \text{ når } x \to -2^+$$

Du kan selv undersøke om dette stemmer ved å sette inn verdier for *x* som er veldig nær $-2$.

Funksjonen *f* har ingen grenseverdi når *x* går mot $-2$.

Vi kan skrive dette slik

$$\lim_{x\to -2} f\left(x\right) \text{ eksisterer ikke}$$

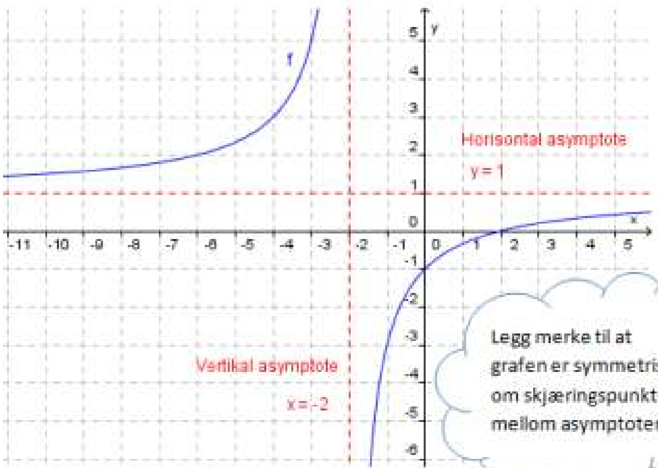
(Vi leser «grenseverdien til *f* når *x* går mot $-2$ eksisterer ikke».)

**Lim** er forkortelse for det latinske ordet «**limes**» som betyr **grense.**

Du ser at grafen består av to deler, en del til venstre for linjen $x=-2$ og en del til høyre for linjen $x=-2$. Linjen $x=-2$ er en **loddrett**, eller **vertikal asymptote**.

Ser du videre at grafen «flater ut» og nærmer seg linjen $y=1$ når *x* går mot pluss eller minus uendelig? Den ene delen av grafen nærmer seg linjen ovenfra og den andre delen nedenfra. De to delene av grafen vil aldri krysse linjen. Linjen $y=1$ er en **vannrett**, eller **horisontal asymptote.**

Vi skriver Hvor finne asymptotene




Legg merke til at grafen er symmetrisk om skjæringspunktet mellom asymptotene.

Den **vertikale asymptoten** finner du ved å sette nevneren i funksjonsuttrykket lik null. I eksemplet ovenfor så vi på funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{x-2}{x+2}$.

Vi får likningen $x+2=0$ som gir $x=-2$ som den vertikale asymptoten til funksjonen *f*.

Den **horisontale asymptoten** finner du ved å la *x* gå mot et uendelig stort positivt eller negativt tall. Konstantene i brøken betyr da minimalt, og vi kan skrive

**Merk!**
Rasjonale funksjoner kan også ha andre typer polynomer i teller og nevner, for eksempel andregradspolynomer. Læreplanen for S1 sier imidlertid at vi skal begrense oss til rasjonale funksjoner med lineær teller og nevner.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x+2} \approx \frac{x}{x} = 1$$

# Hvordan tegne grafen til en rasjonal funksjon?

Hvordan tegne grafen til en rasjonal funksjon? (104542)

**Det er alltid lurt å først finne asymptotene når du skal tegne grafen til en rasjonal funksjon uten digitale hjelpemidler**. Så kan du lage en verditabell der du velger de fleste *x*-verdiene i nærheten av den loddrette asymptoten. Du bør også utnytte at grafen er symmetrisk om skjæringspunktet mellom asymptotene.

## Praktisk eksempel på en rasjonal funksjon

Et telefonabonnement har en fastpris på 79 kroner per måned og en samtaleavgift på 39 øre per minutt.

Ser du at hvis vi ringer *x* minutter i løpet av en måned, må vi betale (0,39*x*+79) kroner med dette abonnementet?

Hva blir da prisen per minutt vi ringer?

Vi dividerer beløpet ovenfor på antall ringeminutter, og får et rasjonalt funksjonsuttrykk

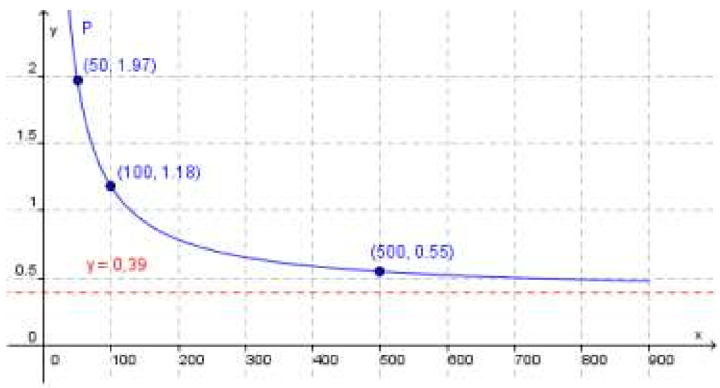
$$P\left(x\right) = \frac{0{,}39x+79}{x}$$

Definisjonsmengden til funksjonen *P* avhenger av forventet total samtaletid.

La oss anta at total samtaletid ikke overstiger 900 minutter, slik at definisjonsmengden er $P_d = [0, 900]$.

Vi tegner grafen til funksjonen *P*

**I 2001 ble det for første gang registrert flere mobiltelefoner enn fasttelefoner i Norge. Tall fra Post – og teletilsynet viser at stadig færre nordmenn har fasttelefon, og at de av oss som fremdeles har en fasttelefon bruker den mindre og mindre.**




Grafen viser for eksempel at ved en total samtaletid på 50 minutter, blir minuttprisen 1,97 kroner. Ved total samtaletid på 100 minutter, blir minuttprisen 1,18 kroner og ved total samtaletid på 500 minutter, blir minuttprisen 0,55 kroner.

Prisen per minutt avtar med økende bruk. Grafen synker veldig fort til å begynne med, for så å flate ut.

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{0{,}39x+79}{x} \approx \frac{0{,}39x}{x} = 0{,}39$$

Grafen har horisontal asymptote $y = 0,39$. Dette svarer til minuttprisen når total samtaletid er stor. Dette er også den samtaleavgiften som oppgis i abonnementet. Ved å ringe veldig mye nærmer minuttprisen seg 39 øre, men minuttprisen vil aldri bli lik 39 øre. Fastprisen får mindre og mindre betydning jo større den totale samtaletiden er.

# Potensfunksjoner

## Potensfunksjoner

[Potensfunksjoner (104560)](#)

Live arver 300 000 kroner. Hun vil spare pengene.

Den lokale banken tilbyr en årlig rente på 3 % per år. Dette svarer til en vekstfaktor på 1,03. Live regner det som sannsynlig at hun vil få bruk for pengene om 10 år. Hvor mye vil beløpet ha vokst til etter 10 år?

$300\ 000 \cdot 1,03^{10} \approx 403\ 175$

Beløpet vil ha vokst til ca. 403 175 kroner.

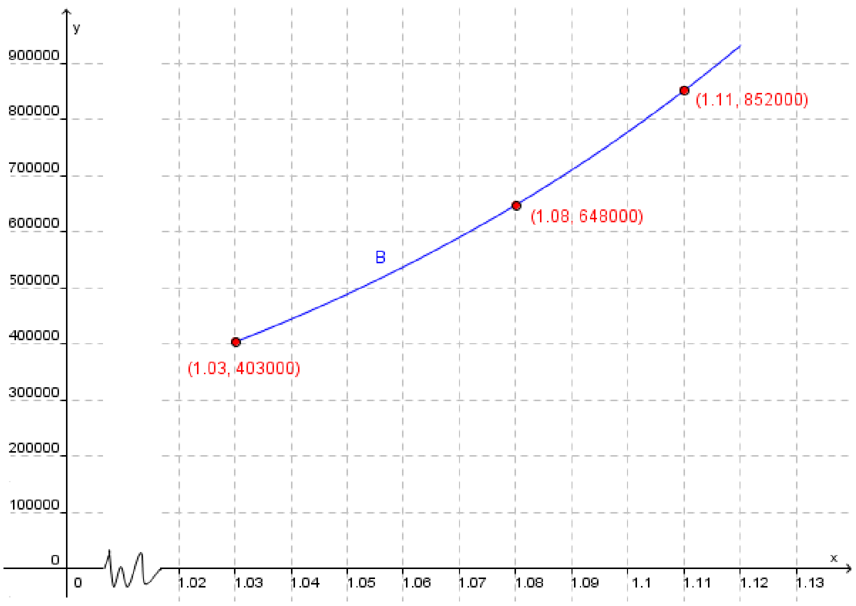
Live vet at det finnes alternativer til banksparing, og hun vil undersøke hva beløpet kan vokse til etter 10 år, hvis renten er høyere enn 3 %.

Hun ser da at hun kan bruke funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 300\ 000 \cdot x^{10}$$

Her er det vekstfaktoren som er den variable, *x*.

Live tegner grafen til *B* for $x \in [1,03,\ 1,12]$




Av grafen kan hun se at ved en årlig rente på 3 %, vil beløpet vokse til ca. 403 000 kroner etter 10 år. Hvis renten er på 8 % per år, vil beløpet vokse til ca. 648 000 kroner og hvis hun kan få en rente på 11 % per år, altså at vekstfaktoren er 1,11, vil hun sitte med ca. 852 000 etter 10 år.

I funksjonsuttrykket $B(x) = 300\ 000 \cdot x^{10}$ er *x* grunntallet i en potens hvor eksponenten er et konstant tall. En slik funksjon kalles for en **potensfunksjon**.

**Potensfunksjoner**

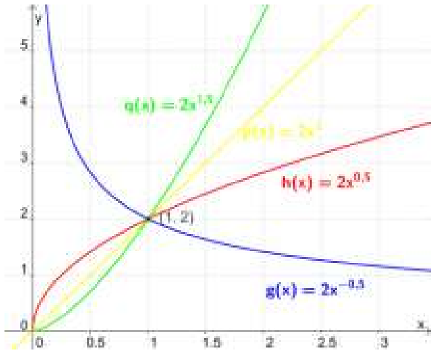
En funksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$, hvor *a* og *b* er konstante tall, kalles en **potensfunksjon**.

Legg merke til at når *b* er et ikkenegativt helt tall, er **potensfunksjonen** også en **polynomfunksjon**, som for eksempel 2*x*, $3x^2$, osv.


Når *b* er et negativt helt tall, er potensfunksjonen en **rasjonal funksjon**, som for eksempel $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, $2x^{-1} = \frac{2}{x}$ osv.

Når *b* ikke er et helt tall, må vi forutsette at *x* er positiv. Grunnen er at for eksempel $x^{0,5}$ betyr det samme som $\sqrt{x}$, og kvadratroten av et negativt tall er ikke et reelt tall.

Til høyre har vi tegnet grafene til funksjoner gitt på formen $2x^b$ for ulike verdier av *b*.




Hvorfor går alle grafene gjennom punktet (1,2)?

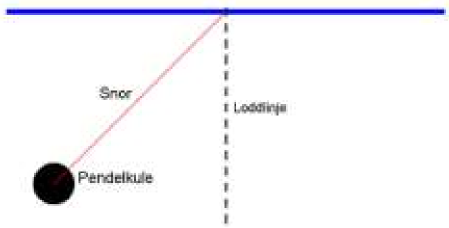
Hvordan ser grafen ut når $b = 1$?

Grafene endrer hovedform etter om $b \in (\leftarrow, 0),\ b \in (0, 1)$ eller $(1, \rightarrow)$

Legg merke til at grafen til en potensfunksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$ alltid går gjennom punktet (1,*a*) fordi $f(1) = a \cdot 1^b = a$.

## Eksempel

Når en pendel svinger, er svingetiden, det vil si den tiden det tar fra pendelen slippes til den kommer tilbake til utgangspunktet, avhengig av lengden på snoren som pendelkulen henger i.




Fra naturfag kjenner du kanskje formelen for svingetiden *T* sekunder, som funksjon av snorlengden *x* meter?

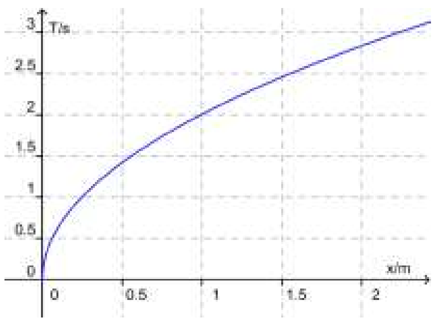
Formelen gir at

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot x^{0,5}$$

Her er $\pi \approx 3,14$ og $g \approx 9,81$ (*g* er tyngdens akselerasjon).

Når vi setter inn disse verdiene i formelen, får vi

$$T \approx \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{9,81}} \cdot x^{0,5} \approx 2,0 \cdot x^{0,5}$$




Svingetiden til en pendel er altså en potensfunksjon av snorlengden.

# Eksponentialfunksjoner

## Eksponentialfunksjoner

[Eksponentialfunksjoner (104724)](#)

En eksponentialfunksjon er gitt på formen $a \cdot b^x$ der tallet ***b*** kalles **vekstfaktoren**. Eksponentialfunksjoner er bare definert for positive verdier av *b*, og vi skal bare se på funksjoner der *a* også er positiv.

Funksjonene *g* og *h* gitt nedenfor er eksempler på eksponentialfunksjoner.

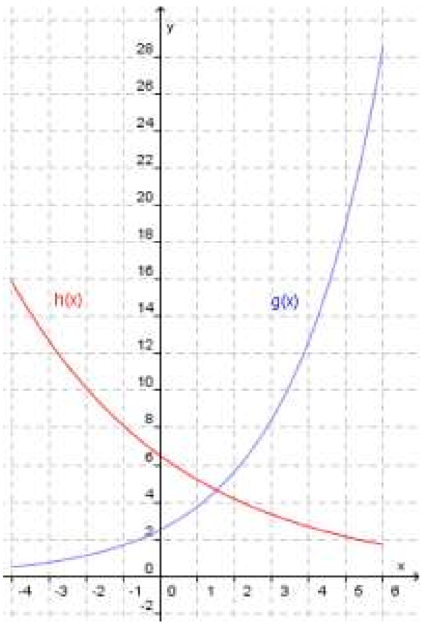
$$g(x) = 2,5 \cdot 1,5^x \qquad D_g = [-4,\ 6]$$
$$h(x) = 6,5 \cdot 0,8^x \qquad D_h = [-4,\ 6]$$

Når vekstfaktoren er større enn 1, øker funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise veksten *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 + \frac{p}{100}$$

Når vekstfaktoren er mindre enn 1, avtar funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise nedgangen *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 - \frac{p}{100}$$




Antall individer i en populasjon i naturen vil øke eksponentielt hvis populasjonen har ubegrenset tilgang til mat og ingen fiender. Populasjonen vil ikke vokse så fort i begynnelsen, men etter hvert vil veksten øke mer og mer. Dette er karakteristisk for eksponentiell vekst. (Se grafen til *g* i koordinatsystemet ovenfor.)

Vi vil også få eksponentiell vekst på et bankinnskudd med en fast årlig rente.

Verdien på en gjenstand, for eksempel en bil, vil ofte utvikle seg som en eksponentialfunksjon med vekstfaktor mindre enn 1.

### Praktiske eksempler på eksponentialfunksjoner

#### Eksempel 1

Hvis du setter 1000 kroner i banken i dag og får 6 % rente på pengene, kan du om ett år ta ut $1000 \text{ kroner} \cdot 1,06 = 1060 \text{ kroner}$ av banken.

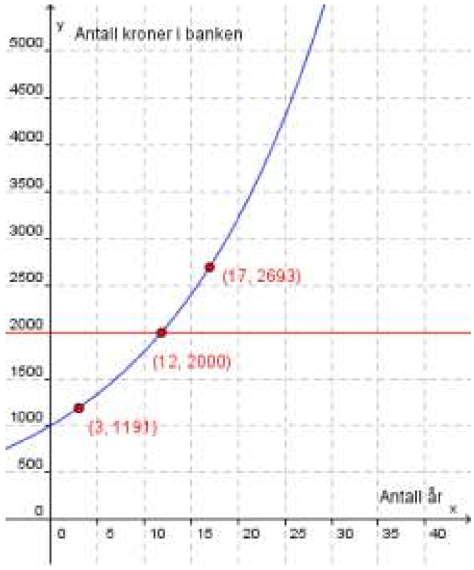
Tallet 1,06 er **vekstfaktoren**. Hvis pengene står tre år i banken, vil beløpet vokse til $1000 \text{ kroner} \cdot 1,06^3 = 1191 \text{ kroner}$.

Hvis 1000 kroner står *x* år i banken med 6 % rente, vil beløpet vokse til $1000 \cdot 1,06^x$ kroner.

Innestående beløp, *B*, er en funksjon av antall år i banken, *x*, og funksjonsuttrykket blir

$$B(x) = 1000 \cdot 1,06^x$$

Grafen til funksjonen viser for eksempel at beløpet på 1000 kroner har vokst til 1191 kroner etter 3 år (som vi regnet ut ovenfor)og til 2693 kroner etter 17 år.




Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?

Vi finner svaret ved å tegne den rette linjen $y = 2 \cdot 1000 = 2000$ i samme koordinatsystem som grafen til *B* og så finne skjæringspunktet mellom linjen og grafen. Pengene må stå i banken i 12 år.

Dette kan vi også finne ved regning.

Vi setter antall år pengene må stå i banken lik *x* og får likningen

$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

Dette er en eksponentiallikning.

Vi bruker logaritmeregning for å løse likningen

$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

$$1,06^x = \frac{2000}{1000} \quad \text{Vi ordner likningen slik at vi får potensen alene på venstre side.}$$

$$1,06^x = 2$$

$$\lg 1,06^x = \lg 2 \quad \text{Logaritmene til like tall er like.}$$

$$x \cdot \lg 1,06 = \lg 1,10 \quad \text{Vi bruker tredje logaritmesetning}$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,06} \quad \text{Her må vi bruke digitalt verktøy.}$$

$$x \approx 12$$

Pengene må altså stå ca. 12 år i banken før beløpet er fordoblet.

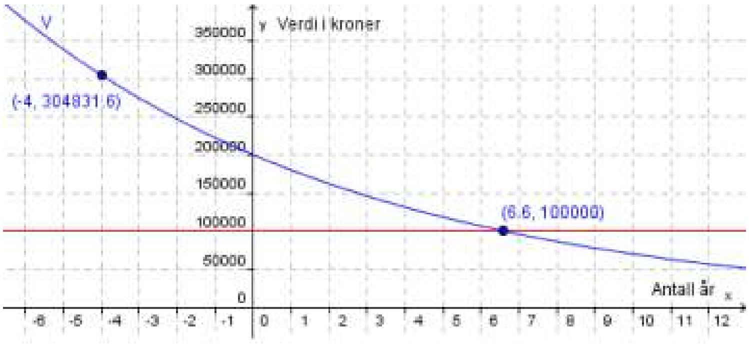
### Eksempel 2

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilen har sunket i verdi med 10 % hvert år siden den var ny. Kari regner med at verdien vil synke på samme måte de neste årene.

Bilens verdi *V*(*x*), *x* antall år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved

$$V(x) = 200\,000 \cdot 0,90^x$$

Vi tegner grafen V.




Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kr etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var ca. 305 000 kroner.

## Hvordan tegne grafen til en eksponentialfunksjon uten digitale hjelpemidler

Du har kanskje lagt merke til at grafen til alle eksponentialfunksjoner gitt ved $a \cdot b^x$ skjærer *y*-aksen i punktet $y = a$. Dette gjelder generelt, og er et godt utgangspunkt for å tegne grafen.


Du vet også at grafen vokser mot høyre når ***b*** er større enn 1, og avtar mot høyre når ***b*** er mindre enn 1.

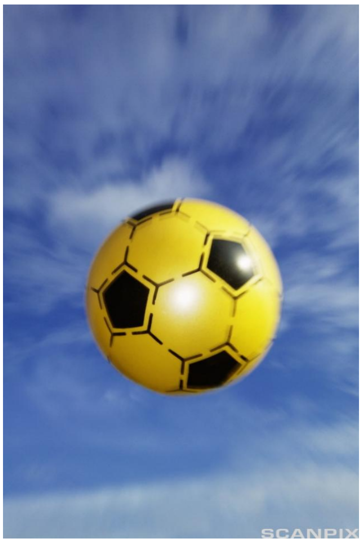
Bruk dette som et utgangspunkt når du velger ut *x*-verdier til verditabellen.

# Modellering

## Modellering

[Modellering (104763)]

Til nå har vi sett på sammenhenger mellom variabler der funksjonsuttrykket, den matematiske modellen, er gitt. Men veldig ofte er problemstillingen å finne funksjonsuttrykket, altså å finne den matematiske modellen som beskriver sammenhengen mellom variablene.


Hvordan vil du gå fram for å finne diameteren til en ball

Formelen $0 = 2\pi r$, som viser sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen, er et eksempel på **en matematisk modell**. Hvis vi kjenner radius i en sirkel, kan vi bruke modellen til å regne ut omkretsen av sirkelen. Motsatt kan modellen brukes til å regne ut radius når vi kjenner omkretsen.

Å lage matematiske modeller som viser sammenhengen mellom ulike størrelser, kalles å **modellere**. Vi prøver å beskrive virkeligheten med matematikk, ved hjelp av modeller.

**Modellering** er viktig i mange sammenhenger.

Meteorologer lager modeller for å kunne forutsi været.

Jordskjelvforskere lager modeller for å prøve å forutsi hvor jordskjelv vil inntreffe, når skjelvene vil inntreffe og hvor kraftige vi kan forvente at de blir. Disse modellene kan gi informasjon om hvordan bygninger, broer osv. bør dimensjoneres for at de ikke skal falle sammen under et jordskjelv.

Økonomer lager modeller som for eksempel viser sammenhengen mellom inntjening og antall produserte vareenheter. Modellene kan da si noe om hvor mange vareenheter det lønner seg å produsere.

I mange matematiske modeller er tiden en av størrelsene som inngår. Slike modeller er spesielt interessante fordi de kan si noe om hva som kan skje i fremtiden.

# Lineære modeller og lineær regresjon

[Lineære modeller og lineær regresjon (104785)]

En matematisk modell kan være en formel som viser sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. Når formelen er av typen

$$y = \mathrm{ax} + b$$

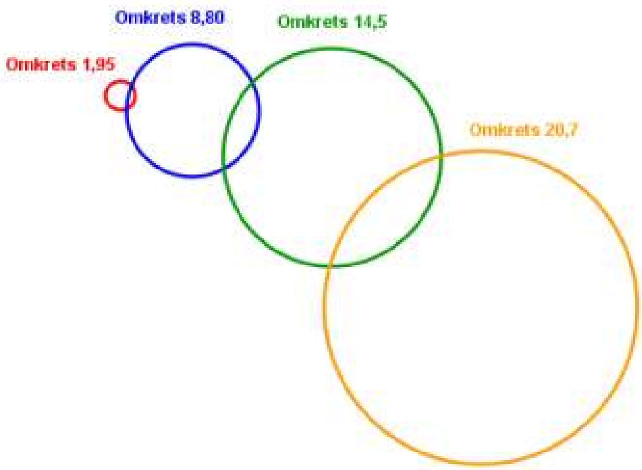
der *a* og *b* er konstanter, har vi **en lineær matematisk modell**. Grafene som beskriver slike sammenhenger, er rette linjer. Derav navnet lineær modell.

Når vi modellerer, prøver vi å finne en formel som viser sammenhengen mellom to størrelser. Målinger i praktiske forsøk kan gi oss data som viser noen sammenhørende verdier. Vi plotter datamaterialet som punkter i et koordinatsystem. Hvis punktene ser ut til å ligge på **en rett linje**, tyder det på at vi har en lineær modell. Vi bruker da en metode som kalles **lineær regresjon** for å finne fram til en matematisk modell, en formel, som gir oss sammenhengen mellom størrelsene.

Vi kan gjøre dette med eller uten digitalt verktøy, men resultatene blir ofte mer nøyaktige dersom vi bruker ferdige prosedyrer (egne kommandoer) i digitale verktøy.

### Eksempel

### Modell for omkretsen av en sirkel




Vi vil undersøke sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

For å samle inn data kan vi finne sirkelformede gjenstander og måle sammenhørende verdier av radius og omkrets.

Vi kan også bruke GeoGebra til å finne noen sammenhørende verdier.

Bruk GeoGebra til å tegne fire sirkler med radius henholdsvis 0,310 cm, 1,40 cm, 2,30 cm og 3,30 cm.

Bruk deretter «Avstand eller lengde – knappen» til å måle omkretsen av sirklene.

### Å finne en lineær modell uten bruk av digitale verktøy

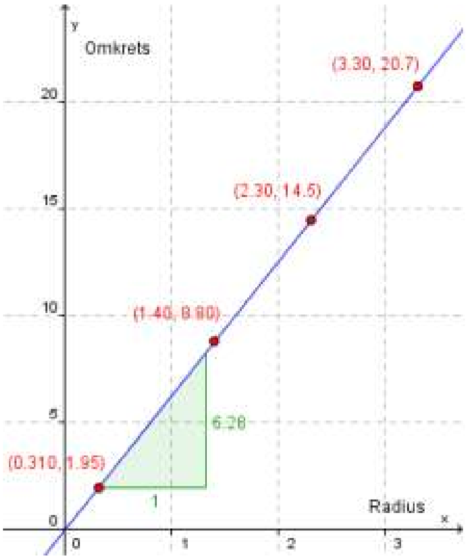
Hvis du ikke har digitale verktøy tilgjengelig, kan du finne lineære modeller ved hjelp av blyant og papir.

Sett resultatene opp i en tabell.

| Radius | 0,310 | 1,40 | 2,30 | 3,30 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Omkrets | 1,95 | 8,80 | 14,5 | 20,7 |

Plott verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.




Punktene ligger på en rett linje. Det betyr at det er en lineær sammenheng mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

Du har tidligere lært at likningen for en rett linje er gitt ved $y = \mathrm{ax} + b$, der *a* er stigningstallet til linjen, og *b* er skjæringspunktet med *y*-aksen.

Den rette linjen vi har tegnet skjærer *y*-aksen i origo. Da vet vi at $b = 0$. Stigningstallet forteller hvordan *y*-verdien endrer seg når *x*-verdien øker med én enhet. For å finne stigningstallet kan du tegne en trekant som vist ovenfor og måle med linjalen. Her får vi da at $a \approx 6,28$.

Likningen for den rette linjen blir altså $y = 6,28x$.

Vi har da funnet at $y = 6,28x$ er en tilnærmet matematisk modell for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

## Å finne en lineær modell ved bruk av digitale verktøy

Vi vil som regel ikke få et helt nøyaktig resultat ved å tegne trekanter og måle med linjal. (Ovenfor tegnet vi i GeoGebra, men hvis vi hadde tegnet og målt «for hånd», ville vi antakelig ikke kommet akkurat til 6,28 som stigningstall.) Du må derfor lære deg hvordan du bruker et digitalt verktøy for å finne en lineær modell.

Vi skal her vise hvordan du kan bruke GeoGebra.

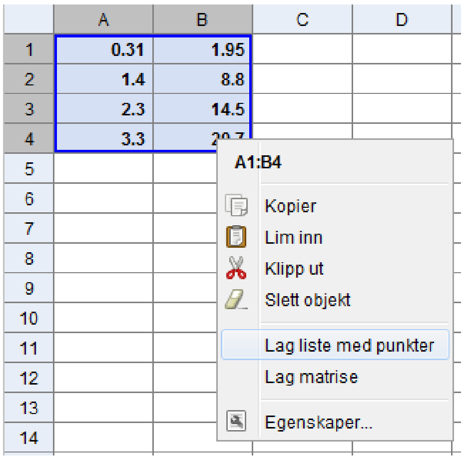
Vi bruker samme datamateriale som ovenfor.

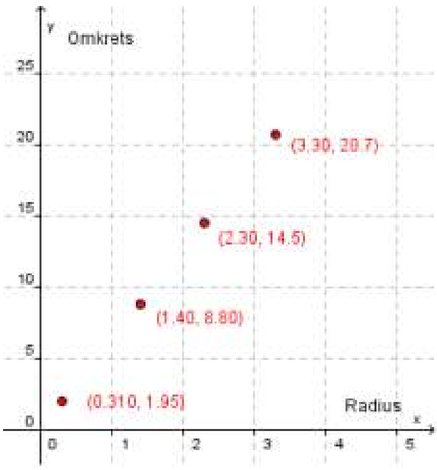
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Radius | 0,310 | 1,40 | 2,30 | 3,30 |
| Omkrets | 1,95 | 8,80 | 14,5 | 20,7 |

Vi legger først verdiene fra tabellen ovenfor inn i regnearket i GeoGebra.

Merk alle dataene, høyreklikk, og velg «Lag liste med punkter».

Punktene viser seg i grafvinduet og det ser ut til at punktene ligger på en rett linje. I algebrafeltet ser du at samlingen med punkter har fått navnet «liste1».

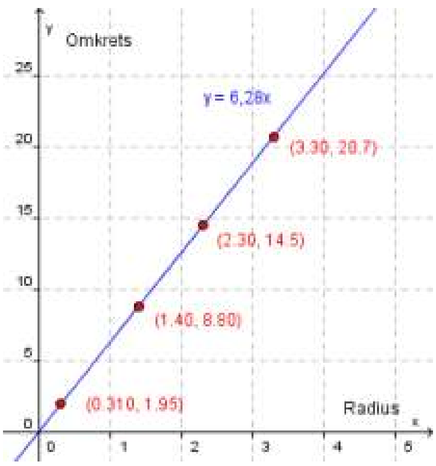


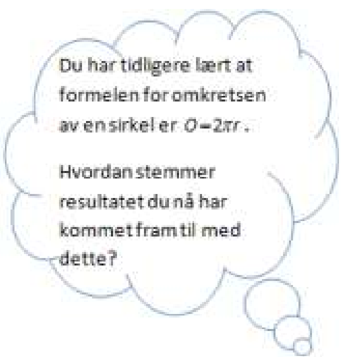

Ved en metode som kalles **lineær regresjon**, kan du bruke GeoGebra til å finne **den lineære modellen**.

I GeoGebra skriver du


Den rette linjen gjennom punktene kommer nå opp, og likningen for linjen vises i algebrafeltet. Ved å høyreklikke på formelen for linjen, kan du velge at formelen skal gis på formen $y = \mathrm{ax} + b$.




Likningen for linjen blir y = 6,28x.



Eksempel

Folketall i Norge

Tabellen nedenfor viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2010.

| Årstall | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Folketall | 3 249 954 | 3 567 707 | 3 863 221 | 4 078 900 | 4 233 116 | 4 478 497 | 4 907 315 |

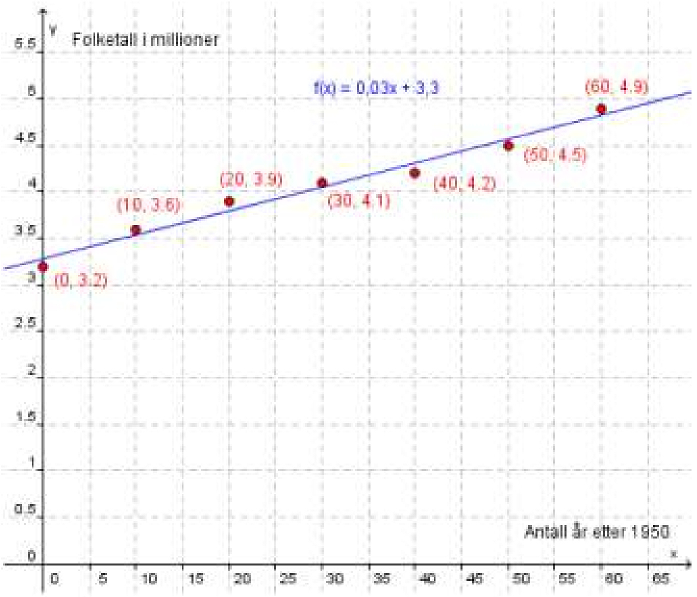
*(Kilde: Statistisk sentralbyrå)*

Vi lager en ny tabell der $x$ er antall år etter 1950 og $f(x)$ er folketallet i millioner.

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,2 | 3,6 | 3,9 | 4,1 | 4,2 | 4,5 | 4,9 |

Vi plotter punktene fra tabellen i et koordinatsystem.

Punktene ligger tilnærmet på en rett linje.




Vi bruker lineær regresjon og finner da at

$$f(x) = 0,03x + 3,3$$

er en lineær matematisk modell som tilnærmet beskriver utviklingen i folketallet i Norge fra 1950 til 2010.

Hva vil folketallet i Norge være i 2030 i følge denne modellen?

I år 2030 har det gått 80 år siden 1950.

I følge modellen vil folketallet da være

$$f(80) = 0,03 \cdot 80 + 3,3 = 5,7$$

Folketallet i Norge vil altså etter denne modellen være 5,7 millioner i 2030.

# Kan vi stole på matematiske modeller?

[Kan vi stole på matematiske modeller? (104889)]

Formelen for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen, er et eksempel på en matematisk modell som er svært nøyaktig. Det har blitt gjort mange målinger som viser at vi kan stole på modellen.

Modellen vi fant for å beskrive hvordan folketallet i Norge utvikler seg, er mer usikker. For det første ser vi at linjen ikke treffer punktene fra tabellen helt nøyaktig. Den linjen som fremkommer ved lineær regresjon, er den som totalt sett har minst avvik fra punktene.

Den lineære modellen har stigningstall 0,03. Det betyr en vekst i folketallet på 0,03 millioner (30 000) per år. Er det realistisk at folketallet her i landet vil øke med ca. 30 000 per år i tiden framover? Og hvis det er slik, - hvor lenge vil denne utviklingen fortsette? Det er ikke lett å svare på dette. Her er det mange faktorer som kan virke inn. Vil politikerne begrense innvandringen til Norge, eller vil de åpne for fri innvandring? Hva med fødselspermisjoner og barnehagetilbud? Vil det bli lettere eller vanskeligere å være småbarnforeldre?

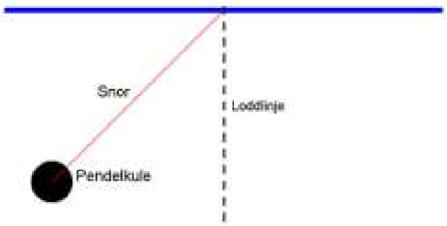
Vi kan stille liknende spørsmål til andre matematiske modeller.

Vi må alltid vurdere om en matematisk modell er gyldig og spesielt må vi ta hensyn til forhold som kan påvirke situasjonen før vi bruker en modell til å si noe om hva som vil skje i framtida.

# Modell for svingetiden til en pendel

[Modell for svingetiden til en pendel (104899)](Modell for svingetiden til en pendel (104899))

På figuren til høyre ser du en skisse av en pendel. Når du drar pendelkulen ut til siden slik figuren viser, og slipper den, vil den svinge fram og tilbake.




Svingetiden til pendelen er tiden det tar fra du slipper pendelkulen til den er tilbake i samme posisjon. Svingetiden måles i sekunder.

Svingetiden endrer seg når vi endrer lengden på snoren. Vi ønsker å finne sammenhengen mellom snorlengde og svingetid.

## Praktisk oppgave

Gå sammen i små grupper. Finn en egnet plass til å henge opp en pendel. For at luftmotstanden ikke skal forstyrre målingene bør dere bruke et relativt tungt lodd som pendelkule og la pendelsnoren være så tynn som mulig. Husk at snorlengen måles fra opphengningspunktet til midt i pendelkulen.

- Mål svingetiden for pendelen ved forskjellige snorlengder. La snorlengden variere fra 0 til 4 meter.
- Legg resultatene inn i en tabell i regnearket i GeoGebra.
- Merk tabellen, høyreklikk, og lag liste med punkter.
- Skriv etter tur

  **RegLin[liste1]**
  **RegPoly[liste1, 2]**
  **RegPot[liste1]**
  **RegEksp[liste1]**
  **RegLog[liste1]**

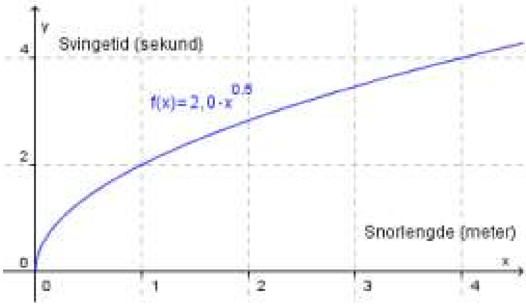
  og finn den kurven som passer best med punktene i grafvinduet.

- Finn en modell for svingetiden til pendelen.
- Vis hvordan du kan bruke modellen til å regne ut svingtiden når du kjenner snorlengden.

# Potensfunksjon som modell

[Potensfunksjon som modell (104905)](#)

Da du skulle finne en sammenheng mellom svingetid og snorlengde til en pendel, fant du kanskje en modell som likner på modellen til høyre.




I så tilfelle var det

**RegPot[liste1]**

som ga den grafen som falt mest sammen med verdiene du målte.

Denne modellen er en potensfunksjon.

Potensfunksjoner kan skrives på formen $f(x) = \mathrm{ax}^b$ der *a* og *b* er konstante tall, og *x* er grunntallet i en potens.

Vi finner denne typen modeller ved å bruke potensregresjon.

Vi skriver da

**RegPot[liste1]**

i GeoGebra.


**Hjemmelaget pendel.**

# Eksponentialfunksjon som modell

[Eksponentialfunksjon som modell (104934)](#)

Da vi arbeidet med eksponentiallikninger (i algebrakapittelet) så vi på eksempelet nedenfor.

## Eksempel

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilens verdi har avtatt med 10 % hvert år siden den var ny. Vi regner med at verdien vil fortsette å avta med 10 % per år de neste årene.

Bilens verdi *V*(*x*), *x* år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved modellen

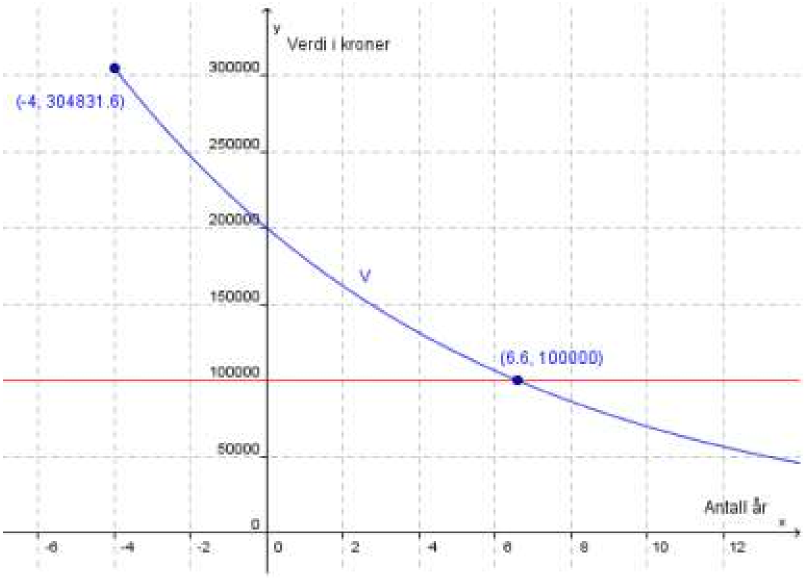
$$V(x) = 200\ 000 \cdot 0,90^x$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen *V*.

Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var nærmere 305 000 kroner.


**Hvis verdien avtar med 10 % per år, vil bilen bare være verd halvparten av det du kjøpte den for etter 6,6 år.Vis at dette gjelder uansett hva bilen kostet da du kjøpte den.**




Funksjonen *V* ovenfor er en **eksponentialfunksjon**.

Eksponentialfunksjoner kan skrives på formen

$f(x) = a \cdot b^x$ der *a* og *b* er konstante tall.

Legg merke til at *x* her er eksponent i potensen.

I algebrakapittelet så vi at vi alltid kan finne matematiske modeller uttrykt ved eksponentialfunksjoner når størrelser avtar eller øker med en fast prosent.

For å finne en eksponentiell modell ved regresjon må vi bruke eksponentialregresjon. Vi skriver da

**RegEksp[liste1]**

i GeoGebra.

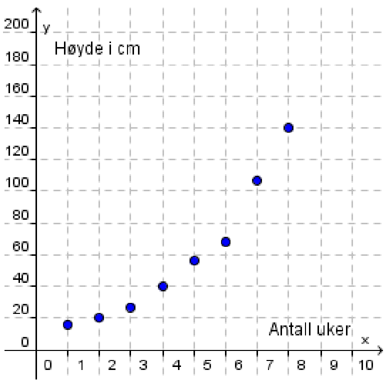
## Eksempel

Siv ville finne ut hvordan en solsikke hun hadde i hagen, vokste uke for uke. Hun målte høyden til solsikken hver uke i åtte uker. De observerte verdiene ser du i tabellen nedenfor.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antall uker | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Høyde i cm | 16 | 20 | 27 | 40 | 56 | 68 | 107 | 140 |

Vi markerer datamaterialet fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

For å finne en modell som kan brukes for å beskrive solsikkens vekst, ser det ut som vi må finne **en funksjon som vokser raskere og raskere** etter som *x* - verdiene øker. Her vil det derfor være naturlig å prøve med **eksponentiell regresjon**.




Eksponentiell regresjon i GeoGebra gir

$$f(x) = 10,94 \cdot 1,38^x$$

**NB!**
Noen digitale verktøy vil gi eksponentialfunksjoner på formen


Hvor mye kan en solsikke vokse i løpet av en uke?

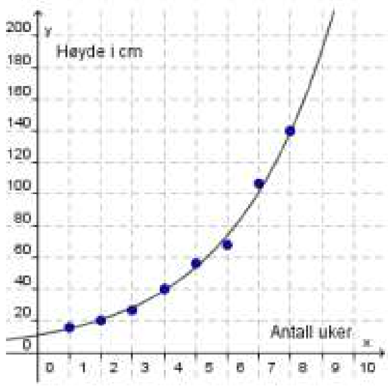
$$f(x) = a \cdot e^{\text{bx}}.$$

Hvis du bruker et digitalt verktøy som gir eksponentialfunksjonen

$$f(x) = 10,94 \cdot e^{0,32x}$$

her, må du omforme dette utrykket slik
$$\begin{aligned} f(x) &= 10,94 \cdot e^{0,32x} \\ &= 10,94 \cdot 1,38^x \end{aligned}$$

Dersom vi skriver funksjonsuttrykket på denne formen, ser vi at solsikken var ca. 10,9 cm da Siv begynte å måle, og at den har vokst med ca. 38 % hver uke.




Vi ser at kurven treffer bra med de observerte verdiene, men det er viktig å legge merke til at modellen vi fant her, bare gjelder i **et begrenset tidsintervall.**

Det vil være naturlig at veksten til solsikken vil avta og etter hvert stoppe helt opp. Vi kan da ikke bruke det samme funksjonsuttrykket.

Her må vi bruke sunn fornuft!

# Andregradsfunksjoner

[Polynomfunksjoner som modeller (104937)](#)

**Andre- og tredjegradsfunksjoner** tilhører en gruppe funksjoner som vi kaller **polynomfunksjoner**. En andregradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 2, og en tredjegradsfunksjon er en funksjon av grad 3.

## Andregradsfunksjoner

Noen ganger er det en andregradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. En andregradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$$

Her er *a*, *b* og *c* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en andregradsfunksjon ved å skrive

**RegPoly[liste1, 2]**

(Legg merke til at siden en andregradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 2, må vi skrive «,2» etter «liste1».)

## Tredjegradsfunksjoner

Andre ganger er det en tredjegradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. En tredjegradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$$

Her er *a*, *b*, *c* og *d* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en tredjegradsfunksjon ved å skrive

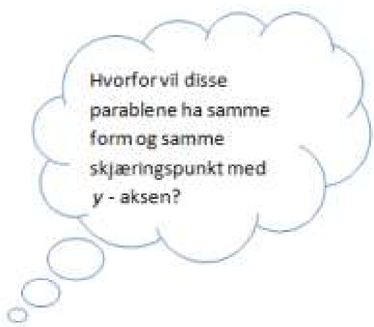
**RegPoly[liste1, 3]**

(Legg merke til at siden en tredjegradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 3, må vi skrive «,3» etter «liste1».)

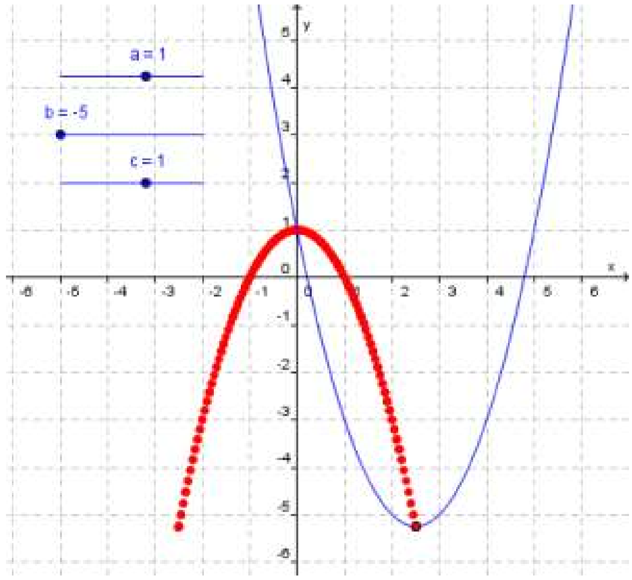
## Eksempel

Husker du at vi tidligere i dette kapittelet prøvde å finne ut hva som skjedde med grafen til en andregradsfunksjon dersom vi endret verdiene av *a*, *b* og *c*?

Vi så da at når vi endret verdien av *b*, fikk vi nye parabler med samme form. Vi så også at skjæringspunktet med *y*-aksen var samme for alle disse parablene. I tillegg så vi at ekstremalpunktene til alle parablene dannet en ny parabel.




I koordinatsystemet nedenfor har vi valgt $a = 1$ og $c = 1$ og latt $b$ variere fra $-5$ til $5$. Vi har i tillegg slått på «sporing» på parabelens bunnpunkt.



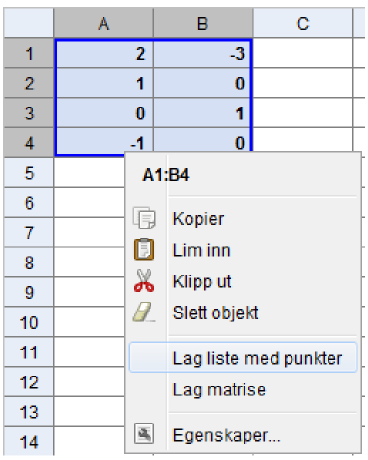

Ser du at de røde «sporene», altså bunnpunktene til de parabelene vi får ved å endre verdien av *b*, danner en ny parabel med toppunkt?

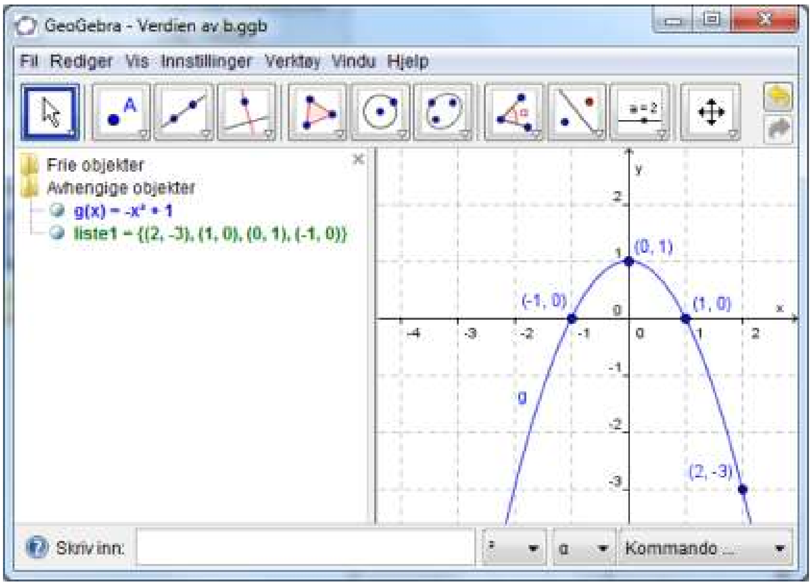
Bunnpunktene ligger på symmetrilinjen og *x*-verdien i bunnpunktene er gitt ved $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2}$.

Vi finner bunnpunktene til disse parablene for ulike verdier av *b*.

| $b$ | -4 | -2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2}$ | 2 | 1 | 0 | -1 |
| $y = f(x) = x^2 + \text{bx} + 1$ | -3 | 0 | 1 | 0 |

Vi legger disse punktene inn i GeoGebra, og bruker regresjon for å finne en andregradsfunksjon som beskriver sammenhengen mellom *x*- og *y*-verdiene.






Vi finner at punktene ligger på grafen til funksjonen $g$ gitt ved $g(x) = -\times^2 + 1$.

Vi kan også vise ved regning at dette er riktig.

$$f(x) = x^2 + \mathrm{bx} + 1$$

I bunnpunktene er

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2}$$

og

$$b = -2x$$

$$y = f\left(-\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + 1 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 1 = -\frac{b^2}{4} + 1$$

Hvis vi bruker at $b = -2x$ får vi

$$y = -\frac{b^2}{4} + 1$$

$$y = -\frac{(-2x)^2}{4} + 1 = -x^2 + 1$$

Bunnpunktene ligger altså på en ny parabel gitt ved $g(x) = -x^2 + 1$.

Klarte du det?
Har du tenkt på samme måte som vist nedenfor?

$$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$$

I ekstremalpunktene er

$$x = -\frac{b}{2a}$$

og

$$b = -2\,\mathrm{ax}$$

$$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{\mathrm{ab}^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2}{4a} + c$$

Hvis vi bruker at $b = -2\,\mathbf{ax}$, får vi

$$y = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = -\frac{(-2\,\mathrm{ax})^2}{4a} + c$$

$$y = -\frac{4a^2x^2}{4a} + c$$

$$y = -\,\mathbf{ax}^2 + c$$

Ekstremalpunktene ligger altså på en ny parabel gitt ved $g\big(x\big) = -\,\mathbf{ax}^2 + c$.

# Tredjegradsfunksjoner

Tredjegradsfunksjoner (105012)

Andre ganger er det en tredjegradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. En tredjegradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$$

Her er *a*, *b*, *c* og *d* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en tredjegradsfunksjon ved å skrive

**RegPoly[liste1, 3]**

(Legg merke til at siden en tredjegradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 3, må vi skrive «,3» etter «liste1».)

# Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger

[Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger (105013)]

Det settes stadig nye rekorder på skøyter. Kan farten til skøyteløperne i fremtiden bli så høy at banene bør bygges større slik at svingene blir mindre krappe? Skøytearenaer som bygges i dag, skal jo være arenaer i mange år framover.

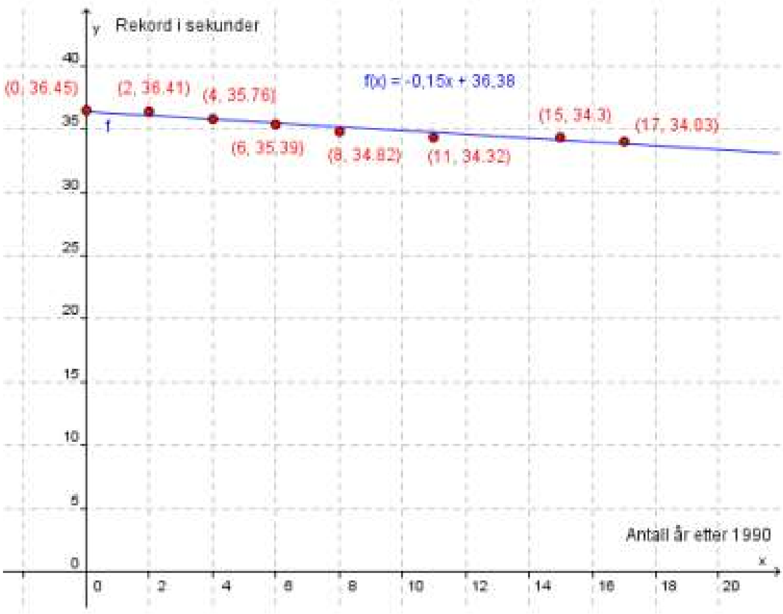
Jeremy Wotherspoon fra Canada setter ny verdensrekord på 500 meter skøyter for herrer i Kearns, Utah i 2009 med tiden 34,03.

Utviklingen av verdensrekorden for 500 meter på skøyter for herrer er gjengitt i tabellen nedenfor.

| År | 1990 | 1992 | 1994 | 1996 | 1998 | 2001 | 2005 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rekord i sekunder | 36,45 | 36,41 | 35,76 | 35,39 | 34,82 | 34,32 | 34,30 | 34,03 |

Kilde: Eksamen MAT1005 2P-Y, Høsten 2009

Vi lar *x* være antall år etter 1990 og *y* rekorden i sekunder. Så fremstiller vi opplysningene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.




Punktene ligger tilsynelatende på en rett linje.

Vi bruker regresjon og finner en lineær funksjon som kan være modell for sammenhengen mellom rekorden og året den er satt

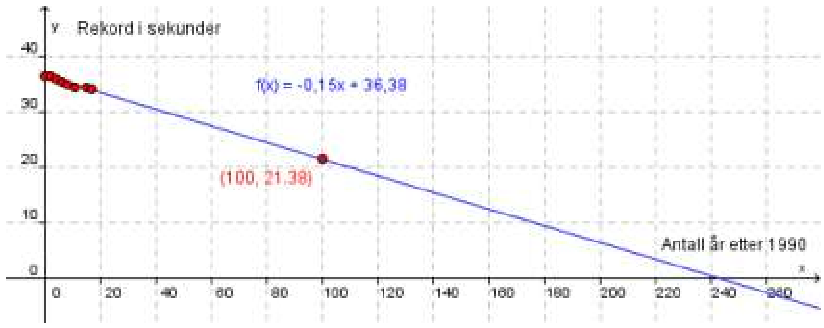
$$f(x) = -0,15x + 36,38$$

Grafen til funksjonen er tegnet i det samme koordinatsystemet.

Vi kan benytte modellen til å beregne hva verdensrekorden vil være i år 2090 dersom modellen gjelder.

$$f(100) = -0,15 \cdot 100 + 36,38 = 21,38$$

Rekorden i 2090 vil etter modellen være 21,38 sekunder. Modellen er også representert med grafen til funksjonen.



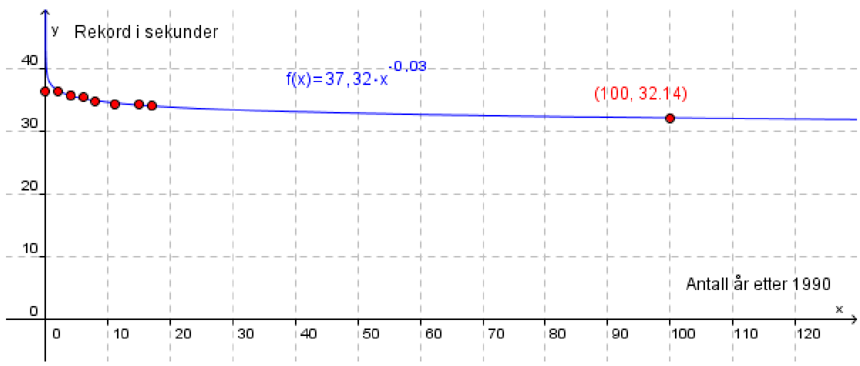

Grafen til modellen viser at rekorden på 500 m skøyter vil bli null i år 2230. Vi vet at dette er helt urealistisk, og det viser med all tydelighet hvor varsomme vi må være med å stole på matematiske modeller.

Utviklingen modellen ovenfor skisserer, er så usannsynlig at den ikke egner seg som grunnlag for beslutninger om framtidig utforming av skøytearenaer. Modellen egner seg muligens til å si noe om utviklingen noen få år fram i tid.

En annen modell som skisserer en mer sannsynlig utvikling, er gitt med potensfunksjonen

$$f(x) = 37,32 \cdot x^{-0,03}$$

(Her er det første punktet tatt bort i regresjonen.)




Modellen gir en rekord ned mot 32 sekunder i år 2090. Kanskje dette ikke er så urealistisk? Denne modellen er nok mer egnet som grunnlag for beslutninger om fremtidige skøyteanlegg.

# Vekstfart og derivasjon av funksjoner

## Vekstfart til lineære funksjoner

Vekstfart til lineære funksjoner (105016)

Som vi nå har sett flere ganger, kan vi skrive en lineær funksjon på formen $f(x) = \mathbf{ax} + b$. Tallet *a* kalles stigningstallet, og tallet *b* kalles konstantleddet.

Vi skal se litt nærmere på stigningstallet og innføre noen nye skrivemåter og begreper.

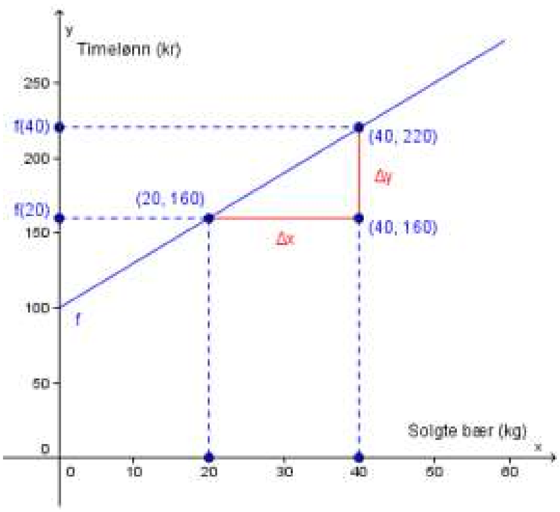
Eksempel

Ole selger bær på torget. Han har en fast timelønn på 100 kroner.
I tillegg får han 3 kroner per kilo han selger. Vi lar *x* være antall kilo Ole selger per time, og $f(x)$ timelønna han oppnår.
Vi får at

$$f(x) = 3x + 100$$

**Stigningstallet** forteller hvor bratt grafen er. I dette tilfellet er stigningstallet et uttrykk for hvor mye timelønna øker i forhold til antall solgte kilo. Derfor kaller vi også stigningstallet for **vekstfarten** eller **veksthastigheten** til funksjonen.


I dag har vi tilgang til friske bær hele året. Om sommeren dominerer de norske fra skog og hage, mens resten av året importerer vi.




Vi ser at punktene (20,160) og (40,220) ligger på grafen til *f*.

Stigningstallet blir $\frac{220-160}{40-20}$.

Dette er det samme som $\frac{\text{endring } i\ y\text{-verdi}}{\text{endring } i\ x\text{-verdi}}$.

Vi bruker den greske bokstaven $\Delta$ (delta) for å angi endring i en størrelse.

Vi får da at

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{220-160}{40-20} = \frac{60}{20} = 3$$

Dette kan vi regne oss fram til ved hjelp av funksjonsuttrykket:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(40)-f(20)}{40-20} = \frac{3 \cdot 40+100-(3 \cdot 20+100)}{20} = \frac{220-160}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

Vi får samme resultat uansett hvilke to *x*-verdier, $x_1$ og $x_2$, vi velger.

Hvis vi for eksempel velger $x_1 = 10 \text{ og } x_2 = 50$, får vi

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(50)-f(10)}{50-10}$$
$$= \frac{3 \cdot 50+100-(3 \cdot 10+100)}{40} = \frac{150+100-30-100}{40} = \frac{120}{40} = 3$$

**Vekstfart. Stigningstall**

Vi kan regne ut **vekstfarten til en lineær funksjon**, eller **stigningstallet** til en rett linje ved å bruke formelen

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

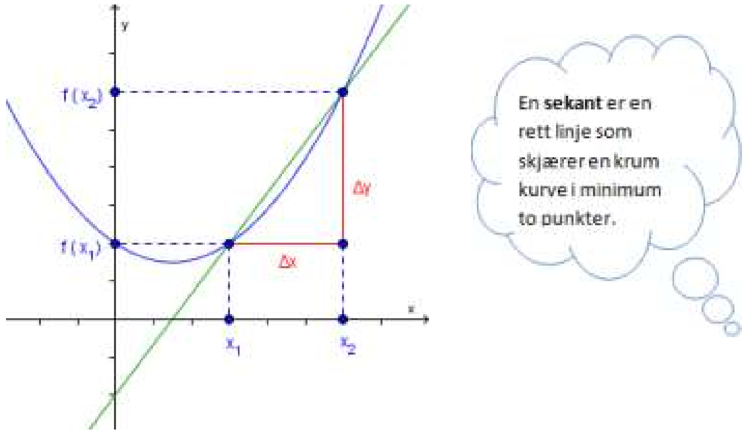
Her er $(x_1, f(x_1)) \text{ og } (x_2, f(x_2))$ to punkter som ligger på linjen.

# Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart

[Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart (105023)]

Når en funksjon ikke er lineær, vil vekstfarten variere fra sted til sted på kurven. Jo brattere kurven er, jo større er vekstfarten.

Vi kan finne **den gjennomsnittlige vekstfarten** over et intervall [$x_1$, $x_2$] på følgende måte




Vi trekker en rett linje, sekant, gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.
Vi regner så ut stigningstallet til denne sekanten:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Vi har da funnet et mål for **gjennomsnittlig vekstfart** for funksjonen når *x* øker fra $x_1$ til $x_2$.

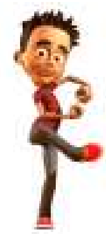
**Gjennomsnittelig vekstfart. Stigningstallet til sekanten**

**Den gjennomsnittlige vekstfarten** for en funksjon *f*(*x*) når *x* vokser fra $x_1$ til $x_2$, er lik **stigningstallet til sekanten** gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

## Eksempel 1

Som 13 åring var Niels Henrik 149 cm høy. Fire år senere var han 181 cm. Vi lar *x* være alderen tilNiels Henrik og *y* være høyden. Vi får at den gjennomsnittlige vekstfarten til Nils Henrik i fireårsperioden blir

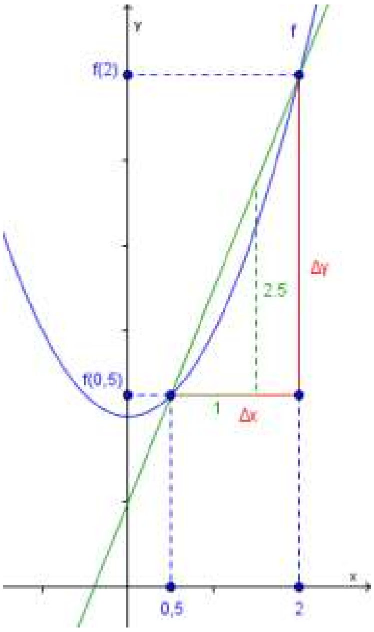


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{181 \text{ cm} - 149 \text{ cm}}{4 \text{ år}} = \frac{32 \text{ cm}}{4 \text{ år}} = 8 \frac{\text{cm}}{\text{år}}$$

## Eksempel 2

En funksjon *f* er gitt ved $f(x) = x^2 + 2$

Vi ønsker å finne den gjennomsnittlige vekstfarten til *f* når *x* vokser fra *x* = 0,5 til *x* = 2.




Gjennomsnittelig vekstfart

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0{,}5)}{2-0{,}5}$$

$$= \frac{2^2+2-\left(0{,}5^2+2\right)}{2-0{,}5}$$

$$= \frac{6-2{,}25}{1{,}5}$$

$$= 2,5$$

Eksempel 3

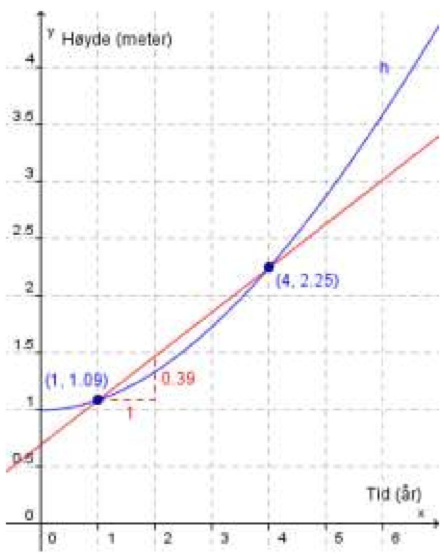
I 2006 plantet Elin et morelltre.

Funksjonen *h* gitt ved

Morelltre i blomstring

$$h\left(x\right) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \quad x \in (0,20)$$

viser høyden til morelltreet i meter *x* år etter at det ble plantet.



Gjennomsnittlig vekstfart per år fra 2007 til 2010 er

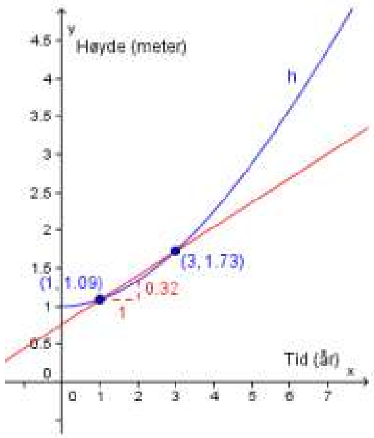
$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(4)-h(1)}{4-1} = 0,39$

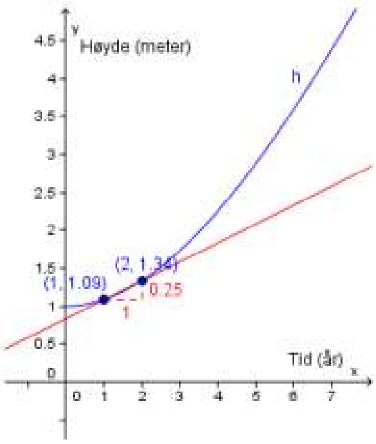
Dette viser at i perioden 2007 til 2010 vokste treet med gjennomsnittlig 39 cm per år.

Vi ser av grafen at treet vokser fortere etter fire år enn etter ett år. Grafen er mye brattere når $x = 4$ enn når $x = 1$.

Vi ønsker å finne en tilnærmet verdi for hvor fort treet vokser når det er akkurat ett år gammelt. Vi kaller dette for **den momentane veksten** når treet er ett år.

Vi finner først gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året og deretter fra det første året til det andre året.



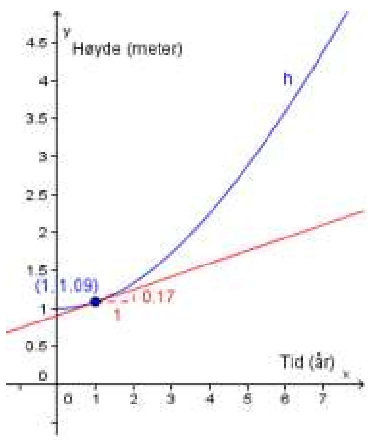

Grafene ovenfor viser at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året er 32 cm per år, og at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det andre året er 25 cm per år.

Stigningen til sekantene blir mer og mer lik brattheten til grafen når jo nærmere hverandre de to punktene er. Av de to tilnærmingsverdiene, er det derfor den siste som er den beste tilnærmingen.

For å finne en enda bedre tilnærmingsverdi reduserer vi avstanden mellom punktene enda mer.

Til slutt vil punktene falle sammen til ett punkt, og **sekanten blir en tangent** til kurven i dette punktet.

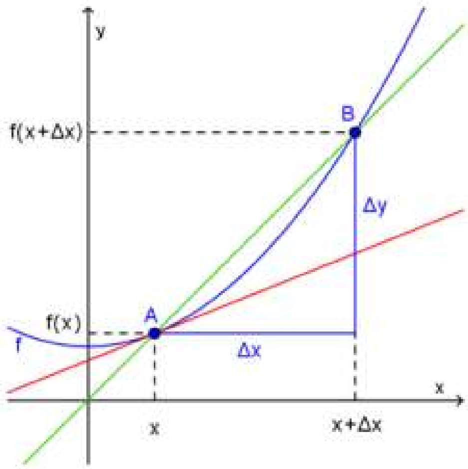
Stigningen til denne tangenten gir den aller beste tilnærmingsverdien for **den momentane vekstfarten** når $x = 1$.



# Momentan vekstfart. Den deriverte funksjonen

Momentan vekstfart. Den deriverte funksjonen (105025)

Vi skal nå se hvordan vi kan finne **en nøyaktig verdi for den momentane vekstfarten til en funksjon i et punkt.**




Vi benytter oss av samme prinsipp som vi brukte for å finne en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten.

Vi tar utgangspunkt i en tilfeldig funksjon *f*. Vi tegner grafen til funksjonen, velger en tilfeldig *x*-verdi og får et punkt på grafen $A\left(x, f\left(x\right)\right)$.

Vi ønsker å finne vekstfarten til funksjonen for akkurat denne *x*-verdien.

Vi gir *x* et tillegg $\triangle x$, og får et nytt punkt på grafen, $B\left(x+\triangle x, f\left(x+\triangle x\right)\right)$.

Vi trekker **en sekant (grønn linje)** gjennom punktene *A* og *B*.

Vi regner ut stigingstallet for denne linja:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Vi har da funnet et uttrykk for **gjennomsnittelig vekstfart** fra *A* til *B*.

Vi lar nå punktet *B* nærme seg punktet *A*. Vi lar altså $\Delta x$ gå mot null.

Da vil **sekanten (grønn)** gradvis nærme seg til å bli en **tangent (rød linje)** til kurven i *A*.

E n **tangent** til en kurve er en rett linje som berører kurven i bare ett punkt. Stigningstallet (brattheten) til denne tangenten forteller hvor fort kurven vokser akkurat her. Vi kaller dette stigningstallet for **den momentane veksten** til grafen i punktet $\left(x, f\left(x\right)\right)$ eller verdien av **den deriverte** funksjonen til *f* i punktet. Vi skriver $f'\left(x\right)$ og leser « *f* derivert av *x*».


**Den deriverte**

Vi ser på grafen ovenfor.

$f'\left(x\right)$ er den verdien $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg mot når $\Delta x$ går mot null.

**Definisjon**

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

Den deriverte i et punkt er **stigningstallet til tangenten** til grafen i dette punktet.

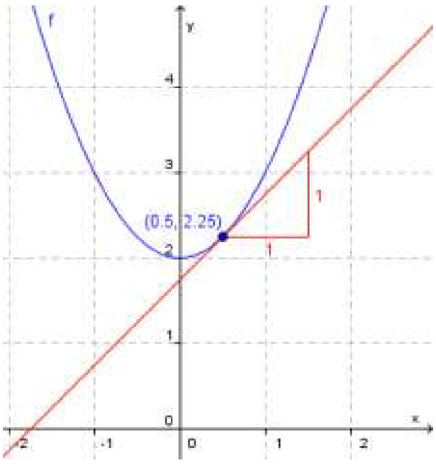
Den **deriverte** i et punkt og **den momentane vekstfarten** i punktet er det samme.

Definisjonen ovenfor er en lokal definisjon. Den sier noe om verdien av den deriverte funksjonen i et punkt, nemlig punktet med førstekoordinaten *x*. Hvis vi nå betrakter alle verdier av *x* i definisjonsområdet til *f*, får vi en ny funksjon, den deriverte funksjonen $f'$ som til hver verdi av *x* har *y*-verdien $f'(x)$. Det er denne funksjonen vi kaller den deriverte funksjonen.
**Derivere** betyr **å utlede eller avlede** og $f'$ er en ny funksjon som vi har utledet fra *f*.

# Hvordan finne verdier for momentan vekstfart (den deriverte) grafisk

Hvordan finne verdier for momentan vekstfart (den deriverte) grafisk (105026)

Den momentane vekstfarten eller den deriverte til $f(x) = x^2 + 2$ når for eksempel *x* = 0,5, er altså det samme som stigingstallet for tangenten til kurven
når *x* = 0,5.




Vi kan finne en verdi for denne vekstfarten grafisk ved å tegne grafen til *f* og tangenten til *f* når *x* = 0,5.

Vi ser at tangenten har stigingstallet 1. Den momentane vekstfarten er altså lik 1 når
*x* = 0,5.
Den deriverte til *f*(*x*) når *x* = 0,5 er 1. Vi skriver

$$f'(0,5) = 1.$$

## Hvordan regne ut verdier for den deriverte funksjonen ved å bruke definisjonen

[Hvordan regne ut verdier for den deriverte funksjonen ved å bruke definisjonen (105027)]

Vi vil nå regne oss fram til den deriverte til $f\left(x\right) = x^2 + 2$ når *x* = 0,5.

Vi bruker definisjonen av den deriverte

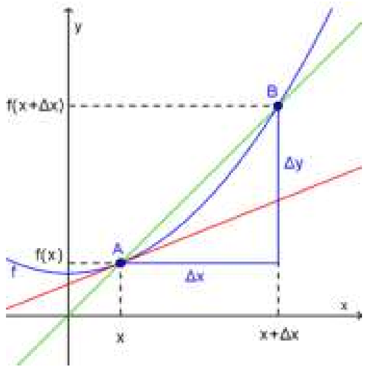
$f'\left(x\right)$ er den verdien som $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg mot når $\Delta x$ går mot null.

$f'\left(x\right) = \lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$

Hvordan finner vi så $f\left(x+\triangle x\right)$?
$f\left(x+\triangle x\right)$ er det uttrykket du får når du bytter ut *x* med $x+\triangle x$ i funksjonsuttrykket.

Det gir

$$f'\left(x\right) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$




$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\left(x+\triangle x\right)^2+2-\left(x^2+2\right)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{x^2+2\cdot x\cdot\triangle x+\left(\triangle x\right)^2+2-x^2-2}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\triangle x+\left(\triangle x\right)^2}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x(2\cdot x+\triangle x)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\cancel{\triangle x}\left(2\cdot x+\triangle x\right)}{\cancel{\triangle x}}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\left(2x+\triangle x\right)$$

$$= 2x$$

$2x + \Delta x \ \to 2x \text{ når } \Delta x \to 0$. Dette betyr at $f'\left(0,5\right) = 2\cdot 0,5 = 1$.

Vi har nå funnet den deriverte til $f\left(x\right) = x^2 + 2$ når *x* = 0,5.

Utledningen ovenfor blir den samme for alle verdier *x* i definisjonsområdet til *f*. $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ går mot
2*x* for alle verdier av *x*. Denne avledede funksjonen, 2*x*, kalles den deriverte funksjonen til *f*. Denne er definert for alle verdier *x* i definisjonsområdet til *f* og vi får at $f'\left(x\right) = 2x$.

# Derivasjonsregler

Derivasjonsregler (105028)

Det er ikke nødvendig å bruke definisjonen av den deriverte hver gang vi skal derivere et utrykk.

Ved å bruke definisjonen på noen generelle uttrykk, kan vi komme fram til generelle derivasjonsregler, eller formler, for hvordan vi skal derivere uttrykk. Det er disse formlene vi vanligvis bruker.

**Det er veldig viktig at du lærer deg disse reglene!**

| | | |
|---|---|---|
| Definisjon | $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ | |
| Konstant funksjon | $f(x)=k$ | $f'(x)=0$ |
| Potensfunksjon | $f(x)=x^n$ | $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ |
| Potensfunksjon multiplisert med konstant | $f(x)=k\cdot x^n$ | $f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot n\cdot x^{n-1}$ |
| Summer og differanser | $f(x)=g(x)\pm h(x)$ | $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$ |

# Den deriverte til en konstant funksjon

Den deriverte til en konstant funksjon (105029)

| | | |
|---|---|---|
| Konstant funksjon | $f(x)=k$ | $f'(x)=0$ |

**Eksempel 1**

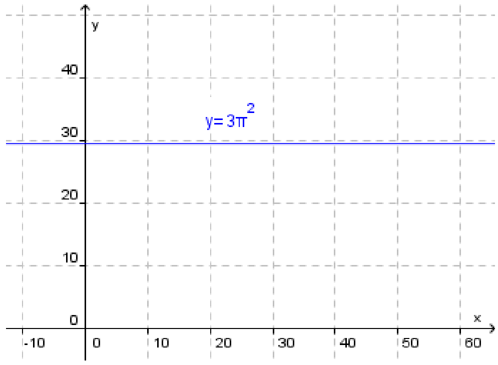
$y = 3$
$y' = 0$

**Eksempel 2**

$y = \pi$
$y' = 0$

**Eksempel 3**

$y = 3\pi^2$
$y' = 0$




Grafen til en konstant funksjon er en vannrett linje. En slik linje har stigning lik null, derfor er den deriverte til en konstant funksjon lik null.

# Den deriverte til en potensfunksjon

Den deriverte til en potensfunksjon (105030)

| | | |
|---|---|---|
| Potensfunksjon | $f(x)=x^n$ | $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ |

**Eksempel 1**

$f(x)=x^2$
$f'(x)=2x^{2-1}=2x^1=2x$

**Eksempel 2**

$f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^{3-1}=3x^2$

**Eksempel 3**

$f(x)=x^5$
$f'(x)=5x^4$

Potensfunksjon multiplisert med konstant

| | | |
|---|---|---|
| Potensfunksjon multiplisert med konstant | $f(x)=k\cdot x^n$ | $f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot n\cdot x^{n-1}$ |

**Eksempel 4**

$f(x)=3\cdot x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot 2\left(x^2\right)' \\ &= 3\cdot 2x \\ &= 6x \end{aligned}$$

**Eksempel 5**

$f(x)=3\cdot x^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot 4\cdot x^{4-1} \\ &= 12x^3 \end{aligned}$$

# Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant

[Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant (105031)]

| | | |
|---|---|---|
| Summer og differanser | $f(x)=g(x)\pm h(x)$ | $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$ |

Vi deriverer summer av og differenser mellom funksjoner ved å derivere ledd for ledd. Legg merke til at vi her også får bruk for regelen for derivasjon av en potensfunksjon multiplisert med en konstant.

**Eksempel 1**

$$f(x) = 3 - x^2$$
$$f'(x) = 0 - 2x$$
$$f'(x) = -2x$$

**Eksempel 2**

$$f(x) = x^3 + 5x^2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 5 \cdot 2x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 10x$$

**Eksempel 3**

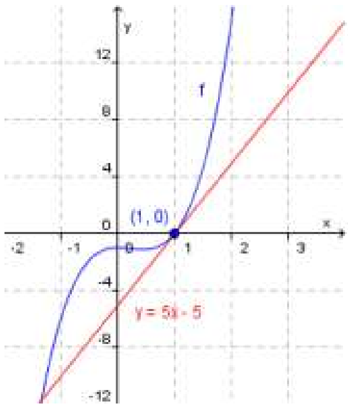
$$f(x) = \mathrm{ax} + b$$
$$f'(x) = a$$

> Legg merke til siste eksempel. Den deriverte til en rett linje blir lik stigningstallet til linjen.

## Likningen for tangenten til en graf i et punkt

Likningen for tangenten til en graf i et punkt (105032)

En funksjon *f* er gitt ved $f\,(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Vi vil finne likningen for tangenten til grafen når $x = 1$.




Tangenten går gjennom punktet $(1, f\,(1))$. Vi finner først $f\,(1)$.

$$f\,(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

Vi vet at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet. Vi finner derfor $f'\,(x)$

$$f'\,(x) = 9x^2 - 4x$$

Vi skal finne tangenten når $x = 1$. Vi regner ut $f'\,(1)$

$$f'\,(1) = 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

Nå vet vi at tangenten går gjennom punktet $(1, 0)$ og har stigningstallet 5. Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a\,(x - x_1) \\ y - 0 &= 5\,(x - 1) \\ y &= 5x - 5 \end{aligned}$$

# Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av egenskaper hos den deriverte funksjonen

## Monotoniegenskaper. Drøfting av polynomfunksjoner

[Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av egenskaper hos den deriverte funksjonen (105842)]

Vi kan bruke den deriverte til å finne topp- og bunnpunkter på grafen til en funksjon og til å bestemme hvor grafen stiger og synker. Dette kan vi gjøre ved regning, uten å tegne grafen.

### Monotoniegenskaper

Å finne ut hvor grafen stiger og hvor grafen synker, kalles for å drøfte funksjonens **monotoniegenskaper**.

Å **drøfte en funksjon** betyr gjerne at vi skal undersøke monotoniegenskapene og bestemme topp- og bunnpunkter. Vi kan også bli bedt om å bestemme nullpunkter, definisjonsmengde, krumming og vendepunkt (se avsnittet om krumningsforhold og vendepunkt).

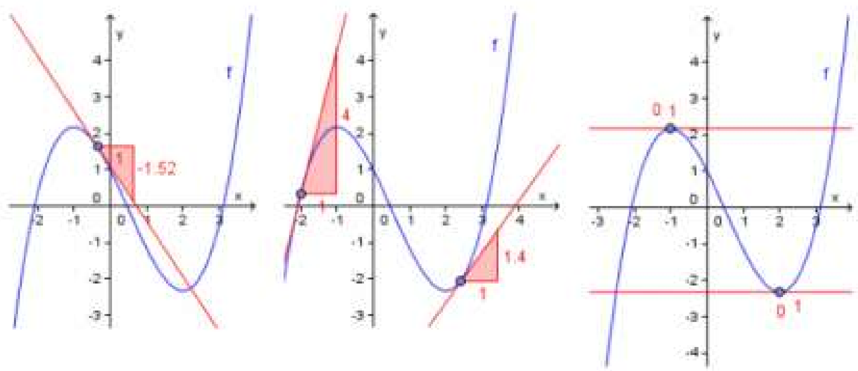
### Drøfting av polynomfunksjoner

**Utfordring!**

Tegn grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Tegn deretter tangenter til grafen for noen *x*-verdier mellom -2 og 3.

Undersøk om det er en sammenheng mellom tangentenes stigningstall og hvorvidt grafen stiger, synker eller har topp-/bunnpunkter.



Du vil oppdage at

- Stigningstallet til tangenten er positivt når grafen stiger.
- Stigningstallet til tangenten er negativt når grafen synker.
- Stigningstallet til tangenten er null i topp- og bunnpunkt.

Siden tangentens **stigningstall = verdien av den deriverte funksjonen**, betyr dette at:

Når **grafen stiger**, er **den deriverte positiv**.

Når **grafen synker**, er **den deriverte negativ**.

Når grafen har **topp- eller bunnpunkt**, er **den deriverte lik null**.

Dette betyr at vi kan finne ut for hvilke verdier av *x* grafen til en funksjon stiger, for hvilke verdier av *x* den synker, og når den har topp- eller bunnpunkt ved å se på fortegnet til den deriverte. Vi viser dette gjennom noen eksempler.

# Eksempel 1

Eksempel 1 (105844)

Finn ved regning, når funksjonen *f* gitt ved $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ stiger, og når den synker. Finn også eventuelle topp- og bunnpunkter.

## Løsning

Vi deriverer *f*(*x*)

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$
$$f'(x) = -2x + 4$$

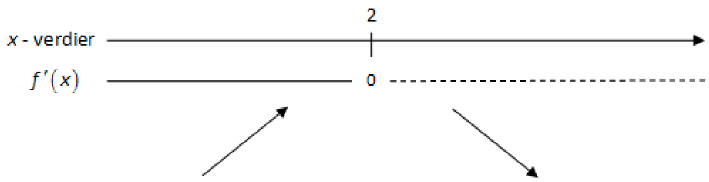
Vi setter så $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$
$$-2x + 4 = 0$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige *x*-verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow, 2)$ og $(2, \rightarrow)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$$
$$f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0$$

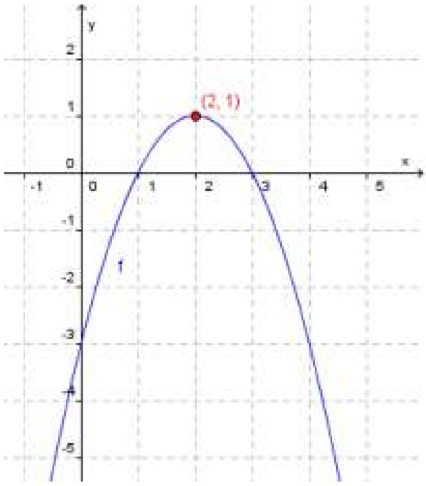
Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$




Vi ser av fortegnslinjen at *f*(*x*) vokser for $x \in (\leftarrow, 2)$ og at *f*(*x*) minker når $x \in (2, \rightarrow)$.

*f*(*x*) har derfor et toppunkt når $x = 2$. Toppunktet er $(2, f(2)) = (2, 1)$ fordi $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen til den deriverte og se sammenhengen.



y
x
(2, 1)
f

# Eksempel 2

[Eksempel 2 (105869)]

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Drøft monotoniegenskapene til *f* og finn eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

## Løsning

Vi deriverer *f*(*x*)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 - 2$$

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

Vi setter så $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 2$$

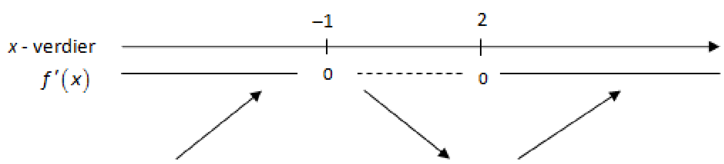
Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow, -1)$, $(-1, 2)$ og $(2, \rightarrow)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 > 0$$

$$f'(0) = (0)^2 - (0) - 2 = -2 < 0$$

$$f'(3) = (3)^2 - (3) - 2 = 4 > 0$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$




Vi ser av fortegnslinjen at

- Grafen stiger for $x \in (\leftarrow, -1) \cup (2, \rightarrow)$
- Grafen synker for $x \in (-1, 2)$

*f*(*x*) har altså et toppunkt når $x = -1$ og et bunnpunkt når $x = 2$.

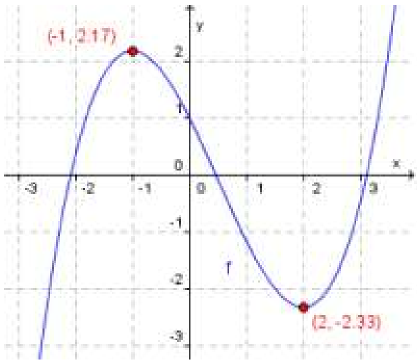
$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + 1 = \frac{16}{6} - \frac{12}{6} - \frac{24}{6} + \frac{6}{6} = -$$

Toppunktet er $\left(-1, f(-1)\right) = \left(-1, \frac{13}{6}\right)$

Bunnpunktet er $\left(2, f(2)\right) = \left(2, -\frac{7}{3}\right)$

Til slutt kan det igjen være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



# Ekstremalpunkter

Ekstremalpunkter (105888)

Toppunkter og bunnpunkter kaller vi ofte **ekstremalpunkter**. Andrekoordinaten til et toppunkt er en **maksimalverdi** til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er en **minimalverdi**. Noen funksjoner kan ha flere topp- eller bunnpunkter. Derfor er maksimal- og minimalverdiene ofte bare **lokale maksimal- og minimalverdier**. Det vil si at de er maksimal- og minimalverdier i et intervall omkring ekstremalpunktet.

## Eksempel 3

Finn ved regning når funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$ vokser, og når den avtar. Finn også eventuelle ekstremalpunkter.

### Løsning

Vi deriverer *f*(*x*)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 4$$

Vi setter så $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = 2$$

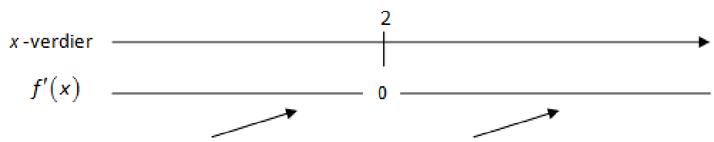
Vi får bare en løsning.

Vi tar stikkprøver i hvert av de to intervallene $(\leftarrow, 2)$ og $(2, \rightarrow)$

$$f'(0) = (0)^2 - 4 \cdot 0 + 4 = +4 > 0$$

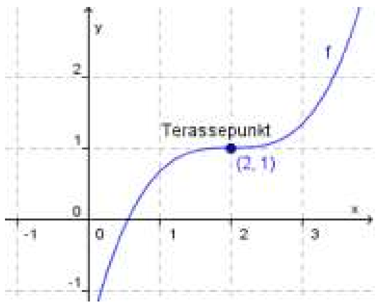
$$f'(3) = (3)^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 > 0$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$




Denne fortegnslinjen er spesiell siden **den deriverte ikke skifter fortegn i nullpunktet**. Den deriverte er positiv for $x \neq 2$. Det betyr at funksjonen vokser overalt bortsett fra når $x = 2$. Grafen har verken topp- eller bunnpunkt for $x = 2$. Men siden den deriverte er lik null, er tangenten til grafen horisontal for $x = 2$. Et slikt punkt på grafen kalles for et **terrassepunkt**.

Nedenfor har vi tegnet grafen til *f* med terrassepunkt.




## Stasjonære punkter

Et **stasjonært punkt** på en graf karakteriseres ved at **den deriverte er null** i punktet. I slike punkter er det ingen endring i veksten til funksjonen. Hvis den deriverte skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **ekstremalpunkt**. Hvis den deriverte ikke skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **terrassepunkt**.

# En praktisk problemstilling fra økonomi og samfunnsfag

## Inntekt, kostnad og overskudd

[Inntekt, kostnad og overskudd (105977)]

Bedrifter som produserer og selger varer ønsker ofte funksjoner som beskriver kostnader, inntekter og overskudd ved produksjon og salg av et visst antall enheter.

Vi bruker gjerne funksjoner med navn *K*, *I* og *O* som modeller for å beskrive kostnader, inntekter og overskudd.

**Kostnader?** **Inntekt?**

**Overskudd?**

### Eksempel

En bedrift produserer og selger en vare. De totale kostnadene *K*(*x*) i kroner ved produksjon av *x* enheter av varen per dag er

$$K(x) = 0,021x^3 + 0,019x^2 + 12,21x + 2992 \quad x \in (0, 90)$$

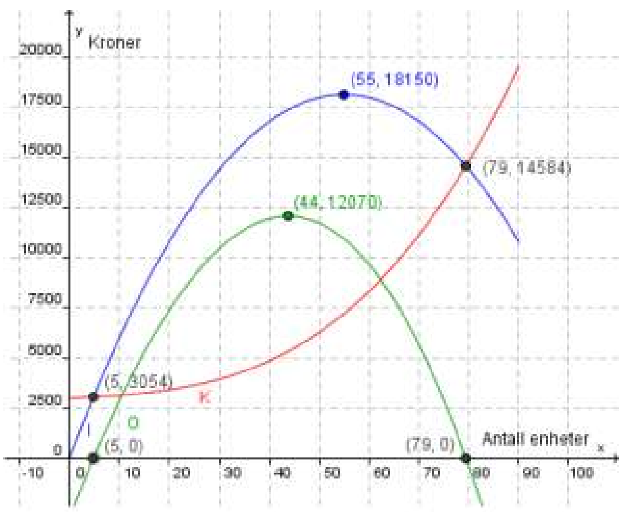
Inntekten i kroner ved salg av *x* enheter av varen er

$$I(x) = 660x - 6x^2 \quad x \in (0, 90)$$

Overskudd er differensen mellom inntekter og kostnader, og overskuddet blir derfor også en funksjon av *x*

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ O(x) &= 660x - 6x^2 - (0,021x^3 + 0,019x^2 + 12,21x + 2992) \\ O(x) &= 0,021x^3 - 6,019x^2 + 647,79x - 2992 \end{aligned}$$

Vi tegner grafene til de tre funksjonene i samme koordinatsystem.




Av grafene kan vi lese at

- Kostnader og inntekter er like store når det daglig produseres 5 eller 79 enheter. Da har også overskuddsfunksjonen verdien null.
- Inntektene er mindre enn kostnadene når det produseres mindre enn 5 enheter per dag og når det produseres flere enn 79 enheter per dag. Da er verdiene av overskuddsfunksjonen negative.

- Inntektene er større enn kostnadene når det produseres mellom 5 og 79 enheter per dag. Verdiene av overskuddsfunksjonen er positive.
- Overskuddsfunksjonen har en maksimalverdi når det produseres 44 enheter. Overskuddet er da på 12 070 kroner. Da er forskjellen mellom inntekter og kostnader størst.
- Inntektene er størst når det produseres 55 enheter per dag, men det er ikke denne produksjonsmengden som gir størst overskudd.

Vi kan også bruke derivasjon til å finne den produksjonen som gir størst overskudd per dag.

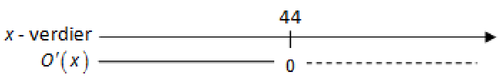
Vi deriverer overskuddsfunksjonen

$$\begin{aligned} O(x) &= -0,021x^3 - 6,019x^2 + 647,79x - 2992 \\ O'(x) &= 0,021 \cdot 3x^2 - 6,019 \cdot 2x + 647,79 \\ O'(x) &= -0,063x^2 - 12,038x + 647,79 \end{aligned}$$

Vi setter den deriverte funksjonen lik null

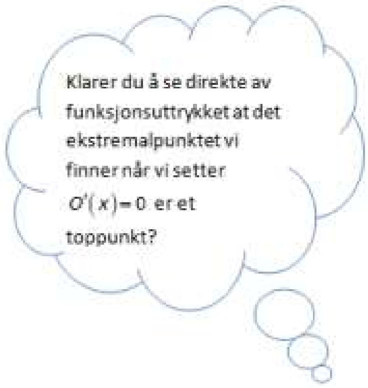
$$\begin{gathered} O'(x) = 0 \\ -0,063x^2 - 12,038x + 647,79 = 0 \\ x = 44 \end{gathered}$$

Vi lager en fortegnslinje og ser at der $x = 44$ har grafen til $O$ et toppunkt.




Dette betyr at overskuddet er størst når det produseres 44 enheter per dag. Overskuddet er da

$$O(44) = -0,021 \cdot 44^3 - 6,019 \cdot 44^2 + 647,79 \cdot 44 - 2992 = 12069$$




Dette stemmer godt med det vi fant grafisk.

Økonomer snakker også om **grenseinntekter** og **grensekostnader**. Til en gitt dagsproduksjon er grensekostnaden hva det koster å produsere **én ekstra enhet**.

Den deriverte til kostnadsfunksjonen i et punkt er lik stigningstallet til tangenten til grafen i punktet. Den deriverte verdien i et punkt gir derfor en god tilnærmet verdi av hva det koster å produsere én ekstra enhet.

Tilsvarende gir grenseinntekten en god tilnærmet verdi for hva de økte inntekter blir ved produksjon av én ekstra enhet.

Hvis grenseinntekten er større enn grensekostnaden ved en gitt produksjon, lønner det seg å øke produksjonen.

Vi vil undersøke om det lønner seg å øke produksjonen når det produseres 50 enheter per dag.

Vi må da derivere kostnads- og inntektsfunksjonene, og finne den deriverte for hver av funksjonene når $x = 50$.

$$\begin{aligned} I'(x) &= 660 - 12x \\ I'(50) &= 660 - 12 \cdot 50 = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(x) &= 0,063x^2 + 0,038x + 12,21 \\ K'(50) &= 0,063 \cdot 50^2 + 0,038 \cdot 50 + 12,21 = 169 \end{aligned}$$

Grensekostnaden er betydelig høyere enn grenseinntekten når $x = 50$. Det vil ikke lønne seg å øke produksjon når det produseres 50 enheter per dag.

(Eksemplet bygger på en oppgave fra eksamen S1, Høsten 2008.)

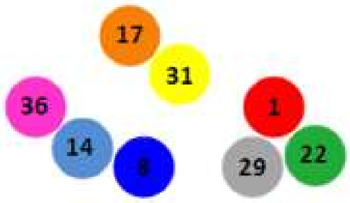
# Sannsynlighet

## Teori

### Innledning

Innledning (103534)

**Kombinatorikk** handler blant annet om å finne metoder for å telle opp **antall mulige kombinasjoner av objekter**.




Hvor mange forskjellige lottorekker er det for eksempel mulig å fylle ut?
Hvor mange forskjellige pokerhender finnes det?
Hvor mange forskjellige koder kan du lage av fire bokstaver?

Vi må finne svar på slike spørsmål dersom vi skal kunne beregne sjanser for å vinne i spill eller fortelle noe om hvor sikkert et passord er.

I dette kapittelet skal vi se mer på hvordan **systematiske opptellinger av antall mulige kombinasjoner kan være til hjelp når vi skal beregne sannsynligheter**.

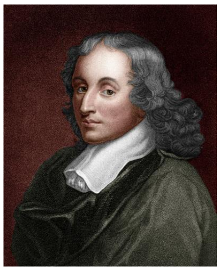
I et moderne samfunn brukes ofte sannsynlighetsregning for å gjøre beregninger og lage prognoser som skal danne grunnlag for beslutninger.

# Pascals talltrekant

[Pascals talltrekant (103549)](#)

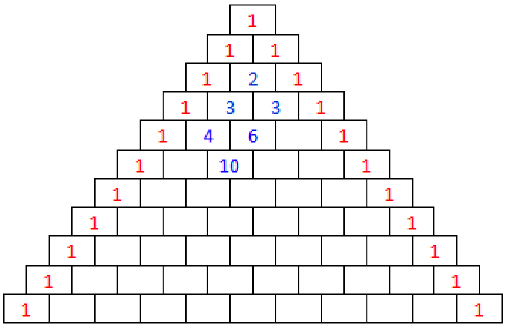
Blaise Pascal var en kjent fransk matematiker som levde på 1600-tallet. En spesiell talltrekant har fått navnet etter Pascal selv om trekanten var kjent i mange hundre år før Pascal levde.

Du skal bli kjent med Pascals talltrekant gjennom noen oppgaver.



Blaise Pascal (1623 – 1662). Fransk matematiker, fysiker, oppfinner og filosof.

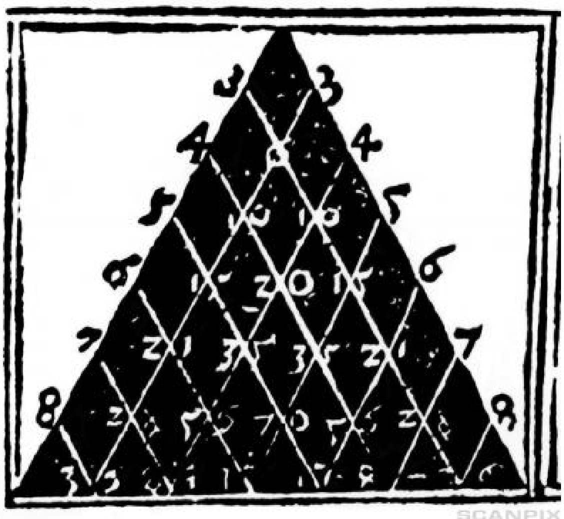
## Oppgave 1




Lag en trekant av ruter som figuren ovenfor viser. Skriv inn tallet 1 i alle rutene langs kanten av trekanten.

Vi har begynt å fylle inn tall i resten av rutene. Ser du hvordan vi har funnet disse tallene? Fortsett etter samme mønster og fyll inn tall i alle rutene.

I trekanten ovenfor har vi valgt å lage 11 rader. Trekanten kan utvides etter samme mønster.



Pascals trekant. Fra en tysk regnebok utgitt i 1527. Her er 1-tallene langs kantene ikke tatt med. Ser du ellers at tallene i trekanten er de samme som du fant ovenfor?

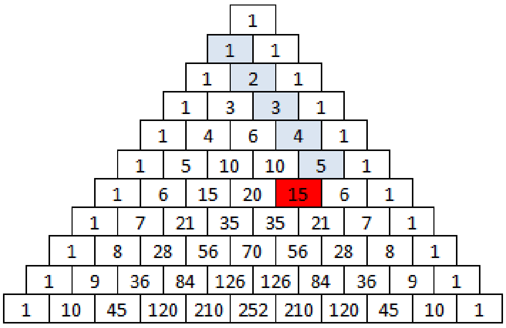
## Oppgave 2

a) Se på skrå nedover fra det første 1-tallet i rad nummer to i Pascals trekant. Hvilken tallrekke ser du?

b) Hvordan kan du bruke trekanten til å finne svar på regneoppgavene nedenfor?

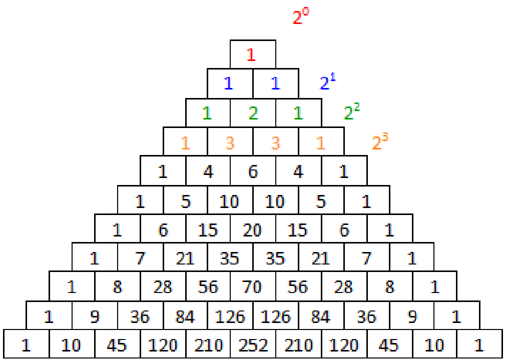
1) 1 + 2 =
2) 1 + 2 + 3 =
3) 1 + 2 + 3 + 4 =
4) 1 + 2 + 3 + 4 +5 +6 + 7 + 8 + 9 =

(Se på tallene som er markert i trekanten til høyre dersom du trenger et hint.)




## Oppgave 3

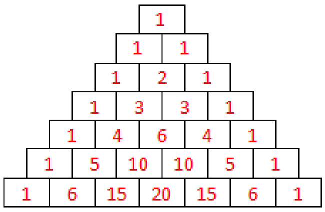
Legg sammen tallene i hver rad. Skriv svarene på potensform. Ser du et mønster?




## Oppgave 4

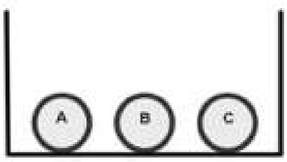
En sum av to ledd kalles et **binom**. Bruk et digitalt verktøy og regn ut binomet $(a + b)^n$, hvor $n \in [0, \rightarrow\rangle$ som vist nedenfor. Studer koeffisientene, og sammenlikn med tallene i Pascals talltrekant.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a+1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$
$$(a+b)^6 = 1a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+1b^6$$




## Oppgave 5

I en hatt ligger det tre kuler merket med A, B og C.




Dersom du skal trekke ut én kule fra hatten, har du tre muligheter. Du kan trekke A, B eller C.

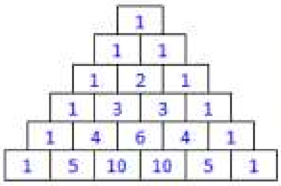
Det finnes også tre måter å trekke ut to kuler på. Du kan trekke ut A og B, A og C eller B og C.

Det finnes bare én måte å trekke ut tre kuler på, nemlig at du trekker alle kulene A, B og C. Vi kan også si at det bare finnes én måte å trekke ut null kuler på. Du kan la være å trekke.

Vi lar det først ligge null kuler i hatten, så én kule, to kuler, deretter tre kuler osv. I hvert tilfelle undersøker vi, som ovenfor, hvor mange kombinasjoner vi kan lage av null kuler, én kule, to kuler osv.

Fyll ut tabellen nedenfor.

| Elementer i hatten | Antall elementer i uttrekk | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | Antall uttrekk | | | | | |
| Ingen | 1 | | | | | |
| A | 1 | 1 | | | | |
| A B | 1 | 2 | 1 | | | |
| A B C | | | | | | |
| A B C D | | | | | | |
| A B C D E | | | | | | |




# Binomialkoeffisienter

Binomialkoeffisienter (103650)

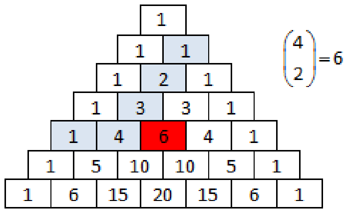
I oppgaven på forrige side i menyen så du at vi kan trekke ut to kuler fra en hatt med fire kuler på seks ulike måter.

Elin har fire armbånd i en skuff. En dag vil hun gå med to av disse armbåndene. Hvor mange kombinasjonsmuligheter har hun?

En fotballtrener disponerer fire spisser. Han skal bruke to i en kamp. På hvor mange måter kan han komponere spissparet?

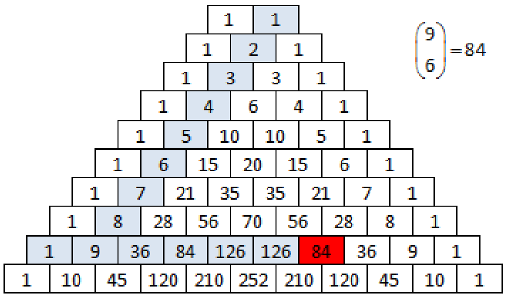
Ser du at tenkemåten blir den samme her?

Vi kan trekke to kuler fra fire kuler, to armbånd fra fire armbånd eller to spisser fra fire spisser på seks ulike måter.




I Pascals trekant kan du følge «blå skråkurve» fra toppen og telle deg ned til tallet fire. I denne raden starter du fra venstre og teller ruter fra null og inn til to. Du havner da i den ruten som er markert med rødt og finner tallet seks.

En volleyballtrener har ni spillere i troppen og skal ta ut et lag påseks spillere. Hvor mange ulike lag kan han sette sammen?

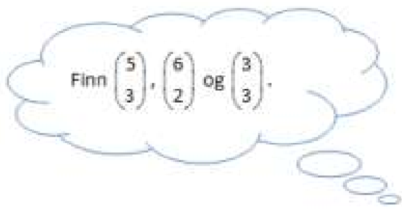



I Pascals talltrekant følger vi «blå skråkurve» fra toppen og teller oss ned til tallet ni.
I denne raden starter vi fra venstre, teller ruter fra null og inn til seks, og havner i den ruten som er markert med rødt.
Det betyr at det er 84 mulige måter å sette sammen volleyballaget på.

Vi kan trekke to elementer fra en mengde på fire elementer på seks ulike måter.

Dette kan vi skrive slik

$$\binom{4}{2} = 6$$




$\binom{4}{2}$ leser du som «4 over 2».

På samme måte er

$$\binom{9}{6} = 84$$

$\binom{4}{2}$ og $\binom{9}{6}$ kalles **binomialkoeffisienter**.

$\binom{n}{r}$ er binomialkoeffisienten av *n* og *r* og leses som « *n* over *r* ».

En annen skrivemåte er $\mathrm{nCr}$. $C$ står her for kombinasjoner (engelsk combinations).

Tallet ***n*** står for **antallet elementer totalt**, og tallet ***r*** står for **antallet elementer i utvalget**.
I Pascals trekant står ***n*** for **radnummer** når første rad har nummer null, og ***r*** står for **nummer på ruten i raden** når man starter fra venstre og teller ruter fra null og innover.

Dersom vi bruker binomialkoeffisienter, kan vi fylle ut radene i Pascals trekant på denne måten

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

Vi trenger ikke tegne Pascals talltrekant for å finne antall kombinasjonsmuligheter. Tallene i Pascals trekant er innebygget i de fleste digitale verktøy.

I GeoGebra er kommandoen $\mathbf{nCr}[<\mathbf{Tall}>,<\mathbf{Tall}>]$ hvor det første taliet er *n* og det andre tallet er *r*.

Senere i dette kapittelet skal du også lære hvordan du kan regne ut binomialkoeffisientene uten å bruke digitale verktøy.


Hvor mange ulike lottorekker finnes det?

Når du fyller ut én lottorekke, velger du sju tall. Det laveste tallet du kan velge, er 1, og det høyeste er 34.

Hvor mange ulike lottorekker finnes det?

# Kombinatorikk

[Kombinatorikk (103692)](Kombinatorikk (103692))

2B har vunnet en reise for seks personer. I klassen er  det elever. Alle elevene ønsker å reise, derfor bestemmer læreren at de seks elevene som får dra, skal trekkes ut tilfeldig. Kåre og Janne går i 2B. De er kjærester. De er litt bekymret og lurer på hva sannsynligheten er for at bare én av dem får være med på turen.

Hva er sannsynligheten for at bare en av de to kjærestene får være med på turen?

Alle elevene har like stor sjanse for å bli trukket ut. Vi har en uniform sannsynlighetsmodell.


Den blå rammen nedenfor har vi hentet fra kapittelet om sannsynlighetsregning i 1T.

I en **uniform sannsynlighetsmodell** er alle utfall like sannsynlige.

**Sannsynligheten** for en hendelse *A* er gitt ved

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

Kåre og Janne er interessert i sjansene for hendelsen «at bare én av dem blir trukket ut». De vil da vite hvor mange gunstige utfall det er for denne hendelsen, og hvor mange mulige utfall det er.
Hvor mange kombinasjoner av seks elever kan vi lage ut fra 25 elever, og hvor mange av disse er bare én av de to kjærestene med i?

**Kombinatorikk** er et område innenfor matematikken som kan hjelpe oss med slike telleproblemer.

Du skal snart lære hvordan vi kan finne antall mulige kombinasjoner, men først skal vi se på noen viktige begreper i kombinatorikken.

# Viktige begreper i kombinatorikk

[Viktige begreper i kombinatorikk (103698)]

## Ordnet og uordnet utvalg

Tenk deg at vi fra en klasse på 30 elever skal trekke ut tre elever til skolelaget i fotball. Vi gir alle elevene et nummer fra 1 til 30, legger 30 lapper nummerert fra 1 til 30 i en hatt og trekker så ut tre lapper. Det er likegyldig om vi trekker rekkefølgen 3, 5 og 7, eller om vi først trekker nummer 7, så nummer 5 og så elev nummer 3. Det blir elevene nummerert som 3, 5 og 7 som blir tatt ut på laget.

Er det derimot et lotteri hvor den første som trekkes ut, vinner førstepremien, den andre som trekkes ut, vinner andrepremien og den tredje vinner tredjepremien, betyr rekkefølgen noe. Da er det ikke likegyldig om vi trekker 3, 5 og 7, eller om vi trekker 7, 5 og 3.

Dersom rekkefølgen til tallene ikke har noen betydning, har vi et **uordnet utvalg**. Dvs. at 3, 5, 7 er det samme som 3, 5, 7.

Dersom rekkefølgen har noe å si, er 3, 5, 7 forskjellig fra 7, 3, 5 og vi har et **ordnet utvalg**.

## Med og uten tilbakelegging

I klasselotteriet ovenfor må vi bestemme oss for om samme elev kan vinne flere premier. Hvis det skal være mulig, må vi legge tilbake lappen vi har trukket ut før vi trekker neste. Hvis det ikke skal være mulig å vinne flere premier, legger vi ikke tilbake en lapp som er trukket ut.

Dersom du ikke kan trekke en lapp mer enn en gang, har vi et **utvalg uten tilbakelegging**.

Dersom du kan trekke den samme lappen to ganger eller mer, har vi et **utvalg med tilbakelegging**.

## Produktregelen for kombinasjoner

Tenk deg at du skal kjøpe ny mobiltelefon, og at det finnes to produsenter å velge mellom. Hver av disse produsentene har tre modeller, og hver modell kan fås i fire farger. Hvor mange forskjellige mobiltelefoner kan du ende opp med?

For hver produsent kan du velge tre modeller.
Det gir $2 \cdot 3$ kombinasjonsmuligheter.

For hver av disse mulighetene kan du velge fire farger. Antall kombinasjonsmuligheter totalt blir da $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Du kan ende opp med 24 forskjellige mobiltelefoner.

**Produktregelen for kombinasjoner**

Når vi skal foreta **to valg etter hverandre**, og det er *m* valgmuligheter i første valg og *n* muligheter i andre valg, er det til sammen

$m \cdot n$ kombinasjonsmuligheter

Dersom vi fortsetter med **flere valg**, fortsetter vi å multiplisere med antall muligheter.

## Fakultet

**Produktet av alle naturlige tall fra 1 til *n* kaller vi *n*-fakultet**. Som symbol bruker vi **utropstegn**. Utropstegnet setter vi etter tallet. For eksempel skriver vi 3-fakultet som 3! , og vi har at $\mathbf{3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6}$. Vi definerer 0-fakultet til å være lik 1.

**Definisjon**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot n$$

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1$$

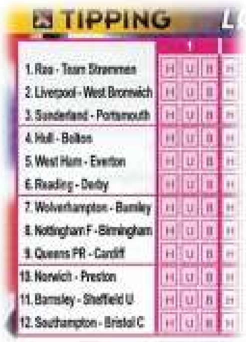
Definisjonen av *n*-fakultet som produktet av alle naturlige tall fra 1 til *n* har ingen mening for $n = 0$. Du skal senere se at definisjonen av 0! som tallet 1 gjør det mulig å lage gunstige formler i kombinatorikken.

## Tre ulike typer utvalg

[Tre ulike typer utvalg (103707)](#)

### 1. Ordnet utvalg med tilbakelegging


Tenk deg at du skal fylle ut en tippekupong med tolv fotballkamper helt tilfeldig. Du legger tre lapper i en hatt. På den ene lappen står det H for hjemmeseier, på den andre står det U for uavgjort, og på den tredje lappen står det B for borteseier.




Den første lappen du trekker, skal angi resultatet i kamp nummer 1. Lappen må så legges tilbake i hatten før resultatet i kamp nummer 2 trekkes. Vi har derfor et utvalg med tilbakelegging. Det betyr også noe hvilken rekkefølge lappene trekkes i. Det er ikke likegyldig om du først trekker H og så U, eller om du først trekker U og så H. Det vil si at utvalget er ordnet.

Vi har da **et ordnet utvalg med tilbakelegging**. Etter produktregelen for kombinasjoner blir antall kombinasjonsmuligheter da lik $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{12}$

> Antall kombinasjonsmuligheter av et **ordnet utvalg med tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt ved $n^r$.

### 2. Ordnet utvalg uten tilbakelegging


I en klasse med 30 elever skal vi velge et styre bestående av leder, nestleder og sekretær. Vi velger først leder. Da har vi 30 mulige utfall. Så velger vi nestleder. Da er det 29 elever igjen å velge mellom siden lederen ikke også kan være nestleder. For hver av de 30 mulige lederne kan vi få 29 mulige nestledere, altså 30·29 kombinasjonsmuligheter. Til slutt velger vi sekretær. Da er det 28 elever igjen å velge mellom (28 lapper igjen i hatten).

Siden rekkefølgen betyr noe, og en person ikke kan inneha flere verv, har vi altså **et ordnet utvalg uten tilbakelegging**.

Produktregelen sier at antall mulige styresammensetninger blir 30·29·28. Dette kan også skrives som

$$30 \cdot 29 \cdot 28 = 30 \cdot (30-1) \cdot (30-2) = 30 \cdot (30-1) \cdot (30-3+1)$$

Vi tenker nå at vi skal velge et styre på *r* antall elever ut fra en gruppe *n* på elever. Kriteriene er de samme som ovenfor. Antall mulige styresammensetninger blir da

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

Formelen blir mer «brukervennlig» hvis vi multipliserer med $(n-r)!$ i teller og nevner. Da får vi nemlig n-fakultet i teller.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!)}{1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Antall kombinasjonsmuligheter i disse situasjonene betegnes med $\mathrm{nPr}$ hvor IP står for permutasjoner.

Antall mulige kombinasjoner for et **ordnet utvalg uten tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt ved

$$\mathbf{nPr} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

I GeoGebra er kommandoen $\mathbf{nPr}[<\mathbf{Tall}>, <\mathbf{Tall}>]$ hvor det første tallet er *n* og det andre tallet *r*.

Formelen må også gjelde for det tilfelle at *r* = *n*. Da er (*n* - *r*)! = 0! Dette krever en definisjon av 0!. Ved å definere 0! = 1, blir formelen rett også for det tilfelle at *r* = *n*.

Når *r* = *n*, er

$$\mathbf{nPr} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Dette vil for eksempel gjelde dersom vi skal finne ut hvor mange rekkefølger elever i en klasse kan stille seg opp i.

### 3. Uordnet utvalg uten tilbakelegging

I en klasse med 30 elever skal vi nå bare velge et styre bestående av tre elever. Rekkefølgen på de som blir trukket ut betyr ikke noe. En person kan ikke inneha flere verv. Vi har da en situasjon med **et uordnet utvalg uten tilbakelegging**.

Dersom dette hadde vært et ordnet utvalg uten tilbakelegg, slik som i forrige eksempel, ville antall kombinasjoner vært gitt ved

$$\mathbf{nPr} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = 30 \cdot 29 \cdot 28$$

I dette tilfellet, når rekkefølgen ikke har noen betydning, faller det bort noen kombinasjoner. Når vi trekker ut tre elever, kan disse tre elevene kombineres på 3·2·1 = 3! = 6 ulike måter. Disse seks kombinasjonene innholder de samme tre elevene. Når rekkefølgen ikke har noe å si, er disse seks kombinasjonene like.

Vi får derfor $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}$ kombinasjonsmuligheter i dette tilfellet.

Generelt får vi at antall mulige kombinasjoner for et uordnet utvalg uten tilbakelegging av elementer fra elementer er gitt med formelen

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Vi så under kapitlet «Binomialkoeffisienter» eksempler på utvalg hvor binomialkoeffisienter fra Pascals talltrekant ga antall kombinasjonsmuligheter. Alle disse eksemplene var nettopp **uordnede utvalg uten tilbakelegging**. Du husker kanskje eksemplene med lotto og laguttak.

Vi husker skrivemåtene for binomialkoeffisientene *nCr* som $\binom{n}{r}$ og , som leses «*n* over *r*».

Vi har nå funnet en formel for binomialkoeffisienten som vi kan bruke til å regne «for hånd» som et alternativ til å sette opp Pascals talltrekant. Dette er nyttig på del 1 av eksamen.

Antall mulige kombinasjoner for et **uordnet utvalg uten tilbakelegging** av *r* elementer fra *n* elementer er gitt med formelen

$$\binom{n}{r} = \mathbf{nCr} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

I GeoGebra er kommandoen $\mathbf{nCr}[<\mathbf{Tall}>, <\mathbf{Tall}>]$ hvor det første tallet er *n* og det andre tallet *r*.

# Oppsummering

Oppsummering (103720)

## Eksempel

Vi kan oppsummere de tre ulike situasjonene vi har sett på tidlegere, med et eksempel.

Vi trekker to lapper fra en hatt med seks lapper nummerert fra 1 til 6.
Alle kombinasjonsmulighetene er illustrert i en tabell.

| 2. trekk \ 1. trekk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) |
| 2 | (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) |
| 3 | (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) |
| 4 | (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) |
| 5 | (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) |
| 6 | (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) |

- **Et ordnet utvalg med tilbakelegg** vil si alle kombinasjonene i tabellen.
  Vi kan finne antall kombinasjoner ved regning

$$n^r = 6^2 = 36$$

- **Et ordnet utvalg uten tilbakelegg** gir kombinasjonene i de røde og blå rutene i tabellen.
  Kombinasjonene i de grå rutene faller bort.
  Vi kan igjen finne antall kombinasjoner ved regning

$$\mathrm{nPr} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 6 \cdot 5 = 30$$

- **Et uordnet utvalg uten tilbakelegg** gir kun 15 kombinasjoner. Kombinasjonene i de grå rutene faller bort, og kombinasjonene i de røde og de blå rutene blir identiske fordi for eksempel $(1,2) = (2,1)$.
  Antall kombinasjoner ved regning

$$6\mathrm{C}2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2!\cdot \cancel{4!}} = \frac{30}{2} = 15$$

De tre ulike situasjonene er oppsummert i tabellen nedenfor.

| Et utvalg på $r$ elementer fra $n$ elementer | Ordnet utvalg (Rekkefølgen betyr noe) | | Uordnet utvalg (Rekkefølgen betyr ikke noe) |
|---|---|---|---|
| | Med tilbakelegging | Uten tilbakelegging | Uten tilbakelegging |
| Eksempel | - Fotballtipping<br>- Nummerskilt på biler<br>- Koder og passord | - Valg av leder, nestleder og sekretær | - Lotto<br>- Laguttak<br>- Valg av styre |
| Formel for antall kombinasjoner | $n^r$ | $nPr = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$<br>$= \frac{n!}{(n-r)!}$ | $nCr = \binom{n}{r} = \frac{nPr}{r!}$<br>$= \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ |
| Excel | | PERMUTER$(n\,;r)$ | KOMBINASJON$(n\,;r)$ |
| GeoGebra | | $n$Pr | $nCr$ |

# Sannsynlighetsberegninger

[Sannsynlighetsberegninger (103740)](#)

I tidligere avsnitt har vi setningen nedenfor

> I en uniform sannsynlighetsmodell er alle utfall like sannsynlige.
>
> Sannsynligheten for en hendelse *A* er gitt ved
>
> $$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\text{antall} \quad \text{gunstige} \quad \text{utfall} \quad \text{for} \quad A}{\text{antall} \quad \text{mulige} \quad \text{utfall}}$$

Nå skal vi se hvordan vi kan beregne sannsynligheter i uniforme sannsynlighetsmodeller ved å bruke setningen ovenfor sammen med det vi har lært om kombinatorikk.

## Eksempel 1

Vi fyller ut en tippekupong med tolv fotballkamper helt tilfeldig.

Hva er sannsynligheten for å få rette?


**Løsning**
Vi har et ordnet utvalg med tilbakelegging.
Antall mulige kombinasjoner er

$$n^r = 3^{12} = 531441$$

Vi definerer hendelsen *A* .

*A*: Vi får 12 rette

Det er bare én rekke som gir 12 rette.

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{1}{3^{12}} = \frac{1}{531441} \approx 1,9 \cdot 10^{-6}$$

## Eksempel 2

I klasse 1B er det 30 elever. Klassen skal velge leder og nestleder til klasserådet. Den første som blir trukket ut, blir leder. Hva er sannsynligheten for at Åse blir leder og Adrian nestleder?

**Løsning**
Vi har et ordnet utvalg uten tilbakelegging. Antall mulige kombinasjoner er

$$30 \ P \ 2 = 30 \cdot 29 = 870$$

Vi definerer hendelsen *A* .

*A*: Åse blir leder og Adrian nestleder.

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{1}{30 \ P \ 2} = \frac{1}{870} \approx 0,001$$

## Eksempel 3

Til høyre ser du en lottokupong. Når du fyller ut én lottorekke, velger du sju tall. Det laveste tallet du kan velge, er 1 og det høyeste er 34.

Hva er sannsynligheten for å få sju rette i Lotto når du leverer inn én lottorekke?


Hva er sannsynligheten for å få sju rette i Lotto når du leverer inn én lottorekke?

**Løsning**

Vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging.

Antall mulige lottorekker er

$$34\,C\,7 = \binom{34}{7} = 5\;379\;616$$

Vi definerer hendelsen $A$.

$A$: Få 7 rette i lotto.

Sannsynligheten for $A$ blir

$$P(A) = \frac{1}{\binom{34}{7}} = \frac{1}{5379616} \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$$

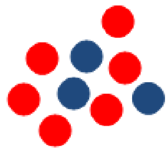
# Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell

Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell (103756)

Når vi skal ta et **tilfeldig utvalg** fra **en mengde med to ulike elementer**, får vi en sannsynlighetsfordeling som vi kaller hypergeometrisk.

## Eksempel

Det ligger ni kuler i en boks. Tre av kulene er blå. Resten er røde. Vi skal trekke fem kuler fra boksen tilfeldig.



Hva er sannsynligheten for at vi trekker to blå og tre røde kuler?

Vi må her regne med at utvalget fra boksen er uordnet (rekkefølgen betyr ikke noe), og vi har ikke tilbakelegging. Antall mulige måter å trekke 5 kuler fra boksen på, er

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\cdot(9-5)!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4!}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4!}} = 3\cdot 2\cdot 7\cdot 3 = 63\cdot 2 = 126$$

Hvor mange gunstige måter finnes det?

Vi skal trekke to blå kuler av i alt tre blå kuler.

Dette kan gjøres på $\binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ forskjellige måter.

Vi skal trekke tre røde kuler av i alt seks røde kuler.

Dette kan gjøres på $6\mathrm{C}3 = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 2\cdot 5 = 20$ forskjellige måter.

Etter produktregelen for kombinasjoner er det da $3\cdot 20 = 60$ forskjellige gunstige måter å trekke ut tre røde og to blå kuler på.

Vi definerer hendelsen *A*.

*A*: Av de fem uttrukne kulene er to blå og tre røde

Sannsynligheten for *A* blir

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{9}{5}} = \frac{3\cdot 20}{126} \approx 0,476$$

Mange situasjoner fra virkeligheten tilsvarer i prinsippet denne situasjonen med kuler.

En skoleklasse består av noen jenter og noen gutter. Når vi fra klassen skal trekke et utvalg på et bestemt antall elever, har vi en typisk hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Vi kan da regne som i eksemplet ovenfor og beregne sannsynligheter for fordeling av gutter og jenter i utvalget.

I Vurderingsveiledningen fra Utdanningsdirektoratet finner du en oversikt over «Formler som forutsettes kjent ved Del 1 av eksamen i Matematikk S1». Her står det at dersom hypergeometrisk fordeling inngår i Del 1 av eksamen, vil aktuell formel bli oppgitt som vist nedenfor.

Hypergeometrisk fordeling

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Formelen kan forstås på følgende måte:

Vi har en mengde med $n$ elementer (for eksempel 9 kuler i en boks). $m$ av disse elementene er av en type (3 av kulene er blå), og $n - m$ av elementene er av en annen type (9 – 3 = 6, kuler er røde).

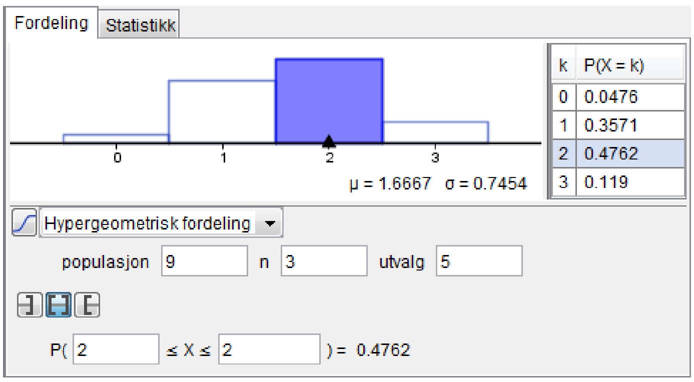
Vi skal trekke $r$ elementer tilfeldig. (Vi trekker 5 kuler tilfeldig.)

La $x$ være antall av de uttrukne kuler som er blå. Vi kan da finne sannsynligheten for at X = 2 slik

$$P(X=2)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{9-3}{5-2}}{\binom{9}{5}}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{9}{5}}=0,476$$

Formelen er altså en generell oppskrift som alltid kan brukes når vi har hypergeometriske sannsynlighetsfordelinger.

Du kan velge «Hypergeometrisk fordeling» i sannsynlighetskalkulatoren til GeoGebra.
Her kalles samlet antall elementer for «populasjon». Det svarer til $n$ i formelen fra Udir.
Antall elementer av «en spesiell type» kalles for $n$. OBS! Det svarer til $m$ i formelen fra Udir.
Antall elementer som trekkes ut kalles for «utvalg». Det svarer til $r$ i formelen fra Udir.
Bokstaven $X$ betegner også her antall elementer i utvalget som er av «en spesiell type».




Vi finner også nå at i eksemplet ovenfor, så er sannsynligheten for at X=2 lik 0,476.

Vi kan også tenke på denne måten dersom vi skal ta et utvalg fra en mengde som inneholder mer enn to ulike typer elementer.

## Eksempel

Elevrådet ved en skole består av åtte elever fra Vg1, seks elever fra Vg2 og to elever fra Vg3. Seks elever fra elevrådet skal være med å arrangere OD-dagen. De seks elevene velges ut tilfeldig.

Finn sannsynligheten for at to elever fra hvert klassetrinn blir valgt ut.

2 av de 8 fra Vg1 — 2 av de 6 fra Vg2 — 2 av de 2 fra Vg3

$$P(\text{2 elever fra hvert klassetrinn blir valgt ut}) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{16}{6}} = \frac{28\cdot 15\cdot 1}{8008} \approx 0{,}052$$

Til sammen 6 av de 16

Legg merke til at $8+6+2=16$ og $2+2+2=6$.

Du vil alltid kunne summere på denne måten dersom du har satt opp uttrykket på rett måte!

**Du kan alltid tenke på denne måten når du arbeider med oppgaver der et utvalg skal trekkes fra en mengde hvor elementene kan deles inn i grupper etter visse kriterier.**

Vi avslutter med et eksempel hentet fra en eksamensoppgave. Som du ser, kan vi nå finne sannsynligheten for at bare én av to kjærester får være med på tur!

### Eksempel

I klassen til Kåre, Janne og Ane er det 15 jenter og 10 gutter.
Klassen har vunnet en tur til Hellas for 6 elever. De elevene trekkes ut ved loddtrekning.

1) Finn sannsynligheten for at Ane får være med på turen.
2) Finn sannsynligheten for at akkurat 3 jenter og 3 gutter får være med på turen.

Kåre og Janne er kjærester.

3) Finn sannsynligheten for at bare én av dem får være med på turen.

(Eksamen 2T, Høsten 2009)

**Løsning**

$$P\left(\text{Ane får være med på turen}\right) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{24}{5}}{\binom{25}{6}} = 0{,}240$$

Her kunne vi også funnet svaret ved å tenke «gunstige delt på mulige»

$$P\left(\text{Ane får være med på turen}\right) = \frac{g}{m} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

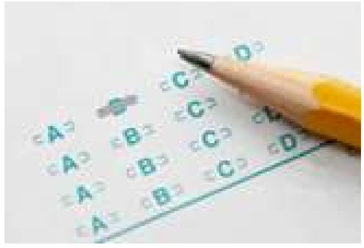
$$P\left(\text{3 jenter og 3 gutter får være med}\right) = \frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}308$$

$$P\left(\text{Bare en av de to kjærestene får være med}\right) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{23}{5}}{\binom{25}{6}} \approx 0{,}380$$

# Binomisk sannsynlighetsmodell

[Binomisk sannsynlighetsmodell (103796)](#)

Tenk deg at du får en matematikkprøve med fire oppgaver. Hver oppgave har fire svaralternativer, og du skal krysse av for riktig svaralternativ.



Du er ikke forberedt, og alle svaralternativene virker like sannsynlige. Vi regner med uavhengighet. Det vil si at hva du svarer på en oppgave, ikke påvirker svaret ditt på den neste.

Du krysser av helt tilfeldig. Sannsynligheten for å svare riktig på en oppgave er da $\frac{1}{4}$, og sannsynligheten for å svare galt er $\frac{3}{4}$.

Hva er sannsynligheten for å få null, ett, to, tre og fire riktige svar?

Det er bare én måte du kan få fire riktige svar på.

$$P\,(\mathrm{RRRR}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

Det er også bare én måte du kan få null riktige svar på.

$$P\,(\mathrm{GGGG}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

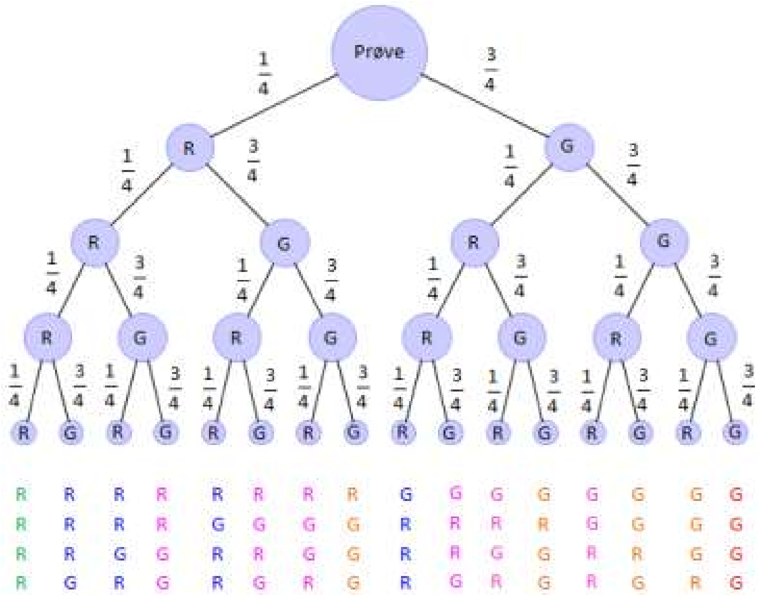
Men, hvor mange måter kan du få to riktige svar på?

Sannsynligheten for å svare riktig på det to første oppgavene (og galt på de to neste) er

$$P\,(\mathrm{RRGG}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Men, det er flere måter å få to riktige svar på. Du kan for eksempel svare riktig på de to siste oppgavene *GGRR*, på første og siste oppgave *RGGR* osv.

For å telle opp antall måter, kan du lage et valgtre.




Valgtreet ovenfor viser hvor mange måter du kan få null, ett, to, tre og fire riktige svar på. Vi teller opp og samler resultatene i en tabell.

| Antall rette | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Antall måter | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| Antall måter | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ |


At binomialkoeffisientene dukker opp her er ikke så underlig. Å finne antall måter å få to rette svar på er det samme som å finne antall måter vi kan velge to plasser av fire hvor det skal stå *R*.

Dette blir samme problemstilling som å regne ut hvor mange måter vi kan velge ut 11 spillere fra en spillerstall på 20, 7 av 34 tall på en lottokupong osv.

I Tre ulike typer utvalg (avsnitt 3.2) så du at vi kan bruke binomialkoeffisienter for å regne ut antall kombinasjoner ved denne typen utvalg. Vi får altså at

$$P\,(\text{To riktige svar}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

På samme måte vil da

$$P\,(\text{Tre riktige svar}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^1$$

Det gjelder helt generelt. Vi antar at vi har en prøve med *n* oppgaver som besvares helt uavhengig av hverandre. For hver oppgave er det to muligheter, enten svarer vi riktig eller så svarer vi galt.

Sannsynligheten for å svare riktig er lik hele tiden. Vi kan kalle denne sannsynligheten for *p*.

Da blir sannsynligheten for å svare galt på en oppgave lik 1 – *p*, og vi får at

$$P\,(k \text{ riktige svar}) = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Sammensatte forsøk som for eksempel å besvare flervalgsprøven ovenfor kaller vi binomiske forsøk. Nedenfor finner du en oppsummering som viser hva som kjennetegner binomiske forsøk.

**Binomisk forsøk og binomisk sannsynlighet**

I et binomisk forsøk har vi *n* delforsøk.

Eksempel: Svare på fire oppgaver, *n* = 4

- Alle delforsøkene har to mulige utfall, $A$ eller $\overline{A}$ (ikke A).
  Eksempel: Riktig eller galt svar på en oppgave

- Sannsynligheten for *A* er den samme hele tiden. Vi setter $p = P(A)$. Da er $P\left(\overline{A}\right) = 1 - p$.
  Eksempel: $P(\text{Riktig svar}) = \frac{1}{4}$ og $P(\text{Galt svar}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- De enkelte delforsøkene er uavhengige.

La *X* være antall ganger *A* inntreffer.

Sannsynligheten for at *A* skal inntreffe *k* ganger er da gitt ved:

Eksempel: Sannsynligheten for et bestemt antall riktige svar

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ «*n* over *k*» kaller vi binomialkoeffisienten.

Eksempel: Sannsynligheten for å svare riktig på to av fire oppgaver når hver oppgave har fire svaralternativer er

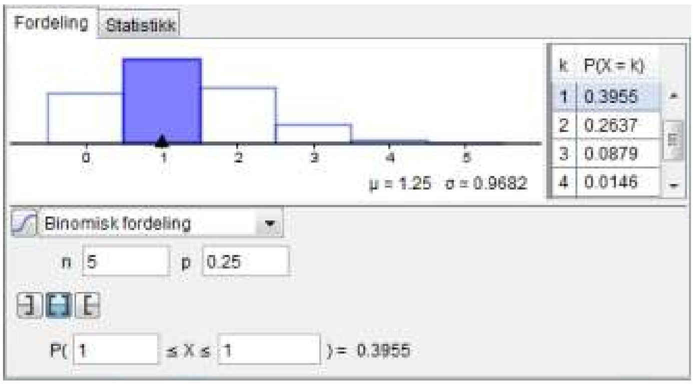
$$P(\text{To riktige svar}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Å kaste en terning et bestemt antall ganger, og se om vi får sekser eller ikke på hvert enkelt kast, er et annet eksempel på et binomisk forsøk. Vi kan bruke formelen ovenfor til å beregne sannsynligheten for å få et bestemt antall seksere.

Å kaste en mynt et bestemt antall ganger og se om vi får «kron» eller «mynt» på hvert enkelt kast, er et også et eksempel på et binomisk forsøk. Vi kan bruke formelen ovenfor til å beregne sannsynligheten for å få et bestemt antall «kron».

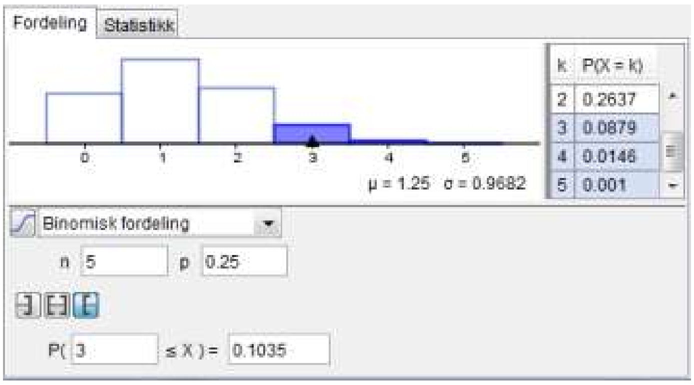
Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra for å regne ut binomisk sannsynlighet.

En flervalgsprøve har fem oppgaver med fire svaralternativer på hver oppgave. Du besvarer flervalgsprøven ved ren gjetning.
Du skal finne sannsynligheten for å svare riktig på akkurat én av oppgavene. Du velger «Binomisk fordeling» og fyller inn som vist nedenfor




Skjermbilde fra GeoGebra: Sannsynligheten er 0,3955.

Sannsynligheten for å få mer enn to riktige svar




Skjermbilde fra GeoGebra: Sannsynligheten er 0,1035.

## Førerprøven

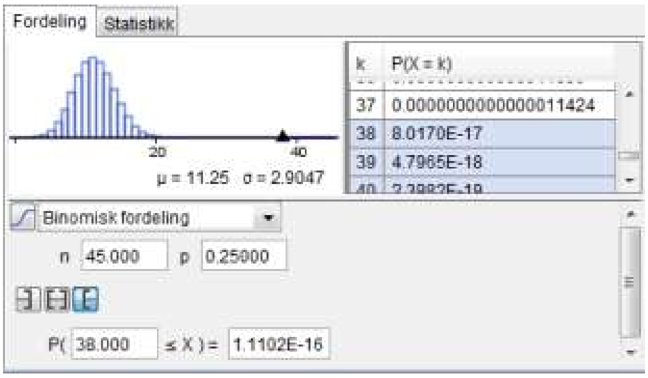
Førerprøven (103815)

Når du skal opp til den teoretiske førerprøven for bil, får du 45 spørsmål. Hvert spørsmål har fire svaralternativer. For å bestå prøven må du ha minst 38 riktige svar.
Hva blir sannsynligheten for å bestå prøven med ren gjetning på alle spørsmålene?

Førerprøven omfatter i de fleste klasser både en teoretisk og en praktisk prøve. Du må bestå teoriprøven før du kan ta den praktiske prøven!

Ved ren gjetning blir prøven å betrakte som et binomisk forsøk. Sannsynligheten for å svare riktig på ett enkeltspørsmål blir $\frac{1}{4}$.
De enkelte spørsmålene besvares uavhengig av hverandre.

Sannsynligheten for 38 rette kan vi finne ved sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra




Sannsynligheten er $1,1 \cdot 10^{-16}$.

Svaret viser at det ikke er lurt å gå opp til førerprøven uten å forberede seg.

## Lineær optimering

## Teori

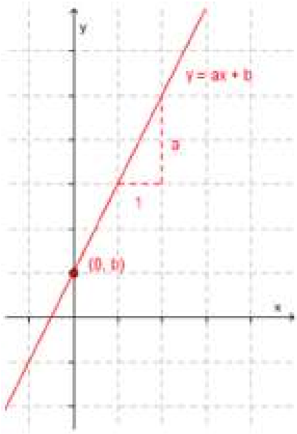
## Innledning

[Innledning (96611)](#)

Husker du hva det betyr at det er en lineær sammenheng mellom to størrelser *x* og *y*?


Dett betyr at $y = ax + b$, der *a* og *b* er to konstanter. Vi kan illustrere sammenhengen grafisk ved hjelp av en rett linje i et koordinatsystem. Linjen har stigningstall *a* og skjærer *y*-aksen i punktet (0, *b*).

**Lineær optimering** handler kort sagt om **lineære sammenhenger** og **metoder for å undersøke hvordan vi kan få mest mulig ut av begrensede ressurser**.




I dette kapittelet skal vi vise disse metodene!

# Jordbær eller moreller?

[Jordbær eller moreller? (96617)]

Ida har arvet et lite småbruk etter besteforeldrene sine. Småbruket har et dyrkbart areal på 32 daa. Ida lurer på om det er mulig å skaffe seg et levebrød av småbruket slik at hun kan bosette seg der.


Småbruket er så lite at det ikke er aktuelt med husdyrhold. Hun vurderer derfor å dyrke frukt eller bær og bestemmer seg for å satse på jordbær og moreller.

Ida ser fort at hun må gjøre en del investeringer, og at det vil kreve mye arbeid å dyrke bær. Før hun går i gang, vil hun derfor undersøke hvor stor inntekt hun kan forvente å få.

Hun vil også prøve å finne ut hvor stort område hun bør bruke til moreller, og hvor stort område hun bør bruke til jordbær for at fortjenesten skal bli størst mulig

Jordbær?

Kostnadene per dekar er forskjellige for jordbær og moreller. Inntektene er også forskjellige.

Ida har fått innvilget et lån på 1,5 millioner kroner til nødvendige investeringer, og hun ønsker å arbeide full tid på småbruket hvis hun kan få en inntekt det er mulig å leve av.

**Ida stiller seg da følgende spørsmål:**

- **Hvor stor del av arealet på småbruket skal jeg bruke til moreller, og hvor stor del skal jeg bruke til jordbær?**
- **Hva er den mest gunstige arealfordelingen for å sikre en høyest mulig inntekt?**

Ida bruker sine matematikkunnskaper og kaller arealet som skal brukes til moreller, for $x$, og arealet som skal brukes til jordbær, for $y$.

Moreller?

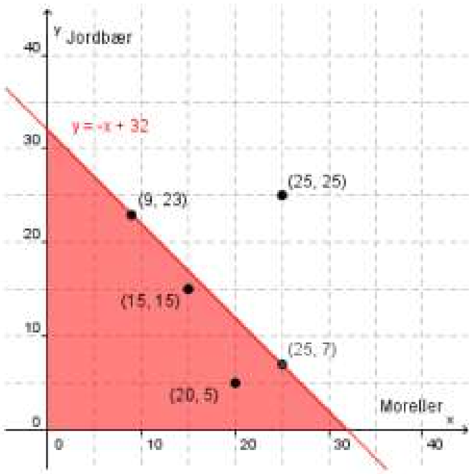
Idas oppgave blir da å finne de **mest gunstige verdiene** for $x$ og $y$. Først må hun finne de **mulige verdiene** for $x$ og $y$.

# Arealbegrensninger

Arealbegrensninger (96644)

Denne siden viser arealbegrensninger av Idas dilemma Jordbær eller moreller?

Første betingelse er at det samlede arealet må være mindre enn eller lik 32 daa. Matematisk kan dette skrives som $x + y \leq 32$. Vi kan da maksimalt ha at $x + y = 32$. Dette er en likning, og når vi løser den med hensyn på *y*, får vi det som du kjenner igjen som likningen for en rett linje




$$x + y = 32$$
$$y = -x + 32$$

Alle punkter som ligger på denne linjen, svarer til at hele arealet utnyttes. For eksempel vil punktet (9, 23) svare til at 9 daa brukes til moreller, og 23 daa brukes til jordbær mens punktet (25, 7) svarer til 25 daa med moreller og 7 daa med jordbær. I begge tilfeller blir dette til sammen 32 daa og

$$x + y = 32$$

Venstresiden og høyresiden i likningen er like. Dette gjelder for alle punkter **på linjen** $y = - \times + 32$.

Punktet (20, 5) svarer til at 20 daa brukes til moreller, og 5 daa brukes til jordbær. Til sammen er det 25 daa. I dette tilfellet bruker ikke Ida hele arealet. Venstresiden i likningen $y = -x + 32$ blir $y = 5$ og høyresiden blir $-x + 32 = -20 + 32 = 12$. Her er altså venstresiden mindre enn høyresiden

$$y < -x + 32$$

Dette gjelder for alle punkter som ligger **under linjen** $y = -x + 32$.

Punktet (25, 25) ligger **over linjen**. Dette punktet svarer til at 25 daa brukes til moreller, og 25 daa brukes til jordbær. Til sammen er det 50 daa. Så stort areal har ikke Ida.

Vi kan heller ikke ha negative arealer. Det vil si at vi må ha $x \geq$ og $y \geq 0$.

Dette betyr at alle punktene i feltet som er farget rødt i koordinatsystemet ovenfor svarer til mulige arealfordelinger for Ida. For alle disse punktene er altså

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{og} \quad y \leq -x + 32$$

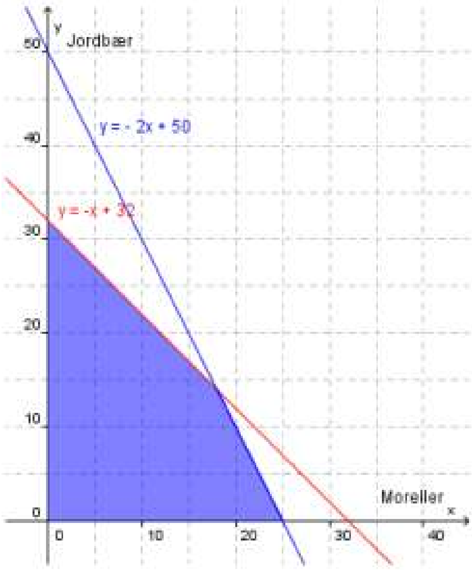
**Idas oppgave er nå begrenset. Hun må finne det eller de punktene i det røde feltet som er mest gunstige.**

Men, det er flere begrensninger. Gå videre i menyen for å lese mer.

# Investeringsbegrensninger

[Investeringsbegrensninger (96649)](#)

Denne siden viser invisteringbegrensninger av Idas dilemma[Jordbær eller moreller?](#)




Landbruksmyndighetene forteller Ida at hun må regne med en pris på 60 000 kroner for å etablere et dekar med moreller mens det koster 30 000 kroner å etablere et dekar med jordbær.

Ida skriver også dette i et matematisk språk. Regnet i tusen kroner blir investeringskostnadene

$$60 \cdot x + 30 \cdot y$$

Disse kostnadene må være lik eller mindre enn 1,5 millioner kroner. Det betyr at

$$60 \cdot x + 30 \cdot y \leq 1500$$

Ved maksimal investering er

$$60 \cdot x + 30 \cdot y = 1500$$

Ida ser at også dette er likningen for en rett linje,

$$\begin{aligned} 60 \cdot x + 30 \cdot y &= 1500 \\ 30y &= -60 \times +1500 \\ y &= -2x + 50 \end{aligned}$$


Vi tegner denne linjen i samme koordinatsystem som vi brukte da vi så på arealbegrensningene.

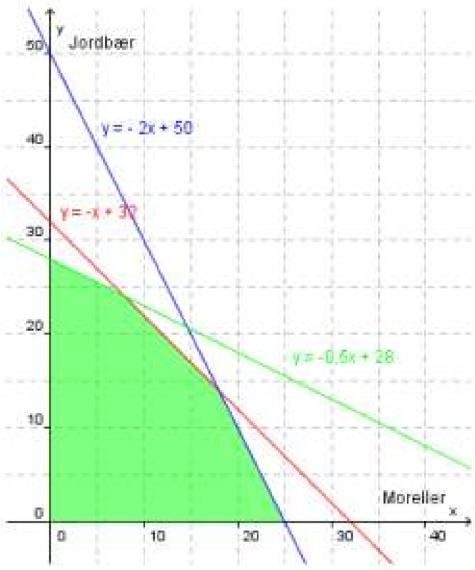
På tilsvarende måte som ved arealbegrensningene er det bare de punktene som ligger på eller under denne linjen som svarer til mulige investeringer. Det betyr at det bare er de punktene som ligger på eller under begge linjene, det vil si i det blå feltet i koordinatsystemet ovenfor, som svarer til mulige arealfordelinger når vi tar hensyn til arealbegrensningene og investeringsbegrensningene.

# Arbeidsmengdebegrensning

Arbeidsmengdebegrensning (96673)

Denne siden viser arbeidsmengdebegrensningen av Idas dilemma Jordbær eller moreller?

Den siste begrensningen Ida har, er at årlig arbeidsmengde ikke må overstige 1680 timer. Hun får opplyst at hun må regne med en årlig arbeidsmengde på 30 timer per dekar moreller og 60 timer per dekar jordbær.




Ut fra dette setter Ida opp likningen

$$
\begin{aligned}
30x + 60y &= 1680 \\
60y &= -30x + 1680 \\
y &= -0,5x + 28
\end{aligned}
$$

Vi tegner denne linjen i samme koordinatsystem som vi har brukt tidligere.

Resultatet blir at vi ender opp med punktene i det grønne arealet i koordinatsystemet til høyre som mulige arealfordelinger når vi tar hensyntil arealbegrensningene, investeringsbegrensningene og arbeidsmengdebegrensningene.

# Oversikt over begrensninger

[Oversikt over begrensninger (96676)]

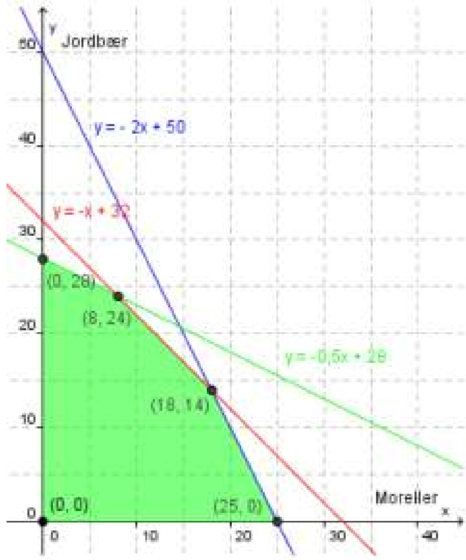
For å få oversikt, samler vi alle de opplysningene vi nå har i en tabell. (Se de forrige sidene i menyen.)

| | Moreller | Jordbær | Maks | Vi må ha | Grenselinjer |
|---|---|---|---|---|---|
| Antall dekar | $x$ | $y$ | 32 | $x+y \leq 32$<br>$y \leq -x+32$ | $x+y=32$<br>$y=-x+32$ |
| Investeringsbehov i 1000 kroner per dekar. Hva det koster å etablere feltet. | 60 | 30 | 1500 | $60x+30y \leq 1500$<br>$y \leq -2x+50$ | $60x+30y=1500$<br>$y=-2x+50$ |
| Timeantall per år per dekar til vedlikehold og drift. | 30 | 60 | 1680 | $30x+60y \leq 1680$<br>$y \leq -0,5x+28$ | $30x+60y=1680$<br>$y=-0,5x+28$ |
| Vi kan ikke ha negative verdier for arealene. | | | | $x \geq 0$ og $y \geq 0$ | $x=0$ og $y=0$ |

Tabellen og den grafiske framstillingen gir nå en fullstendig oversikt over problemstillingen til Ida. For å lage den grafiske framstillingen må du tegne alle grafene angitt med likningene vist i kolonnen lengst til høyre i tabellen.

For å tegne grafene for hånd, som du må gjøre på Del 1 av eksamen, er det lurt å omforme likningen med *y* alene på venstre side (fargede likninger i tabellen ovenfor). Hvis du kan bruke GeoGebra, kan du skrive inn likningene uten å omforme dem (sort skrift i tabellen).
$x=0$ og $y=0$ er likningene for henholdsvis *y*-aksen og *x*-aksen.

For hånd skraverer eller farger du mangekanten. I GeoGebra markerer du de aktuelle skjæringspunktene og tegner en mangekant som du kan fargelegge.


y
Jordbær
y = - 2x + 50
y = -x + 32
y = -0,5x + 28
(0, 28)
(8, 24)
(18, 14)
(0, 0)
(25, 0)
Moreller
x
0
10
20
30
40
50

# Inntekt som funksjon av to variabler

Inntekt som funksjon av to variabler (96857)

Denne siden tar utgangspunkt i Idas dilemma Jordbær eller moreller?

Moreller gir høyere inntekt per dekar enn jordbær. Ida forventer en netto inntekt på 15 000 kroner per dekar for moreller og 10 000 kroner per dekar for jordbær. Samlet nettoinntekt i tusen kroner kan da skrives som $15 \cdot x + 10 \cdot y$.

Vi kaller inntekten for *I* og får da at

$$I = 15x + 10y$$

For å markere at inntekten er en funksjon av to variabler, *x* og *y*, skriver vi

$$I(x,\ y) = 15x + 10y$$

# Maksimal inntekt og nivålinjer

Maksimal inntekt og nivålinjer (96731)

Denne siden bygger på Idas dilemma Jordbær eller moreller?

Det gjenstår å finne den arealfordelingen som gir størst inntekt. Ida drømmer om en årsinntekt opp mot 500 000 kroner.

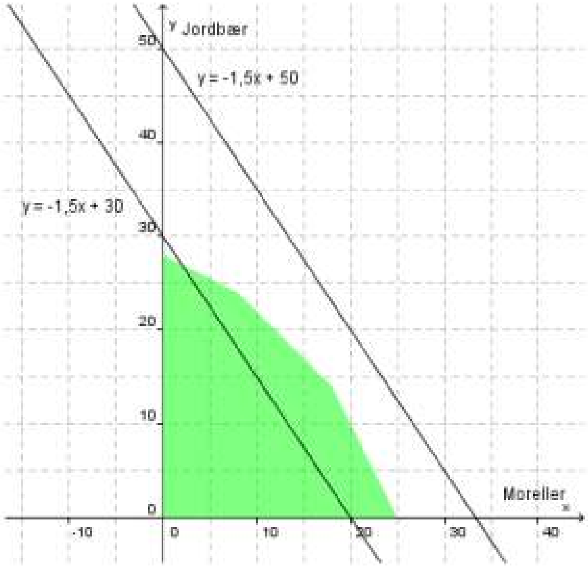
## Grafisk løsning uten digitale hjelpemidler

En nettoinntekt på 500 000 kroner gir at

$$15x + 10y = 500$$

$$10y = -15x + 500$$

$$y = -1,5x + 50$$




Ingen punkter på denne linjen ligger i det grønne området i koordinatsystemet vårt. Det betyr at det ikke er mulig å oppnå denne inntekten med de begrensninger vi har når det gjelder areal, investeringer og arbeidsmengde.

En inntekt på 300 000 kroner gir likningen

$$15x + 10y = 300$$
$$y = -1,5x + 30$$

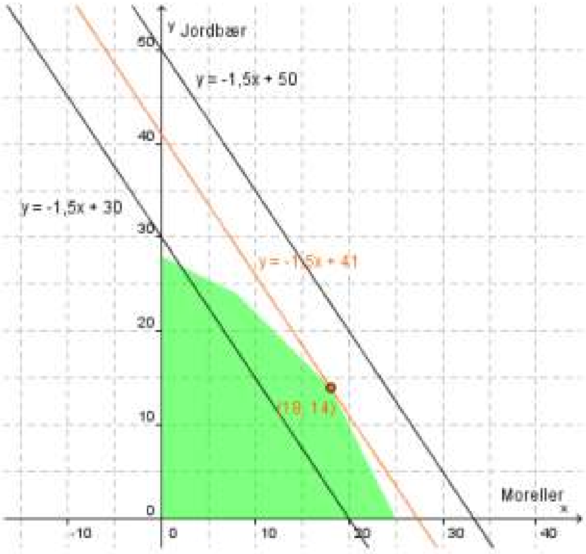
Denne linjen skjærer det grønne området, og det er mange mulige arealfordelinger som gir denne inntekten.

Ida ønsker høyest mulig inntekt. Hun ser at begge linjene har samme stigningstall og er parallelle. De representerer to forskjellige **inntektsnivåer** og kalles for **nivålinjer**.

Ved å tegne en tredje linje parallell med de to andre, som så vidt berører det grønne området, får vi den nivålinjen som representerer det høyest mulige inntektsnivået, **den optimale nivålinjen**, for Ida.

Vi ser at linjen berører det grønne området i punktet (18, 14).

Ved å sette disse verdiene inn i inntektsfunksjonen finner vi den maksimale inntekten.




$$I(x,\ y) = 15x + 10y$$

$$I(18,\ 14) = 15 \cdot 18 + 10 \cdot 14 = 410$$

Det betyr at Ida oppnår maksimal inntekt med en arealfordeling på 18 daa moreller og 14 daa jordbær, og at den maksimale inntekten er 410 000 kroner.

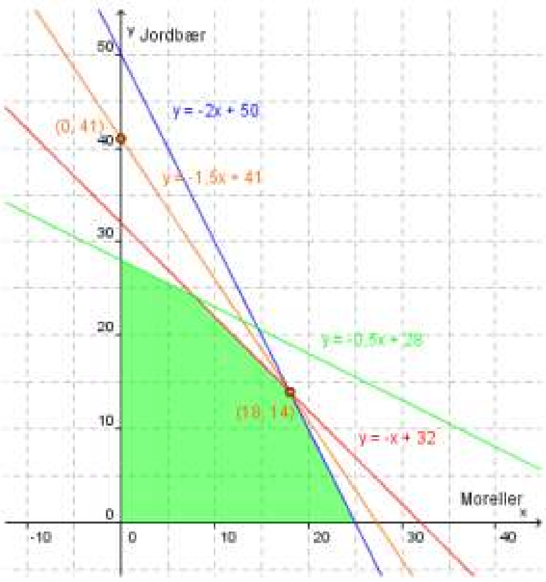
Finne koordinatene ved regning

Vi ser at nivålinjen treffer mangekanten i skjæringspunktet mellom den blå og den røde linjen. (Se koordinatsystemet til høyre.)

I skjæringspunktet mellom to linjer er alltid *y*-koordinatene like hverandre. Den blå og den røde linjen skjærer altså hverandre når

$$\begin{aligned} -2x + 50 &= -x + 32 \\ -x &= -18 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Da er $y = -18 + 32 = 14$.



Som ved grafisk løsning kan vi også nå sette disse verdiene inn i inntektsfunksjonen og finne den
maksimale inntekten

$$I(x,\ y) = 15x + 10y$$
$$I(18,\ 14) = 15 \cdot 18 + 10 \cdot 14 = 410$$

Det betyr at en arealfordeling med 18 daa moreller og 14 daa jordbær gir den høyeste inntekten, og den maksimale årlige inntekten Ida kan forvente, er 410 000 kroner.

### Flere punkter kan gi maksimal inntekt

Legg merke til at dersom nivålinjen hadde vært parallell med en av sidene i mangekanten, så ville alle punktene på denne sidekanten gitt samme maksimale inntekt. Det var ikke tilfelle i dette eksemplet, men det kan godt inntreffe i liknende problemstillinger.

# Nivålinjer i GeoGebra

[Nivålinjer i GeoGebra (96747)](#)

Denne siden viser til opplysningene i Idas dilemma[Jordbær eller moreller?](#)

Vi ser nærmere på inntektsfunksjonen $I = 15x + 10y$.

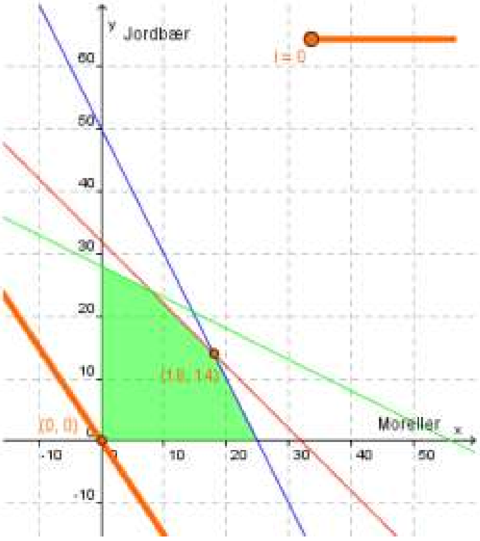
Denne kan omformes til

$$\begin{aligned} 15x + 10y &= i \\ 10y &= -15x + I \\ y &= 1,5x + \tfrac{I}{10} \end{aligned}$$

For ulike verdier av *I* får vi parallelle nivålinjer.

I GeoGebra kan du lage en glider for inntekten i tusen kroner, *I*. Så skriver du inn likningen for linjen

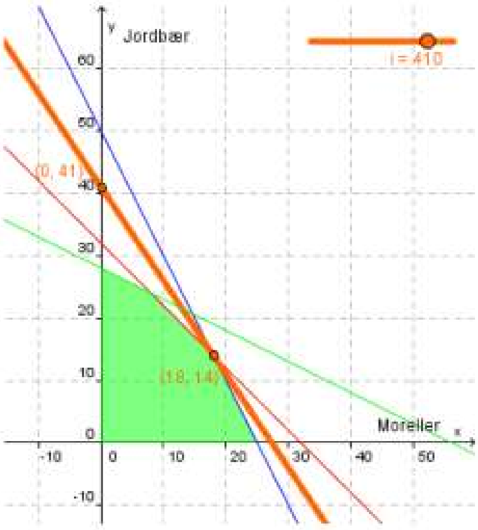
$$y = -1,5x + \tfrac{I}{10}$$




Ved å endre inntekten (glideren) kan du parallellforskyve linjen til den bare berører det grønne området i ett punkt.

Du vil oppdage at den høyeste årsinntekten Ida kan forvente, er 410 000 kroner. For alle andre skjæringspunkter mellom linjen og det grønne området er verdien til inntekten (glideren) lavere.

Ida oppnår høyest årsinntekt dersom hun bruker 18 daa til moreller og 14 daa til jordbær.



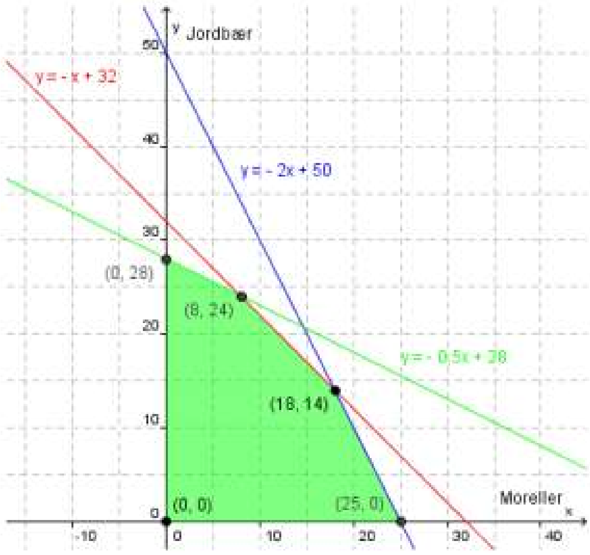

## Minimal inntekt

Du kan endre glideren slik at nivålinjen passerer gjennom det grønne arealet. Du vil da se at lavere nivålinje gir lavere inntekt. Siste kontaktpunkt mellom nivålinjen og det grønne området er punktet (0,0). Dette punktet representerer den arealfordeling som gir minst inntekt. Ikke overraskende gir det null inntekt når du verken dyrker moreller eller jordbær.

I noen optimeringsproblemer er det **minimalverdier** som er mest interessante.

# Lineær optimering uten nivålinjer

Lineær optimering uten nivålinjer (96763)




Det er ikke nødvendig å bruke nivålinjer for å finne maksimalt inntektsnivå.

**Generell lineær optimeringsteori sier at det alltid vil være ett eller flere av hjørnene i mangekanten som gir den største eller minste verdien.**

**Hvis to av hjørnene gir samme verdi, vil også alle punktene på linjestykket mellom disse punktene gi samme verdi.**

Vi kan derfor nøye oss med å regne ut inntekten for de arealfordelingene som svarer til hjørnene i mangekanten.

$$I(x,\ y) = 15x + 10y$$
$$I(0,\ 0) = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$$
$$I(25,\ 0) = 15 \cdot 25 + 10 \cdot 0 = 375$$
$$I(18,\ 14) = 15 \cdot 8 + 10 \cdot 14 = 410$$
$$I(8,\ 24) = 15 \cdot 8 + 10 \cdot 24 = 360$$
$$I(0,\ 28) = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 28 = 280$$

Vi ser at en arealfordeling på 18 daa moreller og 14 daa jordbær gir maksimal inntekt.

Vi ser også at 0 daa moreller og 0 daa jordbær gir den minste inntekten av de mulige arealfordelingene.

**Lineær optimering handler om å finne de optimale maksimalverdier og/eller de optimale minimalverdier.**

Vi skal til slutt vise hvordan vi kan løse et typisk optimeringsproblem ved å bruke GeoGebra om du går videre i menyen.

Du bør underveis ha i tankene at du også skal kunne løse liknende problem uten digitale verktøy, både grafisk og ved regning.

Du vil forhåpentligvis se at det er små forskjeller om du løser oppgaven med eller uten digitale verktøy. Hovedproblemet er å tolke teksten og sette opp ulikhetene.

# Nøtter, rosiner og sjokolade

Nøtter, rosiner og sjokolade (96768)

To elever har startet en elevbedrift. De vil lage og selge poser med to forskjellige blandinger av nøtter, rosiner og sjokolade.

Nøtter, rosiner- og sjokolade

De har kjøpt inn følgende råvarer:

5,50 kg kasjunøtter
9,00 kg peanøtter
6,75 kg rosiner
4,50 kg sjokoladekuler

En pose med blanding A inneholder:

100 g kasjunøtter, 75 g peanøtter, 50 g rosiner, 75 g sjokoladekuler

En pose med blanding B inneholder:

50 g kasjunøtter, 125 g peanøtter, 75 g rosiner, 50 g sjokoladekuler

Utsalgsprisen for blanding A er 30 kroner per pose. Utsalgsprisen for blanding B er 25 kroner per pose.

La $x$ være antall poser som selges av blanding A, og $y$ antall poser som selges av blanding B.

Bestem $x$ og $y$ slik at inntekten blir størst mulig.

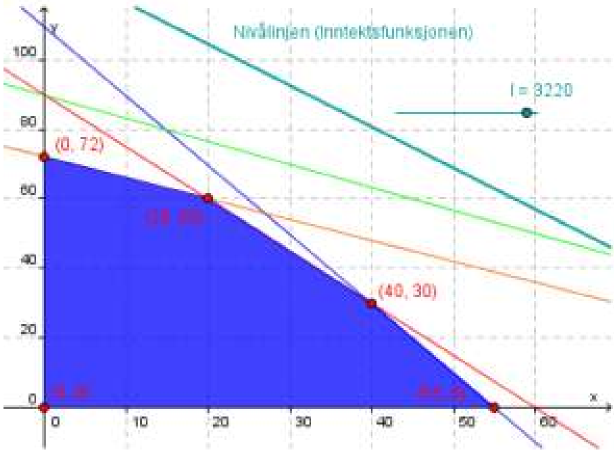
## Løsning

I denne oppgaven er det mange opplysninger. Vi får bedre oversikt hvis vi samler opplysningene i en tabell.

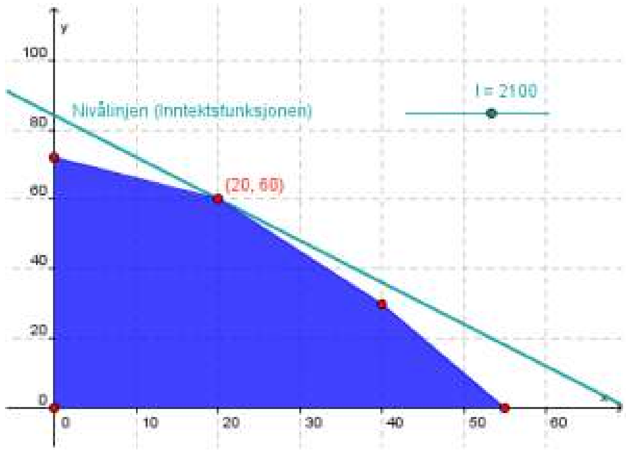
| Posetyper | A | B | |
|---|---|---|---|
| Antall poser som selges | $x$ | $y$ | $x \geq 0$ og $y \geq 0$ |
| Kasjunøtter i gram | 100 | 50 | $100x + 50y \leq 5500$ |
| Peanøtter i gram | 75 | 125 | $75x + 125y \leq 9000$ |
| Rosiner i gram | 50 | 75 | $50x + 75y \leq 6750$ |
| Sjokoladekuler i gram | 75 | 50 | $75x + 50y \leq 4500$ |
| Salgspris i kroner per pose | 30 | 25 | $i(x,y) = 30x + 25y$ |

I den siste linjen har vi skrevet inn inntektsfunksjonen. Dette er en funksjon i to variabler,
$x$ og $y$.

Vi skriver ulikhetene i GeoGebra slik de står, men med likhetstegn i stedet for ulikhetstegn. GeoGebra forkorter automatisk likningene slik at koeffisientene blir lavest




mulige heltall.




Vi finner skjæringspunktene mellom linjene og tegner en blå mangekant med hjørner i skjæringspunktene. Punktene i den blå mangekanten representerer nå alle de posefordelinger ($x$, $y$) som oppfyller alle betingelsene i oppgaven.

Før vi skriver inn inntektsfunksjonen, $I$, må vi etablere $I$ som en glider ved å gi den en tilfeldig verdi. Vi skriver for eksempel $I = 2000$.

Når inntekten reduseres, parallellforskyves nivålinjen nedover. Ved å endre glideren ser vi at nivålinjen først treffer mangekanten i punktet (20, 60). Punktet (20, 60) er derfor det punktet i den blå mangekanten som gir høyest inntekt.

Det betyr at maksimal inntekt oppnås når det selges 20 poser av blanding A og 60 poser av blanding B.

Inntekten i kroner er da $I = 30x + 25y = 30 \cdot 20 + 25 \cdot 60 = 2100$