NASJONAL DIGITAL LÆRINGSARENA

Matematikk Vg2P

Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpemidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

Dette dokumentet er en tekstutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til http://ndla.no.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpemidler. I modell 1 er alle hjelpemidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.

Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpemidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Disse fagene følger modell 2 for hjelpemiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.

Innholdsfortegnelse

Innholdsfortegnelse **2**

Tall og algebra i praksis **6**

Teori 6

Potenser 6

Potenser 6

Regneregler for potenser 7

Definisjoner og regnereglene for potenser 9

Tierpotenser 10

Tall på standardform 11

Prosentregning 13

Prosentregning 13

Prosentpoeng 16

Vekstfaktor 17

Suksessive renteberegninger 19

Eksponentiell vekst 20

Eksponentiell vekst 20

Statistikk **23**

Teori 23

Innledning 23

Innledning 23

Statistisk undersøkelse 25

Presentasjon av tallmateriale 26

Tabeller -Frekvens -Relativ frekvens -Kumulativ frekvens 26

Søylediagram/stolpediagram 29

Sektordiagram 31

Linjediagram/kurvediagram 33

Ulike dataframstillinger – ulike inntrykk 34

Sentralmål 35

Sentralmål- typetall 35

Sentralmål- gjennomsnitt 36

Sentralmål- median 37

Vurdering av sentralmål 39

Spredningsmål 40

Spredningsmål 40

Variasjonsbredde 41

Kvartilbredde 42

Standardavvik 43
Gruppert datamateriale 47
Gruppert datamateriale 47
Sentralmål i et gruppert datamateriale 49

Modellering 51
Teori 51
Innledning 51
Innledning 51
Lineære modeller og lineær regresjon 52
Lineære modeller og lineær regresjon 52
Å finne en lineær modell uten bruk av digitale.. 53
Å finne en lineær modell ved bruk av digitale .. 54
Kan vi stole på matematiske modeller? 57
Modell for svingetiden til en pendel 58
Modell for svingetiden til en pendel 58
Potensfunksjon som modell 59
Potensfunksjon som modell 59
Eksponentialfunksjon som modell 60
Eksponentialfunksjon som modell 60
Polynomfunksjoner som modeller 62
Polynomfunksjoner som modeller 62
Andre typer modeller og mønstre 63
Kvadrater 63
Trekanter 64
Trekanttall 65
Pascals talltrekant 66
Valg 68
Pascals talltrekant i regneark 69
Skjæringssetninger i trekanter 70
Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger 72
Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger 72

Funksjoner (Bare for VG3 PB) 75
Moduler 75
Modul 1: Funksjonsbegrepet 75
Modul 2: Lineære funksjoner 76
Modul 3: Mer om lineær vekst 77
Modul 4: Andregradsfunksjoner 78

Modul 5: Andre funksjoner 79

Funksjoner i praksis 80

Teori 80

Funksjonsbegrepet 80

Funksjonsbegrepet 80

Funksjoner representert ved formler 81

Funksjoner representert ved grafer og verditabeller 83

Grafer til funksjoner digitalt 84

Koordinatsystemet 85

LIneære funksjoner 87

Lineære funksjoner 87

Stigningstall og konstantledd 88

Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon 91

Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje 92

Skjæringspunkt mellom to rette linjer 94

Nullpunkt 97

Lineær regresjon 99

Andre funksjonstyper 101

Andre funksjonstyper 101

Generell form for andregradsfunksjoner 103

Nullpunkter, topp- og bunnpunkter 105

Eksempel på andregradsfunksjon 106

Polynomfunksjoner 107

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon 109

Rasjonale funksjoner 111

Potensfunksjoner 112

Eksponentialfunksjoner 115

Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner 116

Vekstfart 118

Vekstfart til lineære funksjoner 118

Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart 120

Sannsynlighet (Bare for VG3 PB) 124

Moduler 124

Modul 1: Hva er sannsynlighet? 124

Modul 2: Sannsynlighet i uniforme modeller. Addisjon av sannsynligheter 125

Modul 3: Beregne sannsynligheter ved å bruke tabeller 126

Modul 4: Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram 127

Modul 5: Multiplikasjon av sannsynligheter 128
Modul 6: Beregne sannynligheter ved å bruke valgtre 129
Sammendrag 130
Andre ressurser 131
Sannsynlighet spill 131
Sannsynlighet oppgaver 132
Sannsynlighet hjelp 133
Simuleringer i GeoGebra 134
Simulering av myntkast 136
Simulering av ruletthjul 137

Tall og algebra i praksis

Teori

Potenser

Potenser

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Potenser (89617)

Datamaskinene våre får stadig større kapasitet. Antall bytes som kan lagres på en harddisk øker. Mens det for få år siden var vanlig med en lagringskapasitet på noen millioner bytes, Megabytes, har det nå blitt vanlig å kunne lagre milliarder av bytes, Gigabytes. Vi får etter hvert svært store tall å forholde oss til.

Store tall skrevet på vanlig måte gir lange rekker med tallsifre. Dette er tungvint, og det er derfor behov for å skrive svært store tall på en mer kortfattet måte.

Vi kan som eksempel skrive tallet 81 som en **potens**. Vi har at siden 81 = 3 · 3 ·3 ·3, så skriver vi 81 som potens slik

$$81 = 3^4$$

Denne skrivemåten betyr at vi skal multiplisere tallet 3 med seg selv 4 ganger.

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} = 81$$

Å skrive 3^4 er altså bare en annen måte å skrive tallet 81 på.

Tallet 3 kalles for **grunntallet**, og tallet 4 kalles for **eksponenten**. Eksponenten forteller hvor mange ganger grunntallet skal multipliseres med seg selv.

Definisjon

La *a* være et vilkårlig tall og *n* et naturlig tall.

Da er

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ ganger}}$$

Ved å skrive «def» over likhetstegnet forteller vi at dette er noe vi har bestemt, har definert, at skal gjelde.

Regneregler for potenser

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Regneregler for potenser (89625)

Vi kan regne med potenser

$$3^4 \cdot 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ ganger}} = 3^9$$

Vi ser at

$$3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$$

Regneregel 1 for potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Tilsvarende gjelder når vi dividerer potenser på hverandre:

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$$

Vi ser at

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

Regneregel 2 for potenser

La *a* være et tall forskjellig fra null, og la *m* og *n* være naturlige tall, og foreløpig må vi ha at *m*>*n*.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hvordan blir utregningen hvis potensen i nevneren har større eksponent enn potensen i telleren?

Vi bytter om på potensene i eksemplet ovenfor.

Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3^4}$$

Ved å bruke regneregel 2 for potenser, får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4}$$

Vi ønsker at regnereglene for potenser også skal gjelde i slike tilfeller. Det betyr at $\frac{1}{3^4}$ og 3^{-4} må være samme tallet.

Definisjon

For alle tall $a \neq 0$ og naturlige tall *n* gjelder at

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Hva så hvis potensene i teller og nevner har like store eksponenter? Vi ser på et eksempel.

Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ved å bruke regneregel 2, får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0$$

Vi ønsker også her at regnereglene for potenser skal gjelde. Det betyr at 3^0 må være lik tallet 1.

Definisjon

For alle tall a ≠ 0 gjelder at

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Med disse to nye definisjonene gjelder regneregel 1 og 2 for alle heltallige eksponenter, også når *m* ikke er større enn *n*.

Studer følgende regnestykker hvor definisjonen på potenser er brukt gjentatte ganger sammen med vanlige regneregler.

$$(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right)$$
$$= \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4}$$

Vi kan sette opp tilsvarende regnestykker hvor vi bytter ut tallene 2, 3 og 4 med hvilke som helst andre reelle tall, og vi får tre nye regneregler for potenser.

Vi kan da summere opp de definisjoner og regneregler vi har for potenser. Disse gjelder under de forutsetninger som er gitt ovenfor. Vi forutsetter også at vi ikke får null i nevner!

Definisjoner og regnereglene for potenser

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering (89626)

Definisjoner

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ganger}} \qquad a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Regneregler

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^n)^m = a^{mn}$$

Definisjonene og regnereglene er svært viktige og må læres!

Tierpotenser

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Tierpotenser (89627)

Mange ganger regner vi med svært store og svært små tall, se Potenser. Vi bruker da ofte potenser av grunntallet 10. Tabellen nedenfor viser tierpotenser av ulik størrelse. Disse har egne navn (prefikser). En del av disse bør du kunne.

Prefikser
Kilo er opprinnelig et gresk ord som betyr tusen. Vi bruker ordet ved å sette det foran for eksempel meter og får da en større lengde, nemlig kilometer. Vi bruker også symbolet k for kilo, og skriver da kilometer kortfattet som km. Et ord som på denne måten settes foran et annet ord kalles for et prefiks.

En oversikt over noen prefikser til tierpotenser:

10^n	Prefiks	Symbol	Navn	
10^{15}	peta	P	billiard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	billion	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	milliard	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	million	1 000 000
10^{3}	kilo	k	tusen	1 000
10^{2}	hekto	h	hundre	100
10^{1}	deka	da	ti	10
10^{-1}	desi	d	tidel	0,1
10^{-2}	centi	c	hundredel	0,01
10^{-3}	milli	m	tusendel	0,001
10^{-6}	mikro	µ	milliondel	0,000 001
10^{-9}	nano	n	milliarddel	0,000 000 001

Tall på standardform

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Tall på standardform (89628)

Oversikten over Tierpotenser viser hvordan noen svært store og svært små tall kan skrives kortfattet som tierpotenser.

Vi ønsker å kunne skrive alle tall på tilsvarende måte.

Vi ser på tallet 2357. Vårt tallsystem er et posisjonssystem. Det vil si at det er det enkelte siffers plassering som bestemmer verdien til sifferet.

Det første sifferet, 2, har verdien 2000. Det neste, 3, har verdien 300. Sifferet 5 har verdien 50, mens det siste sifferet, 7, forteller at vi har 7 enere. Det første sifferet angir altså antall 1000, det neste antall 100, det tredje antall 10-ere og det siste antall enere.

Vi kan sette et kommategn etter sifferet 7. Da vil eventuelle siffer etter 7 angi antall tideler, hundredeler osv. avhengig av sifferets posisjon.

Kommategnet forteller altså hvor vi begynner å telle enere.

Vi kan flytte komma en plass til venstre, og skrive 235,7. Da har verdien av alle siffer blitt dividert med 10. Sifferet 3 har ikke lenger verdien 300, men har nå verdien 30. Tallet 235,7 kan få tilbake sin verdi som 2357 ved at vi multipliserer det med 10.

Vi kan fortsette slik

$$\begin{aligned}
2357 &= 2357 \cdot 10^0 \\
2357 &= 235,7 \cdot 10^1 \\
2357 &= 23,57 \cdot 10^2 \\
2357 &= 2,357 \cdot 10^3
\end{aligned}$$

I den siste linjen har vi skrevet tallet 2357 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi sier da at vi har skrevet tallet på **standardform**.

I begynnelsen av 2011 var folketallet i verden ca. 6 894 000 000.

Dette tallet kan vi skrive på standardform som

$$6\,894\,000\,000 = 6,894 \cdot 10^9 \approx 6,9 \cdot 10^9$$

Ovenfor har vi avrundet til én desimal i desimaldelen av tallet. Vi må da huske på de reglene som gjelder for avrunding.

Avrunding

Når vi avrunder et desimaltall, må vi se på **den desimalen som kommer nærmest etter den siste vi beholder.** Hvis denne desimalen er 5 eller høyere, må vi øke den siste desimalen vi beholder, med 1.

Eksempel

$$\begin{aligned}
3,46 &\approx 3,5 \\
3,05 &\approx 3,1 \\
3,04 &\approx 3,0 \\
2,34 &\approx 2,3
\end{aligned}$$

Små tall på standardform

Vi ser på tallet 0,023. Husk igjen at vårt tallsystem er et posisjonssystem. Kommategnet forteller hvor vi begynner å telle enere. Første plass etter komma er tidelsplassen som forteller hvor mange tideler vi har. Vi har i vårt eksempel 0 tideler. Andre plassen angir hundredeler. Vi har 2 hundredeler og siste siffer forteller at vi har 3 tusendeler.

Vi kan flytte komma en plass til høyre, og skrive 0,23. Da har verdien av alle sifre blitt multiplisert med 10. Sifferet 2 har ikke lenger verdien 2 hundredeler, men har nå verdien 2 tideler. For at tallet skal få tilbake sin opprinnelige verdi, må vi dividere hele tallet med 10. Det er det samme som å multiplisere det med 10^{-1}. Tallet 2,3 kan få tilbake sin verdi som 0,023 ved at vi dividerer det med 100.

$$0,023 = 0,023 \cdot 10^0$$
$$0,023 = 0,23 \cdot 10^{-1}$$
$$0,023 = 2,3 \cdot 10^{-2}$$

I den siste linjen har vi skrevet tallet 0,023 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi har skrevet tallet på **standardform**.

Vann er bygd opp av vannmolekyler. Massen til ett vannmolekyl er $m = 0,0000000000000000000000000299 = 2,99 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$.

Her ser du at det er hensiktsmessig å bruke standardform!

Prosentregning

Prosentregning

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Prosentregning (90464)

Prosent betyr hundredel

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Alle tall kan skrives som prosent. Dette er fordi alle tall kan skrives som en brøk med 1 i nevneren. Vi kan så utvide brøken slik at vi får 100 i nevner.

Prisen er satt ned med 30/100

Eksempel 1

Å skrive tall som prosent

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{500}{100} = 500\ \%$$

$$0,34 = \frac{0,34}{1} = \frac{34}{100} = 34\ \%$$

$$1,62 = \frac{1,62}{1} = \frac{162}{100} = 162\ \%$$

Eksempel 2

Å skrive prosent som tall

$$44\ \% = \frac{44}{100} = 0,44$$

$$1,23\ \% = \frac{1,23}{100} = 0,0123$$

Eksempel 3

Å finne prosentandelen

Niels Henrik og Mary Ann skal dele en pizza. Pizzaen er delt i fem like store stykker. Niels Henrik spiser tre pizzastykker og Mary Ann spiser to. Hvor mange prosent av pizzaen spiser Niels Henrik?

Løsning

Niels Henrik sin andel er

$$\frac{3}{5} = 0,6 = 60\ \%$$

Vi regner altså brøken om til desimaltall og finner prosenttallet som i Eksempel 1.

Eksempel 4

Å finne endring i prosent

Pettersen selger moreller. Et år øker han prisen på en kurv moreller fra 35 kroner til 40 kroner. Hvor mange prosent øker prisen med?

Løsning

Vi finner forholdet mellom prisøkning og gammel pris. Dette forholdstallet gjør vi om til prosent

$$\frac{40-35}{35} = 0,143 = 14,3\ \%$$

Eksempel 5

Å beregne skattetrekk

Linda har sommerjobb og tjener så mye at arbeidsgiveren må trekke 15 % av lønna i skatt. Hvor mye må Linda betale i skatt når hun tjener 3000 kroner?

Løsning

Vi går "veien om 1".

1 % av lønna blir

$$\frac{3000\ \text{kr}}{100} = 30\ \text{kr}$$

15 % blir da

$$30\ \text{kr} \cdot 15 = 450\ \text{kr}$$

Vi regner gjerne slik

$$\frac{3000\ \text{kr} \cdot 15}{100} = 450\ \text{kr}$$

Linda må betale 450 kroner i skatt.

Eksempel 6

Å finne salgspris

Et par sko koster 540 kroner. Skoene settes ned med 40 %. Hva blir salgsprisen på skoene?

Løsning

Hva blir salgsprisen på skoene?

Vi går "veien om 1".

1 % av prisen blir

$$\frac{540\ \text{kr}}{100} = 5,40\ \text{kr}$$

40 % blir da

$$5,40\ \text{kr} \cdot 40 = 216\ \text{kr}$$

Ofte regner vi dette slik

$$\frac{540\ \text{kr} \cdot 40}{100} = 216\ \text{kr}$$

Salgsprisen blir da 540 kr−216 kr=324 kr.

Eksempel 7

Å regne ut opprinnelig verdi

Hva var den opprinnelige prisen?En dongerijakke selges med 30 % rabatt. Prisen etter at rabatten er trukket fra, er 420 kroner.

Hva var den opprinnelige prisen?

Løsning

30 % rabatt betyr at 420 kroner svarer til $100\ \% - 30\ \% = 70\ \%$ av den opprinnelige prisen.

Vi går "veien om 1". 1 % av prisen blir

$$\frac{420\ \text{kr}}{70} = 6\ \text{kr}$$

$$100\ \%\ \text{blir da}\ 6\,\text{kr} \cdot 100 = 600\ \text{kr}$$

Den opprinnelige prisen var 600 kroner.

Eksempel 8

I en matematikklasse ble seks elever trukket ut til eksamen. Disse seks elevene utgjorde 40 % av elevene i klassen.
Hvor mange elever var det i klassen?

Løsning

Siden 40 % av elevene utgjør 6 elever, så må 1 % utgjøre $\frac{6\ \text{elever}}{40} = 0,15\ \text{elever}$.

100 % blir da 0,15 · 100 = 15 elever.

Det var 15 elever i klassen.

Prosentpoeng

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Prosentpoeng (90535)

På en meningsmåling økte et politisk parti sin oppslutning fra 30 % i oktober til 33 % i november.

Men dette betyr **ikke** at oppslutningen om partiet har økt med 3 %, selv om
33 % – 30 % = 3 %!

Hvis for eksempel antall elever i en skoleklasse økes på samme måten, fra 30 elever til 33 elever, så er jo ikke økningen på 3 %.

Da er økningen på 10 %.

1 %, eller 1 hundredel, av 30 elever er 0,3 elever, og 10 % er da lik 0,3 elever · 10 = 3 elever.

Vi kan også regne slik:
Økningen i forhold til opprinnelig verdi er lik $\frac{3}{30} = 0,1 = \frac{10}{100} = 10\ \%$.

Det samme må gjelde for den økte prosentvise oppslutningen for det politiske partiet.

Vi sier at partiet har gått fram **3 prosentpoeng** på meningsmålingen, fra 30 prosentpoeng til 33 prosentpoeng.

Økningen i forhold til opprinnelig verdi er da lik $\frac{3\ \text{prosentpoeng}}{30\ \text{prosentpoeng}} = 0,1 = 10\ \%$.

Vekstfaktor

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Vekstfaktor (90558)

Vi skal nå se noen eksempler på hvor nyttig det er å bruke vekstfaktor når vi regner med prosent.

Eksempel 1

En vare koster 1 500 kroner. Prisen stiger med 25 %. Hva blir ny pris på varen?

En måte å regne på er slik

$$\text{Ny pris} = 1500\text{ kr} + 1500\text{ kr} \cdot \frac{25}{100} = 1875\text{ kr}$$

Ved å sette 1 500 utenfor en parentes blir regningen slik

$$\text{Ny pris} = 1500\text{ kr} + 1500\text{ kr} \cdot \frac{25}{100} = 1500\left(1 + \frac{25}{100}\right)$$

$$= 1500\left(1 + 0,25\right) = 1500 \cdot 1,25 = 1875$$

Dette blir mye enklere. Vi multipliserer bare gammel pris med 1,25.

Tallet 1,25 kalles vekstfaktoren.

Vi kan altså finne ny pris ved å multiplisere gammel pris med vekstfaktoren.

Eksempel 2

Vi tar igjen for oss en vare som koster 1500 kroner. Hva må du betale for varen hvis du får et avslag på 25 %?

Løsning

Vi følger samme framgangsmåte som i Eksempel 1

$$\text{Ny pris} = 1500 - 1500 \cdot \frac{25}{100} = 1500\left(1 - \frac{25}{100}\right)$$

$$= 1500\left(1 - 0,25\right) = 1500 \cdot 0,75 = 1125$$

Ny pris blir 1125 kroner.

Tallet 0,75 kalles også i dette tilfelle for vekstfaktor.

Du ser igjen at du finner ny pris ved å multiplisere med vekstfaktoren.

Når du skal øke en verdi med *p* %, blir vekstfaktoren $1 + \frac{p}{100}$

Når du skal redusere en verdi med *p* %, blir vekstfaktoren $1 - \frac{p}{100}$

I begge tilfeller må du **multiplisere opprinnelig verdi med vekstfaktoren** for å finne ny verdi.

Eksempel 3

En vare kostet 2000 kroner. Prisen ble satt ned med 15 %. Hva koster varen etter at prisen er satt ned?

Løsning

Vekstfaktoren blir

$$1 - \frac{15}{100} = 0,85$$

Ny pris blir

$$2000 \text{ kroner} \cdot 0,85 = 1700 \text{ kroner}$$

Eksempel 4

Prisen på en vare er satt ned med 15 %. Varen koster nå 1700 kroner.
Hva kostet varen før prisen ble satt ned?

Løsning

Vekstfaktoren blir

$$1 - \frac{15}{100} = 0,85$$

Vi kaller gammel pris for *x* og setter opp en likning

$$x \cdot 0,85 = 1700$$

$$\frac{x \cdot \cancel{0,85}}{\cancel{0,85}} = \frac{1700}{0,85}$$

$$x = 2000$$

Varen kostet 2000 kroner før prisen ble satt ned.

Suksessive renteberegninger

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Suksessive renteberegninger (90599)

Ved å bruke vekstfaktor kan du raskt finne ny pris når det skjer flere prosentvise endringer etter hverandre.

Eksempel 1

En vare kostet 500 kroner. Prisen ble først satt opp med 12 %, for så å bli satt ned med 20 %. Finn ny pris.

Løsning

Pris etter prisøkning

$$500\ \mathrm{kr} \cdot 1,12 = 560\ \mathrm{kr}$$

Pris etter prisreduksjon

$$(500\ \mathrm{kr} \cdot 1,12) \cdot 0,80 = 500\ \mathrm{kr} \cdot 1,12 \cdot 0,80 = 448\ \mathrm{kr}$$

Eksempel 2

10 000 kroner står i banken til en fast rente på 3 % per år. Hvor mye har beløpet vokst til dersom det står 8 år i banken?

Hvor mye har beløpet vokst til?

Løsning

Etter 8 år har beløpet vokst til

$$10\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 =$$

$$10\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 1,03^8 = 12668\ \mathrm{kr}$$

Det digitale verktøyet du bruker, har en egen tast for å opphøye et tall i en høyere potens enn to. Hvis du bruker tastaturet på datamaskinen, skriver du vanligvis **1.03^8.** Legg merke til at i de fleste digitale verktøy må du bruker punktum som desimalskilletegn.

Eksponentiell vekst

Eksponentiell vekst

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Eksponentiell vekst (90631)

I forrige avsnitt (Vekstfaktor) så vi at hvis vi setter 10 000 kroner i banken og får 3 % rente per år, vil beløpet etter 8 år ha vokst til 12668 kroner.

Etter 8 år vil beløpet altså ha vokst til
$10\,000\ \mathrm{kr} \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 10\,000\ \mathrm{kr} \cdot 1,03^8 =$

Etter *x* år vil beløpet da ha vokst til $10\,000 \cdot 1,03^x$ kroner. Vi lar *B*(*x*) angi beløpet i banken etter *x* år og får at $B(x) = 10\,000 \cdot 1,03^x$.

Funksjonen *B* gitt ved *B*(*x*) er et eksempel på en **eksponentialfunksjon**. En slik funksjon kjennetegnes ved at den inneholder en potens med den **ukjente som eksponent**. Grunntallet i potensen kalles **vekstfaktoren.**

Når vekstfaktoren er større enn 1, vokser funksjonen med en fast prosent per tidsenhet (ofte per år). Sammenhengen mellom den prosentvise veksten og vekstfaktoren er gitt ved likningen

$$\text{vekstfaktor} = 1 + \frac{p}{100}$$

Når vekstfaktoren er mindre enn 1, avtar funksjonen med en fast prosent per tidsenhet (ofte per år). Sammenhengen mellom den prosentvise nedgangen og vekstfaktoren er gitt ved likningen

$$\text{vekstfaktor} = 1 - \frac{p}{100}$$

Grafen til funksjonen *B* er tegnet til høyre. Grafen vokser først langsomt for deretter å bli brattere og brattere. Selv om bankrenten er lav, vil beløpet i banken etter hvert vokse raskt.

Dette er typisk for eksponentiell vekst. Mange størrelser i naturen vil følge en eksponentiell vekstkurve om den får vokse fritt. Det gjelder for eksempel antall bakterier i en bakteriekultur eller antall kaniner på en øy uten fiender og med ubegrenset mattilgang.

Eksempel

Bruktbiler til salg. Hvor mange år vil det gå før verdien er halvert?

Kari kjøper en fire år gammel bil for $200\ 000$ kroner.

Bilens verdi har sunket med 10 % hvert år siden den var ny.

Vi regner med at denne verdireduksjonen vil fortsette de neste årene.

Bilens verdi $V(x)$, x antall år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved uttrykket

$$V(x) = 200\ 000 \cdot 0,90^x$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen V.

Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var nærmere 305 000 kroner.

Eksempel

Adam setter 5 000 kroner i banken. Rentefoten er 2,0 % per år. Hvor lenge må pengene stå i banken før det står 5 500 kroner på kontoen?

Løsning

Vi kan sette opp en likning hvor x er tiden pengene må stå i banken

$$5\ 000 \cdot 1,02^x = 5\ 500$$

En slik likning kalles en eksponentiallikning fordi den ukjente opptrer som eksponent i en potens.

Vi kan løse likningen direkte i et digitalt verktøy. Vi bruker «GeoGebra» og får

1	5000*1.02^x=5500 ✓ $5000 \cdot 1.02^x = 5500$
2	5000*1.02^x=5500 NLøs: $\{x = 4.81\}$

Pengene må stå i banken i nesten fem år før det står 5 500 kroner på kontoen.

Statistikk

Teori

Innledning

Innledning

Innledning (91439)

Ordet **statistikk** ble opprinnelig brukt om beskrivelser av stats- eller samfunnsforhold. Statistikk handler om å samle inn og ordne opplysninger på en hensiktsmessig måte, og om å trekke konklusjoner og treffe beslutninger på grunnlag av datamaterialet.

Data som er samlet inn og analysert, kalles også statistikk.

Statistisk sentralbyrå

I Norge ble det i 1797 opprettet et eget statistikkontor i Finansdepartementet. Omtrent 80 år senere, i 1876, ble Statistisk sentralbyrå (SSB) etablert som egen institusjon.

Statistisk sentralbyrå har hovedansvaret for å dekke behovet for statistikk om det norske samfunnet og produserer 85 – 90 % av all norsk offisiell statistikk. Byrået har ca. 1200 ansatte.

Statistikken fra SSB kommer hovedsakelig fra to kilder: Administrative registre og spørreundersøkelser. I tillegg hentes stadig flere opplysninger direkte fra bedrifters og kommuners datasystem.

I 1876 ble Statistisk sentralbyrå etablert som egen institusjon.

Du kan lese mer om Statistisk sentralbyrå og finne resultater innenfor ulike statistikkområder på www.ssb.no.

Statistikk handler blant annet om å samle inn og ordne opplysninger på en hensiktsmessig måte. Håndpunchemaskinen ovenfor ble brukt under folketellingen i Norge i 1900. Den var et av de første tekniske hjelpemidlene Statistisk Sentralbyrå tok i bruk.

Hvorfor er statistikk viktig?

Offisiell statistikk gir oss som nasjon et felles faktagrunnlag. Det er viktig for et levende demokrati.

Statistikk gir informasjon om forskjeller og sammenhenger i samfunnet – mellom grupper, over tid og over landegrenser. Statistikk skal speile samfunnet og vise utviklingstrekk for folket og levekår, økonomi, miljø og næringsvirksomhet.

Befolkning

Den første fullstendige folketellingen i Norge ble holdt i 1769. Folketallet var den gang 723 618. Her ser du en avskrift av et dokument som viser noen resultater fra denne folketellingen.

Befolkning er et av SSB statistikkområder. SSB holder blant annet oversikt over folketallet, hvor mange som blir født, hvor mange som dør, innvandring, ekteskap og flyttinger.

Informasjonen som kommer fram her, er viktig i mange sammenhenger. For eksempel er informasjon om fødselstallene i 2009 en del av grunnlaget for de beslutninger politikere må ta i forbindelse med fremtidige behov for lærere og skolebygninger.

Noen resultater fra folketellingen i 1769.

Statistisk sentralbyrå
Statistics Norway

Nøkkeltall:	
Folketall pr. 1.7.2010:	4 888 000
2009	
Innvandring:	66 961
Utvandring:	23 615
Befolkningsvekst:	58 947
Levendefødte:	61 807
Døde:	41 449
Par som giftet seg:	24 793
Par som skilte seg:	10 235

Folketallet i Norge akkurat nå:

4 907 315

Folketallet i verden akkurat nå:

6 877 924 356

Kilde: US Census

Utviklingen i folketallet i Norge fra 1735-2010

Statistisk undersøkelse

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Statistisk undersøkelse (91451)

Mary Ann har fått karakteren fire på en matematikkprøve. Hun er litt usikker på hvor god karakteren er sammenliknet med karakterene til de andre elevene i klassen.

For å finne ut hvilke karakterer de andre elevene har fått, kan Mary Ann foreta en statistisk undersøkels

I Store norske leksikon står det at «statistikk er vitenskapen for planlegging av undersøkelser, innsamling og presentasjon av tallmateriale, og analyse og beslutninger ut fra innsamlede data». (Kilde http://snl.no/statistikk (27.10.2010))

Mary Ann må altså først **planlegge** en undersøkelse. Videre må hun **gjennomføre** selve undersøkelsen og samle inn tallmateriale. Så må hun **presentere tallmaterialet**. Til slutt må hun **analysere resultatet**, trekke konklusjoner og ta eventuelle **beslutninger**.

Planlegging

Først må Mary Ann planlegge hvordan hun skal gjennomføre undersøkelsen. Hun kan spørre læreren om å få se karakterlisten, men han vil sannsynligvis si at han har taushetsplikt. Hun kan spørre alle elevene i klassen, men kanskje er det mange som ikke vil si hvilken karakter de har fått. Kanskje er det en idé å lage et skjema som elevene i klassen fyller ut anonymt? Men er det da sikkert at alle er ærlige? Som du skjønner, er det mange problemstillinger som dukker opp allerede i planleggingen av en liten undersøkelse.

Gjennomføring

På grunnlag av planleggingen gjennomfører May Ann selve undersøkelsen. Dette kan ofte være tidkrevende og praktisk vanskelig. Hvis matematikkprøven er en prøve midt i terminen, og elevene fortsetter i samlet matematikkgruppe, er det relativt enkelt å gjennomføre undersøkelsen. Men hvis det er en avsluttende matematikkprøve for året, og klassen ikke har flere matematikktimer, er det mye vanskeligere. Ekstra vanskelig blir det etter at elevene har sluttet ved skolen.

Presentasjon av tallmateriale

Tabeller -Frekvens -Relativ frekvens -Kumulativ frekvens

Tabeller - Frekvens - Relativ frekvens - Kumulativ frekvens (91457)

La oss tenke oss at Mary Ann har gjennomført undersøkelsen og funnet at følgende karakterer ble gitt på matematikkprøven:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1
4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5 5 4

For å få bedre oversikt kan hun samle tallmaterialet i en tabell. Første kolonne viser hvilke karakterer det er mulig å få. Neste kolonne er en tellekolonne. Tredje kolonne viser hvor mange ganger den enkelte karakteren forekommer. Dette kalles for **frekvensen** til den enkelte karakteren. Siste kolonne viser hvor mange som har fått lik eller lavere karakter. For eksempel viser tabellen at 17 elever har fått karakteren 3 eller lavere. Dette kaller vi **kumulativ frekvens**.

Karakter	Tellekolonne	Frekvens	Kumulativ frekvens
1	II	2	2
2	~~IIII~~ III	8	10
3	~~IIII~~ II	7	17
4	~~IIII~~	5	22
5	~~IIII~~ II	7	29
6	I	1	30

Det er en fordel å lage tabellen i et regneark. Da kan vi lage formler som beregner det vi ønsker. Husk at formler kan kopieres! Når vi har laget formler, vil tallene i formelrutene automatisk endre seg når tallene i rutene formlene henviser til, endres.

I regnearket har vi satt opp tabellen. Du kan også se hvilke formler vi har brukt.

	A	B	C
1	Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens
2	1	2	2
3	2	8	10
4	3	7	17
5	4	5	22
6	5	7	29
7	6	1	30
8	Sum	30	

	A	B	C
1	Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens
2	1	2	=B2
3	2	8	=C2+B3
4	3	7	=C3+B4
5	4	5	=C4+B5
6	5	7	=C5+B6
7	6	1	=C6+B7
8	Sum	=SUMMER(B2:B7)	

Frekvensen forteller hvor mange som har fått en gitt karakter. For å sammenlikne med andre klasser eller grupper, er det mer hensiktsmessig å vite hvor stor andel av gruppen som har fått en gitt karakter. Dette kaller vi **relativ frekvens**. Den relative frekvensen kan vi også oppgi i prosent.

Den relative frekvensen for karakteren 3 er

$$\frac{7}{30} = 0,23 = \frac{23}{100} = 23\ \%$$

Relativ frekvens gjør det enkelt å sammenlikne med andre grupper uansett antall. I regnearket er det lurt å lage to kolonner for relativ frekvens. Den ene kolonnen viser relativ frekvens som andel av gruppen. Den andre kolonnen viser relativ frekvens i prosent. I denne kolonnen velger vi prosentformat.

Den relative kumulative frekvensen for karakteren 3 er

$$\frac{17}{30} = 0,57 = \frac{57}{100} = 57\ \%$$

57 % av elevene har altså fått karakteren 3 eller lavere.

Disse beregninger kan vi også gjøre i et regneark. Se tabellen.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Relativ frekvens i prosent	Kumulativ frekvens	Relativ kumulativ frekvens	Relativ kumulativ frekvens i prosent
2	1	2	0,07	7 %	2	0,07	7 %
3	2	8	0,27	27 %	10	0,33	33 %
4	3	7	0,23	23 %	17	0,57	57 %
5	4	5	0,17	17 %	22	0,73	73 %
6	5	7	0,23	23 %	29	0,97	97 %
7	6	1	0,03	3 %	30	1,00	100 %
8	Sum	30	1,00	100 %			

Formlene vi har brukt

	A	B	C	D	E	F	G
1	Karakter	Frekvens	Relativ frekvens	Relativ frekvens i prosent	Kumulativ frekvens	Relativ kumulativ frekvens	Relativ kumulativ frekvens i prosent
2	1	2	=B2/$B$8	=C2	=B2	=E2/$B$8	=F2
3	2	8	=B3/$B$8	=C3	=E2+B3	=E3/$B$8	=F3
4	3	7	=B4/$B$8	=C4	=E3+B4	=E4/$B$8	=F4
5	4	5	=B5/$B$8	=C5	=E4+B5	=E5/$B$8	=F5
6	5	7	=B6/$B$8	=C6	=E5+B6	=E6/$B$8	=F6
7	6	1	=B7/$B$8	=C7	=E6+B7	=E7/$B$8	=F7
8	Sum	=SUMMER(B2:B7)	=SUMMER(C2:C7)	=SUMMER(D2:D7)			

Søylediagram/stolpediagram

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Søylediagram/stolpediagram (91784)

La oss tenke oss at Mary Ann har gjennomført undersøkelsen og funnet at følgende karakterer ble gitt på matematikkprøven:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1 4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5 5 4

Et **søylediagram**, eller **stolpediagram**, gir visuelt en bedre oversikt over karakterfordelingen.

Vi kan tegne søylediagrammet på papir eller i et regneark.

I regnearket Excel merker vi frekvenskolonnen og velger «Sett inn» og ønsket stolpediagram. Ved å velge «Utforming» kan vi finne fram til ønsket oppsett og format for diagrammet.

Et **søylediagram** egner seg godt til å **presentere** et tallmateriale der dataene fordeler seg på et begrenset antall verdier eller kategorier. (I vårt eksempel fordeler dataene seg på seks karakterer.)

Frekvensdiagrammet viser hvor mange elever som fikk de enkelte karakterene.

Diagrammet for kumulativ frekvens viser hvor mange elever som fikk lik eller lavere karakter enn den angitte.

En stor fordel med søylediagram er at de kan gi en **oversikt over flere forhold samtidig.**

Eksempel

Ved en skole er det 840 elever, 360 jenter og 480 gutter. Skolen skal arrangere tur. Elevene kan velge om de vil delta. En undersøkelse viser at 320 av jentene og 340 av guttene ønsker å delta.

Hvordan kan vi presentere resultatene slik at det tydelig går fram hvor mange elever som ønsker å delta på turen samtidig som vi får fram forskjeller mellom jentene og guttene?

En mulighet er å lage en krysstabell (slik vi gjorde da vi arbeidet med sannsynlighetsregning i 1P). Vi velger så et «stablet stolpediagram». Se tabell og diagram nedenfor.

	A	B	C	D
1		Jenter	Gutter	Sum
2	Ønsker å delta	320	340	660
3	Ønsker ikke å delta	40	140	180
4	Sum	360	480	840

I et regneark kan du legge de oppgitte verdiene (markert med rødt) inn i en tabell. Resten av feltene kan du fylle ut med formler.

Sektordiagram

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Sektordiagram (91790)

La oss tenke oss at Mary Ann har gjennomført undersøkelsen og funnet at følgende karakterer ble gitt på matematikkprøven:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1 4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5 5 4

Et **sektordiagram** egner seg spesielt godt til å **vise hvor stor andel en verdi eller kategori i et tallmateriale utgjør i forhold til helheten.**

Vi ser igjen på karakterfordelingen på matematikkprøven i klassen til Mary Ann.

Karakter	Frekvens
1	2
2	8
3	7
4	5
5	7
6	1

Sektordiagrammet til høyre er laget i et regneark.
I regnearket Excel merker vi frekvenskolonnen og velger «Sett inn» og ønsket sektordiagram. Ved å velge «Utforming» kan vi finne fram til ønsket oppsett og format for diagrammet.

Arealet av hver sirkelsektor illustrerer andelen elever som har fått den aktuelle karakteren.

For å tegne et sektordiagram på papir trenger vi en **passer** og en **gradskive**. Før vi kan tegne, må vi gjøre noen beregninger.

Vi kan dele en sirkel inn i 360∘.

Siden det til sammen er 30 elever i klassen, må hver elev tilsvare $\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$ av sirkelen.

Vi kan da sette opp følgende tabell:

Karakter	Frekvens	Grader
1	2	$2 \cdot 12° = 24°$
2	8	$8 \cdot 12° = 96°$
3	7	$7 \cdot 12° = 84°$
4	5	$5 \cdot 12° = 60°$
5	7	$7 \cdot 12° = 84°$
6	1	$1 \cdot 12° = 12°$

Nå kan vi tegne en sirkel ved hjelp av en passer og bruke gradskiven til å avmerke størrelsen på sirkelsektorene.

Legg merke til at 1 % alltid svarer til $\frac{360^\circ}{100} = 3,6^\circ$.

Linjediagram/kurvediagram

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Linjediagram/kurvediagram (91794)

Linjediagram, eller kurvediagram, egner seg best når vi ser på en utvikling over tid. For eksempel vil et tallmateriale som viser antall arbeidsledige over en tidsperiode, være gunstig å presentere i et kurvediagram.

Fra statistisk sentralbyrå kan vi hente opplysninger om for eksempel antall arbeidsledige menn og kvinner i Norge over en tidsperiode.

Kurvediagrammene ovenfor illustrerer utviklingen fra 1996 til 2008.

Ulike dataframstillinger – ulike inntrykk

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Ulike dataframstillinger – ulike inntrykk (91800)

Ulike dataframstillinger kan gi ulike inntrykk selv om tallmaterialet som er grunnlaget for framstillingene er de samme.

Nedenfor ser du to diagrammer som viser utslippene av karbondioksid i Norge i perioden 1998 til 2008. Tallene er hentet fra Statistisk sentralbyrå.

Det første kurvediagrammet gir inntrykk av at utslippene i perioden har vært relativt stabile selv om det har vært en svak økning.

Det andre diagrammet beskriver den samme utviklingen, men her er andreaksen kuttet og viser bare verdier mellom 39 og 46 millioner tonn. Det umiddelbare inntrykket er at utslippene har økt kraftig i perioden.

Som du ser, kan altså valget av skala på andreaksen bety mye for hvilket inntrykk leseren får av et diagram.

Sentralmål

Sentralmål- typetall

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Sentralmål- typetall (91804)

Sentralmål er verdier som forteller oss noe om resultatet for en gruppe som helhet. Sentralmålene sier noe om hvor tyngdepunktet av observasjoner ligger. Vanlige sentralmål er **typetall, gjennomsnitt og median**. For å forklare disse begrepene ser vi igjen på resultatene fra matematikkprøven i klassen til Mary Ann:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1 4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5
5 4

Typetallet er den verdien i et tallmateriale som er «mest typisk», dvs. den verdien som forkommer flest ganger. På matematikkprøven var det hele åtte elever som fikk karakteren 2. Karakteren 2 forekom oftest. Typetallet for dette datamaterialet er derfor 2.

Karakter	Frekvens
1	2
2	8
3	7
4	5
5	7
6	1

Det er ikke alltid slik at typetallet gir et riktig inntrykk av gruppen som helhet. Gjennomsnittet gir ofte bedre informasjon.

Sentralmål- gjennomsnitt

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Sentralmål- gjennomsnitt (91810)

Sentralmål er verdier som forteller oss noe om resultatet for en gruppe som helhet. Sentralmålene sier noe om hvor tyngdepunktet av observasjoner ligger. Vanlige sentralmål er **typetall, gjennomsnitt og median**.

For å forklare disse begrepene ser vi igjen på resultatene fra matematikkprøven i klassen til Mary Ann:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1 4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5 5 4

Vi finner gjennomsnittskarakteren ved å summere verdiene av alle karakterene og så dividere med antall karakterer.

Karakter	Frekvens	
x	f	$x \cdot f$
1	2	2
2	8	16
3	7	21
4	5	20
5	7	35
6	1	6
Sum	30	100
Gjennomsnitt $\bar{x} = 3{,}3$		

Siden karakteren 2 forekom åtte ganger, kan vi for eksempel multiplisere to med åtte for å finne summen av karakterverdiene til de elevene som fikk karakteren 2.

Gjennomsnittskarakteren blir da

$$\bar{x} = \frac{2\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+5\cdot4+7\cdot5+1\cdot6}{30}$$
$$= \frac{100}{30} \approx 3,3$$

Vi kan også gjøre disse utregningene i et regneark. Med utgangspunkt i frekvenstabellen kan vi lage en ny kolonne hvor hver celle inneholder summen av karakterverdiene til hver karakter, $x \cdot f$.

Siste rad i hver kolonne viser summen av henholdsvis antall karakterer og summen av alle karakterverdier. Vi finner gjennomsnittskarakteren ved å dividere disse celleverdiene med hverandre. Se nedenfor.

	A	B	C
1	Karakter	Frekvens	
2	x	f	$x \cdot f$
3	1	2	2
4	2	8	16
5	3	7	21
6	4	5	20
7	5	7	35
8	6	1	6
9	Sum	30	100
10			
11	Gjennomsnitt		3,33

	A	B	C
1	Karakter	Frekvens	
2	x	f	$x \cdot f$
3	1	2	=A3*B3
4	2	8	=A4*B4
5	3	7	=A5*B5
6	4	5	=A6*B6
7	5	7	=A7*B7
8	6	1	=A8*B8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)	=SUMMER(C3:C8)
10			
11	Gjennomsnitt		=C9/B9

Sentralmål- median

Sentralmål- median (91815)

Sentralmål er verdier som forteller oss noe om resultatet for en gruppe som helhet. Sentralmålene sier noe om hvor tyngdepunktet av observasjoner ligger. Vanlige sentralmål er **typetall, gjennomsnitt og median**.

For å forklare disse begrepene ser vi igjen på resultatene fra matematikkprøven i klassen til Mary Ann:

4 2 5 3 3 2 5 4 1 3 2 2 5 3 1 4 2 5 3 2 4 3 6 2 5 3 2 5 5 4

For et utvalg av verdier hvor antallet er et oddetall, defineres medianen som den midterste verdien når alle verdiene er sortert i stigende rekkefølge.

Når antall verdier er et partall, er medianen gjennomsnittet av de to midterste verdiene.

I vårt datamateriale med 30 karakterer er medianen lik gjennomsnittet av karakter nummer $\frac{30}{2} = 15$ og karakter nummer $\frac{30}{2} + 1 = 16$ når karakterene er sortert i stigende rekkefølge.

Karakternummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Karakter	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6

14 14

Medianen blir da

$$\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Vi kan telle opp og se at de to 3'erne virkelig blir de to midterste karakterene. Vi får 14 karakterer til venstre og 14 til høyre.

Hvis antall karakterer er et oddetall, for eksempel 29, finner vi den midterste som karakter nummer

$$\frac{29+1}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Da vil det være 14 karakterer til venstre, 14 til høyre og 1 i midten, til sammen 29 karakterer.

Medianen kan vi også finne ved å se på kumulativ frekvens. I tabellen til høyre ser vi at 17 elever fikk karakteren 3 eller lavere, mens 10 elever fikk karakteren 2 eller lavere. Det må bety at karakter nummer 15 og karakter nummer 16, når karakteren er sortert stigende, begge må være treere.

Karakter	Frekvens	Kumulativ frekvens
1	2	2
2	8	10
3	7	17
4	5	22
5	7	29
6	1	30

Vi kan også finne medianen ved å bruke funksjonen «median» i et regneark.

Vurdering av sentralmål

Vurdering av sentralmål (91819)

Hvilket sentralmål er så best? I vårt eksempel var typetallet 2, medianen 3 og gjennomsnittet 3,3. Hva synes du sier mest om gruppen?

Vi ser på et annet eksempel.

Eksempel

Ti elever forteller hverandre hvor mye de tjente i sommerferien. Ni av dem har tjent ca. 10 000 kroner hver, mens én elev har arvet en rik tante og hatt en inntekt på 5 000 000 kroner.

Gjennomsnittsinntekt, 509 000 kroner. Typetall og median, 10 000 kroner. Hvilket sentralmål sier mest om gruppen?

Her at både typetall og median 10 000 kroner, mens gjennomsnittet er

$$\overline{x} = \frac{5\ 000\ 000 + 9 \cdot 10\ 000}{10}\ \text{kr}$$
$$= \frac{5\ 090\ 000}{10}\ \text{kr} = 509\ 000\ \text{kr}$$

Hvilket sentralmål synes du her sier mest om gruppen?

Vanligvis har vi ikke tilgang til alt tallmateriell i en statistisk undersøkelse. Vi får bare opplyst ett eller flere nøkkeltall, og så må vi selv tolke tallene.

Hvis du får opplyst at gjennomsnittsinntekten for elevene i en klasse er 500 000 kroner, vil antakelig opplysninger om typetall og median være nyttige for å få et mer riktig bilde av inntektene til elevene i klassen.

Eksempelet illustrerer hvordan statistikk kan brukes, bevisst eller ubevisst, på en slik måte at bildet av virkeligheten ikke blir riktig.

Spredningsmål

Spredningsmål

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Spredningsmål (91820)

Vi har nå sett at vi trenger flere typer sentralmål fra en statistisk undersøkelse for å gi et mest mulig riktig bilde av virkeligheten. Ofte er heller ikke det tilstrekkelig. Derfor bruker vi også **spredningsmål**.

Spredningsmål er, som sentralmål, verdier som forteller oss noe om resultatet for en gruppe som helhet. Mens sentralmålene sier noe om hvor tyngdepunktet av observasjoner ligger, forteller spredningsmålene noe om hvor stor spredning det er på observasjonsverdiene. Vanlige spredningsmål er **variasjonsbredde, kvartilbredde, varians** og **standardavvik**.

Variasjonsbredde

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Variasjonsbredde (91824)

Variasjonsbredde er **forskjellen mellom høyeste og laveste observasjonsverdi**.

I karakterstatistikken vår (Tabeller - Frekvens - Relativ frekvens - Kumulativ frekvens) er variasjonsbredden $6 - 1 = 5$. Det skiller altså 5 karakterer mellom høyeste og laveste karakter. I statistikker over for eksempel inntekter er variasjonsbredden veldig nyttig kunnskap.

Variasjonsbredden er et mål for spredning i et datamateriale, men vær oppmerksom på at en enkelt observasjonsverdi her kan gi stort utslag.

Kvartilbredde

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Kvartilbredde (91875)

Når antall verdier i et utvalg er et partall, deler medianen verdiene i to deler med like mange verdier i hver. Når antall verdier i et utvalg er et oddetall deler medianen «restverdiene når vi holder medianen utenfor» i to deler med like mange verdier i hver.

Vi finner så «den midterste verdien» i hver del etter samme metode vi brukte for å finne medianen.

Disse «midtverdiene» kalles for henholdsvis **nedre kvartil** og **øvre kvartil**.

Kvartilbredden er forskjellen mellom øvre og nedre kvartil, $5 - 2 = 3$.

Karakternummer		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Karakter		1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3		3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6
							Nedre kvartil er 2																Øvre kvartil er 5									

Vi har delt datamaterialet i fire deler, kvartiler (en kvart er en firedel). Nedre kvartil er verdien «mellom» de to nederste kvartilene, og øvre kvartil er verdien «mellom» de to øverste kvartilene. Medianen er verdien mellom de to midterste kvartilene.

Kvartilbredden forteller oss hvor stor spredning det er i den halvdelen av datamaterialet som ligger nærmest medianen.

Standardavvik

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Standardavvik (91885)

Standardavvik er et mye brukt mål for spredning. Standardavviket sier noe om hvor langt de enkelte verdiene i gjennomsnitt ligger fra gjennomsnittsverdien.

Standardavvik er et mye brukt mål for spredning. Standardavviket sier noe om hvor langt de enkelte verdiene i gjennomsnitt ligger fra gjennomsnittsverdien.
For hver verdi regner vi ut avstanden til gjennomsnittsverdien. Hver avstand kvadreres, og så summeres alle kvadratene. Summen deles på antall verdier. Det tallet vi da får, kalles **varians**. Standardavviket er kvadratroten av variansen.

Eksempel

Vi skal igjen se på karakterfordelingen på matematikkprøven i klassen til Mary Ann.

Karakter	Frekvens		
x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
1	2	2	$(1-3{,}33)^2 \cdot 2 \approx 10{,}89$
2	8	16	$(2-3{,}33)^2 \cdot 8 \approx 14{,}15$
3	7	21	$(3-3{,}33)^2 \cdot 7 \approx 0{,}76$
4	5	20	$(4-3{,}33)^2 \cdot 5 \approx 2{,}24$
5	7	35	$(5-3{,}33)^2 \cdot 7 \approx 19{,}52$
6	1	6	$(6-3{,}33)^2 \cdot 1 \approx 7{,}13$
Sum	30	100	54,69
Gjennomsnitt	$\bar{x} = \frac{100}{30} \approx 3{,}33$		
Varians	$\frac{54{,}69}{30} \approx 1{,}82$		
Standardavvik	$\sqrt{1{,}82} \approx 1{,}35$		

Vi regner ut avstanden fra karakteren 1 til gjennomsnittskarakteren 3,3. Svaret opphøyes i andre potens $(1-3,3)^2 = 5,29$. Siden karakteren 1 forekommer to ganger, og vi skal summere alle tallene, ganger vi 5,29 med 2 og får 10,89.

Vi gjør det samme med de andre karakterverdiene. Så summerer vi alle kvadratene og får summen 54,69.

For å holde oversikten er det lurt å sette opp utregingene i en tabell slik vi har gjort ovenfor.

Summen deles på antall karakterer, og tallet vi får, kalles for **variansen**.

Standardavviket er kvadratrota av variansen.

Det er tidkrevende å finne varians og standardavvik ved å regne som vist ovenfor, så **her er det viktig at du lærer å bruke et digitalt verktøy på en effektiv måte.**

Nedenfor har vi gjort tilsvarende beregninger i et regneark.

	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
3	1	2	2	10,89
4	2	8	16	14,22
5	3	7	21	0,78
6	4	5	20	2,22
7	5	7	35	19,44
8	6	1	6	7,11
9	Sum	30	100	54,67
10				
11	Gjennomsnitt		3,33	
12	Varians		1,82	
13	Standardavvik		1,35	

Og, her ser du hvilke formler vi har brukt i de ulike cellene:

	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
3	1	2	=A3*B3	=(A3-$C$11)^2*B3
4	2	8	=A4*B4	=(A4-$C$11)^2*B4
5	3	7	=A5*B5	=(A5-$C$11)^2*B5
6	4	5	=A6*B6	=(A6-$C$11)^2*B6
7	5	7	=A7*B7	=(A7-$C$11)^2*B7
8	6	1	=A8*B8	=(A8-$C$11)^2*B8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)	=SUMMER(C3:C8)	=SUMMER(D3:D8)
10				
11	Gjennomsnitt		=C9/B9	
12	Varians		=D9/B9	
13	Standardavvik		=ROT(C12)	

Legg merke at du også kan finne gjennomsnitt, median, varians og standardavvik direkte, hvis du bruker et regneark og legger inn hele datamaterialet som vist nedenfor.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
1	Karakterer																													
2	4	2	5	3	3	2	5	4	1	3	2	2	5	3	1	4	2	5	3	2	4	3	6	2	5	3	2	5	5	4
3																														
4	Gjennomsnitt					3,33																								
5	Median					3,00																								
6																														
7	Varians					1,82																								
8	Standaravvik					1,35																								

Her ser du formlene som er brukt:

4	Gjennomsnitt	=GJENNOMSNITT(A2:AD2)
5	Median	=MEDIAN(A2:AD2)
6		
7	Varians	=VARIANSP(A2:AD2)
8	Standaravvik	=STDAVP(A2:AD2)

Tre nye viktige begreper!

Forklar hva variasjonsbredde, kvartilbredde og standardavvik er.

Legg merke til at vi bruker kommandoene VARIANSP og STDAVP for å finne varians og standardavvik for hele populasjonen (P), dvs. hele datamaterialet.

Hvis vi bruker VARIANS og STDAV, vil vi få estimerte verdier basert på utvalg.

Gruppert datamateriale

Gruppert datamateriale

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Gruppert datamateriale (91902)

I Norge blir det hvert år foretatt en statistisk undersøkelse av høydene til vernepliktige rekrutter. Her ville frekvenstabellen bli veldig stor hvis alle mulige høyder skulle tas med, derfor er høydene inndelt i grupper eller klasser.

Hvor høy er en vernepliktig rekrutt?

Tabellen nedenfor er hentet fra Statistisk sentralbyrå.

		Prosentvis fordeling av vernepliktige etter høyde							
År	Gjennomsnitts-høyde (cm)	Under 165 cm	165-169 cm	170-174 cm	175-179 cm	180-184 cm	185-189 cm	190-194 cm	195 cm og over
1910	171	12,8	26	32,3	20,4	6,8	1,7	..	..
1920	171,4	12,3	24,4	32,6	21,3	7,7	1,7	..	..
1937	173,8	6,5	17,3	30,8	27,4	13,2	4,8	..	..
1952	176,2	3	10,5	25,4	30,4	21,5	7,4	1,6	0,2
1960	177,1	2,4	8,3	22,8	31,1	23,4	9,6	2,1	0,3
1970	178,7	1,4	5,6	17,2	28,9	29,2	13,5	3,7	0,5
1980	179,4	1	4,8	15,6	27,6	29,9	15	5,2	0,8
1990	179,7	1,1	4,7	15,1	27,1	28,9	16,2	5,7	1,3
2000	179,9	1,4	4,5	14,5	25,9	29,2	16,9	6,1	1,5
2008	179,7	1,2	4,9	15,4	26,8	28,2	16,5	5,7	1,3

Vi ser nærmere på tallene for 1910. Tabellen til høyre viser antall i de ulike klassene/gruppene av et representativt utvalg på tusen rekrutter fra 1910. Vi har valgt å plassere alle med høyde under 165 cm i en klasse med høyder fra 155 cm til 165 cm.

Klassene er markert som halvåpne intervaller. For eksempel er klassen fra og med 175 cm til 180 cm markert med det halvåpne intervallet $[175, 180>$. En rekrutt med høyden 175 cm tilhører denne klassen, men ikke en rekrutt med høyde 180 cm. For denne klassen er 175 cm nedre klassegrense, og 180 cm er øvre klassegrense.

Rekruttthøyder 1910	
Høyde i cm	Frekvens
[155,165)	128
[165,170)	260
[170,175)	323
[175,180)	204
[180,185)	68
[185,190)	17
[190,200)	-

Vi ønsker å presentere datamaterialet fra tabellen i et diagram. Da får vi et problem. Den første klassen er nemlig dobbelt så bred som den neste. Et vanlig søylediagram vil gi en søyle som er dobbelt så høy i forhold til om vi hadde fordelt de 128 rekruttene i to klasser med lik klassebredde.

Rekruttthøgder 1910		Histogramhøgd = $\frac{\text{Frekvens}}{\text{Klassebredde}}$
Høgd i cm	Frekvens	
[155,165)	128	12,8
[165,170)	260	52
[170,175)	323	64,6
[175,180)	204	40,8
[180,185)	68	13,6
[185,190)	17	3,4
[190,200)	-	

I stedet for å dele den store klassen i to klasser løser vi problemet ved å regne ut «hvor mange rekrutter det er på hver centimeter» i de forskjellige klassene. I klassen $[155, 165>$ er det 128 rekrutter. Klassebredden er 10 cm. Det vil si at det i gjennomsnitt er $\frac{128}{10} = 12,8$ rekrutter per centimeter i denne klassen. I klassen $[165, 170>$ er det 260 rekrutter. Klassebredden er 5 cm. Det vil si at det er $\frac{260}{5} = 52$ rekrutter per centimeter i denne klassen.

Antall rekrutter per centimeter kaller vi for **histogramhøyde**, og vi bruker dette som høyde på søyler i et spesielt diagram som vi kaller histogram.

Histogrammet tegnes i GeoGebra med kommandoen

«Histogram[<Liste med klassegrenser>,<Liste med høyder>]»
«Histogram[{155,165,170,175,180,185,190,200},{12.8,522,64.6,40.8,13.6,3.4,0}]»I et histogram må vi multiplisere histogramhøyden med klassebredden for å finne antall rekrutter i klassen.

I klassen $[155, 165>$ er histogramhøyden 12,8. Antall rekrutter i klassen er

$$12,8 \cdot 10 = 128$$

I klassen $[165, 170>$ er histogramhøyden 52. Antall rekrutter i klassen er

$$52 \cdot 5 = 260$$

Sentralmål i et gruppert datamateriale

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Sentralmål i et gruppert datamateriale (91921)

I et gruppert datamateriale vet vi ikke nøyaktig verdi på observasjonene. Vi vet for eksempel ikke nøyaktig høyde på rekruttene, bare hvor mange det er i de enkelte gruppene eller klassene.

Medianen er den midterste observasjonsverdien når alle observasjonsverdiene er sortert i stigende rekkefølge. I vårt eksempel har vi 1000 rekrutter. Medianen er høyden til rekrutt nummer

$\frac{1000+1}{2} = 500,5.$

Medianen er altså gjennomsnittshøyden til rekrutt nummer 500 og rekrutt nummer 501.

Vi legger til en ekstra kolonne i tabellen med kumulativ frekvens. Da ser vi at **388** rekrutter har høyde lavere enn 170 cm og **711** rekrutter har høyde som er lavere enn 175 cm. Medianen må altså ligge i klassen $[170, 175>$. **Dette er det eneste sikre vi kan si om medianen.**

Det er mulig å finne en mer presis verdi for medianen, men da må vi gjøre noen forutsetninger. Vi antar at rekruttene i klassen $[170, 175>$ er jevnt fordelt på alle høydene i klassen. Dette er ikke sikkert, men jo større antall det er i klassen, jo mer sannsynlig er det. Den medianen vi nå finner, er derfor bare **den medianen som er mest sannsynlig**. Vi velger at medianen er høyden til rekrutt nummer 500.

I klassen $[170, 175>$ er det 323 rekrutter. Rekrutt nummer 500 er rekrutt nummer $500 - 388 = 112$ fra venstre klassebredde. Hvis vi tenker oss at det er like mange rekrutter på hver høyde i klassen, så finner vi en tilnærmet verdi for medianhøyden slik

$$\text{Medianen} = \left(170 + \frac{112}{323} \cdot 5\right)\text{cm} = 171,7 \text{ cm}$$

Gjennomsnittshøyden blir heller ikke en eksakt verdi. For å finne en tilnærmet riktig verdi lar vi alle rekrutter i samme klasse ha samme høyde, nemlig klassemidtpunktet. Klassemidtpunktet regnes ut som middelverdien av nedre og øvre klassegrense. For eksempel er klassemidtpunktet i klassen fra og med 175 cm til 180 cm gitt ved

$$\overline{x} = \frac{175+180}{2}\text{cm} = 177,5 \text{ cm}$$

For å finne en tilnærmet riktig verdi for gjennomsnittshøyden bruker vi tilsvarende metode som vi brukte for å finne gjennomsnittskarakteren i klassen til Mary Ann.

Nedre klassegrense	Øvre klassegrense	Klassemidtpunkt x	Frekvens f	$x \cdot f$
155	165	160	128	20480
165	170	167,5	260	43550
170	175	172,5	323	55717,5
175	180	177,5	204	36210
180	185	182,5	68	12410
185	190	187,5	17	3187,5
190	200	195	0	0
		Sum	1000	171555
			Gjennomsnittshøyde	171,6

Modellering

Teori

Innledning

Innledning

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Innledning (92075)

Formelen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, som viser sammenhengen mellom radius i en kule og volumet av kula, er et eksempel på **en matematisk modell**. Hvis vi kjenner radius i en kule, kan vi bruke modellen til å regne ut volumet av kula. Motsatt kan modellen brukes til å regne ut radius når vi kjenner volumet.

Hvordan vil du gå fram for å finne diameteren til en ball?

Å lage matematiske modeller som viser sammenhengen mellom ulike størrelser, kalles å **modellere**. Ved hjelp av en modell prøver vi å beskrive virkeligheten med matematikk.

Modellering er viktig i mange sammenhenger.

Meteorologer lager modeller for å kunne forutsi været.

Jordskjelvforskere lager modeller for å prøve å forutsi hvor jordskjelv vil inntreffe, når skjelvene vil inntreffe, og hvor kraftige vi kan forvente at de blir. Disse modellene kan gi informasjon om hvordan bygninger, broer osv. bør dimensjoneres for at de ikke skal falle sammen under et jordskjelv.

Økonomer lager modeller som for eksempel viser sammenhengen mellom inntjening og antall produserte vareenheter. Modellene kan da si noe om hvor mange vareenheter det lønner seg å produsere.

I mange matematiske modeller er tiden en av størrelsene som inngår. Slike modeller er spesielt interessante fordi de kan si noe om hva som kan skje i fremtiden.

Lineære modeller og lineær regresjon

Lineære modeller og lineær regresjon

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Lineære modeller og lineær regresjon (92428)

En matematisk modell kan være en formel som viser sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. Når formelen er av typen

$$y = ax + b$$

der *a* og *b* er konstanter, har vi **en lineær matematisk modell**. Grafene som beskriver slike sammenhenger, er rette linjer. Derav navnet lineær modell.

Når vi modellerer, prøver vi å finne en formel som viser sammenhengen mellom to størrelser. Målinger i praktiske forsøk kan gi oss data som viser noen sammenhørende verdier. Vi plotter datamaterialet som punkter i et koordinatsystem. Hvis punktene ser ut til å ligge på **en rett linje**, tyder det på at vi har en lineær modell. Vi bruker da en metode som kalles **lineær regresjon** for å finne fram til en matematisk modell, en formel, som gir oss sammenhengen mellom størrelsene.

Vi kan gjøre dette med eller uten digitalt verktøy, men resultatene blir ofte mer nøyaktige dersom vi bruker ferdige prosedyrer (egne kommandoer) i digitale verktøy.

Modell for omkretsen av en sirkel

Vi vil undersøke sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

For å samle inn data kan vi finne sirkelformede gjenstander og måle sammenhørende verdier av radius og omkrets.

Vi kan også bruke GeoGebra til å finne noen sammenhørende verdier.

Bruk GeoGebra til å tegne fire sirkler med radius henholdsvis 0,310 cm, 1,40 cm, 2,30 cm og 3,30 cm.

Bruk deretter «Avstand eller lengde – knappen» til å måle omkretsen av sirklene.

Å finne en lineær modell uten bruk av digitale..

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Å finne en lineær modell uten bruk av digitale verktøy (92443)

Hvis du ikke har digitale verktøy tilgjengelig, kan du finne lineære modeller ved hjelp av blyant og papir.

Sett resultatene opp i en tabell.

Radius	0,310	1,40	2,30	3,30
Omkrets	1,95	8,80	14,5	20,7

Plott verdiene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

Punktene ligger på en rett linje. Det betyr at det er en lineær sammenheng mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

Du har tidligere lært at likningen for en rett linje er gitt ved $y = \mathbf{ax} + b$, der *a* er stigningstallet til linjen, og *b* er skjæringspunktet med *y* - aksen.

Den rette linjen vi har tegnet, skjærer *y* - aksen i origo. Da vet vi at $b = 0$. Stigningstallet forteller hvordan *y* - verdien endrer seg når *x* - verdien øker med én enhet. For å finne stigningstallet kan du tegne en trekant som vist ovenfor og måle med linjalen. Her får vi da at $a \approx 6,28$.

Likningen for den rette linjen blir altså $y = 6,28x$.

Vi har da funnet at $y = 6,28x$ er en tilnærmet matematisk modell for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen.

Å finne en lineær modell ved bruk av digitale ..

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Å finne en lineær modell ved bruk av digitale verktøy (92445)

Vi vil som regel ikke få et helt nøyaktig resultat ved å tegne trekanter og måle med linjal. (På forrige side i menyen, Lineær regresjon, tegnet vi i GeoGebra, men hvis vi hadde tegnet og målt «for hånd», ville vi antakelig ikke kommet akkurat til 6,28 som stigningstall.) Du må derfor lære deg hvordan du bruker et digitalt verktøy for å finne en lineær modell.

Vi skal her vise hvordan du kan bruke GeoGebra.

Vi bruker samme datamateriale som på forrige side i menyen.

Radius	0,310	1,40	2,30	3,30
Omkrets	1,95	8,80	14,5	20,7

Vi legger først verdiene fra tabellen ovenfor inn i regnearket i GeoGebra.

Merk alle dataene, høyreklikk, og velg «Lag liste med punkter».

Punktene viser seg i grafvinduet, og det ser ut til at punktene ligger på en rett linje. I algebrafeltet ser du at samlingen med punkter har fått navnet «liste1».

Ved en metode som kalles **lineær regresjon**, kan du bruke GeoGebra til å finne **den lineære modellen.**

I GeoGebra skriver du

Skriv inn: **RegLin[liste1]**

Den rette linjen gjennom punktene kommer nå opp, og likningen for linjen vises i algebrafeltet. Ved å høyreklikke på formelen for linjen kan du velge at formelen skal gis på formen $y = ax + b$.

Likningen for linjen blir $y = 6,28x$.

Modell for folketallsutviklingen i Norge

Tabellen nedenfor viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2010.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Folketall	3 249 954	3 567 707	3 863 221	4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 907 315

Kilde: Statistisk sentralbyrå

Vi lager en ny tabell der *x* er antall år etter 1950, og f(*x*) er folketallet i millioner.

x	0	10	20	30	40	50	60
$f(x)$	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5	4,9

Vi plotter punktene fra tabellen i et koordinatsystem.

Punktene ligger tilnærmet på en rett linje.

Vi bruker lineær regresjon og finner at $f(x) = 0,03x + 3,3$

er en lineær matematisk modell som tilnærmet beskriver utviklingen i folketallet i Norge fra 1950 til 2010.

Hva vil folketallet i Norge være i 2030 i følge denne modellen?

I år 2030 har det gått 80 år siden 1950.

I følge modellen vil folketallet da være

$$f(80) = 0,03 \cdot 80 + 3,3 = 5,7$$

Folketallet i Norge vil altså etter denne modellen være 5,7 millioner i 2030.

Kan vi stole på matematiske modeller?

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Kan vi stole på matematiske modeller? (92450)

I kompetansemålene står det at du skal kunne vurdere hvor gyldig en modell er.

Formelen for sammenhengen mellom radius i en sirkel og omkretsen av sirkelen er et eksempel på en matematisk modell som er svært nøyaktig. Det har blitt gjort mange målinger som viser at vi kan stole på modellen.

Modellen vi fant for å beskrive hvordan folketallet i Norge utvikler seg (Lineær regresjon), er mer usikker. For det første ser vi at linjen ikke treffer punktene fra tabellen helt nøyaktig. Den linjen som fremkommer ved lineær regresjon, er den som totalt sett har minst avvik fra punktene.

Den lineære modellen har stigningstall 0,03. Det betyr en vekst i folketallet på 0,03 millioner eller 30 000 per år. Er det realistisk at folketallet her i landet vil øke med ca. 30 000 per år i tiden framover?

Er det realistisk at folketallet her i landet vil øke med 30 000 per år i tiden framover?

I følge beregninger fra Statistisk Sentralbyrå, bør samlet fruktbarhetstall være minst 2,06 - 2,07 barn per kvinne for at en befolknings størrelse skal opprettholdes på sikt. I Norge var samlet fruktbarhetstall for kvinner 1,95 i 2010.

Tallkilde: http://www.ssb.no/fodte/ (06.12.2011)

I tilfelle – hvor lenge vil denne utviklingen fortsette? Det er ikke lett å svare på dette. Her er det mange faktorer som kan virke inn. Vil politikerne begrense innvandringen til Norge, eller vil de åpne for fri innvandring? Hva med fødselspermisjoner og barnehagetilbud? Vil det bli lettere eller vanskeligere å være småbarnforeldre?

Vi kan stille liknende spørsmål til andre matematiske modeller. Vi må alltid vurdere om en matematisk modell er gyldig, og spesielt må vi ta hensyn til forhold som kan påvirke situasjonen før vi bruker en modell til å si noe om hva som vil skje i framtida.

Modell for svingetiden til en pendel

Modell for svingetiden til en pendel

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Modell for svingetiden til en pendel (92456)

På figuren til høyre ser du en skisse av en pendel. Når du drar pendelkulen ut til siden slik figuren viser, og slipper den, vil den svinge fram og tilbake.

Svingetiden til pendelen er tiden det tar fra du slipper pendelkulen, til den er tilbake i samme posisjon. Svingetiden måles i sekunder.

Svingetiden endrer seg når vi endrer lengden på snoren. Vi ønsker å finne sammenhengen mellom snorlengde og svingetid.

Praktisk oppgave
Gå sammen i små grupper. Finn en egnet plass til å henge opp en pendel. For at luftmotstanden ikke skal forstyrre målingene, bør dere bruke et relativt tungt lodd som pendelkule og la pendelsnoren være så tynn som mulig. Husk at snorlengen måles fra opphengningspunktet til midt i pendelkulen.

- Mål svingetiden for pendelen ved forskjellige snorlengder. La snorlengden variere fra 0 til 4 meter.
- Legg resultatene inn i en tabell i regnearket i GeoGebra.
- Merk tabellen, høyreklikk, og lag liste med punkter.
- Skriv etter tur

  RegLin[liste1]
  RegPoly[liste1, 2]
  RegPot[liste1]
  RegEksp[liste1]
  RegLog[liste1]

  og finn den kurven som passer best med punktene i grafvinduet.

- Finn en modell for svingtiden til pendelen.
- Vis hvordan du kan bruke modellen til å regne ut svingtiden når du kjenner snorlengden.

Potensfunksjon som modell

Potensfunksjon som modell

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Potensfunksjon som modell (92461)

Da du skulle finne en sammenheng mellom svingetid og snorlengde til en pendel, fant du kanskje en modell som likner på modellen til høyre. (Se forrige side i menyen).

I så tilfelle var det

RegPot[liste1]

som ga den grafen som falt mest sammen med verdiene du målte.

Denne modellen er en potensfunksjon.

Potensfunksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = ax^b$$

der *a* og *b* er konstante tall, og *x* er grunntallet i en potens.

Vi finner denne typen modeller ved å bruke potensregresjon.

Vi skriver da

RegPot[liste1]

i GeoGebra.

Hjemmelaget pendel.

Eksponentialfunksjon som modell

Eksponentialfunksjon som modell

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
[Eksponentialfunksjon som modell (92467)]

I algebrakapittelet så vi på eksempelet nedenfor.

Bilkjøp

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilens verdi har avtatt med 10 % hvert år siden den var ny. Vi regner med at verdien vil fortsette å avta med 10 % per år de neste årene.

Bilens verdi $V(x)$, x år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved modellen

$$V(x) = 200\,000 \cdot 0,90^x$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen V.

Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var nærmere 305 000 kroner.

Hvis verdien avtar med 10 % per år, vil bilen bare være verd halvparten av det du kjøpte den for etter 6,6 år.Vis at dette gjelder uansett hva bilen kostet da du kjøpte den.

Funksjonen V ovenfor er en **eksponentialfunksjon**.

Eksponentialfunksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = a \cdot b^x \text{ der } a \text{ og } b \text{ er konstante tall.}$$

Legg merke til at x her er eksponent i potensen.

I algebrakapittelet så vi at vi alltid kan finne matematiske modeller uttrykt ved eksponentialfunksjoner når størrelser avtar eller øker med en fast prosent.

For å finne en eksponentiell modell ved regresjon må vi bruke eksponentialregresjon. Vi skriver da

RegEksp[liste1]

i GeoGebra.

Vekst hos solsikke

Siv ville finne ut hvordan en solsikke hun hadde i hagen, vokste uke for uke. Hun målte høyden til solsikken hver uke i åtte uker. De observerte verdiene ser du i tabellen nedenfor.

Etter x uker	1	2	3	4	5	6	7	8
Høyde i cm	16	20	27	40	56	68	107	140

Vi markerer datamaterialet fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

For å finne en modell som kan brukes for å beskrive solsikkens vekst, ser det ut som vi må finne **en funksjon som vokser raskere og raskere** etter som x - verdiene øker.

Her vil det derfor være naturlig å prøve med **eksponentiell regresjon**.

Eksponentiell regresjon i GeoGebra gir

$$f(x) = 10,94 \cdot 1,38^x$$

Vi ser at kurven treffer bra med de observerte verdiene.

Etter modellen var solsikken ca. 10,9 cm da Siv begynte å måle, og den har vokst med ca. 38 % hver uke.

Det vil være naturlig at veksten til solsikken vil avta og etter hvert stoppe helt opp.

Det betyr at modellen bare gjelder i **et begrenset tidsintervall.**

Hvor mye kan en solsikke vokse i løpet av en uke?

Polynomfunksjoner som modeller

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Polynomfunksjoner som modeller (92469)

Andre- og tredjegradsfunksjoner tilhører en gruppe funksjoner som vi kaller **polynomfunksjoner**. En andregradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 2, og en tredjegradsfunksjon er en funksjon av grad 3.

Andregradsfunksjoner

Noen ganger er det en andregradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. En andregradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$$

Her er *a*, *b* og *c* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en andregradsfunksjon ved å skrive

RegPoly[liste1, 2]

(Legg merke til at siden en andregradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 2, må vi skrive «,2» etter «liste1».)

Tredjegradsfunksjoner

Andre ganger er det en tredjegradsfunksjon som best beskriver sammenhengen mellom to størrelser, *x* og *y*. En tredjegradsfunksjon er gitt på formen

$$f(x) = \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + d$$

Her er *a*, *b*, *c* og *d* konstanter, og $a \neq 0$. Hvis du har plottet sammenhørende verdier for to størrelser i grafvinduet i GeoGebra, kan du sjekke om punktene passer med en tredjegradsfunksjon ved å skrive

RegPoly[liste1, 3]

(Legg merke til at siden en tredjegradsfunksjon er en polynomfunksjon av grad 3, må vi skrive «,3» etter «liste1».)

Andre typer modeller og mønstre

Kvadrater

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Kvadrater (92474)

Figur 1 Figur 2 Figur 3

Figurene ovenfor er bygget opp av 9, 12 og 15 små kvadrater. Tenk deg at vi fortsetter å lage figurer etter samme mønster. Hvor mange små kvadrater vil det være i Figur 4, Figur 5 og Figur 6?

Antall små kvadrater i hver figur danner en serie med tall, en tallfølge, som begynner med tallene 9, 12 og 15 og fortsetter etter samme mønster i det uendelige.

Oppgave

1. Hva gjør vi for å komme fra en figur til den neste? Hva er mønsteret i det vi gjør?
2. Hvor mange små kvadrater vil det være i figur nummer 4, 5 og 6 når vi fortsetter å lage figurer etter samme mønster?
3. Kan du finne en **modell**, en formel, for antall kvadrater i figur nr n når vi fortsetter å lage figurer etter samme mønster?
4. Hvor mange kvadrater er det etter din modell i figur nummer 998?

Trekanter

Trekanter (124003)

En likesidet ΔABC har areal lik T. Midtpunktene på sidene i ΔABC er hjørnene i en ny likesidet trekant T_1 . Midtpunktene på sidene i ΔCDE er hjørnene i en ny likesidet trekant T_2. Etter samme metode lager vi trekantene T_3 , T_4, og så videre.
Denne prosessen tenker vi oss fortsetter i det uendelige. Se skissen nedenfor.

a. Hva blir arealet til trekant T_1? Hva blir arealet til trekant T_2? Hva blir arealet til trekant T_3?
b. Kan du finne en **modell**, en formel, for arealet til trekant nr n når vi fortsetter å lage trekanter etter samme mønster?
c. Hva blir arealet til trekant T_{10}? Hva blir arealet til trekant T_{1000}?
d. Studer figuren og finn ut hva som blir summen av arealene til alle trekantene T_1, T_2, T_3, og så videre.

Omkretsen av ΔABC er lik 3.

a. Hva blir omkretsen til trekant T_1? Hva blir omkretsen til trekant T_2? Hva blir omkretsen til trekant T_3?
b. Kan du finne en **modell**, en formel, for omkretsen til trekant nr n når vi fortsetter å lage trekanter etter samme mønster?
c. Hva blir omkretsen til trekant T_{10}? Hva blir omkretsen til trekant T_{1000}?

Trekanttall

Trekanttall (124016)

Følgende figurer er laget etter et bestemt mønster.

Kan du se hva som er mønteret i oppbyggingen av figurene?

Start med figur 1 og figur 2 nedenfor og ikke se på figur 3 og figur 4 ovenfor.

Klarer du selv å lage figur 3 og figur 4?

Tenk nå at vi lager figur 5, figur 6 og så videre etter samme mønster.

Kan du lage en tegning av figur 5 og figur 6?

I figur 1 er det 1 sirkel. I figur 2 er det 3 sirkler. I figur 3 er det 6 sirkler. I figur 4 er det 10 sirkler.

Hvor mange sirkler har figur 5 og figur 6?

Tallene 1, 3, 6, 10 og så videre kalles for trekanttallene. Hvorfor tror du de har fått dette navnet?

La n stå for nummer på figurene ovenfor. Tabellen nedenfor viser antall sirkler i figur nummer n når n er lik 1, 2, 3 og 4.

Kan du fylle ut tabellen opp til $n = 12$?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Trekanttall	1	3	6	10								

Kan du lage en **modell**, en **formel**, for antall sirkler i figur nr n?

Hva slags tall får du når du legger sammen to «nabo-trekanttall»?

Pascals talltrekant

Pascals talltrekant (124023)

Blaise Pascal var en kjent fransk matematiker som levde på 1600-tallet. En spesiell talltrekant har fått navnet etter Pascal selv om trekanten var kjent i mange hundre år før Pascal levde.

Blaise Pascal (1623 – 1 6 6 2) . Fransk matematiker, fysiker, oppfinner og filosof.

Du skal bli kjent med Pascals talltrekant gjennom noen oppgaver.

Oppgave 1

Lag en trekant av ruter som figuren ovenfor viser. Skriv inn tallet 1 i alle rutene langs kanten av trekanten.

Vi har begynt å fylle inn tall i resten av rutene. Ser du hvordan vi har funnet disse tallene? Fortsett etter samme mønster og fyll inn tall i alle rutene.

I trekanten ovenfor har vi valgt å lage 11 rader. Trekanten kan utvides etter samme mønster.

Oppgave 2

a) Se på tallene som er farget grå. Hvilken tallfølge ser du?

b) Se på tallene som er farget gule. Kjenner du igjen denne tallfølgen?

c) Hvordan kan du bruke tallfølgene i a) og b) til å finne svar på regneoppgavene nedenfor?

1) 1 + 2 =
2) 1 + 2 + 3 =
3) 1 + 2 + 3 + 4 =
4) 1 + 2 + 3 + 4 +5 =

d) Hvilken tallfølge danner svarene på oppgavene?

e) Bruk Pascals trekant til å finne trekanttall nummer 10.

f) Kan du på grunnlag av det du så i oppgave c) finne en **modell**, en **formel** for trekanttall nummer *n*?

Oppgave 3

I en hatt ligger det tre kuler merket med A, B og C.

Dersom du skal trekke ut én kule fra hatten, har du tre muligheter. Du kan trekke A, B eller C.

Det finnes også tre måter å trekke ut to kuler på. Du kan trekke ut A og B, A og C eller B og C.

Det finnes bare én måte å trekke ut tre kuler på, nemlig at du trekker alle kulene A, B og C. Vi kan også si at det bare finnes én måte å trekke ut null kuler på. Du kan la være å trekke.

Vi lar det først ligge null kuler i hatten, så én kule, to kuler, deretter tre kuler osv. I hvert tilfelle undersøker vi, som ovenfor, hvor mange kombinasjoner vi kan lage av null kuler, én kule, to kuler osv.

Fyll ut tabellen nedenfor.

Elementer i hatten	Antall elementer i uttrekk					
	0	1	2	3	4	5
	Antall uttrekk					
Ingen	1					
A	1	1				
A B	1	2	1			
A B C						
A B C D						
A B C D E						

Valg

Valg (124030)

Valg av armbånd og valg av fotballspisser

June har fire armbånd i en skuff. En dag vil hun gå med to av disse armbåndene. Hvor mange kombinasjonsmuligheter har hun?

En fotballtrener disponerer fire spisser. Han skal bruke to i en kamp. På hvor mange måter kan han komponere spissparet?

Ser du at problemstillingen i disse to eksemplene er den samme som å trekke ut to kuler fra en hatt med fire kuler?

Vi kan trekke to kuler fra fire kuler, to armbånd fra fire armbånd eller to spisser fra fire spisser på seks ulike måter.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{4}{2}=6$$

I Pascals trekant kan du følge «blå skråkurve» fra toppen og telle deg ned til tallet fire. I denne raden starter du fra venstre og teller ruter fra null og inn til to. Du havner da i den ruten som er markert med rødt og finner tallet seks.

Volleyball og MiniLotto

En volleyballtrener har ni spillere i troppen og skal ta ut et lag på seks spillere. Hvor mange ulike lag kan han sette sammen?

I «MiniLotto» skal du velge 6 tall blant tallene fra og med 1 til og med 9. Hvor mange tallkombinasjoner er det mulig å lage?

I Pascals talltrekant følger vi «blå skråkurve» fra toppen og teller oss ned til tallet ni. I denne raden starter vi fra venstre, teller ruter fra null og inn til seks, og havner i den ruten som er markert med rødt.

Det betyr at det er 84 mulige måter å sette sammen laget på og det er 84 mulige «MiniLotto» -rekker.

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$$\binom{9}{6}=84$$

Pascals talltrekant i regneark

Pascals talltrekant i regneark (124038)

Du kan lage Pascals trekant i et regneark. En enkel måte å gjøre det på er som vist nedenfor, selv om formen er litt annerledes. Merk at cellene fra og med rad 4 kan kopieres.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1									
2	1	1								
3	1	2	1							
4	1	3	3	1						
5	1	4	6	4	1					
6	1	5	10	10	5	1				
7	1	6	15	20	15	6	1			
8	1	7	21	35	35	21	7	1		
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1									
2	=A1	=A1								
3	=A2	=A2+B2	1							
4	=A3	=A3+B3	=B3+C3	1						
5	=A4	=A4+B4	=B4+C4	=C4+D4	1					
6	=A5	=A5+B5	=B5+C5	=C5+D5	=D5+E5	1				
7	=A6	=A6+B6	=B6+C6	=C6+D6	=D6+E6	=E6+F6	1			
8	=A7	=A7+B7	=B7+C7	=C7+D7	=D7+E7	=E7+F7	=F7+G7	1		
9	=A8	=A8+B8	=B8+C8	=C8+D8	=D8+E8	=E8+F8	=F8+G8	=G8+H8	1	
10	=A9	=A9+B9	=B9+C9	=C9+D9	=D9+E9	=E9+F9	=F9+G9	=G9+H9	=H9+I9	1

Lotto

Du kan utvide regnearket vist ovenfor til å kunne svare på følgende oppgave.

På en lottokupong skal du krysse av for 7 tall av 34 mulige. Hvor mange forskjellige lottorekker er det mulig å fylle ut? Hva er sjansen for å vinne toppgevinst i Lotto når du fyller ut én lottorekke?

Tallene i Pascals trekant er innebygget i de fleste digitale verktøy.

Vanlige koder for tallene er

nCr (Casio, Texas)

KOMBINASJON (*n;r*) (Excel)

BinomialKoeffisient [*n,r*] (GeoGebra)

Skjæringssetninger i trekanter

Skjæringssetninger i trekanter (124040)

Gjennom å gjøre fire oppgaver i GeoGebra skal du prøve å avdekke noen geometriske strukturer og mønstre som gjelder for alle trekanter.

Oppgave 1: Omsenteret

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer **midtnormalene** på sidene i trekanten. Hva observerer du?

b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?

c) Kall skjæringspunktet mellom midtnormalene for *S*. Konstruer en sirkel med sentrum i *S* og med radius lik avstanden til et av hjørnene. Hva observerer du?

d) Dra igjen i hjørnene i trekanten. Hva observerer du?

e) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese (en setning du tror gjelder) for alle trekanter?

Oppgave 2: Innsenteret

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer halveringslinjene til vinklene i trekanten. Hva observerer du?

b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?

c) Nedfell en normal fra skjæringspunkt *S* mellom **vinkelhalveringslinjene** til en av sidene i trekanten. Normalen treffer siden i punktet *D*. Konstruer en sirkel med sentrum i *S* og med radius *SD*. Hva observerer du?

d) Dra igjen i hjørnene i trekanten. Hva observerer du?

e) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?

Oppgave 3: Ortosenteret

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer de tre **høydene** i trekanten. Hva observerer du?

b) Dra i hjørnene i trekanten slik at trekanten forandrer form. Hva observerer du?

c) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?

Linjestykket fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden, kalles en **median**. En trekant har alltid tre medianer.

Oppgave 4: Tyngdepunktet

Tegn en trekant i GeoGebra.

a) Konstruer de tre **medianene** til trekanten. Hva observerer du?

b) Dra i hjørnene i trekanten slik at den forandrer form. Hva observerer du?

c) Skjæringspunktet mellom medianene deler medianene i to deler. Prøv å finne ut noe om forholdet mellom disse to delene.

d) Kan du på grunnlag av observasjonene dine formulere en hypotese for alle trekanter?

Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Matematiske modeller som grunnlag for beslutninger (92477)

Det settes stadig nye rekorder på skøyter. Kan farten til skøyteløperne i fremtiden bli så høy at banene bør bygges større slik at svingene blir mindre krappe? Skøytearenaer som bygges i dag, skal jo være arenaer i mange år framover.

Jeremy Wotherspoon fra Canada setter ny verdensrekord på 500 meter skøyter for herrer i Kearns, Utah i 2009 med tiden 34,03.

Utviklingen av verdensrekorden for 500 meter på skøyter for herrer er gjengitt i tabellen nedenfor.

År	1990	1992	1994	1996	1998	2001	2005	2007
Rekord i sekunder	36,45	36,41	35,76	35,39	34,82	34,32	34,30	34,03

Kilde: Eksamen MAT1005 2P-Y, Høsten 2009

Vi lar x være antall år etter 1990 og y rekorden i sekunder. Så fremstiller vi opplysningene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

Punktene ligger tilsynelatende på en rett linje.

Vi bruker regresjon og finner en lineær funksjon som kan være modell for sammenhengen mellom rekorden og året den er satt

$$f(x) = -0,15x + 36,38$$

Grafen til funksjonen er tegnet i det samme koordinatsystemet.

Vi kan benytte modellen til å beregne hva verdensrekorden vil være i år 2090 dersom modellen gjelder.

$$f(100) = -0,15 \cdot 100 + 36,38 = 21,38$$

Rekorden i 2090 vil etter modellen være 21,38 sekunder. Modellen er også representert med grafen til funksjonen.

Grafen til modellen viser at rekorden på 500 m skøyter vil bli null i år 2230. Vi vet at dette er helt urealistisk, og det viser med all tydelighet hvor varsomme vi må være med å stole på matematiske modeller.

Utviklingen modellen ovenfor skisserer, er så usannsynlig at den ikke egner seg som grunnlag for beslutninger om framtidig utforming av skøytearenaer. Modellen egner seg muligens til å si noe om utviklingen noen få år fram i tid.

En annen modell som skisserer en mer sannsynlig utvikling, er gitt med potensfunksjonen

$$f(x) = 37,32 \cdot x^{-0,03}$$

(Her er det første punktet tatt bort i regresjonen.)

Modellen gir en rekord ned mot 32 sekunder i år 2090. Kanskje dette ikke er så urealistisk? Denne modellen er nok mer egnet som grunnlag for beslutninger om fremtidige skøyteanlegg.

Funksjoner (Bare for VG3 PB)

Moduler

Modul 1: Funksjonsbegrepet

Modul 1: Funksjonsbegrepet (122872)

Teori

Oppgaver

Funksjonsbegrepet / video
http://ndla.no/nb/node/122007

Modul 2: Lineære funksjoner

Modul 2: Lineære funksjoner (122875)

Teori

Lineære funksjoner, utforsking i GeoGebra

Oppgaver

Oppgave i GeoGebra

Simulering og spill

Lineære funksjoner / video
http://ndla.no/nb/node/122019

Modul 3: Mer om lineær vekst

Modul 3: Mer om lineær vekst (122900)

Teori

Oppgaver

Lineær regresjon / video
http://ndla.no/nb/node/90684

Modul 4: Andregradsfunksjoner

Modul 4: Andregradsfunksjoner (122904)

Teori

Andregradsfunksjonen , utforsking i GeoGebra

Simulering andregradsfunksjonen

Oppgaver

Andregradsfunksjoner / video
http://ndla.no/nb/node/122866

Modul 5: Andre funksjoner

Modul 5: Andre funksjoner (122915)

Teori

Oppgaver

Grafen til eksponentialfunksjoner / video
http://ndla.no/nb/node/100211

Funksjoner i praksis

Teori

Funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet (122974)

I en butikk koster eplene 12 kroner per kilo. Hvor mye du må betale er avhengig av hvor mange kilo du kjøper.

Hvor mye du må betale er avhengig av hvor mange kilo du kjøper.

Eirik plukker moreller hver sommer. Han har en fast timelønn på 50 kroner, i tillegg tjener han 5 kroner for hver kilo bær han plukker. Lønnen hans er altså avhengig av hvor mange kilo bær han plukker.

Dette kapittelet handler om hvordan noen størrelser varierer avhengig av andre størrelser. Vi skal se på hvordan vi kan beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av funksjoner.

Funksjoner representert ved formler

Funksjoner representert ved formler (122981)

Tenk deg at du er på en joggetur der du holder en konstant fart. Etter joggeturen er du interessert i å finne ut hvor langt du har løpt ved ulike tidspunkt.

En funksjon kan for eksempel vise sammenheng mellom strekning og tid.

Du finner at du har løpt 8 km i løpet av 50 minutter, det vil si

$$\frac{8000 \text{ meter}}{50 \text{ minutt}} = 160 \text{ meter per minutt}$$

Når du nå kjenner den konstante farten, 160 meter per minutt, kan du regne ut hvor lang strekning du har løpt ved å bruke formelen

$$S = 160t$$

Etter 10 minutter har du løpt $S = 160 \cdot 10 = 1\,600$ meter.

Når du vet hvor lang tid du har brukt, kan du regne ut hvor langt du har løpt. Vi sier at strekningen S **er en funksjon av** tiden t.

Vi skriver derfor ofte $S(t)$ («S av t») i stedet for S, og får da

$$S(t) = 160t$$

Tiden og strekningen varierer og kalles derfor **variabler**.

Uttrykket $160t$ kalles for funksjonsuttrykket til funksjonen S.

Sammenhengen mellom størrelsene tid og strekning er her vist ved en formel. Vi sier at **funksjonen** S **er representert med en formel**.

For å markere at vi regner ut avstanden etter for eksempel 12 minutter, skriver vi

$$S(12) = 160 \cdot 12 = 1920$$

Skrivemåten $S(12)$ betyr strekningen etter 12 minutter. Vi leser «S av 12».

Etter 12 minutter har du løpt 1920 meter.

Generelt sier vi at ***y* er en funksjon av *x*** dersom **hver verdi av *x* gir nøyaktig én verdi av *y***.

For å vise at y er en funksjon av x, skriver vi ofte $y(x)$ (som vi leser «y av x»).

Ved strekningsfunksjonen ovenfor kan du regne ut hvor langt du har løpt etter 10 minutter og etter 20 minutter

$$S(10) = 160 \cdot 10 = 1600$$
$$S(20) = 160 \cdot 20 = 3200$$

Etter 10 minutter har du løpt 1600 meter og etter 20 minutter har du løpt 2300 meter.

Funksjoner representert ved grafer og verditabeller

Funksjoner representert ved grafer og verditabeller (122983)

Vi ser på funksjonen S gitt ved

$$S(t) = 160$$

Funksjonen er her representert med en formel.

t (minutter)	$S(t)=160t$ (meter)	$S(t)$ (meter)
0	$160 \cdot 0$	0
10	$160 \cdot 10$	1600
50	$160 \cdot 50$	8000
100	$160 \cdot 100$	16000

Vi kan lage en **verditabell** ved først å velge ut noen verdier for t, og så regne ut de tilsvarende funksjonsverdiene, $S(t)$. Verditabellen til høyre viser et utvalg av sammenhørende verdier for t og $S(t)$.

Funksjonen er nå representert med en verditabell.

De sammenhørende verdiene fra verditabellen merker vi av som **punkter i et koordinatsystem** hvor t avsettes langs førsteaksen og $S(t)$ langs andreaksen.

Aksene må tilpasses slik at alle punktene i verditabellen «får plass» i grafvinduet.

I vårt eksempel ligger punktene på en rett linje. Vi trekker den rette linjen gjennom punktene. Denne linjen kalles for **grafen til funksjonen**.

Hvis punktene ikke ligger på en rett linje, tegner vi en kurve som går gjennom punktene.

Alle punktene som ligger på grafen til funksjonen viser sammenhørende verdier for t og $S(t)$.

Funksjonen er nå representert med en graf.

Grafer til funksjoner digitalt

Grafer til funksjoner digitalt (122985)

Vi kan enkelt tegne grafen til en funksjon ved hjelp av digitale verktøy. Vi skriver $S(x) = 160x$ i inntastingsfeltet i GeoGebra og grafen tegnes når vi taster «Enter».

Funksjonen har ingen mening for negative *t*-verdier. Det er også begrenset hvor lenge en joggetur varer.

Vi kan i GeoGebra tegne grafen for *t*-verdier mellom 0 og for eksempel 100 minutter ved å skrive
$S(t) = \text{funksjon}[160t, 0, 100]$

Koordinatsystemet

Koordinatsystemet (122990)

Du så tidligere i menyen at vi brukte et koordinatsystem når vi representerte funksjoner med grafer. Du er kjent med koordinatsystemet fra ungdomsskolen og 1P, men vi tar en kort gjennomgang av hva dette er.

Et koordinatsystem består av to rette linjer, også kalt akser, som står vinkelrett på hverandre i et plan.

Det er vanlig å kalle de to linjene(aksene) for x - aksen og
y - aksen. Et annet vanlig navn på
x - aksen er **førsteaksen**.
y - aksen kalles også for **andreaksen**.

Vi avsetter en tallinje langs hver av de to aksene. Skjæringspunktet mellom aksene kalles **origo**.

Hvert punkt i planet har sin egen adresse eller sine egne **koordinater**. Punktet B har for eksempel koordinatene (4,3). Førstekoordinaten, eller x - koordinaten, som her er 4, forteller hvor vi treffer x - aksen hvis vi trekker en linje fra punktet vinkelrett på denne aksen. Vi havner i $x = 4$.

Andrekoordinaten, eller y - koordinaten, som her er 3, forteller hvor vi treffer y - aksen hvis vi trekker en linje vinkelrett på denne aksen. Vi havner i $y = 3$.

Sjekk om det samme gjelder for de andre punktene som er markert.

Bruk av koordinatsystemet

Koordinatsystemet kan blant annet brukes til å gi et «bilde» av sammenhenger mellom størrelser, en grafisk fremstilling.

Hanne jobber deltid som telefonselger og har en timelønn på 125 kroner. Lønnen avhenger av hvor mange timer hun jobber.

Jobber hun 10 timer, vil lønnen være 1250 kroner. Jobber hun 5 timer, vil lønnen være 625 kroner osv.

Vi kan regne ut flere lønnsverdier og samle resultatene i en tabell

Antall arbeidstimer	2	5	8	11	14	20	26	32
Lønn (kroner)	250	625	1 000	1 375	1 750	2 500	3 250	4 000

Men vi kan få en mye bedre oversikt over sammenhengen mellom antall timer og lønn ved en grafisk framstilling i et koordinatsystem.

Av tabellen ser vi at 8 timers arbeid gir en lønn på 1000 kroner. Vi illustrerer denne sammenhengen ved å plotte punktet (8,1000) i koordinatsystemet. Når vi går fra punktet (8,1000) og «vinkelrett» ned på x - aksen, kommer vi til tallet 8, som viser at antall arbeidstimer er 8. Når vi går fra punktet (8,1000) og «vinkelrett» bort på y - aksen, kommer vi til tallet 1000 , som viser at lønnen er 1000 kroner når antall arbeidstimer er 8.

Vi gjør tilsvarende med de andre lønnsverdiene fra tabellen, og alle punktene blir til den blå linjen som «billedlig», eller grafisk, viser sammenhengen mellom antall arbeidstimer og lønn. For alle punkter på denne linjen viser *x* - koordinaten antall arbeidstimer, og *y* - koordinaten den lønnen som disse timene gir.

Vi kan for eksempel starte i tallet 12 på *x* - aksen, gå «vinkelrett» opp fra *x* - aksen til vi treffer den blå linjen, gå derfra «vinkelrett» bort på *y* - aksen og komme til tallet 1500. Det viser at lønnen er 1500 kroner når antall arbeistimer er 12.

Motsatt kan vi for eksempel starte i tallet 2500 på *y* - aksen, gå «vinkelrett» ut fra *y* - aksen til vi treffer den blå linjen, gå «vinkelrett» ned på *x* - aksen og kommet til tallet 20 på *x* - aksen. Det viser at når lønnen er 2500 kroner, så er antall arbeidstimer 20.

Som du sikkert har skjønt, så er lønnen til Hanne en funksjon av antall timer hun jobber.

LIneære funksjoner

Lineære funksjoner

Lineære funksjoner (122993)

Grafen til funksjonen *S* gitt ved $S(x) = 160t$, ble en rett linje. Slike funksjoner kaller vi **lineære funksjoner**.

Lineære funksjoner har også det til felles at funksjonsverdien kan skrives som et konstant tall multiplisert med en variabel pluss et konstant tall.

En **lineær funksjon** er en funksjon som kan skrives på formen

$$f(x) = \mathbf{a}\mathbf{x} + b \qquad \text{der } a \text{ og } b \text{ er konstante tall.}$$

Det er også vanlig å bruke bokstaven *y* for en generell funksjon.

Da brukes vanligvis skrivemåten

$$y = \mathbf{a}\mathbf{x} + b$$

Her er det underforstått at *y* er en funksjon av *x*.

Stigningstall og konstantledd

Stigningstall og konstantledd (122995)

Som vi så på forrige side i menyen, kan en lineær funksjon skrives på formen

$$f(x) = \mathbf{a}x + b$$

der *a* og *b* er konstante tall.

Ved hjelp av GeoGebra kan du undersøke hvordan grafen til en lineær funksjon endrer seg når du endrer *a* og *b*.

På skrivelinjen i GeoGebra skriver du $a = 1$ (og trykker «Enter»). Deretter skriver du $b = 1$. Skriv så inn $f(x) = a \cdot x + b$. Husk å skrive gangetegnet mellom *a* og *x*.

Høyreklikk på $a = 1$ i algebravinduet og huk av for «Vis objekt». Glideren *a* vises i grafvinduet. Gjør det samme for *b*.

Velg «Flytt» på verktøylinjen og venstreklikk på glider *a*. Bruk piltastene eller «dra» i glideren for å endre verdien til *a*. Se hva som skjer. Gjør tilsvarende for glider *b*.

Nedenfor ser du grafen til funksjonen $f(x) = a \cdot x + b$ for noen ulike verdier av *a* og *b*.

Til høyre har vi tegnet grafen til *f* for $a = 3$ og $b = -2$. Det betyr at $f(x) = 3 \cdot x - 2$. Ser du at grafen skjærer *y* - aksen der $y = -2$?

Grafen skjærer andreaksen når $x = 0$ og $f(0) = a \cdot 0 + b = 0$.

Tallet *b* kalles konstantleddet. Tallet *a* viser hvor mye grafen stiger når *x* øker med 1 enhet. Tallet *a* kalles stigningstallet. Hvis stigningstallet er negativt, synker grafen når *x* øker.

Du bør merke deg **to spesialtilfeller** av lineære funksjoner.

Det ene er når $b = 0$. Da er $y = ax$ og *y* og *x* er **proporsjonale størrelser**. Tallet *a* kalles i dette tilfellet proporsjonalitetskonstanten.

Det andre spesialtilfellet er når $a = 0$. Da er $y = b$.

Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon

Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon (122997)

Hvordan kan vi raskt tegne grafen til den lineære funksjonen g gitt ved $g(x) = -2x + 4$?

Metode 1

Vi tegner grafen på grunnlag av verditabellen

Vi vet at grafen blir en rett linje. Da er det egentlig nok med to punkter i verditabellen, men det er lurt å ta med et tredje punkt for kontrollens skyld.
Vi klarer oss godt med hoderegning her og fyller ut tabellen!

x	-3	1	5
$g(x)$	10	2	6

Metode 2

Vi tegner grafen på grunnlag av stigningstall og konstantledd

Siden konstantleddet $b = 4$, skjærer grafen andreaksen for $y = 4$. Punktet (0,4) ligger derfor på grafen.

Stigningstallet er -2. Vi tar utgangspunkt i punktet (0,4), går en enhet til høyre, og stigningstallet forteller at vi må bevege oss parallelt med y-aksen 2 enheter ned for igjen å møte grafen.

Vi kommer til punktet (1,2). Vi har da to punkter på grafen og kan trekke linjen gjennom disse punktene.

Metode 3

Vi tegner grafen med et digitalt verktøy

Skriv inn funksjonsuttrykket på skrivelinjen i det digitale verktøyet du bruker, og tegn grafen.

Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje

Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje (122999)

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet grafen til en lineær funksjon.

Grafen skjærer y-aksen i punktet (0,–1). Det betyr at $b = -1$.
Når vi går en enhet til høyre fra (0,-1), må vi gå to opp på y-aksen for å treffe grafen. Det betyr at $a = 2$.

Funksjonsuttrykket blir derfor $f(x) = 2x - 1$

Legg merke til at vi like gjerne kan ta utgangspunkt i et annet punkt på grafen for å finne stigningstallet. Vi ser av grafen at vi får samme resultat om vi tar utgangspunkt i punktet (2,3).

Det er heller ikke nødvendig å gå én enhet til høyre for å finne stigningstallet. Ved å starte i punktet (1, 1) og for eksempel gå to enheter til høyre, må vi gå fire enheter opp langs y-aksen for å treffe grafen.

Stigningstallet blir

$$a = \frac{4}{2} = 2$$

Dette kan vi også regne oss fram til med utgangspunkt i de to punktene på grafen:

$$a = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

I

telleren har vi differensen mellom
y-koordinatene og i nevneren differensen mellom *x*-koordinatene.

Se koordinatsystemet til høyre.

Skjæringspunkt mellom to rette linjer

Skjæringspunkt mellom to rette linjer (123007)

Vi kan finne skjæringspunktet mellom to rette linjer grafisk eller ved regning.

For å finne skjæringspunktet grafisk, tegner vi linjene i et koordinatsystem og leser av.

I skjæringspunktet har begge funksjonene samme verdi for *x* og samme verdi for *y*. Skal vi finne skjæringspunktet ved regning, setter vi derfor funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen vi da får.

Eksempel

Funksjonene *f* og *g* er gitt ved $f(x) = 2x - 1$ og $g(x) = -x + 2$.

Finn skjæringspunktet mellom de to linjene grafisk og ved regning.

Grafisk løsning

Vi tegner de to linjene i et koordinatsystem, leser av og finner at linjene skjærer hverandre i punktet $(1, 1)$.

I GeoGebra kan du bruke kommandoen skjæring[f,g], eller knappen «Skjæring mellom to objekter».

Ved regning

Vi setter funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x - 1 &= -x + 2 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vi kan sette inn *x* = 1 i et av funksjonsuttrykkene (samme hvilket) for å finne *y*.
Vi velger å regne ut *f*(1)

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Skjæringspunktet er $(1, 1)$.

Eksempel

To utleiefirmaer leier ut selskapslokaler.

Firma A tar en fast leiepris på 3000 kroner og et timetillegg på 500 kroner.

Forklar hvorfor totalkostnadene i kroner T_A, ved leie av lokalet i *x* timer, kan beskrives med funksjonsuttrykket

$$T_A(x) = 500x + 3000$$

Firma B tar en fast leiepris på 2000 kroner og et timetillegg på 1000 kroner.
Totalkostnadene i kroner, T_B, ved leie av lokalet i *x* timer kan beskrives ved funksjonsuttrykket

$$T_B(x) = 1000x + 2000$$

For å kunne sammenlikne leieprisene tegner vi grafene til de to funksjonene T_A og T_B.

Vi ser at grafene skjærer hverandre når $x = 2$. Det betyr at hvis du skal leie lokaler i to timer, er det prismessig det samme hvilket firma du velger. Prisen er 4000 kroner hos begge firmaene.

Hvis du skal leie lokale i mindre enn 2 timer, lønner det seg å velge firma B. Dette ser vi ved at grafen til T_B ligger under grafen til T_A i dette området.

Hvis du skal leie lokale i mer enn to timer, lønner det seg å velge firma A. Dette ser vi ved at grafen til T_A ligger over grafen til T_B i dette området.

Vi kan kontrollere den grafiske løsningen ved regning ved å løse likningen
$T_A(x) = T_B(x)$
Vi får

$$\begin{aligned} 1000x + 2000 &= 500x + 3000 \\ 1000x - 500x &= 3000 - 2000 \\ 500x &= 1000 \\ x &= \frac{1000}{500} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vi får også her at leieprisene er like når leietiden er to timer. Dette bekrefter den grafiske løsningen.

Hva forteller stigningstall og konstantledd?

Hos firma A er totalkostnadene i kroner T_A, ved leie av lokalet i x timer, gitt med funksjonsuttrykket

$$T_A(x) = 500x + 3000$$

Konstantleddet er 3 000 og viser her at den faste leieprisen er kroner 3 000. Den må betales uansett hvor mange timer lokalet leies. Legg merke til at grafen skjærer y-aksen i punktet (0,3000).

Stigningstallet er 500. Det betyr at det koster kroner 500 for hver ekstra time lokalet leies.

Kostnadene øker jevnt med økningen i antall leide timer. Vi har **lineær vekst** i kostnadene!

Funksjonen S gitt ved $S(t) = 160t$ strekningen i meter som er løpt etter t minutter.

Her er konstantleddet lik null, og det viser at løpt strekning er null ved tiden null. «Klokka» starter når løpeturen begynner.

Stigningstallet er 160. Det betyr det løpes 160 meter for hvert ekstra minutt. Det forteller altså at **farten** er 160 meter per minutt.

Antall løpte meter øker jevnt med økningen i antall minutter det løpes. Vi har **lineær vekst** i antall løpte meter!

Nullpunkt

Nullpunkt (123010)

Definisjon

Med et **nullpunk**t til en funksjon *f*, mener vi et punkt på grafen hvor **andrekoordinaten er lik null**. Det er med andre ord et punkt hvor **grafen til funksjonen skjærer *x*-aksen**.

I nullpunktet er $f(x) = 0$.

Eksempel

Grafen til $f(x) = 2x - 1$ skjærer *x*-aksen der $x = \frac{1}{2}$.

Grafen til $g(x) = -x + 2$ skjærer *x*-aksen der $x = 2$.

Nullpunktet til *f* blir $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Nullpunktet til *g* blir tilsvarende $(2, 0)$.

I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoene nullpunkt[f] og nullpunkt[g].

Vi kan også finne nullpunktene ved regning, ved å sette funksjonsutrykket lik null

$$\begin{array}{cc} f(x) = 0 & g(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 & -x + 2 = 0 \\ 2x = 1 & -x = -2 \\ x = \frac{1}{2} & x = 2 \end{array}$$

Nullpunktene blir henholdsvis $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ og $(2, 0)$.

Eksempel

Like før sommerferien får Janne tilbud om å kjøpe en brukt båt med motor for kroner 9 000. Janne har ikke penger, men får et rentefritt lån av sine foreldre på kroner 9 000 som skal betales tilbake gjennom sommeren med ukentlige avdrag på kr 1 500. Janne har fått sommerjobb med ukelønn på kroner 4 000.

Restgjelden Janne har til sine foreldre *x* uker etter at hun opptok lånet kan beskrives med den lineære funksjonen

$$R(x) = -1500x + 9000$$

Konstantleddet er 9 000.
Det betyr at lånet i starten er på kroner 9 000.

Stigningstallet er negativt, –1500.
Det betyr at restlånet avtar med 1 500 kroner per uke.

Vi finner nullpunktet til funksjonen i GeoGebra med kommandoen nullpunkt[R].

Nullpunktet er (6,0). Det forteller at lånet er nedbetalt, restlånet er null, etter 6 uker.

Vi kan si at restlånet har **negativ lineær vekst**!

Lineær regresjon

Lineær regresjon (123012)

Tabellen viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Folketall	3 249 954	3 567 707	3 863 221	4 078 900	4 233 116	4 478 497

Det er en sammenheng mellom årstall etter 1950 og folketallet.
Vi lager en ny tabell hvor *x* er antall år etter 1950 og hvor *y* er folketallet i antall millioner, i år *x.*

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

Vi plotter punktene fra den siste tabellen i et koordinatsystem, og ser at punktene **tilnærmet ligger på en rett linje**.

Det betyr at folketallet i Norge har hatt en **tilnærmet lineær** vekst i perioden fra 1950 til 2000.

Vi trekker en rett linje som ser ut til å passe godt med punktene.

Kan du bestemme likningen for denne linjen?

Linjen skjærer *y* - aksen der $y \approx 3,3$ og går tilnærmet gjennom punktene (30,4) og (70,5).

$5 - 4 = 1 \text{ og } 70 - 30 = 40$

Stigningstallet blir da tilnærmet lik $\frac{1}{40} = 0,025$.

Vi kan da si at likningen for linjen må være tilnærmet lik $y = 0,025x + 3,3$.

Ved en metode som kalles «lineær regresjon» kan vi finne likningen for den linjen som passer aller best med punktene. Det vil si den linjen hvor den samlede avstanden fra linjen til punktene er minst mulig.

Dette kan vi gjøre i GeoGebra.

Velg «Regneark». Legg punktene inn i kolonne A og B.

Merk området A1:B6, høyreklikk og velg «Lag» og «Liste med punkt». Du får da tegnet punktene i koordinatsystemet og opprettet listen «Liste1».

Deretter skriver du RegLin[Liste1] i inntastingsfeltet.

Du får da tegnet linjen i koordinatsystemet.

Velg «Vis verdi» for linje *a*. Ved å høyreklikke på uttrykket og velge «Likning = *ax* + *b*», blir likningen for linje skrevet som

$$y = 0,024x + 3,31$$

Stigningstallet er 0,024.
Det betyr at etter denne modellen øker folketallet i Norge gjennomsnittlig med 0,024 millioner, eller 24 000, personer per år.

Når vil folketallet i Norge etter denne modellen passere 5 millioner og 6 millioner?
Hva var folketallet i Norge per 1. januar 2013?

Tror du folketallsutviklingen i Norge stort sett vil følge denne modellen framover?

Andre funksjonstyper

Andre funksjonstyper

Andre funksjonstyper (123018)

I lineære funksjoner opptrer variabelen *x* bare i første potens. I noen funksjoner opptrer *x* i andre potens. Det vil si at vi har ledd som inneholder x^2. Vi kaller derfor slike funksjoner for andregradsfunksjoner.

Vi skal se på to praktiske eksempler på andregradsfunksjoner.

Eksempel 1

Gå sammen med noen medelever og bruk et tau som er litt over 12 meter langt. Bind sammen endene og form tauet til et rektangel som figuren viser. Omkretsen til tauet skal være 12 m.

Mål sidelengder og regn ut arealet til rektanglene dere får når den ene sidelengden, x, er 0, 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 meter.

- Noter resultatene i en verditabell, og plott punktene i et koordinatsystem.
- Klarer du å finne en formel for arealet av firkanten når du kaller to av sidene for *x*?
- Tegn grafen
- Hva er det maksimale arealet firkanten kan få?
- Hva forteller grafens skjæringspunkter med x-aksen?

Hvis du ikke ønsker å gjøre oppgaven selv, kan du studere løsningen.

Løsning

For hver verdi av *x*, får vi et bestemt rektangel med et bestemt areal. Vi har altså at arealet til rektangelet er en funksjon av *x*. Omkretsen til rektangelet er 12 m. To og to sider er like lange, slik at vi bare har to forskjellige sidelengder. Vi kaller disse for henholdsvis grunnlinje og høyde. Grunnlinjen og høyden må til sammen være halve omkretsen, slik at når grunnlinjen er *x*, så må høyden være 6 – *x*.

Funksjonen representert ved en verditabell:

Grunnlinjen i meter *x*	0	1	2	3	4	5	6
Høyden i meter	6	5	4	3	2	1	0
Areal av rektangel i m^2 *A*(*x*)	0	5	8	9	8	5	0

Vi har plottet punktene fra verditabellen i et koordinatsystem hvor førstekoordinaten er lengden på grunnlinjen og andrekoordinaten er arealet til det tilhørende rektangel.

Vi kan også representere arealfunksjonen ved en formel:

$$A(x) = x \cdot (6 - x)$$
$$A(x) = 6x - x^2$$

Vi ser at vi har en **andregradsfunksjon**.

Vi tegner grafen til funksjonen i samme koordinatsystem, og ser at grafen går gjennom punktene som vi plottet fra verditabellen.

Grafen har et **toppunkt**, et punkt hvor funksjonen har sin maksimale verdi. Det vil si at det største arealet rektangelet kan få er 9 m^2.

Nullpunkter. Når grafen skjærer førsteaksen, er enten grunnlinjen 0 eller 6 meter. Vi får da ikke noe reelt rektangel, og arealet blir 0.

Eksempel 2

Du kaster en stein rett opp i luften med utgangsfart 25 m/s.

Naturens lover forteller oss at høyden til steinen er en funksjon av tiden og er tilnærmet gitt med funksjonsuttrykket

$$h(t) = 25t - 5t^2 \ .$$

Her står *t* for tiden i sekunder etter at steinen ble kastet.

Vi har også her en andregradsfunksjon fordi variabelen t er i andre potens.

Vi tegner grafen til funksjonen.

Grafen viser at steinens høyde øker de første 2,5 sekunder. Da når steinens sin største høyde, 31,3 meter. Fra da av mister steinen høyde, og etter 5 sekunder har steinen nådd bakken igjen.

Høydekurven er bratt til å begynne med. Det betyr at høyden øker fort, altså at steinen har stor fart. Så mister steinen gradvis fart, og kurven flater ut. I toppunktet har steinen mistet all fart, men så øker farten gradvis igjen. Nå faller steinen. Steinen får sin høyeste fart, kurven er brattest, like før steinen treffer bakken.

Generell form for andregradsfunksjoner

Generell form for andregradsfunksjoner (123023)

En funksjon der funksjonsuttrykket inneholder et andregradsledd, det vil si et ledd med x^2, kalles en andregradsfunksjon. Alle slike funksjoner kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

I tillegg til andregradsleddet har vi vanligvis et førstegradsledd, et ledd med x i første potens og et konstantledd. Verdiene av a, b og c, er forskjellige fra funksjon til funksjon.

Grafen til en andregradsfunksjon kalles en **parabel**.

To eksempler på andregradsfunksjoner og deres grafer.

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = -x^2 + 3x + 4$$

De mest karakteristiske trekkene ved parabler er at de har et **toppunkt** eller et **bunnpunkt** og at de er **symmetriske** om en linje parallell med y - aksen gjennom dette punktet.

Nullpunkt og ekstremalpunkt

Nullpunkter er de punkter hvor funksjonsverdiene er lik 0. Det vil si der grafene skjærer førsteaksen.

Vi kan lese av nullpunktene direkte på grafen, eller vi kan skrive «Nullpunkt[f]» og «Nullpunkt[g]» i GeoGebra. Nullpunktene vises da på grafen.

Funksjonen f har nullpunktene (0,6, 0) og (3,4, 0).

Funksjonen g har nullpunktene (–1,0) og (4,0).

Vi ser av grafen til f at funksjonen har sin laveste verdi for $x = 2$. Grafen har et **bunnpunkt**, (2,–2).

Grafen til g viser at funksjonen har sin høyeste verdi for $x = 1{,}5$. Grafen har et **toppunkt**, (1,5, 6,3).

Et felles navn for toppunkt og bunnpunkt er **ekstremalpunkt**.

Vi kan lese av ekstremalpunktene direkte på grafen, eller vi kan skrive «Ekstremalpunkt[f]» og «Ekstremalpunkt[g]» i GeoGebra.

Vi kan også legge merke til at hvis funksjonsverdien til et bunnpunkt er større enn 0, så vil funksjonen ikke ha nullpunkter, og hvis funksjonsverdien til et toppunkt er mindre enn 0, så vil heller ikke funksjonen ha nullpunkter.

Legg også merke til at i grafens skjæringspunkt med *y*-aksen, er *y*-verdien lik konstantleddet.

Nullpunkter, topp- og bunnpunkter

Nullpunkter, topp- og bunnpunkter (123029)

Nullpunkter ved regning

Til høyre ser vi at grafen til funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ skjærer førsteaksen når $x = 1$ og når $x = 3$. Dette er nullpunktene til f.

I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoen nullpunkt[f].

Ved regning finner vi nullpunktene ved å sette $f(x) = 0$.

I GeoGebra kan vi finne nullpunktene ved regning ved først å definere funksjonen i CAS-vinduet. Husk å skrive «kolon-lik».

Deretter bruker du kommandoen «Løs» på likningen $f(x) = 0$.

Topp- eller bunnpunkt

Vi fortsetter med funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Til høyre ser du at den laveste funksjonsverdien til funksjonen er –1. Denne verdien får vi for $x = 2$.

Vi sier da at grafen har **bunnpunkt** (2,–1).

I GeoGebra kan du finne bunnpunktet med kommandoen ekstremalpunkt[f].

Eksempel på andregradsfunksjon

Eksempel på andregradsfunksjon (123033)

En bedrift produserer *x* enheter av en vare per dag.

Funksjonen *K* gitt ved $K(x) = 0,25x^2 + 500$

viser kostnadene (kroner) ved produksjon av *x* enheter.

Bedriften kan maksimalt produseres 200 enheter per dag.

De produserte enhetene selges for 45 kroner per stk.

Inntektene er da gitt ved $I(x) = 45x$

Fortjeneste er differensen mellom inntekter og kostnader, og fortjenesten *F* er derfor gitt ved

$$F(x) = I(x) - K(x).$$

Nedenfor har vi tegnet grafene til *K*, *I* og *F*, og markert noen punkter.

Skjæringspunktene mellom grafene til *K* og *I* viser at kostnadene er like store som inntektene ved produksjon av 12 enheter og ved produksjon av 168 enheter. Fortjenesten er da lik null, og grafen til *F* har nullpunkter for *x* = 12 og *x* = 168.

Ved produksjon av mindre enn 12 enheter eller flere enn 168 enheter er kostnadene større enn inntektene og fortjenesten er negativ. Bedriften taper penger.

Grafen til *F* har toppunkt (90,1525). Bedriften oppnår maksimal fortjeneste ved å produsere 90 enheter per dag. Fortjenesten per dag er da 1525 kroner.

Polynomfunksjoner

Polynomfunksjoner (123035)

Definisjon

Et **polynom** er et uttrykk med ett eller flere ledd der hvert ledd består av en konstant multiplisert med x^n, der *n* er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket gir oss graden til **polynomet**. Uttrykket $x - 4 + 2x^3$ er et **tredjegradspolynom**, fordi den høyeste eksponenten i uttrykket er tre.

En polynomfunksjon er en funksjon som har et polynom som funksjonsuttrykk.

Uttrykket $3x + 3$ er et polynom av første grad fordi *x* er av første grad. Uttrykket $2x^2 - 2x + 4$ er et polynom av andre grad, fordi vi har et ledd hvor *x* er opphøyd i andre potens. To er den høyeste eksponenten *x* har. $x - 4 + 2x^3$ er et eksempel på et tredjegradspolynom, fordi den høyeste eksponenten av *x* her er tre.

Det er vanlig å ordne et polynom slik at leddet med den høyeste eksponenten kommer først, leddet med nest høyest eksponent kommer som nummer to osv. Fjerdegradspolynomet $-5 + 3x^3 - x^2 + 7x^4$ skriver vi på ordnet form som $7x^4 + 3x^3 - x^2 - 5$. Tallene foran potensene av *x* kaller vi for **koeffisienter**. I dette fjerdegradspolynomet er koeffisienten foran x^2 lik –1.

Lineære funksjoner og andregradsfunksjoner er polynomfunksjoner av henholdsvis første og andre grad. Tredjegradsfunksjoner er polynomfunksjoner av tredje grad.

Vi tegner grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$$

Nullpunkter

Funksjonen har nullpunkt der grafen skjærer *x* - aksen. Nullpunktene er $(-2,2\,,0)$, $(-0,8\,,0)$ og $(1,6\,,0)$.

Skjæring med y-aksen

Grafen skjærer *y*-aksen når *x* = 0. Skjæringspunktet er (0, -1).

Ekstremalpunkter

Grafen har toppunkt $(-1,6\ ,\ 0,5)$.
Grafen har bunnpunkt $(0,6\ ,\ -1,3)$.

For andregradsfunksjoner sa vi at en funksjon hadde sin laveste verdi i bunnpunktet og høyeste verdi i toppunktet. En tredjegradsfunksjon kan ha høyere verdier enn i toppunktet andre steder på grafen. Vi sier allikevel at grafen har et toppunkt, selv om det bare er lokalt.

Ekstremalpunkter

Med ekstremalpunkter til en funksjon mener vi punkter hvor funksjonen har en maksimalverdi eller en minimalverdi i et begrenset område.

Skjæring med andre grafer

Vi kan finne skjæringspunktene mellom grafene til to tredjegradsfunksjoner *f* og *g* grafisk eller ved å løse likningen $f(x) = g(x)$.

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon (123037)

Tenk deg at du skal lage en eske uten lokk av en kvadratisk papplate med sidelengder 60 cm. Du må da klippe bort et kvadrat i hvert hjørne. Du må altså klippe bort de fire mørkeblå kvadratene på tegningen til høyre. De lyseblå rektanglene bretter du opp, og du får da en eske med det lyse kvadratet i midten som bunn.

Formen på esken avhenger av hvor store kvadrater du klipper bort. Vi kaller sidene i kvadratene du klipper bort, for *x*. Hvis *x* er stor, vil esken få en liten bunn, men blir desto høyere. Hvis er liten, vil esken få stor bunn, men den vil bli lav.

Volumet av esken vil være avhengig av *x*. Det vil si at volumet er en funksjon av *x*. Vi vil finne en formel for denne funksjonen.

Bunnen til esken blir et kvadrat med side 60 - 2*x*. Det kan vi lese ut av tegningen. Arealet til bunnen, det vi kaller grunnflaten, blir da

$$\begin{aligned} G &= (60-2x)\cdot(60-2x) \\ &= 60\cdot 60 - 60\cdot 2x - 2x\cdot 60 - 2x\cdot(-2x) \\ &= 3600 - 240x + 4x^2 \end{aligned}$$

Høyden i esken blir *x*. Vi må multiplisere grunnflaten med høyden for å få volumet.

$$\begin{aligned} V(x) &= \left(3600 - 240 + 4x^2\right)\cdot x \\ V(x) &= 3600x - 240x^2 + 4x^3 \\ V(x) &= 4x^3 - 240x^2 + 3600x \end{aligned}$$

Volumet er altså en polynomfunksjon av tredje grad. Vi ser også at *x* må ligge mellom 0 og 30 cm for at vi skal få en eske. Hvis *x* er lik 0, klipper vi ikke bort noe, og hvis *x*er lik 30 cm, så får vi ingen bunn.

Vi tegner nå grafen til volumfunksjonen.

Vi ser av grafen at volumet til esken er større enn 0 cm^3 og mindre enn

16 000 cm^3.

Vi kan ellers se av grafen at

- Hvis vi ønsker en eske med størst mulig volum, må vi klippe bort kvadrater med sider 10 cm.
- Hvis vi ønsker esker med volum lik 8000 cm^3, må vi klippe bort kvadrater med sider 2,68 cm eller 20,0 cm.
- Vi kan også gå motsatt vei og lese av hvor stort volum en bestemt verdi for *x* gir.

Rasjonale funksjoner

Rasjonale funksjoner (123039)

En **rasjonal funksjon** er en funksjon som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er polynomer.

Praktisk eksempel på en rasjonal funksjon

Et telefonabonnement har en fastpris på 79 kroner per måned og en samtaleavgift på 39 øre per minutt.

I 2001 ble det for første gang registrert flere mobiltelefoner enn fasttelefoner i Norge. Tall fra Post – og teletilsynet viser at stadig færre nordmenn har fasttelefon, og at de av oss som fremdeles har en fasttelefon bruker den mindre og mindre.

Ser du at hvis vi ringer *x* minutter i løpet av en måned, må vi betale (0,39*x*+79) kroner med dette abonnementet?

Hva blir da prisen per minutt vi ringer?

Vi dividerer beløpet ovenfor på antall ringeminutter, og får et rasjonalt funksjonsuttrykk

$$P\left(x\right) = \frac{0{,}39x+79}{x}$$

Vi tegner grafen til funksjonen *P* for *x* -verdier mellom 0 og 900.

Grafen viser for eksempel at ved en total samtaletid på 50 minutter, blir minuttprisen 1,97 kroner. Ved total samtaletid på 100 minutter, blir minuttprisen 1,18 kroner og ved total samtaletid på 500 minutter, blir minuttprisen 0,55 kroner.

Prisen per minutt avtar med økende bruk. Grafen synker veldig fort til å begynne med, for så å flate ut.

Ved å ringe veldig mye nærmer minuttprisen seg 39 øre, men minuttprisen vil aldri bli lik 39 øre. Fastprisen får mindre og mindre betydning jo større den totale samtaletiden er.

Potensfunksjoner

Potensfunksjoner (123041)

Live arver 300 000 kroner. Hun vil spare pengene.

Den lokale banken tilbyr en årlig rente på 3 % per år. Dette svarer til en vekstfaktor på 1,03. Live regner det som sannsynlig at hun vil få bruk for pengene om 10 år. Hvor mye vil beløpet ha vokst til etter 10 år?

$$300\,000 \cdot 1,03^{10} = 403\,175$$

Beløpet vil ha vokst til ca. 403 175 kroner.

Live vet at det finnes alternativer til banksparing, og hun vil undersøke hva beløpet kan vokse til etter 10 år, hvis renten er høyre enn 3 %.

Hun ser da at hun kan bruke funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 300\,000 \cdot x^{10}$$

Her er det vekstfaktoren som er den variable, *x*.

Live tegner grafen til *B* for $x \in (1,03\ ,\ 1,12)$

Av grafen kan hun se at ved en årlig rente på 3 %, vil beløpet vokse til ca. 403 000 kroner etter 10 år. Hvis renten er på 8 % per år, vil beløpet vokse til ca. 648 000 kroner og hvis hun kan få en rente på 11 % per år, altså at vekstfaktoren er 1,11, vil hun sitte med ca. 852 000 etter 10 år.

I funksjonsuttrykket $B(x) = 300\,000 \cdot x^{10}$ er *x* grunntallet i en potens hvor eksponenten er et konstant tall. En slik funksjon kalles for en **potensfunksjon**.

Potensfunksjoner

En funksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$, hvor *a* og *b* er konstante tall, kalles en **potensfunksjon**.

Legg merke til at når *b* er et ikkenegativt helt tall, er potensfunksjonen også en **polynomfunksjon**, som for eksempel $2x$, $3x^2$, osv.

N å r *b* er et negativt helt tall, er potensfunksjonen en **rasjonal funksjon**, som for eksempel $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, $2x^{-1} = \frac{2}{x}$ osv.

Når *b* ikke er et helt tall, må vi forutsette at *x* er positiv. Grunnen er at for eksempel $x^{0,5}$ betyr det samme som $\sqrt{x}$, og kvadratroten av et negativt tall er ikke et reelt tall.

Til høyre har vi tegnet grafene til funksjoner gitt på formen $2x^b$ for ulike verdier av *b*.

Hvorfor går alle grafene gjennom punktet $(1, 2)$?

Hvordan ser grafen ut når $b = 1$?

Grafene endrer hovedform etter o m $b \in <\leftarrow, 0>$, $b \in <0, 1>$ eller $b \in <1, \rightarrow>$.

Legg merke til at grafen til en potensfunksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$ alltid går gjennom punktet $(1, a)$ fordi $f(1) = a \cdot 1^b = a$.

Eksempel

Når en pendel svinger, er svingetiden, det vil si den tiden det tar fra pendelen slippes til den kommer tilbake til utgangspunktet, avhengig av lengden på snoren som pendelkulen henger i.

Fra naturfag kjenner du kanskje formelen for svingetiden *T* sekunder, som funksjon av snorlengden *x* meter?

Formelen gir at

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot x^{0,5}$$

Her er $\pi \approx 3,14$ og $g \approx 9,81$ (*g* er tyngdens akselerasjon).

Når vi setter inn disse verdiene i formelen, får vi

$$T \approx \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{9,81}} \cdot x^{0,5} = 2,0 \cdot x^{0,5}$$

Svingetiden til en pendel er altså en potensfunksjon av snorlengden.

Vi vet også at $x^{0,5} = \sqrt{x}$, slik at svingetiden kan uttrykkes som

$$T = 2\sqrt{x}$$

Nå er svingetiden som en kvadratfunksjon.

Eksponentialfunksjoner

Eksponentialfunksjoner (123046)

En eksponentialfunksjon er gitt på formen $a \cdot b^x$ der tallet *b* kalles **vekstfaktoren**.

Eksponentialfunksjoner er bare definert for positive verdier av *b*, og vi skal bare se på funksjoner der også *a* er positiv.

Funksjonene *g* og *h* gitt nedenfor eksempler på eksponentialfunksjoner.

$$g(x) = 2,5 \cdot 1,5^x$$
$$h(x) = 6,5 \cdot 0,8^x$$

Når vekstfaktoren er større enn 1, øker funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise veksten *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 + \frac{p}{100}$$

Når vekstfaktoren er mindre enn 1, avtar funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise nedgangen *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 - \frac{p}{100}$$

Antall individer i en populasjon i naturen vil øke eksponentielt hvis populasjonen har ubegrenset tilgang til mat og ingen fiender. Populasjonen vil ikke vokse så fort i begynnelsen, men etter hvert vil veksten øke mer og mer. Dette er karakteristisk for eksponentiell vekst. (Se grafen til *g* i koordinatsystemet ovenfor.)

Vi vil også få eksponentiell vekst på et bankinnskudd med en fast årlig rente.

Verdien på en gjenstand, for eksempel en bil, vil ofte utvikle seg som en eksponentialfunksjon med vekstfaktor mindre enn 1.

Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner

Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner (123048)

Praktiske eksempler med eksopnentialfunksjoner.

Eksempel 1

Hvis du setter 1000 kr i banken i dag og får 6 % rente på pengene, kan du om ett år ta ut $1000 \cdot 1,06 = 1060$ kroner av banken.

Tallet 1,06 kaller vi for **vekstfaktoren**. Hvis pengene står tre år i banken, vil de vokse til $1000 \cdot 1,06^3 = 1191$ kroner.

Hvis 1000 kroner står år i banken med 6 % rente, vil beløpet vokse til $1000 \cdot 1,06^x$ kroner.

Innestående beløp, *B*, er en funksjon av antall år i banken, *x*, og funksjonsuttrykket blir

$$B(x) = 1000 \cdot 1,06^x$$

Grafen til funksjonen viser for eksempel at beløpet på 1000 kroner har vokst til 1191 kroner etter 3 år (som vi regnet ut ovenfor) og til 2693 kroner etter 17 år.

Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?

Vi finner svaret ved å tegne den rette linjen $y = 2 \cdot 1000 = 2000$ i samme koordinatsystem som grafen til *B* og så finne skjæringspunktet mellom linjen og grafen. Pengene må stå i banken i 12 år.

Eksempel 2

Kari kjøper en fire år

gammel bil for 200 000 kroner. Bilen har sunket i verdi med 10 % hvert år siden den var ny. Kari regner med at verdien vil synke på samme måte de neste årene.

Bilens verdi $V(x)$, *x* antall år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved

$$V(x) = 200\,000 \cdot 0,90^x$$

Vi tegner grafen til *V*.

Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var ca. 305 000 kroner.

Vekstfart

Vekstfart til lineære funksjoner

Vekstfart til lineære funksjoner (123050)

Som vi nå har sett flere ganger, kan vi skrive en lineær funksjon på formen $f(x) = ax + b$. Tallet *a* kalles stigningstallet, og tallet *b* kalles konstantleddet.

Vi skal se litt nærmere på stigningstallet og innføre noen nye skrivemåter og begreper.

Eksempel

Ole selger bær på torget. Han har en fast timelønn på 100 kroner.
I tillegg får han 3 kroner per kilo han selger. Vi lar *x* være antall kilo Ole selger per time, og $f(x)$ timelønna han oppnår.
Vi får at

$$f(x) = 3x + 100$$

Stigningstallet forteller hvor bratt grafen er. I dette tilfellet er stigningstallet et uttrykk for hvor mye timelønna øker i forhold til antall solgte kilo. Derfor kaller vi også stigningstallet for **vekstfarten** eller **veksthastigheten** til funksjonen.

I dag har vi tilgang til friske bær hele året. Om sommeren dominerer de norske fra skog og hage, mens resten av året importerer vi.

Vi ser at punktene (20,160) og (40,220) ligger på grafen til *f*.

Stigningstallet blir $\frac{220-160}{40-20}$.

Dette er det samme som $\frac{\text{endring } i\ y\text{–verdi}}{\text{endring } i\ x\text{–verdi}}$.

Vi bruker den greske bokstaven Δ (delta) for å angi endring i en størrelse.

Vi får da at

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{220-160}{40-20} = \frac{60}{20} = 3$$

Dette kan vi regne oss fram til ved hjelp av funksjonsuttrykket:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(40)-f(20)}{40-20} = \frac{3\cdot 40+100-(3\cdot 20+100)}{20} = \frac{220-160}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

Vi får samme resultat uansett hvilke to x-verdier, x_1 og x_2, vi velger.

Hvis vi for eksempel velger $x_1 = 10 \text{ og } x_2 = 50$, får vi

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(50) - f(10)}{50 - 10}$$
$$= \frac{3 \cdot 50 + 100 - (3 \cdot 10 + 100)}{40} = \frac{150 + 100 - 30 - 100}{40} = \frac{120}{40} = 3$$

Vekstfart. Stigningstall

Vi kan regne ut **vekstfarten til en lineær funksjon**, eller **stigningstallet** til en rett linje ved å bruke formelen

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Her er $(x_1, f(x_1)) \text{ og } (x_2, f(x_2))$ to punkter som ligger på linjen.

Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart

Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart (123053)

Når en funksjon ikke er lineær, vil vekstfarten variere fra sted til sted på kurven. Jo brattere kurven er, jo større er vekstfarten.

Vi kan finne **den gjennomsnittlige vekstfarten** over et intervall [x_1, x_2] på følgende måte

Vi trekker en rett linje, sekant, gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_x))$.
Vi regner så ut stigningstallet til denne sekanten:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Vi har da funnet et mål for **gjennomsnittlig vekstfart** for funksjonen når *x* øker fra x_1 til x_2.

Gjennomsnittlig vekstfart. Stigningstallet til sekanten

Den gjennomsnittlige vekstfarten for en funksjon *f*(*x*) når *x* vokser fra x_1 til x_2, er lik **stigningstallet til sekanten** gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_x))$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Vi kan finne den gjennomsnittlige vektfarten på to måtar

1. Vi kan lese av stigningstallet til sekanten gjennom punktene $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$

2. Vi kan regne ut $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Eksempel 1

Som 13 åring var Niels Henrik 149 cm høy. Fire år senere var han 181 cm. Vi l a r x være alderen tilNiels Henrik og y være høyden. Vi får at den gjennomsnittlige vekstfarten til Nils Henrik i fireårsperioden blir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{181\ \text{cm} - 149\ \text{cm}}{4\ \text{år}} = \frac{32\ \text{cm}}{4\ \text{år}} = 8\,\frac{\text{cm}}{\text{år}}$$

Eksempel 2

En funksjon f er gitt ved $f(x) = x^2 + 2$

Vi ønsker å finne den gjennomsnittlige vekstfarten til f når x vokser fra x = 0,5 til x = 2.

Gjennomsnittlig vekstfart

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2) - f(0{,}5)}{2 - 0{,}5} \\ &= \frac{2^2 + 2 - (0{,}5^2 + 2)}{2 - 0{,}5} \\ &= \frac{6 - 2{,}25}{1{,}5} \\ &= 2,5\end{aligned}$$

Eksempel 3

I 2006 plantet Elin et morelltre.

Funksjonen h gitt ved

Morelltre i blomstring

$$h(x) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1$$

viser, de første årene etter planting, høyden til morelltreet i meter x år etter at det ble plantet.

Vi leser av grafen at stigningstallet til sekanten gjennom punktene (1, 1, 09) og (4, 2, 25) er 0,39.

Dette viser at i perioden 2007 til 2010 vokste treet med gjennomsnittlig 39 cm per år.

Vi ser av grafen at treet vokser fortere etter fire år enn etter ett år. Grafen er mye brattere når $x = 4$ enn når $x = 1$.

Momentan vekstfart

Vi ønsker å finne en tilnærmet verdi for hvor fort treet vokser når det er akkurat ett år gammelt. Vi kaller dette for **den momentane veksten** når treet er ett år.

Vi finner først gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året og deretter fra det første året til det andre året.

Grafene ovenfor viser at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året er 32 cm per år, og at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det andre året er 25 cm per år.

Stigningen til sekantene blir mer og mer lik brattheten til grafen når jo nærmere hverandre de to punktene er. Av de to tilnærmingsverdiene, er det derfor den siste som er den beste tilnærmingen.

For å finne en enda bedre tilnærmingsverdi reduserer vi avstanden mellom punktene enda mer.

Til slutt vil punktene falle sammen til ett punkt, og **sekanten blir en tangent** til kurven i dette punktet.

Stigningen til denne tangenten gir den aller beste tilnærmingsverdien for **den momentane vekstfarten** når $x = 1$.

Vi kan altså finne en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten i et punkt på en kurve ved å tegne en tangent til kurven i punktet og finne stigningstallet til denne tangenten.

I GeoGebra gjør vi dette ved å bruke verktøyene «Tangenter» og «Stigning».

I eksempel 3 ovenfor finner vi at den momentane veksten til treet nøyaktig 3 år etter planting er 0,46 meter per år.

Sannsynlighet (Bare for VG3 PB)

Moduler

Modul 1: Hva er sannsynlighet?

Modul 1: Hva er sannsynlighet (122858)

Teori

Oppgaver

Hva er sannsynlighet / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/127765

Siffer - episode 1

Modul 1: Hva er sannsynlighet? / video
http://ndla.no/nb/node/121865

Modul 2: Sannsynlighet i uniforme modeller. Addisjon av sannsynligheter

Modul 2: Addisjon av sannsynligheter. Gunstige og mulige utfall (122859)

Teori

Oppgaver

Addisjon av sannsynligheter. Gunstige og mulige utfall / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/128245

Innledning sannsynlighet - Khan Academy / video
http://ndla.no/nb/node/100240

Modul 2: Addisjon av sannsynligheter / video
http://ndla.no/nb/node/121951

Modul 3: Beregne sannsynligheter ved å bruke tabeller

Modul 3: Beregne sannsynligheter ved å bruke tabeller (122860)

Teori

Oppgaver

Beregne sannsynlighet ved å bruke tabeller / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/128312

Modul 3: Beregne sannsynligheter ved å bruke tabeller / video
http://ndla.no/nb/node/122100

Modul 4: Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram

Modul 4: Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram (122861)

Teori

Oppgaver

Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/128455

Modul 4: Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram / video
http://ndla.no/nb/node/122103

Modul 5: Multiplikasjon av sannsynligheter

Modul 5: Multiplikasjon av sannsynligheter (122862)

Teori

Oppgaver

Multiplikasjon av sannsynligheter / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/128564

Modul 5: Multiplikasjon av sannsynligheter / video
http://ndla.no/nb/node/121953

Modul 6: Beregne sannynligheter ved å bruke valgtre

Modul 6: Beregne sannynligheter ved å bruke valgtre (122863)

Teori

Oppgaver

Beregne sannsynligheter ved å bruke valgtre / h5p_content
http://ndla.no/nb/node/128591

Modul 6: Beregne sannsynligheter ved å bruke valgtre / video
http://ndla.no/nb/node/121957

Sammendrag

Sammendrag sannsynlighet (122824)

Sammendrag av begrep, forklaring og eksempel på sannsynlighet.

Begrep	Forklaring	Eksempel
Utfall	Enkeltresultatene i et forsøk	Kron i et myntkast
Utfallsrom	Alle utfallene i et forsøk	Kron og mynt i et myntkast
Sannsynlighet	Relativ frekvens ved mange forsøk	P(Antall øyne lik 3 i et terningkast) = $\frac{1}{6}$
Uniform sannsynlighetsmodell	Alle utfallene er like sannsynlige $\text{Sannsynlighet} = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}}$	Myntkast – kast med terning – lotto - trekk av kort fra kortstokk
Hendelse	Sammensatt av ett eller flere utfall	En hendelse i terningkast kan være at antall øyne er to eller tre
Den generelle addisjonssetningen	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
Addisjonssetningen når *A* og *B* ikke har felles utfall	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Ingen utfall er med både i *A* og *B*
Produktsetningen for uavhengige hendelser	$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$	Gjelder også når det er flere uavhengige hendelser
Produktsetningen	$P(A \cap B) = P(A) + P(B\|A)$	

Andre ressurser

Sannsynlighet spill

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Spill i sannsynlighet (68453)

Et spill hvor du får prøvd deg på mange områder i sannsynlighet. Her finnes både hjelpfunksjon med e-forelesninger, oppgaver og simuleringer.

Sannsynlighet oppgaver

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Oppgaver i sannsynlighet (68455)

Her kan du gjøre oppgavene til spillet om sannsynlighet. Klikk på bildet for å starte.

Sannsynlighet hjelp

Forfatter: Mintra AS / NDLA
E-forelesning i sannsynlighet (68457)

Her kan du kjøre hjelpfunksjonen som en egen e-forelesning. Klikk på bildet for å sette i gang. Deretter peker du på spillbrettet for å velge begrep.

Simuleringer i GeoGebra

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Simuleringer i GeoGebra (27100)

Simulering i GeoGebra

Vedlegg i GeoGebra åpnes best i nettleseren Firefox.

Terningkast

100 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27093

1 000 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27095

10 000 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27096

Myntkast

100 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27097

1 000 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27098

10 000 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27099

Simulering av myntkast

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Simulering av myntkast (24647)

Myntkast

Simulering av ruletthjul

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Simulering av ruletthjul (24656)

Rulett