NASJONAL DIGITAL LÆRINGSARENA

Matematikk Vg1T

Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpemidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

Dette dokumentet er en tekstutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til http://ndla.no.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpemidler. I modell 1 er alle hjelpemidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.

Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpemidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Disse fagene følger modell 2 for hjelpemiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.

Innholdsfortegnelse

Innholdsfortegnelse 2

Tall og algebra 7

Teori 7

Tallregning 7

Tallene våre 7

Tall og tallmengder 9

Rasjonale tall, reelle tall og tallilntervall 12

Regningsarter 15

Å regne med negative tall 16

Addisjon og subtraksjon av brøker 19

Multiplikasjon og divisjon med brøker 22

Brudden brøk 24

Regnerekkefølge 25

Potenser 27

Potenser 27

Regneregler for potenser 28

Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering 30

Tierpotenser 31

Tall på standardform 32

Kvadratrøtter 34

n - te røtter 36

Potenser og rotuttrykk 37

Algebraiske uttrykk 39

Bokstavregning 39

Hvordan regne med bokstaver 40

Kvadratsetningene 43

Likninger 47

Likninger 47

Formelregning 50

Likningssett 52

Faktorisering 55

Faktorisering 55

Andregradsuttrykk 56

Fullstendige kvadrater 57

Forenkling av rasjonale uttrykk 59

Andregradslikninger 60

Andregradslikninger 60
Å løse andregradslikninger med abc-formelen 62
Likningssett av første og andre grad 64
Faktorisere andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunktmetoden 66
Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunkt... 66
Mer om forenkling av rasjonale uttrykk 69
Likninger med rasjonale uttrykk 71
Ulikheter 73
Ulikheter 73
Ulikheter av 2. grad 75
Eksponential- og logaritmelikninger 77
Vekstfaktor 77
Logaritmer 80
Eksponentiallikninger uten bruk av digitale verktøy 81
Enkle logaritmelikninger 83
Annet 84
Hoderegning 84
Brøkregning 85
Likninger. Øvelse gjør mester 86
Tenk på et tall 87
Negative tall 88
Negative tall 89
Regnerekkefølge 90
Forhold 91
Produktregelen 92
Geometri **93**
Teori 93
Innledning 93
Innledning 93
Innledningsøvelser 95
Grunnleggende begreper og sammenhenger 96
Grunnleggende begreper og sammenhenger 96
Vinkler 98
Måleenheter for lengde 102
Mangekanter og sirkler 103
Mangekanter og sirkler 103
Trekanter 104

Firkanter 105
Vinkelsummen i en n - kant 106
Sirkler 107
Tallet π 108
Formlikhet 109
Formlikhet 109
Formlike trekanter 110
Bruk av formlikhet for å regne ut ukjente sider 111
Kart og arbeidstegninger 113
Pytagoras´ setning 114
Pytagoras´ setning 114
Å finne en ukjent side i en rettvinklet trekant 116
Areal 118
Definisjon og måleenheter for areal 118
Arealformler 120
Omkrets av plane figurer 122
Tilnærmingsverdier 123
Trigonometri 1 124
Navn på hjørner og sider i trekanter 124
Tangens 125
Sinus og cosinus 130
Trigonometri 132
Arealformelen for trekanter 134
Trigonometri 2 135
Sinus og cosinus til vinkler større enn 90° 135
To vinkler - samme sinusverdi 137
Arealsetningen for trekanter med en vinkel større enn 90° 139
Sinussetningen 140
Cosinussetningen 142
Annet 144
Geometriens historie. Spill 144
Geometriens historie. Oppgaver 145
Pytagoras´ læresetning animasjon 1 146
Pytagoras´ læresetning animasjon 2 147
Pytagoras´ læresetning animasjon 3 148
Overflate av prisme animasjon 149
Volum animasjon 150
Tangens - animasjon 151

Sinussetningen- animasjon 152

Trigonometri - animasjon 153

Sannsynlighet 154

Teori 154

Hva er sannsynlighet? 154

Sannsynlighetsmodeller 157

Sannsynlighet i uniforme modeller. Addisjon av sannsynligheter 160

Beregne sannsynlighet ved å bruke tabeller 164

Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram 167

Multiplikasjon av sannsynligheter 169

Betinget sannsynlighet og den generelle produktsetningen 171

Beregne sannsynligheter ved å bruke valgtre 173

Sammendrag sannsynlighet 175

Annet 176

Sannsynlighet spill 176

Sannsynlighet oppgaver 177

Sannsynlighet hjelp 178

Simuleringer i GeoGebra 179

Simulering av myntkast 181

Simulering av ruletthjul 182

Funksjoner 183

Teori 183

Funksjonsbegrepet 183

Funksjonsbegrepet 183

Funksjoner representert ved formler 184

Funksjoner representert ved grafer og verditabeller 186

Grafer og verditabeller til funksjoner digitalt 187

Koordinatsystemet 189

Lineære funksjoner 191

Lineære funksjoner 191

Stigningstall og konstantledd 192

Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon 195

Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje 196

Mer om stigningstall og konstantledd 198

Likningen for en rett linje. Ettpunktsformelen 199

Alternative metoder for å finne likningen for en rett linje 200

Skjæringspunkt mellom to rette linjer 201

- Grafisk løsning av likningssett 203
- Nullpunkt 204
- Lineær regresjon 206

Andre funksjonstyper 208
- Andre funksjonstyper 208
- Generell form for andregradsfunksjoner 210
- Utforsking av andregradsfunksjonen i GeoGebra 212
- Nullpunkter, topp- og bunnpunkter 213
- Symmetrilinje 215
- Mer om symmetrilinjer 217
- Hvordan tegne grafen til en andregradsfunksjon 219
- Eksempel på andregradsfunksjon 221
- Polynomfunksjoner 222
- Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon 224
- Rasjonale funksjoner 226
- Hvordan finne asymptotene? 228
- Praktisk eksempel på en rasjonal funksjon 230
- Potensfunksjoner 231
- Eksponentialfunksjoner 234
- Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner 235

Vekstfart og derivasjon 237
- Vekstfart til lineære funksjoner 237
- Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier 239
- Momentan vekstfart. Den deriverte 242
- Derivasjonsregler 245
- Likningen for tangenten til en graf i et punkt 247

Drøfting av polynomfunksjonar på grunnlag av eigenskapar til den deriverte funksjonen 249
- Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av d.. 249

Tall og algebra

Teori

Tallregning

Tallene våre

Forfatter: Stein Aanensen, Olav Kristensen
Tallene våre (3664)

Tellestreker, hulemalerier og helleristninger viser at mennesker som levde for mange tusen år siden, brukte tall i sitt daglige liv. Arkeologer har funnet **tellestreker** som er over 30 000 år gamle. Strekene er systematisk risset inn og er antakelig blitt brukt under opptelling av gjenstander, dager eller andre objekter.

Vår sivilisasjon oppsto i Mesopotamia, landområdene mellom og rundt Eufrat og Tigris (nå Irak, nordøstlige Syria og sørøstlige Tyrkia), for ca. 5000 år siden. Her ble skrivekunsten oppfunnet. Menneskene som levde her, brukte **kileskrift**. De skrev på leirtavler og presset de kileformede tegnene inn i våt leire. På denne måten førte de blant annet regnskap over den handelen som utviklet seg mellom byene. Egypterne kjente til kileskriften, men utviklet sine egne skrifttegn, **hieroglyfene**. Utgravinger viser at det på denne tiden var mennesker som drev med **addisjon**, **subtraksjon**, **multiplikasjon** og **divisjon**.

Senere laget både grekerne og romerne sine **tallsystemer**, men det tallsystemet vi bruker i dag, med de ti symbolene, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9, har sin opprinnelse i India.

I de tidligste kulturene var tallet 0 og de negative tallene ikke kjent. Det var først på 1200-tallet at matematikere begynte å innføre disse tallene. Det tok likevel enda flere hundre år før de ble fullt ut akseptert. Matematikere diskuterte om negative tall virkelig eksisterte, og helt fram mot 1800-tallet var det matematikere som ikke ville akseptere beregninger som inneholdt negative tall.

Problemet med å forstå negative tall henger sammen med at tall ikke er noe konkret. Tall er abstrakte matematiske begreper. Vi må knytte tallene til noe konkret for å få en følelse av å forstå dem.

For oss som har vokst opp med bankvesen og gradestokk, er det lettere å forstå de negative tallene. Vi vet at vi kan gå i minibanken og ta ut mer penger enn vi har på kontoen. På kontoutskriften fra banken står det da et tall med minus foran, og vi skjønner at vi står i gjeld til banken! Vi vet også at når det er kuldegrader ute, leser vi det av som negative tall på gradestokken. De negative tallene blir da konkrete, og vi føler at vi forstår dem.

Tall er grunnlaget for all matematikk. Det er derfor veldig viktig å ha god tallforståelse for å gjøre det bra i matematikk.

Negative tall på kontoutskriften?

Tall og tallmengder

Tall og tallmengder (87006)

Naturlige tall

De første tallene du lærte som barn var sannsynligvis tallene

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Dette var også de første tallene menneskene tok i bruk.

Vi kaller disse tallene for **de naturlige tallene**. Mengden av alle de naturlige tallene symboliseres med bokstaven $\mathbb{N}$.

Vi skriver

$$\mathbb{N} = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots)$$

og leser «N er lik mengden av tallene 1, 2, 3, 4, 5, osv». Vi bruker mengdeparenteser for å liste opp en mengde av enkelttall. Prikkene etter 10-tallet viser at tallene fortsetter i samme mønster, 11,12 osv.

De naturlig tallene kan brukes til å beskrive et antall, for eksempel hvor mange epler du har. De kan også brukes til å angi en nummerrekkefølge, for eksempel resultatlisten ved en idrettskonkurranse.

Den tyske matematikeren Leopold Kronecker (1823 – 1891) skal en gang ha sagt at «Gud skapte de naturlige tallene, resten er menneskets verk».

Hele tall

La oss tenke oss at du dyrker og selger epler. Hvis du har 8 epler og selger 2 epler, har du 6 epler igjen. Dette kan illustreres med regneoperasjonen subtraksjon.

$$8 - 2 = 6$$

Vi subtraherer et naturlig tall fra et annet naturlig tall og får et nytt naturlig tall.

Men hva hvis kunden ønsker å kjøpe 8 epler, eller til og med 12 epler slik at du må låne 4 epler av naboen?

Regnestykkene blir nå

$$8 - 8 \ \text{ og } \ 8 - 12$$

Her har vi ikke naturlige tall som gir svar på regneoperasjonene. Det er da matematikere har funnet på å **utvide tallmengden** med tallet 0 og de negative tallene, og vi får at

$$8 - 8 = 0 \ \text{ og } \ 8 - 12 = -4$$

Null epler betyr at du ikke har flere epler, og –4 epler betyr at du skylder 4 epler.

Vi utvider mengden av de naturlige tallene ved å plassere null til venstre for 1, –1 til venstre for 0, –2 til venstre for –1 og så videre.

$$(\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

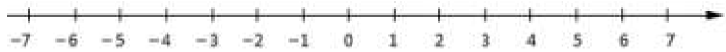
Tallet –1 kan med fordel leses som «negativ 1» for å markere at her brukes minustegnet som et **fortegn**, det forteller at tallet er negativt, og ikke som **regnetegnet** subtraksjon.

Den tallmengden vi nå har fått kalles for hele tall og symboliseres med $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = (\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots\ )$$

Når vi bruker regneoperasjonene addisjon og subtraksjon på to hele tall, får vi alltid et nytt helt tall som resultat.

En tallinje kan gi et bilde av de hele tallene



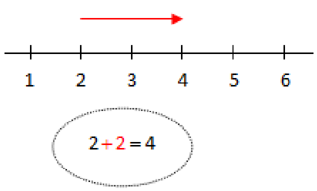
Tall som ligger på hver sin side av tallet 0, og like langt fra 0, kalles for **motsatte tall**. For eksempel er 2 og –2 motsatte av hverandre. Summen av et tall og det motsatte tallet er alltid lik null. Tallet 0 er sitt eget motsatte tall.

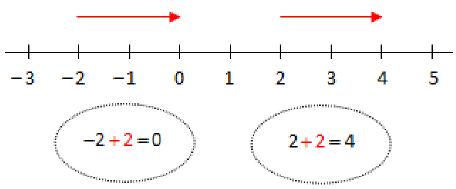
De negative tallene ble ikke innført i Europa før på 1500-tallet. Det var store diskusjoner før de ble godtatt. Både filosofer og teologer hadde store betenkeligheter med å godta negative tall.

Tallet 0 ble godtatt i Europa noen hundre år tidligere. Noen matematikere regner tallet 0 med blant de naturlige tallene, mens andre ikke gjør det. (Det er faktisk ingen som er gitt myndighet til å bestemme for eksempel om tallet 0 skal regnes som et naturlig tall eller ikke!)

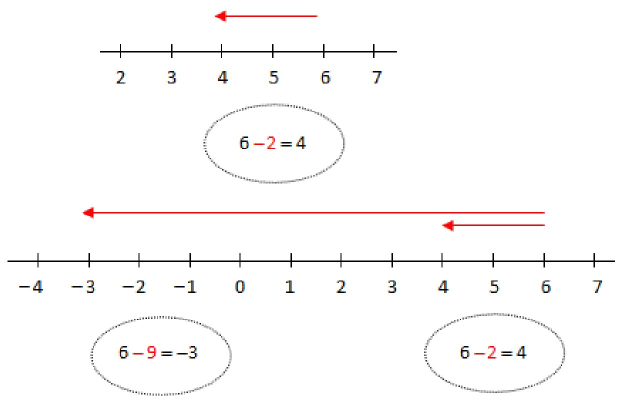
Når vi legger sammen, trekke fra hverandre og multipliserer hele tall, blir resultatet alltid et helt tall. Det er slik en matematiker liker å ha det. Én tallmengde og én regneoperasjon! Regneoperasjonen virker på tall i tallmengden og gir et nytt tall i tallmengden.

Når vi adderer et positivt tall, flytter vi oss til høyre på tallinjen. Hvis vi adderer det positive tallet 2, flytter vi oss to plasser til høyre på tallinjen, uansett om vi adderer tallet 2 til et positivt eller negativt tall.



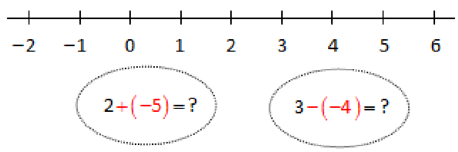


Når vi subtraherer et positivt tall, flytter vi oss til venstre på tallinjen. Hvis vi subtraherer det positive tallet 2, flytter vi oss to plasser til venstre på tallinjen. Hvis vi subtraherer det positive tallet 9, flytter vi oss ni plasser til venstre på tallinjen.



Men hva vil det si å addere eller subtrahere negative tall?

Hvor havner vi på tallinjen hvis vi til tallet 2 adderer det negative tallet –5, eller til tallet 3 subtraherer det negative tallet –4?



Hva vil det egentlig si å addere og subtrahere negative tall? Har vi praktiske situasjoner hvor vi kan få en forståelse av hva det vil si? Dette kommer vi tilbake til!

Rasjonale tall, reelle tall og talliIntervall

Rasjonale tall, reelle tall og tallintervall (119233)

Rasjonale tall

Du kjenner også til regneoperasjonen divisjon. Vi kan dividere 8 med 4 og få 2, som er et helt tall. Men hvis vi for eksempel dividerer 1 med 2, blir resultatet ikke et helt tall. Vi får brøken $\frac{1}{2}$. For å kunne dividere hele tall, må vi på ny **utvide tallmengden** vår. Vi må inkludere alle tall som består av brøker med hele tall i teller og nevner.

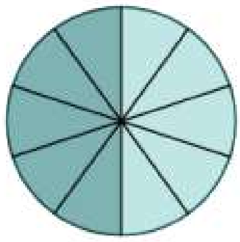
Tall som kan skrives som brøker med hele tall i teller og nevner, kalles **rasjonale tall**. Disse symboliseres med $\mathbb{Q}$.

Rasjonale tall blir ofte enklere å behandle hvis vi skriver dem som **desimaltall**. Prinsippet er at vi gjør brøkene om til brøker med 10, 100, 1000, osv. som nevnere.

Tenk deg at du deler en kake i ti like store deler. Fem av disse delene utgjør da halvparten av kaken.

Det betyr at $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Et desimaltall har et **desimalskilletegn**. I Norge bruker vi komma som desimalskilletegn, mens de fleste andre land, og de fleste digitale verktøy bruker punktum. Første siffer etter desimalskilletegnet angir hvor mange tideler vi har, det neste hvor mange hundredeler vi har osv. Sifrene foran desimalskilletegnet angir heltall.



Det betyr at brøken $\frac{1}{2}$ kan skrives som $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$.

Alle brøker kan på tilsvarende måte gjøres om til desimaltall.

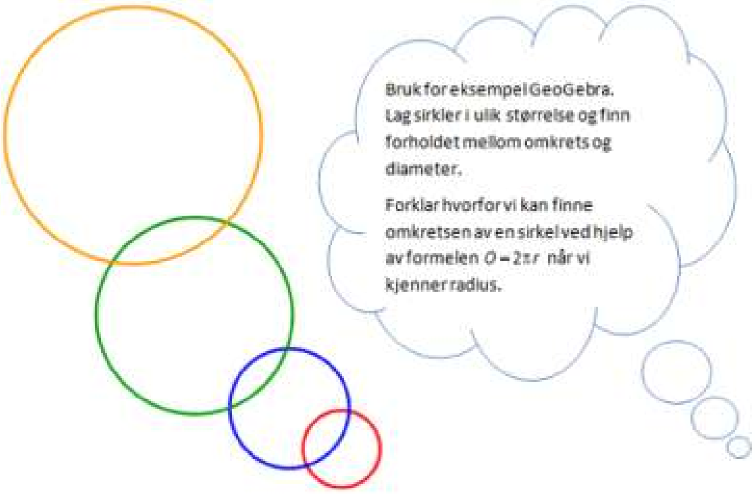
For eksempel er

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 0,2 + 0,05 = 0,25$$

Vi kan nå anvende regneoperasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon på rasjonale tall og få et rasjonalt tall som resultat.

Reelle tall

Har vi så fått med oss alle tallene? Svaret er nei.

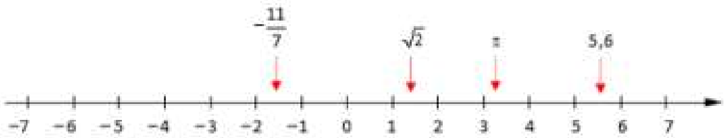


Forholdet mellom omkretsen og diameteren i en sirkel er lik det tallet som vi kaller π (pi). Du har lært at 3,14 er en god tilnærmet verdi for π, men faktisk er det ikke mulig å skrive π som et rasjonalt tall. I 2009 ble tallet beregnet med en nøyaktighet av 2 699 999 990 000 desimaler. Det vil si nesten 2,7 billioner desimaler. Tallet π er et reelt tall, men er altså ikke rasjonalt. Vi sier at det er **irrasjonalt**.

Et annet irrasjonalt tall er det tallet som multiplisert med seg selv gir tallet 2. Vi skriver bare $\sqrt{2}$. Det finnes ingen brøker som multiplisert med seg selv gir tallet 2.

Vi må altså utvide tallmengden vår igjen for å få med slike tall som π og $\sqrt{2}$. Den tallmengden vi nå har fått, kalles for **de reelle tall**, og den symboliseres med bokstaven $\mathbb{R}$.

Vi kan tenke oss alle reelle tall som punkter på en uendelig lang rett linje, tallinjen. Punktene ligger veldig tett. Mellom to reelle tall er det uendelig mange reelle tall.



Spørsmålet er så om vi nå har fått med oss alle tall? Svaret er igjen nei.

Det finnes for eksempel ikke noe reelt tall som multiplisert med seg selv gir tallet –1. $\sqrt{-1}$ er et imaginært tall. Vi skal ikke regne med imaginære tall i 1T-kurset, men bruk gjerne Internett og finn ut mer om imaginære og komplekse tall! (Komplekse tall er tall som inneholder en reell del og en imaginær del.)

Tallintervall

Når vi skal referere til bestemte tall på tallinjen, bruker vi klammeparenteser $(\dots)$. Mengden av de naturlige tallene 1, 2 og 5 skrives som $(1, 2, 5)$.

Mengden av alle reelle tall avgrenset av to verdier kalles et **tallintervall**. Eksempler på tallintervaller er

$$[1,3],\ \langle 1,3\rangle,\ \langle 1,3]\ \text{og}\ [1,3\rangle$$

Det første intervallet inkluderer tallene 1 og 3 i tillegg til alle reelle tall mellom disse to tallene. Dette er et **lukket intervall**.

I det andre intervallet er 1 og 3 ikke med, men ellers er alle tallene som er med i det første intervallet også med her. Dette er et **åpent intervall**.

I det tredje intervallet er tallet 1 ikke med, mens tallet 3 er med. I det fjerde er tallet 1 med, mens 3 ikke er med. De to siste intervallene kalles **halvåpne intervaller**.

Intervallet $[2,\rightarrow\rangle$ inneholder alle reelle tall større enn eller lik 2.

Intervallet $\langle\leftarrow,-4\rangle$ inneholder alle reelle tall mindre enn −4.

Regningsarter

Regningsarter (3663)

Fra ungdomsskolen er du kjent med **de fire regningsartene**;
addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Her følger en liten repetisjon.

Når vi **adderer**, får vi en **sum**. Tallene før og etter addisjonstegnene kalles **ledd**.

$$\underbrace{3x}_{\text{ledd}} + \underbrace{x}_{\text{ledd}} + \underbrace{2}_{\text{ledd}} = \underbrace{4x+2}_{\text{sum}}$$

Når vi **subtraherer**, får vi en **differanse**. Tallene før og etter subtraksjonstegnene kalles **ledd**.

$$\underbrace{30}_{\text{ledd}} - \underbrace{10}_{\text{ledd}} = \underbrace{20}_{\text{differanse}}$$

Når vi **multipliserer**, får vi et **produkt**. Tallene før og etter multiplikasjonstegnene kalles **faktorer**.

$$\underbrace{2}_{\text{faktor}} \cdot \underbrace{3}_{\text{faktor}} \cdot \underbrace{x}_{\text{faktor}} = \underbrace{6x}_{\text{produkt}}$$

Når vi **dividerer**, får vi en **kvotient**. Divisjonstegnet kan også skrives som brøkstrek. Tallene over og under brøkstreken kalles henholdsvis for **teller** og **nevner**.

$$4:2 = \frac{\overbrace{4}^{\text{teller}}}{\underbrace{2}_{\text{nevner}}} = \underbrace{2}_{\text{kvotient}}$$

Å regne med negative tall

[Å regne med negative tall (87077)](#)

Tidligere i dette kapittelet brukte vi tallinjer for å illustrere addisjon og subtraksjon med positive tall.

Hvordan kan vi tenke når vi adderer eller subtraherer et negativt tall?

Når vi skal legge sammen en gjeld på 3 kroner og en gjeld på 4 kroner, skjønner vi at vi får en gjeld på 7 kroner. Hvis vi lar gjeld være det samme som negativ kapital, blir regnestykket vårt slik

$$(-3)+(-4)=(-7)$$

Eller uten unødvendige parenteser

$$-3+(-4)=-7$$

Plusstegnet foran (–4) er et **regnetegn**, addisjonstegn, mens minustegnet i (–4), (–3) og (–7) er **fortegn** som forteller at tallet er negativt

$$\left(\overbrace{-}^{\text{Fortegn}}3\right)\overbrace{+}^{\text{Regnetegn}}\left(\overbrace{-}^{\text{Fortegn}}4\right)=\left(\overbrace{-}^{\text{Fortegn}}7\right)$$

Vi kan også lese regnestykket som

negativ 3 pluss **negativ 4** er lik **negativ 7**

Vi vet at også

$$-3-4=-7$$

Men det må bety at

$$-3+(-4)=-3-4$$

Å legge til –4 gir samme resultat som ved å trekke fra 4.

Tallet 4 er det motsatte tallet til –4 fordi det ligger like langt fra 0, men på motsatt side. Det betyr at får følgende regel

> **Addisjon med negative tall**
>
> Å addere et negativt tall er det samme som å **subtrahere det motsatte tallet**.

La oss nå tenke oss at du har en gjeld på 5 kroner, og at 3 kroner av gjelden blir slettet, trukket fra. Det er opplagt at du da sitter igjen med en gjeld på 2 kroner.

Igjen lar vi gjeld være negativ kapital, og regnestykket blir

$$-5-(-3)=-2$$

Men vi vet også at

$$-5+3=-2$$

Og det må bety at

$$-5-(-3)=-5+3$$

Å trekke fra –3 gir samme resultat som ved å legge til 3.

Tallet 3 er det motsatte tallet til –3 fordi det ligger like langt fra 0, men på motsatt side. Det betyr at får følgende regel

Subtraksjon med negative tall

Å subtrahere et negativt tall er det samme som å **addere det motsatte tallet**.

Hvordan blir det når vi multipliserer eller dividerer med negative tall?

Vi tenker oss nå at vi firedobler en gjeld på 3 kroner. Resultatet blir opplagt at vi får en gjeld på 12 kroner. Gjelden multiplisert med 4 blir en gjeld på 12. Vi må altså ha at

$$(-3)\cdot 4=-12$$

Eller sagt på en annen måte: fire ganger gammel gjeld er ny gjeld.

$$4\cdot(-3)=-12$$

Hvis vi nå deler den nye gjelden på 4, må vi komme tilbake til den opprinnelige gjelden. Da må vi ha at

$\frac{-12}{4}=-3$

Hva vil det så si å dele et tall på et negativt tall?

Det er ikke så lett å finne praktiske situasjoner som kan illustrere det. Men vi ønsker at de regler vi har for positive tall, også skal gjelde for negative tall.

For positive tall har vi at når vi dividerer to tall som er like med det samme tallet, får vi som resultat to tall som også er like. Hvis to personer hver har 20 kroner, og begge halverer sin kapital, vil begge ha 10 kroner igjen. Vi har også at når vi dividerer et tall på seg selv, så får vi tallet 1 som resultat.

Vi har at

$$(-3)\cdot 4=-12$$

Vi vil ha det slik at

$$\frac{(-3)\cdot 4}{(-3)}=\frac{-12}{-3}$$

Vi vil også ha at –3 dividert på seg selv skal være lik 1. Det betyr at

$$4=\frac{-12}{-3}$$

Det betyr at når vi dividerer et negativt tall på et negativt tall, så får vi som resultat et positivt tall.

For at alle regneregler som gjelder for positive tall også skal gjelde for regning med negative tall, må sammenhengene nedenfor gjelde.

Multiplikasjon og divisjon med negative tall

Når vi multipliserer eller dividerer to tall med **like fortegn**, blir svaret **positivt**.

Når vi multipliserer eller dividerer to tall med **ulike fortegn**, blir svaret **negativt.**

Multiplikasjonen eller divisjonen utføres som om begge tallene var positive.

Addisjon og subtraksjon av brøker

[Addisjon og subtraksjon av brøker (55965)](#)

Å trekke sammen brøker med samme nevner

Når vi for eksempel legger sammen 3 meter, 2 meter og 4 meter, verdier med **samme benevning**, trenger vi ikke å foreta oss noe før vi legger sammen. Vi får enkelt og greit 9 meter som svar.

3 m + 2 m +4 m = 9 m

På samme måte kan vi trekke sammen 4 tredeler, 1 tredel og 2 tredeler direkte til 7 tredeler.

$\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

Å trekke sammen brøker med forskjellig nevner

Utviding av brøker

Men hvis vi skal legge sammen 3 cm + 2 m + 4 dm, må vi først finne en felles benevning. Deretter kan vi legge sammen.

Vi må tenke på samme måte når vi legger sammen 3 halve + 2 tredjedeler + 1 femdel. Vi må først finne **en felles nevner** (eller benevning).

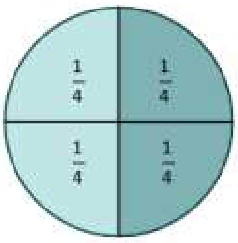
Hva må vi gjøre for å regne ut $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$?

Vi velger å la fellesnevner for 2, 3 og 5 være det minste tallet som disse tallene går opp i, altså 2 ·3 ·5 = 30.

Hver av brøkene skal altså skrives med nevner 30, men skal fortsatt ha samme verdi.

En brøk endrer ikke verdi når vi multipliserer med samme tall i teller og nevner.

Det kan vi illustrere ved å se på arealet av en sirkel.



$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

Vi ser av figuren at halvparten av arealet til sirkelen er lik summen av 2 firedeler, $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Men siden $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, får vi at $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

Men det er nettopp det vi får når vi multipliserer brøken $\frac{1}{2}$ med 2 i teller og nevner.

$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}$

Vi kaller denne handlinngen «**å utvide en brøk**».

I dagligtale er å **utvide** det samme som å gjøre større, men i brøkregning har ordet utvide altså en annen betydning! Egentlig burde vi heller funnet et utrykk tilsvarende det engelske. På engelsk brukes «rename». Brøken får et annet navn, men den er like mye verd.

Vi utvider brøkene

$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{45}{30}$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$

Til slutt legger vi sammen og får

$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{45}{30} + \frac{20}{30} + \frac{6}{30} = \frac{45+20+6}{30} = \frac{71}{30}$

En brøk der teller er større en nevner, kaller vi en **uekte brøk**. En uekte brøk kan gjøres om til et **blandet tall**.

Vi får at

$\frac{71}{30} = \frac{60}{30} + \frac{11}{30} = 2 + \frac{11}{30} = 2\frac{11}{30}$ som betyr $2 + \frac{11}{30}$

Det er viktig at du ikke mekaniserer brøkregningen din. Kanskje du tidligere har gjort om det blandede tallet $2\frac{11}{30}$ til uekte brøk uten å være bevisst at **et blandet tall er et helt tall pluss en brøk**.

Forkorting av brøker

Vi har at $\frac{6}{30} = \frac{6:\cancel{6}}{30:\cancel{6}} = \frac{1}{5}$.

Vi skjønner at vi kan dividere med samme tall i teller og nevner uten at brøken endrer verdi. Vi kaller denne handlingen «**å forkorte en brøk**».

I dagligtale er **å forkorte** det samme som å gjøre kortere eller mindre. Men i brøkregning har ordet forkorte en annen betydning. Her kunne vi også med fordel funnet et utrykk tilsvarende det engelske «simplify». Vi forenkler brøken, den er like mye verd.

Oppsummering

Å **utvide** en brøk vil si å multiplisere med samme tall (ikke 0) i teller og nevner.

Å **forkorte** en brøk vil si å dividere med samme tall (ikke 0) i teller og nevner.
(For å forkorte faktoriserer vi gjerne først teller og nevner. Så «stryker» vi faktor mot faktor.)

Vi **adderer** og **subtraherer** brøker (trekker sammen brøker) ved å

1. utvide brøkene slik at alle får samme nevner
2. addere/subtraherer tellerne og beholde nevneren

Det kan være lurt å
- dividere hele tall med 1 slik at hele tall kan oppfattes som brøker
- gjøre blandede tall om til uekte brøker.

Til slutt må vi forkorte svaret.

Eksempel

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + 3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1} - \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \\
&= \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} + \frac{3 \cdot 18}{1 \cdot 18} - \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} \\
&= \frac{9}{18} + \frac{54}{18} - \frac{12}{18} + \frac{10}{18} \\
&= \frac{9 + 54 - 12 + 10}{18} \\
&= \frac{61}{18}
\end{aligned}
$$

Multiplikasjon og divisjon med brøker

[Multiplikasjon og divisjon med brøker (55973)](#)

Multiplikasjon med brøker

For å finne det dobbelte av 20 må du multiplisere 20 med 2.

Regnestykket blir

$20 \cdot 2 = 40$

For å finne halvparten av 20 må du dividere med 2 eller multiplisere med $\frac{1}{2}$.

Regnestykket blir

$20 : 2 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

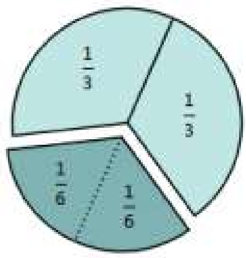
Tilsvarende, hvis du skal finne halvparten av en tredjedel, må du dividere $\frac{1}{3}$ med 2 eller multiplisere $\frac{1}{3}$ med $\frac{1}{2}$.

Regnestykket blir

$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Du kan se for deg en tredjedels pizza som du tar halvparten av.

Som figuren viser, får du bare sjetteparten av hele pizzaen.



$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Vi har altså at

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Du har tidligere lært at du kan multiplisere brøker ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner. Du ser at det er nettopp det vi må gjøre her for å få en sjettedel!

Eksempel

En arving fikk en tredjedel av en fjerdedel av en arv. Hvor stor brøkdel av arven gikk til denne arvingen?

Løsning

Arvingen fikk

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Eksempel

To tredjedeler av elevene i en klasse er jenter. To femdeler av jentene kommer for sent til matematikktimen. Ingen gutter kommer for sent. Hvor stor del av elevene i klassen kommer for sent?

Løsning

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$\frac{4}{15}$ av elevene i klassen kommer for sent.

Divisjon med brøker

Vi har 6 liter maling og skal fordele malingen i tolitersbokser. Hvor mange bokser trenger vi?

Regnestykket blir

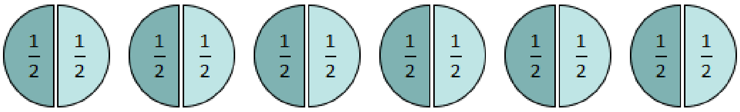
$$6 : 2 = 3$$

Men hvis vi skal fordele malingen i halvlitersbokser, hvor mange bokser trenger vi da?

Regnestykket blir

$$6 : \frac{1}{2}$$

Vi skjønner at svaret må bli 12 bokser.



$$6 : \frac{1}{2} = 12$$

Hvis vi skal regne på samme måte som ovenfor, er altså $6 : \frac{1}{2} = 12$.

Å dividere med $\frac{1}{2}$ er altså det samme som å multiplisere med 2.

Vi kan skrive regnestykket slik:

$$6 : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{12}{1} = 12$$

Vi ser altså at når vi skal dividere med en brøk, må vi multiplisere med den omvendte brøken for å få riktig resultat.

Oppsummering

Vi **multipliserer** to brøker ved å multiplisere teller med teller og nevner med nevner.

Vi dividerer hele tall med 1, slik at tallene kan oppfattes som brøker.

Vi **dividerer** med en brøk ved å **multiplisere med den omvende brøken**.

Eksempel

$$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{1} = 2$$

Brudden brøk

[Brudden brøk (55980)]

Vi kan oppfatte divisjonstegnet som en brøkstrek.

Da kan vi skrive divisjonen ovenfor slik

$\frac{4}{5} : \frac{6}{15} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{15}}$

En slik brøk, som består av brøker i teller og nevner, kalles en **brudden brøk**. Vi skiller mellom **hovedbrøken** og **småbrøkene**.

Småbrøkene, $\frac{4}{5}$ og $\frac{6}{15}$, er brøkene i teller og nevner i hovedbrøken.

Vi kan forenkle en brudden brøk ved å utvide hovedbrøken med fellesnevneren til småbrøkene.

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{15}} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 15}{\frac{6}{15}\cdot 15} = \frac{\frac{4}{\overset{1}{\cancel{5}}}\cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\frac{6}{\cancel{15}}\cdot \cancel{15}} = \frac{12}{6} = 2$$

Vi ser at vi får samme resultat som ovenfor.

Regnerekkefølge

Regnerekkefølge (22500)

Du går i butikken og handler ett brød og to liter melk. Prisen for ett brød er 25 kroner og prisen for melk er 15 kroner per liter.

Personen som sitter i kassa vil teste dine regneferdigheter. Hun setter opp et regnestykke og ber deg regne ut samlet pris

$$25 + 15 \cdot 2$$

Regnestykket inneholder to regneoperasjoner, du skal legge sammen og du skal gange. Hva skal du gjøre først?

Hvor mye koster ett brød og to liter melk?

Du prøver å legge sammen før du ganger

$$25 + 15 \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$$

Du prøver så å gange før du legger sammen

$$25 + 15 \cdot 2 = 25 + 30 = 55$$

Du får to ulike svar. Hvilket svar er riktig?

Hva står egentlig tallene i oppgaven for? Tallet 2 står for antall liter med melk og er et tall uten benevning. Tallene 25 o g 15 derimot, er priser i kroner og har derfor benevningen kroner.

Vi kan sette opp regnestykket med benevning

$$25 \text{ kroner} + 15 \text{ kroner} \cdot 2$$

Kanskje blir det nå opplagt at samlet pris er 15 kroner · 2 = 30 kroner for melka pluss 25 kroner for brødet, til sammen 55 kroner.

Det betyr at rett regnerekkefølge er å gange (multiplisere) **før du legger sammen** (adderer).

Vi kan lage tilsvarende eksempler hvor vi deler og trekker fra.

Du vil da på tilsvarende måte se at **rett regnerekkefølge er å gange og dele** (dividere) **før du legger sammen eller trekker fra** (subtraherer).

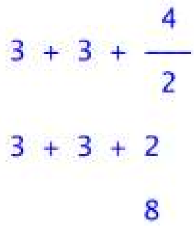
Alle digitale verktøy er blitt programmert til å regne på denne måten hvis de ikke spesielt får beskjed om noe annet.

To personer skal dele 3 pizzaer. To av pizzaene er delt i 3 biter, og den siste er delt i 4 biter. Antall pizzabiter på hver blir da

$$\frac{\text{Samlet antall pizzabiter}}{2} = \frac{3+3+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

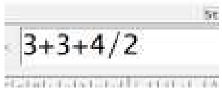
Her må vi altså legge sammen før vi deler.

Vi bruker et digitalt verktøy. I skrivelinjen skriver vi 3+3+4/2.



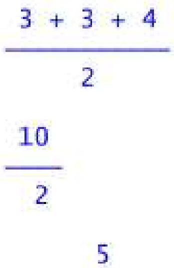
Maskinen gjør det den er programmert til og starter med å dele 4 på 2.

Svaret blir 8, og vi ser at det blir feil svar.



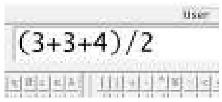
Vi må gi maskinen beskjed om å ikke følge vanlig regnerekkefølge og legge sammen før den deler.

Det gjør vi ved å bruke parenteser.



Vi skriver da det som står i telleren inne i en parentes. Maskinen har nemlig fått beskjed om alltid å regne ut det som står inne i parenteser først.

Vi skriver (3+3+4)/2 og får riktig svar.



Det hender også at det inngår potenser i en regneoppgave. Vi må regne ut potensene før vi multipliserer og dividerer.

Regnerekkefølge

1. Regn ut det som står inne i parentesene
2. Regn ut potensene
3. Utfør multiplikasjonene og divisjonene
4. Utfør addisjonene og subtraksjonene

Nedenfor har vi tatt med noen eksempler på regneoppgaver hvor vi følger disse reglene. Her kan du først bruke hoderegning og se om du får samme resultat. Deretter bruker du et digitalt verktøy og ser om du da også får det samme.

$$2+3\cdot 4-7 = 2+12-7 = 7$$
$$8-2\cdot(2+3)-\frac{8-5}{3} = 8-2\cdot 5-\frac{3}{3} = 8-10-1 = -3$$
$$\frac{12}{7-4}+\left(3^2-4\right)\cdot 3 = \frac{12}{(7-4)}+(9-4)\cdot 3 = \frac{12}{3}+5\cdot 3 = 4+15 = 19$$

Potenser

Potenser

[Potenser (3662)](#)

Datamaskinene våre får stadig større kapasitet. Antall bytes som kan lagres på en harddisk øker. Mens det for få år siden var vanlig med en lagringskapasitet på noen millioner bytes, Megabytes, har det nå blitt vanlig å kunne lagre milliarder av bytes, Gigabytes. Vi får etter hvert svært store tall å forholde oss til.

Store tall skrevet på vanlig måte gir lange rekker med tallsifre. Dette er tungvint, og det er derfor behov for å skrive svært store tall på en mer kortfattet måte.

Det å skrive tall på potensform, er her et hjelpemiddel.

Vi kan som eksempel skrive tallet 81 som en **potens**. Vi har at siden 81 = 3 · 3 ·3 ·3, så skriver vi 81 som potens slik

$81 = 3^4$

Denne skrivemåten betyr at vi skal multiplisere tallet 3 med seg selv 4 ganger.

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} = 81$$

Å skrive 3^4 er altså bare en annen måte å skrive tallet 81 på.

Tallet 3 kalles for **grunntallet**, og tallet 4 kalles for **eksponenten**. Eksponenten forteller hvor mange ganger grunntallet skal multipliseres med seg selv.

> Definisjon
>
> La *a* være et vilkårlig tall og *n* et naturlig tall. Da er
>
> $$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ ganger}}$$

Ved å skrive «*def*» over likhetstegnet forteller vi at dette er noe som er bestemt, definert, at skal gjelde.

Regneregler for potenser

Regneregler for potenser (88418)

Vi kan regne med potenser

$$3^4 \cdot 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ ganger}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ ganger}} = 3^9$$

Vi ser at

$$3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$$

Regneregel 1 for potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Tilsvarende gjelder når vi dividerer potenser på hverandre:

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$$

Vi ser at

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

Regneregel 2 for potenser

La *a* være et tall forskjellig fra null, og la *m* og *n* være naturlige tall, og foreløpig må vi ha at *m*>*n*.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hvordan blir utregningen hvis potensen i nevneren har større eksponent enn potensen i telleren?
Vi bytter om på potensene i eksemplet ovenfor.
Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{3^4}$$

Ved å bruke regneregelen for potenser, får vi

$$\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4}$$

Vi ønsker at regneregel 2 for potenser også skal gjelde i slike tilfeller. Det betyr at $\frac{1}{3^4}$og 3^{-4} må være samme tallet.

Definisjon

For alle tall$a \neq 0$ og naturlige tall *n* gjelder at

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

Hva så hvis potensene i teller og nevner har like eksponenter? Vi ser på et eksempel.
Ved vanlig brøkregning får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ved å bruke regneregel 2, får vi

$$\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0$$

Vi ønsker også her at regnereglene for potenser skal gjelde.
Det betyr at 3^0 må være lik tallet 1.

Definisjon

For alle tall a ≠ 0 gjelder at

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

Med disse to nye definisjonene gjelder regneregel 1 og 2 for alle heltallige eksponenter, også når *m* ikke er større enn *n*.

Studer følgende regnestykker hvor definisjonen på potenser er brukt gjentatte ganger sammen med vanlige regneregler.

$$(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right)$$
$$= \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4}$$

Vi kan sette opp tilsvarende regnestykker hvor vi bytter ut tallene 2, 3 og 4 med hvilke som helst andre reelle tall, og vi får tre nye regneregler for potenser.
Vi kan da summere opp de definisjoner og regneregler vi har for potenser. Disse gjelder under de forutsetninger som er gitt ovenfor. Vi forutsetter også at vi ikke får null i nevner!

Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering

[Definisjoner og regnereglene for potenser - Oppsummering (88466)]

Definisjoner

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ganger}} \qquad a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n} \qquad a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$$

Regneregler

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Definisjonene og regnereglene er svært viktige og må læres!

Tierpotenser

Tierpotenser (3661)

Som nevnt tidligere i menyen, regner vi mange ganger med svært store tall. Andre ganger regner vi med svært små tall. Vi bruker da ofte potenser med grunntallet 10. Tabellen nedenfor viser tierpotenser av ulik størrelse. Disse har egne navn (prefikser). En del av disse bør du kunne.

Prefikser
Kilo er opprinnelig et gresk ord som betyr tusen. Vi bruker ordet ved å sette det foran for eksempel meter og får da en større lengde, nemlig kilometer. Vi bruker også symbolet k for kilo, og skriver da kilometer kortfattet som km. Et ord som på denne måten settes foran et annet ord kalles for et prefiks.

En oversikt over noen prefikser til tierpotenser:

10^n	Prefiks	Symbol	Navn	
10^{15}	peta	P	billiard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	billion	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	milliard	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	million	1 000 000
10^{3}	kilo	k	tusen	1 000
10^{2}	hekto	h	hundre	100
10^{1}	deka	da	ti	10
10^{-1}	desi	d	tidel	0,1
10^{-2}	centi	c	hundredel	0,01
10^{-3}	milli	m	tusendel	0,001
10^{-6}	mikro	µ	milliondel	0,000 001
10^{-9}	nano	n	milliarddel	0,000 000 001

Tall på standardform

Tall på standardform (3660)

Oversikten over tierpotenser viser hvordan noen svært store og svært små tall kan skrives kortfattet som tierpotenser.

Vi ønsker å kunne skrive alle tall på tilsvarende måte.

Vi ser på tallet 2357. Vårt tallsystem er et posisjonssystem. Det vil si at det er det enkelte siffers plassering som bestemmer verdien til sifferet.

Det første sifferet, 2, har verdien 2000. Det neste, 3, har verdien 300. Sifferet 5 har verdien 50, mens det siste sifferet, 7, forteller at vi har 7 enere. Det første sifferet angir altså antall 1000, det neste antall 100, det tredje antall 10-ere og det siste antall enere.

Vi kan sette et kommategn etter sifferet 7. Da vil eventuelle siffer etter 7 angi antall tideler, hundredeler osv. avhengig av sifferets posisjon.

Kommategnet forteller altså hvor vi begynner å telle enere.

Vi kan flytte komma en plass til venstre, og skrive 235,7. Da har verdien av alle siffer blitt dividert med 10. Sifferet 3 har ikke lenger verdien 300, men har nå verdien 30. Tallet 235,7 kan få tilbake sin verdi som 2357 ved at vi multipliserer det med 10.

Vi kan fortsette slik

$$
\begin{aligned}
2357 &= 2357 \cdot 10^0 \\
2357 &= 235,7 \cdot 10^1 \\
2357 &= 23,57 \cdot 10^2 \\
2357 &= 2,357 \cdot 10^3
\end{aligned}
$$

I den siste linjen har vi skrevet tallet 2357 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi sier da at vi har skrevet tallet på **standardform**.

I begynnelsen av 2011 var folketallet i verden ca. 6 894 000 000.

Dette tallet kan vi skrive på standardform som

$$6\ 894\ 000\ 000 = 6,894 \cdot 10^9 \approx 6,9 \cdot 10^9$$

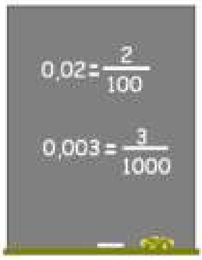
Ovenfor har vi avrundet til én desimal i desimaldelen av tallet. Vi må da huske på de reglene som gjelder for avrunding.

Avrunding

Når vi avrunder et desimaltall, må vi se på **den desimalen som kommer nærmest etter den siste vi beholder.** Hvis denne desimalen er 5 eller høyere, må vi øke den siste desimalen vi beholder, med 1.

Små tall på standardform

Vi ser på tallet 0,023. Husk igjen at vårt tallsystem er et posisjonssystem. Kommategnet forteller hvor vi begynner å telle enere. Første plass etter komma er tidelsplassen som forteller hvor mange tideler vi har. Vi har i vårt eksempel 0 tideler. Andre plassen angir hundredeler. Vi har 2 hundredeler og siste siffer forteller at vi har 3 tusendeler.



Vi kan flytte komma en plass til høyre, og skrive 0,23. Da har verdien av alle sifre blitt multiplisert med 10. Sifferet 2 har ikke lenger verdien 2 hundredeler, men har nå verdien 2 tideler. For at tallet skal få tilbake sin opprinnelige verdi, må vi dividere hele tallet med 10. Det er det samme som å multiplisere det med 10^{-1}. Tallet 2,3 kan få tilbake sin verdi som 0,023 ved at vi dividerer det med 100.

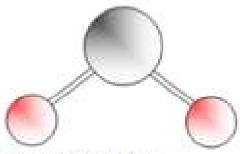
$$\mathbf{0,023 = 0,023 \cdot 10^{0}}$$
$$\mathbf{0,023 = 0,23 \cdot 10^{-1}}$$
$$\mathbf{0,023 = 2,3 \cdot 10^{-2}}$$

I den siste linjen har vi skrevet tallet 0,023 som et tall mellom 1 og 10 multiplisert med en tierpotens. Vi har skrevet tallet på **standardform**.

Vann er bygd opp av vannmolekyler. Massen til ett vannmolekyl er

$$m = 0,0000000000000000000000000299 = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Her ser du at det er hensiktsmessig å bruke standardform!



Vannmolekyl, H_2O

Kvadratrøtter

Kvadratrøtter (4347)

> Gitt et ikke-negativt tall *a*.
> **Kvadratroten** til *a*, $\sqrt{a}$, er definert ved at $\sqrt{a}$ er **det ikke-negative tallet** som **opphøyd i andre** er lik *a*.
>
> $(\sqrt{a})^2 = a \text{ og } \sqrt{a} \geqslant 0$

Eksempel

$\sqrt{9} = 3 \text{ fordi } 3 \cdot 3 = 9$ og fordi 3 ikke er negativt.

Merk at også $(-3) \cdot (-3) = 9$, men –3 er et negativt tall og er dermed ikke definert som kvadratroten av 9.

Regneregler for kvadratrøtter

Ved å bruke definisjonen på kvadratrøtter får vi at

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

Vi får samme svar hvis vi først multipliserer og så trekker ut roten

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

Dette gjelder også ved divisjon av kvadratrøtter.

Ved å bruke definisjonen på kvadratrøtter blir

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

Hvis vi først dividerer og så trekker ut roten, får vi

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Vi kan vise at dette gjelder generelt.

> **Regneregler for kvadratrøtter**
>
> Multiplikasjonsregelen
>
> $$\sqrt{\text{ab}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \geq 0 \text{ og } b \geq 0$$
>
> Divisjonsregelen
>
> $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0 \text{ og } b > 0$$

Bevis for multiplikasjonsregelen

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot$$

Vi har altså at

$$a \cdot b = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2$$

Prøv å bevise divisjonsregelen på samme måte!

Per definisjon er da

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Du må ofte bruke reglene motsatt vei. Da bør du, hvis det er mulig, skille ut **kvadrattallene**, de tallene som gir heltallig svar når du tar kvadratroten av dem.

Eksempel

$$\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{3} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{3}$$
$$= \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

Test deg selv!

Skriv raskt ned de 13 minste kvadrattallene!

Eksempel

$$\begin{aligned}
&3\sqrt{50} - 2\sqrt{32} \\
&= 3\sqrt{25 \cdot 2} - 2\sqrt{16 \cdot 2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \\
&= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \\
&= 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\
&= 7\sqrt{2}
\end{aligned}$$

n - te røtter

n - te røtter (89669)

Vi har definert kvadratroten til et tall som det ikke-negative tallet som opphøyd i andre er lik tallet. Vi kan ikke ta kvadratroten til et negativt tall siden et tall opphøyd i andre ikke kan være negativt.

Tilsvarende kan vi definere tredjeroten av et tall som det tallet som opphøyd i tredje gir tallet.

Da blir

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ fordi } 2^3 = 8$$

Legg merke til at siden 3 er et oddetall, så er det bare ett tall som opphøyd i tredje er lik 8.

Legg også merke til at vi kan ta tredjeroten til et negativt tall

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ fordi } (-2)^3 = -8$$

Vi kan fortsette og definere fjerderoten, femteroten osv. etter samme mønster

For eksempel er

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ fordi } 2^4 = 16 \text{ og } 2 \text{ er } \text{ positivt.}$$

Vi definerer ***n* - te roten** av *a* når *n* er et naturlig tall

$\sqrt[n]{a}$ er det tallet som er slik at $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Hvis er *n* et partall, så er $a \geq 0 \text{ og } \sqrt[n]{a} \geq 0$
.

Legg merke til at $\sqrt[2]{a}$ er det samme som $\sqrt{a}$. Kvadratroten kalles også for andreroten.

Potenser og rotuttrykk

[Potenser og rotuttrykk (4349)](#)

Vi har til nå regnet med potenser der eksponentene er hele tall.

Vi kan også regne med potenser der eksponentene er brøker, **potenser med rasjonale eksponenter**.

Vi vil at de regnereglene som gjelder for potenser med heltallige eksponenter, også skal gjelde for potenser med rasjonale eksponenter.

Potensregelen

$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ medfører da for eksempel at

$$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 4^1 = 4$$

Dette betyr at tallet $4^{\frac{1}{2}}$ må være lik −2 eller 2, siden begge disse tallene opphøyd i andre gir svaret 4.

Hvis vi bestemmer at $4^{\frac{1}{2}}$ ikke skal være negativt, blir $4^{\frac{1}{2}} = 2$ og $4^{\frac{1}{2}}$ blir det samme som kvadratroten til 4.

Dette gir grunnlag for generelt å definere at

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ når } a > 0 \text{ og } n \text{ er et naturlig tall}$$

Legg merke til at vi har definert $\sqrt[n]{a}$ også for negative tall når *n* er et oddetall. Men vi ønsker å forbeholde notasjonen $a^{\frac{1}{n}}$ for positive verdier av *a*.

Hva hvis eksponenten i en potens er en brøk med teller forskjellig fra 1?

Dersom vi bruker de regnereglene vi har for potenser på ulike måter på uttrykket $27^{\frac{2}{3}}$, får vi

1. $27^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3} \cdot 2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$
2. $27^{\frac{2}{3}} = 27^{2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$
3. $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

Disse sammenhengene gjelder generelt.

La *a* være et positivt tall. La *m* og *n* være hele tall hvor *n* er positivt.

Da er $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Det kan vises at regnereglene for potenser også gjelder for potenser med brøkeksponenter!

Når du skal **forenkle uttrykk som inneholder rotuttrykk**, er det ofte lurt å skrive rotuttrykkene på **potensform** og bruke regnereglene for potenser.

Eksempel

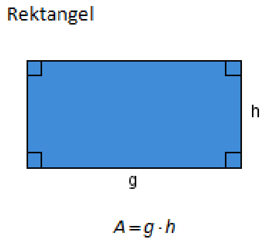
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$$

Algebraiske uttrykk

Bokstavregning

[Bokstavregning (3658)](#)

Formelen for å regne ut arealet av et rektangel er $A = g \cdot h$.



Du må altså multiplisere grunnlinjen med høyden for å regne ut arealet.

Eksempel

Vi skal regne ut arealet til en fotballbane hvor sidelengdene er 68 m og 105 m.

En fotballbane er rektangelformet. Vi lar den lengste siden være grunnlinjen, og den korteste siden være høyden.

Vi får at

$$A = g \cdot h$$
$$= 105\ m \cdot 68\ m$$
$$= 7140\ m^2$$

Sør Arena, Kristiansand

Vi ser at bokstavene i formelen
bare er erstatninger for tallstørrelser, og en formel er altså en oppskrift for hvordan vi skal regne ut en størrelse. Når vi kjenner grunnlinjen og høyden, kan vi regne ut arealet.

I mange tilfeller er det lurt å regne med bokstaver i stedet for tall. Dette kalles **algebra**.

Hvordan regne med bokstaver

[Hvordan regne med bokstaver (89791)](#)

Når vi regner med bokstaver, må vi huske at bokstaver står for en tallstørrelse eller bare et tall. Det vil si at vi må regne med bokstaver som om de var tall.

Vi skal nå se på noen regler som forenkler regningen med bokstaver.

1. Det er vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet mellom et tall og en bokstav.

   Når vi skriver produktet mellom to tall, for eksempel $2 \cdot 3$, er multiplikasjonstegnet viktig. Uten multiplikasjonstegn ville det stått 23, som jo er noe ganske annet.
   Når vi erstatter 3-tallet med en bokstav, og får for eksempel $2 \cdot a$, er det derimot vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet og bare skrive $2a$. Det vil si at $2a$ betyr $2 \cdot a$.

2. Vi kan forenkle uttrykk ved å addere og subtrahere like ledd.

   Vi ser på følgende tallregning

   $$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20$$

   Vi ser at vi like gjerne kan regne på følgende måte

   $$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

   Hvis vi nå erstatter tallet 4 med bokstaven *a*, får vi

   $$2 \cdot a + 3 \cdot a = 2a + 3a = (2 + 3)a = 5a$$

   Dette betyr at **vi kan forenkle uttrykk ved å addere og subtrahere like ledd**. For eksempel kan følgende uttrykk forenkles slik

   $$\begin{aligned} &2a + 3b - 2x + 7 + 5x - 2 - 7b + 2a \\ &= 4a - 4b + 3x + 5 \end{aligned}$$

3. Vi kan forkorte brøker ved å dividere med samme faktor i teller og nevner.

   Vi er kjent med at vi kan forenkle brøker ved først å faktorisere og så dividere med samme faktorer i teller og nevner (vi «stryker» faktor mot faktor)

   $$\frac{420}{30} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 14$$

   Hvis vi nå erstatter tallet 3 med bokstaven *a* og tallet 5 med bokstaven *b*, får vi tilsvarende

   $$\frac{28\,\mathrm{ab}}{2\,\mathrm{ab}} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 14$$

4. Vi kan løse opp (fjerne) parenteser.

   Vi ser på følgende regneoppgave med tall

   $$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2)$$

   Vi har tidligere sett (se [Regnerekkefølge](#)) at det som står inne i parenteser, alltid skal regnes ut først. Vi får derfor at

   $$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2) = 2 + 7 - 5 = 4$$

   Men følgende måte å regne på gir samme resultat:

$$2 + (3 + 6 - 2) - (4 + 3 - 2) = 2 + 3 + 6 - 2 - 4 - 3 + 2 = 4$$

Husk at fortegnet til 3-tallet og 4-tallet inne i parentesene egentlig er + siden det ikke står noe fortegn. Med fortegn blir regningen

$$2+(+3+6-2)-(+4+3-2)=2+3+6-2-4-3+2=4$$

Det viser seg at denne måten å regne på alltid blir riktig.

En parentes, inklusive **regnetegnet pluss foran** parentesen, kan fjernes ved at vi beholder alle leddene inne i parentesen og oppfatter plusstegn og minustegn som regnetegn.

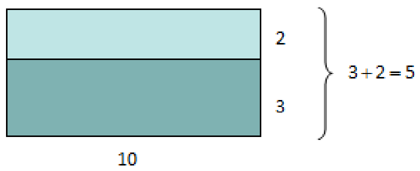
En parentes, inklusive **regnetegnet minus foran** parentesen, kan fjernes ved at vi skifter tegnene foran alle leddene inne i parentesen og oppfatter disse som regnetegn.

5. Vi kan multiplisere tall med parentesuttrykk.

Vi ser på regneuttrykket $10 \cdot (3+2)$.

Siden det som står inne i parentesen, skal regnes ut først, får vi at $10 \cdot (3+2) = 10 \cdot 5 = 50$.

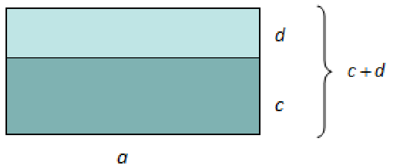
Vi kan tolke dette geometrisk som arealet av hele det store rektangelet til høyre med grunnlinje 10 og høyde 5.



Dette arealet kan også betraktes som summen av arealene til de to små rektanglene. Disse er henholdsvis $10 \cdot 3$ og $10 \cdot 2$.

Det betyr at $10 \cdot (3+2) = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 2$

Vi erstatter tallene i regneoppgaven ovenfor med bokstaver. Samme geometriske tolking på figuren til høyre som på figuren ovenfor gir at



$$a \cdot (c+d) = \text{ac} + \text{ad}$$

Dette betyr at vi generelt kan si at

Når vi multipliserer et tall med et parentesuttrykk, må vi multiplisere tallet med alle leddene inne i parentesen.

$$a \cdot (c+d) = \text{ac} + \text{ad}$$

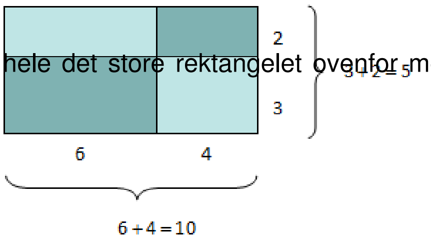
Eksempel

$$\begin{aligned}&3x\left(2x^2-4x+2\right)\\&=3x \cdot 2x^2-3x \cdot 4x+3x \cdot 2\\&=6x^3-12x^2+6x\end{aligned}$$

6. Vi kan multiplisere to parentesuttrykk med hverandre.

Vi ser på regneuttrykket $(6+4) \cdot (3+2)$.

Siden det som står inne i parentesen skal regnes ut først, får vi at $(6+4)\cdot(3+2) = 10\cdot 5 = 50$.



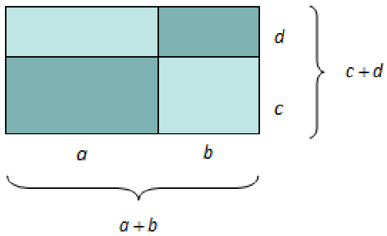
Geometrisk kan vi tolke dette som arealet av hele det store rektangelet ovenfor med grunnlinje 10 og høyde 5.

Men vi ser geometrisk at dette arealet kan betraktes som summen av arealene av fire mindre rektangler. Disse arealene er henholdsvis $6\cdot 3,\ 6\cdot 2,\ 4\cdot 3$ og $4\cdot 3$.

Det betyr at $(6+4)\cdot(3+2) = 6\cdot 3 + 6\cdot 2 + 4\cdot 3 + 4\cdot 2$.

Vi erstatter tallene i regneoppgaven ovenfor med bokstaver. Samme geometriske tolking på figuren til høyre som på figuren ovenfor gir at

$$(a+b)\cdot(c+d) = \mathrm{ac} + \mathrm{ad} + \mathrm{bc} + \mathrm{bd}$$



Dette betyr at vi generelt kan si at

Når vi multipliserer to parentesuttrykk med hverandre, må vi multiplisere hvert ledd i den ene parentesen med hvert ledd i den andre parentesen.

$$(a+b)\cdot(c+d) = \mathrm{ac} + \mathrm{ad} + \mathrm{bc} + \mathrm{bd}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
&(2x-4)\cdot(3x+2) = \\
&2x\cdot 3x + 2x\cdot 2 - 4\cdot 3x - 4\cdot 2 = \\
&6x^2 + 4x - 12x - 8 = \\
&6x^2 - 8x - 8
\end{aligned}$$

Kvadratsetningene

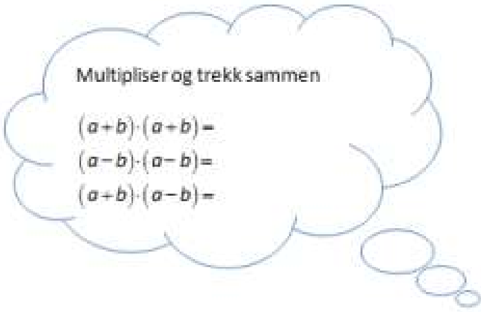
Kvadratsetningene (3665)

Tidligere så vi hvordan vi multipliserer to parentesuttrykk med hverandre.

Generelt har vi at

$$(a+b)\cdot(c+d)$$

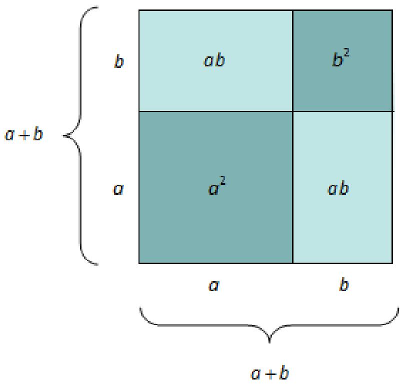
$$=\mathrm{ac}+\mathrm{ad}+\mathrm{bc}+\mathrm{bd}$$



Hvordan blir resultatet dersom parentesuttrykkene er like eller nesten like?

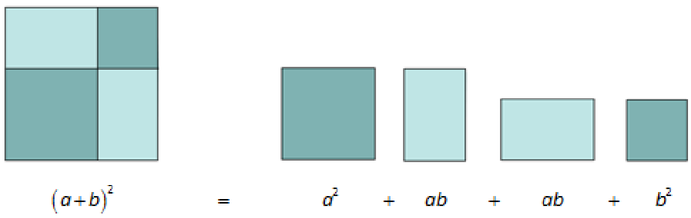
Når vi multipliserer $(a+b)$ med seg sjøv, får vi kvadratet $(a+b)^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\ &= a^2+\mathrm{ab}+\mathrm{ab}+b^2\\ &= a^2+2\mathrm{ab}+b^2\end{aligned}$$



Når vi multipliserer ut parentesene, får vi to like ledd, $\mathrm{ab}+\mathrm{ab}$, som vi slår sammen til $2\,\mathrm{ab}$.

Geometrisk ser du at arealet av det store kvadratet ovenfor med sidelengder $a+b$ er lik summen av arealene av de to like store lyse rektanglene og de to mørke kvadratene.



Dette resultatet er kjent som den første kvadratsetningen.

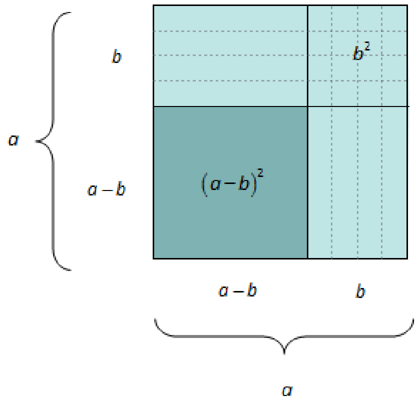
Første kvadratsetning

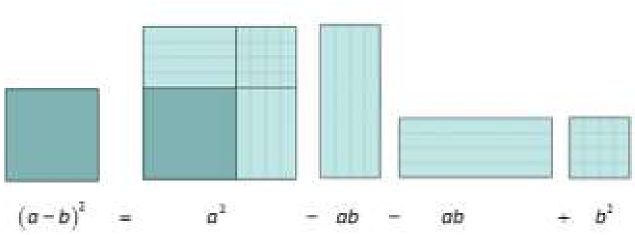
$$(a+b)^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$$

Vi multipliserer videre $(a-b)$ med seg selv og får kvadratet $(a-b)^2$.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b\\ &= a^2-\mathrm{ab}-\mathrm{ab}+b^2\\ &= a^2-2\mathrm{ab}+b^2\end{aligned}$$

Her får vi to like ledd, $-\mathrm{ab}-\mathrm{ab}$, som vi slår sammen til $-2\,\mathrm{ab}$.





Ser du at vi kan illustrere dette geometrisk hvis vi tar utgangspunkt i et kvadrat med sider *a*?

Dette resultatet er kjent som den andre kvadratsetningen.

Andre kvadratsetning

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2$$

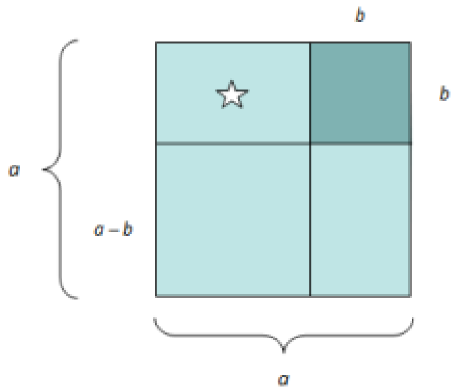
Vi multipliserer så $(a+b)$ med $(a-b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{ab} - b^2\\(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

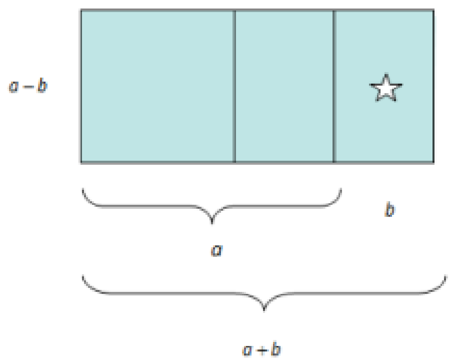
Her får vi leddene ab og $-\mathrm{ab}$, som til sammen blir lik null og faller bort.

Ser du at vi kan illustrere dette også geometrisk ved å starte med et kvadrat med sidekanter *a*?

$a^2 - b^2$ tilsvarer det lyse området i den første figuren nedenfor.



Hvis vi så tenker oss at vi flytter rektangelet som er merket med en stjerne, ser vi at det lyse området også tilsvarer $(a+b)\,(a-b)$.



Dette resultatet er kjent som konjugatsetningen eller også som den tredje kvadratsetningen.

Konjugatsetningen (Tredje kvadratsetning)

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Nå er det lett å falle for fristelsen til å la være å pugge kvadratsetningene og heller multiplisere hvert ledd i den ene parentesen med hvert ledd i den andre parentesen. Det vil ikke være særlig lurt.

Kvadratsetningene er nemlig spesielt nyttige til å faktorisere andregradsuttrykk, og da må du bruke dem «motsatt vei».

Eksempel på bruk av kvadratsetningene

$$
\begin{aligned}
&4(x+2)^2+(2x-3)^2-3\,(x-2)\,(x+2)\\
&=4\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+\left((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2\right)-3\left(x^2-2^2\right)\\
&=4\left(x^2+4x+4\right)+\left(4x^2-12x+9\right)-3\left(x^2-4\right)\\
&=\left(4x^2+16x+16\right)+\left(4x^2-12x+9\right)-\left(3x^2-12\right)\\
&=4x^2+16x+16+4x^2-12x+9-3x^2+12\\
&=5x^2+4x+37
\end{aligned}
$$

Likninger

Likninger

Likninger (3657)

En likning består av et likhetstegn med et tall eller uttrykk på hver side. Et eksempel er likningen

$$3 + 5 = 8$$

En likning inneholder gjerne en eller flere ukjente størrelser symbolisert med bokstaver som for eksempel formelen

$$A = g \cdot h$$

Det er vanlig å bruke bokstaven *x* for den ukjente når likningen har én ukjent størrelse. Et eksempel er

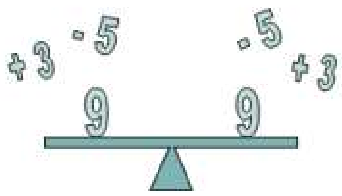
$$x + 5 = 8$$

Å **løse** en likning går ut på å finne ut hvilke verdier *x* kan ha for at likningen skal være sann. For eksempel, hvilken verdi av *x* i likningen ovenfor gjør uttrykket *x* + 5 lik tallet 8.

Metode for å løse likninger ved regning

I likningen $x + 5 = 8$ ser vi umiddelbart at når *x* er lik tallet 3, er venstresiden og høyresiden like. Likningen har løsningen $x = 3$.

I likningen $2x - 3 = 9$ er det derimot ikke så enkelt å løse likningen direkte. Vi trenger en framgangsmåte.



Likevekt

Tenk deg at du har to like tall. Er du enig i de fire påstandene nedenfor?

- Hvis vi til to tall som er like, adderer det samme tallet, vil summene være to like tall. Siden $9 = 9$, så er $9 + 3 = 9 + 3$.
- Hvis vi til to tall som er like, subtraherer det samme tallet, vil differensene være to like tall. Siden $9 = 9$, så er $9 - 5 = 9 - 5$.
- Hvis vi har to tall som er like og multipliserer dem med det samme tallet, vil produktene være to like tall. Siden $9 = 9$, så er $9 \cdot 3 = 9 \cdot 3$.
- Hvis vi har to tall som er like og dividerer dem med det samme tallet, vil kvotientene være to like tall. Siden $9 = 9$, så er $\frac{9}{3} = \frac{9}{3}$.

Vi kan altså addere, subtrahere, multiplisere og dividere med samme tall på begge sider i en likning og fortsatt beholde likhet mellom venstresiden og høyresiden.

Dette kan vi bruke til å løse likninger.

Eksempel

Vi vil løse likningen $2x - 3 = 9$.

$2x-3=9$	
$2x-3+3=9+3$	Vi adderer tallet 3 på begge sider av likhetstegnet.
$2x=9+3$	På venstresiden er $-3+3=0$.
$2x=12$	Like ledd trekkes sammen, $9+3=12$.
$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{2}}$	Vi dividerer med 2 på begge sider av likhetstegnet og forkorter.
$x=6$	Vi har løst likningen.

Legg merke til resultatet av å addere 3 på begge sider. Tallet -3 er «flyttet» fra venstresiden til høyresiden, men har skiftet fortegn til $+3$.

Eksempel

Når vi skal løse likninger som inneholder **brøker**, må vi multiplisere hvert ledd med fellesnevneren for å få en likning uten brøker.

$\frac{2}{x}-4=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}$	Fellesnevner er $2x$.
$\frac{2}{\cancel{x}}\cdot 2\cancel{x}-4\cdot 2x=-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x-\frac{1}{\cancel{2x}}\cdot\cancel{2x}$	Vi multipliserer alle ledd med $2x$ og forkorter.
$4-8x=-3x-1$	Vi er kvitt brøkene.
$4-8x-4+3x=-3x-1-4+3x$	Nå ønsker vi å samle alle ledd med x på venstresiden. De andre leddene samler vi på høyre side. Dette gjør vi ved å subtrahere 4 og addere $3x$ på beggge sider.
$-8x+3x=-1-4$	Legg merke til at 4 fra venstresiden nå er -4 på høyresiden og at $-3x$ fra høyresiden nå er $+3x$ på venstresiden.
	Vi har nå samlet alle leddene med x på venstre side av likhetstegnet. De andre leddene er samlet på høyre side.
$-5x=-5$	Vi trekker sammen like ledd og dividerer med -5 på begge sider.
$\frac{-5x}{-5}=\frac{-5}{-5}$	
$x=1$	Vi har løst likningen.

Eksempel

Når likningene inneholder **parentesuttrykk**, begynner vi med å løse opp parentesene.

$$
\begin{aligned}
x-2(x-3)&=-2\\
x-2x+6&=-2\\
x-2x&=-2-6\\
\frac{-x}{-1}&=\frac{-8}{-1}\\
x&=8
\end{aligned}
$$

Fra linje 2 til linje 3 er tallet 6 subtrahert på begge sider. Legg også merke til divisjonen med –1.

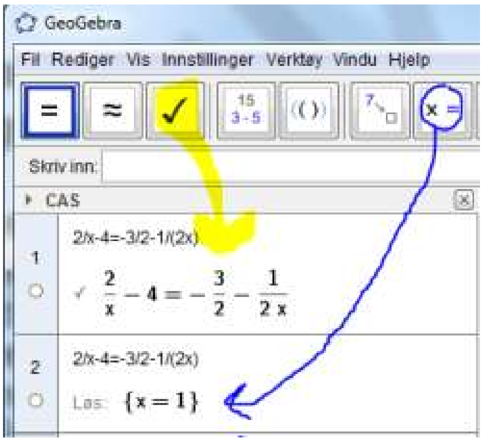
Oppsummering

Fremgangsmåten for å løse likninger blir da

1. Hvis likningen inneholder parenteser, må vi først løse opp disse.
2. Hvis likningen inneholder brøker, må vi multiplisere alle ledd med fellesnevneren.
3. Vi adderer og/eller subtraherer med samme tall på begge sider av likhetstegnet. Resultatet blir at ledd «flyttes» fra den ene siden av likhetstegnet til den andre siden, og leddet skifter fortegn. Formålet er å samle alle ledd som inneholder x på den ene siden av likhetstegnet, og alle ledd som bare består av tall på den andre siden.
4. Vi trekker sammen leddene.
5. Til slutt dividerer vi med tallet foran x på begge sider.

Metode for å løse likninger ved hjelp av digitale verktøy

Du kan bruke CAS-verktøyet i GeoGebra for å løse en likning ved hjelp av et digitalt verktøy.



• Skriv inn likningen i felt 1.

• Trykk knappen «Bruk inntasting» (markert med gul farge) for å kontrollere at du har tastet inn riktig.

• Trykk likhetstegn på tastaturet for å få likningen vist i felt 2.

• Trykk knappen «Løs» (markert med blå penn) for å få løsningen på likningen.

Husk at når du bruker et digitalt verktøy til eksamen, så skal kommandoer og det som er tastet inn i det digitale verktøyet, klart komme fram i besvarelsen, sammen med en klar konklusjon.

Kravet til forklaring av framgangsmåte er også viktig ved bruk av digitale verktøy!

Formelregning

Formelregning (4366)

Eksempel

Vi er på ferie i USA og opplever en varm sommerdag at temperaturen er på 86 °F. Vi ønsker å vite hvor mange celsiusgrader dette tilsvarer. I en reisehåndbok finner vi at sammenhengen mellom temperatur målt i grader fahrenheit og grader celsius er gitt ved formelen

$$F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

Her står *C* for temperaturen målt i celsiusgrader og *F* for temperaturen målt i fahrenheitgrader.

28 °C er det samme som 82,4 °F.

En temperatur på 28 °C vil i fahrenheitgrader være

$$F = \frac{9}{5} \cdot 28 + 32 = 50,4 + 32 = 82,4$$

Men vårt problem var å finne temperaturen i celsiusgrader. Vi kan sette inn 86 °F i formelen og får da

$$86 = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

Her kan vi ikke bare regne rett fram og finne *C*. Vi må løse en likning.

$$\begin{aligned} 86 &= \frac{9}{5} \cdot C + 32 \\ 86 \cdot 5 &= \frac{9}{\cancel{5}} \cdot C \cdot \cancel{5} + 32 \cdot 5 \quad \text{Vi multipliserer med fellesnevneren } i \text{ alle ledd.} \\ 430 &= 9C + 160 \\ 9C &= 430 - 160 \\ \frac{9C}{9} &= \frac{279}{9} \\ C &= 30 \end{aligned}$$

Vi har dermed regnet ut at 86 °F er det samme som 30 °C.

En annen metode er å finne *C* uttrykt med *F*.

$$\begin{aligned} F &= \frac{9}{5} \cdot C + 32 \\ F \cdot 5 &= \frac{9}{\cancel{5}} \cdot C \cdot \cancel{5} + 32 \cdot 5 \\ 5 \cdot F &= 9 \cdot C + 160 \\ 9 \cdot C &= 5 \cdot F - 160 \\ \frac{9 \cdot C}{9} &= \frac{5 \cdot F - 160}{9} \\ C &= \frac{5 \cdot F - 160}{9} \end{aligned}$$

Vi har nå funnet en formel for å regne ut temperaturen i grader celsius når vi kjenner temperaturen i grader fahrenheit.

Vi setter inn 86 °F i formelen og finner

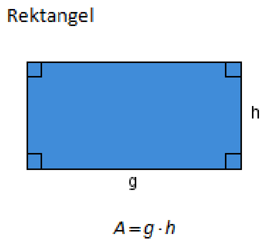
$$C = \frac{5 \cdot F - 160}{9} = \frac{5 \cdot 86 - 160}{9} = \frac{430 - 260}{9} = \frac{270}{9} = 30$$

Vi får også nå at 86 °F er det samme som 30 °C.

Formelen for areal av et rektangel er gitt ved $A = g \cdot h$.
Ved å «snu» på den opprinnelige formelen

$$\begin{aligned} A &= g \cdot h \\ g \cdot h &= A \\ \frac{\cancel{g} \cdot h}{\cancel{g}} &= \frac{A}{g} \\ h &= \frac{A}{g} \end{aligned}$$

Vi har nå funnet en formel for høyden til et rektangel uttrykt med arealet og grunnlinja.



Formelrekning ved hjelp av digitale verktøy

Du kan også bruke CAS-verktøyet i GeoGebra for å «snu» ein formel ved å bruke kommandoen

Løs[<Likning>, <Variabel>]

slik som vist nedenfor.

1	F=9/5*C+32 ✓ $F = \frac{9}{5} C + 32$
2	Løs[F=9/5*C+32,C] → $\left\{ C = \frac{5 F - 160}{9} \right\}$

Likningssett

[Likningssett (4367)]

En familie som består av tre barn og to voksne, betaler 380 kroner for å komme inn på en fotballkamp.

Billettpris?

En annen familie med 4 barn og 3 voksne betaler 540 kroner. Vi ønsker å finne ut hva billettprisen er for barn, og hva billettprisen er for voksne.

La *x* være billettprisen i kroner for barn og *y* billettprisen i kroner for voksne.

Prisen den første familien betaler gir likningen

$$3x + 2y = 380$$

Dette er en likning med to ukjente, og det finnes mange par av tall for *x* og *y* som passer i likningen. Prisen den andre familien betaler gir likningen

$$4x + 3y = 540$$

Det finnes også her mange par av tall for *x* og *y* som passer i likningen. Men det finnes bare ett par av tall for *x* og *y* som passer i begge likningene.

To likninger med de samme to ukjente størrelsene, kalles for et **likningssett**. Å løse et likningssett går ut på å finne de verdiene for *x* og *y* som passer i begge likningene.

En metode for å løse et likningssett ved regning er **innsettingsmetoden**.

Når vi bruker denne metoden, begynner vi med å finne et uttrykk for den ene ukjente uttrykt med den andre ukjente ved hjelp av en av likningene. I vårt eksempel kan den første likningen gi

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 2y &= 380 - 3x \\ y &= 190 - \tfrac{3}{2}x \end{aligned}$$

S å **setter** vi dette uttrykket **inn** for *y* i den andre likningen. Husk å bruke parenteser!

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 540 \\ 4x + 3\left(190 - \tfrac{3}{2}x\right) &= 540 \end{aligned}$$

På denne måten får vi **én likning med én ukjent** og kan løse denne.

$$\begin{aligned} 4x + 570 - \tfrac{9}{2}x &= 540 \\ 2 \cdot 4x + 2 \cdot 570 - 2 \cdot \tfrac{9}{2}x &= 2 \cdot 540 \\ 8x - 9x &= 1080 - 1140 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Til slutt **setter** vi denne verdien for *x* **inn** i uttrykket vi fant for *y*

$$
\begin{aligned}
y &= 190 - \tfrac{3}{2}x \\
y &= 190 - \tfrac{3}{2} \cdot 60 \\
y &= 100
\end{aligned}
$$

Billettprisen for voksne er 100 kroner, og billettprisen for barn er 60 kroner.

Vær oppmerksom på at du kan velge både hvilken likning og hvilken ukjent du vil starte med. Noen prøver å velge slik at de unngår brøker. Da blir utregningen som oftest enklere.

Det finnes også andre metoder for å løse likningssett med regning.

I neste eksempel skal vi bruke en metode som kalles **addisjonsmetoden**.

Eksempel

Mor til Kari var 32 år da Kari ble født. I dag er Kari og moren til sammen 64 år.

Hva er alderen til Kari og moren i dag?

Løsning

La *x* være alderen til Kari og *y* alderen til moren.

Kari og moren er til sammen 64 år. Dette gir likningen $x + y = 64$.

Kari ble født for *x* år siden. Da var mor til Kari 32 år. I dag er mor *y* år.

Dette gir likningen $32 + x = y$.

Vi har da

$$
\begin{aligned}
x + y &= 64 \\
32 + x &= y
\end{aligned}
$$

Vi ordner likningene og får

$$
\begin{aligned}
x + y &= 64 \\
x - y &= -32
\end{aligned}
$$

Siden venstresidene i begge likningene er lik høyresidene, må summen av venstresidene være lik summen av høyresidene. Vi adderer derfor venstresidene og høyresidene hver for seg og setter dem lik hverandre

$$
\begin{aligned}
x + x + y - y &= 64 - 32 \\
2x &= 32 \\
x &= 16
\end{aligned}
$$

Nå falt leddene med *y* bort, og likningen med bare *x* som ukjent gav at Kari er 16 år.

Vi kan nå finne ut hvor gammel moren er ved å bruke en av likningene.

$$
\begin{aligned}
32 + x &= y \\
32 + 16 &= y \\
y &= 48
\end{aligned}
$$

Moren er 48 år.

Vi har altså vist at i dag er mor til Kari 48 år, og Kari er 16 år.

For at vi skal komme i mål med addisjonsmetoden, må leddene med en av de ukjente falle bort under addisjonen. Det kan vi som oftest få til å skje ved først å multiplisere likningene i likningssettet med passende tall. Innsettingsmetoden er allikevel den metoden som anbefales. Den fungerer alltid.

I kapitlet om funksjoner skal du se at likningssett også kan løses grafisk. Likningssett kan også løses ved å bruke et digitale verktøy.

Løsning av likningssett ved hjelp av digitale verktøy

Du kan også bruke CAS-verktøyet i GeoGebra for å løse likningssett.

```
Løsninger[ <Liste med likninger>, <Liste med variabler> ]
```

Bruk kommandoen slik som vist nedenfor.

```
1  Løsninger[ {3x+2y=380,4x+3y=540},{x,y}]
   → ( 60   100 )
```

Faktorisering

Faktorisering

[Faktorisering (3631)]

Når vi faktoriserer, bruker vi ofte regnereglene for bokstavregning, inkludert kvadratsetningene, motsatt vei.

Å **faktorisere** vil si å skrive et uttrykk som et **produkt av faktorer**. Uttrykket skrives som ett ledd, men hver av faktorene kan inneholde flere ledd.

Uttrykk som består av bare ett ledd

Vi faktoriserer uttrykk som består av bare **ett ledd** ved å skrive alle tall som produkt av primtallsfaktorer, og splitte bokstavuttrykk på potensform i enkeltfaktorer.

Eksempel

$36a(\mathrm{ab})^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$

Uttrykk som inneholder flere ledd

For uttrykk som inneholder **flere ledd** kan vi «gå motsatt vei» av det vi gjør når vi multipliserer et tall med et parentesuttrykk. Det betyr at hvis **alle ledd** i uttrykket inneholder **samme faktor**, kan vi sette denne felles faktoren utenfor parentes.

Eksempel

$2x^2 - 12x = 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x = 2x\,(x - 6)$

Uttrykket er nå faktorisert til ett ledd og består av produktet av faktorene 2, x og (x – 6).

Vi kan kontrollere at faktoriseringen er riktig ved å multiplisere faktorene

$$2x\,(x - 6) = 2x \cdot x - 2x \cdot 6 = 2x^2 - 12x$$

Vi får tilbake det opprinnelige uttrykket.

Pass på hvis du setter et negativt tall utenfor en parentes. Da må du skifte fortegn inne i parentesen.

$$-2x^2 - 4x = -2x\,(x + 2x)$$

Sjekk at dette er riktig ved å multiplisere faktorene ovenfor!

Vi faktoriserer uttrykk som består av mer enn to ledd på samme måte.

$$6a^2b - 3a^2b^2 + 6\,\mathrm{ab}^2 = 3\,\mathrm{ab}\,(2a - \mathrm{ab} + 2b)$$

Andregradsuttrykk

Andregradsuttrykk (92373)

Et uttrykk som kan skrives på formen $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c \text{ der } a\neq 0$, kalles et **andregradsuttrykk**.

Et eksempel på et andregradsuttrykk er x^2+4x-5. x^2 kalles **andregradsleddet** og $a=1$. $4x$ kalles **førstegradsleddet** og $b=4$. -5 kalles **konstantleddet** og $c=-5$.

Et andregradsuttrykk inneholder alltid andregradsleddet, men førstegradsleddet og konstantleddet kan mangle, det vil si at *b* og/eller *c* kan være lik 0.

Når konstantleddet mangler

Når konstantleddet mangler, vil faktoren *x* forekomme i begge ledd. Da kan vi sette *x* utenfor parentesen

$$2x^2-6x=2x\left(x-3\right)$$

Når førstegradsleddet mangler

Hvis de to leddene har motsatt fortegn, kan vi faktorisere med konjugatsetningen.

Eksempel

$$x^2-4=x^2-2^2$$
$$=\left(x+2\right)\left(x-2\right)$$

$$4x^2-25=\left(2x\right)^2-5^2$$
$$=\left(2x+5\right)\left(2x-5\right)$$

$$x^2-3=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$-2x^2+18=-2\left(x^2-9\right)$$
$$=-2\left(x+3\right)\left(x-3\right)$$

$$\left(\mathrm{ab}\right)^2-c^2=\left(\mathrm{ab}+c\right)\left(\mathrm{ab}-c\right)$$

$$\left(x+1\right)^2-9=\left(x+1\right)^2-3^2=\left(x+1+3\right)\left(x+1-3\right)=\left(x+4\right)\left(x-2\right)$$

Fullstendige kvadrater

[Fullstendige kvadrater (92680)](#)

Et **fullstendig kvadrat** er et andregradsuttrykk som vi kan faktorisere direkte ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

For eksempel er uttrykket $x^2 - 6x + 9$ et fullstendig kvadrat fordi

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Hvordan kan vi se om et andregradsuttrykk er et fullstendig kvadrat?

Vi bruker uttrykket $x^2 - 6x + 9$ som eksempel.

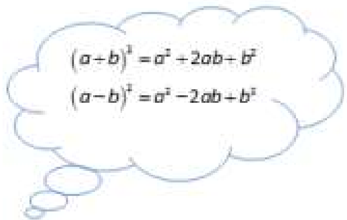
1. Første forutsetning er at andregradsleddet og konstantleddet er kvadratiske uttrykk med positivt fortegn. Det stemmer her, og vi finner at $a = \sqrt{x^2} = x$ og $b = \sqrt{9} = 3$
2. Videre må «det dobbelte produkt», det vil si $2ab$, vere lik $6x$. Vi sjekker: $2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Det stemmer.
3. Førstegradsleddet er negativt. Det betyr at vi kan bruke andre kvadratsetning.
   Da er $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ og vi har et fullstendig kvadrat.

Oppgave

Undersøk om $x^2 + 8x + 16$ og $x^2 - 5x + 25$ er fullstendige kvadrater.

Å lage fullstendige kvadrater

Det er få andregradsuttrykk som er fullstendige kvadrater. Men det er mulig å faktorisere andregradsuttrykk ved å lage fullstendig kvadrat og så bruke konjugatsetningen.



Vi skal se på to eksempler hvor vi bruker denne metoden.

Eksempel 1

Vi skal faktorisere andregradsuttrykket $x^2 + 4x - 5$.

1. Andregradsleddet er et kvadratuttrykk, x^2. Det gir $a = \sqrt{x^2} = x$.
2. Konstantleddet, −5, er ikke et kvadrattall med positivt fortegn.
   Vi legger til og trekker fra kvadrattallet b^2 til uttrykket, og får
   $$x^2 + 4x - 5 = \underbrace{x^2 + 4x + b^2}_{\text{Fullstendig kvadrat}} - b^2 - 5$$
   Dette gjør vi for å lage et fullstendig kvadrat av de tre første ledda.
3. Vi må ha $2ab = 4x$. Vi kan då finne b.
   $2ab = 4x \Rightarrow b = \frac{4x}{2a} = \frac{4x}{2x} = 2$
4. Vi får da

$$x^2 + 4x - 5 = \underbrace{x^2 + 4x + 2^2}_{\text{Fullstendig kvadrat}} - 4 - 5 \qquad \text{Vi legger til og trekker fra } 2^2$$

$$= (x+2)^2 - 9 \qquad \text{Vi har et fullstendig kvadrat etter 1. kvadratsetning}$$

$$= (x+2)^2 - 3^2 \qquad \text{Vi bruker konjugatsetningen.}$$

$$= ((x+2)+3)\cdot((x+2)-3)$$

$$= (x+5)\cdot(x-1)$$

Vi har nå faktorisert andregradsuttrykket og fått $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$.

Eksempel 2

Vi skal faktorisere andregradsuttrykket $2x^2 - 8x - 42$.

1. Her er ikke andregradsleddet et kvadratuttrykk. Men når vi setter faktoren 2 utenfor en parentes, så får vi et uttrykk hvor andregradsleddet er et kvadratuttrykk
   $2x^2 - 8x - 42 = 2\left(x^2 - 4x - 21\right)$
2. Vi faktoriserer parentesuttrykket. Andregradsleddet er x^2. Det gir $a = \sqrt{x^2} = x$.
3. Konstantleddet, –21, er ikke et kvadrattall med positivt fortegn.
   Vi legger til og trekker fra kvadrattallet b^2 til uttrykket, og får
   $x^2 - 4x - 21 = \underbrace{x^2 - 4x + b^2}_{\text{Fullstendig kvadrat}} - b^2 - 21$
4. Vi må ha $2ab = 4x$. Vi kan da finne b.
   $2\mathrm{ab} = 4x \Rightarrow \frac{4x}{2a} = \frac{4x}{2x} = 2$
5. Vi får da

$$x^2 - 4x - 21 = \underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\text{Fullstendig kvadrat}} - 4 - 21$$ Vi legger til og trekker fra 2^2

$$= (x-2)^2 - 25$$ Vi har et fullstendig kvadrat etter 2. kvadratsetning

$$= (x-2)^2 - 5^2$$ Vi bruker konjugatsetningen.

$$= ((x-2)+5)\cdot((x-2)-5)$$

$$= (x+3)\cdot(x-7)$$

Vi har nå faktorisert andregradsuttrykket og fått $2x^2 - 8x - 42 = 2\left(x^2 - 4x - 21\right) = 2\,(x+3)\,(x-7)\,.$

Metode for å faktorisere uttrykk ved kvadratsetningene

- Hvis andregradsleddet ikke er et kvadratisk uttrykk, setter vi faktoren foran andregradsleddet utenfor en parentes
- Vi lager så et fullstendig kvadrat av parentesuttrykket ved å legge til et kvadratisk uttrykk slik at andregradsleddet, førstegradsleddet og det vi har addert utgjør nå et fullstendig kvadrat. Vi trekker samtidig fra det kvadratiske uttrykket for at uttrykket ikke skal endre verdi
- Vi bruker så konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket hvis dette er mulig. Det vil si hvis tallet etter det fullstendige kvadratet er negativt

Forenkling av rasjonale uttrykk

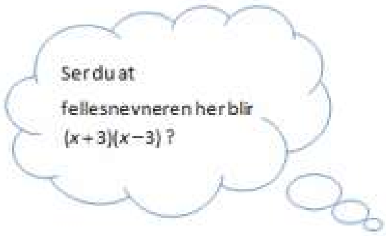
[Forenkling av rasjonale uttrykk (92857)]

Husker du at et tall som kan skrives som en brøk med hele tall i teller og nevner, kalles et **rasjonalt tall**?

På samme måte er et typisk **rasjonalt uttrykk** en brøk med bokstavuttrykk i teller og nevner.

Du kan bruke de regnereglene du nå har lært, til å forenkle og trekke sammen rasjonale uttrykk. Regnereglene for brøkregning gjelder selvfølgelig også om du erstatter tall med bokstaver.

Eksempel



Trekk sammen uttrykket

$$\frac{4x}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}$$

Løsning

Vi faktoriserer nevnerne, finner fellesnevneren og utvider brøkene slik at alle får samme nevner. Her må du kunne konjugatsetningen!

$$\frac{4x}{(x+3)(x-3)}-\frac{2\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

Vi trekker sammen brøkene ved å trekke sammen tellerne og beholde felles nevner.

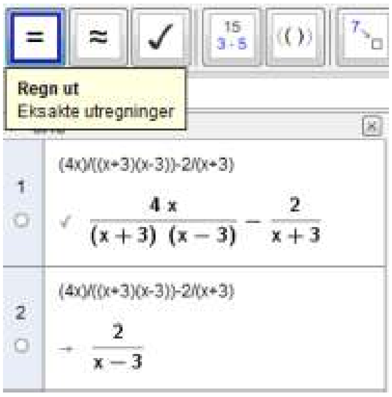
$$\frac{4x-2(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{4x-2x+6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x+6}{(x+3)(x-3)}$$

Til slutt faktoriserer vi telleren og forkorter, faktor mot faktor, der dette er mulig.

$$\frac{2x+6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2\cdot x+2\cdot 3}{(x+3)(x-3)}=\frac{2\,\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\,(x-3)}=\frac{2}{x-3}$$

Forenkling av rasjonale uttrykk ved hjep av digitale verktøy

I GeoGebra skviver vi inn uttrykket og velger knappen «Regn ut».



Andregradslikninger

Andregradslikninger

[Andregradslikninger (3675)](#)

En likning som kan skrives på formen $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+c=0$ der $a\neq 0$, kalles en **andregradslikning**.

Et eksempel på en andregradslikning er $x^2+4x-5=0$. x^2 kalles **andregradsleddet** og $a=1$. $4x$ kalles **førstegradsleddet** og $b=4$. -5 kalles **konstantleddet** og $c=-5$.

Noen ganger må andregradslikningen ordnes for å se hva tallene *a*, *b* og *c* er.

Andregradslikningen

$$3-x=\frac{-7x^2}{2}$$

kan ordnes til likningen

$$\begin{aligned}6-2x&=-7x^2\\ 7x^2-2x+6&=0\end{aligned}$$

og her ser vi at $a=7,\ b=-2\ \text{og}\ c=6$.

En andregradslikning inneholder alltid andregradsleddet, men førstegradsleddet og konstantleddet kan mangle, det vil si at *b* og/eller *c* kan være lik 0.

Når konstantleddet mangler

Når konstantleddet mangler, kan vi samle de to gjenstående leddene på venstre side av likhetstegnet og faktorisere. Faktoren *x* forekommer nemlig i begge ledd. Vi benytter oss av at når et produkt er lik null, må minst en av faktorene være lik null.

Eksempel

$$\begin{aligned}&x^2-2x=0\\ &x(x-2)=0\\ &x=0\ \text{eller}\ x-2=0\\ &x=0\ \text{eller}\ x=2\end{aligned}$$

Når førstegradsleddet mangler

Vi ordner likningen slik at x^2 på venstre side av likhetstegnet, så trekker vi ut kvadratroten.

Eksempel

$$\begin{aligned}-2x^2+18&=0\\ -2x^2&=-18\\ x^2&=9\\ x&=\sqrt{9}\\ x&=\sqrt{9}\ \text{eller}\ x=-\sqrt{9}\\ x&=3\quad \text{eller}\ x=-3\end{aligned}$$

Hvis høyresiden blir null etter at likningen er ordnet, så fås bare én løsning, nemlig *x* = 0. Hvis høyresiden blir negativ etter at likningen er ordnet, så har likningen ikke noen løsninger.

Fullstendige kvadrater

Noen andregradslikninger kan ordnes slik at venstresiden i likningen blir såkalte **fullstendige kvadrater**.

La oss først se på likningen $(x-3)^2=4$. Denne likningen må kunne løses etter tilsvarende prinsipp som likninger uten førstegradsleddet:

$$(x-3)^2=4$$

$$\begin{aligned} x-3=2 \text{ eller } x-3=-2 \\ x=5 \text{ eller } x=1 \end{aligned}$$

I likningen $x^2-6x+9=4$ er venstresiden et fullstendig kvadrat. Etter andre kvadratsetning er venstresiden lik $(x-3)^2$ og likningen har da løsning som vist ovenfor.

Dette betyr at hvis vi omformer en andregradslikning slik at det til venstre for likhetstegnet står et fullstendig kvadrat, så kan vi løse likningen.

Husker du hvordan vi laget fullstendige kvadrater da vi faktoriserte andregradsuttrykk? Vi bruker samme metode nå, med en liten forskjell. Vi trenger ikke subtrahere uttrykket vi adderer. Siden vi har likninger, kan vi addere det samme uttrykket på begge sider av likhetstegnet.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} &x^2+2x-15=0 \qquad a=x \\ &x^2-2x+b^2=15+b^2 \quad \text{Må ha } 2\text{ab}=2x \Rightarrow 2\text{xb}=2x \Rightarrow b=1 \end{aligned}$$

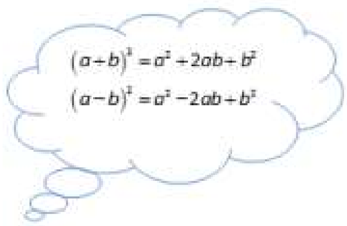
$$x^2+2x+1^2=15+1$$

$$(x+1)^2=4^2$$

$$x+1=4 \quad \text{eller} \quad x+1=-4$$

$$x=3 \quad \text{eller} \quad x=-5$$

Eksempel 2



$$-42-8x=-2x^2$$

$$2x^2-8x=42 \qquad \text{Dividerer alle ledd med 2}$$

$$x^2-4x=21 \qquad a=x$$

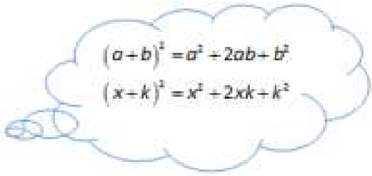
$$\begin{aligned} &x^2-4x+b^2=21+b^2 \quad \text{Må ha } 2\text{ab}=4x \Rightarrow 2\text{xb}=4x \Rightarrow b=2 \\ &x^2-4x+2^2=21+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x-2)^2=25 \\ &x-2=5 \quad \text{eller} \quad x-2=-5 \\ &x=7 \quad \text{eller} \quad x=-3 \end{aligned}$$

Å løse andregradslikninger med abc-formelen

[Å løse andregradslikninger med abc - formelen (119407)]

Vi kan lage et fullstendig kvadrat av et generelt andregradsuttrykk. På den måten kan vi komme fram til en formel som vi alltid kan bruke til å løse andregradslikninger.



Vi ser på den generelle andregradslikningen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$. Her får vi et lite problem ved at de samme bokstavene er brukt både til å illustrere kvadratsetningen og andregradsuttrykket. Vi løser dette ved å bruke bokstavene *x* og *k* i kvadratsetningen slik at denne blir $(x+k)^2 = x^2 2\mathrm{xk} + k^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c &= 0 && \text{Vi dividerer med } a \text{ i alle ledd} \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} &= 0 && x = \sqrt{x^2} = x \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + k^2 &= -\tfrac{b}{a} + k^2 && \text{Må ha } 2\mathrm{xk} = \tfrac{b}{a}x \Rightarrow k = \tfrac{b}{2a} \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 &= -\tfrac{c}{a} + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{4a\cdot c}{4a\cdot a} \\
\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2 - 4\,\mathrm{ac}}{4a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x + \tfrac{b}{2a} &= +\sqrt{\tfrac{b^2-4\,\mathrm{ac}}{4a^2}} && \text{eller } x + \tfrac{b}{2a} = -\sqrt{\tfrac{b^2-4\,\mathrm{ac}}{4a^2}} \\
x &= -\tfrac{b}{2a} + \sqrt{\tfrac{b^2-4\,\mathrm{ac}}{4a^2}} && \text{eller } x = -\tfrac{b}{2a} - \sqrt{\tfrac{b^2-4\,\mathrm{ac}}{4a^2}} \\
x &= -\tfrac{b+\sqrt{b^2-4\,\mathrm{ac}}}{2a} && \text{eller } x = -\tfrac{b-\sqrt{b^2-4\,\mathrm{ac}}}{2a}
\end{aligned}$$

***abc* - formelen**
Andregradslikningen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,\mathrm{ac}}}{2a} \qquad \begin{array}{c} a \neq 0 \\ b^2 - 4\mathrm{ac} \geqslant 0 \end{array}$$

Vi bruker tegnet ± for å spare skriving.

Når vi løser en andregradslikning med *abc* - formelen, ordner vi først likningen slik at den kommer på formen $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c = 0$.

Du husker at vi definerte kvadratroten bare til positive tall og null. Det vil si at andregradslikningen ikke har løsninger blant de reelle tallene når det som står under rottegnet, er mindre enn null. Kanskje det digitale verktøyet du bruker da gir løsninger med bokstaven *i*? Det vil si at løsningen er imaginær.

Andregradslikningen har bare én løsning når det som står under rottegnet, er lik null.

Vi skal nå se på noen eksempler på bruk av *abc* - formelen.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}
x^2 &= 5 - 4x \\
x^2 + 4x - 5 &= 0 && \text{Vi ordner likningen og finner at } a = 1,\ b = 4,\ c = -5. \\
x &= \tfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} && \text{Vi setter inn } i \text{ formelen.} \\
x &= \tfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \\
x &= \tfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \\
x &= \tfrac{-4+6}{2} && \text{eller } x = \tfrac{-4-6}{2} \\
x &= 1 && \text{eller } x = -5
\end{aligned}$$

Likningen har to løsninger. Det er altså to verdier for *x* som passer i den opprinnelige likningen.

Eksempel 2

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 4x + 4 = 0 \\
&\qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\
&\qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \\
&\qquad x = -2
\end{aligned}
$$

Uttrykket under rottegnet er null, og vi får bare én løsning.

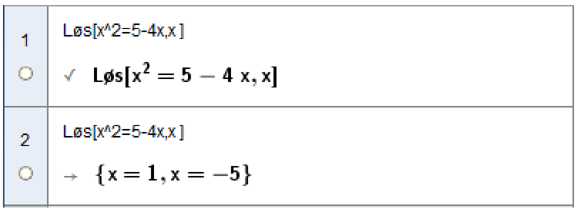
Eksempel 3

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 4 = 0 \\
&\qquad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \\
&\qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} \\
&\qquad \text{Ingen løsning}
\end{aligned}
$$

Vi får –12 under rottegnet og $\sqrt{-12}$ er ikke definert når vi regner med reelle tall. Vi får derfor ingen løsning, dvs. at det ikke finnes noe reelt tall som er slik at andregradsuttrykket på venstre side i likningen blir null.

Å løse andregradslikninger ved hjelp av digitale verktøy

Nedenfor ser du hvordan vi kan løse likningen fra eksempel 1 ovenfor i GeoGebra.



Likningssett av første og andre grad

[Likningssett av første og andre grad (3690)]

Vi er nå i stand til å løse likningssett hvor den ene likningen er av første grad, og den andre likningen er av andre grad.

Da vi løste likningssett med to likninger av første grad, brukte vi **innsettingsmetoden**. Denne metoden kan vi også bruke her. Det lureste er da ofte å finne et uttrykk for den ene ukjente ved hjelp av førstegradslikningen, og så sette dette uttrykket inn i andregradslikningen.

Eksempel

Vi har gitt likningssettet

$$\begin{pmatrix} 2x^2 - 2x - y^2 = 8 \\ 2x - y = -2 \end{pmatrix}$$

Vi bruker førstegradslikningen til å finne et uttrykk for *y*

$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ -y &= -2 - 2x \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Vi setter så uttrykket for *y* inn i andregradslikningen

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - y^2 &= 8 \\ 2x^2 - 2x - (2x+2)^2 &= 8 \\ 2x^2 - 2x - (4x^2 + 8x + 4) &= 8 \\ 2x^2 - 2x - 4x^2 - 8x - 4 &= 8 \\ -2x^2 - 10x - 12 &= 0 \quad | :-2 \\ x^2 + 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Legg merke til at vi her dividerer med -2 i siste linje for å få greiere tall å arbeide med når vi skal bruke *abc* - formelen.

Vi bruker *abc* - formelen til å løse denne likningen

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$
$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = -3$$

Vi setter så disse løsningene inn i uttrykket for *y*

$$\begin{aligned} y &= 2x + 2 \\ y_1 &= 2 \cdot (-2) + 2 = -2 \\ y_2 &= 2 \cdot (-3) + 2 = -4 \end{aligned}$$

$\vee$ eller

$\wedge$ og

Likningssettet har to sett med løsninger

$$x = -2 \ \wedge \ y = -2 \quad \vee \quad x = -3 \ \wedge \ y = -4$$

Å løse likningssett ved hjelp av digitale verktøy

Nedenfor ser du hvordan vi kan løse likningen fra forrige eksempel i GeoGebra.

1	Løs[{2x^2-2x-y^2=8,2x-y=-2},{x,y}] ✓ **Løs**$[\{2x^2 - 2x - y^2 = 8, 2x - y = -2\}, \{x, y\}]$
2	Løs[{2x^2-2x-y^2=8,2x-y=-2},{x,y}] → $\{\{x = -2, y = -2\}, \{x = -3, y = -4\}\}$

I funksjonskapitlet skal du se hvordan vi kan løse likningssett grafisk.

Faktorisere andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunktmetoden

Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunkt...

[Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunktmetoden (3668)]

Vi kan også faktorisere andregradsyttrykk ved en metode som kalles nullpunktmetoden.
Vi illustrerer metoden gjennom to eksempler.

Eksempel

Vi ser på andregradsuttrykket $x^2 - 2x - 8$.

Vi starter med å finne nullpunktene.

Vi løser da likningen $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm 6}{2} \\ x_1 &= \frac{2-6}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{2+6}{2} = 4 \end{aligned}$$

Uttrykket $x^2 - 2x - 8$ er altså lik null når $x = -2$ og når $x = 4$.
Ser du at uttrykket $(x - (-2))(x - 4) = (x + 2)(x - 4)$ også er lik null når $x = -2$ og når $x = 4$?

Vi multipliserer og ser at

$$(x + 2)(x - 4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

Vi har da at

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Andregradsuttrykket er faktorisert!

Eksempel

Vi ser på uttrykket $2x^2 - x - 3$.

Vi starter igjen med å finne nullpunktene, og løser likningen $2x^2 - x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\ x_1 &= \frac{1-5}{4} = -1 \\ x_2 &= \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Uttrykket $2x^2 - x - 3$ er altså lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

Vi prøver samme metode som i forrige eksempel og ser at uttrykket $(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ også er lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

Vi multipliserer og får

$$(x+1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)=x^2-\tfrac{3}{2}x+x-\tfrac{3}{2}=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2}$$

Dette er ikke det samme andregradsuttrykket som vi startet med.

Vi startet med

$$2x^2-x-3$$

Ser du en sammenheng mellom disse to uttrykkene?

Når vi multipliserer ut parentesene, får vi

$$x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2}$$

Ser du at vi kan multiplisere det siste uttrykket med 2, og få det andregradsuttrykket vi startet med?

$$\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\cdot 2=2\cdot x^2-2\cdot\frac{1}{2}x-2\cdot\frac{3}{2}=2x^2-x-3$$

Vi har da at

$$2x^2-x-3=2\,(x+1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)$$

Andregradsuttrykket er faktorisert!

Vi ser fort at vi må multiplisere med 2, fordi det siste utrykket inneholder leddet x^2, mens det polynomet vi startet med, inneholder leddet $2x^2$.

Hvis vi ønsker et uttrykk uten brøk, kan vi multiplisere 2-tallet inn i den siste parentesen

$$2x^2-x-3=2\,(x+1)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)=(x+1)\,(2x-3)$$

Den metoden vi har brukt for å faktorisere i de to eksemplene ovenfor, kalles **nullpunktmetoden**. Du skjønner kanskje hvorfor?

Nullpunktmetoden

$$\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

der x_1 og x_2 er løsningene av den generelle andregradslikningen $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c=0$.

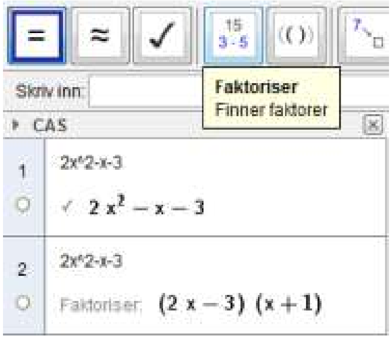
Når det bare finnes én løsning av andregradslikningen, er $x_1 = x_2$, andregradsuttrykket inneholder to like faktorer.
Når andregradslikningen ikke har løsninger, kan ikke uttrykket faktoriseres.

Ikke glem at a må være med i det faktoriserte uttrykket! ☺

Når du bruker nullpunktmetoden til å faktorisere andregradsuttrykk, kan du finne nullpunktene ved å bruke *abc* - formelen, som vist ovenfor, eller ved hjelp av et digitalt verktøy. Digitale verktøy har dessuten ofte egne kommandoer for å faktorisere uttrykk.

Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av digitale verktøy

I GeoGebra skriver vi inn uttrykket og velger knappen «Faktoriser».



Mer om forenkling av rasjonale uttrykk

[Mer om forenkling av rasjonale uttrykk (4501)]

Gjennom tre eksempler skal vi illustrere hvordan vi ved hjelp av reglene for brøkregning og faktoriseringsreglene kan trekke sammen og forenkle rasjonale uttrykk som også inneholder andregradsuttrykk.

Eksempel 1

Vi skal forkorte brøken

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

Først faktoriserer vi telleren. Telleren x^2-5x+6 har nullpunktene $x=2 \text{ og } x=3$.
Dermed er $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.
Da er

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)\left(\cancel{x-3}\right)}{\cancel{x-3}}=x-2$$

Eksempel 2

Vi skal forkorte brøken

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2}$$

Først faktoriserer vi telleren. Telleren x^2+3x+2 har nullpunktene $x=-1 \text{ og } x=-2$.
Dermed er $x^2+3x+2=(x-(-1))(x-(-2))=(x+1)(x+2)$.
Da er

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+2}=\frac{\left(\cancel{x+1}\right)(x+2)}{2\left(\cancel{x+1}\right)}=\frac{x+2}{2}$$

Eksempel 3

Vi skal trekke sammen og forkorte

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Først faktoriserer vi nevnerne. Nevneren x^2-4x+3 har nullpunktene $x=1 \text{ og } x=3$.
Det gir at $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.
Da er

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-3)}-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1\cdot(x-3)}{2(x-1)\cdot(x-3)}+\frac{2\cdot 2(x-1)}{(x-3)\cdot 2(x-1)}-\frac{(x-2)\cdot 2}{(x-1)(x-3)\cdot 2}$$

$$=\frac{x-3}{2(x-1)(x-3)}+\frac{4x-4}{2(x-1)(x-3)}-\frac{(2x-4)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3+4x-4-(2x-4)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)}$$

Husk å skifte fortegn!

$$=\frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{3\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(x-3)}$$

$$=\frac{3}{2(x-3)}$$

Brøker som utvides og forkortes endrer ikke verdi

Når en brøk utvides, multipliseres teller og nevner med samme tall. Brøken endrer ikke verdi.

Når en brøk forkortes, divideres teller og nevner med samme tall. Brøken endrer ikke verdi!

Likninger med rasjonale uttrykk

[Likninger med rasjonale uttrykk (93352)](#)

En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Vi må derfor være spesielt oppmerksomme når vi løser likninger med rasjonale uttrykk hvor den ukjente opptrer i nevneren.

Vi ser på følgende likning

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

Dette er de samme brøkene som vi arbeidet med i forrige eksempel (se forrige side i menyen), og vi vet at fellesnevneren er $2\left(x-1\right)\left(x-3\right)$.

Eventuelle løsninger som gir *x* = 1 eller *x* = 3 må da forkastes fordi en eller flere av brøkene ikke er definert for disse *x* - verdiene. Før vi går i gang og løser likningen, markerer vi dette ved å skrive $x\neq 1,\ x\neq 3$, øverst til høyre. (Se nedenfor.)

Så går vi i gang med selve løsningen! Det første vi gjør er å multiplisere med fellesnevneren på begge sider av likhetstegnet. Hvorfor er dette lurt? Jo, fordi vi da kan forkorte brøkene og står igjen med en likning uten rasjonale uttrykk.

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

$x\neq 1,\ x\neq 3$

$$\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot\left(\cancel{x-1}\right)(x-3)}{\cancel{2}\left(\cancel{x-1}\right)}+\frac{2\cdot 2(x-1)\left(\cancel{x-3}\right)}{\cancel{x-3}}=\frac{(x-2)\cdot 2\left(\cancel{x-1}\right)\left(\cancel{x-3}\right)}{\left(\cancel{x-1}\right)\left(\cancel{x-3}\right)}$$

$$x-3+4\left(x-1\right)=\left(x-2\right)\cdot 2$$
$$x-3+4x-4=2x-4$$
$$x+4x-2x=-4+3+4$$
$$3x=3$$
$$x=1$$

Likningen har ingen løsning fordi en eller flere av brøkene ikke er definert for $x=1$.

Før vi går videre skal vi se en gang til på de to siste eksemplene vi har arbeidet med.

Først trakk vi sammen og forkortet

$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

Så løste vi likningen

$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

I begge tilfeller fant vi først fellesnevneren. Men hva gjorde vi så?

Da vi løste likningen, multipliserte vi med fellesnevneren på begge sider av likhetstegnet og fikk en enkel likning uten brøker. Dette kan vi gjøre i en likning fordi **vi kan multiplisere med samme uttrykk på begge sider i en likning og fortsatt beholde likhet mellom venstresiden og høyresiden.**

Når vi skal trekke sammen og forkorte et uttrykk, kan vi imidlertid ikke multiplisere med fellesnevneren fordi uttrykket da endrer verdi. Det vi gjorde her var å **utvide hver av brøkene** slik at alle fikk samme nevner, fellesnevneren. Så satte vi på felles brøkstrek og trakk sammen.

Ulikheter

Ulikheter

[Ulikheter (3704)](#)

En ulikhet består av et ulikhetssymbol med et tall eller uttrykk på hver side av symbolet. Et eksempel er ulikheten

$$3 < 8$$

Ulikheten leses som «3 er mindre enn 8».

Husk at krokodillen er sulten og alltid vil gape over det største tallet eller uttrykket!

Vi har fire ulikhetssymboler, $<$ som betyr «mindre enn», $>$ som betyr «større enn», $\leq$ som betyr «mindre enn eller lik» og $\geq$ som betyr «større enn eller lik».

Merk at «gapet» alltid peker mot det største tallet.

På barneskolen lærte du kanskje å tenke på $<$ som gapet til en krokodille. Krokodillen er sulten og vil alltid gape over det største tallet eller uttrykket!

En ulikhet inneholder gjerne en eller flere ukjente størrelser symbolisert med bokstaver. Det er vanlig å bruke bokstaven *x* for den ukjente når ulikheten har én ukjent størrelse.

Et eksempel er ulikheten

$$x + 3 \geq 8$$

Å **løse** en ulikhet går ut på å finne hvilke verdier *x* kan ha for at ulikheten skal være sann. For eksempel, hvilke verdier av *x* i ulikheten ovenfor gjør at $x + 3$ blir lik eller større enn 8?

Metode for å løse ulikheter

Langt på vei kan vi løse ulikheter etter de samme prinsipper vi brukte for å løse likninger.

- Hvis vi **adderer** det samme tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $5 < 9$, så er $5\boxed{+3} < 9\boxed{+3}$.

- Hvis vi **subtraherer** det samme tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 5$, så er $9\boxed{-3} > 5\boxed{-3}$.

- Hvis vi **multipliserer** med det samme **positive** tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 5$, så er $9\boxed{\cdot 3} > 5\boxed{\cdot 3}$.

- Hvis vi **dividerer** med det samme **positive** tallet på begge sider av ulikhetstegnet, beholder vi den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.
  Siden $9 > 6$, så er $\frac{9}{\boxed{3}} > \frac{6}{\boxed{3}}$.

Vi kan altså addere, subtrahere, multiplisere og dividere med samme **positive** tallet på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

Hva så hvis vi multipliserer eller dividerer med et **negativt** tall på begge sider i en ulikhet?

Vi ser på en tallinje.

Hvis vi velger to ulike tall, vet vi at det tallet som ligger lengst til høyre, er det største. Tallet 4 ligger til høyre for tallet 2 og er dermed større enn 2.

$$4 > 2$$

Vi multipliserer så begge tallene (begge sidene i ulikheten) med det negative tallet –1. Vi får at $4 \cdot (-1) = -4$ og $2 \cdot (-1) = -2$. Men –4 ligger til venstre for –2 på tallinjen og er da minst. Det betyr at

$$-4 < -2$$

Vi har altså måttet snu ulikhetstegnet for at ulikheten fortsatt skal være sann.

På samme måte kan du ta utgangspunkt i to hvilke som helst ulike tall og multiplisere dem eller dividere dem med samme negative tallet. Du vil se at du alltid må snu ulikhetstegnet for at ulikheten fortsatt skal være sann.

Dette betyr at de regler vi hadde for å løse likninger også kan brukes for å løse ulikheter med den forskjell at vi må snu ulikhetstegnet når vi multipliserer eller dividerer med et negativt tall.

• **Vi kan addere og subtrahere med samme tall** på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

• **Vi kan multiplisere og dividere med samme positive tall** på begge sider i en ulikhet og fortsatt beholde den samme ulikheten mellom venstresiden og høyresiden.

• **Vi må snu ulikhetstegnet hvis vi dividerer eller multipliserer med et negativt tall** på begge sider av ulikhetstegnet.

Eksempel

Vi løser ulikheten

$$\begin{aligned}
2x + 3 &< 4x + 9 \\
&\qquad \text{Vi substraherer } 4x \text{ og } 3 \text{ på begge sider.} \\
2x - 4x &< 9 - 3 \\
&\qquad \text{Vi trekker sammen like ledd.} \\
-2x &< 6 \\
&\qquad \text{Vi dividerer med } -2 \text{ på begge sider} \\
&\qquad \text{og snur ulikhetstegnet.} \\
x &> -3
\end{aligned}$$

For alle verdier av *x* større enn –3 er ulikheten sann.

Ulikheter av 2. grad

Ulikheter av 2. grad (4507)

Gitt ulikheten

$$x^2 < 5x - 4$$

Vi ordner først ulikheten slik at vi får **null på høyre side**.

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Vi bruker så for eksemple *abc* - formelen og finner **nullpunktene** til uttrykket $x^2 - 5x + 4$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = 4 \quad x_2 = 1$$

Vi vet nå at utrykket $x^2 - 5x + 4$ er lik 0 når $x = 1$ og når $x = 4$.
Det er bare for disse *x* - verdiene at uttrykket kan skifte fortegn.

Det betyr at uttrykket enten er positivt eller negativt for alle *x* - verdier i hvert av de tre intervallene $<\leftarrow, 1>, <1, 4> \quad \text{og} \quad <4, \rightarrow>$. For å avgjøre om uttrykket er positivt eller negativt i hvert av intervallene, kan vi ta «**stikkprøver**» for en *x* - verdi i hvert intervall.

Vi vet at uttrykket kan faktoriseres slik at $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$. Det er lettest å bruke det faktoriserte uttrykket når vi tar stikkprøvene.

$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$

For $x = 0$ får vi

$(0-4)(0-1) = (-4) \cdot (-1)$ Uttrykket er positivt.

For $x = 2$ får vi

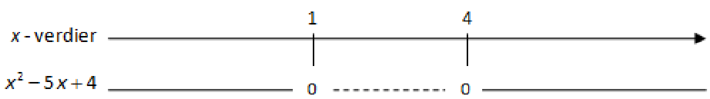
$(2-4)(2-1) = (-2) \cdot (1)$ Uttrykket er negativt.

For $x = 5$ får vi

$(5-4)(5-1) = (1) \cdot (4)$ Uttrykket er positivt.

Det er ikke nødvendig å regne ut verdien i parentesene. Det som betyr noe er fortegnene på parentesuttrykkene.

For å få en oversikt over situasjonen setter vi opp et såkalt **fortegnsskjema**. Det består av en **tallinje** som viser *x* - verdiene, og en **fortegnslinje** som viser fortegnet til uttrykket i de aktuelle intervallene. **Heltrukket linje** markerer at uttrykket er positivt i dette tallintervallet og **stiplet linje** markerer at uttrykket er negativt. En « 0 » viser at uttrykket er lik null for denne *x* - verdien.



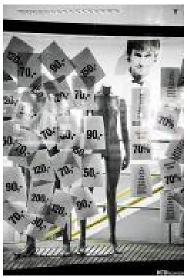
Vår oppave var å finne ut for hvilke verdier av *x* det stemte at $x^2 < 5x - 4$. Det er det samme som å finne ut når $x^2 - 5x + 4 < 0$. Ut fra fortegnslinjen er det nå lett å se løsningen på oppgaven.

Løsningen på oppgaven er at *x* må ligge mellom 1 og 4, dvs. $x \in < 1, 4 >$.

Eksponential- og logaritmelikninger

Vekstfaktor

Vekstfaktor (3737)



Matematikk er et redskap for å løse problemer fra ulike fag og samfunnsområder. På noen områder støter vi på likninger som er annerledes enn de vi har sett på til nå. Det kan være likninger som inneholder potenser hvor den ukjente opptrer som eksponent. Slike likninger kalles for **eksponentiallikninger**.

Eksponentiallikninger opptrer for eksempel i forbindelse med prosentregning, spesielt når vi regner med vekstfaktor.

Du vil ofte støte på verdier som endrer seg prosentvis, det kan være priser på varer og tjenester, lønn for arbeid, kapital i bank, utslipp av klimagasser osv. Ved slike prosentvise endringer er det svært nyttig å regne med vekstfaktor.

Vi starter med en kort repetisjon av prosentregning og spesielt hvordan vi regner med vekstfaktor. Vi forutsetter at du fra ungdomsskolen husker at prosent betyr hundredel.

Eksempel

En vare koster 1 500 kr. Så stiger prisen med 25 %. Hva blir ny pris på varen?

En måte å regne på er slik:

$$\text{Ny pris} = 1500 \text{ kr} + 1500 \text{ kr} \cdot \frac{25}{100} = 1875 \text{ kr}$$

Ved å sette 1 500 utenfor en parentes, blir regningen slik:

$$1500 + 1500 \cdot \frac{25}{100} = 1500\left(1 + \frac{25}{100}\right) = 1500\,(1 + 0,25) = 1500 \cdot 1,25 = 1875$$

Tallet $\left(1 + \frac{25}{100}\right) = 1,25$ kalles vekstfaktoren.

Du finner ny pris ved å multiplisere gammel pris med vekstfaktoren.

Eksempel

Vi tar igjen for oss en vare som koster 1 500 kr. Hva blir ny pris etter et avslag på 25 %?

En måte å regne på er slik:

$$\text{Ny pris} = 1500 \text{ kr} - 1500 \text{ kr} \cdot \frac{25}{100} = 1125 \text{ kr}$$

Ved å sette 1 500 utenfor en parentes, blir regningen slik:

$$1500 - 1500 \cdot \frac{25}{100} = 1500\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 1500\,(1 - 0,25) = 1500 \cdot 0,75 = 1125$$

Tallet $\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0,75$ kalles også i dette tilfelle for vekstfaktoren.

Du ser igjen at du finner ny pris ved å multiplisere gammel pris med vekstfaktoren.

> Når du skal øke en verdi med *p* %, blir vekstfaktoren $1 + \frac{p}{100}$.
>
> Når du skal redusere en verdi med *p* %, blir vekstfaktoren $1 - \frac{p}{100}$.
>
> I begge tilfeller må du multiplisere gammel verdi med vekstfaktoren for å få ny verdi.

Ved bruk av vekstfaktor kan du også raskt finne ny pris når det skjer **flere prosentvise forandringer etter hverandre.**

Eksempel

En vare som kostet 500 kr blir først satt opp med 12 %, for så å bli satt ned med 30 %. Hva blir ny pris.

Pris etter prisøkning

$$500 \cdot 1,12 = 560 \text{ kr}$$

Pris etter prisreduksjon

$$\begin{aligned}(500 \text{ kr} \cdot 1,12) \cdot 0,70 &= 500 \cdot 1,12 \cdot 0,70 \\ &= 392 \text{ kr}\end{aligned}$$

Hva er vekstfaktoren her?

Eksempel

Eva setter 10 000 kr i banken. Rentefoten er 3 % per år. Hvor mye har beløpet vokst til dersom det står åtte år i banken?

Løsning

Etter åtte år har beløpet vokst til

$$10\ 000 \text{ kr} \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 10\ 000 \text{ kr} \cdot 1,03^8$$

Eksempel

Adam setter 5 000 kr i banken. Rentefoten er 2,0 % per år. Hvor lenge må pengene stå i banken før det står 5 500 kr på kontoen?

Løsning

Vi kan sette opp følgende likning hvor *x* er tiden pengene må stå i banken

$$5\ 000 \cdot 1,02^x = 5500$$

En slik likning kalles en eksponentiallikning fordi den ukjente opptrer som eksponent i en potens.

Vi kan løse likningen med et digitalt verktøy. Vi bruker «GeoGebra» og får

1	5000*1.02^x=5500 ✓ $5000 \cdot 1.02^x = 5500$
2	5000*1.02^x=5500 NLøs: $\{x = 4.81\}$

Pengene må stå i banken i nesten fem år før det står 5 500 kroner på kontoen.

For å løse eksponentiallikninger uten å bruke et digitalt verktøy, trenger vi å lære litt om logaritmer.

Logaritmer

Logaritmer (120128)

Definisjon

Logaritmen (den briggske logaritmen) til et positivt tall er eksponenten i den potens av 10 som gir tallet

$$10^{\lg a} \stackrel{\text{def}}{=} a$$

Eksempel

Logaritmen til 100 er lik 2 fordi $100 = 10^2$.

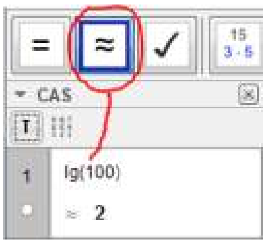
Logaritmen til 1000 er lik 3 fordi $1000 = 10^3$.

Logaritmen til 1 er lik 0 fordi $1 = 10^0$.

Logaritmen til 2 er lik 0,3010 fordi $2 = 10^{0,3010}$.

På norsk bruker vi skrivemåten «lg» for den briggske logaritmen. Den briggske logaritmen har 10 som grunntall. Vi kan også definere logaritmer med andre grunntall enn 10.

Vi kan finne logaritmen til alle tall ved å bruke et digitalt verktøy. I GeoGebra finner vi for eksempel logaritmen til 100 slik



Eksponentiallikninger uten bruk av digitale verktøy

Eksponentiallikninger uten bruk av digitale verktøy (120133)

Når vi skal løse eksponentiallikninger uten bruk av digitale verktøy, bruker vi at logaritmen til en potens er lik eksponenten multiplisert med logaritmen til grunntallet

$$\lg\ a^x = x \cdot \lg\ a$$

Vi kan bevise at denne sammenhengen gjelder ved å ta utgangspunkt i definisjonen av logaritmer og regnereglene for potenser.

Bevis

Definisjonen av logaritmer gir at $a = 10^{\lg\ a}$.

Vi bruker så regnereglene for potenser og får

$$a^x = \left(10^{\lg\ a}\right)^x = 10^{(\lg\ a)\cdot x} = 10^{x\cdot \lg\ a}$$

Du må altså opphøye 10 i $\text{x}\lg\ a$ for å få a^x.

Det betyr etter definisjonen at

$$\lg\ a^x = x \cdot \lg\ a$$

Setningen er nå bevist.

Vi kan bruke setningen til å løse eksponentiallikninger.

Gitt eksponentiallikningen

$$3^x = 27$$

Siden logaritmen til to like tall er like, er

$$\lg\ 3^x = \lg\ 27$$

Logaritmesetningen sier at da er

$$\text{x}\lg\ 3 = \lg\ 27$$

Det gir løsningen på eksponentiallikningen

$$x = \frac{\lg\ 27}{\lg\ 3} = \frac{\lg\ 3^3}{\lg\ 3} = \frac{3\cdot \cancel{\lg\ 3}}{\cancel{\lg\ 3}} = 3$$

På grunn av at $27 = 3^3$ kan vi bruke logaritmesetningen og sette $\lg\ 27 = \lg\ 3^3 = 3 \cdot \lg\ 3$. Da kan vi forkorte med $\lg\ 3$ i teller og nevner slik at vi får en løsning av likningen.

Hvis ikke tallene i likningen hadde vært så spesielle, hadde vi ikke kunnet løse likningen uten bruk av digitale verktøy. Grunnen er at vi trenger et digitalt verktøy for å finne logaritmen til de fleste tall.

Det er bare tall som 10, 100, 1000 osv som vi kjenner logaritmene til.

To eksempler på eksponentiallikninger som lar seg løse uten bruk av digitale verktøy

$$3 \cdot 2^x = 24$$
$$2^x = 8$$
$$x = \frac{\lg\ 2^3}{\lg\ 2}$$
$$x = \frac{3 \cdot \cancel{\lg\ 2}}{\cancel{\lg\ 2}}$$
$$x = 3$$

$$3 \cdot 10^{3x} = 3000$$
$$10^{3x} = 1000$$
$$3x = \frac{\lg\ 1000}{\lg\ 10}$$
$$3x = \frac{3}{1}$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

Enkle logaritmelikninger

[Enkle logaritmelikninger (120152)]

Vi vil løse følgende likning:

$$2\lg(x+1) = 4$$

Vi husker at den briggske logaritmen til et tall, her $x+1$, er definert som det tallet 10 opphøyes i for å få tallet. Dette kan vi bruke for å løse likningen.

Først ordner vi likningen slik at vi bare har logaritmeuttrykket på venstre side av likhetstegnet.

$$\begin{aligned} 2\lg(x+1) &= 4 \\ \lg(x+1) &= 2 \end{aligned}$$

Venstresiden er lik høyresiden i likningen. Vi vil fortsatt ha likhet om vi opphøyer tallet 10 i venstresiden og gjør det samme med høyresiden.

$$\begin{aligned} \lg(x+1) &= 2 \\ 10^{\lg(x+1)} &= 10^2 \end{aligned}$$

Definisjonen av logaritmer sier at nå står det bare $x+1$ på venstre side av likhetstegnet. Høyresiden kan vi regne ut til å bli lik 100.

$$\begin{aligned} x+1 &= 100 \\ x &= 99 \end{aligned}$$

Annet

Hoderegning

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Hoderegning (23725)

Øv deg på hoderegning. I denne flashsimuleringen finner du fakta, eksempel og spill med ulike nivåer hvor du kan trene deg selv til å bli raskere i hoderegning. Klikk på ikonet nedenfor for å starte oppgaven.

Hoderegning / flashnode
http://ndla.no/nb/node/103644

Brøkregning

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Brøkregning (23730)

Simulering og oppgaver om brøkregning. Klikk på ikonet for å sette igang flashsimuleringen.

Brøk / flashnode
http://ndla.no/nb/node/62738

Likninger. Øvelse gjør mester

Forfatter: Hossein Rostamzadeh
Likninger. Øvelse gjør mester (24331)

Øvelse gjør mester - Likninger / flashnode
http://ndla.no/nb/node/12616

Om du synes teksten er liten så kan du forstørre med hurtigtasen Ctrl + for PC og cmd for Mac (forminsker med Ctrl - / cmd -).

Tenk på et tall

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Tenk på et tall (23733)

Hoderegning

Negative tall

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Negative tall (23722)

Negative tall

Negative tall

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Negative tall (23742)

Negative tall

Regnerekkefølge

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Regnerekkefølge (23746)

Regnerekkefølge

Forhold

Forfatter: CyberBook AS, YDP
[Forhold (23775)]

Forhold

Forhold

Forhold

Produktregelen

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Produktregelen (23751)

Produktregelen

Geometri

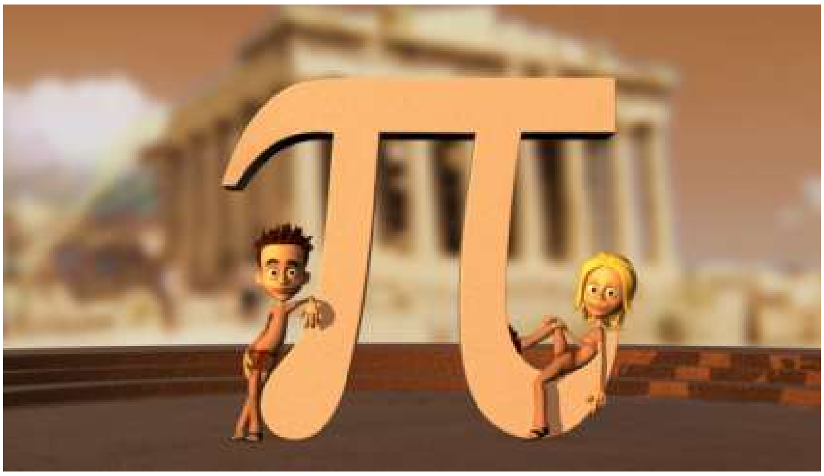
Teori

Innledning

Innledning

Innledning (22512)

Ordet **geometri** betyr «**måling av jord**». De eldste beretninger om jordmåling vi kjenner til, stammer fra det gamle Egypt for ca. 4000 år siden. Da betalte jordeierne skatt etter hvor mye jord de eide, og jordarealene måtte måles opp. Nilen gikk ofte over sine bredder, og det medførte at landarealene til mange jordeiere endret seg. Det måtte derfor stadig foretas nye oppmålinger, og de gamle egypterne fikk etter hvert masse kunnskap om geometri. De utviklet metoder for å beregne areal av kvadrater, trekanter og andre figurer.



Fra de tidligste tider har mennesker vært opptatt av former og figurer i naturen. Da egypterne, og også de gamle babylonerne, utviklet kunnskaper om jordmåling, ble interessen for geometri som fag større.

En spesiell form i naturen fasinerte spesielt. Det var sirkelen, solas og månens form. Det svært spesielle med sirkelen var at det så ut til å finnes et bestemt forhold mellom omkretsen til sirkelen og dens diameter. Det samme forholdet så ut til å finnes i alle sirkler, uansett størrelse. Unøyaktige målemetoder gjorde det vanskelig å finne dette tallet nøyaktig eller vite om det virkelig fantes et slikt tall.

Jakten på dette forholdstallet, som etter hvert har fått betegnelsen π (pi) er kanskje den enkeltsak som har opptatt flest matematikere gjennom tidene. Resultatet av denne jakten er til nå at tallet π er bestemt som et desimaltall med uendelig antall desimaler. Ingen har funnet noe system i desimalsifrene, og fortsatt er det personer som leter etter nye desimaler. Det kanskje mest imponerende er japaneren som lærte seg 420 000 desimaler utenat. Han måtte bruke 9 timer for å si dem fram. Du har altså fortsatt mulighet for å bli berømt som matematiker.

Det eldste og mest berømte læreverket i geometri heter «**Elementer**», og ble forfattet av **Euklid** ca. år 300 f. kr. Euklid var en gresk matematiker som bodde og arbeidet i Alexandria i Egypt. Euklids «Elementer» er det mest innflytelsesrike verket i matematikkens historie og trolig verdens mest kjente fagbok. Læreverket, som består av 13 bøker, ble brukt i europeiske skoler nesten helt fram til vår tid. Det er kun Bibelen som har hatt større plass i europeisk skole enn dette verket.

I Euklids «Elementer» er geometrien systematisk bygd opp. Euklid startet med å definere noen grunnleggende begreper. Han definerte hva som menes med et punkt, en linje, en vinkel, en trekant, en sirkel osv.

De fleste av disse begrepene kjenner du fra grunnskolen. Det kan likevel være nyttig å friske opp noen av dine gamle kunnskaper. Det kan også mange ganger være vanskelig å si med ord for eksempel hva en linje er selv om du inderlig godt vet hva det er. Det er derfor nyttig å prate med medelever om disse begrepene og hva de betyr.

Innledningsøvelser

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Innledningsøvelser (22916)

GeoGebra

Du kan repetere dine geometrikunnskaper, samtidig som du gjør deg kjent med geometriprogrammet GeoGebra.

Gå sammen med en annen elev. Diskuter spørsmålene nedenfor. Forsøk å formulere svar på spørsmålene. Overalt hvor det er mulig, skal dere lage en tegning i GeoGebra.

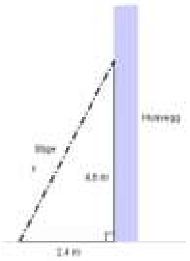

Jobb sammen to og to

- Hva menes med et punkt?
- Hva menes med en linje?
- Hva menes med et linjestykke?
- Hvordan finner vi midtpunktet på et linjestykke?
- Hva menes med en stråle?
- Hva menes med en normal til en linje eller linjestykke?
- Hva menes med en midtnormal til et linjestykke?
- Hva menes med parallelle linjer?
- Hva menes med en vinkel? Hva menes med toppunktet til en vinkel? Hva menes med høyre og venstre vinkelbein?
- Hva måles vinkler i? Mål noen vinkler.
- Hva menes med halveringslinje for vinkel?
- Hva menes med en rett vinkel? Hvor mange grader er en rett vinkel?
- Hva menes med en spiss vinkel? Hva kan du si om gradtallet til en spiss vinkel?
- Hva menes med en stump vinkel? Hva kan du si om gradtallet til en stump vinkel?
- Hva menes med en sirkel? Hva menes med radius og diameter i en sirkel? Hva er sammenhengen mellom radius og diameter i en sirkel?
- Lag flere sirkler ved «Sirkler definert med sentrum og punkt». Tegn linjestykket/radius i sirklene mellom sentrum og et punkt på sirkelen. Mål omkrets og radius til alle sirkler og regn ut forholdet mellom omkrets og diameter.
- Hva menes med sirkelbue og sirkelsektor?
- Hva menes med tangenter til en sirkel?
- Tegn en trekant. Hvor mange «høyder» har en trekant? Tegn alle høydene.
- Mål vinklene i trekanten. Hva er summen av vinklene?
- Hva er en rettvinklet trekant?
- Hva er en likebeint trekant?
- Hva er en likesidet trekant?
- Hva er vinkelsummen i en firkant?
- Hva menes med diagonaler?

Grunnleggende begreper og sammenhenger

Grunnleggende begreper og sammenhenger

[Grunnleggende begreper og sammenhenger (100715)](#)



Et av kompetansemålene i læreplanen sier at du skal kunne

- bruke geometri i planet til å analysere og løse sammensatte teoretiske og praktiske problemer med lengder, vinkler og areal

Det er da viktig at du kjenner noen grunnleggende geometriske begreper og sammenhenger.

Punkt

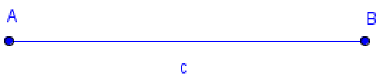
Et punkt har en bestemt posisjon, men det har ingen utstrekning. Likevel tegner vi punktet som en prikk, et kryss eller liknende, slik at det blir synlig for oss. Det er vanlig å bruke store bokstaver når vi gir navn til punkter.

Linje

En rett linje, eller bare en linje, består av uendelig mange punkter. Linjen har en uendelig utstrekning i begge retninger. Den krummer ikke. Vi sier at linjen har en uendelig utstrekning i én dimensjon. Vi tegner en linje som en tynn strek. Det er vanlig å bruke små bokstaver når vi gir navn til linjer.

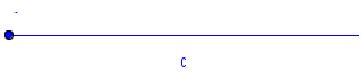
Linjestykke

Et linjestykke er en del av en linje og avgrenses av to endepunkter. Vi gir vanligvis et linjestykke navn ut fra endepunktene, men det et også vanlig å bruke små bokstaver som navn. Linjestykket til høyre avgrenses av punktene *A* og *B*.
Vi kan gi linjestykket navnet *AB*, eller for eksempel *c*.



Stråle

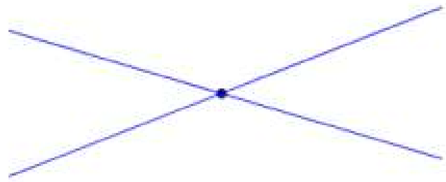
En stråle er en del av en linje og avgrenses av ett endepunkt. Strålen har uendelig utstrekning i én retning.



Skjæring mellom linjer

To linjer skjærer hverandre dersom de har ett felles punkt.

Plan

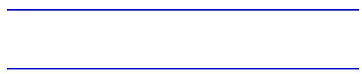


To linjer som skjærer hverandre spenner ut et plan. Et plan har uendelig utstrekning i to dimensjoner. Vi kan tenke på et ark som et utsnitt av et plan.

I **plangeometrien** studerer vi linjer og punkter i ett og samme plan.

Parallelle linjer

To linjer i et plan har enten ett eller ingen punkter felles. Dersom linjene ikke har ett felles punkt, er de parallelle.



Når to linjer a og b er parallelle, skriver vi $a||b$.

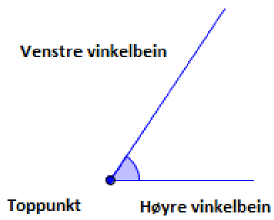
Vinkler

[Vinkler (100736)](#)

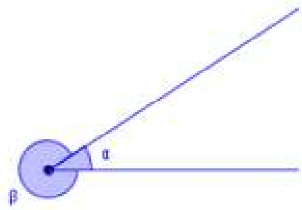
Vinkel

Når to stråler har felles endepunkt, danner de en vinkel. Det felles endepunktet kalles for vinkelens **toppunkt**. Strålene kalles for **vinkelbein**.

Sett fra toppunktet får vi høyre vinkelbein og venstre vinkelbein.



To stråler med felles endepunkt danner egentlig to vinkler. Se figuren til høyre. Når vi snakker om vinkelen mellom to stråler, mener vi vanligvis den minste vinkelen, α på figuren.



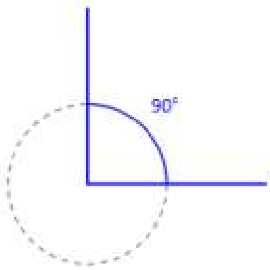
Vinkelmål

Det er vanlig å dele sirkelens omkrets i 360 deler, eller grader. Måling av vinkler bygger på denne inndelingen.

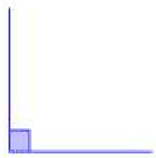
Vi tenker oss at vi plasserer en sirkel med sentrum i toppunktet til en vinkel.

En vinkel som spenner over en fjerdedel av sirkelens omkrets er da $\frac{360}{4}$ grader, $90°$. Denne vinkelen kaller vi en **rett vinkel**.

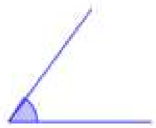
En vinkel som spenner over halvparten av sirkelens omkrets er $180°$.



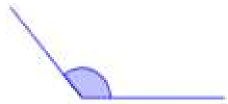
En vinkel mellom $0°$ og $90°$ kaller vi en **spiss vinkel**.
En vinkel mellom $90°$ og $180°$ kaller vi en **stump vinkel**.
To vinkler som til sammen er $90°$ kaller vi **komplementvinkler**.
To vinkler som til sammen er $180°$ kaller vi **supplementvinkler**.



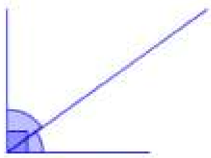
Rett vinkel



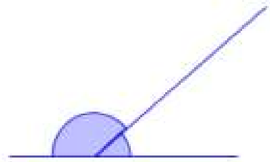
Spiss vinkel



Stump vinkel



Komplementvinkler

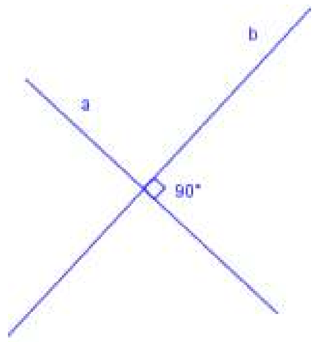


Supplementvinkler

Normaler

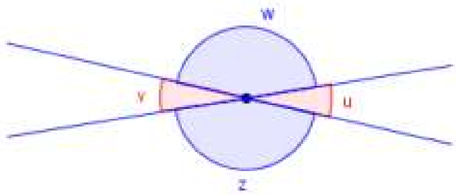
To linjer som danner ein vinkel på 90 grader med kvarandre, seier vi står **normalt** på kvarandre.

Vi skriver $a \perp b$.



Toppvinkler

Nå to linjer skjærer hverandre, er to og to av de fire vinklene som dannes alltid like store.



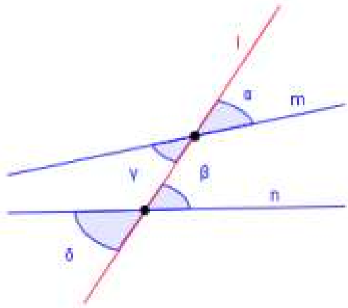
På figuren til høyre er v og w supplementvinkler. Det betyr at $v + w = 180°$ og $v = 180° - w$. Vi har også at $u + w = 180°$ som betyr at $u = 180° - w$. Det må bety at $u = v$. Samme resonnement gir at $w = z$.

Vinklene u og v kaller vi **toppvinkler**. Det samme gjør w og z. Toppvinklene er alltid like store.

Samsvarende vinkler

En linje l skjærer to andre linjer, m og n. Av de vinklene som dannes, er to vinkler med forskjellig toppunkt **samsvarende** hvis **overskjæringslinjen** utgjør enten høyre vinkelbein i begge vinklene eller venstre vinkelbein i begge vinklene.

På figuren til høyre er α (alfa) og β (beta) et par av samsvarende vinkler, og γ (gamma) og δ (delta) er et annet par av samsvarende vinkler. Overskjæringslinjen *l* er venstre vinkelbein i alle vinklene.

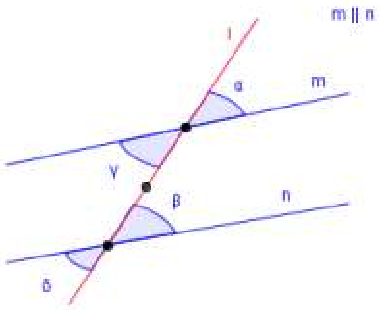


Samsvarende vinkler ved parallelle linjer

På figuren til høyre er α og β samsvarende vinkler fordi venstre vinkelbein er felles
(linjen *l*).

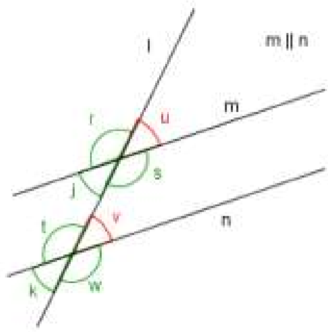
I tillegg er høyre vinkelbein, linjene *m* og *n* parallelle. Tenk deg at du roterer figuren 180° om midtpunktet mellom de to skjæringspunktene.

Ser du at α = β?



Når to *parallelle linjer* skjæres av en tredje linje, er **de samsvarende vinklene** like store.
Og motsatt, dersom samsvarende vinkler er like store, er de overskårne linjene parallelle.

Utfordring!

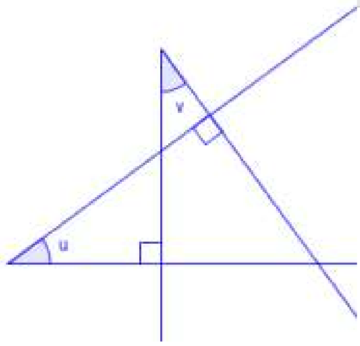


Når vinkelbein står parvis normalt på hverandre

At summen av vinklene i en trekant alltid er lik 180° (som vi viser senere i menyen) kombinert med setningen som sier at toppvinkler er like store, gir følgende nyttige setning

Når vinkelbeina til to vinkler, *u* og *v*, står parvis normalt på hverandre, er *u* = *v*.

Bruk figuren til å forklare hvorfor dette er riktig.



Måleenheter for lengde

[Måleenheter for lengde (120871)]

Fra gammelt av har det vært mange måleenheter for lengde. Noen av de gamle måleenhetene er ennå i bruk. Det er fortsatt vanlig å måle størrelsen på båter i **fot**, og størrelsen på fjernsynsskjermer måles i **tommer** (langs diagonalen av skjermen).

I flesteparten av verdens land brukes i dag det metriske målesystemet. I dette systemet er grunnenheten **meter**, **m**. Tidligere var én meter definert som lengden av en bestemt stav som ble oppbevart i Paris. Nå er én meter definert som avstanden lyset beveger seg i vakuum i løpet av en bestemt brøkdel av et sekund.

Hvis vi deler 1 meter i 10 deler, får vi 1 **desimeter**, **dm**. Når vi deler meteren i 100 deler, får vi 1 **centimeter**, **cm**. En tusendels meter kalles for 1 **millimeter**, **mm**. For veldig små størrelser har vi også milliondelsmeter, **mikrometer**, **µm** og milliarddelsmeter, **nanometer**, **nm.**

For store størrelser har vi **kilometer**, **km** og for avstander i verdensrommet bruker vi måleenheter som **lysår**, som er avstanden lyset tilbakelegger i løpet av ett år.

En oversikt over vanlig brukte måleenheter for lengde

kilometer	km	tusen meter	1 000 m
mil		10 kilometer	10 000 m
meter	m		1 m
desimeter	dm	tidels meter	0,1 m
centimeter	cm	hundredels meter	0,01 m
millimeter	mm	tusendels meter	0,001 m
mikrometer	µm	milliondels meter	0,000 001 m
nanometer	nm	milliarddels meter	0,000 000 001 m

Mangekanter og sirkler

Mangekanter og sirkler

[Mangekanter og sirkler (100753)](#)

Et **enkelt polygon** er en figur vi får i planet når vi trekker linjestykker mellom punkter i planet på en slik måte at linjestykkene

- danner én lukket kurve

- ikke skjærer hverandre

Hvis linjestykkene skjærer hverandre, er polygonet ikke **enkelt**. Det er likevel vanlig å sløyfe betegnelsen **enkelt**, slik at når vi snakker om et **polygon**, eller en **mangekant**, så mener vi et enkelt **polygon**.

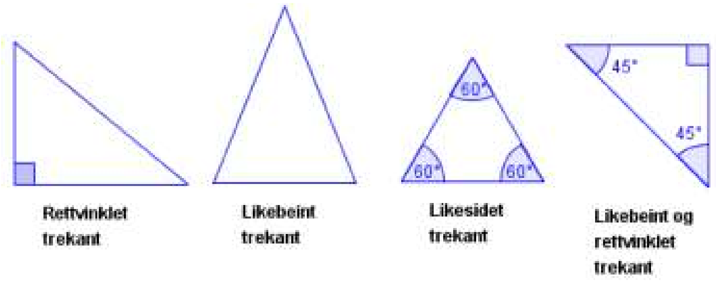
Navnet polygon, eller mangekant, brukes både om det avgrensede, lukkede området i planet som linjestykkene danner, og også bare om selve linjestykkene.

Linjestykkene kalles for **sider** eller **kanter**. En trekant har tre kanter. Det er alltid like mange hjørner som kanter, derfor kalles også en trekant for et triangel, tre hjørner. Videre har vi **firkant, femkant (pentagon), sekskant (heksagon)** osv.

Trekanter

[Trekanter (100756)](#)

Den enkleste mangekanten er trekanten. Nedenfor ser du noen spesielle trekanter.



En **rettvinklet trekant** har én vinkel på 90°.

En **likebeint trekant** har minst to sider som er like lange.

En **likesidet trekant** er **regulær**. Alle sidene er like lange og alle vinklene er like store, 60°. Legg merke til at en likesidet trekant også er likebeint.

En **likebeint** og **rettvinklet** trekant har to vinkler på 45°.

Firkanter

[Firkanter (100768)](#)

Nedenfor ser du noen firkanter som vi ofte støter på.

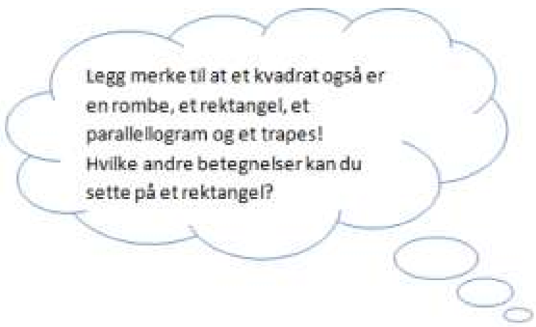
I et **trapes** er minst to sider parallelle.

I et **parallellogram** er motstående sider parallelle.

I et **rektangel** er alle fire vinklene rette.

I en **rombe** er alle sidene like lange.

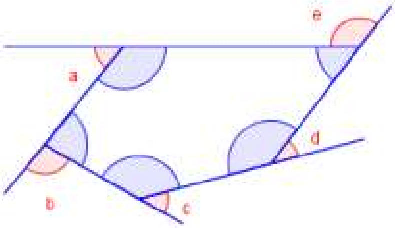
E t **kvadrat** er en regulær firkant.
Alle vinklene er rette, og alle sidene er like lange.



Vinkelsummen i en n - kant

Vinkelsummen i en n - kant (100773)

Tenk deg at du spaserer én runde langs linjestykkene på yttersiden av en femkant. Når du går fra ett linjestykke til et annet, endrer du retning slik som vinklene *a*, *b*, *c*, *d* og *e* på figuren til høyre viser. Til sammen endrer du retning 360°. Det vil si at



$$a + b + c + d + e = 360^{\circ}$$

Da kan vi regne ut summen av vinklene i 5-kanten

$$\begin{aligned}\textbf{Vinkelsummen} &= (180^{\circ} - a) + (180^{\circ} - b) + (180^{\circ} - c) + (180^{\circ} - d) + (180^{\circ} \\ &= 5 \cdot 180^{\circ} - (a + b + c + d + e) \\ &= 5 \cdot 180^{\circ} - (360^{\circ}) \\ &= 3 \cdot 180^{\circ} + 2 \cdot 180^{\circ} - 360^{\circ} \\ &= 3 \cdot 180^{\circ} \\ &= (5 - 2) \cdot 180^{\circ}\end{aligned}$$

Vi kan gjøre tilsvarende resonnement for alle mangekanter.

Vinkelsummen i en *n* - kant

Vinkelsummen i en *n* - kant er $(n - 2) \cdot 180^{\circ}$

Vinkelsummen i en *3* - kant er $(3 - 2) \cdot 180^{\circ} = 180^{\circ}$

Vinkelsummen i en *4* - kant er $(4 - 2) \cdot 180^{\circ} = 2 \cdot 180^{\circ} = 360^{\circ}$

Sirkler

[Sirkler (100786)](#)

En sirkel består av samlingen av alle punkter som ligger i en bestemt avstand fra et gitt punkt, sirkelens sentrum.

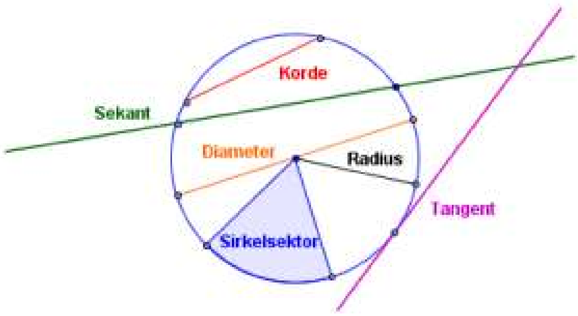
Sirkelen danner, på samme måte som en mangekant, en lukket kurve som deler planet i to deler, et indre område og et ytre område. Noen ganger mener vi hele det indre sirkelområdet når vi omtaler sirkelen. Vi sier for eksempel arealet til en sirkel og mener arealet til det indre sirkelområdet.

En **radius** er et linjestykke fra sentrum til et punkt på sirkelen.

En **sektor** er del av sirkelområdet begrenset av to radier.

En **korde** er et linjestykke mellom to punkter på sirkelen.

En **diameter** er en korde som går gjennom sirkelens sentrum.

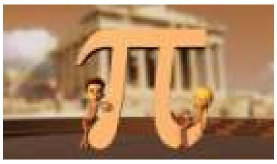


En **sekant** er en linje som skjærer sirkelen i to punkter.

En **tangent** er en linje som skjærer sirkelen i ett punkt.

Tallet π

Tallet π (100788)



Den internationale pi-dagen feires 14. mars.

Sirkelen med sin perfekte form, solas og månens form, har fascinert matematikere, astronomer og filosofer i årtusener.

Det finnes et bestemt forhold mellom omkretsen og diameteren til en sirkel. Oppdagelsen av, og jakten på dette forholdstallet, som har fått betegnelsen π, er kanskje den enkeltsak som har opptatt flest matematikere gjennom tidene.

Til vanlig avrunder vi tallet til 3,14. Men jakten på antall desimaler i tallet π pågår for fullt. Ifølge «Illustrert Vitenskap» for mars 2012 har Shigeru Kondo og Alexander Yee nå klart, etter ett års regning, å bestemme ti billioner desimaler.

En japaner lærte seg 420 000 desimaler utenat. Han måtte bruke ni timer for å si dem fram.

Omkretsen til en sirkel er lik diameteren multiplisert med tallet π.

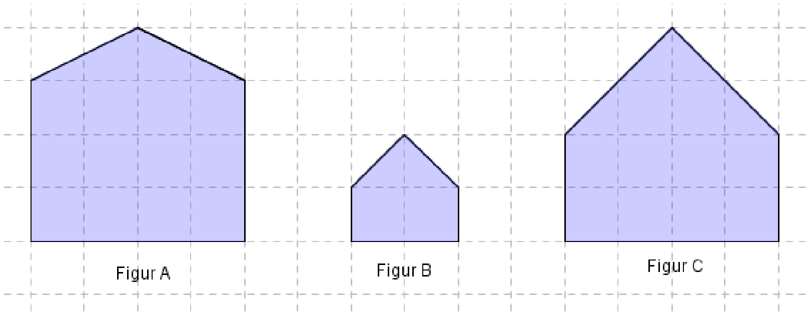
$$O = \pi \cdot d$$

Formlikhet

Formlikhet

[Formlikhet (100791)]

Studer figurene A, B og C. Beskriv forskjeller og likheter mellom figurene.



Som du sikkert har funnet ut, er det en likhet mellom figur B og figur C. Disse figurene har samme **form**. Forskjellen er at figur C er en forstørret utgave av figur B. Figur A har en annen form.

To figurer er **formlike** når vi ved å forstørre eller forminske den ene figuren kan få en figur som er lik den andre.

Formlike trekanter

Formlike trekanter (22943)

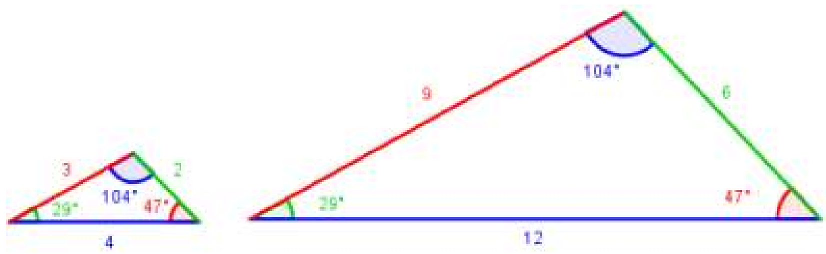
Figuren nedenfor viser to formlike trekanter. Som du ser, er to og to vinkler like store.

> Dersom to trekanter har parvis like store vinkler, er trekantene formlike.

Den store trekanten er et forstørret bilde av den lille trekanten og den lille trekanten er et forminsket bilde av den store trekanten.

Hvis vi kan vise at vinklene i to trekanter er parvis like store, har vi vist at trekantene er formlike.

Det er nok å vite at to par av vinkler i to trekanter er like store. På grunn av setningen om at summen av vinklene i en trekant alltid er lik 180 grader, må nemlig også det tredje paret av vinkler være like store.



To sider som ligger «motsatt» av to vinkler som er like store, ligger på «tilsvarende» plasser i de to trekantene, og vi kaller dem for **tilsvarende sider**.

De blå sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de blå vinklene som er like store.
De røde sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de røde vinklene som er like store.
De grønne sidene er tilsvarende fordi de ligger «motsatt» de grønne vinklene som er like store.

Vi regner ut forholdet mellom lengdene av tilsvarende sider

$$\frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{9}{3} = 3 \qquad \frac{6}{2} = 3$$

Vi ser at forholdet er konstant lik 3. Vi kaller dette tallet for **målestokken**.

Sidene i den største trekanten er altså tre ganger så lange som sidene i den minste trekanten.

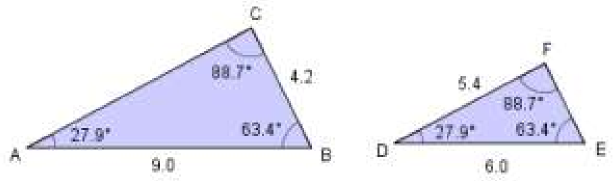
(Legg merke til at hvis vi ser på den lille trekanten som et bilde av den store trekanten, så er målestokken lik $\frac{1}{3}$.)

Bruk av formlikhet for å regne ut ukjente sider

[Bruk av formlikhet for å regne ut ukjente sider i trekanter (22961)]

Eksempel 1

Trekantene ΔABC og ΔDEF er formlike. Regn ut lengdene til de ukjente sidene.



Her ser vi at sidene *AB* og *DE* er tilsvarende sider fordi begge er motstående sider til vinklene på 88,7°. Sidene *AF* og *DF* ligger begge motsatt av vinklene som er 63,4° og er også tilsvarende. Det samme er sidene *BC* og *EF*.

Vi kan finne de ukjente sidene ved å bruke målestokken.

Vi regner ut målestokken når vi går fra ΔDEF til ΔABC. Målestokken = $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{9}{6} = 1,5$

Det betyr at $\mathbf{AC} = \mathbf{DF} \cdot 1,5 = 5,4 \cdot 1,5 = 8,1$.

Når vi går motsatt vei, må vi dele med målestokken.

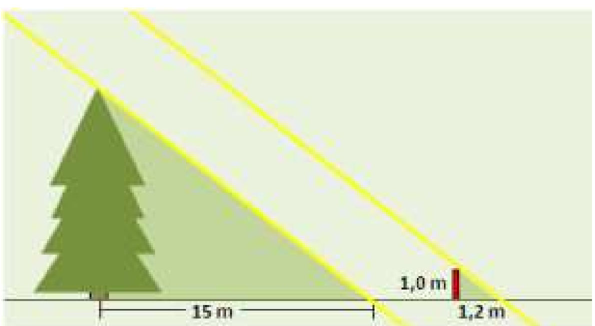
Det betyr at $\mathbf{EF} = \frac{\mathbf{BC}}{1,5} = \frac{4,2}{1,5} = 2,8$

Eksempel 2

Et tre står på en horisontal slette. Vi skal finne ut hvor høyt treet er uten å felle det.

Utstyr: Sol og metermål

Vi setter en pinne ned i bakken litt bortenfor treet og måler avstanden skyggen kaster ved pinnen og ved treet. Se figuren nedenfor.



Både pinnen og treet danner en vinkel på 90° med bakken, og solstrålene danner samme vinkel med bakken der hvor pinnen står som der hvor treet står. Vi får derfor to formlike trekanter, og det fremgår av figuren hvilke sider som er tilsvarende.

Vi regner ut målestokken når vi går fra den minste trekanten til den største trekanten

$$\begin{aligned} &\textbf{Målestokken} \ = \ \frac{15\ m}{1,2\ m} = 12,5 \\ &\textbf{Høyden til treet} = \ 1,0\,m \cdot 12,5\,m = \ 12,5\,m \end{aligned}$$

Legg merke til at vi også kan finne den ukjente siden ved å bruke likning.

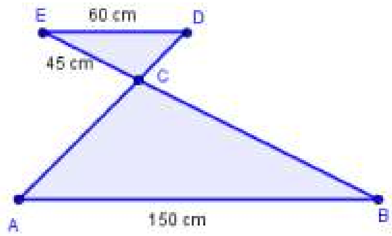
Vi setter høyden av treet lik *x*, og siden forholdet mellom tilsvarende sider er konstant, kan vi sette opp og løse likningen

$$\frac{x}{1{,}0} = \frac{15}{1{,}2}$$
$$x = 12,5 \cdot 1,0$$
$$x = 12,5$$

Treet er 12,5 meter høyt.

Eksempel 3

På figuren er *AB* og *DE* parallelle. Linjestykkene *AE* og *BD* skjærer hverandre i *C*.



Oppgave

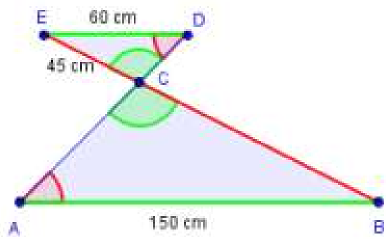
Vis at Δ *ACB og* Δ *EDC* er formlike, og bruk dette til å regne ut lengden til siden *BC*.

Løsning

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{DCE}$ siden disse er toppvinkler. Da er sidene *AB* og *ED* tilsvarende sider.

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CDE}$ fordi venstre vinkelbein er felles og høyre vinkelbein er parallelle i de to vinklene. (Samsvarende vinkler ved parallelle vinkelbein).

Sidene *BC* og *EC* er da tilsvarende sider fordi de er motstående sider til like store vinkler.



Vinklene i de to trekantene er parvis like store, og trekantene er formlike.
Vi regner ut målestokken når vi går fra den minste trekanten til den største

$$\text{Målestokken} = \frac{150\ \text{cm}}{60\ \text{cm}} = 2,5$$

Da er $\mathrm{BC} = 45\ \mathrm{cm} \cdot 2,5 = 113\ \mathrm{cm}$

Også her kan vi sette opp og løse en likning siden forholdet mellom tilsvarende sider er konstant. Det er lurt å alltid begynne med den ukjente siden

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}}$$
$$\frac{\mathrm{BC}}{45\ \mathrm{cm}} = \frac{150\ \mathrm{cm}}{60\ \mathrm{cm}}$$
$$\frac{\mathrm{BC} \cdot \cancel{45\ \mathrm{cm}}}{\cancel{45\ \mathrm{cm}}} = \frac{150\ \mathrm{cm} \cdot 45\ \mathrm{cm}}{60\ \mathrm{cm}}$$
$$\mathrm{BC} = 113\ \mathrm{cm}$$

Kart og arbeidstegninger

[Kart og arbeidstegninger (120944)]

Kart

Et kart er en forminsket, formlik avbildning av virkeligheten. Vi kan beregne avstander, i luftlinje, i terrenget på grunnlag av avstander på kartet.

Kartet til høyre viser et parti fra Jotunheimen.

Kartet har målestokk 1:50 000.

Det betyr at 1 cm på kartet svarer til

$$\begin{aligned} 1\text{ cm} \cdot 50\,000 &= 50\,000\text{ cm} \\ &= 500\,m \\ &= 0{,}5\text{ km} \end{aligned}$$

i virkeligheten.

En avstand på 12 cm på kartet svarer da til
$12 \cdot 500\,m = 6\,000\,m = 6\text{ km}$ i virkeligheten.

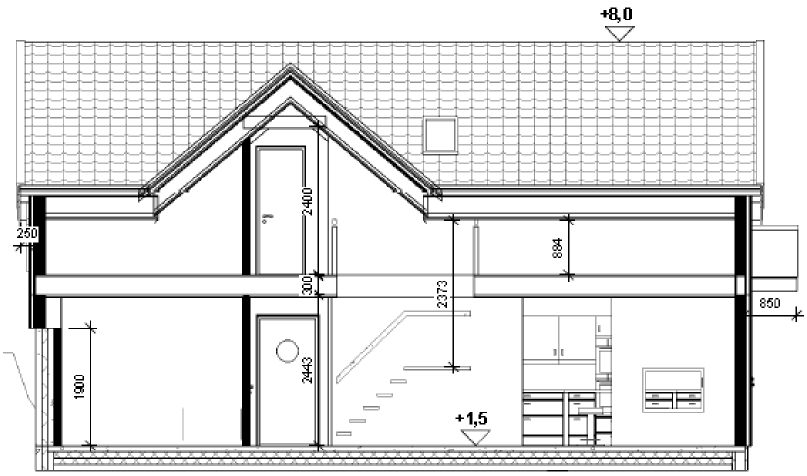
Motsatt vil 15 km i luftlinje i terrenget svare til

$\frac{15\text{ km}}{50\,000} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}0\ \cancel{0\,000}\text{ cm}}{\cancel{5}\ \cancel{0\,000}} = 30\text{ cm}$ på kartet.

Arbeidstegninger

En arbeidstegning er en formlik avbildning av for eksempel et hus.

Arbeidstegningen har en målestokk. Ved hjelp av de mål som er oppgitt på tegningen og målestokken, kan snekkeren beregne virkelige mål.



Snitt B
1 : 100

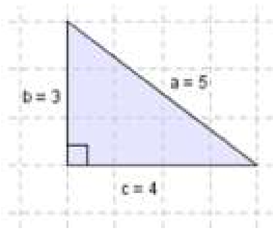
Pytagoras´ setning

Pytagoras´ setning

[Pytagoras' setning (23005)]

Pytagoras ' setning handler om rettvinklede trekanter. I slike trekanter er det en spesiell sammenheng mellom lengdene til sidene. Denne sammenhengen var kjent i de tidligste sivilisasjoner, men det er fra matematikeren Pytagoras, som levde i Hellas ca 500 år f. Kr., vi har navnet på setningen.

Tegn en trekant som er rettvinklet og hvor de korteste sidene er 3 og 4 enheter lange. Figuren viser en slik trekant som er tegnet i GeoGebra. Mål den lengste siden. Blir denne 5 enheter lang?



Ta nå alle tre sidelengdene og multipliser dem med seg selv. Du får da kvadratet av sidelengdene.

$\text{Kvadratet av sidelengden } a \text{ er } a^2 = 5^2 = 25$
$\text{Kvadratet av sidelengden } b \text{ er } b^2 = 3^2 = 9$
$\text{Kvadratet av sidelengden } c \text{ er } c^2 = 4^2 = 16$

Sammenlign summen av kvadratene til de to korteste sidene med kvadratet til den lengste siden. Hva ser du?

Vi ser at 25 = 9 + 16. Det er det samme som $a^2 = b^2 + c^2$.

Det viser seg at denne sammenhengen gjelder for alle trekanter som har en vinkel på 90°.

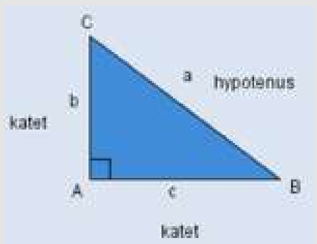
For å kunne formulere denne sammenhengen med ord, gir vi navn på sidene i rettvinklede trekanter.

Den lengste siden i en rettvinklet trekant kaller vi **hypotenus**. De to korteste sidene kaller vi **kateter**.

Pytagoras' setning:

$$\text{hypotenus}^2 = \text{katet}^2 + \text{katet}^2$$

$a^2 = b^2 + c^2$



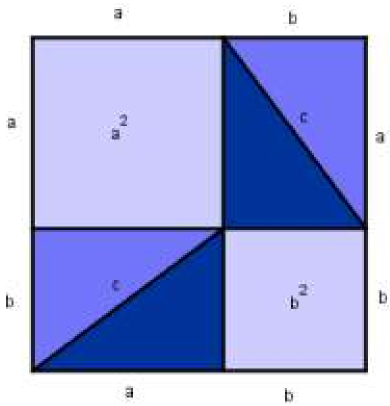
Legg merke til navnsettingen. Vi bruker store bokstaver som navn på punkter eller hjørner i trekanten. Små bokstaver brukes som navn og måltall for sidelengdene. Det er vanlig at vi har samme bokstav på hjørne og side som står motsatt hverandre.

Geometrisk bevis for Pytagoras' setning

Lag et kvadrat med sidelengder $a + b$. Se figuren til høyre. Du kan for eksempel klippe ut av et stivt papir, eller du kan tegne i GeoGebra.

Del sidelengdene i to deler a og b, trekk linjer(klipp ut) som vist på figuren og få på denne måten 4 like rettvinklede trekanter. Hypotenusen i trekantene kaller du c.

Det lyseblå arealet er et kvadrat (hvorfor?) med sidelengde c og areal c^2.



Flytt på trekantene inne i det store kvadratet som vist på neste figur. (I GeoGebra lager du en ny tegning. Bruk rutenett.)

Arealet av de to store kvadratene er like store da sidelengdene er lik $a + b$.

Samlet areal til de 4 rettvinklede trekantene er like store i begge figurene.

Det må bety at det lyseblå arealet i de to figurene er like stort, altså at $a^2 + b^2 = c^2$. Dette er nettopp Pytagoras' setning for våre rettvinklede trekanter.

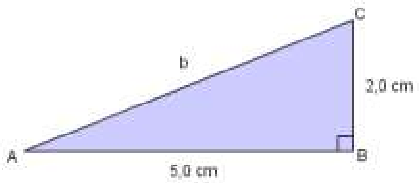
Å finne en ukjent side i en rettvinklet trekant

Å finne en ukjent side i en rettvinklet trekant (23007)

Pytagoras' setning kan brukes for å finne en ukjent side i en rettvinklet trekant når to av sidene er kjent.

Eksempel 1

Hvor lang er siden *b* på figuren?



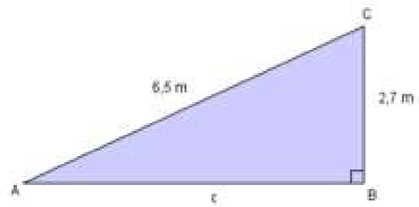
Pytagoras' setning gir:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= 2,0^2 + 5,0^2 \\
b^2 &= 4,0 + 25,0 \\
b^2 &= 29,0 \\
b &= \sqrt{29,0} \\
b &\approx 5,4
\end{aligned}
$$

Siden *b* er 5,4 cm.

Eksempel 2

Hvor lang er siden *AB* på figuren?



Pytagoras' setning gir

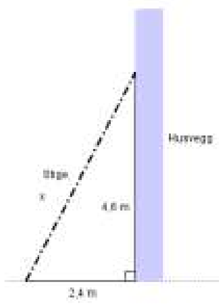
$$
\begin{aligned}
2,7^2 + c^2 &= 6,5^2 \\
c^2 &= 6,5^2 - 2,7^2 \\
c &= \sqrt{6,5^2 - 2,7^2} \\
c &\approx 5,9
\end{aligned}
$$

Siden *AB* er 5,9 m

Eksempel 3

En stige skal plasseres 2,4 meter fra en husvegg slik at den akkurat når opp til vinduskarmen i et vindu i andre etasje. Vinduskarmen er 4,6 meter over bakken.

Hvor lang må stigen være?



La stigen være *x* meter lang. Pytagoras' setning gir

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 4,6^2 + 2,4^2 \\
x^2 &= 21,16 + 5,76 \\
x^2 &= 26,92 \\
x &= \sqrt{26,92} \\
x &\approx 5,2
\end{aligned}
$$

Stigen må være 5,2 meter lang.

Prøv noen interaktive øvelser

Pytagoras simulering 1

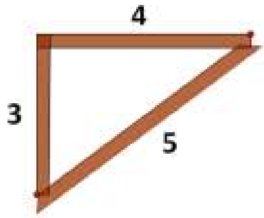
Pytagoras simulering 2

Hvordan lage rette vinkler

Noen ganger bruker vi Pytagoras' setning for å lage vinkler som er 90 grader.

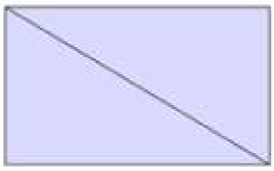
Snekker Pettersen skulle bygge en garasje. Det var svært viktig at alle hjørnene ble rette vinkler.

Vinkelmåleren han brukte til vanlig ble litt for liten slik at den ga unøyaktig vinkel. Han saget da til to bordlengder, den ene på 3 m, og den andre på 4 m. Han festet bordlengdene i endene som vist på tegningen og la dem slik at avstanden mellom de røde punktene ble 5 m. Han brukte til slutt en tredje bordlengde og spikret det sammen.



Pettersen brukte Pytagoras' setning for å lage seg en rett vinkel.

Hvordan kontrollere at vinkler er rette?



Mål lengde, bredde og diagonal til pulten eller bordplata du jobber ved.
Kvadrer alle lengdene. Sjekk om summen av kvadratene til lengde og bredde er lik kvadratet til hypotenusen. Hvis ikke, så er bordplata skeiv.

Areal

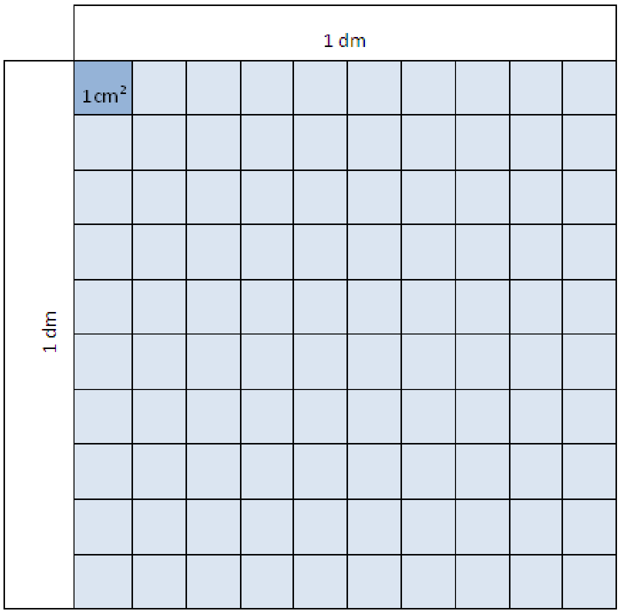
Definisjon og måleenheter for areal

[Definisjon og måleenheter for areal (23032)]

Vi definerer én kvadratdesimeter, 1 dm^2, som arealet, eller flateinnholdet, til et kvadrat med sidelengder på
1 dm.

Et kvadrat med sider 1 cm har et areal på én kvadratcentimeter,
1 cm^2 .

Tilsvarende definerer vi arealer på 1 m^2, 1 mm^2 osv.



Figuren viser at 1 dm^2 tilsvarer
100 cm^2. Det betyr igjen at
$1\ \mathrm{cm}^2 = \frac{1}{100}\mathrm{dm}^2 = 0,01\ \mathrm{dm}^2$.

Vi husker sammenhengen mellom måleenheter for lengde

$$1\ m = 10\ \mathrm{dm} \quad 1\ \mathrm{dm} = 10\ \mathrm{cm} \quad 1\ \mathrm{cm} = 10\ \ \mathrm{mm}$$

Når vi setter opp måleenhetene etter hverandre som i tabellen nedenfor, kan vi ha som huskeregel at vi må gange med 10 når vi går én plass til høyre i tabellen (flytte komma én plass til høyre), og dele med 10 når vi går én plass til venstre (flytte komma én plass til venstre).

m	dm	cm	mm
2	3	0	0
4	5	0	0

Eksempel

2,3 m = 23 dm = 2300 mm
450 cm = 4,50 m

Når vi setter opp måleenhetene for areal etter hverandre som i tabellen nedenfor, kan vi ha som huskeregel at vi må gange med 100 når vi går én plass til høyre i tabellen (flytte komma to plasser til høyre), og dele med 100 når vi går én plass til venstre (flytte komma to plasser til venstre).

m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
0	0	0	2	3	0	0	0
0	0	0	4	5	0	0	0

Eksempel

2,3 dm^2 = 230 cm^2 = 23 000 mm^2

450 cm^2 =0,0450 m^2

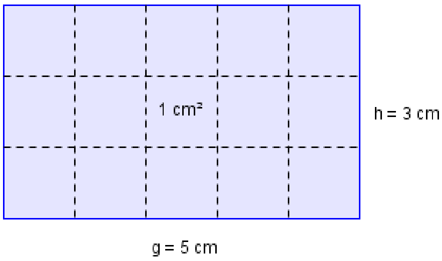
For større arealer har vi også noen andre måleenheter

$$
\begin{aligned}
&1\ a = 100\ m^2\ (\text{ar}) \\
&1\ \text{da} = 10\ a = 1\ 000\ m^2\ (\text{dekar}) \\
&1\ \text{ha} = 100\ a = 10\ 000 m^2\ (\text{hektar}) \\
&1\ \text{km}^2 = 1\ 000\ \text{da} = 1\ 000\ 000\ m^2\ (\text{kvadratkilometer})
\end{aligned}
$$

Arealformler

[Arealformler (23042)](#)

I et rektangel som er 5 cm langt og 3 cm høyt kan vi få plass til $3 \cdot 5 = 15$ kvadrater som hver har et areal på 1 cm^2. Det betyr at arealet er på 15 cm^2.



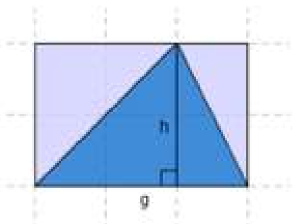
Vi kan altså finne arealet til et rektangel ved å multiplisere grunnlinjen med høyden, eller det vi ofte kaller lengden med bredden.

Vi får en formel for arealet til et rektangel

$$A = g \cdot h$$

Vi kan også lage formler for arealet av andre figurer.

På figuren til høyre kan du sammenligne arealet til rektangelet med grunnlinje g og høyde h med arealet til trekanten med grunnlinje g og høyde h.



Du vil sannsynligvis bli overbevist om at arealet til rektangelet er dobbelt så stort som arealet til trekanten.

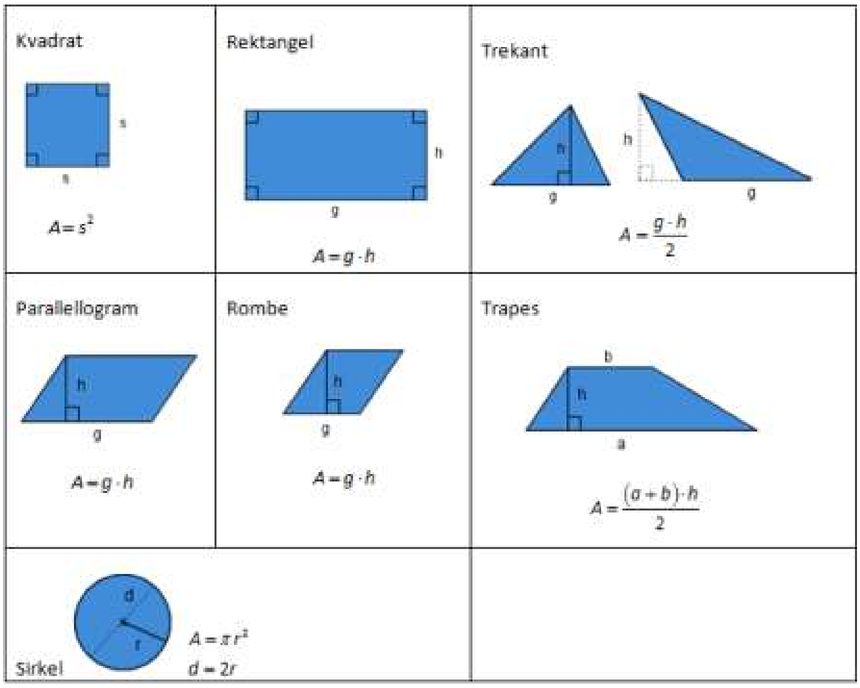
Siden arealet til rektangelet kan finnes ved å multiplisere grunnlinjen med høyden, A(rektangel) = $g \cdot h$, så er arealet til trekanten

$$A\left(\mathbf{trekant}\right) = \frac{g \cdot h}{2}.$$

Hva med parallellogram, rombe og trapes?

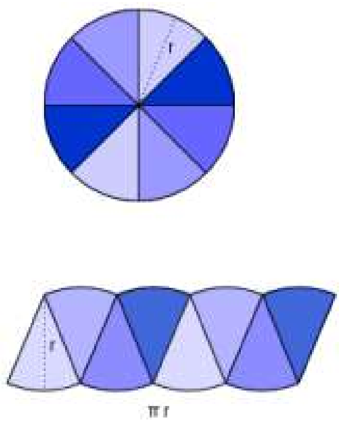
Du kan nå ta for deg et parallellogram, en rombe og et trapes, og se om du kan lage arealformler for disse figurene på samme måte som for trekanter. Du kan sammenligne dine formler med formlene i skjemaet nedenfor.

Arealformler



Arealformel for sirkel

Det er ikke så lett å gjøre en sirkel om til et rektangel og på den måten finne formelen for arealet. Vi får likevel en brukbar tilnærming ved metoden vist i figuren.

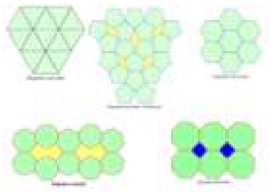


Vi deler sirkelen inn i like sektorer. Så stiller vi sektorene annenhver opp og ned, slik at sektorene tilnærmet blir et parallellogram med grunnlinje tilnærmet lik $\frac{2\pi\mathbf{r}}{2} = \pi\mathbf{r}$ og høyde lik *r*. Arealet blir da tilnærmet $A = \pi\mathbf{r} \cdot r = \pi\mathbf{r}^2$.

Jo flere sektorer vi inndeler sirkelen i, jo bedre blir tilnærmingen. Hvis vi deler sirkelen i veldig mange sektorer, får vi tilnærmet et rektangel.

Omkrets av plane figurer

Omkrets av plane figurer (120980)



Omkretsen til mangekanter finner vi ved å summere lengdene til sidekantene som avgrenser mangekanten. Hvis ikke alle lengdene er kjent, kan vi for eksempel bruke Pytagoras´ setning eller formlikhet for å finne de ukjente sidene.

Hvis en plan figur også inneholder en sirkel eller deler av en sirkel, så brukes formelen for omkretsen til en sirkel.

$O = \pi \cdot d$

Tilnærmingsverdier

Tilnærmingsverdier (120986)

$\approx$

Bør vi ta med alle sifre i et svar, eller bør vi avrunde?

Eksempel

Regn ut arealet til et rektangel med grunnlinje 3,4 m og høyde 1,7 m.

Løsning
Vi bruker arealformelen og får $A = 3,4\ m \cdot 1,7\ m = 5,78\ m^2$.

Bør vi ta med alle sifrene i svaret her, eller bør vi avrunde?

Du husker fra måling av lengde at alle målte lengder er usikre. Usikkerheten ligger i siste siffer. Det betyr at når grunnlinjen er målt til 3,4 m, så vet vi bare at lengden ligger mellom 3,35 m og 3,45 m. Høyden ligger tilsvarende mellom 1,65 m og 1,75 m.

Den største verdien arealet kan ha er $A_{\text{max}} = 3,45 \cdot 1,75\ m^2 = 6,0375\ m^2$

Den minste verdien arealet kan ha er $A_{\text{min}} = 3,35 \cdot 1,65\ m^2 = 5,275\ m^2$

Det mest riktige blir å avrunde til 2 siffer.

$$A = 3,4\ m \cdot 1,7\ m = 5,78\ m^2 = 5,8\ m^2$$

Det blir for tungvint å regne på usikkerhet i alle oppgaver. Derfor innfører vi **regelen om antall gjeldende sifre.**

> Når vi bruker målte verdier i beregninger, tar vi med så mange siffer i svaret som antall siffer i den målte verdien som er gitt med færrest siffer.

Trigonometri 1

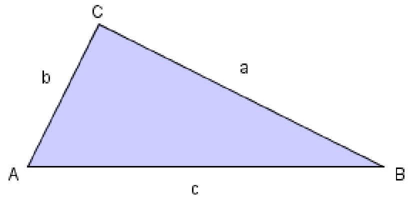
Navn på hjørner og sider i trekanter

[Navn på hjørner og sider i trekanter (23064)]

Det er lurt å ha et system når vi setter navn på hjørner og sider i trekanter. Hjørnene betegner vi med store bokstaver og sidene med små bokstaver. *A* kan også hentyde til vinkelen *A* eller $\angle A$.

I stedet for trekant *ABC* skriver vi ofte Δ*ABC*.

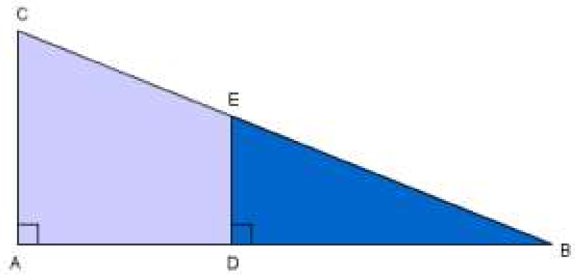
I Δ*ABC* kaller vi siden *BC* for *a*, siden *AC* for *b* og siden *AB* for *c*.



Ser du systemet?
Siden *a* er den motstående siden til hjørnet *A*, siden *b* er den motstående siden til hjørnet *B*, og siden *c* er den motstående siden til hjørnet *C*.

Tangens

Tangens (23080)



Gitt Δ*ABC* og Δ*DBE* som vist på figuren ovenfor. Trekantene er formlike fordi $\angle B$ er felles i begge trekantene og $\angle A = \angle D = 90^o$. Vi har derfor at $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DB}}$.

Vi multipliserer med *DE* og dividerer med *AB* på begge sider av likhetstegnet.

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DB}}$$
$$\frac{\mathrm{AC}\cdot\ \mathrm{DE}}{\mathrm{DE}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}\cdot\mathrm{AB}}$$
$$\frac{\mathrm{AC}\cdot\ \cancel{\mathrm{DE}}}{\cancel{\mathrm{DE}}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{\cancel{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}\cdot\ \cancel{\mathrm{AB}}}$$
$$\mathrm{Stor\ \ trekant} \rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DB}} \leftarrow \mathrm{Liten\ \ trekant}$$

Forholdet mellom motstående katet til $\angle B$ og hosliggende katet til $\angle B$ er det samme uansett hvilken trekant vi bruker.

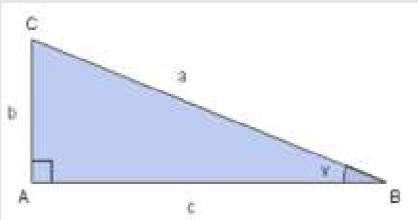
Vi kan lage flere trekanter ved å tegne inn parallelle linjer til *AC* og *DE*. På grunn av formlikhet vil da alltid forholdet mellom motstående katet og hosliggende katet være det samme. Dette forholdet er altså konstant.

Dette konstante forholdet identifiserer vinkel *B* entydig, og derfor gir vi dette forholdstallet et navn. Vi kaller det**tangensverdien** til $\angle B$.

Tangens

I en rettvinklet trekant med en spiss

vinkel *v* er



$$\tan\ v = \frac{\mathrm{motstående\ \ katet}}{\mathrm{hosliggende\ \ \ katet}} = \frac{b}{c}$$

Hvordan finne sammenhengen mellom tangensverdien og gradetallet til en vinkel?

- Bruk papir, blyant og gradskive, eller bruk GeoGebra, og tegn en vinkel *v* = 15°
- Opprett en normal på det høyre vinkelbeinet til *v* slik at *v* svarer til $\angle A$ i den rettvinklede trekanten *ABC*
- Mål og regn ut forholdet $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$
- Lag gjerne flere trekanter hvor du varierer plasseringen av punktet *B*

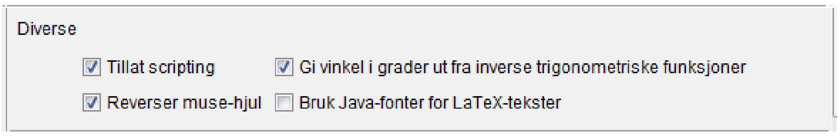
Får du at dette forholdet er 0,27? Du har i så fall funnet at tan 15° ≈ 0,27.

Hvis du ønsker det, kan du finne tangensverdiene til alle vinkler på denne måten. Men du trenger ikke gjøre det, for andre har gjort det før deg. Sammenhengen mellom en vinkel målt i grader og en vinkel målt med vinkelens tangensverdi, finner du ved hjelp av et digitalt verktøy.

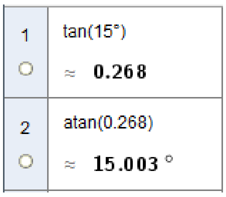
I GeoGebra finner du tangens til 15 grader ved å skrive tan(15°). Du må bruke parenteser og gradetegn.

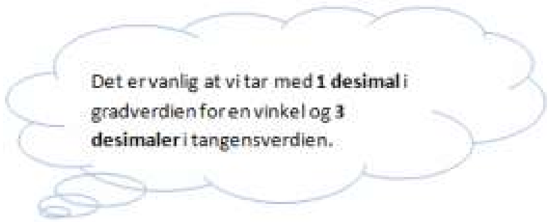
For å gå motsatt vei og finne vinkelen når du kjenner tangensverdien, må du først gi GeoGebra beskjed om at du vil ha vinkelen i grader.

Velg «Innstillinger» og «Avansert». Under «Diverse» huker du av for «Gi vinkel i grader ut fra inverse trigonometriske funksjoner».



Så kan du skrive atan(o.268)



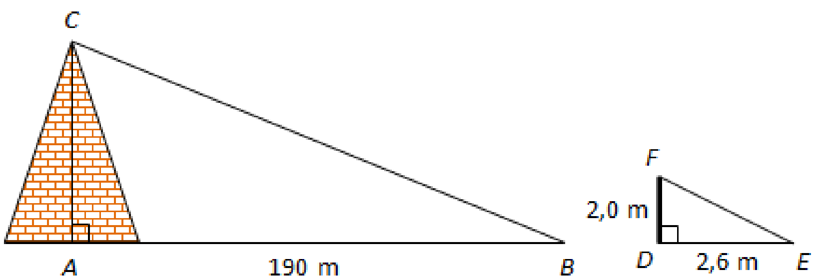


Hva kan vi så bruke tangens til? Vi skal gi noen eksempler.

Prøv denne simuleringen Trigonometri i trappen

Eksempel 1

Thales fra Milet (600 f. Kr) fant høyden til Keopspyramiden ved å bruke «skyggematematikk» (formlike trekanter).



På figuren ovenfor er pyramiden tegnet som en trekant. *AB* er skyggen av pyramiden. *D E* er skyggen av den 2 meter høye stokken *DF*. *BC* og *EF* er parallelle siden solstrålene er parallelle.

Thales fant høyden slik

$$\frac{\mathrm{AC}}{2{,}0} = \frac{190}{2{,}6}$$
$$\mathrm{AC} = 73{,}08 \cdot 2{,}0$$
$$\mathrm{AC} \approx 146$$

Pyramiden er ca. 146 meter høy.

Gizapyramidene i Egypt

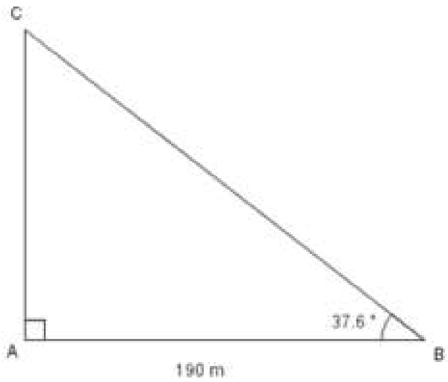
Ved å bruke det vi nå har lært om tangens, kan vi finne høyden til pyramiden uten å bruke trekanten *DEF*. Vi kan med en vinkelmåler, gradskive eller litt mer avansert utstyr måle$\angle B$ = 37,6°.

Vi kan da sette opp

$$\tan\ 37{,}6 = \frac{\mathrm{AC}}{190}$$

$$\mathrm{AC} = 190 \cdot \tan\ (37{,}6^{o})$$

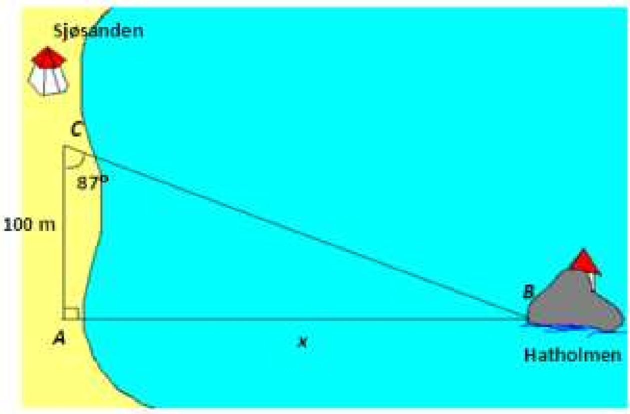
$$\mathrm{AC} \approx 146\ m$$



Vi har nå en generell metode for å finne høyden på trær, bygninger osv. ved å måle vinkler og avstander langs bakken.

Eksempel 2

Vi ønsker å beregne avstanden fra badestranden Sjøsanden i Mandal og ut til Hatholmen.



Løsning

Vi lager en linje *AB* = 100 m i sanden. Linjen står vinkelrett på siktelinjen til Hatholmen fra punktet *A*. (Hvordan gjør vi det?) Ved hjelp av en vinkelmåler måler vi $\angle B$ = 87°.

Vi kan da sette opp

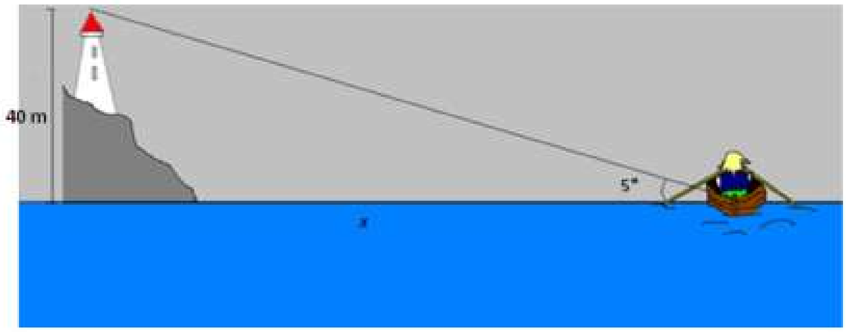
$$\begin{aligned} \tan\ (87^o) &= \frac{x}{100} \\ 100 \cdot \tan\ (87^o) &= x \\ x &= 100 \cdot \tan\ (87^o) \\ x &\approx 1900 \end{aligned}$$

Der er 1900 m ut til Hatholmen.

Ved hjelp av bedre instrumenter til å måle vinkler kan vi få større nøyaktighet. Sjekk hvilket utslag det gir om vinkelen hadde vært en halv grad større.

Vi har nå en generell metode for å finne avstander ut til ut til øyer, over elver osv. ved å måle vinkler og avstander langs bakken der vi er.

Eksempel 3



Du sitter i en båt utenfor Lindesnes fyr og lurer på hvor langt det er inn til land. Du vet at toppen av fyrlykten er 40 meter over havflaten. Du tar fram gradskiven og måler vinkelen som vist på tegningen, til 5 grader. Finn ut hvor langt det er inn til land.

Løsning

Vi kan sette opp likningen

$$\begin{aligned} \tan\ (5^o) &= \frac{40}{x} \\ x \cdot \tan\ (5^o) &= \frac{40 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} \\ \frac{x \cdot \cancel{\tan\ (5^o)}}{\cancel{\tan\ (5^o)}} &= \frac{40}{\tan\ (5^o)} \\ x &\approx 460 \end{aligned}$$

Det er ca. 460 m inn til land.

Vi har da en generell metode for å finne avstander til steder hvor vi har objekter vi kjenner høyden eller bredden til. Dette kan for eksempel være nyttig i orientering i skog og mark.

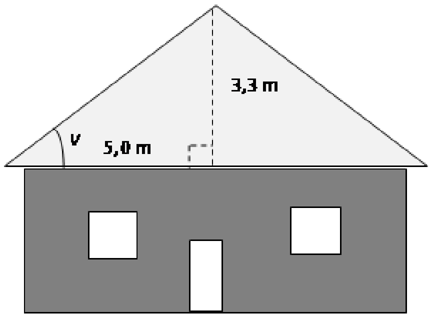
Eksempel 4

Metode for å finne ukjente vinkler.

En snekker trenger å vite takvinkelen *v*. Se figur.

Vi kan sette opp

$$\tan\ v = \frac{3{,}3}{5{,}0}$$
$$v = \arctan\ \left(\frac{3{,}3}{5{,}0}\right)$$
$$v \approx 33,4^o$$

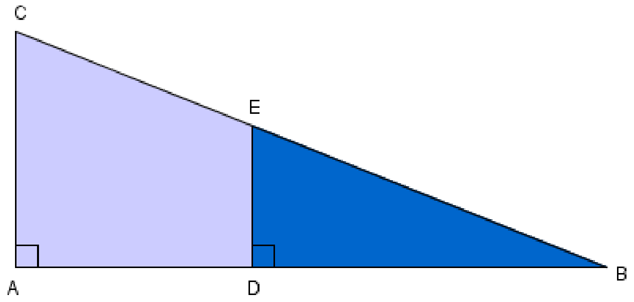


Takvinkelen er 33,4°.

Sinus og cosinus

[Sinus og cosinus (23150)]

Vi ser videre på de formlike trkantene, $\triangle\,\mathrm{ABC}\ \ \mathrm{og}\ \ \triangle\,\mathrm{DBE}$.



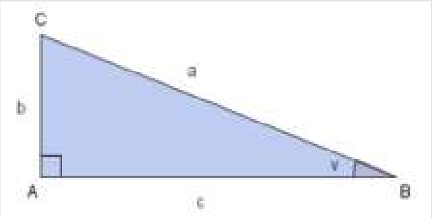
Vi kan også sette opp at $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}$. (Hvorfor?)

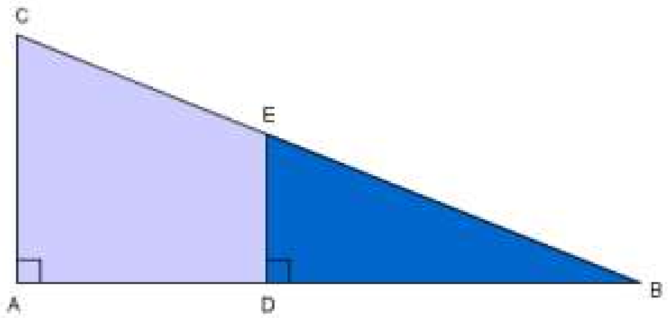
Forholdet mellom motstående katet til $\angle B$ hypotenusen blir også en konstant størrelse.

Dette konstante forholdet identifiserer også vinkel *B* entydig, og vi gir derfor også dette forholdstallet et navn. Vi kaller det**sinusverdien** til $\angle B$.

Sinus

I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er $\sin\ v=\frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}=\frac{b}{a}$





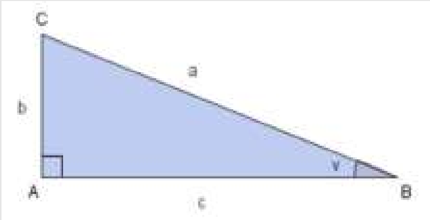
På grunn av formlikhet får vi også at $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BE}}$.

Forholdet mellom hosliggende katet til $\angle B$ og hypotenusen blir også en konstant størrelse.

Dette konstante forholdet identifiserer også vinkel *B* entydig, og vi gir derfor også dette forholdstallet et navn. Vi kaller det **cosinusverdien** til $\angle B$.

Cosinus

I en rettvinklet trekant med en spiss vinkel *v* er $\cos\ v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenusen}} = \frac{c}{a}$



Trigonometri

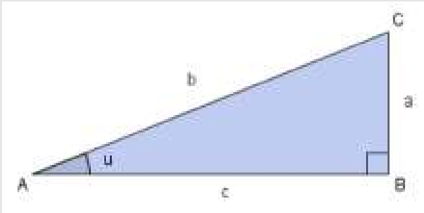
Trigonometri (23169)

Du har på de forrige sidene i menyen blitt presentert for den delen av matematikken som handler om å beregne vinkler og lengder i trekanter. Dette kaller vi for **trigonometri** som betyr **trekantmåling**. Denne delen av geometrien reduserer ofte det å måle lengder i virkeligheten, som ofte kan være umulig eller farlig, til å måle vinkler som gir grunnlag for å regne ut lengder.

Vi kan summere opp det vi har lært.

La trekant *ABC* være rettvinklet slik som figuren viser.

Vi definerer



$\sin\ u = \frac{a}{b}$

$\cos\ u = \frac{c}{b}$

$\tan\ u = \frac{a}{c}$

Med **sinus** til en vinkel mener vi f**orholdet** mellom **motstående katet og hypotenus**.

Med **cosinus** til en vinkel mener vi **forholdet** mellom **hosliggende katet og hypotenus**.

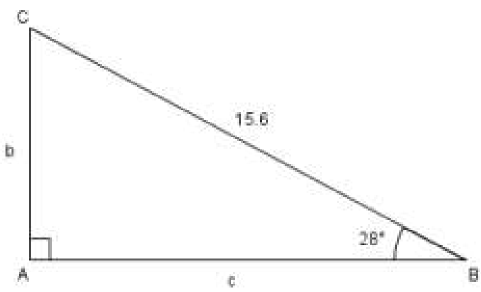
Med **tangens** til en vinkel mener vi **forholdet** mellom **motstående og hosliggende katet**.

Vi skal nå, gjennom noen eksempler, vise hvordan vi i praksis bruker trigonometrien.

Eksempel 1

Vi skal finne de ukjente sidene i trekanten *ABC*.

Vi begynner med å finne *AC*. Du husker sikkert at vi ofte kaller denne siden for*b*.



$$\sin\ (28^o) = \frac{b}{15{,}6}$$
$$b = 15,6 \cdot \sin\ (28^o)$$
$$b = 7,3$$

Så finner vi *AB*, det vil si *c*.

$$\cos\ (28^o) = \frac{c}{15{,}6}$$
$$c = 15,6 \cdot \cos\ (28^o)$$
$$c = 14$$

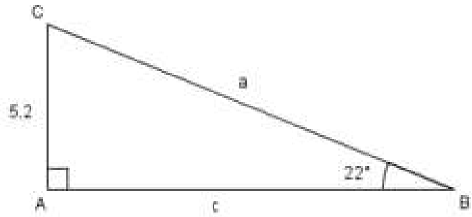
Eksempel 2

Vi skal finne de ukjente sidene i trekanten *ABC*.

Først finner vi *BC*.

$$\begin{aligned} \sin\ (22^o) &= \tfrac{5{,}2}{a} \\ a \cdot \sin\ (22^o) &= 5,2 \\ a &= \tfrac{5{,}2}{\sin\ (22^o)} \\ a &= 14 \end{aligned}$$

Så finner vi $c = AB$.



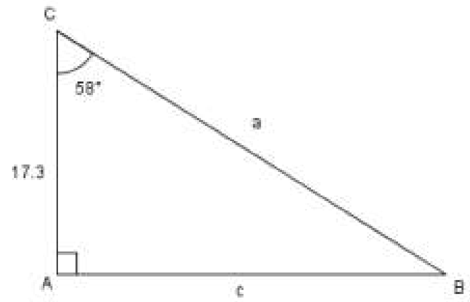
$$\begin{aligned} \tan\ (22^o) &= \tfrac{5{,}2}{c} \\ c \cdot \tan\ (22^o) &= 5,2 \\ c &= \tfrac{5{,}2}{\tan\ (22^o)} \\ c &= 13 \end{aligned}$$

Eksempel 3

Vi skal finne de ukjente sidene i trekanten *AB*C.

Først finner vi *AB*.

$$\begin{aligned} \tan\ (58^o) &= \tfrac{c}{17{,}3} \\ c &= 17,3 \cdot \tan\ (58^o) \\ c &= 27,7 \end{aligned}$$



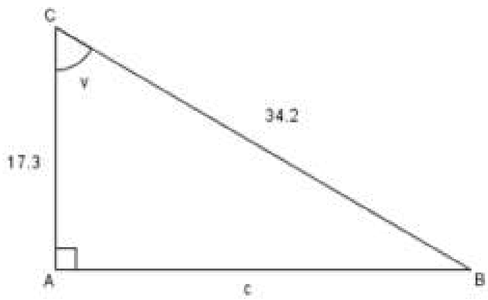
Så finner vi $a = BC$.

$$\begin{aligned} \cos\ (58^o) &= \tfrac{17{,}3}{a} \\ a &= \tfrac{17{,}3}{\cos\ (58^o)} \\ a &= 32,6 \end{aligned}$$

Eksempel 4

Vi skal finne vinkel *v* i trekanten nedanfor. Då må vi bruke den «inverse» eller «motsette» cosinusfunksjonen. I GeoGebra har denne funksjonen navnet «acos».

$$\begin{aligned} \cos\ v &= \tfrac{17{,}3}{34{,}2} \\ v &= \text{acos}\left(\tfrac{17{,}3}{34{,}2}\right) \\ v &\approx 59,6^\circ \end{aligned}$$



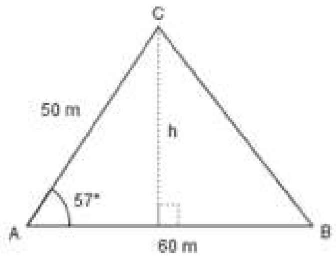
Arealformelen for trekanter

[Arealformelen for trekanter (23192)]

Eksempel

Vi skal finne arealet av et trekantet lekeområde *ABC* hvor

$$\mathrm{AB} = 60\ m,\ \mathrm{AC} = 50\ m \text{ og } \angle A = 57^o.$$



Løsning

Vi kjenner arealformelen for en trekant $T = \frac{g \cdot h}{2}$

Siden høyden står normalt på grunnlinjen, kan vi sette opp

$$\begin{aligned} \sin\ A &= \frac{h}{\mathrm{AC}} \\ \sin\left(57^o\right) &= \frac{h}{50} \\ h &= 50 \cdot \sin\left(57^o\right) \end{aligned}$$

Når vi setter dette inn i arealformelen for trekanten, får vi

$$T = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{60 \cdot 50 \cdot \sin(57^o)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 50 \cdot \sin\left(57^o\right) \approx 1300$$

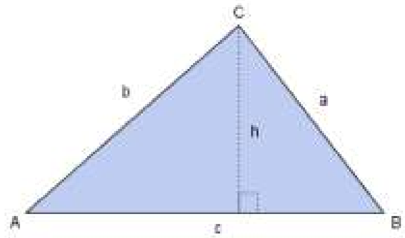
Arealet av lekeområdet er 1300 m^2.

Du ser kanskje at denne fremgangsmåten kan brukes i alle liknende situasjoner. Vi kan da lage en **generell formel** for **arealet av en trekant** når vi kjenner **to sider og vinkelen mellom dem.**

$$T = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin\ \angle A &= \frac{h}{b} \\ h &= b \cdot \sin\ \angle A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{c \cdot h}{2} \\ T &= \frac{c \cdot b \cdot \sin \angle A}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \angle A \end{aligned}$$



Arealformelen for trekanter

La $\angle A$ være vinkelen mellom to sider *c* og *b* i en trekant.

Arealet av trekanten er gitt ved formelen

$$T = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \angle A$$

Trigonometri 2

Sinus og cosinus til vinkler større enn 90°

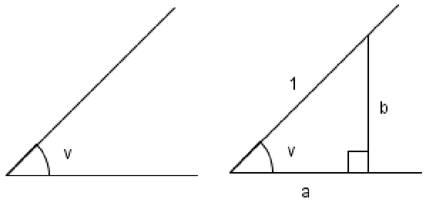
Sinus og cosinus til vinkler større enn 90° (23226)

Definisjonen av sinus, cosinus og tangens gitt i forrige avsnitt, gjelder bare for vinkler som er mindre enn 90°. Definisjonen forutsetter også at vi har en rettvinklet trekant. Vi har derfor vært begrenset til å regne ut ukjente sider og vinkler i rettvinklede trekanter.

Vi innfører nå en **ny definisjon av sinus, cosinus og tangens som også gjelder for vinkler som er større enn 90°**. Den nye definisjonen bygger på den definisjonen vi allerede har for vinkler mindre enn 90°.

Generell definisjon av sinus, cosinus og tangens til en vinkel

Vi starter med en vinkel *v* som er mindre enn 90°. Vi oppretter så motstående katet slik at vi får en rettvinklet trekant med hypotenus lik 1. Vi kaller katetene for *a* og *b*.



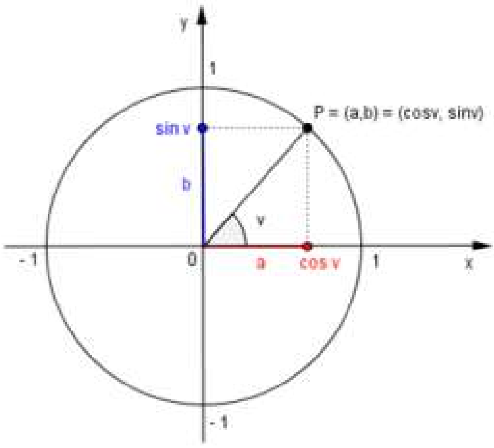
Vi får

$\sin\ v = \frac{b}{1} = b$ og $\cos\ v = \frac{a}{1} = a$

Vi legger et koordinatsystem med origo i toppunktet til vinkelen slik at vinkelens høyre bein blir liggende langs *x*-aksen. Vi legger videre en sirkel med radius 1 og sentrum i origo. Vi kaller sirkelen for **enhetssirkelen**.

Vi kaller skjæringspunktet mellom enhetssirkelen og venstre vinkelbein til *v* for *P*.

Punktet ***P*** har hoordinatene (a,b).



Vi ser da at cosinus til vinkelen blir lik førstekoordinaten til *P*, cos*v* = a og at sinus til *vi blir lik andrekoordinaten til* P*, sin*v *= b.*
Det betyr at *P = (cosv,sinv).*

Vi ser også at $\tan\ v = \frac{b}{a} = \frac{\sin\ v}{\cos\ v}$ når $\cos\ v \neq 0$.

Ettersom avstanden fra origo til P er lik 1, har vi også at kvadratet av sin*v* pluss kvadratet av cos *v* er lik 1.

$$(\sin\ v)^2 + (\cos\ v)^2 = 1$$

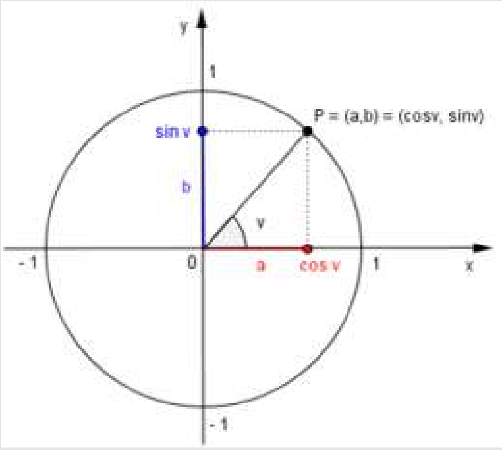
Vi kan nå definere sinus, cosinus og tangens til en generell vinkel*v*.

Plasser vinkel ***v*** i et koordinatsystem sammen med enhetssirkelen. Se figuren til høyre.

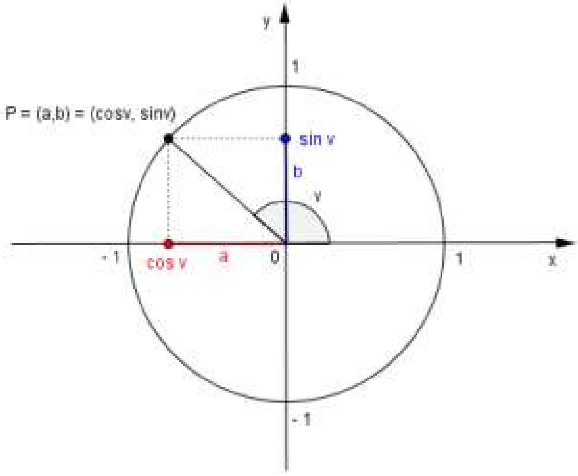
La ***P*** være skjæringspunktet mellom vinkelens venstre vinkelbein og enhetssirkelen.

Vi får
cos *v* =førstekoordinaten til P
sin *v* =andrekoordinaten til P

Vi får også at
$\tan\ v = \frac{\sin\ v}{\cos\ v}$ når $\cos\ v \neq 0$



Vi har nå en definisjon som også gjelder for vinkler som er større enn 90°.

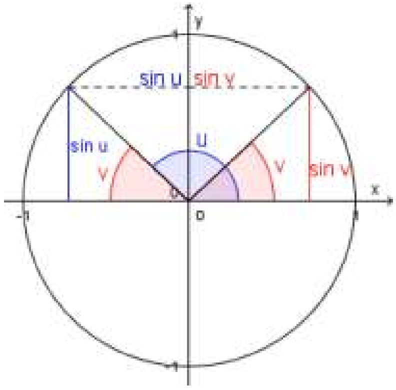


Trykk her for å se en simulering av enhetssirkelen i GeoGebra.

To vinkler - samme sinusverdi

To vinkler - samme sinusverdi (23247)

En konsekvens av den nye definisjonen er at **to vinkler kan få samme sinusverdi**. Det gjelder to vinkler som til sammen er 180 grader.



Vinklene u og v på tegningen til høyre er til sammen 180 grader og har samme sinusverdi.

Siden $u + v = 180°$, er $v = 180° - u$

Vi får at $\sin u = \sin v \sin(180° - u)$

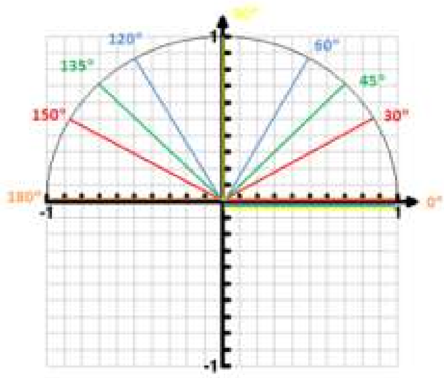
Kan du også fra figuren se at $\cos u = -\cos(180° - u)$?

Sjekk om regelen stemmer for vinklene nedenfor. (Regn ut og sjekk svarene.)

sin 30° og sin 150°, 30° + 150° = 180°

sin 45° og sin 135°, 45° + 135° = 180°

sin 60° og sin 120°, 60° + 120° = 180°



Ser du at du kunne funnet svarene ovenfor ved å bruke figuren til høyre?

Prøv å finne disse verdiene ved hjelp av figuren:

$$\begin{array}{lll} \sin 0^\circ & \sin 90^\circ & \sin 180^\circ \\ \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 180^\circ \end{array}$$

Hvis du for eksempel får opplyst at sinus til en vinkel er 0,5, så vet du ikke om vinkelen er 30° eller 150°. Det betyr at likningen $\sin x = 0{,}5$ har to løsninger. Noen digitale verktøy gir bare den ene løsningen. Da må du selv passe på å få med den andre.

Dette kan du føre slik

$$\begin{aligned} \sin x &= 0{,}5 \\ x &= \mathrm{asin}(0{,}5) \\ x &= 30^\circ \ \vee \ x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Tegnet } \vee \text{ betyr eller}$$

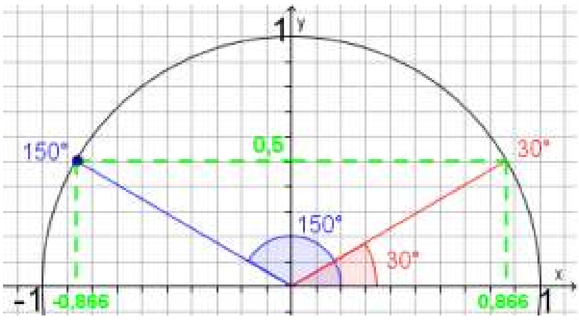
I dette kurset regner vi bare med vinkler opp til 180°. For disse vinklene får vi ikke problemer med to løsninger av likninger med cosinus og tangens.

En liten oppsummering

$$\sin u = \sin(180^\circ - u)$$

$$\cos u = -\cos(180^\circ - u)$$

Eksempel

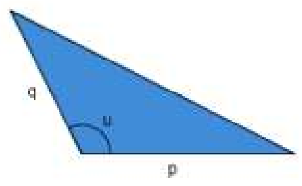


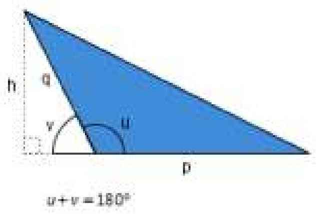
$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0,5$
$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \approx 0,866$

Arealsetningen for trekanter med en vinkel større enn 90°

[Arealsetningen for trekanter med en vinkel større enn 90° (23249)]

Vi ser på en trekant med sider p og q, og hvor vinkelen mellom sidene er $u > 90°$.





Vi lager en hjelpefigur hvor vi tegner inn høyden i trekanten når vi har valgt p som grunnlinje.

Vi kan da sette opp

$$\sin\ v = \frac{h}{q}\ \Rightarrow\ q\ \sin\ v$$

Vi har at

$$u + v = 180^o\ \Rightarrow\ v = 180^o - u$$

Videre har vi setningen

$$\sin\ u = \sin\ (180^o - u)$$

I trekanten over har vi altså at

$$\sin\ v = \sin\ u$$

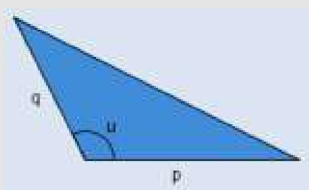
Arealet av trekanten blir da

$$T = \frac{1}{2}p \cdot h = \frac{1}{2}p \cdot q\ \sin\ v = \frac{1}{2}p \cdot q\ \sin\ u$$

Arealsetningen gjelder altså også her.

Arealformelen for trekanter

La u være vinkelen mellom to sider p og q i en trekant.

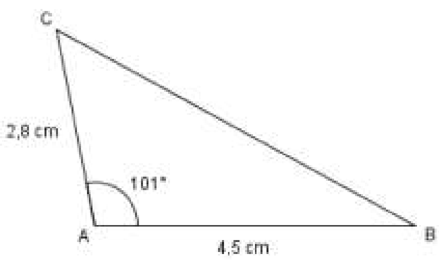


Arealet av trekanten er gitt ved formelen $T = \frac{1}{2}p \cdot q\ \sin\ u$

Eksempel

Regn ut arealet av trekant ABC når

AB = 4,5 cm, AC = 2,8 cm og $\angle A = 101^o$



$$\text{Arealet} = \frac{1}{2} \cdot \text{AB} \cdot \text{AC} \cdot \sin\ \angle A = \frac{1}{2} 4,5\ \text{cm} \cdot 2,8\ \text{cm}\ \cdot \sin\ (101^o) = 6,2\ \text{cm}^2$$

Sinussetningen

[Sinussetningen (23252)]

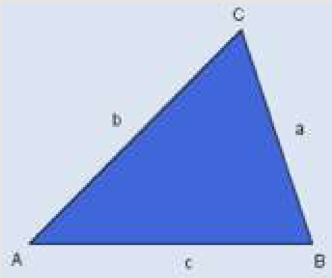
Vi skal nå bli kjent med en setning som gjør oss i stand til å finne sidelengder og vinkler i trekanter som ikke er rettvinklete.

Gitt en trekant *ABC*. Følgende sammenheng gjelder

Sinussetningen

$$\frac{\sin\ A}{a} = \frac{\sin\ B}{b} = \frac{\sin\ C}{c}$$

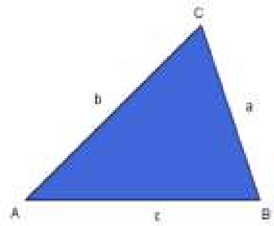
Forholdet mellom sinus til en vinkel og lengden av motstående side er lik for alle vinklene i trekanten.



Bevis for sinussetningen

Vi skal nå bevise sinussetningen ved å skrive opp formelen for arealet av Δ*ABC* ut fra hver av de tre vinklene.

Sett fra hjørnet *A* blir arealet av Δ*ABC* lik $\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\ A$.
Sett fra hjørnet *B* blir arealet av Δ*ABC* lik $\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\ B$.
Sett fra hjørnet *C* blir arealet av Δ*ABC* lik $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\ C$.



Disse arealene MÅ jo være like store og vi setter

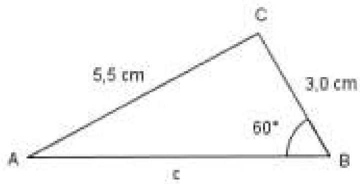
$$\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\ A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\ B = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\ C$$
$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\ A = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\ B = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\ C$$
$$b\cdot c\cdot\sin\ A = a\cdot c\cdot\sin\ B = a\cdot b\cdot\sin\ C$$
$$\frac{b\cdot c\cdot\sin\ A}{a\cdot b\cdot c} = \frac{a\cdot c\cdot\sin\ B}{a\cdot b\cdot c} = \frac{a\cdot b\cdot\sin\ C}{a\cdot b\cdot c}$$
$$\frac{\cancel{bc}\cdot\sin\ A}{a\cdot\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\cdot\sin\ B}{\cancel{a}\cdot b\cdot\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\cdot\sin\ C}{\cancel{ab}\cdot c}$$
$$\frac{\sin\ A}{A} = \frac{\sin\ B}{B} = \frac{\sin\ C}{C}$$

Eksempel
Figuren viser en trekant *ABC* med sider *a*, *b* og *c.*

a) Regn ut $\angle A$ når a = 3,0 cm, b = 5,5 cm og$\angle B$ = 60°.

Løsning

$$\frac{\sin\ A}{a} = \frac{\sin\ B}{b}$$
$$\frac{\sin\ A}{3{,}0} = \frac{\sin(60^o)}{5{,}5}$$
$$\sin\ A = \frac{\sin(60^o)}{5{,}5}\cdot 3,0$$
$$\sin\ A = 0,4724$$
$$\angle A = 28,2^o$$



Kommentar
Her kunne du også fått $\angle A = 180^o - 28^o = 151,8^o$, men da ville vinkelsummen i trekanten blitt større enn 180° fordi 151,8° + 60° = 211,8°. Vi ville da ikke fått noen trekant!

b) Finn siden *c*.

Løsning

Finner først vinkel *C*

180° - 60° -28,2° = 91,8°

$$\frac{\sin\ B}{b} = \frac{\sin\ C}{c}$$
$$\frac{\sin(60^o)}{5{,}5} = \frac{\sin(91{,}8^o)}{c}\ \text{Multipliserer med } c.$$
$$c \cdot \frac{\sin(60^o)}{5{,}5} = \cancel{c} \cdot \frac{\sin(91{,}8^o)}{\cancel{c}}$$
$$c \cdot 0,1575 = 0,9995$$
$$c = \frac{0{,}9995}{0{,}1575}$$

$$c = 6,3\ \text{cm}$$

Legg merke til!

Når vi finner vinkler med sinussetningen, fører regningen til to muligheter for vinkelen *u*

$$u = u_0 \quad \text{og} \quad u = 180^\circ - u_0$$

I hver enkelt oppgave må vi vurdere om begge svarene kan brukes.

Vi utelukker eventuelt vinkler ved å bruke at

- Vinkelsummen i en trekant skal være 180°
- Den største vinkelen skal ha lengst motstående side
- Den minste vinkelen skal ha kortest motstående side

Cosinussetningen

Cosinussetningen (23257)

Vi skal nå bli kjent med en setning som i enda større grad enn sinussetningen gjør oss i stand til å finne sidelengder og vinkler i trekanter som ikke er rettvinklete. Beviset for setningen kommer etter eksemplene.

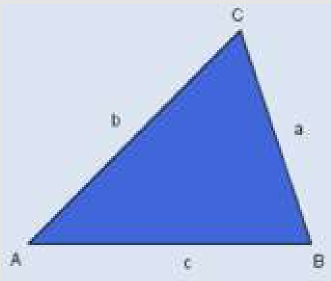
Gitt en trekant *ABC*. Følgende setning gjelder

Cosinussetningen
(Den utvidete pytagoreiske setning)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

I en trekant er kvadratet av en side alltid lik summen av kvadratene av de to andre sidene minus to ganger produktet av disse sidene og cosinus til deres mellomliggende vinkel.
Vi kan altså også skrive setningen på følgende to andre måter

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Vi kan også bruke cosinussetningen til å finne vinkler. Det er da lurt å snu på formelen slik som vist nedenfor.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c} \end{aligned}$$

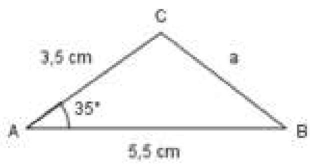
De andre vinklene blir da

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Eksempel

Figuren viser en trekant *ABC* med sider *a*, *b* og *c*.

Regn ut siden *a* når *b* = 3,5 cm, *c* = 5,5 cm og $\angle A = 35^\circ$.

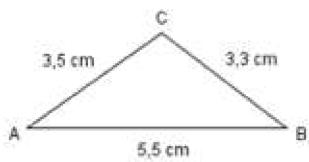


Løsning

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathrm{bc}\ \cos A$$
$$a^2 = 3,5^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 5,5 \cdot \cos(35^o)$$
$$a = \sqrt{3,5^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 5,5 \cdot \cos(35^o)}$$
$$a = 3,3 \text{ cm}$$

Eksempel

Figuren viser en trekant ABC med sider a, b og c.
Regn ut $\angle B$ når du vet at a = 3,3 cm, b = 3,5 cm og c = 5,5 cm.



Løsning

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,\mathrm{ac}\ \cos\ B$$

$$3,5^2 = 3,3^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 3,3 \cdot 5,5 \cdot \cos\ B$$

$$2 \cdot 3,3 \cdot 5,5 \cdot \cos\ B = 3,3^2 + 5,5^2 - 3,5^2$$

$$\cos\ B = \frac{3{,}3^2+5{,}5^2-3{,}5^2}{2\cdot 3{,}3\cdot 5{,}5}$$

$$\angle B = \mathrm{acos}\ \frac{3{,}3^2+5{,}5^2-3{,}5^2}{2\cdot 3{,}3\cdot 5{,}5}$$

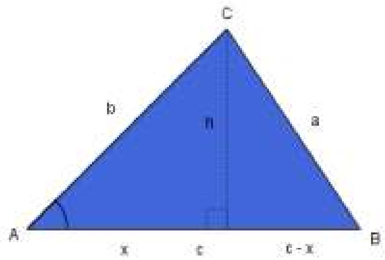
$$\angle B = 37,3^o$$

I det siste eksempelet er det bare cosinussetningen som gir løsning på problemet. Sinussetningen kan ikke brukes her.

Når du bruker cosinussetningen til å finne vinkler, får du alltid bare én løsning. Hvis du bruker sinussetningen, får du to løsninger, og du må selv vurdere hvilke verdier som passer i den aktuelle trekanten.

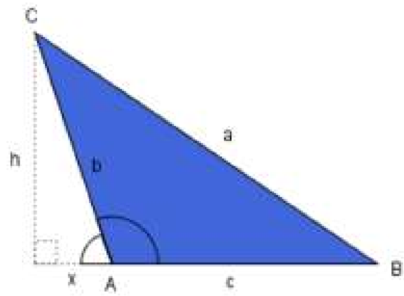
Bevis for cosinussetningen

Vi lar først A < 90°.
Vi bruker Pytagoras læresetning på figuren



$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$
$$a^2 = h^2 + c^2 - 2\mathrm{cx} + x^2$$
$$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$$
Siden $h^2 + x^2 = b^2$ og $\cos\ A = \frac{x}{b}$ dvs. $x = b \cdot \cos\ A$, så er
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \mathrm{bcos}\ A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathrm{bc}\ \cos\ A$$

Vi lar så A > 90°.
Vi bruker Pytagoras' læresetning på figuren



$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$
$$a^2 = h^2 + c^2 + 2\mathrm{cx} + x^2$$
$$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$$

Vi har at $h^2 + x^2 = b^2$ og
$$\cos\ (180^o - A) = \frac{x}{b}$$
$$\cos\ (180^o - A) = -\cos\ (A)$$
$$-\cos\ (A) = \frac{x}{b}$$
$$x = -b \cdot \cos(A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b\ \cos\ A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathrm{bc}\ \cos\ A$$

Vi lar så A = 90°.

Da er cos A = 0 og vi får Pytagoras' setning $a^2 = b^2 + c^2$.

Vi skjønner da hvorfor cosinussetningen også kalles for **d**en utvidete pythagoreiske setning.

Annet

Geometriens historie. Spill

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Geometriens historie. Spill (48981)

Geometriens historie

Geometriens historie. Oppgaver

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Geometriens historie. Oppgaver (49015)

Her kan du øve deg på de ulike oppgaver som ligger i spillet geometriens historie.

Geometriens historie oppgaver

Pytagoras´ læresetning animasjon 1

Forfatter: CyberBook AS
Pytagoras´ læresetning animasjon 1 (23755)

Animert bevis for Pytagoras´setning

Pytagoras´ læresetning animasjon 2

Forfatter: CyberBook AS
Pytagoras´ læresetning animasjon 2 (23757)

Pytagoras øvelser

Pytagoras´ læresetning animasjon 3

Forfatter: CyberBook AS
Pytagoras´ læresetning animasjon 3 (23760)

Rettvinklede trekanter

Overflate av prisme animasjon

Forfatter: CyberBook AS, YDP
[Overflate av prisme animasjon (45423)]

Overflate av prisme animasjon

Volum animasjon

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Volum animasjon (45418)

Volum

Tangens - animasjon

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Tangens animasjon (23763)

Animasjon om tangens

Sinussetningen- animasjon

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Sinussetningen animasjon (23771)

Sinussetningen

Sinussetningen

Trigonometri - animasjon

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Trigonometri animasjon (23766)

Å finne en ukjent side

Sannsynlighet

Teori

Hva er sannsynlighet?

Tilfeldig hendelse (24630)

Sannsynlighetsregning handler om hvordan vi ved hjelp av matematikk kan si noe om hva som vil skje i framtiden.

Utfall og utfallsrom

Ved en barnefødsel er utfallsommet U = {gutt, jente}.

Når vi kaster en terning, kan vi få en ener, en toer, en treer, en firer, en femmer eller en sekser. Dette kaller vi **utfall**. Alle utfallene til sammen kalles **utfallsrommet**. Når vi kaster en terning, er utfallsrommet $U = \{1,2,3,4,5,6\}$. Når vi kaster en tikrone er utfallsrommet $U = \{\text{kron, mynt}\}$, og ved en barnefødsel er utfallsrommet $U = \{\text{gutt, jente}\}$.

Tilfeldig forsøk

Å kaste en terning er et eksempel på **et tilfeldig forsøk**.

I et tilfeldig forsøk er resultatet ukjent, men de mulige utfallene, utfallsrommet, er kjent.

Vi vet ikke hva teningen vil vise, men vi vet at den vil vise en ener, en toer, en treer, en firer, en femmer eller en sekser.

Terningkast

Har du noen gang lurt på om det er større sjanser for å få en sekser enn for eksempel en toer når du kaster en terning?

Eller er det slik at når du har kastet terningen veldig mange ganger uten å få en sekser, så øker sjansene for at du får en sekser i neste kast?

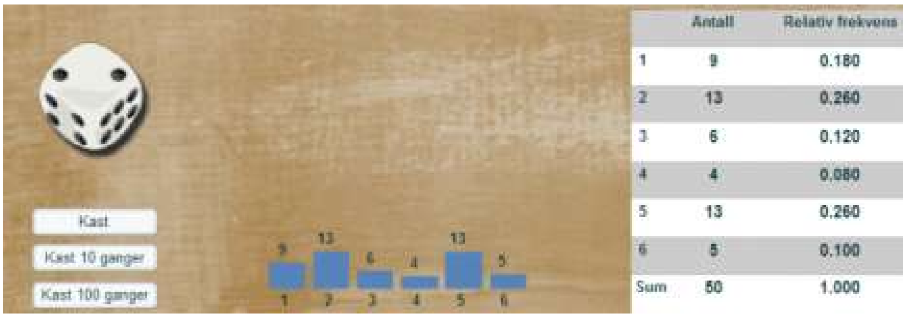
For å finne ut av slike spørsmål kan du kaste en terning mange, mange ganger og se hva som skjer.

Men du kan alternativt få en datamaskin til å **simulere** terningkast, late som den kaster terning.

Simulering av terningkast

Gå inn på Simuleringer i sannsynlighet.Her finner du simulering av terningkast, simulering nummer 1 (Pga en teknisk feil må du gå til simulering nummer 2, og så tilbake til nummer 1 for å få frem denne simuleringen).

I et forsøk med 50 terningkast fikk vi følgende resultat



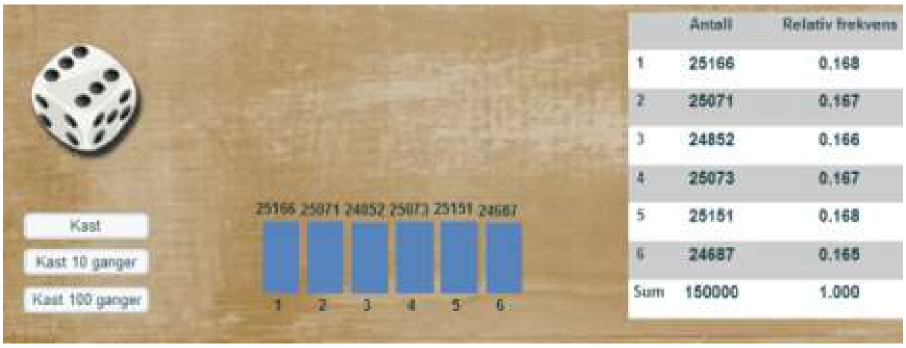
	Antall	Relativ frekvens
1	9	0.180
2	13	0.260
3	6	0.120
4	4	0.080
5	13	0.260
6	5	0.100
Sum	50	1.000

Tabellen og stolpediagrammet viser at over halvparten av kastene ble en toer eller femmer, tretten ganger på hver. Terningen viste en sekser bare fem ganger og en firer bare fire ganger. Betyr det at det er lettere å få en femmer enn en firer med denne terningen?

I tabellen er det også en kolonne med **relativ frekvens**. Relativ frekvens for å få en sekser er 0,1. Det vil si 10 %. 5 av 50 kast gav en sekser. 5 av 50 er $\frac{5}{50} = 0,1$. Den relative frekvensen å få en sekser viser altså hvor stor andel av kastene som ble sekser.

Etter 50 kast er den relative frekvensen for de enkelte utfall svært ulike. Dersom vi kaster terningen litt flere ganger, vil de relative frekvensene endre seg.

Men, hva skjer dersom vi kaster veldig mange ganger? Vi prøver med 150 000 terningkast!



	Antall	Relativ frekvens
1	25166	0.168
2	25071	0.167
3	24852	0.166
4	25073	0.167
5	25151	0.168
6	24687	0.165
Sum	150000	1.000

Ser du at de **relative frekvensene** nå er tilnærmet like store?
Hva tror du vil skje dersom vi kaster enda flere ganger?

Mange har gjort dette før deg og oppdaget «**de store talls lov**». Den sier at hvis vi gjentar et forsøk mange nok ganger, vil **den relative frekvensen for et utfall nærme seg ett bestemt tall**. Denne oppdagelsen er blitt brukt som utgangspunkt for å definere hva vi mener med sannsynligheten for et utfall i et forsøk.

Når vi kaster en terning mange nok ganger, viser det seg at de relative frekvensene for hvert enkelt utfall blir lik $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

Vi sier at sannsynligheten for å få en toer eller en sekser ved terningkast er lik $\frac{1}{6}$.

Definisjon av sannsynlighet

De store talls lov. Sannsynlighet

Dersom vi gjentar et forsøk mange nok ganger, vil **den relative frekvensen for et utfall nærme seg ett bestemt tall**. Dette tallet sier vi er **sannsynligheten** for utfallet.

Vi bruker bokstaven *P* for sannsynlighet etter **probability**, som er det engelske ordet for sannsynlighet.

P(sekser) = $\frac{1}{6}$ er en kortfattet skrivemåte for «sannsynligheten for å få en sekser» ved kast av en terning.

Ved sannsynlighet gjelder også

- Sannsynligheten for hvert enkelt utfall er **et tall mellom 0 og 1** (0 % og 100 %)
- Sannsynligheten for alle utfallene er **til sammen lik 1** (100 %)

Sannsynlighetsmodeller

[Sannsynlighetsmodeller (24642)](#)

Sannsynlighetsmodeller

En oversikt over alle utfall og sannsynlighetene til de enkelte utfall i et forsøk kalles en **sannsynlighetsmodell**.

Tabellen viser en sannsynlighetsmodell for kast med én terning

Antall øyne	1	2	3	4	5	6
Sannsynlighet	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

I denne sannsynlighetsmodellen er sannsynlighetene for alle utfallene like store. Vi sier da at sannsynlighetsmodellen er **uniform**.

Et eksempel på en sannsynlighetsmodell som ikke er uniform, er modellen for blodtype til en blodgiver.

Som du ser av tabellen nedenfor er sannsynlighetene for de enkelte utfallene ikke like store.

Blodtype	**0**	**A**	**B**	**AB**
Sannsynlighet	0,40	0,48	0,08	0,04

(Datamaterialet er hentet fra [Pasienthandboka](#))

Blodgiver ved blodbanken på St. Olavs Hospital i Trondheim.

Andre eksempler på tilfeldige forsøk

Å kaste en terning er et tilfeldig forsøk. Vi vet hvilke utfall som er mulige, men hva utfallet blir i et enkelt kast er tilfeldig.

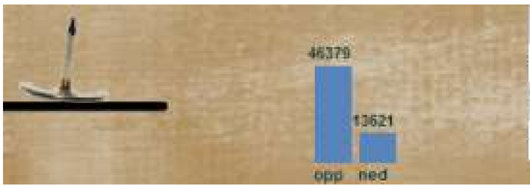
Kast med tegnestifter

Å kaste en tegnestift er også et tilfeldig forsøk. Det er to mulige utfall av forsøket. Tegnestiften kan lande med spissen opp eller med spissen ned.

U = {spissen opp, spissen ned}

På [Simuleringer i sannsynlighet](#) finner du en simulering av kast med tegnestift, simulering nummer 7. Gå gjennom oppgavene i simuleringen og sammenlikn den sannsynlighetsmodellen du får med den dine medelever får.

Vi fikk følgende resultat etter 60 000 kast.



	Antall	Relativ frekvens
Opp	46379	0.773
Ned	13621	0.227
Sum	60000	1.000

De relative frekvenser varierer, men allerede med så få kast kan det tyde på at med to siffers nøyaktighet er den relative frekvensen for spiss opp 0,77 og for spiss ned 0,23.

Vi kan si at sannsynligheten for å få spiss opp ved kast av tegnestiften er lik 0,77 og for spiss ned 0,23.

Det er tydelig at sannsynlighetsmodellen er ikke er uniform.

Kast av en tikrone

Du kan nå lage et forsøk hvor du sjekker ut følgende påstand:

I et myntkast er det lik sannsynlighet for kron og mynt hver gang vi kaster.

Myntkast	Kron	Mynt
Sannsynlighet	0,50	0,50

Tabellen viser sannsynlighetsmodellen.

Kast av to tikroner

Hvordan tror du sannsynlighetsmodellen vil bli dersom vi kaster to tikroner?

Ser du at vi da får tre ulike utfall?

Vi kan få to kron, to mynt eller en kron og en mynt.

- Skriv ned sannsynligheten du tror det er for disse tre utfallene.
- Kast to tikroner 50 ganger og regn ut den relative frekvensen for de tre utfallene.
- Ta dine resultater og legg disse sammen med en medelev.
- Finn den relative frekvensen nå.
- Ble resultatet som du hadde trodd?

Dersom du tok feil, så er du i godt selskap. Det synes umiddelbart rimelig at de tre utfallene har like stor sannsynlighet. Det siste utfallet kan imidlertid også ses på som to forskjellige utfall, nemlig kron + mynt og mynt + kron. Da har forsøket 4 utfall, hver med like stor sannsynlighet. Slår vi sammen de to siste utfallene til ett, slik vi gjorde i oppgaven, får dette utfallet dobbelt så stor sannsynlighet som de to andre.

Dette viser at sannsynlighetsberegninger fort kan bli mer komplisert enn det ser ut til. Smarte personer kan utnytte dette i pengespill.

Gå inn på Simuleringer i sannsynlighet, velg simulering nummer 2 og se om lar deg lure av banken!

Sannsynlighet i uniforme modeller. Addisjon av sannsynligheter

[Sannsynlighet i uniforme modeller. Addisjon av sannsynligheter (24733)](#)

Hendelse

En **hendelse** i en sannsynlighetsmodell består av ett eller flere utfall.

Vi ser på det tilfeldige forsøket «kast av én terning»

Antall øyne	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Sannsynlighet	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Et eksempel på en hendelse er å få et partall antall øyne. Vi kaller dette for hendelsen *A*.

A: Å få et partall antall øyne ved kast av én terning

Addisjonssetningen for én hendelse

Hendelsen *A* inntreffer når vi får ett av utfallene 2, 4 **eller** 6. Den relative frekvensen for hendelsen *A* må da være summen av de relative frekvensene for utfallene 2, 4 og 6. Det betyr igjen at sannsynligheten for hendelsen *A* er summen av sannsynlighetene for utfallene 2, 4 og 6.

Vi har

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for en hendelse finner vi ved å summere sannsynlighetene for de utfallene som inngår i hendelsen.

Kast av to tikroner

Da du gjorde forsøket med å kaste 2 pengestykker, registrerte du sikkert at utfallene *KK* og *MM* fikk tilnærmet samme relative frekvens. Hvis du hadde registrert *MK* og *KM* hver for seg, ville du oppdaget at også disse utfallene hadde tilnærmet den samme relative frekvens.

Når vi kaster to tikroner, har vi altså 4 mulige utfall. Alle utfallene har lik sannsynlighet.

En hendelse kan her være å få en kron og en mynt, uansett rekkefølge. Vi kaller dette for hendelsen *B* .

B: Å få én kron og én mynt, uansett rekkefølge.

Sannsynligheten for B blir

$$P(B) = P(\text{MK}) + P(\text{KM}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vi legger altså sammen sannsynlighetene for hvert enkelt utfall som hendelsen omfatter.

Sannsynlighetsmodellen for kast av to pengestykker blir

Utfall	**To kron**	**Én mynt og én kron**	**To mynt**
Sannsynlighet	0,25	0,50	0,25

Sannsynligheten for hendelsen «ikke A»

Vi vet at samlet sannsynlighet for alle utfallene i et terningkast er lik 1. Det betyr at ved kast av en terning er

$$P\left(Å \text{ få et partall antall øyne}\right) + P\left(Å \text{ ikke få et partall antall øyne}\right) = 1$$

Det betyr at

$$P\left(Å \text{ ikke få et partall antall øyne}\right) = 1 - P\left(Å \text{ få et partall antall øyne}\right)$$

Vi ga ovenfor hendelsen «Å få et partall antall øyne ved kast av en terning» navnet *A*.

Det gir

$$P(\text{ikke } A) = 1 - P(A)$$

Vi innfører en egen skrivemåte for «ikke », $\overline{A}$.

Det gir

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Denne regelen gjelder for alle hendelser.

For alle hendelser gjelder at

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Hvor $\overline{A}$ betyr «ikke *A*».

Sannsynlighet i uniforme modeller. Gunstige og mulige utfall

Vi ser på det tilfeldige forsøket «kast av én terning»

Antall øyne	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Sannsynlighet	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Vi så ovenfor på hendelsen

A: Å få et partall antall øyne

Vi har

$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Alle utfallene som hendelsen omfatter, kaller vi **gunstige utfall** for hendelsen. For kast med én terning er 2, 4 og 6 de tre gunstige utfallene for hendelsen *A*.

Vi lar *g* betegne antall gunstige utfall for hendelsen *A*, og *m* betegne antall mulige utfall.

Dersom vi dividerer antall gunstige utfall med alle mulige utfall, får vi $\frac{g}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Det er det samme som vi fikk da vi beregnet sannsynligheten for *A* ovenfor.

Vi kan sette opp følgende regel for sannsynligheter for hendelser i uniforme modeller

I en uniform sannsynlighetsmodell er alle utfall like sannsynlige. Sannsynligheten for en hendelse *A* er gitt ved

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{antall mulige utfall}}$$

Addisjonssetningen for flere hendelser

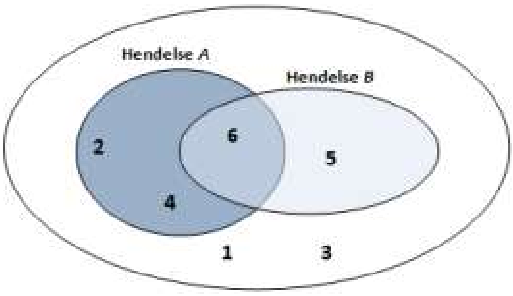
Vi fortsetter med forsøket «kast av 1 terning»

Vi definerer hendelsene

A: Å få et partall antall øyne

B: Å få fem eller flere øyne

Vi kan illustrere med et såkalt Venndiagram.



Hendelsen *A* har tre gunstige av 6 mulige utfall.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Hendelsen *B* har to gunstige av 6 mulige utfall.

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Vi definerer to nye hendelser

$A \cup B$ består av de utfall som er med i **enten** *A* **eller** *B* **eller i både** *A* og *B*
$A \cup B$ leser vi som «***A* union *B***»

$A \cap B$ består av alle utfall som er med i **både** *A* **og** *B*
$A \cap B$ leser vi som «***A* snitt *B***»

For hendelsen $A \cup B$ må terningen vise et partall antall øyne eller fem eller flere øyne eller begge deler. Vi får da fire gunstige utfall, en toer, en firer, en femmer og en sekser. Se Venndiagrammet. Det betyr at

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

For hendelsen $A \cap B$ må terningen vise et partall antall øyne og samtidig fem eller flere øyne. Vi får da bare ett gunstig utfall, at terningen viser en sekser. Det betyr at

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Vi ser at også for sammensatte hendelser i en uniform sannsynlighetsmodell kan vi beregne sannsynligheter ved å telle opp antall gunstige og antall mulige utfall.

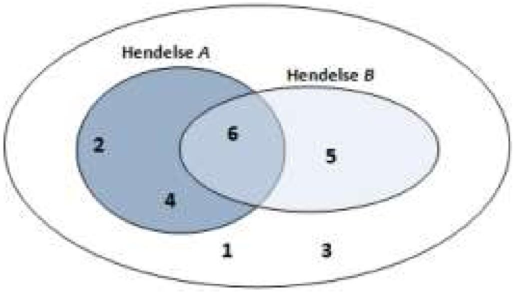
Vi så at sannsynligheten for én hendelse er lik summen av sannsynlighetene for de utfall som inngår i hendelsen.
Kan vi tilsvarende finne sannsynligheten for flere hendelser ved å summere sannsynligheter for enkelthendelser?

Vi undersøker om $P(A \cup B)$ er lik *P*(*A*) pluss *P*(*B*).

Vi så ovenfor at $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$og at $P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Vi får $\frac{1}{6}$ for mye når vi adderer sannsynlighetene for enkelthendelsene.

Men vi så også at $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.



Utfallet «å få en sekser» er med i både hendelsen *A* og i hendelsen *B*.Sannsynligheten for dette utfallet er derfor tatt med to ganger når vi adderer sannsynlighetene for enkelthendelsene. Vi må derfor trekke fra sannsynligheten for dette utfallet én gang. Da får vi at

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

Dette gjelder generelt, også for sannsynlighetsmodeller som ikke er uniforme

Den generelle addisjonssetningen for sannsynligheter

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B$ består av de utfall som er med i **enten** *A* **eller** *B* **eller i både** *A* **og** *B*

$A \cup B$ leser vi som «***A* union *B***»

$A \cap B$ består av alle utfall som er med i **både** *A* og *B*

$A \cap B$ leser vi som «***A* snitt *B***»

Beregne sannsynlighet ved å bruke tabeller

Beregne sannsynligheter ved å bruke tabeller (24743)

Kast av to terninger. Sum antall øyne

Forsøk

Kast to terninger, en rød og en blå, og beregn summen av antall øyne.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Hva er sannsynligheten for at summen av antall øyne er 8?
Hva er sannsynligheten for at summen av antall øyne er 12?

Utfallsrommet er illustrert i tabellen til høyre. Det er 36 mulige utfall. Grønn rute i tabellen viser 3 øyne på blå terning og 2 øyne på rød terning. De gule rutene viser at det er 5 kombinasjoner som gir summen 8, mens oransje rute viser den ene kombinasjonen som gir sum øyne lik 12.

$$P\left(\text{Summen av antall øyne er 8}\right) = \frac{g}{m} = \frac{5}{36}$$
$$P\left(\text{Summen av antall øyne er 12}\right) = \frac{g}{m} = \frac{1}{36}$$

Kast av to terninger. Produktet av antall øyne

Forsøk

Kast to terninger, en rød og en blå, og beregn produktet av antall øyne.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

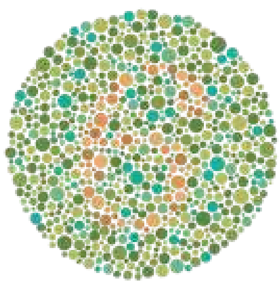
Hva er sannsynligheten for at produktet av antall øyne er 12?
Hva er sannsynligheten for at produktet av antall øyne er større enn 12?

Utfallsrommet er illustrert i tabellen til høyre. Det er 36 mulige utfall. De gule rutene viser at det er 4 kombinasjoner som gir produktet 12, mens oransje rute viser at det er 13 kombinasjoner som gir produkt større enn 12.

$$P\left(\text{Produktet av antall øyne er 12}\right) = \frac{g}{m} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$P\left(\text{Produktet av antall øyne er større enn 12}\right) = \frac{g}{m} = \frac{13}{36}$$

Fargeblindhet. Krysstabell

På en skole går det 840 elever, 360 jenter og 480 gutter. Det viser seg at 34 av guttene er fargeblinde mens bare 5 av jentene er fargeblinde.



Denne teksten beskriver **to ulike egenskaper** ved elevene på skolen. En elev er en gutt eller en jente - og en elev er fargeblind eller ikke fargeblind.

For å klare å telle opp gunstige og mulige utfall er det da lurt å sette opp en **krysstabell.**

	Jenter	Gutter	Sum

Personer med normalt fargesyn skal i

Fargeblinde	5	34	39
Normalt fargesyn	355	446	801
Sum	360	480	840

dette bildet se tallet 6. Personer som er fargeblinde for røde og grønne nyanser, ser ikke noe tall.

Vi trekker en tilfeldig elev ved skolen.

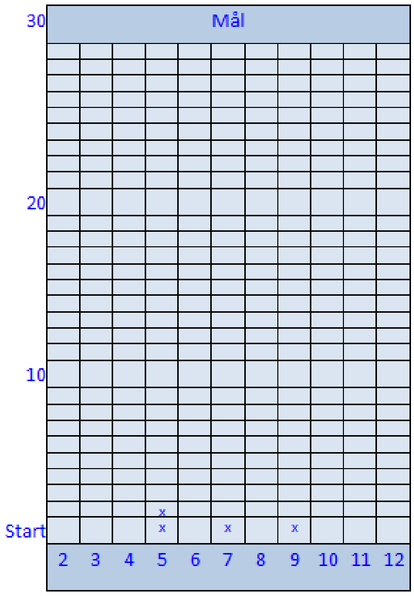
Alle elevene har like stor sannsynlighet for å bli trukket ut. Vi har altså en uniform sannsynlighetsmodell, og regelen om gunstige og mulige kan brukes.

Hva er sannsynligheten for at eleven er en fargeblind jente?
Hva er sannsynligheten for at eleven er en fargeblind gutt?
Hva er sannsynligheten for at eleven er en gutt når vi vet at vi har trukket en elev som er fargeblind?

$$P\left(\text{Fargeblind jente}\right) = \frac{5}{840}$$
$$P\left(\text{Fargeblind gutt}\right) = \frac{34}{840}$$
$$P\left(\text{Gutt når vi vet at eleven er fargeblind}\right) = \frac{34}{39}$$

Hundekappløp

Du skal nå spille et spill med to terninger sammen med noen medelever. Du trenger også et spilleskjema som vist til høyre.



Elleve hunder deltar i et hundekappløp. Hundene er nummerert med startnumre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 og 12. Hver deltaker velger seg ut en hund.

En av deltakerne begynner å kaste de to terningene. Summen av antall øyne summeres. Hvis antall øyne er 4 og 5 på de to terningene, er summen lik 9 og hund nummer 9 rykker en plass fram. Dette markeres med et kryss i ruten over tallet 9 i spilleskjemaet.

Neste deltaker kaster så terningene, og hvis summen av antall øyne blir 5, rykker hund nummer 5 fram en plass. Dette markeres med et kryss i skjemaet.

Slik fortsetter spillet. Den hunden som først kommer i mål har vunnet. Da avbrytes spillet.

Hvilken hund ville du satset på?

Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram

Beregne sannsynligheter ved å bruke Venndiagram (24749)

Valg av fag

I klasse 1STA er det 30 elever som har valgt fag for neste år.

- 9 av elevene har valgt engelsk
- 14 av elevene har valgt matematikk
- 10 elever har ikke valgt noen av disse to fagene

Vi trekker en tilfeldig elev.

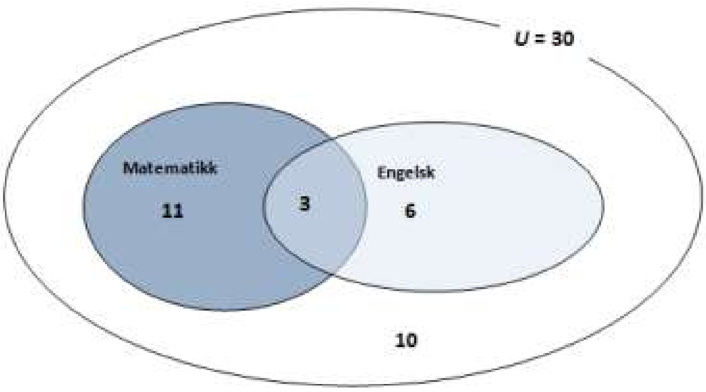
Alle elevene har like stor sannsynlighet for å bli trukket ut, så vi har en uniform sannsynlighetsmodell.

Siden summen av valg er 33 og antall elever er 30, må 3 elever ha valgt både matematikk og engelsk. Antallet som kun har valgt matematikk er da , antallet som kun har valgt engelsk er 6.

En krysstabell kan gi oversikt over situasjonen

Utfallsom	Engelsk	Ikke engelsk	Sum
Matematikk	3	11	14
Ikke matematikk	6	10	16
Sum	9	21	30

Men et **Venndiagram** gir kanskje en enda bedre oversikt. Se nedenfor.



Vi definerer hendelsene

E: Eleven har valgt engelsk
M: Eleven har valgt matematikk

Regelen om gunstig og mulige gjør at følgende sannsynligheter kan beregnes

$P(E) = \frac{g}{m} = \frac{6+3}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$
$P(M) = \frac{g}{m} = \frac{11+3}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

$P(\text{Eleven har kun valgt matematikk}) = \frac{g}{m} = \frac{11}{30}$

$P(\text{Eleven har kun valgt engelsk}) = \frac{g}{m} = \frac{6}{30} = \frac{2}{15}$

$P(E \cap M) = \frac{g}{m} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

$P(E \cup M) = \frac{g}{m} = \frac{6+3+11}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P(\text{Eleven har ikke valgt noen av fagene}) = \frac{g}{m} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Prøv deg på simulering nummer 5 i Simuleringer i sannsynlighet hvor du skal plassere elever på rett plass i Venndiagrammet!

Multiplikasjon av sannsynligheter

Multiplikasjon av sannsynligheter (24766)

Produktsetningen for uavhengige hendelser

Vi har tidligere sett på forsøket «kast med to terninger».

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ved å bruke regelen om «gunstige over mulige» kan vi finne sannsynligheten for å få summen 12, det vil si sekser på begge terningene.

$$P\left(\text{Sekser på begge terningene}\right) = \frac{g}{m} = \frac{1}{36}$$

Sannsynligheten for å få en sekser når vi kaster den røde terningen er $\frac{1}{6}$. Sannsynligheten for å få en sekser når vi kaster den blå terningen er også $\frac{1}{6}$. Dette gjelder **uavhengig** av om det ble en sekser på rød terning eller ikke. Om vi kaster rød terning først og får en sekser, endrer ikke dette sjansene for å få en sekser på den blå terningen.

Vi sier at hendelsene «å få sekser på rød terning» og «å få sekser på blå terning» er **uavhengige hendelser**.

Vi så ovenfor at sannsynligheten for å få sekser i begge kastene er lik $\frac{1}{36}$. Denne sannsynligheten får vi også ved å multiplisere sannsynlighetene for å få sekser på hver av terningene.

$$\begin{aligned}&P\left(\text{Sekser på rød terning og sekser på blå terning}\right)\\&= P\left(\text{Sekser på rød terning}\right) \cdot \left(\text{Sekser på blå terning}\right)\\&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

Dette gjelder generelt og kalles produktsetningen for uavhengige hendelser.

To hendelser er **uavhengige** hvis en opplysning om at den ene har inntruffet ikke endrer sannsynligheten for at den andre skal inntreffe.

For to **uavhengige hendelser,** *A* og *B* er

$$P\left(A \text{ og } B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$$

A **og** *B* betyr at **både** A **og** B inntreffer.

Vi erstatter ordet «og» med symbolet «∩» og $A \cap B$ leses også som «***A* snitt *B***». Vi får

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$$

Setningen gjelder også for en **serie** av hendelser.

Tippekupong

Hvor stor er sannsynligheten for å få 12 rette i fotballtipping når vi fyller ut én rekke på en tippekupong helt tilfeldig?

Løsning

Vi kan oppfatte dette som 12 hendelser. Hver kamp kan ende med hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). I hvert kamp er sannsynligheten for å tippe rett lik $\frac{1}{3}$.

Sannsynligheten for å tippe rett i hver kamp er den samme uavhengig av om vi har tippet rett eller feil i tidligere kamper.

Vi har altså 12 uavhengige hendelser.

Sannsynligheten for å tippe 12 rette er da lik $\frac{1}{3}$ multiplisert med seg selv 12 ganger.

$$P\left(12 \text{ rette}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = \frac{1}{531441} \approx 0,0000019 = 0,00019\%$$

Valg av leder og nestleder

Vi skal velge ut leder og nestleder til en festkomité i klassen 1A. Selvfølgelig vil alle være leder eller nestleder. For at valget skal være tilfeldig, skrives de 30 navnene på elevene i klassen på like lapper, som legges i en eske. Den første vi trekker ut, skal være leder og den andre nestleder.

Sannsynligheten for at Karoline blir leder er $\frac{1}{30}$. Når nestleder skal trekkes, er det 29 å velge mellom.

Sannsynligheten for at Maria blir nestleder, forutsatt at hun ikke ble leder, er da $\frac{1}{29}$. Dette gjelder **uavhengig** av hvem av de andre som ble leder.

Vi definerer hendelsen *A*

A: Karoline blir leder og Maria blir nestleder

Ifølge produktsetningen for uavhengige hendelser kan vi regne ut sannsynligheten for hendelsen *A*

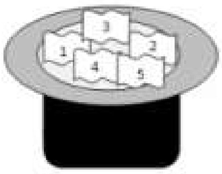
$$P\left(A\right) = \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{29} = \frac{1}{870} \approx 0,0011$$

Det er altså 0,1 % sjanse for akkurat denne kombinasjonen.

Betinget sannsynlighet og den generelle produktsetningen

[Betinget sannsynlighet og den generelle produktsetningen (134781)]

Celine og Maren trekker hver sin lapp fra en hatt som inneholder fem lapper med tallene fra 1 til 5.



Vi definerer hendelsene

A: På Celines lapp står det et partall
B: På Marens lapp står det et partall

Hvis Celine trekker den første lappen, er det i hatten 2 lapper med partall og 3 lapper med oddetall. Sannsynligheten for å trekke en lapp med partall er

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

Hvis Celine trekker et partall, er det igjen 1 lapp med partall og 3 lapper med oddetall når Maren trekker og sannsynligheten for at Maren også trekker et partall er lik $\frac{1}{4}$.

Hvis Celine **ikke** trekker et partall, er det igjen 2 lapper med partall og 2 lapper med oddetall når Maren trekker og sannsynligheten for at Maren trekker et partall er lik $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Sannsynligheten for *B* **avhenger** av om hendelsen *A* inntreffer eller ikke. Vi sier at **hendelsene *A* og *B* er avhengige**.

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* har inntruffet er lik $\frac{1}{4}$.

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* **ikke** har inntruffet er lik $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Vi kaller dette **betinget sannsynlighet**. Vi bruker skrivemåten $P(B|A)$ som vi leser «sannsynligheten for B gitt A». Vi har at

$$P(B|A) = \frac{1}{4}$$

Vi bruker skrivemåten for **ikke *A***. Da er

$$P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for at det skal stå et partall på **begge** lappene, det vil si at både hendelse *A* **og** hendelse *B* inntreffer, finner vi ved å multiplisere sannsynlighetene

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Hvis Maren trekker den første lappen, gjelder tilsvarende at

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

Tilsvarende blir nå

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \text{ og } P(A|\overline{B}) = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for at det skal stå et partall på begge lappene, det vil si at **både** hendelse *B* **og** hendelse *A* inntreffer finner vi ved å multiplisere sannsynlighetene

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Betinget sannsynlighet

Sannsynligheten for at *B* inntreffer når vi vet at *A* har inntruffet skriver vi som $P\left(B|A\right)$ og leses som «sannsynligheten for *B* gitt *A*». Vi kaller det for betinget sannsynlighet.

Den generelle produktsetningen for sannsynligheter

Sannsynligheten for at to hendelser, **både** *A* **og** *B* skal inntreffe, er

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)$$

For uavhengige hendelser er $P\left(B|A\right)=P\left(B\right),\ \text{og}\ P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$

Beregne sannsynligheter ved å bruke valgtre

[Beregne sannsynligheter ved å bruke valgtre (24778)]

Matematikkprøve

Tenk deg en prøve i matematikk med to oppgaver.

På hver av oppgavene skal du krysse av i én av fire ruter for rett svar.

Du er ikke forberedt, og alle svaralternativene virker like sannsynlige, så du bare gjetter.

Hva er sjansene for å få null rette svar, ett rett svar eller to rette svar?

Vi definerer hendelsene

R: Rett svar på ett spørsmål

G: Galt svar på ett spørsmål

Sannsynligheten for rett svar på én oppgave blir $P\left(R\right)=\frac{1}{4}=0,25$

Sannsynligheten for galt svar på én oppgave blir $P\left(G\right)=\frac{3}{4}=0,75$

Sannsynligheten for å få to rette svar blir $P\left(R\cap R\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

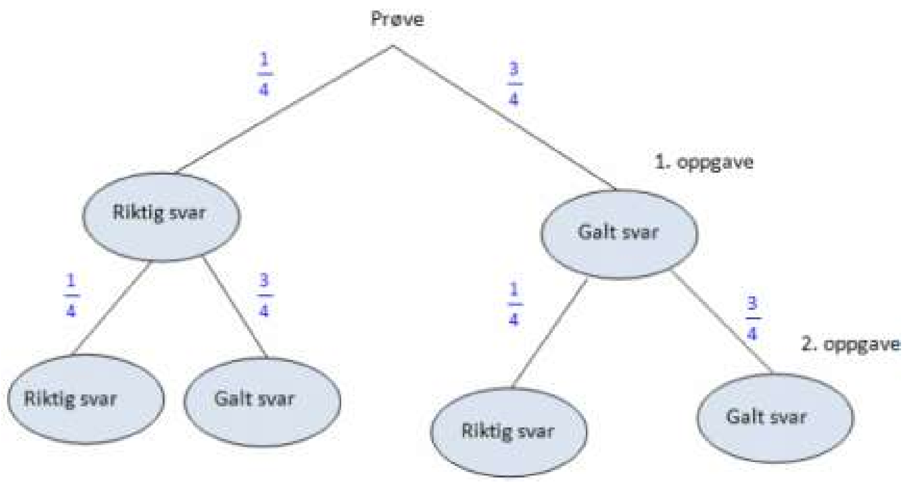
Sannsynligheten for å få null rette svar blir $P\left(G\cap G\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

Men det er to muligheter for å få ett rett svar, først rett svar og så galt svar, eller, først galt svar og så rett svar.

$$P\left(\text{Ett riktig svar}\right)=P\left(R\cap G\right)\ \text{eller}\ P\left(G\cap R\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=$$

Husk at vi kan legge sammen sannsynlighetene for to ulike hendelser hvis hendelsene ikke har felles utfall!

Det er veldig nyttig å bruke valgtre for å få oversikt over slike situasjoner.



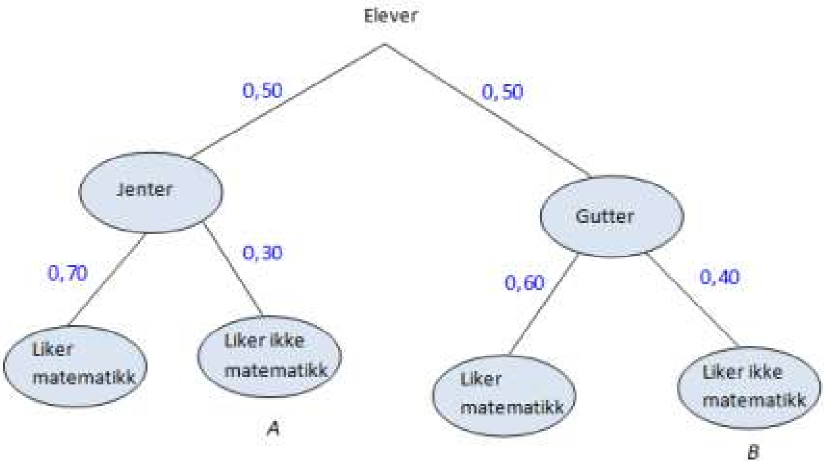
$$P\left(\text{Ett rett svar}\right)=P\left(\left(R\cap G\right)\ \cup\ \left(G\cap R\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{6}{16}$$

Hvem liker ikke matematikk

I en klasse på 30 elever er det 50 % jenter. 70 % av jentene liker matematikk, mens 60 % av guttene liker matematikk.

Finn sannsynligheten for at en elev ikke liker matematikk.

Vi kan bruker valgtre for å få oversikt over situasjonen.



Vi trekker en tilfeldig elev fra klassen.

Sannsynligheten for at eleven ikke liker matematikk er lik sannsynligheten for at eleven er en gutt som ikke liker matematikk pluss sannsynligheten for at eleven er en jente som ikke liker matematikk.

Vi definerer hendelsene

A: Eleven vi trekker er en jente som ikke liker matematikk

B: Eleven vi trekker er en gutt som ikke liker matematikk

Vi kan da skrive

$$\begin{aligned}P\left(\text{Eleven liker ikke matematikk}\right) &= P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) \\ &= 0,50 \cdot 0,30 + 0,50 \cdot 0,40 = 0,15 + 0,20 = 0,35\end{aligned}$$

Det er altså 35 % av elevene som ikke liker matematikk.

Sammendrag sannsynlighet

Sammendrag (24846)

Begrep	Forklaring	Eksempel
Utfall	Enkeltresultatene i et forsøk	Kron i et myntkast
Utfallsrom	Alle utfallene i et forsøk	Kron og mynt i et myntkast
Sannsynlighet	Relativ frekvens ved mange forsøk	P(Antall øyne lik 3 i et terningkast) = $\frac{1}{6}$
Uniform sannsynlighetsmodell	Alle utfallene er like sannsynlige $\textbf{Sannsynlighet} = \frac{\textbf{Antall gunstige utfall}}{\textbf{Antall mulige utfall}}$	Myntkast – kast med terning – lotto - trekk av kort fra kortstokk
Hendelse	Sammensatt av ett eller flere utfall	En hendelse i terningkast kan være at antall øyne er to eller tre
Den generelle addisjonssetningen	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
Addisjonssetningen når A og B ikke har felles utfall	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Ingen utfall er med både i A og B
Produktsetningen for uavhengige hendelser	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Gjelder også når det er flere uavhengige hendelser
Produktsetningen	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	

Annet

Sannsynlighet spill

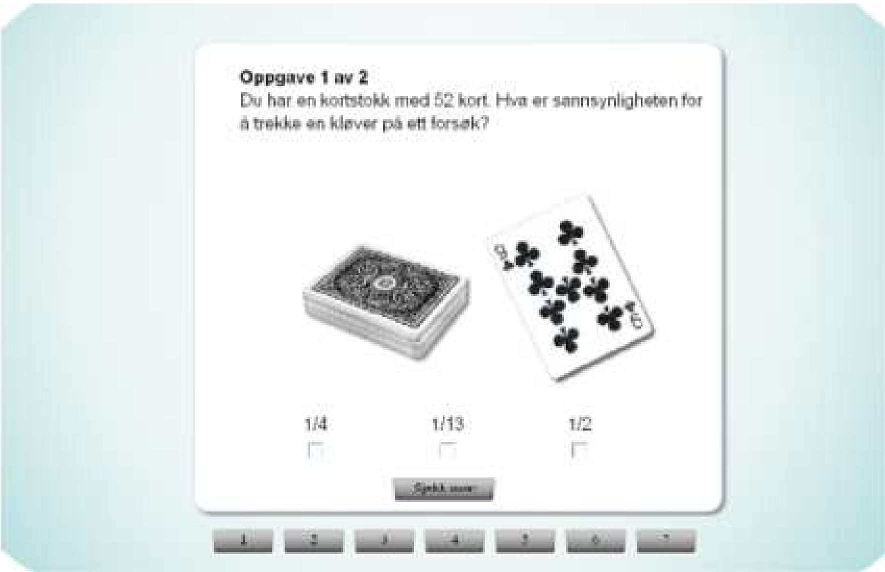
Forfatter: Mintra AS / NDLA
[Spill i sannsynlighet (68453)]

Et spill hvor du får prøvd deg på mange områder i sannsynlighet. Her finnes både hjelpfunksjon med e-forelesninger, oppgaver og simuleringer.

Sannsynlighet oppgaver

Forfatter: Mintra AS / NDLA
Oppgaver i sannsynlighet (68455)

Her kan du gjøre oppgavene til spillet om sannsynlighet. Klikk på bildet for å starte.



Sannsynlighet hjelp

Forfatter: Mintra AS / NDLA
E-forelesning i sannsynlighet (68457)

Her kan du kjøre hjelpfunksjonen som en egen e-forelesning. Klikk på bildet for å sette i gang. Deretter peker du på spillbrettet for å velge begrep.

Simuleringer i GeoGebra

Forfatter: Olav Kristensen, Stein Aanensen
Simuleringer i GeoGebra (49401)

Simulering i GeoGebra

Vedlegg i GeoGebra åpnes best i nettlesaren Firefox.

Terningkast

100 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27093

1 000 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27095

10 000 kast med terning / fil
http://ndla.no/nb/node/27096

Myntkast

100 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27097

1 000 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27098

10 000 kast med mynt / fil
http://ndla.no/nb/node/27099

Simulering av myntkast

Forfatter: CyberBook AS, YDP
[Simulering av myntkast (24647)]

Myntkast

Simulering av ruletthjul

Forfatter: CyberBook AS, YDP
Simulering av ruletthjul (24656)

Rulett

Funksjoner

Teori

Funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet (13527)

I en butikk koster eplene 12 kroner per kilo. Hvor mye du må betale er avhengig av hvor mange kilo du kjøper.

Eirik plukker moreller hver sommer. Han har en fast timelønn på 50 kroner, i tillegg tjener han 5 kroner for hver kilo bær han plukker. Lønnen hans er altså avhengig av hvor mange kilo bær han plukker.

Dette kapittelet handler om hvordan noen størrelser varierer avhengig av andre størrelser. Vi skal se på hvordan vi kan beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av funksjoner.

Hvor mye du må betale er avhengig av hvor mange kilo du kjøper.

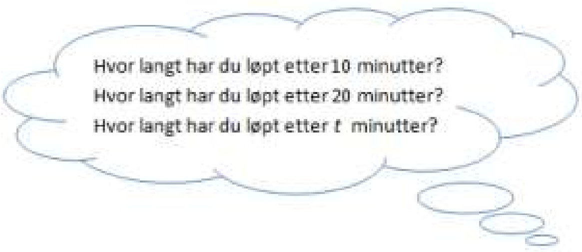
Funksjoner representert ved formler

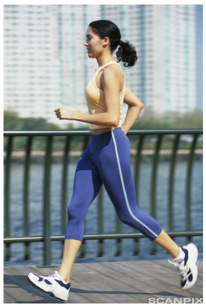
[Funksjoner representert ved formler (13530)](#)

Tenk deg at du er på en joggetur der du holder en konstant fart. Etter joggeturen er du interessert i å finne ut hvor langt du har løpt ved ulike tidspunkt.

Du finner at du har løpt 8 km i løpet av 50 minutter, det vil si

$\frac{8000 \text{ meter}}{50 \text{ minutt}} = 160 \text{ meter per minutt}$





En funksjon kan for eksempel vise sammenheng mellom strekning og tid.

Når du nå kjenner den konstante farten, 160 meter per minutt, kan du regne ut hvor lang strekning du har løpt ved å bruke formelen

$$S = 160t$$

Etter 10 minutter har du løpt $S = 160 \cdot 10 = 1\,600$ meter.

Når du vet hvor lang tid du har brukt, kan du regne ut hvor langt du har løpt. Vi sier at strekningen S **er en funksjon av** tiden t.

Vi skriver derfor ofte $S(t)$ («S av t») i stedet for S, og får da

$$S(t) = 160t$$

Tiden og strekningen varierer og kalles derfor **variabler**.

Uttrykket $160t$ kalles for funksjonsuttrykket til funksjonen S.

Sammenhengen mellom størrelsene tid og strekning er her vist ved en formel. Vi sier at **funksjonen S er representert med en formel**.

For å markere at vi regner ut avstanden etter for eksempel 12 minutter, skriver vi

$$S(12) = 160 \cdot 12 = 1920$$

Skrivemåten $S(12)$ betyr strekningen etter 12 minutter. Vi leser «S av 12».

Etter 12 minutter har du løpt 1920 meter.

Generelt sier vi at ***y* er en funksjon av *x*** dersom **hver verdi av *x* gir nøyaktig én verdi av *y***.

For å vise at y er en funksjon av x, skriver vi ofte $y(x)$ (som vi leser «y av x»).

Ved strekningsfunksjonen ovenfor kan du regne ut hvor langt du har løpt etter 10 minutter og etter 20 minutter

$$S(10) = 160 \cdot 10 = 1600$$
$$S(20) = 160 \cdot 20 = 3200$$

Etter 10 minutter har du løpt 1600 meter og etter 20 minutter har du løpt 3200 meter.

Definisjonsmengde

Hvor lenge er det naturlig at en joggetur varer? I de fleste sammenhenger vil det ikke være naturlig å la *t* i funksjonsuttrykket ovenfor gå lenger enn til ca. 100 minutter, dvs. 1 time og 40 minutter. Dersom vi lar funksjonen *S* være gyldig i tidsintervallet fra og med 0 til og med 100 minutter, sier vi at funksjonen *S* har **definisjonsmengden** [0,100], og vi skriver

$$D_S = [0,100]$$

D står for definisjonsmengden, og *S* viser til funksjonen *S*.

Vi sier at funksjonen *S* er gitt ved

$$S(t) = 160t \quad D_S = [0,100]$$

Funksjoner representert ved grafer og verditabeller

[Funksjoner representert ved grafer og verditabeller (13537)](#)

Vi ser på funksjonen S gitt ved

$$S\left(t\right)=160 \qquad D_s=\left(0,100\right)$$

Funksjonen er her representert med en formel.

t (minutter)	$S(t)=160t$ (meter)	$S(t)$ (meter)
0	$160\cdot 0$	0
10	$160\cdot 10$	1600
50	$160\cdot 50$	8000
100	$160\cdot 100$	16000

Vi kan lage en **verditabell** ved først å velge ut noen verdier for t som ligger i definisjonsområdet, og så regne ut de tilsvarende funksjonsverdiene, $S(t)$. Verditabellen til høyre viser et utvalg av sammenhørende verdier for t og $S(t)$.

Funksjonen er nå representert med en verditabell.

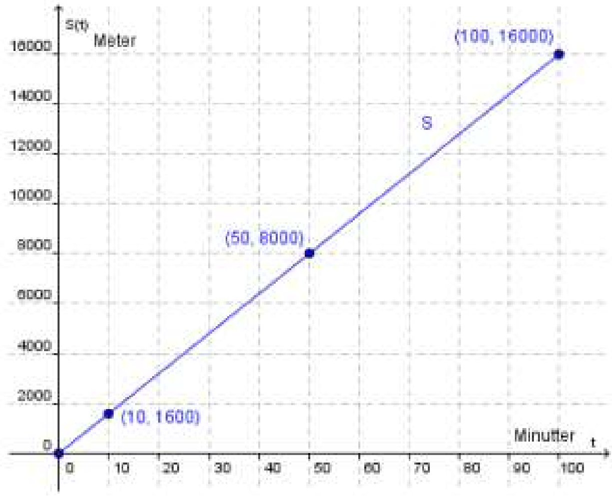
De sammenhørende verdiene fra verditabellen merker vi av som **punkter i et koordinatsystem** hvor t avsettes langs førsteaksen og $S(t)$ langs andreaksen.

Aksene må tilpasses slik at alle punktene i verditabellen «får plass» i grafvinduet.

I vårt eksempel ligger punktene på en rett linje. Vi trekker den rette linjen gjennom punktene. Denne linjen kalles for **grafen til funksjonen**.

Hvis punktene ikke ligger på en rett linje, tegner vi en kurve som går gjennom punktene.

Alle punktene som ligger på grafen til funksjonen viser sammenhørende verdier for t og $S(t)$.



Funksjonen er nå representert med en graf.

Verdimengde

Langs førsteaksen finner vi t - verdiene, altså definisjonsmengden til funksjonen. Langs andreaksen finner vi funksjonsverdiene $S(t)$. Vi ser at verdiene langs andreaksen går fra 0 til 16000 når t - verdiene gjennomløper **definisjonsmengden**, $D_s=\left(0,100\right)$. **Verdimengden** er derfor $V_s=\left(0,16\,000\right)$.

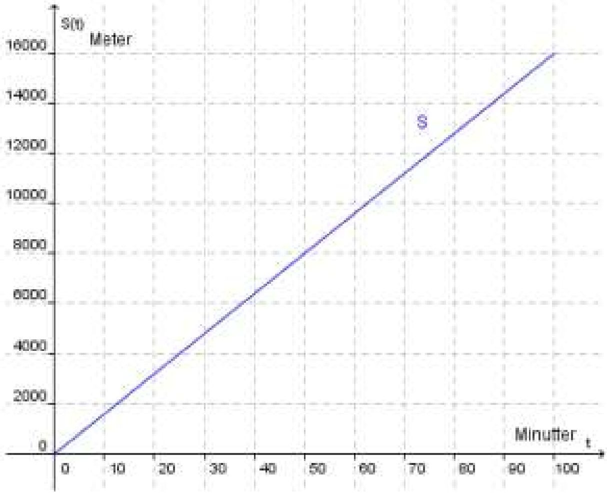
Lær deg hvordan vi oppgir definisjonsmengden og verdimengden til en funksjon!

Grafer og verditabeller til funksjoner digitalt

[Grafer og verditabeller til funksjoner digitalt (13544)](#)

Grafer til funksjoner digitalt

Vi kan enkelt tegne grafen til en funksjon ved hjelp av digitale verktøy. Her har vi tegnet grafen til funksjonen S gitt ved
$S(t) = 160t$ i GeoGebra.



Vi skriver
$S(x) = 160x$
i inntastingsfeltet i GeoGebra og grafen tegnes når vi taster «Enter».

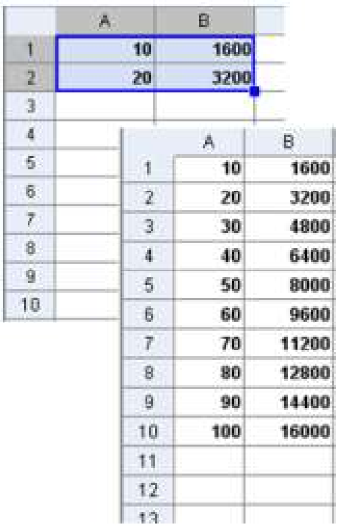
For å avgrense funksjonen til definisjonsområdet, kan vi skrive

$$S(t) = \text{funksjon}[160t, 0, 100]$$

Verditabeller til funksjoner digitalt

Vi kan også enkelt lage en verditabell i GeoGebra. (Velg «Vis» og «Regneark».)

Skriv 10 i rute A1 og 20 i rute A2 i regnearket i GeoGebra. I rute B1 skriver du $S(10)$ og i rute B2 skriver du $S(20)$. Funksjonsverdiene regnes ut og vises i rutene.



	A	B
1	10	1600
2	20	3200

	A	B
1	10	1600
2	20	3200
3	30	4800
4	40	6400
5	50	8000
6	60	9600
7	70	11200
8	80	12800
9	90	14400
10	100	16000

Merk så de fire rutene (blå ramme). Dra «håndtaket» (nederst i høyre hjørne i den blå rammen) ned til linje 10, og verditabellen er komplett.

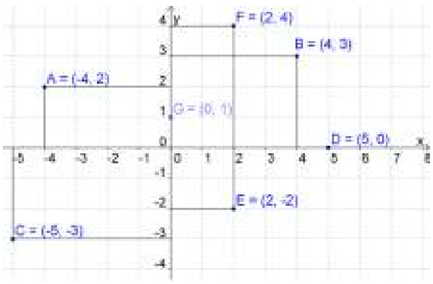
Du står selvfølgelig fritt til å velge andre verdier for t i verditabellen.

Koordinatsystemet

Koordinatsystemet (122989)

Et koordinatsystem består av to rette linjer, også kalt akser, som står vinkelrett på hverandre i et plan.

Det er vanlig å kalle de to linjene(aksene) for *x* - aksen og *y* - aksen. Et annet vanlig navn på *x* - aksen er **førsteaksen**. *y* - aksen kalles også for **andreaksen**.



Vi avsetter en tallinje langs hver av de to aksene. Skjæringspunktet mellom aksene kalles **origo**.

Hvert punkt i planet har sin egen adresse eller sine egne **koordinater**. Punktet *B* har for eksempel koordinatene (4,3). Førstekoordinaten, eller *x* - koordinaten, som her er 4, forteller hvor vi treffer *x* - aksen hvis vi trekker en linje fra punktet vinkelrett på denne aksen. Vi havner i $x = 4$.

Andrekoordinaten, eller *y* - koordinaten, som her er 3, forteller hvor vi treffer *y* - aksen hvis vi trekker en linje vinkelrett på denne aksen. Vi havner i $y = 3$.

Sjekk om det samme gjelder for de andre punktene som er markert.

Bruk av koordinatsystemet

Koordinatsystemet kan blant annet brukes til å gi et «bilde» av sammenhenger mellom størrelser, en grafisk fremstilling.

Hanne jobber deltid som telefonselger og har en timelønn på 125 kroner. Lønnen avhenger av hvor mange timer hun jobber.

Jobber hun 10 timer, vil lønnen være 1250 kroner. Jobber hun 5 timer, vil lønnen være 625 kroner osv.

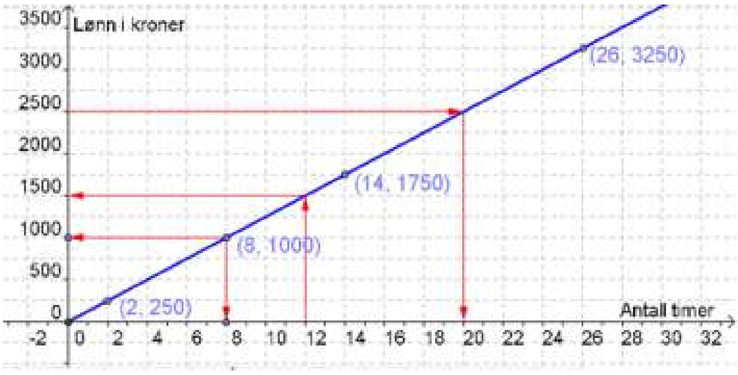
Vi kan regne ut flere lønnsverdier og samle resultatene i en tabell

Antall arbeidstimer	2	5	8	11	14	20	26	32
Lønn (kroner)	250	625	1 000	1 375	1 750	2 500	3 250	4 000

Men vi kan få en mye bedre oversikt over sammenhengen mellom antall timer og lønn ved en grafisk framstilling i et koordinatsystem.

Av tabellen ser vi at 8 timers arbeid gir en lønn på 1000 kroner. Vi illustrerer denne sammenhengen ved å plotte punktet (8,1000) i koordinatsystemet. Når vi går fra punktet (8,1000) og «vinkelrett» ned på *x* - aksen, kommer vi til tallet 8, som viser at antall arbeidstimer er 8. Når vi går fra punktet (8,1000) og «vinkelrett» bort på *y* - aksen, kommer vi til tallet 1000 , som viser at lønnen er 1000 kroner når antall arbeidstimer er 8.

Vi gjør tilsvarende med de andre lønnsverdiene fra tabellen, og alle punktene blir til den blå linjen som «billedlig», eller grafisk, viser sammenhengen mellom antall arbeidstimer og lønn. For alle punkter på denne linjen viser *x* - koordinaten antall arbeidstimer, og *y* - koordinaten den lønnen som disse timene gir.



Vi kan for eksempel starte i tallet 12 på *x* - aksen, gå «vinkelrett» opp fra *x* - aksen til vi treffer den blå linjen, gå derfra «vinkelrett» bort på *y* - aksen og komme til tallet 1500. Det viser at lønnen er 1500 kroner når antall arbeistimer er 12.

Motsatt kan vi for eksempel starte i tallet 2500 på *y* - aksen, gå «vinkelrett» ut fra *y* - aksen til vi treffer den blå linjen, gå «vinkelrett» ned på *x* - aksen og kommet til tallet 20 på *x* - aksen. Det viser at når lønnen er 2500 kroner, så er antall arbeidstimer 20.

Som du sikkert har skjønt, så er lønnen til Hanne en funksjon av antall timer hun jobber.

Lineære funksjoner

Lineære funksjoner

[Lineære funksjoner (100932)]

Grafen til funksjonen *S* gitt ved $S\left(x\right)=160t$, ble en rett linje. Slike funksjoner kaller vi **lineære funksjoner**.

Lineære funksjoner har også det til felles at funksjonsverdien kan skrives som et konstant tall multiplisert med en variabel pluss et konstant tall.

En **lineær funksjon** er en funksjon som kan skrives på formen

$f\left(x\right)=\mathrm{ax}+b$ der *a* og *b* er konstante tall.

Det er også vanlig å bruke bokstaven *y* for en generell funksjon.

Da brukes vanligvis skrivemåten

$$y=\mathrm{ax}+b$$

Her er det underforstått at *y* er en funksjon av *x*.

Stigningstall og konstantledd

[Stigningstall og konstantledd (13549)](#)

Som vi så på forrige side i menyen, kan en lineær funksjon skrives på formen

$$f(x) = \mathrm{ax} + b$$

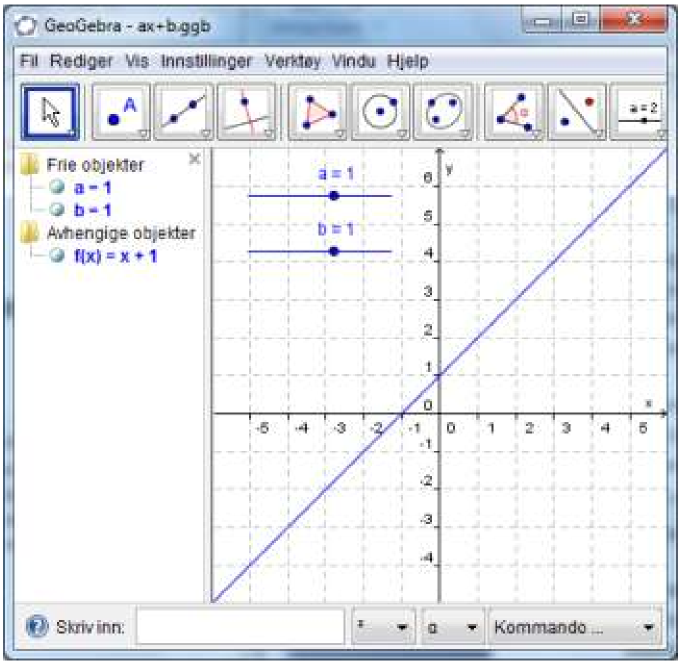
der *a* og *b* er konstante tall.

Ved hjelp av GeoGebra kan du undersøke hvordan grafen til en lineær funksjon endrer seg når du endrer *a* og *b*.

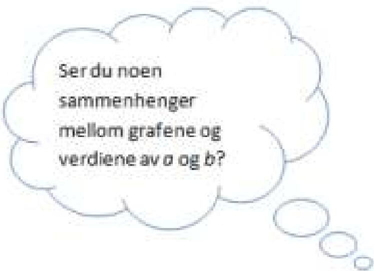
På skrivelinjen i GeoGebra skriver du $a = 1$ (og trykker «Enter»). Deretter skriver du $b = 1$. Skriv så inn $f(x) = a \cdot x + b$. Husk å skrive gangetegnet mellom *a* og *x*.

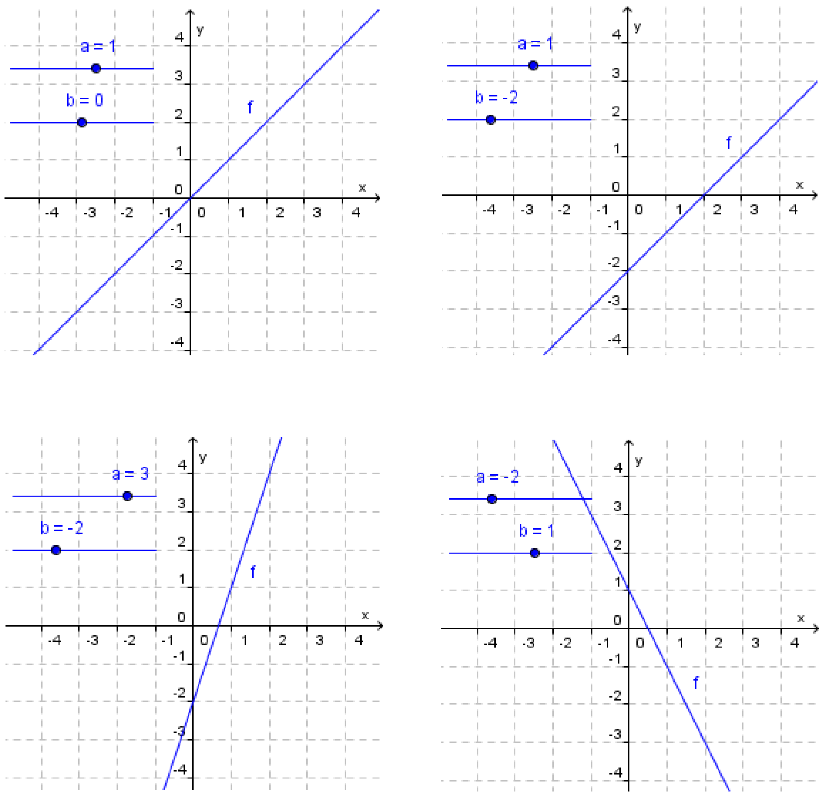
Høyreklikk på $a = 1$ i algebravinduet og huk av for «Vis objekt». Glideren *a* vises i grafvinduet. Gjør det samme for *b*.

Velg «Flytt» på verktøylinjen og venstreklikk på glider *a*. Bruk piltastene eller «dra» i glideren for å endre verdien til *a*. Se hva som skjer. Gjør tilsvarende for glider *b*.

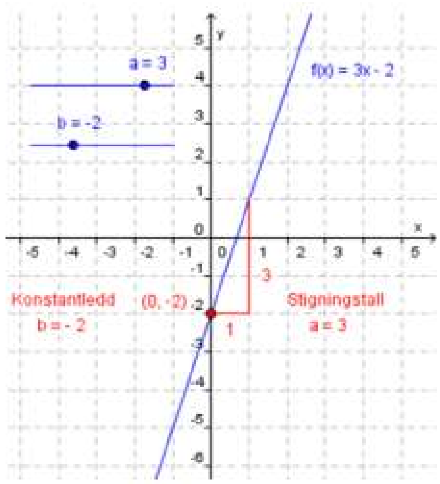


Nedenfor ser du grafen til funksjonen $f(x) = a \cdot x + b$ for noen ulike verdier av *a* og *b*.





Til høyre har vi tegnet grafen til *f* for $a = 3$ og $b = -2$. Det betyr at $f(x) = 3 \cdot x - 2$. Ser du at grafen skjærer *y* - aksen der $y = -2$?



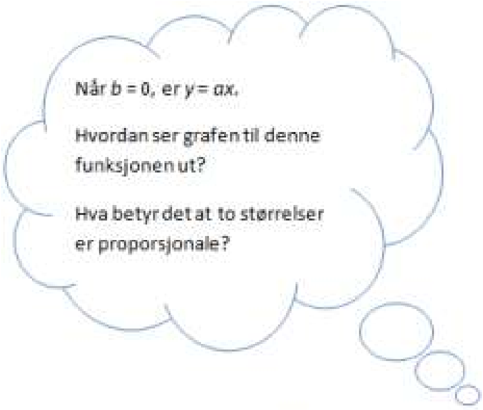
Grafen skjærer andreaksen når $x = 0$ og $f(0) = a \cdot 0 + b = 0$.

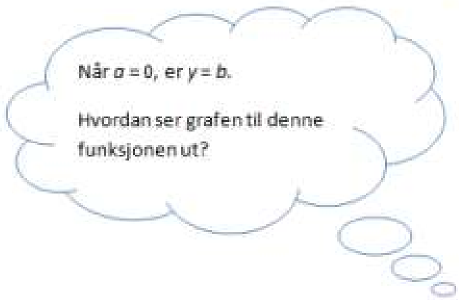
Tallet b kalles konstantleddet. Tallet a viser hvor mye grafen stiger når x øker med 1 enhet. Tallet a kalles stigningstallet. Hvis stigningstallet er negativt, synker grafen når x øker.

Du bør merke deg **to spesialtilfeller** av lineære funksjoner.

Det ene er når $b = 0$. Da er $y = \mathbf{ax}$ og y og x er **proporsjonale størrelser**. Tallet a kalles i dette tilfellet proporsjonalitetskonstanten.

Det andre spesialtilfellet er når $a = 0$. Da er $y = b$.





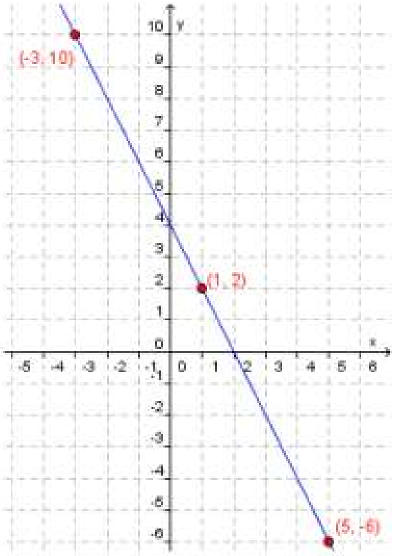
Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon

Hvordan tegne grafen til en lineær funksjon (13561)

Hvordan kan vi raskt tegne grafen til den lineære funksjonen g gitt ved $g(x) = -2x + 4$?

Metode 1

Vi tegner grafen på grunnlag av verditabellen

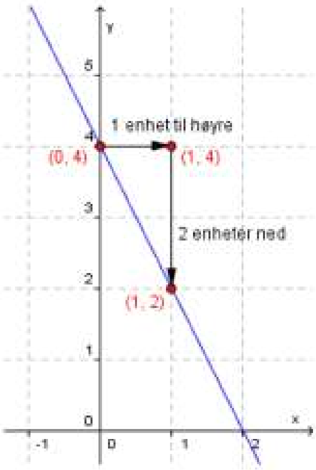


Vi vet at grafen blir en rett linje. Da er det egentlig nok med to punkter i verditabellen, men det er lurt å ta med et tredje punkt for kontrollens skyld.
Vi klarer oss godt med hoderegning her og fyller ut tabellen!

x	-3	1	5
***g*(*x*)**	10	2	6

Metode 2

Vi tegner grafen på grunnlag av stigningstall og konstantledd



Siden konstantleddet $b = 4$, skjærer grafen andreaksen for $y = 4$. Punktet (0,4) ligger derfor på grafen.

Stigningstallet er -2. Vi tar utgangspunkt i punktet (0,4), går en enhet til høyre, og stigningstallet forteller at vi må bevege oss parallelt med *y*-aksen 2 enheter ned for igjen å møte grafen.

Vi kommer til punktet (1,2). Vi har da to punkter på grafen og kan trekke linjen gjennom disse punktene.

Metode 3

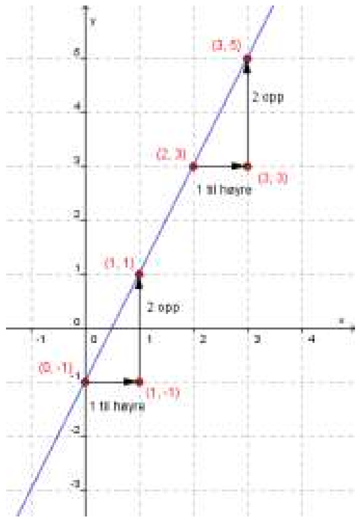
Vi tegner grafen med et digitalt verktøy

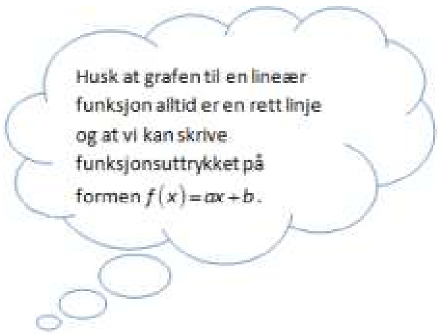
Skriv inn funksjonsuttrykket på skrivelinjen i det digitale verktøyet du bruker, og tegn grafen.

Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje

[Hvordan finne funksjonsuttrykket til en rett linje (13570)](#)

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet grafen til en lineær funksjon.



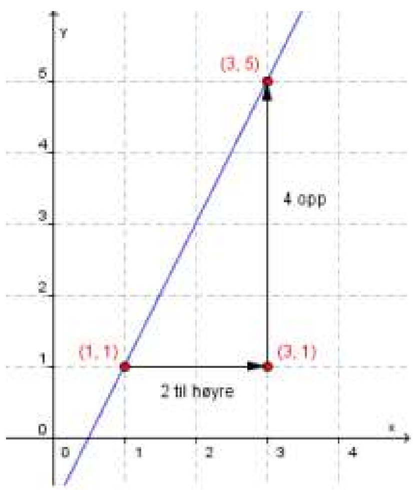


Grafen skjærer *y* -aksen i punktet (0,–1). Det betyr at *b* = –1.
Når vi går en enhet til høyre fra (0,-1), må vi gå to opp på *y*-aksen for å treffe grafen. Det betyr at $a = 2$.

Funksjonsuttrykket blir derfor *f*(*x*) = *2x -1*

Legg merke til at vi like gjerne kan ta utgangspunkt i et annet punkt på grafen for å finne stigningstallet. Vi ser av grafen at vi får samme resultat om vi tar utgangspunkt i punktet (2,3).

Det er heller ikke nødvendig å gå én enhet til høyre for å finne stigningstallet. Ved å starte i punktet (1, 1) og for eksempel gå to enheter til høyre, må vi gå fire enheter opp langs y-aksen for å treffe grafen.



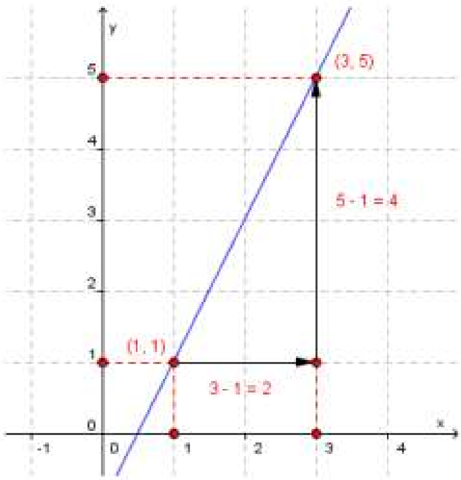
Stigningstallet blir

$$a = \frac{4}{2} = 2$$

Dette kan vi også regne oss fram til med utgangspunkt i de to punktene på grafen:

$$a = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

I



telleren har vi differensen mellom y-koordinatene og i nevneren differensen mellom x-koordinatene.

Se koordinatsystemet til høyre.

Mer om stigningstall og konstantledd

Mer om stigningstall og konstantledd (13579)

Vi kan alltid regne som vist ovenfor når vi skal finne stigningstallet til en rett linje.

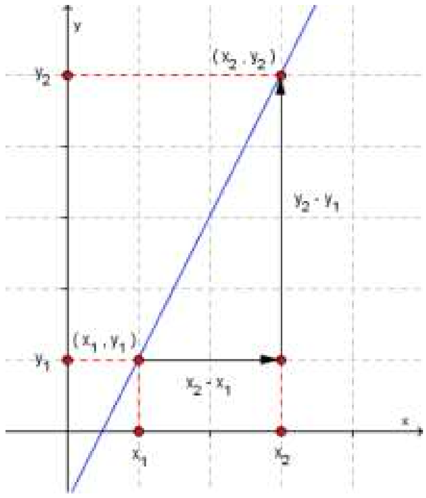
Gitt en rett linje som går gjennom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Det har blitt vanlig å skrive punktkoordinatene på denne måten. Tallene 1 og 2 kalles for indekser, og vi sier punkt 1 og punkt 2.

I koordinatsystemet til høyre ser du at stigningstallet til linjen er

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Konstantleddet, *b*, finner vi ved å se hvor grafen skjærer andreaksen.



Likningen for en rett linje. Ettpunktsformelen

[Likningen for en rett linje. Ettpunktsformelen (13585)]

I innledningen til dette kapitlet definerte vi en lineær funksjon som en funksjon som kan skrives på formen $f(x) = \mathrm{ax} + b$ hvor *a* og *b* er konstante tall. Grafen til en lineær funksjon er en rett linje.

Vi sa også at det er vanlig å bruke bokstaven *y* for en generell funksjon og at vi da bruker skrivemåten $y = \mathrm{ax} + b$.

Uttrykket $y = \mathrm{ax} + b$ kan også oppfattes som en **likning** med *x* og *y* som ukjente. Vi kaller dette uttrykket for **likningen for en rett linje**.

Når alle løsninger av likningen markeres i koordinatsystemet, får vi alle punktene på linjen, det vil si grafen til den lineære funksjonen.

Vi skal nå se hvordan vi finner likningen for en vilkårlig rett linje.

En rett linje går gjennom punktet (x_1, y_1) og som har stigningstall *a*.
La (x, y) være et vilkårlig punkt på linjen.
Vi har da

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

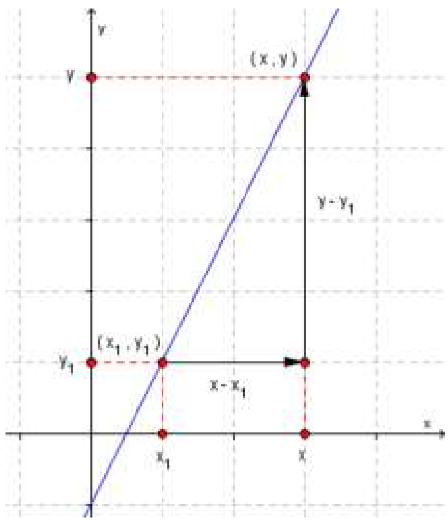
Vi multipliserer med nevneren $(x - x_1)$ på begge sider av likhetstegnet og får

$$a(x - x_1) = y - y_2$$

Dette kan vi snu på og får da

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Denne formelen kalles **ettpunktsformelen** for den rette linjen. Når stigningstallet og et punkt på en rett linje er kjent, kan likningen for linjen finnes ved å bruke ettpunktsformelen.



Ettpunktsformelen

Likning for en rett linje gjennom punktet (x_1, y_1) med stigningstall a er gitt ved

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Hvis vi ikke kjenner stigningstallet, men får oppgitt at linjen går gjennom to oppgitte punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), kan vi først finne stigningstallet ved formelen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Deretter setter vi denne verdien for *a* inn i ettpunktsformelen og bruker i tillegg et av de oppgitte punktene som kjent punkt.

Alternative metoder for å finne likningen for en rett linje

Alternative metoder for å finne likningen for en rett linje (100990)

1. Stigningstallet og ett punkt på linjen er gitt

Du får oppgitt at en rett linje har stigningstall $a = 2$ og går gjennom punktet $(1, -3)$.

Finn likningen for linjen.

Løsning

Generell likning for en rett linje er

$$y = \text{ax} + b$$

$a = 2$ gir at likningen blir

$$y = 2x + b$$

Punktet $(1, -3)$ ligger på linjen og er derfor en løsning av likningen.

Vi setter inn verdien i likningen og får

$$\begin{aligned} -3 &= 2 \cdot 1 + b \\ b &= -3 - 2 \\ b &= -5 \end{aligned}$$

Likningen for linjen blir $y = 2x - 5$.

2. To punkter på linjen er gitt

Du får oppgitt at en rett linje går gjennom punktene $(-2, -3)$ og $(1, 3)$.

Finn likningen for linjen.

Løsning

Siden punktene $(-2, -3)$ og $(1, 3)$ ligger på linjen, må koordinatene til disse punktene passe i den generelle likningen $y = \text{ax} + b$.

Vi får et likningssett med to ukjente, *a* og *b*

$$\begin{array}{lcl} -3 = a \cdot (-2) + b & \text{og} & 3 = a \cdot 1 + b \\ -3 = -2a + b & & 3 = a \cdot 1 + (-3 + 2a) \\ b = -3 + 2a & & 3 = a - 3 + 2a \\ b = -3 + 2 \cdot 2 & & 3a = 6 \\ b = 1 & & a = 2 \end{array}$$

Likningen for linjen blir $y = 2x + 1$.

Skjæringspunkt mellom to rette linjer

[Skjæringspunkt mellom to rette linjer (13599)](#)

Vi kan finne skjæringspunktet mellom to rette linjer grafisk eller ved regning.

For å finne skjæringspunktet grafisk, tegner vi linjene i et koordinatsystem og leser av.

I skjæringspunktet har begge funksjonene samme verdi for *x* og samme verdi for *y*. Skal vi finne skjæringspunktet ved regning, setter vi derfor funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen vi da får.

Eksempel

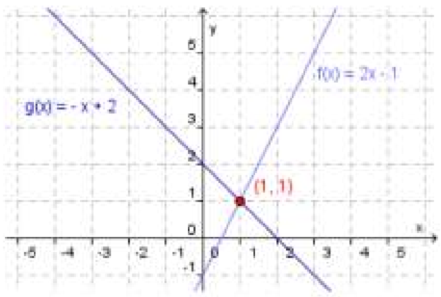
Funksjonene *f* og *g* er gitt ved $f(x) = 2x - 1$ og $g(x) = -x + 2$.

Finn skjæringspunktet mellom de to linjene grafisk og ved regning.

Grafisk løsning

Vi tegner de to linjene i et koordinatsystem, leser av og finner at linjene skjærer hverandre i punktet $(1, 1)$.

I GeoGebra kan du bruke kommandoen skjæring[f,g], eller knappen «Skjæring mellom to objekter».



Ved regning

Vi setter funksjonsuttrykkene lik hverandre og løser likningen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
2x - 1 &= -x + 2 \\
3x &= 3 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Vi kan sette inn *x* = 1 i et av funksjonsuttrykkene (samme hvilket) for å finne *y*.
Vi velger å regne ut *f*(1)

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Skjæringspunktet er $(1, 1)$.

Eksempel

To utleiefirmaer leier ut selskapslokaler.

Firma A tar en fast leiepris på 3000 kroner og et timetillegg på 500 kroner.

Forklar hvorfor totalkostnadene i kroner T_A, ved leie av lokalet i *x* timer, kan beskrives med funksjonsuttrykket

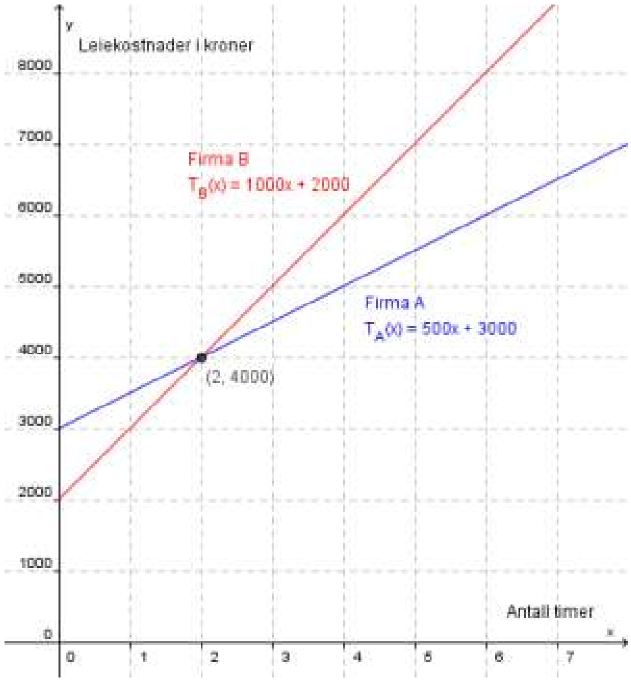
$$T_A(x) = 500x + 3000$$

Firma B tar en fast leiepris på 2000 kroner og et timetillegg på 1000 kroner.
Totalkostnadene i kroner,T_B, ved leie av lokalet i *x* timer kan beskrives ved funksjonsuttrykket

$$T_B(x) = 1000x + 2000$$

For å kunne sammenlikne leieprisene tegner vi grafene til de to funksjonene T_A og T_B.

Vi ser at grafene skjærer hverandre når $x = 2$. Det betyr at hvis du skal leie lokaler i to timer, er det prismessig det samme hvilket firma du velger. Prisen er 4000 kroner hos begge firmaene.



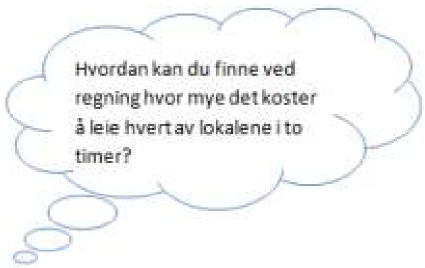
Hvis du skal leie lokale i mindre enn 2 timer, lønner det seg å velge firma B. Dette ser vi ved at grafen til T_B ligger under grafen til T_A i dette området.

Hvis du skal leie lokale i mer enn to timer, lønner det seg å velge firma A. Dette ser vi ved at grafen til T_A ligger over grafen til T_B i dette området.

Vi kan kontrollere den grafiske løsningen ved regning ved å løse likningen
$T_A(x) = T_B(x)$
Vi får

$$
\begin{aligned}
1000x + 2000 &= 500x + 3000 \\
1000x - 500x &= 3000 - 2000 \\
500x &= 1000 \\
x &= \frac{1000}{500} \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Vi får også her at leieprisene er like når leietiden er to timer. Dette bekrefter den grafiske løsningen.



Grafisk løsning av likningssett

[Grafisk løsning av likningssett (25210)]

I algebrakapitlet løste vi likningssett med innsettingsmetoden og ved addisjonsmetoden. I eksemplet ovenfor fant vi skjæringspunktet mellom grafene til to lineære funksjoner grafisk. Denne metoden kan brukes til å løse likningssett grafisk.

Vi ser på et av eksemplene fra algebrakapitlet.

En familie som består av tre barn og to voksne, betaler 380 kr for å komme inn på en fotballkamp. En annen familie med 4 barn og 3 voksne betaler 540 kr. Vi ønsker å finne ut hva billettprisen er for barn, og hva billettprisen er for voksne.

L a x være billettprisen i kroner for barn og y billettprisen i kroner for voksne.

Prisen den første familien betaler gir likningen

$$3x + 2y = 380$$

Prisen den andre familien betaler gir likningen

$$4x + 3y = 540$$

Billettpris?

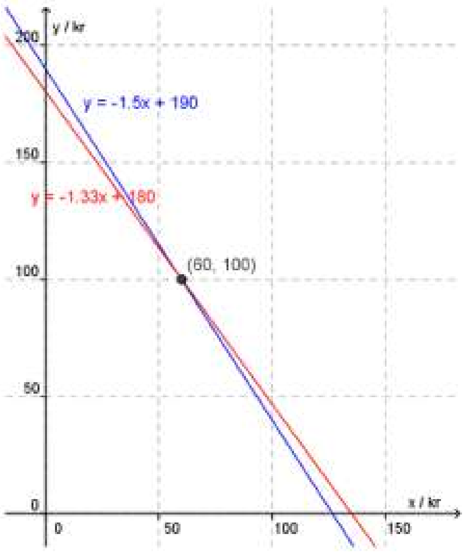
Vi løser likningssettet grafisk.

Vi ordner hver likning slik at y skrives som en funksjon av x i hver av likningene

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 2y &= -3x + 380 \\ y &= -\tfrac{3}{2}x + 190 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 540 \\ 3y &= -4x + 540 \\ y &= -\tfrac{4}{3}x + 180 \end{aligned}$$

Så tegner vi grafen til hver av funksjonene.



Skjæringspunktet gir løsningen på likningssettet.

Billettprisen for barn er lik x-koordinaten til skjæringspunktet, 60 kroner.

Billettprisen for voksne er lik y-koordinaten til skjæringspunktet, 100 kroner.

Nullpunkt

[Nullpunkt (13609)](#)

Definisjon

Med et **nullpunk**t til en funksjon *f*, mener vi et punkt på grafen hvor **andrekoordinaten er lik null**. Det er med andre ord et punkt hvor **grafen til funksjonen skjærer *x*-aksen**.

I nullpunktet er $f(x) = 0$.

Eksempel

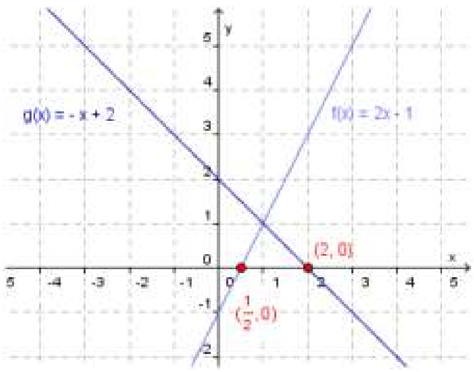
Grafen til $f(x) = 2x - 1$ skjærer *x*-aksen der $x = \frac{1}{2}$.

Grafen til $g(x) = -x + 2$ skjærer *x*-aksen der $x = 2$.

Nullpunktet til *f* blir $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Nullpunktet til *g* blir tilsvarende $(2, 0)$.

I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoene nullpunkt[f] og nullpunkt[g].



Vi kan også finne nullpunktene ved regning, ved å sette funksjonsutrykket lik null

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x - 1 &= 0 \\ 2x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(x) &= 0 \\ -x + 2 &= 0 \\ -x &= -2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Nullpunktene blir henholdsvis $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ og $(2, 0)$.

Eksempel

Like før sommerferien får Janne tilbud om å kjøpe en brukt båt med motor for kroner 9 000. Janne har ikke penger, men får et rentefritt lån av sine foreldre på kroner 9 000 som skal betales tilbake gjennom sommeren med ukentlige avdrag på kr 1 500. Janne har fått sommerjobb med ukelønn på kroner 4 000.

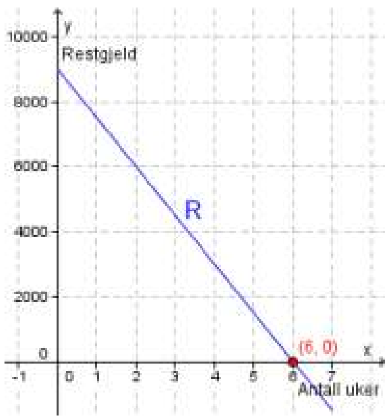
Restgjelden Janne har til sine foreldre *x* uker etter at hun opptok lånet kan beskrives med den lineære funksjonen

$R(x) = -1500x + 9000$

Konstantleddet er 9 000.
Det betyr at lånet i starten er på kroner 9 000.

Stigningstallet er negativt, –1500.
Det betyr at restlånet avtar med 1 500 kroner per uke.

Vi finner nullpunktet til funksjonen i GeoGebra med kommandoen nullpunkt[R].



Nullpunktet er (6,0). Det forteller at lånet er nedbetalt, restlånet er null, etter 6 uker.

Vi kan si at restlånet har **negativ lineær vekst**!

Lineær regresjon

Lineær regresjon (13651)

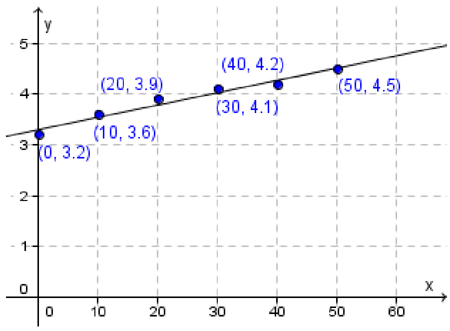
Tabellen viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2000.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Folketall	3 249 954	3 567 707	3 863 221	4 078 900	4 233 116	4 478 497

Det er en sammenheng mellom årstall etter 1950 og folketallet.
Vi lager en ny tabell hvor *x* er antall år etter 1950 og hvor *y* er folketallet i antall millioner, i år *x.*

x	0	10	20	30	40	50
y	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5

Vi plotter punktene fra den siste tabellen i et koordinatsystem, og ser at punktene**tilnærmet ligger på en rett linje**.



Det betyr at folketallet i Norge har hatt en **tilnærmet lineær** vekst i perioden fra 1950 til 2000.

Vi trekker en rett linje som ser ut til å passe godt med punktene.

Kan du bestemme likningen for denne linjen?

Linjen skjærer *y* - aksen der $y \approx 3,3$ og går tilnærmet gjennom punktene (30,4) og (70,5).

$5 - 4 = 1$ og $70 - 30 = 40$

Stigningstallet blir da tilnærmet lik $\frac{1}{40} = 0,025$.

Vi kan da si at likningen for linjen må være tilnærmet lik $y = 0,025x + 3,3$.

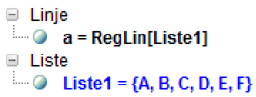
Ved en metode som kalles «lineær regresjon» kan vi finne likningen for den linjen som passer aller best med punktene. Det vil si den linjen hvor den samlede avstanden fra linjen til punktene er minst mulig.

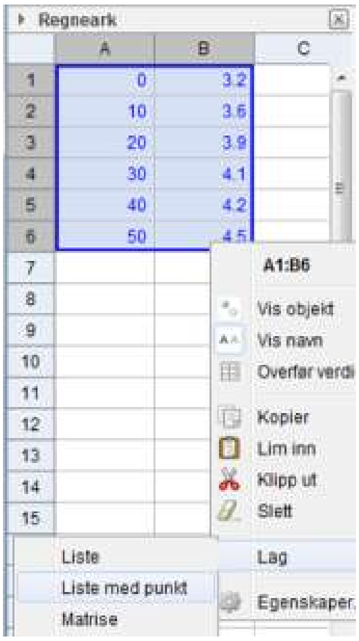
Dette kan vi gjøre i GeoGebra.

Velg «Regneark». Legg punktene inn i kolonne A og B.

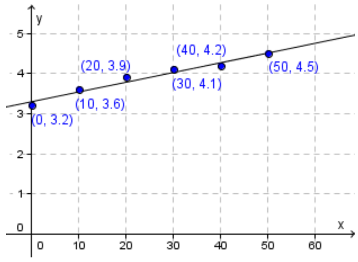
Merk området A1:B6, høyreklikk og velg «Lag» og «Liste med punkt». Du får da tegnet punktene i koordinatsystemet og opprettet listen «Liste1».

Deretter skriver du RegLin[Liste1] i inntastingsfeltet.



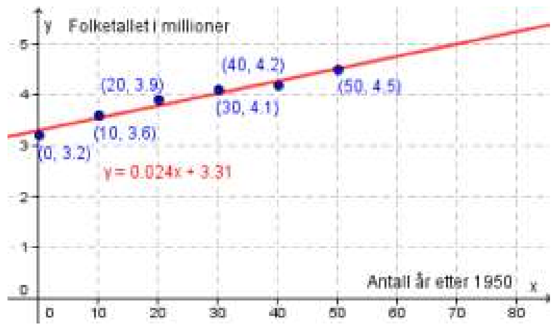


Du får da tegnet linjen i koordinatsystemet



Velg «Vis verdi» for linje *a*. Ved å høyreklikke på uttrykket og velge «Likning =*ax* + *b*», blir likningen for linje skrevet som

$$y = 0,024x + 3,31$$



Stigningstallet er 0,024.
Det betyr at etter denne modellen øker folketallet i Norge gjennomsnittlig med 0,024 millioner, eller 24 000, personer per år.

Når vil folketallet i Norge etter denne modellen passere 5 millioner og 6 millioner?
Hva var folketallet i Norge per 1. januar 2013?

Tror du folketallsutviklingen i Norge stort sett vil følge denne modellen framover?

Andre funksjonstyper

Andre funksjonstyper

Andre funksjonstyper (123019)

I lineære funksjoner opptrer variabelen x bare i første potens. I noen funksjoner opptrer x i andre potens. Det vil si at vi har ledd som inneholder x^2. Vi kaller derfor slike funksjoner for andregradsfunksjoner.

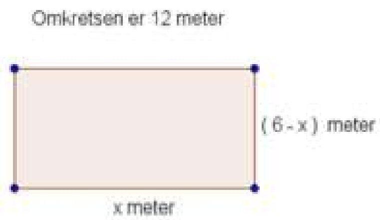
Vi skal se på to praktiske eksempler på andregradsfunksjoner.

Eksempel 1

Gå sammen med noen medelever og bruk et tau som er litt over 12 meter langt. Bind sammen endene og form tauet til et rektangel som figuren viser. Omkretsen til tauet skal være 12 m.

Mål sidelengder og regn ut arealet til rektanglene dere får når den ene sidelengden, x, er 0, 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 meter.

- Noter resultatene i en verditabell, og plott punktene i et koordinatsystem.
- Klarer du å finne en formel for arealet av firkanten når du kaller to av sidene for x?
- Tegn grafen
- Hva er det maksimale arealet firkanten kan få?
- Hva forteller grafens skjæringspunkter med x-aksen?



Hvis du ikke ønsker å gjøre oppgaven selv, kan du studere løsningen.

Løsning

For hver verdi av x, får vi et bestemt rektangel med et bestemt areal. Vi har altså at arealet til rektangelet er en funksjon av x. Omkretsen til rektangelet er 12 m. To og to sider er like lange, slik at vi bare har to forskjellige sidelengder. Vi kaller disse for henholdsvis grunnlinje og høyde. Grunnlinjen og høyden må til sammen være halve omkretsen, slik at når grunnlinjen er x, så må høyden være $6 - x$.

Funksjonen representert ved en verditabell:

Grunnlinjen i meter *x*	0	1	2	3	4	5	6
Høyden i meter	6	5	4	3	2	1	0
Areal av rektangel i m^2 *A*(*x*)	0	5	8	9	8	5	0

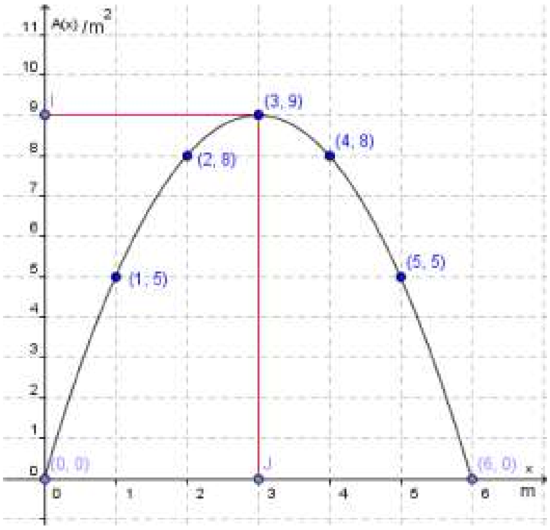
Vi har plottet punktene fra verditabellen i et koordinatsystem hvor førstekoordinaten er lengden på grunnlinjen og andrekoordinaten er arealet til det tilhørende rektangel.

Vi kan også representere arealfunksjonen ved en formel:

$$A\left(x\right) = x \cdot \left(6 - x\right)$$
$$A\left(x\right) = 6x - x^2$$

Vi ser at vi har en **andregradsfunksjon**.

Vi tegner grafen til funksjonen i samme koordinatsystem, og ser at grafen går gjennom punktene som vi plottet fra verditabellen.



Grafen har et **toppunkt**, et punkt hvor funksjonen har sin maksimale verdi. Det vil si at det største arealet rektangelet kan få er 9 m^2.

Nullpunkter. Når grafen skjærer førsteaksen, er enten grunnlinjen 0 eller 6 meter. Vi får da ikke noe reelt rektangel, og arealet blir 0.

Eksempel 2

Du kaster en stein rett opp i luften med utgangsfart 25 m/s.

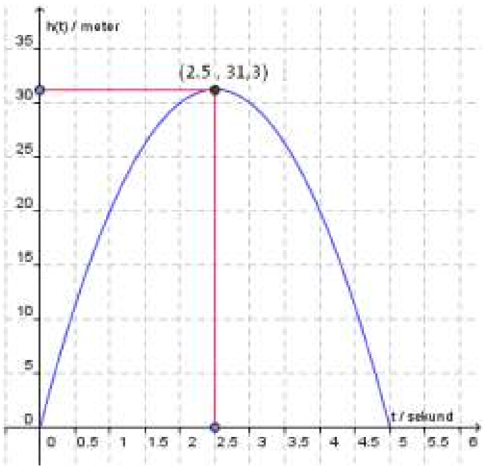
Naturens lover forteller oss at høyden til steinen er en funksjon av tiden og er tilnærmet gitt med funksjonsuttrykket

$$h(t) = 25t - 5t^2 \ .$$

Her står *t* for tiden i sekunder etter at steinen ble kastet.

Vi har også her en andregradsfunksjon fordi variabelen t er i andre potens.

Vi tegner grafen til funksjonen.



Grafen viser at steinens høyde øker de første 2,5 sekunder. Da når steinens sin største høyde, 31,3 meter. Fra da av mister steinen høyde, og etter 5 sekunder har steinen nådd bakken igjen.

Høydekurven er bratt til å begynne med. Det betyr at høyden øker fort, altså at steinen har stor fart. Så mister steinen gradvis fart, og kurven flater ut. I toppunktet har steinen mistet all fart, men så øker farten gradvis igjen. Nå faller steinen. Steinen får sin høyeste fart, kurven er brattest, like før steinen treffer bakken.

Generell form for andregradsfunksjoner

[Generell form for andregradsfunksjoner (13664)](#)

En funksjon der funksjonsuttrykket inneholder et andregradsledd, det vil si et ledd med x^2, kalles en andregradsfunksjon. Alle slike funksjoner kan skrives på formen

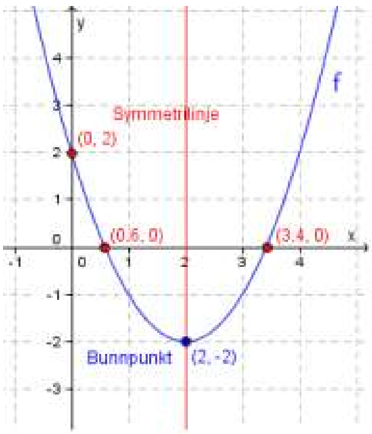
$f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$

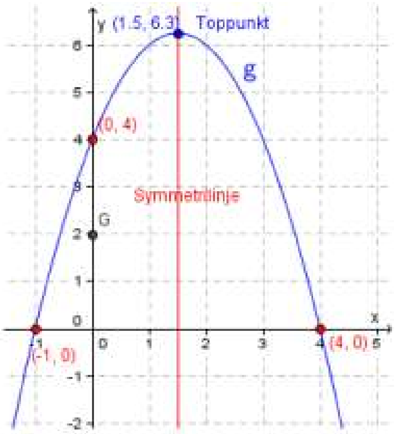
I tillegg til andregradsleddet har vi vanligvis et førstegradsledd, et ledd med x i første potens og et konstantledd. Verdiene av *a*, *b* og *c*, er forskjellige fra funksjon til funksjon.

Grafen til en andregradsfunksjon kalles en **parabel**.

To eksempler på andregradsfunksjoner og deres grafer.

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = -x^2 + 3x + 4$$





De mest karakteristiske trekkene ved parabler er at de har et **toppunkt** eller et **bunnpunkt** og at de er **symmetriske** om en linje parallell med *y* - aksen gjennom dette punktet.

Nullpunkt og ekstremalpunkt

Nullpunkter er de punkter hvor funksjonsverdiene er lik 0. Det vil si der grafene skjærer førsteaksen.

Vi kan lese av nullpunktene direkte på grafen, eller vi kan skrive «Nullpunkt[f]» og «Nullpunkt[g]» i GeoGebra. Nullpunktene vises da på grafen.

Funksjonen *f* har nullpunktene (0,6, 0) og (3,4, 0).

Funksjonen *g* har nullpunktene (–1,0) og (4,0).

Vi ser av grafen til *f* at funksjonen har sin laveste verdi for $x = 2$. Grafen har et **bunnpunkt**, (2,–2).

Grafen til *g* viser at funksjonen har sin høyeste verdi for $x = 1{,}5$. Grafen har et **toppunkt**, (1,5, 6,3).

Et felles navn for toppunkt og bunnpunkt er **ekstremalpunkt**.

Vi kan lese av ekstremalpunktene direkte på grafen, eller vi kan skrive «Ekstremalpunkt[f]» og «Ekstremalpunkt[g]» i GeoGebra.

Vi kan også legge merke til at hvis funksjonsverdien til et bunnpunkt er større enn 0, så vil funksjonen ikke ha nullpunkter, og hvis funksjonsverdien til et toppunkt er mindre enn 0, så vil heller ikke funksjonen ha nullpunkter.

Legg også merke til at i grafens skjæringspunkt med *y*-aksen, er *y*-verdien lik konstantleddet.

Definisjonsmengde og verdimengde

Funksjonene f og g ovenfor er definert for alle verdier av x. Men vi ser av grafen at f bare kan få verdier som er lik eller større enn -1 . Verdimengden til f er derfor alle tall som enten er lik -1 eller større enn -1.

Likeledes ser vi at verdimengden til g er alle tall som enten er lik 6,25 eller mindre enn 6,25.

Arealfunksjonen vi innledet kapitlet med hadde en definisjonsmengde fra 0 til 6 meter. Verdimengden var fra 0 til 9 kvadratmeter.

Utforsking av andregradsfunksjonen i GeoGebra

[Utforsking av andregradsfunksjonen i GeoGebra (101029)]

GeoGebra
simulering

Du kan bruke GeoGebra for å undersøke hva som skjer med grafen til en andregradsfunksjon når du endrer verdiene av a, b og c.

Først lager du tre glidere, en for *a*, en for *b* og en for *c* slik vi gjorde i [Stigningstall og konstantledd]
Så skriver du funksjonsuttrykket $f\left(x\right)=a\cdot x^{2}+\mathrm{bx}+c$ i inntastingsfeltet.
(Husk gangetegn mellom *a* og x^2, og mellom *b* og *x*.)

For å se tydelig hvordan grafen endrer seg når du endrer *a*, *b* og *c*, kan det være lurt å finne parabelens ekstremalpunkt og så slå på sporing på dette punktet.

Spørsmål

1. Hva skjer med grafen når du endrer verdien av *c*?
   Hvordan kan du finne konstantleddet *c* til en andregradsfunksjon ved å se på grafen til funksjonen?
2. Hva skjer med grafen når du endrer verdien av *a*?
   Hvordan ser grafen ut når $a>0$ og $a<0$?
   Hvorfor blir grafen en rett linje når $a=0$?
3. Alle parabler har en symmetrilinje.
   Hva betyr det?

Klarte du å svare på alle spørsmålene?

Her kommer en liten oppsummering.
Stemmer punktene nedenfor med det du fant ut?

- Tallet *c* forteller hvor grafen til andregradsfunksjonen skjærer *y* - aksen.
  Ser du hvorfor det må være slik?
  Når grafen skjærer *y* - aksen, er $x=0$.
  $f\left(0\right)=a\cdot 0^{2}+b\cdot 0+c=c$
- Hvis tallet *a* er lik null, forsvinner andregradsleddet, og vi har en lineær funksjon.
  $f\left(x\right)=0\cdot x^{2}+\mathrm{bx}+c=\mathrm{bx}+c$
- Hvis tallet *a* er positivt, har grafen et bunnpunkt. Det vil si et punkt hvor funksjonen har sin minste verdi. Grafen vender sin hule side opp, den «smiler».
- Hvis tallet *a* er negativt, har grafen et toppunkt. Det vil si et punkt hvor funksjonen har sin største verdi. Grafen vender sin hule side ned, den er «sur».

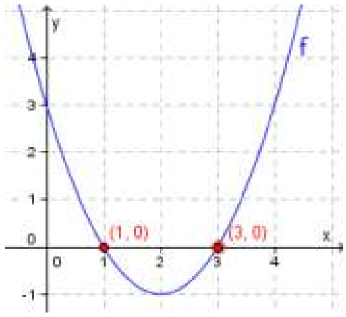
- Når tallverdien til *a*, $\left(a\right)$, øker, vil parabelen bli smalere.
  Når $\left(a\right)$ minker, vil parabelen bli bredere. (Husk at når $a=0$, får vi en rett linje.)
- Grafen er symmetrisk om en linje parallell med *y* - aksen som går gjennom topp- eller bunnpunktet. Denne linjen kalles **symmetrilinjen**.

Nullpunkter, topp- og bunnpunkter

[Nullpunkter, topp- og bunnpunkter (101038)](#)

Nullpunkter ved regning

Til høyre ser vi at grafen til funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 3$ skjærer førsteaksen når $x = 1$ og når $x = 3$. Dette er nullpunktene til *f*.



I GeoGebra kan du finne nullpunktene med kommandoen nullpunkt[f].

Ved regning finner vi nullpunktene ved å sette $f(x) = 0$.

Det betyr at vi må løse andregradslikningen

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

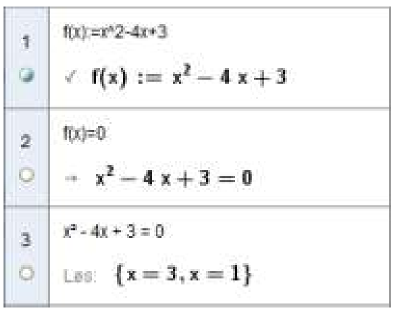
Vi bruker *abc* - formelen og får

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \\ x &= \frac{4 \pm 2}{2} \\ x &= 3 \quad \vee \quad x = 1 \end{aligned}$$

Det betyr at funksjonen *f* har nullpunktene $(1, 0)$ og $(3, 0)$.

I GeoGebra kan vi finne nullpunktene ved regning ved først å definere funksjonen i CAS-vinduet. Husk å skrive «kolon-lik».

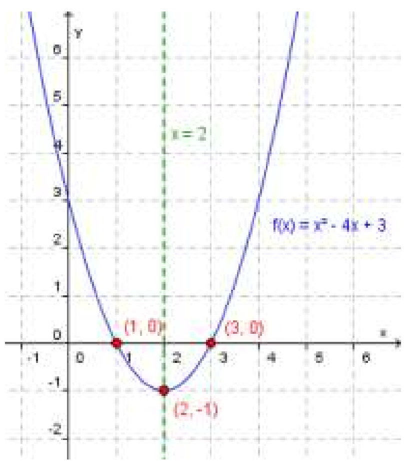
Deretter bruker du kommandoen «Løs» på likningen *f*(*x*) = 0.



Topp- eller bunnpunkt

Vi fortsetter med funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Til høyre ser du at den laveste funksjonsverdien til funksjonen er –1. Denne verdien får vi for *x* = 2.



Vi sier da at grafen har **bunnpunkt** (2,–1).

I GeoGebra kan du finne bunnpunktet med kommandoen ekstremalpunkt[f].

Ser du at en parabels topp- eller bunnpunkt alltid vil ligge på symmetrilinjen?

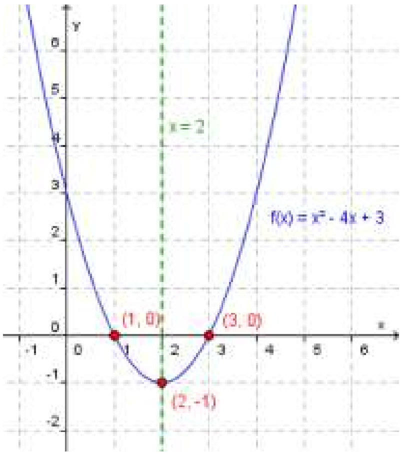
Ser du at symmetrilinjen alltid vil ligge like langt fra hvert av parabelens nullpunkter?

Symmetrilinje

Symmetrilinje (101056)

I koordinatsystemet til høyre har vi tegnet inn symmetrilinjen til *f*.

Bunnpunktet ligger på symmetrilinjen. Symmetrilinjen ligger også like langt fra hvert av parabelens nullpunkter.



Når vi skal finne parabelens nullpunkter, har vi sett at vi kan løse likningen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} \\ x &= \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \\ x &= \frac{4\pm2}{2} \\ x &= 2\pm1 \end{aligned}$$

Hvis vi stopper der, ser vi at $x = 2 \pm 1$.

Det betyr at de to nullpunktene ligger like langt fra linjen $x = 2$, og denne linjen er altså parabelens symmetrilinje!

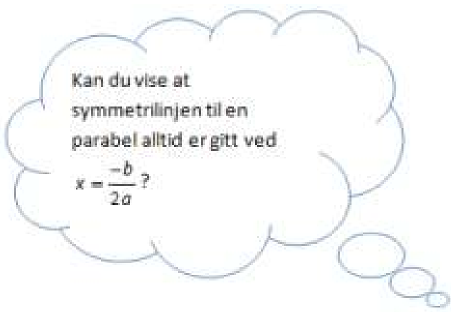
Det betyr at vi kan finne *x* - koordinaten til bunnpunktet og symmetrilinjen ved å fjerne kvadratroten i uttrykket vi får når vi setter $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} \end{aligned}$$

x - koordinaten til bunnpunktet og symmetrilinjen er da

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4)\ \xcancel{\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}}{2\cdot1} \\ x &= \frac{-(-4)}{2\cdot1} = 2 \end{aligned}$$

Symmetrilinjen er linjen $x = 2$.



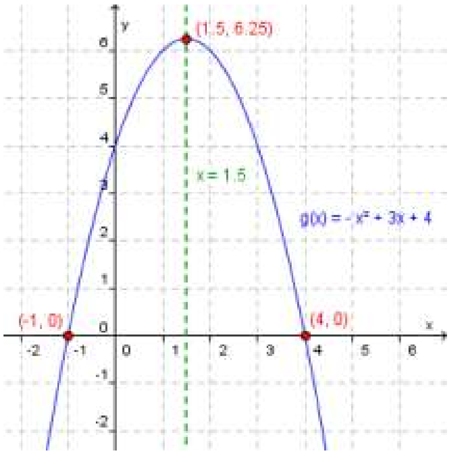
Eksempel

Grafen til funksjonen $g(x) = -x^2 + 3x + 4$ skjærer førsteaksen for $x = -1$ og for $x = 4$.

Vi finner nullpunktene ved å sette $g\left(x\right) = 0$

$$g\left(x\right) = 0$$
$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2}$$
$$x = -1 \quad \vee \quad x = 4$$

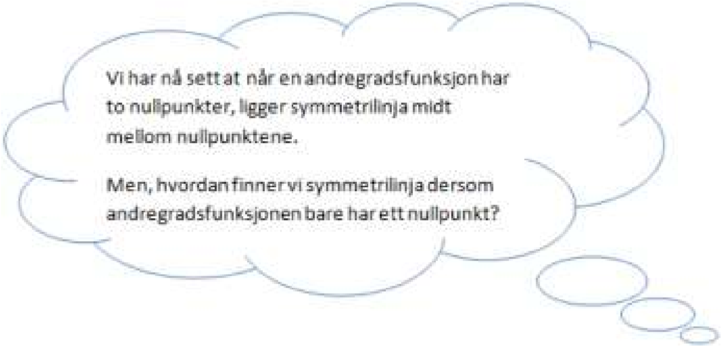


Funksjonen har nullpunkter for $x = -1$ og for $x = 4$.

Symmetrilinjen er $x = 1,5$, som er *x* - verdien midt mellom –1 og 4. Men, som vi har sett, trenger du ikke regne ut nullpunktene for å finne symmetrilinjen. Du kan bare «fjerne kvadratroten» i løsningsformelen og få *x* - verdien til toppunktet (symmetrilinjen) som $x = \frac{-3}{-2} = 1,5$.

Mer om symmetrilinjer

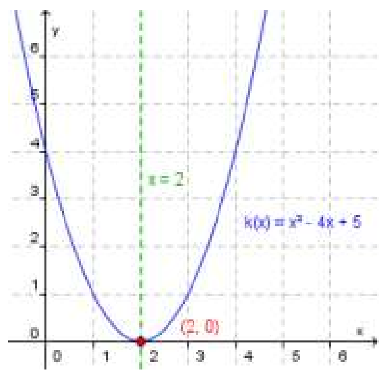
Mer om symmetrilinjer (101073)



Vi ser på funksjonen *h* gitt ved $h\left(x\right)=x^{2}-4x+4$.

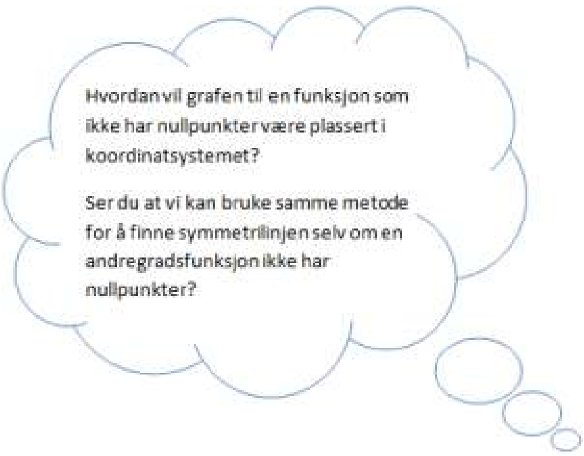
Vi finner nullpunkt ved å løse likningen

$$\begin{aligned} h\left(x\right)&=0\\ x^{2}-4x+4&=0\\ x&=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^{4}-4\cdot1\cdot4}}{2}\\ x&=\frac{-(-4)\pm\sqrt{0}}{2}=2 \end{aligned}$$



Når andregradslikningen bare har en løsning, har funksjonen bare ett nullpunkt. Dette punktet vil også være toppunktet eller bunnpunktet og ligge på symmetrilinjen.

Symmetrilinjen blir $x=2$.

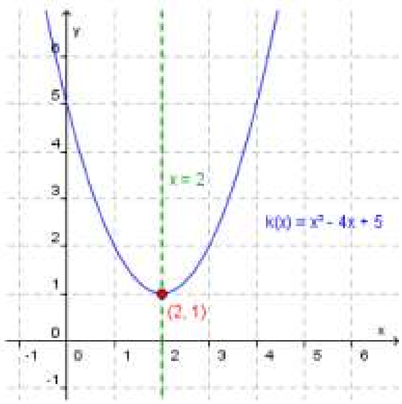


Vi ser på funksjonen *k* gitt ved $k\left(x\right)=x^{2}-4x+5$.

Vi finner eventuelle nullpunkter ved å løse likningen

$$\begin{aligned} k\left(x\right)&=0\\ x^{2}-4x+5&=0\\ x&=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^{2}-4\cdot1\cdot5}}{2}\\ x&=\frac{-(-4)\pm\sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

Vi får et negativt tall under rottegnet. Likningen har ingen løsning. Det betyr at funksjonen ikke har nullpunkter og grafen til funksjonen krysser aldri *x* - aksen.



Siden $c = 5$, vet vi at grafen skjærer *y* - aksen i punktet $(0, 5)$. Dette punktet ligger over *x* - aksen. Grafen ligger da over *x* - aksen for alle verdier av *x*.

Vi finner symmetrilinjen til *k*

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hvordan tegne grafen til en andregradsfunksjon

Hvordan tegne grafen til en andregradsfunksjon (101084)

Eksempel

Gitt andregradsfunksjonen $g(x) = x^2 - 4x + 3 \quad D_g = R$

Vi starter med å finne symmetrilinje, bunnpunktet og eventuelle nullpunkter.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \end{aligned}$$

Symmetrilinjen er da

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

I bunnpunktet er

$$x = 2 \quad \text{og} \quad y = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

Det vil si at bunnpunktet er $(2, -1)$.

For å finne nullpunktene, fortsetter vi med uttrykket

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

og får

$$x = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \vee \qquad x = \frac{4+2}{2} = 3$$

I tillegg ser vi av funksjonsuttrykket at grafen skjærer *y* - aksen i punktet$(0, 3)$.

Vi setter det vi har funnet inn i en verditabell.

x		0	1	2	3		
$g(x)$		3	0	−1	0		

Symmetrilinje og minimalverdi.

Vi regner ut $g(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$.

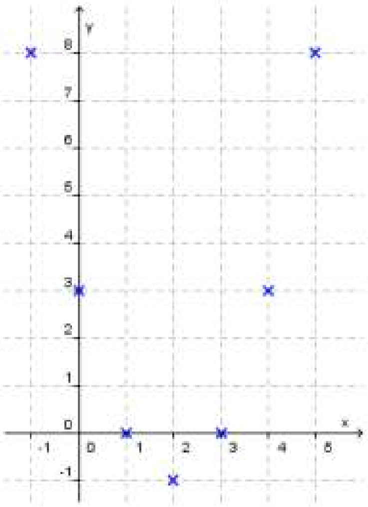
På grunn av symmetri er $g(-1) = g(5) = 8$ og $g(4) = g(0) = 3$.

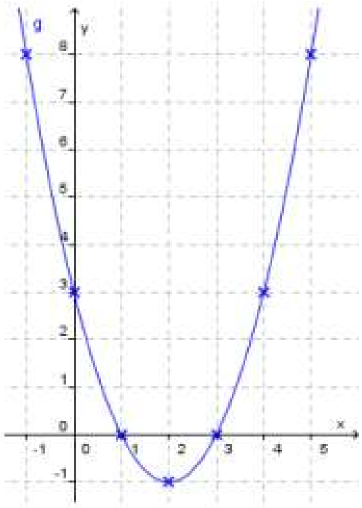
Vi får da denne verditabellen:

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

Vi har nå tilstrekkelig med punkter og kan tegne grafen til *g*.

Vi starter med å markere punktene i et koordinatsystem, og trekker så en kurve gjennom punktene.





Eksempel på andregradsfunksjon

[Eksempel på andregradsfunksjon (101046)]

En bedrift produserer *x* enheter av en vare per dag.

Funksjonen *K* gitt ved $K(x) = 0,25x^2 + 500$

viser kostnadene (kroner) ved produksjon av *x* enheter.

Bedriften kan maksimalt produseres 200 enheter per dag.

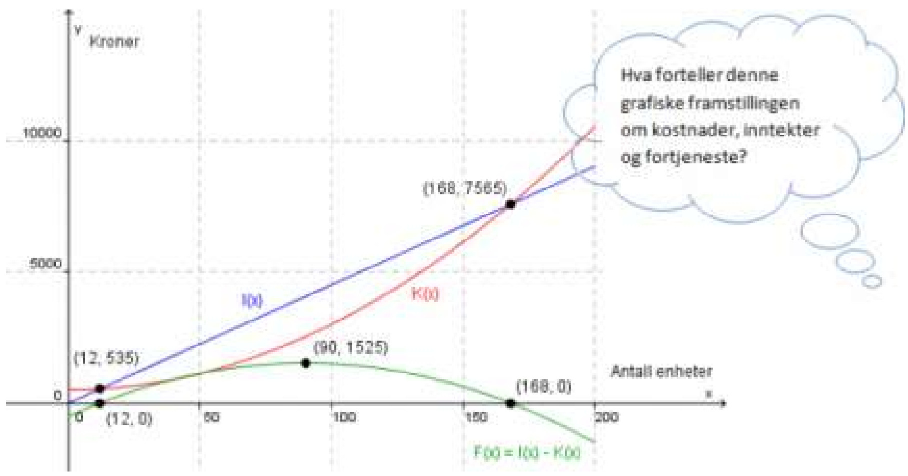
De produserte enhetene selges for 45 kroner per stk.

Inntektene er da gitt ved $I(x) = 45x$

Fortjeneste er differensen mellom inntekter og kostnader, og fortjenesten *F* er derfor gitt ved

$$F(x) = I(x) - K(x).$$

Nedenfor har vi tegnet grafene til *K*, *I* og *F*, og markert noen punkter.



Skjæringspunktene mellom grafene til *K* og *I* viser at kostnadene er like store som inntektene ved produksjon av 12 enheter og ved produksjon av 168 enheter. Fortjenesten er da lik null, og grafen til *F* har nullpunkter for *x* = 12 og *x* = 168.

Ved produksjon av mindre enn 12 enheter eller flere enn 168 enheter er kostnadene større enn inntektene og fortjenesten er negativ. Bedriften taper penger.

Grafen til *F* har toppunkt (90,1525). Bedriften oppnår maksimal fortjeneste ved å produsere 90 enheter per dag. Fortjenesten per dag er da 1525 kroner.

Polynomfunksjoner

Polynomfunksjoner (13701)

Definisjon

Et **polynom** er et uttrykk med ett eller flere ledd der hvert ledd består av en konstant multiplisert med x^n, der *n* er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket gir oss graden til **polynomet**. Uttrykket $x - 4 + 2x^3$ er et **tredjegradspolynom**, fordi den høyeste eksponenten i uttrykket er tre.

En polynomfunksjon er en funksjon som har et polynom som funksjonsuttrykk.

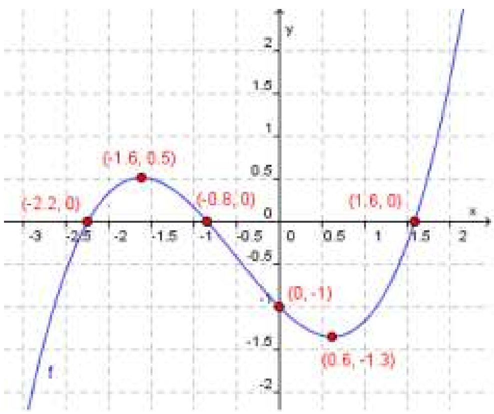
Uttrykket $3x + 3$ er et polynom av første grad fordi *x* er av første grad. Uttrykket $2x^2 - 2x + 4$ er et polynom av andre grad, fordi vi har et ledd hvor *x* er opphøyd i andre potens. To er den høyeste eksponenten *x* har. $x - 4 + 2x^3$ er et eksempel på et tredjegradspolynom, fordi den høyeste eksponenten av *x* her er tre.

Det er vanlig å ordne et polynom slik at leddet med den høyeste eksponenten kommer først, leddet med nest høyest eksponent kommer som nummer to osv. Fjerdegradspolynomet $-5 + 3x^3 - x^2 + 7x^4$ skriver vi på ordnet form som $7x^4 + 3x^3 - x^2 - 5$. Tallene foran potensene av *x* kaller vi for **koeffisienter**. I dette fjerdegradspolynomet er koeffisienten foran x^2 lik –1.

Lineære funksjoner og andregradsfunksjoner er polynomfunksjoner av henholdsvis første og andre grad. Tredjegradsfunksjoner er polynomfunksjoner av tredje grad.

Vi tegner grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$



Nullpunkter

Funksjonen har nullpunkt der grafen skjærer *x* - aksen. Nullpunktene er $(-2,2\,,0)$, $(-0,8\,,0)$ og $(1,6\,,0)$.

Skjæring med y-aksen

Grafen skjærer *y*-aksen når *x* = 0. Skjæringspunktet er (0, -1).

Ekstremalpunkter

Grafen har toppunkt $(-1,6\ ,\ 0,5)$.
Grafen har bunnpunkt $(0,6\ ,\ -1,3)$.

For andregradsfunksjoner sa vi at en funksjon hadde sin laveste verdi i bunnpunktet og høyeste verdi i toppunktet. En tredjegradsfunksjon kan ha høyere verdier enn i toppunktet andre steder på grafen. Vi sier allikevel at grafen har et toppunkt, selv om det bare er lokalt.

Ekstremalpunkter

Med ekstremalpunkter til en funksjon mener vi punkter hvor funksjonen har en maksimalverdi eller en minimalverdi i et begrenset område.

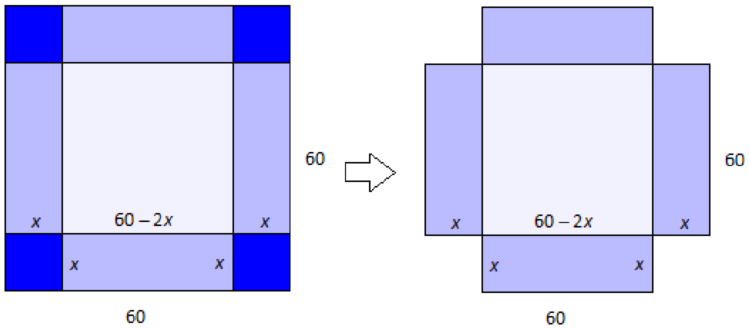
Skjæring med andre grafer

Vi kan finne skjæringspunktene mellom grafene til to tredjegradsfunksjoner f og g grafisk eller ved å løse likningen $f(x) = g(x)$.

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon

Et praktisk eksempel på en tredjegradsfunksjon (101109)

Tenk deg at du skal lage en eske uten lokk av en kvadratisk papplate med sidelengder 60 cm. Du må da klippe bort et kvadrat i hvert hjørne. Du må altså klippe bort de fire mørkeblå kvadratene på tegningen til høyre. De lyseblå rektanglene bretter du opp, og du får da en eske med det lyse kvadratet i midten som bunn.



Formen på esken avhenger av hvor store kvadrater du klipper bort. Vi kaller sidene i kvadratene du klipper bort, for *x*. Hvis *x* er stor, vil esken få en liten bunn, men blir desto høyere. Hvis er liten, vil esken få stor bunn, men den vil bli lav.

Volumet av esken vil være avhengig av *x*. Det vil si at volumet er en funksjon av *x*. Vi vil finne en formel for denne funksjonen.

Bunnen til esken blir et kvadrat med side 60 - 2*x*. Det kan vi lese ut av tegningen. Arealet til bunnen, det vi kaller grunnflaten, blir da

$$\begin{aligned} G &= (60 - 2x)\cdot(60 - 2x) \\ &= 60\cdot 60 - 60\cdot 2x - 2x\cdot 60 - 2x\cdot(-2x) \\ &= 3600 - 240x + 4x^2 \end{aligned}$$

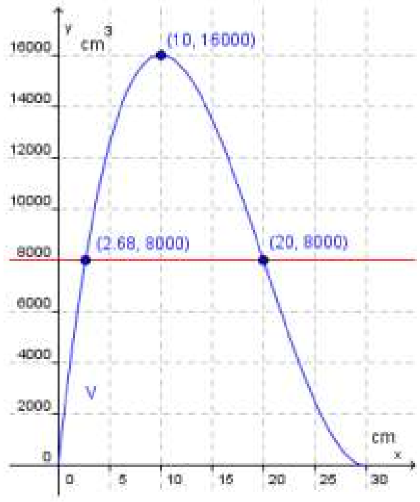
Høyden i esken blir *x*. Vi må multiplisere grunnflaten med høyden for å få volumet.

$$\begin{aligned} V(x) &= \left(3600 - 240 + 4x^2\right)\cdot x \\ V(x) &= 3600x - 240x^2 + 4x^3 \\ V(x) &= 4x^3 - 240x^2 + 3600x \end{aligned}$$

Volumet er altså en polynomfunksjon av tredje grad. Vi ser også at*x* må ligge mellom 0 og 30 cm for at vi skal få en eske.
Definisjonsmengden er da $D_v = (0, 30)$.
Hvis *x* er lik 0, klipper vi ikke bort noe, og hvis*x*er lik 30 cm, så får vi ingen bunn.

Vi tegner nå grafen til volumfunksjonen.

Vi ser av grafen at verdimengden $V_v = \langle 0, 16000]$. Det vil si at volumet til esken er større enn 0 cm^3 og mindre enn 16 000 cm^3.



Vi kan ellers se av grafen at

- Hvis vi ønsker en eske med størst mulig volum, må vi klippe bort kvadrater med sider 10 cm.
- Hvis vi ønsker esker med volum lik 8000 cm^3, må vi klippe bort kvadrater med sider 2,68 cm eller 20,0 cm.
- Vi kan også gå motsatt vei og lese av hvor stort volum en bestemt verdi for *x* gir.

Rasjonale funksjoner

Rasjonale funksjoner (13707)

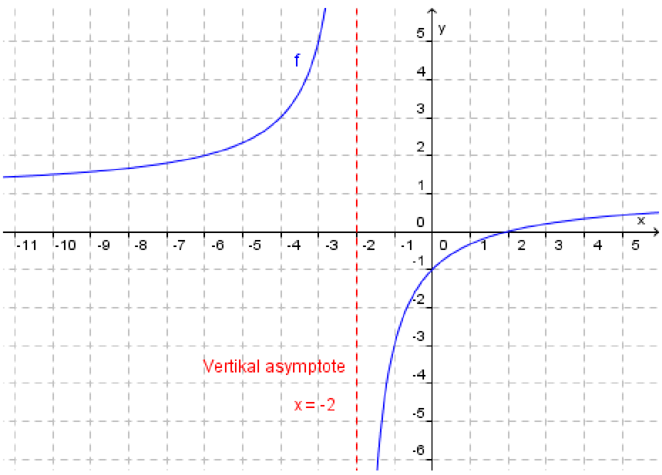
En **rasjonal funksjon** er en funksjon som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er polynomer.

Eksempel

Funksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{x-2}{x+2}$ er en rasjonal funksjon.

En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Det betyr at *f*(–2) ikke eksisterer. Grafen har ikke noe punkt for *x* = –2. Vi sier at grafen har et **brudd** for *x* = –2.

Vi tegner grafen til *f* i GeoGebra, sammen med den rette linjen $x=-2$



Når x nærmer seg verdien –2 fra venstre, ser du av grafen at funksjonsverdiene vokser over alle grenser.
Det kan vises at dette er riktig. Funksjonsverdiene nærmer seg ikke en bestemt verdi når*x* nærmer seg verdien –2 fra venstre, men blir uendelig store.
Vi skriver

$$f\left(x\right)\rightarrow\infty\text{nårx}\rightarrow-2^{-}$$

(Vi leser «$f\left(x\right)$ går mot uendelig når *x* går mot –2 fra venstre».)

Tilsvarende viser det seg at funksjonsverdiene synker mot minus uendelig når *x* nærmer seg –2 fra høyre. Vi skiver

$$f\left(x\right)\rightarrow\infty\text{når }x\rightarrow-2^{+}$$

(Legg merke til + og - som markerer om *x* nærmer seg –2 fra venstre eller fra høyre.)

Du kan undersøke om dette virker sannsynlig ved å sette inn verdier for *x* som er veldig nær –2.

Funksjonsverdiene til funksjonen *f* går altså ikke mot en bestemt verdi, en bestemt **grenseverdi**, når *x* går mot –2.

Vi skriver

$$\lim_{x\rightarrow-2}f\left(x\right)\text{ eksisterer ikke}$$

(Vi leser «grenseverdien til *f* når *x* går mot –2 eksisterer ikke».)

Grafen til *f* består av to deler, en del til venstre for linjen $x = -2$ og en del til høyre for linjen $x = -2$.
Linjen $x = -2$ kalles en **loddrett**, eller **vertikal asymptote**.

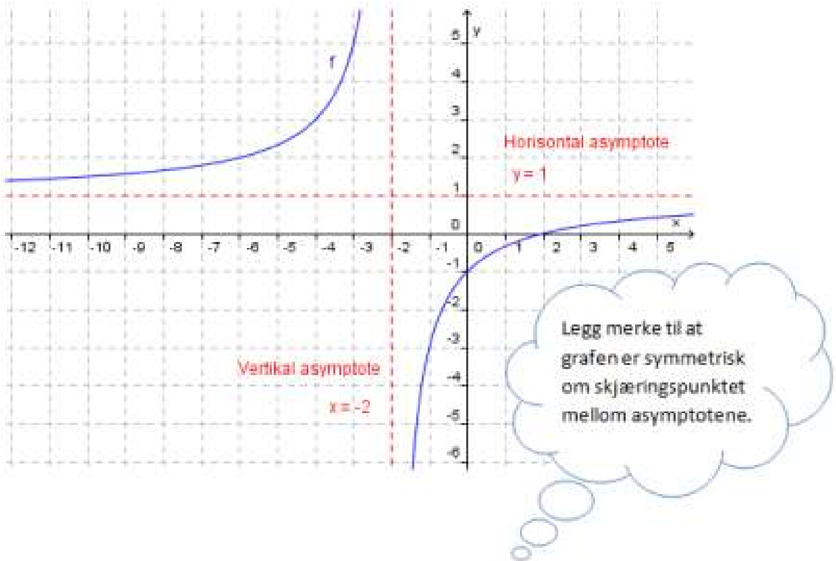
Det kan videre vises at grafen «flater ut» og nærmer seg linjen $y = 1$ når *x* går mot pluss eller minus uendelig. Det vil si at funksjonsverdiene nærmer seg verdien 1 som grenseverdi når går mot pluss eller minus uendelig, men uten noen gang å bli lik 1.

Den ene delen av grafen nærmer seg linjen ovenfra og den andre delen nedenfra. De to delene av grafen vil aldri krysse linjen. Linjen $y = 1$ er en **vannrett**, eller **horisontal asymptote**.

Vi skriver

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

(Vi leser «grenseverdien til *f* når *x* går mot pluss eller minus uendelig er lik én.»)



Hvordan finne asymptotene?

[Hvordan finne asymptotene? (101113)]

For å finne eventuelle **vertikale asymptoter**, setter vi først nevneren i funksjonsuttrykket lik null.

I eksemplet tidligere i menyen så vi på funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Når vi setter nevneren lik null får vi likningen $x + 2 = 0$, som gir $x = -2$.

Vi undersøker så om telleren er forskjellig fra null for denne verdien av *x*

$$x - 2 = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

Det viser seg at en brøks verdi alltid vil gå mot enten pluss eller minus uendelig når *x* nærmer seg et tall som gir null i nevner og et tall forskjellig fra null i teller.

Det betyr at $x = -2$ er en vertikal asymptote til funksjonen *f*.

Vi finner en eventuell **horisontal asymptote** ved å la *x* gå mot et uendelig stort positivt eller et uendelig lite negativt tall.

Når *x* er et veldig stort tall eller et veldig lite tall, vil konstantene –2 og 2 i brøken bety minimalt.

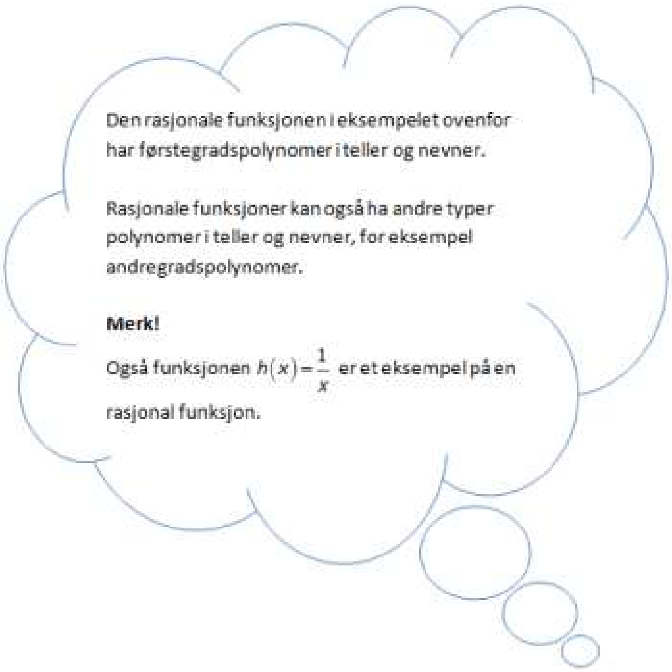
Da er

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \approx \frac{x}{x} = 1$$

Grafen vil altså nærme seg linjen $y = 1$ når *x* går mot et uendelig stort positivt eller et uendelig lite negativt tall.

Linjen $y = 1$ er en horisontal asymptote til funksjonen.

Når du skal tegne grafen til en rasjonal funksjon uten digitale hjelpemidler, er det mye lettere hvis du først finner eventuelle asymptoter og tegner opp disse.



Praktisk eksempel på en rasjonal funksjon

Praktisk eksempel på en rasjonal funksjon (101117)

Et telefonabonnement har en fastpris på 79 kroner per måned og en samtaleavgift på 39 øre per minutt.

Ser du at hvis vi ringer *x* minutter i løpet av en måned, må vi betale (0,39*x* + 79) kroner med dette abonnementet?

Hva blir da prisen per minutt vi ringer?

Vi dividerer beløpet ovenfor på antall ringeminutter, og får et rasjonalt funksjonsuttrykk

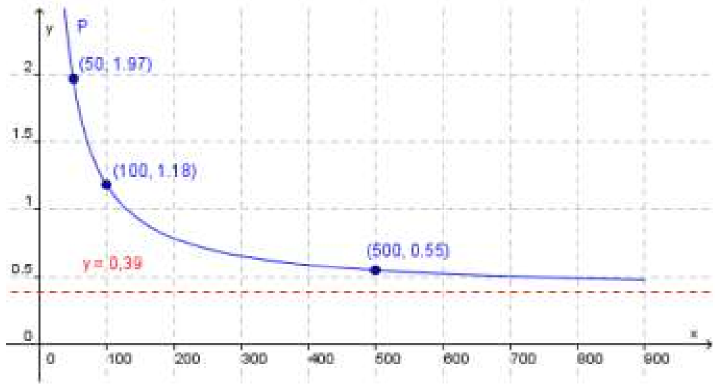
$$P\left(x\right) = \frac{0{,}39x+79}{x}$$

I 2001 ble det for første gang registrert flere mobiltelefoner enn fasttelefoner i Norge. Tall fra Post – og teletilsynet viser at stadig færre nordmenn har fasttelefon, og at de av oss som fremdeles har en fasttelefon bruker den mindre og mindre.

Definisjonsmengden til funksjonen *P* avhenger av forventet total samtaletid.

La oss anta at total samtaletid ikke overstiger 900 minutter, slik at definisjonsmengden er $P_d = (0, 900)$.

Vi tegner grafen til funksjonen *P*.



Grafen viser for eksempel at ved en total samtaletid på 50 minutter, blir minuttprisen 1,97 kroner. Ved total samtaletid på 100 minutter, blir minuttprisen 1,18 kroner og ved total samtaletid på 500 minutter, blir minuttprisen 0,55 kroner.

Prisen per minutt avtar med økende bruk. Grafen synker veldig fort til å begynne med, for så å flate ut.

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{0{,}39x+79}{x} \approx \frac{0{,}39x}{x} = 0,39$$

Grafen har horisontal asymptote $y = 0,39$. Dette svarer til minuttprisen når total samtaletid er stor. Dette er også den samtaleavgiften som oppgis i abonnementet.

Når vi ringer veldig mye nærmer minuttprisen seg 39 øre, men minuttprisen vil aldri bli lik 39 øre. Fastprisen får mindre og mindre betydning jo større den totale samtaletiden er.

Potensfunksjoner

Potensfunksjoner (13736)

Live arver 300 000 kroner. Hun vil spare pengene.

Den lokale banken tilbyr en årlig rente på 3 % per år. Dette svarer til en vekstfaktor på 1,03. Live regner det som sannsynlig at hun vil få bruk for pengene om 10 år. Hvor mye vil beløpet ha vokst til etter 10 år?

$300\ 000 \cdot 1,03^{10} = 403\ 175$

Beløpet vil ha vokst til ca. 403 175 kroner.

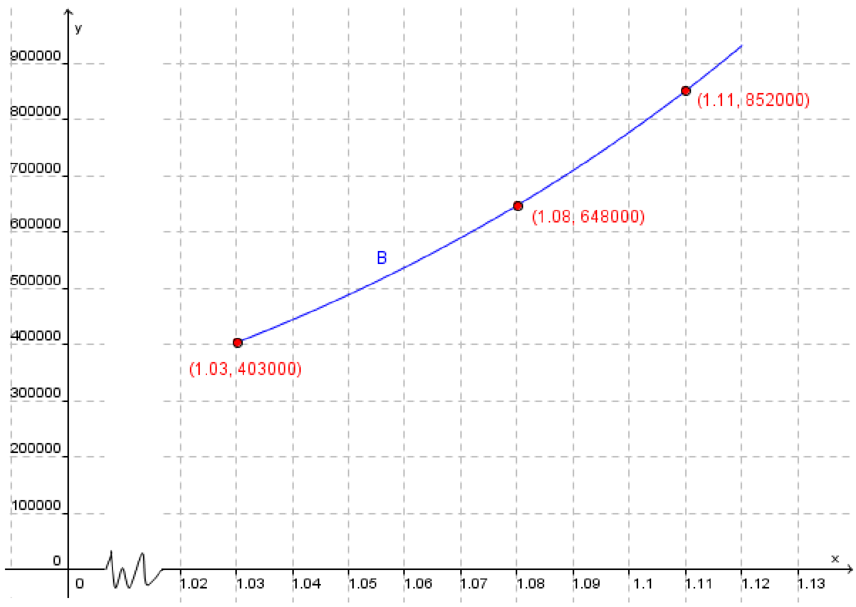
Live vet at det finnes alternativer til banksparing, og hun vil undersøke hva beløpet kan vokse til etter 10 år, hvis renten er høyre enn 3 %.

Hun ser da at hun kan bruke funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 300\ 000 \cdot x^{10}$$

Her er det vekstfaktoren som er den variable, *x*.

Live tegner grafen til *B* for $x \in (1,03\ ,\ 1,12)$



Av grafen kan hun se at ved en årlig rente på 3 %, vil beløpet vokse til ca. 403 000 kroner etter 10 år. Hvis renten er på 8 % per år, vil beløpet vokse til ca. 648 000 kroner og hvis hun kan få en rente på 11 % per år, altså at vekstfaktoren er 1,11, vil hun sitte med ca. 852 000 etter 10 år.

I funksjonsuttrykket $B(x) = 300\ 000 \cdot x^{10}$ er *x* grunntallet i en potens hvor eksponenten er et konstant tall. En slik funksjon kalles for en **potensfunksjon**.

Potensfunksjoner

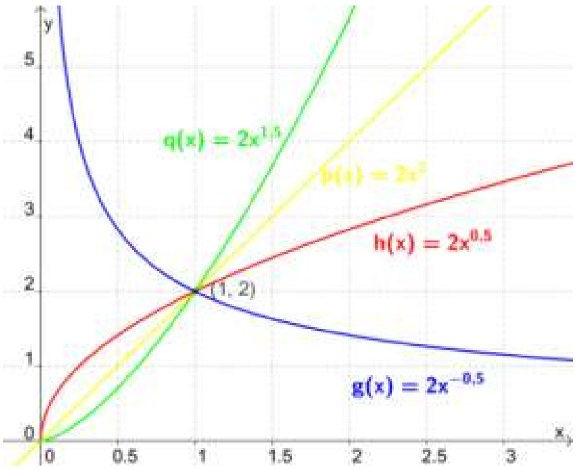
En funksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$, hvor *a* og *b* er konstante tall, kalles en **potensfunksjon**.

Legg merke til at når *b* er et ikkenegativt helt tall, er potensfunksjonen også en **polynomfunksjon**, som for eksempel 2*x*, 3*x*^{2}, osv.

N å r *b* er et negativt helt tall, er potensfunksjonen en **rasjonal funksjon**, som for eksempel $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, $2x^{-1} = \frac{2}{x}$ osv.

Når *b* ikke er et helt tall, må vi forutsette at *x* er positiv. Grunnen er at for eksempel $x^{0,5}$ betyr det samme som $\sqrt{x}$, og kvadratroten av et negativt tall er ikke et reelt tall.

Til høyre har vi tegnet grafene til funksjoner gitt på formen $2x^b$ for ulike verdier av *b*.



Hvorfor går alle grafene gjennom punktet $(1, 2)$?

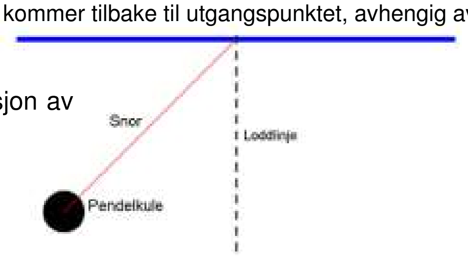
Hvordan ser grafen ut når $b = 1$?

Grafene endrer hovedform etter o m $b \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, $b \in \langle 0, 1 \rangle$ eller $b \in \langle 1, \rightarrow \rangle$.

Legg merke til at grafen til en potensfunksjon *f* gitt ved $f(x) = a \cdot x^b$ alltid går gjennom punktet $(1, a)$ fordi $f(1) = a \cdot 1^b = a$.

Eksempel

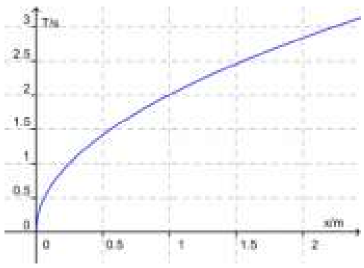
Når en pendel svinger, er svingetiden, det vil si den tiden det tar fra pendelen slippes til den kommer tilbake til utgangspunktet, avhengig av lengden på snoren som pendelkulen henger i.



Fra naturfag kjenner du kanskje formelen for svingetiden *T* sekunder, som funksjon av snorlengden *x* meter?

Formelen gir at

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot x^{0,5}$$



Her er $\pi \approx 3,14$ og $g \approx 9,81$ (*g* er tyngdens akselerasjon).

Når vi setter inn disse verdiene i formelen, får vi

$$T \approx \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{9,81}} \cdot x^{0,5} = 2,0 \cdot x^{0,5}$$

Svingetiden til en pendel er altså en potensfunksjon av snorlengden.

Vi vet også at $x^{0,5} = \sqrt{x}$, slik at svingetiden kan uttrykkes som

$$T = 2\sqrt{x}$$

Nå er svingetiden uttrykt som en kvadratfunksjon.

Eksponentialfunksjoner

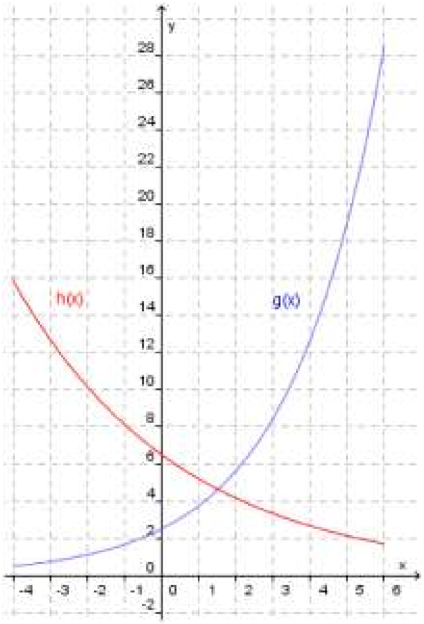
Eksponentialfunksjoner (13739)

En eksponentialfunksjon er gitt på formen $a \cdot b^x$ der tallet *b* kalles **vekstfaktoren**.

Eksponentialfunksjoner er bare definert for positive verdier av *b*, og vi skal bare se på funksjoner der også *a* er positiv.

Funksjonene *g* og *h* gitt nedenfor eksempler på eksponentialfunksjoner.

$$\begin{array}{ll} g(x) = 2,5 \cdot 1,5^x & D_g = (-4,6) \\ h(x) = 6,5 \cdot 0,8^x & D_h = (-4,6) \end{array}$$



Når vekstfaktoren er større enn 1, øker funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise veksten *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 + \frac{p}{100}$$

Når vekstfaktoren er mindre enn 1, avtar funksjonsverdiene med en fast prosent i like lange perioder. Sammenhengen mellom den prosentvise nedgangen *p* og vekstfaktoren *b* er gitt ved likningen

$$b = 1 - \frac{p}{100}$$

Antall individer i en populasjon i naturen vil øke eksponentielt hvis populasjonen har ubegrenset tilgang til mat og ingen fiender. Populasjonen vil ikke vokse så fort i begynnelsen, men etter hvert vil veksten øke mer og mer. Dette er karakteristisk for eksponentiell vekst. (Se grafen til *g* i koordinatsystemet ovenfor.)

Vi vil også få eksponentiell vekst på et bankinnskudd med en fast årlig rente.

Verdien på en gjenstand, for eksempel en bil, vil ofte utvikle seg som en eksponentialfunksjon med vekstfaktor mindre enn 1.

Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner

[Praktiske eksempler med eksponentialfunksjoner (101120)]

Praktiske eksempler med eksopnentialfunksjoner.

Eksempel 1

Hvis du setter 1000 kr i banken i dag og får 6 % rente på pengene, kan du om ett år ta ut $1000 \cdot 1,06 = 1060$ kroner av banken.

Tallet 1,06 kaller vi for **vekstfaktoren**. Hvis pengene står tre år i banken, vil de vokse til $1000 \cdot 1,06^3 = 1191$ kroner.

Hvis 1000 kroner står år i banken med 6 % rente, vil beløpet vokse til $1000 \cdot 1,06^x$ kroner.

Innestående beløp, *B*, er en funksjon av antall år i banken, *x*, og funksjonsuttrykket blir

$$B(x) = 1000 \cdot 1,06^x$$

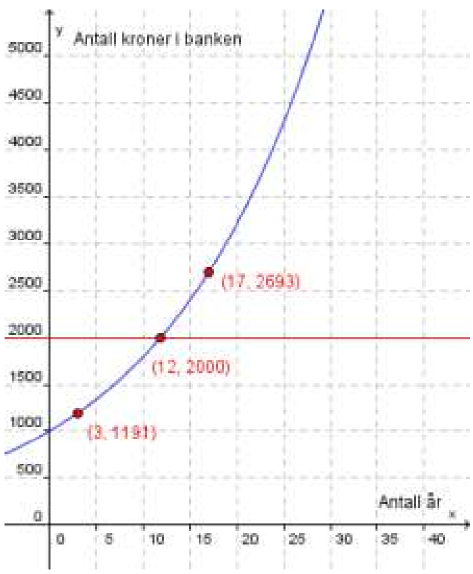
Grafen til funksjonen viser for eksempel at beløpet på 1000 kroner har vokst til 1191 kroner etter 3 år (som vi regnet ut ovenfor)og til 2693 kroner etter 17 år.

Hvor lenge må pengene stå i banken før beløpet er fordoblet?

Vi finner svaret ved å tegne den rette linjen $y = 2 \cdot 1000 = 2000$ i samme koordinatsystem som grafen til *B* og så finne skjæringspunktet mellom linjen og grafen. Pengene må stå i banken i 12 år.

Dette kan vi også finne ved regning.

Vi setter antall år pengene må stå i banken lik *x* og får likningen



$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

Dette er en eksponentiallikning.

Vi bruker logaritmeregning for å løse likningen

$$\begin{aligned}
1000 \cdot 1,06^x &= 2 \cdot 1000 \\
1,06^x &= \tfrac{2000}{1000} \quad \text{Vi ordner likningen slik at vi får potensen alene på v} \\
1,06^x &= 2 \\
\lg 1,06^x &= \lg 2 \quad \text{Logaritmene til like tall er like.} \\
x \cdot \lg 1,06 &= \lg 2 \quad \text{Vi bruker tredje logaritmesetning.} \\
x &= \tfrac{\lg 2}{\lg 1,06} \quad \text{Her må vi bruke digitalt verktøy.} \\
x &\approx 12
\end{aligned}$$

Pengene må altså stå ca. 12 år i banken før beløpet er fordoblet.

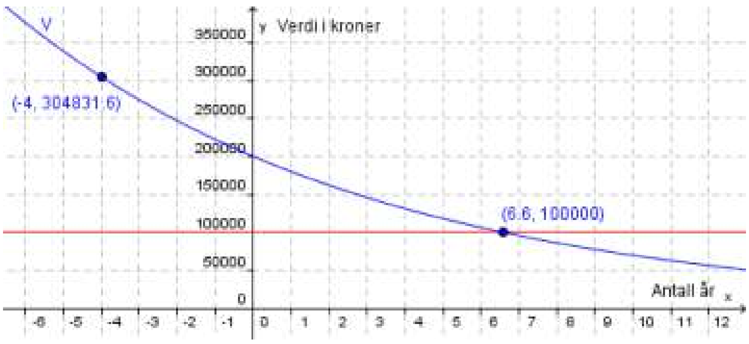
Eksempel 2

Kari kjøper en fire år gammel bil for 200 000 kroner. Bilen har sunket i verdi med 10 % hvert år siden den var ny. Kari regner med at verdien vil synke på samme måte de neste årene.

Bilens verdi $V(x)$, x antall år etter at Kari kjøpte den, er da gitt ved

$$V(x) = 200\,000 \cdot 0,90^x$$

Vi tegner grafen til *V*.



Av grafen kan vi lese at bilens verdi vil ha sunket til 100 000 kroner etter 6,6 år.

Avlesning på grafen viser også at bilens verdi for 4 år siden, altså bilens pris som ny, var ca. 305 000 kroner.

Vekstfart og derivasjon

Vekstfart til lineære funksjoner

[Vekstfart til lineære funksjoner (13744)](#)

Som vi nå har sett flere ganger, kan vi skrive en lineær funksjon på formen $f\left(x\right)=\mathrm{ax}+b$. Tallet *a* kalles stigningstallet, og tallet *b*kalles konstantleddet.

Vi skal se litt nærmere på stigningstallet og innføre noen nye skrivemåter og begreper.

Eksempel

Ole selger bær på torget. Han har en fast timelønn på 100 kroner.

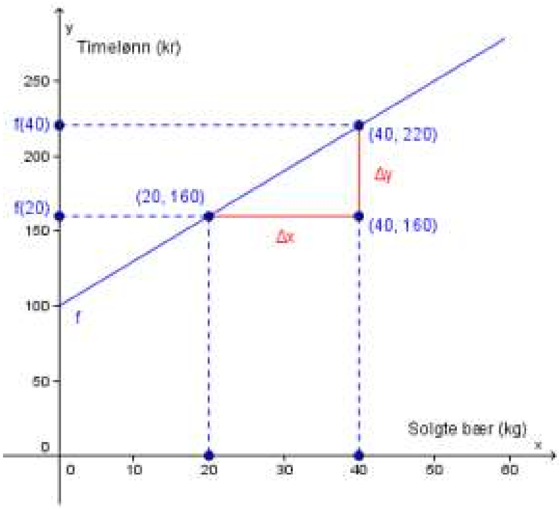
I dag har vi tilgang til friske bær hele året. Om sommeren dominerer de norske fra skog og hage, mens resten av året importerer vi.

I tillegg får han 3 kroner per kilo han selger. Vi lar *x* være antall kilo Ole selger per time, og $f\left(x\right)$ timelønna han oppnår.

Vi får at

$$f\left(x\right)=3x+100$$

Stigningstallet forteller hvor bratt grafen er. I dette tilfellet er stigningstallet et uttrykk for hvor mye timelønna øker i forhold til antall solgte kilo. Derfor kaller vi også stigningstallet for **vekstfarten** eller **veksthastigheten** til funksjonen.



Vi ser at punktene (20,160) og (40,220) ligger på grafen til *f*.

Stigningstallet blir $\frac{220-160}{40-20}$.

Dette er det samme som $\frac{\mathrm{endring}\ \ i\ y-\mathrm{verdi}}{\mathrm{endring}\ \ i\ x-\mathrm{verdi}}$.

Vi bruker den greske bokstaven Δ (delta) for å angi endring i en størrelse.

Vi får da at

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{220-160}{40-20}=\frac{60}{20}=3$$

Dette kan vi regne oss fram til ved hjelp av funksjonsuttrykket:

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(40)-f(20)}{40-20}=\frac{3\cdot 40+100-(3\cdot 20+100)}{20}=\frac{220-160}{20}=\frac{60}{20}=3$$

Vi får samme resultat uansett hvilke to *x*-verdier, x_1 og x_2, vi velger.

Hvis vi for eksempel velger $x_1=10 \text{ og } x_2=50$, får vi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(50)-f(10)}{50-10} \\ &= \frac{3\cdot 50+100-(3\cdot 10+100)}{40}=\frac{150+100-30-100}{40}=\frac{120}{40}=3 \end{aligned}$$

Vekstfart. Stigningstall

Vi kan regne ut **vekstfarten til en lineær funksjon**, eller **stigningstallet** til en rett linje ved å bruke formelen

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

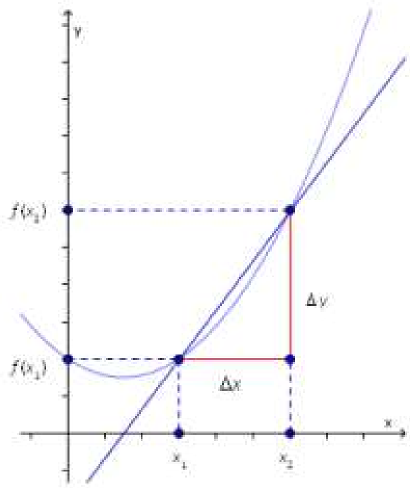
Her er $(x_1, f(x_1)) \text{ og } (x_2, f(x_2))$ to punkter som ligger på linjen.

Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier

[Gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmede verdier for momentan vekstfart (13774)]

Når en funksjon ikke er lineær, vil vekstfarten variere fra sted til sted på kurven. Jo brattere kurven er, jo større er vekstfarten.

Vi kan finne **den gjennomsnittlige vekstfarten** over et intervall [x_1, x_2] på følgende måte



Vi trekker en rett linje, sekant, gjennom punktene $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ og $\left(x_2, f\left(x_x\right)\right)$.
Vi regner så ut stigningstallet til denne sekanten:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Vi har da funnet et mål for **gjennomsnittlig vekstfart** for funksjonen når *x* øker fra x_1 til x_2.

Gjennomsnittelig vekstfart. Stigningstallet til sekanten

Den gjennomsnittlige vekstfarten for en funksjon *f*(*x*) når *x* vokser fra x_1 til x_2, er lik **stigningstallet til sekanten** gjennom punktene $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ og $\left(x_2, f\left(x_x\right)\right)$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Eksempel 1

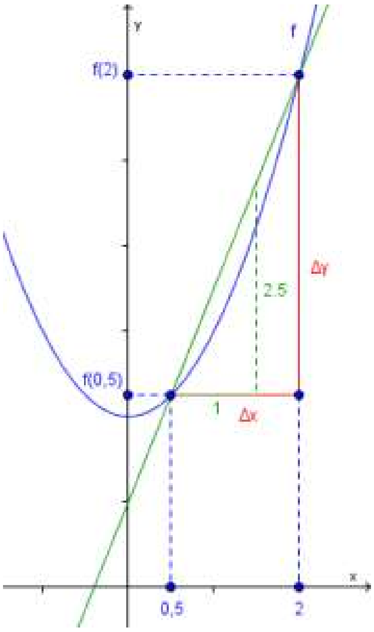
Som 13 åring var Niels Henrik 149 cm høy. Fire år senere var han 181 cm. Vi lar *x* være alderen tilNiels Henrik og *y* være høyden. Vi får at den gjennomsnittlige vekstfarten til Nils Henrik i fireårsperioden blir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{181 \text{ cm} - 149 \text{ cm}}{4 \text{ år}} = \frac{32 \text{ cm}}{4 \text{ år}} = 8 \, \frac{\text{cm}}{\text{år}}$$

Eksempel 2

En funksjon *f* er gitt ved $f\left(x\right) = x^2 + 2$

Vi ønsker å finne den gjennomsnittlige vekstfarten til f når x vokser fra x = 0,5 til x = 2.



Gjennomsnittelig vekstfart

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0,5)}{2-0,5} = \frac{2^2+2-(0,5^2+2)}{2-0,5} = \frac{6-2,25}{1,5} = 2,5$$

Eksempel 3

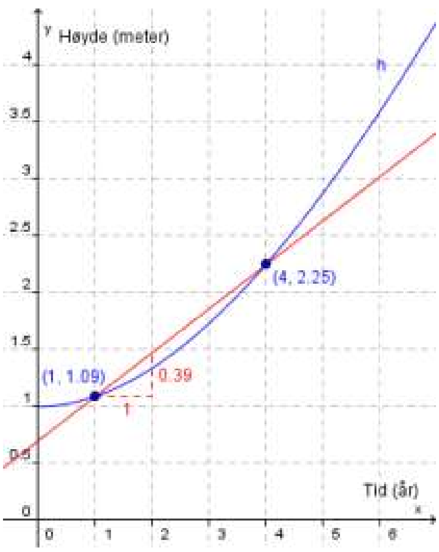
I 2006 plantet Elin et morelltre.

Funksjonen h gitt ved

Morelltre i blomstring

$$h(x) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \qquad x \in (0, 20)$$

viser høyden til morelltreet i meter x år etter at det ble plantet.



Gjennomsnittlig vekstfart per år fra 2007 til 2010 er

$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(4)-h(1)}{4-1} = 0,39$

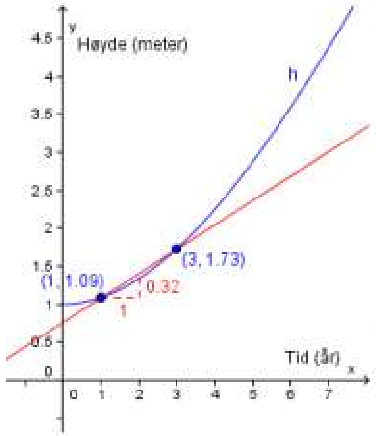
Dette viser at i perioden 2007 til 2010 vokste treet med gjennomsnittlig 39 cm per år.

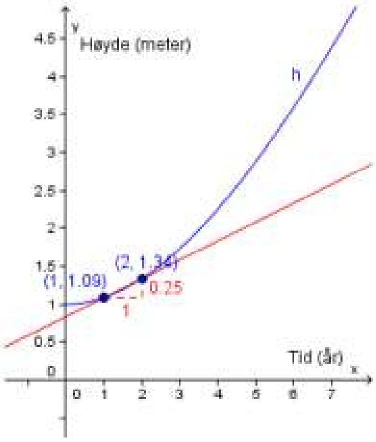
Vi ser av grafen at treet vokser fortere etter fire år enn etter ett år. Grafen er mye brattere når $x = 4$ enn når $x = 1$.

Momentan vekstfart

Vi ønsker å finne en tilnærmet verdi for hvor fort treet vokser når det er akkurat ett år gammelt. Vi kaller dette for **den momentane veksten** når treet er ett år.

Vi finner først gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året og deretter fra det første året til det andre året.





Grafene ovenfor viser at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det tredje året er 32 cm per år, og at gjennomsnittlig vekstfart fra det første året til det andre året er 25 cm per år.

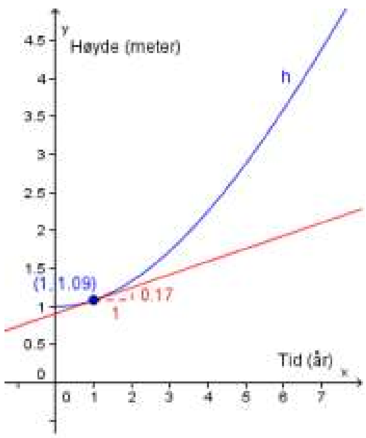
Stigningen til sekantene blir mer og mer lik brattheten til grafen når jo nærmere hverandre de to punktene er. Av de to tilnærmingsverdiene, er det derfor den siste som er den beste tilnærmingen.

For å finne en enda bedre tilnærmingsverdi reduserer vi avstanden mellom punktene enda mer.

Til slutt vil punktene falle sammen til ett punkt, og **sekanten blir en tangent** til kurven i dette punktet.

Stigningen til denne tangenten gir den aller beste tilnærmingsverdien for **den momentane vekstfarten** når $x = 1$.

Vi kan altså finne en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten i et punkt på en kurve ved å tegne en tangent til kurven i punktet og finne stigningstallet til denne tangenten.



Momentan vekstfart. Den deriverte

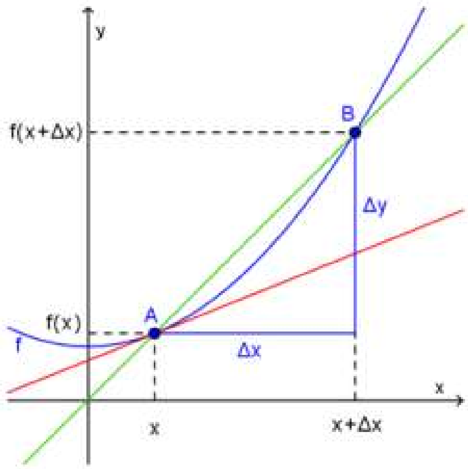
Momentan vekstfart. Den deriverte (13777)

Vi skal nå se hvordan vi kan finne **en nøyaktig verdi for den momentane vekstfarten til en funksjon i et punkt.**

Vi benytter oss av samme prinsipp som vi brukte for å finne en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten.

Vi tar utgangspunkt i en tilfeldig funksjon *f*.
Vi tegner grafen til funksjonen, velger en tilfeldig *x* - verdi og får et punkt på grafen $A\left(x, f\left(x\right)\right)$.

Vi ønsker å finne vekstfarten til funksjonen for akkurat denne *x*-verdien.



Vi gir *x* et tillegg $\triangle x$, og får et nytt punkt på grafen, $B\left(x+\triangle x, f\left(x+\triangle x\right)\right)$.

Vi trekker **en sekant (grønn linje)** gjennom punktene *A* og *B*.

Vi regner ut stigingstallet for denne linja:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Vi har da funnet et uttrykk for **gjennomsnittelig vekstfart** fra *A* til *B*.

Vi lar nå punktet *B* nærme seg punktet *A*. Vi lar altså Δx gå mot null.

Da vil **sekanten (grønn)** gradvis nærme seg til å bli en **tangent (rød linje)** til kurven i *A*.

E n **tangent** til en kurve er en rett linje som berører kurven i bare ett punkt. Stigningstallet (brattheten) til denne tangenten forteller hvor fort kurven vokser akkurat her. Vi kaller dette stigningstallet for **den momentane veksten** til grafen i punktet $\left(x, f\left(x\right)\right)$ eller verdien av **den deriverte** funksjonen til *f* i punktet. Vi skriver $f'\left(x\right)$ og leser « *f* derivert av *x*».

Den deriverte

Vi ser på grafen ovenfor.

$f'\left(x\right)$ er den verdien $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg mot når Δx går mot null.

Definisjon

$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$

Den deriverte i et punkt er **stigningstallet til tangenten** til grafen i dette punktet.

Den **deriverte** i et punkt og **den momentane vekstfarten** i punktet er det samme.

Definisjonen ovenfor er en lokal definisjon. Den sier noe om verdien av den deriverte funksjonen i et punkt, nemlig punktet med førstekoordinaten *x*. Hvis vi nå betrakter alle verdier av *x* i definisjonsområdet til *f*, får vi en ny funksjon, den deriverte funksjonen f' som til hver verdi av *x* har *y* - verdien $f'(x)$. Det er denne funksjonen vi kaller den deriverte funksjonen.
Derivere betyr **å utlede eller avlede** og f' er en ny funksjon som vi har utledet fra *f*.

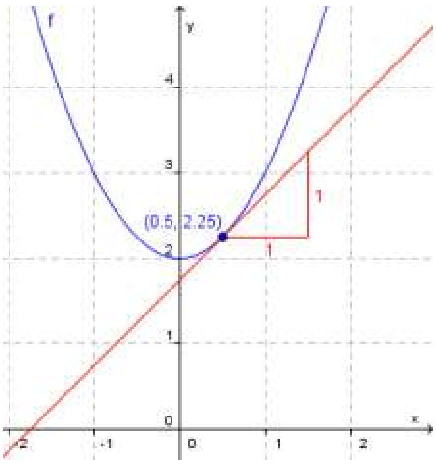
Hvordan finne verdier for momentan vekstfart (den deriverte) grafisk

Den momentane vekstfarten eller den deriverte av $f(x) = x^2 + 2$ når foreksempel x = 0,5, er altså det samme som stigingstallet for tangenten til kurva når x = 0,5.

Vi kan finne en verdi for denne vekstfarten grafisk ved å tegne grafen til *f* og tangenten til *f* når x = 0,5.

Vi ser at tangenten har stigingstallet 1. Den momentane vekstfarten er altså lik 1 når x = 0,5.
Den deriverte av *f*(*x*) når *x* = 0,5 er 1. Vi skriver

$$f'(0,5) = 1.$$



Hvordan regne ut verdier for den deriverte ved å bruke definisjonen

Vi vil nå regne oss fram til den deriverte til $f(x) = x^2 + 2$ når *x* = 0,5.

Vi husker definisjonen på den deriverte

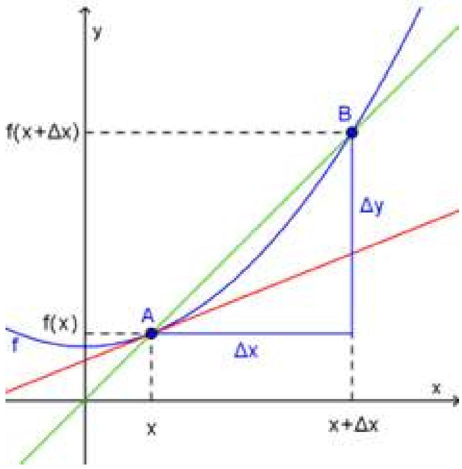
$f'(x)$ er den verdien som $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg mot når Δx går mot null.

$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$

Hvordan finner vi så $f(x + \triangle x)$?
$f(x + \triangle x)$ er det uttrykket du får når du bytter ut *x* med $x + \triangle x$ i funksjonsuttrykket.

Det gir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+2\cdot x\cdot \Delta x+(\Delta x)^2+2-x^2-2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot x\cdot \cancel{\Delta x}+(\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x+\Delta x\right)$$
$$= 2x$$



I den siste overgangen skjønner vi at når Δx blir mer og mer lik null, så må jo $2x + \Delta x$ bli mer og mer lik 2*x*. Derfor er grenseverdien for $2x + \Delta x$ når Δx går mot null, lik 2*x*.

Vi har nå funnet at når $f(x) = x^2 + 2,$ så $\text{er}\ f'(x) = 2x$

Da kan vi regne ut $f'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1$.

Den deriverte funksjonen til *f*, $f'(x) = 2x$, er en ny funksjon og er definert for alle verdier av *x* i definisjonsområdet til *f*.

Vi kan bruke denne funksjonen til å finne den momentane vekstfarten for alle verdier av *x* i definisjonsområdet til *f*.

For eksempel er $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$. Den momentane vekstfarten når *x* = 4 er lik 8.

Derivasjonsregler

Derivasjonsregler (13806)

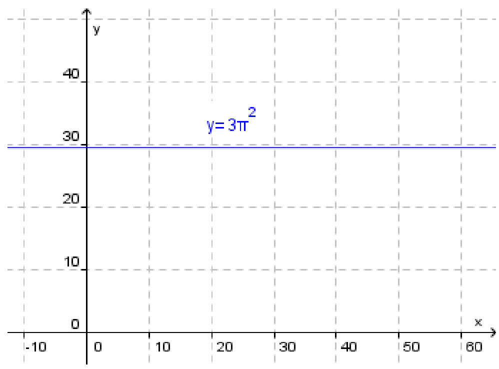
Det er ikke nødvendig å bruke definisjonen av den deriverte hver gang vi skal derivere et utrykk.

Ved å bruke definisjonen på noen generelle uttrykk, kan vi komme fram til generelle derivasjonsregler. Det er disse formlene vi vanligvis bruker.

Det er veldig viktig at du lærer deg disse reglene!

Den deriverte til en konstant funksjon

Grafen til en konstant funksjon er en linje parallell med*x* - aksen. En slik linje har stigning lik null, derfor er den deriverte til en konstant funksjon lik null.



Vi får som generell regel

Konstant funksjon	$f(x)=k$	$f'(x)=0$

Eksempel 1

$y=3$
$y' = 0$

Eksempel 2

$y=\pi$
$y' = 0$

Eksempel 3

$y=3\pi^2$
$y' = 0$

Den deriverte til en potensfunksjon

Vi vil finne den deriverte funksjonen til *f*(*x*) = *x*^{2}. Vi bruker difinisjonen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\,(2\cdot x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x$$

Vi har vist at $\left(x^2\right)' = 2x$. Tilsvarende kan vi vise at $\left(x^3\right)' = 3x^2$ og at $\left(x^4\right)' = 4x^3$.

Ser du mønsteret? Det kan vises at generelt er $\left(x^n\right)' = \mathrm{n}\mathrm{x}^{n-1}$ uansett hvilket tall *n* er.

Potensfunksjon	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

Eksempel 1

$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$

Eksempel 2

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Eksempel 3

$f(x) = x^5$
$f'(x) = 5x^4$

Potensfunksjon multiplisert med konstant

Det kan vises at følgende regel gjelder for produktet mellom en konstant og en potensfunksjon

Potensfunksjon multiplisert med konstant	$f(x)=k\cdot x^n$	$f'(x)=k\cdot(x^n)'=k\cdot n\cdot x^{n-1}$

Eksempel 4

$f(x)=3\cdot x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot 2\left(x^2\right)' \\ &= 3\cdot 2x \\ &= 6x \end{aligned}$$

Eksempel 5

$f(x)=3\cdot x^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot 4\cdot x^{4-1} \\ &= 12x^3 \end{aligned}$$

Den deriverte til summer og differenser

Det kan vises at vi kan derivere summer og differenser ved å derivere ledd for ledd.

Summer og differanser	$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} f(x) &= 3-x^2 \\ f'(x) &= 0-2x \\ f'(x) &= -2x \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+5x^2 \\ f'(x) &= 3x^2+5\cdot 2x \\ f'(x) &= 3x^2+10x \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{ax}+b \\ f'(x) &= a \end{aligned}$$

Legg merke til siste eksempel. Den deriverte til en rett linje blir lik stigningstallet til linjen.

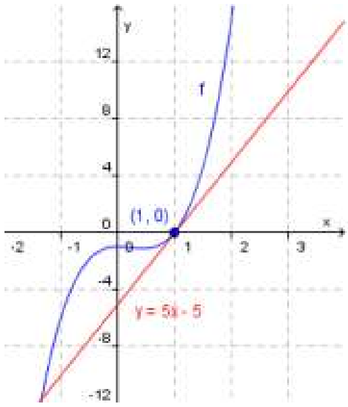
Derivasjon av polynomfunksjoner

Ved å bruke reglene ovenfor er du nå i stand til å derivere alle polynomfunksjoner.

Likningen for tangenten til en graf i et punkt

[Likningen for tangenten til en graf i et punkt (13821)]

En funksjon *f* er gitt ved $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Vi vil finne likningen for tangenten til grafen når $x = 1$.



Tangenten går gjennom punktet $(1, f(1))$. Vi finner først $f(1)$.

$$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

Vi vet at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet. Vi finner derfor $f'(x)$.

$$f'(x) = 9x^2 - 4x$$

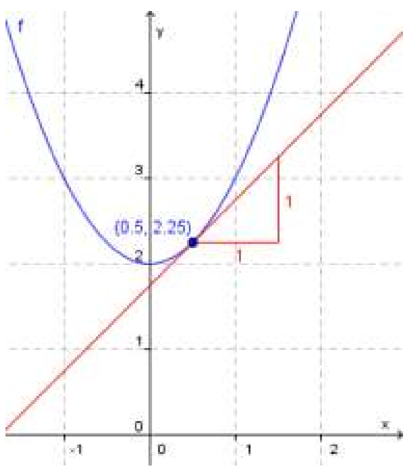
Vi skal finne tangenten når $x = 1$. Vi regner ut $f'(1)$

$$f'(1) = 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

Nå vet vi at tangenten går gjennom punktet $(1, 0)$ og har stigningstallet 5. Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - 0 &= 5(x - 1) \\ y &= 5x - 5 \end{aligned}$$

Hvordan finne verdier for den deriverte grafisk



Den momentane vekstfarten eller den deriverte til $f(x) = x^2 + 2$ når for eksempel $x = 0{,}5$, er altså det samme som stigningstallet til tangenten til kurven når $x = 0{,}5$.

Vi kan finne en verdi for denne vekstfarten grafisk ved å tegne grafen til *f* og tangenten til *f* når $x = 0{,}5$.

Vi ser at tangenten har stigningstallet 1. Den momentane vekstfarten er altså lik 1 når $x = 0{,}5$. Den deriverte til $f(x)$ når $x = 0{,}5$ er 1.

Vi skriver

$$f'(0{,}5) = 1$$

Drøfting av polynomfunksjonar på grunnlag av eigenskapar til den deriverte funksjonen

Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av d..

Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av egenskaper til den deriverte funksjonen (13823)

Vi kan bruke den deriverte til å finne topp- og bunnpunkter på grafen til en funksjon og til å bestemme hvor grafen stiger og synker. Dette kan vi gjøre ved regning, uten å tegne grafen.

Monotoniegenskaper

Å finne ut hvor grafen stiger og hvor grafen synker, kalles for å drøfte funksjonens **monotoniegenskaper**.

Å **drøfte en funksjon** betyr gjerne at vi skal undersøke monotoniegenskapene og bestemme topp- og bunnpunkter. Vi kan også bli bedt om å bestemme nullpunkter, definisjonsmengde, krumming og vendepunkt (se avsnittet om krumningsforhold og vendepunkt).

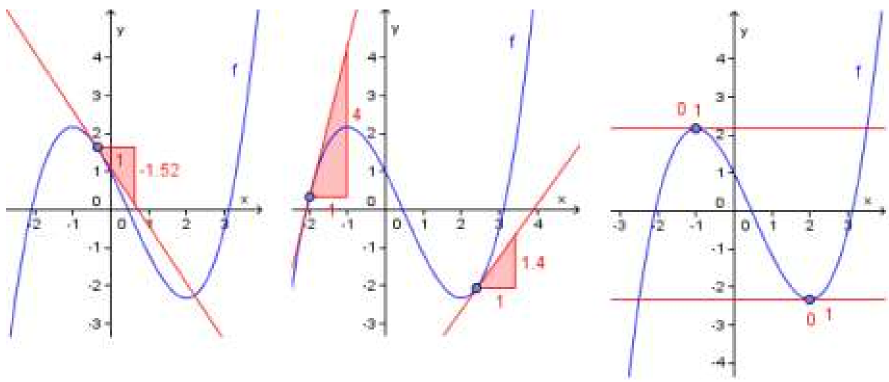
Drøfting av polynomfunksjoner

Utfordring!

Tegn grafen til tredjegradsfunksjonen *f* gitt ved $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Tegn deretter tangenter til grafen for noen *x*-verdier mellom -2 og 3.

Undersøk om det er en sammenheng mellom tangentenes stigningstall og hvorvidt grafen stiger, synker eller har topp-/bunnpunkter.



Ser du at

- Stigningstallet til tangenten er positivt når grafen stiger.
- Stigningstallet til tangenten er negativt når grafen synker.
- Stigningstallet til tangenten er null i topp- og bunnpunkt.

Siden **tangentens stigningstall = den deriverte til funksjonen**, betyr dette at

Når **grafen stiger**, er **den deriverte positiv**. Det motsatte gjelder også. Hvis **den deriverte er positiv, så stiger grafen.**

Når **grafen synker**, er **den deriverte negativ**. Det motsatte gjelder også. Hvis **den deriverte er negativ, så synker grafen.**

Når grafen har **topp- eller bunnpunkt**, er **den deriverte lik null**.

Dette betyr at vi kan finne ut for hvilke verdier av *x* grafen til en funksjon stiger, for hvilke verdier av *x* den synker, og når den har topp- eller bunnpunkt ved å se på fortegnet til den deriverte. Vi viser dette gjennom noen eksempler.

Eksempel 1

Finn ved regning når funksjonen $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ stiger, og når den synker.
Finn også eventuelle topp- og bunnpunkter.

Løsning
Vi deriverer *f*(*x*)

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$
$$f'(x) = -2x + 4$$

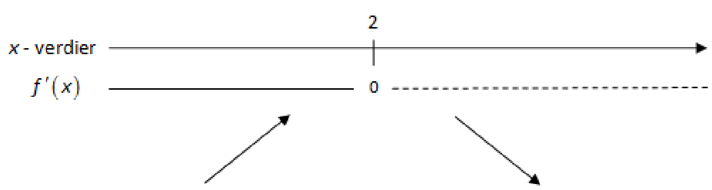
Vi setter så $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$
$$-2x + 4 = 0$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige *x* - verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow, 2)$ og $(2, \rightarrow)$ og for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$

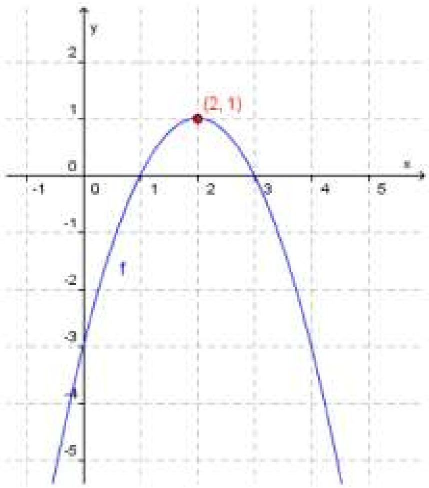
$f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0$
Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Vi ser av fortegnslinjen at $f(x)$ vokser for $x \in (\leftarrow, 2)$ og at $f(x)$ minker når $x \in (2, \rightarrow)$.

$f(x)$ har derfor et toppunkt når *x* = 2. Toppunktet er $(2, f(2)) = (2, 1)$ fordi $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$.

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for de deriverte og se sammenhengen.



Eksempel 2

Funksjonen *f* er gitt ved $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{2}x^{2}-2x+1$.

Drøft monotoniegenskapene til *f* og finn eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

Løsning

Vi deriverer *f*(*x*)

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{2}x^{2}-2x+1$$
$$f'\left(x\right)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{2}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^{1}-2$$
$$f'\left(x\right)=x^{2}-x-2$$

Setter så $f'\left(x\right)=0$

$$f'\left(x\right)=0$$
$$x^{2}-x-2=0$$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1^{2})-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}$$
$$x=-1 \text{ eller } x=2$$

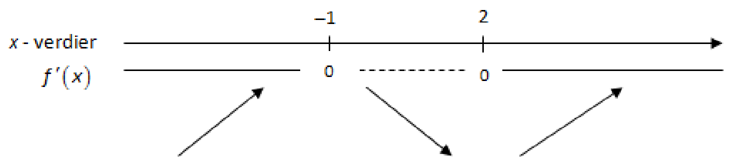
Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldigeverdier i hvert av de aktuelle intervallene $(\leftarrow,-1),(-1,2)$ og $(2,\rightarrow)$, og for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$f'\left(-2\right)=\left(-2\right)^{2}-\left(-2\right)-2=4>0$

. $f'\left(0\right)=\left(0\right)^{2}-\left(0\right)-2=-2<0$

$f'\left(3\right)=\left(3\right)^{2}-\left(3\right)-2=4>0$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'\left(x\right)$



Vi ser av fortegnslinjen at:

- Grafen stiger for $x\in(\leftarrow,-1)\cup(2,\rightarrow)$
- Grafen synker for $x\in(-1,2)$

f(*x*) har altså et toppunkt når *x* = – 1 og et bunnpunkt når *x* = 2.

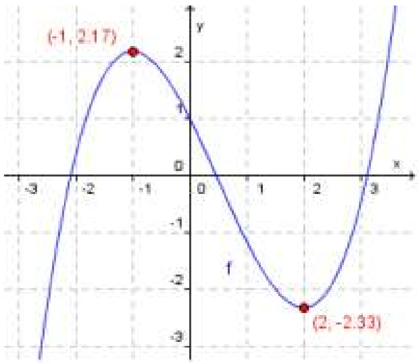
$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1$
$= \frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6} + \frac{6}{6} = \frac{13}{6}$

$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4 + 1$
$= \frac{16}{6} - \frac{12}{6} - \frac{24}{6} + \frac{6}{6} = -\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

Toppunktet er $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{13}{6}\right)$.

Bunnpunktet er $(2, f(2)) = \left(2, \frac{7}{3}\right)$.

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



Ekstremalpunkter

Toppunkter og bunnpunkter kaller vi ofte **ekstremalpunkter**. Andrekoordinaten til et toppunkt er en **maksimalverdi** til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er en minimalverdi. Noen funksjoner kan ha flere topp- eller bunnpunkter. Derfor er maksimal- og minimalverdiene ofte bare **lokale maksimal- og minimalverdier**. Det vil si at de er maksimal- og minimalverdier i et intervall omkring ekstremalpunktet.

Eksempel 3

Finn ved regning når funksjonen *f* gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$ vokser, og når den avtar. Finn også eventuelle ekstremalpunkter.

Løsning
Vi deriverer *f*(*x*)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 4$$

Setter så $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \\ x &= 2 \text{ eller } x = 2 \end{aligned}$$

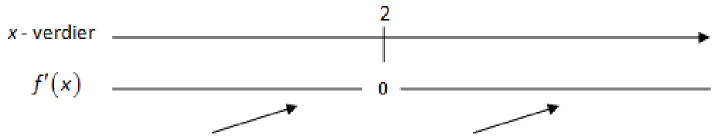
Vi får bare en løsning.

Vi tar stikkprøver i hvert av de to intervallene $(\leftarrow, 2)$ og $(2, \rightarrow)$

$$f'(0) = (0)^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$$

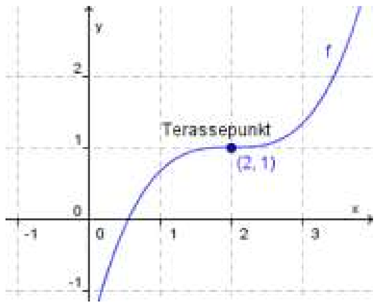
$$f'(3) = (3)^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 > 0$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Denne fortegnslinjen er spesiell siden **den deriverte ikke skifter fortegn i nullpunktet**. Den deriverte er positiv for $x \neq 2$. Det betyr at funksjonen vokser overalt bortsett fra når $x = 2$. Grafen har verken topp- eller bunnpunkt for $x = 2$. Men siden den deriverte er lik null, er tangenten til grafen horisontal for $x = 2$. Et slikt punkt på grafen kalles for et **terrassepunkt.**

Nedenfor har vi tegnet grafen til *f* med terassepunkt.



Stasjonære punkter

Et **stasjonært punkt** på en graf karakteriseres ved at **den deriverte er null** i punktet. I slike punkter er det ingen endring i veksten til funksjonen. Hvis den deriverte skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **ekstremalpunkt**. Hvis den deriverte ikke skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **terrassepunkt**.

File failed to load: https://cdn.mathjax.org/mathjax/latest/extensions/MathMenu.js