

Matematikk S2

Fagstoff til eksamen

Innhold på ndla.no er nå tilgjengelig i PDF- eller ePub-format som hjelpeMidler til eksamen. Disse filene kan lagres på egen datamaskin og leses i digitalt format, eller de kan skrives ut og tas med til eksamen. Dette er automatisk genererte filer som ikke er manuelt bearbeidet.

Dette dokumentet er en tekstuutgave av det digitale læreverket for faget slik det forelå på ndla.no april 2015. For å se det komplette læreverket, slik det er sammensatt av ulike medietyper og interaktive elementer, gå til <http://ndla.no>.

Ved eksamen vil man ikke ha adgang til Internett, og dermed vil i hovedsak kun tekst og bilder være tilgjengelig. Animasjoner, simuleringer, lydfiler og video er interaktive ressurser som krever tilkobling til nett.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i Kunnskapsløftet følger to hovedmodeller for hjelpeMidler. I modell 1 er alle hjelpeMidler tillatt. Unntak er Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. For norsk og fremmedspråkene er heller ikke oversettelsesprogrammer tillatt.

Modell 2 er en todelt eksamen. Der er det i del 1 tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. I del 2 er alle hjelpeMidler tillatt med unntak av Internett eller andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Disse fagene følger modell 2 for hjelpeMiddelbruk uten forberedelsesdel; matematikk i grunnskolen, matematikk i grunnskoleopplæringen for voksne, matematikk, fysikk, kjemi og biologi i videregående opplæring.



Innholdsfortegnelse

Innholdsfortegnelse	2
Algebra	6
Teori	6
Tallfølger	6
Tallfølger	6
Rekursiv og eksplisitt formel	8
Oversikt over tallfølger og formler	10
Fra eksplisitt formel til rekursiv formel	12
Aritmetiske tallfølger	14
Geometriske tallfølger	15
Tallrekker	16
Tallrekker	16
Eksempel	19
Aritmetiske rekker	20
Geometriske rekker	22
Praktiske problemer knyttet til rekker	24
Prosentvise endringer	24
Sparing	25
Avbetaling	28
Nåverdier	29
Serielån	30
Annuitetslån	32
Uendelige geometriske rekker	34
Uendelige geometriske rekker	34
Konvergente og divergente rekker	36
Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker	37
Faktorisering	39
Faktorisering	39
Faktorisering av tall og enkle bokstavuttrykk	40
Faktorisering av andogradspolynomer med nullpunktmetoden	41
Faktorisering av tredjegradspolynomer	44
Polynomdivisjon	45
Likninger	47
Tredjegradslikninger	47
Rasjonale likninger	49
Likningssett	52

Funksjoner	55
Teori	55
Innledning	55
Innledning	55
Funksjoner	56
Derivasjon	57
Derivasjon	57
Hvordan finne den deriverte grafisk?	59
Derivasjonsregler	60
Den deriverte til en konstant funksjon	61
Den deriverte til en potensfunksjon	62
Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant	63
Den deriverte av et produkt av to funksjoner	64
Den deriverte til en kvotient (brøk)	65
Kjerneregelen	66
Den deriverte til eksponentialfunksjonen	68
Den deriverte til logaritmefunksjonen	71
Likningen for tangenten til en graf i et punkt	72
Funksjonsdrøfting	73
Funksjonsdrøfting	73
Drøfting av polynomfunksjoner	74
Ekstremalpunkter og stasjonære punkter	78
Krumningsforhold og vendepunkter	80
Vendetangent	81
Drøfting av logaritmefunksjoner	83
Drøfting av eksponentialfunksjoner	85
Vekstkurven til et tre	88
Strekning, fart og akselrasjon	90
Økonomiske optimeringsproblemer	91
Økonomiske optimeringsproblemer	91
Kostnadsfunksjon	92
Grensekostnad	93
Inntektsfunksjoner	95
Overskuddsfunksjonen viser optimal produksjon	96
Grenseinntekt	97
Etterspørselsfunksjoner	99
Inntekt som funksjon av pris	100

Hvilken pris gir størst overskudd?	101
Enhetskostnader	103
Etterspørselregulering	105
Modellering	106
Modellering	106
Lineære modeller	107
Eksponentialfunksjon som modell	109
Logistisk vekst	113
Areal under grafer	116
Areal under grafer	116
Sannsynlighet og statistikk	120
Teori	120
Stokastiske variabler og sannsynlighetsfordelinger	120
Stokastisk forsøk	120
Definisjon av sannsynlighet og sannsynlighetsmodell	121
En stokastisk variabel og stokastisk sannsynlighetsfordeling	122
Statistikk og sannsynlighet, frekvenstabell og sannsynlighetsfordeling	123
Kumulativ sannsynlighet	124
Binomisk sannsynlighetsfordeling	125
Forventningsverdi, varians og standardavvik	127
Forventningsverdi	127
Gjennomsnitt og forventningsverdi	129
Varians og standardavvik	130
Forventningsverdi og varians for summer av stokastiske variabler	133
Forventningsverdi og standardavvik i en binomisk fordeling	135
Normalfordelingen	137
Normalfordelingen	137
Sentralgrensesetningen	142
Sentralgrensesetningen	142
Kast av terning 100 ganger	143
Kast av to mynter hundre ganger	145
Binomisk forsøk	147
Hypotesetesting	150
Hypotesetesting ved binomisk fordeling	150
Hypotesetesting med normalfordeling	152
Standardisert normalfordeling	154
Standardisert normalfordeling	154

Algebra

Teori

Tallfølger

Tallfølger

[Tallfølger \(117487\)](#)

Tall plassert etter hverandre i en bestemt rekkefølge, kaller vi en **tallfølge**. Ditt første møte med tallfølger var kanskje da du lærte å telle. Tallene 1, 2, 3 og 4 er et eksempel på en tallfølge eller bare en **følge**. Legg merke til at rekkefølgen av tallene er vesentlig.

Tallene i en tallfølge kalles **ledd**, og leddene **følger som oftest et bestemt mønster**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323	4782969	14348907	43046721	129140163	387420489	1162261467	3486784401	1045935323	3137805969	9413417907	28239253721	84717761163	25415328349	76246084947	228738254911	706214764733	2118644292099	6355932876297	19067798628891	57193395886673	171580187659921	514740562979763	1544221688939291	4632665066717873	1389799520015361	4169398560045083	1250819568013525	3752458680040575	11257375680013575	33772126800040675	10131637680013575	30394912800040675	9118473680013575	27355420800040675	82066262400013575	24619878400040675	73859635200013575	22157890800040675	66473672400013575	200321016800040675	60096335200013575	180288056800040675	54086416800013575	162259256800040675	48679756800013575	146039276800040675	43811782400013575	13143534800040675	40029604800013575	12008881600040675	36026645600013575	10807953600040675	32423848800013575	97211846400040675	29163553600013575	87485650400040675	26245695200013575	78751685600040675	23625505600013575	70876556800040675	21262966400013575	63793899200040675	191381697600013575	574145092800040675	172243527200013575	516730581600040675	155019174400013575	465057523200040675	139517257600013575	418551772800040675	125565531600013575	376716695200040675	113015008800013575	340045026400040675	102013507200013575	306040521600040675	91813506400013575	27544051200040675	82639503200013575	24791851600040675	74375838400013575	223127515200040675	670382545600013575	201014763200040675	603044289600013575	180913286400040675	542740859200013575	162822257600040675	488467522400013575	146539856800040675	439619570400013575	131885870400040675	405657611200013575	121697283200040675	365091851200013575	109027555600040675	327082666400013575	981248999200040675	294374699600013575	914523998400040675	274357199200013575	823071597600040675	246921499200013575	746734996800040675	223970498400013575	68690149600040675	205670494400013575	617514948800040675	185254486400013575	555773459200040675	166931057600013575	500769522400040675	150230857600013575	45070257600040675	13523417600013575	40570252800040675	12171075200013575	36513225600040675	111709675200013575	33513052800040675	100539508800013575	30161852800040675	90505508800013575	27151652800040675	87170158400013575	26151051200040675	80453153600013575	24145951200040675	72467853600013575	21740351200040675	65221053600013575	19566351200040675	58518053600013575	17555451200040675	52666351200013575	15859851200040675	47589551200013575	14276851200040675	42830551200013575	12849551200040675	38548551200013575	11554551200040675	34665551200013575	10355251200040675	31083551200013575	93250551200040675	28050151200013575	83500551200040675	24500151200013575	75000551200040675	22500151200013575	67500151200040675	20250151200013575	62500151200040675	18750151200013575	55000151200040675	16250151200013575	50000151200040675	15000151200013575	45000151200040675	13500151200013575	40000151200040675	12000151200013575	35000151200040675	10500151200013575	30000151200040675	90000151200013575	27000151200040675	81000151200013575	24300151200040675	72900151200013575	218700151200040675	656100151200013575	1968300151200040675	5904900151200013575	17714700151200040675	53144100151200013575	159432300151200040675	478296900151200013575	1434890700151200040675	4304672100151200013575	12914016300151200040675	38742048900151200013575	116226146700151200040675	348678440100151200013575	104593532300151200040675	313780596900151200013575	941341790700151200040675	2823925372100151200013575	8471776116300151200040675	2541532834900151200013575	7624608494700151200040675	22873825491100151200013575	70621476473300151200040675	211864429209900151200013575	6355939588667300151200040675	1906779862889100151200013575	5719339588667300151200040675	17158018765992100151200013575	51474056297976300151200040675	154422168893929100151200013575	463266506004057500151200040675	1389799520004067500151200013575	4169398560004067500151200040675	12508195680004067500151200013575	3752458680004067500151200040675	11257375680004067500151200013575	3439491280004067500151200040675	10131637680004067500151200013575	3039491280004067500151200040675	9118473680004067500151200013575	2735542080004067500151200040675	8206626240004067500151200013575	2461987840004067500151200040675	7385963520004067500151200013575	2215789080004067500151200040675	6647367240004067500151200013575	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	463266506004057500151200013575	1389799520004067500151200040675	4169398560004067500151200013575	12508195680004067500151200040675	3752458680004067500151200013575	11257375680004067500151200040675	3439491280004067500151200013575	10131637680004067500151200040675	3039491280004067500151200013575	9118473680004067500151200040675	2735542080004067500151200013575	8206626240004067500151200040675	2461987840004067500151200013575	7385963520004067500151200040675	2215789080004067500151200013575	6647367240004067500151200040675	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	463266506004057500151200013575	1389799520004067500151200040675	4169398560004067500151200013575	12508195680004067500151200040675	3752458680004067500151200013575	11257375680004067500151200040675	3439491280004067500151200013575	10131637680004067500151200040675	3039491280004067500151200013575	9118473680004067500151200040675	2735542080004067500151200013575	8206626240004067500151200040675	2461987840004067500151200013575	7385963520004067500151200040675	2215789080004067500151200013575	6647367240004067500151200040675	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	463266506004057500151200013575	1389799520004067500151200040675	4169398560004067500151200013575	12508195680004067500151200040675	3752458680004067500151200013575	11257375680004067500151200040675	3439491280004067500151200013575	10131637680004067500151200040675	3039491280004067500151200013575	9118473680004067500151200040675	2735542080004067500151200013575	8206626240004067500151200040675	2461987840004067500151200013575	7385963520004067500151200040675	2215789080004067500151200013575	6647367240004067500151200040675	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	463266506004057500151200013575	1389799520004067500151200040675	4169398560004067500151200013575	12508195680004067500151200040675	3752458680004067500151200013575	11257375680004067500151200040675	3439491280004067500151200013575	10131637680004067500151200040675	3039491280004067500151200013575	9118473680004067500151200040675	2735542080004067500151200013575	8206626240004067500151200040675	2461987840004067500151200013575	7385963520004067500151200040675	2215789080004067500151200013575	6647367240004067500151200040675	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	463266506004057500151200013575	1389799520004067500151200040675	4169398560004067500151200013575	12508195680004067500151200040675	3752458680004067500151200013575	11257375680004067500151200040675	3439491280004067500151200013575	10131637680004067500151200040675	3039491280004067500151200013575	9118473680004067500151200040675	2735542080004067500151200013575	8206626240004067500151200040675	2461987840004067500151200013575	7385963520004067500151200040675	2215789080004067500151200013575	6647367240004067500151200040675	1906779862889100151200040675	5719339588667300151200013575	17158018765992100151200040675	51474056297976300151200013575	154422168893929100151200040675	46

Nedenfor ser du flere tallfølger. Finn mønstrene, og fyll inn de neste leddene i hver tallfølge.

Tallfølge	Mønster
a) 1, 2, 3, ...	
b) 1, 4, 9, 16, ...	
c) 2, 4, 8, ...	
d) 3, 9, 27, ...	
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	
f) 5, 10, 15, 20, ...	
g) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	
h) 1, 3, 6, 10, ...	
i) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	

Rekusiv og eksplisitt formel

[Rekusiv og eksplisitt formel \(117587\)](#)

Det er vanlig å gi **de enkelte leddene** i en tallfølge **navn**. Det første leddet kaller vi a_1 , det andre leddet a_2 osv. Ledd nummer n i tallfølgen får betegnelsen a_n , hvor n er et naturlig tall.

For tallfølgen 1, 2, 3, ... er

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 3$$

...

Vi skal nå lage en formel for det n -te leddet, a_n . Dette kan gjøres på to måter.

Rekursiv formel

Vi ser at hvert ledd i tallfølgen er lik leddet foran pluss tallet 1. For eksempel er $a_4 = a_3 + 1$. Det betyr at vi for denne følgen kan skrive at $a_n = a_{n-1} + 1$.

Denne type formel kalles **rekursiv**. Når vi kjenner ett ledd i tallfølgen, gir formelen det neste leddet. Det betyr at når vi kjenner det første leddet i tallfølgen, kan vi finne resten av leddene ved hjelp av den rekursive formelen.

Det kan være tidkrevende å finne verdien til et ledd langt ute i en tallfølge ved å bruke en rekursiv formel.

Rekursive formler egner seg derimot godt i et regneark. Vi kan for eksempel få fram tallfølgen ovenfor ved å skrive tallet 1 i rute A1 og deretter skrive formelen som vist i rute A2. Når vi kopierer denne formelen nedover, får vi formlene og verdiene du ser til høyre her.

A
1
2
3
4
5
6

A
1
=A1+1
=A2+1
=A3+1
=A4+1
=A5+1

Eksplisitt formel

Vi ser også at hvert ledd i følgen er lik nummeret på leddet. For eksempel er $a_4 = 4$. Det betyr at vi for denne følgen kan skrive at $a_n = n$. Denne type formel kalles **eksplisitt**.

Ved å bruke en eksplisitt formel kan vi finne verdien til et ledd i en tallfølge direkte når vi kjenner nummeret på leddet i følgen.

Eksempel

Tallfølgen 1, 4, 9, 16, ... består av kvadrattallene.

Kvadrattallene kan angis rekursivt ved at oddetall adderes etter følgende mønster:

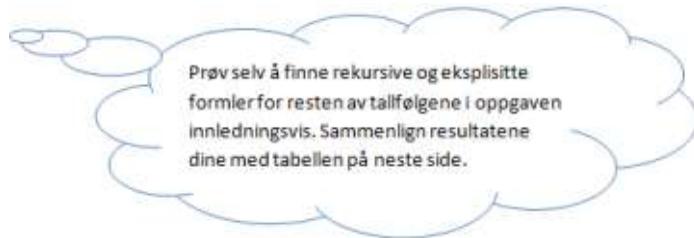
$$\begin{aligned}a_1 &= 1 \\a_2 &= 1+3=1+2\cdot 2-1=4 \\a_3 &= 4+5=4+2\cdot 3-1=9 \\a_4 &= 9+7=9+2\cdot 4-1=16 \\a_5 &= 16+9=16+2\cdot 5-1=25 \\\vdots \\a_n &= a_{n-1}+2\cdot n-1\end{aligned}$$

Vi lar kolonne A i et regneark gi n - verdiene. Kolonne B gir kvadrattallene etter den rekursive formelen.

Eksplisitt formel for ledd nummer n er $a_n = n^2$. Kolonne C gir kvadrattallene etter den eksplisitte formelen.

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	9	9
4	4	16	16
5	5	25	25
6	6	36	36

	A	B	C
1	1	=1	=A1^2
2	=A1+1	=B1+2*A2-1	=A2^2
3	=A2+1	=B2+2*A3-1	=A3^2
4	=A3+1	=B3+2*A4-1	=A4^2
5	=A4+1	=B4+2*A5-1	=A5^2
6	=A5+1	=B5+2*A6-1	=A6^2



Oversikt over tallfølger og formler

[Oversikt over tallfølger og formler \(117596\)](#)

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel	Type tallfølge
a) 1, 2, 3, ...	$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + 1$	$a_n = n$	Aritmetisk
b) 1, 4, 9, 16, ...	$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n - 1$	$a_n = n^2$	Annet
c) 2, 4, 8, ...	$a_1 = 2 \quad a_n = a_{n-1} \cdot 2$	$a_n = 2^n$	Geometrisk
d) 3, 9, 27, ...	$a_1 = 3 \quad a_n = a_{n-1} \cdot 3$	$a_n = 3^n$	Geometrisk
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$	$a_n = \frac{n}{n+1}$	Annet
f) 5, 10, 15, 20, ...	$a_1 = 5 \quad a_n = a_{n-1} + 5$	$a_n = 5 \cdot n$	Aritmetisk
g) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...			Primtallene
h) 1, 3, 6, 10, ...	$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + n$	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$	Trekanttallene
i) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	$a_1 = a_2 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n > 2$		Fibonaccitallene

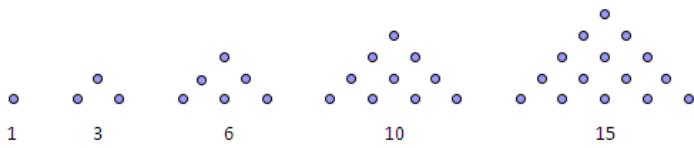
Siste kolonne i tabellen ovenfor har vi kalt «type tallfølge». Det er to typer tallfølger vi skal jobbe mye med, det er **aritmetiske og geometriske tallfølger**.



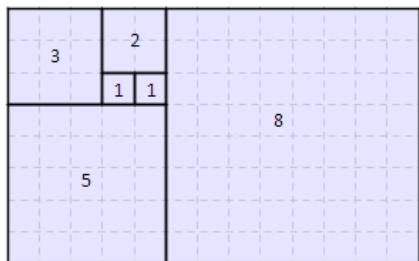
I en **aritmetisk tallfølge** er hvert ledd i følgen lik leddet foran **addert med** en konstant.

I en **geometrisk tallfølge** er hvert ledd i følgen lik leddet foran **multiplisert med** en konstant.

I tabellen finner du også tre spesielle tallfølger, **fibonaccitallene**, **trekanttallene** og **primtallene**. Du kan finne masse stoff om disse tallfølgene på internett. Legg for eksempel merke til at ingen har ennå funnet en eksplisitt formel for primtall nummer n .



Trekanttallene



Fibonaccitallene



Leonardo Fibonacci (ca. 1170 - 1259) regnes som den fremste europeiske matematikeren i middelalderen. Han er kanskje først og fremst kjent for å ha introdusert det indiske tallsystemet som araberne hadde videreutviklet (og som vi bruker i dag), for Europa. Han gav en innføring i de nye regneteknikkene og argumenterte for at dette tallsystemet var bedre enn romertallene. Fibonaccitallene kommer fra et problem Fibonacci brukte som eksempel i en av sine bøker. Problemet handler om hvor fort kaniner kan formere seg under ideelle forhold.

Se [Fibonaccitallene](#)

Fra eksplisitt formel til rekursiv formel

[Fra eksplisitt formel til rekursiv formel \(117603\)](#)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n^2 - (n-1)^2 \\ a_n - a_{n-1} &= n^2 - (n^2 - 2n + 1) \\ a_n - a_{n-1} &= n^2 - n^2 + 2n - 1 \\ a_n - a_{n-1} &= 2n - 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2n - 1 \end{aligned}$$

Når vi kjenner den eksplisitte formelen, kan vi finne den rekursive ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$.

Når vi kjenner den eksplisitte formelen, kan vi finne den rekursive ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$.

1.

Eksempel

Vi ser først på tallfølgen som består av alle kvadrattallene.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
1, 4, 9, 16, ...	$a_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n - 1$	$a_n = n^2$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n^2 - (n-1)^2 \\ a_n - a_{n-1} &= n^2 - (n^2 - 2n + 1) \\ a_n - a_{n-1} &= n^2 - n^2 + 2n - 1 \\ a_n - a_{n-1} &= 2n - 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2n - 1 \end{aligned}$$

Så ser vi på trekanttallene.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
1, 3, 6, 10, ...	$a_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + n$	$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)}{2} \\ a_n - a_{n-1} &= \frac{n \cdot (n+1) - (n-1) \cdot (n)}{2} \\ a_n - a_{n-1} &= \frac{n^2 + n - (n^2 - n)}{2} \\ a_n - a_{n-1} &= \frac{n^2 + n - n^2 + n}{2} = \frac{2n}{2} = n \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

Til slutt ser vi på tallfølgen med brøker fra tabellen ovenfor.

Tallfølge	Rekursiv formel	Eksplisitt formel
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}$	$a_n = \frac{n}{n+1}$

Vi finner den rekursive formelen ved å regne ut $a_n - a_{n-1}$

$$\begin{aligned}a_n - a_{n-1} &= \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{n-1+1} \\a_n - a_{n-1} &= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\a_n - a_{n-1} &= \frac{n \cdot n}{(n+1) \cdot n} - \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} \\a_n - a_{n-1} &= \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{(n+1) \cdot n} \\a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{(n+1) \cdot n}\end{aligned}$$

Aritmetiske tallfølger

[Aritmetiske tallfølger \(117644\)](#)

En tallfølge der differansen mellom et ledd og leddet foran er konstant, kalles en **aritmetisk tallfølge**.

Tallfølgen 2, 4, 6, 8, ... er en aritmetisk følge med **differanse** $d = 2$.

Differansen mellom to ledd som følger etter hverandre i en aritmetisk tallfølge, er gitt ved

$$d = a_n - a_{n-1} \quad n > 1$$

En **rekursiv formel** for en aritmetisk tallfølge blir derfor

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Vi systematiserer og finner følgende mønster:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \\a_2 &= a_1 + d \\a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\&\vdots \\a_n &= a_1 + (n-1)d\end{aligned}$$

I en aritmetisk tallfølge er ledd nummer n gitt ved formelen

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Geometriske tallfølger

[Geometriske tallfølger \(117653\)](#)

En tallfølge der forholdet mellom et ledd og ledet foran er konstant, kalles en **geometrisk tallfølge**.

Tallfølgen 1, 2, 4, 8, ... er en geometrisk tallfølge med **kvotient**

$$k = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$$

I en geometrisk tallfølge kan vi alltid finne neste ledd i tallfølgen ved å multiplisere med kvotienten, k .

Den rekursive formelen for en geometrisk tallfølge blir derfor

$$a_n = a_{n-1} \cdot k$$

Vi systematiserer og finner følgende mønster:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \\a_2 &= a_1 \cdot k \\a_3 &= a_2 \cdot k = (a_1 \cdot k) \cdot k = a_1 \cdot k^2 \\a_4 &= a_3 \cdot k = (a_1 \cdot k^2) \cdot k = a_1 \cdot k^3 \\&\vdots \\a_n &= a_1 \cdot k^{(n-1)}\end{aligned}$$

I en geometrisk tallfølge er ledd nummer n gitt ved formelen

$$a_n = a_1 \cdot k^{(n-1)}$$

Tallrekker

Tallrekker

[Tallrekker \(117667\)](#)

Når vi adderer leddene i en tallfølge, får vi en **tallrekke**. Vi bruker vanligvis bare ordet rekke. Vi skiller mellom **uendelige rekker** og **endelige rekker**.

En **uendelig rekke** består av uendelig mange ledd slik som $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

En **endelig rekke** består av et endelig antall ledd slik som $2 + 4 + 8 + 10 + 12$ eller $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100$.

Vi bruker de samme symbolene for leddene i en rekke som for leddene i en tallfølge.

Det første leddet betegnes a_1 , det andre leddet a_2 osv.

Summen av de n første leddene i en rekke betegnes med symbolet S_n .

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Vi kan finne summen av tallrekker med og uten digitale hjelpe midler.

For å finne summen av en endelig rekke uten digitale hjelpe midler kan vi sette tallene under hverandre og summere på vanlig måte.

(Hvis rekken har mange ledd, kan dette fort bli en stor jobb.)

For noen rekker, for eksempel aritmetiske og geometriske, har vi formler som vi kan bruke for å finne summer. Dette skal vi komme tilbake til.

Som et digitalt hjelpe middel kan du for eksempel bruke **regneark**. Da plasserer du tallrekken i en rad eller i en kolonne, og raden eller kolonnen summeres. Nedenfor ser du hvordan vi har funnet summen av de 10 første trekanttallene i et regneark. Til høyre kan du se hvilke formler vi har brukt i de ulike cellene i regnearket.

	A	B
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55
11		
12	$S_{10} =$	220

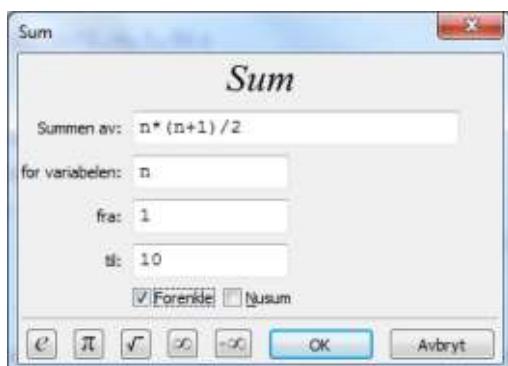
	A	B
1	1	=A1*(A1+1)/2
2	2	=A2*(A2+1)/2
3	3	=A3*(A3+1)/2
4	4	=A4*(A4+1)/2
5	5	=A5*(A5+1)/2
6	6	=A6*(A6+1)/2
7	7	=A7*(A7+1)/2
8	8	=A8*(A8+1)/2
9	9	=A9*(A9+1)/2
10	10	=A10*(A10+1)/2
11		
12	$S_{10} =$	=SUMMER(B1:B10)

Når den eksplisitte formelen er kjent, kan du enklere og raskere finne summen av rekken ved å bruke en kommando i et digitalt verktøy som for eksempel wxMaxima. Se tabellen nedenfor.

Dersom du vil finne summen av de ti første trekanttallene i wxMaxima, kan du skrive kommandoen **sum** etterfulgt av et parentesuttrykk direkte i skrifefeltet nederst i skjermbilde

Skriv inn: `sum(n*(n+1)/2, n, 1, 10)`

I parentesuttrykket skriver du først den eksplisitte formelen for ledd nummer n i rekken, etterfulgt av komma. Så oppgir du hva som er den variable, startverdi og sluttverdi med komma mellom.



Du kan også bruke dialogboksen sum.
(Velg «Funksjonsanalyse» og «Beregn sum».)

I tabellen nedenfor ser du hvordan vi kan bruke wxMaxima for å finne summen av ulike tallrekker.

Tallrekke	Eksplisitt formel	Kommando i digitalt verktøy	Sum
$1+2+3+4+5$	$a_n = n$	wxMaxima Skriv inn: <code>sum(n, n, 1, 5)</code>	$S_5 = 15$
$1+4+9+16+25+36$	$a_n = n^2$	wxMaxima Skriv inn: <code>sum(n^2, n, 1, 6)</code>	$S_6 = 91$
$2+4+8+16+32+64+128$	$a_n = 2^n$	wxMaxima Skriv inn: <code>sum(2^n, n, 1, 7)</code>	$S_7 = 254$
$1+3+5+7+\dots+55$	$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$	wxMaxima Skriv inn: <code>sum(n*(n+1)/2, n, 1, 10)</code>	$S_{10} = 220$
$5+10+15$	$a_n = 5 \cdot n$	wxMaxima Skriv inn: <code>sum(5n, n, 1, 3)</code>	$S_3 = 30$

Matematikere bruker gjerne den greske bokstaven \sum (stor sigma) for sum. Da markerer vi under og over sigmaetegnet hvilket ledd vi starter med, og hvilket ledd som er det siste. For eksempel skriver vi summen av de seks første leddene i rekken med eksplisitt formel lik n^2 på følgende måte:

$$S_6 = \sum_{n=1}^6 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

Eksempel

[Eksempel \(117674\)](#)

Tenk deg at du får tilbud om å ta en sommerjobb over fire uker, dvs. 20 arbeidsdager. Arbeidsgiveren er litt rar og sier at du får 1 krone første dag du jobber. Så dobler han daglønnen din for hver dag du er på jobb. Det vil si at du får 2 kroner andre dag du jobber, 4 kroner den tredje dagen osv. Slik holder du på i 20 dager.

Samlet lønn etter n dager er summen av rekken

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + a_n \\ S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$$



Vi ser at eksplisitt formel for ledd nummer n er $a_n = 2^{n-1}$.

Vi vil finne samlet lønn den første uka, dvs. de 5 første dagene.

$$S_5 = 2^{(1-1)} + 2^{(2-1)} + 2^{(3-1)} + 2^{(4-1)} + 2^{(5-1)} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Lønnen den første uka blir på 31 kroner! Kanskje en litt underbetalt jobb?

Vi ønsker å finne samlet lønn i hele perioden, altså 20 dager. Det vil da være fornuftig å bruke et digitalt hjelpemiddel.

Vi bruker wxMaxima og får

$$\sum_{n=1}^{20} 2^{n-1} = 1048575$$

En samlet lønn på 1 048 575 kroner!

Kanskje noe å satse på likevel.

Aritmetiske rekker

[Aritmetiske rekker \(117678\)](#)

Når vi adderer leddene i en aritmetisk tallfølge, får vi en **aritmetisk rekke**.

Et eksempel på en slik rekke er $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$

Vi ser at differansen d mellom et ledd og det foregående leddet er 3.

I kapittelet [Aritmetiske tallfølger](#) fant vi at ledd nummer i en aritmetisk tallfølge var gitt ved $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Denne formelen gjelder på samme måte for ledd nummer n i en aritmetisk rekke.

Summen av en aritmetisk rekke

Vi ønsker å finne en formel for summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke. Vi finner først en formel for summen av de 5 første leddene.

Vi skriver summen av de 5 første leddene på to måter. Først leddene i stigende rekkefølge, så leddene i synkende rekkefølge.

$$\begin{aligned}S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\S_5 &= a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1\end{aligned}$$

Vi summerer venstresidene og høyresidene og får

$$S_5 + S_5 = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + (a_3 + a_3) + (a_4 + a_2) + (a_5 + a_1)$$

I en aritmetisk rekke er differansen, d , mellom hvert ledd lik. I parentesene på høyresiden vil de «blå leddene» øke med d for hver parentes fra venstre mot høyre mens de «røde leddene» vil avta med d . Det betyr at summen i hver av parentesene er like.

$$(a_1 + a_5) = (a_2 + a_4) = (a_3 + a_3) = (a_4 + a_2) = (a_5 + a_1)$$

Høyresiden blir da lik $5 \cdot (a_1 + a_5)$, og siden venstresiden kan skrives som $2 \cdot S_5$, får vi at

$$2 \cdot S_5 = 5 \cdot (a_1 + a_5)$$

Ved å dividere med 2 på begge sider av likhetsteget får vi

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2}$$

Resonnementet ovenfor gjelder på samme måte om vi bytter ut antall ledd i rekken med et hvilket som helst annet naturlig tall enn 5.

Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved formelen

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Eksempel

I 2008 solgte en forhandler 3 000 sykler. Vi antar at salget vil øke med 300 sykler per år i noen år framover.



1) Hvor mange sykler vil forhandleren til sammen selge fram til og med år 2013?

2) Når vil det årlige salget være på 3 900 sykler?

3) Hvor mange år vil det gå før forhandleren til sammen har solgt 32 400 sykler?

Løsning

1) Fra og med 2008 til og med 2013 vil si en periode på seks år. De årlige salgstallene danner en aritmetisk rekke der $a_1 = 3000$ og $d = 300$.

Hvor mange sykler?

Vi finner først a_6 dvs. salget i 2013

$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot 300 = 3000 + 5 \cdot 300 = 4500$$

Samlet salg blir

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)}{2} \cdot 6 = \frac{(3000 + 4500)}{2} \cdot 6 = 7500 \cdot 3 = 22\,500$$

Forhandleren vil selge 22 500 sykler fram til og med år 2013.

2) Et uttrykk for salget om n år er
$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 300 = 3000 + 300n - 300 = 300n + 2700$$

Vi kan finne når det årlige salget er 3 900 sykler ved å sette $a_n = 3900$ og løse likningen

$$\begin{aligned} 300n + 2700 &= 3900 \\ 300n &= 1200 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Husk at vi teller fra og med år 2008, slik at $n = 4$ blir i år 2011.

3) Vi vil nå finne når summen av salget blir 32 400 sykler.

Vi finner først et uttrykk for S_n

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n \\ &= \frac{(3000 + (300n + 2700))}{2} \cdot n \\ &= \frac{300n + 5700}{2} \cdot n \\ &= 150n^2 + 2850n \end{aligned}$$

Vi setter så $S_n = 32400$ og finner

$$150n^2 + 2850n = 32400 \text{ som gir } n = -27 \text{ og } n = 8$$

Her kan vi bare bruke den positive løsningen. Summen av salget vil nå 32 400 sykler ved utgangen av 2015.

Geometriske rekker

[Geometriske rekker \(117687\)](#)

Når vi adderer leddene i en geometrisk tallfølge, får vi en **geometrisk tallrekke**. I en geometrisk rekke er forholdet mellom et ledd og det foregående leddet konstant. Vi kaller dette forholdstallet for rekvensens **kvotient**, k .

Et eksempel på en geometrisk rekke er $20 + 40 + 80 + 160 + \dots$

Hvert ledd i denne rekken er lik leddet foran multiplisert med 2. Vi har altså en geometrisk rekke med $a_1 = 20$ og $k = 2$.

I avsnittet [Geometriske tallfølger](#) kom vi fram til at ledd nummer n i en geometrisk tallfølge er gitt ved

$$a_n = a_1 \cdot k^{(n-1)}$$

Denne formelen gjelder også for ledd nummer n i en geometrisk rekke. Det betyr at når vi kjenner a_n og k i en geometrisk rekke, kan vi finne alle leddene i rekken.

Eksempel

Vi skal bestemme kvotienten og det første leddet i en geometrisk rekke der $a_5 = 243$ og $a_8 = 6\,561$.

Det er $8 - 5 = 3$ plasser fra a_5 til a_8 .

Det gir at

$$\frac{a_8}{k^3} = \frac{a_5}{a_5} = \frac{6561}{243} = 27$$

Vi kan da finne a_1

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 \cdot k^5}{a_1} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3$$

Den geometriske rekken blir da $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 + \dots$

Summen av en geometrisk rekke

Vi ønsker å finne en formel for summen av de n første leddene i en geometrisk rekke.

Vi finner først summen av de 5 første leddene.

Vi har at

$$\begin{aligned} S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_5 &= a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 \end{aligned}$$

Vi multipliserer begge sidene i likningen med k

$$\begin{aligned} k \cdot S_5 &= k \cdot (a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4) \\ k \cdot S_5 &= a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5 \end{aligned}$$

Vi finner så differansen mellom $k \cdot S_5$ og S_5

$$\begin{aligned} k \cdot S_5 - S_5 &= (a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5) - (a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4) \\ k \cdot S_5 - S_5 &= a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^5 - a_1 - a_1 \cdot k - a_1 \cdot k^2 - a_1 \cdot k^3 - a_1 \cdot k^4 \end{aligned}$$

Her opptrer de fleste leddene i par. Ledd markert med samme farge har samme verdi, men motsatt fortegn og faller bort. Dette gir

$$\begin{aligned} k \cdot S_5 - S_5 &= a_1 \cdot k^3 - a_1 \\ S_5(k-1) &= a_1 \cdot (k^3 - 1) \\ S_5 &= \frac{(k^3-1)}{k-1} \quad k \neq 1 \end{aligned}$$



Vi kan ikke ha en brøk med null i nevner. Derfor gjelder formelen bare når $k \neq 1$. Dersom $k = 1$, blir alle leddene i rekken like. Summen av rekken blir da $S_5 = 5 \cdot a_1$.

Resonnementet ovenfor gjelder på samme måte om vi bytter ut antall ledd i rekken med et hvilket som helst annet naturlig tall enn 5.

Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke er gitt ved formelen

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad \text{når } k \neq 1$$

Når $k = 1$ blir $S_n = n \cdot a_1$.

Praktiske problemer knyttet til rekker

Prosentvise endringer

[Prosentvise endringer \(117727\)](#)

Prosentvise endringer

Eksempel

Hvis du setter 1 000 kroner i banken i dag og får 6 % rente på pengene, vil beløpet om ett år ha vokst til

$$1000 \text{ kr} + 1000 \text{ kr} \cdot \frac{6}{100} = 1060 \text{ kr}$$

Vi kan også regne slik

$$\begin{aligned} 1000 \text{ kr} + 1000 \text{ kr} \cdot \frac{6}{100} &= 1000 \text{ kr} \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) \\ &= 1000 \text{ kr} \cdot (1 + 0,06) = 1000 \text{ kr} \cdot 1,06 \end{aligned}$$

Tallet $1 + \frac{6}{100} = 1,06$ kaller vi for **vekstfaktoren**. Vi kan altså enkelt finne hvor mye beløpet har vokst til etter ett år ved å **multiplisere med vekstfaktoren**.

For å finne hvor mye vi har i banken etter to år, må vi multiplisere beløpet vi hadde etter ett år, med vekstfaktoren, og slik fortsetter vi.

Etter tre år i banken har beløpet vokst til $1000 \text{ kr} \cdot 1,06^3 = 1191 \text{ kr}$.

Vekstfaktor

Når en størrelse øker med $p\%$, blir vekstfaktoren $1 + \frac{p}{100}$.

Når en størrelse reduseres med $p\%$, blir vekstfaktoren $1 - \frac{p}{100}$.

Vi multipliserer med vekstfaktor for å finne ny verdi.

Sparing

[Sparing \(117730\)](#)

Eksempel 1

Tenk deg at du setter inn 8 000 kroner på en konto i begynnelsen av hvert år. Det første beløpet setter du inn i 2011. Du får en fast årlig rente på 3 %.



1) Hvor mye er det på kontoen før du setter inn penger i 2015?

2) Hvor mange år tar før det står minst 60 000 kroner på kontoen?

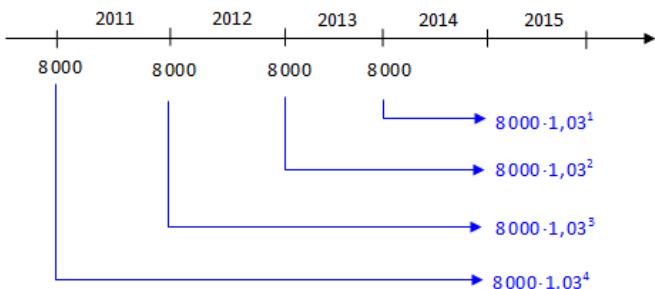
Norges bank - 50 millioner kroner i tusenlapper på hver pall!

Løsning

Vi skal nå se hvordan vi kan finne svar på disse problemstillingene ved å bruke en geometrisk rekke.

1) Du setter inn fire beløp i banken i denne perioden. Det første beløpet du setter inn, vil stå i banken i 4 år, det andre beløpet i 3 år, det tredje i 2 år og det siste i 1 år.

For å få oversikt er det helt nødvendig å tegne et skjema, gjerne for hånd på et kladdeark. Skjemata viser hva de enkelte innskuddene har vokst til ved starten av 2015. Det må gå klart fram om beløpene settes inn/tas ut i begynnelsen eller i slutten av et år.



Samlet beløp i banken i begynnelsen av 2015 er summen av de beløpene som hvert enkelt innskudd har vokst til. Du ser av skjemata at **disse beløpene danner en geometrisk rekke** med kvotient $k = 1,03$ og første ledd $a_1 = 8000 \cdot 1,03$. Antall ledd i rekken er fire fordi du har satt inn fire beløp.

Summen blir da

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$
$$S_4 = 8000 \cdot 1,03 \cdot \frac{(1,03^4 - 1)}{(1,03 - 1)} = 34\,473$$

I begynnelsen av 2015 vil det stå 34 473 kroner på kontoen.

Det er svært viktig å lese denne type oppgaver nøyde. Husk at n står for antall ledd i rekken. Hvordan det første leddet i rekken blir, vil være avhengig av om vi skal finne beløpet på kontoen i begynnelsen eller i slutten av et år.

I eksempelet ovenfor ville det første leddet vært $a_1 = 8000$, mens n fortsatt ville vært 4, dersom en spurte om beløpet rett etter at det siste beløpet ble satt i 2014.

- 2) Du velger å fortsette sparingen og ønsker å vite hvor lang tid det tar før det står minst 60 000 kroner på kontoen.

Forutsetningene er som ovenfor, men nå vet vi ikke hvor mange ganger du må sette inn penger. Vi lar derfor antall ledd i rekken være ukjent. Siden vi kjenner summen av rekken, får vi en likning som kan løses med et digitalt hjelpemiddel

$$\begin{aligned} S_n &= 60\,000 \\ a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} &= 60\,000 \\ 8000 \cdot 1,03 \cdot \frac{(1,03^n - 1)}{1,03 - 1} &= 60\,000 \\ n &= 6,7 \end{aligned}$$

Du må altså sette inn sju beløp. Kontobeløpet vil da passere 60 000 kroner i 2017.

Eksempel 2

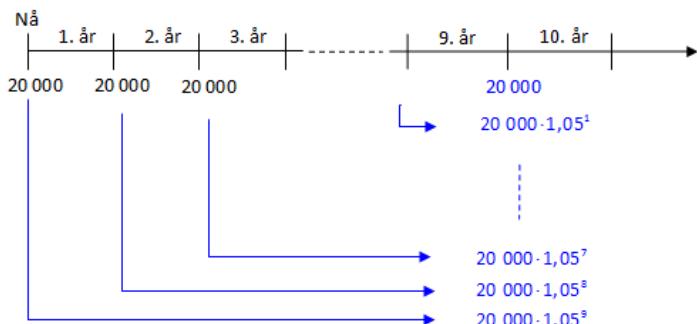
Mads ønsker å spare til bolig. Han oppretter en BSU-konto (boligsparing for ungdom) i sin lokale bank og setter inn 20 000 kroner på denne kontoen 1. januar hvert år i 10 år. Vi regner med en årlig rente på 5 %.



Vi ønsker å finne ut hvor mye det er på BSU-kontoen rett etter at Mads har satt inn det 10. beløpet.

Et drømmehus?

Vi tar da for oss de enkelte innskuddene og ser hva hvert beløp har vokst til rett etter at Mads har satt inn penger for 10. gang. Når det siste beløpet settes inn, har det første beløpet Mads satte inn, stått på kontoen i 9 år. Det neste i 8 år osv. Det første beløpet har altså vokst til $20\,000 \cdot 1,05^9$, det neste til $20\,000 \cdot 1,05^8$ osv. Det siste beløpet Mads satte inn, har ennå ikke forrentet seg. Vi kan illustrere dette med et skjema:



Samlet innskudd i banken ved begynnelsen av det 10. året blir lik summen av de beløpene som hvert innskudd har vokst til. Du ser av skjemaet at **disse beløpene danner en geometrisk rekke** med kvotient $k = 1,05$ og $a_1 = 20\ 000$. Antall ledd i rekken er 10 fordi Mads har satt inn 10 beløp.

Ved å bruke sumformelen for en geometrisk rekke kan vi regne ut hvor mye som står på kontoen rett etter at det 10. beløpet er satt inn

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \\ S_{10} &= 20\ 000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} \\ S_n &= 251\ 558 \end{aligned}$$

Det vil stå 251 558 kroner rett etter at Mads har satt inn det 10. beløpet.

Avbetaling

Avbetaling (117732)

Tenk deg at du skal kjøpe en bruk bil som koster 100 000 kroner. Du får tilbud om å kjøpe bilen på avbetaling over fem år. Du skal betale fem like store årlige beløp. Det første beløpet betaler du om ett år. Selgeren beregner seg 5 % rente per år. Vi forutsetter at denne renten er fast.

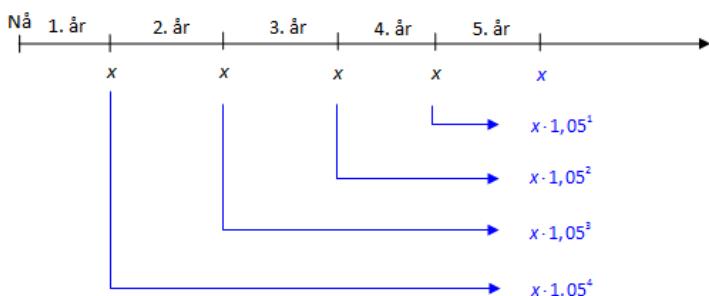


Hva koster det å kjøpe en bruk bil til 100 000 kroner på avbetaling?

Hvor mye må du betale for bilen?

Sett det beløpet du skal betale inn hvert år, lik x kroner. For å få en oversikt over hva du må betale til sammen, kan du finne et uttrykk for størrelsen til hvert beløp du betaler inn, med utgangspunkt i det året du skal gjøre siste innbetaling. (Det er egentlig likegyldig hvilket år du regner beløpene om til.)

Vi lager et skjema for å få en oversikt



Samlet innbetaling blir summen av den geometriske rekken

$$x + x \cdot 1,05 + x \cdot 1,05^2 + x \cdot 1,05^3 + x \cdot 1,05^4$$

Her er $a_1 = x$ og $k = 1,05$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \\ S_5 &= x \cdot \frac{(1,05^5 - 1)}{1,05} - 1 \end{aligned}$$

Bilen kostet 100 000 kroner da avtalen ble inngått. Etter 5 år tilsvarer dette en pris på

$$100\,000 \text{ kr} \cdot 1,05^5 \approx 127\,628 \text{ kr}$$

Summen av innbetalingene er lik prisen for bilen når $S_5 = 127\,628$

$$\begin{aligned} S_5 &= 127\,628 \\ x \cdot \frac{(1,05^5 - 1)}{1,05 - 1} &= 127\,628 \\ x &= 23\,097 \end{aligned}$$

Hvert år må du betale 23 097 kroner.

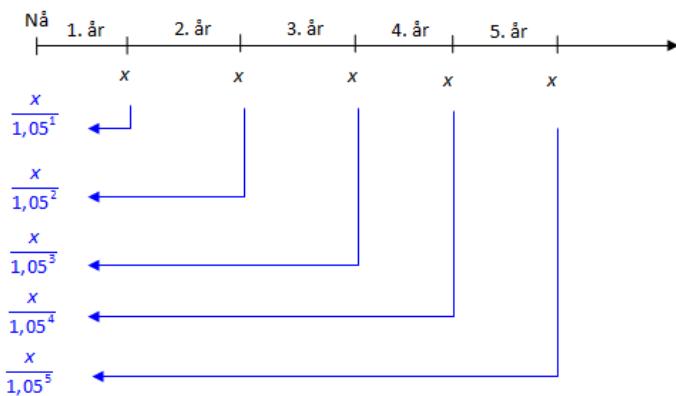
Du må til sammen betale $23\,097 \cdot 5 \text{ kroner} \approx 115\,500 \text{ kroner}$.

Nåverdier

Nåverdier (117734)

I eksemplet [Avbetaling](#) regnet vi verdien av alle beløpene om til samme år for å sammenlikne verdien av samlet innbetaling med prisen på bilen.

Vi kunne like gjerne regnet om innbetalingene til for eksempel det året avbetalingsavtalen ble inngått. Dette kalles for **nåverdiene** til innbetalingene. Da må vi huske på å dividere med vekstfaktoren for hvert år beløpet føres bakover.



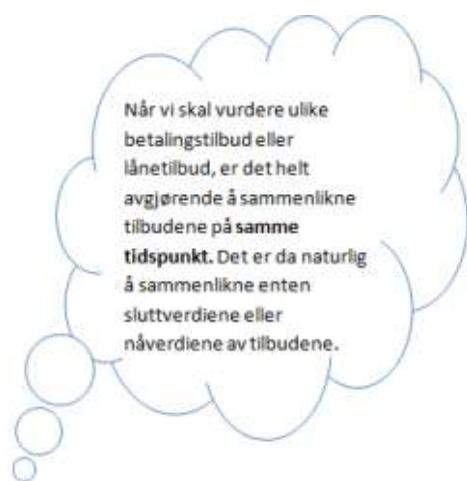
For å betale bilen må nå

$$\frac{x}{1,05^1} + \frac{x}{1,05^2} + \frac{x}{1,05^3} + \frac{x}{1,05^4} + \frac{x}{1,05^5} = 100\ 000$$

Siden samlede innbetalinger, venstresiden i likningen, danner en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{x}{1,05}$ og $k = \frac{1}{1,05}$, får vi at

$$\begin{aligned} S_5 &= 100\ 000 \\ \frac{\frac{x}{1,05} \cdot \left(\left(\frac{1}{1,05} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{1,05} - 1} &= 100\ 000 \\ x &= 23\ 097 \end{aligned}$$

Vi ser at vi får samme resultat som i nevnte eksempel.



Seriellån

[Seriellån \(117736\)](#)

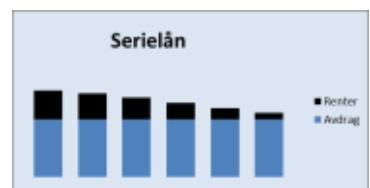
Hvis du tar opp et **serielån**, betaler du like store avdrag gjennom hele låneperioden. Etter hvert som lånet blir nedbetalt, vil renteutgiftene bli mindre. Terminbeløpene, som er summen av avdrag og renter, vil dermed bli lavere og lavere. Avdraget på lånebeløpet holder seg altså konstant gjennom hele låneperioden mens rentedelen endres.

Til høyre ser du en enkel regnearkmodell som du selv kan lage for et seriellån på 100 000 kroner som skal nedbetales over 16 år. Vi har regnet med en lånerente på 5 % per år. Lånebeløp, nedbetalingstid og rentesats kan endres. For enkelhetsskyld regner vi med bare én termin i året selv om det er vanlig med flere terminer per år.

Regnearkmodellen viser hvor stort restlånet er, og hvor mye du må betale i renter og avdrag hvert år. Fra modellen kan du også finne ut hvor store de samlede rentekostnadene blir, og hva du til sammen må betale for lånet.

Nedenfor kan du se hvilke formler vi har brukt i de ulike cellene i regnearket.

A	B	C	D	E
1 Lånebeløp	100000			
2 Rentesats	0,05			
3 Antall år	16			
4 Årlige avdrag	=B1/B3			
5				
6 År	Restlån	Renter	Avdrag	Totalt
7 1	=B1	=B7*\$B\$2	=\$B\$4	=C7+D7
8 2	=B7-\$B\$4	=B8*\$B\$2	=\$B\$4	=C8+D8
9 3	=B8-\$B\$4	=B9*\$B\$2	=\$B\$4	=C9+D9
10 4	=B9-\$B\$4	=B10*\$B\$2	=\$B\$4	=C10+D10
11 5	=B10-\$B\$4	=B11*\$B\$2	=\$B\$4	=C11+D11
12 6	=B11-\$B\$4	=B12*\$B\$2	=\$B\$4	=C12+D12
13 7	=B12-\$B\$4	=B13*\$B\$2	=\$B\$4	=C13+D13
14 8	=B13-\$B\$4	=B14*\$B\$2	=\$B\$4	=C14+D14
15 9	=B14-\$B\$4	=B15*\$B\$2	=\$B\$4	=C15+D15
16 10	=B15-\$B\$4	=B16*\$B\$2	=\$B\$4	=C16+D16
17 11	=B16-\$B\$4	=B17*\$B\$2	=\$B\$4	=C17+D17
18 12	=B17-\$B\$4	=B18*\$B\$2	=\$B\$4	=C18+D18
19 13	=B18-\$B\$4	=B19*\$B\$2	=\$B\$4	=C19+D19
20 14	=B19-\$B\$4	=B20*\$B\$2	=\$B\$4	=C20+D20
21 15	=B20-\$B\$4	=B21*\$B\$2	=\$B\$4	=C21+D21
22 16	=B21-\$B\$4	=B22*\$B\$2	=\$B\$4	=C22+D22
23 Sum	=B22-\$B\$4	=SUMMER(C7:C22)	=SUMMER(D7:D22)	=SUMMER(E7:E22)



Vi kan også bruke det vi har lært om aritmetiske tallfølger og tallrekker til å behandle seriellån.

Ser du at de årlige restlånenene danner en aritmetisk tallfølge der $a_1 = 100\ 000$ og $d = -6\ 250$?

I regnearket finner vi de årlige restlånenene rekursivt ved å trekke det årlige avdraget fra foregående års restlånn. For eksempel viser tabellen at restlånet i år 7 etter at lånet er tatt opp, er 62 500 kroner. Dette kan vi også finne ved å bruke formelen for ledd nummer 7 i den aritmetiske tallfølgen:

En generell formel for restlånet i år n etter at lånet er tatt opp, er

År	Restlånt
1	kr 100 000
2	kr 93 750
3	kr 87 500
4	kr 81 250
5	kr 75 000
6	kr 68 750
7	kr 62 500
8	kr 56 250
9	kr 50 000
10	kr 43 750
11	kr 37 500
12	kr 31 250
13	kr 25 000
14	kr 18 750
15	kr 12 500
16	kr 6 250
Sum	kr 0

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot (-6250) = 100\ 000 - 6250 \cdot n + 6250 = 106\ 250 - 6250 \cdot n$$

Rentene i år n utgjør 5 % av restlånet. Rentene i år n , r_n , er da

$$r_n = (106\ 250 - 6250 \cdot n) \cdot \frac{5}{100}$$

$$r_n = 5312,5 - 312,5 \cdot n$$

Vi ser at rentene danner en aritmetisk rekke med

$$a_1 = 5312,5 - 312,5 \cdot 1 = 5000 \text{ og } a_{16} = 5312,5 - 312,5 \cdot 16 = 312,5$$

Samlet rentebeløp i låneperioden finner vi ved å bruke sumformelen for en aritmetisk rekke

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{16} = \frac{16(5000 + 312,5)}{2} = 5312,5 \cdot 8 = 42\ 500$$

For å finne ut hva du til sammen må betale for lånet, må du addere samlede rentekostnader og avdrag. Avdragene er til sammen lik lånets størrelse, så vi får at

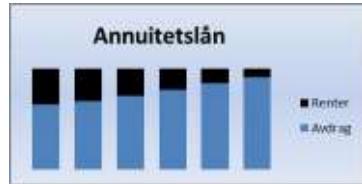
$$\text{Samlet tilbakebetaling} = 42\ 500 + 100\ 000 \text{ kr} = 142\ 500 \text{ kr}$$

Dette er det samme som regnearkmodellen viser.

Annuitetslån

[Annuitetslån \(117738\)](#)

Hvis du tar opp et **annuitetslån**, betaler du like store terminbeløp gjennom hele låneperioden. Etter hvert som lånet blir betalt ned, vil renteutgiftene bli mindre. Når terminbeløpet skal være like stort gjennom hele låneperioden, vil avdragsdelen øke når rentedelen går ned.



Drøft i klassen hva som er eventuelle fordeler og ulemper ved serielån kontra annuitetslån.

Det finnes ulike lånekalkulatorer hvor du kan legge inn lånebeløp, nedbetalingstid, antall terminer per år og rentesats. Lånekalkulatoren beregner så terminbeløpet du må betale.

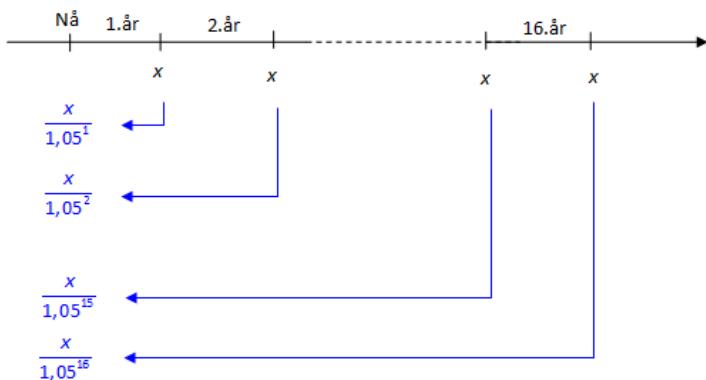
Du finner lånekalkulatorer på nettsidene til de fleste bankene. NDLA har også laget egne lånekalkulatorer som du kan finne på [Regnearkmodeller](#).

Når bankene skal beregne terminbeløpet for et annuitetslån, bruker de teorien om geometriske rekker.

I begynnelsen av et år tar vi opp et annuitetslån på kr 100 000. Lånet skal betales tilbake med 16 like store terminbeløp, x , i slutten av hvert år i 16 år framover.

For å sammenlikne verdien av terminbeløpene omregner vi alle terminbeløpene til verdien de ville hatt da lånet ble tatt opp. Disse verdiene kaller vi **nåverdiene** til terminbeløpene.

Det er lurt å lage en oversikt som vist nedenfor.



Nåverdiene til terminbeløpene danner en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{x}{1.05}$, $k = \frac{1}{1.05}$ og $n = 16$

Summen av denne rekken finner vi med formelen $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$.

Summen må være lik lånets verdi

$$\frac{a_1}{1.05} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.05}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{1.05} - 1} = 100 000$$
$$\frac{x}{1.05} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.05}\right)^{16} - 1}{\frac{1}{1.05} - 1} = 100 000$$

Vi får en likning med én ukjent. Vi kan bruke et digitalt hjelpemiddel for å løse likningen.
Vi får da at $x = 9227$.

Terminbeløpene blir altså på 9 227 kroner.

NB!

Vi valgte at terminbeløpene skulle betales i slutten av året. Hvis terminbeløpene for eksempel skal betales i begynnelsen av hvert år, vil første ledd i rekken bli x og ikke $\frac{x}{1,05}$.

Uendelige geometriske rekker

Uendelige geometriske rekker

[Uendelige geometriske rekker \(117740\)](#)

De geometriske rekrene vi har sett på til nå har stort sett bestått av et endelig antall ledd. Vi skal nå studere **geometriske rekker med uendelig mange ledd**.

La oss først se på en rekke hvor $a_1 = 2$, og kvotienten $k = \frac{1}{2}$. Ledd nummer n er gitt ved formelen

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot k^{(n-1)} \\a_n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\end{aligned}$$

De første leddene i denne rekken blir

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

Summen av de 10 første leddene i rekken er

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 3,99609375$$

Summen av de 30 første leddene i rekken er

$$S_{30} = \sum_{n=1}^{30} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 3,99999999627470$$

Hvis vi regner ut summen av de 100 første leddene, får vi

$$S_{100} = \sum_{n=1}^{100} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \approx 4$$

Det skal ikke så mange ledd til før summen blir tilnærmet lik tallet 4. Det er begrenset hvor mange siffer vi kan ta med i svaret, derfor får vi svaret avrundet til 4 når vi får mange nok ledd.

Men uansett hvor mange ledd vi tar med, vil aldri summen overstige tallet 4. Prøv selv!

Forklaringen på dette kan vi finne ved å bruke formelen for summen av en endelig geometrisk rekke

$$\begin{aligned}S_n &= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \\S_n &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\S_n &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} \\S_n &= -4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \\S_n &= -4 \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) \\S_n &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\end{aligned}$$

Når n blir veldig stor, vil ledet $\frac{1}{2^n}$ bli mindre og mindre, og summen vil derfor nærme seg 4. Men summen vil alltid være litt mindre enn 4.

I matematikken bruker vi symbolen ∞ for uendelig. Vi bruker pil for å peke på hva et uttrykk går mot. Da kan vi skrive

$$S_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 4 \text{ når } n \rightarrow \infty$$

Siden vi kan få summen så nærme 4 vi bare vil, så sier vi at rekken har sum lik 4, og ved å bruke «lim» (latin *limes*, engelsk *limit*) for grenseverdi skriver vi at summen S er

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4$$

Konvergente og divergente rekker

[Konvergente og divergente rekker \(117743\)](#)

Når en uendelig rekke nærmer seg en bestemt sum når $n \rightarrow \infty$, sier vi at rekken **konvergerer**.

Når en uendelig rekke **ikke** nærmer seg en bestemt sum når $n \rightarrow \infty$, sier vi at rekken **divergerer**.

Vi ser nærmere på sumformelen for geometriske rekker

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ når } k \neq 1$$

Hva skjer med summen når n blir veldig stor?

Når $n \rightarrow \infty$, er det bare ledet k^n som vil endre seg. Hvis $k \in (-1, 1)$, vil $k^n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. Summen av rekken blir da

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_1 \cdot \frac{0 - 1}{k - 1} = \frac{-a_1}{k - 1} = \frac{a_1}{1 - k}$$

Rekken går altså mot en bestemt sum og er derfor konvergent.

En uendelig geometrisk rekke hvor $k \in (-1, 1)$, er konvergent og har sum

$$S = \frac{a_1}{1 - k}$$

Vi kan også vise at rekken vil divergere for alle andre verdier av k (vi forutsetter her at $a_1 \neq 0$)

- Når $k \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, vil $k^n \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$. Grenseverdien for summen vil da ikke eksistere, og rekken divergerer.
- Når $k = 1$, blir summen $S_n = n \cdot a_1$. Summen $\rightarrow \infty$ eller $-\infty$ når $n \rightarrow \infty$. Rekken divergerer.
- Når $k = -1$, blir summen $S = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + \dots = a_1 - a_1 + a_1 - \dots$. Summen vil bli a_1 eller 0. Da eksisterer det ikke noen bestemt grenseverdi for summen, og rekken divergerer.

Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker

[Praktiske problemer knyttet til uendelige geometriske rekker \(117745\)](#)

Uendelige geometriske rekker er nyttige i mange sammenhenger. Vi skal se på et par eksempler.

Medisin

Eksempel

En person tar medisin hver dag. Medisinen han tar, er ikke skadelig så lenge det ikke er mer enn 100 mg medisin i kroppen. Kroppen skiller ut 20 % av medisinen hvert døgn.



Vi tenker oss at personen har tatt en mengde a_1 av medisinen hver dag i uendelig lang tid. Av medisinmengden a_1 han tok i går, er bare $a_1 \cdot 0,8$ igjen i kroppen i dag siden 20 % skiller ut per døgn. Av medisinmengden a_1 han tok for to dager siden, Lykkepiller? er bare $a_1 \cdot 0,8^2$ igjen i kroppen.

Samlet mengde medisin i kroppen er summen av det han tok i dag, det han tok i går osv. Siden $k = 0,8 < 1$, får vi en uendelig konvergent geometrisk rekke

$$a_1 + a_1 \cdot 0,8 + a_1 \cdot 0,8^2 + a_1 \cdot 0,8^3 + \dots$$

Vi bruker sumformelen for uendelige konvergente geometriske rekker. Vi vet at summen ikke må overstige 100 mg, og vi kan da bestemme den høyeste daglige dosen som er forsvarlig å gi pasienten

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-k} \\ 100 &= \frac{a_1}{1-0,8} \\ a_1 &= 20 \end{aligned}$$

Den høyeste akseptable dosen per dag er 20 mg.

Utslipp

Eksempel

En oljetank får en skade, og det begynner å lekke olje fra tanken. Det første minuttet lekker det ut 132 liter. Så avtar lekkasjen med 2 % for hvert minutt helt til tanken er tom.



1) Hvor mye olje vil lekke ut i løpet av den første timen?

2) Omrent hvor mye olje var det i tanken før lekkasjen startet? Olje på våt asfalt. Hvor kommer alle fargene fra?

Løsning

1) Antall liter olje som lekker ut den første timen, er summen av de 60 første leddene i en geometrisk rekke med $a_1 = 132$ og $k = 0,98$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{(k^n - 1)}{k - 1} \\ S_n &= 132 \cdot \frac{(0,98^{60} - 1)}{(0,98 - 1)} \approx 4\,636 \end{aligned}$$

Det vil lekke ut ca. 4 636 liter olje den første timen.

2) Samlet oljemengde som lekker ut, er summen av den uendelige geometriske rekken med $a_1 = 132$ og $k = 0,98$

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$
$$S = \frac{132}{1-0,98} = 6\,600$$

Det var omrent 6 600 liter olje i tanken før lekkasjen startet.

Faktorisering

Faktorisering

[Faktorisering \(117747\)](#)

I matematikken trenger vi ofte å omforme, forenkle og trekke sammen uttrykk. For å gjøre det, må vi kunne **faktorisere**.

Å faktorisere vil si å skrive et uttrykk som et produkt av faktorer.

Faktorisering av tall og enkle bokstavuttrykk

Fra grunnskolen er du kjent med brøker som bare består av tall. Du husker hvordan du kan skrive teller og nevner som produkt av primtall, for deretter å forkorte faktor mot faktor. Det du egentlig gjør, er å dele med samme tall i teller og nevner gjentatte ganger

$$\frac{504}{84} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Når vi arbeider med matematiske uttrykk, erstatter vi ofte tall med bokstaver. De samme regnereglene gjelder fortsatt. Bokstavuttrykket nedenfor kan derfor faktoriseres og forkortes på samme måte

$$\frac{a^3b^2cd}{a^2bd} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot c \cdot \cancel{d}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{d}} = a \cdot b \cdot c = abc$$

Oftre er uttrykk sammensatt av både tall og bokstaver, men alle uttrykk som inneholder bare **ett ledd**, faktoriseres etter samme mønster

$$36a^3b^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$$

Faktorisering av tall og enkle bokstavuttrykk

Faktorisering av tall og enkle bokstavuttrykk (117754)

Når et uttrykk består av **flere enn ett ledd**, bør du begynne med å sjekke om det er mulig å faktorisere ved hjelp av en eller flere av de tre metodene som er vist nedenfor.

1. Når **alle ledd** i uttrykket inneholder **samme faktor**, kan den felles faktoren settes utenfor parentes.

Eksempel

$$2x^2 - 12x = 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x = 2x(x - 6)$$

Ved å multiplisere kan du sjekke at du har faktorisert riktig.

$$2x(x - 6) = 2x \cdot x - 2x \cdot 6 = 2x^2 - 12x$$

2. Når uttrykket består av **2 kvadratledd med minustegn mellom**, kan du bruke **tredje kvadratsetning (konjugatsetningen)** baklengs.

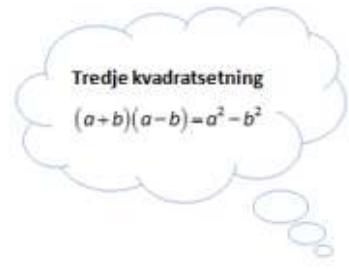
Eksempel

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$$

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 - 9 &= (x + 1)^2 - 3^2 \\&= (x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = (x + 4)(x - 2)\end{aligned}$$

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$



Tredje kvadratsetning

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$3x^2 - 27 = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 3^2 = 3(x^2 - 3^2) = 3(x + 3)(x - 3)$$

Merk at her satte vi felles faktor utenfor parentes først.

3. Når uttrykket er **et fullstendig kvadrat**, kan du bruke **første eller andre kvadratsetning** baklengs.

Eksempel

$$x^2 - 12x + 36$$

$$= x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2$$

$$= (x - 6)^2$$

$$2x^2 + 12x + 18$$

$$= 2(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2)$$

$$= 2(x + 3)^2$$



Første og andre kvadratsetning

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Faktorisering av andregradspolynomer med nullpunktmetoden

[Faktorisering av andregradspolynomer med nullpunktmetoden \(117756\)](#)

Et **polynom** består av et eller flere ledd der hvert ledd er av typen **konstant** $\cdot x^n$, der n er et ikke-negativt heltall. Den høyeste eksponenten i uttrykket kalles graden. Uttrykket $x - 4 + 2x^3$ er et **tredjegradspolynom**, fordi den høyeste eksponenten av x her er tre.

Uttrykket $3x + 3$ er et **polynom av første grad**, fordi den høyeste eksponenten x er opphøyd i én. Uttrykket $2x^2 - 2x + 4$ er et **polynom av andre grad** fordi den høyeste eksponenten er to. Et eksempel på et **tredjegradspolynom** er $x - 4 + 2x^3$, fordi den høyeste eksponenten av x her er tre.

De fleste andregradspolynomer lar seg ikke faktorisere ved å bruke kvadratsetningene baklengs, og/eller ved å sette felles faktor utenfor parentes.

Eksempel

Vi ser på andregradspolynomet $x^2 - 2x - 8$.

Vi starter med å finne nullpunktene til polynomet.

Vi løser da likningen $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 8 &= 0 \\x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \\x &= \frac{2 \pm 6}{2} \\x &= \frac{2-6}{2} = -2 \\x &= \frac{2+6}{2} = 4\end{aligned}$$

Polynomet $x^2 - 2x - 8$ er altså lik null når $x = -2$ og når $x = 4$.

Ser du at uttrykket $(x + 2)(x - 4)$ også er lik null når $x = -2$ og når $x = 4$?

Vi multipliserer og ser at

$$(x + 2)(x - 4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

Vi har da at

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$



Eksempel

Vi ser på polynomet $2x^2 - x - 3$.

Vi starter igjen med å finne nullpunktene og løser likningen $2x^2 - x - 3 = 0$

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 3 &= 0 \\x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \\x_1 &= \frac{1-5}{4} = -1 \\x_2 &= \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Polynomet $2x^2 - x - 3$ er altså lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

Vi prøver samme metode som i forrige eksempel og ser at uttrykket $(x + 1)(x - \frac{3}{2})$ også er lik null når $x = -1$ og når $x = \frac{3}{2}$.

Vi multipliserer og får

$$(x + 1)(x - \frac{3}{2}) = x^2 - \frac{3}{2}x + x - \frac{3}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Dette er ikke det samme polynomet som vi startet med.

Vi startet med

$$2x^2 - x - 3$$

Når vi multipliserer ut parentesene, får vi

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$



Ser du at vi kan multiplisere det siste uttrykket med 2 og få polynomet vi startet med?

$$(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}) \cdot 2 = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 2 \cdot \frac{3}{2} = 2x^2 - x - 3$$

Vi har da at

$$2x^2 - x - 3 = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$$

Andregradspolynomet er faktorisert!

Hvis vi ønsker et uttrykk uten brøk, kan vi multiplisere 2-tallet inn i den siste parentesen



$$2x^2 - x - 3 = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2}) = (x + 1)(2x - 3)$$

Den metoden vi har brukt for å faktorisere i de to eksemplene ovenfor, kalles **nullpunktmetoden**. Du skjønner kanskje hvorfor?

Nullpunktmetoden

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

der x_1 og x_2 er løsningene av den generelle andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Ikke glem at a må være med i det faktoriserte uttrykket! ☺

Når det bare finnes én løsning av andregradslikningen, er $x_1 = x_2$.

Når andregradslikningen ikke har løsninger, kan ikke uttrykket faktoriseres.

Når du bruker nullpunktmetoden til å faktorisere andregradsuttrykk, kan du finne nullpunktene ved å bruke *abc-formelen* eller ved hjelp av et digitalt verktøy. Digitale verktøy har dessuten ofte egne kommandoer for å faktorisere uttrykk.

I wxMaxima skriver vi inn uttrykket og velger «Faktoriser».

Skriv inn: $2x^2 - x - 3$

```
wx_factor(2x^2-x-3);
```

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)$$

Finn ut om du kan faktorisere uttrykk direkte ved hjelp av det digitale verktøyet du bruker!

Faktorisering av tredjegradspolynomer

[Faktorisering av tredjegradspolynomer \(117793\)](#)

Polynomet $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ er et eksempel på et tredjegradspolynom. Den høyeste eksponenten har, er tre. Polynomet inneholder et tredjegradsledd, et andregradsledd, et førstegradsledd og et konstantledd.

Vi har sett at vi kan faktorisere andregradspolynomer ved å bruke nullpunktmetoden. Vi må da løse andregradslikninger. Tilsvarende kan tredjegradspolynomer faktoriseres ved først å løse tredjegradslikninger. Å løse tredjegradslikninger ligger utenfor kompetansemålene i S2. Når vi skal faktorisere tredjegradspolynomer, bruker vi derfor en annen metode.

Vi har sett at for et generelt andregradspolynom gjelder

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ hvor } x_1 \text{ og } x_2 \text{ er nullpunkter til } ax^2 + bx + c.$$

Tilsvarende kan det vises at for et generelt tredjegradspolynom gjelder

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad \text{hvor } x_1, x_2 \text{ og } x_3 \text{ er nullpunktene til } ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Dette betyr at hvis vi kan finne et **nullpunkt** x_1 , for tredjegradspolynomet (for eksempel ved prøving og feiling), så vet vi at $(x - x_1)$ må være en faktor i uttrykket. Med andre ord er det mulig å dividere polynomet vårt med $(x - x_1)$. Dette kalles **polynomdivisjon**. Det vi da står igjen med er et andregradspolynom som vi kan faktorisere ved å bruke **nullpunktmetoden**.

Polynomdivisjon

[Polynomdivisjon \(117795\)](#)

Du har tidligere lært å dividere tall. Nå skal vi dividere polynomer. Framgangsmåten er ganske lik. Du husker sikkert også at noen divisjoner «gikk opp», vi fikk ingen rest når vi dividerte. I slike tilfeller kunne vi bruke resultatet av divisjonen til å faktorisere tallet vi startet med.

Eksempel

$$\begin{array}{r} 231 : 7 = 33 \\ \underline{21} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

Dette betyr at $231 = 33 \cdot 7$.

På tilsvarende måte skal vi bruke polynomdivisjon når vi skal faktorisere tredjegradsromnomer.

Eksempel

Vi ser på tredjegradsromnomet $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

Vi setter inn $x = 1$ i romnommet og får $2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 2 - 7 + 2 + 3 = 0$.

Dette betyr at $x = 1$ er et nullpunkt for romnommet. $(x - 1)$ er en faktor i $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3)$ og divisjonen $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) : (x - 1)$ vil «gå opp».

Vi skal nå se på hvordan vi utfører selve divisjonen.

Selv divisjonen:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) : (x - 1) = 2x^2 - 5x - 3 \\ \underline{- (2x^3 - 2x^2)} \\ -5x^2 + 2x + 3 \\ \underline{- (-5x^2 + 5x)} \\ -3x + 3 \\ \underline{- (-3x + 3)} \\ 0 \end{array}$$

Forklaring:

$$\begin{array}{l} 2x^2 \cdot x = 2x^3 \text{ (Hva må du gange } x \text{ med for å få } 2x^3 \text{?)} \\ \underline{(x - 1) \cdot 2x^2} = (2x^3 - 2x^2) \\ (2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) - (2x^3 - 2x^2) = -5x^2 + 2x + 3 \\ -5x \cdot x = -5x^2 \text{ og } (x - 1) \cdot (-5x) = -5x^2 + 5x \\ -5x^2 + 2x + 3 - (-5x^2 + 5x) = -3x + 3 \\ \underline{(x - 1) \cdot (-3)} = -3x + 3 \\ -3x + 3 - (-3x + 3) = 0 \end{array}$$

Vi fikk «rest lik 0». Det betyr at divisjonen «gikk opp».

Vi kan da skrive

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x - 3)(x - 1)$$

Tredjegradsromnomet er dermed faktorisert i et andregradsromnom og et førstegradsromnom.

Andregradsromnomet kan vi nå faktorisere ved hjelp av nullpunktmetoden.

Vi setter $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Ved å bruke abc-formelen får vi

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Det betyr at

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x - (-\frac{1}{2})) = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2}) = (x - 3)(2x + 1)$$

Her har vi multiplisert inn 2-tallet i den siste parentesen.

Fullstendig faktorisering av tredjegradsuttrykket blir

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x - 3)(x - 1) = (x - 3)(2x + 1)(x - 1)$$

Likninger

Tredjegradslikninger

[Tredjegradslikninger \(117797\)](#)



I 1T og i S1 arbeidet vi med likninger av første og andre grad og med likninger som inneholdt brøkuttrykk. Vi skal nå se hvordan vi løser noen tredjegradslikninger. Vi skal også arbeide mer med likninger med rasjonale uttrykk.

En **tredjegradslikning** er en likning som kan ordnes slik at vi får et **tredjegradspolynom** på venstre side av likhetstegnet og 0 på høyre side. En generell tredjegradslikning ser da slik ut

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Vi har lært å faktorisere tredjegrads polynomer når vi har et kjent nullpunkt. Da er vi også i stand til å løse tredjegradslikninger med et kjent nullpunkt.

Siden $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ hvor x_1, x_2 og x_3 er nullpunktene til $ax^3 + bx^2 + cx + d$, blir løsningen av likningen

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= 0 \\ x = x_1, \quad x = x_2 \quad \text{eller} \quad x = x_3 \end{aligned}$$

Vi faktoriserte tidligere uttrykket $2x^3 + 7x^2 + 2x + 3$, og fikk at

$$2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})(x - 1)$$

Tredjegradslikningen $2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 0$ kan da løses slik

$$\begin{aligned} 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 &= 0 \\ 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})(x - 1) &= 0 \\ x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

Vi tar med et eksempel som viser hele framgangsmåten.

Eksempel

Vi skal løse tredjegradslikningen $3x^3 + 2x^2 = 3x + 2$.

Først ordner vi likningen slik at vi får 0 på høyre side.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 &= 3x + 2 \\ 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Så må vi ved hjelp av prøving og feiling finne en løsning av likningen.

Det er ofte lurt å prøve med $(x - 1)$ først.

$$\begin{aligned} \text{Venstre side : } 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 &= 3 + 2 - 3 - 2 = 0 \\ \text{Høyre side : } 0 \end{aligned}$$

Full klaff med en gang! Vi har dermed vist at $(x - 1)$ er en faktor i uttrykket $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$, og vi foretar polynomdivisjonen

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 + 2x^2 - 3x - 2) : (x - 1) = 3x^2 + 5x + 2 \\
 - (3x^3 - 3x^2) \\
 \hline
 5x^2 - 3x - 2 \\
 - (5x^2 - 5x) \\
 \hline
 2x - 2 \\
 - (2x - 2) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vi har altså

$$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x + 2)$$

Vi finner så nullpunktene til $3x^2 + 5x + 2$

$$\begin{array}{l}
 3x^2 + 5x + 2 = 0 \\
 x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 1}{6} \\
 x_1 = -1 \quad x_2 = -\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Tredjegradslikningen blir

$$\begin{aligned}
 3x^3 + 2x^2 &= 3x + 2 \\
 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\
 3(x - 1)(x + 1)(x + \frac{2}{3}) &= 0
 \end{aligned}$$

og har altså løsningene $x = 1$, $x = -1$ eller $x = -\frac{2}{3}$

Rasjonale likninger

[Rasjonale likninger \(117802\)](#)

Rasjonale likninger er **likninger som inneholder rasjonale uttrykk**.

En brøk er ikke definert når nevneren er lik null. Vi må derfor være spesielt oppmerksomme når vi løser likninger med rasjonale uttrykk hvor den ukjente opptrer i nevneren, og forkaste løsninger som gjør at nevneren i en eller flere av brøkene blir lik null.

Eksempel 1

Vi skal løse likningen

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{x+4}{4x-4} = 1$$

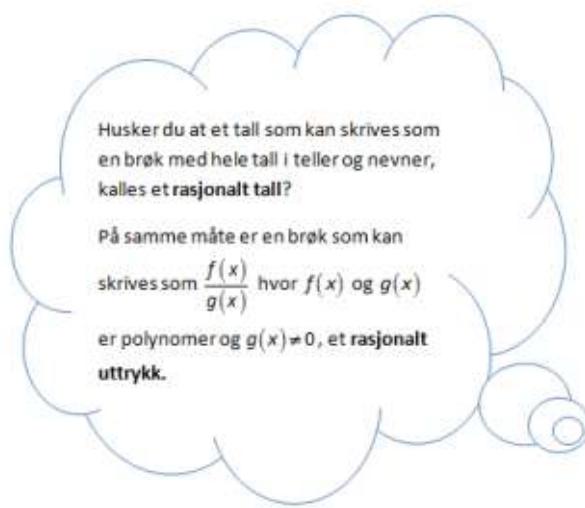
Ved å **multiplisere med fellesnevneren** på begge sider av likhetstegnet får vi **en likning uten brøker**.

For å finne fellesnevneren må vi faktorisere nevnerne.

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) & \text{3. kvadratsetning} \\ 4x - 4 = 4(x - 1) & \text{Felles faktor} \\ \hline \text{Fellesnevner} & 4(x - 1)(x + 1) \end{array}$$

Fellesnevneren blir $4(x - 1)(x + 1)$. Vi ser da at vi må forutsette at $x \neq -1$ og $x \neq 1$ fordi $x = -1$ og $x = 1$ gir null i nevnerne.

Vi fortsetter med å multiplisere hvert ledd på begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren og forkorter så faktor mot faktor i hvert ledd:



Før du går i gang med å løse en rasjonal likning, skal du **gjøre det til en vanlig å sette opp hvilke verdier av x som gjør at en eller flere av brøkene ikke er definert.** Her må $x \neq -1$ og $x \neq 1$.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} \cdot 4(x-1)(x+1) + \frac{x+4}{x(x-1)} \cdot 4(x-1)(x+1) = 1 \cdot 4(x-1)(x+1)$$

$$4 + (x+4)(x+1) = 4 \cdot (x^2 - 1)$$

$$4 + x^2 + x + 4x + 4 = 4x^2 - 4$$

$$-3x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$x_1 = -\frac{4}{3} \quad x_2 = 3$$

$x \neq -1, x \neq 1$

Til slutt kontrollerer vi svaret vårt: I dette eksempelet gir ingen av våre løsninger null i nevner, så begge løsningene aksepteres.

Rasjonal likning → Likning uten brøker
 Legg merke til hvor elegant vi omformer den rasjonale likningen til en likning uten brøker ved å multiplisere alle ledd i likningen med fellesnevneren!

Eksempel 2

Vi skal løse likningen $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2+x-2}$

Nevneren $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, og dette blir også fellesnevneren. Vi ser da at tallene 1 og -2 må utelukkes som eventuelle løsninger av likningen.

Vi fortsetter med å multiplisere hvert ledd på begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren og forkorter faktor mot faktor i hvert ledd

$$\frac{x}{x-1} \cancel{(x-1)}(x+2) - \frac{1}{x+2} \cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)} = \frac{3}{x^2+x-2} \cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)} \quad (\cancel{x \neq})$$

$$x(x+2) - (x-1) = 3$$

$$x^2 - 2x - x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

Vi kontrollerer igjen svaret, og ser at vi har allerede utelukket begge disse løsningene.

Likningen har dermed ingen løsning.

Likningssett

[Likningssett \(117889\)](#)

En familie som består av tre barn og to voksne, betaler 380 kroner for å komme inn på en fotballkamp.

En annen familie med 4 barn og 3 voksne betaler 540 kroner. Vi ønsker å finne ut hva billettprisen er for barn, og hva billettprisen er for voksne.

La x være billettprisen i kroner for barn og y billettprisen i kroner for voksne.

Prisen den første familien betaler gir likningen

$$3x + 2y = 380$$

Dette er en likning med to ukjente, og det finnes mange par av tall for x og y som passer i likningen. Prisen den andre familien betaler gir likningen

$$4x + 3y = 540$$



Billettpris?

Det finnes også her mange par av tall for x og y som passer i likningen. Men det finnes bare ett par av tall for x og y som passer i begge likningene.

To likninger med de samme to ukjente størrelsene, kalles for et **likningssett**. Å løse et likningssett går ut på å finne de verdiene for x og y som passer i begge likningene.

En metode for å løse et likningssett ved regning er **innettingsmetoden**.

Når vi bruker denne metoden, begynner vi med å finne et uttrykk for den ene ukjente uttrykt med den andre ukjente ved hjelp av en av likningene.

I vårt eksempel kan den første likningen gi

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 380 \\ 2y &= 380 - 3x \\ y &= 190 - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Så **setter** vi dette uttrykket **inn** for y i den andre likningen. Husk å bruke parenteser!

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 540 \\ 4x + 3(190 - \frac{3}{2}x) &= 540 \end{aligned}$$



På denne måten får vi én likning med én ukjent og kan løse denne.

$$\begin{aligned} 4x + 570 - \frac{9}{2}x &= 540 \\ 2 \cdot 4x + 2 \cdot 570 - 2 \cdot \frac{9}{2}x &= 2 \cdot 540 \\ 8x - 9x &= 1080 - 1140 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Til slutt **setter** vi denne verdien for x **inn** i uttrykket vi fant for y

$$\begin{aligned} y &= 190 - \frac{3}{2}x \\ y &= 190 - \frac{3}{2} \cdot 60 \\ y &= 100 \end{aligned}$$

Billettprisen for voksne er 100 kroner, og billettprisen for barn er 60 kroner.

Vær oppmerksom på at du kan velge både hvilken likning og hvilken ukjent du vil starte med. Noen prøver å velge slik at de unngår brøker. Da blir utregningen som oftest enklere.

Det finnes også andre metoder for å løse likningssett med regning.

I neste eksempel skal vi bruke en metode som kalles **addisjonsmetoden**.

Eksempel

Mor til Kari var 32 år da Kari ble født. I dag er Kari og moren til sammen 64 år.

Hva er alderen til Kari og moren i dag?

Løsning

La x være alderen til Kari og y alderen til moren.

Kari og moren er til sammen 64 år. Dette gir likningen $x + y = 64$.

Kari ble født for x år siden. Da var mor til Kari 32 år. I dag er mor y år.

Dette gir likningen $32 + x = y$.

Vi har da

$$\begin{aligned}x + y &= 64 \\32 + x &= y\end{aligned}$$

Vi ordner likningene og får

$$\begin{aligned}x + y &= 64 \\x - y &= -32\end{aligned}$$

Siden venstresidene i begge likningene er lik høyresidene, må summen av venstresidene være lik summen av høyresidene. Vi adderer derfor venstresidene og høyresidene hver for seg og setter dem lik hverandre

$$\begin{aligned}x + x + y - y &= 64 - 32 \\2x &= 32 \\x &= 16\end{aligned}$$



Nå falt leddene med y bort, og likningen med bare x som ukjent gav at Kari er 16 år.

Vi kan nå finne ut hvor gammel moren er ved å bruke en av likningene.

$$\begin{aligned}32 + x &= y \\32 + 16 &= y \\y &= 48\end{aligned}$$

Moren er 48 år.

Vi har altså vist at i dag er mor til Kari 48 år, og Kari er 16 år.

For at vi skal komme i mål med addisjonsmetoden, må leddene med en av de ukjente falle bort under addisjonen. Det kan vi som oftest få til å skje ved først å multiplisere likningene i likningssettet med passende tall. Innettingsmetoden er allikevel den metoden som anbefales. Den fungerer alltid.

I kapitlet om funksjoner skal du se at likningssett også kan løses grafisk. Likningssett kan også løses ved å bruke et digitale verktøy.

Vi avslutter med et litt større eksempel.

Eksempel

En dag kjøpte Sara, Trym og Miriam frukt på torget. Tabellen nedenfor viser hva hver av de tre handlet, og hva de måtte betale.

	Antall kg moreller	Antall kg jordbær	Antall kg pærer	Pris i kroner
Sara	2	3	1	370

Trym	3	2	3	450
Miriam	3	1	1	330

Senere på dagen fikk de tre vennene spørsmål om kiloprisen for de enkelte fruktslagene. Det var det ingen av dem som hadde merket seg.

Sara mente at de kunne regne ut kiloprisene ved å sette opp noen likninger. Vi skal se om det er mulig.

Vi lar x være kiloprisen på moreller, kiloprisen på jordbær og kiloprisen på pærer. Da kan vi sette opp følgende tre likninger ut fra opplysningene i tabellen

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 370 \\3x + 2y + 3z &= 450 \\3x + y + z &= 330\end{aligned}$$

Vi løser den siste likningen med hensyn på z

$$z = 330 - 3x - y$$

Så setter vi inn dette uttrykket for z i hver av de to andre likningene

$$\begin{aligned}2x + 3y + (330 - 3x - y) &= 370 \\3x + 2y + 3 \cdot (330 - 3x - y) &= 450\end{aligned}$$

Vi ordner litt på likningene og får

$$\begin{aligned}2x - 3x + 3y - y &= 370 - 330 \\3x + 2y + 990 - 9x - 3y &= 450 \\-x + 2y &= 40 \\-6x - y &= -540\end{aligned}$$



Nå kan vi bruke innettingsmetoden for likningssett med to ukjente:

Torghandel

$$\begin{aligned}-x + 2y &= 40 \\-x &= 40 - 2y \\x &= 2y - 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-6 \cdot (2y - 40) - y &= -540 \\-12y + 240 - y &= -540 \\-13y &= -540 - 240 \\y &= \frac{-780}{-13} = 60 \\x &= 2y - 40 = 2 \cdot 60 - 40 = 80 \\z &= 330 - 3x - y = 330 - 3 \cdot 80 - 60 = 30\end{aligned}$$

Det betyr at kiloprisen på moreller er 80 kroner, kiloprisen på jordbær er 60 kroner, og kiloprisen på pærer er 30 kroner.

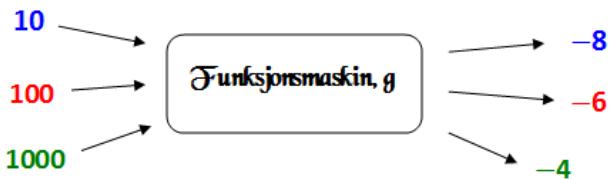
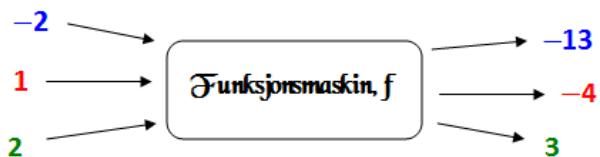
Funksjoner

Teori

Innledning

Innledning

[Innledning \(118001\)](#)



Kjenner du igjen «funksjonsmaskinene» fra S1? Når vi putter en verdi inn i en av maskinene, kommer en annen verdi ut. Prøv å finne ut hva maskinene gjør med verdiene vi putter inn. Finner du ut hvordan hver av maskinene er «programmert»?

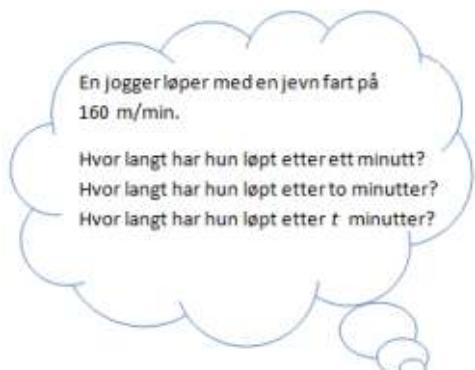
Funksjonskapittelet handler om hvordan en størrelse varierer avhengig av en annen. Vi skal se på hvordan sammenhenger mellom størrelser kan beskrives ved hjelp av funksjoner.

Funksjoner brukes i mange sammenhenger for å lage matematiske modeller av virkeligheten. I dette kapittelet skal vi se på ulike typer funksjoner med forskjellige egenskaper.

Kapittelet bygger på funksjonskapittelet fra 1T og S1. Du skal lære å derivere ulike typer funksjoner, og du skal lære mer om hva den førstederiverte og den andrederiverte forteller om forløpet til en funksjon.

Funksjoner

[Funksjoner \(118004\)](#)



En funksjon kan for

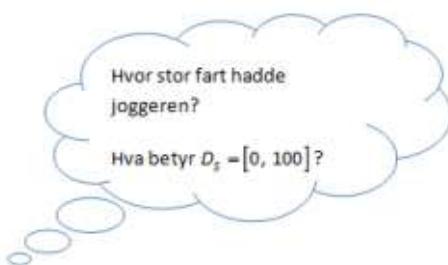
I 1T forklarte vi funksjonsbegrepet ved hjelp av en funksjon eksempel vise sammenheng som viste sammenheng mellom strekningen en jogger hadde mellom strekning og tid. tilbakelagt og hvor lenge hun hadde løpt.

Vi forutsatte at hun løp med jevn fart.

Vi fant at sammenhengen kunne beskrives ved funksjonen S gitt ved

$$S(t) = 160t \quad D_s = [0, 100]$$

der t stod for antall minutter og $S(t)$ for strekningen i meter som var tilbakelagt etter t minutter.



Generelt sier vi at **y er en funksjon av x dersom hver verdi av x gir nøyaktig en verdi av y.**

Funksjonen S ovenfor er representert ved en formel eller et funksjonsuttrykk. Vi kan også la funksjoner være representert ved verditabeller og/eller ved grafer. I tillegg kan en funksjon være representert ved en verbal beskrivelse, dvs. med ord som beskriver sammenhengen mellom størrelsene som inngår i funksjonsuttrykket.

Derivasjon

Derivasjon

[Derivasjon \(118010\)](#)

I 1T arbeidet vi med den momentane vekstfarten, eller den deriverte, til en funksjon. Vi starter med litt repetisjon.

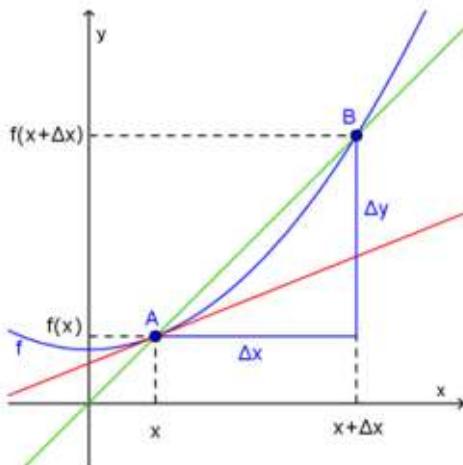
Vi ønsker å finne den momentane vekstfarten til funksjonen f i punktet $A(x, f(x))$.

Vi gir x et tillegg Δx , og får et nytt punkt på grafen

$$B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$$

Vi trekker en sekant (grønn linje) gjennom punktene A og B .

Vi regner ut stigningstallet til denne linjen



Vi har da funnet et uttrykk for **gjennomsnittlig vekstfart** fra A til B .

Vi lar nå punktet B nærme seg punktet A . Vi lar altså Δx gå mot null.

Da vil sekanten (grønn) gradvis nærme seg til å bli en tangent (rød linje) til kurven i A .

Stigningstallet til denne tangenten forteller hvor fort grafen vokser akkurat i punktet A . Vi kaller dette stigningstallet for **den momentane veksten** eller **den deriverte** til f i punktet A . Vi skriver $f'(x)$ og leser « f derivert av x ». Legg merke til tegnet for den deriverte, en liten apostrof på f , f' .

Den deriverte

Vi ser på grafen ovenfor.

$f'(x)$ er den verdien $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg mot når Δx går mot null.

Definisjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Den deriverte i et punkt er **stigningstallet til tangenten** til grafen i dette punktet.

Den **deriverte** og **den momentane vekstfarten** er det samme.

Fra denne definisjonen av den deriverte i et punkt $(x, f(x))$ kan vi definere en ny funksjon f' der vi til hver x tilordner verdien $f'(x)$. På denne måten har funksjonen f generert en ny funksjon f' . Derfor kalles denne for den deriverte funksjonen.

Hvordan finne den deriverte grafisk?

[Hvordan finne den deriverte grafisk? \(118012\)](#)

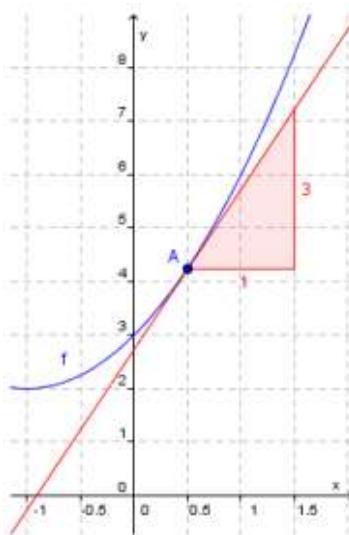
Den momentane vekstfarten eller den deriverte til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^2 + 2x + 3$ når for eksempel $x = 0,5$, er altså det samme som stigningstallet til tangenten til kurven når $x = 0,5$.

Vi kan finne denne verdien grafisk ved å tegne grafen til f og tangenten til f for $x = 0,5$.

Vi ser at tangenten har stigningstallet 3. Den deriverte til $f(x)$ når $x = 0,5$ er altså 3.

Vi skriver

$$f'(0,5) = 3$$



Derivasjonsregler

[Derivasjonsregler \(118016\)](#)

I S1 lærte du hvordan du kunne finne den deriverte funksjonen til polynomfunksjoner ut fra definisjonen av den deriverte.

Ved å bruke definisjonen på noen generelle funksjoner kan vi komme fram til generelle derivasjonsregler, eller formler, for hvordan vi kan finne de deriverte funksjonene. Det er disse formlene vi bruker når vi deriverer funksjoner.

I kompetanse målene for S2 står det:

Eleven skal kunne derivere polynomfunksjoner, potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner, og summer, differanser, produkter og kvotienter av disse funksjonene, og bruke kjerneregelen til å derivere sammensatte funksjoner.

Du skal altså kunne **bruke** formlene. Ved hjelp av definisjonen til den deriverte kan alle disse derivasjonsreglene bevises. (Prøv gjerne selv!)

Nedenfor har vi laget en oversikt over de derivasjonsreglene du **må huske**, og som du **må kunne bruke**. Etter oversikten følger eksempler og/eller forklaringer på hvordan reglene brukes om du går videre i fagstoffmenyen.

Definisjon	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Konstantfunksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Potensfunksjon	$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
Funksjon multiplisert med konstant	$f(x) = k \cdot g(x)$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$
Summer og differanser	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Produkt	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kvitienter (Brøk)	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
Eksponentialfunksjoner	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
Logaritmefunksjonen	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Kjernereglen Sammensatte funksjoner	$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Den deriverte til en konstant funksjon

[Den deriverte til en konstant funksjon \(118019\)](#)

Konstant funksjon	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
-------------------	------------	-------------

Eksempel 1

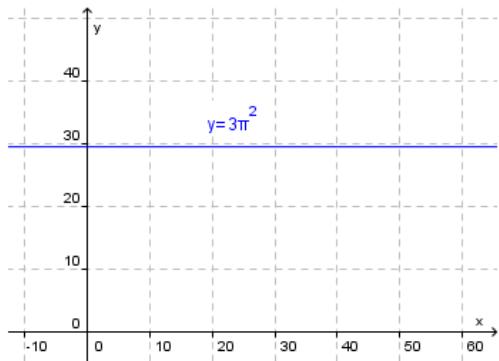
$$y = 3 \\ y' = 0$$

Eksempel 2

$$y = \pi \\ y' = 0$$

Eksempel 3

$$y = 3\pi^2 \\ y' = 0$$



Grafen til en konstant funksjon er en vannrett linje. En slik linje har stigning lik null, derfor er den deriverte til en konstant funksjon lik null.

Den deriverte til en potensfunksjon

[Den deriverte til en potensfunksjon \(118022\)](#)

Potensfunksjon	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
----------------	--------------	---------------------------

I algebrakapittelet så vi at

- når a er et reelt tall forskjellig fra 0 og n et naturlig tall, er $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$
- når a er et positivt reelt tall, n et naturlig tall og m et helt tall, så er $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Dette gjør at regelen for derivasjon av potensuttrykk kan brukes i svært mange tilfeller.

Eksempel 1

$$f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

Eksempel 2

$$f(x) = x^3 \\ f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Eksempel 3

$$f(x) = x^5 \\ f'(x) = 5x^4$$

Eksempel 4

$$f(x) = x = x^1 \\ f'(x) = x^{1-1} = 1x^0 \\ \textcircled{f'(x) = 1}$$

Eksempel 6

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f'(x) = -1 \cdot x^{-2} \\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \textcircled{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Resultatene rammet inn i sirkel bør du lære deg utenat!

Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant

[Den deriverte til summer og differenser av funksjoner og til en funksjon multiplisert med en konstant \(118025\)](#)

Summer og differanser	$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
-----------------------	------------------------	---------------------------

Potensfunksjon multiplisert med konstant	$f(x) = k \cdot x^n$	$f'(x) = k \cdot (x^n)' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$
--	----------------------	--

Vi deriverer summer av og differenser mellom funksjoner ved å derivere ledd for ledd.
Legg merke til at vi her også får bruk for regelen for derivasjon av en potensfunksjon multiplisert med en konstant.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 - x^2 \\f'(x) &= 0 - 2x \\f'(x) &= -2x\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + 5x^2 \\f'(x) &= 3x^2 + 5 \cdot 2x \\f'(x) &= 3x^2 + 10x\end{aligned}$$

Den deriverte av et produkt av to funksjoner

[Den deriverte av et produkt av to funksjoner \(118027\)](#)

Produkt	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f = u \cdot v$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$
---------	---	---

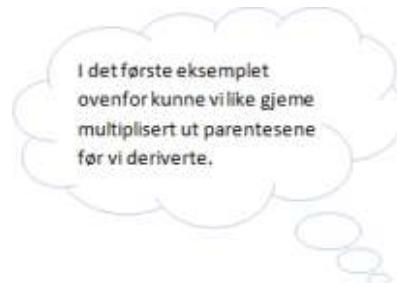
f , u og v er funksjoner av x og skal deriveres med hensyn på x . I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + 3x) \cdot (x^3 + 1) \\f'(x) &= (x^2 + 3x)' \cdot (x^3 + 1) + (x^2 + 3x) \cdot (x^3 + 1)' \\f'(x) &= (2x + 3) \cdot (x^3 + 1) + (x^2 + 3x) \cdot 3x^2 \\f'(x) &= 2x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 3 + 3x^4 + 9x^3 \\f'(x) &= 5x^4 + 12x^3 + 2x + 3\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - 1) \cdot \sqrt{x} \\f'(x) &= (x - 1)' \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot (\sqrt{x})' \\f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\f'(x) &= \frac{\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} \\f'(x) &= \frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}} \\f'(x) &= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$



Den deriverte til en kvotient (brøk)

[Den deriverte til en kvotient \(brøk\) \(118032\)](#)

Kvotienter (Brøk)	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $f = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
-------------------	---	--

f , u og v er funksjoner av x og skal deriveres med hensyn på x . I siste linje i tabellen ovenfor har vi brukt en litt forenklet skrivemåte.

Den deriverte til en brøk blir en ny brøk der nevneren er kvadratet av den opprinnelige nevneren. Telleren likner på uttrykket til den deriverte av et produkt, men med en klar forskjell. Det står minustegn mellom leddene. Det er derfor viktig med rett rekkefølge på leddene i teller. Begynn med å derivere telleren.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3+2}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{(x^3+2)' \cdot x^2 - (x^3+2) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+2) \cdot 2x}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{3x^4 - 2x^4 - 4x}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{x^4 - 4x}{x^4} = \frac{x(x^3 - 4)}{x^4} = \frac{x^3 - 4}{x^3} \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x+2} \\ f'(x) &= \frac{(x+1)' \cdot (x+2) - (x+1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} \\ f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Kjerneregelen

[Kjerneregelen \(118035\)](#)

Mange funksjoner er mer kompliserte enn dem vi har studert til nå, men ved nærmere ettersyn viser det seg ofte at de er satt sammen av enklere funksjoner.

For eksempel kan funksjonen f gitt ved $f(x) = (x^3 + 2)^4$ oppfattes som en sammensatt funksjon. Først skal en gitt x -verdi opphøyes i tredje potens og adderes til tallet 2. Vi kaller denne funksjonen for u og sier at $u(x) = x^3 + 2$ er **kjernefunksjonen**.

Da er for eksempel

$$u(1) = 1^3 + 2 = 3$$

Andre trinn er at det resultatet som u gir, skal opphøyes i 4.potens. Vi oppfatter også dette som en egen funksjon, og kaller denne funksjonen for g . Men denne funksjonen er ikke en funksjon av x , den er en funksjon av u , og vi får at $g(u) = u^4$.

Da er

$$g(3) = 3^4 = 81$$

Den opprinnelige funksjonen f er da gitt ved $f(x) = g(u(x))$ og

$$f(1) = g(u(1)) = g(1^3 + 2) = g(3) = 3^4 = 81$$

Poenget er at både u gitt ved $u(x) = x^3 + 2$ og g gitt ved $g(u) = u^4$ er funksjoner som vi kan derivere

$$u'(x) = 3x^2$$

$$g'(u) = 4u^3$$

Funksjonen u er derivert med hensyn på x og funksjonen g er derivert med hensyn på u .

Det kan bevises at følgende regel gjelder for derivasjon av sammensatte funksjoner

Kjernereglen Sammensatte funksjoner	$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
--	------------------	-----------------------------

Eksempel 1

$$f(x) = (x^3 + 2)^4$$

$$g(u) = u^4, \quad u = x^3 + 2$$
$$g'(u) = 4u^3, \quad u' = 3x^2$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = ((u)^4)', \cdot u'$$

$$f'(x) = 4u^3 \cdot u'$$

$$f'(x) = 4(x^3 + 2)^3 \cdot (3x^2)$$

$$f'(x) = 12x^2(x^3 + 2)^3$$

Eksempel 2

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$g(u) = \sqrt{u}, \quad u = x - 1$$
$$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad u' = 1$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = (\sqrt{u})', \cdot u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Den deriverte til eksponentialfunksjonen

[Den deriverte til eksponentialfunksjonen \(118043\)](#)

En eksponentialfunksjon er en funksjon gitt på formen

$$f(x) = k \cdot a^x$$

hvor variabelen x opptrer som eksponent i en potens. Grunntallet i eksponenten, a , er en konstant større enn null, og k er en konstant.



Det er et tall som peker seg spesielt ut som grunntall i eksponentialfunksjonen, og det er tallet

$e = 2,718\ 281\ 828\ 549\dots$.

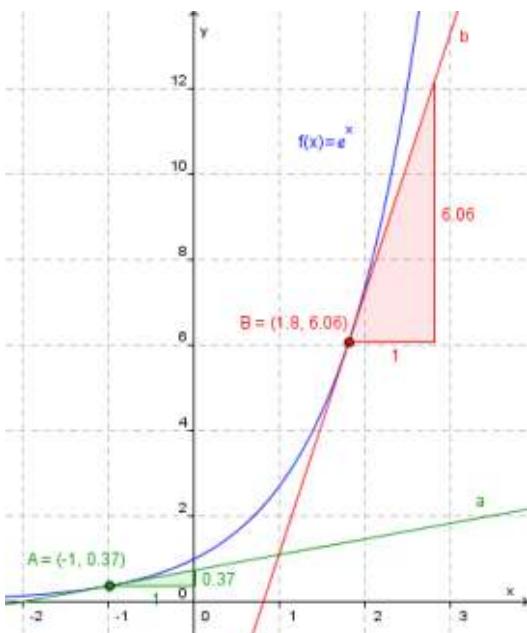
Leonhard Euler (1707 - 1783) var den første som brukte notasjonen e for tallet som er tilnærmet lik 2,71828. Noen mener at e står for «eksponentiell» mens andre mener at Euler brukte e siden det er den andre vokalen i alfabetet, og siden han allerede brukte a i noen av sine andre matematiske arbeider.



Til høyre ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = e^x$. A og B er to vilkårlige punkt på grafen, og linjene a og b er tangentene til grafen i disse punktene. Ser du at stigningstallet til tangentene i punktene A og B har samme verdi som funksjonsverdiene i A og B ?

Du kan selv tegne grafen i GeoGebra. Ved å dra punktene A og B langs grafen, vil du se at dette gjelder i alle de punktene du kan undersøke. Faktisk gjelder det helt generelt, uten at vi skal føre bevis for det her.

Eksponentialfunksjonen f gitt ved $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte.



Eksponentialfunksjoner	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
------------------------	--------------	---------------

Dette gjør tallet e til et av de viktigste tallene i matematikken. Husk at tallet e også er grunntallet til den naturlige logaritmen.

Legg også merke til at når $f(x) = ke^x$, hvor k er en konstant, så er $f'(x) = ke^x$. Når eksponenten er en funksjon av x , bruker vi kjerneregelen

Eksempel

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{4x} \\g(u) &= e^u & u &= 4x \\g'(x) &= e^u & u' &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) \\f'(x) &= e^u \cdot 4 \\f'(x) &= 4e^{4x}\end{aligned}$$

Den enkle regelen for derivasjon av eksponentialfunksjonen med e som grunntall, gir enkle regler for derivasjon av eksponentialfunksjoner med andre grunntall.

Definisjonen av naturlig logaritme sier at ethvert tall, $a > 0$, kan skrives som e opphøyd i logaritmen til a , $a = e^{\ln a}$.

Det gir at

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

Vi bruker så kjerneregelen

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

$$\begin{aligned}g(u) &= e^u & u &= x \ln a \\g'(u) &= e^u & u' &= \ln a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) \\f'(x) &= e^u \cdot u'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{x \ln a} \cdot \ln a \\f'(x) &= e^{\ln a^x} \cdot \ln a \\f'(x) &= a^x \cdot \ln a\end{aligned}$$

Eksponentialfunksjoner	$f(x) = a^x$	$a > 0$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
------------------------	--------------	---------	---------------------------

Eksempel 1

$$f(x) = 5^x$$

Eksempel 2

$$f(x) = 3^{4x}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 5^x \ln 5 & g(u) &= 3^u & u &= 4x \\g'(u) &= 3^u \cdot \ln 3 & u' &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) \\f'(x) &= 3^u \cdot \ln 3 \cdot 4 \\f'(x) &= 4 \cdot 3^{4x} \cdot \ln 3\end{aligned}$$

Den deriverte til logaritmefunksjonen

[Den deriverte til logaritmefunksjonen \(118047\)](#)

Logaritmefunksjonen	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
---------------------	----------------	-----------------------

Bevis

Definisjonen på naturlig logaritme sier at ethvert positivt tall, x , kan skrives som e opphøyd i logaritmen til x . Det gir at

$$x = e^{\ln x}$$

Når to funksjoner er like, så er også deres deriverte funksjoner like. Vi deriverer venstre og høyre side hver for seg.

Venstre side: $x' = 1$

Høyre side: $(e^{\ln x})' = (e^u)' \cdot u' = e^u \cdot u' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$

Men da er

$$x \cdot (\ln x)' = 1$$



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Eksempel

$$f(x) = 2 \ln(x^2 + 2)$$

$$\begin{aligned} g(u) &= 2 \ln u & u &= x^2 + 2 \\ g'(u) &= 2 \cdot \frac{1}{u} & u' &= 2x \end{aligned}$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$$

Likningen for tangenten til en graf i et punkt

[Likningen for tangenten til en graf i et punkt \(118052\)](#)

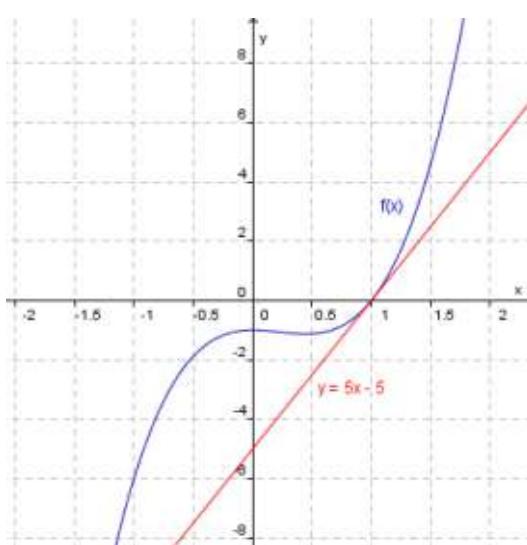
En funksjon f er gitt ved $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Vi vil finne likningen for tangenten til grafen når $x = 1$.

Tangenten går gjennom punktet $(1, f(1))$. Vi finner først $f(1)$

$$\begin{aligned}f(1) &= 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 \\&= 3 - 2 - 1 = 0\end{aligned}$$

Vi vet at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet. Vi finner derfor $f'(x)$

$$f'(x) = 9x^2 - 4x$$

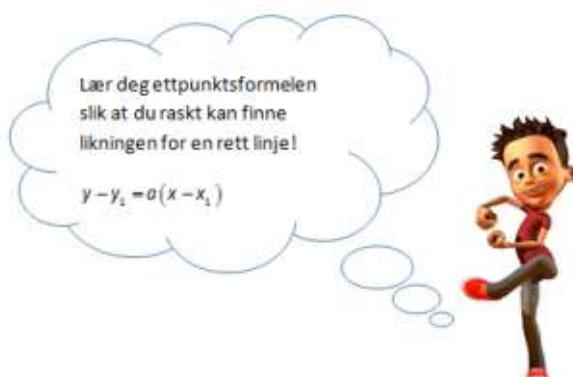


Vi skal finne tangenten når $x = 1$. Vi regner ut $f'(1)$

$$f'(1) = 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

Nå vet vi at tangenten går gjennom punktet $(1, 0)$ og har stigningstall 5. Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten

$$\begin{aligned}y - y_1 &= a(x - x_1) \\y - 0 &= (x - 1) \\y &= 5x - 5\end{aligned}$$



Funksjonsdrøfting

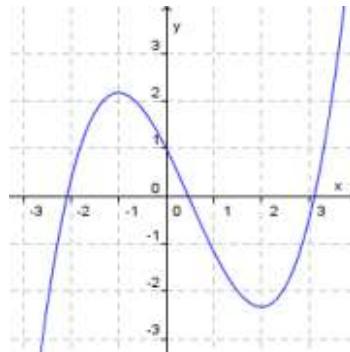
Funksjonsdrøfting

[Funksjonsdrøfting \(118075\)](#)

I S1 lærte du å drøfte polynomfunksjoner ved hjelp av den deriverte. Å drøfte en funksjon dreier seg blant annet om å finne ut når funksjonen vokser, og når den avtar. Dette kaller vi for **monotoniegenskapene** til funksjonen.

Videre dreier det seg om å finne ut når veksten er størst eller minst, om grafen har toppunkter og bunnpunkter osv.

Disse kunnskapene om en funksjon er svært nyttige når du skal tegne grafen til funksjonen uten digitale hjelpemidler.



Kunnskapene er også nyttige for en bedriftseier som har en funksjon som viser inntekten som funksjon av antall produserte enheter.

Vi har tidligere sett at den deriverte i et punkt på en graf er stigningstallet til tangenten til grafen i punktet. Dette gjør oss i stand til å finne ut flere ting om forløpet til en funksjon ved å studere den deriverte funksjonen.

Vi repeterer først drøfting av polynomfunksjoner fra S1.

Drøfting av polynomfunksjoner

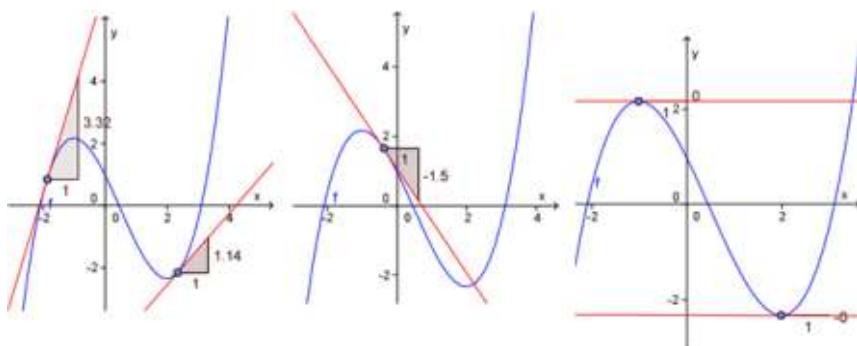
Drøfting av polynomfunksjoner (118082)

Utfordring

Tegn grafen til tredjegradsfunksjonen f gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Tegn deretter tangenter til grafen for noen x -verdier mellom -2 og 3 .

Undersøk om det er en sammenheng mellom tangentenes stigningstall og hvorvidt grafen stiger, synker eller har topp-/bunnpunkter.



Du vil oppdage at

- Stigningstallet til tangenten er positivt når grafen stiger.
- Stigningstallet til tangenten er negativt når grafen synker.
- Stigningstallet til tangenten er null i topp- og bunnpunkt.

Siden **tangentens stigningstall = verdien av den deriverte til funksjonen**, betyr dette at:

Når **grafen stiger**, er **den deriverte positiv**.

Når **grafen synker**, er **den deriverte negativ**.

Når grafen har **topp- eller bunnpunkt**, er **den deriverte lik 0**.

Dette betyr at vi kan finne ut for hvilke verdier av x grafen til en funksjon stiger, for hvilke verdier av x den synker, og når den har topp- eller bunnpunkt ved å se påfortegnet til den deriverte. Vi viser dette gjennom noen eksempler.

Eksempel 1

Finn ved regning, når funksjonen f gitt ved $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ stiger, og når den synker. Finn også eventuelle topp- og bunnpunkter.

Løsning

Vi deriverer $f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2 + 4x - 3 \\f'(x) &= -2x + 4\end{aligned}$$

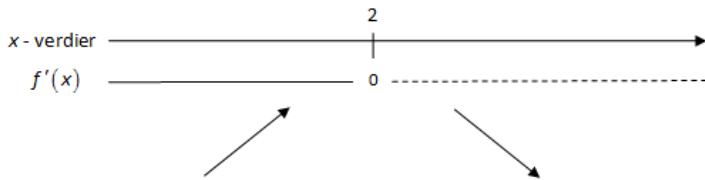
Vi setter så $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 -2x + 4 &= 0 \\
 -2x &= -4 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige x -verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(-\infty, 2)$ og $(2, \infty)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \\
 f'(3) &= -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0
 \end{aligned}$$

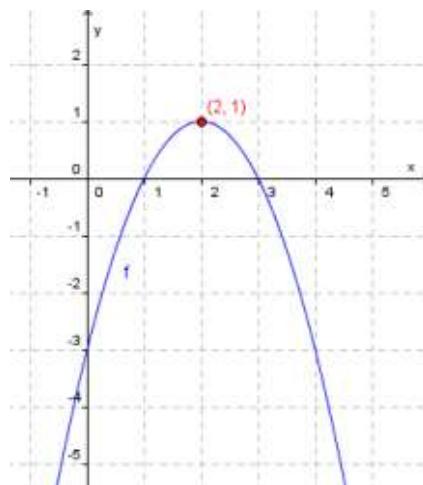
Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Vi ser av fortegnslinjen at $f(x)$ vokser for $x \in (-\infty, 2)$ og at $f(x)$ minker når $x \in (2, \infty)$.

$f(x)$ har derfor et toppunkt når $x = 2$. Toppunktet er $(2, f(2)) = (2, 1)$ fordi $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



Eksempel 2

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Drøft monotoniegenskapene til f og finn eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

Løsning

Vi deriverer $f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 - 2 \\f'(x) &= x^2 - x - 2\end{aligned}$$

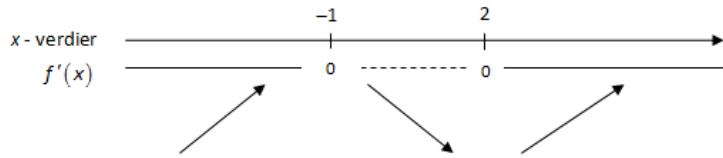
Vi setter så $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\x_1 &= -1 \\x_2 &= 2\end{aligned}$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige verdier i hvert av de aktuelle intervallene $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ og $(2, \infty)$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt.

$$\begin{aligned}f'(-2) &= (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 > 0 \\f'(0) &= (0)^2 - (0) - 2 = -2 < 0 \\f'(3) &= (3)^2 - (3) - 2 = 4 > 0\end{aligned}$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Vi ser av fortegnslinjen at

- Grafen stiger for $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
- Grafen synker for $x \in (-1, 2)$

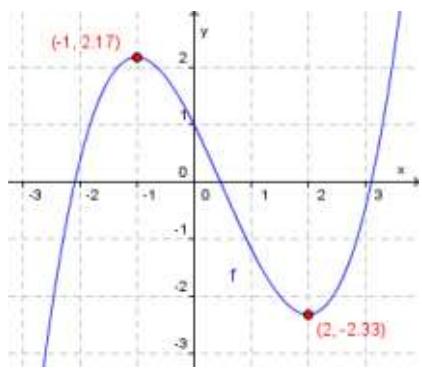
$f(x)$ har altså et toppunkt når $x = -1$ og et bunnpunkt når $x = 2$.

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 \\&= -\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6} + \frac{6}{6} = \frac{13}{6} \\f(2) &= \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + 1 \\&= \frac{16}{6} - \frac{12}{6} - \frac{24}{6} + \frac{6}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

Toppunktet er $(-1, f(-1)) = (-1, \frac{13}{6})$

Bunnpunktet er $(2, f(2)) = (2, -\frac{7}{3})$

Til slutt kan det være lurt å tegne grafen for å sjekke om det vi har funnet ut ved regning, er riktig. Vi kan også sammenholde bildet av grafen med fortegnslinjen for den deriverte og se sammenhengen.



Ekstremalpunkter og stasjonære punkter

[Ekstremalpunkter og stasjonære punkter \(118101\)](#)

Ekstremalpunkter

Toppunkt og bunnpunkt kaller vi ofte **ekstremalpunkter**.

Andrekoordinaten til et toppunkt er en **maksimalverdi** til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er en **minimalverdi**.

Noen funksjoner kan ha flere topp- eller bunnpunkter. Derfor er maksimal- og minimalverdiene ofte bare **lokale maksimal- og minimalverdier**. Det vil si at de er maksimal- og minimalverdier i et intervall omkring ekstremalpunktet.



Eksempel 3

Finn ved regning når funksjonen f gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$ vokser, og når den avtar. Finn også eventuelle ekstremalpunkter.

Løsning

Vi deriverer $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{5}{3}$$
$$f'(x) = x^2 - 4x + 4$$

Vi setter så $f'(x) = 0$

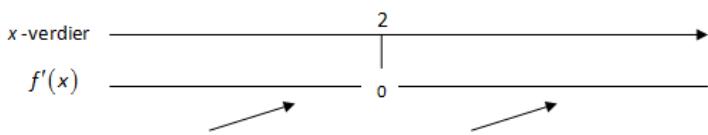
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vi får bare én løsning.

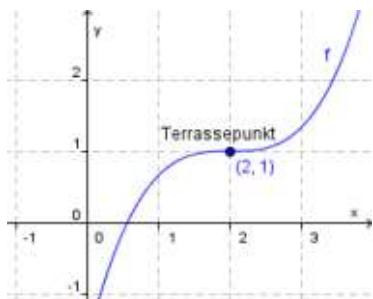
Vi tar stikkprøver i hvert av de to intervallene ($\leftarrow 2$) og ($2 \rightarrow$)

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0)^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \\ f'(3) &= (3)^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Denne fortegnslinjen er spesiell siden **den deriverte ikke skifter fortegn i nullpunktet**. Den deriverte er positiv for $x \neq 2$. Det betyr at funksjonen vokser overalt bortsett fra når $x = 2$. Grafen har verken topp- eller bunnpunkt for $x = 2$. Men siden den deriverte er lik null, er tangenten til grafen horisontal for $x = 2$. Et slikt punkt på grafen kalles for et **terrasssepunkt**.



Stasjonære punkter

Et **stasjonært punkt** på en graf karakteriseres ved at **den deriverte er null** i punktet. I slike punkter er det ingen endring i veksten til funksjonen. Hvis den deriverte skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **ekstremalpunkt**. Hvis den deriverte ikke skifter fortegn, er det stasjonære punktet et **terrasssepunkt**.



Krumningsforhold og vendepunkter

Krumningsforhold og vendepunkter (118112)

Vi fortsetter med funksjonen f fra Eksempel 2 gitt ved

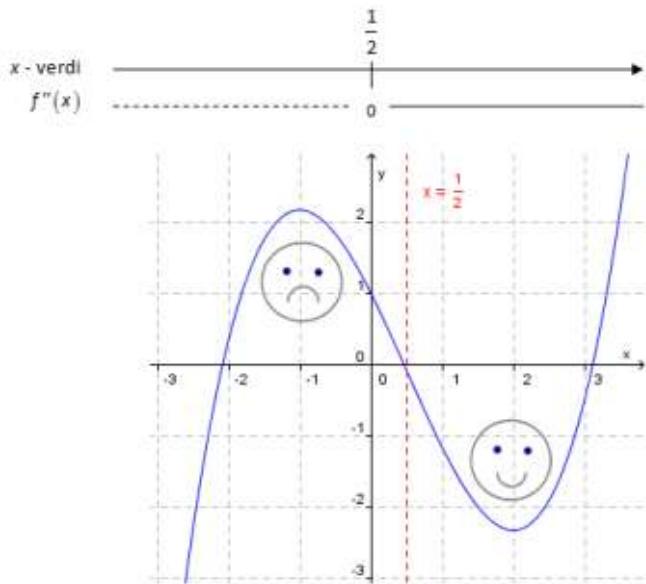
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

V i deriverer funksjonen 2 ganger. Da får vi den andrederiverte eller den dobbeltderverte $f''(x)$.

Legg merke til skrivemåten, nå med to apostrofer.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ f'(x) &= x^2 - x - 2 \\ f''(x) &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Vi setter opp fortegnslinja til $f''(x)$



Det viser seg at

- grafen vender sin hule side opp når $f''(x) > 0$
- grafen vender sin hule side ned når $f''(x) < 0$
- grafen har et vendepunkt når $f''(x) = 0$

At grafen vender sin hule side opp, $f''(x) > 0$, betyr at den deriverte stiger. Det vil si at selve funksjonen stiger mer og mer eller synker mindre og mindre.

At grafen vender sin hule side ned, $f''(x) < 0$, betyr at den deriverte synker. Det vil si at selve funksjonen synker mer og mer eller stiger mindre og mindre.

Et punkt på grafen hvor grafen skifter mellom å vende sin hule side ned og å vende sin hule side opp, eller motsatt, kalles for et **vendepunkt**. Tangenten til grafen i et slikt punkt kalles for en vendetangent.

Den deriverte har enten sin største verdi eller sin minste verdi i vendepunktet. Det vil si at funksjonen **vokser raskest** eller **avtar raskest** i vendepunktet.

Vendetangent

[Vendetangent \(118123\)](#)

I oppgaver blir vi ofte bedt om å finne likningen for en **vendetangent**. En vendetangent er en tangenten til funksjonen i et vendepunkt.

Vi vil finne likningen for vendetangenten til funksjonen f gitt ved
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Vi deriverer først funksjonen to ganger

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\f'(x) &= x^2 - x - 2 \\f''(x) &= 2x - 1\end{aligned}$$

Vi setter så den dobbeltderverte lik null for å finne vendepunktet

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0 \\2x - 1 &= 0 \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vi finner 2. koordinaten til vendepunktet

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{12}$$

Det betyr at koordinatene til vendepunktet er $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$.

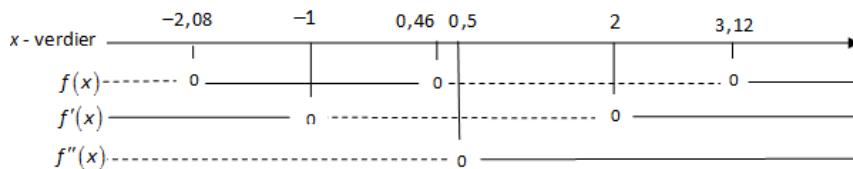
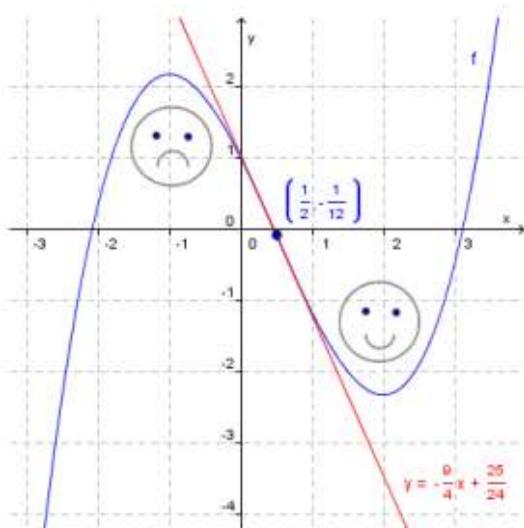
Vi regner så ut stigningstallet til tangenten i vendepunktet

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

Nå vet vi at vendetangenten går gjennom punktet $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$ og har stigningstallet $-\frac{9}{4}$.

Vi kan da bruke ettpunktsformelen og finne likningen for tangenten

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= a(x - x_1) \\
 y - \left(-\frac{1}{12}\right) &= -\frac{9}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right) \\
 y + \frac{1}{12} &= -\frac{9}{4}x + \frac{9}{8} \\
 y &= -\frac{9}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{1}{12} \\
 y &= -\frac{9}{4}x + \frac{25}{24}
 \end{aligned}$$



Vi har til slutt tatt med en oversikt over fortegnslinjen til selve funksjonsuttrykket sammen med fortegnslinjene til den første- og andrederiverte.

På grunnlag av fortegnslinjene er det mulig å tegne en skisse av grafen.

Motsatt kan vi ut fra grafen tegne de tre fortegnslinjene. Ved hjelp av grafen kan vi altså tolke grunnleggende egenskaper ved funksjonen.

Drøfting av logaritmefunksjoner

Drøfting av logaritmefunksjoner (118130)

Eksempel

Som eksempel skal vi drøfte funksjonen f gitt ved $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

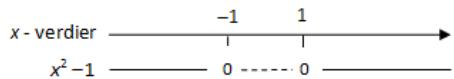
Definisjonsmengde

Ifølge definisjonen til den naturlige logaritmen, $a = e^{\ln a}$, er den naturlige logaritmen til et tall, a , det tallet du må opphøye tallet e i for å få tallet a . Siden $e^{\ln a}$ alltid er positivt, så må også a alltid være positivt. Det vil si at den naturlige logaritmen bare er definert for positive tall.



Vår funksjon f gitt ved $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, er altså bare definert for $x^2 - 1 > 0$.

Vi tegner fortegnslinjen for $x^2 - 1$.



Funksjonen er definert for $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Nullpunkter

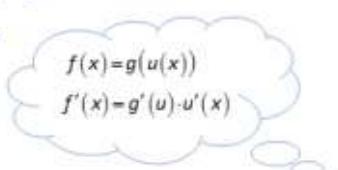
$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \ln(x^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 1 \\ x^2 &= 2 \\ x &= -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Monotoniegenskaper og topp- og bunnpunkter

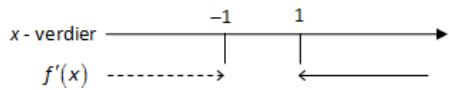
Vi undersøker fortegnet til $f'(x)$.

Når vi skal derivere $f(x)$, må vi bruke kjerneregelen.

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x^2 - 1) \\ g(u) &= \ln(u), \quad u = x^2 - 1 \\ g'(u) &= \frac{1}{u}, \quad u' = 2x \\ f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) \\ f'(x) &= (\ln(u))' \cdot u' \\ f'(x) &= \frac{1}{u} \cdot u' \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x \\ f'(x) &= \frac{2x}{x^2 - 1}\end{aligned}$$



Vi tegner så fortegnslinjen for $f'(x)$



Av fortegnslinjen til $f'(x)$ kan vi lese at grafen synker i intervallet $(-\infty, -1)$ og stiger i intervallet $(1, \infty)$. Vi får ikke topp- eller bunnpunkter.

Krumningsforhold og vendepunkter

Vi undersøker fortegnet til $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

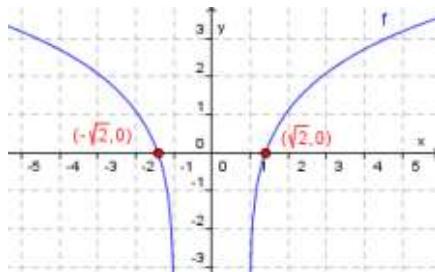
$$f = \frac{u}{v} \quad f' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

Når vi skal finne den andrederiverte, bruker vi regelen for kvotient (brøk)

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)}$$

Nevneren i denne brøken er alltid positiv i definisjonsområdet. Faktoren $x^2 + 1$ i telleren er også alltid positiv. Det betyr at den dobbeltdervierte alltid er negativ og grafen vil derfor alltid vende sin hule side ned. Grafen har ikke noen vendepunkt.

Nå kjenner vi så mye til grafens forløp at det er relativt enkelt å lage en skisse av grafen for hånd. (Grafen er her laget i GeoGebra.)



Drøfting av eksponentialfunksjoner

Drøfting av eksponentialfunksjoner (118201)

Eksempel

Som eksempel skal vi drøfte funksjonen f gitt ved $f(x) = 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Definisjonsmengde

Eksponentialfunksjoner er definert for alle verdier av x og $D_f = \mathbb{R}$.

Nullpunkter

For å finne eventuelle nullpunkter løser vi likningen $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}} &= 0 \\ x &= 0 \quad \left(e^{-\frac{x}{2}} \in (0, \rightarrow) \right) \end{aligned}$$

f har nullpunktet $(0,0)$.



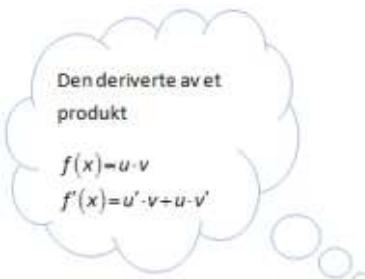
Monotoniegenskaper og topp- og bunnpunkter

For å undersøke monotoniegenskaper og finne eventuelle topp- og bunnpunkter ser vi på fortegnet til $f'(x)$.

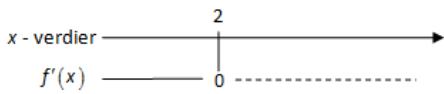
Når vi skal derivere $f(x)$ må vi bruke produktregelen og kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\ f'(x) &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + 5x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ f'(x) &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) &= 0 \\ 1 - \frac{x}{2} &= 0 \\ \frac{x}{2} &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$



Vi tegner så fortegnslinjen for $f'(x)$.



Av fortegnslinjen til $f'(x)$ kan vi lese at grafen til f stiger i intervallet $(-\infty, 2)$ og synker i intervallet $(2, \infty)$.

Vi ser også at grafen til f har et toppunkt når $x = 2$.

$$f(2) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 10 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e}$$

Toppunktet har koordinatene $(2, \frac{10}{e})$.

Krumningsforhold og vendepunkter

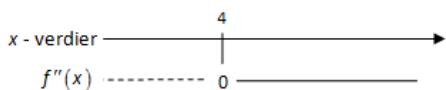
For å undersøke krumningsforhold og finne eventuelle vendepunkter ser vi på fortegnet til $f''(x)$.

Legg merke til at alle funksjoner av typen $g(x) = a \cdot x \cdot e^{bx}$ har topp- eller bunnpunkt for $x = -\frac{1}{b}$.
Kan du forklare hvorfor?

$$\begin{aligned}f'(x) &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \\f''(x) &= \left(5 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)' \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \left(5 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)' \\f''(x) &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1\right) \\f''(x) &= -\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(2 - \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0 \\-\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(2 - \frac{x}{2}\right) &= 0 \\2 - \frac{x}{2} &= 0 \\x &= 4\end{aligned}$$

Vi tegner så fortegnslinjen for $f''(x)$.



Av fortegnslinjen til $f''(x)$ kan vi lese at grafen til f vender sin hule side ned i intervallet $(-\infty, 4)$ og vender sin hule side opp i intervallet $(4, \infty)$.

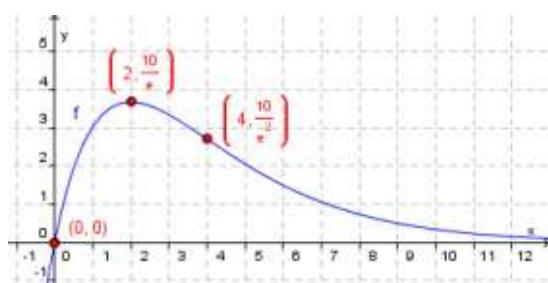
Vi ser også at grafen til f har et vendepunkt når $x = 4$.

$$f(4) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-\frac{4}{2}} = 10 \cdot e^{-2} = \frac{10}{e^2}$$

Vendepunktet har koordinatene $\left(4, \frac{10}{e^2}\right)$.

Nå kjenner vi så mye til grafens forløp at det er relativt enkelt å lage en skisse av grafen for hånd. (Her har vi tegnet grafen i GeoGebra.)

Legg merke til at alle funksjoner av typen $g(x) = a \cdot x \cdot e^{bx}$ har vendepunkt for $x = -\frac{2}{b}$.
Kan du forklare hvorfor?



Vekstkurven til et tre

[Vekstkurven til et tre \(118215\)](#)

Jacob plantet et epletre i 2006. Treet var 1 meter høyt da han plantet det. Vi bruker funksjonen h gitt ved

$$h(x) = -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \quad x \in (0, 20)$$

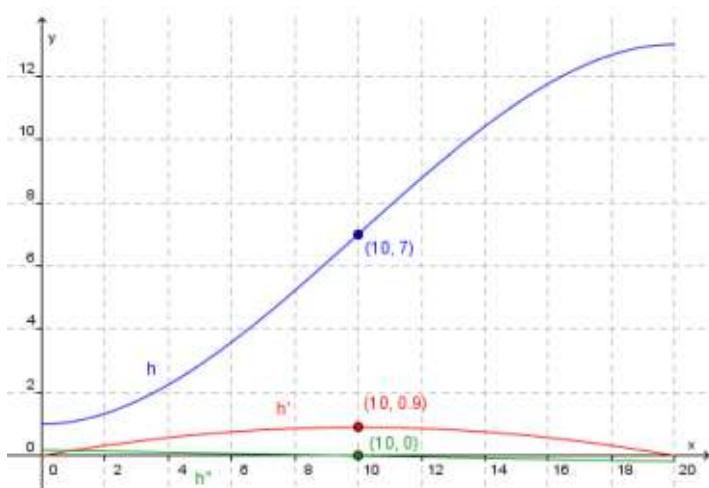
kan brukes som en modell for å beregne treets høyde de neste 20 årene. x er antall år etter planting og $h(x)$ gir treets høyde i meter.

Vi ønsker å finne ut hvilket år treet får sin maksimale vekst og hvor stor veksten er da.

Vi vil finne dette både grafisk og ved regning.



An apple a day ... Epler er en god kilde til kostfiber. I tillegg finner vi, som i de fleste frukter, noe kalium. Epleskallet er særlig rikt på fiber og antioksidanter.



For oversiktens skyld, tegner vi grafene til h , h' og h'' i samme koordinatsystem.

Grafen til h viser treets høyde x år etter at det er plantet. Grafen til h' viser hvor fort treet vokser.

Grafen til h er brattest etter ca. 10 år. Da må treet ha sin største vekst. Vi ser dette enda tydeligere ved å studere grafen til h' . Den deriverte er jo nettopp vekstfarten. Vi ser at vekstfarten har en maksimalverdi etter 10 år. Treet har sin maksimale vekst når $h'(x)$ har sin største verdi. Vi ser grafisk at det er etter 10 år, og den årlige veksten er da 0,9 meter per år.

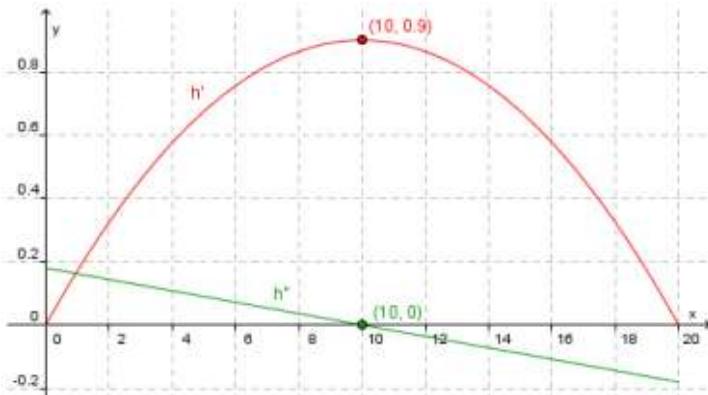
Vi ser også at grafisk at $h''(x)$ er 0 etter 10 år. Det bekrefter at grafen til h' har et toppunkt her.

Alle tre kurvene kan altså fortelle oss når treet får sin maksimale vekst.

Når den dobbeltderiverte er positiv, så stiger den deriverte og selve vekstkurven blir brattere og brattere.

Når den dobbeltderverte er negativ, så synker den derverte og selve vekstkurven flater ut.

Forstørret bilde av grafen til h' og grafen til h''



Vi kan finne det samme ved å regne.

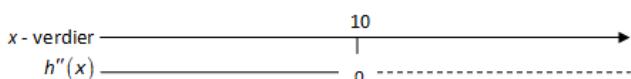
Vi starter med å derivere $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= -0,003x^3 + 0,09x^2 + 1 \quad x \in (0, 20) \\ h'(x) &= -0,009x^2 + 0,18x \\ h''(x) &= 0,018x + 0,18 \end{aligned}$$

Så setter vi $h''(x) = 0$ og finner vendepunktet

$$\begin{aligned} -0,018 + 0,18 &= 0 \\ x &= \frac{0,18}{0,018} = 10 \end{aligned}$$

Vi tegner fortegnslinjen til den andrederiverte



Fortegnslinja til $h''(x)$ viser at $h'(x)$ har en maksimalverdi etter 10 år. Det betyr at treet har maksimal vekst etter 10 år.

Vi kan også finne hvor stor veksten var etter 10 år

$$h'(x) = -0,009 \cdot 10^2 + 0,18 \cdot 10 = -0,9 + 1,8 = 0,9$$

Det betyr at veksten er 0,9 meter per år etter 10 år.

Strekning, fart og akselrasjon

[Strekning, fart og akselrasjon \(118219\)](#)

Når vi beveger oss, for eksempel ved å gå, løpe eller kjøre bil, sier vi at vi forflytter oss en strekning. Vi bruker ofte bokstaven s om **strekningen vi forflytter oss**.



Hvor raskt vi forflytter oss, kaller vi farten. **Farten er altså lik den deriverte til strekningen.** Vi bruker gjerne bokstaven v om farten. Hvor raskt vi endrer farten, kaller vi akselerasjonen, a. **Akselerasjon er lik den deriverte til farten.**

Samferdselsminister Magnhild Meltveit

Kleppa (Sp) og UP-sjef Runar Karlsen sammen med et av skiltene som ble montert langs norske veier i 2011 i forbindelse med Statens Vegvesens kampanje mot for høy fart.

Tiden t er her den variable. Av den grunn får vi $s(t)$, $v(t)$ og $a(t)$.

Thomas skal kjøre en tur med bilen sin. De 10 første sekundene av turen bruker han til å øke farten til lovlig fartsgrense.

Strekningen $s(t)$ han tilbakelegger mens han øker farten, er gitt ved

$$s(t) = -0,01t^3 + 0,3t^2 + 8t \quad t \in (0, 10)$$

hvor t er tiden i sekunder.

Den deriverte til funksjonen s viser hvor fort tilbakelagt strekning endrer seg etter t sekunder, altså farten etter t sekunder.

$$v(t) = s'(t)$$

Den deriverte til fartsfunksjonen v viser hvor raskt farten endrer seg etter t sekunder, dvs. akselerasjonen etter t sekunder.

$$a(t) = v'(t)$$

Vi vil finne tilbakelagt strekning, fart og akselerasjon etter 10 sekunder

$$s(t) = -0,01 \cdot 10^3 + 0,3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 = 100$$

$$v(t) = s'(t) = -0,03t^2 + 0,6t + 8$$

$v(10) = -0,03 \cdot 10^2 + 0,6 \cdot 10 + 8 = 11$ Utregningene til venstre viser at

Thomas brukte 100 m for å (nesten)

$$11 \frac{m}{s} = 11 \cdot \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 39,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{nå lovlig fartsgrense på } 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) = -0,06t + 0,6 \\ a(10) &= -0,06 \cdot 10 + 0,6 = 0 \end{aligned}$$

Akselerasjonen ble null. Det viset at Thomas holdt konstant fart etter 10 sekunder.

Økonomiske optimeringsproblemer

Økonomiske optimeringsproblemer

[Økonomiske optimeringsproblemer \(118224\)](#)

Klasse 3STB vurderer å starte elevbedrift. Det er Trym og Veronika som har fått ideen til et enkelt treningsapparat som kan brukes hjemme, og som vil være velegnet for å trenne de fleste muskelgruppene i kroppen. Elevene kaller treningsapparatet Multiform.



Multiform tar liten plass og har lav vekt. Apparatet kan derfor lett flyttes fra rom til rom og tas med på reiser. Trening med Multiform kan også kombineres med nyheter og en god film på fjernsynet eller lekselesing. Å starte elevbedrift krever planlegging. Hvor mange enheter bør produseres og at overskuddet skal bli størst mulig?

Elevene vet at mange drømmer om en veltrenet kropp, og med Multiform kan drømmen realiseres.

Det geniale med Multiform er at apparatet består av åtte forskjellige komponenter i hardplast eller metall. Disse komponentene kan kjøpes inn fra andre bedrifter. Klassens oppgave blir da å sette sammen komponentene og selge produktet.

Før klassen går i gang med produksjonen, må de nøye vurdere produksjonskostnadene. De må også vurdere mulighetene for salgsinntekter. Overskudd eller underskudd avhenger av om salgsinntektene er større enn produksjonskostnadene.

Etterspørselen, eller salget, avhenger ofte av prisen. Blir prisen for høy, kjøper folk heller andre produkter på markedet. Normalt selges det mer hvis prisen er lav, men lav pris kan også gi inntrykk av dårlig kvalitet og dermed føre til at salget går dårlig.

Elevene er interessert i størst mulig overskudd. De ønsker derfor på forhånd å beregne hvor mange enheter det er optimalt å produsere for å få høyest mulige inntekter til lavest mulige kostnader.

Hvilken pris bør settes på Multiform for å oppnå størst mulig overskudd?

Nå får klassen bruk for det de har lært i matematikktimene. Elevene vil prøve å lage funksjoner som viser hvordan kostnader, inntekter og salg avhenger av antall produserte enheter, salgsprisen som settes på produktet osv.

Kostnadefunksjon

Kostnadefunksjon (118230)

Klasse 3STB trenger et produksjonslokale. De leier et lokale til 11 000 kroner per uke. Prisen inkluderer utgifter til lys og varme. Denne kostnaden er ikke avhengig av hvor mange enheter som produseres og kan derfor være et konstantledd i en kostnadefunksjon.

For hvert treningsapparat som produseres, går det med en bestemt mengde komponenter, som kjøpes inn til enhetspriser. Det kreves også et visst antall arbeidstimer for montering av hver enhet. Klassen beregner disse utgiftene til 150 kroner per enhet, og i en kostnadefunksjon kan dette være førstegradsleddet $150x$.

Klassen regner med at det enkelte dager blir nødvendig med ekstra høy produksjon. Da kan det bli nødvendig med overtid og ekstra høy betaling for arbeidet. Disse utgiftene er lave ved liten produksjon og store ved høy produksjon. Veronika foreslår derfor at kostnadefunksjonen også skal inneholde ledet $3x^2$.

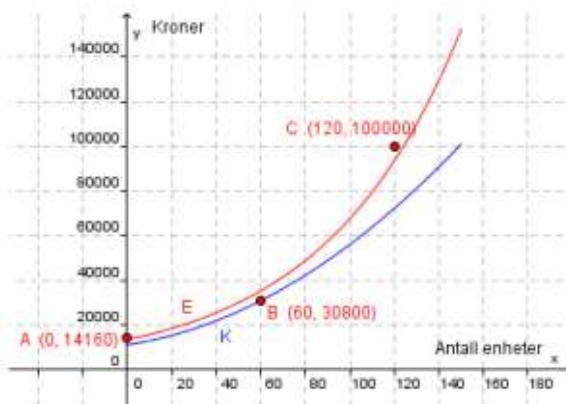
Alle er enige om at de maksimalt vil klare å produsere og selge 150 treningsapparater per uke. Det betyr at definisjonsområdet til kostnadefunksjonen vil være fra og med 0 til og med 150.

Hvis klassen tar utgagnspunkt i dette, vil kostnadene per uke ved produksjon av x treningsapparater kunne beskrives med funksjonen K gitt ved

$$K(x) = 3x^2 + 150x + 11000 \quad D_K = (0, 150)$$

Trym tegner grafen til denne kostnadefunksjonen. Se blå graf i koordinatsystemet nedenfor. Han blir litt betenk.

Han tror kostnadene blir mye større enn det han kan lese av grafen hvis klassen produserer få enheter per uke. Dette skyldes at komponentene som må kjøpes inn da, vil være mye dyrere. Dessuten regner han med at bedriften må basere seg på innleid arbeidskraft hvis de skal produsere mer enn ca. 100 enheter per uke. Dette vil antakelig også føre til høyere kostnader.



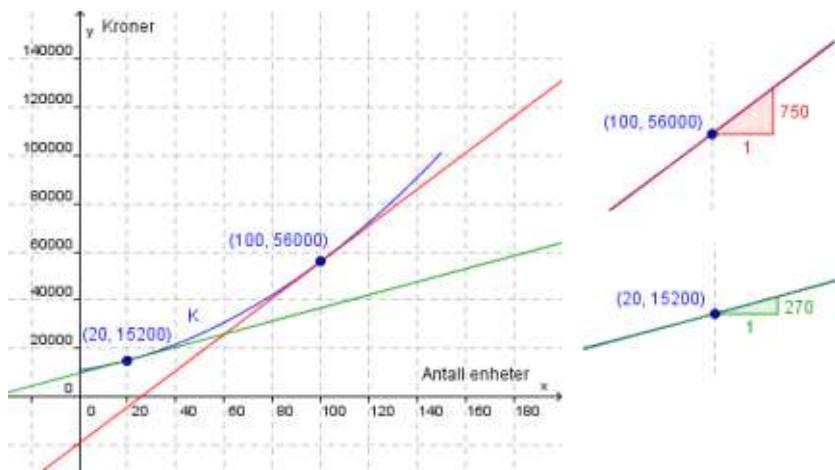
Trym plasserer derfor punktene A , B og C i koordinatsystemet og finner ved eksponentiell regresjon eksponentialfunksjonen E gitt ved $E(x) \approx 13250 \cdot e^{0,016x}$, som han mener kanskje vil være en bedre modell for kostnadene.

Elevene er enige om at produksjonskostnadene foreløpig er meget usikre. De velger derfor å holde fast ved polynomfunksjonen som en modell for kostnadene nå, og så heller justere denne modellen når de ser de virkelige utgiftene.

Grensekostnad

[Grensekostnad \(118239\)](#)

Elevene studerer kostnadsfunksjonen. De ser at grafen blir brattere og brattere når produksjonen øker.



Stigningstallet til tangenten i et punkt er et mål for hvor mye grafen stiger i punktet.

Stigningstallet til tangenten når $x = 100$ er 750. Kostnadsfunksjonen krummer svært lite over et intervall på én enhet og faller derfor tilnærmet sammen med tangenten i dette lille intervallet. Det betyr at når antall produserte enheter øker fra 100 til 101, øker kostnadene med ca. 750 kroner.

Det koster altså ca. 750 kroner å produsere én ekstra enhet når den ukentlige produksjonen er 100 enheter.

Tilsvarende viser stigningstallet til tangenten når $x = 20$ at det bare koster 270 kroner å produsere én ekstra enhet når den ukentlige produksjonen er 20 enheter.

For en bedrift er det vesentlig å vite hva det koster å øke produksjonen. Det er jo ikke særlig lurt å øke produksjonen hvis kostnadene for en ekstra enhet overstiger salgsprisen.

Vi har tidligere sett at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet.

Vi deriverer kostnadsfunksjonen:

$$K(x) = 3x^2 + 150x + 11000 \quad D_K = (0, 150)$$
$$K'(x) = 6x + 150$$

Vi setter først $x = 20$ og så $x = 100$ og får

$$K'(20) = 6 \cdot 20 + 150 = 270$$
$$K'(100) = 6 \cdot 100 + 150 = 750$$

Vi kan altså ved hjelp av den deriverte funksjonen til kostnadsfunksjonen regne oss fram til hva det koster å produsere én ekstra enhet ved et gitt produksjonsnivå. Økonomene kaller dette for **grensekostnaden**.

Grensekostnaden er kostnaden ved å produsere én ekstra enhet av en vare ved en gitt produksjon.

Ved regning kan vi finne grensekostnaden ved å derivere kostnadefunksjonen.

Inntektsfunksjoner

Inntektsfunksjoner (118250)

Klassen vurderer hvilken pris de skal sette på Multiform. Elevene er enige om at prisen ikke må være over 800 kroner. Dette vil gi en inntekt på $800 \cdot x$ kroner ved salg av x enheter.

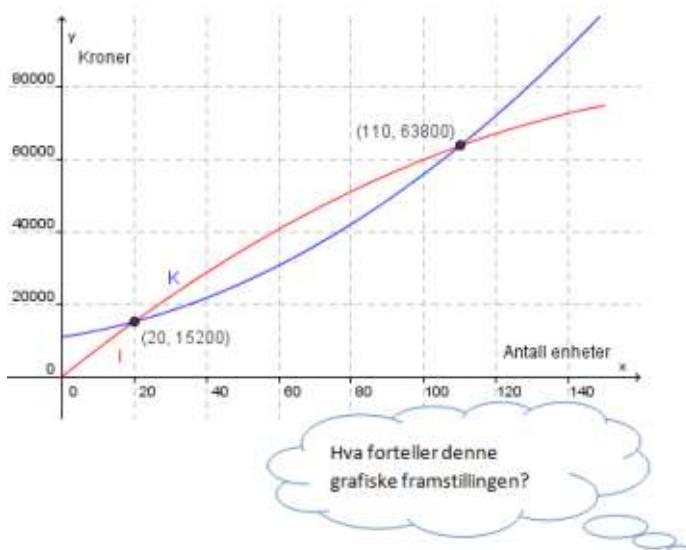
Trym er igjen litt skeptisk og sier: «For å oppnå et stort salg er vi avhengige av å selge større partier til sportsbutikker, som selger videre for oss. Da må vi nok regne med en lavere pris enn om vi selger alt selv.»

Denne gangen er klassen helt enige med Trym, og de kommer fram til inntektsfunksjon I gitt ved

$$I(x) = 800x - 2x^2$$

som de anser som realistisk.

Elevene tegner grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K .



Hva klarte du å lese ut av den grafiske framstillingen? Elevene i 3STB setter opp punktene nedenfor.

- Ved en produksjon på 20 eller 110 enheter er kostnadene og inntektene like store. Overskuddet er da lik null.
- Når det produseres færre enn 20 enheter eller flere enn 110 enheter, er kostnadene større enn inntektene, og bedriften vil gå med tap.
- Når det produseres mellom 20 og 110 enheter, er inntektene større enn kostnadene, og bedriften vil gå med overskudd.
- Overskuddet er størst ved en produksjon et sted ca. midt mellom 20 og 110 enheter. Der ser det ut som avstanden mellom grafene er størst.

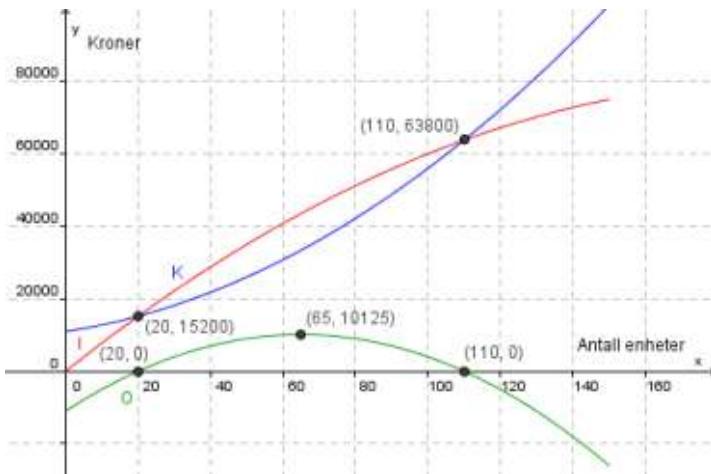
Overskuddsfunksjonen viser optimal produksjon

[Overskuddsfunksjonen viser optimal produksjon \(118264\)](#)

Overskuddet O er forskjellen mellom inntekter og kostnader.

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ O(x) &= 800x - 2x^2 - (3x^2 + 150 + 11000) \\ O(x) &= -5x^2 + 650x - 11000 \end{aligned}$$

Klassen tegner grafen til overskuddsfunksjonen O i samme koordinatsystem som grafene til K og I .



Toppunktet til overskuddsfunksjonen viser at overskuddet er størst ved en produksjon på 65 enheter. Da er overskuddet på 10 125 kroner per uke.

Dette kan vi også finne ved å regne.

Overskuddsfunksjonen O gitt ved $O(x) = -5x^2 + 650x - 11000$, er en andregradsfunksjon. Andregradsleddet er negativt. Grafen til O har da et toppunkt. Den deriverte vil være lik null i dette toppunktet.

Vi deriverer og får

$$\begin{aligned} O(x) &= -5x^2 + 650x - 11000 \\ O'(x) &= -10x + 650 \end{aligned}$$

Vi setter så den deriverte funksjonen lik null og får

$$\begin{aligned} O'(x) &= 0 \\ -10x + 650 &= 0 \\ x &= 65 \end{aligned}$$

En produksjon på 65 treningsapparater gir størst mulig overskudd:

$$O(65) = -5 \cdot 65^2 + 650 \cdot 65 - 11000 = 10125$$

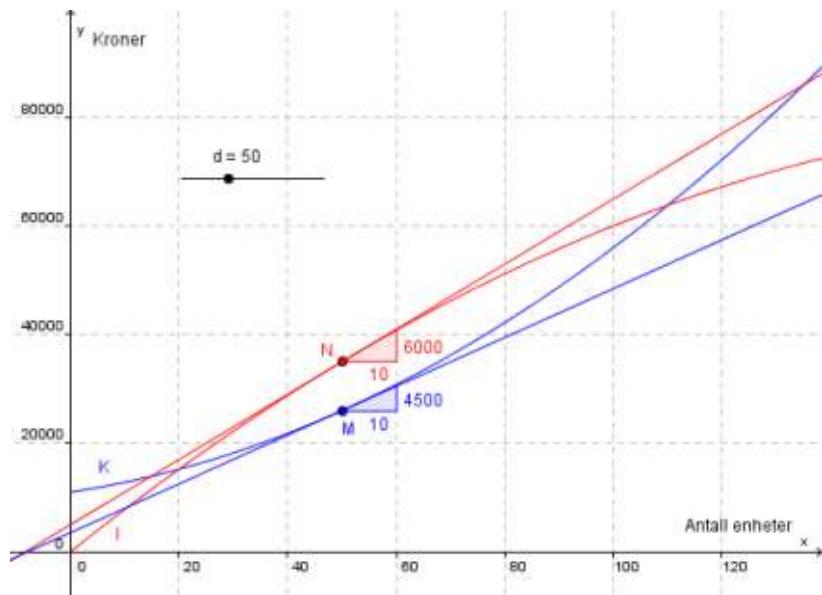
Det maksimale overskuddet blir på 10 125 kroner per uke.

Grenseinntekt

[Grenseinntekt \(118277\)](#)

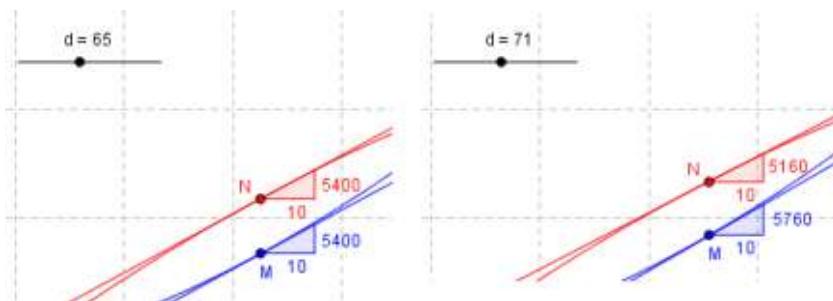
På samme måte som grensekostnaden $K'(x)$ viser hva det koster å produsere én ekstra enhet av en vare, viser **grenseinntekten** $I'(x)$ hvor stor inntekt én ekstra produsert enhet gir.

Grenseinntekt og grensekostnad viser optimal produksjon



I koordinatsystemet ovenfor har vi merket av punktene $M(d, K(d))$ og $N(d, I(d))$ hvor $d \in (0, 150)$ kan reguleres ved hjelp av en «glider» i GeoGebra.

Stigningstallene til tangentene i M når $d = 50$, viser at når produksjonen ligger på 50 enheter per uke, øker kostnadene med 450 kroner, mens inntektene øker med 600 kr hvis produksjonen økes med én ekstra enhet. I dette tilfellet lønner det seg altså å øke produksjonen.



Ved å justere glideren kan du se at ved en produksjon på 65 enheter er kostnadene og inntektene ved produksjon av én ekstra enhet like store, 540 kroner. Ved en større produksjon vil du se at ekstrainntektene er mindre enn de økte kostnadene ved å produsere én ekstra enhet.

Det lønner seg derfor å holde produksjonen på 65 enheter.

Av den grafiske framstillingen ovenfor ser vi at overskuddet er størst når grensekostnaden er like stor som grenseinntekten.

Vi kan også finne ut når grensekostnaden er like store som grenseinntekten ved å løse likningen

$$\begin{aligned}K'(x) &= I'(x) \\6x + 150 &= (800x - 2x^2)' \\6x + 150 &= 800 - 4x \\10x &= 650 \\x &= 65\end{aligned}$$



Dette viser igjen at overskuddet er størst når produksjonen er på 65 enheter per uke.

$$O(65) = -5 \cdot 65^2 + 650 \cdot 65 - 11000 = 10125$$

Det maksimale overskuddet blir på 10 125 kroner per uke.

Etterspørselsfunksjoner

[Etterspørselsfunksjoner \(118282\)](#)

Klasse 3STB kom fram til at inntektsfunksjonen I gitt ved $I(x) = 800x - 2x^2$ var realistisk ved salg av x enheter av treningsapparatet Multiform.

Inntekten ved salg er alltid lik prisen per enhet multiplisert med antall solgte enheter. Hvis vi forutsetter at alle produserte enheter blir solgt, er $I(x) = p \cdot x$, hvor x er antall produserte og solgte enheter, og p er prisen per enhet.

Ved å faktorisere inntektsfunksjonen får vi at

$$I(x) = 800x - 2x^2 = (800 - 2x) \cdot x$$

Det betyr at prisen kan skrives som en funksjon av antall enheter

$$p(x) = 800 - 2x \quad D_p = (0, 150)$$

Antall enheter varierer mellom 0 og 150. Prisfunksjonen er lineær med negativt stigningstall.

$$p(0) = 800 - 2 \cdot 0 = 800$$

$$p(150) = 800 - 2 \cdot 150 = 500$$

Det betyr at prisen varierer mellom 800 og 500 kroner, $V_p = (500, 800)$.

Siden prisen er en funksjon av antall enheter, er motsatt antall enheter en funksjon av prisen:

$$p(x) = 800 - 2x$$

$$p = 800 - 2x$$

$$2x = 800 - p$$

$$x = 400 - 0,5p$$

$$x(p) = 400 - 0,5p$$

Her er x antall produserte og solgte enheter. Siden vi forutsetter at alle enheter selges, kan vi kalle antall enheter for **etterspørselen**, dvs. Produksjonen tilpasses salget. Etterspørselen som funksjon av prisen er da

$$e(p) = 400 - 0,5p$$

Dette kalles for etterspørselsfunksjonen.

Inntekt som funksjon av pris

[Inntekt som funksjon av pris \(118293\)](#)

Det fremgår av det som er vist ovenfor at inntekten kan skrives som en funksjon av prisen

$$\begin{aligned}I(x) &= p \cdot x = p \cdot e(p) \\I(p) &= p \cdot (400 - 0,5p) \\I(p) &= 400p - 0,5p^2\end{aligned}$$

Nå kan vi bestemme den prisen som gir størst inntekt. Vi deriverer inntektsfunksjonen med hensyn på prisen og setter den deriverte lik null

$$\begin{aligned}I(p) &= 400p - 0,5p^2 \\I'(p) &= 400 - p\end{aligned}$$

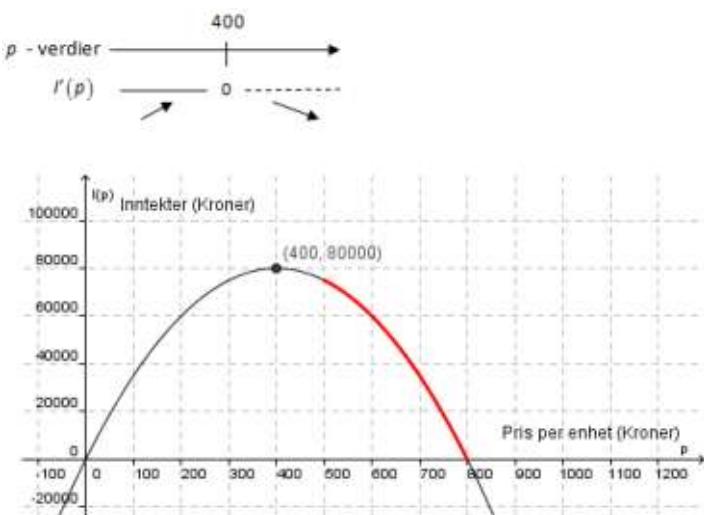
$$\begin{aligned}I'(p) &= 0 \\400 - p &= 0 \\p &= 400\end{aligned}$$

Inntektsfunksjonen er en andregradsfunksjon med negativt andregradsledd. Grafen til funksjonen har derfor et toppunkt når $p = 400$. Inntekten er størst når prisen per enhet er 400 kroner.

$$I(400) = 400 \cdot 400 - 0,5 \cdot 400^2 = 80\,000$$

Inntekten med denne prisen er 80 000 kroner per uke.

Men da er etterspørselen $e(400) = 400 - 0,5 \cdot 400 = 200$ enheter. Dette er flere enheter enn bedriftene klarer å produsere. Vi så ovenfor at siden antall produserte enheter maksimalt skulle være 150, så førte det til at prisen varierte fra 500 til 800 kroner. Inntektsfunksjonen er bare aktuell der grafen nedenfor er markert med rødt.



Hvilken pris gir størst overskudd?

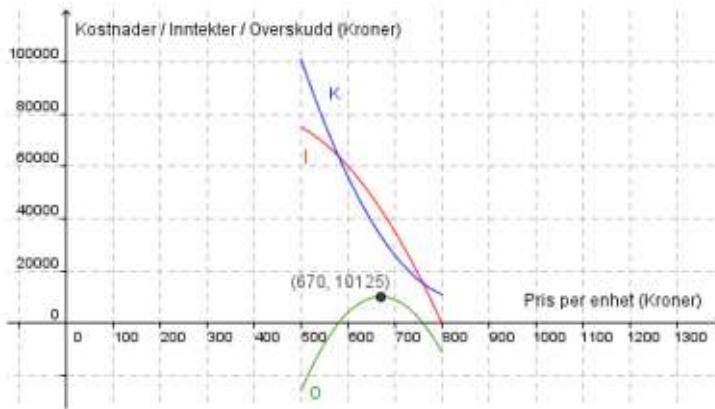
[Hvilken pris gir størst overskudd? \(118306\)](#)

Kostnadene kan også beskrives som en funksjon av prisen.

$$\begin{aligned}K(x) &= 3x^2 + 150x + 11000 \quad \text{og} \quad x(p) = 400 - 0,5p \\K(p) &= 3(400 - 0,5p)^2 + 150(400 - 0,5p) + 11000 \\K(p) &= 3(160000 - 2 \cdot 400 \cdot 0,5p + 0,25p^2) + 150(400 - 0,5p) + 11000 \\K(p) &= 0,75p^2 - 1275p + 551000\end{aligned}$$

Overskuddet er forskjellen mellom inntekter og kostnader.

$$\begin{aligned}O(p) &= I(p) - K(p) \\O(p) &= 400p - 0,5p^2 - (0,75p^2 - 1275p + 551000) \\O(p) &= -1,25p^2 + 1675p - 551000\end{aligned}$$



Toppunktet til overskuddsfunksjonen viser at overskuddet er størst når prisen er 670 kroner per enhet. Da er overskuddet på 10 125 kroner per uke.

Vi kan også komme fram til dette resultatet ved regning.

Overskuddsfunksjonen $O(p) = -1,25p^2 + 1675p - 551000$ er en andregradsfunksjon med negativt andregradsledd. Grafen til funksjonen har da et toppunkt. Den deriverte er lik null i toppunktet.

Vi deriverer overskuddsfunksjonen

$$\begin{aligned}O(p) &= -1,25p^2 + 1675p - 551000 \\O'(p) &= -2,5p + 1675\end{aligned}$$

Vi setter så den deriverte lik null

$$\begin{aligned}O(p) &= 0 \\-2,5p + 1675 &= 0 \\p &= 670\end{aligned}$$

En pris på 670 kroner per enhet gir størst mulig overskudd.

$$O(670) = -1,25 \cdot 670^2 + 1675 \cdot 670 - 551000 = 10125$$

Det maksimale overskuddet er på 10 125 kroner per uke.

Etterspørselen ved denne prisen er

$$e(670) = 400 - 0,5 \cdot 670 = 400 - 335 = 65$$

Dette er det samme antall enheter som vi tidligere har funnet at ga størst overskudd.

Enhetskostnader

[Enhetskostnader \(118317\)](#)

Vi finner **kostnadene ved å produsere én enhet** ved å dividere totalkostnadene på antall enheter som produseres.

$$K(x) = 3x^2 + 150x + 11000 \quad D_K = (0, 150)$$

$$E(x) = \frac{K(x)}{x}$$

$$E(x) = \frac{3x^2 + 150x + 11000}{x}$$

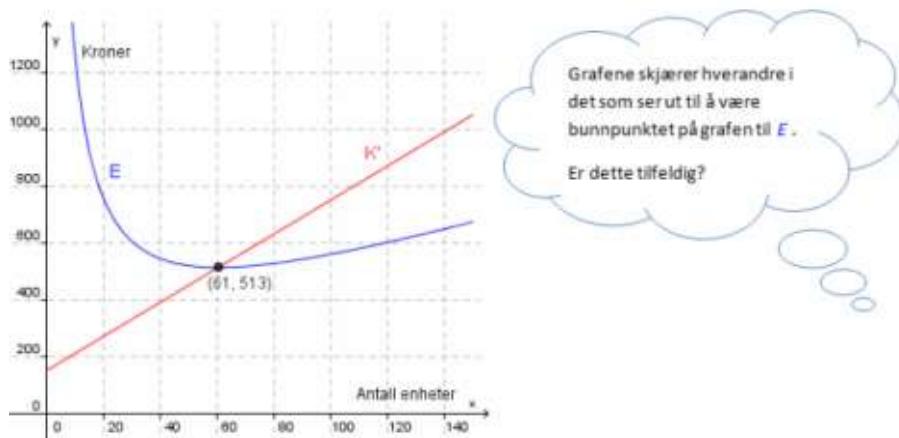
$$E(x) = 3x + 150 + \frac{11000}{x}$$

Vi finner så grensekostnadene

$$K(x) = 3x^2 + 150x + 11000 \quad D_K = (0, 150)$$

$$K'(x) = 6x + 150$$

Vi tegner grafen til enhetskostnadsfunksjonen E og grensekostnadsfunksjonen K' i samme koordinatsystem.



I bunnpunktet på grafen til E er $E'(x) = 0$.

Vi deriverer $E(x)$ etter kvotientregelen.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{K(x)}{x} \\ E'(x) &= \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$E'(x) = 0$ når telleren er lik null.

Den minste verdien for enhetskostnadene finner vi der enhetskostnadene er lik grensekostnadene

$$K'(x) = E(x)$$

Vi finner den minste verdien for enhetskostnadene ved regning

$$\begin{aligned}E(x) &= K'(x) \\3x + 150 + \frac{11000}{x} &= 6x + 150 \\3x^2 + 150x + 11000 &= 6x^2 + 150x \\3x^2 &= 11000 \\x &= \sqrt{\frac{11000}{3}} \approx 61\end{aligned}$$

$$E(61) = 3 \cdot 61 + 150 + \frac{11000}{61} \approx 513$$

Ved en produksjon på 61 enheter er kostnadene per enhet lavest. Hver enhet har da en produksjonskostnad på 513 kroner.

Etterspørselregulering

Etterspørselregulering (118321)

«Hvis det er så klare sammenhenger mellom pris og etterspørsel», sier Veronika, «betyr det jo at vi kan få den produksjonen vi ønsker bare ved å regulere prisen. Vi ønsker jo å produsere så mange enheter at det blir arbeid nok til hele klassen. Hvis det betyr at 80 enheter per uke er optimalt, så kan vi finne hvilken pris vi da må sette.»

$$\begin{aligned} p(x) &= 800 - 2x \\ P(80) &= 800 - 2 \cdot 80 = 640 \end{aligned}$$

Hvis virkeligheten stemmer med de matematiske modellene, vil en pris på 640 kroner per enhet sikre en stabil produksjon og salg av 80 enheter av Multiform per uke.

En pris på 640 kroner per enhet gir overskuddet

$$O(640) = -1,25 \cdot 640^2 + 1675 \cdot 640 - 551000 = 9000$$

Et overskudd på 9000 kroner per uke er akseptabelt.

Videre drift

Når klasse 3STB kommer i gang med elevbedriften, vil det vise seg om de stipulerte kostnadene og inntektene stemmer med de faktiske verdiene. Etter hvert som klassen ser hvordan de reelle kostnadene og inntektene blir, kan de gjøre som Trym antydet innledningsvis. De kan merke av de reelle verdiene i et koordinatsystem og ved hjelp av regresjon finne stadig bedre modeller for kostnads- og inntektsfunksjonene. Overskuddsfunksjonen, grensekostnadsfunksjonen og de andre avleddede funksjonene vil da endre seg automatisk, og det vil føre til justeringer når det gjelder optimale verdier for produksjon og pris.

Det viser seg ofte at kostnadsfunksjoner inneholder en eksponentialfunksjon. Da gjelder det å ha gode ferdigheter i å behandle slike funksjoner. Du må kunne derivere uttrykk som inneholder eksponentialfunksjoner og kunne løse likninger som inneholder slike uttrykk.

Modellering

Modellering

[Modellering \(118377\)](#)

Å lage matematiske modeller som viser sammenhengen mellom ulike størrelser, kalles å **modellere**. Vi prøver å beskrive virkeligheten med matematikk ved hjelp av modeller.

Når vi modellerer, prøver vi å finne en funksjon som viser sammenhengen mellom to størrelser. En matematisk modell kan sies være et forenklet bilde av virkeligheten.

Målinger kan gi oss data som viser noen sammenhørende verdier av de to størrelsene. Vi plotter de observerte dataene som punkter i et koordinatsystem. Vi må så prøve å finne en modell som passer best mulig med datamaterialet.

I S1 så vi hvordan vi kan bruke lineære funksjoner, polynomfunksjoner, potensfunksjoner og eksponentialfunksjoner som modeller.

Lineære modeller

[Lineære modeller \(118381\)](#)

Hvis punktene ser ut til å ligge på en rett linje, tyder det på at vi kan bruke en lineær modell.

I S1 lærte du hvordan du kan bruke lineær regresjon i GeoGebra. Vi repeterer med et eksempel fra S1.

Eksempel

Folketallet i Norge

Tabellen nedenfor viser folketallet i Norge for noen utvalgte år i perioden fra 1950 til 2010.

Årstall	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Folketall	3 249 954	3 567 707	3 863 221	4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 907 315

Kilde: Statistisk sentralbyrå

Vi lager en ny tabell der x er antall år etter 1950 og $f(x)$ er folketallet i millioner.

x	0	10	20	30	40	50	60
$f(x)$	3,2	3,6	3,9	4,1	4,2	4,5	4,9

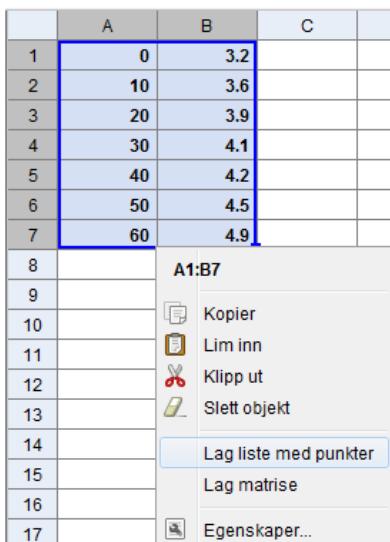
Vi legger verdiene inn i regnearket i GeoGebra, merker de aktuelle cellene, høyreklikker og velger «Lag liste med punkter».

Punktene legges da i en liste som får navnet «liste1». Denne listen ser du i algebravinduet. Punktene plottes samtidig i koordinatsystemet i grafvinduet.

Vi ser at punktene tilnærmet ligger på en rett linje.

Vi bruker lineær regresjon.

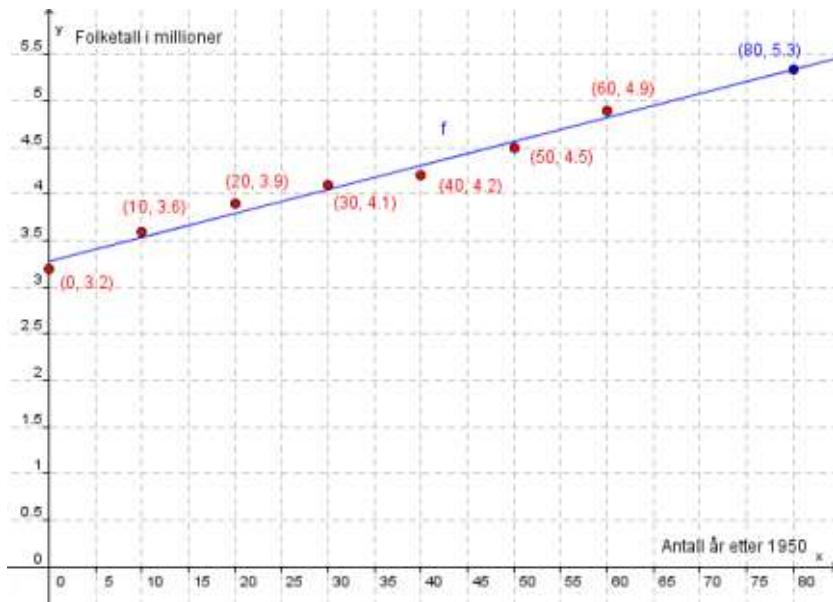
Skriv **RegLin[[liste1]]** i inntastingsfeltet nederst i skjermvinduet i GeoGebra.



Vi finner da at

$$f(x) = 0,0257x + 3,29$$

er en lineær matematisk modell som tilnærmet beskriver utviklingen i folketallet i Norge fra 1950 til 2010.



Hva vil folketallet i Norge være i 2030 i følge denne modellen?

I år 2030 har det gått 80 år siden 1950.

I følge modellen vil folketallet da være

$$f(80) = 0,0257 \cdot 80 + 3,29 \approx 5,3$$

Folketallet i Norge vil altså etter denne modellen være ca. 5,3 millioner i 2030.

Eksponentialfunksjon som modell

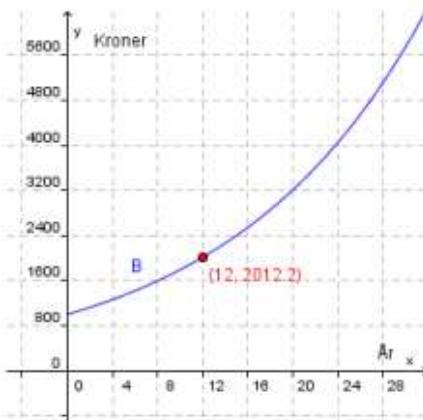
[Eksponentialfunksjon som modell \(118414\)](#)

Når en størrelse vokser med en fast prosent per tidsenhet, får vi en eksponentiell utvikling.

Vi setter 1000 kroner i banken. Rentefoten er 6 % per år. Etter x år er da beløpet i banken gitt ved

$$B(x) = 1000 \cdot 1,06^x$$

Grafen til funksjonen B viser for eksempel at beløpet på 1000 kroner er doblet etter ca. 12 år.



Dette kan vi også finne ved å regne.

Da får vi bruk for å løse likninger som inneholder eksponentialfunksjoner. Når vi skal løse slike likninger, bruker vi logaritmesetningene som du lærte i S1.

$$1000 \cdot 1,06^x = 2 \cdot 1000$$

$1,06^x = \frac{2000}{1000}$ Vi ordner likningen slik at vi får potensen alene på venstre side.

$1,06^x = 2$ Logaritmen til like tall er like.

Vi kunne også brukt den naturlige logaritmen.

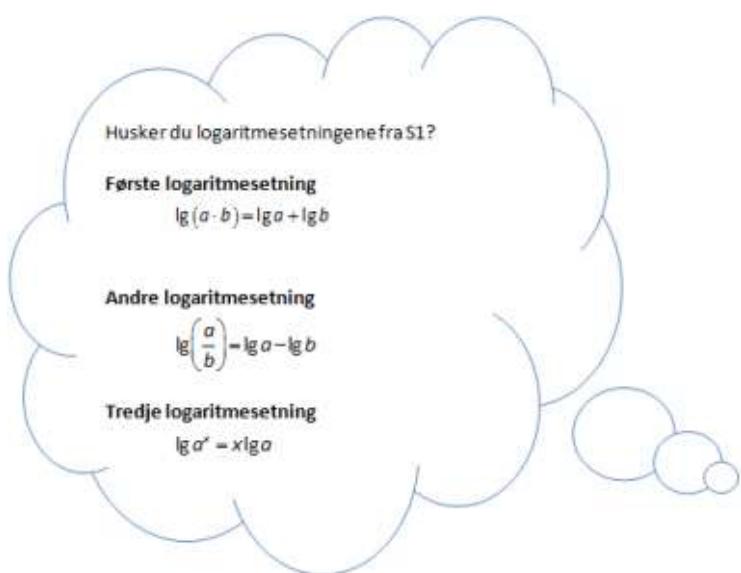
$x \cdot \lg 1,06 = \lg 2$ Vi bruker tredje logaritmesetning.

$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,06}$ Her må vi bruke digitale verktøy.

$x \approx 12$

Pengene må altså stå ca. 12 år i banken før beløpet er fordoblet.

For å finne en eksponentiell modell ved regresjon må vi bruke eksponentialregresjon. Vi skriver da **RegEksp[list1]** i GeoGebra.



Nedenfor finner du to eksempler til på eksponentiell vekst.

Eksempel

Siv ville finne ut hvordan en solsikke hun hadde i hagen, vokste fra uke til uke. Hun målte høyden til solsikken hver uke i åtte uker. De observerte verdiene ser du i tabellen nedenfor.

Antall uker	1	2	3	4	5	6	7	8
Høyde i cm	16	20	27	40	56	68	107	140



Solsikker i blomst. Toscana, Italia.

Vi markerer dataene fra tabellen som punkter i et koordinatsystem.

For å finne en modell som kan brukes for å beskrive solsikkens vekst, ser det ut som vi må finne **en funksjon som vokser raskere og raskere** etter som x -verdiene øker. Her vil det derfor være naturlig å prøve med **eksponentiell regresjon**.

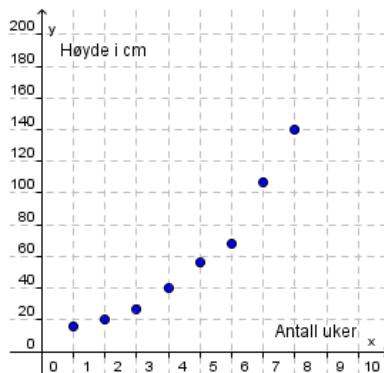
Eksponentiell regresjon i GeoGebra gir

$$f(x) = 10,94 \cdot e^{0,32x}$$

Legg merke til at vi må omforme dette uttrykket dersom vi ønsker en eksponentialfunksjon på formen

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 10,94 \cdot e^{0,32x} \\ &= 10,94 \cdot 1,38^x \end{aligned}$$

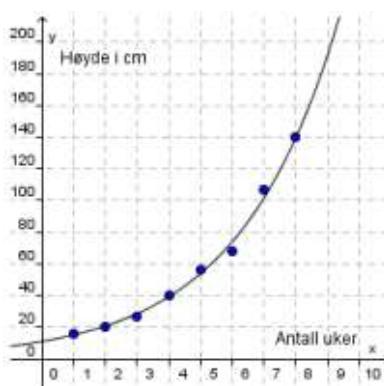


$e^{0,32} \approx 1,38$

Dersom vi skriver funksjonsuttrykket på denne formen, ser vi at solsikken var ca. 10,9 cm da Siv begynte å måle, og at den har vokst med ca. 38 % hver uke.

Vi ser at kurven treffer bra med de observerte verdiene, men det er viktig å legge merke til at modellen vi fant her, bare gjelder i et begrenset tidsrom.

Det er naturlig at veksten til solsikken vil avta og etter hvert stoppe helt opp. Da kan vi ikke bruke det samme funksjonsuttrykket.



Her må vi bruke sunn fornuft!

Eksempel

Antall ørret i et vann har økt kraftig etter at det i 1998 ble satt i gang med kalking av vannet. Tabellen nedenfor viser antall ørret i vannet noen år etter 1998.

Årstall	1998	2000	2002	2004
Antall år etter 1998, x	0	2	4	6
Antall ørret i tusen, N	4,0	6,7	10,9	17,4

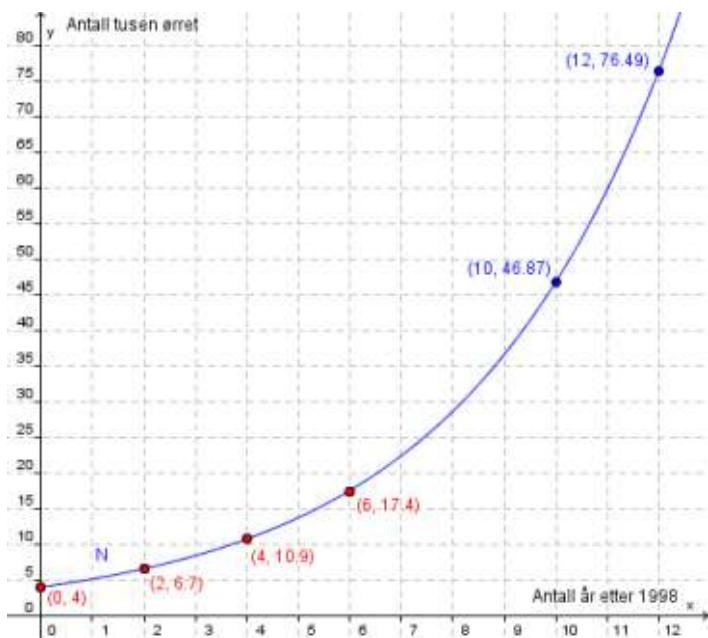


Vekst i populasjoner følger ofte en eksponentiell utvikling i starten. Vi bruker eksponentiell regresjon i GeoGebra og finner funksjonen N gitt ved

$$N(x) = 4,5 \cdot e^{0,24x}$$

Denne funksjonen ser ut til å passe veldig bra med registrerte tellinger av ørretbestanden fram til år 2004.

Forsuring av vann og vassdrag har lenge vært et alvorlig miljøproblem i Norge, og sur nedbør truer det biologiske mangfoldet i norske ferskvann. Kalking er et viktig tiltak for å redusere skadene.

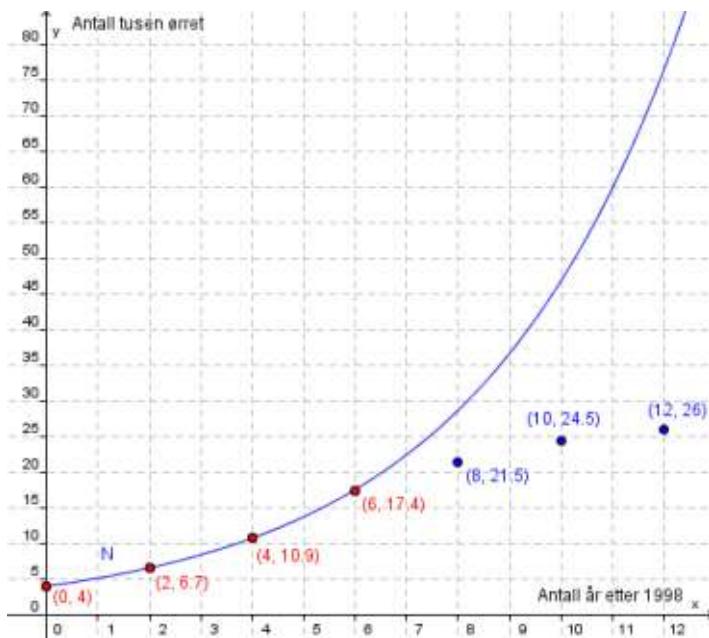


Av grafen ovenfor kan vi også se at ut fra denne modellen ville ørretbestanden ha passert 45 000 individer i 2008 og 75 000 individer i 2010.

Registreringen av ørretbestanden fortsatte også hvert andre år etter 2004. Resultatene ser du i tabellen nedenfor.

Årstall	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010
Antall år etter 1998, x	0	2	4	6	8	10	12
Antall ørret i tusen, N	4,0	6,7	10,9	17,4	21,5	24,5	26,0

Det viser seg altså at modellen ikke var egnet til å si noe om utviklingen i perioden etter 2004. I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til N sammen med de registrerte verdiene i 2008, 2010 og 2012 (merket av som blå punkter).



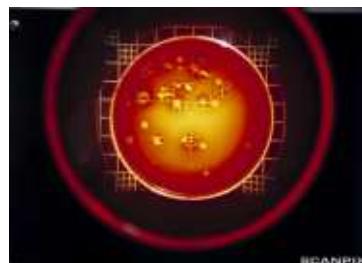
Eksponentialfunksjoner passer ofte godt for å beskrive hvordan populasjoner endrer seg i et begrenset tidsrom mens det er rik tilgang på mat og lite eller ingenting som begrenser veksten. Et særtrekk ved populasjoner i denne fasen er at økningen i antall individer blir større og større.

Etter hvert blir utviklingen annerledes. Når populasjonen blir stor nok, bremses veksten fordi det ikke blir tilstrekkelig mat.

Logistisk vekst

[Logistisk vekst \(118447\)](#)

I mange situasjoner vil veksten før eller senere flate ut. Slik vekst kalles **logistisk vekst**.



Logistiske vekstkurver kan ofte brukes for å beskrive hvordan antall individer i en populasjon endrer seg. Antall individer øker raskt i starten, men ytre faktorer fører etter hvert til at veksten avtar, og populasjonen når en maksimal størrelse.

Bæreevnen, B , for et område forteller hvor mange individer av en art som kan leve i det aktuelle området over lengre tid.

Logistisk vekst er også typisk for veksten til for eksempel et tre. Et tre vokser nærmest eksponentielt de første årene. Etter hvert flater vekstkurven ut, og treet vokser langsomt mot sin maksimalhøyde.

Kostnadene ved produksjon av x enheter i en bedrift og antall bakterier i en bakteriekultur kan også ofte beskrives med logistiske vekstmodeller.

I forrige eksempel prøvde vi å finne en modell som kunne brukes for å beskrive utviklingen av antall ørret i et vann.

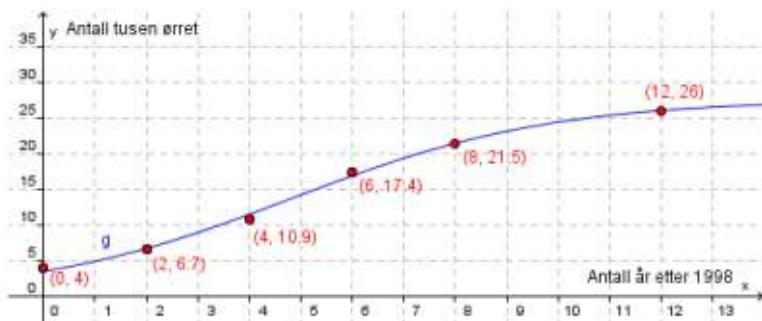
Tabellen nedenfor viser data fra tellinger i perioden 1998 – 2010.

Årstall	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010
Antall år etter 1998, x	0	2	4	6	8	10	12
Antall ørret i tusen, N	4,0	6,7	10,9	17,4	21,5	24,5	26,0

Hvis vi bruker logistisk regresjon («RegLogist» i GeoGebra), får vi funksjonen g gitt ved

$$g(x) = \frac{26,62}{1+6,85 \cdot e^{-0,4x}}$$

Vi tegner grafen til g i samme koordinatsystem som punktene vi får fra tabellen ovenfor.



Grafen faller godt sammen med punktene, og g er sannsynligvis også en modell som kan si noe om utviklingen av ørretbestanden videre.

I funksjonsuttrykket $6,85 \cdot e^{-0,4x}$ vil gå mot null når x blir veldig stor. Det betyr at den maksimale ørretbestanden ikke kan overskride 26 620 individer. Dette er bæreevnen for ørretvannet.

En generell form for en funksjon som beskriver en logistisk modell er

$$f(x) = \frac{B}{1+a \cdot e^{-bx}}$$



Tallet b er positivt. Det betyr at når x blir veldig stor, Ørreten vil nævneren nærme seg verdien 1, og hele brøken vil bli lik B . Tallet B viser hva den maksimale verdien av $f(x)$ kan være. Hvis funksjonen beskriver veksten til en populasjon, kalles B for bæreevnen til populasjonen.

Folketallet i Norge – Logistisk modell?

Tidligere i dette kapittelet fant vi en lineær modell f gitt ved

$$f(x) = 0,0257x + 3,29$$

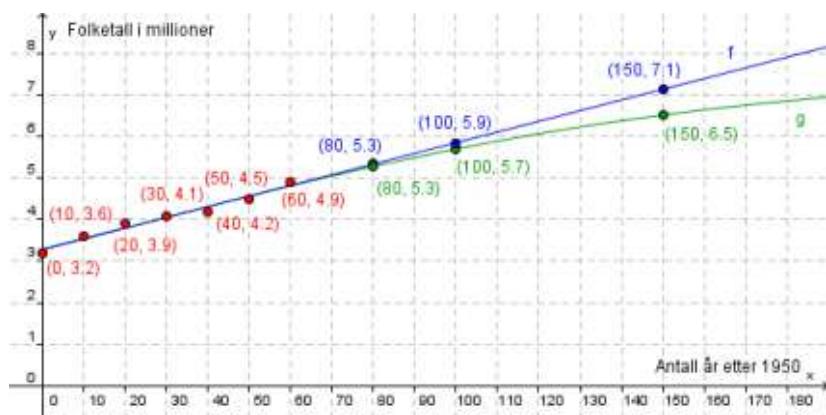
som vi brukte for å beskrive hvordan folketallet i Norge utvikler seg.

Hvis vi bruker logistisk regresjon på det samme datamaterialet, får vi en modell g gitt ved

$$g(x) = \frac{7,7}{1+1,3e^{-0,014x}}$$



som passer like godt til punktene i koordinatsystemet som den lineære modellen.



I følge begge modellene vil folketallet være ca. 5,3 millioner i 2030. I 2050 vil folketallet være 5,9 millioner i følge den lineære modellen, mens det vil være 5,7 millioner i følge den logistiske, og i 2100 har folketallet passert 7 millioner i følge den lineære modellen, mens det er på ca. 6,5 millioner i følge den logistiske. Kanskje er den logistiske modellen mer realistisk?

Areal under grafer

Areal under grafer

[Arealet under grafer \(118451\)](#)

Samlet lønn

Erlend er ferdig med sin utdannelse og skal ut i jobb. Han får tilbud om 270 000 kroner i lønn det første året. Deretter skal lønnen økes med 7 % per år.

Hva vil den samlede lønnen til Erlend være de neste 10 årene hvis han godtar dette tilbuddet?

Lønnen til Erlend etter x år vil i **tusen kroner** være gitt ved

$$L(x) = 270 \cdot 1,07^x$$

Det første året, år null, blir samlet lønn 270 000 kroner. I år 1, altså det andre året, er samlet lønn 270 000 kroner multiplisert med vekstfaktoren 1,07.

Slik fortsetter det, og samlet lønn for de neste 10 år i tusen kroner vil være

$$270 + 270 \cdot 1,07 + 270 \cdot 1,07^2 + 270 \cdot 1,07^3 + 270 \cdot 1,07^4 + 270 \cdot 1,07^5 + 270 \cdot 1,07^6 + 270 \cdot 1,07^7 + 270 \cdot 1,07^8 + 270 \cdot 1,07^9$$

Dette kan også skrives som

$$L(0) + L(1) + L(2) + L(3) + L(4) + L(5) + L(6) + L(7) + L(8) + L(9)$$

Vi multipliserer hvert ledd med tallet 1 og får samlet lønn over 10 år som

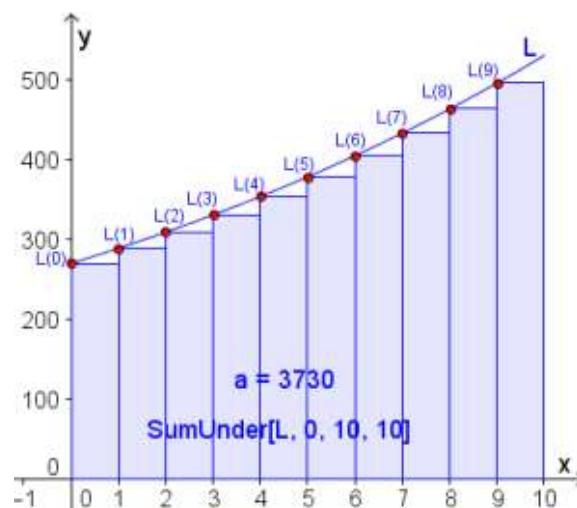
$$L(0) \cdot 1 + L(1) \cdot 1 + L(2) \cdot 1 + L(3) \cdot 1 + L(4) \cdot 1 + L(5) \cdot 1 + L(6) \cdot 1 + L(7) \cdot 1 + L(8) \cdot 1 + L(9) \cdot 1$$

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen til L .

Under grafen har vi tegnet 10 rektangler. Ser du at høyden på rektanglet lengst til venstre er $L(0)$, og at bredden er lik 1?

Det betyr at arealet til dette rektanglet representerer lønnen det første året, i år null.

Tilsvarende representerer arealene til de neste rektanglene lønnen de neste årene, og samlet areal til de 10 rektanglene representerer samlet lønn de 10 årene.



I GeoGebra kan vi finne dette arealet ved kommandoen **SumUnder[L, 0, 10, 10]**. I parentesene viser L at det er sum av arealer under grafen til L som skal beregnes, og det skal gjøres fra

$x = 0$ til $x = 10$. Tallet 10 til slutt viser at det er 10 rektangler.

Samlet areal er gitt med tallet $a = 3730$. Det betyr at samlet lønn over 10 år er 3 730 000 kroner.

Erlend får utbetalt lønn hver måned. Det kan for eksempel bety at månedslønnen i et år er konstant lik årslonnen delt på 12.

Erlend inngår en avtale om at årslonnen skal justeres hvert halvår i henhold til funksjonen . Det betyr at månedslønnen blir høyere siste halvår enn 1. halvår.

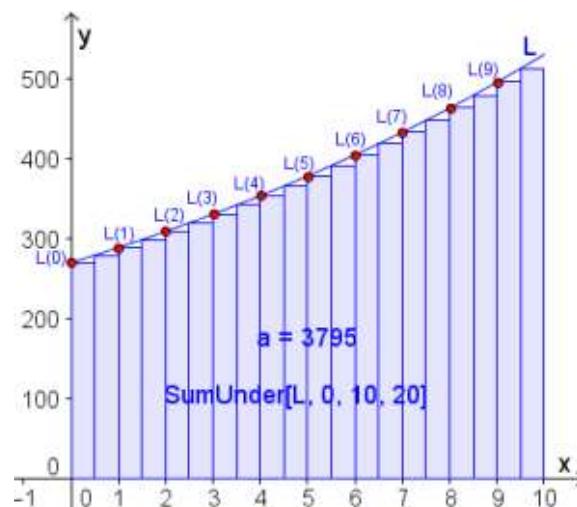
Nå blir samlet lønn over 10 år summen av arealene til 20 rektangler som vist på figuren. I GeoGebra må det siste tallet i parenteser for kommandoen SumUnder endres fra 10 til 20.

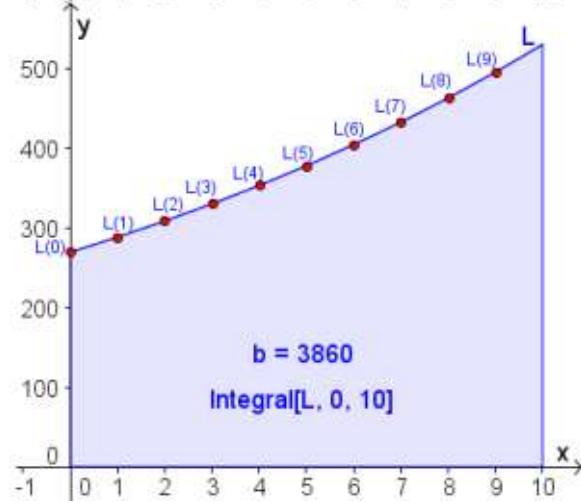
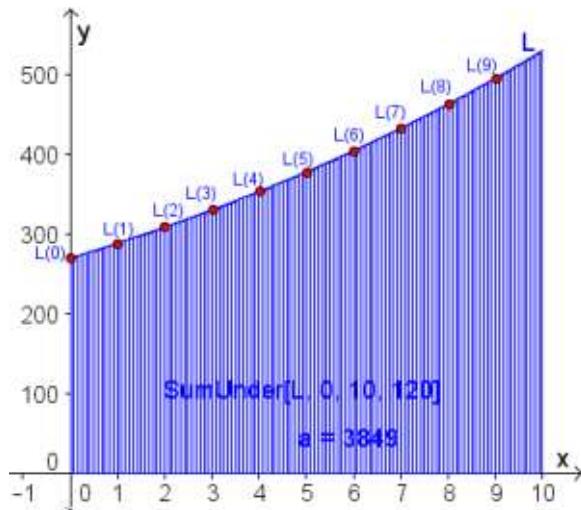
Tallet $a = 3795$ viser at samlet lønn over 10 år nå blir 3 795 000 kroner, en samlet økning over 10 år på 65 000 kroner.

Vi kan fortsette, og la årslonnen justeres hver måned i henhold til funksjonen L . Da tilsvarer samlet lønn arealene til 120 rektangler. Samlet lønn blir nå 3 840 000 kroner.

Vi ser at nå nærmer summen av arealene til rektanglene seg til å bli lik samlet areal under grafen fra $x = 0$ til $x = 10$.

Dette samlede arealet kan vi i GeoGebra finne med kommandoen **Integral[L,0,10]**. Det kalles for **det bestemte integralet** til funksjonen L fra $x = 0$ til $x = 10$.





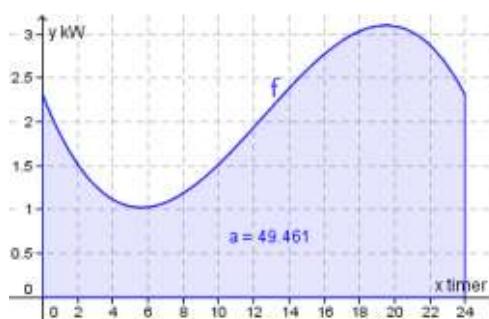
Samlet areal under grafen tilsvarer en samlet lønn på 3 860 000 kroner i tiårsperioden. Vi ser at dette gir en god tilnærmet verdi for samlet lønn i perioden. Den eksakte samlede lønnen avhenger av hvordan lønnen i praksis justeres.

Hvis årslønnen blir justert kontinuerlig, det vil at den til enhver tid følger funksjonen L , gir det bestemte integralet den mest riktige verdien for samlet lønn i perioden.

Samlet strømforbruk

Hjemme hos Lena er det en strømmåler som på ethvert tidspunkt viser strømforbruket. Lena ville finne ut hva det samlede strømforbruket var gjennom et døgn, og hun ønsket også en oversikt over hvordan strømforbruket fordelte seg gjennom døgnet.

Lena noterte ned strømforbruket i kilowatt hver hele time fra midnatt til neste midnatt. Ved regresjon i GeoGebra fant Lena en funksjon f som modell for strømforbruket gjennom døgnet



$$f(x) = -0,002x^3 + 0,06x^2 - 0,502x + 2,3$$

Arealet under grafen til f fra $x = 0$ til $x = 24$ viser samlet strømforbruk i wattimer (Wh) for hele døgnet.

Lena fant dette samlede strømforbruket som det bestemte integralet til f fra $x = 0$ til $x = 24$

$$\text{Integral}[f, 0, 24] = 49\ 461$$

Det betyr at samlet strømforbruk var 49,5 kWh (kilowattimer).

Noen andre eksempler

Når vi for eksempel har modeller for oljeutvinning, utsipp av klimagasser, produksjon av en bestemt vare i en bedrift og salg av en bestemt vare fra en butikk over et gitt tidsrom, så vil arealet under grafene til funksjonene vise samlet oljeutvinning, samlet utsipp, samlet produksjon og samlet salg i tidsperioden.

Sannsynlighet og statistikk

Teori

Stokastiske variabler og sannsynlighetsfordelinger

Stokastisk forsøk

[Stokastisk forsøk \(118625\)](#)



Hvis du skal trekke et kort fra en kortstokk, kan du ikke på forhånd si hvilket kort du kommer til å trekke. Men - du vet hvilke kort det er mulig å trekke, og hvor stor sannsynligheten er for å trekke hvert av disse kortene.

Vi sier at en hendelse er **stokastisk** hvis vi kjenner, eller kan finne ut, sannsynligheten for at hendelsen skal inntreffe, uten at vi kan si sikkert når den inntreffer.

Å kaste en tirkone er et eksempel på et **stokastisk** forsøk.

Vi kaster en tirkone 50 ganger og setter resultatet av forsøkene inn i en tabell.

Stokastisk er et ord som stammer fra gresk og betyr egentlig «gjetning».



	Kron	Mynt
Frekvens	28	22
Relativ frekvens	$\frac{28}{50} = 0,56$	$\frac{22}{50} = 0,44$

Når vi kaster tirkonen, kan vi få kron eller mynt. Dette kaller vi **utfall**. Vi har altså to mulige utfall, kron eller mynt. Alle utfallene til sammen kalles **utfallsrommet** til forsøket. Vi skriver

$$U = (\text{Kron}, \text{Mynt})$$

Når vi kaster tirkonen 50 ganger, og utfallet mynt forekommer i 22 av disse 50 forsøkene, er **den relative frekvensen for mynt lik $\frac{22}{50} = 0,44$** .

Definisjon av sannsynlighet og sannsynlighetsmodell

[Definisjon av sannsynlighet og sannsynlighetsmodell \(118632\)](#)

De store talls lov

Dersom vi gjentar et forsøk mange nok ganger, vil **den relative frekvensen for et utfall nærme seg en bestemt verdi**. Denne verdien kaller vi **sannsynligheten** for utfallet.

Det er vanlig å bruke bokstaven P for sannsynlighet. P står for **probability**, som er det engelske ordet for sannsynlighet. $P(\text{Mynt})$ er en kortfattet skrivemåte for «sannsynligheten for å få utfallet mynt».

En oversikt over alle utfall og sannsynlighetene til de enkelte utfallene i et forsøk kalles en **sannsynlighetsmodell**.

I en sannsynlighetsmodell er sannsynligheten for hvert enkelt utfall **et tall mellom 0 og 1**. Sannsynligheten for alle utfallene er **til sammen lik 1**.

Hver gang vi kaster en tikrone er det like stor sannsynlighet for at vi får kron som at vi får mynt. Tabellen nedenfor er et eksempel på hvordan sannsynlighetsmodellen for forsøket kan stilles opp.



Myntkast	Kron	Mynt
Sannsynlighet	0,50	0,50

Kast med to mynter

Dersom du kaster to tikroner gjentatte ganger og undersøker hvilke myntsider som vises, vil du oppdage at utfallene KK, KM, MK og MM får tilnærmet samme relative frekvens. Sannsynlighetene for de enkelte utfall er like, og vi sier at **sannsynlighetsmodellen er uniform**.



Tabellen nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen.

Kast med to mynter	KK	KM	MK	MM
Sannsynlighet	0,25	0,25	0,25	0,25

En stokastisk variabel og stokastisk sannsynlighetsfordeling

[En stokastisk variabel og stokastisk sannsynlighetsfordeling \(118638\)](#)

Matematikere liker å beskrive ting med tallstørrelser. Når vi kaster to mynter, er utfallsrommet

$$U = \{\text{KK, KM, MK, MM}\}$$

Hvis vi i stedet teller opp antall kron i forsøket, vil utfallsrommet være en tallstørrelse som har verdien 0, 1 eller 2.

$$U = \{0, 1, 2\}$$

En slik **tallstørrelse** kalles en **stokastisk variabel**.

Det er vanlig å bruke store bokstaver som navn på stokastiske variabler. Vi definerer den stokastiske variablene X som antall kron ved kast av to mynter.

X kan ha verdien 0, 1 eller 2. Sannsynligheten for at X har verdien 1, er 0,5. Sannsynligheten for at X har verdien 0 eller 2, er 0,25 for hver verdi. Vi skriver

$$P(X = 0) = 0,25$$

$$P(X = 1) = 0,5$$

$$P(X = 2) = 0,25$$

Å skrive $P(X = 0) = 0,25$ er det samme som å skrive at $P(\text{MM}) = 0,25$. Teksten «MM» er erstattet med tallverdien til den stokastiske variablene.

Sannsynlighetsfordelingen for den stokastiske variablene X kan skrives som

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

Bokstaven x viser her hvilke verdier X kan ha. Det er også vanlig å bruke andre bokstaver for å vise hvilke verdier X kan ha, for eksempel k .

Antall kron **varierer stokastisk** (tilfeldig) fra kast til kast, derav navnet stokastisk variabel.

Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X er en liste med alle verdiene X kan ha og sannsynlighetene for hver av disse verdiene. Summen av sannsynlighetene skal være lik 1.

Statistikk og sannsynlighet, frekvenstabell og sannsynlighetsfordeling

[Statistikk og sannsynlighet \(118645\)](#)

Frekvenstabell og sannsynlighetsfordeling

En S2-gruppe på 30 elever har hatt matematikkprøve. Den første tabellen til høyre viser karakterfordelingen i gruppen. Dette er et eksempel på statistiske data vist i en frekvenstabell.



Vi trekker en tilfeldig elev fra gruppen. Vi har da en uniform sannsynlighetsmodell og kan bruke regelen om «gunstige over mulige» til å beregne sannsynligheten for elevens karakter.

Vi lar den stokastiske variabelen X betegne karakteren til eleven. Tabellen lengst til høyre gir sannsynlighetsfordelingen til X .

Det statistiske datamaterialet danner grunnlag for sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen.

Karakter	Frekvens		x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
x	f	$x \cdot f$	1	$\frac{2}{30} \approx 0,07$	0,07
1	2	2	2	$\frac{8}{30} \approx 0,27$	0,53
2	8	16	3	$\frac{7}{30} \approx 0,23$	0,70
3	7	21	4	$\frac{5}{30} \approx 0,17$	0,67
4	5	20	5	$\frac{7}{30} \approx 0,23$	1,17
5	7	35	6	$\frac{1}{30} \approx 0,03$	0,20
6	1	6	Sum	1	$\mu = 3,3$
Gjennomsnitt $\bar{x} = 3,3$					

Kumulativ sannsynlighet

[Kumulativ sannsynlighet \(118647\)](#)

Vi ser igjen på forsøket «Kast med to tikroner».



Vi definerte den stokastiske variabelen X som antall kron og fikk da sannsynlighetsfordelingen nedenfor.

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

Vi legger nå til en ny rad i tabellen som viser **de kumulative sannsynlighetene**.

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25
$P(X \leq x)$	0,25	0,75	1,00

Tallene i denne raden viser sannsynligheten for at den stokastiske variabelen er lik eller mindre enn den gitte x - verdien.

For eksempel er

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1).$$

Legg også merke til at vi kan bruke tabellen til å finne sannsynligheten for at den stokastiske variabelen er større enn en gitt verdi. Vi benytter da at samlet sannsynlighet er lik 1.

For eksempel er

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,75 = 0,25$$

Binomisk sannsynlighetsfordeling

[Binomisk sannsynlighetsfordeling \(118655\)](#)

I S1 lærte du om binomiske sannsynlighetsmodeller. Vi starter med litt repetisjon. Gå til S1 for en mer grundig repetisjon.

En matematikkprøve består av fire oppgaver. For hver oppgave er det fire svaralternativer, og oppgaven skal besvares ved å krysse av for riktig svaralternativ.

Du er ikke forberedt, og alle svaralternativene virker like sannsynlige. Vi regner med uavhengighet. Det vil si at hva du svarer på en oppgave, ikke påvirker svaret ditt på den neste.



Du krysser av helt tilfeldig. Sannsynligheten for å svare riktig på hver enkelt oppgave er lik 0,25, og sannsynligheten for å svare galt er 0,75. Vi ønsker å finne sannsynligheten for å få ett riktig svar, to riktige svar, tre riktige osv.

Matematikkprøven som er beskrevet ovenfor, er et eksempel på et forsøk som gir en binomisk sannsynlighetsmodell.

I en binomisk forsøksrekke har vi n uavhengige delforsøk.

Eksempel: Svare på fire oppgaver, $n = 4$

- Alle delforsøkene har to mulige utfall, A eller \bar{A} (ikke A).
(Vi kaller gjerne det ene utfallet «suksess» og det andre «fiasko».)
Eksempel: Riktig eller galt svar på en oppgave
- Sannsynligheten for A er den samme hele tiden. Vi setter $P(A) = p$.
Da er $P(\bar{A}) = 1 - p$.
Eksempel: $P(\text{Riktig svar}) = 0,25$ og $P(\text{Galt svar}) = 1 - 0,25 = 0,75$
- De enkelte delforsøkene er uavhengige.

Vi lar X være antall ganger A inntreffer.

Sannsynligheten for at A skal inntreffe k ganger er da gitt ved formelen

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{hvor} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ kalles for **binomialkoeffisienten**.

I eksempelet ovenfor er

$$P(\text{Ett riktig svar}) = P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^3 = \\ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \approx 0,422$$

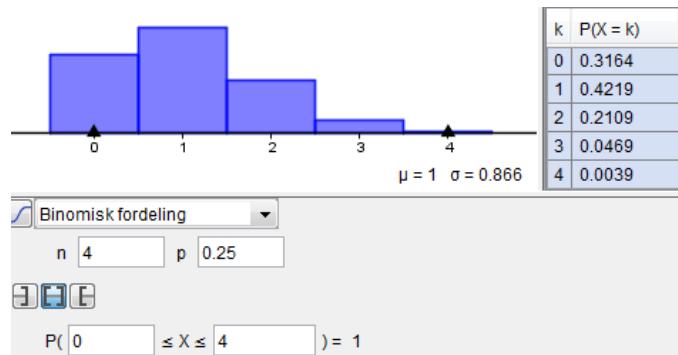
og

$$P(\text{To riktige svar}) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 = \\ \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{128} \approx 0,211$$

Tabellen nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen for den stokastiske variabelen X .

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,316	0,422	0,211	0,047	0,004

Du kan bruke GeoGebra sin «Sannsynlighetskalkulator» for å finne binomiske sannsynligheter. Du må da velge «Fordeling» som «Binomisk fordeling», og sette inn de aktuelle verdier for n og p . På siste linje velger du hvilken sannsynlighet du vil beregne.



Forventningsverdi, varians og standardavvik

Forventningsverdi

[Forventningsverdi \(118661\)](#)

I 1T satte vi opp sannsynlighetsmodellen for «Kast med én terning».

Antall øyne	1	2	3	4	5	6
Sannsynlighet	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Vi innfører nå den stokastiske variabelen X som antall øyne ved kast av en terning.

Nedenfor har vi satt opp sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen X .

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



De store talls lov sier at hvis vi kaster en terning mange nok ganger, vil vi få like mange enere, toere, treere, firere, femmere og seksere.

Gjennomsnittet blir

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

Dette tallet kaller vi for **det forventete resultatet** ved kast av en terning selv om det ikke er mulig å få akkurat **den forventede verdien**.

Hvis vi multipliserer hvert utfall med sannsynligheten for å få akkurat dette utfallet og til slutt summerer de svarene vi får, finner vi **forventningsverdien** til den stokastiske variabelen X .

Forventningsverdien når vi kaster en terning blir da

$$1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) + 6 \cdot P(X = 6) =$$

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

På denne måten finner vi det **forventete antall øyne** ved kast med en terning. Det tilsvarer **gjennomsnittet av antall øyne** hvis vi kaster mange nok ganger.

Vi bruker to skrivemåter for forventningsverdi, den greske bokstaven μ («my») og stor bokstav E (fra engelsk «expectation»). Skrivemåten $E(X)$ betyr forventningsverdien til den stokastiske variabelen X .

Forventningsverdi

La X være en stokastisk variabel og x_1, x_2, \dots, x_n de verdiene X kan ha.

Da defineres forventningsverdien til X , som

$$\mu = E(x) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Legg merke til hvordan vi bruker den greske bokstaven Σ («sigma») for å skrive summen av flere ledd på en enklere måte.

For forsøket «Kast av én terning» kan vi da sette opp denne tabellen:

x	1	2	3	4	5	6	Sum
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$x \cdot P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\mu = 3,50$



Regneark egner seg også godt for å finne forventningsverdi. Her har vi laget den samme tabellen i GeoGebra.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	1	2	3	4	5	6	Sum
2	$P(X = x)$	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	1
3	$x \cdot P(X = x)$	0.167	0.333	0.5	0.667	0.833	1	3.5

Nedenfor har vi regnet ut forventningsverdien for matematikkprøven med fire oppgaver, hver med fire svaralternativer, som vi så på tidligere.

Her er utregningene gjort i regnearket Excel.



k	0	1	2	3	4	Sum
$P(X = k)$	0,316	0,422	0,211	0,047	0,004	
$k \cdot P(X = k)$	0	0,422	0,422	0,141	0,016	$\mu = 1,00$

Forventningsverdien for antall riktige svar ved ren gjetning er $\mu = 1,00$. Dette betyr at hvis veldig mange elever avlegger en slik prøve ved tilfeldig avkrysning, er det i gjennomsnitt ett riktig svar per besvarelse.



Gjennomsnitt og forventningsverdi

Gjennomsnitt og forventningsverdi (118682)

Tidligere i dette kapittelet så vi på karakterfordelingen ved en matematikkprøve i en S2-gruppe.

Vi kan finne gjennomsnittskarakteren ved å summere verdiene av alle karakterene og så dividere med antall karakterer.

Gjennomsnittskarakteren blir

$$\bar{X} =$$

$$\frac{2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{30}$$

$$\bar{X} = \frac{100}{30} \approx 3,3$$

Den stokastiske variabelen X er karakteren til en tilfeldig elev i gruppen.

Vi ser av tabellene at gjennomsnittskarakteren i



Karakter	Frekvens	$\bar{x} \cdot f$	x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$
x	f	$\bar{x} \cdot f$	1	$\frac{2}{30} \approx 0,07$	0,07
1	2	2	2	$\frac{8}{30} \approx 0,27$	0,53
3	7	21	3	$\frac{7}{30} \approx 0,23$	0,70
4	5	20	4	$\frac{5}{30} \approx 0,17$	0,67
5	7	35	5	$\frac{7}{30} \approx 0,23$	1,17
6	1	6	6	$\frac{1}{30} \approx 0,03$	0,20
Sum	30	100	Sum	1	$\mu = 3,3$
Gjennomsnitt $\bar{x} = 3,3$					

Hvis vi gjentar forsøket mange nok ganger, trekker en elev tilfeldig fra gruppen og ser på karakteren, vil gjennomsnittet av karakterene nærme seg forventningsverdien.

Varians og standardavvik

[Varians og standardavvik \(118693\)](#)

Vi ser videre på eksemplet hvor X er karakteren til en tilfeldig valgt elev i en S2-gruppe.

Søylediagrammet til høyre viser sannsynlighetsfordelingen til X .



Forventningsverdien forteller hva gjennomsnittet av karakterene vil nærme seg mot hvis vi trekker en elev fra klassen tilfeldig mange nok ganger.

Vi ønsker også mål for **spredningen** i fordelingen. Er det stor **variasjon** i karakterene?

I 1T brukte vi **variasjonsbredd** som et mål for spredning.

Variasjonsbredden er her $6 - 1 = 5$.

At variasjonsbredden er fem, forteller oss at forskjellen mellom høyeste og laveste karakter i gruppen er fem. Det er altså minst én elev i gruppen som har fått karakteren 6 og minst én elev som har fått karakteren 1. Hvordan karakterene ellers fordeler seg, sier dette spredningsmålet ingenting om.

Vi skal nå definere et nytt mål for spredning, **standardavvik**. Standardavviket til en stokastisk variabel forteller om spredningen av verdiene til den stokastiske variabelen.

Når det gjelder karakterfordelingen ovenfor, ligger for eksempel verdien $X = 6$ langt fra forventningsverdien og bidrar til spredning, men siden sannsynligheten for verdien er liten, blir bidraget ikke så stort. Dette tar vi hensyn til ved å bruke produktet av avstanden fra forventningsverdien og størrelsen på sannsynligheten til verdien som verdiens bidrag til spredningen.

Summen av produktene $(x - \mu) \cdot P(X = x)$ blir da et mål for spredningen i datamaterialet. Problemet er at dette produktet blir negativt for verdier mindre enn forventningsverdien og positivt for verdier større enn forventningsverdien, og at produktene derfor utjenvner hverandre.

Vi løser problemet ved å kvadrere avstandene til forventningsverdien.

Varians

Vi kaller summen av produktene $(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$ for **variansen** til X

$$\text{Var}(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \text{ hvor } x_i \text{ er de verdier } X \text{ kan ha.}$$

I kapitlet «Statistikk og sannsynlighet» så vi på karakterfordelingen til en S2-gruppe på 30 elever.

Vi kan regne ut variansen i karakterfordelingen som vist nedenfor. Vi regner nå med 3 desimalers nøyaktighet.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (1 - 3,331)^2 \cdot 0,067 + (2 - 3,331)^2 \cdot 0,267 + (3 - 3,331)^2 \cdot 0,233 + \\ &\quad + (4 - 3,331)^2 \cdot 0,167 + (5 - 3,331)^2 \cdot 0,233 + (6 - 3,331)^2 \cdot 0,033 \\ \text{Var}(X) &= 0,364 + 0,473 + 0,026 + 0,075 + 0,649 + 0,235 \\ \text{Var}(X) &= 1,822\end{aligned}$$

I dette tilfellet er regningen for komplisert til å ta for hånd. Men du kan legge inn sannsynlighetsfordelingen i et regneark. Så kan du legge inn formler for forventningsverdi og varians i én aktuell rute, og deretter kopiere dem til de andre aktuelle rutene. Da får du en tabell som gir fullstendig oversikt.

Tabellen viser forventningsverdi og varians for karakterfordelingen i S2-gruppen.

x	1	2	3	4	5	6	Sum
$P(X=x)$	0,067	0,267	0,233	0,167	0,233	0,033	1
$x \cdot P(X=x)$	0,067	0,534	0,699	0,668	0,165	0,198	$\mu = 3,331$
$(x-\mu)^2 \cdot P(X=x)$	0,364	0,473	0,026	0,075	0,649	0,235	$\text{Var}(X) = 1,822$

Her er formlene som er brukt

A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	2	3	4	5	6	
2	0,067	0,267	0,233	0,167	0,233	0,033	
3	=B1*B2	=C1*C2	=D1*D2	=E1*E2	=F1*F2	=G1*G2	=SUMMER(B3:G3)
4	=((B1-G1)*2*B2	=((C1-G1)*2*C2	=((D1-G1)*2*D2	=((E1-G1)*2*E2	=((F1-G1)*2*F2	=((G1-G1)*2*G2	=SUMMER(B4:G4)

Kvadratroten av variansen til en stokastisk variabel kaller vi **standardavvik**. Standardavvik er det mest brukte spredningsmålet.

Hvis den stokastiske variabelen X har benevnning, vil variansen ha som benevnning kvadratet av benevningen til X . Standardavviket vil derimot ha samme benevnning og kan derfor være enklere å forholde seg til.

Standardavvik

Standardavviket til en stokastisk variabel X er kvadratroten av variansen til X .

Vi bruker betegnelsen $SD(X)$ eller den greske bokstaven «sigma», σ , for standardavviket.

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{\text{VAR}(x)}$$

Standardavviket er det mest brukte spredningsmålet.

Kast med to mynter



Her kan vi regne ut forventningsverdi og varians uten å bruke digitale verktøy.

Vi definerte tidligere den stokastiske variablen X som antall kron og fikk da sannsynlighetsfordelingen nedenfor.

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

Forventningsverdien er da

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 1$$

Variansen er

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - 1)^2 \cdot 0,25 + (1 - 1)^2 \cdot 0,5 + (2 - 1)^2 \cdot 0,25 \\ &= 0,25 + 0 + 0,25 = 0,50 \end{aligned}$$

Vi setter resultatene inn i tabellen

x	0	1	2	Sum
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25	1
$x \cdot P(X = x)$	0	0,5	0,5	$\mu = 1,00$
$(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$	0,25	0	0,25	$\text{Var}(X) = 0,50$

Standardavviket er

$$\sigma = DS(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0,50}$$

Forventningsverdi og varians for summer av stokastiske variabler

[Forventningsverdi og varians for summer av stokastiske variabler \(118833\)](#)

Tenk deg nå at vi lager to pengespill ved kast av to tikroner. Gevinstene i de to spillene er gitt ved de stokastiske variablene Y og Z .



I det første spillet er gevisten null hvis du får null kron, gevisten er 5 kroner hvis du får én kron og gevisten er 10 kroner hvis du får to kron. Y kan altså ha verdiene 0,5 og 10 med sannsynlighetsfordelingen gitt i tabellen nedenfor.

I det andre spillet er gevisten 2 kroner hvis du får null kron, gevisten er 7 kroner hvis du får én kron og gevisten er 12 kroner hvis du får to kron.

Z kan altså ha verdiene 2,7 og 12 med sannsynlighetsfordelingen gitt i tabellen nedenfor.

y	0	5	10	Sum	$SD(Y)$
$P(Y = y)$	0,25	0,50	0,25	1	
$y \cdot P(Y = y)$	0	2,50	2,50	$\mu = 5,00$	
$(y - \mu)^2 \cdot P(Y = y)$	6,25	0	6,25	$Var(Y) = 12,5$	$\sigma = 3,54$

x	2	7	12	Sum	$SD(Z)$
$P(Z = z)$	0,25	0,50	0,25	1,0	
$z \cdot P(Z = z)$	0	3,50	3,00	$\mu = 7,00$	
$(z - \mu)^2 \cdot P(Z = z)$	6,25	0	6,25	$Var(Y) = 12,5$	$\sigma = 3,54$

Tabellene viser også beregninger av forventningsverdi, varians og standardavvik til de stokastiske variablene Y og Z .

Vi lager et nytt spill som består i å spille begge spillene ovenfor og definerer samlet gevinst som en ny stokastisk variabel som vi kaller S .

Det betyr at $S = Y + Z$.

De to enkeltspillene som spill S består av, er uavhengige av hverandre. Det betyr at resultatet fra spill Y ikke påvirker resultatet i spill Z .

Verdimengden til S består av alle kombinasjoner av verdier fra Y og Z . Ved hjelp av addisjons- og produktsetningene for uavhengige hendelser kan vi regne ut sannsynlighetene for de enkelte verdiene i S .

$$P(S = 2) = P(Y = 0) \cdot P(Z = 2) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$$

$$\begin{aligned} P(S = 7) &= P(Y = 0) \cdot P(Z = 7) + P(Y = 5) \cdot P(Z = 2) \\ &= 0,25 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 12) &= P(Y = 0) \cdot P(Z = 12) + P(Y = 5) \cdot P(Z = 7) + P(Y = 10) \cdot P(Z = 2) \\ &= 0,25 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625 + 0,25 + 0,0625 = 0,375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 17) &= P(Y = 5) \cdot P(Z = 12) + P(Y = 10) \cdot P(Z = 7) \\ &= 0,5 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,25 \end{aligned}$$

$$P(S = 22) = P(Y = 10) \cdot P(Z = 12) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$$

Vi setter resultatene inn i en tabell og regner ut forventningsverdi og varians for S .



$P(S = s)$	2	7	12	17	22	Sum
$s \cdot P(S = s)$	0,125	1,750	4,50	4,25	1,375	$\mu = 12,0$
$(s - \mu)^2 \cdot P(S = s)$	6,25	6,25	0,00	6,25	6,25	$Var(S) = 25,0$

Denne tabellen sammen med tabellene for Y og Z viser at

$$E(S) = 12 = 5 + 7 = E(Y) + E(Z)$$

$$\text{Var}(S) = 25 = 12,5 + 12,5 = \text{var}(Y) + \text{Var}(Z)$$

Disse sammenhengene gjelder generelt. (Vi tar ikke med bevisene her.)

Det betyr også at når vi gjentar samme forsøk et bestemt antall ganger, er samlet forventningsverdi og varians lik forventningsverdi og varians til enkeltforsøket multiplisert med antall forsøk.

Forventningsverdi og varians for summer av stokastiske variabler

La X og Y være to uavhengige stokastiske variabler.

Da er

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

La X være en stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$

La S være summen av n uavhengige forsøk med X

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Da er

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$\text{Var}(S) = n \cdot \text{Var}(X)$$

Det betyr igjen at forventningsverdien og standadavviket til S er gitt ved

$$\mu_S = n \cdot \mu_x$$

$$\sigma_S = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma_x$$

Forventningsverdi og standardavvik i en binomisk fordeling

[Forventningsverdi og standardavvik i en binomisk fordeling \(118837\)](#)

En binomisk forsøksrekke består som vi tidligere har sett, av n delforsøk med samme sannsynlighet for «suksess».

Vi ser igjen på matematikkprøven med fire deloppgaver, hver med fire svaralternativer.



Vi lar den stokastiske variabelen Y være antall riktige svar på én oppgave. Y kan da ha verdien 0 eller 1. 0 svarer til at svaret er feil («fiasko»), og 1 at svaret er riktig («suksess»).

y	1	0	Sum
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$y \cdot P(Y = y)$	$1 \cdot \frac{1}{4}$	$0 \cdot \frac{3}{4}$	$\mu = E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
$(Y - \mu)^2 \cdot P(Y = y)$	$(1 - \frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{4}$	$(0 - \frac{1}{4})^2 \cdot \frac{3}{4}$	$\text{Var}(Y) = (\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}$

Den stokastiske variabelen som viser antall riktige svar når prøven består av 4 oppgaver, betegner vi som S_4 , summen av antall rette på 4 opgaver.

$$S_4 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

I forrige avsnitt så vi at

$$E(S_4) = 4 \cdot E(Y) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad \text{og} \quad \text{Var}(S_4) = 4 \cdot \text{Var}(Y) = 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Generelt binomisk forsøk

Vi skal nå se helt generelt på et binomisk forsøk med n delforsøk. Sannsynligheten for «suksess» er den samme i hvert delforsøk, og vi setter denne lik .

Tabellen nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen med forventningsverdi og varians for hvert enkelt delforsøk.

y	1	0	Sum
$P(Y = y)$	p	$1 - p$	
$y \cdot P(Y = y)$	$1 \cdot p$	$0 \cdot (1 - p)$	$E(Y) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$
$(Y - \mu)^2 \cdot P(Y = y)$	$(1 - p)^2 \cdot p$	$(0 - p)^2 \cdot (1 - p)$	$\text{Var}(Y) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = (1 - p)^2 \cdot p + p^2 \cdot (1 - p) = p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p)$

Vi lar nå den stokastiske variabelen stå for antall «suksess» når vi har n uavhengige delforsøk.

$$S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

Da er

$$\mu = E(S) = n \cdot E(Y) = n \cdot p \quad \text{og} \quad \text{Var}(S) = n \cdot \text{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Forventningsverdi og standardavvik i en binomisk fordeling

La X være antall «suksesser» i en binomisk forsøksrekke med n uavhengige delforsøk, hvert med sannsynlighet p for «suksess».

Forventningsverdien og standardavviket til X er da gitt ved

$$\mu = E(X) = np \quad \text{og} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Normalfordelingen

Normalfordelingen

[Normalfordelingen \(118878\)](#)

Forsvaret måler hvert år hvor høye rekruttene som skal inn til førstegangstjeneste, er. Resultatene fra disse målingene blir samlet i offentlige statistikker.

Den første tabellen er hentet fra Statistisk sentralbyrå. Rekruttene er inndelt i klasser basert på høyde, og tabellen viser prosentandel rekrutter i de ulike klassene.



Hvor høy er en vernepliktig rekrutt?

Tabellen viser også gjennomsnittshøyde for hvert år.

Gjennomsnittshøyden økte gjennom store deler av nittenhundretallet for så å stagnere.

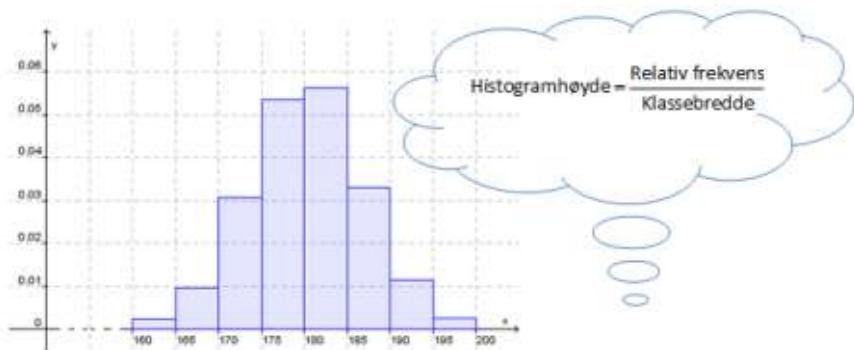
År	Gjennomsnittshøyde (cm)	Prosentvis fordeling av vernepliktige etter høyde							
		Under 165 cm	165-169 cm	170-174 cm	175-179 cm	180-184 cm	185-189 cm	190-194 cm	195 cm og over
1910	171	12,8	26	32,3	20,4	5,8	1,7	-	..
1920	171,4	12,9	24,4	32,6	21,3	7,7	1,7	-	..
1937	173,8	6,5	17,3	30,8	27,4	13,2	4,8	-	..
1952	176,2	3	10,5	25,4	30,4	21,5	7,4	1,6	0,2
1960	177,1	2,4	8,3	22,8	31,1	23,4	9,6	2,1	0,8
1970	178,7	1,4	5,6	17,2	28,9	29,2	13,5	3,7	0,5
1980	179,4	1	4,8	15,6	27,6	29,9	15	5,2	0,8
1990	179,7	1,1	4,7	15,1	27,1	28,9	16,2	5,7	1,3
2000	179,9	1,4	4,5	14,5	25,9	29,2	16,9	6,1	1,5
2008	179,7	1,2	4,9	15,4	26,8	28,1	16,5	5,7	1,3

Tabellen viser resultatene fra 2008. Vi har samlet alle som var lavere enn 165 cm i klassen [160, 165) > og alle som var 195 cm eller høyere i klassen [195, 200).

I tredje kolonne vises de relative frekvenser som per definisjon tilsvarer sannsynligheten for at en tilfeldig rekrutt har høyden i denne klassen.

Rekrutthøyder 2008			Klassebredde	Histogramhøyde
Høyde i cm	Prosentandel per klasse	Relativ frekvens		
[160,165)	1,2	0,012	5	0,0024
[165,170)	4,9	0,049	5	0,0098
[170,175)	15,4	0,154	5	0,0308
[175,180)	26,8	0,268	5	0,0536
[180,185)	28,2	0,282	5	0,0564
[185,190)	16,5	0,165	5	0,0330
[190,195)	5,7	0,057	5	0,0114
[195,200)	1,3	0,013	5	0,0026
Sum	100	1		

Vi vil framstille fordelingen i et histogram. Vi dividerer relativ frekvens med klassebredde for å finne histogramhøyde. Se fjerde kolonne i tabellen. **Da er arealet av hvert rektangel i histogrammet lik den relative frekvensen (sannsynligheten) for klassen, og det samlede arealet av rektanglene er lik 1.**



Vi trekker tilfeldig en rekrutt fra 2008 og lar den stokastiske variabelen X være høyden til rekrutten.

Vi lar alle rekrutter som tilhører samme klasse ha klassemidtpunktet som høyde. Da kan vi lage sannsynlighetsfordelingen til X og regne ut forventningsverdi og standardavvik som vist i tabellen.

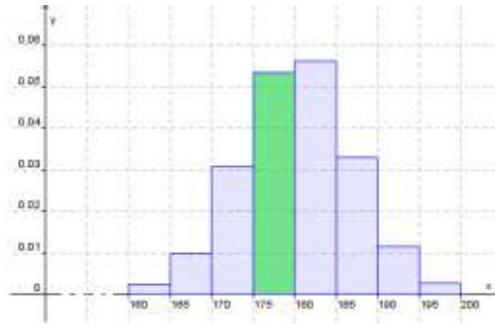
x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	$(x-\mu)^2 \cdot P(X=x)$
162,5	0,012	1,95	3,70
167,5	0,049	8,21	7,73
172,5	0,153	26,39	8,75
177,5	0,268	47,57	1,76
182,5	0,282	51,47	1,68
187,5	0,165	30,94	9,13
192,5	0,057	10,97	8,82
197,5	0,013	2,57	3,95
Sum		$\mu = 180,1$	$Var(X) = 45,5$
Standardavvik			$\sigma = 6,8$

Forventningsverdien er ikke den samme som gjennomsnittshøyden i tabellen fra Statistisk sentralbyrå Hva tror du er grunnen til det?

Arealene til rektanglene i histogrammet illustrerer sannsynlighetsfordelingen til X .

Arealet til det grønne rektanglet viser sannsynligheten for at rekrutten vi trekker har en høyde på 177,5 cm, altså at høyden er mellom 175 cm og 180 cm.

Det viser seg at høydene til rekruttene fordeler seg tilnærmet symmetrisk rundt forventningsverdien, og kurven som er best mulig tilpasset histogrammet, har en karakteristisk klokke- eller bjelleform.

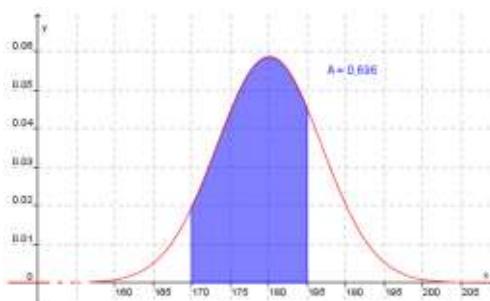
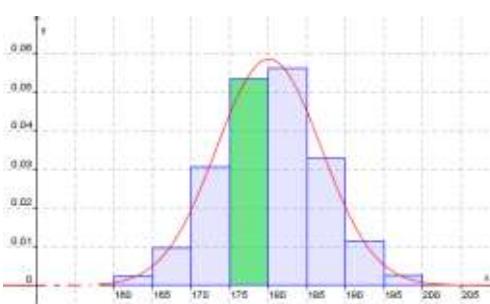


Hvis klassebredden endres til én centimeter, vil hvert rektangel i histogrammet deles i fem smale rektangler og det viser seg at arealene til rektanglene da tilnærmet overlapper arealet under kurven.

Sannsynlighetsfordelingen til X er tilnærmet representert ved arealet under «bjellekurven».

For eksempel er sannsynligheten for at en tilfeldig uttrukket rekrutt har høyde mellom 170 cm og 185 cm illustrert med det arealet som er markert med blått på figuren. Dvs.

$$P(170 \leq X \leq 180) = 0,696$$



Funksjonen med den karakteristiske bjelleformede grafen kalles **normalfordelingsfunksjonen**. Siden histogrammet som viser sannsynlighetsfordelingen til rekrutthøydene, omrent faller sammen med grafen til normalfordelingsfunksjonen, sier vi at **rekrutthøydene er normalfordelt**.

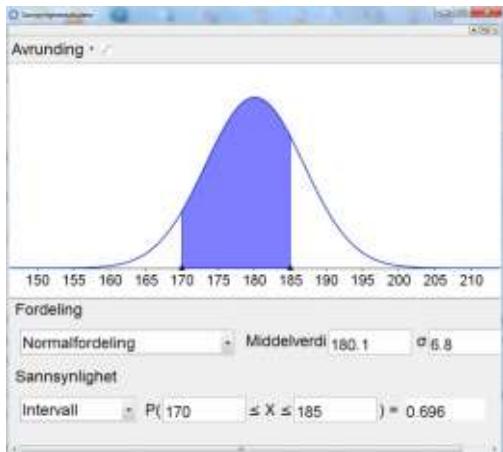
Det viser seg at mange andre størrelser også er normalfordelt. Et eksempel er karakterfordelingen ved en eksamen. Andre eksempler er vekt og størrelser av dyr.

Funksjonsuttrykket til
normalfordelingsfunksjonen er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dette uttrykket ser rimelig komplisert ut, men det trenger du ikke bekymre deg for.

De eneste størrelsene i uttrykket som varierer, er forventningsverdien og standardavviket, μ og σ . Det er kun disse størrelsene du må oppgi når du bruker et digitalt verktøy.



Du kan få fram grafen til normalfordelingsfunksjonen til en sannsynlighetsfordeling ved å bruke «Sannsynlighetskalkulator» i GeoGebra.

Du må da velge «Normalfordeling» og oppgi verdiene for μ og σ .

Du beregner sannsynligheter ved å fylle inn tall på siste linje i kalkulatoren.

Vi bruker kalkulatoren på våre normalfordelte rekrutthøyder, og kalkulatoren viser at sannsynligheten for at en tilfeldig uttrukket rekrutt har høyde mellom 170 cm og 185 cm er lik 0,696.

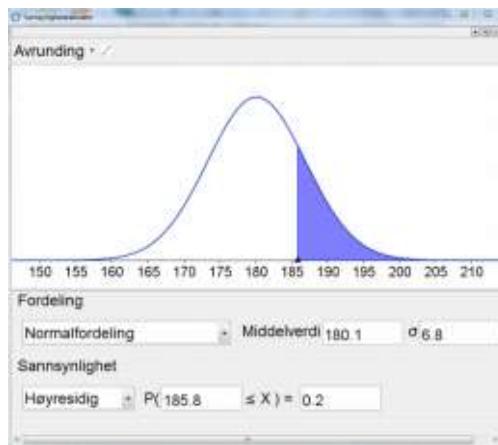
$$P(170 \leq X \leq 180) = 0,696$$

Kalkulatoren kan også brukes «motsatt vei».

Vi ønsker for eksempel å finne hvor høy en rekrutt må være for å være blant de 20 % som er høyest.

Da velger du «Høyresidig sannsynlighet» og skriver inn 0,2 som «svar». Sannsynlighetskalkulatoren gir at

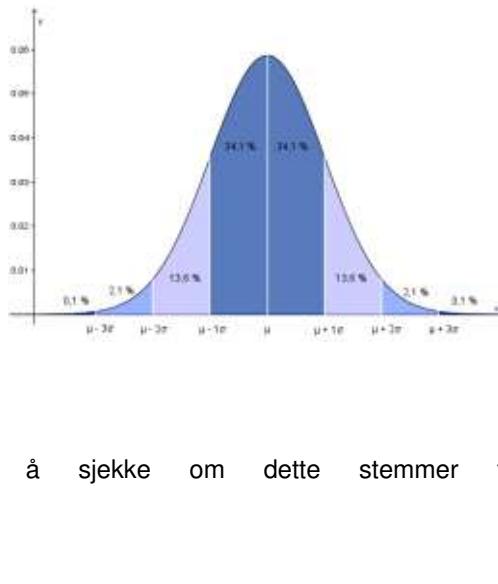
$P(185,8 \leq X) = 0,2$. Det betyr at en rekrutt som har en høyde på 185,8 cm eller mer er blant de 20 % høyeste rekruttene.



Det vises at normalfordelingskurven alltid er symmetrisk om $x = \mu$. Standardavviket definerer høyde og bredde på kurven. Men kurven har alltid den karakteristiske bjelleformen.

Det viser seg at alle normalfordelinger gir den samme sannsynligheten når vi går et visst antall standardavvik til hver side for forventningsverdien.

68,2 % av arealet ligger i området $\mu = \pm 1\sigma$.



95,4 % av arealet ligger i området $\mu = \pm 2\sigma$.

99,6 % av arealet ligger i området $\mu = \pm 3\sigma$.

Bruk sannsynlighetskalkulatoren til å sjekke om dette stemmer for rekrutthøydefordelingen.

Normalfordelingssetningen

La en X være en stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ .

Vi sier at X er normalfordelt hvis histogrammet til sannsynlighetsfordelingen til X omtrent faller sammen med normalfordelingsfunksjonen til X .

$$\text{Normalfordelingsfunksjonen er gitt ved } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sannsynligheten for at X ligger mellom to bestemte verdier, a og b , er gitt ved arealet under normalfordelingskurven til X fra a til b .

Sentralgrensesetningen

Sentralgrensesetningen

[Sentralgrensesetningen \(118953\)](#)

Nå du kaster én terning mange ganger, får du omtrent like mange enere som toere som treere som firere som femmere som seksere. Sannsynligheten er spredt jevnt utover på alle mulighetene, og vi har ingen normalfordeling av sannsynligheten.



Et annet forsøk du kan gjøre, er å kaste 100 terninger på en gang og summere opp antall øyne. Du kan da i teorien få alle verdier fra og med 100 til og med 600.

På nettsidene til NDLA kan du finne simuleringer i sannsynlighet hvor du kan kaste 100 terninger av gangen. [Simuleringer i GeoGebra](#)

Du vil oppdage at du så å si aldri får summer som ikke ligger på 300-tallet. Det viser seg at summene er normalfordelt med forventningsverdi lik 350 og standardavvik ca. lik 17.

Dette er en viktig oppdagelse i sannsynlighetslæren. Det gjelder alltid at **summen av et stort antall uavhengige stokastiske variabler er tilnærmet normalfordelt**. Dette gjelder uavhengig av hvilken fordeling disse variablene hadde i utgangspunktet.

Denne oppdagelsen har fått betegnelsen **sentralgrensesetningen**. Det betyr at mange fenomener i naturen kan beskrives ved en normalfordeling.

Sentralgrensesetningen

La X være en stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ .

La $\sum_n X$ være summen av n uavhengige forsøk med X .

For store verdier av n er $\sum_n X$ tilnærmet normalfordelt.

Forventningsverdien til $\sum_n X$ er $n \cdot \mu$ og standardavviket er $\sqrt{n} \cdot \sigma$

Sentralgrensesetningen sier altså at selv om antall øyne ved kast av én terning ikke er normalfordelt, så er summen av antall øyne ved kast av hundre terninger normalfordelt.

Kast av terning 100 ganger

[Kast av terning 100 ganger \(119032\)](#)

Vi skal også se en gang til på den stokastiske variabelen X som antall øyne ved kast av en terning.

I tabellen nedenfor har vi regnet ut forventningsverdien og variansen til X .



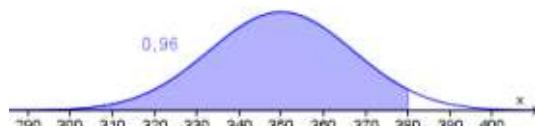
x	1	2	3	4	5	6	Sum
$P(X = x)$	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	1,000
$x \cdot P(X = x)$	0,167	0,333	0,500	0,667	0,833	1,000	3,500
$(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$	1,042	0,375	0,042	0,042	0,375	1,042	2,917

La S være summen av antall øyne ved kast av hundre terninger.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

Sentralgrensesetningen sier at da er S normalfordelt med forventningsverdi og standardavvik

$$\begin{aligned}\mu &= 100 \cdot 3,5 = 350 \\ \sigma &= \sqrt{100} \cdot \sqrt{2,917} = \sqrt{291,7} \approx 17\end{aligned}$$



Areal under grafen viser for eksempel at $P(S \leq 380) = 0,96 = 96\%$.

Det betyr at sannsynligheten for at summen av antall øyne er lik eller mindre enn 380 når du kaster en terning 100 ganger, er 96 %.

Du kan simulere terningkast i GeoGebra og se om du får praksis til å stemme med teorien.

Simuleringer i GeoGebra

Simulering i GeoGebra

Vedlegg i GeoGebra åpnes best i nettlesaren Firefox.

Terningkast



100 kast med terning / fil
<http://ndla.no/nb/node/27093>



1 000 kast med terning / fil

<http://ndla.no/nb/node/27095>



10 000 kast med terning / fil

<http://ndla.no/nb/node/27096>

Myntkast



100 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27097>



1 000 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27098>



10 000 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27099>

Kast av to mynter hundre ganger

[Kast av to mynter hundre ganger \(118998\)](#)

Vi ser igjen på den stokastiske variabelen X som antall kron ved kast av to tikroner.



I tabellen nedenfor har vi regnet ut forventningsverdien og variansen til X .

x	0	1	2	Sum
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25	1
$x \cdot P(X = x)$	0	0,50	0,50	$\mu = 1,00$
$(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$	0,25	0	0,25	$Var(X) = 0,50$

La S være antall kron ved kast av to tikroner hundre ganger.

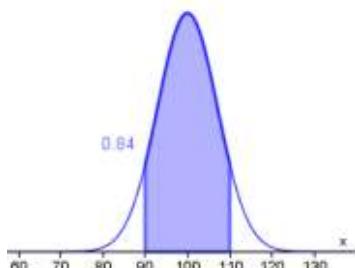
Sentralgrensesetningen sier at da er S normalfordelt med forventningsverdi og standardavvik

$$\mu = 100 \cdot 1,00 = 100$$

$$\sigma = \sqrt{100} \cdot \sqrt{0,50} = \sqrt{50}.$$

Areal under grafen viser for eksempel at

$$P(90 < S < 110) = 0,84 = 84\%.$$



Sannsynligheten for at du får mellom 90 og 110 kron når du kaster to tikroner 100 ganger, er 84 %.

Du kan simulere myntkast i GeoGebra. Se om du får praksis til å stemme med teorien.

Simuleringer i GeoGebra

Simulering i GeoGebra

Vedlegg i GeoGebra åpnes best i nettlesaren Firefox.

Terningkast



100 kast med terning / fil

<http://ndla.no/nb/node/27093>



1 000 kast med terning / fil

<http://ndla.no/nb/node/27095>



10 000 kast med terning / fil

<http://ndla.no/nb/node/27096>

Myntkast



100 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27097>



1 000 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27098>



10 000 kast med mynt / fil

<http://ndla.no/nb/node/27099>

Binomisk forsøk

[Binomisk forsøk \(119048\)](#)

Et binomisk forsøk består som kjent en serie med enkeltforsøk.

Et eksempel er en flervalgsprøve med fire uavhengige oppgaver. Hver oppgave har fire svaralternativer, og oppgaven skal besvares ved å krysse av for riktig svaralternativ.



Vi antar at en elev ikke er forberedt og tar prøven ved å gjette.

Vi lar den stokastiske variabelen X være antall riktige svar. Vi har da en binomisk forsøksrekke med $n = 4$ og $p = 0,25$.

Den stokastiske variabelen X er nå nettopp lik summen av antall rette på hver av enkeltforsøkene, og etter sentralgrensesetningen er X normalfordelt for store verdier av n .

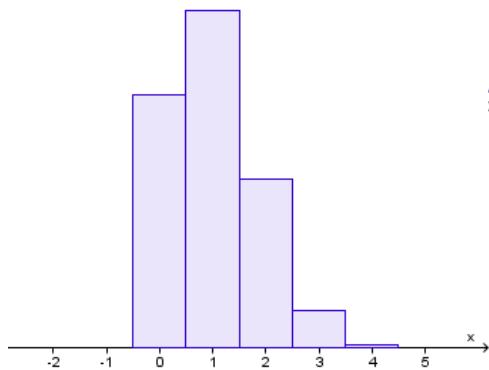
Vi kan se om dette er tilfelle.

Vi starter altså med $n = 4$.

Tabellen nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen for X .

k	$P(X = k)$
0	0,316
1	0,422
2	0,211
3	0,047
4	0,004

Vi tegner histogrammet til denne sannsynlighetsfordelingen.

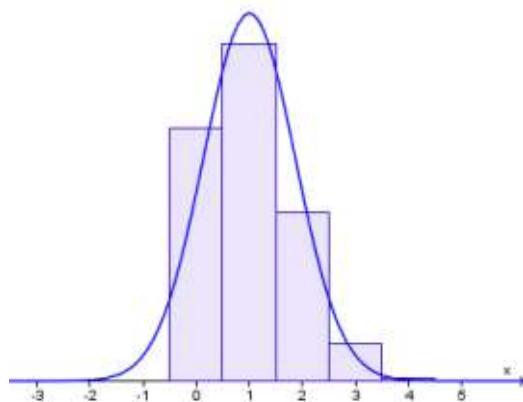


Vi regner ut forventningsverdi og standardavvik til den binomisk fordelingen

$$\mu = np = 4 \cdot 0,25 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4 \cdot 0,25(1-0,25)} = \sqrt{0,75}$$

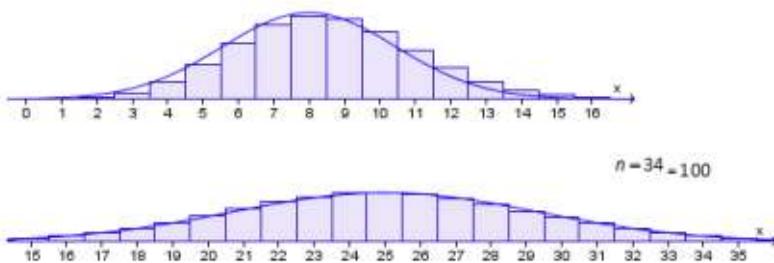
Vi tegner så normalfordelingsfunksjonen for X sammen med histogrammet over sannsynlighetsfordelingene.



Vi kan ikke si at dette histogrammet faller sammen med grafen til normalfordelingsfunksjonen. Det betyr at X ikke er normalfordelt.

Vi øker så antall oppgaver på prøven, først til 34 og så til 100.

Vi sammenlikner histogrammene til sannsynlighetsfordelingene med kurvene til normalfordelingsfunksjonene.



Vi ser at for økende verdier av n , blir sannsynlighetsfordelingene og normalfordelingsfunksjonene mer og mer overlappende.

For store verdier av n kan vi si at X er tilnærmet normalfordelt. Erfaring viser at hvis både $n \cdot p > 10$ og $n \cdot (1 - p) > 10$, kan vi tilnærme X med en normalfordeling.

La X være antall suksesser i en binomisk forsøksrekke med uavhengige delforsøk, hvert med sannsynlighet p for «sukcess».

Da er X tilnærmet normalfordelt hvis både $n \cdot p > 10$ og $n \cdot (1 - p) > 10$.

I normalfordelingen er

$$\mu = np \text{ og } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Summen av rekrutthøyder

Vi ser igjen på den stokastiske variabelen X som høyden til en tilfeldig rekrutt fra år 2008.

I tabellen har vi regnet ut forventningsverdien og standardavviket til X .

x	$P(X = x)$	$x \cdot P(X = x)$	$(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$
162,5	0,012	1,95	3,70
167,5	0,049	8,21	7,73
172,5	0,153	26,39	8,75
177,5	0,268	47,57	1,76
182,5	0,282	51,47	1,68
187,5	0,165	30,94	9,13
192,5	0,057	10,57	8,82
197,5	0,013	2,57	3,95
Sum		$\mu = 180,1$	$Var(X) = 45,5$
Standardavvik			$\sigma = 6,8$

La S være summen av høydene til 100 tilfeldig uttrukne rekrutter.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

Sentralgrensesetningen sier at da er S normalfordelt med forventningsverdi og standardavvik

$$\mu = 100 \cdot 180,1 = 18010$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 6,8} = 86$$

Hypotesetesting

Hypotesetesting ved binomisk fordeling

[Hypotesetesting ved binomisk fordeling \(119136\)](#)

Helene har mistanke om at en av terningenene som brukes i Yatzy er skadet slik at den gir sekser for ofte.



Helene har lært seg en framgangsmåte, en metode, for å teste ut hvor sannsynlig det er at terningen er skadet.

Metoden heter hypotesetesting og foregår over flere trinn.

- **Trinn 1**

Helene setter opp to hypoteser.

Den ene er nullhypotesen og betegnes med H_0 . Denne hypotesen sier at situasjonen er uendret, terningen er i orden og gir ikke for mange seksere.

Den andre er den alternative hypotesen og betegnes med H_1 . Denne sier at situasjonen er endret og at terningen gir for mange seksere.

Helene setter altså opp hypotesene

H_0 : Sannsynligheten for å få en sekser ved å kaste terningen er $\frac{1}{6}$, dvs. $p = \frac{1}{6}$

H_1 : Sannsynligheten for å få en sekser ved å kaste terningen er større enn $\frac{1}{6}$, dvs. $p > \frac{1}{6}$

- **Trinn 2**

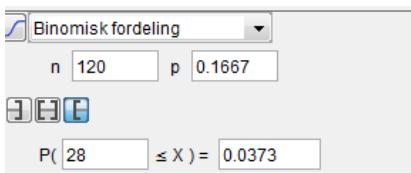
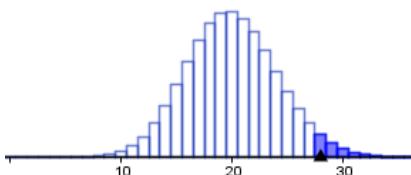
Helene må nå teste terningen. Hun foretar en stikkprøve. Hun kaster terningen 120 ganger (et stort antall ganger). Da får hun sekser 28 ganger.

Spørsmålet er nå om dette var et usannsynlig høyt antall.

- **Trinn 3**

Helene antar nå at nullhypotesen gjelder.

Å kaste terningen 120 ganger er da en binomisk forsøksrekke og hun kan regne ut sannsynligheten for tilfeldig å få så mye som 28 seksere forutsatt at terningen er i orden. Hun bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



Den viser at det er 3,7 % sjanse for at Helene helt tilfeldig fikk 28 seksere forutsatt at terningen var i orden.

Denne sannsynligheten kalles for testens **P-verdi**.

Testens **P-verdi** er altså lik 0,037 eller 3,7 %

- **Trinn 4**

Nå må Helene bestemme seg for om testresultatet gir grunnlag for å konkludere med at terningen er i orden, altså om nullhypotesen fortsatt gjelder, eller om testresultatet gir grunnlag for å konkludere med at terningen er skadet, altså at det er den alternative hypotesen som gjelder.

Det er klart at jo mindre **P-verdien** er, jo mindre sannsynlig er det at nullhypotesen gjelder. Helene må bestemme seg for en grense for hvor lav **P-verdi** hun kan godta.

Denne grenseverdien kalles for **signifikansnivået**.

Helene setter **signifikansnivået** til 5 %.

Siden **P-verdien** er mindre enn **signifikansnivået**, forlater Helene nullhypotesen til fordel for den alternative hypotesen og

konkluderer med at terningen viser for mange seksere.

Helene er klar over at konklusjonen kan være feil. Det er tross at 3,7 % sjanse for terningen er helt i orden og at det var helt tilfeldig at det ble så mange seksere i testen.

Noen vanlige signifikansnivåer er 1 %, 5 % og 10 %.

Hvis terningen ble brukt i et pengespill og Helene hadde grunn til å tro at en annen spiller hadde fusket ved å endre på terningen, så hadde Helene valgt et lavere signifikansnivå.

Med et signifikansnivå på 1 % ville hun ikke forkastet nullhypotesen. Du skal være rimelig sikker i din sak før du beskylder noen for å fuske.

Hypotesetesting med normalfordeling

[Hypotesetesting med normalfordeling \(119181\)](#)

Gjennomsnittshøyde for jenter

June har på nettsidene til Statistisk sentralbyrå funnet at egenrapporterte høyder for sesjonspliktige jenter i Norge i 2013 var 167,1 cm.

Klassen til June har mistanke om at 18 år gamle jenter fra deres fylke er høyere enn dette.

De vil bruke hypotesetesting for å undersøke om dette tallet for gjennomsnittshøyden er for lavt i deres fylke.

De velger ut 100 jenter på 18 år fra deres hjemfylke helt tilfeldig og finner at gjennomsnittshøyden til jentene i denne stikkprøven er 168,1 cm. Det vil si at samlet høyde i stikkprøven er **168,1 · 100 cm = 16810 cm**.

De velger som nullhypotese at 18 år gamle jenter i deres fylke har en gjennomsnittshøyde på 167,1 cm.

$H_0: \mu = 167,1$. De forutsetter et standardavvik på 6

Som alternativ hypotese sier de at jentene i deres hjemfylke er høyere

$H_1: \mu > 167,1$

De velger et signifikansnivå på 2,5 %.

De antar at nullhypotesen er riktig.

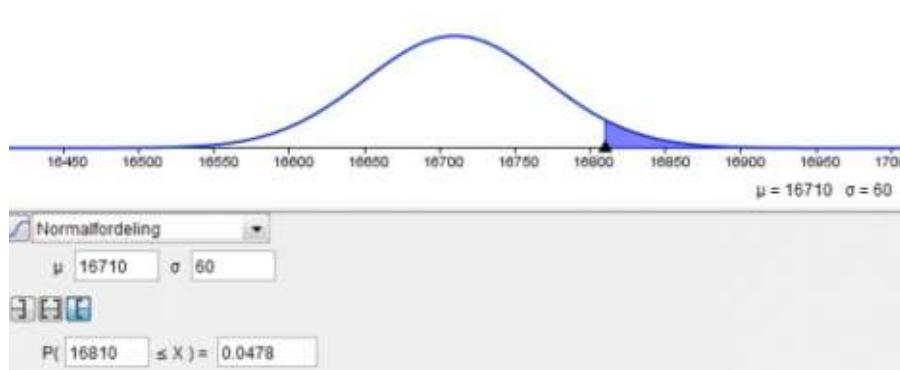
De lar X være høyden til en tilfeldig 18 år gammel norsk jente, og de lar S være summen av høydene til en stikkprøve med 100 jenter.

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

I følge sentralgrensesetningen er S normalfordelt med $\mu = 167,1 \cdot 100 = 16710$ og $\sigma = 6 \cdot \sqrt{100} = 60$.

Hvor sannsynlig er det at samlet høyde i en stikkprøve med 100 jenter skal være lik eller større enn 16810 cm når vi forutsetter at denne sumhøyden er normalfordelt med forventningsverdi 16710 cm og standardavvik 60 cm?

June og vennene bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra for å finne det ut.



Normalfordelingsfunksjonen gir P - verdien

$$P(S \geq 16810) = 0,0478 \approx 4,8\%$$

Det er 4,8 % sjanse for at det rent tilfeldig var en slik høy gjennomsnittshøyde i denne stikkprøven samtidig som at nullhypotesen gjelder.

En P -verdi på 4,8 % er større enn signifikansnivået og gir ikke med det valgte signifikansnivå grunnlag for å forkaste nullhypotesen.

June og vennene har ikke grunnlag for å påstå at jentene i deres hjemfylke i gjennomsnitt er høyere enn 167,1 cm.

Standardisert normalfordeling

Standardisert normalfordeling

[Standardisert normalfordeling \(118927\)](#)

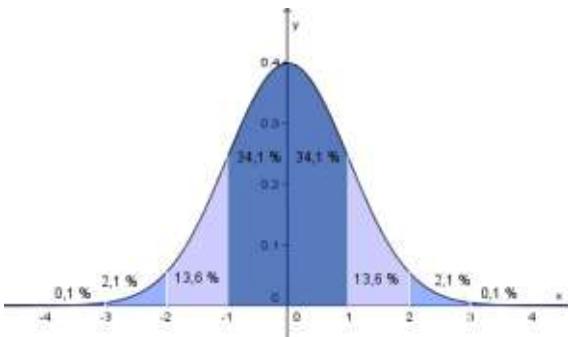
Når vi skal beregne sannsynligheter knyttet til normalfordelingen på del 1 til eksamen, må vi bruke den standardiserte normalfordelingen.

En **standardisert normalfordeling** er en normalfordeling med forventningsverdi lik 0 og standardavvik lik 1.

Lå X være en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ .

Vi innfører en ny stokastisk variabel Z .

Ved å lå verdiene i Z være verdiene til X fratrukket forventningsverdien, får vi



normalfordelingskurven til Z til å ligge symmetrisk om y -aksen. I tillegg dividerer vi med standardavviket for at standardavviket til Z skal være lik 1.

Den stokastiske variabelen Z defineres ved

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

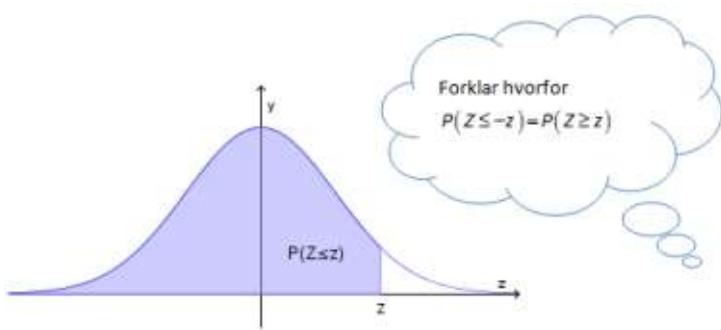
Det kan da vises at Z har forventningsverdi $\mu = 0$ og standardavvik $\sigma = 1$.

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \mu + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0$$

og

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \text{Var}(X) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \cdot \sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma_z = \sqrt{1} = 1$$

Vi kan finne $P(Z \leq z)$ som arealet markert med blått under grafen til g .



Følgende tabell (blir oppgitt på del 1-eksamen) viser ulike sannsynligheter $P(Z \leq z)$ i denne fordelingen. Du trenger bare positive verdier for z på grunn av symmetrien, $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87285	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900

For en vilkårlig annen normalfordelt stokastisk variabel, X , kan vi regne en x - verdi om til en z - verdi og finne sannsynligheter i X - fordelingen ved at $P(Z \leq x) = P(Z \leq z)$.

Sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra regnet ut at sannsynligheten for at en rekrutt hadde en høyde mellom 170 cm og 185 cm var 0,696, $P(170 \leq X \leq 185) = 0,696$.

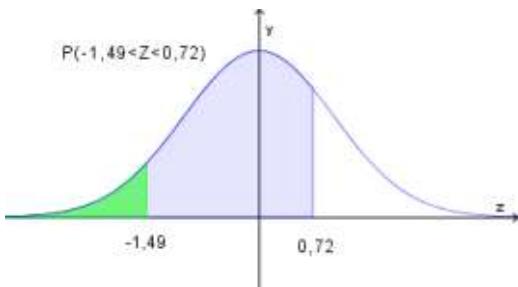
Dette kan vi også finne ved å bruke standard normalfordeling. Vi regner først x -verdiene om til z - verdier.

$$x = 185 \\ z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{185 - 180,1}{6,8} = 0,72$$

$$x = 170 \\ z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{170 - 180,1}{6,8} = -1,49$$

Det betyr at

$$P(170 < X < 185) = P(-1,49 < Z < 0,72)$$



$$P(-1,49 \leq Z \leq 0,72) = P(Z \leq 0,72) - P(Z \leq -1,49)$$

$P(Z \leq 0,72)$ og $P(Z \leq -1,49)$ finner vi i tabellen ovenfor.

Tabellen gir at $P(Z \leq 0,72) \approx 0,76424$ som vist nedenfor.

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673

For å finne $P(Z \leq -1,49)$, må vi også bruke «symmetrien» i normalfordelingen og at samlet sannsynlighet er lik 1

$$P(Z \leq -1,49) = P(Z \geq 1,49) = 1 - P(Z \leq 1,49) = 1 - 0,93189 \approx 0,06811$$

Da har vi at

$$P(170 \leq X \leq 185) = P(-1,49 \leq Z \leq 0,72) = P(Z \leq 0,72) - P(Z \leq -1,49) \approx 0,76424 - 0,06811 \approx 0,69613$$

Dette er det samme som sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra regnet ut, da med 3 desimalers nøyaktighet.

Vi kan også gå motsatt vei. Vi kan for eksempel finne hvor høy en rekrutt må være for å være blant de 30 % som er høyest.

I normalfordelingstabellen finner vi $P(Z \leq z)$. Vi må da finne hvilken z -verdi som tilsvarer en sannsynlighet på 70 % eller 0,7000.

Vi finner ikke sannsynligheten 0,7000 i tabellen, men vi finner at når $z = 0,52$, er sannsynligheten 0,6985, og når $z = 0,53$, er sannsynligheten lik 0,7019. Vi bruker verdien

$$z = 0,525.$$

Det betyr at

$$\begin{aligned} \frac{x-\mu}{\sigma} &= 0,525 \\ \frac{x-180,1}{6,8} &= 0,525 \\ x &= 0,525 \cdot 6,8 + 180,1 \\ x &= 183,7 \end{aligned}$$

Vi kan altså regne med at 30 % av de vernepliktige er høyere enn 183,7 cm.

Veiledninger og verktøy

Forslag til årsplan

[Forslag til årsplan \(103012\)](#)



Forslag til årsplan for faget Matematikk S2 skoleåret 2012-2013. Ligger vedlagt i ulike filformat slik at du kan endre og redigere.



Forslag til årsplan / fil
<http://ndla.no/nb/node/103010>

File failed to load: https://cdn.mathjax.org/mathjax/latest/extensions/MathZoom.js