Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

a)

Es sollen das Gradientenverfahren und das konjugierte Gradientenverfahren implementiert und mithilfe der Rosenbrock-Funktion

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

getestet werden. Dabei ist der Startpunkt $\vec{x}_0 = (-1, -1)^{\mathrm{T}}$ und das analytische Minimum beträgt $\vec{x}_{\text{analytisch}} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Das Gradientenverfahren konvergiert nur sehr langsam und erreicht die gewünschte Genauigkeit von $|g| = 0{,}05$ erst nach der 27 060 837-ten Iteration. Allerdings ist die Abweichung vom tatsächlichen Minimum mit

$$\varepsilon = ||\vec{x}_{\mathrm{n}} - \vec{x}_{\text{analytisch}}|| = 0{,}000\,165\,825$$

nur sehr gering. In Abbildung 1 sind der Contour-Plot und der Fehler des Gradientenverfahrens aufgetragen. Das konjugierte Gradientenverfahren fängt bei den letzten drei

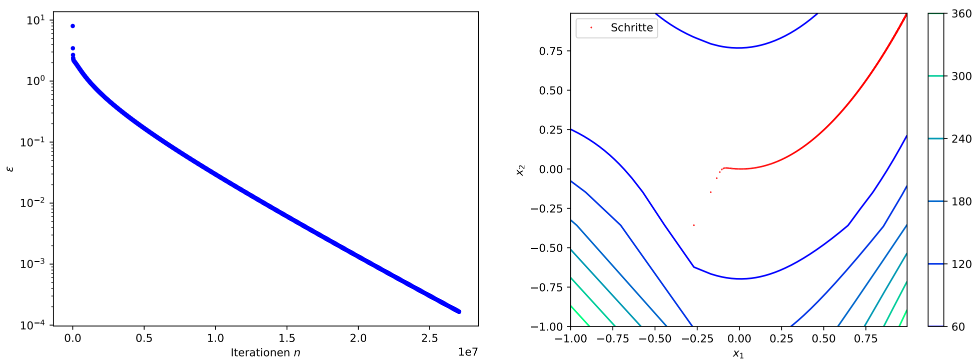

Abbildung 1: Fehler- und Contour-Plot beim Gradientenverfahren.

Iterationen an zu divergieren und wir haben den Fehler leider nicht gefunden. Als Minimum ergibt sich hier nach der 1333-ten Iteration $\vec{x} = (2{,}6232 \cdot 10^{14}, 4{,}017 \cdot 10^{13})^{\mathrm{T}}$. In Aufgabenteil b) stimmen die Ergebnisse des konjugierten Gradientenverfahrens aber mit denen des gewöhnlichen Gradientenverfahrens überein. In Abbildung 2 sind der Contour-Plot und der Fehler des konjugierten Gradientenverfahrens ohne die letzten drei Werte dargestellt. Da allerdings bei der Berechnung etwas schief läuft sind diese nur bedingt aussagekräftig.

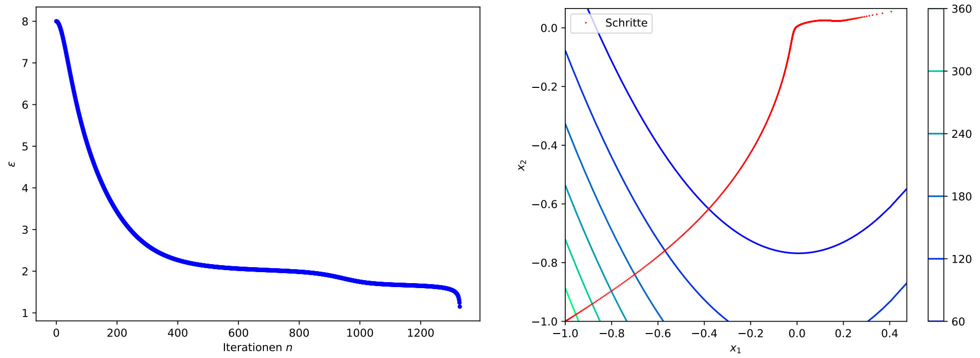

Abbildung 2: Fehler- und Contour-Plot beim konjugierten Gradientenverfahren.

b)

Nun sollte das konjugierte Gradientenverfahren auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{e^{-10(x_1 x_2 - 3)^2}}{x_1^2 + x_2^2}}$$

angewendet werden. Dabei werden die Ergebnisse für die drei Startpunkte $\vec{x}_0 \in \{(1{,}5; 2{,}3)^{\mathrm{T}}, (-1{,}7; -1{,}9)^{\mathrm{T}}, (0{,}5; 0{,}6)^{\mathrm{T}}\}$ ausgewertet. Für die dritte Startbedingung funktioniert das Verfahren nicht, da der Gradient an dieser Stelle schon so klein ist, dass er auf Null gerundet wird. Beim ersten Startwert wird nach 4269 Iterationen das Minimum $(1{,}357\,28; 2{,}212\,21)^{\mathrm{T}}$ erreicht. Beim zweiten Startwert ergibt sich nach 3823 Iterationen $(-1{,}632\,04; -1{,}8397)^{\mathrm{T}}$. In Abbildung 3 sind die Contour-Plots für die ersten beiden Startwerte dargestellt. Es können möglicherweise auch noch andere lokale Minima

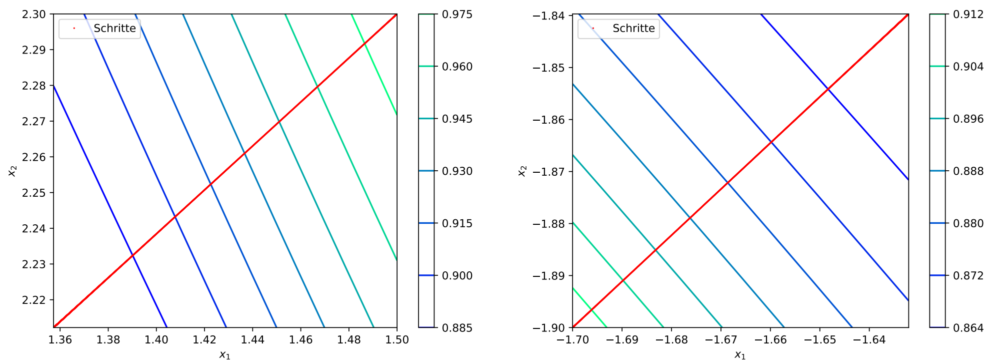

Abbildung 3: Contour-Plot für den ersten (links) und zweiten Startwert (rechts).

existieren.