Übungsblatt 2 – Cerberus

Aufgabe 1

Im Folgenden soll das 512×512 Bild aus Abbildung 1a mithilfe der Singulärwertzerlegung

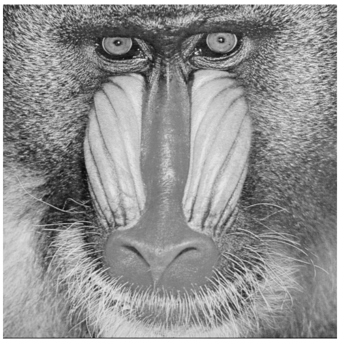
$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}$$

und der Rang-k-Approximation komprimiert werden. Die Rekonstruktion und Approximation erfolgt mithilfe von

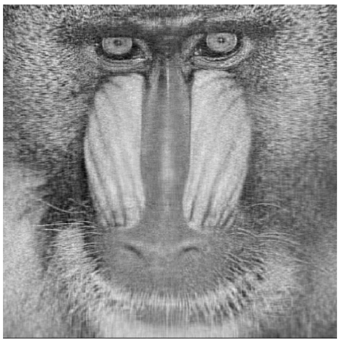
$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^{\mathrm{T}} \quad \text{mit } k \leq 512.$$

$\sigma_i \mathrel{\hat{=}}$ i-tes Diagonalelement von $\mathbf{\Sigma}$, $\vec{u}_i \mathrel{\hat{=}}$ i-ter Spaltenvektor von $\mathbf{U}$, $\vec{v}_i \mathrel{\hat{=}}$ i-iter Spaltenvektor von $\mathbf{V}$.

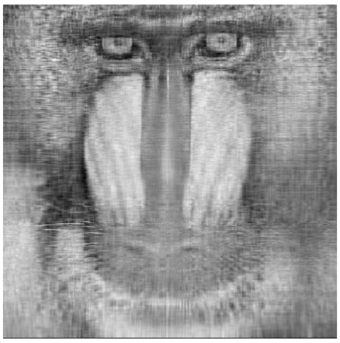
Die approximierten Bilder für $k = 10, 20, 50$ befinden sich in Abbildung 1. Die SVD



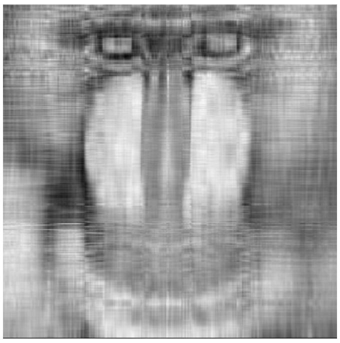
(a) Originalbild.



(b) $k = 50$.



(c) $k = 20$.



(d) $k = 10$.

Abbildung 1: Approximation von Abbildung 1a für verschiedene k.

scheint sich gut zur Kompression zu eignen, da sich das Bild, wie in Abbildung 1b zu sehen, mit nur knapp 10 % der Singulärwerte schon sehr gut rekonstruieren lässt. Selbst bei einer so extremen Kompression wie in Abbildung 1d ist das Motiv noch ganz grob zu erkennen.

Aufgabe 2

Ein Profiler wird verwendet um die Geschwindigkeit verschiedener Abschnitte einer LU-Zerlegung zu überprüfen. Ein Timer überprüft die benötigte Zeit

1. eine $N \times N$-Matrix M und einen Nd-Vektor b mit zufälligen Einträgen zu erzeugen
2. eine LU-Zerlegung durchzuführen
3. das Problem $Mx = b$ zu lösen

Die Zeit t, die für die einzelnen Schritte benötigt wird, wird in Abhängigkeit von der Matrixgröße N doppelt-logarithmisch aufgetragen. Die LU-Zerlegung mithilfe der `eigen`-Library unterstützt Multithreading und kann somit abhängig vom verwendeten Prozessor beschleunigt werden (in diesem Fall bis zu 15%). Generell zeigt sich, dass die benötigte Zeit von der verwendeten CPU abhängt, jedoch lässt sich sowohl bei logarithmisch (3) wie auch linear (4) ansteigender Matrizengröße N ein Trend erkennen.
Bei großen Problemen ($N \gtrsim 200$) lässt sich die benötigte Zeit für jeden der drei Teilschritte in Abb.2 als $\mathcal{O}(N^3)$ extrapolieren.

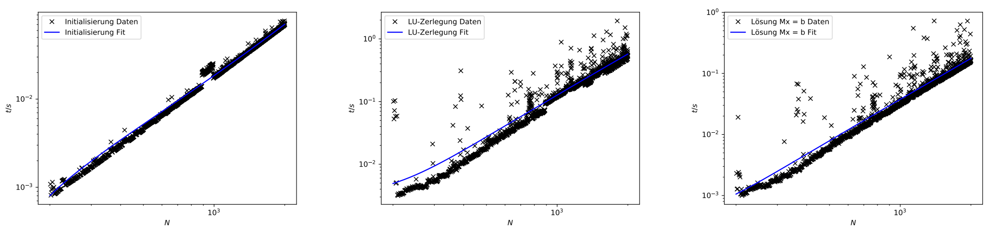


Abbildung 2: Die Daten der drei verschiedenen Teilschritte gefittet an ein Polynom 3. Grades für große N

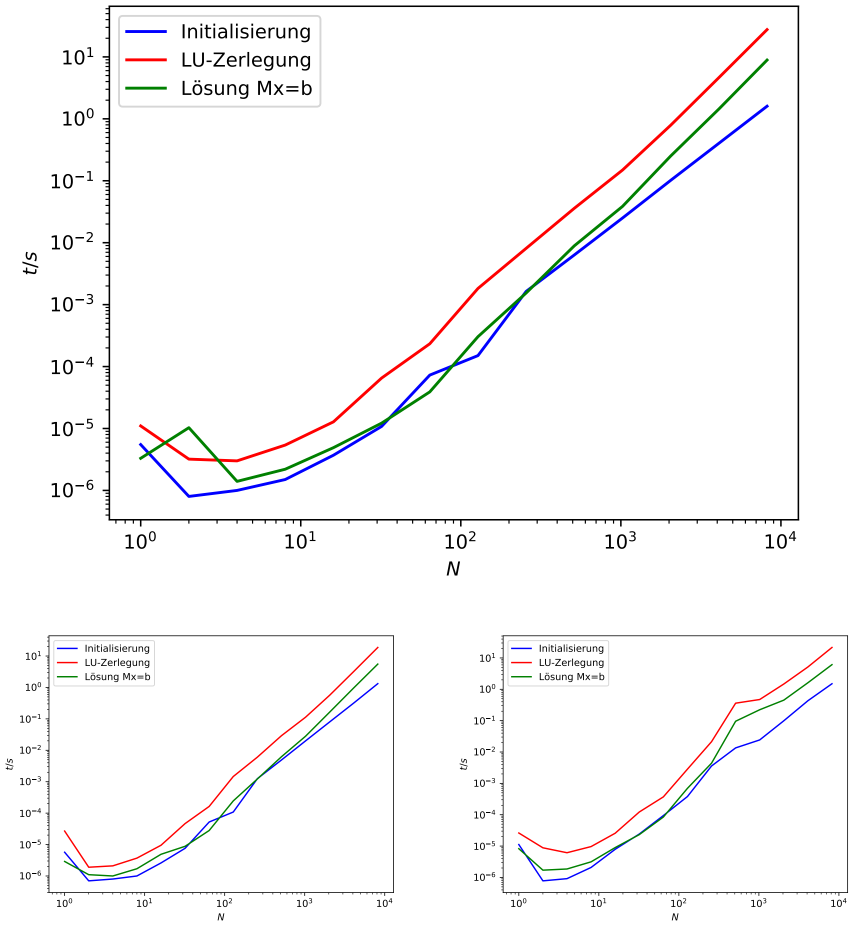


Abbildung 3: Die benötigte Zeit für Operationen bei logarithmisch ansteigendem N mit verschiedenen CPUs.

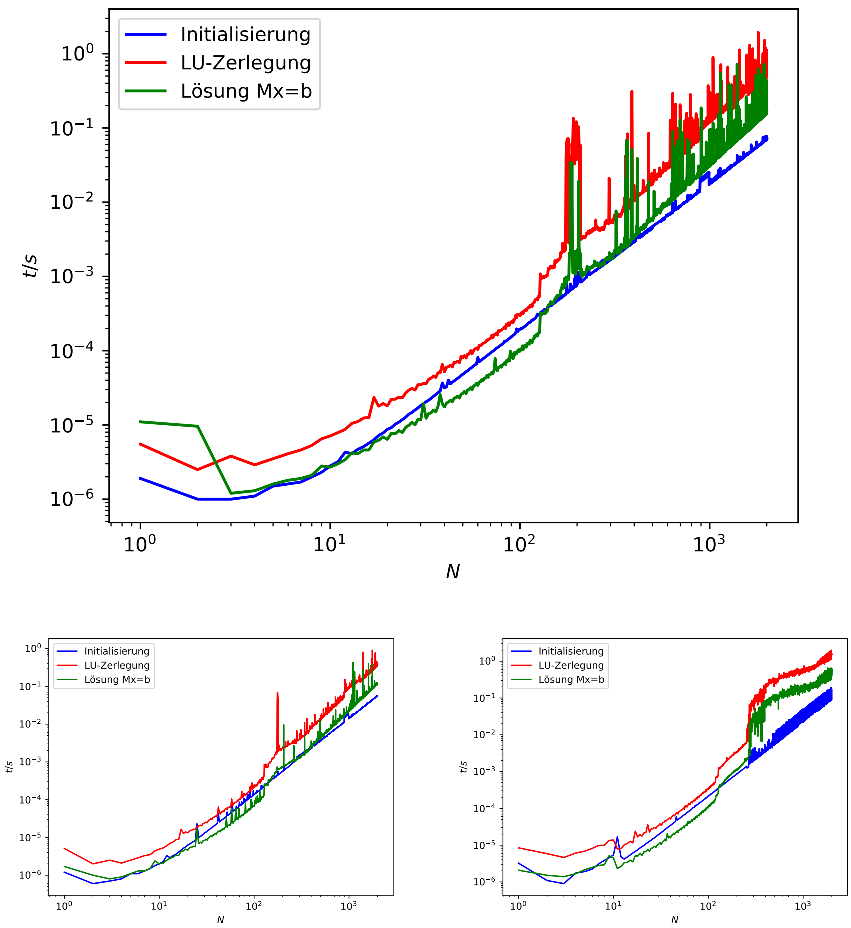


Abbildung 4: Die benötigte Zeit für Operationen bei linear ansteigendem N mit verschiedenen CPUs.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wurde ein Profiler genutzt, um die Laufzeiten verschiedener Algorithmen zum Lösen eines linearen Gleichungssystems der Form

$$Mx = b \tag{1}$$

($M \hat{=}$Zufällige N x N Matrix, $x, b \hat{=}$Vektor mit Dimension N)

zu bestimmen. Dabei wird N für alle Methoden linear in dem Intervall $[1, 1000]$ variiert. Die Laufzeiten werden für die folgenden Methoden verglichen:

1. Multiplikation von M^{-1} auf der linken Seite
2. Partielle LU-Zerlegung
3. Vollständige LU-Zerlegung.

Wie in Abbildung 5 zu sehen ist, wird für die partielle LU-Zerlegung am wenigsten Zeit benötigt. Es sei zusätzlich erwähnt, dass die partielle LU-Zerlegung zusätzlich vom Multithreading profitiert [1], was ebenfalls Laufzeit sparen kann.

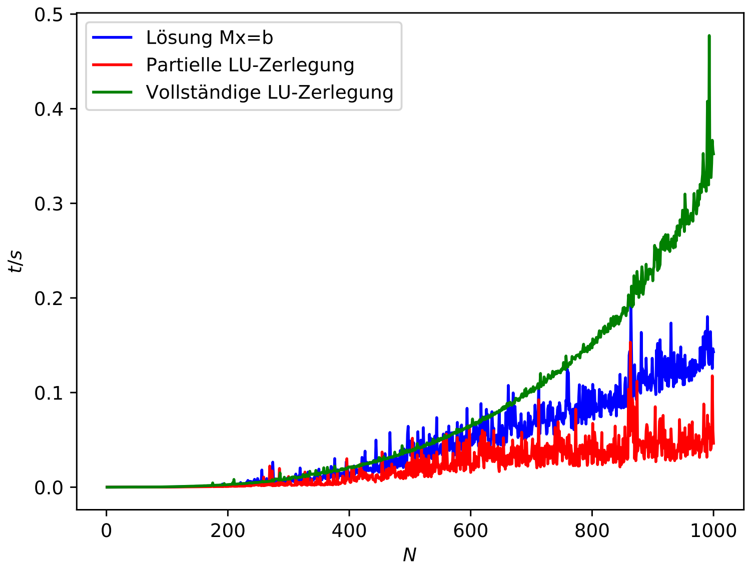


Abbildung 5: Laufzeit der verschiedenen Methoden.

Anschließend wurde verglichen, ob auch alle Algorithmen das gleiche Ergebnis liefern. Als Maß dafür wurde hier die ßquared Euclidean distance"gewählt, die die zwischen der partiellen (vollstädnigen) LU-Zerlegung und der Methode 1 berechnet wurde. Wie in in

[1] https://eigen.tuxfamily.org/dox/TopicMultiThreading.html

Abbildung zu sehen ist, sind die Abstände für die partielle LU-Zerlegung für nahezu alle N kleiner.

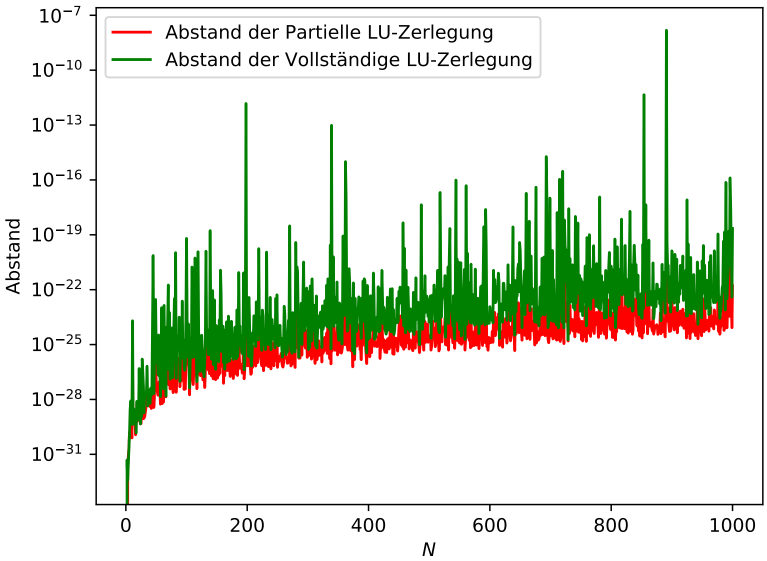


Abbildung 6: Abweichung der Partiellen und vollständigen LU-Zerlegung zu Methode 1.

Insgesamt ist also die partielle LU-Zerlegung zu bevorzugen, da die Laufzeit – bis auf wenige Ausnahmen – für alle N im untersuchten Intervall am geringsten ist. Ebenso scheinen die Ergebnisse genauer als die der vollständigen LU-Zerlegung zu sein.