Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

1)

Eine direkte Rechnung über die Funktion

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} \Omega_N^{j,l} f_l \tag{1}$$

mit

$$\Omega_N^{j,l} = (e^{2\pi i \cdot \frac{j}{N}})^l = \left((-1)^{\frac{2j}{N}}\right)^l \tag{2}$$

$$f_l = \sqrt{1+l} \tag{3}$$

$$N = 2^m \tag{4}$$

Für $m = 3$ ergibt sich der Vektor

$$f = \begin{pmatrix} - & 1.3823- & i \cdot 2.23154 \\ - & 1.1417- & i \cdot 0.964724 \\ - & 1.0898- & i \cdot 0.404137 \\ - & 1.0782+ & i \cdot 1.36888e-15 \\ - & 1.0898+ & i \cdot 0.404137 \\ - & 1.1417+ & i \cdot 0.964724 \\ - & 1.3823+ & i \cdot 2.23154 \\ & 16.306- & i \cdot 1.65924e-14 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Für $m = 4$ ergibt die direkte Rechnung:

$$f = \begin{pmatrix} - & 2.85108- & i \cdot 7.02149 \\ - & 2.01863- & i \cdot 3.57652 \\ - & 1.80909- & i \cdot 2.26138 \\ - & 1.72579- & i \cdot 1.52489 \\ - & 1.68555- & i \cdot 1.02385 \\ - & 1.66461- & i \cdot 0.636399 \\ - & 1.65427- & i \cdot 0.306027 \\ - & 1.65114+ & i \cdot 1.71106e-14 \\ - & 1.65427+ & i \cdot 0.306027 \\ - & 1.66461+ & i \cdot 0.636399 \\ - & 1.68555+ & i \cdot 1.02385 \\ - & 1.72579+ & i \cdot 1.52489 \\ - & 1.80909+ & i \cdot 2.26138 \\ - & 2.01863+ & i \cdot 3.57652 \\ - & 2.85108+ & i \cdot 7.02149 \\ & 44.4692- & i \cdot 1.23835e-13 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Die schnelle Fouriertransformation liefert folgende Ergebnisse: $m = 3$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \tag{7}$$

$m = 4$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \tag{8}$$

2)

a) arrogance and total loss of all senses!

b) Für die analytische Lösung der Fouriertransformation von

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{9}$$

Ergibt sich

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(ikx\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tag{10}$$

Der Vergleich zwischen der analytischen und numerischen Lösung für ein Intervall von $[-10, 10]$ befindet sich in Abbildung **??**.

3)

In dieser Teilaufgabe werden die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von

$$f(x) = \begin{cases} - & 1, x \in [-\pi, 0] \\ & 1, x \in (0, \pi) \end{cases} \tag{11}$$

für $m = 7$ bestimmt. Analytisch ergibt sich c_n durch

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \tag{12}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_L f(x) \cdot \cos(2\pi\frac{n}{L})dx \tag{13}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_L f(x) \cdot \sin(2\pi\frac{n}{L})dx \tag{14}$$

Mit Gleichung (11) ergibt sich

$$a_n = 0 \text{ für alle n} \tag{15}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} \text{ für ungerade n} \tag{16}$$

$$c_n = i \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} \text{ für ungerade n} \tag{17}$$

Aufgabe 2

Es sollen das Intervallhalbierungs- und Newton-Verfahren mit einer Genauigkeitsschranke von jeweils $x_c = 1 \cdot 10^{-9}$ implementiert werden. Getestet werden die beiden Verfahren an der Funktion

$$f(x) = x^2 - 2, \tag{18}$$

deren analytisches Minimum bei $x_{\text{min}} = 1$ liegt. Für das Intervallhalbierungs-Verfahren werden die Startwerte $a = -0{,}5\,,\ b = -0{,}1$ und $c = 2$ verwendet. In Abbildung 1 sind die Werte von a, b, c gegen die Anzahl der Iterationen aufgetragen. Für das Newton-

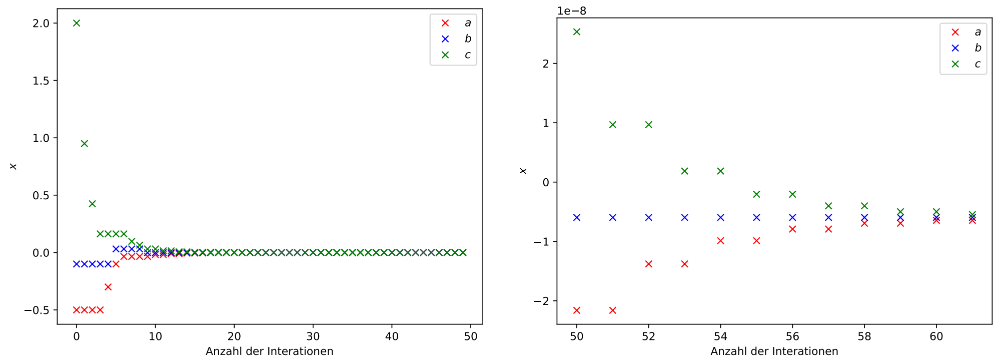

Abbildung 1: Intervallhalbierungs-Verfahren

Verfahren wird der Startwert $x_0 = 1$ verwendet. In Abbildung 2 ist x_0 gegen die Anzahl der Iterationen aufgetragen. Das Newton-Verfahren erreicht schon nach der ersten Itera-

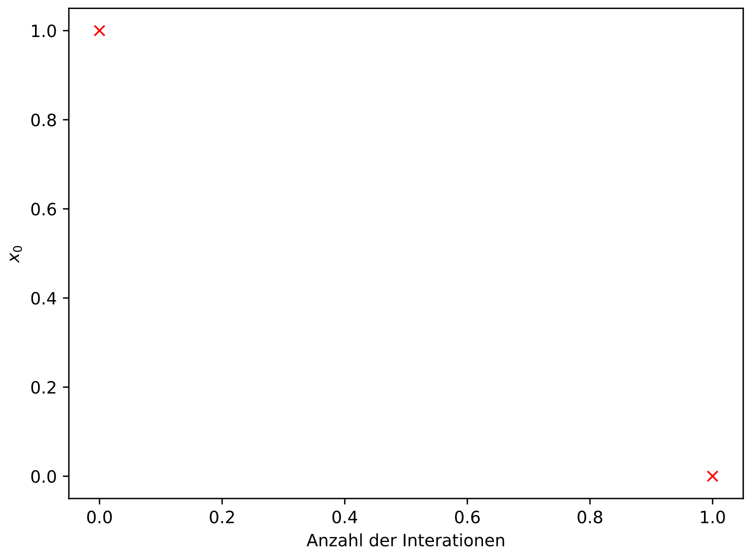

Abbildung 2: Newton-Verfahren

tion die gewünschte Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-9}$, während das Intervallhalbierungsverfahren dafür 61 Iterationen benötigt. Mit einem Wert von $x = -8{,}223\,98 \cdot 10^{-11}$ liefert das Newton-Verfahren auch ein genaueres Ergebnis als das Intervallhalbierungs-Verfahren mit einem Intervall-Mittelwert von $x = -5{,}960\,47 \cdot 10^{-9}$. Somit ist das Newton-Verfahren unter den vorgegebenen Anfangsbedingungen deutlich besser zur Minimierung der Funktion (18) geeignet.