

Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

a)

Das Integral

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{x} dx$$

soll numerisch integriert werden. Dazu lässt sich das Integral umschreiben zu

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} dx + \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^x}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{e^x}{x} dx - \int_1^{\epsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{x} dx \end{aligned}$$

Wird eine ONC wie etwa die Mittelpunktsregel verwendet, kann der Limes betrachtet werden, da die Funktion nicht an der Singularität ausgewertet werden muss. Es ergibt sich der Wert für das Integral zu

$$I_0 = 2.1145017$$

mit einem Fehler $< 10^{-7}$.

b)

Die Simpsonregel wird verwendet um das Integral

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

zu bestimmen. Um die Polstelle zu umgehen kann mithilfe einer Variablentransformation $x = u^2$, $dx = 2u du$ das Integral umschreiben zu

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

Da eine numerische Integration bis ∞ nicht möglich ist, wird bis zu einem oberen Limit b integriert (I_b) und zur Fehlerabschätzung ebenfalls das Integral bis $b' = b + 1$ bestimmt ($I_{b'}$) und die Abweichung $|I_{b'} - I_b|$ bestimmt. Das Ergebnis der Integration und die Abweichung in Abhängigkeit der oberen Grenze b sind in Abb.1 und Abb.2 aufgetragen. Es zeigt sich, dass bereits für eine kleines $b \approx 8$ die Abweichung mit $\mathcal{O}(10^{-16})$ vernachlässigbar klein wird und das Integral den Wert

$$I_1 = 1.77245385$$

annimmt.

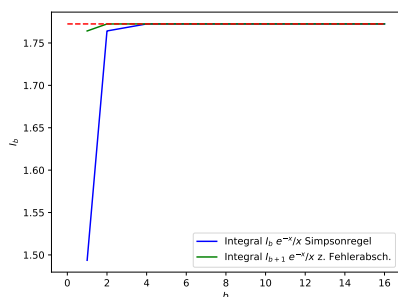


Abbildung 1: Integralberechnung von $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ bis zur oberen Grenze b und b' mit Hilfe der Simpsonregel.

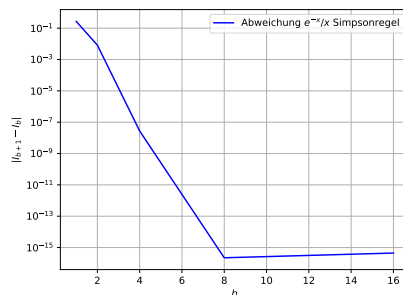


Abbildung 2: Fehlerabschätzung $|I_{b'} - I_b|$ von $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ mit Hilfe der Simpsonregel.

c)

Es soll das Integral

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

sowohl analytisch, als auch numerisch bestimmt werden. Zunächst lässt sich I_2 aus Symmetrie gründen umschreiben zu

$$I_2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Nun lässt sich mit Hilfe eines Feynman-Parameters schreiben $I_2 = 2I(c=0)$ mit

$$I(c) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-cx} dx \quad (1)$$

Durch Ableiten nach c und anschließendes integrieren nach x und c erhält man so

$$\begin{aligned} I'(c) &= \int_0^{\infty} \sin x e^{-cx} dx \\ &= \frac{-1}{c^2 + 1} \\ \Rightarrow I(c) &= - \int \frac{1}{b^2 + 1} = - \arctan(b) + const \end{aligned}$$

Die Konstante lässt sich über den Vergleich mit dem Integral $I(c)$ aus Gleichung(1) für $c \rightarrow \infty$ bestimmen zu $const = \frac{\pi}{2}$. Damit ist

$$I_2 = I(0) = \pi$$

Numerisch lässt sich dies berechnen mit Hilfe der Mittelpunktsregel, wobei wieder bis zu einem Wert b integriert und der Fehler abgeschätzt wird. Das Ergebnis der Integration und die Abweichung in Abhängigkeit der oberen Grenze b sind in Abb.3 und Abb.4

aufgetragen. Hier dauert es deutlich länger bis die Abweichung hinreichend klein wird und sich der Wert des Integrals an

$$I_2 = 3.14159369$$

annähert mit einer Abweichung von $\mathcal{O}(10^{-7})$. Alternativ wäre es möglich das Integral aufzuteilen in die Grenzen von 0 bis 1 und 1 bis ∞ und dann mit einer Variablentransformation $x = \frac{1}{y}$ für den 2. Teil das Integral umzuformen in

$$I_2 = 2 \int_0^1 \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{x} dx$$

Dies führt allerdings selbst bei Verwendung von ONC zu großen Instabilitäten in der Nähe von $x = 0$

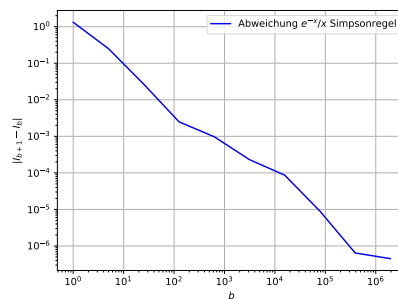
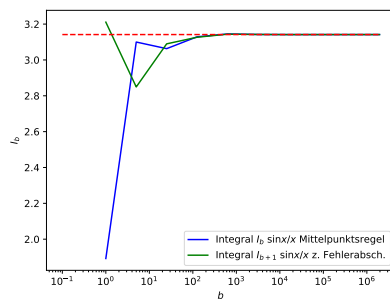


Abbildung 3: Integralberechnung von $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel. **Abbildung 4:** Fehlerabschätzung $|I_b' - I|$ von $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

Aufgabe 2

a)

Es soll das elektrostatische Potential auf der x-Achse gemäß

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')}{((x - x')^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} dx' dy' dz' \quad (2)$$

mit einer homogenen Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & |x|, |y|, |z| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet werden.

Das gegebene Integral wird dafür zunächst einheitenlos gemacht. Dafür werden folgende Ersetzungen vorgenommen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\rho_0 a^2} \Phi.$$

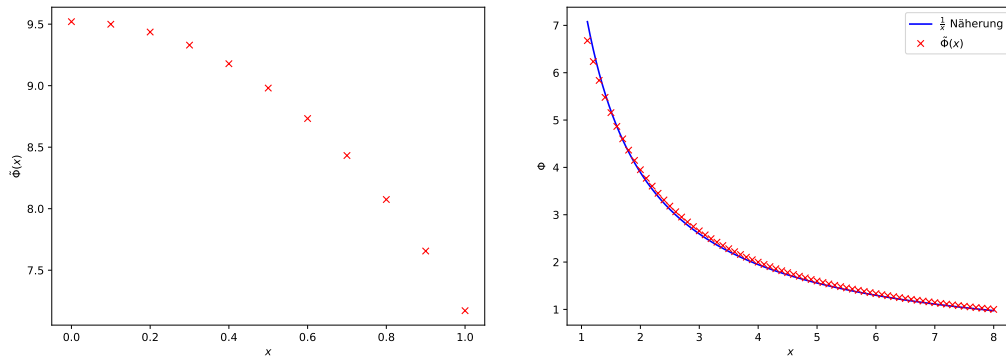
Zusätzlich wird $a = 1$ gesetzt. Damit ergibt sich

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{((x-x')^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} dx' dy' dz'.$$

Das Potential außerhalb des Würfels kann mithilfe einer Multipolentwicklung zur ersten nicht verschwindenden Ordnung, also dem Monopol-Moment, genähert werden

$$\tilde{\Phi}(x) \propto \frac{1}{\rho_0 |x|} \int \int \int \rho(x', y', z') dx' dy' dz' = \frac{1}{|x|}.$$

In Abbildung 5b sind $\tilde{\Phi}(x)$ sowie die Näherung aufgetragen. Daran ist zu sehen, dass die Näherung den Trend der Werte sehr gut abbildet. In Abbildung 5a ist das Potential innerhalb des Würfels aufgetragen. Beim Integrieren könnte der Nenner Null werden, wodurch das Integral divergiert. Um dies zu verhindern, kann ein kleines ε auf den Nenner addiert werden, sobald dieser zu klein wird. Alternativ kann auch eine andere Anzahl an Teilintervallen n gewählt werden.



(a) Potential innerhalb des Würfels.

(b) Potential außerhalb des Würfels.

Abbildung 5: Berechnung von $\tilde{\Phi}(x)$.

b)

Nun soll das elektrostatische Potential (2) mit der Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 \frac{x}{a} & |x|, |y|, |z| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

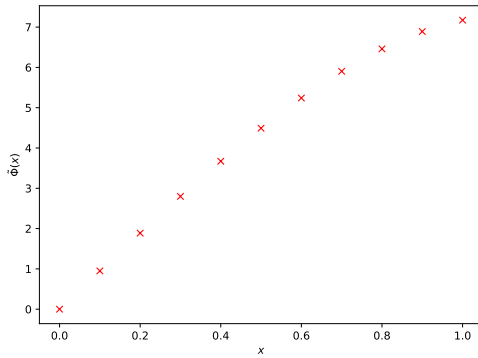
bestimmt werden. Da x und a die gleiche Einheit besitzen, können dieselben Ersetzungen wie in a) verwendet werden, um das Integral einheitenlos zu machen. Auch hier wird $a = 1$ gesetzt. Damit ergibt sich

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{((x-x')^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} dx' dy' dz'.$$

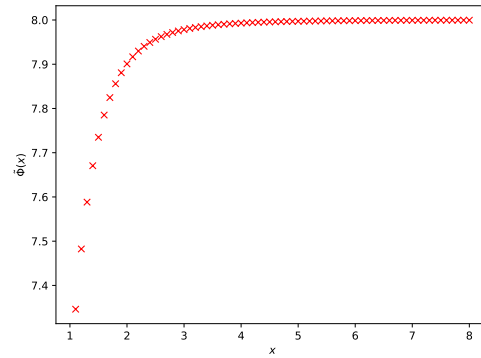
Die erste nicht verschwindende Ordnung der Multipolentwicklung stellt dieses Mal das Dipol-Moment dar. Das Potential außerhalb des Würfels kann damit als

$$\tilde{\Phi}(x) \propto \frac{\vec{e}_r}{\rho_0 x^2} \int \int \int \vec{r}' \rho(x', y', z') dx' dy' dz' = \frac{1}{x^2}$$

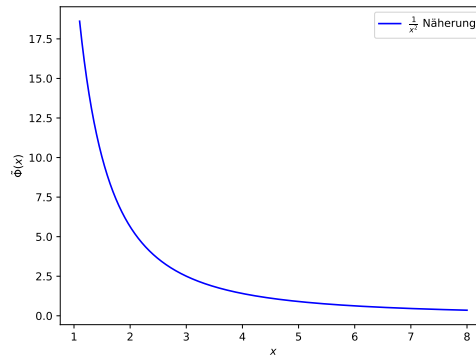
genähert werden. In Abbildung 6b ist $\tilde{\Phi}(x)$ und in Abbildung 6c die Näherung aufgetragen. Dieses Mal beschreibt die Näherung die tatsächlichen Werte nur sehr schlecht, was möglicherweise daran liegt, dass die Terme höherer Ordnung in diesem Fall einen großen Einfluss auf den Verlauf von $\tilde{\Phi}(x)$ haben.



(a) Potential innerhalb des Würfels.



(b) Potential außerhalb des Würfels.



(c) Näherung des Potential außerhalb des Würfels.

Abbildung 6: Berechnung von $\tilde{\Phi}(x)$.