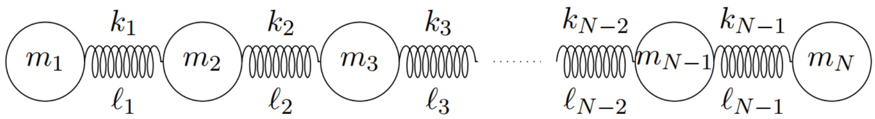
Aufgabe 2



In Abbildung **??** ist eine Konfiguration von Federn der Ruhelänge l_j mit Federkonstanten k_j und Massen m_i zu sehen, mit $i = 1, ..., N$ und $j = 1, ..., N-1$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} m_i &= i \\ k_j &= N - j \\ l_j &= |5 - j| + 1 \end{aligned}$$

Über den Kraftansatz für eine einzelne mit der Auslenkung aus der Ruhelage $x(t)$

$$F = -kx(t) = m\ddot{x}(t) \Leftrightarrow \frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

und auf Grund der Tatsache, dass nur die nächsten Nachbarn direkt über Federn verbunden sind lässt sich die Bewegung der i-ten Masse beschreiben als

$$\begin{aligned} \ddot{x_1} - \frac{k_1}{m_1}(x_2 - x_1) &= 0 \\ \ddot{x}_i - \frac{k_{i-1}}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{k_i}{m_i}(x_{i+1} - x_i) &= 0 \\ \ddot{x_N} - \frac{k_{N-1}}{m_N}(x_{N-1} - x_N) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $x_i = \hat{x}_i \mathrm{e}^{i\omega t}$ lässt sich dieses $N \times N$-Gleichungssystem darstellen als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} - \omega^2 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} - \omega^2 & \frac{k_2}{m_2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\hat{x}} &= \vec{0} \\ \left(\begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} - \omega^2 \mathbb{1} \right) \cdot \vec{\hat{x}} &= \vec{0} \\ \left(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbb{1} \right) \cdot \vec{\hat{x}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Quadrate der Eigenfrequenzen ω.