Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

1)

Eine direkte Rechnung über die Funktion

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} \Omega_N^{j,l} f_l \tag{1}$$

mit

$$\Omega_N^{j,l} = (e^{2\pi i \cdot \frac{j}{N}})^l = \left((-1)^{\frac{2j}{N}}\right)^l \tag{2}$$

$$f_l = \sqrt{1+l} \tag{3}$$

$$N = 2^m \tag{4}$$

Für $m = 3$ ergibt sich der Vektor

$$f = \begin{pmatrix} -1.38233 - i \cdot 2.23154 \\ -1.14173 - i \cdot 0.964724 \\ -1.0898 - i \cdot 0.404137 \\ -1.07826 + i \cdot 1.36888e - 15 \\ -1.0898 + i \cdot 0.404137 \\ -1.14173 + i \cdot 0.964724 \\ -1.38233 + i \cdot 2.23154 \\ 16.306 - i \cdot 1.65924e - 14 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Für $m = 4$ ergibt die direkte Rechnung:

$$f = \begin{pmatrix} -2.85108 - i \cdot 7.02149 \\ -2.01863 - i \cdot 3.57652 \\ -1.80909 - i \cdot 2.26138 \\ -1.72579 - i \cdot 1.52489 \\ -1.68555 - i \cdot 1.02385 \\ -1.66461 - i \cdot 0.636399 \\ -1.65427 - i \cdot 0.306027 \\ -1.65114 + i \cdot 1.71106e - 14 \\ -1.65427 + i \cdot 0.306027 \\ -1.66461 + i \cdot 0.636399 \\ -1.68555 + i \cdot 1.02385 \\ -1.72579 + i \cdot 1.52489 \\ -1.80909 + i \cdot 2.26138 \\ -2.01863 + i \cdot 3.57652 \\ -2.85108 + i \cdot 7.02149 \\ 44.4692 - i \cdot 1.23835e - 13 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Die schnelle Fouriertransformation liefert folgende Ergebnisse: $m = 3$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \tag{7}$$

$m = 4$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \tag{8}$$

2)

a) arrogance and total loss of all senses!

b) Für die analytische Lösung der Fouriertransformation von

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{9}$$

Ergibt sich

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(ikx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tag{10}$$

Der Vergleich zwischen der analytischen und numerischen Lösung für ein Intervall von $[-10, 10]$ befindet sich in Abbildung **??**.

3)

In dieser Teilaufgabe werden die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von

$$f(x) = \begin{cases} - & 1, x \in [-\pi, 0] \\ & 1, x \in (0, \pi) \end{cases} \tag{11}$$

für $m = 7$ bestimmt. Analytisch ergibt sich c_n durch

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\, a_n = \frac{2}{L}\int_L f(x) \cdot \cos(2\pi\frac{n}{L})dx \tag{12}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_L f(x) \cdot \sin(2\pi\frac{n}{L})dx \tag{13}$$

Mit Gleichung (11) ergibt sich

$$a_n = 0\text{für alle n}b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi}\text{für ungerade n}c_n = i \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi}\text{für ungerade n} \tag{14}$$