

Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

Das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung wird für die Newtonschen Bewegungsgleichungen eines beliebigen Kraftfeldes untersucht

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}\end{aligned}$$

a)+b)

Es wird für einen harmonischen Oszillator $\vec{F} = -\vec{r}m\omega^2$ mit Frequenz $\omega = 1$ der Ort der Masse nach den ersten 10 Schwingungen und die Abweichung vom Startwert $|\vec{r}_i - \vec{r}_0|$ bei verschiedenen Schrittweiten bestimmt. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Toleranz in Abhängigkeit von der Schwingung bei den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 42 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = \vec{0} \quad (1)$$

und

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 42 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Es zeigt sich, dass mit zunehmender Zeit die Bestimmung des Ortes schlechter wird. Um eine Toleranz von 10^{-5} erreichen, wird für die 1. Anfangsbedingung eine Schrittweite $h \leq 10^{-3}$ benötigt, während bei der 2. $h \leq 10^{-6}$ erforderlich ist.

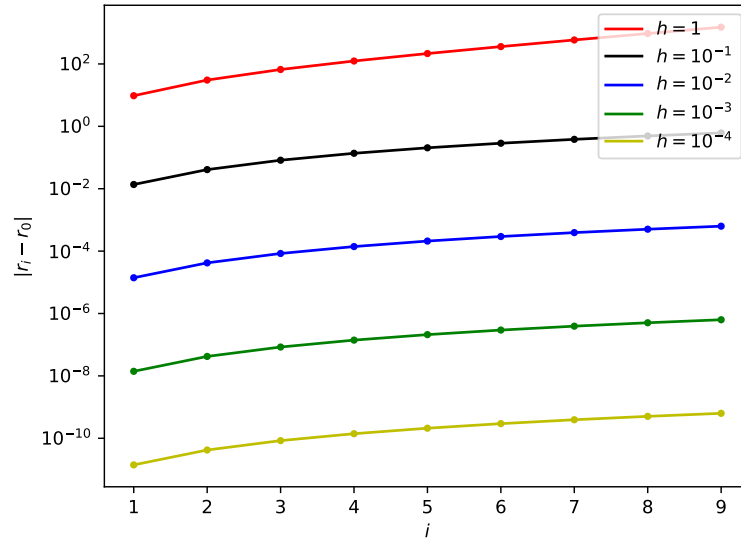


Abbildung 1: Toleranz bei Anfangsbedingung (1).

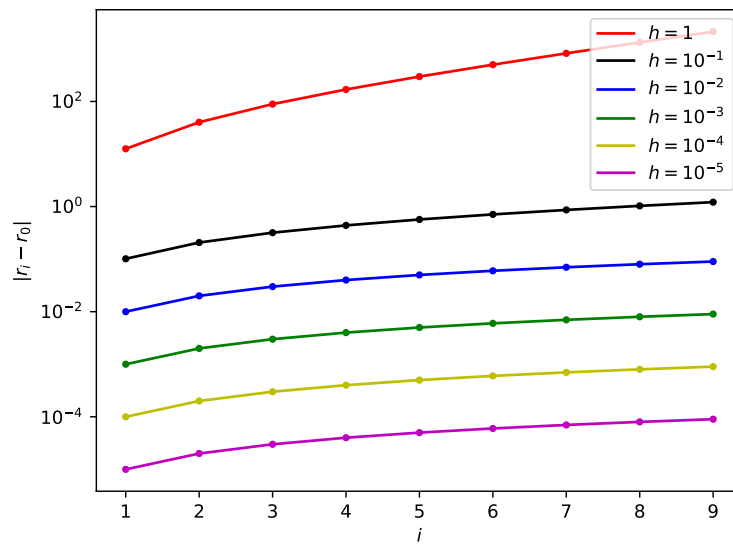


Abbildung 2: Toleranz bei Anfangsbedingung (2).

c)

In Abbildung 3 ist die Abweichung von der Energie des Anfangszustandes nach i Iterationen bei AB(1) für $h = 10^{-3}$ und $h = 10^{-4}$ aufgetragen. Anhand von Abbildung 1 ist ersichtlich, dass die Abweichung bei $h = 10^{-4}$ um drei Größenordnungen kleiner und liegt unterhalb von 10^{-10} . Dies führt dazu, dass auch die Energie genauer bestimmt werden kann. In Abb.3 äußert sich das darin, dass für diese Schrittweite die Energieerhaltung gilt, während eine größere Schrittweite dies nicht gewährleistet.

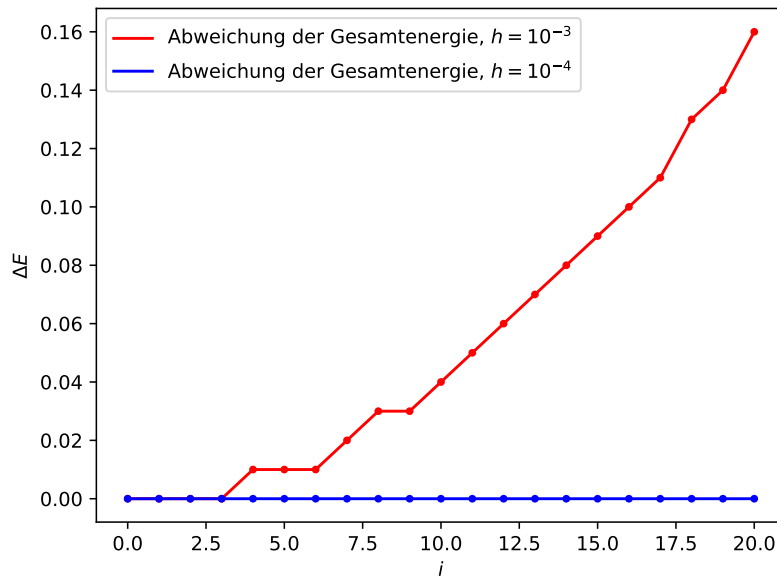


Abbildung 3: Abweichungen von der Gesamtenergie mit AB(1).

Aufgabe 2

a)

Die Differentialgleichung (DGL)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x = 0 \quad (3)$$

beschreibt einen harmonischen Oszillator mit Dämpfung α . Gelöst wird die DGL über den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (4)$$

und führt zur Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}. \quad (6)$$

Es ergeben sich folgende Fälle:

1. $\alpha = 0$: Harmonischer Oszillator (Abbildung 4).
2. $\frac{\alpha^2}{4} > \omega^2 = 1$: Kriechfall (Abbildung 6).
3. $\frac{\alpha^2}{4} = \omega^2 = 1$: Aperiodischer Grenzfall (Abbildung 5).
4. $\frac{\alpha^2}{4} < \omega^2 = 1$: Gedämpfte Schwingung (Abbildung 7).

Zur Darstellung des Oszillationsverhaltens wurden dabei 3D-Scatter-Plots gewählt.

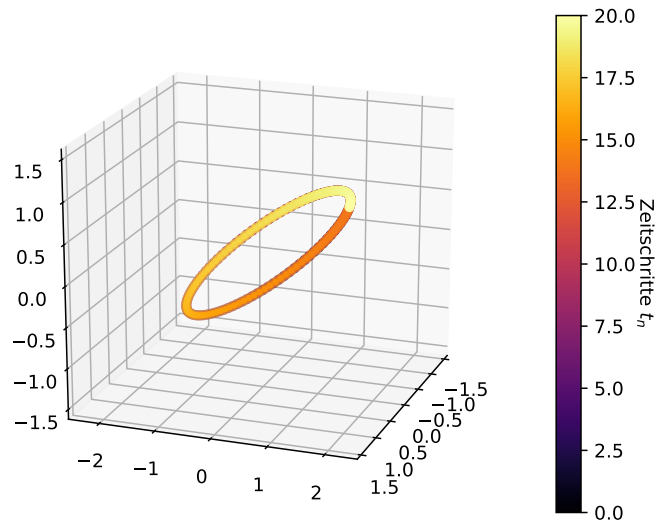


Abbildung 4: Trajektorie eines Harmonischen Oszillators ($\alpha = 0$).

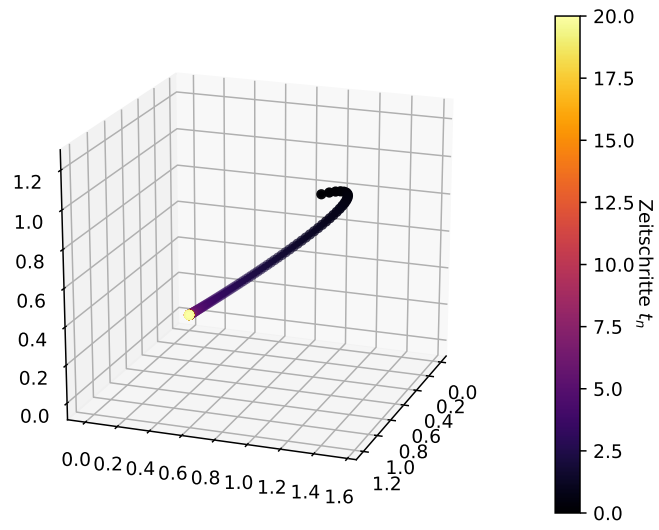


Abbildung 5: Trajektorie den aperiodischen Grenzfall für $\alpha = 2$.

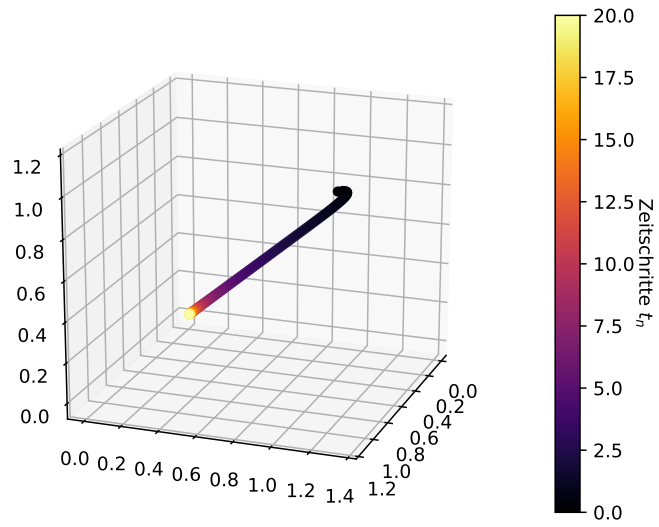


Abbildung 6: Trajektorie den Kriechfall für $\alpha = 4$.

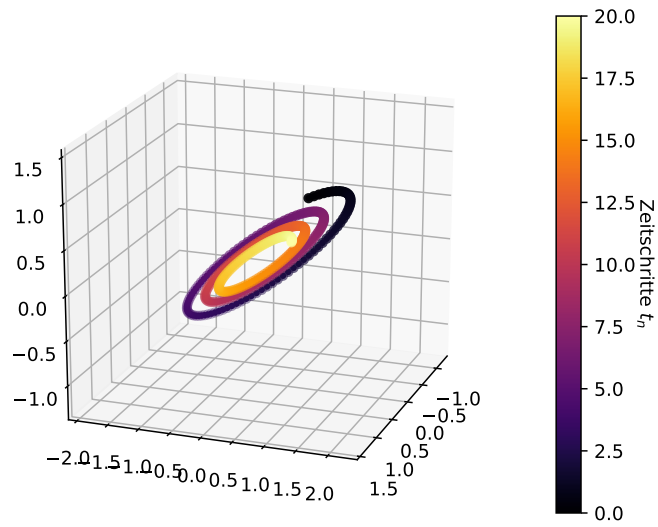


Abbildung 7: Trajektorie die gedämpfte Schwingung $\alpha = 0.1$.

b)

Die Gesamtenergie $E_{Ges} = E_{kin} + E_{pot}$ ist für einen harmonischen Oszillator erhalten. Da wir hier jedoch einen Oszillator mit Dämpfung betrachten, geht durch die Dämpfung immer ein Teil der Gesamtenergie verloren. In Abbildung 8 ist die Gesamtenergie pro Zeit dargestellt.

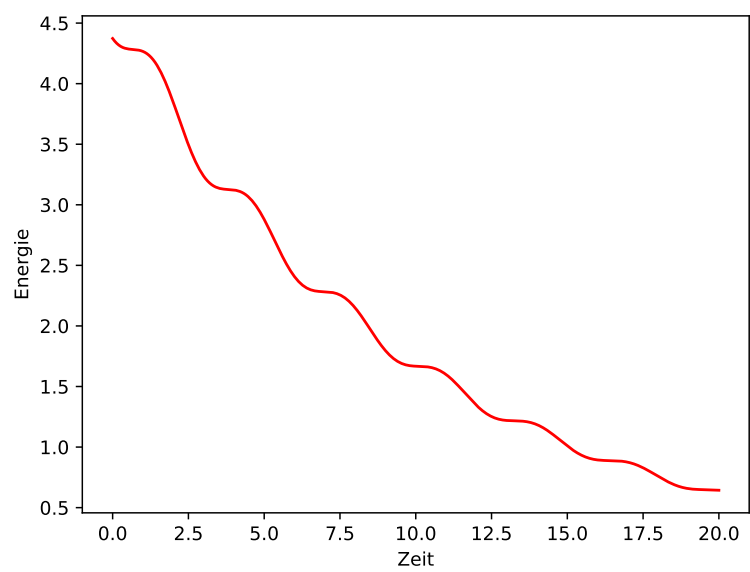


Abbildung 8: Verlauf der Gesamtenergie für ein harmonisches Potential.