

Übungsblatt 4 – Cerberus

Aufgabe 1

1)

Eine direkte Rechnung über die Funktion

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} \Omega_N^{j,l} f_l \quad (1)$$

mit

$$\Omega_N^{j,l} = (e^{2\pi i \cdot \frac{j}{N}})^l = \left((-1)^{\frac{2j}{N}}\right)^l \quad (2)$$

$$f_l = \sqrt{1+l} \quad (3)$$

$$N = 2^m \quad (4)$$

Für $m = 3$ ergibt sich der Vektor

$$f = \begin{pmatrix} -1.3823- & i \cdot 2.23154 \\ -1.1417- & i \cdot 0.964724 \\ -1.0898- & i \cdot 0.404137 \\ -1.0782+ & i \cdot 1.36888e-15 \\ -1.0898+ & i \cdot 0.404137 \\ -1.1417+ & i \cdot 0.964724 \\ -1.3823+ & i \cdot 2.23154 \\ 16.306- & i \cdot 1.65924e-14 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Für $m = 4$ ergibt die direkte Rechnung:

$$f = \begin{pmatrix} -2.85108- & i \cdot 7.02149 \\ -2.01863- & i \cdot 3.57652 \\ -1.80909- & i \cdot 2.26138 \\ -1.72579- & i \cdot 1.52489 \\ -1.68555- & i \cdot 1.02385 \\ -1.66461- & i \cdot 0.636399 \\ -1.65427- & i \cdot 0.306027 \\ -1.65114+ & i \cdot 1.71106e-14 \\ -1.65427+ & i \cdot 0.306027 \\ -1.66461+ & i \cdot 0.636399 \\ -1.68555+ & i \cdot 1.02385 \\ -1.72579+ & i \cdot 1.52489 \\ -1.80909+ & i \cdot 2.26138 \\ -2.01863+ & i \cdot 3.57652 \\ -2.85108+ & i \cdot 7.02149 \\ 44.4692- & i \cdot 1.23835e-13 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die schnelle Fouriertransformation liefert folgende Ergebnisse: $m = 3$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \quad (7)$$

$m = 4$:

$$f = \begin{pmatrix} foo \\ bar \end{pmatrix} \quad (8)$$

2)

a) arrogance and total loss of all senses!

b) Für die analytische Lösung der Fouriertransformation von

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (9)$$

Ergibt sich

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(ikx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \quad (10)$$

Der Vergleich zwischen der analytischen und numerischen Lösung für ein Intervall von $[-10, 10]$ befindet sich in Abbildung ??.

3)

In dieser Teilaufgabe werden die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0] \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases} \quad (11)$$

für $m = 7$ bestimmt. Analytisch ergibt sich c_n durch

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad (12)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_L f(x) \cdot \cos(2\pi \frac{n}{L} x) dx \quad (13)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_L f(x) \cdot \sin(2\pi \frac{n}{L} x) dx \quad (14)$$

Mit Gleichung (11) ergibt sich

$$a_n = 0 \text{ für alle } n \quad (15)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} \text{ für ungerade } n \quad (16)$$

$$c_n = i \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\pi} \text{ für ungerade } n \quad (17)$$