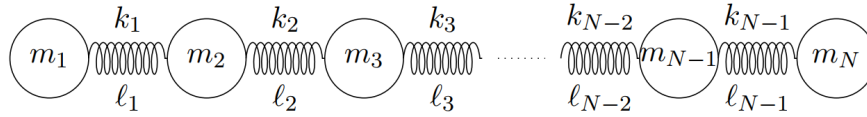


Übungsblatt 3 – Cerberus

Aufgabe 2



In Abbildung ?? ist eine Konfiguration von Federn der Ruhelänge l_j mit Federkonstanten k_j und Massen m_i zu sehen, mit $i = 1, \dots, N$ und $j = 1, \dots, N - 1$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} m_i &= i \\ k_j &= N - j \\ l_j &= |5 - j| + 1 \end{aligned}$$

Über den Kraftansatz für eine einzelne mit der Auslenkung aus der Ruhelage $x(t)$

$$F = -kx(t) = m\ddot{x}(t) \Leftrightarrow \frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

und auf Grund der Tatsache, dass nur die nächsten Nachbarn direkt über Federn verbunden sind lässt sich die Bewegung der i -ten Masse beschreiben als

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \frac{k_1}{m_1}(x_2 - x_1) &= 0 \\ \ddot{x}_i - \frac{k_{i-1}}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{k_i}{m_i}(x_{i+1} - x_i) &= 0 \\ \ddot{x}_N - \frac{k_{N-1}}{m_N}(x_{N-1} - x_N) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $x_i = \hat{x}_i e^{i\omega t}$ lässt sich dieses $N \times N$ -Gleichungssystem darstellen als

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} - \omega^2 & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} - \omega^2 & \frac{k_2}{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\hat{x}} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} - \omega^2 \mathbb{1} \right) \cdot \vec{\hat{x}} = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbb{1}) \cdot \vec{\hat{x}} = \vec{0}$$

Somit sind die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} , die beispielsweise über das Diagonalisieren der Tridiagonalmatrix bestimmt werden können, die Quadrate der Eigenfrequenzen ω . Für ein System mit $N = 10$ Massen ergeben sich so die Eigenfrequenzen:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 3.95439 \\ \omega_2 &= 2.62228 \\ \omega_3 &= 1.95382 \\ \omega_4 &= 1.51083 \\ \omega_5 &= 1.17586 \\ \omega_6 &= 0.901365 \\ \omega_7 &= 0.663369 \\ \omega_8 &= 1.23909 \cdot 10^{-8} \\ \omega_9 &= 0.44762 \\ \omega_{10} &= 0.243446\end{aligned}$$

Die Frequenz ω_8 sticht dabei auf Grund ihre niedrigen Potenz heraus. Der zugehörige Eigenwert der Matrix $\lambda_8 = 1.53534403 \cdot 10^{-16}$ kommt vermutlich auf Grund von numerischer Instabilität und Rundungsfehlern zustande und sollte eigentlich bei 0 liegen. Diese Vermutung wird auch dadurch unterstützt, dass bei Verwendung von `float`- statt `double`-Präzision der Wert dieser Eigenfrequenz ansteigt und bei $\omega_8 = 0.000241474$ liegt, während alle anderen Frequenzen unverändert bleiben.

Aufgabe 3

Die beiden Funktionen in Abbildung 1 sollen integriert werden. Dafür werden Integrationsroutinen für die Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel implementiert.

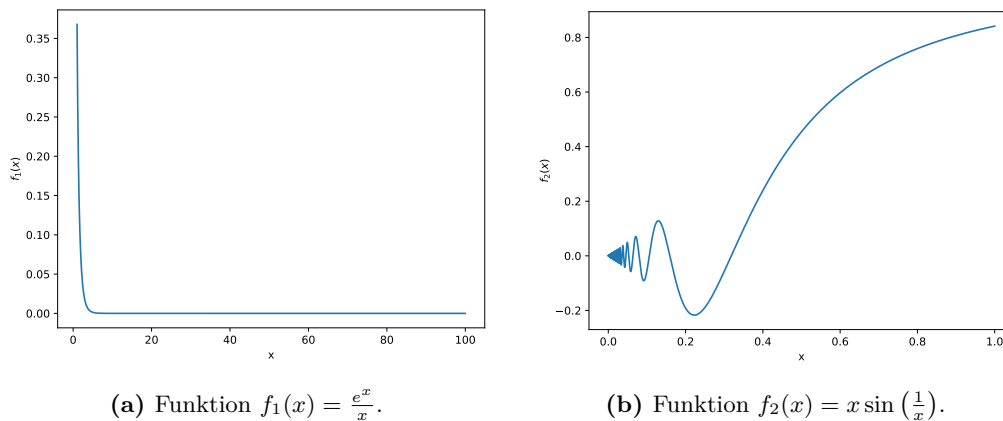


Abbildung 1: Zu integrierende Funktionen.

Die Integrationsroutinen sollen nun getestet werden, indem die Intervallbreite h halbiert wird bis die relative Änderung der Ergebnisse kleiner als $1 \cdot 10^{-4}$ ist. Wie in den

Abbildungen 2 und 3 zu sehen ist, werden dafür die relative Änderung $\varepsilon_{\text{rel.}}$ gegen die Intervallzahl n aufgetragen. Mit n ergibt sich die Intervallbreite zu

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$a \hat{=}$ untere Integralgrenze, $b \hat{=}$ obere Integralgrenze

die Verdopplung der Intervallzahl bewirkt also eine Halbierung der Intervallbreite. Die relative Änderung des Ergebnisses ergibt sich aus

$$\varepsilon_{\text{rel.}} = \frac{|y_{\text{alt}} - y_{\text{neu}}|}{y_{\text{alt}}}.$$

In Abbildung 2 sind die relativen Änderungen für das Integral I_1 dargestellt

$$I_1 = \int_1^{100} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Der Verlauf ist bei der Trapez- und Mittelpunktsregel sehr ähnlich. Zu Beginn sind die relativen Abweichungen sehr groß und ändern sich stark. Zu hohen n ändern sich die Abweichungen nur noch leicht. Bei der Simpsonregel ist die relative Abweichung zu Beginn ziemlich konstant bei ungefähr 1 und fängt erst bei 2^7 Teilintervallen an kleiner zu werden. Damit die relative Änderung bei der Trapezregel auf unter $1 \cdot 10^{-4}$ fällt muss das Intervall $[1, 100]$ in 2^{20} Teilintervalle aufgeteilt werden, dies entspricht einer Intervallbreite von $h = 9,44 \cdot 10^{-5}$. Bei der Mittelpunktsregel ist dies bei 2^{13} Teilintervallen, also $h = 0,01$, der Fall. Am schnellsten wird der Wert allerdings von der Simpsonregel bei nur 2^{11} Teilintervallen bzw. $h = 0,05$ erreicht.

In Abbildung 3 sind die relativen Änderungen für das Integral I_2 dargestellt

$$I_2 = \int_0^1 x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Was direkt auffällt ist, dass die relativen Abweichungen insgesamt viel kleiner sind. Dies liegt an dem kleineren Intervall und der damit automatisch kleineren Intervallbreite. Auch hier sind die relativen Abweichungen bei der Trapezregel am höchsten und es werden die meisten Teilintervalle 2^{14} ($h = 6,10 \cdot 10^{-5}$) benötigt, um unter die Vorgabe von $1 \cdot 10^{-4}$ zu kommen. Außerdem ist auffällig, dass die relative Abweichung bei der Mittelpunktsregel zwar auf einem deutlich geringeren Niveau beginnt aber zunächst ansteigt bevor sie bei 2^5 Teilintervallen ($h = 0,03$) zu sinken beginnt. Dadurch ist die benötigte Anzahl an Teilintervallen bei Mittelpunkts- und Simpsonregel gleich groß bei 2^8 ($h = 3,9 \cdot 10^{-3}$). Allerdings ist bei der Simpsonregel die relative Abweichung nach Erreichen des Grenzwertes kleiner, weshalb auch bei I_2 die Simpsonregel vorzuziehen ist.

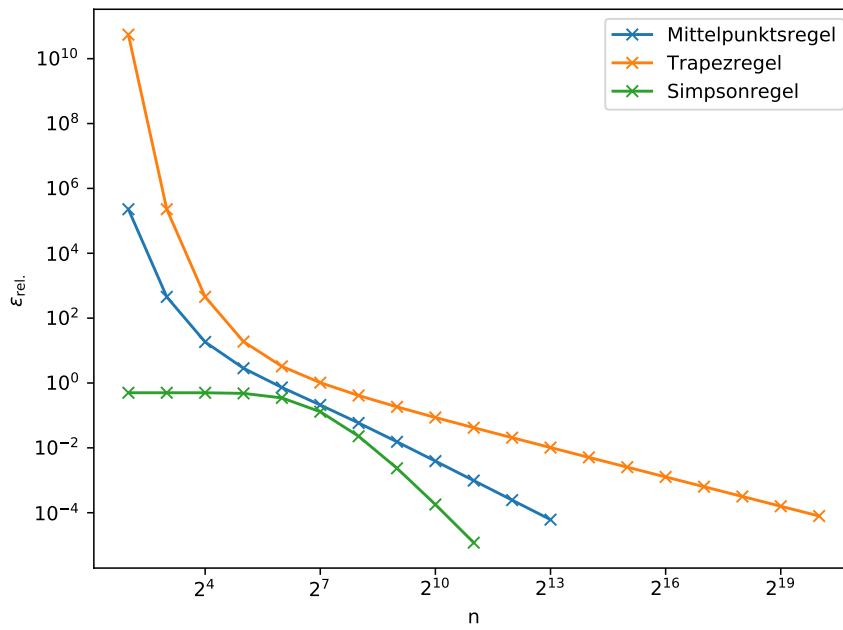


Abbildung 2: Vergleich der relativen Änderungen für Integral I_1 .

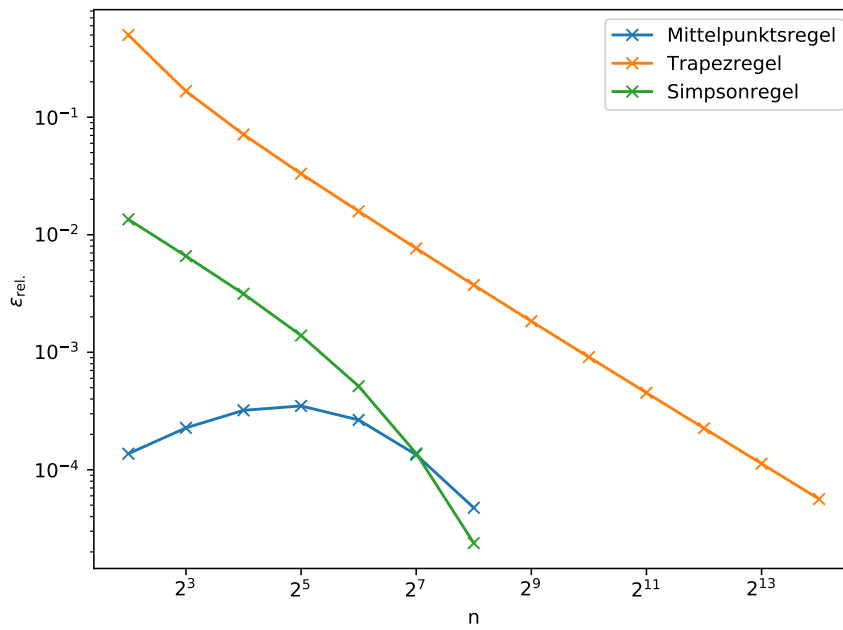


Abbildung 3: Vergleich der relativen Änderungen für Integral I_2 .