1 Blatt 0

Aufgabe 0

a)

Die Stabilität eines numerischen Verfahrens oder Problems beschreibt seine Empfindlichkeit gegenüber kleinen Fehler in den Anfangsbedingung. Werden diese mit zunehmenden Iterationsschritten stark vergrößert, spricht man von numerischer Instabilität.

b)

Eine höhere Genauigkeit, z.B. die Berücksichtigung höherer Ordnungen, kann zu Instabiltiät führen, da diese Operation auch auf die Unsicherheit angewandt wird und diese so verstärken kann. Im Falle des (symmetrisierten) Euler-Verfahrens ändert sich die Struktur des AWP, sodass für ungeignete Werte der Fehler verstärkt wird.

Aufgabe 1

Das Distributivgesetz kann aufgrund der begrenzten Genauigkeit von Gleitkommazahlen entstehen.
Bsp. mit $t = 2$ und $l = 1$

$$a = 0,50 \cdot 10^9,$$
$$b = 0,60 \cdot 10^9,$$
$$c = 0,10 \cdot 10^{-3}$$

$$(a + b) \cdot c = \underbrace{(0,50 \cdot 10^9 + 0,60 \cdot 10^9)}_{=0.11 \cdot 10^{10}, exponent overflow \to 0,99 \cdot 10^9} \cdot 0,10 \cdot 10^{-3} = 0,99 \cdot 10^5$$
$$a \cdot c + b \cdot c = 0,50 \cdot 10^5 + 0,60 \cdot 10^5 = 0,11 \cdot 10^6$$

2)

a)

Das Problem

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \tag{1}$$

kann umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x+1) + \sqrt{x+1} \cdot x} \end{aligned}$$

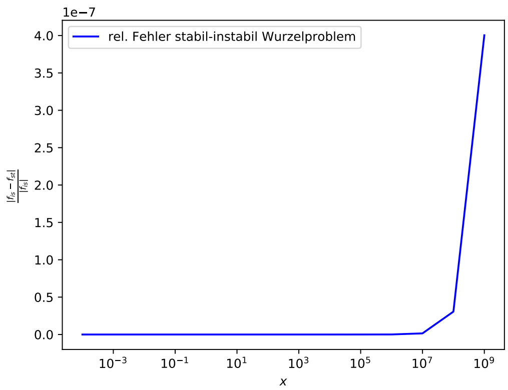

Abbildung 1: Der relative Fehler zwischen der Berechnung nach Formel(1) und nach Vermeidung einer Auslöschung.

b)

Das Problem

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} \tag{2}$$

kann umgeschrieben werden zu:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

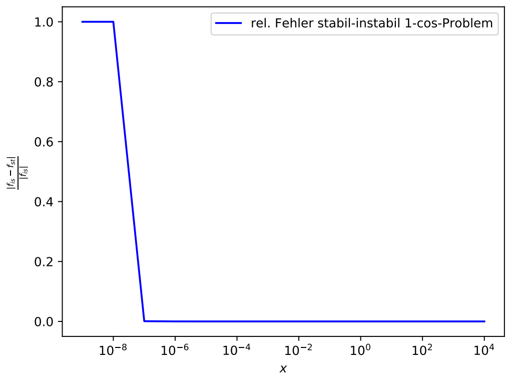

Abbildung 2: Der relative Fehler zwischen der Berechnung nach Formel(2) und nach Vermeidung einer Auslöschung.

c)

Das Problem

$$\sin(x+\delta) - \sin x \tag{3}$$

kann umgeschrieben werden zu:

$$\sin(x+\delta) - \sin x = 2 \cdot \sin\frac{\delta}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right)$$

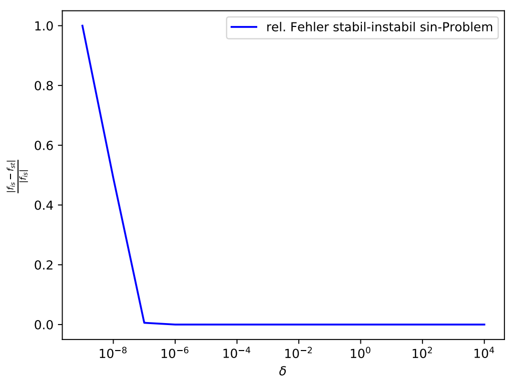

Abbildung 3: Der relative Fehler zwischen der Berechnung nach Formel(3) und nach Vermeidung einer Auslöschung.

An den Graphen 1 - 3 ist zu sehen, dass bei Gefahr einer Auslöschung, also für große x-Werte in Formel (1) und kleines x bzw. δ in Formel (2) & (3), der relative Fehler der instabilen Formeln deutlich größer wird. Besonders die Fehler der Probleme b) und c) steigen auf fast 100% und sollten durch Umformungen somit vermieden werden.