

V301

EMK und Innenwiderstand von Spannungsquellen

Lukas Rolf

lukas.rolf@tu-dortmund.de

Yannik Brune

yannik.brune@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.11.2016

Abgabe: 15.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
4 Auswertung	5
4.1 Die U/I -Graphen der verschiedenen Spannungsquellen, sowie ihre daraus bestimmten Größen	5
4.1.1 Gleichspannungsquelle	5
4.1.2 Gleichspannungsquelle mit Gegenspannung	6
4.1.3 Rechteck-Spannungsquelle	8
4.1.4 Sinus-Spannungsquelle	9
4.2 Der systematische Fehler einer unmittelbaren U_0 -Bestimmung mit einem Voltmeter	10
4.3 Der systematische Fehler aufgrund einer falschen Platzierung des Voltmeters	11
4.4 Leistungsanpassung einer Monozelle	12
5 Diskussion	12
6 Literatur	13

1 Zielsetzung

Es sollen die Leerlaufspannung, sowie der Innenwiderstand verschiedener Spannungsquellen ermittelt werden.

2 Theorie

Eine Spannungsquelle kann eine konstante Leistung über einen endlichen Zeitraum hinweg erzeugen. Es wird von einer Leerlaufspannung U_0 an den Ausgangsklemmen gesprochen, falls der Spannungsquelle kein Strom entnommen wird. Sobald es zu einer Leistungsabnahme durch einen äußeren Widerstand R_a kommt, sinkt die an den Klemmen gemessene Spannung, die "Klemmenspannung", unter den Wert von U_0 . Erklärt wird dies durch einen Eigenwiderstand der Spannungsquelle. In der Theorie wird die reale Spannungsquelle durch eine ideale Spannungsquelle in Reihe mit einem Widerstand R_i ersetzt.

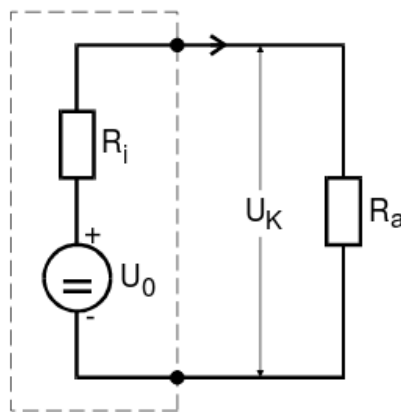


Abbildung 1: Reale Spannungsquelle [1]

Aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz folgt dann gemäß Abb. 1

$$U_0 = IR_i + IR_a \text{ bzw. } U_k = IR_a = U_0 - IR_i \quad (1)$$

Zur Messung der Leerlaufspannung wird deshalb ein hochohmiges Voltmeter verwendet, sodass der Strom I gegen 0 läuft und somit $U_0 \approx U_k$ gilt.

Aufgrund von R_i kann der Spannungsquelle auch keine beliebig hohe Leistung P entnommen werden. Sie ergibt sich mit Formel (1) aus

$$P = U_k \cdot I \quad (2)$$

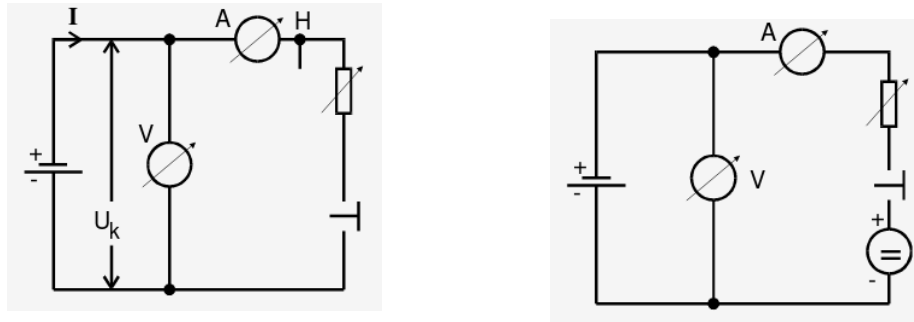
zu

$$P = I^2 \cdot R_a = \left(\frac{U_0}{R_a + R_i} \right)^2 \cdot R_a. \quad (3)$$

Es lässt sich erkennen das $P(R_a)$ ein Maximum besitzt. Dieses wird erreicht, wenn $R_a = R_i$ erfüllt wird. Es wird dann Leistungsanpassung gesprochen. Sie findet hauptsächlich in der Netztechnik Verwendung.

3 Durchführung

Abbildung 2



(a) Messungsaufbau zur U_0 und R_i -Bestimmung [1] (b) U_0 und R_i -Bestimmung mit Gegenspannung

Zunächst wird die Leerlaufspannung einer Monozelle ermittelt. Hierfür wird die Monozelle direkt an den Voltmeter Ein- bzw. Ausgang eines Multimeters angeschlossen. Aufgrund des hohen Innenwiderstandes des Voltmeters lässt sich die Leerlaufspannung durch die Klemmenspannung nähern. Zur besseren Untersuchung wird auch der Innenwiderstand des Voltmeters notiert.

Im Anschluss wird die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Belastungsstromes I gemessen. Hierzu wird die Schaltung nach Abb. 2(a) verwendet. Volt und Amperemeter werden wieder durch die jeweiligen Modi zweier Multimeter realisiert. Um den Belastungsstrom zu ändern, wird ein einstellbarer Widerstand R_a eingesetzt, welcher im Bereich von $0 - 50 \Omega$ variiert wird. Das gleiche Verfahren wird nochmals mit dem Sinus- bzw. dem Rechteckausgang eines RC-generators durchgeführt. Für die Variationsbereiche der dort eingesetzten Widerstände gilt: 1 V-Sinusaussgang: $R_a \in [0, 1 - 5 \text{ k}\Omega]$ 1 V-Rechteckausgang: $R_a \in [20 - 250 \Omega]$

Es ist zu beachten, dass die Multimeter nur für einen engen Frequenzbereich des Wechselstromes geeicht sind. Zuletzt wird das vorherige Verfahren an einer Monozelle unter Anschluss einer Gegenspannung betrachtet. Hierzu wird eine Gegenspannung wie in Abb.(b) in den Stromkreis eingeschlossen, welche ca 2 V größer als U_0 ist. Der Strom fließt nun in umgekehrter Richtung, wodurch gilt:

$$U_k = U_0 + IR_i \quad (4)$$

4 Auswertung

4.1 Die U/I -Graphen der verschiedenen Spannungsquellen, sowie ihre daraus bestimmten Größen

4.1.1 Gleichspannungsquelle

Abbildung 4: Die Spannung der Gleichspannungsquelle in Abhängigkeit des gemessenen Stromes.

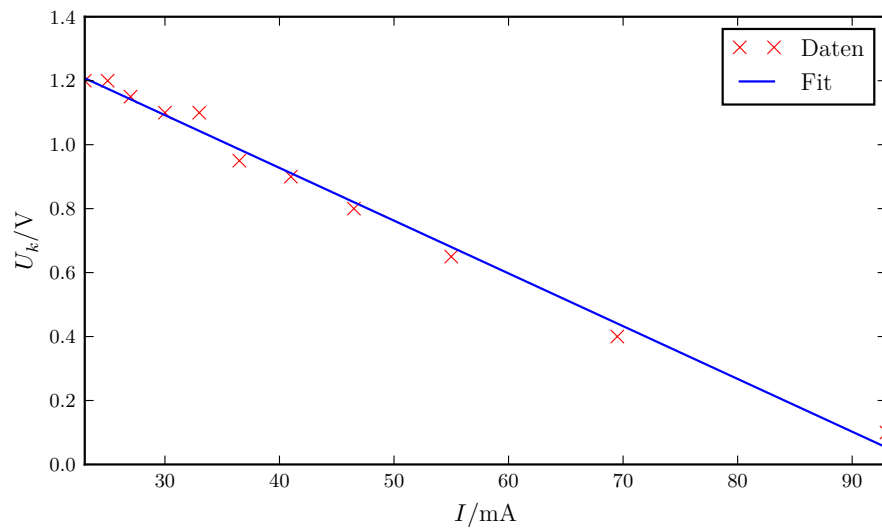


Tabelle 1

I/mA	U_k/V
23,0	1,2
25,0	1,2
27,0	1,15
30,0	1,1
33,0	1,1
36,5	0,95
41,0	0,9
46,5	0,8
55,0	0,65
69,5	0,4
93,0	0,1

Mit den Formeln (5) und (6) und den Werten aus Tabelle 1 folgt:

$$a = -0,01650$$

$$b = 1,59.$$

Damit ergibt sich mit Formel (7):

$$\sigma_y = 0,03$$

und mit den Formeln (8) und (9):

$$\sigma_a = 0,00050$$

$$\sigma_b = 0,02.$$

Hieraus folgt nach Formel (1):

$$R_i = (16,50 \pm 0,50) \Omega$$

$$U_0 = (1,59 \pm 0,02) \text{ V}$$

4.1.2 Gleichspannungsquelle mit Gegenspannung

Abbildung 5: Die Spannung der Gleichspannungsquelle mit Gegenstrom in Abhängigkeit des gemessenen Stromes.

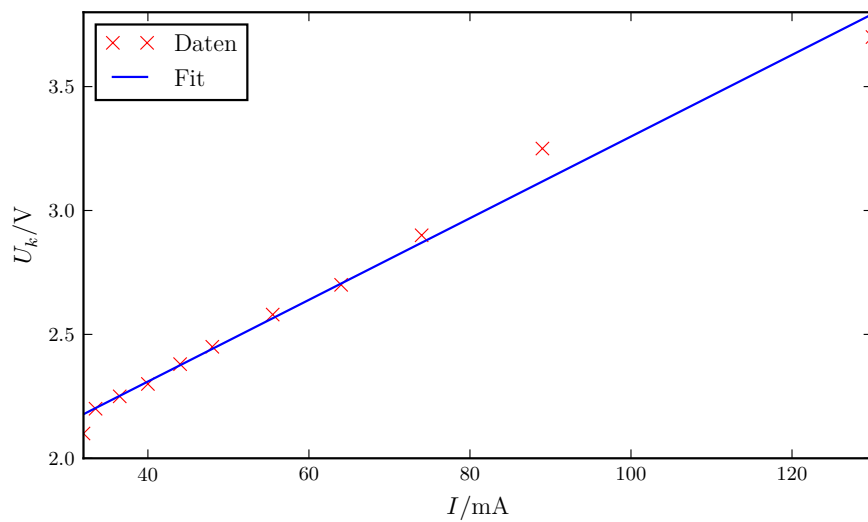


Tabelle 2

I/mA	U_k/V
32,0	2,1
33,5	2,2
36,5	2,25
40,0	2,3
44,0	2,38
48,0	2,45
55,5	2,58
64,0	2,7
74,0	2,9
89,0	3,25
130,0	3,7

Mit den Formeln (5) und (6) und den Werten aus Tabelle 2 folgt:

$$a = 0,01648$$

$$b = 1,65.$$

Damit ergibt sich mit Formel (7):

$$\sigma_y = 0,06$$

und mit den Formeln (8) und (9):

$$\sigma_a = 0,00065$$

$$\sigma_b = 0,04.$$

Hieraus folgt nach Formel (4):

$$R_i = (16,48 \pm 0,65) \Omega$$

$$U_0 = (1,65 \pm 0,04) \text{ V}$$

4.1.3 Rechteck-Spannungsquelle

Abbildung 6: Die Spannung der Rechteckspannungsquelle in Abhängigkeit des gemessenen Stromes.

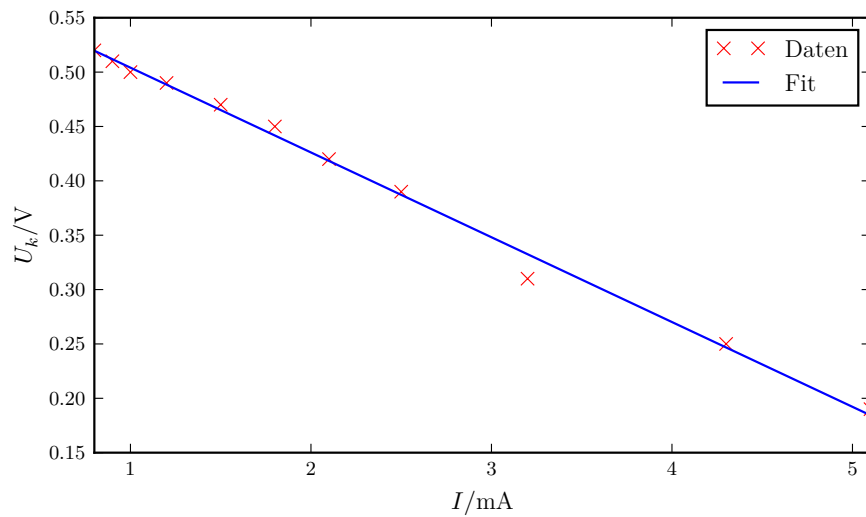


Tabelle 3

I/mA	U_k/V
0,8	0,52
0,9	0,51
1,0	0,5
1,2	0,49
1,5	0,47
1,8	0,45
2,1	0,42
2,5	0,39
3,2	0,31
4,3	0,25
5,1	0,19

Mit den Formeln (5) und (6) und den Werten aus Tabelle 3 folgt:

$$a = -0,07798$$

$$b = 0,582.$$

Damit ergibt sich mit Formel (7):

$$\sigma_y = 0,009$$

und mit den Formeln (8) und (9):

$$\sigma_a = 0,00191$$

$$\sigma_b = 0,005.$$

Hieraus folgt nach Formel (1):

$$R_i = (77,98 \pm 1,91) \Omega$$

$$U_0 = (0,582 \pm 0,005) \text{ V}$$

4.1.4 Sinus-Spannungsquelle

Abbildung 7: Die Spannung der Sinusspannungsquelle in Abhängigkeit des gemessenen Stromes

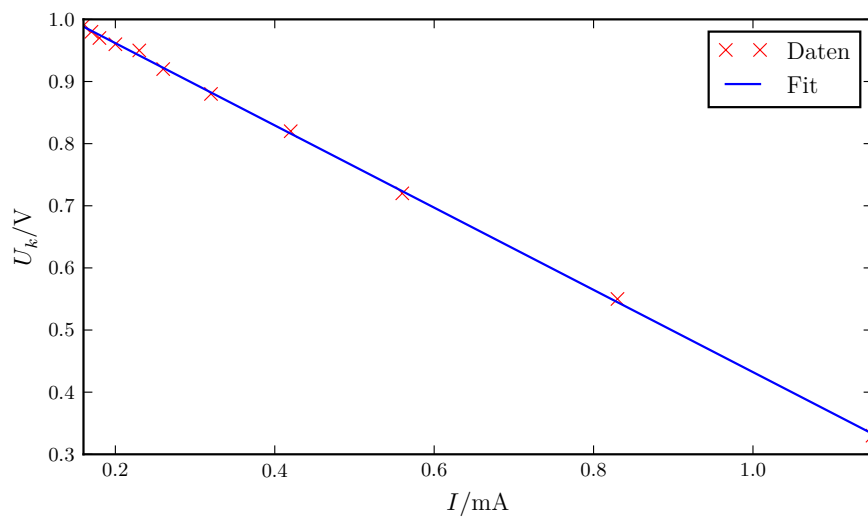


Tabelle 4

I/mA	U_k/V
0,16	0,99
0,17	0,98
0,18	0,97
0,2	0,96
0,23	0,95
0,26	0,92
0,32	0,88
0,42	0,82
0,56	0,72
0,83	0,55
1,15	0,33

Mit den Formeln (5) und (6) und den Werten aus Tabelle 4 folgt:

$$a = -0,66185$$

$$b = 1,094.$$

Damit ergibt sich mit Formel (7):

$$\sigma_y = 0,004$$

und mit den Formeln (8) und (9):

$$\sigma_a = 0.00432$$

$$\sigma_b = 0,002.$$

Hieraus folgt nach Formel (1):

$$R_i = (661,85 \pm 4,32) \Omega$$

$$U_0 = (1,094 \pm 0,002) \text{ V}$$

4.2 Der systematische Fehler einer unmittelbaren U_0 -Bestimmung mit einem Voltmeter

Der systematische Fehler einer unmittelbaren Leerlaufspannungsermittlung folgt aus der Näherung, dass der Innenwiderstand des Voltmeters unendlich betrage. Da dies bei einem realen Voltmeter nicht der Fall ist kommt es zu einem systematischen Fehler. Aus der Formel (1) ergibt sich sofort

$$U_0 = \frac{U_k}{R_v}(R_v + R_i) \quad (5)$$

und daraus der absolute systematische Fehler

$$\Delta U = \frac{U_k}{R_v} R_i. \quad (6)$$

Es ergibt sich ein systematischer Fehler von $2,64 \cdot 10^{-6}$ V.

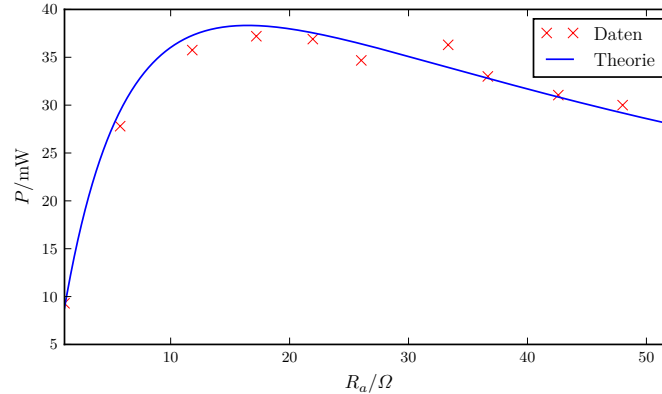
4.3 Der systematische Fehler aufgrund einer falschen Platzierung des Voltmeters

Auch die falsche Positionierung des Voltmeters im Stromkreis führt zu einem systematischen Fehler. Fügt man das Voltmeter wie in Abbildung 2 an der Stelle H ein, also hinter dem Amperemeter, müsste man dessen kleinen, aber durchaus existenten Innenwiderstand miteinbeziehen.

4.4 Leistungsanpassung einer Monozelle

Trägt man die mit Formel (4) bestimmte Leistung gegen $R_a = U_k/I$ auf erhält man den folgenden Graphen:

Abbildung 8: Die der Monozelle entnehmbare Leistung in Abhängigkeit des Widerstandes



Beim Vergleich mit der Theoriekurve nach Formel (3) fällt auf, dass die Messergebnisse zwar schwanken, sich jedoch keine eindeutige Tendenz feststellen lässt. Somit liegen die Punkte im Bereich der Messungenauigkeit.

5 Diskussion

Zunächst werden die U_0/I -Kurven der einzelnen Spannungsquellen sowie ihre Auswertung diskutiert.

Die Lineare Regression der U_0/I der Messergebnisse zur Gleichspannungsquelle ohne Gegenspannung lässt eine gute Messung vermuten, betrachtet man den einzelnen Ausreißer bei (36,5 | 0,95) als Messfehler. Im Detail liegt die Standardabweichung der Ausgleichsgeradensteigung bei ca. 3 %. Das durch den y-Achsenabschnitt bestimmte U_0 besitzt eine Standardabweichung von ca. 1,3 %, wobei ein möglicher systematischer Fehler vernachlässigt wird. Die y-Standardabweichung der Messwerte zur Ausgleichsgeraden liegt nur bei ca. 1,9 %, was die Gerade aussagekräftig macht.

Die Messung der Gleichstromspannungsquelle mit Gegenspannung bekräftigt die Ergebnisse von U_0 und R_i aus der Messreihe von Tabelle 2. Zumindest bei den bestimmten R_i kommt es zu Überschneidungen der zugehörigen σ Umgebungen. Die Standardabweichungen der zweiten Messreihe liegen zwar leicht über denen der ersten Messung, sind aber im Rahmen. Die großen Abweichungen der letzten beiden Messwerte können als Messfehler klassifiziert werden. Eine mögliche Fehlerquelle für die Ausreißer liegt beim in der Schaltung verbauten Taster, welcher während der Messung lang gedrückt werden musste. Eine leichte Druckabnahme auf den Schalter konnte somit zu einer Verfälschung

der gemessenen Werte führen. Im Gegenzug zu R_i zeigt sich, dass die aus den beiden Ausgleichsrechnungen bestimmten Werte für U_0 nicht in den angegebenen σ -Umgebungen zueinander liegen. Dies lässt sich durch systematische Fehler der Messgeräte bzw. der Schaltungskomponenten erklären.

Auch die Lineare Regression der Messergebnisse der Rechteckspannung lässt eine gute Messung vermuten. Da der Schalter sowohl bei Rechteck- als auch bei der folgenden Sinusspannung nicht mehr gedrückt werden musste, entfällt diese Fehlerquelle. Dies zeigt sich auch leicht in den bestimmten Unsicherheiten, welche im allgemeinen etwas kleiner sind. So liegt die Unsicherheit des neuen R_i bei unter 2,5 %, die der Effektivspannung sogar bei unter 1 %. Auch hier ist der Ausreißer wahrscheinlich ein einfacher Messfehler.

Zum Schluss liefert die Messung mit der Sinusspannungsquelle die besten Ergebnisse. Die Standardabweichung von R_i liegt bei unter 1 %, die von U_0 sogar bei unter 0,5 %. Es existieren auch keine größeren Ausreißer.

Der in 4.3 bestimmte systematische Fehler ist mit $2,64 \mu\text{V}$ in Relation zu den bestimmten U_0 viel zu gering um einen wichtigen Unterschied in Rechnungen zu erzeugen. Somit ist die Näherung, welche bei direkter Messung der Leerlaufspannung mit einem Voltmeter durchgeführt wurde, vollkommen gerechtfertigt. Die durch R_i hervorgerufene Unsicherheit ist sogar nochmals zwei Größenordnungen kleiner, womit auch sie vernachlässigt werden kann.

Zu einem anderen Ergebnis kommt man beim systematischen Fehler in 4.4, welcher durch falsche Positionierung des Voltmeters hervorgerufen wird. Hier ist der Innenwiderstand eines üblichen Amperemeters zwar klein, würde aber nachher vollständig vom ermittelten Innenwiderstand R_i abgezogen werden müssen. Bei einem typischen Wert von $1,8 \Omega$ bei einer Reichweite von 400 mA [2] würde dies sich deutlich in dem bestimmten R_i bemerkbar machen.

Die Leistungskurve weist im allgemeinen wie bereits beschrieben keine Anzeichen eines systematischen Fehlers auf. Allein im Bereich bis zum Theoriemaximum könnte eine leichte Tendenz nach unten vorliegen. Die Messergebnisse liegen daher hauptsächlich im Bereich der Messungenauigkeit. Der hintere Bereich zeigt keinerlei Tendenzen. Eine Messung mit mehr Messproben könnte diese Unklarheit lösen.

6 Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Versuch 301 - EMK und Innenwiderstand von Spannungsquellen. 2014.
<http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf>
(abgerufen am 28.11.2016)
- [2] Newcombe, Chuck: Can you live with the burden? (o.J.).
<http://www.fluke.com/fluke/uses/comunidad/fluke-news-plus/articlecategories/electrical/burdenvoltage> (abgerufen am 15.11.2016)