V406

Beugung am Spalt

Lukas Rolf
lukas.rolf@tu-dortmund.de

Yannik Brune
yannik.brune@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.06.2017

Abgabe: 27.06.2017

Inhaltsverzeichnis

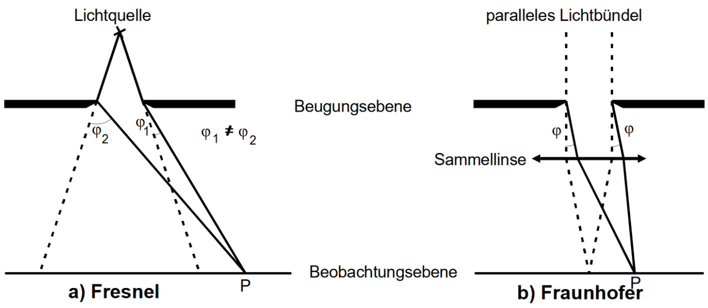
1 Zielsetzung

Es soll die Beugung von Licht an einem Einzel- und zwei Doppelspalten untersucht werden. Insbesondere soll beim Einzelspalt die Spaltbreite aus der Beugungsfigur bestimmt werden.

2 Theorie

Beugung ist eine typische Welleneigenschaft. Man spricht von Beugung an einem Hindernis, wenn ein Welle beim Passieren ihre Ausbreitungsrichtung verändert. Gleichzeitig kommt es zur Interferenz also zur Überlagerung von Wellen. Die Intensität der Welle hinter dem Hindernis in einem bestimmten Abstand wird Beugungsfigur genannt. Eine mögliche Erklärung für Beugung liefert das Huygenssche Prinzip. Dieses besagt, das eine Welle sich in jedem Punkt der Welle wie eine Kugelwelle ausbreitet und die Superposition dieser die Welle ergeben. Die auslaufende Kugelwelle ist proportional zu $\exp(i(kr-wt+\varphi))/r$, wobei k die Wellenzahl, r der Abstand zum Ausgangspunkt der Kugelwelle, w die Kreisfrequenz der Welle und t die Zeit ist. Bei Beugung wird besonders zwischen zwei verschiedenen Näherungen unterschieden: der Fresnel-Beugung im nahem Bereich und der Fraunhofer-Beugung im fernem Bereich. Im Folgendem wird nur die Fraunhofer-Beugung betrachtet.

Abbildung 1: Exemplarische Darstellung der Fresnel- und Frauenhoferbeugung an einer Blende [1].



2.1 Beugung von kohärenten Wellen an einer Blende

Im Folgendem wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass eine kohärente und monochromatische Welle homogener Intensität senkrecht auf die Öffnung einer Blende trifft, also dass die Welle an jeder Stelle der Öffnung die selbe Phase φ, Amplitude A und zusätzlich gleiche Wellenzahl k besitzt (entspricht Fraunhofer-Näherung). Nach dem Huygensschen Prinzip ergibt sich dann durch Summation über alle Amplituden der Kugelwellen für die Welle ψ hinter der Öffnung

$$\psi = A\sum_j \frac{\exp(i(kr_j - wt + \varphi))}{r_j} = A\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\frac{\exp(i(k|\vec{a}_0 - \vec{x}| - wt + \varphi))}{|\vec{a}_0 - \vec{x}|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (1)$$

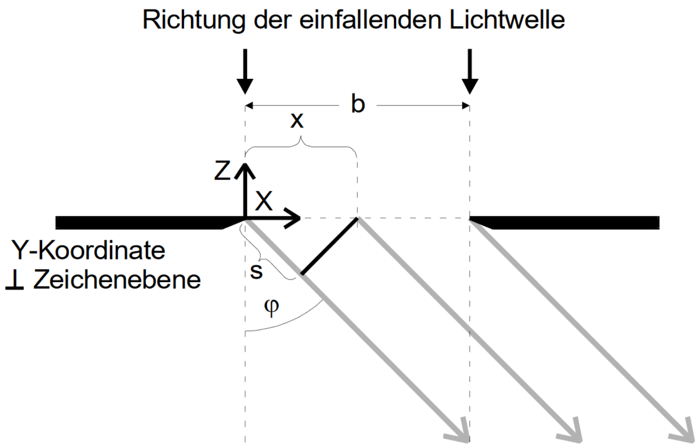
wobei $F(x,y)$ die Blendenfunktion, $\vec{x} = (x,y,0)^{\mathrm{T}}$ eine Position auf der Blende und $\vec{a}_0 = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$ die Position eines Punktes hinter der Blende ist. Die Blendenfunktion $F(x,y)$ ist gleich Eins für die (x,y) an denen die Blende durchlässig ist und ansonsten gleich Null. Nun ist jedoch keine allgemeine Stammfunktion von (1) bekannt. Deswegen wird die Näherung $|\vec{a}_0 - \vec{x}| \approx |\vec{a}_0| - \hat{\vec{a}}_0\vec{x}$ und $1/|\vec{a}_0 - \vec{x}| = 1/\vec{a}_0$ für $|\vec{a}_0| \gg |\vec{x}|$ verwendet, wobei $\hat{\vec{a}}_0$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}_0$ ist. Dies entspricht der Fraunhofer-Näherung. Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich bei einen festen Abstand $|\vec{a}_0|$ zur Blende

$$\psi = C \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y) \exp\left(-ik\hat{\vec{a}}_0\vec{x}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{2}$$

mit der Konstanten C bezüglich der Richtung von $\vec{a}_0$, was einer Fouriertransformation der Blendenfunktion entspricht.

2.2 Beugung von kohärenten Wellen an einem Einzel bzw. N-fach Spalt

Abbildung 2: Skizze von einem Einzelspalt [1].



Für eine vorgegebene Blendenfunktion lässt sich das Integral in (2) berechnen. Im Fall eines Einzelspalts der Breite b in Richtung der x-Achse ergibt sich

$$\psi_1 = 2\pi C a \delta\left(k\frac{a_2}{|\vec{a}_0|}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\frac{a_1}{|\vec{a}_0|}b\right)}{\frac{1}{2}k\frac{a_1}{|\vec{a}_0|}b} = C' a\delta(k\sin(\theta))\frac{\sin(\eta)}{\eta} \tag{3}$$

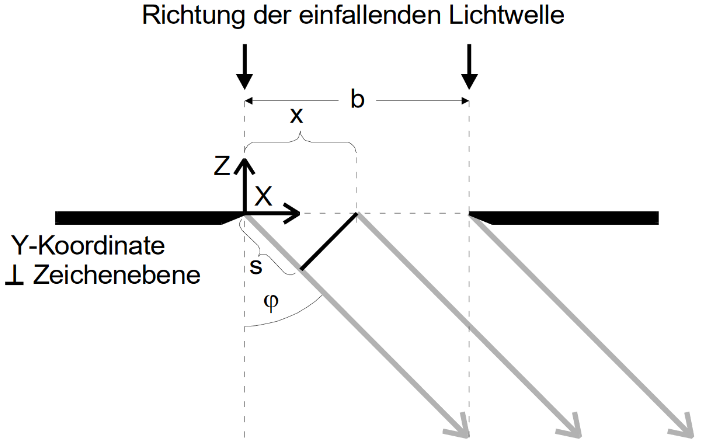
mit

$$\eta = \frac{1}{2}\sin(\varphi)kb. \tag{4}$$

Daraus folgt für die Intensität hinter dem Einzelspalt in Abhängigkeit von φ

$$I_1 \propto \frac{\sin^2(\eta)}{\eta^2}. \tag{5}$$

Abbildung 3: Skizze von einem Doppelspalt ($N = 2$) [1].



Beim einem N-fach Spalt mit gleichen Breiten b und gleichen Abständen d ergibt sich für die Welle nach Formel (2) durch Superposition

$$\begin{aligned}\psi_N &= C\sum_{j=0}^{N-1}\int_{\mathbb{R}^2} F_1(x-x_j, y-y_j)\exp\left(-ik\hat{\vec{a}}_0\vec{x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= C\int_{\mathbb{R}^2} F_1(x',y')\exp\left(-ik\hat{\vec{a}}_0\vec{x}'\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\sum_{j=0}^{N-1}\exp\left(-ik\frac{a_1}{|\vec{a}_0|}jd\right)\\ &= \psi_1 S_N,\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $F_1(x,y)$ die Blendenfunktion von einem Einzelspalt und S_N der Formfaktor ist. Für die Intensität beim N-fach Spalt gilt somit

$$I_N = I_1 S_N^2 \propto \frac{\sin^2(b\eta')}{(b\eta')^2}\frac{\sin^2(Nd\eta')}{\sin^2(d\eta')} \tag{7}$$

mit

$$\eta' = \frac{1}{2}\sin(\varphi)k. \tag{8}$$

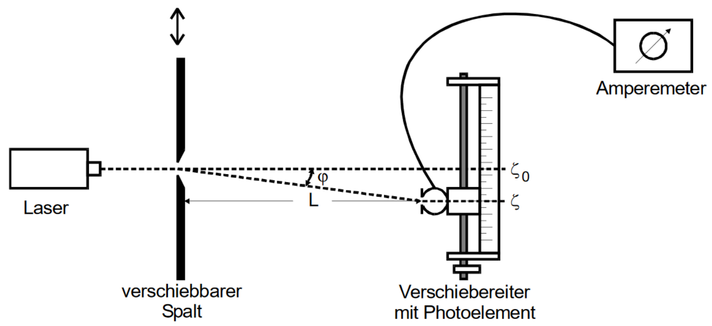
Die lokalen Maxima von S_N werden Hauptmaxima genannt, falls dort $S_N = N$ gilt und ansonsten Nebenmaxima. Somit folgt aus Formel (7) das bei einem N-Fach Spalt zwischen zwei Hauptmaxima $N-2$ Nebenmaxima liegen. Tatsächlich geht Formel (7) für $N = 1$ wieder in Formel (5) über. Für den Spezialfall $N = 2$ ergibt sich für die Intensität

$$I_2 = I_1 S_2^2 \propto \frac{\sin^2(b\eta')}{(b\eta')^2}\cos^2(d\eta'). \tag{9}$$

3 Aufbau

In den theoretischen Überlegungen sind wir von kohärentem und monochromatischem Licht ausgegangen. Dies wird im Versuchsaufbau in guter Näherung durch einen He-

Abbildung 4: Skizze des Versuchsaufbaus zur Messung der Beugungsfiguren [1].



Ne-Laser mit einer Wellenlänge $\lambda = 635\,\mathrm{nm}$ realisiert. Dieser trifft senkrecht auf einen Einzel- bzw. Doppelspalt ($N = 1$ bzw. $N = 2$), an welchem das Licht gebeugt wird. In einer Entfernung von ca. 126,5 cm zur Blende befindet sich ein Verschiebereiter mit Photoelement. Das Photoelement gibt einen Strom ab der proportional zur auftreffenden Lichtintensität ist. Dieser Strom kann an einem Nanoamperemeter abgelesen werden.

4 Durchführung

Zunächst wird der Abstand des Verschiebereiters zu der Blende notiert. Danach wird das Nanoamperemeter eingeschaltet und der Dunkelstrom I_{du} gemessen und notiert. Anschließend wird der jeweilige Spalt, von welchem die Beugungsfigur vermessen werden soll eingespannt. Nun wird das Photoelement von der Mitte zwischen dem ersten und dem zweitem Hauptmaxima in mindestens 50 Schritten auf die an der optischen Achse gespiegelte Position bewegt und jeweils die Position und der gemessene Strom notiert. Es sollen die Beugungsfiguren von einem Einzel- und zwei verschiedenen Doppelspalten aufgenommen werden.

5 Auswertung

Die Graphen wurden sowohl mit Matplotlib [2] als auch NumPy [4] erstellt. Die Fehlerrechnung wurde mithilfe von Uncertainties [3] durchgeführt. Der verwendete Einzelspalt besitzt eine Breite von 0,075 mm. Der erste Doppelspalt hat eine Spaltbreite von 0,25 mm bei einem Spaltabstand von 0,15 mm. Der zweite Doppelspalt hat eine Spaltbreite von 0,1 mm bei einem Spaltabstand von 0,4 mm.

5.1 Die gemessenen Daten

Tabelle 1: Die gemessenen Daten am Einzelspalt.

Δx/mm	Δx/°	I/nA
−20,0	−0,906	0,2
−19,0	−0,861	0,3
−18,0	−0,815	0,6
−17,5	−0,793	0,8
−17,0	−0,770	1,0
−16,0	−0,725	1,5
−15,5	−0,702	1,8
−15,0	−0,679	2,0
−14,0	−0,634	2,2
−13,0	−0,589	2,1
−12,5	−0,566	2,0
−12,0	−0,544	1,7
−11,0	−0,498	1,2
−10,0	−0,453	0,9
−9,0	−0,408	1,1
−8,0	−0,362	2,5
−7,0	−0,317	5,2
−6,5	−0,294	7,2
−6,0	−0,272	9,6
−5,5	−0,249	12,6
−5,0	−0,226	15,6
−4,0	−0,181	22,1
−3,0	−0,136	29,6
−2,0	−0,091	35,6
−1,0	−0,045	41,6
0,0	0,000	47,6
1,0	0,045	46,6
2,0	0,091	42,6
3,0	0,136	37,6
4,0	0,181	31,6
5,0	0,226	23,6
5,5	0,249	20,6
6,0	0,272	16,6
6,5	0,294	13,6
7,0	0,317	10,6
8,0	0,362	5,6
9,0	0,408	3,1
10,0	0,453	1,4
11,0	0,498	1,2
12,0	0,544	1,6
12,5	0,566	2,0
13,0	0,589	2,4
14,0	0,634	3,0
15,0	0,679	3,2
15,5	0,702	3,1
16,0	0,725	2,8
17,0	0,770	2,3
17,5	0,793	1,9
18,0	0,815	1,6
19,0	0,861	0,8
20,0	0,906	0,4

Tabelle 2: Die gemessenen Daten am ersten Doppelspalt.

Δx/mm	Δx/°	I/nA	Δx/mm	Δx/°	I/nA
−20,0	−0,906	5	0,5	0,023	6200
−19,5	−0,883	6	1,0	0,045	4600
−19,0	−0,861	9	1,5	0,068	2100
−18,5	−0,838	16	2,0	0,091	600
−18,0	−0,815	20	2,5	0,113	850
−17,5	−0,793	14	3,0	0,136	1600
−17,0	−0,770	10	3,5	0,159	1450
−16,5	−0,747	20	4,0	0,181	800
−16,0	−0,725	31	4,5	0,204	280
−15,5	−0,702	32	5,0	0,226	60
−15,0	−0,679	24	5,5	0,249	56
−14,5	−0,657	14	6,0	0,272	120
−14,0	−0,634	12	6,5	0,294	195
−13,5	−0,611	18	7,0	0,317	235
−13,0	−0,589	36	7,5	0,340	170
−12,0	−0,544	72	8,0	0,362	68
−11,5	−0,521	46	8,5	0,385	40
−11,0	−0,498	22	9,0	0,408	63
−10,5	−0,476	10	9,5	0,430	76
−10,0	−0,453	12	10,0	0,453	60
−9,5	−0,430	22	10,5	0,476	41
−9,0	−0,408	42	11,0	0,498	36
−8,5	−0,385	55	11,5	0,521	17
−8,0	−0,362	50	12,0	0,544	30
−7,5	−0,340	40	12,5	0,566	64
−7,0	−0,317	90	13,0	0,589	87
−6,5	−0,294	180	13,5	0,611	70
−6,0	−0,272	200	14,0	0,634	35
−5,5	−0,249	120	14,5	0,657	12
−5,0	−0,226	60	15,0	0,679	9
−4,5	−0,204	50	15,5	0,702	13
−4,0	−0,181	120	16,0	0,725	23
−3,5	−0,159	500	16,5	0,747	34
−3,0	−0,136	1210	17,0	0,770	32
−2,5	−0,113	1880	17,5	0,793	18
−2,0	−0,091	1580	18,0	0,815	9
−1,5	−0,068	760	18,5	0,838	15
−1,0	−0,045	780	19,0	0,861	23
−0,5	−0,023	2800	19,5	0,883	20
0,0	0,000	5000	20,0	0,906	12

Tabelle 3: Die gemessenen Daten am zweiten Doppelspalt.

Δx/mm	Δx/°	I/nA
−20,0	−0,906	17
−19,5	−0,883	10
−19,0	−0,861	18
−18,5	−0,838	20
−18,0	−0,815	11
−17,5	−0,793	11
−16,5	−0,747	7
−16,0	−0,725	6
−15,5	−0,702	12
−15,0	−0,679	11
−14,5	−0,657	15
−14,0	−0,634	32
−13,5	−0,611	28
−13,0	−0,589	24
−12,5	−0,566	56
−12,0	−0,544	59
−11,5	−0,521	31
−11,0	−0,498	48
−10,5	−0,476	52
−10,0	−0,453	30
−9,5	−0,430	22
−9,0	−0,408	31
−8,5	−0,385	20
−8,0	−0,362	29
−7,5	−0,340	66
−7,0	−0,317	56
−6,5	−0,294	125
−6,0	−0,272	275
−5,5	−0,249	200
−5,0	−0,226	260
−4,5	−0,204	630
−4,0	−0,181	560
−3,5	−0,159	430
−3,0	−0,136	940
−2,5	−0,113	900
−2,0	−0,091	560
−1,5	−0,068	1000
−1,0	−0,045	1300
−0,5	−0,023	600
0,0	0,000	800
0,5	0,023	1100
1,0	0,045	600
1,5	0,068	500
2,0	0,091	720
2,5	0,113	390
3,0	0,136	220
3,5	0,159	310
4,0	0,181	200
4,5	0,204	70
5,0	0,226	77
5,5	0,249	48
6,0	0,272	13
6,5	0,294	14
7,0	0,317	20
7,5	0,340	16
8,0	0,362	33
8,5	0,385	51
9,0	0,408	34
9,5	0,430	38
10,0	0,453	62
10,5	0,476	42
11,0	0,498	23
12,5	0,566	34
13,0	0,589	25
13,5	0,611	7
14,5	0,657	9
15,0	0,679	3
15,5	0,702	6
16,0	0,725	10
16,5	0,747	8
17,0	0,770	14
17,5	0,793	22
18,0	0,815	15
18,5	0,838	14
19,0	0,861	24
19,5	0,883	14
20,0	0,906	6

5.2 Bestimmung der Spaltbreite eines Einzelspaltes aus seinem Beugungsbild

Zunächst wird die Spaltbreite des verwendeten Einzelspaltes aus dem entstandenen Beugungsbildes bestimmt. Mit den Daten aus Tabelle 1 ergibt sich der Graph in Abb. 5. Auf Basis von Formel (5) folgt die nichtlineare Ausgleichsrechnung der Form:

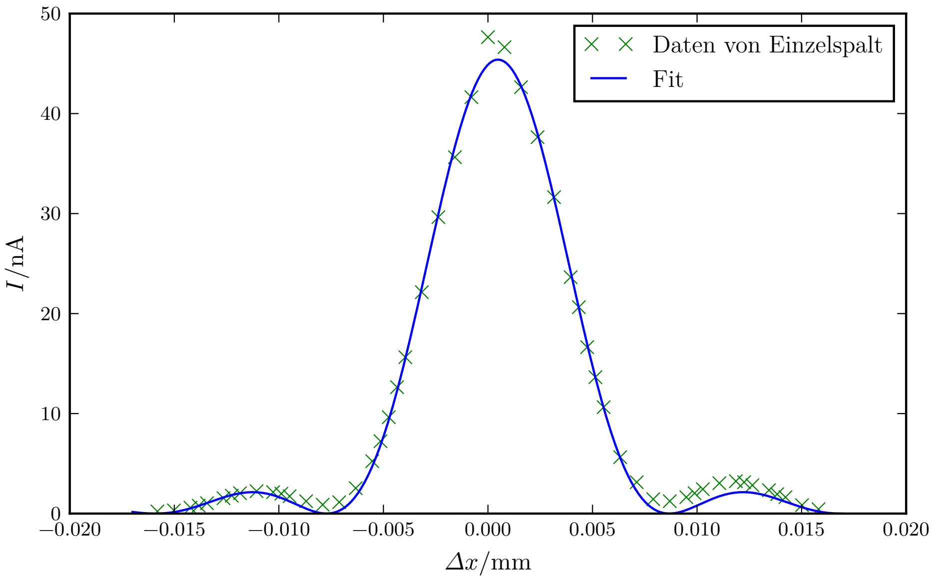
$$y(x) = A\left(\frac{\sin(B(x+C))}{(x+C)}\right)^2, \tag{10}$$

wobei sich die Spaltbreite b durch

$$b = \frac{B\lambda}{\pi} \tag{11}$$

berechnet. Um eine Ausgleichsrechnung dieser Form durchführen zu können wird $\sin(\varphi)$ mit $\tan(\varphi)$ genähert. Da Δx nur wenige Millimeter groß ist und die Entfernung von Spalt und Laser 126,5 cm beträgt, ist diese Näherung möglich. Mit den Daten aus Tabelle 1 folgen die Parameter $A = 87\,000 \pm 439$, $B = 383 \pm 2$, $C = (-0{,}60 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$ und die Spaltbreite $b = (0{,}0774 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{mm}$. Der Parameter C ist nach oben beschriebenen Maß bereits in mm umgeformt worden.

Abbildung 5: Das bestimmte Intensitätenbeugungsbild des Einzelspaltes mit der Stromstärke gegenüber dem Abstand zur Mitte aufgetragen.



5.3 Betrachtung der beiden vermessenen Doppelspaltbeugungsbilder

Nun werden die experimentellen Messwerte der beiden Doppelspalte der Tabellen 2 bzw. 3 mit ihren zugehörigen Theoriegraphen nach Formel (9) in den Graphen 6 und 7 verglichen. Um eine bessere Übereinstimmung mit den Werten zu erreichen wird

Abbildung 6: Das bestimmte Intensitätenbeugungsbild des ersten Doppelspaltes mit der Stromstärke gegenüber dem Abstand zur Mitte aufgetragen.

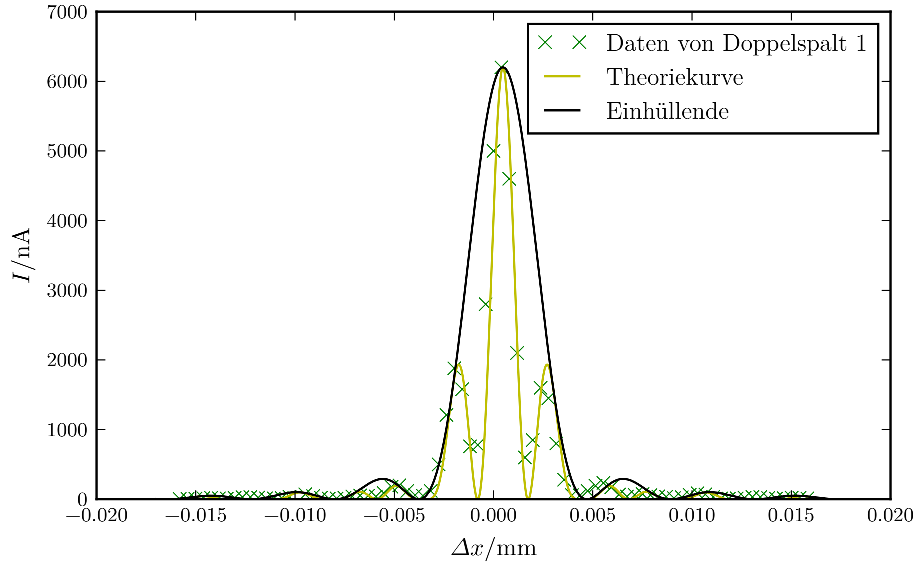
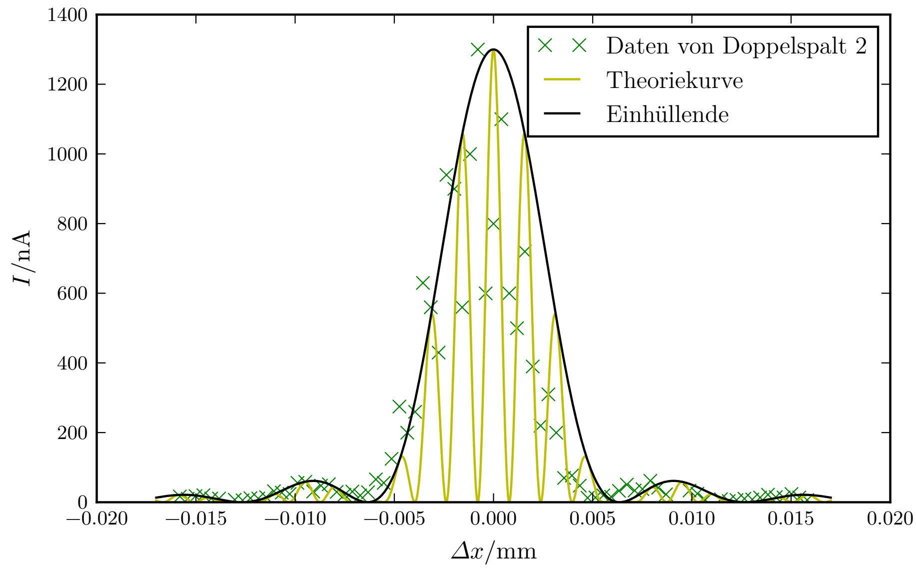


Abbildung 7: Das bestimmte Intensitätenbeugungsbild des zweiten Doppelspaltes mit der Stromstärke gegenüber dem Abstand zur Mitte aufgetragen.



der beim Einzelspalt bestimmte Korrekturwert beim Graphen des ersten Doppelspalts berücksichtigt. Der Zweite Doppelspalt zeigt in dieser Hinsicht eine Verschlechterung, weshalb der Korrekturterm dort weggelassen wird.

Es ist erkennbar, dass die Messwerte, die Theoriekurven in beiden Fällen ungefähr abbilden. Der Graph des ersten Doppelspalts weist weniger dichte und im allgemeinen auch kleinere Peaks auf als der Zweite. Der Kurvenverlauf des Ersten weist zudem eine weitaus bessere Übereinstimmung mit den Werten auf, als die des Zweiten. Die dargestellten Einhüllenden, welche nach Formel (5) berechnet wurden, verhalten sich analog. Die Ursachen hierfür müssen in der Diskussion geklärt werden.

6 Diskussion

Die Auswertung hat einige Ergebnisse erbracht, welche nun noch zu diskutieren sind. Zunächst folgt der Einzelspalt. Für diesen wurde eine Spaltbreite von $b = (0{,}0774 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{mm}$ bestimmt. Ein Vergleich mit der auf der Blende angegeben Spaltbreite ergibt einen relativen Fehler von $(3{,}3 \pm 0{,}6)\,\%$. Daher ist die bestimmte Spaltbreite größer als zu erwarten wäre. Dies lässt auf einen systematischen Fehler schließen. Des weiteren ist lässt sich am ermittelten Verschiebungsparameter C erkennen, dass die experimentelle Kurve leicht verschoben gegenüber der Theoriekurve ist. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass der Laser händisch auf den Detektor fokussiert werden musste und dieser daher nicht exakt mittig auf diesen gerichtet war. Zudem war der Laserstrahl breiter als die Detektoröffnung, was eine genaue Ausrichtung noch erschwert hat.

Die experimentellen Messdaten der Intensitätsverläufe der Doppelspaltbeugungen zeigen nur grobe Übereinstimmungen mit den theoretischen Verläufen. Dies lässt sich auf die geringe Zahl der bestimmten Messwerte zurückführen, was vor allem im stark schwankenden Bereich um das Zentrum zu bemerken ist. Da der Zweite Doppelspalt den stärkeren Schwankungen unterliegt, sind die Messungenauigkeiten dementsprechend stärker zu erkennen. Es ist zu vermuten, dass der Laser nach der zweiten Messreihe leicht verstellt wurde und der bestimmte Korrekturparameter deswegen keine Verbesserung beim Graphen des zweiten Doppelspalts erzielt.

Literatur

[1] TU Dortmund. *V406 Beugung am Spalt*. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V406.pdf (besucht am 19. 06. 2017).

[2] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: http://matplotlib.org/ (besucht am 09. 12. 2016).

[3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/ (besucht am 09. 12. 2016).

[4] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: http://www.numpy.org/ (besucht am 09. 12. 2016).