V207

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Lukas Rolf
lukas.rolf@tu-dortmund.de

Yannik Brune
yannik.brune@tu-dortmund.de

Durchführung: 31.01.2017

Abgabe: 07.01.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Es soll die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser mithilfe eines Viskosimeters untersucht werden. Anschließend soll die Reynoldszahl der Strömung aus den Daten bestimmt werden.

2 Theorie

Wird ein Körper durch eine Flüssigkeit bewegt, stößt seine Oberfläche auf die umliegenden Teilchen der Flüssigkeit und es wirkt eine Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ entgegengesetzt seiner Bewegungsrichtung. Sie ist abhängig von Geschwindigkeit und Berührungsfläche des Körpers. Liegen in der Flüssigkeit keine Wirbelströmungen vor, ist die Strömung laminar und $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ lässt sich bei einer Kugelgeometrie mit der stokesschen Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v} \tag{1}$$

beschreiben. Hierbei bezeichnet η die Viskosität des Stoffes und $\vec{v}$ den Geschwindigkeitsvektor des Körper gegenüber der Flüssigkeit. Die Viskosität ist stark Temperaturabhängig und lässt sich für Wasser durch die Andradesche Gleichung

$$\eta(T) = A\exp\left(\frac{B}{T}\right) \tag{2}$$

darstellen. Die Konstanten A und B sind materialspezifisch. Bei der Viskositätsbestimmung nach Höppler wird eine Kugel in die zu untersuchenden Flüssigkeit gesenkt. Es wirkt nun die Reibungskraft der Flüssigkeit $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ und der Auftrieb $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ gegen die Schwerkraft $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ an. Nach einer kurzen Zeit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein und die Kugel sinkt mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn die Fallzeit t, welche die Kugel für die Fallstrecke benötigt, bekannt ist, folgt die Viskosität mit:

$$\eta = K(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}}) \cdot t \tag{3}$$

mit der Kugeldichte ρ_{K}, der Flüssigkeitsdichte ρ_{Fl} und der Apparatekonstante K, in welcher die Kugelgeometrie und die Fallstrecke enthalten sind.

Schlussendlich beschreibt die Reynoldsche Zahl Re das Verhältnis zwischen zwischen Trägheits- und Viskositätskräften, welche auf einen Körper der charakteristischen Länge d wirken. Sie berechnet sich durch:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{4}$$

Mithilfe der Reynoldszahl lässt sich bestimmen ob Strömungen in einer Flüssigkeit laminar sind. Liegt sie unterhalb eines kritischen Wertes Re_{krit}, ist sie laminar, liegt sie darüber ist sie turbulent. Für Wasser liegt dieser bei ca. 2300 [9]. Es ist jedoch zu beachten, dass die bestimmte Reynoldszahl aufgrund der Wahl der charakteristischen Länge nicht eindeutig ist und auch Re_{krit} nur empirisch bestimmt ist. Liegt der bestimmte Wert jedoch weit unterhalb von Re_{krit}, kann trotzdem von einer laminaren Strömung ausgegangen werden.

3 Aufbau

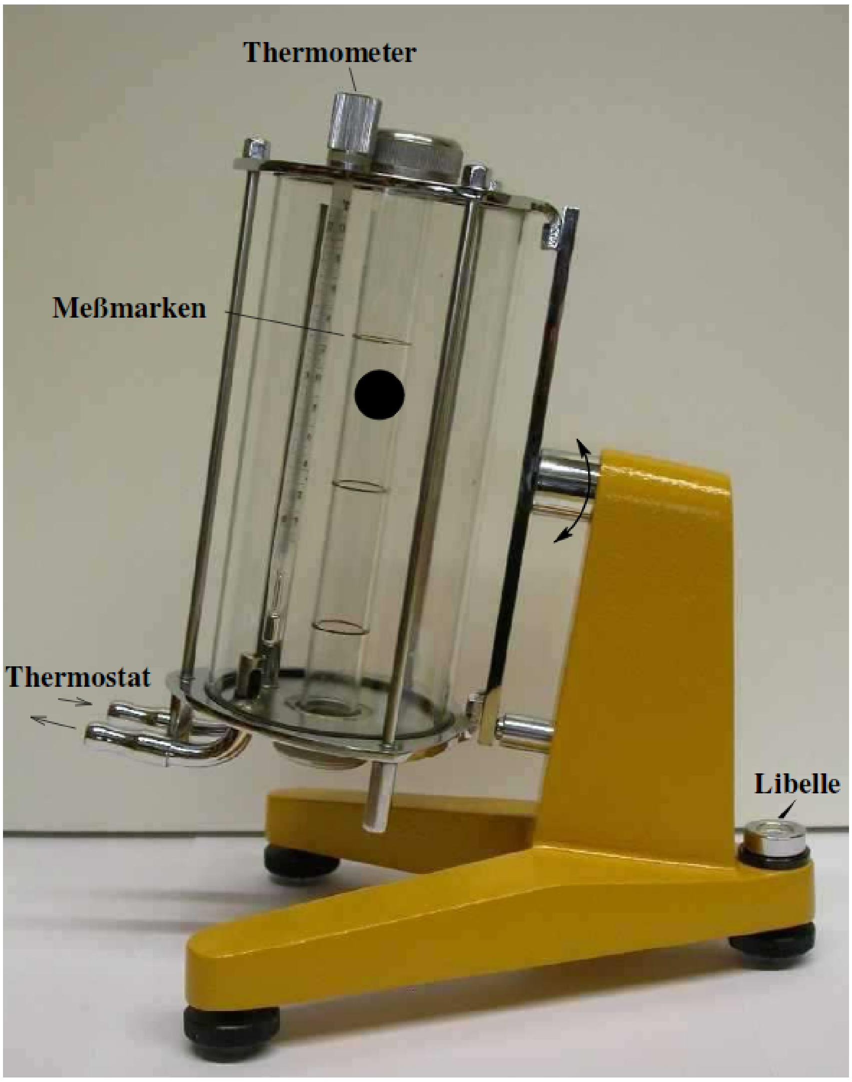


Abbildung 1: Abbildung des Höppler-Viskosimeters [1].

Das Höppler-Viskosimeter besteht aus einer Glasröhre, welche mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. In diese wird eine Kugel gesetzt, deren Durchmesser nur geringfügig kleiner ist als der der Glasröhre. Damit die Kugel nicht gegen die Wände der Fallröhre stößt, ist die Röhre leicht geneigt. Um ein bestimmtes Gefälle zu wahren kann das Viskosimeter über eine Libelle gerade ausgerichtet werden. Zur Messung der Fallzeit sind Markierungen an der Röhre angebracht. Für eine erneute Zeitmessung lässt sich das Viskosimeter an der Befestigung um 180° drehen. Um die Temperaturabhängigkeit der Viskosität zu untersuchen ist ein Wasserbad um die Fallröhre herum angebracht. Diese kann über ein Thermostat kontrolliert erhitzt werden. Die Temperatur kann über ein Thermometer überprüft werden. Dieses ist entweder am Thermostat oder direkt am Wasserbad angebracht.

4 Durchführung

Zuerst werden Durchmesser und Masse von zwei unterschiedlich großen Glaskugeln gemessen um daraus die jeweiligen Dichten zu ermitteln. Im Anschluss wird das Viskosimeter mithilfe der Libelle ausgerichtet, sodass es gerade steht und die Fallröhre anschließend mit destilliertem Wasser aufgefüllt. Um eine Verfälschung der Messzeiten durch Luftblasen zu vermeiden, werden diese vorher mit einem Glasstab entfernt. Anschließend wird zunächst die kleine Kugel unter Zimmertemperatur in die Fallröhre eingesetzt und letztere wasserdicht verschlossen. Danach wird die Fallzeit gemessen, welche die Kugel von der oberen bis zur unteren Markierung benötigt. Dieser Vorgang wird zehn mal wiederholt, zunächst bei der kleineren, danach noch einmal mit der größeren. Im Folgenden wird das Wasser mithilfe des Wasserbades erwärmt. Es werden für die große Glaskugel zusätzlich jeweils zwei Fallzeiten zu zehn verschiedenen Temperaturen unter 70 °C notiert.

5 Auswertung

Die Graphen wurden sowohl mit Matplotlib [3] als auch NumPy [8] erstellt. Die Fehlerrechnung wurde mithilfe von Uncertainties [6] durchgeführt.

5.1 Berechnung der Dichte der Glaskugeln

Tabelle 1: Die gemessenen Werte für den Durchmesser D_{kl} und die Masse m_{kl} der kleinen Glaskugel.

$D_{\mathrm{kl}}/\mathrm{mm}$	$m_{\mathrm{kl}}/\mathrm{g}$
15,63	4,45
15,63	4,46
15,63	4,45

Mit den gemessenen Werten, für die Masse und den Durchmesser, der kleinen Glaskugel aus Tabelle 1 errechnet sich die Masse der kleinen Glaskugel zu

$$m_{\mathrm{kl}} = (4{,}453 \pm 0{,}003)\,\mathrm{g}$$

und der Durchmesser zu

$$D_{\mathrm{kl}} = (15{,}63 \pm 0{,}00)\,\mathrm{mm}.$$

Nun lässt sich die Dichte der kleinen Glaskugel bestimmen. Es ergibt sich

$$\rho_{\mathrm{kl}} = \frac{m_{\mathrm{kl}}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_{\mathrm{kl}}}{2}\right)^3} = (2228 \pm 2)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Mit den gemessenen Werten, für die Masse und den Durchmesser, der großen Glaskugel

Tabelle 2: Die gemessenen Werte für den Durchmesser D_{gr} und die Masse m_{gr} der großen Glaskugel.

$D_{\mathrm{gr}}/\mathrm{mm}$	$m_{\mathrm{gr}}/\mathrm{g}$
15,80	4,96
15,81	4,95
15,80	4,97

aus Tabelle 2 errechnet sich die Masse der großen Glaskugel zu

$$m_{\mathrm{gr}} = (4{,}960 \pm 0{,}006)\,\mathrm{g}$$

und der Durchmesser zu

$$D_{\mathrm{gr}} = (15{,}803 \pm 0{,}003)\,\mathrm{mm}.$$

Nun lässt sich die Dichte der großen Glaskugel bestimmen. Es ergibt sich

$$\rho_{\mathrm{gr}} = \frac{m_{\mathrm{gr}}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_{\mathrm{gr}}}{2}\right)^3} = (2400 \pm 3)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

5.2 Berechnung der Apparatekonstante für die große Glaskugel

Tabelle 3: Die gemessenen Fallzeiten der kleinen Kugel t_{kl} und der großen Kugel t_{gr}.

$t_{\mathrm{kl}}/\mathrm{s}$	$t_{\mathrm{gr}}/\mathrm{s}$
11,94	69,03
12,30	69,13
12,28	69,66
12,12	70,03
12,03	70,25
11,89	70,50
12,19	70,15
12,16	70,10
12,18	70,37
12,07	70,20

Mit den Werten aus Tabelle 3 berechnet sich die Fallzeit der kleinen Glaskugel zu

$$t_{\mathrm{kl}} = (12{,}12 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}$$

und der großen Glaskugel zu

$$t_{\mathrm{gr}} = (69{,}9 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}.$$

Da die Viskosität bei den beiden Messreihen mit verschieden Kugeln die gleiche ist, folgt aus der Formel (3), mit dem Literaturwert für die Dichte des Wasser ρ_{Wasser} (unter Normalbedingungen) von $998\,\mathrm{kg/m^3}$ [2] und der gegebenen Apparatekonstante, der kleinen Glaskugel K_{kl} von $76{,}40 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa\,m^3/kg}$

$$K_{\text{gr}} = \frac{K_{\text{kl}}\left(\rho_{\text{kl}} - \rho_{\text{Wasser}}\right) t_{\text{kl}}}{\left(\rho_{\text{gr}} - \rho_{\text{Wasser}}\right) t_{\text{gr}}} = (11{,}60 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{Pa\,m^3}}{\mathrm{kg}}.$$

Es berechnet sich die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur nach Formel (3) zu

$$\eta = (1138 \pm 4)\,\mathrm{\mu Pa\,s}.$$

5.3 Bestimmung der Parameter A und B der Andradeschen Gleichung

Tabelle 4: Die gemessene Fallzeit t_1 und t_2 der großen Glaskugel bei verschiedenen Temperaturen T und die daraus berechnete Fallzeit t und Viskosität η.

T	t_1/s	t_1/s	t/s	$\eta/\mathrm{\mu Pa\,s}$
27,5	59,63	59,37	$59{,}50 \pm 0{,}13$	968 ± 5
29,5	57,06	57,21	$57{,}14 \pm 0{,}07$	930 ± 4
34,0	52,12	52,01	$52{,}06 \pm 0{,}05$	847 ± 4
38,5	48,10	48,47	$48{,}28 \pm 0{,}18$	786 ± 5
44,0	43,35	43,41	$43{,}38 \pm 0{,}03$	706 ± 3
48,5	40,34	40,20	$40{,}27 \pm 0{,}07$	655 ± 3
53,5	37,25	37,13	$37{,}19 \pm 0{,}06$	605 ± 3
59,0	34,84	35,23	$35{,}03 \pm 0{,}19$	570 ± 4
64,5	31,96	32,07	$32{,}02 \pm 0{,}05$	521 ± 2
70,0	30,18	30,16	$30{,}17 \pm 0{,}01$	491 ± 2

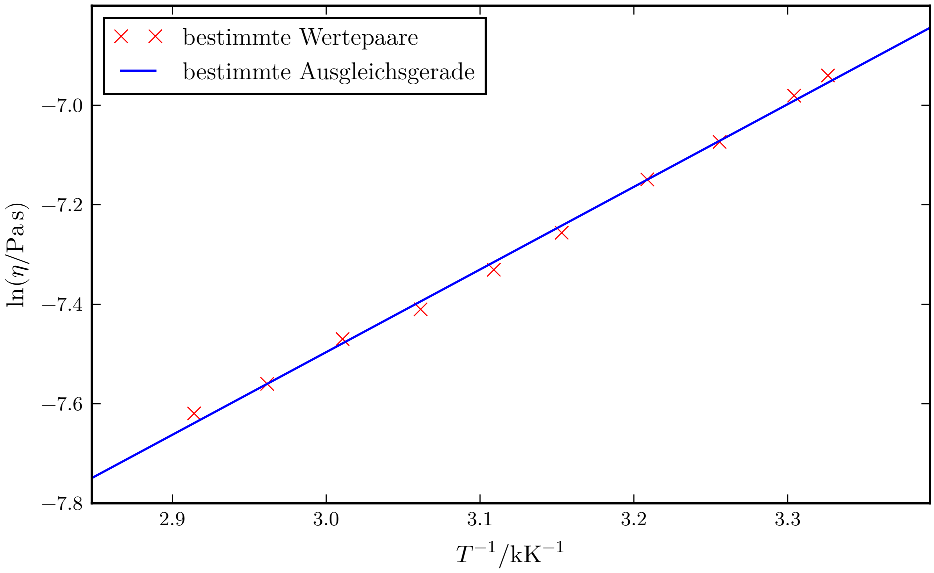
Mithilfe der zuvor bestimmten Werte (die Apparatekonstante K_{gr} und die Dichte ρ_{gr}) berechnet sich in Tabelle 4, mit dem Literaturwert für die Dichte des Wasser von $998\,\mathrm{kg/m^3}$ [2], die Viskosität des Wassers η nach Formel (3) aus den Werten für die Fallzeit t. In dem Graphen in Abbildung 2 ist der natürliche Logarithmus von der Viskosität gegen die reziproke Temperatur aufgetragen. Der Fit in Abbildung 2 besitzt die Form $y = ax + b$. Eine lineare Ausgleichsrechnung der Form $y = ax + b$ mittels SciPy [5] liefert mit den Wertepaaren aus Tabelle 4 nach Formel (2)

$$B = a = (166 \pm 3) \cdot 10^{1}\,\mathrm{K}$$

und

$$A = \exp(b) = (3{,}8 \pm 0{,}4)\,\mathrm{\mu Pa\,s}.$$

Abbildung 2: Der natürliche Logarithmus von der Viskosität η gegen die reziproke Temperatur $1/T$ aufgetragen.



5.4 Bestimmung von Reynoldschen Zahlen

Mithilfe der Formel (4) und einer Falltiefe von 10 cm lässt sich nun die Reynoldsche Zahl Re bei verschiedenen Temperaturen für die Glaskugeln bestimmen. Bei Raumtemperatur von ca. 20 °C berechnet sich die Reynoldsche Zahl bei der kleinen Kugel zu

$$Re_1 = 253 \pm 2,$$

bei der großen Kugel zu

$$Re_2 = 47{,}7 \pm 0{,}2$$

und bei 70 °C bei der großen Kugel zu

$$Re_3 = (26 \pm 4) \cdot 10^1.$$

Da die Reynoldsche Zahl immer weit unter dem kritischem Wert Re_{krit} von 2300 [9] liegt, ist die Strömung in dem Versuch laminar.

6 Diskussion

Zunächst folgt ein Vergleich der Koeffizienten der dynamischen Viskosität. Der bestimmte Wert des Vorfaktors A ist mit $(3{,}8 \pm 0{,}4)\,\mu\text{Pa s}$ ca. dreimal so groß wie der zugehörige Literaturwert. Dieser liegt bei ca. $0{,}96\,\mu\text{Pa s}$ [4]. Die bestimmte Achsenabschnitt liegt mit $(166 \pm 3) \cdot 10^1\,\text{K}$ hingegen ca. 25 % unter dem Literaturwert von 2036 K [4]. Eine mögliche Ursache hierfür ist, dass die am Thermostat abgelesene Temperatur höher ist, falls sich das Fallrohr nicht vollständig erwärmen konnte. Eine weitere mögliche

Fehlerquelle liegt in der zuvor bestimmten Viskosität bei Normaltemperatur. Sie liegt bei ca. 1138 µPa s und entspricht damit mehr einer Temperatur von 15 °C [7] als einer von 20 °C. Dies kann entweder durch einen Messfehler bei der Dichtebestimmung oder einer falsch angegeben Apparatekonstante für die kleine Kugel liegen. Eine Verfälschung der Ergebnisse durch Luftblasen ist nicht zu erwarten. Die bestimmten Reynoldszahlen liegen alle weit unterhalb des kritischen Bereiches. Daher ist es wahrscheinlich, dass die Strömungen laminar sind.

Literatur

[1] TU Dortmund. *V207 Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Viskositaet.pdf (besucht am 01. 02. 2017).

[2] CHEMIE.DE Information Service GmbH. *Wasser (Stoffdaten)*. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Wasser_(Stoffdaten).html (besucht am 01. 02. 2017).

[3] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: http://matplotlib.org/ (besucht am 09. 12. 2016).

[4] Cosmos Indirekt. *Literaturwerte für die Konstanten der Andrade-Gleichung für Wasser*. URL: http://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Andrade-Gleichung (besucht am 03. 02. 2017).

[5] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.18.1. URL: http://www.scipy.org/ (besucht am 09. 12. 2016).

[6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/ (besucht am 09. 12. 2016).

[7] Uni Magdeburg. *Literaturwerte der Viskosität von Wasser*. URL: http://www.uni-magdeburg.de/isut/LSS/Lehre/Arbeitsheft/IV.pdf (besucht am 03. 02. 2017).

[8] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: http://www.numpy.org/ (besucht am 09. 12. 2016).

[9] Wasser-Wissen. *Die Reynoldszahl von Wasser*. URL: http://www.wasser-wissen.de/abwasserlexikon/r/reynoldszahl.htm (besucht am 01. 02. 2017).