

V204

## **Wärmeleitung von Metallen**

Lukas Rolf

[lukas.rolf@tu-dortmund.de](mailto:lukas.rolf@tu-dortmund.de)

Yannik Brune

[yannik.brune@tu-dortmund.de](mailto:yannik.brune@tu-dortmund.de)

Durchführung: 17.01.2017

Abgabe: 24.01.2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Aufbau</b>	<b>4</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>5</b>
4.1 Statische Methode . . . . .	5
4.2 Dynamische Methode . . . . .	5
<b>5 Auswertung</b>	<b>5</b>
5.1 Statische Methode . . . . .	5
5.2 Dynamische Methode . . . . .	9
<b>6 Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Zielsetzung

Es werden die Wärmeleitkoeffizienten verschiedener Metalle untersucht.

## 2 Theorie

Eine Materialeigenschaft eines Körpers ist die Speicherung von Wärme bzw. die Abgabe von bereits gespeicherter Wärme. Existiert nun auf einem solchen Körper ein Temperaturungleichgewicht zwischen verschiedenen Stellen, kommt es zum Temperatúrausgleich. Hierzu wird Wärmeenergie über den Körper transportiert. Mögliche Vorgänge des Wärmetransportes sind Wärmestrahlung, Konvektion oder Wärmeleitung. Im Folgenden wird sich auf den letzten Vorgang beschränkt. Im allgemeinen basiert die Wärmeleitung in festen Material zu großen Teilen auf Phononen und frei beweglichen Elektronen. Ist das Material des Körpers ein Metall können auch die Effekte der bestehenden Gitterstrukturen vernachlässigt werden. Im Folgenden wird ein metallischer Stab der Länge  $L$ , sowie der Querschnittfläche  $A$  betrachtet. Er besitzt die gleichmäßige Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärme  $c$ . Existiert nun ein Temperaturungleichgewicht  $T$  zwischen den beiden Stabenden, folgt für den Fluss der Wärmeenergie  $dQ$  durch  $A$  in der Zeit  $dt$  :

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

Der Faktor beschreibt dabei die Wärmeleitfähigkeit und ist eine Konstante des Materials. Nach Konvention fließt die Wärmeenergie vom energiereicheren zum energieärmeren Stabende. Analog folgt für die Wärmestromdichte  $j_w$ :

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

Auf Basis der Gleichungen 1 und 2, sowie die Kontinuitätsgleichung folgt die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

mit der materialspezifischen Temperaturleitfähigkeit

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c}. \quad (4)$$

Sie beschreibt die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des Temperaturverlaufes im Stab. Die Schnelligkeit, mit welcher der Temperatúrausgleich abläuft wird über die Temperaturleitfähigkeit festgelegt. Die Lösungsfunktion ist abhängig von der Geometrie des Stabes und den angenommenen Anfangsbedingungen.

In der folgenden Konfiguration wird der Stab nun periodisch erwärmt und wieder abgekühlt. Im Zuge dessen bildet sich eine räumliche und zeitliche Temperaturwelle innerhalb des Stabes aus. Ist der Stab sehr lang im Vergleich zur Breite, lassen sich die Wellen durch folgende Formel ausdrücken:

$$T(x, t) = T_{\max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \quad (5)$$

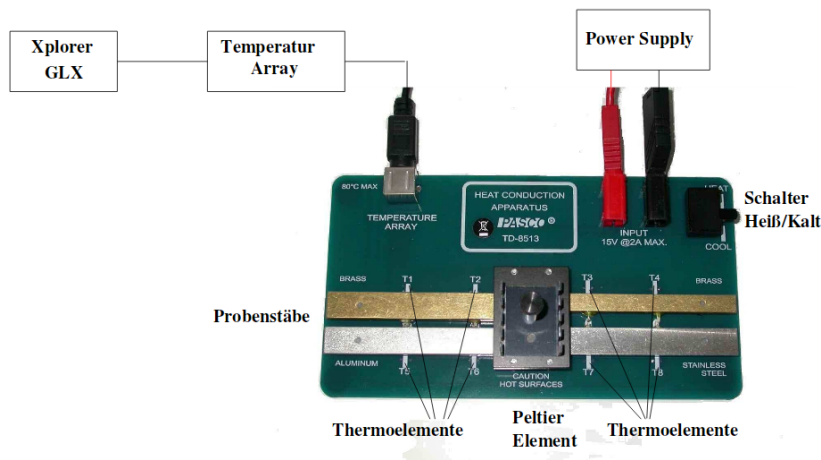
mit der Phasengeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}}. \quad (6)$$

Sind die zugehörigen Amplituden  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  zu zwei Messstellen  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$  im Abstand  $\Delta x$  sowie die dazwischenliegende Phasenverschiebung  $\Delta t$  der Temperaturwelle bekannt, lässt sich  $\kappa$  mithilfe dieser bestimmen. Für  $\kappa$  folgt:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t (\ln(A_{\text{nah}}) - \ln(A_{\text{fern}}))}. \quad (7)$$

### 3 Aufbau



**Abbildung 1:** Messaufbau zur Aufnahme von Wärmeleitungscurven[1].

Der Messaufbau besteht aus einer rechteckigen Platte, in dessen Mitte ein Peretiergerät angebracht ist. Das Peretiergerät wird über einen Energiequelle mit Energie versorgt. Zu beiden Seiten des Gerätes sind 4 Stäbe aus unterschiedlichen Metallen angebracht, welche über das Peretiergerät mittels eines Schalters entweder erwärmt oder abgekühlt werden können. Es sind ein breiter und ein schmaler Messingstab, ein Aluminiumstab sowie ein Stab aus Edelstahl verbaut. An jedem Stab sind zwei Thermoelemente im Abstand von 3 cm angebracht. Die gemessenen Temperaturen aller 8 Stellen werden über einen GLX Datenlogger an einen Xplorer GLX weitergegeben. Sie sind über die Nummerierung auf der Platte nach Abb. 1 identifizierbar. Auf dem Xplorer GLX können die aufgenommenen Temperaturkurven erstellt, bearbeitet und über einen Drucker ausgedruckt werden.

## 4 Durchführung

### 4.1 Statische Methode

Zunächst wird eine statische Methode zur Bestimmung der Wärmeleitkoeffizienten durchgeführt. Hierzu werden am Explorer GLX zunächst alle Thermoelemente aktiv geschaltet. Dies geschieht über den Menüunterpunkt "SENSOREN". Über den Menüpunkt "DIGITAL" wird eine Abtastrate von 5 s eingestellt. An der Energiequelle wird eine Spannung von 5 V bei maximaler Stromstärke eingerichtet. Um einer Wärmeabgabe der Metalle über die Umgebung vorzubeugen, werden Isolierungen über alle Stäbe gelegt. Nach einer Zeit von 700 s werden die Temperaturen der Thermoelemente T1, T4, T5 und T8 notiert. Die Messreihe wird beendet sobald das Thermoelement T7 eine Temperatur von ca. 45 °C erreicht hat oder eine Messzeit von über 40 min erreicht ist. Mithilfe des Explorer GLX wird jeweils ein Graph mit T1 und T4 sowie einer mit T5 und T8 erstellt und ausgedruckt. Zusätzlich werden auch die Differenzgraphen von T2-T1 und T7-T8 ausgedruckt. Die Stäbe sollen vor Beginn des nächsten Versuches auf unter 30 °C abgekühlt sein.

### 4.2 Dynamische Methode

Nun wird eine dynamische Methode zur Bestimmung der Wärmeleitkoeffizienten verwendet. Die Abtastrate wird auf 2 s eingestellt. Die Spannung wird auf 8 V erhöht. Die Stäbe werden nun unter einer Periode von 80 s periodisch erwärmt und wieder abgekühlt. Hierzu wird der Schalter alle 40 s umgelegt. Die Messung wird nach frühestens 10 Perioden beendet. Es wird jeweils ein Graph des breiten Messingstabes (T1 und T2) und einer des Aluminiumstabes (T5 und T6) erstellt und gedruckt. Nachdem die Stäbe wieder abgekühlt sind wird der Versuch unter einer Periodendauer von 200 s wiederholt. Diesmal wird die Messung beendet, wenn das erste Thermoelement 80 °C erreicht. Es wird ein Graph des Edelstahlstabes (T7 und T8) erstellt und ausgedruckt.

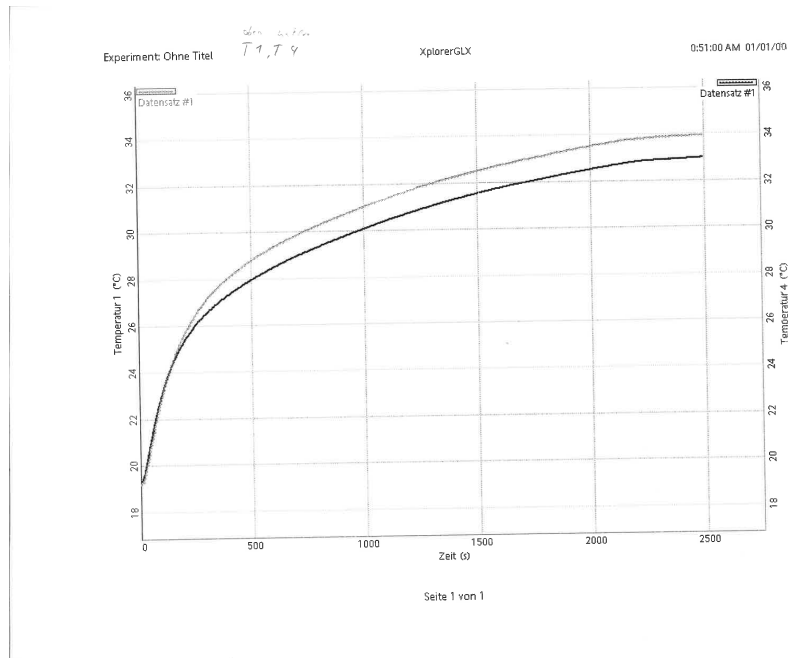
## 5 Auswertung

Die Fehlerrechnung wurde mit Unterstützung von Uncertainties [2] durchgeführt.

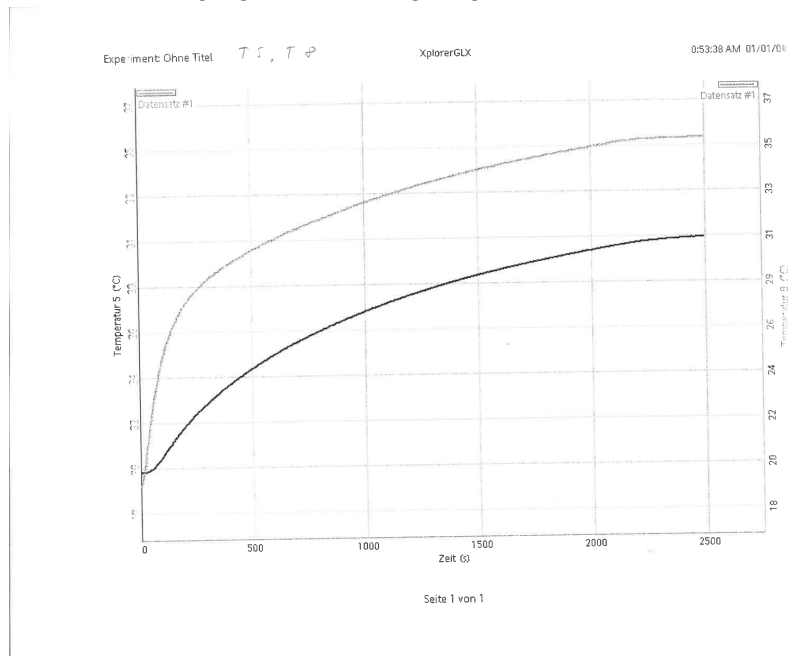
### 5.1 Statische Methode

In Abbildung 2 sind die Temperaturverläufe an den fernen Thermoelementen der beiden Messingstäbe dargestellt. Es fällt auf, dass in den ersten 150 s beide Temperaturen gleich schnell steigen, danach jedoch die Temperatur am Thermoelement des breiten Stabes T1 nicht so früh abflacht, wie T4 am schmalen Stab. Die Steigungen der Temperaturverläufe nähern sich im weiteren Verlauf wieder an. In Abbildung 3 ist auch ein Unterschied in den Temperaturverläufen zu erkennen. So beginnt die Temperatur am Edelstahlstab erst später zu steigen als am Aluminiumstab und auch zu Beginn mit einer geringeren Steigung, die sich später der Steigung des Temperaturanstieges am Aluminiumstab annähert. In allen Graphen in den Abbildungen 2 und 3 ist direkt bzw. kurz nach Beginn der Messung der größte Temperaturanstieg erkennbar. Dieser fällt bei den unterschiedlichen Materialien

**Abbildung 2:** Die Temperatur, am fernem Thermoelement des breiten Messingstabes,  $T1$  und, am fernem Thermoelement des schmalen Messingstabes  $T4$  gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen.



**Abbildung 3:** Die Temperatur, am fernem Thermoelement des Aluminiumstabes,  $T5$  und, am fernem Thermoelement des Edelstahlstabes,  $T8$  gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen.



unterschiedlich stark aus. Danach nimmt der Anstieg der Temperatur bei allen Graphen ab, wobei sich die Steigungen aneinander annähern. Somit laufen die Graphen gegen unterschiedliche Grenztemperaturen. Die höchste Grenztemperatur besitzt Aluminium, dann Messing und die niedrigste Edelstahl. Dies geht auch schon durch die Temperaturen nach 700 s hervor:

$$T_5 = 29,59^\circ\text{C}$$

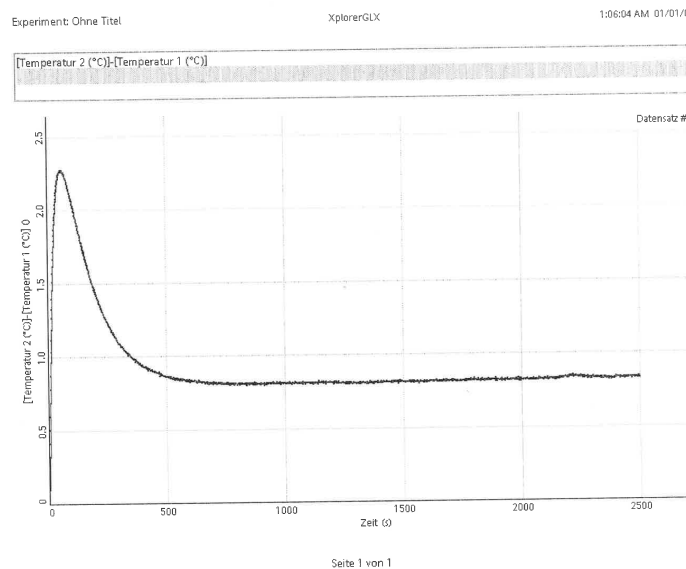
$$T_1 = 28,09^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 27,32^\circ\text{C}$$

$$T_8 = 24,02^\circ\text{C}.$$

Aufgrund der selben Startbedingungen besitzt somit der Aluminiumstab die größte Wärmeleitung.

**Abbildung 4:** Die Temperaturdifferenz  $T_2 - T_1$  bei dem breitem Messingstab gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen.

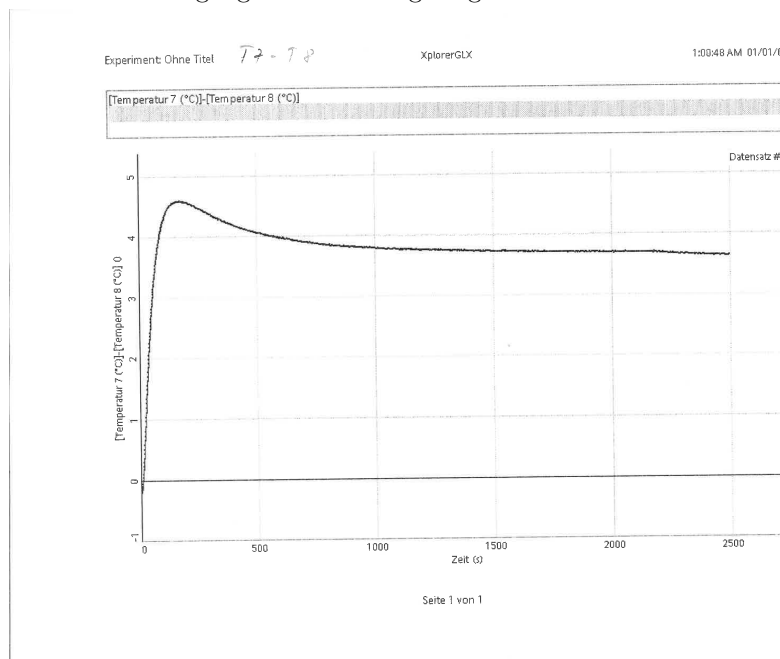


Die Graphen der Temperaturdifferenzen zwischen dem nahem und fernem Thermoelement am breitem Messingstab in Abbildung 4 und am Edelstahlstab in Abbildung 5 ähneln sich im Verlauf. Zu Beginn steigen die Differenzen stark an. Nach einiger Zeit erreichen die Graphen ihren maximalen Wert. Hierbei wird der Wert zuerst beim Messingstab erreicht. Dieser ist ungefähr halb so groß wie der maximale Wert beim Edelstahlstab. Nachdem die Graphen ihren maximalen Wert erreicht haben fallen sie wieder ab, wobei das Gefälle bei dem Messingstab größer ist. Mit der Zeit nimmt das Gefälle immer weiter ab und die Temperaturunterschiede streben gegen einen Grenzwert, wobei bei dem Messingstab die Annäherung an den Grenzwert schneller stattfindet und dieser geringer ist als bei dem Edelstahlstab. Das die Temperaturdifferenz bei dem Messingstab geringer

**Tabelle 1:** Der nach Formel (1) berechnete Wärmestrom  $\frac{\Delta Q_{21}}{\Delta t}$  nach der Zeit  $t$  und die aus 4 entnommene Temperaturdifferenz  $T_2 - T_1$  bei dem breitem Messingstab.

$t/s$	$(T_2 - T_1)/K$	$\frac{\Delta Q_{21}}{\Delta t} / W$
66	2,3	-0,337
199	1,4	-0,213
331	1,0	-0,156
500	0,9	-0,129
1500	0,8	-0,121

**Abbildung 5:** Die Temperaturdifferenz  $T_7 - T_8$  bei dem Edelstahlstab gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen.



**Tabelle 2:** Der nach Formel (1) berechnete Wärmestrom  $\frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t}$  nach der Zeit  $t$  und die aus 5 entnommene Temperaturdifferenz  $T_7 - T_8$  bei dem Edelstahlstab.

$t/s$	$(T_7 - T_8)/K$	$\frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t} / W$
172	5,0	-0,160
500	4,4	-0,142
1000	4,1	-0,132
1500	4,1	-0,130
2000	4,0	-0,129

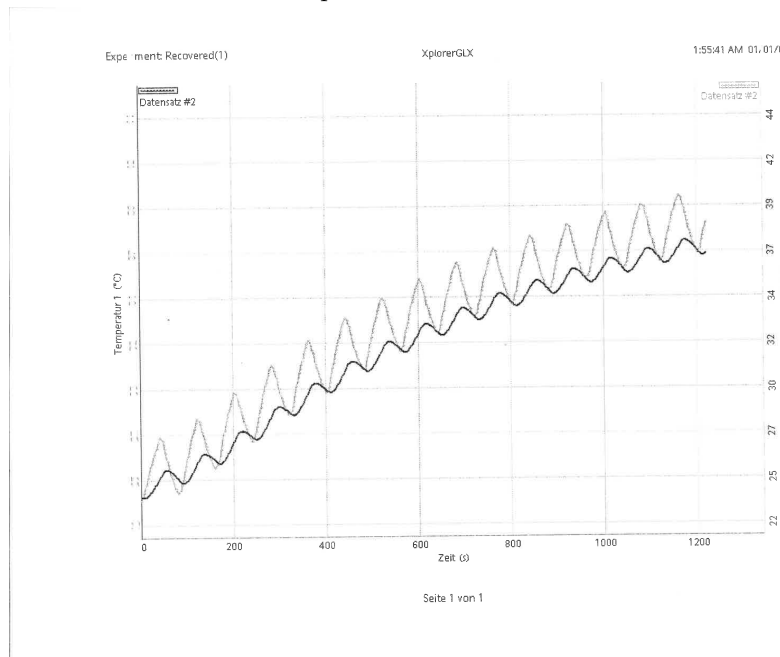


ist entspricht der Erwartung, da Messing eine größere Wärmeleitfähigkeit besitzt und sich somit die Temperatur schneller im Stab ausbreiten kann, was folglich dafür sorgt dass sich die Temperaturen am nahem und am fernem Thermoelement weniger stark unterscheiden.

Der Wärmestrom  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  wurde in den Tabellen 1 und 2 mithilfe von Formel (1) berechnet. Hierfür wurde in beiden Tabellen die Temperaturdifferenz durch den vorher gemessenen Abstand zwischen den Thermoelementen  $\Delta x$  von 3 cm geteilt. In Tabelle 1 wurden die Querschnittsfläche  $A$  von  $0,48 \text{ cm}^2$ , die Dichte  $\rho$  von  $8520 \text{ kg/m}^3$  und die spezifische Wärme  $c$  von  $385 \text{ J/(kg K)}$  von Messing aus der Versuchsanleitung [1] und der Literaturwert für die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  von  $93 \text{ W/(m K)}$  [3] für die Berechnung verwendet. In Tabelle 2 wurden die Querschnittsfläche  $A$  von  $0,48 \text{ cm}^2$ , die Dichte  $\rho$  von  $8000 \text{ kg/m}^3$  und die spezifische Wärme  $c$  von  $400 \text{ J/(kg K)}$  von Edelstahl aus der Versuchsanleitung [1] und der Literaturwert für die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  von  $20 \text{ W/(m K)}$  [3] für die Berechnung verwendet.

## 5.2 Dynamische Methode

**Abbildung 6:** Die Temperatur, am nahem Thermoelement des Messingstabes,  $T_2$  und, am fernem Thermoelement,  $T_1$  gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen, bei einer Heizperiodendauer von 80 s.



Aus Tabelle 3 ergibt sich für die Amplitude am nahem Thermoelement des breitem Messingstabes bei einer Heizperiodendauer von 80 s:

$$A_{\text{nah}} = (1,72 \pm 0,01) \text{ K},$$

**Tabelle 3:** Die aus dem Graphen in Abbildung 6 entnommenen Werte für die Phasendifferenz  $\Delta t$ , die Amplitude am nahem Thermoelement des breitem Messingstabes  $A_{\text{nah}}$  und am fernem Thermoelement  $A_{\text{fern}}$ .

$A_{\text{nah}}$	$A_{\text{fern}}$	$\Delta t/\text{s}$
1,72	0,56	10
1,72	0,56	9
1,77	0,56	9
1,81	0,60	7
1,72	0,56	12
1,72	0,56	12
1,72	0,56	10
1,68	0,56	10
1,72	0,56	11
1,68	0,52	11
1,68	0,52	12
1,68	0,56	12
1,68	0,56	11

für die Amplitude am fernem Thermoelement:

$$A_{\text{fern}} = (0,557 \pm 0,006) \text{ K}$$

und für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (10,5 \pm 0,4) \text{ s.}$$

Damit berechnet sich die Wärmeleitfähigkeit von Messing mit den Werten aus der Versuchsanleitung [1] für die Dichte  $p$  von  $8520 \text{ kg/m}^3$  und der spezifischen Wärme  $c$  von  $385 \text{ J/(kg K)}$  nach Formel (7) zu:

$$\kappa_{\text{Messing}} = (125 \pm 5) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

Aus Tabelle 4 ergibt sich für die Amplitude am nahem Thermoelement des Aluminiumstabes bei einer Heizperiodendauer von 80 s:

$$A_{\text{nah}} = (2,580 \pm 0,004) \text{ K},$$

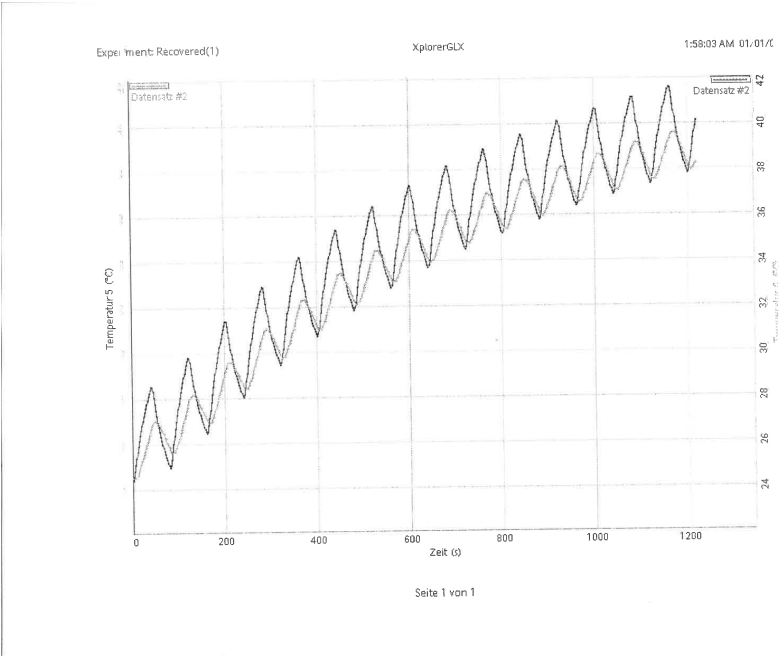
für die Amplitude am fernem Thermoelement:

$$A_{\text{fern}} = (1,19 \pm 0,01) \text{ K}$$

und für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (6,7 \pm 0,0) \text{ s.}$$

**Abbildung 7:** Die Temperatur, am nahem Thermoelement des Aluminiumstabes,  $T_6$  und, am fernem Thermoelement,  $T_5$  gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen, bei einer Heizperiodendauer von 80 s.



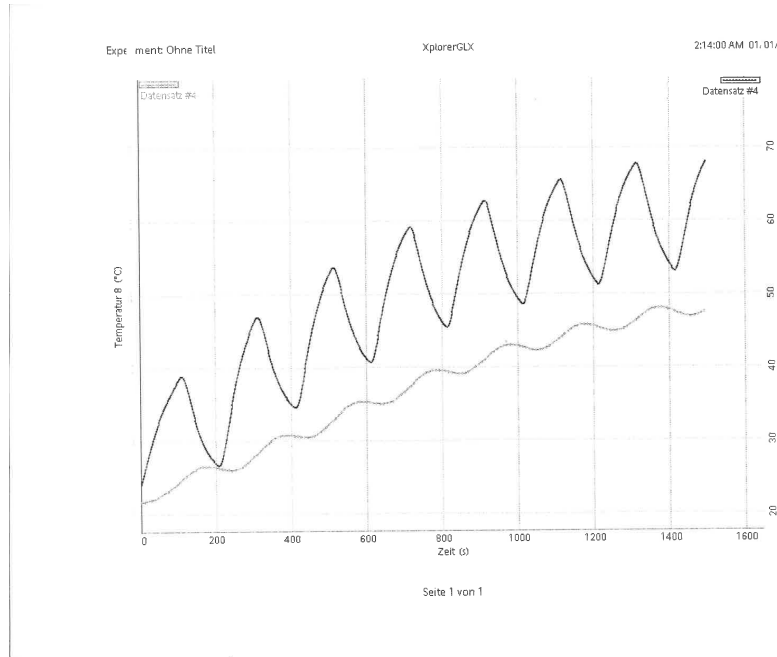
**Tabelle 4:** Die aus dem Graphen in Abbildung 7 entnommenen Werte für die Phasendifferenz  $\Delta t$ , die Amplitude am nahem Thermoelement des Aluminiumstabes  $A_{\text{nah}}$  und am fernem Thermoelement  $A_{\text{fern}}$ .

$A_{\text{nah}}$	$A_{\text{fern}}$	$\Delta t/\text{s}$
2,6	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,3	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,5	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,5	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,2	6,7
2,6	1,1	6,7

Damit berechnet sich die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium mit den Werten aus der Versuchsanleitung [1] für die Dichte  $\rho$  von  $2800 \text{ kg/m}^3$  und der spezifischen Wärme  $c$  von  $830 \text{ J/(kg K)}$  nach Formel (7) zu:

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (202 \pm 3) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

**Abbildung 8:** Die Temperatur, am nahem Thermoelement des Edelstahlstabes,  $T_7$  und, am fernem Thermoelement,  $T_8$  gegen die vergangene Zeit  $t$  aufgetragen, bei einer Heizperiodendauer von 200 s.



Aus Tabelle 5 ergibt sich für die Amplitude am nahem Thermoelement des Edelstahlstabes bei einer Heizperiodendauer von 200 s:

$$A_{\text{nah}} = (8,12 \pm 0,05) \text{ K},$$

für die Amplitude am fernem Thermoelement:

$$A_{\text{fern}} = (1,1 \pm 0,0) \text{ K}$$

und für die Phasendifferenz:

$$\Delta t = (55 \pm 2) \text{ s}.$$

Damit berechnet sich die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl mit den Werten aus der Versuchsanleitung [1] für die Dichte  $\rho$  von  $8000 \text{ kg/m}^3$  und der spezifischen Wärme  $c$  von  $400 \text{ J/(kg K)}$  nach Formel (7) zu:

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (12,9 \pm 0,5) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

**Tabelle 5:** Die aus dem Graphen in Abbildung 8 entnommenen Werte für die Phasendifferenz  $\Delta t$ , die Amplitude am nahem Thermoelement des Edelstahlstabes  $A_{\text{nah}}$  und am fernem Thermoelement  $A_{\text{fern}}$ .

$A_{\text{nah}}$	$A_{\text{fern}}$	$\Delta t/\text{s}$
8,3	1,1	50
8,3	1,1	63
8,0	1,1	55
8,0	1,1	50
8,0	1,1	55
8,0	1,1	59

## 6 Diskussion

Zunächst muss zwischen den Ergebnissen der statischen und der dynamischen Methode unterschieden werden. Anhand der Graphen der statischen Methode lassen sich die Wärmeleitkoeffizienten nur in Reihenfolge vom niedrigstem zum höchstem bringen, es lassen sich jedoch keine genauen Werte bestimmen. Da Literaturwerte von  $\kappa$  zur Bestimmung von  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  verwendet werden bringen diese keine neuen Ergebnisse. Zusätzlich sind sie auch noch von der verwendeten Spannung und Stromstärke abhängig. Beide Graphen, welche die Temperaturdifferenz auf einem Stab zeigen, besitzen einen Peak nach ca. 100 s. Der Peak des Differenzgraphen von  $T_1$  und  $T_2$  liegt ein Stück früher und seine Auslenkung ist wesentlich stärker ausgeprägt. Grund hierfür ist die weitaus bessere Wärmeleitfähigkeit von Messing gegenüber Edelstahl. Der Peak entsteht dadurch, dass sich das Material am nahen Messpunkt bereits nach kurzer Zeit aufheizt, noch bevor Wärme zum fernem Thermoelement gelangt. Beim Edelstahlstab geschieht dieser Aufwärmvorgang langsamer, weswegen der Peak der Differenz weniger stark ausgeprägt ist. Im Gegensatz dazu lassen sich mit der dynamischen Methode konkrete Werte für die Wärmeleitkoeffizienten bestimmen. Beim Vergleich der ermittelten Koeffizienten fällt jedoch auf, dass diese große Abweichungen zu Literaturwerten [3] aufzeigen. So liegt das ermittelte  $\kappa$  von Messing mit  $(125 \pm 5) \text{ W}/(\text{m K})$  ca. 20 % über dem Literaturwert von  $105 \text{ W}/(\text{m K})$  [3], beim  $\kappa$  Aluminium liegt sie bei ca. 10 %. Der ermittelte Wert für Edelstahl ist mit  $(12,9 \pm 0,5) \text{ W}/(\text{m K})$  sogar nur ca. halb so groß wie der Literaturwert. Dieser liegt bei  $20 \text{ W}/(\text{m K})$  [3]. Die Hauptursache der Abweichungen liegt wahrscheinlich in der Methode der manuellen Auswertung. Die gemessenen Größen liegen oftmals nur im Bereich weniger Millimeter. Da bei der Auswertung mithilfe eines Geodreiecks jedoch nur eine Genauigkeit von ca. 0,5 mm erreicht wird, verfälschen Messungenauigkeiten die Ergebnisse deutlich.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V204 Wärmeleitung von Metallen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Waermeleitf.pdf> (besucht am 22.01.2017).
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/> (besucht am 09.12.2016).
- [3] Anton Schweizer. *Wärmeleitkoeffizienten von Metallen*. URL: [http://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit\\_metall/wleit\\_metall.php](http://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php) (besucht am 23.01.2017).