

V356

Kettenschaltungen mit LC-Gliedern

Lukas Rolf

lukas.rolf@tu-dortmund.de

Yannik Brune

yannik.brune@tu-dortmund.de

Durchführung: 29.11.2016

Abgabe: 6.12.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Die allgemeinen Eigenschaften einer LC-Kette	3
2.2 Die Eigenschaften einer unendlichen LC-Kette	4
2.3 stehende Wellen	5
2.4 Die Eigenschaften einer endlichen LC-Kette	5
3 Durchführung	6
4 Auswertung	8
4.1 Die Durchlasskurven beider LC-Ketten	8
4.2 Die auftretende Dispersion in beiden Ketten	11
4.2.1 Die LC-Kette mit Kondensatoren einer Kapazität	11
4.2.2 Die LC-Kette mit Kondensatoren zweier Kapazitäten	12
4.3 Bestimmung der Phasengeschwindigkeit	13
4.4 Die Spannungsverläufe über eine offene LC-Kette	14
4.5 Der Spannungsverlauf auf der LC-Kette mit dem Wellenwiderstand als Abschlusswiderstand	16
5 Diskussion	17
Literatur	18

1 Zielsetzung

Es werden die Eigenschaften von LC-Ketten untersucht. Zunächst wird das Durchlassverhalten und die auftretende Dispersion an unbegrenzten LC-Ketten betrachtet. Im Anschluss wird zu einer endlichen LC-Kette gewechselt. Auf dieser werden stehende Wellen betrachtet. Zudem wird die Spannung, welche an den jeweiligen LC-Gliedern anliegt betrachtet.

2 Theorie

2.1 Die allgemeinen Eigenschaften einer LC-Kette

Eine LC-Kette ist eine Verkettung von N in Reihe geschalteten LC-Gliedern. Jedes dieser Glieder hat die Eigenschaften eines Tiefpasses und lässt Wechselspannungen mit geringen Frequenzen passieren, während es hochfrequente jedoch blockiert. Erhöht man die Anzahl der Kettenglieder und lässt diese $\rightarrow \infty$ laufen, erhält man eine unendliche LC-Kette. Letztere beschreibt ein Ersatzschaltbild einer elektrischen Leitung, im Fall der LC-Kette einer verlustfreien Leitung. Es zeigt sich, dass eine unendliche Kette einen spezifischen Gesamtwiderstand, den Wellenwiderstand Z , besitzt. Dieser ist reell und nur von der Generatorfrequenz abhängig. Für ihn gilt:

$$Z(f) = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - 0,25\omega^2 LC}}. \quad (1)$$

Zum anderen kann die LC-Kette auch als System gekoppelter Schwingungen betrachtet werden, welches eine Vielzahl von Eigenschwingungen besitzt. Aus diesem Grund können Wellen und Wellenpakete auf ihr übertragen werden. Eine Welle besitzt eine Phasengeschwindigkeit, mit der sie sich im Medium ausbreitet. Für sie gilt im Fall der LC-Kette:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\theta}. \quad (2)$$

θ beschreibt dabei den Phasenunterschied pro Kettenglied. Auf ihn wird später näher eingegangen. Da ein Wellenpaket aus einer Menge unterschiedlicher Einzelwellen besteht und jede eine eigene Phasengeschwindigkeit besitzt, kommt es zu einer Verzerrung der Gestalt des Wellenpaketes. Daraus folgt, dass die auftretende Phasenverschiebung frequenzabhängig ist. Diese Beziehung heißt Dispersion.

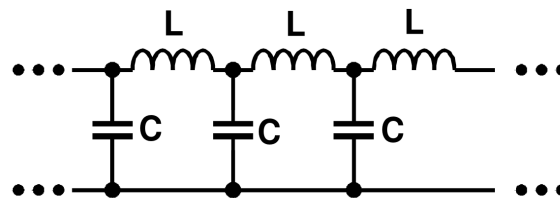


Abbildung 1: Die unendliche LC-Kette [1].

2.2 Die Eigenschaften einer unendlichen LC-Kette

Im Folgenden wird weiter auf die bereits genannten Effekte eingegangen. Zunächst wird die einfache LC-Kette thematisiert. Diese besitzt nur Kondensatoren der gleichen Kapazität C . Aus den kirchhoffschen Regeln folgt die Bewegungsgleichung:

$$-\omega^2 C U_n + \frac{1}{L} (-U_{n-1} + 2U_n - U_{n+1}) = 0. \quad (3)$$

Mit einem komplexen e-Ansatz gelangt man zu:

$$f^2 = \frac{1}{2LC\pi^2} (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

Dieser Ausdruck wird als Dispersionsrelation bezeichnet und stellt die Frequenz in Abhängigkeit der Phasendifferenz pro Kettenglied dar. Anhand der Formel lässt sich erkennen, dass der Frequenzbereich in dem Schwingungen auftreten begrenzt ist. Daher bilden sich für Frequenzen $f \geq \frac{1}{\sqrt{2LC\pi^2}}$ keine Schwingungen aus.

Nun wird die LC_1C_2 -Kette näher betrachtet. Sie besitzt Kondensatoren mit zwei verschiedenen Kapazitäten C_1 und C_2 , welche im Wechsel verbaut sind. Aus den kirchhoffschen Regeln folgen die Bewegungsgleichungen:

$$-\omega^2 C_1 U_{2n+1} + \frac{1}{L} (-U_{2n} + 2U_{2n+1} - U_{2n+2}) = 0. \quad (5)$$

und

$$-\omega^2 C_2 U_{2n} + \frac{1}{L} (-U_{2n-1} + 2U_{2n} - U_{2n+1}) = 0. \quad (6)$$

Es folgt für die auftretende Dispersion:

$$f_{1/2}^2 = \frac{1}{4\pi^2 L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \pm \frac{1}{4\pi^2 L} \sqrt{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 \theta}{C_1 C_2}}. \quad (7)$$

Es zeigt sich, dass die LC_1C_2 -Kette aufgrund der positiven und negativen Wurzel zwei Frequenzbereiche besitzt, in denen Schwingungen auftreten. Die Verläufe der negativen und positiven Wurzel werden akustischer bzw. optischer Ast genannt. Der Kurvenverlauf hat die in [2](#) dargestellte Form.

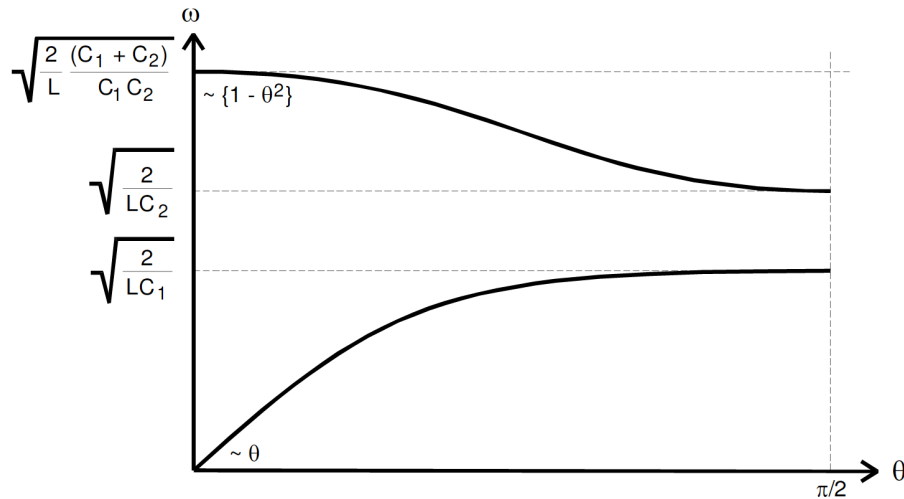


Abbildung 2: Die Frequenz in Abhängigkeit der Phasendifferenz [1].

Es zeigt sich, dass zwischen beiden Ästen eine Lücke existiert, in denen keine Schwingungen auftreten, da die untere Grenzfrequenz des optischen Astes größer ist als die obere Grenzfrequenz des akustischen Astes.

2.3 stehende Wellen

Breitet sich eine Wellenfront auf einem im Ort beschränkten Träger aus, trifft diese nach endlicher Zeit auf den Rand des Trägers. An diesem kommt es zur Reflexion der Wellenfront und zur Überlagerung der ankommenden und der reflektierten Wellenfronten. Es bildet sich eine stehende Welle auf dem Träger aus. Diese besitzt Minima und Maxima welche örtlich und zeitlich konstant sind. Die Minima heißen Knoten, die Amplitudenmaxima heißen Bäuche. Da ihre Anzahl abhängig von der Wellenlänge λ ist, bilden sich bei höheren Frequenzen mehr Knoten und Bäuche aus. Passt genau ein n -faches der halben Wellenlänge auf die Länge des Trägers, wird von der n -ten Eigenschwingung gesprochen. Es existieren folgende Spezialfälle:

- Besitzt der Träger zwei offene Enden, kommt es zu einer vollständigen Reflexion der Welle ohne einen Phasensprung. An beiden Enden bilden sich Bäuche aus. Die Schwingungsbäuche liegen bei $n \cdot \frac{\lambda}{2}$, die Knoten bei $(2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$.
- Besitzt der Träger zwei feste Enden, kommt es zu einer vollständigen Reflexion der Welle mit einem Phasensprung von π . An beiden Enden bilden sich Knoten aus. Die Schwingungsbäuche liegen bei $(2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$, die Knoten bei $n \cdot \frac{\lambda}{2}$.

2.4 Die Eigenschaften einer endlichen LC-Kette

Liegt eine LC-Kette endlicher Länge vor, bzw. wurden beide Abschlusswiderstände nicht nach Formel (1) der Frequenz des Wechselstromes entsprechend angepasst, kommt es

zur Reflexion ankommender Wellen. Wenn dies geschieht bilden sich auf der LC -Kette stehende Wellen aus. Aus den Kirchhoffschen Regeln folgt das Verhältnis:

$$\frac{U_{ref}}{U_{ein}} = \frac{R - Z}{R + Z}. \quad (8)$$

Es gelten die Spezialfälle:

- Die LC -Kette besitzt ein offenes Ende, R beträgt also ∞ . Die LC -Kette besitzt dann zwei offene Enden.
- Die LC -Kette ist kurzgeschlossen, R beträgt daher 0. Die LC -Kette besitzt nun zwei feste Enden.
- Werden beide Abschlusswiderstände auf den Wellenwiderstand der LC -Kette eingestellt, kommt es zu keiner Reflexion. Die LC -Kette verhält sich dann wie eine unendliche Kette.

3 Durchführung

Die verwendete LC -Kette besteht aus 16 Gliedern. Bei der LC -Kette wird der Kondensator der Kapazität C_1 verwendet. Für die verwendeten Komponenten gilt:

- $L = 1,75 \text{ mH}$
- $C_1 = 22 \text{ nF}$
- $C_2 = 9,39 \text{ nF}$

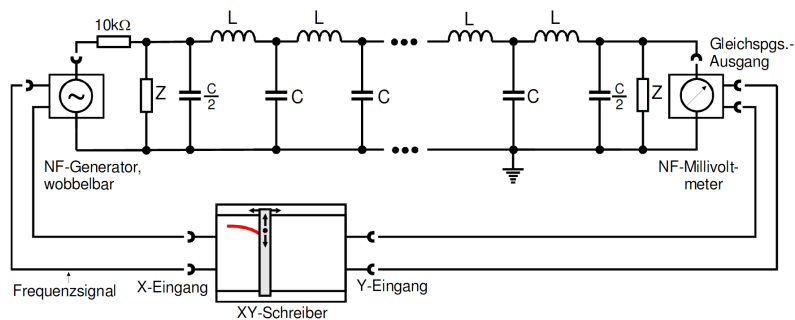


Abbildung 3: Schaltung zum Aufzeichnen der Durchlasskurven [1].

- a) Zunächst werden Durchlasskurven der Spannungamplitude in Abhängigkeit der Generatorfrequenz für die LC und die LC_1C_2 -Kette aufgenommen. Hierzu wird die

jeweilige Kettenschaltung gemäß Abb. 3 an einen XY-Schreiber angeschlossen. Um das Verhalten einer unendlichen Kette zu erzeugen, werden die variablen Widerstände an den Enden der Kette auf den nach (1) berechenbaren Wellenwiderstand eingestellt. Am Generator wird eine Sinusspannung gewählt. Aufgrund von älteren Geräten wird die Wechselspannungsfrequenz über einen Frequenzmesser abgelesen. Auch beide Abschlusswiderstände werden mithilfe eines Ohmmeters justiert. Während des Schreibvorganges sind die Frequenzen an verschiedenen Stellen der X-Achse zu notieren, um eine Skala dieser zu erhalten. Es ist zu beachten, dass die X-Achse der Graphen $\propto \ln(f)$ verläuft.

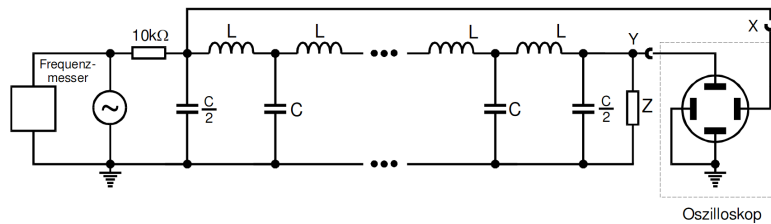


Abbildung 4: Messschaltung zum aufnehmen des Dispersionsverhaltens [1].

- b) Als nächstes wird die Dispersionsrelation überprüft. Hierzu wird die Kettenschaltung gemäß Abb. 4 integriert. Das Oszilloskop wird auf den XY-Modus eingestellt. Anschließend werden alle Frequenzen notiert, bei denen die auftretende Lissajous-Figur die Form einer Gerade hat. Dies ist der Fall, wenn die gesamte Phasenänderung auf der Kettenschaltungen ein Vielfaches von π erreicht. Die gesuchte Phasenverschiebung pro Kettenglied wird erreicht, indem man durch die Anzahl der Kettenglieder teilt.
- c) Es wird nun auf eine beiderseits offene LC -Kette gewechselt. Hierzu kann die bereits aus Durchführungsteil a) bekannte Schaltung verwendet werden, jedoch ohne Schreiber und Wobbeleinrichtung. Um zwei offene Enden zu erzeugen, werden beide Abschlusswiderstände entfernt und der Stromkreis geöffnet. Auf der LC -Kette bilden sich nun stehende Wellen. Es werden die Frequenzen notiert, bei denen die Spannung am Kettenende maximal ist. Hierzu wird ein Millivoltmeter zwischengeschaltet.
- d) Anschließend werden zu den ersten beiden Eigenschwingungen auch die jeweiligen, an den einzelnen LC -Gliedern anliegenden, Spannungen notiert. Hierzu wird das ausgehende Kabel nicht mehr am Kettenschaltungsende angebracht, sondern am jeweiligen LC -Glied.
- e) Zuletzt wird die letzte Messung nochmals durchgeführt, diesmal haben die Abschlusswiderstände jedoch den Wert des Wellenwiderstandes. Der Stromkreis wird daher wieder geschlossen.

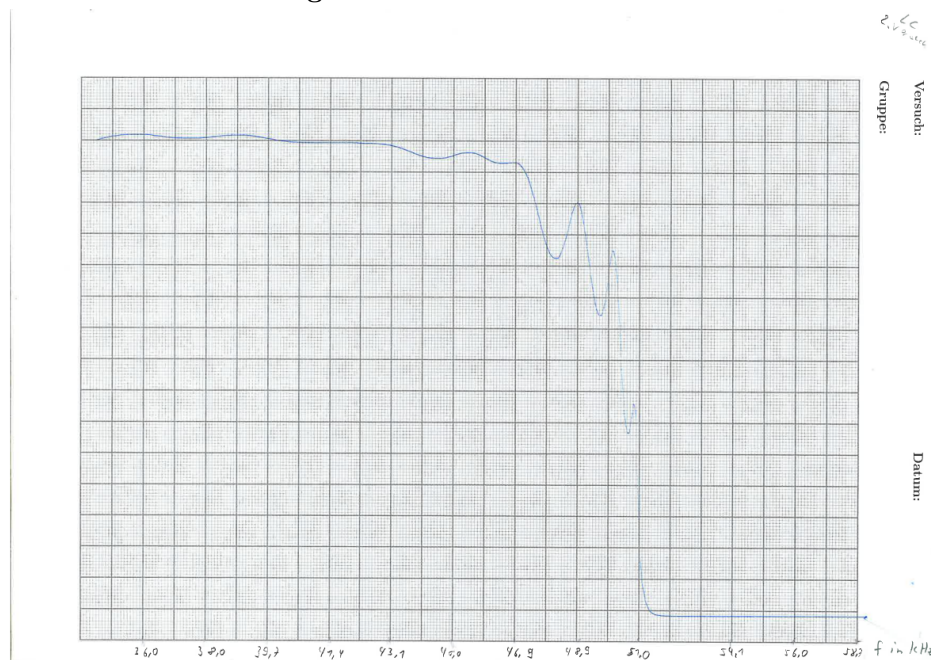
4 Auswertung

Die Graphen in den Abbildungen 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13 und 14 wurden jeweils sowohl mit Matplotlib [2] als auch NumPy [3] angefertigt.

Die Messwerte in der Tabelle 4 wurden mit 14 statt 16 LC -Gliedern und anderen Kapazitäten und Induktivitäten ($L = 1,217 \text{ mH}$ und $C = 20,13 \text{ nF}$) von der anderen Gruppe aufgenommen. Die SI-Präfixe der Einheiten von U_1 und U_2 waren nicht bekannt.

4.1 Die Durchlasskurven beider LC -Ketten

Abbildung 5: Die Durchlasskurve der LC -Kette.



Zunächst werden die Durchlasskurven der Ketten, welche mit dem XY-Schreiber erstellt worden untersucht. Man beschränkt sich dabei auf die Frequenzen der markanten Stellen, welche die Grenzfrequenzen der Dispersionsgleichung markieren. Diese lassen sich mithilfe der Graphen in 6 und 8, welche die logarithmischen Skalen der Durchlasskurven von 5 bzw. 7 in Abhängigkeit der Zentimeterkästchen des Milimeterpapier darstellen, auslesen. Für die einfache LC -Kette verschwinden nach Abbildung 5 sämtliche Spannungen ab ca. 51 kHz. Die berechnete Grenzfrequenz liegt nach (4) bei ca. 51,3 kHz. Daher liegt die Abweichung vom berechneten Wert bei 0,6 %. Es folgt nun die LC_1C_2 -Kette. Bei dieser müssen sowohl die Grenzfrequenz des unteren Astes, aber auch die untere als auch obere Grenzfrequenz des oberen Astes untersucht werden. Aufgrund des im Graphen in Abbildung 7 erkennbaren, seichten Ausgang am unteren Ast, lässt sich nicht genau angeben, wo die Grenzfrequenz liegt. Sie lässt sich jedoch zwischen dem dritten und dem vierten Messwert, also zwischen 35,6 kHz und 38,8 kHz, vermuten, da der Graph

Abbildung 6: Fit der logarithmischen Frequenzskala aus Abbildung 5.

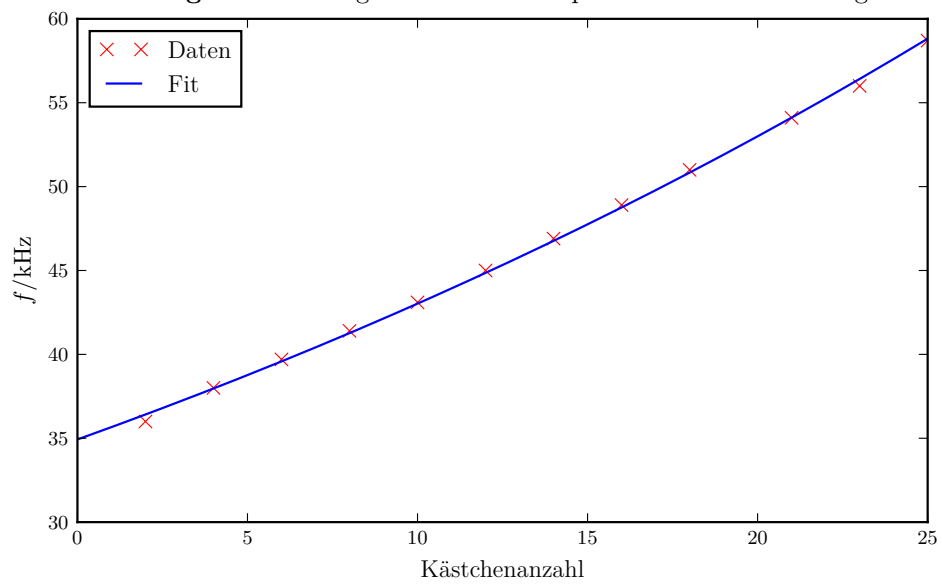


Abbildung 7: Die Durchlasskurve der LC_1C_2 -Kette.

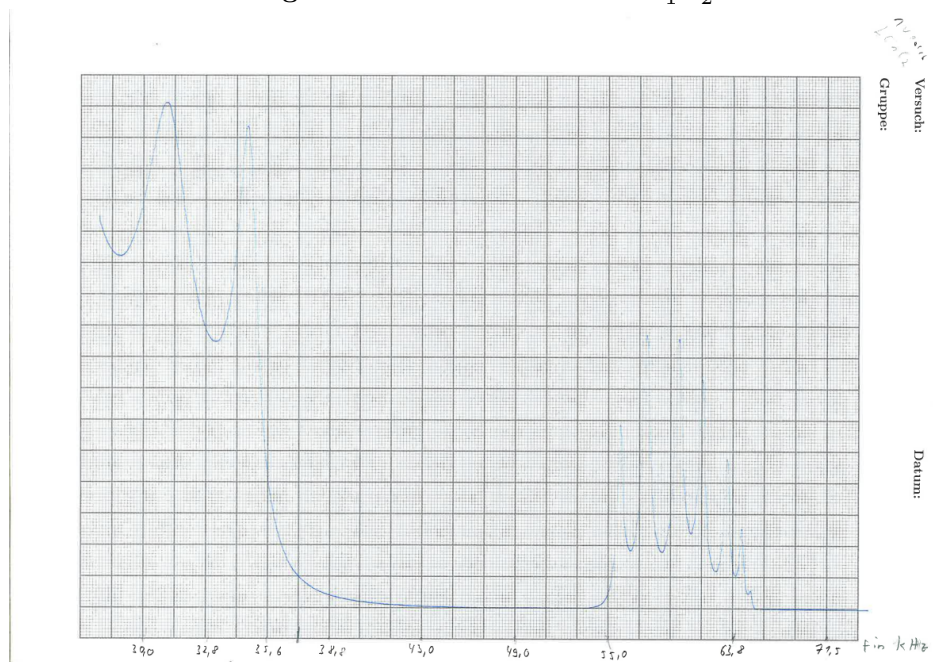
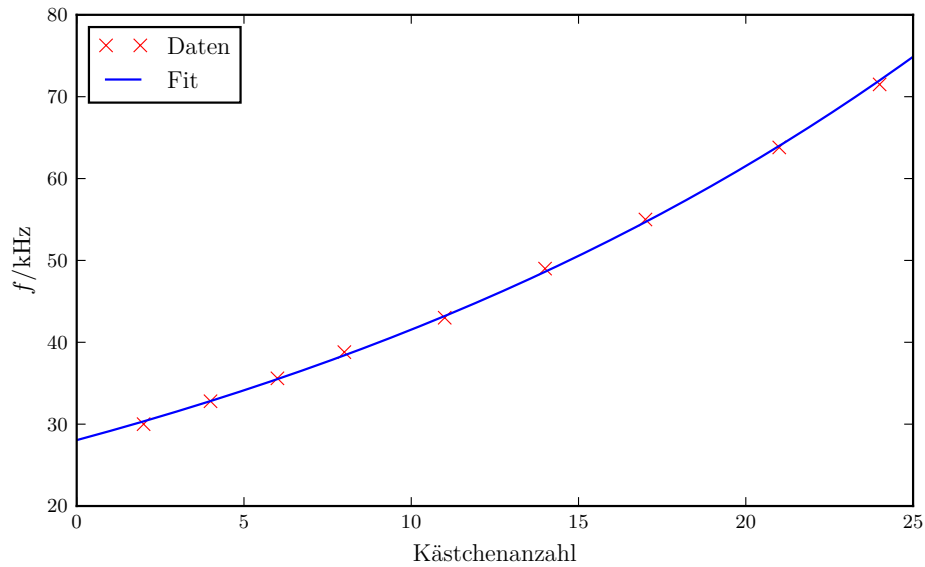


Abbildung 8: Fit der logarithmischen Frequenzskala aus Abbildung 7.



in diesem Bereich stark abflacht. Der berechnete Wert liefert ca. 36,3 kHz, womit er in diesem Bereich liegt. Es folgen nun die Grenzfrequenzen des oberen Astes. Die untere Grenzfrequenz lässt sich am Graph bei ca. 55 kHz ablesen. Der berechnete Wert liegt im Gegenzug bei ca. 55,5 kHz. Damit liegt die relative Abweichung vom berechnetem Wert bei 0,9 %. Auch hier weicht der aus dem Graphen abgelesene Wert also nicht großartig vom Theoriewert ab. Zuletzt folgt die obere Grenzfrequenz des oberen Astes. Bei dieser liegt die Frequenz dem Graphen nach bei ca. 65 kHz. Der Theoriewert beträgt ca. 66,3 kHz. Damit liegt die relative Abweichung vom berechnetem Wert bei 2,0 %. Somit passen theoretischer und experimenteller Wert zueinander.

4.2 Die auftretende Dispersion in beiden Ketten

4.2.1 Die LC-Kette mit Kondensatoren einer Kapazität

Abbildung 9: Die Frequenz in Abhängigkeit der Phasenverschiebung pro Kettenglied *LC*-Kette.

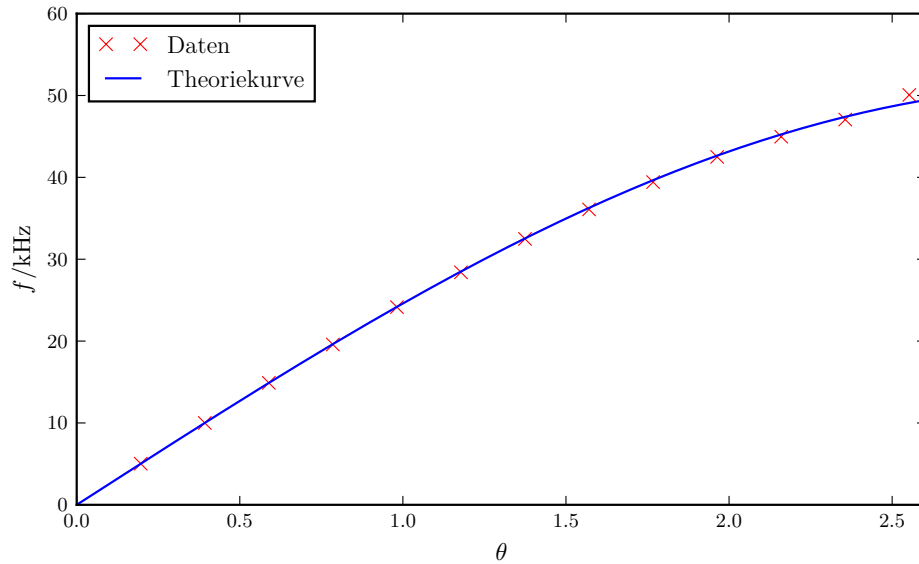


Tabelle 1: Messwerte zu Versuchsteil b) mit *LC*-Kette mit zugehöriger Phasenverschiebung.

f/Hz	θ
5025,0	0,2
10 000,0	0,39
14 900,0	0,59
19 580,0	0,79
24 150,0	0,98
28 400,0	1,18
32 480,0	1,37
36 083,0	1,57
39 420,0	1,77
42 500,0	1,96
44 969,0	2,16
47 060,0	2,36
50 070,0	2,55

Der in Abbildung 9 dargestellte Graph zeigt den Frequenzverlauf in Abhängigkeit der davon verursachten Phasenverschiebung θ . Es ist zu erkennen, dass die gemessenen Werte

gut auf der Theoriekurve des akustischen Astes liegen. Dessen Theoriekurve wurde durch Formel (4) und den bekannten Werten für L und C_1 berechnet.

4.2.2 Die LC-Kette mit Kondensatoren zweier Kapazitäten

Abbildung 10: Die Frequenz in Abhängigkeit der Phasenverschiebung pro Kettenglied bei einer LC_1C_2 -Kette.

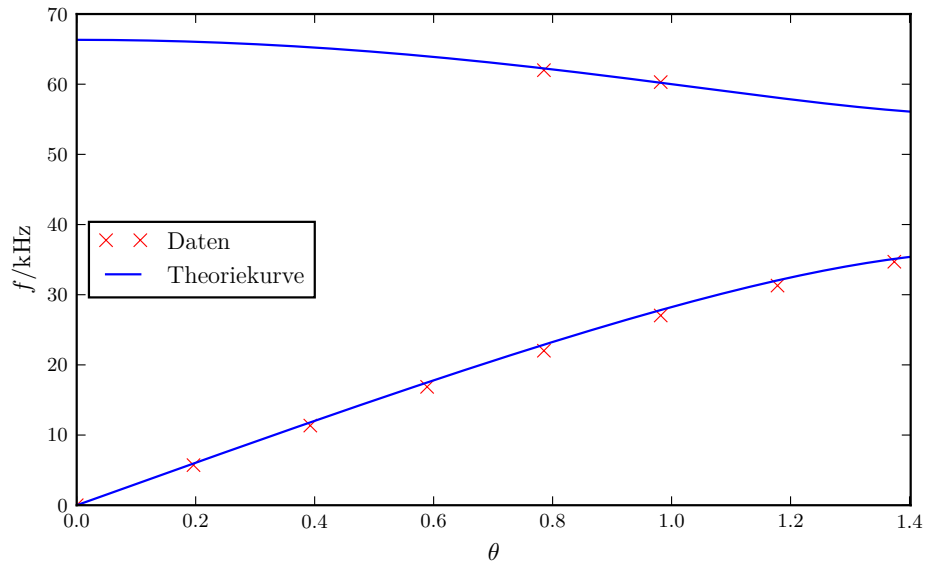


Tabelle 2: Messwerte zu Versuchsteil b) mit LC_1C_2 -Kette mit zugehöriger Phasenverschiebung.

f/Hz	θ
0,0	0,0
5716,0	0,2
11 350,0	0,39
16 870,0	0,59
22 020,0	0,79
27 040,0	0,98
31 300,0	1,18
34 700,0	1,37
60 300,0	0,98
62 000,0	0,79

Der Graph in Abbildung 10 stellt nun den Frequenzverlauf der LC_1C_2 -Kette dar. Wie bereits aus der Theorie bekannt kommt es hier zu zwei verschiedenen Ästen, was sich

auch in den Messwerten erkennen lässt. Sie bestätigen daher die mit Formel (7) aus L , C_1 und C_2 errechnete Theoriekurve des akustischen bzw. optischen Astes.

4.3 Bestimmung der Phasengeschwindigkeit

Abbildung 11: Die Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Frequenz.

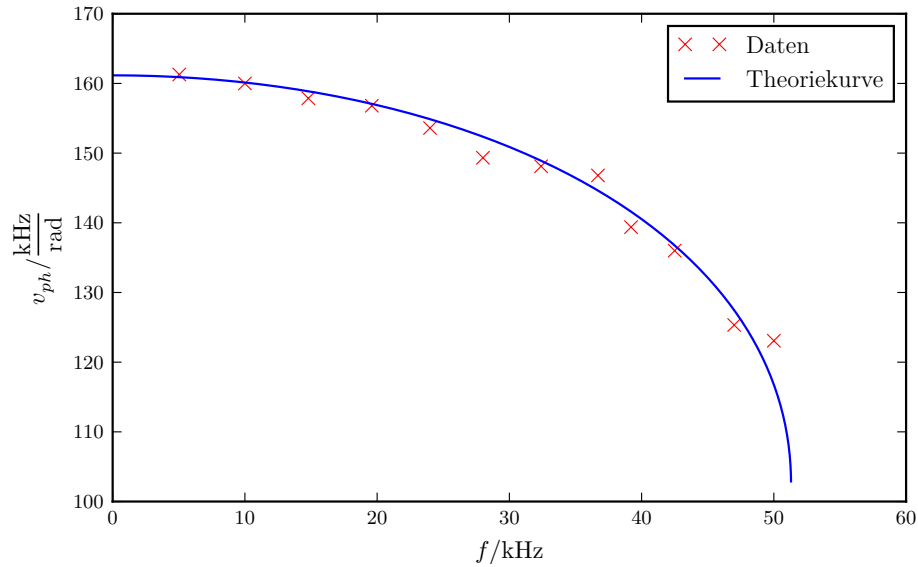


Tabelle 3: Messwerte zu Versuchsteil c) mit zugehöriger Phasenverschiebung bei verschiedenen Eigenschwingungen.

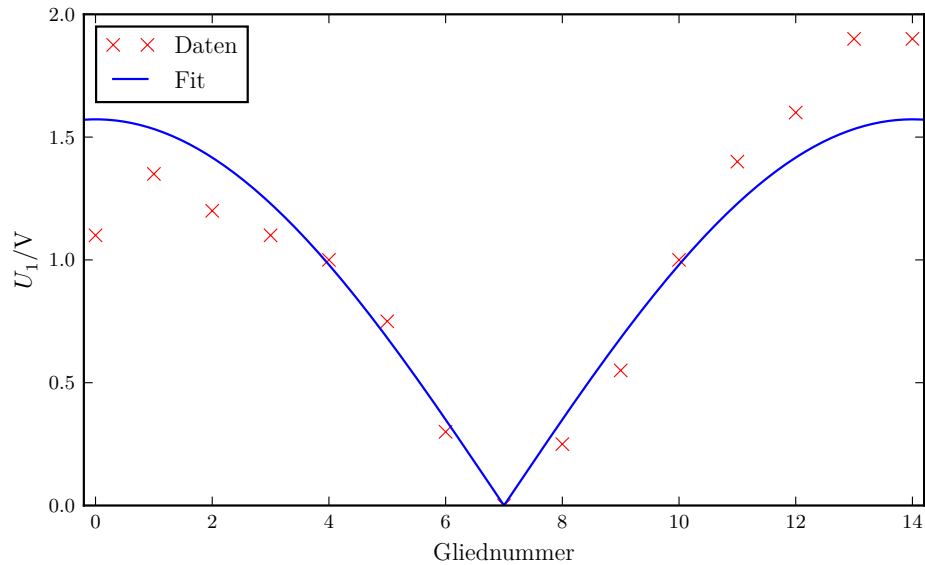
Eigenschwingungsnummer	f/Hz	θ
1	5040,0	0,2
2	10 000,0	0,39
3	14 800,0	0,59
4	19 600,0	0,79
5	24 000,0	0,98
6	28 000,0	1,18
7	32 400,0	1,37
8	36 700,0	1,57
9	39 200,0	1,77
10	42 500,0	1,96
12	47 000,0	2,36
13	50 000,0	2,55

Die in Abbildung 11 dargestellte Theoriekurve der frequenzabhängigen Phasengeschwindigkeit wurde aus L und C_1 mit Formel (2) berechnet. Es zeigt sich, dass die Messwerte

in der Nähe der Theoriekurve liegen und ihr Verlauf streng monoton fallend ist. Es sind keine größeren Abweichungen erkennbar. Am Verlauf der Theoriekurve lässt sich zudem wieder erkennen, dass sich, wie bereits zuvor gezeigt, keine Schwingungen oberhalb von ca. 51 kHz bilden.

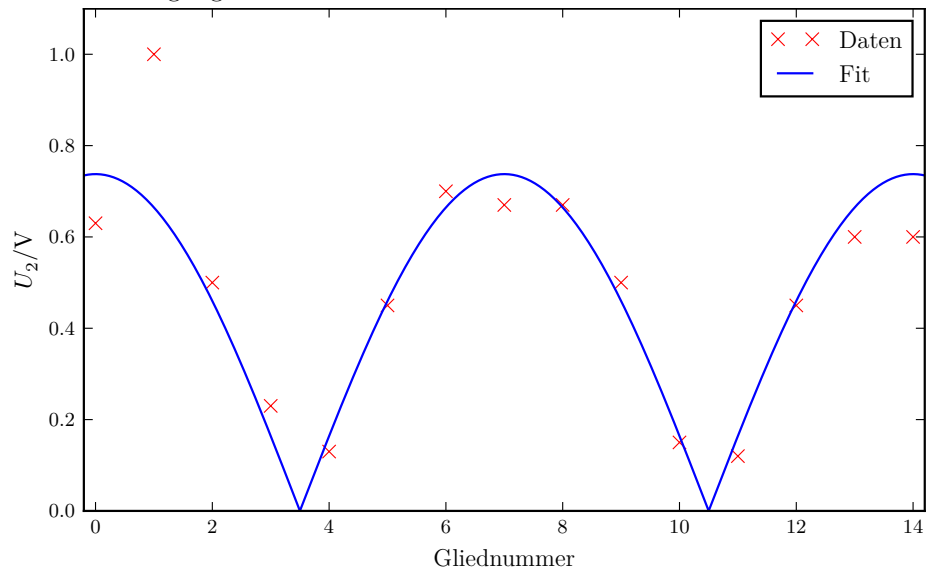
4.4 Die Spannungsverläufe über eine offene LC-Kette

Abbildung 12: Der Spannungsverlauf über die offene LC -Kette für die 1. Eigenschwingung.



Der in der Abbildung 12 dargestellte Fit besitzt die Form $y = a|\cos(\frac{\pi}{14} \cdot x)|$. Wie im Graph zu erkennen ist, bildet sich auf der LC -Kette eine stehende Welle aus. Da eine offene Kette gewählt wurde, ist die Phasenverschiebung zwischen den Enden ein Vielfaches von π und da es sich hier um die 1. Eigenschwingung handelt einfach nur π . Aus diesem Grund zeigt sich an beiden Enden ein Bauch und in der Mitte ein Knoten. Damit erfüllen die Messdaten die theoretischen Überlegungen.

Abbildung 13: Der Spannungsverlauf über die offene LC -Kette für die 2. Eigenschwingung.



In der Abbildung 13 besitzt der Fit die Form $y = a|\cos(\frac{\pi}{7} \cdot x)|$. Auch hier bildet die Form der Messwertkurve den Verlauf einer stehenden Welle ab. Diesmal jedoch den Verlauf der 2. Eigenschwingung, welcher zwei erkennbare Knoten statt einem besitzt.

4.5 Der Spannungsverlauf auf der LC-Kette mit dem Wellenwiderstand als Abschlusswiderstand

Abbildung 14: Der Spannungsverlauf über die LC -Kette mit eingestelltem Wellenwiderstand.

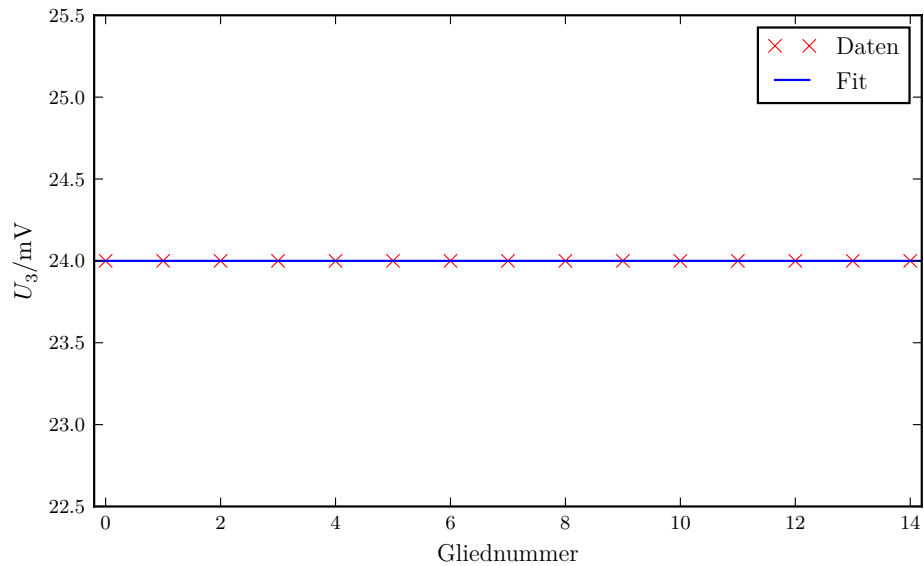


Tabelle 4: Messwerte zu Versuchsteil d) und e).

Gliedernummer	U_1 /V	U_2 /V	U_3 /mV
0	1,1	0,63	24,0
1	1,35	1,0	24,0
2	1,2	0,5	24,0
3	1,1	0,23	24,0
4	1,0	0,13	24,0
5	0,75	0,45	24,0
6	0,3	0,7	24,0
7	0,0	0,67	24,0
8	0,25	0,67	24,0
9	0,55	0,5	24,0
10	1,0	0,15	24,0
11	1,4	0,12	24,0
12	1,6	0,45	24,0
13	1,9	0,6	24,0
14	1,9	0,6	24,0

In der Abbildung 14 besitzt der Fit die Form $y = ax + b$. Da der Wellenwiderstand für

die Abschlusswiderstände eingestellt worden ist, findet keine Reflexion an den Enden der LC -Kette statt. Ohne eine Reflexion der Welle kann sich jedoch keine stehende Welle ausbilden, daher bleibt der Spannungsverlauf des Graphen konstant. Die Messwerte bestätigen also die Theorie.

5 Diskussion

Die Schwankungen in den Graphen in den Abbildungen 5 und 7 lassen sich durch die Bildung von stehenden Wellen erklären, da der Wellenwiderstand nur für die Frequenz $f = 0$ eingestellt wurde. Die errechneten Werte weichen von den aus dem Graphen abgelesenen Werten leicht (unter 6 %) ab. Diese Abweichung kann durch die hohe Unsicherheit in der Wahl der Stelle an der die Grenzfrequenz erreicht wird begründet werden.

Die Messwerte mit den zugehörigen Phasenverschiebungen in dem Graphen in Abbildung 9 zeigen keine systematischen Abweichungen zu der Theoriekurve. Die Abweichungen lassen sich allein mit der Messunsicherheit begründen. Jedoch ist zu beachten, dass die Phasenverschiebungen bestimmt wurden unter der Annahme, dass die Phasenverschiebung zwischen der Spannung vor und hinter der LC -Kette bei der jeweils nächst höheren gemessenen Frequenz um π zunimmt.

Die Messwerte mit den zugehörigen Phasenverschiebungen in dem Graphen in Abbildung 10 zeigen eine kleine systematische Abweichung nach unten (durchschnittlich 1,1 %). Diese Abweichung könnte durch eine Abweichung des gegebenen Wertes für C_2 zustande kommen. Auch hier ist zu beachten, dass die Phasenverschiebungen unter denselben Annahmen wie zuvor bestimmt wurden. Für die zwei Wertepaare im optischem Zweig wurde jedoch angenommen, dass die Phasenverschiebung bei $f = 66,3 \text{ kHz}$ verschwinde und für kleinere Frequenzen um π zunimmt. Zusätzlich wurden die 2 Vorherigen, sowie die 3 nachfolgenden Frequenzen übergangen. Das angenommen wird, dass 3 Frequenzen übergangen wurden an denen die Phasenverschiebung zwischen der Spannung vor und hinter der LC_1C_2 -Kette das Vielfache von π beträgt macht diese zwei Wertepaare nicht aussagekräftig.

Die Eigenschwingungen sollten bei den Frequenzen auftreten, bei denen die Phasenverschiebung zwischen der Spannung vor und hinter der LC -Kette das Vielfache von π beträgt. Vergleicht man die ermittelten Frequenzen aus Versuchsteil b) und c) bestätigt sich dies. Jedoch lässt sich eine in b) ermittelte Frequenz (45,0 kHz) keiner Frequenz aus c) zuordnen. Dies lässt vermuten, dass eine Frequenz in c) übergangen wurde. Bei der Betrachtung des Graphen in Abbildung 11 lässt sich keine systematischen Abweichungen erkennen und liegen somit im Rahmen der Messungenauigkeit.

In den Graphen in den Abbildungen 12 und 13 weichen die Werte von dem Fit ab. Diese Abweichung wird vermutlich durch den Frequenzschub des Generators verursacht.

In dem letztem Graphen weichen die Werte nicht von dem Fit ab.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V356 Kettenschaltungen mit LC-Gliedern*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V356.pdf> (besucht am 05.12.2016).
- [2] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: <http://matplotlib.org/> (besucht am 09.12.2016).
- [3] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: <http://www.numpy.org/> (besucht am 09.12.2016).