

V103

Biegung elastischer Stäbe

Lukas Rolf

lukas.rolf@tu-dortmund.de

Yannik Brune

yannik.brune@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.12.2016

Abgabe: 20.12.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Das Verhalten von deformierbaren Körpern unter einer Spannung	3
2.2 Der einseitig eingespannte homogene Stab unter Einfluss einer konstanten Normalspannung	3
2.3 Der beidseitig aufgelegte Stab unter Einfluss einer konstanten Normal- spannung	4
3 Aufbau	4
4 Durchführung	5
5 Auswertung	5
5.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines runden, einseitig eingespannten Stabes	5
5.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines quadra- tischen, einseitig eingespannten Stabes	8
5.3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines quadra- tischen, beidseitig aufgelegten Stabes	10
6 Diskussion	13
Literatur	14

1 Zielsetzung

Es werden die Elastizitätsmoduln von Stäben verschiedener Materialien mithilfe verschiedener Biegungen untersucht.

2 Theorie

2.1 Das Verhalten von deformierbaren Körpern unter einer Spannung

Kräfte, die auf die Oberfläche eines Körpers wirken, können dessen Gestalt oder Volumen verändern. Eine solche Kraft wird als Spannung bezeichnet und normalerweise in der Form $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ angegeben. Ihre oberflächenparallele Komponente wird als Tangentialspannung σ bezeichnet, ihre senkrechte als Normalspannung τ . Sind die aufgrund der Spannung auftretenden relativen Längenänderungen hinreichend klein, liegt ein linearer Zusammenhang zwischen wirkender Spannung und Längenänderung vor. Dieser wird Hooksches Gesetz genannt. Allgemein lässt sich das Verhalten eines Stoffes unter einer Spannung durch eine 6×6 Matrix ausdrücken. Handelt es sich beim Material des Körpers um einen isotropen Stoff, reichen zwei Materialkonstante aus um dieses vollständig zu beschreiben, aus praktischen Gründen werden zwei weitere eingeführt. Eine davon ist der Elastizitätsmodul E , welcher die relative Längenänderung eines Körpers in Spannungsrichtung unter einer Normalspannung beschreibt.

2.2 Der einseitig eingespannte homogene Stab unter Einfluss einer konstanten Normalspannung

Wird ein homogener Stab einseitig eingespannt und anschließend am freien Ende unter den Einfluss einer konstanten Normalspannung gestellt, kommt es zu einer Biegung des Stabes. Diese reicht soweit bis ein Gleichgewicht zwischen der angreifenden Kraft und einer Stabinnenen Gegenkraft besteht. Die innere Kraft entsteht aufgrund von Streckungen und Stauchungen der einzelnen Materialsichten, welche durch die Biegung verursacht werden. Da es sich bei der Kraftwirkung um eine Drehung handelt, kann die verursachte Durchbiegung $D(x)$ an der Stelle x mithilfe eines Drehmomentansatz bestimmt werden. Ist die Durchbiegung klein im Verhältnis zur Stablänge folgt:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

mit der Spannung F und der Stablänge L . Die Variable I bezeichnet das Flächenträgheitsmoment des Stabes:

$$I = \int_Q y^2 \, dq \quad (2)$$

Hierzu wird über die Querschnittsfläche Q des Stabes integriert. In der Versuchsdurchführung wird jeweils ein Stab mit quadratischer und einer mit kreisförmiger Querschnittsfläche

verwendet. Diese lassen sich explizit durch folgende Formeln berechnen.

$$I_{\text{Kreis}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r y^2 dr \stackrel{y=r\sin(\varphi)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 \sin^2(\varphi) dr = \frac{\pi R^4}{4} \quad (3)$$

$$I_{\text{Quadrat}} = a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy = a \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{12} \quad (4)$$

2.3 Der beidseitig aufgelegte Stab unter Einfluss einer konstanten Normalspannung

Der Stab liegt nun an beiden Enden auf einem Träger auf. Wirkt nun eine wieder konstante Kraft auf den Mittelpunkt des Stabes, kommt es auch in diesem Fall zu einer Durchbiegung. Auch hier gelangt man über das Gleichgewicht der auftretenden Drehmomente an die Durchbiegung des Stabes. Das rechte Ende wird mit $x = 0$, das linke Ende mit $x = L$ ausgedrückt. Dann folgt für die Durchbiegung der linken Hälfte D_L :

$$D_R(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (5)$$

Für die rechte Hälfte folgt:

$$D_L(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \text{mit } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \quad (6)$$

3 Aufbau

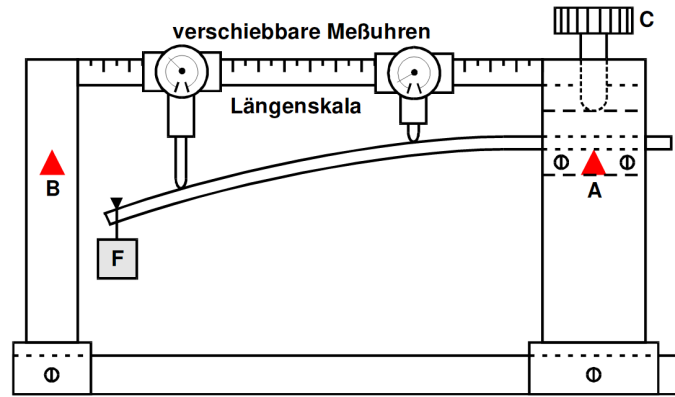


Abbildung 1: Messapparatur zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls E aus einer Biegung des Materials. [2].

Die Messapparatur besteht aus einer Einklemmvorrichtung, an welcher die Stabenden horizontal befestigt werden können. Um den Stab einer konstanten Normalspannung zu unterwerfen wird ein Gewicht verwendet, welches am losen Stabende bzw. der Stabmitte befestigt wird. Oberhalb des Stabes ist eine Längenskala befestigt. Auf dieser liegen

zwei Messuhren mit einer Genauigkeit von $10\mu\text{m}$, welche über die gesamte Stablänge verschoben werden können.

4 Durchführung

- a) Es wird die Durchbiegung eines einseitig eingespannten, runden Stabes in Abhängigkeit von x gemessen. Hierzu wird der Stab an der rechten Seite in die Klemmvorrichtung eingespannt. Da nicht auszuschließen ist, dass der Stab bereits gebogen ist, wird zunächst eine Messung der Auslenkung ohne angehängte Masse durchgeführt. Es ist beim Messvorgang darauf zu achten, dass das Rädchen der Messuhr auf der Mitte des Stabes aufliegt. Der Abstand zwischen der einzelnen Messstellen beträgt 1 cm . Anschließend wird eine Masse angehängt, sodass die maximale Durchbiegung ca. $5 - 7\text{ mm}$ beträgt. Die Auslenkungsmessung wird nun mit denselben Messstellen wiederholt. Die Durchbiegung $D(x)$ berechnet sich über die Differenz der jeweiligen Werte.
- b) Das oben beschriebene Verfahren wird nochmals mit einem quadratischen Stab durchgeführt.
- c) Nun wird die Durchbiegung des quadratischen Stabes nochmals untersucht, diesmal liegt er jedoch an beiden Enden frei auf. Die Normalspannung soll nun in der Stabmitte wirken und wird durch eine Masse realisiert, welche in dieser befestigt wird. Da sich die Messuhr bei einer in der Mitte angehängten Masse nicht über die gesamte Stablänge schieben lässt, kommen zwei Messuhren zum Einsatz. Auch wird zunächst die Auslenkung ohne Last gemessen. Um systematische Messfehler aufgrund von verstellten Messuhren zu vermeiden werden bereits hier beide Uhren für die linke bzw. rechte Hälfte verwendet. Im Anschluss wird wieder eine Masse angehängt und nochmals gemessen. Auch hier berechnet sich $D(x)$ über die Differenz.

5 Auswertung

Die Graphen in Abbildung 2 bis 8 wurden jeweils sowohl mit Matplotlib [3] als auch NumPy [6] erstellt. Die Fehlerrechnung wurde mit Unterstützung von Uncertainties [4] durchgeführt. Die Gewichtskraft F kann mit $g = 9,81\text{ N/kg}$ [5] berechnet werden durch:

$$F = m \cdot g. \quad (7)$$

5.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines runden, einseitig eingespannten Stabes

Der Fit in Abbildung 2 besitzt die Form $y = a(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ und in Abbildung 3 die Form $y = ax$. Aus Formel (3) ergibt sich das Flächenträgheitsmoment I_{Kreis} des runden Stabes zu $4,91 \cdot 10^{-2}\text{ cm}^4$. Die Kraft F berechnet sich aus dem angehängtem Gewicht von $741,5\text{ g}$ mit Formel (7) zu $7,27\text{ N}$. Eine nicht lineare Ausgleichsrechnung der Form $y = a(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$

Abbildung 2: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des runden, einseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum fixierten Ende.

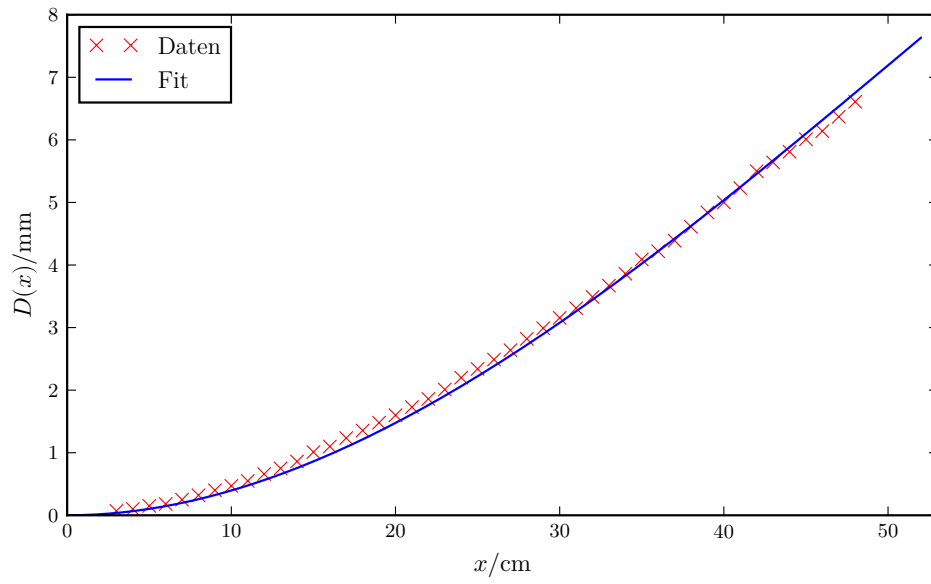


Abbildung 3: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des runden, einseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum fixierten Ende in linearisierter Darstellung.

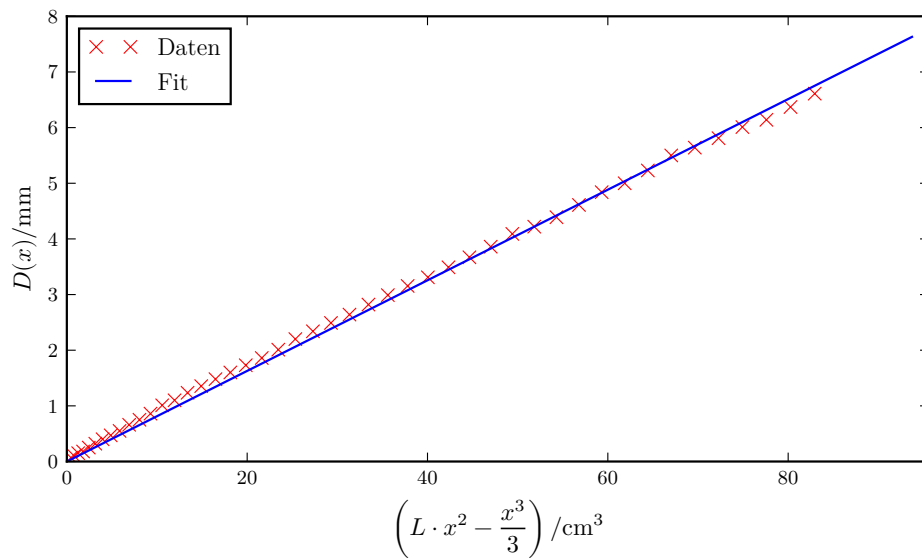


Tabelle 1: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des einseitig eingespannten, runden Stabes an den jeweiligen horizontalen Abständen x zum fixierten Ende.

x/cm	$D(x)/\text{mm}$	x/cm	$D(x)/\text{mm}$
3,0	0,07	26,0	2,49
4,0	0,10	27,0	2,64
5,0	0,15	28,0	2,82
6,0	0,18	29,0	2,99
7,0	0,25	30,0	3,16
8,0	0,32	31,0	3,31
9,0	0,40	32,0	3,49
10,0	0,47	33,0	3,67
11,0	0,55	34,0	3,86
12,0	0,66	35,0	4,09
13,0	0,75	36,0	4,22
14,0	0,86	37,0	4,39
15,0	1,01	38,0	4,61
16,0	1,10	39,0	4,84
17,0	1,23	40,0	5,00
18,0	1,36	41,0	5,23
19,0	1,48	42,0	5,50
20,0	1,60	43,0	5,64
21,0	1,73	44,0	5,81
22,0	1,86	45,0	6,01
23,0	2,01	46,0	6,14
24,0	2,20	47,0	6,37
25,0	2,34	48,0	6,61

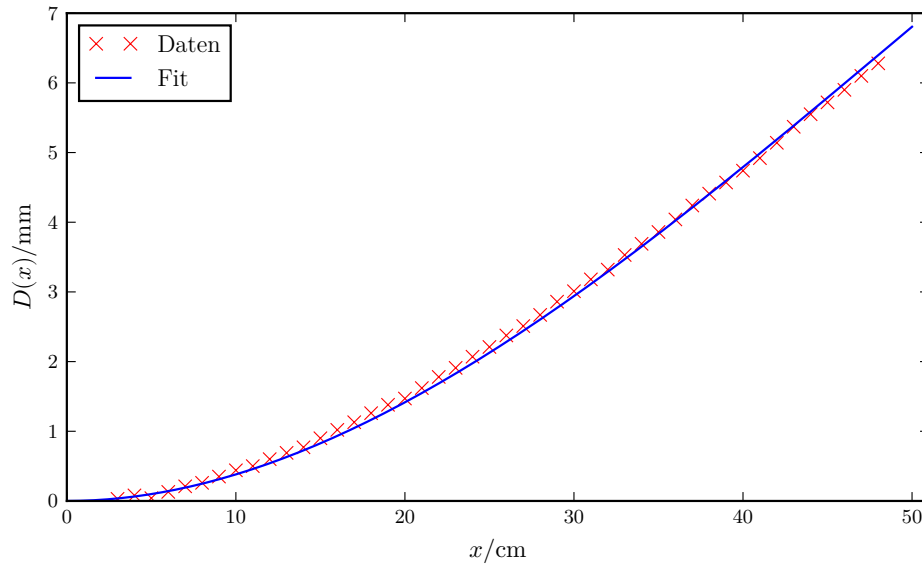
liefert mit der gemessenen Länge L von 52 cm und den Wertepaaren aus Tabelle 1 nach Formel (1):

$$E = \frac{F}{2aI} = (91,0 \pm 0,4) \text{ GPa.}$$

Es ist zu erkennen, dass die Messwerte durch die Fits angenähert werden können. Die linearisierte Darstellung in 3 belegt zudem die Richtigkeit der vorangegangenen, theoretischen Überlegungen.

5.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines quadratischen, einseitig eingespannten Stabes

Abbildung 4: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des quadratischen, einseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum fixierten Ende.



Der Fit in Abbildung 4 besitzt die Form $y = a(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ und in Abbildung 5 die Form $y = ax$. Aus Formel (4) ergibt sich das Flächenträgheitsmoment I_{Quadrat} des quadratischen Stabes zu $8,33 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^4$. Die Kraft F berechnet sich aus dem angehängtem Gewicht von 1212,3 g mit Formel (7) zu 11,89 N. Eine nicht lineare Ausgleichsrechnung der Form $y = a(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ liefert mit der gemessenen Länge L von 50 cm und den Wertepaaren aus Tabelle 2 nach Formel (1):

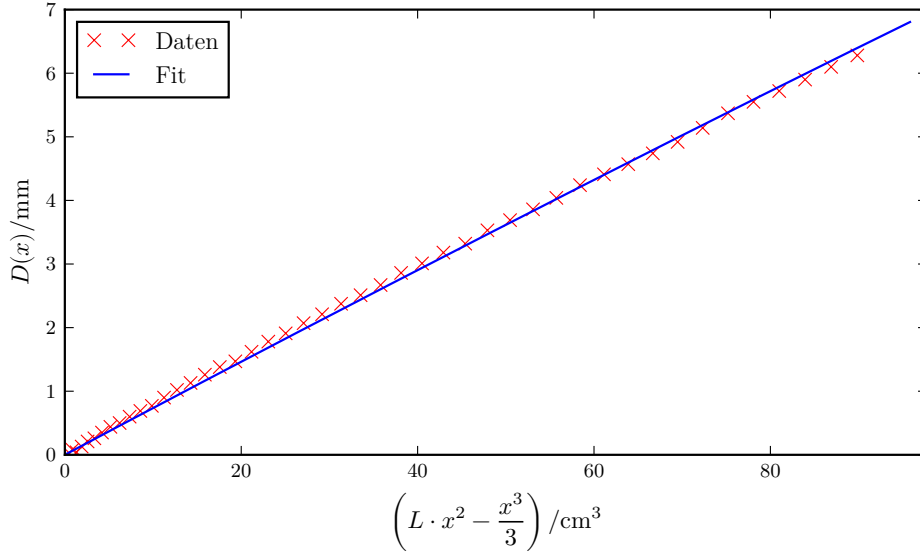
$$E = \frac{F}{2aI} = (87,38 \pm 0,26) \text{ GPa.}$$

Es ist zu erkennen, dass die Messwerte durch die Fits angenähert werden können. Die Theorie wird wieder bestätigt.

Tabelle 2: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des einseitig eingespannten, quadratischen Stabes an den jeweiligen horizontalen Abständen x zum fixierten Ende.

x/cm	$D(x)/\text{mm}$	x/cm	$D(x)/\text{mm}$
3,0	0,03	26,0	2,38
4,0	0,08	27,0	2,51
5,0	0,04	28,0	2,67
6,0	0,13	29,0	2,86
7,0	0,21	30,0	3,01
8,0	0,26	31,0	3,18
9,0	0,35	32,0	3,32
10,0	0,44	33,0	3,53
11,0	0,50	34,0	3,69
12,0	0,60	35,0	3,86
13,0	0,69	36,0	4,04
14,0	0,77	37,0	4,24
15,0	0,90	38,0	4,41
16,0	1,02	39,0	4,57
17,0	1,13	40,0	4,74
18,0	1,26	41,0	4,92
19,0	1,38	42,0	5,14
20,0	1,47	43,0	5,37
21,0	1,62	44,0	5,55
22,0	1,78	45,0	5,72
23,0	1,91	46,0	5,90
24,0	2,07	47,0	6,10
25,0	2,21	48,0	6,28

Abbildung 5: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des quadratischen, einseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum fixierten Ende in linearisierter Darstellung.



5.3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die Durchbiegung eines quadratischen, beidseitig aufgelegten Stabes

Der Fit in Abbildung 6 besitzt die Form:

$$y = \begin{cases} a(3L^2x - 4x^3) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ a(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) & \text{für } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \quad (8)$$

und in den Abbildungen 7 und 8 die Form $y = ax$. Aus Formel (4) ergibt sich das Flächenträgheitsmoment I_{Quadrat} des quadratischen Stabes zu $8,33 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^4$. Die Kraft F berechnet sich aus dem angehängtem Gewicht von 3531,3 g mit Formel (7) zu 34,64 N. Eine nicht lineare Ausgleichsrechnung der Form (8) liefert mit der gemessenen Länge L von 55,5 cm und den Wertepaaren aus Tabelle 3 nach Formel (6) und (5):

$$E = \frac{F}{48aI} = (91,63 \pm 0,25) \text{ GPa.}$$

Es ist zu erkennen, dass die Messwerte durch die Fits angenähert werden können. Auch hier zeigen die Graphen das vorhergesagte Verhalten auf.

Abbildung 6: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des quadratischen, beidseitig aufliegenden Stabes in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum rechten Auflagepunkt.

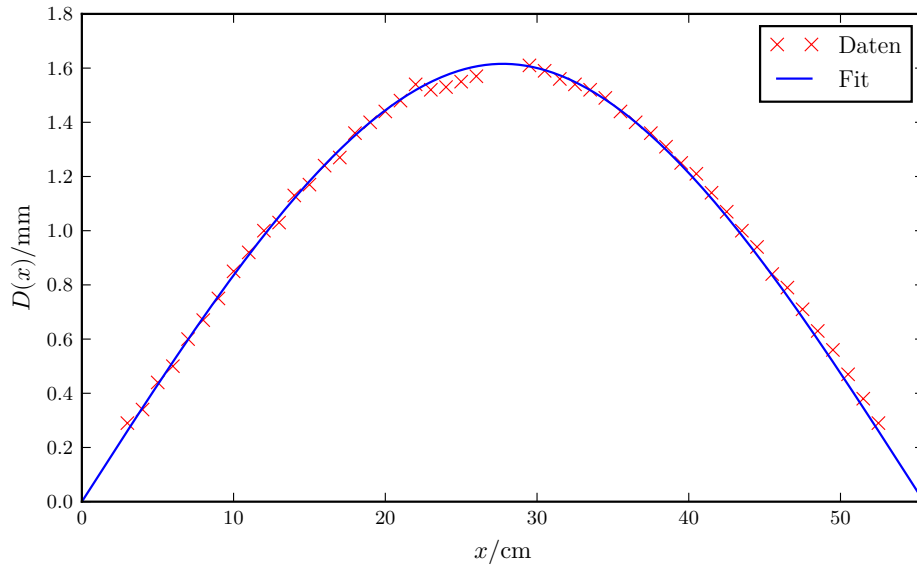


Abbildung 7: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des quadratischen, beidseitig aufliegenden Stabes von der rechten Seite bis zur Stabmitte in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum rechten Auflagepunkt in linearisierter Form.

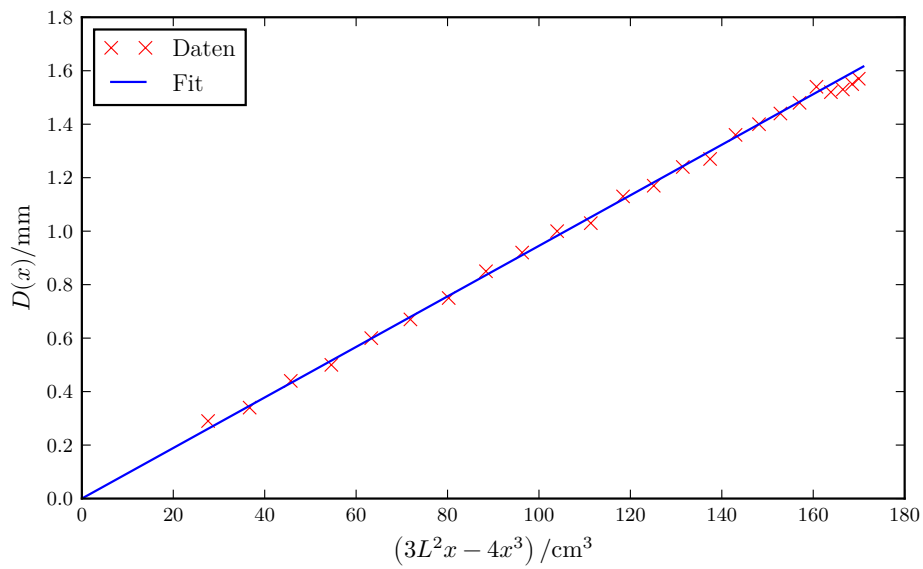
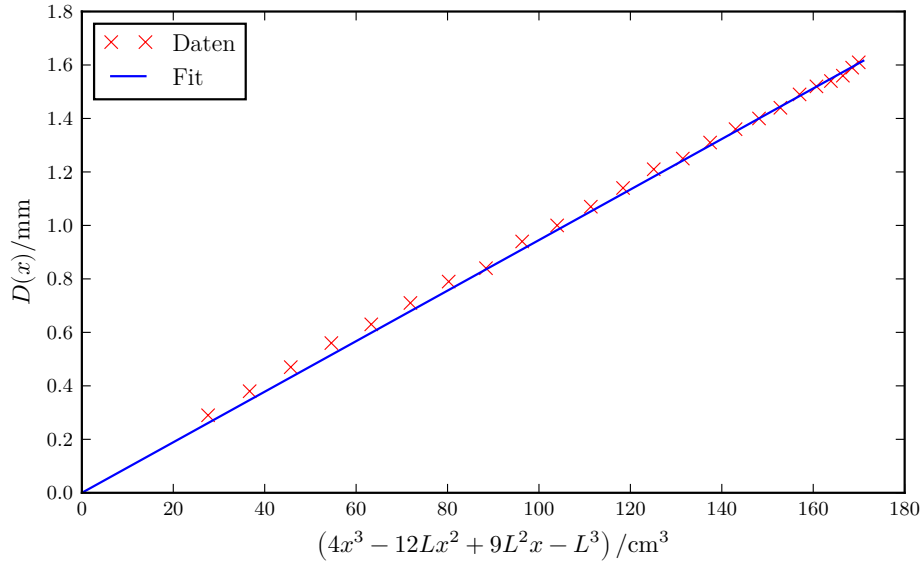


Tabelle 3: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des beidseitig aufliegenden, quadratischen Stabes an den jeweiligen horizontalen Abständen x zum rechten Auflagepunkt.

x/cm	$D(x)/\text{mm}$	x/cm	$D(x)/\text{mm}$
3,0	0,29	29,5	1,61
4,0	0,34	30,5	1,59
5,0	0,44	31,5	1,56
6,0	0,50	32,5	1,54
7,0	0,60	33,5	1,52
8,0	0,67	34,5	1,49
9,0	0,75	35,5	1,44
10,0	0,85	36,5	1,40
11,0	0,92	37,5	1,36
12,0	1,00	38,5	1,31
13,0	1,03	39,5	1,25
14,0	1,13	40,5	1,21
15,0	1,17	41,5	1,14
16,0	1,24	42,5	1,07
17,0	1,27	43,5	1,00
18,0	1,36	44,5	0,94
19,0	1,40	45,5	0,84
20,0	1,44	46,5	0,79
21,0	1,48	47,5	0,71
22,0	1,54	48,5	0,63
23,0	1,52	49,5	0,56
24,0	1,53	50,5	0,47
25,0	1,55	51,5	0,38
26,0	1,57	52,5	0,29

Abbildung 8: Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des quadratischen, beidseitig aufliegenden Stabes von der linken Seite bis zur Stabmitte in Abhängigkeit des horizontalen Abstandes zum rechten Auflagepunkt in linearisierter Form.



6 Diskussion

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls des runden Stabes liefert einen Wert von $E = (91,0 \pm 0,4) \text{ GPa}$. In Anbetracht der leicht goldenen Färbung des Stabes besteht der Stab daher vermutlich aus einer Messinglegierung. Der E-Modul einer solchen Legierung liegt bei ca. $78 - 123 \text{ GPa}$ ^[1], womit die Ergebnisse hierzu passen. Da jedoch keine weiteren Angaben bezüglich des Stabes vorliegen und der angegebene Literaturbereich die Möglichkeit eines anderen Stoffes offenlegt, ist keine eindeutige Einordnung möglich. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls des quadratischen, einseitig eingespannten Stabes liefert hingegen einen Wert von $(87,38 \pm 0,26) \text{ GPa}$. Dieser ist damit ca. 4 % kleiner als der des Runden, was sich nicht allein durch die Messunsicherheit erklären lässt. Da beide Stäbe jedoch den gleichen Farbton besitzen, ist trotzdem davon auszugehen, dass es sich um den gleichen Stoff handelt. Dies bestätigt auch die nachfolgende Messung desselben Stabes bei beidseitiger Auflage. Deren Ergebnis liegt mit $(91,63 \pm 0,25) \text{ GPa}$ unter Beachtung der Messunsicherheit in der Sigma-Umgebung des runden Stabes. Mögliche Ursachen für die Abweichung der zweiten Messung ist ein falscher Wert der effektiven Stablänge.

Literatur

- [1] Peter Brehm. *Der E-Modul*. URL: <http://www.peter-brehm.de/219.0.html> (besucht am 18.12.2016).
- [2] TU Dortmund. *V103 Biegung elastischer Stäbe*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf> (besucht am 14.12.2016).
- [3] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: <http://matplotlib.org/> (besucht am 09.12.2016).
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/> (besucht am 09.12.2016).
- [5] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. Die Dreiundzwanzigste. Springer, 2006.
- [6] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: <http://www.numpy.org/> (besucht am 09.12.2016).