27a) $P(N|\lambda) = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!}$ $\quad x_1 = 13,\ x_2 = 8,\ x_3 = 9 \quad \bar{x} = 10$

$P_{13}(\lambda) = \frac{\lambda^{13} e^{-\lambda}}{13!} \quad P_8(\lambda) = \frac{\lambda^8 e^{-\lambda}}{8!} \quad P_9(\lambda) = \frac{\lambda^9 e^{-\lambda}}{9!}$

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{3} P(x_i|\lambda) = \frac{\lambda^{30} e^{-3\lambda}}{8!\,9!\,13!}$$

$$\rightarrow -\ln \mathcal{L} = 3\lambda - 30\ln(\lambda) + \ln(8!\,9!\,13!)$$

$$\frac{d(-\ln \mathcal{L})}{d\lambda} = 3 - \frac{30}{\lambda} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 10$$

$$\frac{d^2(-\ln \mathcal{L})}{d\lambda^2}(10) = 0.3 > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$-\ln \mathcal{L}_{max} = 30 - 30\ln(10) + \ln(8!\,9!\,13!)$$
$$= 30(1 - \ln 10) + \ln(8!\,9!\,13!)$$
$$\approx 6.881041$$

$-\ln \mathcal{L}(\lambda) \overset{!}{=} 7{,}381041 \Leftrightarrow \lambda_1 = 11.9385$

$\lambda_2 = 8.2836$

Die λ_n ergeben die Grenzen von zentralen Konfidenzintervall für den Parameter λ an

$-\ln \mathcal{L}(\lambda) \overset{!}{=} 8.881041 \Leftrightarrow \lambda_1 = 14.1088$

$\lambda_2 = 6.7788$

$-\ln \mathcal{L}(\lambda) \overset{!}{=} 11{,}381041 \Rightarrow \lambda_1 = 16.5197$

$\lambda_2 = 5.4737$

Taylor-Näherung um $\lambda = \lambda_{max} = 10$

$$-\ln \mathcal{L} \approx \underbrace{30(1 - \ln 10) + \ln(8!\,9!\,13!)}_{= -\ln \mathcal{L}_{max} =: C} + 0.3(\lambda - 10)^2$$
$$= C + 0.3(\lambda - 10)^2$$

Da C bereits das Maximum ist vereinfachen sich die Berechnungen zu

$\frac{1}{2} = \frac{3(\lambda - 10)^2}{10} \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ $\quad \lambda_1 \approx 11{,}2910 \quad \lambda_2 \approx 8.7090$

Für die Abschät. kleiner Intervalle ist dies einfacher (analytisch) lösbar.

$2 = \frac{3}{10}(\lambda - 10)^2 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{\frac{20}{3}}$ $\quad \lambda_1 \approx 12.5820 \quad \lambda_2 \approx 7.418$

Für größere Konfidenzen ist sie allerdings ungenau.

$\frac{9}{2} = \frac{3}{10}(\lambda - 10)^2 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{15}$ $\quad \lambda_1 \approx 13.8720 \quad \lambda_2 \approx 6.1270$