1 Numerische Stabiltät

Die beiden Funktionen

$$f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{3}\right) - \left(x^3 - \frac{1}{3}\right) \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{\left(3 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(3 - \frac{x^3}{3}\right)}{x^3} \tag{2}$$

sind beide $= 2/3$.

1.1 Untersuchung von Gleichung (1)

Für Formel (1) lässt sich mittels der Zeilen $21 - 32$ in der Python-Datei bestimmen, dass der Fehler kleiner als 1% ist für $-41285 \leq x \leq 41285$. Eeine logarithmische Darstellung des positiven Bereichs ist in Abbildung 1 zu sehen.
Für Zahlen $|x| > 165141$ ist die Gleichung numerisch $= 0$.

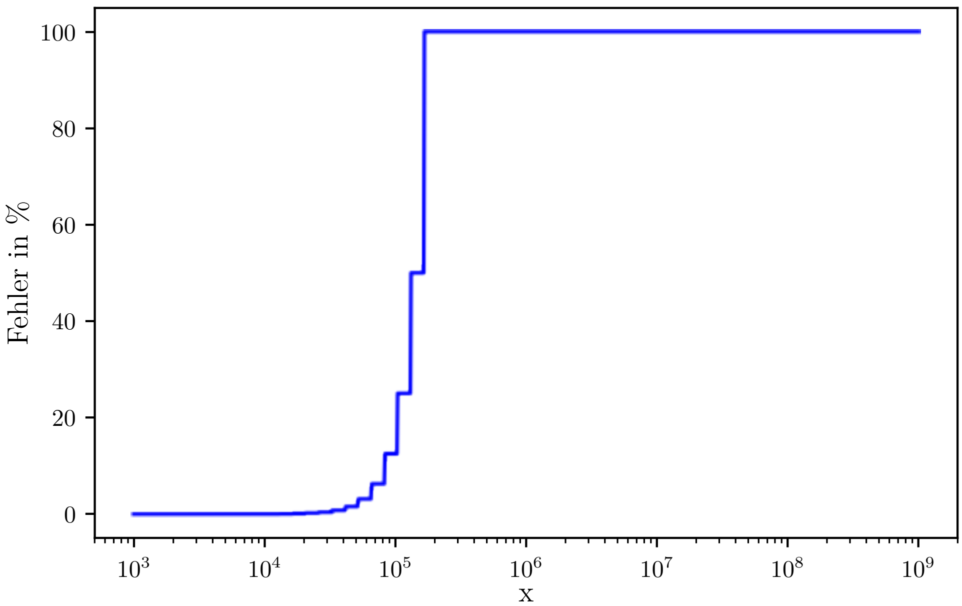

Abbildung 1: Relativer Fehler von $f(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 41285$

1.2 Untersuchung von Gleichung (2)

Mittels der Zeilen $53 - 58$ ist ermittelbar, daas für Werte $x > 4.01269392415 \cdot 10^{-5}$ der numerische Fehler der Formel (2) kleiner als 1% ist. Für Zahlen $x < 8.73291858992 \cdot 10^{-6}$ ist die Gleichung numerisch $= 0$.

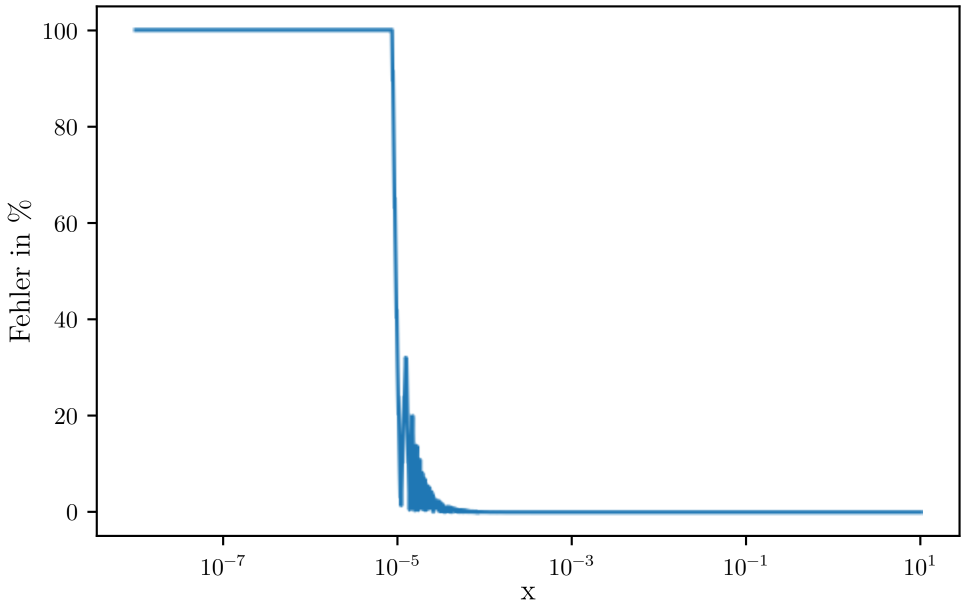

Abbildung 2: Relativer Fehler von $g(x)$ im positiven Bereich (logarithmisch)

2 $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+ \rightarrow \gamma\gamma$

2.1 Wirkungsquerschnitt

Für große Werte von $\gamma = \frac{E_e}{m_e c^2}$ und damit $\beta \approx 1$ ist die Formel für den Wirkungsquerschnitt (3) im Bereich um $\Theta = 0$ instabil, da im Nenner die Gefahr einer Auslöschung besteht. Generell ist der Nenner, da er für $\Theta \leq \frac{\pi}{2}$ immer < 1 ist, eine Gefahr für Instabilität, weil so durch eine kleine Zahl geteilt wird.
Beheben lässt sich dies durch Umformungen mit den Beziehungen

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$
$$1 = \sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta)$$

zu Formel (4).

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2 + \sin(\Theta)}{1 - \beta^2\cos(\Theta)}\right)^2 \tag{3}$$
$$= \frac{\alpha^2}{s}\frac{2 + \sin^2(\Theta)}{\frac{1}{\gamma^2}\cos^2(\Theta) + \sin^2(\Theta)} \tag{4}$$

Hierbei ist

$$s = (2E_\mathrm{e})^2 \quad (E_\mathrm{e} \text{ ist die Energie der Teilchen im Schwerpunktssystem}).$$

In den Abbildungen 3 bis 5, die im Code über die Zeilen 74-122 erzeugt werden, sind die Bereiche um $\Theta = 0$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = \pi$ zu sehen. Daran lassen sich kaum Unterschiede ablesen, auch weil der Nenner nach wie vor sehr klein ist. Trägt man allerdings in Abbildung 6 die Differenz zwischen den beiden Versionen gegen Θ auf, lässt sich erkennen, das diese sich für Werte um $\Theta = 0$ bzw. 2π deutlich unterscheiden.

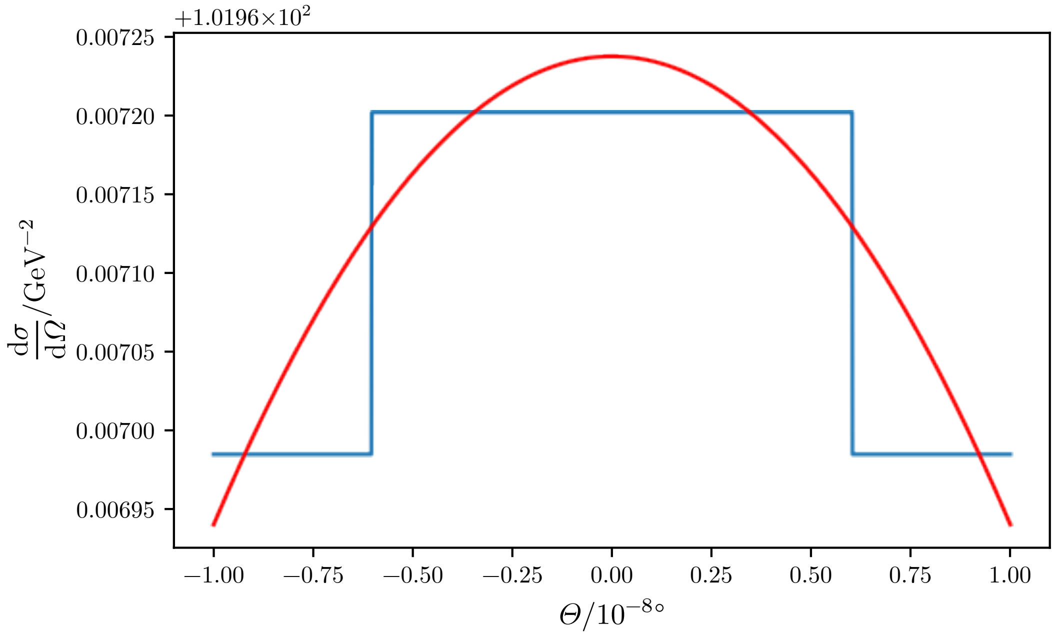

Abbildung 3: (3) und (4) um $\Theta = 0$

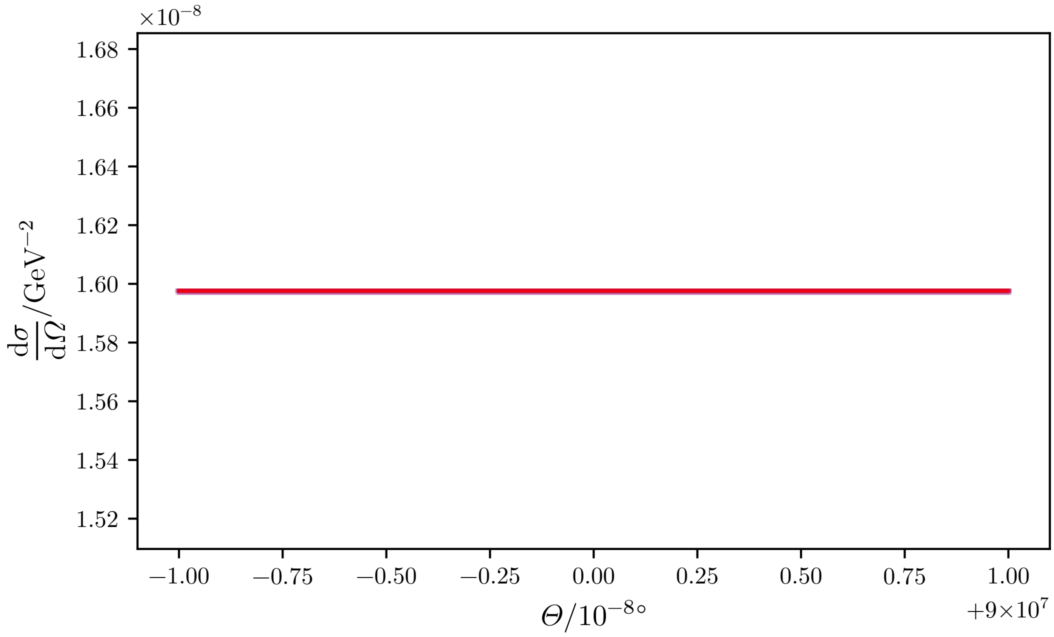

Abbildung 4: (3) und (4) um $\Theta = \frac{\pi}{2}$

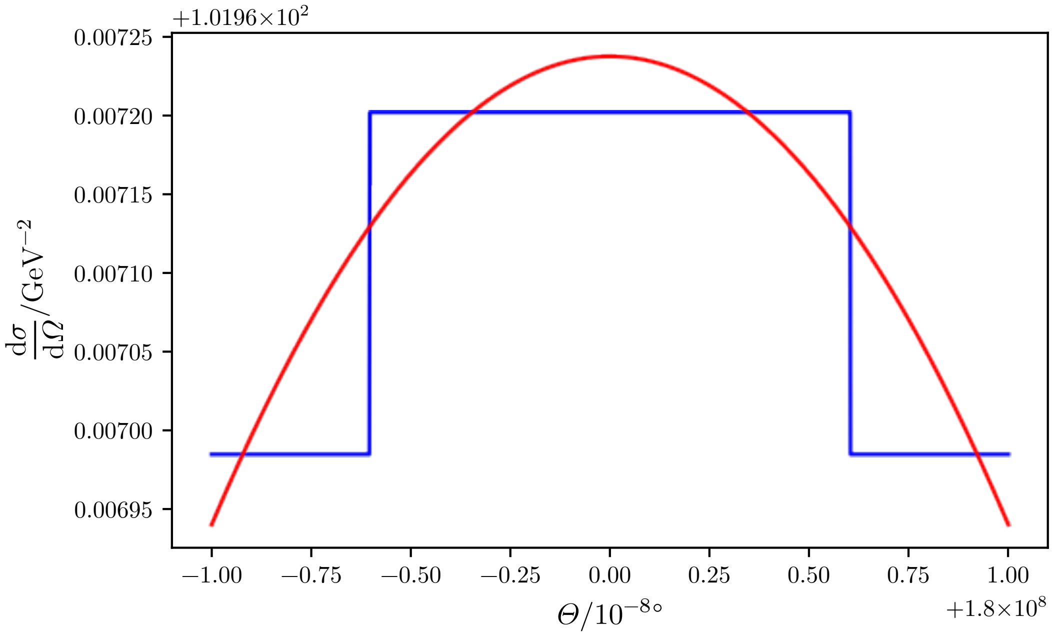

Abbildung 5: (3) und (4) um $\Theta = \pi$

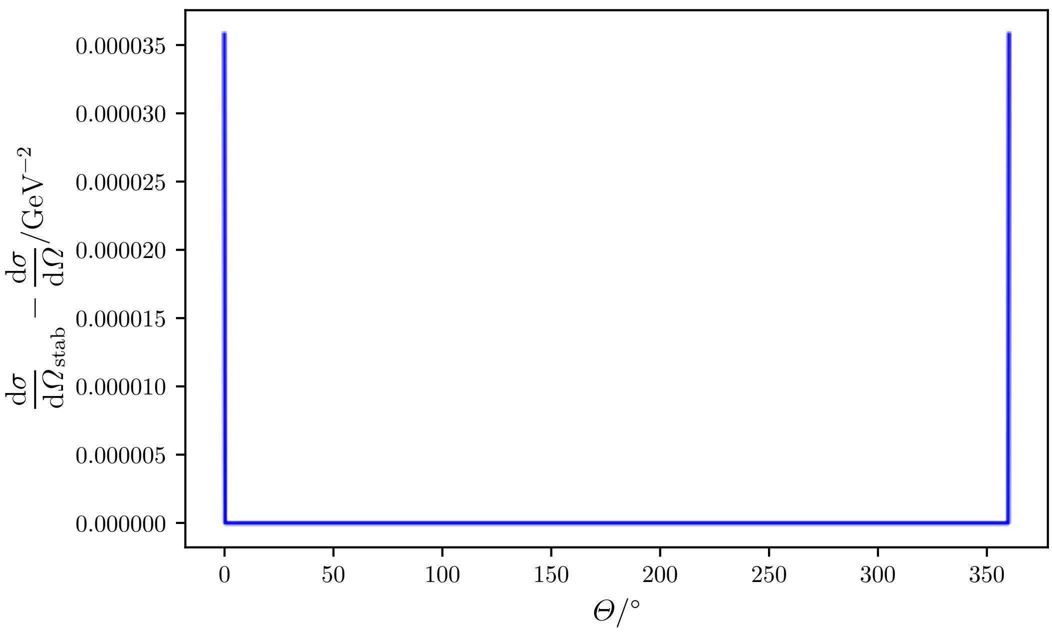

Abbildung 6: Die Differenz von (3) und (4) im Bereich $0 \leq \Theta \leq 2\pi$

2.2 Konditionszahl

Aus der Beziehung für die Konditionszahl

$$K(x) := \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \tag{5}$$

ergibt sich die Formel (6) und damit den Graphen 7.

$$K(\Theta) = \Theta \left| \frac{2\sin(\Theta)\cos(\Theta)\left(1 - 3\beta^2\right)}{\left(2 + \sin^2(\Theta)\right)\left(1 - \beta^2\cos^2(\Theta)\right)} \right| \tag{6}$$

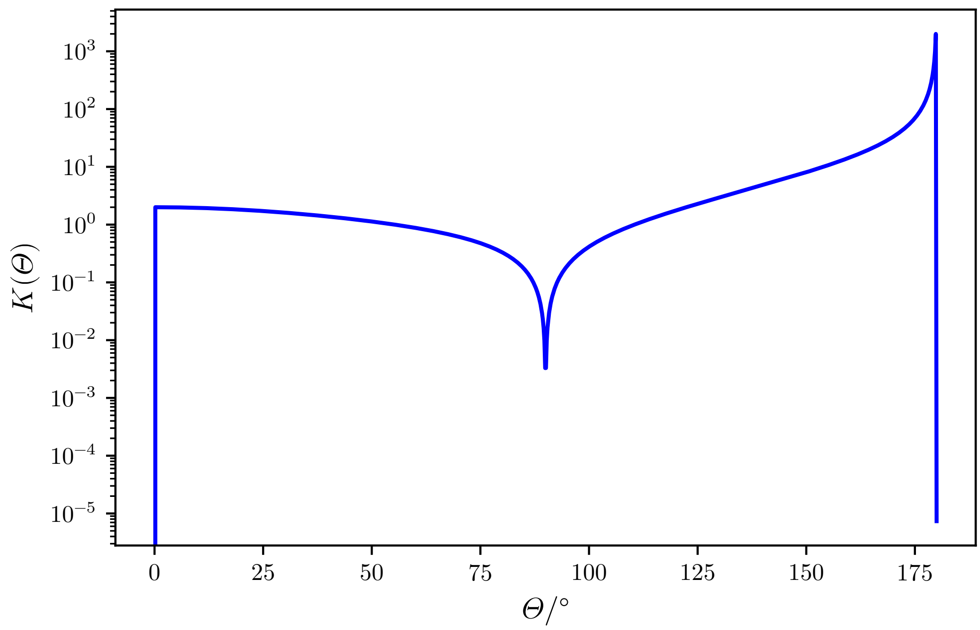

Abbildung 7: Konditionszahl in Abhängigkeit des Winkels

Aus dem Plot 7, der in den Zeilen 140-146 erzeugt wird, ist erkennbar, dass das Problem im Bereich um 180° schlecht konditioniert ist. Überall sonst ist es sehr gut konditioniert.