მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

სარჩევი

როგორ ვისარგებლოთ წიგნით

წიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგაცნოთ წიგნის აგებულება.

წიგნი შედგება თავებისაგან, ხოლო თითოეული თავი — პარაგრაფებისგან. ყოველ თავში მოცემულია ტესტები რუბრიკით „შეამოწმე შენი ცოდნა“. ტესტებზე მუშაობა დაგეხმარებათ თვითშემოწმებასა და შესწავლილი მასალის განმტკიცებაში. წიგნში განმარტებები დაბეჭდილია მუქი შრიფტით, ხოლო თვისებები, ფორმულები, ზოგიერთი საჭირო დასკვნა — ფერად ფონში.

თითქმის ყოველ თავში მოცემულია ამ თავში გადმოცემულ მასალასთან დაკავშირებული საინტერესო თემა.ყოველ პარაგრაფში შეხვდებით ზოგიერთს შემდეგი ნიშნებიდან:

- უმარტივესი კითხვები, რომელთაც ახალი მასალის ახსნის პროცესში თავად მოსწავლემ უნდა გასცეს პასუხი;

- წყვილებში სამუშაო;

* - შედარებით რთული ამოცანა;

- სავარჯიშოები, რომელიც ემსახურება გავლილი მასალის გამეორებას;

ს.ფ. - საგულისხმო ფაქტი.

წიგნის ბოლოს მოცემულია საგნობრივი საძიებელი და შემოკლებული აღნიშვნებისთვის გამოყენებული მათემატიკური ნიშნები. გთავაზობთ აგრეთვე ზომის ერთეულებს, ლათინურ და ბერძნულ ანბანს, კვადრატების ცხრილს და ამოცანების პასუხებს, დამხმარე ლიტერატურის ჩამონათვალს.

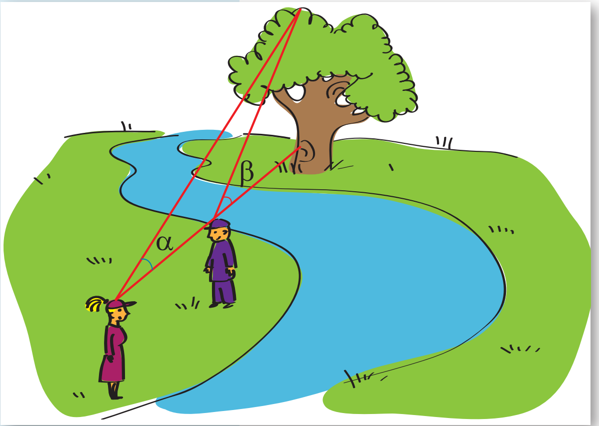
გისურვებთ წარმატებებს!

I თავი

ამ თავში თქვენ გაეცნობით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მათ თვისებებს და გრაფიკებს. დამოკიდებულებებს ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ისწავლით ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებას და იგივეობათა დამტკიცებას. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას.

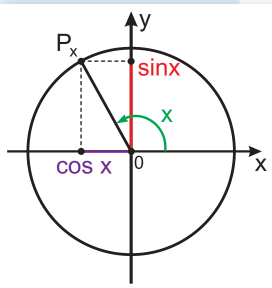
1 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები

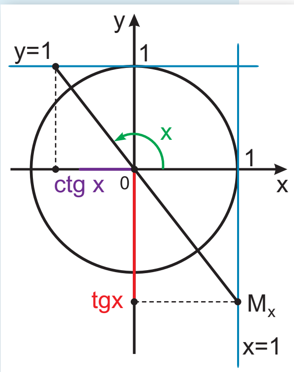


თქვენთვის უკვე ცნობილია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი თვისებები.

გავიხსენოთ

- რას ეწოდება ტრიგონომეტრიული წრეწირი?





თუ P_x წერტილი მიიღება $P_0(1;\ 0)$ წერტილის O წერტილის მიმართ x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით, მაშინ ვიცით, რომ მიღებული P_x წერტილის ორდინატას x კუთხის **სინუსს**, აბსცისას კი x კუთხის **კოსინუსს** უწოდებენ. ხოლო OP_x წრფისა და x=1 (ტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის ორდინატა x კუთხის **ტანგენსია**, OP_x წრფისა და y=1 (კოტანგენსების ღერძი) წრფის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა კი - x კუთხის **კოტანგენსი**.

შესაბამისად,

$x \to \sin x$, $y = \sin x$
$x \to \cos x$, $y = \cos x$
$x \to \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{tg}x$
$x \to \mathrm{ctg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$

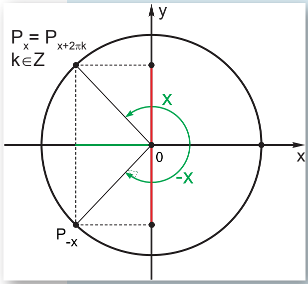
რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია.

ქვემოთ მოცემულია ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ მნიშვნელობათა ცხრილი.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

ჩამოვაყალიბოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები.

1. y=sinx და y=cosx ფუნქციათა თვისებები



y = sinx ფუნქცია

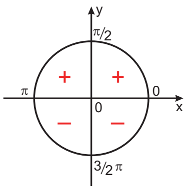
1. $D(\sin)=R$

2. $E(\sin) = [-1; 1]$

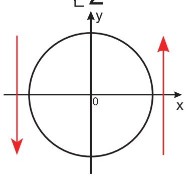
3. $\forall x \in R$: $\sin(-x) = -\sin x$
ფუნქცია კენტია - გრაფიკი სიმეტრიულია O (0,0) წერტილის მიმართ.

4. $\forall x \in R$: $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $n \in Z$
ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x \in (2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n \in Z$, $\sin x>0$
და
$x \in (\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$,
$n \in Z$, $\sin x<0$



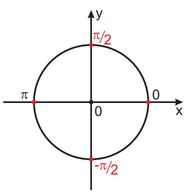
6. $x \in \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n\ ;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$
ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია.



$x \in \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n\ ;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$
ფუნქციის კლებადობის შუალე-დებია.

7. ფუნქციის ნულებია:
$\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n$, $n \in Z$

8. სინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:
$\sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$
ხოლო უმცირესს, როცა:
$\sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$



y=cosx ფუნქცია

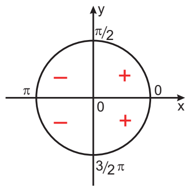
1. $D(\cos)=R$

2. $E(\cos) = [-1; 1]$

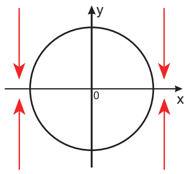
3. $\forall x \in R$: $\cos(-x) = -\cos x$
ფუნქცია ლუწია – გრაფიკი სიმეტ-რიულია y ღერძის მიმართ.

4. $\forall x \in R$:$\cos(x+2\pi n)=\cos x$, $n \in Z$
ფუნქცია პერიოდულია.
უმცირესი დადებითი პერიოდია: $T_0=2\pi$.

5. ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\ ;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$, $\cos x>0$
და
$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\ ;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi n\right)$,
$n \in Z$, $\cos x<0$



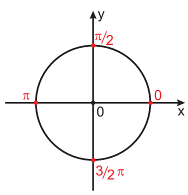
6. $x \in (2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n \in Z$
ფუნქციის კლებადობის შუალედებია.



$x \in (\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, $n \in Z$
ფუნქციის ზრდადობის შუალედები.

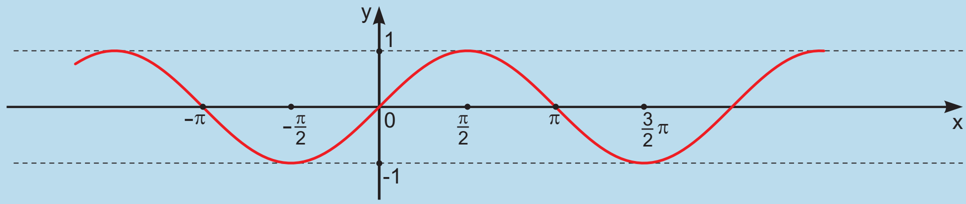
7. ფუნქციის ნულებია:
$\cos x=0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

8. კოსინუსი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს, როცა:
$\cos x=1 \Rightarrow x=2\pi n$, $n \in Z$
ხოლო უმცირესს, როცა:
$\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi n$, $n \in Z$

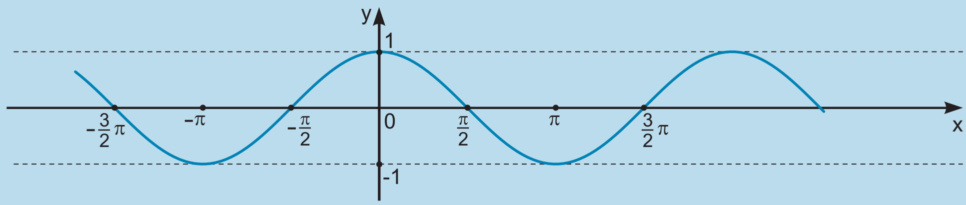


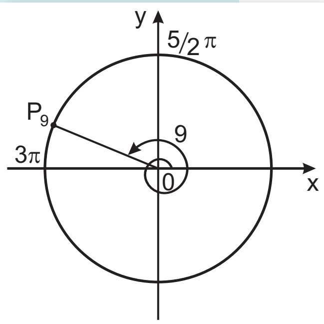
ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) ზემოთ ჩამოყალიბებული თვისებები.

y=sinx ფუნქციის გრაფიკი — სინუსოიდა.



y=cosx ფუნქციის გრაფიკი — კოსინუსოიდა.



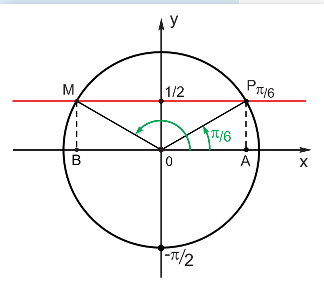


მაგალითი 1.

რომელი მეოთხედის კუთხეა 9 რადიანი?
ამოხსნა:

$\pi\approx3{,}14 \quad 3\pi>9,$

$\frac{5}{2}\pi \approx 7{,}85$. ე.ი. 9 რადიანი მე-2 მეოთხედის კუთხეა.



მაგალითი 2.

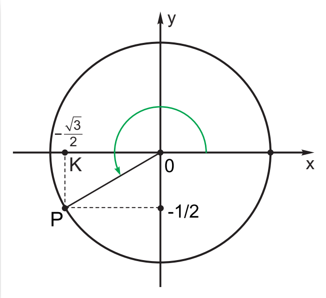
ტრიგონომეტრიული წრეწირის საშუალებით იპოვეთ ყველა ის α კუთხე, რომელიც მოთავსებულია [–4π;4π] შუალედში და რომელთათვისაც სრულდება $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

ამოხსნა:

გავავატაროთ $y=\frac{1}{2}$ წრფე. იგი წრეწირს ორ წერტილში გადაკვეთს. როგორც ცნობილია, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ე.ი. ერთ-ერთი ამ კუთხეთაგანი არის $\frac{\pi}{6}$. $\Delta OMB=\Delta OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle BOM = \angle OP_{\frac{\pi}{6}}A \Rightarrow \angle AOM = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ სინუსის პერიოდულობის გათვალისწინებით საძიებელი კუთხეები იქნებიან: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$; $\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23}{6}\pi$, ასევე $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{17}{6}\pi$; $-\frac{7}{6}\pi$; $-\frac{19}{6}\pi$.

მაგალითი 3.

იპოვეთ ყველა ის რიცხვი, რომლის შესაბამისი წერტილი ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე არის $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ წერტილი.



ამოხსნა:

ცხადია, P წერტილი ნამდვილად ტრიგონომეტრიული წრეწირის წერტილია, რადგან $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$. ΔPOK-ში $PK=\frac{1}{2}$; $OK=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $OP=1$. $\sin\angle KOP=\frac{1}{2}$, $\angle KOP=\frac{\pi}{6}$. ე.ი. P არის ყველა $\frac{7}{6}\pi+2\pi k$, $k\in Z$ რიცხვების და მხოლოდ მათი შესაბამისი წერტილი.

მაგალითი 4.

იპოვეთ $f(x)=\sin 3x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ T_0 არის $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, მაშინ უნდა შესრულდეს $f(x)=f(x+T_0)$.

$f(x+T_0)=\sin(3(x+T_0))=\sin(3x+3T_0)$ მივიღეთ:

$\sin 3x=\sin(3x+3T_0)$, რადგან $T_0(\sin)=2\pi$, ე.ი. $3T_0=2\pi \Rightarrow T_0=\frac{2}{3}\pi$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. თუ $0°<\alpha<90°$, მაშინ α კუთხე __?__ მეოთხედის კუთხეა.

2. თუ α არის II მეოთხედის კუთხე, მაშინ __?__ $<\alpha<$ __?__.

3. თუ $0°<\alpha<180°$, მაშინ α კუთხე __?__ ან __?__ მეოთხედის კუთხეა.

4. ჩასვით უტოლობის ნიშანი ისე, რომ გამოვიდეს ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა.

ა) $\cos\frac{\pi}{13}$ __?__ $\cos^2\frac{\pi}{13}$; ბ) $\sin\frac{\pi}{8}$ __?__ $\sin^2\frac{\pi}{8}$;

გ) $\sin\frac{\pi}{9}$ __?__ $\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{7}$; დ) $\cos\frac{18\pi}{15}$ __?__ $\cos\frac{18\pi}{5}\sin\frac{11\pi}{3}$.

სავარჯიშოები:

1 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე წერტილის კოორდინატები, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha=$

ა) 3π; ბ) $\frac{3\pi}{2}$; გ) $-270°$; დ) $1080°$; ე) $-90°$; ვ) $-\frac{\pi}{4}$.

2 განსაზღვრეთ ერთეულოვან წრეწირზე $P\alpha$ წერტილის კოორდინატები, თუ $OP\alpha$ სხივი აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, სადაც α ტოლია:

ა) $\frac{2\pi}{3}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}$; გ) $\frac{5\pi}{6}$; დ) π; ე) $\frac{7\pi}{6}$; ვ) $\frac{3\pi}{2}$;

ზ) $\frac{7\pi}{4}$; თ) $\frac{11\pi}{6}$; ი) $\frac{\pi}{3}$; კ) $-\frac{3\pi}{4}$; ლ) $-\pi$; მ) $-\frac{\pi}{2}$.

3 იპოვეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ

ა) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ და $-90°<x<90°$;

ბ) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $90°<x<270°$;

გ) $\cos x = -\frac{1}{2}$ და $360°<x<540°$;

დ) $\sin x = -\frac{1}{2}$ და $-270°<x<90°$.

4 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos(-\pi)-\sin\frac{\pi}{4}}$;

ბ) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2}$;

გ) $2\sin\frac{\pi}{2}-\cos^2\frac{\pi}{4}+3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin^2\frac{\pi}{4}$;

დ) $-4\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5 დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი მოცემული ფუნქცია

ა) $y=\sin5x+\sin3x+\sin x\cos2x$; ბ) $y=\cos4x+\sin^3\frac{x}{2}\sin x+5x^2$;

გ) $y=\sin|x|\cdot\cos2x$; დ) $y=\operatorname{tg}x\cdot\cos2x+\sin x\cos4x$.

6 დაადგინეთ მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი

ა) $y=2\sin x$; ბ) $y=\sin2x$; გ) $y=\frac{\cos x}{2}$; დ) $y=\sin^2x$;

ე) $y=\cos3x$; ვ) $y=\sin x+\cos2x$; ზ) $y=|\cos2x|$; თ) $\sin\frac{x}{4}$.

7 ერთეულოვან წრეწირზე ორი $A(0;1)$ და $B(1;0)$ წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას ერთი და იმავე მიმართულებით. A წერტილი წუთში შემოწერს 60°-იან რკალს, ხოლო B წერტილი — 42°-იანს. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი შეხვედრა

ა) პირველი? ბ) მეორე? გ) k-ური?

8 ერთეულოვან წრეწირზე ორი $A(0;1)$ და $B(1;0)$ წერტილი ერთდროულად იწყებს მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით. A წერტილი მოძრაობს უარყოფითი მიმართულებით და ყოველ წუთში შემოწერს $20°$-იან რკალს, ხოლო B წერტილი დადებითი მიმართულებით და ყოველ წუთში მის მიერ გავლილი რკალის გრადუსული ზომა $25°$-ია. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წუთში მოხდება მათი შეხვედრა: ა) პირველი? ბ) მეორე? გ) k-ური?

9* აჩვენეთ, რომ თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, მაშინ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

გ

10 ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:
$x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

11 იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(g(x))=0$, თუ $f(x)=x^2-5x-6$ და $g(x)=x^2$.

12 იპოვეთ $\sqrt{(3-a)(5+a)}$, თუ $\sqrt{3-a}+\sqrt{5+a}=4$.

13 ამოხსენით სისტემა (მით.: გამოიყენეთ იგივეობა $[x]+\{x\}=x$).

$$\begin{cases}[x]+\{y\}=2,3\\ [y]+\{x\}=1,2\end{cases}.$$

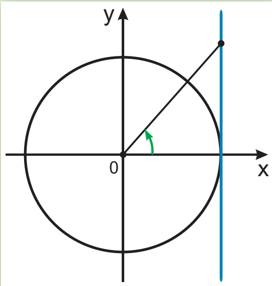
14 a-ს რა მნიშვენოლებისთვის არის $f(x)=(a-2)x+3a-4$ ფუნქცია
ა) ლუწი; ბ) კენტი.

15 a-ს რა მნიშვენოლებისთვის არის $f(x)=(a+3)x+5a$ ფუნქცია პერიოდული?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

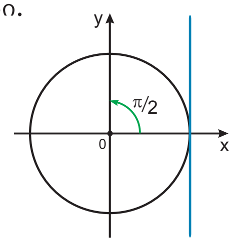
16 იპოვეთ ა) $y=\sin kx$; ბ) $y=\cos kx$ ფუნქციის პერიოდი, უმცირესი დადებითი პერიოდი.

2 y=tgx და y=ctgx ფუნქციათა თვისებები

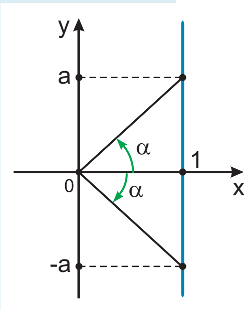


1. ააგეთ კუთხე, რომლის ტანგენსი (კოტანგენსი) ტოლია:
ა) 1-ის, ბ) 2-ის, გ) 3-ის.

ჩამოვაყალიბოთ y=tgx ფუნქციის ძირითადი თვისებები.

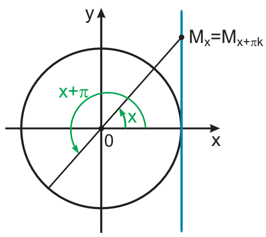


1. ტანგენსის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა.

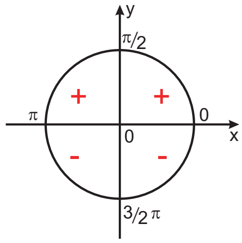


2. E(tg)=R

3. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(-x)=tgx$, ე.ი. ფუნქცია კენტია.



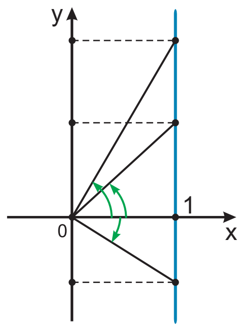
4. $\forall x\in D(tg)$-თვის $tg(x+\pi k)=tgx,\ k\in Z$ – ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π.



5. ტანგენსის ნიშანმუდმივობის შუალედები:
$x\in(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში tgx>0 და
$x\in(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+\pi k),\ k\in Z$ შუალედებში tgx<0.

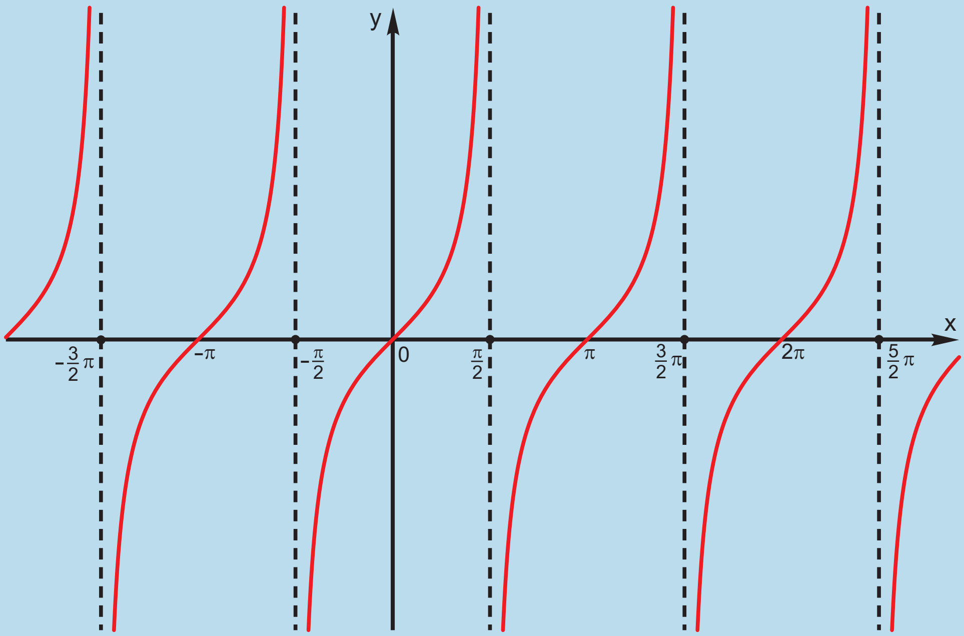
6. $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$ შუალედებში y=tgx ფუნქცია ზრდადია.

აჩვენეთ, რომ როცა x უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$-ს და $x<\frac{\pi}{2}$, tgx-ის მნიშვნელობები უსაზღვროდ იზრდება - ხდება რაგინდ დიდი, მაგრამ როცა x უახლოვდება $-\frac{\pi}{2}$-ს და $x>-\frac{\pi}{2}$, მაშინ $|tgx|$-ის მნიშვნელობები აბსოლუტური სიდიდით ისევ უსაზღვროდ იზრდება.

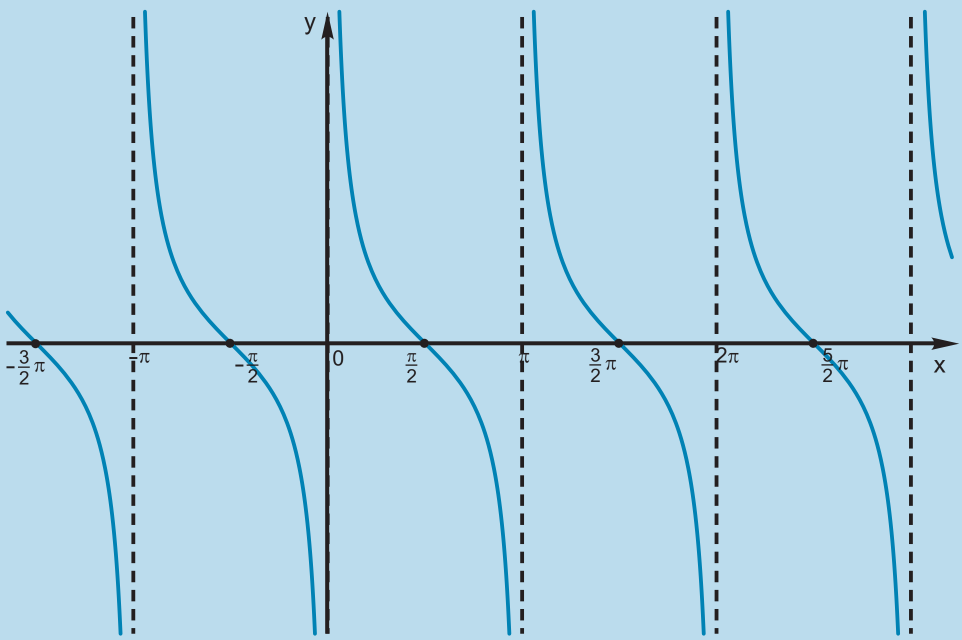


7. ტანგენსის ნულებია: თუ $tgx = 0$, მაშინ $x=\pi k,\ k\in Z$.

y=tgx ფუნქციის გრაფიკი - ტანგენსოიდა



y=ctgx ფუნქციის გრაფიკი - კოტანგენსოიდა



ა) დაასაბუთეთ (გაიხსენეთ) y=tgx ფუნქციის თვისებები;
ბ) ჩამოაყალიბეთ და დაასაბუთეთ y=ctgx ფუნქციის თვისებები.

მაგალითი 1.

იპოვეთ $f(x)=tg5x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ამოხსნა:

თუ f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი T_o-ია, მაშინ უნდა შესრულდეს: $f(x+T_o)=f(x)$.

$f(x+T_o)=tg(5(x+T_o))=tg(5x+5T_o)$, მივიღეთ: $tg(5x+5T_o)=tg(5x)$.

რადგან $(T_o(tgx)=\pi) \Rightarrow (5T_o=\pi) \Rightarrow T_o=\frac{\pi}{5}$.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} - 3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

ბ) $4\sin^2\frac{\pi}{3} - 5\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6} + 9\cos^2\frac{\pi}{3} - 3\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}$.

2 ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინებით გამოთვალეთ:

ა) $\dfrac{2\sin^2(-2490°) + \cos^2 420° - 2\mathrm{tg}^2(-2940°)}{3\sin(-1500°) - \sin^2(-990°)}$;

ბ) $4\sin 330° \cdot \cos(-240°) \cdot \mathrm{tg}120° - 2\cos 150° \cdot \mathrm{tg}(-315°)$;

გ) $\dfrac{\cos 1530° \cdot \mathrm{tg}1410° - \mathrm{tg}^2 2220° \cdot \sin 1845°}{\cos^2(-2550°)}$.

3 შეადარეთ ერთმანეთს:

ა) tg37° და tg57°; ბ) tg3° და tg3; გ) tg72° და tg1;
დ) ctg54° და ctg154°; ე) ctg32° და ctg2; ვ) ctg104° და 0.

4 იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) y=5sinx; ბ) y=cosx–2; გ) y=tg5x;
დ) y=|tgx|; ე) y=tgx–3; ვ) $y=ctg^2x$.

5 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = -1$; ბ) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 1$; გ) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;
დ) $\cos(\pi+x)=-1$; ე) $\mathrm{tg}(x-\pi)=1$; ვ) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

6 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

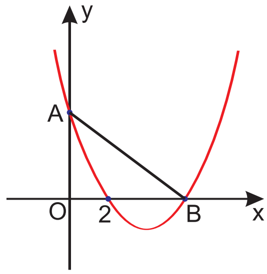
ა) y=tgx+ctgx; ბ) y=tg2x+ctg2x;
გ) y=sin2x+tgx; დ) $y = \mathrm{tg}\frac{5}{6}x + 8$.

7 რომელია მეტი:

ა) sin1980° თუ tg1980°; ბ) tg1 თუ arctg1;
გ) tg2 თუ tg3; დ) tg1 თუ tg2.

8 $f(x)$ არის კენტი პერიოდული ფუნქცია, რომლის დადებითი პერიოდია 7. იპოვეთ $f(13)$ თუ $f(1)=8$.

9 ნახაზზე მოცემულია $y=x^2-6x+c$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.



10 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $x=2$ რიცხვი მოთავსებულია $x^2+(a-2)x+3a=0$ განტოლების ამონახსნებს შორის.

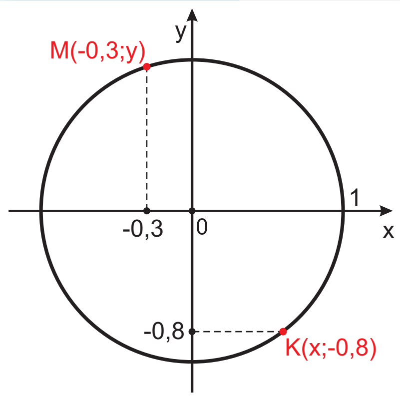
11 მოცემულია $f(x)$ წრფივი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ $y=f(f(x))$ ფუნქცია აგრეთვე წრფივია.

12 ამოხსენით განტოლება:
ა) $[x]=2$; ბ) $\{2x\}=0,1$.

13 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^2-(a+1)x+a^2+a-8=0$ განტოლების ერთი ფესვი მეტია 2-ზე, მეორე ნაკლებია 2-ზე.

ჯგუფური მეცადინეობა

2 დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის



1. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ M და K წერტილების უცნობი კოორდინატები.

2. ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით დაამტკიცეთ, შემდეგ ფორმულათა სამართლიანობა:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (1)

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, თუ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ (2)

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, თუ $\alpha \neq \pi + \pi k,\ k \in Z$ (3)

$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 1$, თუ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z$ (4)

(1) ფორმულიდან ადვილად მიიღებთ, რომ:

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

მაგალითი 1.

იპოვეთ: $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ:

ა) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ და $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

ბ) $\mathrm{tg}\alpha = -2$ და $\alpha \in (\pi;\ \pi)$.

ამოხსნა:

ა) $\left(\begin{cases}\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\end{cases}\right) \Rightarrow \left(\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}\right).$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{5}{12};$ $\qquad \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\dfrac{5}{12}.$

ბ) $\mathrm{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right) \Rightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}\\ \alpha \in \left(\pi;\ \dfrac{3}{2}\pi\right)\end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

მაგალითი 2.

იპოვეთ $\frac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$-ს მნიშვნელობა, თუ $\text{tg}\alpha=2$

ამოხსნა:

$$(\text{tg}\alpha=2)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\right)\Leftrightarrow(\sin\alpha=2\cos\alpha)$$

$$\frac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{3\cos\alpha+4\cos\alpha}{10\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{7}{9}.$$

ფორმულები, რომლებიც გამოხატავენ დამოკიდებულებას ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის – **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები.**

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
2. $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
3. $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
4. $1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
5. $1+\text{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
6. $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
7. $\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
8. $\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1$

სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ მოცემული არგუმენტის დანარჩენი ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ:

ა) $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

ბ) $\sin\alpha=-\frac{3}{4},\ \alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

გ) $\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$;

დ) $\cos\alpha=-\frac{1}{4},\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

ე) $\text{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

ვ) $\text{tg}\alpha=-\frac{1}{3},\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

ზ) $\text{ctg}\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

თ) $\text{ctg}\alpha=-3,\ \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

2 დაადგინეთ, შეიძლება თუ არა, რომ ერთი და იგივე არგუმენტისთვის სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობა:

ა) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \text{tg}\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$;

ბ) $\sin\alpha=-\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=-\frac{3}{5},\quad \text{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

გ) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{5},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{23}}{5},\quad \text{tg}\alpha=\sqrt{\frac{3}{23}}$;

დ) $\sin\alpha=-\frac{8}{17},\quad \cos\alpha=-\frac{15}{17},\quad \text{tg}\alpha=\frac{8}{15}$.

3 რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია:

ა) $\sin\alpha$, თუ $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; ბ) $\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$;

გ) $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) $\sin\alpha$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=3$.

4 იპოვეთ:

ა) $\frac{2\sin x - 5\cos x}{4\cos x + 3\sin x}$, თუ $\mathrm{tg}x=3$; ბ) $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x}$, თუ $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{3}$;

გ) $\frac{7\cos x + 3\sin^2 x\cos x + 3\cos^3 x}{4\sin x + 3\cos x}$, თუ $\mathrm{tg}x=2$;

დ) $\frac{5\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x - 2\sin^2 x}$, თუ $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{2}$.

5 გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, თუ $\alpha\in(225°;270°)$ და $6\mathrm{tg}^2\alpha-11\mathrm{tg}\alpha+3=0$

6 გამოთვალეთ $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{12}\right)$ და $16\cos^2\alpha-16\cos\alpha+3=0$

7 გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ ცნობილია, რომ $\mathrm{tg}\alpha=3$ და α პირველ მეოთხედში არ ძევს.

8 გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=2$; ბ) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{2}$;

გ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; დ) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=3$.

9 იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა

ა) $y=\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha$; ბ) $y=4\cos^2\alpha-5\sin^2\alpha$;

გ) $y=2\sin^2\alpha-5\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha$; დ) $5\cos^2\alpha-3\mathrm{tg}3\alpha\mathrm{ctg}3\alpha$.

---

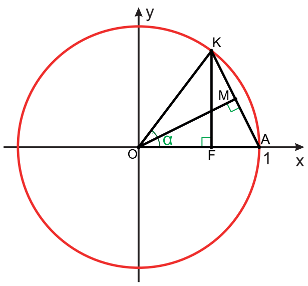
10 ზრდადია თუ კლებადი მიმდევრობა:

ა) $x_n=3n+7$; ბ) $x_n=-5n+3$; გ) $x_n=n^2-5n+1$.

11 იპოვეთ ყველა სამნიშნა რიცხვის ჯამი, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2-ს.

12 (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი 1-ის ტოლია. d სხვაობის რა მნიშვნელობისთვის მიიღებს $a_1a_3+a_2a_3$ გამოსახულება უმცირეს მნიშვნელობას?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:



13 ა) ნახაზის მიხედვით აჩვენეთ, რომ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 < a \le \frac{\pi}{2}$$ და გამოთვალეთ $\cos\frac{\alpha}{2}$.

ბ) ისარგებლეთ მიღებული ფორმულით და გამოთვალეთ: $\sin15°$, $\cos22{,}5°$.

3 ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და იგივეობათა დამტკიცება

1. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

ბ) $\dfrac{\text{tg}2\alpha}{\text{tg}3\beta}=\dfrac{\text{tg}2\alpha+\text{ctg}3\beta}{\text{ctg}2\alpha+\text{tg}3\beta}$;

გ) $\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

ტრიგონომეტრიული იგივეობის დამტკიცებისას ვიყენებთ იგივე მეთოდებს, რასაც ალგებრული იგივეობის დამტკიცებისას: ა) მარცხენა მხარის მარჯვენა მხარემდე გარდაქმნა; ბ) მარჯვენა მხარის მარცხენა მხარემდე მიყვანა; გ) ორივე მხარის გამარტივება და ერთ სახემდე მიყვანა. შეიძლება განვიხილოთ ორივე მხარის სხვაობა და დავასაბუთოთ, რომ ეს სხვაობა 0-ის ტოლია. ჩვეულებრივ იგივეობების დამტკიცებისას ან ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივებისას კუთხეთა დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს არ ვადგენთ, თუ ეს კონკრეტულად ამოცანის პირობიდან არ მოითხოვება.

დამტკიცება:

ა) გავამარტივოთ მარცხენა მხარე:

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$
$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

ბ) გავამარტივოთ მარჯვენა მხარე:

$$\frac{\text{tg}2\alpha+\text{ctg}3\beta}{\text{ctg}2\alpha+\text{tg}3\beta}=\frac{\text{tg}2\alpha+\dfrac{1}{\text{tg}3\beta}}{\dfrac{1}{\text{tg}2\alpha}+\text{tg}3\beta}=\frac{\dfrac{\text{tg}2\alpha\text{tg}3\beta+1}{\text{tg}3\beta}}{\dfrac{1+\text{tg}2\alpha\text{tg}3\beta}{\text{tg}2\alpha}}=\frac{\text{tg}2\alpha}{\text{tg}3\beta}$$

გ) გავამარტივოთ მარჯვენა მხარე:

$$\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

2. გაამარტივეთ: ა) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$; ბ) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha$;

გ) $\sin^3\alpha(1+\text{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\text{tg}\alpha)$.

ამოხსნა:

ა) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$

ტრიგონომეტრიული გამოსახულებების გამარტივების დროს, ჩვეულებრივ თანმიმდევრულად უნდა შევცვალოთ მთელი გამოსახულება ან მისი ცალკეული ნაწილები იგივურად ტოლი გამოსახულებებით. გამარტივება ჩაითვლება დასრულებულად, თუ მიღებული გამოსახულება უფრო მარტივი სახისაა და აღარ საჭიროებს შემდეგ გამარტივებას.

ბ) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{(1-2\sin\alpha\cos\alpha)(1+2\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}+$

$+2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1.$

გ)

$\sin^3\alpha(1+\text{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\text{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$

სავარჯიშოები:

1 არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ sinα-ც და cosα-ც ერთდროულად უდრიდეს 0-ს?

2 არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ შესრულდეს $0<\text{tg}\alpha<1$ და $0<\text{ctg}\alpha<1$?

3 მოცემულია $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}5$. იპოვეთ:
ა) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\beta$; ბ) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.

4 გაამარტივეთ:
ა) $\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$; ბ) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;
გ) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$; დ) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
ე) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; ვ) $(1+\sin^2\alpha)\cdot\text{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

5 დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\text{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\text{tg}^2\alpha$;

ბ) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha;$

გ) $\dfrac{1+\text{tg}\alpha+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{ctg}\alpha+\text{ctg}^2\alpha}=\text{tg}^2\alpha;$

დ) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\text{ctg}\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\text{tg}^4\alpha.$

6 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{2\sin\alpha-5\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha}$, თუ $\text{ctg}\alpha=2$;

ბ) $\dfrac{4\sin\alpha-3\cos\alpha}{(2\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha}$, თუ $\text{ctg}\alpha=-2$.

7 ცნობილია, რომ $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ იპოვეთ:
ა) $\sin\alpha-\cos\alpha$; ბ) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$; გ) $\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha$.

8 გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\text{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\text{ctg}\alpha)$;

ბ) $2(\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)^2-(\sin^8\alpha+\cos^8\alpha)$;

გ) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, თუ $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

დ) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, თუ $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

9 დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\sin^3\alpha(1+\text{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\text{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

ბ) $\dfrac{2(1+\text{tg}\alpha)\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{(1+\text{tg}\alpha)^2}-\dfrac{2(1+\text{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha+1}{(1+\text{ctg}\alpha)^2}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

გ

10 არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელსაც თუ დავუმატებთ 100-ს, მივიღებთ ნატურალური რიცხვის კვადრატს, ხოლო თუ დავუმატებთ 168-ს, აგრეთვე ნატურალური რიცხვის კვადრატს მივიღებთ. იპოვეთ ეს რიცხვი.

11 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\begin{cases}(a+5)x+(2a+3)y=7\\(3a+10)x+(5a+6)y=16\end{cases}$ სისტემას აქვს:

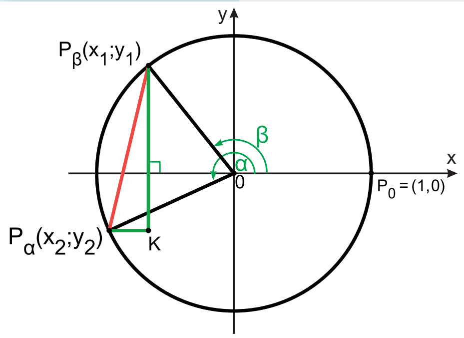
ა) ერთადერთი ამონახსნი;

ბ) უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი;

გ) არა აქვს ამონახსნი.

12 ამოხსენით სისტემა $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\[2mm]\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$.

4 ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები



ნახ. 1

გამოვიყვანოთ ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოსათვლელი ფორმულები.

მოვაბრუნოთ $P_0(1;0)$ წერტილი $O(0;0)$ ცენტრის მიმართ α და β კუთხეებით (ნახ. 1). მივიღებთ, შესაბამისად, P_α და P_β წერტილებს.

$$\left(\begin{array}{l} KP_\beta = |y_1 - y_2| \\ KP_\alpha = |x_1 - x_2| \end{array}\right) = P_\alpha P_\beta^{\,2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 =$$
$$= 2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad (1)$$

$x_1^2 + y_1^2 = 1$ და
$x_2^2 + y_2^2 = 1$
$x_1=\cos\beta;\ x_2=\cos\alpha;$
$y_1=\sin\beta;\ y_2=\sin\alpha;$

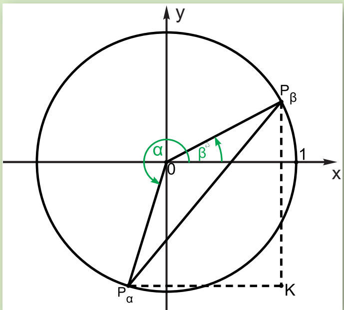
$\Delta P_\alpha OP_\beta$-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად:

$$P_\alpha P_\beta^2 = OP_\alpha^2 + OP_\beta^2 - 2OP_\alpha \cdot OP_\beta \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$ აქედან კი

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$



ნახ. 2

შევნიშნოთ, რომ $\angle P_\alpha OP_\beta$ შესაძლოა ტოლი იყოს არა მარტო $(\alpha-\beta)$-სი, არამედ მე-2 ნახაზზე $\angle P_\alpha OP_\beta = 2\pi - (\alpha - \beta)$.
შესაძლებელია აგრეთვე, რომ $P_\beta OP_\alpha$ კუთხის ზომა $(\alpha-\beta)$-გან განსხვავდებოდეს 2π-ის ჯერადი რიცხვით (ბრუნთა მთელი რიცხვით), მაგრამ ორივე შემთხვევაში $\cos\angle P_\beta OP_\alpha = \cos(\alpha-\beta)$. აჩვენეთ დამოუკიდებლად.

რადგან $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

მაგალითი 1.

გავამარტივოთ: ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; ბ) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

ბ) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\alpha$ | $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

ე.ი. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

ვიპოვოთ $\sin(\alpha+\beta)$.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ე.ი.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ მივიღებთ:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

გამოვიყვანოთ $tg(\alpha+\beta)$-ს გამოსათვლელი ფორმულა:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$ |მრიცხველიცა და მნიშვნელიც გავყოთ $\cos\alpha\cos\beta$ – ზე

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

ამრიგად, ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

სავარჯიშოები:

1. დაადგინეთ გამოსახულების ნიშანი, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; გ) $\cos(\pi+\alpha)$; დ) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;
ე) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; ვ) $\sin(\pi+\alpha)$; ზ) $\cos(\alpha-\pi)$; თ) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

2. გამოთვალეთ:

ა) $\cos15°$; ბ) $\sin105°$; გ) $\operatorname{tg}75°$;
დ) $\sin\frac{\pi}{12}$; ე) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; ვ) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

3. გამოთვალეთ:

ა) $\cos23°\cos37°-\sin23°\sin37°$; ბ) $\sin19°\cos26°+\cos19°\sin26°$;
გ) $\cos37°\cos23°-\cos53°\cos67°$; დ) $\cos73°\sin28°-\cos28°\cos17°$;
ე) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}$; ვ) $\sin\frac{7\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$.

4. გამოთვალეთ:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ და $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
ბ) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
გ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, თუ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
დ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, თუ $\cos\alpha=\frac{9}{41}$ და $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

5. გაამარტივეთ:

ა) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}-\alpha\right)$;
ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sin22°\cos8°+\cos158°\cos98°}{\sin23°\cos7°+\cos157°\cos97°}$; ბ) $\frac{\sin50°\cos12°-\sin40°\cos78°}{\cos68°-\sqrt{3}\sin68°}$;
გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos15°-\frac{1}{2}\sin15°$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin75°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos75°$.

7. გამოთვალეთ:

ა) $\operatorname{tg}42°\cdot\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}48°$; ბ) $\operatorname{tg}31°\cos58°-\operatorname{ctg}59°\sin32°$;
გ) $\operatorname{tg}10°\cdot\operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}50°\cdot\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{tg}70°\cdot\operatorname{tg}80°$;
დ) $\operatorname{tg}13°\cdot\cos2°\cdot\operatorname{tg}77°-\operatorname{ctg}11°\cdot\sin88°\cdot\operatorname{ctg}79°$.

8. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; ბ) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;
გ) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; დ) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

9. რა ნიშანია sinα+sinβ+sinγ, თუ α, β და γ სამკუთხედის კუთხეებია?

10. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos6x\cdot\cos5x+\sin6x\cdot\sin5x=-1$; ბ) $\sin4x\cos3x-\cos4x\sin3x=-1$;

გ) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=-1$; დ) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=-1$.

11. გამოთვალეთ:

ა) $\cos(\alpha+\beta)$ და $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ და $\sin\beta=\frac{15}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

ბ) $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $\cos\alpha=-0{,}6$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ და $\sin\beta=-\frac{5}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$;

გ) $tg(\alpha+\beta)$, თუ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi$ და $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

12. გამოთვალეთ:

ა) $\sin(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)$, თუ $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$;

ბ) $\cos(\alpha+\beta)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\alpha$, თუ $\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}$;

გ) $\sin\alpha\cdot\cos(\pi-\beta)-\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)$, თუ $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}$.

13*. დავამტკიცოთ, რომ თუ ax^2+bx+c გამოსახულება ღებულობს მთელ მნიშვნელობას, როცა $x=0$; $x=1$ და $x=3$-სთვის, მაშინ ის მთელი იქნება ნებისმიერი მთელი x-ისთვის.

14. ABC სამკუთხედში $\sin A=\frac{1}{2}$; $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. რისი ტოლი შეიძლება იყოს ამ სამკუთხედის უდიდესი კუთხე?

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

15. ტრიგონომეტრიულ წრეწირზე მდებარე M(a;b) წერტილი მობრუნდა O ცენტრის მიმართ φ კუთხით (ნახ.1). აჩვენეთ, რომ:

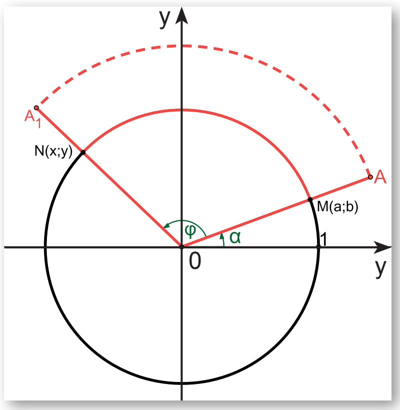
ა) N(x; y) წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით $x = a\cos\varphi - b\sin\varphi$; $y = b\cos\varphi + a\sin\varphi$.

ბ) $x_A=ar$ და $y_A=br$, სადაც OA=r.

გ) $\begin{cases} x_{A'} = x_A\cos\varphi - y_A\sin\varphi \\ y_{A'} = y_A\cos\varphi + x_A\sin\varphi \end{cases}$

დ) A(x; y) წერტილი მოაბრუნეს 90°-ით. იპოვეთ მიღებული $A_1(x_1\ y_1)$ წერტილის კოორდინატები.

ე) მიღებული შედეგის საფუძველზე აჩვენეთ, რომ თუ $y=kx$ და $y=k_1x$ წრფეები მართობული წრფეებია, მაშინ $kk_1=-1$



ნახ.1

ჯგუფური მეცადინეობა

5 ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

გამოიყენეთ ორი არგუმენტის ჯამის სინუსისა და კოსინუსის ფორმულები და დაამტკიცეთ, რომ:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3. $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

შეეცადეთ $\cos 2\alpha$ გამოსახოთ:
ა) $\cos^2\alpha$-თი, ბ) $\sin^2\alpha$-თი და აჩვენეთ, რომ:

2ᵃ. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

2ᵇ. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

2ᵃ და 2ᵇ ფორმულებიდან ადვილად მიიღებთ:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(4) — ხარისხის დაწევის ფორმულები

თუ (4) ფორმულებში α-ს შევცვლით $\frac{\alpha}{2}$-ით, მივიღებთ:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(5) — ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

?

- დაამტკიცეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით შეცვლის ფორმულები (ოქროს ფორმულები):

ა) $\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; ბ) $\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; გ) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

სავარჯიშოები:

1. გამოიყენეთ (5) ფორმულები და გამოთვალეთ:
ა) $\sin 22{,}5°$; ბ) $\cos 15°$; გ) $\operatorname{tg} 75°$.

2. იპოვეთ:
ა) $2\sin 15°\cdot\cos 15°$; ბ) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$; გ) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

დ) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; ე) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$; ვ) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$;

ზ) $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$; თ) $1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$; ი) $\frac{\operatorname{tg} 75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$.

3. გამოთვალეთ:
ა) $\sin 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=-0{,}8$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

ბ) $\cos 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{8}{17}$;

გ) $\sin 2\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

დ) $\operatorname{tg} 2\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

4. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $8\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$;

ბ) $2\cos\frac{\pi}{17}\left(2\cos^2\frac{\pi}{34}-1\right)+\cos\frac{19\pi}{17}$;

გ) $\sin\frac{\pi}{11}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{22}\right)-\sin\frac{9\pi}{22}\cdot\cos\frac{9\pi}{22}$;

დ) $2\left(1-\sin\frac{13\pi}{38}\right)\left(1+\sin\frac{25\pi}{38}\right)+\cos\frac{6\pi}{19}$.

5. გამოთვალეთ:
ა) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$; ბ) $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$.

6. გაამარტივეთ გამოსახულება:
ა) $\sin 2\alpha+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$; ბ) $\frac{\cos 4\alpha+\sin^2 2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$;

გ) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$; დ) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

7. გამოთვალეთ:
ა) $\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right)^2$; ბ) $\left(\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}\right)^2$;

გ) $\frac{16\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^2}$; დ) $\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{\left(1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2}$.

8. გამოთვალეთ:

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\sin\alpha=0{,}6$ და $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$;

ბ) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ და $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

გ) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$ თუ $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ და $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9. გაამარტივეთ:

ა) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; ბ) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; გ) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$;

დ) $(1-\cos2\alpha)\text{ctg}\alpha$; ე) $\frac{\text{tg}2\alpha}{\text{tg}4\alpha-\text{tg}2\alpha}$; ვ) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$.

10. დაამტკიცეთ იგივეობა;

ა) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; ბ) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

გ) $\frac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\text{tg}^4\alpha$; დ) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\frac{1-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha}$;

ე) $\text{ctg}\alpha-\text{tg}\alpha-2\text{tg}2\alpha-4\text{tg}4\alpha=8\text{ctg}8\alpha$.

11. გამოსახეთ $\sin3\alpha$ და $\cos3\alpha$, შესაბამისად $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$-თი.

12*. დაამტკიცეთ იგივეობა:

ა) $\frac{\cos2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\text{ctg}\alpha-1$; ბ) $\frac{\sin2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\text{ctg}\alpha$;

გ) $\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos2\alpha}=\text{ctg}\alpha$; დ) $\frac{1-\sin\alpha-\cos2\alpha+\sin3\alpha}{\sin2\alpha+2\cos\alpha\cos2\alpha}=\text{tg}\alpha$.

13. იპოვეთ

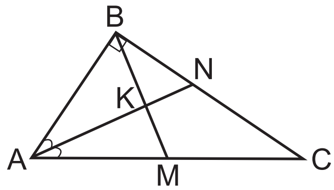
ა) $\sin\alpha$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{5}$;

ბ) $\sin2\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=b$;

გ) $\sin2\alpha$, თუ $\text{ctg}\alpha=-7$.

14 პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი $4\sqrt{6}$ სმ-ია. ეს დიაგონალი პარალელოგრამის გვერდთან 60°-იან კუთხეს, მეორე დიაგონალი იგივე გვერდთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვეთ მეორე დიაგონალი.

15 ΔABC-ში $\angle B=90^\circ$; $AB=3$სმ; $BC=4$სმ; BM მედიანაა; AN ბისექტრისაა. იპოვეთ BK.

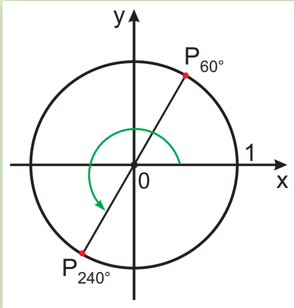


16 ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ხოლო ფერდი 14 სმ. იპოვეთ ფერდის მედიანა.

6 დაყვანის ფორმულები

1. გამოთვალეთ:

sin240°; cos210°; $\sin\frac{7}{6}\pi$.

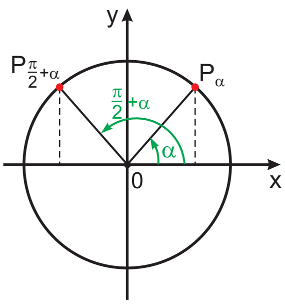


იგივეობებს, რომლებიც $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$, $k \in Z$ სახის კუთხეთა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით გამოსახავს, **დაყვანის ფორმულები** ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი α-თვის სრულდება $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

დამტკიცება:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cos\alpha - 0\sin\alpha = \cos\alpha$$



ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ და $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

2. გამოიყენეთ sin(α±β) და cos(α±β) ფორმულები და დაამტკიცეთ დაყვანის შემდეგი ფორმულები:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$ მართლაც

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$$

3. აჩვენეთ, რომ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

დაყვანის ფორმულებისა და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერი α რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა დავიყვანოთ $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში მოთავსებული რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლამდე.

დაყვანის ფორმულების დამახსოვრება გაგიადვილდებათ, თუ გაითვალისწინებთ შემდეგ წესებს:

1. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. გავარკვიოთ, თუ რომელ მეოთხედშია $P_{\frac{\pi}{2}k\pm\alpha}$, $k\in Z$ წერტილი, განვსაზღვროთ რა ნიშანი აქვს ამ მეოთხედში მოცემულ ფუნქციას და მიღებული შედეგის წინ დავწეროთ ეს ნიშანი.
2. დასაყვანი ფუნქციის სახელწოდება იგივე რჩება, თუ დაყვანის ფორმულაში $\frac{\pi}{2}$ აღებულია ლუწ რიცხვჯერ (ანუ როცა $\pi\pm\alpha$ ან $2\pi\pm\alpha$ არგუმენტი იცვლება α-თი),ხოლო დასაყვანი ფუნქციის სახელწოდება იცვლება მისი „კოფუნქციით“ (სინუსი - კოსინუსით, კოსინუსი - სინუსით, ტანგენსი - კოტანგენსით, კოტანგენსი - ტანგენსით), თუ დაყვანის ფორმულაში $\frac{\pi}{2}$ აღებულშია კენტ რიცხვჯერ (ანუ, როცა $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ან $\pi\pm\alpha$ არგუმენტი იცვლება α-თი).

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ: ა) $\cos\left(\frac{22}{3}\pi\right)$; ბ) $\sin(-1575°)$.

ამოხსნა:

ა) $\cos\left(\frac{22}{3}\pi\right)=$ | გამოვყოთ პერიოდი, $2\pi k$

$$\cos\left(6\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

ან ასეც:

$$\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

ბ) $\sin(-1575^\circ) =$

$= -\sin 135^\circ = -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{1575} : 360 = 4$
$135 \leftarrow$ ნაშთი

სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით
ა) $\cos 150^\circ$; ბ) $\sin 135^\circ$; გ) $\operatorname{ctg}(-135^\circ)$; დ) $\cos 120^\circ$;
ე) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$; ვ) $\sin\dfrac{11\pi}{6}$; ზ) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{3}$; თ) $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$.

2. იპოვეთ: ა) $\sin 40^\circ$, თუ $\cos 50^\circ = a$; ბ) $\cos 22^\circ$, თუ $\sin 68^\circ = a$;
გ) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, თუ $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) = a$.

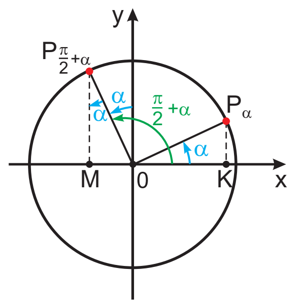
3 აჩვენეთ, რომ
ა) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$; ბ) $\cos\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2\alpha\right)$.
გ) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) = 0$; დ) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;
ე) $\cos\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0$; ვ) $\cos\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right) = 0$.

4 ისარგებლეთ სურათზე მოცემული ნიმუშით და დაამტკიცეთ დაყვანის დანარჩენი ფორმულები.

5. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:
ა) $\sin 585^\circ - \cos(-930^\circ)\cdot\operatorname{ctg} 510^\circ$; ბ) $\sin(-570^\circ)\cos 870^\circ\cdot\operatorname{tg} 945^\circ$;
გ) $\sin 1020^\circ\cdot\cos 675^\circ\cdot\operatorname{ctg}(-1050^\circ)$; დ) $\sin 660^\circ\cdot\cos(-855^\circ)\operatorname{ctg} 600^\circ$.

6. გაამარტივეთ გამოსახულება:
ა) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;
ბ) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$;
გ) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$; დ) $\dfrac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

7. ამოხსენით განტოლება:
ა) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 1$; ბ) $\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x) = 2$;
გ) $\sin(3x + 3\pi)\cdot\sin\left(2\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) - \sin 2x\cos 3x = 1$;
დ) $\sin\left(5x - \dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2x + 4\pi) - \sin(5x + \pi)\sin 2x = 0$



$\triangle OP_\alpha K = \triangle OP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}M$
აქედან
1. $OM = KP_\alpha$
და
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
2. $MP_{\frac{\pi}{2}+\alpha} = OK$
e.i. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

8 დაამტკიცეთ, რომ, თუ α, β და γ სამკუთხედის შიგა კუთხეებია:

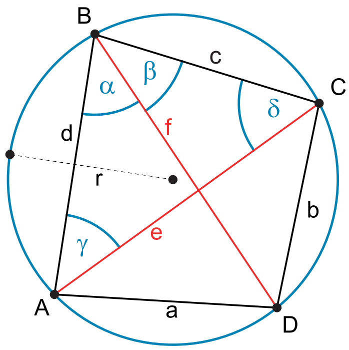
ა) $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = -\cos(2\gamma)$;

ბ) $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$

გ) თუ $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = -1$.

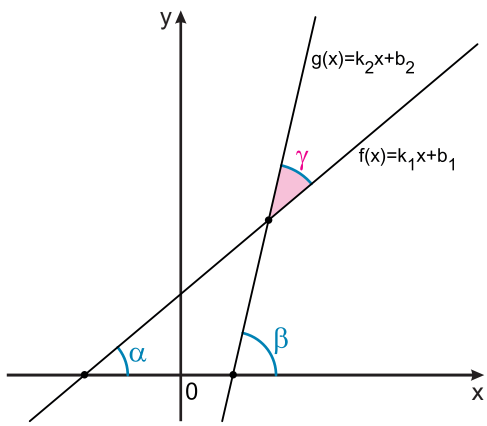
მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.

9 დაამტკიცეთ, რომ
$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.



10* ნახაზის მიხედვით დაამტკიცეთ, რომ $ef=ac+bd$ სადაც $e=AC$, $f=BD$ (მითითება: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$).

11 ნახაზზე მოცემული ურთიერთგადამკვეთი წრფეების განტოლებებია: $f(x)=k_1x+b_1$, $g(x)=k_2x+b_2$.



ა) აჩვენეთ, რომ ორ წრფეს შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \qquad (1)$$

ბ) (1) ფორმულის გამოყენებით დაადგინეთ ორი წრფის მართობულობის პირობა.

გ

12. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$

ბ) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=$

გ) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{1\frac{7}{25}}=$

დ) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}=$

13. იპოვეთ $\sqrt{(7-a)(1+a)}$, თუ $\sqrt{7-a}+\sqrt{1+a}=4$.

14. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან რომელია მთელი:

ა) $(\sqrt{5}+2)^0$; ბ) $(\sqrt{3}-1)^2$; გ) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; დ) $(\sqrt{8})^{\frac{4}{3}}$.

7 ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება

გავეცნოთ უფრო რთული ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას:

1. $\sin 30° + \cos 30° \operatorname{tg} x = 0$

ამოხსნა:

$(\sin 30° + \cos 30° \operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow$ | შევცვალოთ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$-ით

$$\Leftrightarrow \left(\sin 30° + \frac{\cos 30° \sin x}{\cos x} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 30° \cos x + \cos 30° \sin x}{\cos x} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + 30°) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30° = 180°k \\ x \neq 90° + 180°k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30° + 180°k \\ x \neq 90° + 180°k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -30° + 180°k,\ k \in Z.$

2. ამოხსენით განტოლება:

ა) $3\sin x + 2\cos x = 0$; ბ) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

გ) $3\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$; დ) $3\sin x - 2\cos x + 3 = 0$.

ამოხსნა:

განვიხილოთ პირველი ორი განტოლება. ორივე ერთგვაროვანი განტოლებაა. ამასთან, ა) პირველი, ხოლო ბ) — მეორე ხარისხის.

ა) x-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $\cos x = 0$, არ შეიძლება იყოს განტოლების ფესვები, რადგან მაშინ $\sin x$-იც ნულის ტოლი აღმოჩნდება. ეს კი, ვიცით, რომ შეუძლებელია.

ამიტომ განტოლების ორივე მხარე შესაძლებელია გავყოთ $\cos x$-ზე.

$(3\sin x + 2\cos x = 0 \,|: \cos x) \Leftrightarrow (3\operatorname{tg} x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z)$

ბ) წინას ანალოგიური მსჯელობით განტოლება გავყოთ $\cos^2 x$-ზე.

$$(\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \,|: \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0) \Leftrightarrow$$

| განტოლება კვადრატულია $\operatorname{tg} x$-ის მიმართ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{array}\right. \quad k \in Z$$

პასუხი: $\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

განტოლებებს, რომელთა წევრები $\sin x$-ისა და $\cos x$-ის მიმართ ერთი და იმავე ხარისხისაა **ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლება** ეწოდება.

გ) $(3\cos^2 x + \sin x \cos x = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x(3\cos x + \sin x) = 0))$

დავშალოთ მამრავლებად განტოლების მარცხენა მხარე

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

ან

$3\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathrm{tg}x + 3) = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z$

პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი განტოლებაა - გავყოთ cosx-ზე.

პასუხი: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ -\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in Z.$

გ) შემთხვევაში განტოლების ორივე მხარის $\cos^2 x$-ზე გაყოფით დაიკარგებოდა განტოლების ფესვი. რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.

დ) $(3\sin x - 2\cos x + 3 = 0) \Leftrightarrow (3\sin x + 3 = 2\cos x) \Leftrightarrow$ | ავიყვანოთ კვადრატში

$\Leftrightarrow (9\sin^2 x + 18\sin x + 9 = 4\cos^2 x) \Leftrightarrow (9\sin^2 x + 18\sin x + 9 - 4(1 - \sin^2 x) = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (13\sin^2 x + 18\sin x + 5 = 0)$

$\sin x = -\frac{5}{13}$ ან $\sin x = -1$

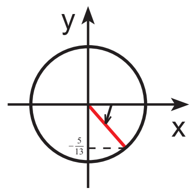
რადგან განტოლება ავიყვანეთ კვადრატში, საჭიროა მისი შემოწმება

შემოწმება:

1. თუ $\sin x = -\frac{5}{13}$, მაშინ $\cos x = \pm\frac{12}{13}$.

1) $\sin x = -\frac{5}{13}$ და $\cos x = \frac{12}{13}$, მაშინ $3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 2\cdot\frac{12}{13} + 3 = 0.$

ე.ი. x მეოთხე მეოთხედის კუთხეა და $x = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right) + 2\pi k.$



2) $\sin x = -\frac{5}{13}$ და $\cos x = -\frac{12}{13}$, მაშინ $3\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - 2\cdot -\frac{12}{13} + 3 \neq 0.$

2. თუ $\sin x = -1$, მაშინ $\cos x = 0$.

$3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 3 = 0$, აქედან $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

პასუხი: $-\arcsin\frac{5}{13} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ გამოსახულების ნიშანი.

ა) $\cos\left(1 + \frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{6\pi}{5}\right)\cos\left(1 + \frac{8\pi}{5}\right);$

ბ) $\mathrm{tg}11\cdot \mathrm{tg}12\cdot \mathrm{tg}13;$ გ) $\sin2\cdot\sin3\cdot\sin5.$

2. არსებობს თუ არა ისეთი α კუთხე, რომ $\sin\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1}$

3. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.
ა) $y=\sin2x+\cos4x$; ბ) $y=\sin3x+\cos7x$;
გ) $y=\sin\pi x$; დ) $y=\cos2\pi x+\sin4\pi x$.

4. კენტია თუ ლუწი ფუნქცია?
ა) $y=\mathrm{tg}5x+\mathrm{ctg}3x+4\sin x\cos2x$; ბ) $y=\cos6x+\sin^3x\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3x^2$.

ამოხსენით განტოლება:

5. ა) $6\sin^2x-5\sin x+1=0$; ბ) $-2\cos^2x+\cos x+1=0$;
გ) $2\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x=0$; დ) $12\sin^2(2x-1)+\sin(2x-1)-1=0$;
ე) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)-6=0$; ვ) $\cos^2x+(3-\sqrt{3})\cos x-3\sqrt{3}=0$.

6. ა) $3\sin^22x+7\cos^22x-3=0$; ბ) $2\sin^3x-\cos2x-\sin x=0$;
გ) $2\cos^2x+5\sin x-4=0$; დ) $\cos2x-5\sin x-3=0$;
ე) $\cos2x+\sin^2x+\sin x=\frac{1}{4}$; ვ) $2\cos^2x=3\sin x+2$.

7. ა) $1-\cos x=\sin x$; ბ) $1+\cos x=\cos\frac{x}{2}$;
გ) $\dfrac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=2$; დ) $(1+\cos4x)\sin2x=\cos^22x$;
ე) $6\sin^2x+2\sin^22x=5$; ვ) $1+\cos x+\cos2x=0$.

8. ა) $\mathrm{tg}2x=3\mathrm{tg}x$; ბ) $2\mathrm{tg}x-2\mathrm{ctg}x=3$;
გ) $\sin2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$; დ) $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

9. ა) $\sin^2x-2\sin x\cos x=3\cos^2x$; ბ) $6\sin^2x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2x=2$;
გ) $8\sin2x-3\cos^2x=4$; დ) $5\sin^2x+3\sin x\cos x-3\cos^2x=2$;
ე) $2\sin x\cos x+3\cos^2x=0$; ვ) $3\sin^2x-2\sin x\cos x+4\cos^2x=4$.

10*. ა) $2\sin^3x+2\cos x\sin^2x-\sin x\cos^2x-\cos^3x=0$;
ბ) $3\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{tg}x+3\mathrm{ctg}x+3\mathrm{ctg}^2x+2=0$;
გ) $\sin^4x+\cos^4x=\sin2x-0{,}5$;
დ) $\sin^42x+\cos^42x=\sin2x\cos2x$.

11. იპოვეთ მოცემული განტოლების უდიდესი უარყოფითი და უმცირესი დადებითი ამონახსნები:
ა) $2\sin^22x+\sin^24x=1{,}25$; ბ) $4\cos x\cos2x=\cos3x$;
გ) $11\mathrm{ctg}x-5\mathrm{tg}x=\frac{16}{\sin x}$; დ) $2\sin2x+\cos^2x+2+\cos2x=0$.

12. იპოვეთ მოცემული განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომელიც მითითებულ შუალედს ეკუთვნის:
ა) $\sin^2x+3\sin x\cos x+2\cos^2x=0$ $x\in(\pi;2\pi)$;
ბ) $4(1+\cos x)=9+\sin^4x-\cos^4x$ $x\in(-\pi;\pi)$;
გ) $\sin^2x-\sqrt{3}\sin2x-\cos^2x=-2$ $x\in(0;4)$.

13. დაამტკიცეთ, რომ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს:

ა) $4\sin 2x+\cos x=5$; ბ) $\sin x=x^2-x+\frac{3}{2}$; გ) $\sin 2x\cos x=1$.

14. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$; ბ) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$;

გ) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$; დ) $\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$.

15. რას ეწოდება ქვესიმრავლე?

ა) დაასახელეთ სიმრავლე, რომელსაც მხოლოდ ერთი ქვესიმრავლე აქვს.

ბ) არსებობს თუ არა სიმრავლე, რომელსაც მხოლოდ სამი ქვესიმრავლე აქვს.

გ) თუ A წესიერი მრავალკუთხედების სიმრავლეა, რომელი ოთხკუთხედების სიმრავლეა A-ს ქვესიმრავლე?

16. როგორი ნიშანი აქვს a-ს, თუ $f(x)=ax^2$ ფუნქციისთვის

ა) $f(-3)>f(-2)$; ბ) $f(4)>f(1)$; გ) $f(-3)>f(2)$.

პროექტი:

გახსენით სამუშაო ფურცელი პროგრამა GeoGebra-ში. მოაწესრიგეთ ფონის, ღერძების, ბადის ფერი. x ღერძზე მანძილის ერთეულად აირჩიეთ $\frac{\pi}{2}$ y ღერძზე, შემდეგ ააგეთ:

ა) $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=0{,}5\sin x$ და $y=-\sin x$;

ბ) $y=\cos x$, $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ და $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$;

გ) $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=\sin 0{,}5x$

ფუნქციათა გრაფიკები.

ალგებრის ფანჯარაში ფუნქციათა ჩანერაზე დააწკაპეთ, თაგვის მარჯვენა ღილაკზე. გაიხსნება ახალი ფანჯარა. შემდეგ „თვისებები“-ზე შემდეგ „ფერი“. მარცხენა სვეტში მონიშნეთ შესაბამისი წირი, მიეცით სასურველი ფერი და „დახურვა“.

მე-10 ლოგოში მონიშნეთ „ტექსტის ჩასმა“ და ჩაწერეთ:

ა) $y = a\sin x$; $a = -1$; 1; 0,5; 2;

ბ) $y = \cos(x-a)$; $a=0$; $\pm\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$;

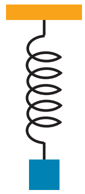
გ) $y=\sin ax$; $a=1$; 2; 0,5.

წარწერა მარცხენა ღილაკიდან ხელის აუღებლად შეგიძლიათ დასვათ სასურველ ადგილას და შეგიძლიათ შეაფერადოთ კიდეც.

1. $y=\sin x$ ($y=\cos x$) ფუნქციის რა თვისებები აქვთ საერთო მიღებულ გრაფიკებს და რა თვისებით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან?

მითითება: sin(x) და π მოძებნეთ ბრძანებათა ველში, ლოგოში (sin(x) შეგიძლიათ უბრალოდ აკრიფოთ კიდეც).

8 y = a sin(bx+c) ფუნქცია



ზამბარაზე დავკიდოთ საწონი და ვუბიძგოთ მას ქვემოთ. საწონი დაიწყებს რხევას ზევით და ქვევით — საწონის გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t .$$

v_0 არის ის სიჩქარე, რითაც ვუბიძგებთ საწონს, ხოლო $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, სადაც m – საწონის მასაა, k კი ზამბარის სიხისტე (ძალა, რომელიც საჭიროა ზამბარის 1 სმ-ით გასაჭიმათ).
რხევებს , რომლებიც

$$S = A\sin \omega t$$

კანონით ხორციელდება **ჰარმონიული რხევები** ჰქვია.
ω რხევის სიხშირეა — რხევათა რიცხვი 2π წამში.
$\frac{2\pi}{\omega}$ — რხევის პერიოდია, A რხევის ამპლიტუდა და გვიჩვენებს წონასწორობის მდგომარეობიდან მერხევი სხეულის მაქსიმალურ გადახრას.

იპოვეთ ა) y=2sinx; ბ) y=0,5cosx ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა, მნიშვნელობათა სიმრავლე.

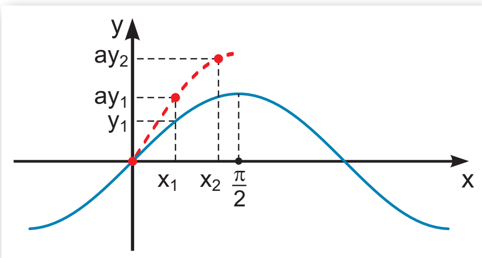
იპოვეთ y=sin3x ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

განვიხილოთ y=sinx ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა.

I. y = asinx.

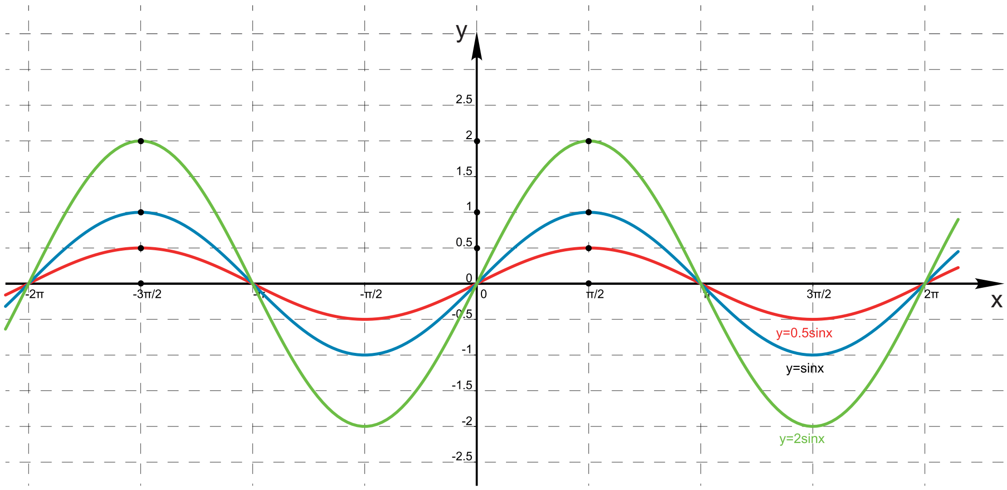
როგორ მიიღება y=f(x) ფუნქციის გრაფიკისგან y=af(x) ფუნქციის გრაფიკი (გაიხსენეთ $y=x^2$ და $y=ax^2$)?

ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ წერტილი $(x_1;y_1)$, $y_1=\sin x_1$, მდებარეობს y=sinx ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $(x_1;ay_1)$ იქნება y=asinx ფუნქციის გრაფიკის წერტილი.



|a| რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა უდიდესი მნიშვნელობას ღებულობს ფუნქცია, **ამპლიტუდა** ეწოდება.

ნახაზზე ნაჩვენებია y=2sinx, y=sinx და y=0,5sinx ფუნქციათა გრაფიკები.

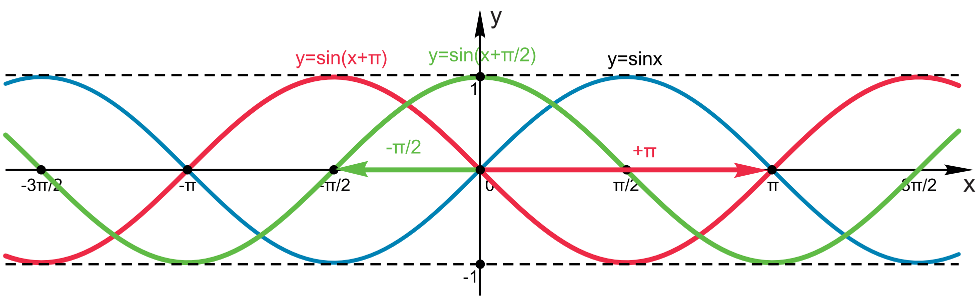


■ ჩამოწერეთ y=2sinx და y=0,5sinx ფუნქციათა თვისებები.

II. ავაგოთ y=sin(x-m) ფუნქციის გრაფიკი.

ვთქვათ, f(x)=sinx, g(x)=sin(x–m) განვიხილოთ g(x+m)=sin(x+m-m)=sinx. მივიღეთ: g(x+m)=f(x), რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია განსაზღვრის არედან აღებულ ნებისმიერ x_0-თვის ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც g ფუნქცია (x_0+m)-თვის. ამრიგად, y=sin(x-m) ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის $\begin{cases} x \to x+m \\ y \to y \end{cases}$ პარალელური გადატანით x ღერძის გასწვრივ m ერთეულით.

ამრიგად, ჩვენ უკვე შეგვიძლია ავაგოთ y=sin(x–π) და $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.2)



ნახ. 2

საზოგადოდ, y=f(kx) ფუნქციის გრაფიკი მიიღება: თუ k>1, y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის k-ჯერ შეკუმშვით, ხოლო თუ 0<k<1 k-ჯერ გაჭიმვით x ღერძის გასწვრივ.

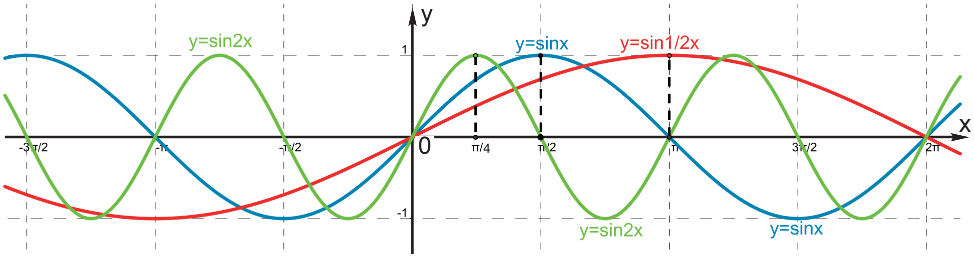
III. ავაგოთ $g(x)=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი f(x)=sinx ფუნქციის გრაფიკისგან.

$$g\left(\frac{1}{k}x\right)=\sin\left(k\cdot\frac{1}{k}x\right)=\sin x=f(x).$$

ე.ი. f(x) ფუნქცია განსაზღვრის არედან აღებულ ნებისმიერ x_1 წერტილში ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც g(x) ფუნქცია $x_2=\frac{x_1}{k}$ წერტილში. მაგალითად, თუ k=2, მაშინ $x_2=\frac{x_1}{2}$ მაგრამ, თუ $k=\frac{1}{2}$, მაშინ $x_2=\frac{x_1}{1/2}=2x_1$. აქედან გამომდინარე, g(x)=sinkx ფუნქციის გრაფიკის

y=sin2x ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად აბსცისები შემცირდა 2-ჯერ.
$(x,y)\to(2x;y)$
$y=\sin\frac{1}{2}x$-ის ასაგებად კი შემცირდა $\frac{1}{2}$-ჯერ, ანუ გაიზარდა 2-ჯერ,
$(x,y)\to(\frac{1}{2}x;y)$

მისაღებად $f(x)=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ $k>1$, შეიკუმშება k-ჯერ, ხოლო, თუ $0<k<1$ გაიჭიმება k-ჯერ x ღერძის გასწვრივ.



ნახაზზე მოცემულია $y=\sin 2x$ და $y=\sin\frac{1}{2}x$ ფუნქციათა გრაფიკები.

$T_0(\sin 2x)=\pi$ $\quad T_0(\sin\frac{1}{2}x)=4\pi$.

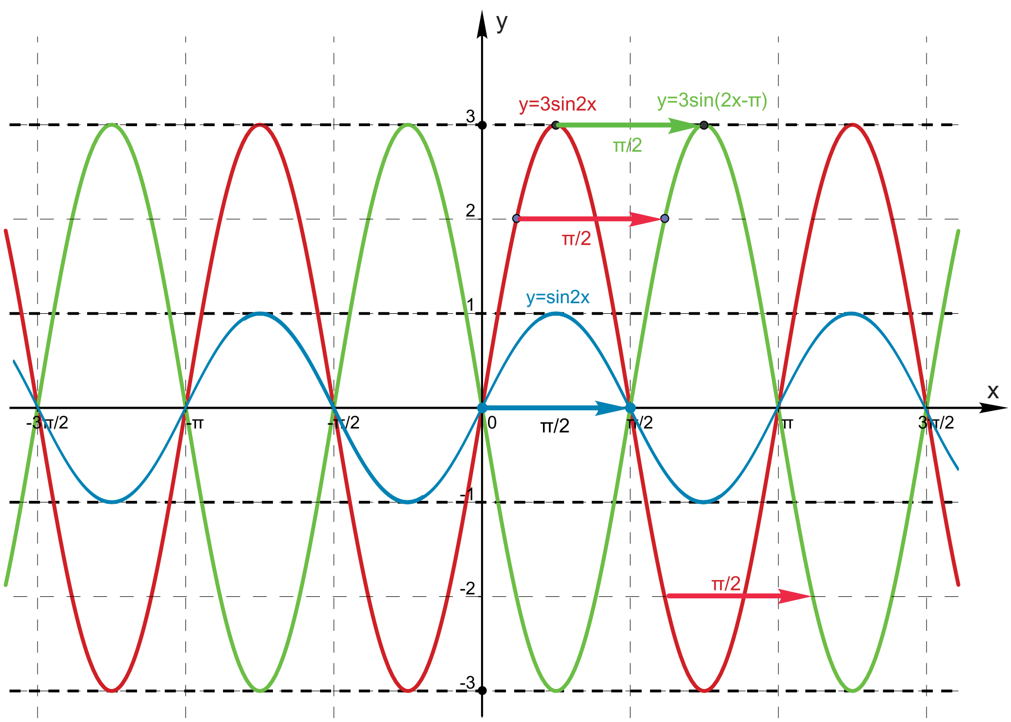
ამრიგად, $y = a\sin(k(x-b))$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად, სასურველია ვისარგებლოთ ასეთი სქემით:

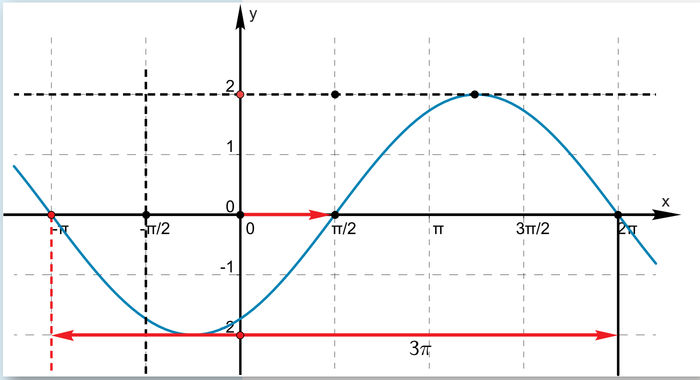
ავაგოთ 1. $y = \sin kx$ (1)

2. $y = a\sin kx$ (2)

3. $y = a\sin k(x-b)$ ფუნქციის გრაფიკი – (2) გრაფიკი გაცურდება b ერთეულით x ღერძის გასწვრივ. ფუნქციის პერიოდია $T_0=\frac{2\pi}{k}$.

ავაგოთ $y=3\sin(2x-\pi)=3\sin\left(2(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.





მაგალითი 1.

ნახაზზე მოცემულია y=asin(kx–c) ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a, k და c რიცხვები.

ამოხსნა:

$a=2$, $T_0=3\pi$.

$y=a\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი გადაადგილებულია x ღერძის გასწვრივ $+\frac{\pi}{2}$-ით.

ე.ი. ფუნქციის განტოლებას აქვს სახე:

$y=2\sin(k(x-\frac{\pi}{2}))$, რადგან $T_0=\frac{2\pi}{k}=3\pi \Rightarrow k=\frac{2}{3}$,

მივიღეთ: $y=2\sin\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$

ე.ი. $a=2$, $k=\frac{2}{3}$, $c=\frac{\pi}{3}$.

სავარჯიშოები:

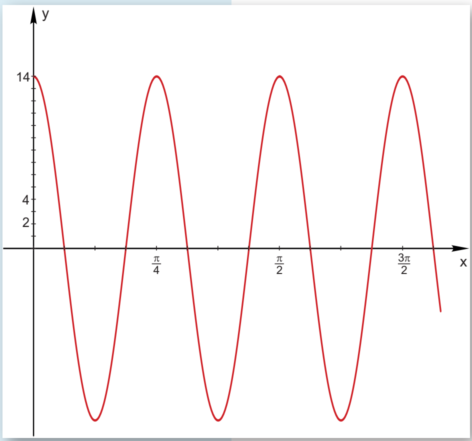
1. იპოვეთ ფუნქციის ამპლიტუდა და პერიოდი და დახაზეთ შესაბამისი გრაფიკი:

ა) $y=1{,}5\sin x$; ბ) $y=2\cos x$; გ) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

დ) $y=\cos\frac{1}{2}x$; ე) $y=2\sin(x-\frac{\pi}{2})$; ვ) $y=3\cos(2x+\pi)$.

ზ) $y=2\sin x$; თ) $y=\cos x-2$; ი) $y=\frac{1}{2}\cos x$;

კ) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; ლ) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; მ) $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.



2. ნახაზზე მოცემულია $y=a\cos bx$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a და b კოეფიციენტები.

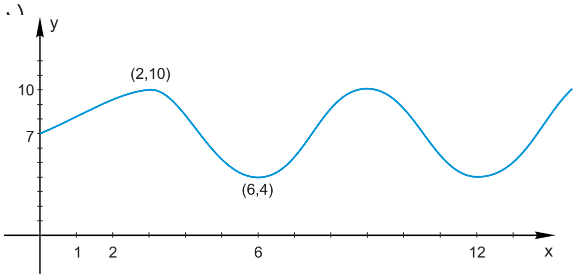
3. მოცემულია $f(x)=2\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ ფუნქცია.
ა) დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი $-\pi\le x\le 5\pi$ ინტერვალში და იპოვეთ ამპლიტუდა და პერიოდი;
ბ) იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე;
გ) დაწერეთ f(x) ფუნქცია კოსინუსისგან განსხვავებული სხვა ტრიგონომეტრიული ფუნქციით გამოსახული.

4. დახაზეთ $-\pi \le x \le 5\pi$ ინტერვალზე შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ ამპლიტუდა, პერიოდი და მნიშვნელობათა სიმრავლე:

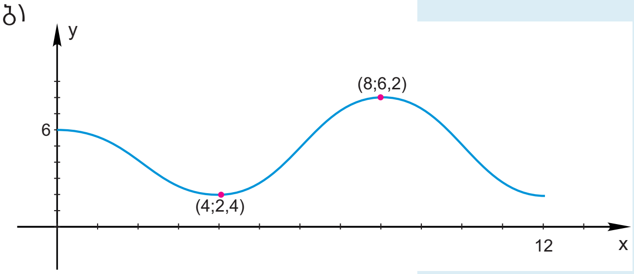
ა) $y=\frac{1}{2}\cos x-3$;   ბ) $y=3\sin 3x-\frac{1}{2}$;   გ) $y=1{,}2\sin\frac{x}{2}+4{,}3$.

5. ნახაზზე მოცემულია $y=a\sin\frac{\pi}{2}x+b$. იპოვეთ a და b.

ა)

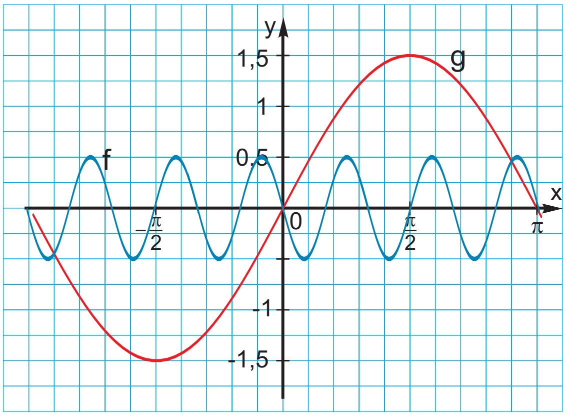


ბ)

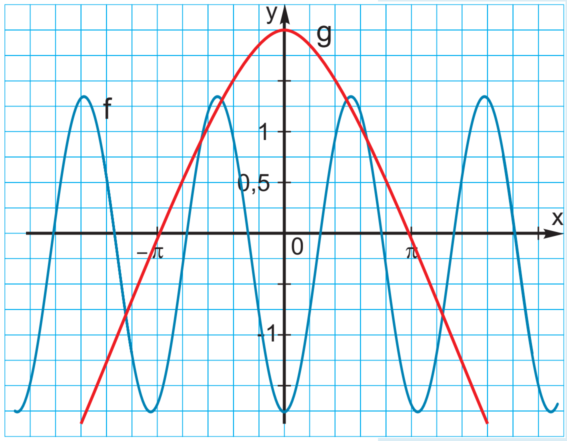


6. ნახაზზე მოცემულია y=asin(bx–c) ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a, b და c კოეფიციენტები:

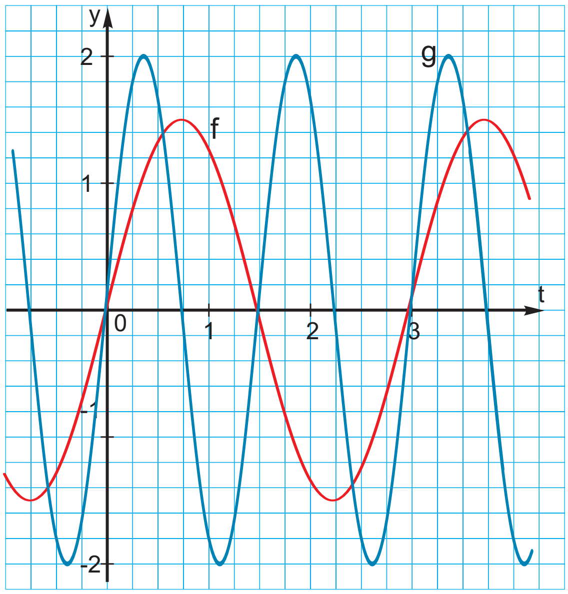
ა)



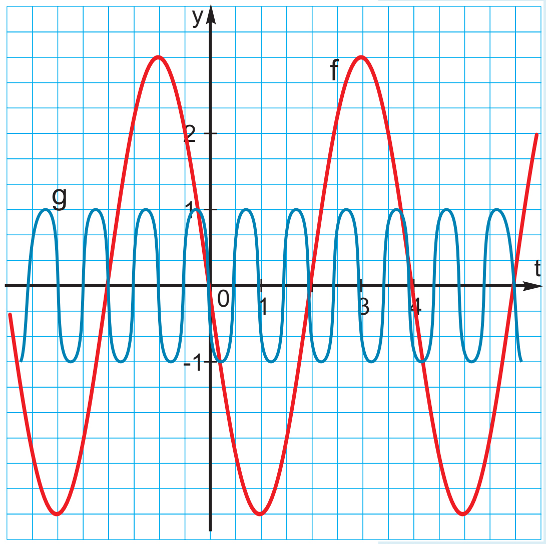
ბ)



გ)



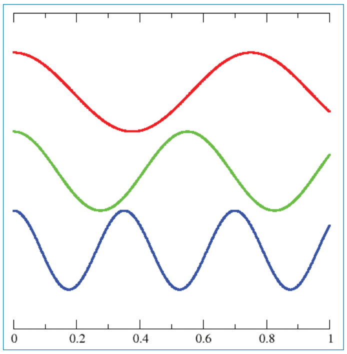
დ)



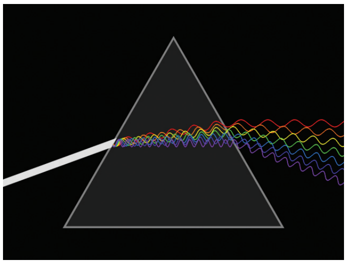
I

თავი

პროექტი:



სამი ელექტრომაგნიტური ტალღა (ლურჯი, მწვანე, წითელი) x ღერძის გასწვრივ მანძილი მიკრონებშია მოცემული.



ფიზიკაში, ტექნიკაში მრავლად არის დროში პერიოდული პროცესები. მაგალითად, ვიბრაციები, რხევები, რომლებიც $y=a\cos(bx+c)$ სახის ფუნქციების საშუალებით აღიწერებიან.

$f(x)=A\cos(\omega t+\varphi)$ ჰარმონიულ რხევათა ზოგადი ფორმულაა, სადაც A რხევის ამპლიტუდაა. ω - რხევის სიხშირეა, φ კი - რხევის საწყისი ფაზა. რომლის პერიოდია $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$.

სინათლე სხვადასხვა სიხშირის ტალღებისგან შედგება. სხვადასხვა სიხშირის ტალღები სხვადასხვაგვარად გარდატყდება თეთრი სინათლე დისპერსიის გამო პრიზმაში გასვლისას კომპონენტებად იშლება.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები გამოიყენება აგრეთვე ნავიგაციაში, საინჟინრო მეცნიერებაში, ასტრონომიაში, ფიზიკაში და სხვა.

როცა ორკესტრი უკრავს, მაშინ ყოველი მუსიკალური ინსტრუმენტი იწვევს ჰაერის თავისებურ რხევას. ეს რხევები იკრიბება და ჩვენამდე აკორდის სახით აღწევს.

გაინტერესებთ კიდევ მეტი გაიგოთ, სად და როგორ გამოიყენება ტრიგონომეტრია? მაშინ მოიძიეთ ინფორმაცია და მოამზადეთ თემა: ტრიგონომეტრიის გამოყენება და წარმოადგინეთ გაკვეთიზე.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

1 კომპიუტერში ააგეთ:

ა) $y=a\sin x+b\sin 3x$, $a,b\in[-5;5]$ ბიჯით 1; ბ) $y=a\cos 2x+b\cos 4x$

ფუნქციის გრაფიკი. დააკვირდით, არის თუ არა მიღებული ფუნქცია პერიოდული. დადებითი პასუხის შემთხვევაში, რას უდრის უმცირესი დადებითი პერიოდი?

2 ვთქვათ, $f(x)=a_1\sin(k_1x+b_1)$, $g(x)=a_2\sin(k_2x+b_2)$ და $F(x)=f(x)+g(x)$.

ა) აჩვენეთ, რომ, თუ $T_0(f)=T_1$; $T_0(g)=T_2$ და მოიძებნება $m,n\in N$, ისე რომ $mT_1=nT_2$, მაშინ $mT_1(nT_2)$ იქნება $F(x)$ ფუნქციის პერიოდი.

3 იპოვეთ ა) $y=\sin 2x+\cos 3x$; ბ) $y=\sin 3x+\cos x$; გ) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin 3x$

ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. განსაზღვრეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$ რიცხვების ნიშანი, როცა

ა) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$; ბ) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$;

გ) $\frac{11\pi}{5}<\alpha<\frac{12\pi}{5}$; დ) $-\frac{3\pi}{2}<\alpha<-\frac{5\pi}{4}$.

2. რომელ მეოთხედშია წერტილი, რომელიც მიიღება $P_0(1;0)$ წერტილის α კუთხით მობრუნებით, თუ $\alpha=$

ა) 1; ბ) 2; გ) –2,75; დ) 3,2; ე) –4,2; ვ) 5,2;
ზ) 6,4.

3. განსაზღვრეთ გამოსახულების ნიშანი:

ა) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{11\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{6\pi}{5}$; ბ) $\left(\cos\frac{9\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\sin\frac{12\pi}{7}$;

გ) $(\sin 2{,}5-\cos 2{,}7)\cdot\cos 3{,}6$; დ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{9\pi}{8}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$.

4*. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობათა სიმრავლე: $y=\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{-\sin^2 2x}$.

5. იპოვეთ:

ა) $\sin\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{9}{41}$ და $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

ბ) $\cos\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ და $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$;

გ) $\cos\alpha$ და $\operatorname{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$ და $90°<\alpha<180°$;

დ) $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$ და $180°<\alpha<270°$.

6. შეიძლება თუ არა ერთდროულად სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები:

ა) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$ ბ) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

7. ცნობილია, რომ $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=b$. იპოვეთ:

ა) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; ბ) $\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha$.

8. გამოთვლების გარეშე დაადგინეთ გამოსახულების ნიშანი:

ა) $\sin\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$; ბ) $\cos 3{,}13-\sin 3{,}13$; გ) sin1-sin1,1; დ) sin2-sin2,1;

ე) sin125°-sin124°; ვ) sin240°-sin241°; ზ) cos71°-cos72°;

თ) cos1-cos0,9; ი) cos100°-cos99°; კ) cos3,4-cos3,5.

9*. ზრდადია თუ კლებადი ფუნქცია:

ა) y=cos(sinx), $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; ბ) sin(cosx), $x\in\left[\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$; გ) tg(cosx), $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

10. ცნობილია, რომ $\cos\beta=-\frac{1}{2}$.
ა) სწორია თუ არა, რომ $\beta=120°$;
ბ) მიუთითეთ რამდენიმე კუთხე, რომელთა კოსინუსი $-\frac{1}{2}$-ის ტოლია.

11. იპოვეთ:

ა) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

ბ) $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

გ) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{ctg}\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=\frac{7}{24}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

დ) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=-2,4$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

12. იპოვეთ:

ა) $\sin^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}$;

ბ) $\frac{\sqrt{3}}{\cos 290°}+\frac{1}{\sin 250°}$;

გ) $\sin10°\cdot\sin30°\sin50°\sin70°$;

დ) $\sin^2 70°\sin^2 50°\sin^2 10°$;

ე) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$;

ვ) $8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$;

ზ) $\frac{(\cos 4°+\cos 2°)^2+(\sin 4°+\sin 2°)^2}{\sin 2°\mathrm{ctg}1°}$;

თ) $\frac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\sin 21°\cos 39°-\cos 51°\sin 69°}$.

13. იპოვეთ:

ა) $\mathrm{tg}2\alpha$, თუ $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

ბ) $\mathrm{tg}2\alpha$, თუ $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

14. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2}$;

ბ) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-\frac{1}{4}$.

15. გამოსახეთ $\sin2\alpha$-თი:

ა) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

ბ) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

16. იპოვეთ:

ა) $\alpha+\beta$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=0,5$; $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{3}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

ბ) $\alpha-\beta$, თუ $\sin\alpha=\frac{40}{41}$; $\sin\beta=-\frac{9}{41}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

17. იპოვეთ:

ა) $\cos4\alpha$, თუ $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

ბ) $\cos4\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

18. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$; ბ) $\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$;

გ) $3\sin x=\sin 2x$; დ) $\cos^2\frac{x}{2}=\cos x$.

19. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$; ბ) $1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}$; გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos^2(22^\circ 30')$.

20. ამოხსენით განტოლება:

ა) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; ბ) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$; გ) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$;

დ) $1+\cos 8x=2\cos 4x$; ე) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; ვ) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

21. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:

ა) $\cos 225^\circ$; ბ) $\sin(-210^\circ)$; გ) $\mathrm{tg}315^\circ$; დ) $\mathrm{tg}(-150)$;

ე) $\cos\frac{7\pi}{6}$; ვ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; ზ) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; თ) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

22. გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებით:

ა) $\sin 412^\circ+\mathrm{tg}1099^\circ\cdot\cos 52^\circ$; ბ) $\sin 772^\circ+\mathrm{tg}199^\circ\cdot\cos 412^\circ$; გ) $\cos 566^\circ+\mathrm{tg}13^\circ\cdot\sin 566^\circ$.

23. ცნობილია, რომ $\mathrm{ctg}\alpha=-2$. იპოვეთ:

ა) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; ბ) $\frac{3\cos^2\alpha-5\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$;

გ) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}$; დ) $\frac{3\sin\alpha-7\cos\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$.

24. იპოვეთ:

ა) $\frac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=3$; ბ) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=a$.

25. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, მაშინ: $(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\beta)=2$.

26. $\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$ განტოლების რამდენი ამონახსნია მოთავსებული $[-\pi;\pi]$ შუალედში?

27. შესაძლებელია თუ არა, შესრულდეს ტოლობა:

ა) $2\sin\alpha+\cos\alpha=3$; ბ) $3\sin\alpha-14\cos\alpha=7$; გ) $3\cos\alpha-2\sin\alpha=5$; დ) $\sin\alpha\cos\alpha=-1$.

I თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- ფორმულები, რომლებიც გამოხატავენ დამოკიდებულებას ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის – **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები**.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

3. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

4. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

7. $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

8. $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$

- ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3. $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

2ა. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

2ბ. $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

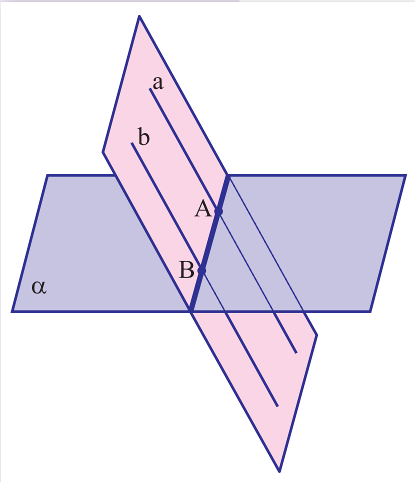
$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

II თავი

ამ თავში გაეცნობით წრფეთა პარალელობის, წრფისა და სიბრტყის პარალელობის, სიბრტყის პარალელობის ნიშნებს. შეძლებთ: ამოიცნოთ და დაასაბუთოთ პარალელური წრფეები, სიბრტყეები; ააგოთ ფიგურის კვეთა მოცემული პირობების გათვალისწინებით; დაადგინოთ კვეთებით მიღებული ბრტყელი ფიგურის ზომები და სახე.

1 წრფეთა პარალელურობის ნიშანი

ჩვენ უკვე გავეცანით სტერეომეტრიის აქსიომებს. ვიცით, რომ გარდა პარალელური და ურთიერთგადამკვეთი წრფეებისა არსებობს აცდენილი წრფეებიც.
გავიხსენოთ სიბრტყეზე წრფეთა პარალელურობის ერთ-ერთი ნიშანი: თუ ორი წრფე პარალელურია მესამის, მაშინ ეს ორი წრფე ურთიერთპარალელურია. ეს ნიშანი სამართლიანია სივრცეშიც. სანამ მის დამტკიცებას შევუდგებოდეთ, დავამტკიცოთ დამხმარე თეორემა – ლემა.

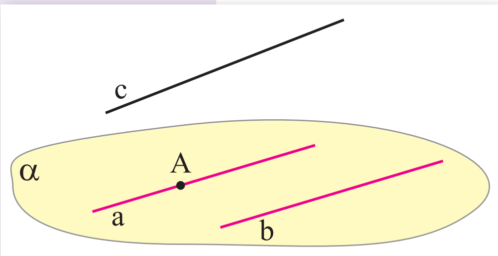


ლემა:

თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი კვეთს მოცემულ სიბრტყეს, მაშინ მეორე წრფეც კვეთს ამ სიბრტყეს.

დამტკიცება:

მოცემული გვაქვს a და b პარალელური წრფეები, ამასთან, a წრფე α სიბრტყეს A წერტილში კვეთს. რადგან a||b, ცხადია, მათზე გაივლება (a;b) სიბრტყე, რომელსაც α სიბრტყესთან საერთო A წერტილი აქვს. ეს სიბრტყეები რომელიღაც c წრფეზე იკვეთება ($A \in c$). მივიღეთ, რომ (a;b) სიბრტყეში c წრფე კვეთს a და b პარალელური წრფეებიდან ერთ-ერთს (a-ს), ე.ი. იგი კვეთს b წრფესაც რომელიღაც B წერტილში, რომელიც b წრფის და α სიბრტყის საერთო წერტილია.
თუ დავუშვებთ, რომ b წრფეს α სიბრტყესთან კიდევ აქვს B_1 საერთო წერტილი, მაშინ მე-3 აქსიომის თანახმად, b წრფე მდებარეობს α სიბრტყეში და რადგან AB-ც მდებარეობს α სიბრტყეში, მივიღებთ, რომ (a,b) და α სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც შეუძლებელია. ე.ი. b წრფეს α სიბრტყესთან ერთადერთი საერთო B წერტილი აქვს, რაც იმას ნიშნავს, რომ b წრფე კვეთს α სიბრტყეს.
ლემის გამოყენებით დავამტკიცოთ წრფეთა პარალელურობის ნიშანი.



თეორემა:

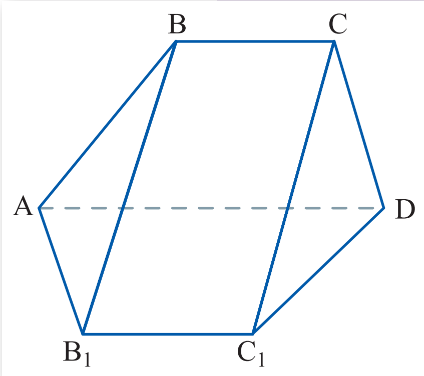
თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

დამტკიცება:

ვთქვათ, a||c და b||c. დავამტკიცოთ, რომ a||b, ე.ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ a და b არც იკვეთება და ერთ სიბრტყეშიც მდებარეობს.
a წრფეზე მდებარე რაიმე A წერტილსა და b წრფეზე გავავლოთ α სიბრტყე. თუ დავუშვებთ, რომ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს, მაშინ ლემის თანახმად, c წრფეც კვეთს α სიბრტყეს (a||c), მაგრამ რადგან b და c წრფეები პარალელურია, გამოდის, რომ b წრფეც კვეთს α სიბრტყეს, რაც შეუძლებელია. ე.ი. a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. ახლა

დავამტკიცოთ, რომ ისინი არ იკვეთებიან. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ a და b წრფეები იკვეთება, მივიღებთ, რომ მათი კვეთის წერტილზე გადის c წრფის პარელელური ორი წრფე, რაც შეუძლებელია.
ე.ი. a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და არ იკვეთება, რაც იმას ნიშნავს, რომ a||b, რ.დ.გ.

ამოცანა 1



ABCD და AB_1C_1D ერთ სიბრტყეში არამდებარე ტოლი ტრაპეციებია.
დაამტკიცეთ, რომ BCC_1B_1 – პარალელოგრამია.

დამტკიცება: ABCD და AB_1C_1D ოთხკუთხედები საერთო ფუძის მქონე ტრაპეციებია. ე.ი. BC||AD და B_1C_1||AD. დამტკიცებული თეორემის თანახმად BC||B_1C_1. ამავე დროს ამოცანის პირობიდან ვიცით, რომ BC=B_1C_1, ე.ი. BCC_1B_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. რ.დ.გ.

- მართალია თუ არა, რომ:

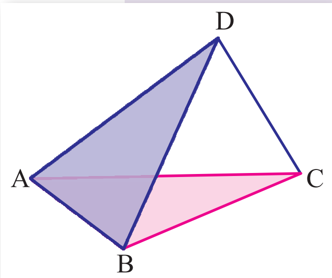
1. ორი წრფე აცდენილია, თუ:
ა) ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ;
ბ) ისინი პარალელურები არ არიან;
გ) მათზე შეუძლებელია სიბრტყის გავლება.

2. თუ a||c და b||c, მაშინ:
ა) a, b და c წრფეები აუცილებლად ერთ სიბრტყეში მდებარეობს;
ბ) a და b წრფეები იკვეთება;
გ) a||b.

სავარჯიშოები:

1 ABCD პარალელოგრამის AB და BC გვერდები კვეთს α სიბრტყეს. დაამტკიცეთ, რომ AD და DC წრფეები, აგრეთვე, კვეთს α სიბრტყეს.

2 ტრაპეციის შუახაზი α სიბრტყეში მდებარეობს. კვეთს თუ არა α სიბრტყეს ტრაპეციის ფუძეების შემცველი წრფეები? პასუხი დაასაბუთეთ.



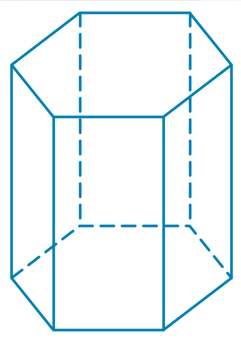
3 ABC და ABD სამკუთხედები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ DC წრფის პარალელური ნებისმიერი წრფე გადაკვეთს მოცემული სამკუთხედების სიბრტყეებს.

4 a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. შეიძლება თუ არა a და b წრფეების პარალელური c წრფის გავლება?

5 A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც გადის AB და BC მონაკვეთების შუაწერტილებზე, პარალელურია AD და DC მონაკვეთების შუაწერტილებზე გამავალი წრფის.

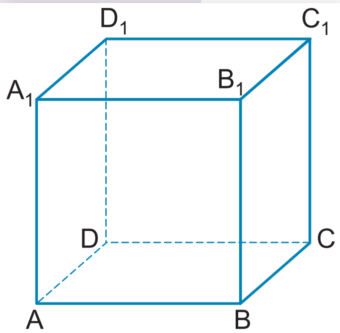
6 დაამტკიცეთ, რომ სივრცული ოთხკუთხედის[1] გვერდების შუა-წერტილები პარალელოგრამის წვეროებს წარმოადგენს.

გაიხსენეთ მრავალწახნაგების განმარტებები და ჩამოთვალეთ პარალელურ წიბოთა წყვილები. პასუხი დაასაბუთეთ.



7 მართი პრიზმა არის მრავალწახნაგა, რომლის ფუძეები პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე n-კუთხედებია, ხოლო გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყის მართობულა.
განიხილეთ:ა) სამკუთხა, ბ) ოთხკუთხა,
გ) ექვსკუთხა მართი პრიზმის შემთხვევები.

8 მართ პრიზმას ეწოდება წესიერი, თუ მისი ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია. შეასრულეთ დავალება წესიერი:
ა) ოთხკუთხა, ბ) ექვსკუთხა პრიზმისთვის.



9 პრიზმას, რომლის ფუძე პარალელოგრამია, პარალელეპიპედი ეწოდება. განიხილეთ მართი პარალელეპიპედის შემთხვევა.

10 მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება მართ პარალელეპიპედს, რომლის ფუძე მართკუთხედია.

11 განმარტეთ კუბი, როგორც მართკუთხა პარალელეპიპედის კერძო შემთხვევა და შეასრულეთ დავალება.

გ

12 იპოვეთ კუბის წიბოს სიგრძე, თუ მისი ზედაპირის ფართობია:
ა) 5046 სმ^2, ბ) 900 მ^2.

13 მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების შეფარდებაა 3:7:8. მისი ზედაპირის ფართობია 808 სმ^2. იპოვეთ წიბოების სიგრძეები.

14 მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების შეფარდებაა 7:24. დიაგონალური კვეთის ფართობი ეი 50 დმ^2. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

15 მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ. ისინი ქმნიან 30–იან კუთხეს. გვერდითი წიბოა 5 სმ. იპოვეთ ამ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

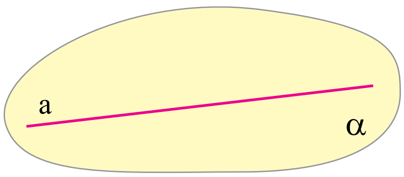
16 მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 5 სმ. ფუძის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ. ფუძის ერთი დიაგონალია 12 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალების სიგრძეები.

[1] სივრცული ოთხკუთხედის წვეროები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს.

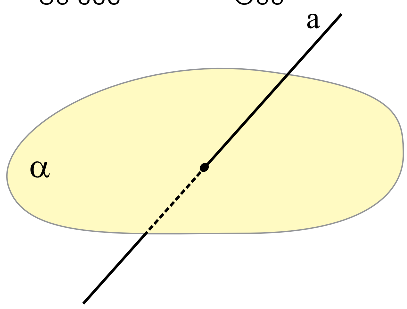
2 წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

განვიხილოთ წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის ყველა შესაძლო შემთხვევა. წრფეს და სიბრტყეს შეიძლება ჰქონდეს:

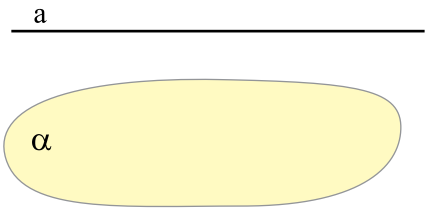
ა) უამრავი საერთო წერტილი, ანუ წრფე მდებარეობს სიბრტყეზე



ბ) ერთი საერთო წერტილი, ანუ წრფე კვეთს სიბრტყეს



გ) არცერთი საერთო წერტილი, ანუ წრფე სიბრტყის პარალელურია



განმარტება:
წრფეს და სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.

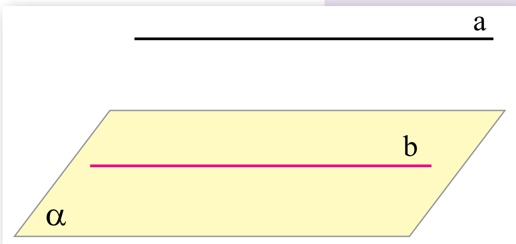
a წრფის და α სიბრტყის პარალელურობა ასე აღინიშნება: a||α.

თეორემა: (წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი)

თუ წრფე მოცემულ სიბრტყეში არ მდებარეობს და პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე წრფის, მაშინ ეს წრფე მოცემული სიბრტყის პარალელურია.

დამტკიცება:

მოცემულია $b \in \alpha$, $a \notin \alpha$ და $a \| b$.

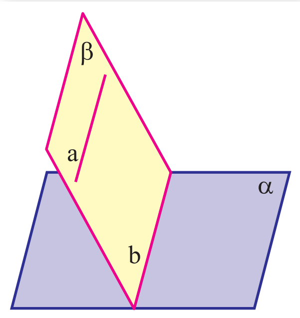


ვთქვათ, a წრფე კვეთს α სიბრტყეს. მაშინ, ლემის თანახმად, b წრფეც კვეთს α სიბრტყეს, (რადგან $a \| b$), რაც ეწინააღმდეგება პირობას – $b \in \alpha$. ე.ი. $a \| \alpha$. რ.დ.გ.

ახლა დავამტკიცოთ ორი თეორემა, რომელიც ხშირად გვეხმარება ამოცანების ამოხსნაში.

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის შებრუნებული თეორემა:

თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფის პარალელურია.



დამტკიცება:

ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე, ამასთან, α და β სიბრტყეები კი იკვეთება b წრფეზე. a და b წრფეები მდებარეობს ერთ β სიბრტყეში, ამასთან, ისინი არ იკვეთებიან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი კვეთის წერტილი იქნებოდა α სიბრტყეზე, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $a \parallel \alpha$, ე.ი. $a \parallel b$. რ.დ.გ.

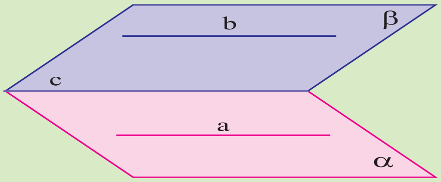
დაამტკიცეთ, რომ, თუ

ორ პარალელურ წრფეზე გავლებულია ურთიერთგადამკვეთი სიბტრყეები, მაშინ ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფეების პარალელურია.

მოც.: $a \parallel b$

$b \in \beta$, $a \in \alpha$

უ.დ. $c \parallel a$ და $c \parallel b$



ამოცანა 1

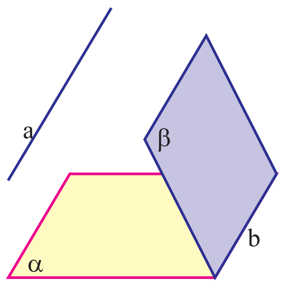
დაამტკიცეთ, რომ

თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი მოცემული სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მეორე წრფე ან მდებარეობს მოცემულ სიბრტყეზე, ან მისი პარალელურია.

მართლაც, თუ $a \parallel b$ და $a \parallel \alpha$, მაშინ b წრფე α სიბრტყეს ვერ გადაკვეთს, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ლემის თანახმად, a წრფეც უნდა კვეთდეს α სიბრტყეს, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $a \parallel \alpha$, ე.ი. b ან მდებარეობს α სიბრტყეზე, ან მისი პარალელურია. რ.დ.გ.

ამოცანა 2

a წრფე პარალელურია α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის და არ მდებარეობს არც ერთ მათგანზე. დავამტკიცოთ, რომ $a \parallel \alpha$ და $a \parallel \beta$.



დამტკიცება: ვთქვათ, α და β სიბრტყეები b წრფეზე იკვეთება. ე.ი. $a \parallel b$, მაგრამ b წრფე მდებარეობს როგორც α, ისე β სიბრტყეზე. წრფისა და სიბრტყის პარელულობის ნიშნის თანახმად, $a \parallel \alpha$ და $a \parallel \beta$, რ.დ.გ.

მართალია თუ არა, რომ:

1. თუ ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდები კვეთს α სიბრტყეს შესაბამისად M და N წერტილებში და $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, მაშინ:

ა) BC წრფე კვეთს α სიბრტყეს;

ბ) $BC \parallel \alpha$;

გ) BC წრფე მდებარეობს α სიბრტყეზე.

2. თუ α და β სიბრტყეები **a** წრფეზე იკვეთება, ხოლო **c** წრფე პარალელურია **a** წრფის, მაშინ:
ა) $c \| \alpha$;   ბ) **c** მდებარეობს ან α-ზე ან β-ზე;
გ) $c \| \beta$;   დ) არც ერთი პასუხი სწორი არ არის.

სავარჯიშოები:

1 A და B წერტილები α სიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო C წერტილი ამ სიბრტყეზე არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ წრფე, რომელიც გადის AC და BC მონაკვეთების M და N შუაწერტილებზე, პარალელურია α სიბრტყის. იპოვეთ MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ AB=3სმ.

2 M წერტილი არ მდებარეობს ABCD მართკუთხედის სიბრტყეზე. დაამტკიცეთ, რომ CD წრფე ABM სიბრტყის პარალელურია.

3 ABC სამკუთხედის AC გვერდი α სიბრტყის პარალელურია, ხოლო AB და BC გვერდები კი კვეთს ამ სიბრტყეს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AMNC ოთხკუთხედი ტრაპეციას წარმოადგენს.

4 წინა ამოცანიდან იპოვეთ AMNC ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის გვერდები AB=15 სმ, BC=20 სმ და AC=30 სმ და BN:NC=2:3.

5* დაამტკიცეთ, რომ ორი აცდენილი წრფიდან ნებისმიერზე შეიძლება გაივლოს მეორე წრფის პარალელური სიბრტყე.

6 ABCD და ABC_1D_1 პარალელოგრამები სხვადასხვა სიბრტყეებში მდებარეობს. იპოვეთ CDD_1C_1 ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ AB=7,2 სმ და CC_1=5,8 სმ.

7 ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდები კვეთს α სიბრტყეს, შესაბამისად M და N წერტილებში. იპოვეთ AC, თუ MN=15სმ, $AC \| \alpha$ და BM:MA=2:3

8 დახაზეთ პრიზმა. ჩამოთვალეთ: ა) ფუძის, ბ) გვერდითი წახნაგის პარალელური წრფეები.

გ

9* მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 2 სმ და 5 სმ. მანძილი ფუძის მცირე გვერდებს შორის 4 სმ–ია. გვერდითი წიბო უდრის $2\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალების სიგრძეები.

10 იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები, რომლის თითოეული წიბოა a_1 ფუძის მახვილი კუთხე კი 60°–ია.

11 მართი პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული წიბოები ს სიგრძეებია 1 მ, 2 მ და 3 მ. ამასთან ორი უმცირესი ქმნის 60°–იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალების სიგრძეები.

12* კუბის წიბოა 5 სმ. იპოვეთ მანძილი კუბის წვეროდან დიაგონალამდე (მითითება: კუბის წიბო მისი გადამკვეთი წახნაგის მართობულია).

3 სიბრტყეთა პარალელურობა

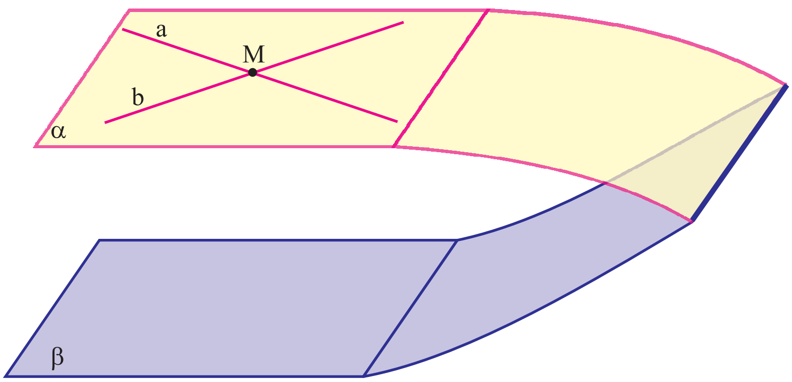
ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ.

როგორც ვიცით, ორი სიბრტყე ან იკვეთება წრფეზე, ან მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.
α სიბრტყე პარალელურია β სიბრტყის, ასე ჩაიწერება: $\alpha \| \beta$.
დავადგინოთ სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშანი.

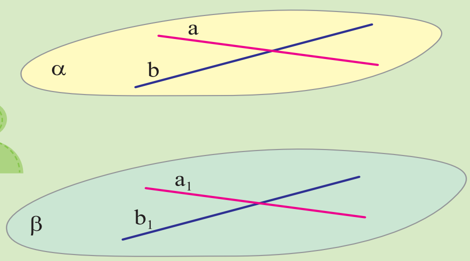
თეორემა:

თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეული მეორე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

$a \| \beta$ და $b \| \beta$. a და b წრფეების გადაკვეთის წერტილია M.
უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \| \beta$.

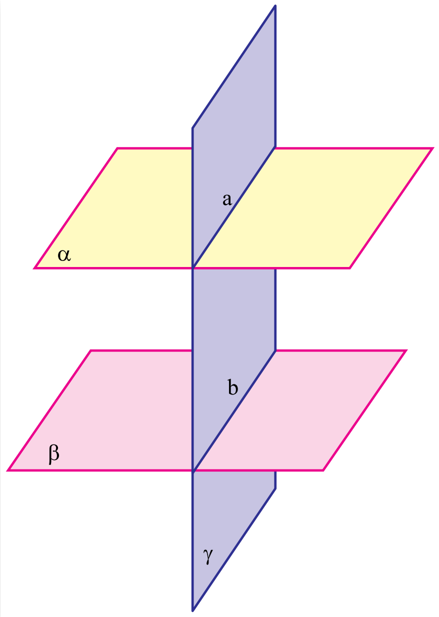


დავუშვათ საწინააღმდეგო: $\alpha \nparallel \beta$, მაშინ α და β სიბრტყეები იკვეთება რომელიღაც c წრფეზე.
ჩვენ ვიცით, რომ თუ წრფე მდებარეობს ორი გადამკვეთი სიბრტყიდან ერთ-ერთში და მეორე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ის პარალელურია ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის, ე.ი. $a \| c$ და $b \| c$, რაც შეუძლებელია, რადგან ვღებულობთ M წერტილზე გავლებულ ორ წრფეს, რომლებიც c წრფის პარალელურია, ე.ი. ჩვენი დაშვება, რომ $\alpha \nparallel \beta$, სწორი არ არის. მივიღეთ $\alpha \| \beta$. რ.დ.გ.



აჩვენეთ, რომ სიბრტყეთა პარალელობის ნიშანი შეიძლებოდა ასეც ჩამოგვეყალიბებინა:
თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე პარალელურია მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფისა, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

განვიხილოთ პარალელურ სიბრტყეთა შემდეგი ორი თვისება.

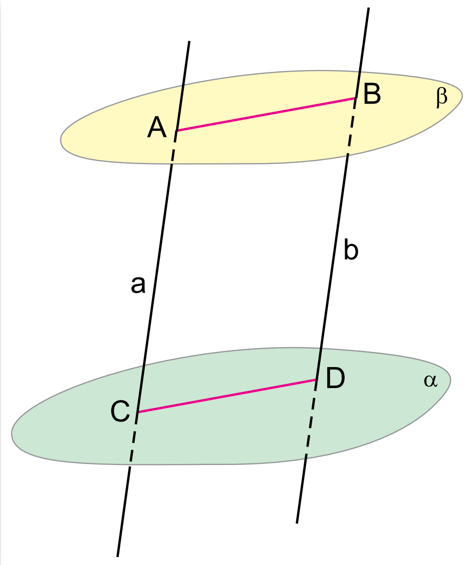


თეორემა:

თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამეთი, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.

$\alpha\|\beta$ და γ სიბრტყე კვეთს α და β სიბრტყეებს, შესაბამისად a და b წრფეებზე. უ.დ. $a\|b$.

a და b წრფეები γ სიბრტყეში მდებარეობს, ამავე დროს a წრფე α სიბრტყის წრფეა, ხოლო b წრფე – β სიბრტყის. a და b წრფეები, რომ იკვეთებოდეს, მაშინ α და β სიბრტყეებს საერთო წერტილი უნდა ჰქონდეთ, რაც შეუძლებელია, რადგან $\alpha\|\beta$. ე.ი. $a\|b$, რ.დ.გ.



თეორემა:

ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებულ პარალელურ წრფეთა მონაკვეთები ტოლია.

$\alpha\|\beta$ და $a\|b$. აღვნიშნოთ a და b წრფეების β სიბრტყესთან კვეთის წერტილები A და B, ხოლო α სიბრტყესთან კვეთის წერტილები – C და D ასოებით. უ.დ. $AC=BD$.

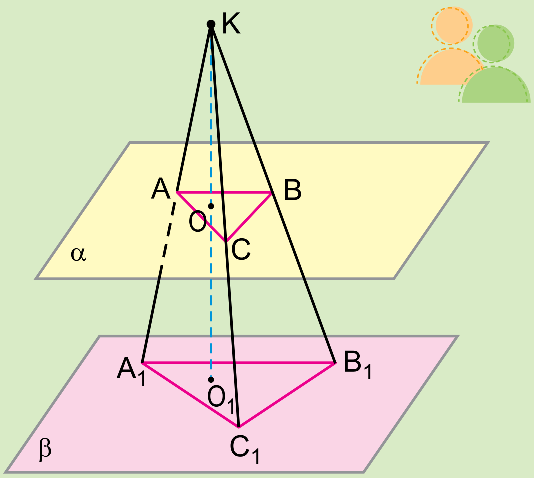
განვიხილოთ $ABDC$ ოთხკუთხედი. წინა თეორემიდან ცხადია, რომ $AB\|CD$, ხოლო AC და BD წრფეები პარალელურია მოცემულობის თანახმად. ე.ი. $ABDC$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამს წარმოადგენს. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები კი ტოლია. მაშასადამე, $AC=BD$. რ.დ.გ.

- პირამიდა გადაკვეთილი და ფუძის პარალელური სიბრტყით (იხილეთ ნახაზი) დაამტკიცეთ, რომ:

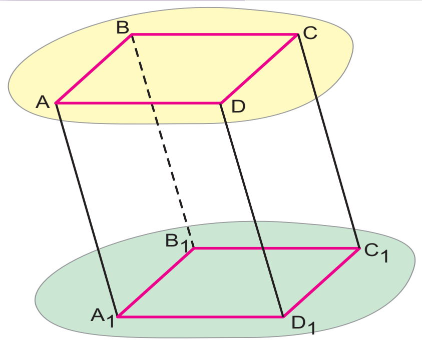
1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) $\Delta CKB \sim \Delta C_1KB_1$

3) $\dfrac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta A_1C_1B_1}} = \dfrac{AK^2}{A_1K^2} = \dfrac{CK^2}{C_1K^2} = \dfrac{BK^2}{B_1K^2} = \dfrac{KO^2}{KO_1^2}$



ამოცანა 1



ABCD პარალელოგრამი მდებარეობს α სიბრტყეზე, მისი წვეროებიდან გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც α სიბრტყის პარალელურ β სიბრტყეს კვეთენ A_1, B_1, C_1 და D_1 წერტილებში. დავამტკიცოთ, რომ $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

ამოხსნა:

განვიხილოთ ოთხკუთხედი. $AA_1 \| BB_1$, და $AA_1=BB_1$ ე.ი. ABB_1A_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, საიდანაც მივიღებთ, რომ $A_1B_1 \| AB$ და $A_1B_1=AB$. ანალოგიურად, DCC_1D_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ამიტომ $D_1C_1 \| DC$ და $D_1C_1=DC$, ე.ი. $A_1B_1 \| D_1C_1$ და $A_1B_1=D_1C_1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამია. რ.დ.გ.

მართალია თუ არა, რომ:

თუ a და b წრფეები შესაბამისად α და β პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარეობს, მაშინ:

1. $a \| b$;

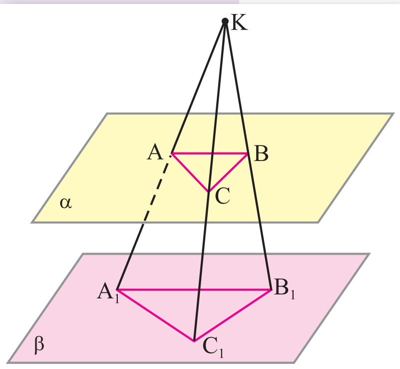
2. a და b წრფეები იკვეთება;

3. a და b წრფეები ან პარალელურია ან აცდენილი;

4. a და b წრფეები აცდენილი წრფეებია.

სავარჯიშოები:

1 ABC მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებზე გავლებული პარალელური წრფეები ABC სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს შესაბამისად A_1, B_1 და C_1 წერტილებში კვეთს. კათეტები AC=6სმ, BC=8სმ. იპოვეთ A_1B_1.



2 ABC სამკუთხედის წვეროებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მოცემულ სამკუთხედის სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს A_1, B_1 და C_1 წერტილებში კვეთენ. მოცემულია AB=4სმ; BC=6სმ; AC=8სმ. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

3 K წერტილზე გამავალი სამი წრფე α და β პარალელურ სიბრტყეებს კვეთს შესაბამისად A,B,C და A_1,B_1,C_1 წერტილებში. $KA:AA_1=4:5$. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, თუ AB=2მ; BC=3მ; AC=4მ.

4 სამკუთხედის ორი გვერდი α სიბრტყის პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის მესამე გვერდიც პარალელურია α სიბრტყის.

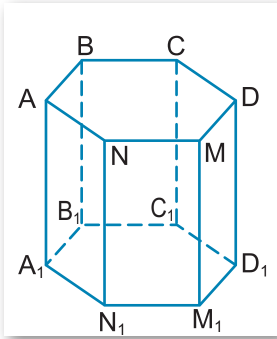
5 B წერტილი არ ეკუთვნის ADC სამკუთხედის სიბრტყეს. M, N და P წერტილები BA, BC და BD მონაკვეთების შუაწერტილებია.

ა) დაამტკიცეთ, რომ MNP და ADC სამკუთხედების სიბრტყეები პარალელურია.

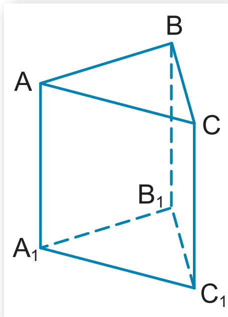
ბ) იპოვეთ MNP სამკუთხედის ფართობი, თუ ADC სამკუთხედის ფართობი 92 სმ^2-ია.

6 α და β პარალელური სიბრტყეები კვეთს BAC კუთხის AB გვერდს შესაბამისად A_1 და A_2, ხოლო AC გვერდს შესაბამისად B_1 და B_2 წერტილებში. იპოვეთ: ა) AA_2 და AB_2, თუ $A_1A_2=2A_1A$; $A_1A_2=12$სმ; $AB_1=5$სმ;
ბ) A_2B_2 და AA_2, თუ $A_1B_1=18$სმ; $AA_1=24$სმ; $AA_2=$ A_1A_2.

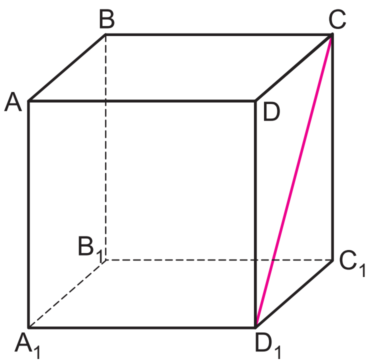
7 როგორ გავხერხოთ პარალელეპიპედის ფორმის ხის ძელი ისე, რომ გახერხვის შედეგად მიღებული სიბრტყეები იყოს პარალელური (პასუხი ახსენით).



8 ნახაზზე მოცემულია წესიერი ექვსკუთხა პრიზმა. დაასახელეთ:
ა) MDD_1M_1; ბ) $ABCDMN$; გ) ANN_1A_1
წახნაგების პარალელური სიბრტყეები.
პასუხი დაასაბუთეთ.



9 ნახაზზე მოცემულია სამკუთხა პრიზმა. დაასახელეთ: ა) პარალელურ წახნაგთა; ბ) პარალელური წიბოების წყვილები.



10 ნახაზზე მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი. დაასახელეთ:
ა) პარალელურ წახნაგთა;
ბ) წახნაგების პარალელური დიაგონალების წყვილები.

---

11 მართკუთხა პარალელეპიპედი ფუძის გვერდებია 7 და 24, სიმაღლე კი 8. იპოვეთ დიაგონალები და დიაგონალური კვეთის ფართობი.

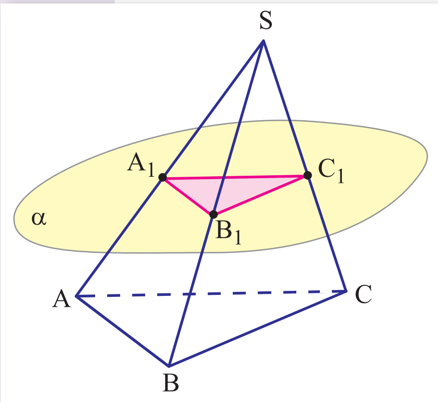
12 მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 5 სმ დიაგონალური კვეთის ფართობი 205 სმ^2, ხოლო ფუძის ფართობი 360 სმ^2. იპოვეთ ფუძის გვერდები.

13 წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი უდრის 13 სმ–ს, ფუძის დიაგონალი — 12 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

16 გამოთვალეთ: ა) სამკუთხა, ბ) ოთხკუთხა, გ) ექვსკუთხა წესიერი პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით.

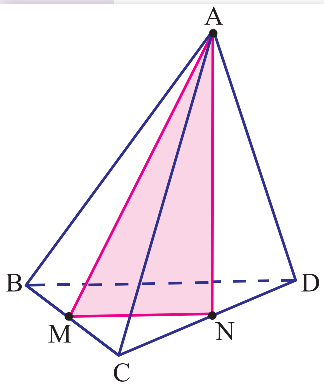
4 ამოცანები კვეთების აგებაზე

ჩვენ უკვე გავეცანით ზოგიერთ მრავალწახნაგას, განვსაზღვრეთ მათი ძირითადი ელემენტები. ამ პარაგრაფში ტეტრაედრის და პარალელეპიპედის მაგალითზე განვიხილოთ მრავალწახნაგების სიბრტყით კვეთა.



სიბრტყეს, რომლის ორივე მხარეს არის გეომეტრიული სხეულის წერტილები, ამ **გეომეტრიულ სხეულს მკვეთი სიბრტყე** ეწოდება.

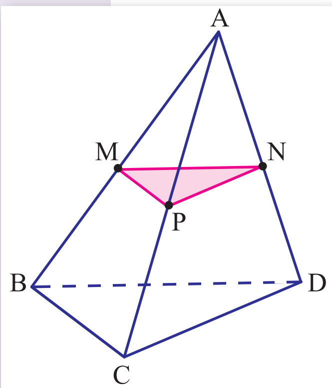
როგორც ნახაზზე ვხედავთ, α სიბრტყის ორივე მხარეს არის S_{ABCD} პირამიდის წერტილები, შესაბამისად, α სიბრტყე მისი მკვეთი სიბრტყეა, რომელმაც SAB წახნაგი გაკვეთა A_1B_1 , SBC წახნაგი - B_1C_1, ხოლო S_{AC} წახნაგი კი A_1C_1 წრფეებზე. მიღებული $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი წარმოადგენს პირამიდის კვეთას.



ამოცანა 1

ავაგოთ ABCD ტეტრაედრის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის A წვეროსა და BC და CD წიბოებზე მდებარე M და N წერტილებზე.

აგება:
მკვეთი სიბრტყის ABC წახნაგთან გადაკვეთის მონაკვეთია AM, რადგან A და M წერტილები ერთდროულად ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყესაც და ABC წახნაგსაც. ანალოგიურად, კვეთის მონაკვეთებია AN და MN. კვეთაში მივიღეთ AMN სამკუთხედი.

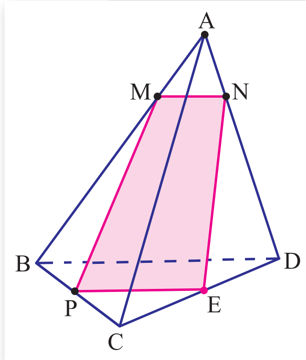


ამოცანა 2

ავაგოთ ABCD ტეტრაედრის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის AB, AC და AD წიბოების შუაწერტილებზე და ვიპოვოთ კვეთის პერიმეტრი, თუ BCD სამკუთხედის პერიმეტრი 27 სმ-ია.

აგება:
რადგან M და P წერტილები ABC წახნაგზე მდებარეობს, MP მონაკვეთიც მდებარეობს ABC-ზე, შესაბამისად, PN მდებარეობს ACD-ზე და MN – ABD წახნაგზე.
კვეთაში მივიღეთ MNP სამკუთხედი, რომლის გვერდები ტეტრაედრის გვერდითი წახნაგების შუახაზებია, ამიტომ
$MP=\frac{BC}{2}$, $PN=\frac{CD}{2}$ და $MN=\frac{BD}{2}$, ე.ი. $P_{MNP} = \frac{27}{2} P_{BCD} = 13{,}5$ სმ.
შევნიშნოთ, რომ თუ კვეთა გადის ტეტრაედრის ერთი წვეროდან გამოსულ სამ წიბოზე, მაშინ კვეთაში აუცილებლად სამკუთხედი მიიღება.

ამოცანა 3

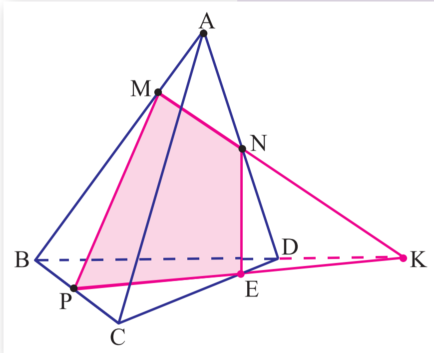


ავაგოთ ABCD ტეტრაედრის კვეთა, რომელიც გადის $M \in AB$, $N \in AD$ და $P \in BC$ წერტილებზე, ისე, რომ $MN \parallel BD$.

აგება:

რადგან $MN \parallel BD$ და MN ეკუთვნის მკვეთ სიბრტყეს, ამ უკანასკნელის და BDC სიბრტყის კვეთის წრფეც BD წრფის პარალელური იქნება. მაგრამ ეს წრფე P წერტილზე გადის, ე.ი. უნდა გავავლოთ $PE \parallel BD$. კვეთაში PMNE ტრაპეცია მიიღება.

ამოცანა 4

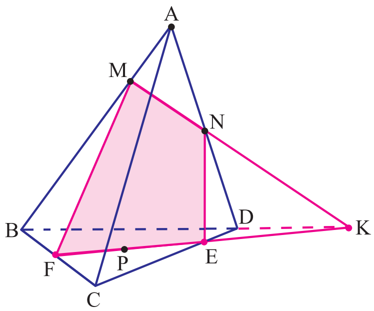


ავაგოთ კვეთა წინა ამოცანის პირობებით, იმ განსხვავებით, რომ $MN \parallel BD$.

აგება:

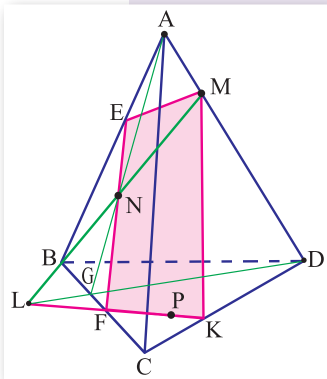
მოცემულ წერტილებზე გამავალი PM და MN მონაკვეთები წარმოადგენს საძიებელი კვეთის გვერდებს. კვეთის ასაგებად საჭიროა BDC წახნაგის სიბრტყეზე ვიპოვოთ მკვეთი სიბრტყის P წერტილისგან განსხვავებული წერტილი. ამისთვის გავაგრძელოთ MN წრფე და ვიპოვოთ MN წრფის კვეთის წერტილი BDC სიბრტყესთან.

MN და BD წრფეები ABD სიბრტყეზე მდებარეობს. მათი კვეთის წერტილია K წერტილი, მაგრამ BD წრფე, ამავე დროს, BDC სიბრტყის წრფეა, ე.ი. K წერტილი BDC სიბრტყეშიც მდებარეობს. შევაერთოთ K და P წერტილები. KP წრფის CD წიბოსთან გადაკვეთის წერტილი საძიებელი E წერტილია. მივიღეთ MNEP კვეთა.



აგება ჩატარდება ანალოგიურად, თუ ამოცანაში P წერტილი BDC სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილია.

ამოცანა 5**



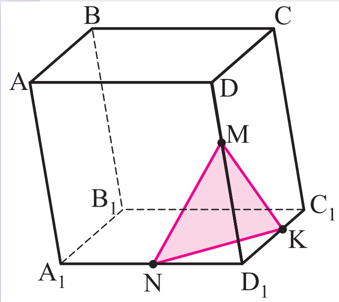
ავაგოთ ABCD ტეტრაედრის M, N და P წერტილებზე გამავალი კვეთა. თუ $M \in AD$, ხოლო N და P წერტილები შესაბამისად ABC და BCD სამკუთხედების შიგა წერტილებია.

აგება:

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ MN წრფის BCD სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი, ავაგოთ AN და AD წრფეებზე გამავალი დამხმარე სიბრტყე, რომლის კვეთა BCD სიბრტყესთან DG წრფეა. DG და MN წრფეების გადაკვეთის წერტილია L. LP წრფე BC და CD წიბოებს კვეთს, შესაბამისად, F და K წერტილებში. მივიღეთ FKME კვეთა.

მკვეთრი სიბრტყე $\equiv \alpha$, $L \in MN \Rightarrow L \in \alpha$. მაშასადამე, ფუძეში გვაქვს ორი L და P წერტილი, რომელიც ეკუთვნის მკვეთრ α სიბრტყეს. $\Rightarrow PL \in \alpha$ $\Rightarrow F \in \alpha$ და $K \in \alpha$. ABC წახნაგზე უკვე გვაქვს ორი F და E წერტილი რომელიც ეკუთვნის კვეთს, ე.ი. $EF \in \alpha \Rightarrow EM \in \alpha \Rightarrow MK \in \alpha$.

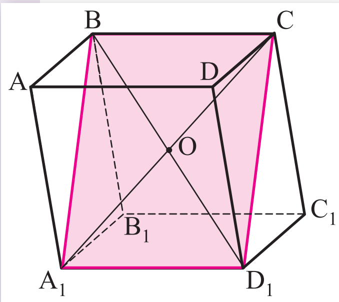
შევნიშნოთ, რომ რადგან ტეტრაედრი ოთხ წახნაგს შეიცავს, მისი კვეთა სიბრტყით შეიძლება იყოს სამკუთხედი ან ოთხკუთხედი.



პარალელეპიპედს ექვსი წახნაგი აქვს, ამიტომ მისი კვეთა სიბრტყით შესაძლებელია იყოს სამკუთხედი, ოთხკუთხედი, ხუთკუთხედი ან ექვსკუთხედი. განვიხილოთ შესაბამისი ამოცანები. ისევე, როგორც ტეტრაედრის დროს, თუ პარალელეპიპედის კვეთის წერტილები მოცემული გვაქვს ერთი წვეროდან გამოსულ სამ წიბოზე, კვეთაში სამკუთხედი მიიღება. ნახაზზე $N \in A_1D_1$, $K \in D_1C_1$, $M \in D_1D$; კვეთაში ვღებულობთ MNK სამკუთხედს.

ამოცანა 6

ავაგოთ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის პარალელეპიპედის BC და A_1D_1 მოპირდაპირე წიბოებზე.



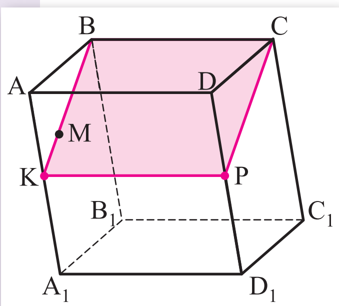
აგება:

გავავლოთ A_1B და CD_1 მონაკვეთები. მივიღეთ A_1BCD_1 კვეთა, რომელიც, ადვილი საჩვენებელია, რომ პარალელოგრამს წარმოადგენს. მიღებული პარალელოგრამის BD_1 და A_1C დიაგონალები პარალელეპიპედის დიაგონალებია.

დაამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის ოთხივე დიაგონალი ერთ წერტილში იკვეთება, რომელიც თითოეული დიაგონალისთვის შუაწერტილია (მითითება: ააგეთ A_1B_1CD და ADC_1B_1 კვეთები).

ამოცანა 7

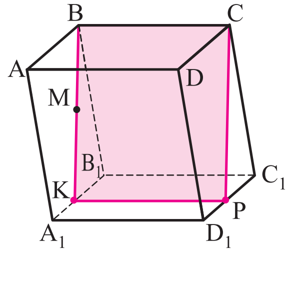
ავაგოთ კვეთა, რომელიც გადის $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედის BC წიბოზე და A_1ABB_1 წახნაგის M შიგა წერტილზე.



აგება:

რადგან B და M წერტილები A_1ABB_1 წახნაგს ეკუთვნის, გავატაროთ BM წრფე AA_1 წიბოსთან გადაკვეთამდე K წერტილში. A_1ABB_1 და D_1DCC_1 წახნაგები პარალელური წახნაგებია, ამიტომ მკვეთი სიბრტყე მათ პარალელურ მონაკვეთებზე გადაკვეთს. გავავლოთ CP||BK და შევაერთოთ K და P წერტილები. ცხადია, KP||BC; მივიღეთ KPCB პარალელოგრამი.

შევნიშნოთ, რომ M წერტილის სხვადასხვა მდებარეობა განსაზღვრავს KBCP პარალელოგრამის KP ფუძის მდებარეობას – მდებარეობს AA_1D_1D წახნაგზე (ამოცანის ნახაზი), ემთხვევა A_1D_1 წიბოს (წინა ამოცანა), თუ მდებარეობს $A_1B_1C_1D_1$ წახნაგზე.



ამოცანა 8

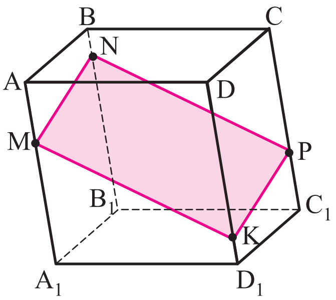
ავაგოთ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის $M \in AA_1$, $N \in BB_1$ და $P \in CC_1$ წერტილებზე.

აგება:

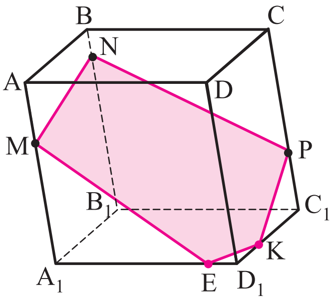
M წერტილზე A_1ADD_1 სიბრტყეში გავატაროთ NP წრფის პარალელური წრფე, იმის მიხედვით, ეს წრფე გადაკვეთს DD_1 მონაკვეთს თუ მის გაგრძელებას, კვეთაში მიიღება გამოვა ოთხკუთხედი (პარალელოგრამი) $MNPK$ (ნახ. ა) ან ხუთკუთხედი $MNPKE$ (ნახ. ბ).

ყურადღება!

კვეთის აგებისას ვეძებთ წახნაგს, რომელზეც გვაქვს მკვეთრი სიბრტყის 2 წერტილი.



ა)



ბ)

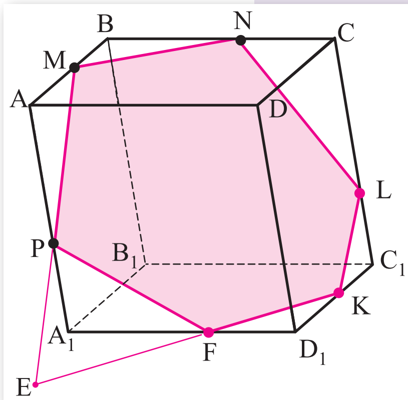
განვიხილოთ ამოცანა, როცა პარალელეპიპედის კვეთა გამოვა ექვსკუთხედი. ეს მოხდება მაშინ, როცა მოცემულობის თანახმად, მკვეთი სიბრტყე გადაკვეთს ექვსივე წახნაგს.

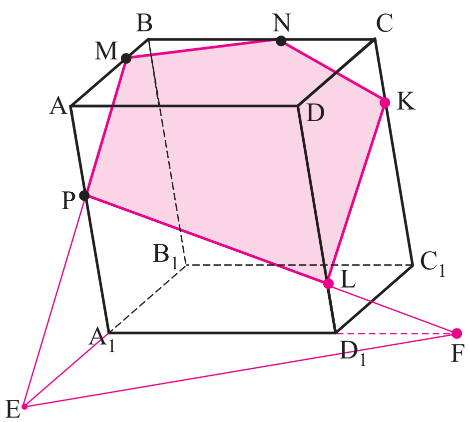
ამოცანა 9

მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AA_1$. ავაგოთ MNP კვეთა.

აგება:

გავაგრძელოთ MP A_1B_1 წრფესთან გადაკვეთამდე (M, P, A_1B_1 მდებარეობს AA_1B_1B წახნაგზე). მივიღებთ E წერტილს, რომელიც $A_1B_1C_1D_1$ წახნაგის სიბრტყეზეც მდებარეობს. გავავლოთ E წერტილზე MN-ის პარალელური წრფე. ვთქვათ, მან გადაკვეთა A_1D_1 და D_1C_1 წიბოები, შესაბამისად, F და K წერტილებში, გავავლოთ $KL \| MP$ და შევაერთოთ N და L წერტილები. მივიღებთ $MNLKFP$ კვეთას.



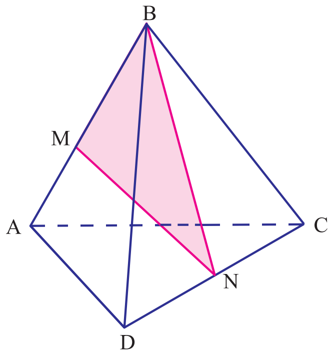


შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც ექვსკუთხედის მიღება დამოკიდებულია მხოლოდ წერტილების მდებარეობაზე. შესაძლებელია, რომ E წერტილზე გავლებულმა MN-ის პარალელურმა წრფემ გადაკვეთოს არა პარალელეპიპედის წიბოები, არამედ მისი გაგრძელებები. ან გაიაროს D_1 წერტილზე. ორივე შემთხვევაში მიიღება ხუთკუთხედი.

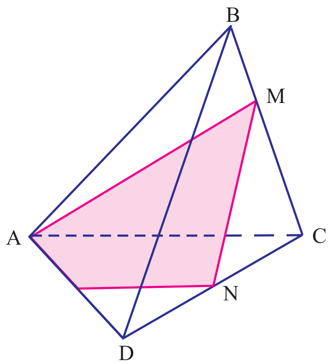
სავარჯიშოები:

1. ტეტრაედრის კვეთების აგებაში იპოვეთ შეცდომები.

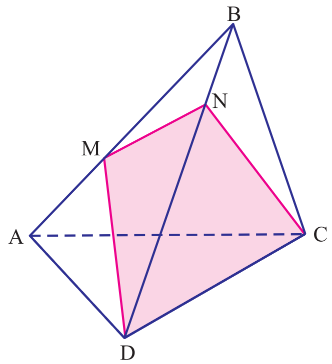
ა)



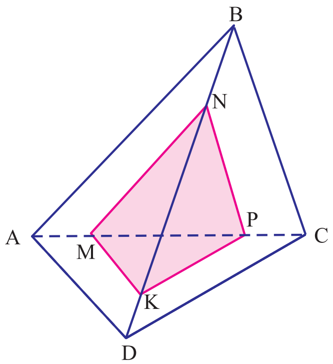
ბ)



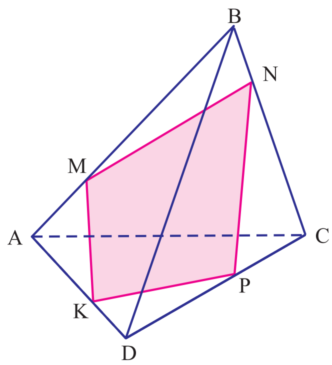
გ)



დ)

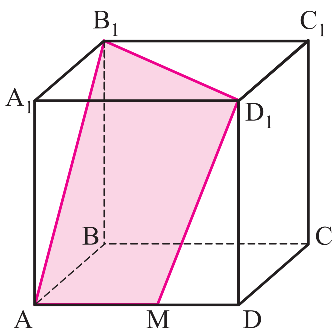


ე)

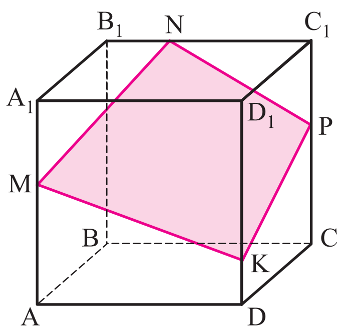


2. პარალელეპიპედის კვეთების აგებაში იპოვეთ შეცდომები.

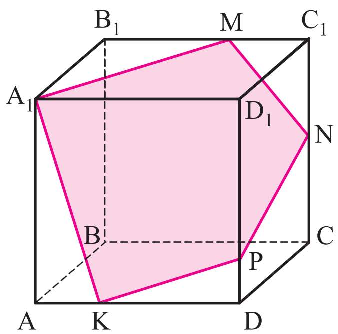
ა)



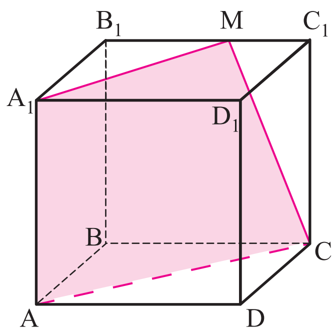
ბ)



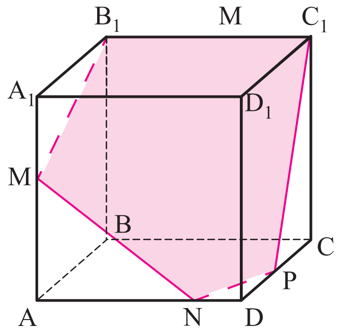
გ)



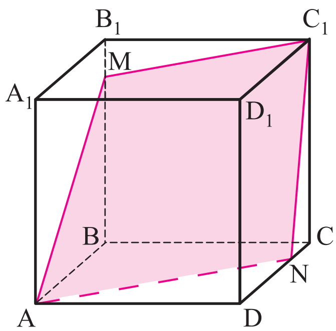
დ)



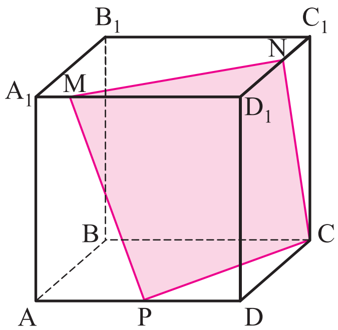
ე)



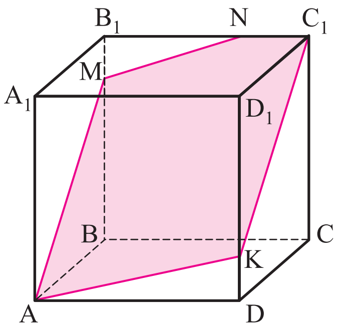
ვ)



ზ)



თ)



3 ABCD ტეტრაედრში M, N და P წერტილები, შესაბამისად, AB, BC და CD წიბოების შუაწერტილებია. AC=30სმ; BD=36სმ. დაამტკიცეთ, რომ MNP სიბრტყე გადის AD წიბოს K შუაწერტილზე და იპოვეთ ტეტრაედრის MNP სიბრტყის კვეთით მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

4 ABCD ტეტრაედრის BCD წახნაგის მედიანების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია ABC წახნაგის პარალელური სიბრტყე. ა) დაამტკიცეთ, რომ ტეტრაედრის კვეთა ABC სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედია; ბ) იპოვეთ კვეთის და ABC სამკუთხედის ფართობების შეფარდება.

5 მოცემულია KLMN ტეტრაედრი. ა) ააგეთ ტეტრაედრის კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის KL წიბოზე და MN წიბოს A შუაწერტილზე; ბ) დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყე, რომელიც გადის LM, MA და MK მონაკვეთების E, O და F შუაწერტილებზე, LKA სიბრტყის პარალელურია. იპოვეთ EOF სამკუთხედის ფართობი, თუ LKA სამკუთხედის ფართობი 24 სმ²-ია.

6 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედის AA_1B_1B წახნაგზე აღნიშნეთ M შიგა წერტილი. ააგეთ პარალელეპიპედის კვეთა, რომელიც გადის M წერტილზე და რომელიც პარალელურია: ა) ABCD ფუძის; ბ) BB_1CC_1 წახნაგის; გ) BDD_1 სიბრტყის.

7 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. ააგეთ მისი კვეთა სიბრტყით, რომელიც გადის: ა) CC_1 წიბოსა და AA_1D_1D წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე; ბ) ABCD წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე AB_1C_1 სიბრტყის პარალელურად.

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1 მოცემული წიბოს პარალელური რამდენი წიბოა პარალელეპიპედში?

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

2 მოცემული წახნაგის პარალელური რამდენი წიბოა პარალელეპიპედში?

ა) 1, ბ) 2, გ) 6, დ) 10.

3 ყველაზე მეტი რამდენი პარალელური წიბოა ექვსკუთხა პრიზმაში?

ა) 3, ბ) 4, გ) 5, დ) 6.

4 ფუძის სიბრტყის პარალელური რამდენი წიბოა ხუთკუთხა პრიზმაში?

ა) 2, ბ) 3, გ) 4, დ) 5.

5 მართკუთხა პარალელეპიპედში პარალელურ წახნაგთა წყვილების რაოდენობაა:

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

6 თუ a და b წრფეები პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე წრფეებია, მაშინ ეს წრფეები:

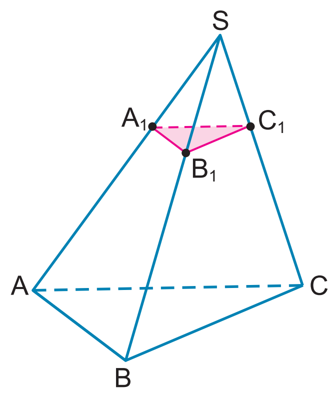
ა) აუცილებლად პარალელურია, ბ) აუცილებლად აცდენილია,

გ) იკვეთება, დ) ან პარალელურია ან აცდენილი.

7 თუ $SABC$ პირამიდა ფუძის პარალელური სიბრტყითაა გადაკვეთილი, რომელი არ არის ჭეშმარიტი?

ა) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, ბ) $\Delta A_1SB_1 \sim \Delta ASB$,

გ) $\Delta ABC \sim \Delta A_1SB_1$, დ) $\Delta A_1SC_1 \sim \Delta ASC$.



8 რომელი მრავალკუთხედი არ შეიძლება იყოს პარალელეპიპედის კვეთა?

ა) ოთხკუთხედი, ბ) ხუთკუთხედი, გ) ექვსკუთხედი, დ) შვიდკუთხედი.

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 დაამტკიცეთ, რომ თუ AB და CD წრფეები აცდენილი წრფეებია, მაშინ AC და BD წრფეებიც აცდენილია.

2 a და b წრფეები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. შეიძლება თუ არა გავავლოთ წრფე, რომელიც a და b წრფეების პარალელურია? პასუხი ახსენით.

3 A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD, AC და BD, AD და BC მონაკვეთების შუაწერტილებზე, გამავალი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება.

4 M წერტილი არ ეკუთვნის ABCD ტრაპეციის (BC||AD) სიბრტყეს. დაამტკიცეთ, რომ AD წრფე BMC სიბრტყის პარალელურია.

5 C წერტილი AB მონაკვეთს ეკუთვნის, ამასთან AB:BC=4:3. CD მონაკვეთი, რომლის სიგრძე 12 სმ-ია, B წერტილზე გამავალი α სიბრტყის პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ AD წრფე კვეთს α სიბრტყეს რომელიღაც E წერტილში და იპოვეთ BE მონაკვეთის სიგრძე.

6 ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდებზე აღებულია D და E წერტილები ისე, რომ DE=5სმ და $\frac{DB}{AD}=\frac{2}{3}$. α სიბრტყე გადის B და C წერტილებზე და DE მონაკვეთის პარალელურია. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე.

7 ABCD ტრაპეციაში BC ფუძის სიგრძე 18 სმ-ია. M წერტილი არ ეკუთვნის ტრაპეციის სიბრტყეს, ხოლო K წერტილი BM მონაკვეთის შუაწერტილია. დაამტკიცეთ, რომ ADK სიბრტყე კვეთს MC მონაკვეთს რომელიღაც E წერტილში და იპოვეთ KE მონაკვეთის სიგრძე.

8 ABCD ტრაპეციის AB ფუძე C წერტილზე გამავალი α სიბრტყის პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ ა) CD წრფე მდებარეობს α სიბრტყეზე; ბ) ტრაპეციის შუახაზი α სიბრტყის პარალელურია.

9 დაამტკიცეთ, რომ თუ სამი სიბრტყე, ერთ წრფეზე არ გადის და წყვილ-წყვილად იკვეთება, მათი გადაკვეთის წრფეები ან პარალელურია, ან ერთ წერტილში იკვეთება.

10 დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფე კვეთს ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთს, მაშინ ის კვეთს მეორესაც.

11 a წრფეზე არამდებარე M წერტილზე გავლებულია ორი წრფე, რომელთაც a წრფესთან საერთო წერტილი არ აქვთ. როგორია ამ წრფეების და a წრფის ურთიერთმდებარეობა.

12 a წრფე კვეთს ABC სამკუთხედის AB გვერდს. როგორია a და BC წრფეების ურთიერთმდებარეობა, თუ: ა) a წრფე მდებარეობს ABC სამკუთხედის სიბრტყეში და AC მონაკვეთს არ კვეთს; ბ) a წრფე არ მდებარეობს ABC სამკუთხედის სიბრტყეში.

13 მოცემულია ABCD პარალელოგრამი და ABEK ტრაპეცია EK ფუძით, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ. იპოვეთ KECD ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მასში ჩაიხაზება წრეწირი და AB=22,5სმ; EK=27,5სმ.

14 დაამტკიცეთ, რომ თუ γ სიბრტყე კვეთს ერთ-ერთს ორი პარალელური სიბრტყიდან, მაშინ იგი კვეთს მეორე სიბრტყესაც.

15 a წრფე პარალელურია ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთის. დაამტკიცეთ, რომ a წრფე ან პარალელურია მეორე სიბრტყის, ან მდებარეობს მასზე.

16 დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე არამდებარე წერტილზე გაივლება ამ სიბრტყის პარალელური სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.

17 α და β სიბრტყეები პარალელურია γ სიბრტყის. დაამტკიცეთ, რომ $\alpha \| \beta$.

18 მოცემულია ორი პარალელური α და β სიბრტყე. A წერტილი არ ეკუთვნის არც ერთ მათგანს. A წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც α და β სიბრტყეებს შესაბამისად X და Y წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ AX:AY მონაკვეთების სიგრძეების შეფარდება, არ არის დამოკიდებული აღებულ წრფეზე.

პროექტი:

გახსენით GeoGebra4-ს სამუშაო ფურცელი. მოაწესრიგეთ სახატავი არის ფონი და ბადე.
დააწკაპეთ “სრიალაზე”: “სახელწოდება”–ზე ჩაწერეთ “გვერდი” ან “lato“. შემდეგ მე–3 ლოგოში აიღეთ “წერტილიდან მოცემული სიგრძის მონაკვეთი” და დააწკაპეთ სახატავ არეზე. გახსნილ ფანჯარაში ჩაწერეთ “გვერდზე” ან შესაბამისად “lato“ გაააქტიურეთ და ამოძრავეთ სრიალა 

. დააკვირდით შედეგს. მიღებული AB მონაკვეთი დააყენეთ სასურველ ზომაზე, მაგალითად, ვთქვათ, AB=4. დააწკაპეთ მე–5 ლოგოში “წესიერი მრავალკუთხედი”. დააწკაპეთ A, შემდეგ B წერტილს, და გახსნილ ფანჯარაში ჩაწერეთ “4”. აიგება ABEF კვადრატი მე–3 ლოგოში (მარცხნიდან) დავაწკაპოთ ვექტორი ორ წერტილს შორის” და დააწკაპეთ სახატავ არეზე კუთხეში. დააწკაპეთ მე–9 ლოგოში “გადატანა ვექტორით”. დააწკაპეთ A წერტილზე, შემდეგ აგებულ $\overrightarrow{DD_1}$–ზე. ასევე მოიქეცით კვადრატის ყველა წვეროზე. მიღებულ წვეროებს კუბის წვეროებია. დააწკაპეთ მე–5 ლოგოში “მრავალკუთხედს” და ააგეთ კუბის ყველა წახნაგი ცალ-ცალკე (მაგალითად, AA′B′BA ქვედა წახნაგი).
ავაგოთ AB და F′E′ წიბოებზე გამავალი კვეთა, დააწკაპეთ კუბზე – თვისებები. აირჩიეთ კუბის წახნაგებისთვის ფერი, კვეთისთვის განსხვავებული ფერი. კურსორი გაააქტიურეთ, მიიტანეთ ვექტორთან და ამოძრავეთ. მიეცით კუბს სასურველი მდებარეობა. დამალეთ ბადე, ღერძები და ამობეჭდეთ.

II თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

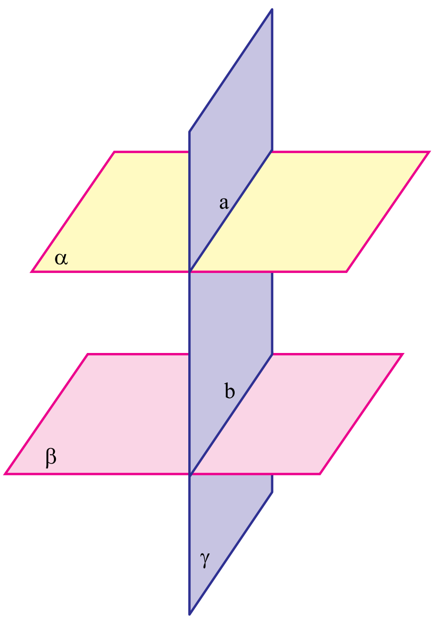
- თუ წრფე მოცემულ სიბრტყეში არ მდებარეობს და პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე წრფის, მაშინ ეს წრფე მოცემული სიბრტყის პარალელურია.

- თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფის პარალელურია.

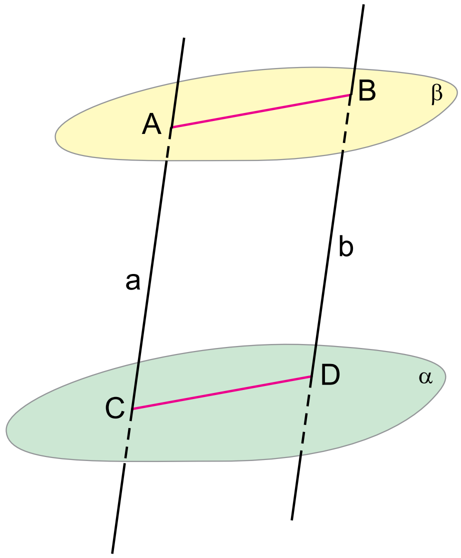
- ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ.

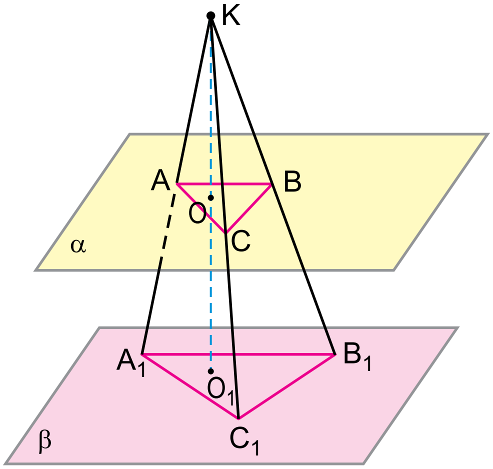
- თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეული მეორე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

- თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამეთი, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.



- ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებულ პარალელურ წრფეთა მონაკვეთები ტოლია.





- პირამიდა გადაკვეთილი და ფუძის პარალელური სიბრტყით:

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) $\Delta CKB \sim \Delta C_1KB_1$

3) $\dfrac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta A_1C_1B_1}} = \dfrac{AK^2}{A_1K^2} = \dfrac{CK^2}{C_1K^2} = \dfrac{BK^2}{B_1K^2} = \dfrac{KO^2}{KO_1^2}$

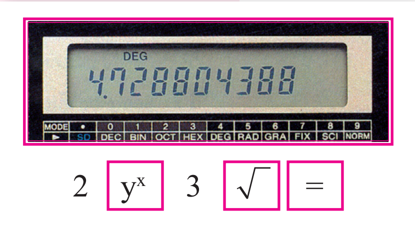
III თავი

ამ თავში გავეცნობით ხარისხს ირაციონალური მაჩვენებლით, მაჩვენებლიან ფუნქციას, ლოგარითმის ცნებას და თვისებებს, მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს.

შევძლებთ ამოვხსნათ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები და უტოლობები.

III
თავი

1 ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით



1. მოიმარჯვეთ კალკულატორი და აკრიფეთ: 3^7; $5^{\frac{3}{4}}$; $2^{\sqrt{3}}$; $3^{\sqrt{2}}$ შედეგი რვეულში დააფიქსირეთ.

თქვენ უკვე იცით, თუ როგორ განიმარტება რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხი. განვაზოგადოთ ეს ცნება ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის.

- ა) განმარტეთ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი და ჩამოაყალიბეთ მისი თვისებები.
- რას ეწოდება ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა?

როგორც ცნობილია, ყოველი ნამდვილი x რიცხვისთვის არსებობს ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა, რომლის ყოველი სეგმენტი შეიცავს x რიცხვს.

მაგალითად, რადგან

$$1 \le \sqrt{2} \le 2$$
$$1{,}4 \le \sqrt{2} \le 1{,}5$$
$$1{,}41 \le \sqrt{2} \le 1{,}42$$
$$1{,}414 \le \sqrt{2} \le 1{,}415$$
$$1{,}4142 \le \sqrt{2} \le 1{,}4143,$$

ამიტომ $\sqrt{2}$ -თვის [1;2], [1,4;1,5], [1,41;1,42], [1,414;1,415], [1,4142;1,4143]. ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაა — ყოველი სეგმენტი წინას ქვესიმრავლეა და შუალედების სიგრძე თანდათანობით მცირდება, ხდება რაგინდ მცირე, თან თითოეული სეგმენტი შეიცავს ერთადერთ რიცხვს $\sqrt{2}$ -ს.

არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის ყოველ სეგმენტს.

2. ვთქვათ, $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$, $[x_3; y_3]$,... არის ირაციონალური x რიცხვის შესაბამისი ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა. თუ $a>1$, მაშინ სეგმენტთა მიმდევრობა: $[a^{x_1};a^{y_1}]$, $[a^{x_2};a^{y_2}]$,... იქნება ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა, რომლის ყოველი სეგმენტი შეიცავს ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს a^x–ს — ხარისხს ირაციონალური მაჩვენებლით, ასევე თუ $0<a<1$, მაშინ a^x–ის შესაბამისი ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა იქნება: $[a^{y_1};a^{x_1}]$, $[a^{y_2}; a^{x_2}]$, ...

ისევე, როგორც რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხის განმარტებისას, ირაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხიც განიმარტება დადებითი ფუძით.

მიღებულ a^x რიცხვს ვუწოდოთ დადებითი a რიცხვის x **ირაციონალური ხარისხი.**

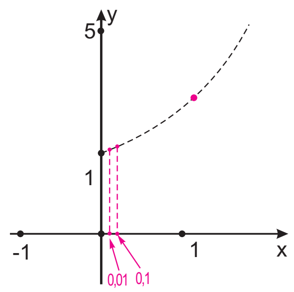
თუ $x \in I^+$, მაშინ $0^x=0$

- აჩვენეთ, რომ თუ $0<a<1$ და $b<c$, b, $c \in Q$, მაშინ $a^b>a^c$.

დავწეროთ $5^{\sqrt{2}}$-თვის ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა.

5^1 (=5) $< 5^{\sqrt{2}} < 5^2$ (=25)	$5^2-1 = 5(5-1) < 5^2(5-1)$
$5^{1,4}$ (≈9,5...) $< 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,5}$ (≈11,1...)	$5^{1,5}-5^{1,4} = 5^{1,4}(5^{0,1}-1) < 5^2(5^{0,1}-1)$
$5^{1,41}$ (≈9,6...) $< 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,42}$ (≈9,8...)	$5^{1,42}-5^{1,41} = 5^{1,41}(5^{0,01}-1) < 5^2(5^{0,01}-1)$
$5^{1,414}$ (≈9,73...) $< 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,415}$ (≈9,75...)	$5^{1,415}-5^{1,414} = 5^{1,414}(5^{0,001}-1) < 5^2(5^{0,001}-1)$
$5^{1,4142}$ (≈9,738...) $< 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,4143}$ (≈9,739...)	....
....	

5^1, $5^{0,1}$, $5^{0,01}$, მიმდევრობის წევრები თანდათან უახლოვდებიან 1–ს.



მიღებული $[5;5^2]$, $[5^{1,4};5^{1,5}]$, $[5^{1,41};5^{1,42}]$,... სეგმენტთა მიმდევრობის ყოველი სეგმენტი შეიცავს $5^{\sqrt{2}}$–ს, თან ყოველი სეგმენტი (დაწყებული მეორიდან) შედის წინაში და სეგმენტთა სიგრძე კი სულ უფრო და უფრო მცირდება, ხდება – რაგინდ მცირე.

რადგან ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით განიმარტა ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობით, რომლის ყოველი სეგმენტის ბოლოები რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხებია, ამიტომ ადვილი სანახავია, რომ ირაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს გააჩნია რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ანალოგიური თვისებები.

$\forall p,q \in R$-თვის და a, $b \in R^+$-თვის.

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ **3.** $a^p : a^q = a^{p-q}$

2. $a^p \cdot b^p = (ab)^p$ **4.** $a^p : b^p = (a:b)^p$

5. $(a^p)^q = a^{pq}$

მაგალითი 1.

გაამარტივეთ:

ა) $a^{\sqrt{3}} \cdot a^2$; ბ) $\left(a^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$; გ) $\dfrac{x^{\sqrt{5}}}{x^{2+\sqrt{5}}}$.

ამოხსნა:

ა) $a^{\sqrt{3}} \cdot a^2 = a^{2+\sqrt{3}}$; ბ) $\left(a^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = a^4$; გ) $\dfrac{x^{\sqrt{5}}}{x^{2+\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{x^2}$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. თუ $a>1$ და $m>n$, მაშინ a^m _?_ a^n;

2. თუ $0<a<1$ და $m>n$, მაშინ a^m _?_ a^n;

3. $a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\underline{?}}$; **4.** $a^{\sqrt{15}} = \left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\underline{?}}$;

5. $a^{\sqrt{3}} : a^{\sqrt{2}} = a^{\underline{?}}$; **6.** $7^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}} = (\underline{\ ?\ })^{\sqrt{2}}$.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $2^{\sqrt{6}}\cdot 2^{\sqrt{3}}$; ბ) $3^{2-\sqrt{3}}\cdot 3^{2+\sqrt{3}}$; გ) $5^{3\sqrt{7}}:5^{\sqrt{7}}$;

დ) $2^{3+\sqrt{5}}:2^{2+\sqrt{5}}$; ე) $18^{\sqrt{3}}:6^{\sqrt{3}}$; ვ) $7^{2\sqrt{5}}\cdot 3^{2\sqrt{5}}$;

ზ) $10^{\sqrt{7}}\cdot 0,01^{\sqrt{7}}$; თ) $88^{\sqrt{2}}:11^{\sqrt{2}}$; ი) $(5^{-\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}}$;

კ) $(7^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; ლ) $15^{\sqrt{5}}:5^{\sqrt{5}}\cdot 3^{\sqrt{2}}$; მ) $(8^{\sqrt{5}}\cdot 2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$.

2. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\dfrac{x^{\sqrt{2}}}{x}$; ბ) $\dfrac{x^{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}}{x^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}}$; გ) $\dfrac{(a^{\sqrt{3}}\cdot b^{2})^{\sqrt{3}}}{a\cdot b^{\sqrt{3}}}$;

დ) $\dfrac{a^{5\sqrt{3}}}{a^{2\sqrt{3}}}$; ე) $\dfrac{x^{\sqrt{3}+2}}{x^{\sqrt{3}-1}}$; ვ) $\dfrac{a^{\sqrt{2}}b^{\sqrt{2}}}{c^{\sqrt{2}}}$.

ზ) $\dfrac{x^{5+\sqrt{6}}\cdot x^{5-\sqrt{6}}}{x^{2}}$; თ) $\dfrac{a^{3\sqrt{3}}\cdot b^{5+2\sqrt{3}}}{a^{3}\cdot b^{8-\sqrt{3}}}$; ი) $\left(\dfrac{x^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot y^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{y^{5-2\sqrt{6}}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

3. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

ა) $3^{\sqrt{2}};\ 3\sqrt{3}$; გ) $3^{\sqrt{3}};\ 3\sqrt{3}$;

ბ) $2^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}};\ 2^{2};\ \sqrt{2}^{2}$; დ) $3^{3};\ \sqrt{3}^{4\sqrt{2}};\ 3^{2\sqrt{3}};\ \sqrt{3}^{5}$.

4. რომელია რაციონალური და რომელი ირაციონალური რიცხვი?

$(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; $5^{\sqrt{3}-1}\cdot 5^{\sqrt{3}+1}$; $5^{\sqrt{3}+1}\cdot 5^{1-\sqrt{3}}$; $5^{\sqrt{3}+2}\cdot 5^{3-\sqrt{3}}$; $(3^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$; $(3^{\sqrt{2}-1})^{2}$.

5. გამოთვალეთ კალკულატორის საშუალებით:

ა) $2^{\sqrt{3}}$; ბ) $2^{2\sqrt{2}}$; გ) $3^{\sqrt{5}}$; დ) $3^{\sqrt{-2}}$; ე) $4^{-2\sqrt{3}}$;

ვ) $5^{\sqrt{5}}$; ზ) $3^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$; თ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; ი) $2^{\sqrt{2}}\cdot 3^{\sqrt{3}}$; კ) $(2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

გ

6 გამოთვალეთ:

ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0,2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$;

ბ) $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}$;

გ) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^{2}}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^{3}}\right)^{2}-2^{-\frac{3}{2}}\cdot\cos 45^\circ$;

დ) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^{2}}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$.

7 გაამარტივეთ:

ა) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{5}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^{2}\sqrt[5]{ab^{3}}\right)^{2}}$; ბ) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^{4}}\right)^{3}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^{2}b}}\right)^{4}}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^{6}}$;

გ) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$; დ) $\dfrac{\sqrt[3]{a+\sqrt{1-a^{2}}}\cdot\sqrt[6]{1-2a\sqrt{1-a^{2}}}}{\sqrt[3]{1-2a^{2}}}$.

8* დაამტკიცეთ, რომ თუ:

$$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}, \text{ მაშინ } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

9 ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$; ბ) $x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{1}{6}} + 6 = 0$;

გ) $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$; დ) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

10 ცხრილში მოცემულია სტუდენტთა მიერ ტესტირებებში დაგროვილი ქულები:

საგანი	ქულათა მაქსიმუმი	დაგროვილი ქულები
მათ. ანალიზი	80	64
ისტორია	60	53
ანალიზური გეომეტრია	75	68
ალბათობა	85	75

რომელ საგანში აქვს სტუდენტს უკეთესი შედეგი?

11 ვალუტის კურსი შემდეგია:

1 დოლარი – 1.68 ლ

1 ევრო – 2.15 ლ

რამდენი ევროს ყიდვა შეუძლია გიორგის 900 ლარად?

12 საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისაზე იპოვეთ წერტილები, რომელთაგან $M(-2;0)$ წერტილამდე მანძილია 10.

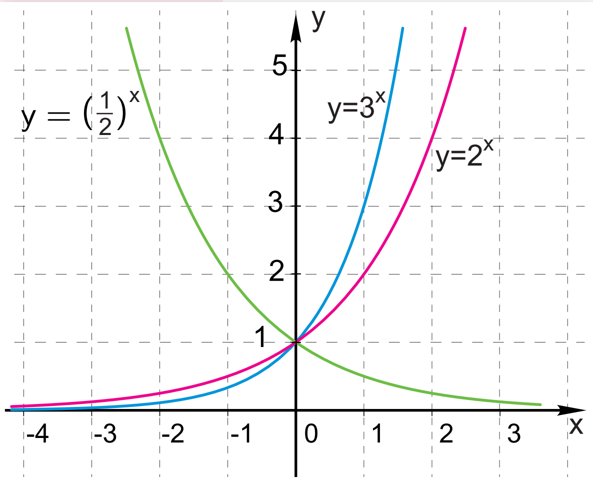
13 აბსცისათა ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან და $M(9;12)$ წერტილიდან.

2 მაჩვენებლიანი ფუნქცია

1. ზღვის ყურეში 20 მ სიღრმეზე იზრდება წყალმცენარე, რომლის სიმაღლე ყოველ კვირაში ორმაგდება.
ა) დაკვირვების დაწყებისას წყალმცენარე 1 მ სიმაღლის იყო. რა სიმაღლის იქნება იგი 1, 2, ..., x კვირის შემდეგ? რა სიმაღლისა იყო წყალმცენარე 1,2, ... , t კვირის წინ?
ბ) თუ ვიგულისხმებთ, რომ წყალმცენარე დროის ტოლ შუალედებში ერთი და იმავე სიდიდეჯერ იზრდება, მაშინ რა სიმაღლის იქნება იგი ნახევარი კვირის შემდეგ? 1,5 კვირის შემდეგ? 2,5 კვირის წინ?
გ) დაწერეთ ფუნქცია: დრო $\rightarrow$ წყალმცენარის სიმაღლე.

$f: x \rightarrow a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>o$, $a\neq 1$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითად, $y=5^x$, $y=0{,}3^x$, მაჩვენებლიანი ფუნქციის მაგალითებია. მაჩვენებლიანი ფუნქცია განსაზღვრულია ცვლადის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისთვის, ე.ი. $x\in R$ და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა R^+.
მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები:



x	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$		$\frac{1}{2}$	1	2	4	9
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$
$y=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

1. თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია.
თუ $0<a<1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია კლებადია.

2. (0; 1) წერტილი მდებარეობს $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე.

3. $y=a^x$ და $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

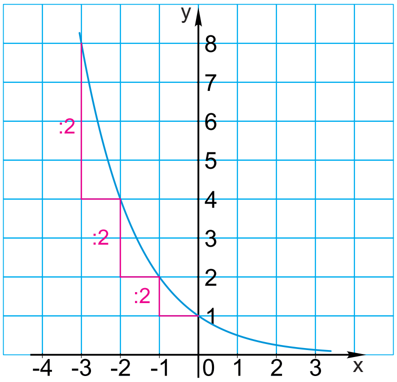
4. $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, სადაც $f(x)=a^x$.

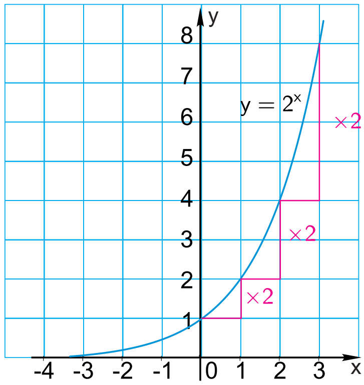
დავამტკიცოთ მე–4 თვისება:
$f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=f(x_1)\cdot f(x_2)$. რ.დ.გ.

მე–4 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)=ba^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის არგუმენტს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს ბიჯით h: $x_0, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \ldots$, მაშინ $f(x)=ba^x$ ფუნქციის მნიშვნელობები შესაბამისად ერთი და იმავე რიცხვჯერ a^h–ჯერ გაიზრდება.

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=\left(\frac{ba^{x_0+h}}{ba^{x_0}}\right)=a^h$$

აქედან $\frac{f(x_1)}{f(x_0)}=\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\ldots\frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)}=a^h$

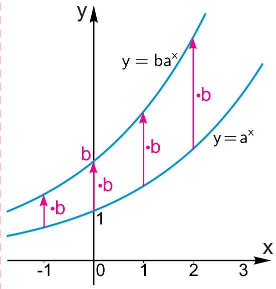




სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც:

თუ x არგუმენტის მუდმივი ნაზარდის შემთხვევაში ფუნქციის მნიშვნელობები ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება (იზრდება ან მცირდება), მაშინ ეს ფუნქცია $y=ba^x$, სახის მაჩვენებლიანი ფუნქციაა.

$y=ba^x$–ს სახის ფუნქციასაც **მაჩვენებლიან ფუნქციას** უწოდებენ.



1. დაამტკიცეთ $y=a^x$, ფუნქციის 1-ელი, მე-2, მე-3 თვისებები.

2. ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ააგეთ $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, ფუნქციათა გრაფიკები, დააკვირდით და გამოიტანეთ გონივრული დასკვნა: როგორაა განლაგებული ერთმანეთის მიმართ $y=a^x$ და $y=b^x$ ა) $a>b>1$; ბ) $0<a<b$ ფუნქციათა გრაფიკები?

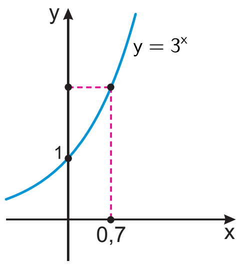
მაგალითი 1.

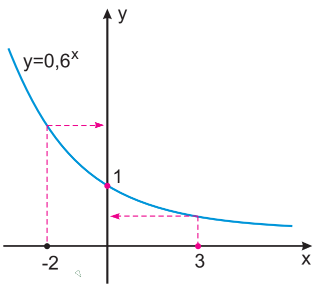
შეადარეთ 1-ს: ა) $3^{0,7}$; ბ) $0,6^3$, გ) $0,6^{-2}$.

ამოხსნა:

ა) გრაფიკიდან ადვილად დაასკვნით, რომ $3^{0,7}>1$.

ბ) $0,6^3<1$; გ) $0,6^{-2}>1$



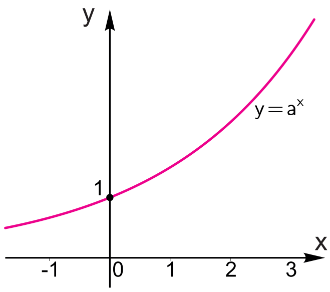


მაგალითი 2.

ნახაზზე მოცემულია $f(x)=a^x$, ფუნქციის გრაფიკი.

ააგეთ: ა) $y=a^{x-1}$; ბ) $y=2a^x$; გ) $y=a^x-3$

ფუნქციის გრაფიკი.

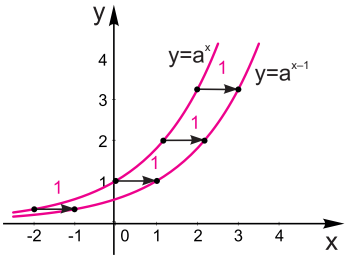


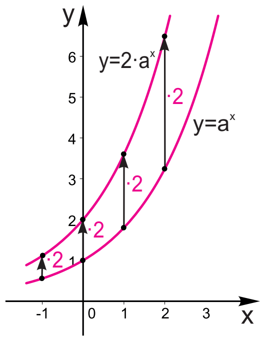
ამოხსნა:

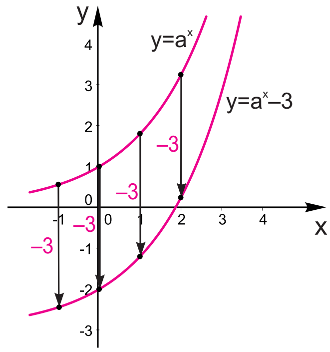
ა) თუ $f(x)=a^x$, მაშინ $f(x-1)=a^{x-1}$, ე.ი. მოხდება $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკის $\begin{cases} x \to x+1 \\ y \to y \end{cases}$ პარალელური გადატანა.

თუ $f(x)=a^x$, მაშინ:

ა) $f(x-1)=a^{x-1}$ ბ) $g(x) = 2f(x) = 2a^x$ გ) $F(x) = f(x)-3 = a^x-3$

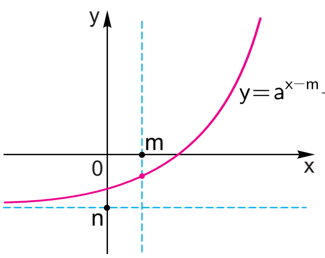






? დაწერეთ ბ) და გ) შემთხვევების შესაბამისი გარდაქმნის ფორმულები.

$y=a^{x-m}+n$ გრაფიკის სწრაფი აგება! ავაგოთ $x=m$ და $y=n$ დამხმარე ღერძები და ახალ საკოორდინატო სისტემაში ავაგოთ $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი.



შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის Oy, ღერძთან კვეთის წერტილია _?_, Ox ღერძთან _?_

2. $y=a^x$, ფუნქცია ზრდადია, როცა $a\in$_?_, ხოლო კლებადია, როცა $a\in$_?_

3. დასვით უტოლობის ნიშნები:

ა) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ _?_ $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; ბ) $\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{15}}$ _?_ 1; გ) $(\sqrt{3})^{-\sqrt{3}}$ _?_ 1.

სავარჯიშოები:

1 ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ როგორ ფუნქციას წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესია? (პასუხი დაასაბუთეთ).

2 შეადგინეთ ცხრილი ბიჯით $\frac{1}{2}$ (გამოიყენეთ კალკულატორი) და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

ა) $y = 1{,}5^x$; ბ) $y = 2{,}5^x$; გ) $y = 0{,}5^x$; დ) $y = 0{,}3^x$;

ე) $y = 3^x$; ვ) $y = \sqrt{2}^x$; ზ) $y = \sqrt{3}^x$; თ) $y = \left(\frac{7}{4}\right)^x$.

3. ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y = 1,2^x$; $y = 2,2^x$; $y = 5^x$; $y = 0,2^x$;

ბ) $y = 2^x$; $y = 0,75^x$; $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

4 ააგეთ $y = 2^x$ ფუნქციის გრაფიკი და შეადარეთ ერთმანეთს:

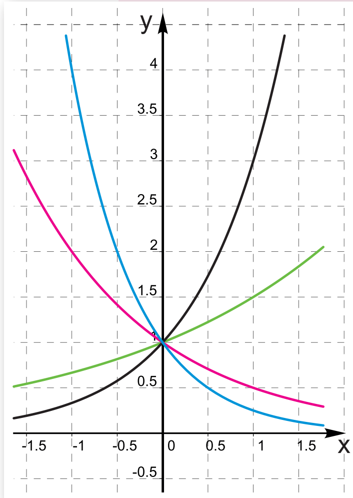
ა) $2^{0,3}$ და 1; ბ) $2^{1,7}$ და 1; გ) $2^{\sqrt{2}}$ და $2^{1,4}$;

დ) $2^{-0,1}$ და 1; ე) $2^{-0,5}$ და $2^{-0,7}$; ვ) $2^{-0,3}$ და $2^{-\frac{1}{3}}$.

5 ააგეთ $y = 2^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკი და შეადარეთ:

ა) $0,5^{-2}$ და 1; ბ) $\frac{1}{2}$ და $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{7}}$; გ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2,5}$ და $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

6 დაწერეთ 1-ელ ნახაზზე მოცემული გრაფიკების განტოლებები.



ნახ. 1

7 შეადარეთ ერთმანეთს ხარისხის მაჩვენებლები:

ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^m > \left(\frac{1}{3}\right)^n$; ბ) $\left(\frac{5}{4}\right)^m < \left(\frac{5}{4}\right)^n$; გ) $(2-\sqrt{3})^m < (2-\sqrt{3})^2$;

დ) $(\sqrt[5]{5})^m > (\sqrt[5]{5})^n$; ე) $0,2^m > 0,2^n$; ვ) $(\sqrt{10}-2)^m < (\sqrt{10}-2)^n$.

8 დაწერეთ $y=a^x$ ფუნქცია, თუ იგი გადის P წერტილზე:

ა) P(1; 0,5); ბ) P(2; 9); გ) P(-2; 36);

დ) P(-2; 0,16); ე) P(-3; 2); ვ) P(2; $\frac{49}{64}$).

9 გამოიყენეთ გრაფიკი და x რიცხვი შეადარეთ 0–სა და 1–ს, თუ:

ა) $0,13^x>1$; ბ) $2,15^x<1$; გ) $0,8<0,77^x<1$;

დ) $5,19^x=2$; ე) $0,12^x=8$; ვ) $1<4,7^x<4$.

10. შეადარეთ a რიცხვი 1–ს:

ა) $a^{2,5}<a^{3,7}$; ბ) $a^{4,1}<a^{2,5}$; გ) $a^{-0,1}<a^{-0,3}$; დ) $a^{0,6}<a^{a(6)}$.

11. შეადარეთ a^x–ის მნიშვნელობა 1–ს, თუ:

ა) a>1, x>0; ბ) a>1, x<0; გ) $a\in(0,1)$, x>0; დ) $a\in(0,1)$, x<0.

12. $y=3^x$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=3^{x-1}$; $y=3^{x+2}$; $y=2\cdot3^x$; $y=3^x-1$; $y=3^{|x|}$;

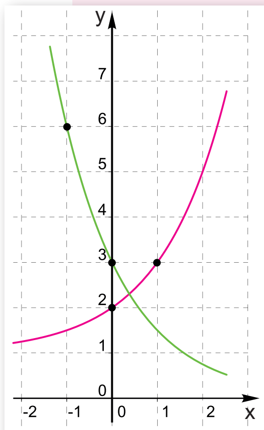
ბ) $y=3^{x+1}$; $y=3^{x-3}$; $y=0,5\cdot3^x$; $y=3^{x-2}+2$.

13. როგორ მიიღება $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკისგან:

ა) $y=2^{x-3}$; ბ) $y=2^{x+1}$.

განიხილეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა.

14 დაწერეთ ნახაზზე მოცემულ მაჩვენებლიან ფუნქციათა გრაფიკების შესაბამისი განტოლება.



15 როგორ შეიცვლება $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობა, თუ x–ს:

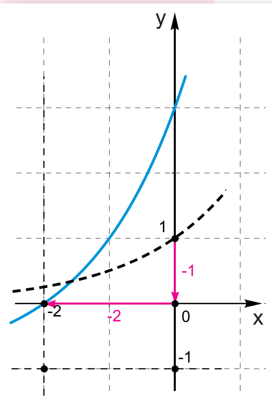
ა) გავადიდებთ 3–ით, ბ) შევამცირებთ 5–ით,

გ) გავადიდებთ 2–ჯერ, დ) შევამცირებთ 2–ჯერ.

16 a–ს რა მნიშვნელობებისთვის იქნება ფუნქცია ზრდადი?
ა) $y=(a-2)^x$; ბ) $y=(2a+1)^x$; გ) $y=\left(\frac{a}{5}\right)^x$; დ) $y=\left(\frac{1-a}{a}\right)^x$.

17 a–ს რა მნიშვნელობებისთვის იქნება ფუნქცია კლებადი?
ა) $y=(a+1)^x$; ბ) $y=(3-a)^x$; გ) $y=(1,5a)^x$; დ) $y=\left(\frac{a}{a+1}\right)^x$.

სწრაფი აგება:
$y=2^{x+2}-1$. დამხმარე ღერძებია $x=-2$ და $y=-1$. ახალ საკოორდინატო ისტემაში ვაგებთ $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკს.
$0\to 0-2=-2$ $1\to 1-1=0$
$(0;1)\to(-2;0)$.



18 იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:
ა) $y=5^{-x}$; ბ) $y=2^x-7$; გ) $y=(0,7)^x+3$;
დ) $y=(0,3)^{x-1}$; ე) $y=2\cdot 3^x-2$; ვ) $y=0,7\cdot 2^{x+1}+1$.

19 გრაფიკების საშუალებით დაადგინეთ, რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებას:
ა) $2^x=x+1$; ბ) $(0,6)^x=x+2$; გ) $3^x=-1$.

20 მიეცით ფუნქციას $y=ba^{x-1}$ სახე:
ა) $y=5^x$; ბ) $y=2\cdot 3^{x+1}$; გ) $y=\frac{1}{2^{x-2}}$; დ) $y=3^{x+5}$;

21 $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით ამოხსენით განტოლება:
ა) $2^x=2,5$; ბ) $2^x=5$; გ) $2^x=4,8$; დ) $2^x=6,5$.

22 გრაფიკის საშუალებით ამოხსენით:
ა) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$; გ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$;
დ) $2^x>1$; ე) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<2$; ვ) $2^x>2$.

დროის T შუალედს, რომლის განმავლობაშიც რადიაქტიური ნივთიერების მასა ორჯერ მცირდება ამ ნივთიერების „ნახევარდაშლის პერიოდს“ უწოდებენ.

23 გამოთვალეთ a და b, თუ $y=ba^x$ ფუნქციის გრაფიკი გადის
ა) A(-1;24) და B(1,5;0,75); ბ) A(0;1,5) და B(1;1,8);
გ) A(0;5) და B(1;1); დ) A(5;24) და B(8;3);
ე) A(3;5) და B(5;3); ვ) A(4;8) და B(7;64);

24 ა) ცეზიუმ 137–ის ნახევრად დაშლის პერიოდი 33 წელია. რამდენი პროცენტით მცირდება ცეზიუმ 137–ის მასა საშუალოდ ყოველწლიურად?
ბ) დაკვირვების დასაწყისში იყო 250 მგ ცეზიუმ 137. დაწერეთ მაჩვენებლიანი ფუნქცია f: წლების რაოდენობა – ცეზიუმის მასა.

მედიცინაში რადიოაქტიური იოდი 131 ძირითადად გამოიყენება ფარისებრი ჯირკვლის დიაგნოსტირებისას და მკურნალობისას. გარკვეული დროის განმავლობაში იოდის ატომები ქსენონის ატომებად გარდაიქმნება და ახდენს რადიოაქტიურ გამოსხივებას. ამას რადიოაქტიურ დაშლას უწოდებენ. დროის მონაკვეთს, რომელშიც იოდის ატომების ნახევარი იშლება, ნახევრად-დაშლის პერიოდი ეწოდება.

25 იოდ 131-ის ნახევრად დაშლის პერიოდი დაახლოებით 8 დღეა. სამედიცინო დაკვირვების დაწყებისას იყო 2 მგ იოდი 131.
ა) „f: დღეების რიცხვი → მასა“ ფუნქციას აქვს $x\to b\cdot a^x$ სახე.
იპოვეთ a და b რიცხვები.
ბ) იოდი 131-ის რა პროცენტი იშლება ერთ დღეში?

26 სტრონციუმ 90-ის ნახევრად დაშლის პერიოდი 28 წელია. დაკვირვების დასაწყისში იყო 100 მგ სტრონციუმი.
ა) დაწერეთ ფუნქცია f: წლების რაოდენობა → მასა.
ბ) რამდენი მგ სტრონციუმი იქნება 50 წლის შემდეგ?

27 ქვეყნის მოსახლეობა წელიწადში 2%-ით იზრდება. დაკვირვების დასაწყისში მოსახლეობა 40000 იყო. დაწერეთ ფუნქცია:
წლები → მოსახლეობის რაოდენობა.
იპოვეთ მოსახლეობის რაოდენობა ამ ქვეყანაში 5 წლის შემდეგ.

გ

28 გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

ა) $x\sqrt{xy}^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{6}}$, თუ $x=2\sqrt{2}$; ბ) $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, თუ $x=2$; $y=8$.

29 განსაზღვრეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ :

$$\frac{9^{-\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{4}{3}}}{0,2^{-1}\cdot 0,6\cdot x}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{27^{-1}}}.$$

30 ჩამოთვლილი რიცხვებიდან რომელია მთელი:

ა) $(\sqrt{5}+2)^0$; ბ) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; გ) $(\sqrt{5}+2)^0$; დ) $(\sqrt{8})^{\frac{4}{3}}$.

პროექტი დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

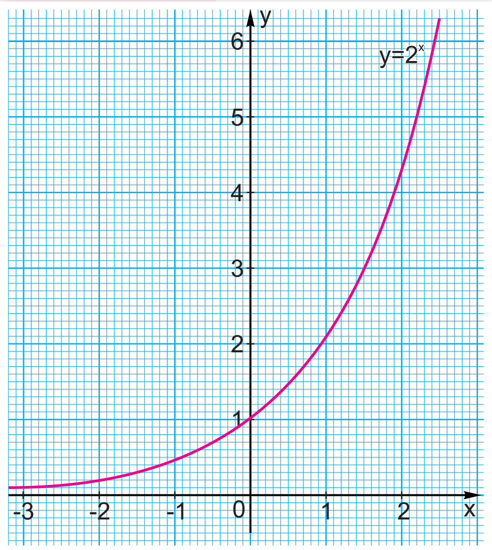
Google-ს საძიებელში იპოვეთ Geogebra 4 და დააინსტალირეთ თქვენს კომპიუტერში. გახსენით Geogebra 4-ის სამუშაო ფურცელი. მოამზადეთ ფონის, ღერძების, ბადის ფერი. დააწკაპეთ „სრიალზე" და მიეცით a პარამეტრს მნიშვნელობები 0,4-დან 2-ის ჩათვლით ბიჯით 0,4. კურსორით დააფიქსირეთ a=2 ან a=0,4 („ a=2 ").

ბრძანებათა ველში მარჯვენა კუთხეში დააწკაპეთ ▶ ლოგოზე.

გაიხსნება ფანჯარა. დააწკაპეთ „Mathematical Functions"და შემდეგ „exp(x)"-ზე ორჯერ დაწკაპებით (მარცხენა ღილაკზე) ააგეთ y=exp(x) ფუნქციის გრაფიკი. მარცხნივ ალგებრის ფანჯარაში „f(x)=e^x" [1] (იგივეა f(x)=exp(x)) ორჯერ (მარცხენა ღილაკზე) დაწკაპებით (გაჩნდება f(x)=e^x) „e" შეცვალეთ „a" პარამეტრზე და „Enter"-ზე დაწკაპებით აიგება y=2^x ფუნქციის გრაფიკი. დააწკაპეთ ჩანაწერ „f(x)=2^x"-ს (მარჯვენა ღილაკი), შემდეგ „თვისებებს" და მიეცით ფერი, ასევე დააწკაპეთ „აჩვენეთ კვალი". კურსორით მიეცით a-ს მომდევნო მნიშვნელობა და გაიმეორეთ იგივე და ა.შ. ამობეჭდეთ, წარმოადგინეთ გაკვეთილზე.
დააკვირდით, ფუნქციის რა თვისებები ჩანს მიღებული გრაფიკებით?

[1] e რიცხვს ნეპერის რიცხვს უწოდებენ e≈2,7 ამ მუდმივაზე ჩვენ მოგვიანებით ვისაუბრებთ.

3 ლოგარითმი

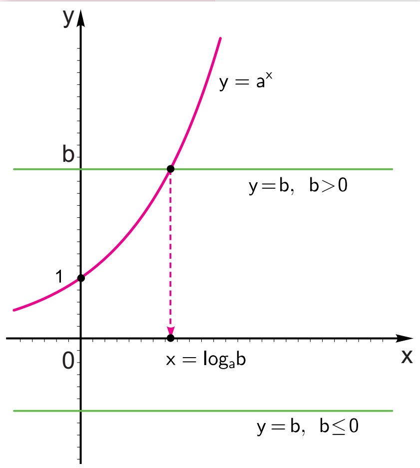


1. ჩანგ–ჩიუ–ჩიენის 2000 წლის წინანდელი ჩინური არითმეტიკის სახელმძღვანელოში (არითმეტიკის ცხრა წიგნი) ნახსენებია ერთი მცენარე, რომლის სიმაღლე ყოველდღიურად ორმაგდება. დაკვირვების დაწყებისას მისი სიმაღლე 1 ფუტი იყო. რამდენ დღეში მიაღწევს მისი სიმაღლე 8 ფუტს? 2,8 ფუტს? გამოიყენეთ ნახაზზე მოცემული გრაფიკი.

მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

ამოხსნა:

ა) $2^x=8$; ბ) $2^x=2,8$; (1)



ნახ. 1

მათ მაჩვენებლიანი განტოლებები ეწოდებათ. $2^x=8$ განტოლებას, განსხვავებით (1) განტოლებისგან, ადვილად ამოვხსნით: $(2^x=2^3) \Leftrightarrow (x=3)$.

გავეცნოთ $a^x=b$ განტოლების ამოხსნას, სადაც $a\in R^+$ $(a^x\neq 0)$ და x უცნობია.

1. თუ $b\leq 0$, მაშინ განტოლებას ამონახსენი არა აქვს $(a^x>0)$.
2. თუ $b>0$, მაშინ განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსენი (ნახ. 1).

$a^x=b$, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$ განტოლების ამონახსენს ეწოდება b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით და აღინიშნება ასე:

$$\log_a b.$$

b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b და აღინიშნება $\log_a b$ სიმბოლოთი.

$$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b,\ a,b>0;\ a\neq 1.$$

მაშასადამე, $2^x=2,8$ განტოლების ამონახსენია $x=\log_2 2,8$.

$$\log_2 8=3, \text{ რადგან } 2^3=8$$

$$\log_3 \frac{1}{27}=-3, \text{ რადგან } 3^{-3}=\frac{1}{27}$$

ლოგარითმის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$a^{\log_a b}=b \quad \text{(ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა)}$$

$$\log_a a^x=x.$$

კეპლერი

ლოგარითმის დღევანდელი აღნიშვნა კეპლერის მოგონილია. იგი ნეპერთან ერთად ლოგარითმების თეორიის ერთ–ერთი შემოქმედი იყო.

იმის მიხედვით, თუ ლოგარითმის ფუძედ რა რიცხვია აღებული, ლოგარითმებს უწოდებენ, როცა:

$a=2$ – ორობითს

$a=3$ – სამობითს

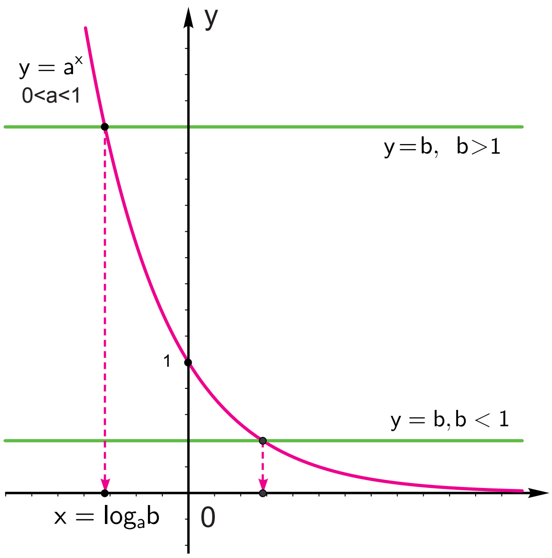
$a=10$ – ათობითს

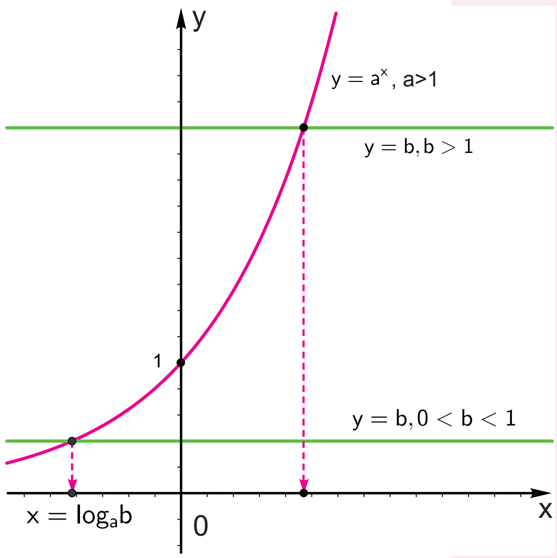
ათობითმა ლოგარითმებმა ფართო გამოყენება პოვა გამოთვლით პრაქტიკაში. მის აღსანიშნავად log-ის ნაცვლად წერენ lg-ს.

ე.ი. $\boxed{\log_{10} b \equiv \lg b}$ [1]

ლოგარითმის განმარტებიდან ადვილად დავასკვნით, რომ

1. $\log_a b$ გამოსახულებას აზრი აქვს, როცა $b>0$;
2. $\log_a 1=0$, რადგან $a^0=1$;
3. $\log_a a=1$, რადგან $a^1=a$;
4. თუ $0<a<1$, მაშინ $\begin{cases} 0<b<1, \log_a b>0 \\ b>1, \log_a b<0 \end{cases}$
5. თუ $a>1$, მაშინ $\begin{cases} b>1, \log_a b>0 \\ 0<b<1, \log_a b<0 \end{cases}$





მაგალითი 1.

გამოთვალეთ: ა) $\log_5 \sqrt{125}$; ბ) $\log_3 1$; გ) $\lg 10\,000\,000$.

ამოხსნა:

$\log_a x=b$, $x=a^b$.

ა) $\log_5 \sqrt{125}=\frac{3}{2}$; რადგან $5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{125}$ ან $\log_5 \sqrt{125}=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$;

ბ) $\log_3 1=0$, რადგან $3^0=1$ ან $\log_3 1=\log_3 3^0=0$;

გ) $\lg 10\,000\,000=7$, რადგან $10^7=10\,000\,000$ ან $\lg 10\,000\,000=\lg 10^7=7$.

[1] წიგნის ბოლოში მოცემულია ათობითი ლოგარითმების ცხრილი. იქვე იხილეთ გამოყენების წესები.

სავარჯიშოები:

1 ჩაწერეთ $\log_a b=x$ სახით:

ა) $3^4=81$; ბ) $7^2=49$; გ) $3^{-1}=\frac{1}{3}$; დ) $4^0=1$;

ე) $8^1=8$; ვ) $8^{\frac{2}{3}}=4$; ზ) $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$; თ) $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$.

2 გამოთვალეთ:

ა) $\log_2 4$; ბ) $\log_2 16$; გ) $\log_3 27$; დ) $\log_3 243$; ე) $\lg_5 5^3$;

ვ) $\log_5 5$; ზ) $\log_7 1$; თ) $\lg 1000$; ი) $\lg 10^7$; კ) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$;

ლ) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$; მ) $\log_{0,5} \sqrt{8}$; ნ) $\log_{0,1} 10^2$; ო) $\log_{0,04} 625$; პ) $\lg\sqrt{10}$.

3 იპოვეთ a, თუ:

ა) $\log_a 16=2$; ბ) $\log_a 81=4$; გ) $\log_a 27=-3$; დ) $\log_a \sqrt{343}=3$;

ე) $\log_a 3=2$; ვ) $\log_a 5=3$; ზ) $\log_a \sqrt{5}=2$; თ) $\log_a \sqrt[4]{7}=3$.

4 იპოვეთ b, თუ

ა) $\log_2 b=5$; ბ) $\log_5 b=4$; გ) $\log_{25} b=1,5$; დ) $\lg b=-2$.

ე) $\log_{\sqrt{2}} b=3$; ვ) $\log_{\sqrt{7}} b=4$; ზ) $\log_{\sqrt[3]{12}} b=6$; თ) $\log_{\sqrt[7]{3}} b=14$.

5 გამოთვალეთ:

ა) $5+3^{\log_3 4}$; ბ) $5^{1+\log_5 3}-2^{\log_2 4}-1$;

გ) $\left(8^{\frac{1}{3}\log_2\sqrt{5}}-1\right)\left(9^{\log_9 1}+4^{\lg_4\sqrt{5}}\right)$; დ) $100^{\frac{1}{2}\lg\sqrt[4]{4}}+\sqrt{10^{4+2\lg 25}}$.

6 კალკულატორის საშუალებით იპოვეთ მიახლოებითი მნიშვნელობა:

ა) $\lg 2$; ბ) $\lg 5$; გ) $\lg 50$; დ) $\lg 500$; ე) $\lg 0,005$;

ვ) $\lg 200$; ზ) $\lg 0,5$; თ) $\lg 50$; ი) $\lg 1500$; კ) $\lg 0,2$.

7 ამოხსენით განტოლება:

ა) $2^x=16$; ბ) $5^x=\frac{1}{25}$; გ) $2^x=-0,25$; დ) $0,5^x=0$;

ე) $3^x=2$; ვ) $2^x=32$; ზ) $7^x=343$; თ) $5^x=12$.

8 დაწერეთ x-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც გამოსახულებას აზრი აქვს:

ა) $\log_3 \frac{x-5}{2}$; ბ) $\log_2 (x^2-3x+2)$; გ) $\log_a (-x^2-5)$;

დ) $\log_2 (x^2+5)$; ე) $\log_5 (5x-7)$; ვ) $\log_2 (x-2)(x+4)$;

ზ) $\log_8 \frac{x-1}{x+2}$; თ) $\log_4 (x^2-x)$; ი) $\lg(2-x)(x+8)$

9 შეადარეთ 0-ს შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\log_{\frac{1}{3}} 2$; ბ) $\log_5 4$; გ) $\log_3 100$; დ) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$;

ე) $\log_5 \frac{4}{5}$; ვ) $\log_{m^2+2} (a^2+1)$; ზ) $\log_{\frac{1}{a^2+1}} (a^2+2)$; თ) $\log_4 \frac{3}{a^2+5}$.

10 იპოვეთ a-ს მნიშვნელობები, რომლისთვისაც გამოსახულება დადებითია:

ა) $\log_2(4+a)$;   ბ) $\log_3\dfrac{5+2a}{3}$;

გ) $\log_{\frac{1}{3}}(a-1)$;   დ) $\log_{\frac{2}{7}}(a-7)$.

11 იპოვეთ ნატურალური k, თუ: $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \ldots 2^{2k} = 0{,}25^{-28}$.

12 იპოვეთ ორი რიცხვი, თუ მათი საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული შესაბამისად უდრის 0,615 და 0,6.

13 იპოვეთ a, რომლისთვისაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეხება აბსცისათა ღერძს.
ა) $y=x^2+ax+25$;   ბ) $y=x^2+ax+4$.

14* საკოორდინატო სისტემაში დაშტრიხეთ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე: ა) $x^2-x<y-xy$;   ბ) $(x+2)(y-3)>0$.

15 საკოორდინატო სისტემაში დაშტრიხეთ უტოლობათა სისტემის ამონახსნები. იპოვეთ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი.

ა) $\begin{cases} y < x \\ y < 8 - x \\ y < 3 \\ y > 0 \end{cases}$;   ბ) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

ეს საინტერესოა

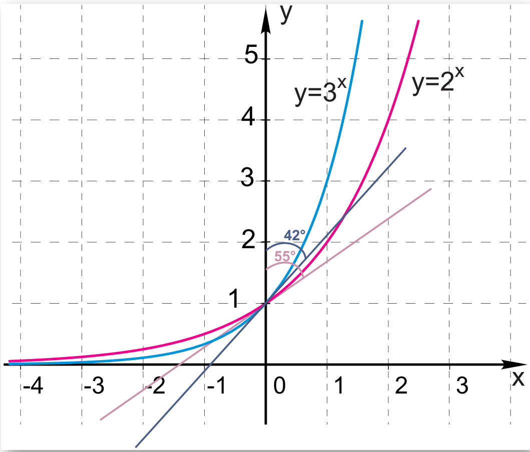
გარდა ათობითი ლოგარითმისა განსხვავებულ-ფუძიანი ლოგარითმია აგრეთვე e-ფუძიანი ლოგარითმი — ნატურალური ლოგარითმი და აღინიშნება ასე: lnx.

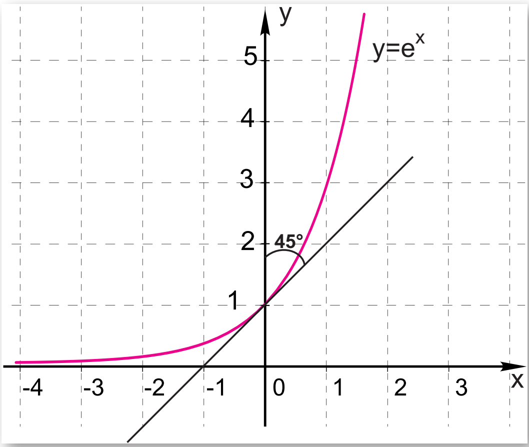
e რიცხვს ნეპერის (ზოგჯერ ეილერის) რიცხვი ეწოდება. e ირაციონალური რიცხვია.

e=2,71828182845904523536...

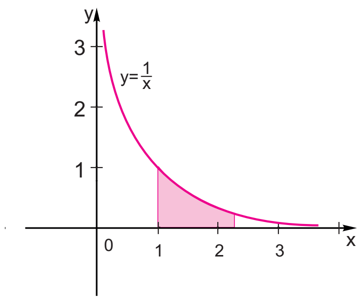
ჯონ ნეპერი
შოტლანდიელი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, ასტრონომი, ასტროლოგი.

e მუდმივაზე პირველი მინიშნება ჯონ ნეპერის ნაშრომში (ლოგარითმების შესახებ) გვხვდება. თუმცა ნაშრომში მუდმივა მიცემული არ იყო და შეიცავდა მხოლოდ ამ რიცხვის მეშვეობით გამოთვლილი ნატურალური ლოგარითმების ცხრილს. მუდმივის აღმოჩენა კი იაკობ ბერნულის მიეწერება. ამ მუდმივის აღსანიშნავად ასო „e" გამოიყენა ლეონარდ ეილერმა.





ჩვენ უკვე ვიცით, რომ რაც უფრო მეტია a რიცხვი, მით უფრო მკვეთრად აღიმართება $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ. $y=a^x$ ფუნქციათა გრაფიკები O_y ღერძს A(0;1) წერტილში სხვადასხვა კუთხით კვეთს. მაგალითად, O_y ღერძსა და $y=2^x$ წირს შორის კუთხე დაახლოებით 55°15'-ის ტოლია, ხოლო $y=3^x$ წირსა და O_y ღერძს შორის კუთხე კი 42°20'-ია. წირი y ღერძს კვეთს 45°-იანი კუთხით.



ფართობი ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია x ღერძით, $y=\frac{1}{x}$ წირით და x=1 და x=e წრფეებით, 1-ის ტოლია.

4 ლოგარითმის თვისებები

გამოთვალეთ: ა) $\log_2 4+\log_2 16$; ბ) $\log_6 3+\log_6 12$.

ალბათ, პირველი გამოსახულება ადვილად გამოთვალეთ, მეორე კი გაგი-ჭირდათ. გავეცნოთ ლოგარითმის სხვა თვისებებსაც.
ნებისმიერი $b>0$, $c>0$, $a>0$, $a\neq1$-თვის სრულდება:

1. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ (1)
2. $\log_a \log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$ (2)
3. $\log_a b^k=k\log_a b$ (3)
4. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. (4)

დავამტკიცოთ 1-ელი და მე–4 თვისება:

1. $\log_a b\equiv p$; $\log_a c\equiv q$, მაშინ $b=a^p$, $c=a^q$.

$\log_a(bc)=\log_a(a^p\cdot a^q)=\log_a a^{p+q}=p+q=\log_a b+\log_a c$. რ.დ.გ

4. $\log_a b=y$, მაშინ $b=a^y$.

$$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{\log_c a^y}{\log_c a}=\frac{y\log_c a}{\log_c a}=y.$$ რ.დ.გ

დაამტკიცეთ მე–2 და მე–3 თვისება.

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, აქედან $\log_c a\cdot\log_a b=\log_c b$

(4) ფორმულიდან კიდევ რამდენიმე ფორმულა მიიღება:

ა) $\log_a b==\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$; ბ) $\log_{a^k} b=\dfrac{\log_a b}{\log_a a^k}=\dfrac{1}{k}\log_a b$;

გ) $\log_{a^k} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^k}=\dfrac{n}{k}\log_a b$.

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი ფორმულები:

$\forall a>0$, $a\neq1$; $\forall b, c\in R^+$-თვის.

1. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$
2. $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$
3. $\log_a b^k=k\log_7 b$
4. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_c a\log_a b=\log_c b$
5. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$
6. $\log_{a^k} b=\dfrac{1}{k}\log_a b$
7. $\log_{a^k} b^n=\dfrac{n}{k}\log_a b$

თუ $b_1, b_2, \ldots, b_n>0$,
$\log_a(b_1b_2\ldots b_n)=$
$=\log_a b_1+\ldots+\lg_a b_n$

1. $\forall b\in R$-თვის
$\log_a b^{2k}=2k\log_a|b|$
2. $\log_a(bc)=\log_a|b|+\log_a|c|$;
3. $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a|b|-\log_a|c|$,
თუ $bc>0$

მაგალითი 1.

აჩვენეთ, რომ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

დამტკიცება:

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\lg_a b}} = c^{\log_b a}$$ რ.დ.გ.

მაგალითი 2.

კალკულატორის საშუალებით გამოთვალეთ:

ა) $\lg(3{,}93\cdot10^{18})$; ბ) $\lg_2 11$.

ამოხსნა:

ა) $\lg(3{,}93\cdot10^{18})=\lg3{,}93+\lg10^{18}=\lg3{,}93+18\approx18{,}59439$;

ბ) $\lg_2 11=\dfrac{\lg 11}{\lg 2}\approx3{,}45943$

მაგალითი 3.

ა) გაამარტივეთ $\lg\sqrt[3]{x^5}$

ბ) ჩაწერეთ ერთი ლოგარითმის სახით: $3\lg x-2\lg(x+1)$.

ამოხსნა:

ა) $\lg\sqrt[3]{x^5}=\lg x^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}\lg x$;

ბ) $3\lg x-2\lg(x+1)=\lg x^3-\lg(x+1)^2=\lg\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

გარდაქმნას, რომლის საშუალებითაც ვპოულობთ გამოსახულების ლოგარითმს, მასში შემავალი რიცხვების ლოგარითმების საშუალებით, **გალოგარითმება** ეწოდება.

მაგალითი 4.

იპოვეთ $\log_a x$, თუ ა) $x = mb^2$; ბ) $x=\sqrt{\dfrac{mn}{k^3}}$, m, n, k>0.

ამოხსნა:

ა) $\log_a x = \log_a(mb^2) = \log_a m + \log_a b^2 = \log_a m + 2\log_a|b|$;

ბ) $\log_a x=\log_a\left(\dfrac{mn}{k^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{mn}{k^3}=\dfrac{1}{2}\left[\log_a(mn)-\log_a k^3\right]=$ m

$=\dfrac{1}{2}(\log_a m+\log_a n-3\log_a k)$.

გამოსახულების ლოგარითმის საშუალებით მოცემული გამოსახულების პოვნას, **პოტენცირება** ეწოდება. პოტენცირება გალოგარითმების შებრუნებული გარდაქმნაა.

მაგალითი 5.

იპოვეთ x, თუ $\log_a x=\log_a b+3\log_a c-1$.

ამოხსნა:

$\log_a b+3\log_a c-1=\log_a b+\log_a c^3-\log_a a=\log_a\dfrac{bc^3}{a}$

მივიღეთ: $\log_a x=\log_a\dfrac{bc^3}{a}$. ე.ი. $x=\dfrac{bc^3}{a}$.

■ გაალოგარითმეთ c ფუძით $b=a^{\log_a b}$ იგივეობა და დაამტკიცეთ მე–4 ფორმულა.

სავარჯიშოები:

1. გაალოგარითმეთ შემდეგი გამოსახულება (ასოებით დადებითი რიცხვებია აღნიშნული):

ა) $x=\dfrac{5a^2b}{c^3}$; ბ) $x=\dfrac{2a^2b^3}{\sqrt{c}}$; გ) $x=\dfrac{5a+1}{2}$; დ) $x=a^2\sqrt{4b}$;

ე) $x=\dfrac{5a^{-1}b^2}{c^{-4}}$; ვ) $x=x=\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt[3]{a}}}$; ზ) $x=x=\sqrt[5]{a^{18}}$; თ) $x=x=\dfrac{m^3}{\sqrt{a^5}}$.

2. იპოვეთ x მისი ლოგარითმის მიხედვით:

ა) $\log x=\frac{3}{4}\log a-\log 3-\log 2$;

ბ) $\log x = 2\log 5 + \log 4 - \log 10$;

გ) $\log x = \log(a-b) + \frac{1}{3}[2\log a + 3\log b]$;

დ) $\log x = \log(a+b) + \log(a^2 - ab + b^2)$;

ე) $\log x = 3\log(a+b)$;

ვ) $\log x = \lg\sqrt{4x} + \lg\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \lg 4$;

ზ) $\log x = \frac{1}{4}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b)$.

3. აჩვენეთ, რომ ა) $\log_2 3$; ბ) $\log_3 5$ არ არის რაციონალური რიცხვი.

4. გამოთვალეთ:

ა) $5^{2\log_5 3}$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}$; გ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_5 3^{-1}}$; დ) $7^{\log_{49}5}$; ე) $\log_{\frac{1}{5}}5$;

ვ) $\log_{\frac{4}{49}}\frac{2}{7}$; ზ) $\log_3\frac{1}{81}$; თ) $\log_8\sqrt{32}$; ი) $\log_{0,04}5$;

კ) $\log_{0,04}6,25$; ლ) $\lg 0,0001 + \log_{2\sqrt{2}}\sqrt{2}$; მ) $\log_2\log_2 4$.

5. გამოთვალეთ:

ა) $\log_6 4 + \lg_6 9$; ბ) $\log_3 4 + \log_3 6,75$; გ) $\log_{12}576 - \log_{12}48$;

დ) $\log_3 54 - \log_3 2$; ე) $\log_{15}5 + \log_{15}3$; ვ) $\log_{14}4 + \log_{14}49$;

ზ) $\log_{\frac{1}{8}}256 + \log_{\frac{1}{8}}32$; თ) $\log_{\frac{1}{15}}\frac{1}{9} + \log_{\frac{1}{15}}\frac{1}{25}$; ი) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right) - \log_{0,2}5 + \log_{64}4$.

6. გამოთვალეთ:

ა) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_8 5}} + 49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$; ბ) $\log_{0,5}(\log_3(\cos 30°) - \log_3(\sin 30°))$;

გ) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-0,5}\cdot 3^{\frac{1}{2}\log_3 6} + 1\right)^{0,5}$; დ) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$;

7. იპოვეთ

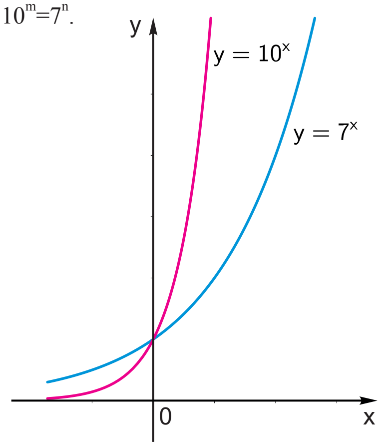
ა) $\log_{49}32$; თუ $\log_2 14 = b$; ბ) $\log_{15}49$; თუ $\log_7 9 = a$ და $\log_7 5 = b$;

გ) $\log_2 3$; თუ $\log_{12}16 = a$; დ) $\lg_{50}27$; თუ $\lg_3 25 = a$ და $\log_3 10 = b$.

მნიშვნელობა არა აქვს გალოგარითმებას რომელი ფუძით მოვახდენთ. ამიტომ ლოგარითმის ფუძე შესაძლებელია არც მივუთითოთ.

$\lg 7 \in I$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო.
ვთქვათ, $\lg 7=\frac{m}{n}$, სადაც $\frac{m}{n}$ — უკვეცი წილადია, მაშინ $7=10^{\frac{m}{n}}$.
$10^m=7^n$.



ე.ი. m = n = 0. მივიღეთ საწინააღმდეგო. ე.ი. $\lg 7 \in I$.

8. გამოთვალეთ: $\log_2 3 \log_3 4 \cdot \log_4 5 ... \log_{14} 15 \log_{15} 16$.

9. გამოთვალეთ ლოგარითმული ცხრილების საშუალებით:

ა) $\lg(3,5 \cdot 10^{45})$; ბ) $\lg(5,8 \cdot 10^{-70})$; გ) $\lg_2 7,8^{120}$; დ) $\log_2(3 \cdot 5^{-20})$.

10 გამოთვალეთ კალკულატორის საშუალებით:

ა) $\log_5 7$; ბ) $\log_2 9$; გ) $\log_{12} 11$; დ) $\log_{0,7} 8$; ე) $\log_4 18$.

11 აჩვენეთ, რომ თუ x ცვლადის მნიშვნელობები a მნიშვნელიან დადებით წევრებიან გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენს, მაშინ $y=\lg x$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა მიმდევრობა არითმეტიკულ პროგრესიას ადგენს. რას უდრის ამ პროგრესიის სხვაობა?

12 იპოვეთ მთელი ნაწილი:

ა) $\log_2 10$; ბ) $\log_2 5$; გ) $\lg 125$; დ) $\lg 5$.

13 რომელ ორ მომდევნო მთელ რიცხვს შორის არის მოთავსებული შემდეგი რიცხვები:

ა) $\log_3 5$; ბ) $\log_2 23$; გ) $\log_4 17$;
დ) $\log_2 \frac{1}{5}$; ე) $\log_{0,5} 30$; ვ) $\log_2 \sqrt{15}$.

14 აჩვენეთ, რომ ირაციონალური რიცხვია:

ა) $\log_2 5$; ბ) $\lg 5$; გ) $\log_3 4$; დ) $\lg 2$.

გ

15 იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=2ax+1$ და $y=(a-6)x^2-2$ ფუნქციათა გრაფიკები არ გადაიკვეთება.

16 იპოვეთ a–ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომ $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$ განტოლების ერთი ფესვი მეორე ფესვის კვადრატის ტოლი იყოს.

ზოგჯერ სასურველია განსხვავებულ ფუძიანი ლოგარითმების შემცველი გამოსახულების გამარტივებისას ყველა ლოგარითმში გადავიდეთ ერთ ფუძეზე.

17* იპოვეთ წრის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია იმ მართკუთხა სამკუთხედზე, რომლის კათეტები წარმოადგენს $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნებს.

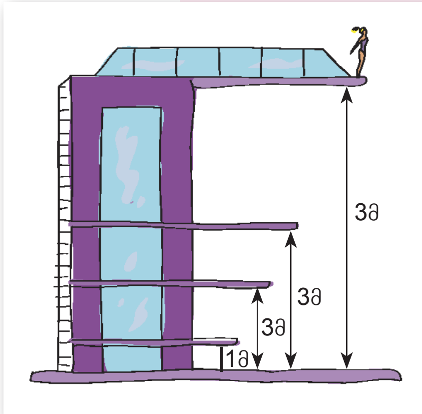
18 კომპანიას შეუძლია ისესხოს 10000 ლარი ორი სახის პროდუქციის საწარმოებლად. პირველი სახის პროდუქცია იძლევა 10% მოგებას, მეორე – 6%–ს. რამდენი ლარი უნდა დაიხარჯოს წარმოებაში I და II სახის პროდუქციის წარმოებაზე, რომ საერთო მოგებამ შეადგინოს 9%?

19 ამოხსენით განტოლება:

$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+...+(x^2+20x+39)=400$

20 იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(x-3a)(x-a-3)<0$ უტოლობა სრულდება ნებისმიერი x-სთვის [1;3] შუალედიდან.

5 შექცეული ფუნქცია



1. $t=0{,}45\sqrt{h}$ ფორმულით შესაძლებელია გამოვთვალოთ სპორტსმენის კოშკურიდან წყალში ხტომის დრო (h იზომება მეტრებში, ხოლო t – წამებში).
ა) ნახაზის მიხედვით გამოთვალეთ ხტომის დრო სიმაღლის თითოეული მნიშვნელობისათვის;
ბ) მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში მონიშნეთ შესაბამისი წერტილები და ააგეთ $t=0{,}45\sqrt{h}$ ფუნქციის გრაფიკი.

განვიხილოთ, X და Y სიმრავლეებს შორის ისეთი შესაბამისობა, როცა X სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი.
როგორც ცნობილია, ასეთი შესაბამისობა არის ფუნქცია (ასახვა).

$$f : x \to y,$$

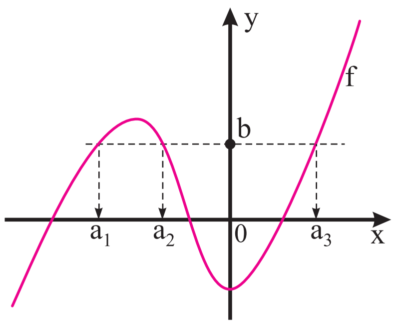
სადაც f-ით აღნიშნულია ის წესი, რომლითაც X სიმრავლის ელემენტს ეთანადება Y სიმრავლის ელემენტი.
ახლა განვიხილოთ f ფუნქციის შექცეული შესაბამისობა. ე.ი. ისეთი შესაბამისობა, როცა Y სიმრავლის y ელემენტს ეთანადება X სიმრავლის ის x ელემენტი, რომლისთვისაც სრულდება $y=f(x)$. f-ის შექცეული შესაბამისობა აღვნიშნოთ f^{-1}-ით.

$$f^{-1} : y \to x, \text{ სადაც } y=f(x).$$

იქნება თუ არა f^{-1} ფუნქცია? ამ შეკითხვას ყოველთვის დადებითი პასუხი არა აქვს. მართლაც, 1-ელ ნახაზზე მოცემულია წირი, რომელიც არის რომელიმე f ფუნქციის გრაფიკი. ნახაზიდან ჩანს, რომ (0;b) წერტილზე გამავალი, აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე f ფუნქციის გრაფიკს გადაკვეთს სამ წერტილში, რომელთა აბსცისებია a_1, a_2, a_3 და რომელთათვისაც სრულდება $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=b$. ამრიგად, შექცეული შესაბამისობისას b რიცხვს ეთანადება a_1, a_2, a_3 რიცხვები.

$b \to a_1$ $\qquad$ $b \to a_2$ $\qquad$ $b \to a_3$

ე.ი. ამ შემთხვევაში f ფუნქციის (ნახ.1) შექცეული შესაბამისობა არ არის ფუნქცია. განხილული მაგალითის საფუძველზე ადვილად მივხვდებით, რომ f^{-1} შესაბამისობა იქნება ფუნქცია მაშინ, როცა x ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე ფუნქციის გრაფიკს არაუმეტეს ერთ წერტილში კვეთს, ე.ი., როცა f ფუნქცია მონოტონურია – ზრდადია ან კლებადი.



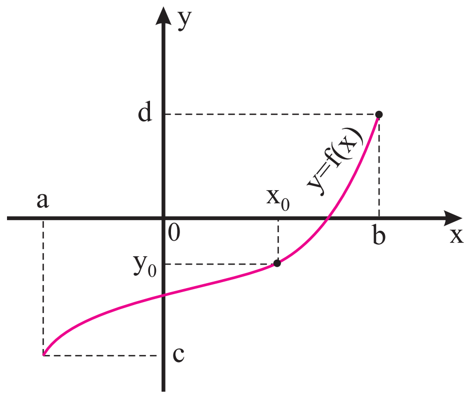
ნახ.1

$f : x$	$\to$	y
1	→	1
–1	→	1
2	→	4
–2	→	4
3	→	9
–3	→	9
. . .		. . .

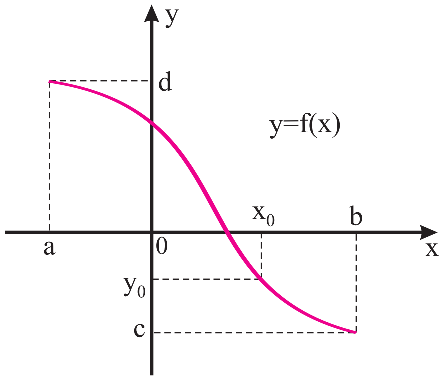
თუ შევცვლით ისრების მიმართულებას, მივიღებთ f-ის შექცეულ შესაბამისობას

1	→	1
1	→	–1
4	→	2
4	→	–2
9	→	3
9	→	–3
. . .		. . .

შექცეული შესაბამისობა ფუნქცია არ არის.



ა)



ბ)

f^{-1} შესაბამისობა იქნება ფუნქცია მაშინ, როცა x ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე f ფუნქციის გრაფიკს არაუმეტეს ერთ წერტილში გადაკვეთს.

ნახაზზე მოცემულია ორი მონოტონური ფუნქციის გრაფიკი: ა) შემთხვევაში ზრდადი, ბ) შემთხვევაში კლებადი, რომელთათვისაც $D(f)=[a;b]$, ხოლო $E(f)=[c,d]$.

ადვილი სანახავია, რომ $\forall y\in[c;d]$ შეესაბამება ერთადერთი $x\in[a;b]$ ისე, რომ $y=f(x)$. ე.ი. f-ის შექცეული შესაბამისობა იქნება ფუნქცია.

ცხადია, $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია (თუკი არსებობს) იქნება $x = f^{-1}(y)$. მაგრამ, რადგან მიღებულია, რომ ფუნქციის არგუმენტი აღვნიშნოთ x ასოთი, ხოლო ფუნქცია – y-ით, ამიტომ $y=f(x)$-ის შექცეული ფუნქცია ჩაიწერება ასე: $y=f^{-1}(x)$.

მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია რომ დავწეროთ, საჭიროა $y=f(x)$ განტოლებიდან გამოვსახოთ x ცვლადი y-ის საშუალებით. შემდეგ კი შევცვალოთ ასოები: x-ის ნაცვლად დავწეროთ y, ხოლო y-ის ნაცვლად – x.

ვიპოვოთ $y=5x-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

$y = 5x-1$ | გამოვსახოთ x

$x=\frac{y+1}{5}$ | შევცვალოთ ასოები

$y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

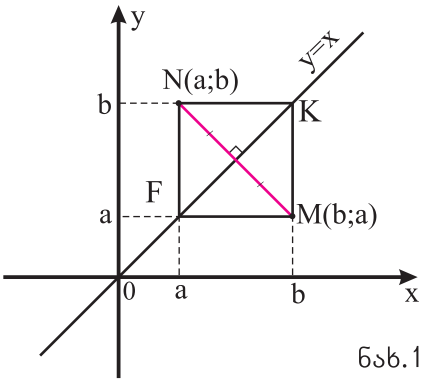
	$f^{-1}: y \rightarrow x=\frac{y}{5}x+\frac{1}{5}$
$f: x \rightarrow 5x-1=y$	$f^{-1}: x \rightarrow \frac{x}{5}x+\frac{1}{5}=y$
$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 9$	$9 \rightarrow 2$

ე.ი. $y=5x-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$.

ადვილი სანახავია, რომ თუ f და f^{-1} ურთიერთშექცეული ფუნქციებია და წერტილი (a;b) მდებარეობს f ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ (b;a) წერტილი იქნება f^{-1} ფუნქციის გრაფიკის წერტილი.

ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია y=x წრფის მიმართ.

ვაჩვენოთ, რომ (a;b) და (b;a) წერტილები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.



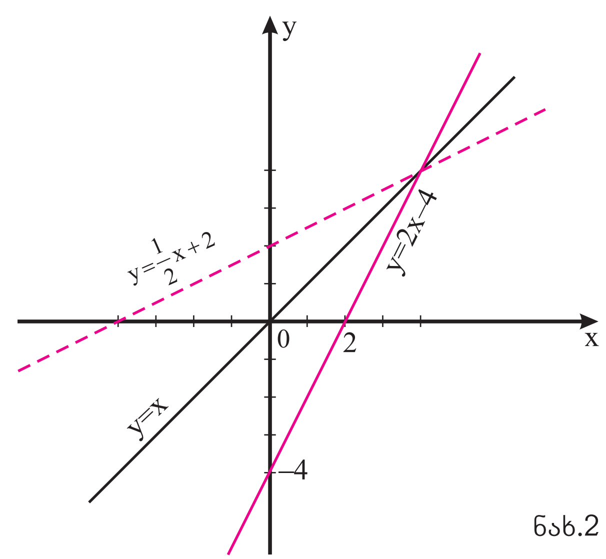
ნახ.1

ვიტყვით, რომ M წერტილი სიმეტრიულია N წერტილისა ℓ ღერძის მიმართ, თუ ℓ წრფე MN მონაკვეთის შუა მართობია.

1-ელ ნახ-ზე FNKM ოთხკუთხედი კვადრატია (რატომ?).

როგორც ცნობილია, კვადრატის დიაგონალები ურთიერთმართობულია და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან. ე.ი. $y=x$ წრფე MN მონაკვეთის შუამართობია. ამიტომ M და N წერტილები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ. ე.ი. თუ წერტილი მდებარეობს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $y=x$ წრფის მიმართ მისი სიმეტრიული წერტილი იქნება მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკის წერტილი.

$y=2x-4$ და $y=\frac{1}{2}x+2$ წრფეები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ.2).



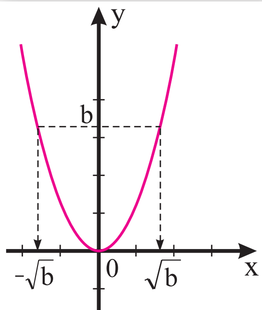
ნახ.2

ადვილი სანახავია:

$$D(f) = E(f^{-1}) \quad \text{და} \quad E(f) = D(f^{-1})$$

თუ f ფუნქცია ზრდადია (კლებადია), მაშინ f^{-1} ფუნქციაც (თუკი არსებობს) იქნება ზრდადი (კლებადი).

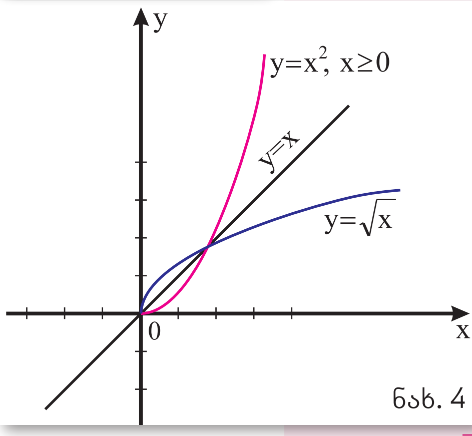
განვიხილოთ $f : x \to x^2$ ფუნქცია (ნახ. 3). ცხადია, შექცეული შესაბამისობა არ იქნება ფუნქცია ($x \to x^2$ ფუნქცია $(-\infty;\infty)$ შუალედში არ არის მონოტონური). მაგრამ თუ განვიხილავთ $y=x^2$, როცა $x\geq 0$ (1) ფუნქციას (რომელიც ზრდადია), მაშინ ცხადია, იარსებებს მისი შექცეული ფუნქციაც.



ნახ.3

$y=x^2$, $x\geq 0$, აქედან $x=\sqrt{y}$.

ე.ი. (1) ფუნქციის შექცეული ფუნქცია იქნება $y=\sqrt{x}$, რომლის გრაფიკიც მე-4 ნახაზზეა მოცემული (ლურჯი წირით). $y=\sqrt{x}$ და $y=x^2$, $x\geq 0$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.



ნახ. 4

$y=\sqrt{x}$ ფუნქციის თვისებები:

1. $D(y)=R_0^x$ (ფუნქციის განსაზღვრის არე).

2. $E(y)=R_0^x$ (ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე).

3. ფუნქცია ზრდადია.

4. უმცირესი მნიშვნელობაა $y(0)=0$.

III
თავი

ალგებრას ზოგჯერ „შვიდი“ მოქმედების არითმეტიკასაც უწოდებენ. ესენია: მიმატება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა, ახარისხება და ახარისხების ორი, შებრუნებული მოქმედება:
1. $a^x=y$ ტოლობიდან a-ს პოვნა x და y ცნობილი რიცხვების საშუალებით ამოფესვაა – $a=\sqrt[x]{y}$
2. $a^x=y$ ტოლობიდან ვიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი x, როცა ცნობილია ხარისხის ფუძე a და ხარისხი y. რაც, როგორც უკვე ვიცით, იგივეა, რაც $a^x=y$ განტოლების ამოხსნა x-ის მიმართ და $x=\log_a y$.

$a^x=y$

$a=y^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ $x=\log_a y$

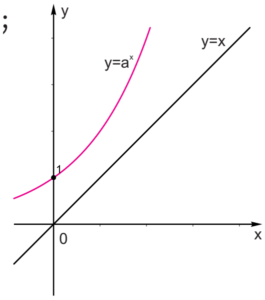
მივიღეთ:

$y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ $\quad$ $y=\log_a x$

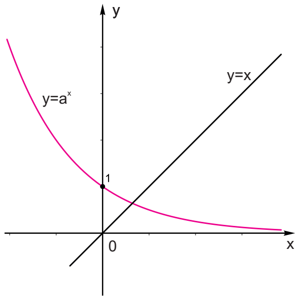
ფუნქცია

? დაწერეთ ა) $y=x^3$; ბ) $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.
განვიხილოთ $f{:}x\to a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია

ა) $a>1$;



ბ) $0<a<1$.



არის თუ არა $f{:}x\to a^x$ ფუნქციის შექცეული შესაბამისობა ფუნქცია? დადებითი პასუხის შემთხვევაში ააგეთ f^{-1} ფუნქციის გრაფიკი.

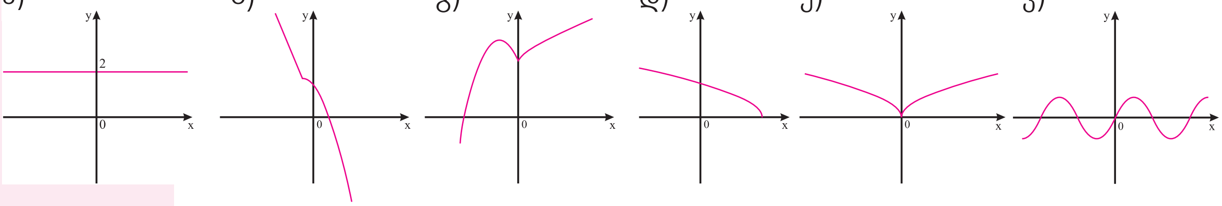
ალბათ, სწორად მიხვდით, $f{:}x\to a^x=y$, $a\in R^+\backslash\{1\}$ აქვს შექცეული ფუნქცია $f^{-1}{:}\ y\to x$, სადაც $y=a^x$ და $x=\log_a y$ ამიტომ $y=a^x$-ის შექცეულ ფუნქციას ექნება სახე: $y=\log_a x$. მას a ფუძიანი **ლოგარითმული ფუნქცია** ეწოდება.

ლოგარითმულ ფუნქციას და მის თვისებებს მომდევნო პარაგრაფში გავეცნობით.

სავარჯიშოები:

1 ნახაზზე მოცემულია f ფუნქციის გრაფიკი. იქნება თუ არა შექცეული შესაბამისობა ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

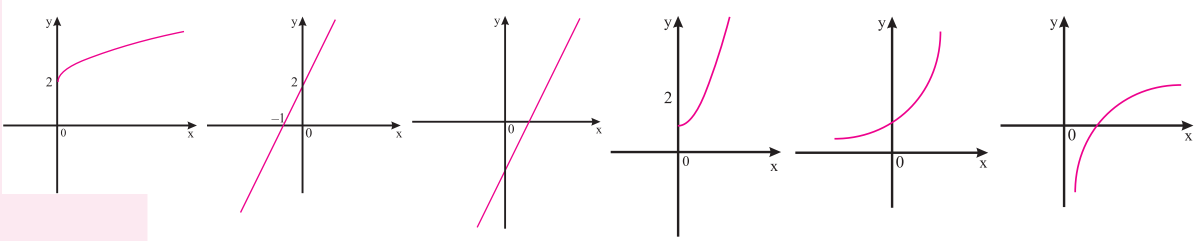
ა) ბ) გ) დ) ე) ვ)



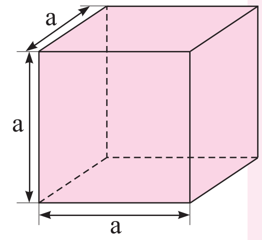
2 დაწერეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ააგეთ მისი გრაფიკი და ჩამოწერეთ თვისებები:
ა) $y=x-4$; ბ) $y=3x-5$; გ) $y=-2x+3$; დ) $y=x^2-2,\ x\geq0$;
ე) $y=3^x$; ვ) $y=10^x$; ზ) $y=0{,}1^x$; თ) $y=0{,}5^x$.

3 გადაიხაზეთ ნახაზზე მოცემული g ფუნქციის გრაფიკი რვეულში და ააგეთ g^{-1} ფუნქციის გრაფიკი ($y=x$ წრფის დახმარებით).

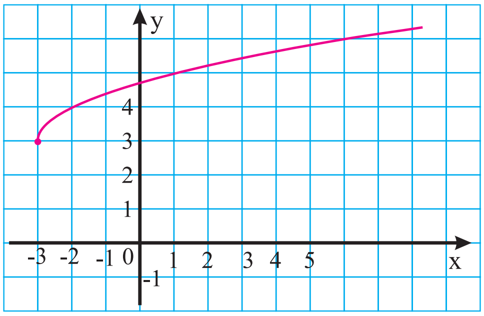
ა) ბ) გ) დ) ე) ვ)

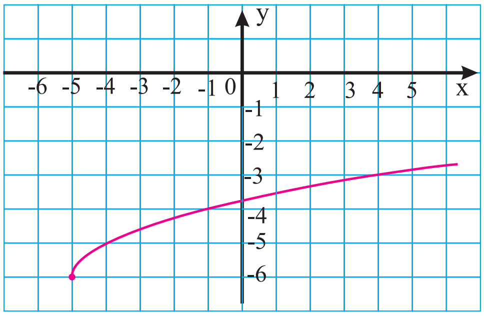


4 დაწერეთ ფუნქცია f: კუბის წიბო → კუბის ზედაპირის ფართობი. იქნება თუ არა f^{-1} შესაბამისობა ფუნქცია? დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაწერეთ f^{-1} ფუნქცია.



5* ნახაზზე მოცემულია ფუნქციათა გრაფიკები, რომელთა შესაბამის განტოლებას აქვს სახე: $y=\sqrt{x-a}+b$. იპოვეთ a და b რიცხვები.





6 ამოხსენით $x^2-yx-6y^2=11$ განტოლება ნატურალურ რიცხვებში.

7* იპოვეთ a–ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^2-4x-a^2+2a+3=0$ განტოლების ამონახსნები ეკუთვნის (2;3) შუალედიდან.

8 იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია $y=a\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი: ა) M(4;12); ბ) N(12;4); გ) K(12;12).

9 იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები (თუკი ასეთი წერტილები არსებობს):

ა) $y=\sqrt{x+2}$, $y=2x-11$; ბ) $y=2\sqrt{3x-1}$, $y=6$;

გ) $y=\sqrt{x^2+3x}$, $y=x+2$; დ) $y=\sqrt{4-x}$, $y=5$.

10 ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი: ა) $y=\sqrt{(x-2)^2}$; ბ) $\left(\sqrt{(x-2)}\right)^2$.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

11*. იპოვეთ $\sqrt{-2x^2-5x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

12*. იპოვეთ ისეთი a და b რიცხვები, რომ $y=\sqrt{ax+8}+b$ ფუნქციისათვის $[-4;\infty)$ იყოს ზრდადობის შუალედი, ხოლო ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა იყოს 1-ის ტოლი.

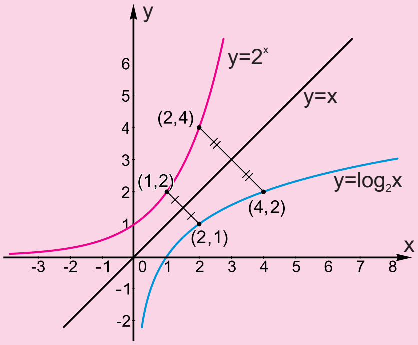
6 ლოგარითმული ფუნქცია

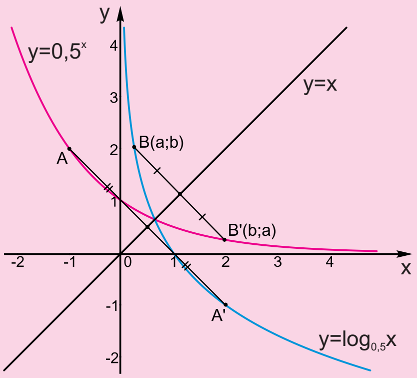
გავეცნოთ ლოგარითმულ ფუნქციას და მის თვისებებს.
ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ მაჩვენებლიანი $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია არის $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქცია.

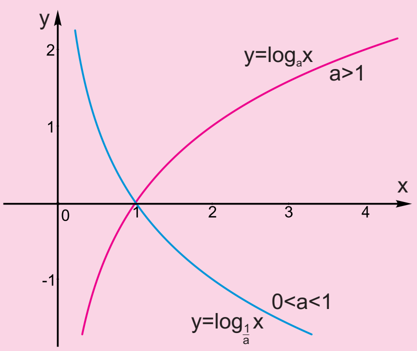
$y=\log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$, $a\neq 1$ ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება.

ჩამოვაყალიბოთ ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები.

თუ $f(x)=\log_a x$, მაშინ $f(xy)=f(x)+f(y)$, $x,y>0$.







$y=\log_a x$ ფუნქცია	$y=a^x$ ფუნქცია
1. $D(y)=R^+$, ე.ი. $x>0$.	1. $E(y)=R^+$, $y>0$
2. $E(y)=R$, ე.ი. $y\in R$	2. $D(y)=R$, $x\in R$.
3. $(1; 0)$ მდებარეობს $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკზე. ე.ი. $\log_a 1=0$.	3. $(0;1)$ მდებარეობს $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე.
4. თუ $a>1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია. თუ, $a\in(0,1)$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია კლებადი.	4. თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია. თუ, $a\in(0,1)$, მაშინ $y=a^x$ კლებადი ფუნქციაა.
5. $y=\log_a x$ და $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ.	5. $y=a^x$ და $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

? რა გარდაქმნით მიიღება $y=\log_a x$ გრაფიკისგან $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ ფუნქციის გრაფიკი? პასუხი დაასაბუთეთ.

გრაფიკის საშუალებით აჩვენეთ, რომ როცა
ა) $a>1$, მაშინ თუ $x>1$, $\log_a x>0$ და თუ $0<x<1$, $\log_a x<0$;
ბ) $0<a<1$, მაშინ თუ $0<x<1$, $\log_a x>0$, და თუ $x>1$, $\log_a x<0$.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. $y=\log_a x$ ფუნქციის ღერძებთან კვეთის წერტილებია __?__.
2. $y=a^x$ და $y=\log_a x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია __?__ მიმართ.
3. $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $a\in$__?__, ხოლო კლებადია, როცა $a\in$__?__.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\log_3(x-1)$; ბ) $y=\log_5(2x+3)$; გ) $y=\log_5(-x)$;

დ) $y=\lg|x|$; ე) $y=\log_{0,3}(x-x^2+12)$; ვ) $y=\lg(x^2-x+5)$.

2. იპოვეთ:

ა) $[\lg 11]$; ბ) $[\log_2 3,1]$; გ) $[\log_2 1,2]$;

დ) $[\log_{0,5} 3]$; ე) $[\lg 118]$; ვ) $[\log_{\frac{1}{7}} 0,2]$.

[x] – x-ის მთელი ნაწილი

3. შეადარეთ ერთმანეთს:

ა) $\log_{2,5} 7$ თუ $\log_{2,5} 9,1$; ბ) $\log_{0,3} 2,5$ თუ $\log_{0,3} 2,8$; გ) $\log_{0,2} 3$ თუ 0;

დ) $\lg\frac{7}{8}$ თუ $\lg\frac{11}{12}$; ე) $\log\frac{4}{5}$ თუ $\log\frac{5}{4}$; ვ) $\log_{1,2} 0,1$ თუ 0.

4. შეადარეთ 1–ს x, თუ:

ა) $\log_2 x = -5$; ბ) $\log_{0,8} x = 7$; გ) $\log_{1,5} x = 0,5$; დ) $\log_{0,1} x = -0,3$.

5. შეადარეთ a რიცხვი 1–ს, თუ:

ა) $\log_a 3 < \log_a 3,5$; ბ) $\log_a 2 > \log_a 5,7$;

გ) $\log_a 3,1 > 0$; დ) $\log_a (x^2+5) < 0$.

6. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=\log_2(x+2)$; ბ) $y=\log_2(x-3)$; გ) $y=\log_{0,1} x - 1$;

დ) $y=\log_{0,5} x + 2$; ე) $y=\log_{0,2}(x-1)$; ვ) $y=\log_{0,2}(x-1)-2$;

ზ) $y=\log_2 |x|$; თ) $y=|\log_2 x|$; ი) $y=|\log|x||$.

7. დაწერეთ მოცემულის შექცეული ფუნქცია:

ა) $y=2^x$; ბ) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; გ) $y=10^x$; დ) $y=\log_3 x$; ე) $y=\lg x$.

8. ააგეთ $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა:

1) a=2; 3; 5; 10.

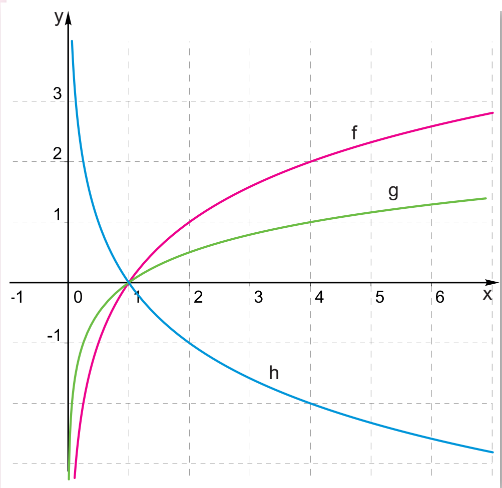
2) $a=\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}$ გამოიტანეთ დასკვნა: როგორ არიან ერთმანეთის მიმართ განლაგებული $y=\log_{a_1} x$ და $y=\log_{a_2} x$ ფუნქციათა გრაფიკები, როცა $0<a_1<a_2<1$ და $a_1>a_2>1$.

3) იგივე 1-ლი და მე-2 დავალება შეასრულეთ კომპიუტერში.

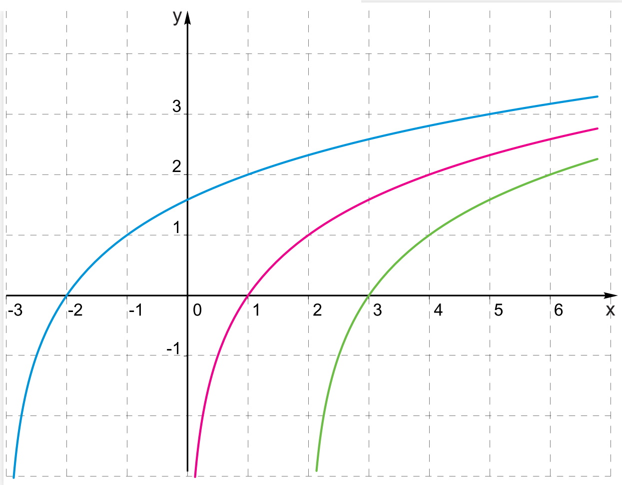
გაითვალისწინეთ, რომ $\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}$ ან ასეც: გახსენით GeoGebra4-ის სამუშაო ფურცელი. ბრძანებათა ველში მარჯვნივ დააწკაპეთ $\boxed{\blacktriangleright}$ პატარა ისარზე. შემდეგ „Mathematical Functions“-ში მოძებნეთ log(b; x) „ლოგარითმი b ფუძით x-ისა“ და ორჯერ დაწკაპებით ჩვეულებრივი წესით ააგეთ y=log(b;x)-ის გრაფიკი. ამ შემთხვევაში შეგიძლიათ გამოიყენოთ რეჟიმი „სრიალიც“. b∈[0,4;2] ბიჯით 0,4.

9. ნახაზზე მოცემულია $x \to \log_a(x+b)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ a და b რიცხვები:

ა)



ბ)



10 დაწერეთ $y=\log_a x$ ფუნქცია თუ მისი გრაფიკი გადის A წერტილზე:
ა) $A(100;2)$; ბ) $A(0{,}5;-1)$; გ) $A(4;\frac{2}{3})$; დ) $A\left(\sqrt{5};\frac{1}{4}\right)$.

11 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:
ა) $y=\lg(x-1)$; ბ) $y=\lg\sqrt{x^2-4}$; გ) $y=\lg(-x+1)$;
დ) $y=\lg(-3x-4)$; ე) $y=\lg\frac{3x+1}{2-5x}$; ვ) $y=\lg(x^2-3x-28)$.

12* დაადგინეთ რა ფორმულით მოიცემა $f(x)$ ფუნქცია მაშინ, როცა $x<0$ და ამოხსენით $f(x)=4$ განტოლება, თუ ცნობილია, რომ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა და როცა $x>0$, $f(x)=\log_3\frac{x}{3}$.

13 შეადარეთ ერთმანეთს m და n რიცხვები:
თუ $m=\log_{\frac{1}{3}}5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$ და $n=- \quad -\frac{2}{3}$.

გ

14 იპოვეთ $A(3;-2)$, $B(5;2)$ და $C(-1;4)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის მედიანების სიგრძეები.

15 მოცემულია $f(x)=3x-1$ და $g(x)=x^2+1$. იპოვეთ
ა) $f(f(x))$; ბ) $f(g(x))$; გ) $g(g(x))$; დ) $g(f(x))$.

16 აუდიტორიაში რამდენიმე სტუდენტი იმყოფებოდა. აღმოჩნდა, რომ მათი საშუალო ასაკი მათი რაოდენობის ტოლი იყო. როდესაც აუდიტორიაში შევიდა 39 წლის პროფესორი, აუდიტორიაში მყოფთა საშუალო ასაკი ისევ მათი რაოდენობის ტოლი აღმოჩნდა. რამდენი სტუდენტია აუდიტორიაში?

7 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები

I. მაჩვენებლიანი განტოლება

1. დაკვირვების დასაწყისში 12 მგ რადიუმ 224 იყო. ერთი დღის შემდეგ 17% დაიშალა.

ა) რამდენი მგ რადიუმი იქნება ერთი დღის, 2 დღის, 3 დღის შემდეგ? (დაშლის სიჩქარე მუდმივია).

ბ) რამდენი დღის შემდეგ დარჩება 1მგ რადიუმ 224? შეადგინეთ განტოლება და ამოხსენით.

2. ბიზნესმენის ქონება, რაც შეადგენს A$, ყოველწლიურად 3,5%–ით იზრდება. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება მისი ქონება? შეადგინეთ განტოლება და ამოხსენით.

მარია კიური

(1867-1934 წწ) იყო ცნობილი პოლონელი ფიზიკოსი, ქიმიკოსი. იგი იყო პირველი, რომელიც ორჯერ დაჯილდოვდა ნობელის პრემიით ფიზიკასა და ქიმიაში. ის იყო პირველი ქალი პროფესორი პარიზის უნივერსიტეტში. მარია კიური იკვლევდა რადიოაქტიურობას. მან ქმართან ერთად აღმოაჩინა ახალი ელემენტი „პოლონიუმი“ და „რადიუმი“.

$a^x=b$, $a>0$, $a\neq1$ სახის განტოლებას მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება.

$2^x = 5$, $3^{-x} = 2$ — მაჩვენებლიანი განტოლებებია.

გავეცნოთ მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნას:

მაგალითი 1.

ამოხსენით განტოლება:

ა) $2^{5x+1}=128$; ბ) $3^{x-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4^{x-1}}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}$; გ) $3^x+3^{x+1}=5^x+3\cdot5^{x+2}$;

დ) $2^x-12\cdot2^{-x}-1=0$; ე) $2^{2x}+5\cdot6^x+6\cdot3^{2x}=0$.

თუ $a>0$, $a\neq1$,

$$\begin{cases}a^x=b\\ b>0\end{cases}\Leftrightarrow(x=\log_a b)$$

$$\begin{cases}a^x=b\\ b\leq0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

ამოხსნა:

ა) $(2^{5x+1}=128)\Leftrightarrow(2^{5x+1}=2^7)\Leftrightarrow(5x+1=7)\Leftrightarrow(x=1,2)$.

ბ) $$\left(3^{x-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=3^{x-1}\cdot\frac{4^{x-1}}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3^{x-1}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{3x-4}{4}}}=\frac{2^{2(x-1)}}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3^{\frac{x-2}{4}}=2^{2(x-2)}\right)\Leftrightarrow\left((3^{\frac{1}{4}})^{x-2}=(2^2)^{(x-2)}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^2}\right)^{x-2}=1\right)\Leftrightarrow(x-2=0)\Leftrightarrow(x=2).$$

გ) $(3^x+3^{x+1}=5^x+3\cdot5^{x+2})\Leftrightarrow(3^x(1+3)=5^x(1+3\cdot5^2))\Leftrightarrow(3^x\cdot4=5^x\cdot76)\Leftrightarrow$
$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x=19\right)\Leftrightarrow(x=\log_{0,6}19)$

დ) $2^x=y$, მივიღებთ: $\left(y-\frac{12}{y}-1=0\right)\Leftrightarrow(y^2-y-12=0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\\ y=-3\end{array}\right.$

ე.ი. $\left[\begin{array}{l}2^x=4\\ 2^x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow(x=2)$.

ე) $(2^{2x}+5\cdot6^x+6\cdot3^{2x}=0\mid :3^{2x}) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+6=0\right)$, =

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=y$, მივიღებთ:

$(y^2+5y+6=0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-3 \end{array}\right.$. ე.ი. $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=-2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing$

$ax^2+bxy+cy^2=0$ სახის განტოლებას **ერთგვაროვანი განტოლება** ეწოდება.

მაგალითი 2.

ამოხსენით განტოლება: $3\cdot2^x=5^x$

ამოხსნა:

$(3\cdot2^x=5^x) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=3\right) \Leftrightarrow \left(x=\log_{\frac{5}{2}}3\right) \Leftrightarrow x=\frac{\lg 3}{\lg 5-\lg 2}$

ათობითი ლოგარითმის ცხრილების გამოყენებით მივიღებთ: $x\approx1,199$.

სავარჯიშოები:

1 საწყისი კაპიტალი 7000$ იყო, რომელიც ყოველწლიურად იმატებდა 5,5%–ით. რამდენი წლის შემდეგ გაიზრდება საწყისი კაპიტალი 12000$–ით?

2 წყალმცენარის სიმაღლე ყოველკვირეულად ორმაგდება. დაკვირვების დაწყებისას მისი სიმაღლე 1,2 მ იყო. წყლის სიღრმე კი ამ ადგილას 38,4 მ–ია. რამდენი კვირის განმავლობაში მიაღწევს წყალმცენარე წყლის ზედაპირს?

3 სუსტი რენტგენის გამოსხივების ინტენსივობა ალუმინის 1 მმ–იან ფირფიტაში გავლისას იკლებს 75%–ით. რამდენი ასეთი ფირფიტაა საჭირო იმისათვის, რომ გაატაროს გამოსხივების 1%?

რთული პროცენტის ფორმულა:

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$$

a – ანაბარი
x – პროცენტი
n – წლების რაოდენობა

4 1 ჭიქა ჩაის ტემპერატურა 90°C–ია. ჩაი ყოველ წუთში 10%–ით გრილდება (როცა ჰაერის ტემპერატურა 20°–ია). რამდენ წუთში გახდება ჩაის ტემპერატურა 50°C.

5 გამოთვალეთ ნახევრად დაშლის პერიოდი:

ა) ფოსფორ 32–ისა, თუ ის ყოველდღიურად 4,7%–ით იკლებს.

ბ) კობალტ 58–ისა, თუ ის ყოველდღიურად მოცემულ ატომთა რაოდენობის 1%–ით იშლება.

გ) პოლონიუმ 218–ისა, თუ ის ყოველ წუთში 20%–ით იკლებს.

დ) პლუტონიუმ 239–ის, თუ ის 1000 წელიწადში 2,8%–ით იშლება.

6 ამოხსენით განტოლება:

ა) $2^{3x-4}=2$; ბ) $3^{x+5}=1$; გ) $7^{2x+5}=343$; დ) $5^{2x+1}=5^{3x-7}$;

ე) $5^{7x+0,1}=0,04$; ვ) $a^{x^3-x^2-20x}=1$; ზ) $\sqrt[3]{4^x}=\sqrt{2^{3x+1}}$; თ) $2^{|x|+1}=32^x$;

ი) $3^x=4^{3x}$; კ) $2^x\cdot5^x=0,01\cdot10^{2x+2}$; ლ) $3^{|2x-1|}=9^{x+1}$; მ) $10^{x-1}=5$.

7 ამოხსენით განტოლება (როგორც „მაგალითი 2“–ში):

ა) $2^x=3^{x-1}$; ბ) $5^{2y}=4^{2-y}$; გ) $4^{2x+1}=10^{3x}$; დ) $3\cdot4^{3z}=2^{z-1}$;
ე) $2^x=5$; ვ) $3^x=100$; ზ) $3^{2x}=5^{1-x}$; თ) $4\cdot5^{x-1}=10^{x+1}$.

8 ამოხსენით განტოლება:

ა) $16^x-6\cdot4^x+8=0$; ბ) $25^x+5^x=30$; გ) $9\cdot3^x+9\cdot3^{-x}+3=0$;
დ) $5\cdot5^x+25\cdot5^{-x}-126=0$; ე) $2^{2x+5}-3\cdot2^{x+2}+1=0$; ვ) $3\cdot2^{2x+1}+5\cdot2^x=34$.

9 ა) $3^{x+5}-20\cdot3^{x+2}=63$; ბ) $11^{x+1}-101\cdot11^{x-1}=220$;
გ) $2^{x+1}+3\cdot2^{x-1}-5\cdot2^x+6=0$; დ) $2^x-2^{x+1}+2^{x+2}=8\cdot3^x+3^{x+1}-3^{x+2}$;
ე) $3^{x+2}-3^{x+1}-3^x=5^{x+2}-3\cdot5^{x+1}-7\cdot5^x$; ვ) $7^{3-x}-7^{2-x}=2^{5-x}-2^{3-x}$.

10* ამოხსენით ერთგვაროვანი განტოლება:

ა) $4\cdot3^{2x}-9\cdot2^{2x}=5\cdot6^x$; ბ) $4\cdot2^{2x}-6^x=18\cdot3^{2x}$;
გ) $10^{2x}+25^x=4{,}25\cdot50^x$. დ) $8\cdot9^x-30\cdot6^x+27\cdot4^x=0$;
ე) $5\cdot5^{2x}+2\cdot15^x=3\cdot3^{2x}$; ვ) $6\cdot81^x+6\cdot16^x=13\cdot36^x$.

11 იპოვეთ p პერიმეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $p\cdot2^x+2^{-x}=5$ განტოლებას ექნება ერთადერთი მნიშვნელობა.

ბ

12 ამოხსენით განტოლება:
$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+...+(x+9)(x+10)=1\cdot2+2\cdot3+...+9\cdot10$

13 იპოვეთ k–ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(k-1)x^2+(k+4)x+(k+7)=0$ განტოლებას აქვს ორი ტოლი ფესვი.

14 დაამტკიცეთ, რომ k^3+5k გამოსახულება იყოფა 3–ზე ნებისმიერ $k\in N$–სთვის.

15 სხვადასხვა ციფრებისგან შემდგარი და 45–ის ჯერადი რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება შედგეს 0; 3; 4; 5; 6; 9 ციფრებისგან?

16 k პარამეტრის თითოეული მთელი მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც $x^2+(k-10)x+9=0$ განტოლებას გააჩნია ორი განსხვავებული დადებითი x_1 და x_2 ამონახსნი, შეადგინეს გამოსახულება $x_1^2+x_2^2$. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ გამოსახულებამ?

2. ლოგარითმული განტოლება

განტოლებას, რომელიც ცვლადს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, **ლოგარითმული განტოლება** ეწოდება.

$\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq1$ - უმარტივესი ლოგარითმული განტოლებაა.

$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$

მაგალითი 1.

ამოხსენით განტოლება: ა) $\log_2(x-2)=\log_2(2x+1)$;

ბ) $\lg x+\lg(2x-19)=\lg(3x-20)$; გ) $2\log_3(x-2)=\log_3(x-4)^2$.

ამოხსნა:

ა) $\log_2(x-2)=\log_2(2x+1)$

$x-2=2x+1$

$x=-3$

შემოწმება:

$\log_2(-3-2)=\log_2(2(-3)+1)$.

$x\in\varnothing$.

$\log_a f(x)=\log_a\varphi(x)$ განტოლება ტოლფასია ერთ-ერთი შემდეგი სისტემისა (რომლის ამოხსნაც ადვილია)

$\begin{cases}f(x)=\varphi(x)\\ f(x)>0\end{cases}$ ან $\begin{cases}f(x)=\varphi(x)\\ \varphi(x)>0\end{cases}$

ასეთი ხერხით ამოხსნისას შემოწმება საჭირო არ არის!

$\log_a f(x)$ განსაზღვრულია x-ის იმ მნიშვნელობისთვის, რომლისთვისაც $f(x)>0$

ბ) $\lg x+\lg(2x-19)=\lg(3x-20) \Leftrightarrow \lg(x(2x-19))=\lg(3x-20)$

დავადგინოთ განტოლების განსაზღვრის არე

$\begin{cases}x>0\\ 2x-19>0\\ 3x-20>0\end{cases} \Leftrightarrow x>9,5$

$\Leftrightarrow (2x^2-19x=3x-20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-11x+10=0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=1\end{array}\right.$

$\left(\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=10\\ x=1\end{array}\right.\\ x>9,5\end{cases}\right) \Leftrightarrow x=10$

პასუხი: $x=10$.

გ) $2\log_3(x-2)=\log_3(x-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x-2)=2\log_3|x-4| \Rightarrow$

$\Rightarrow x-2=|x-4|$

თვისება: $\log_a x^{2k}=2k\log_a|x|$

გ.ა. $\left(\begin{cases}x-2>0\\ |x-4|\neq0\end{cases}\right) \Rightarrow \begin{cases}x>2\\ x\neq4\end{cases}$

1. $\left(\begin{cases}x-4\geq0\\ x-2=x-4\end{cases}\right) \Leftrightarrow x\in\varnothing$; 2. $\left(\begin{cases}x-4\leq0\\ x-2=-x+4\end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=3)$.

თუ გავითვალისწინებთ განტოლების განსაზღვრის არეს,

მივიღებთ: $\left(\begin{cases}x=3\\ x>2\\ x\neq4\end{cases}\right) \Leftrightarrow x=3$. პასუხი: 3.

ლოგარითმული განტოლების ამოხსნისას განსაზღვრის არის დადგენა აუცილებელი არ არის, მაგრამ, მაშინ მიღებული ფესვები აუცილებლად უნდა შევამოწმოთ.

მაგალითი 2.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases}3^y\cdot9^x=81\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg3\end{cases}$

ამოხსნა:

$\left(\begin{cases}3^y\cdot9^x=81\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg3\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}3^{y+2x}=3^4\\ \lg(x+y)^2=\lg x+\lg9\end{cases}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=4\\ (x+y)^2=9x\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x+4 \\ (4-x)^2 = 9x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x+4 \\ x^2 - 17x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ y = -2x+4 \end{cases}.$$

1. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$; (1;2);   2. $\begin{cases} x = 16 \\ y = -28 \end{cases}$; (16;–28).

პასუხი: (1; 2); (16; –28).

მაგალითი 3*.

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს $\log_3(9^x + 9a) = x$ განტოლებას ორი განსხვავებული ამონახსენი?

ამოხსნა:

$\log_3(9^x + 9a) = x \Leftrightarrow (3^{2x} + 9a = 3^x) \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x + 9a = 0$

თუ $3^x \equiv y$ მივიღებთ: $\begin{cases} y^2 - y + 9a = 0 \\ y > 0 \end{cases}$ (1)

იმისთვის, რომ (1) სისტემას ჰქონდეს ორი განსხვავებული ამონახსენი, საჭიროა სისტემის პირველ განტოლებას ჰქონდეს ორი განსხვავებული დადებითი ფესვი: $y_1>0$; $y_2>0$ მივიღებთ:

$$\begin{cases} y_1 y_2 > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 - 36a^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{1}{36}\right).$$

სავარჯიშოები:

1 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\log_2 x=1$; ბ) $\log_8 x=0$; გ) $\log_3 x=3$; დ) $\log_2 x=-2$;

ე) $\lg(\log_3 x)=0$; ვ) $\lg(\lg x)=1$; ზ) $\log_2(\log_2(\log_2 x))=0$; თ) $\log_3\log_3\log_3 x=1$.

2 ა) $\log_4(3x-1)=0{,}5$; ბ) $\log_{3\sqrt{3}}(x-7)=2$; გ) $\lg(x^2-7x)=1$;

დ) $\log_{0,3}(x+1)=\log_{0,3}(3x-7)$; ე) $\lg(5x-4)=\lg x^2$; ვ) $\lg\log_2 x=2$.

3 ა) $\lg x+\lg 3=\lg(x+1)$; ბ) $\lg x=2\lg x+\lg(x+1)$;

გ) $\log_2 x+8=\log_2(7x+8)$; დ) $4\lg 2+2\lg(x-3)=\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3$;

ე) $\lg\lg x=\lg\lg 64-\lg\lg 2$; ვ) $\log_4(17-2^x)=\frac{1}{2}(4-x)$;

ზ) $\log_3(81^x+3^{2x})=3\log_{27}90$; თ) $\lg(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}})=0$.

4 ა) $\log_5^2 x = 9$; ბ) $\log_2^2 x = \frac{1}{4}$;

გ) $\lg^2 x - \lg x - 6 = 0$; დ) $\log_2^2 x + 3\log_2 x = 0$;

ე) $5\lg^2(x-1) - 5\lg(x-1) = 0$; ვ) $0{,}1\log_2^2(x-4) - 1{,}3\log_2(x-4) + 3{,}6 = 0$.

$$\log_a^2 x = (\log_a x)^2$$

5* ა) $\lg(x^3+8) - 0{,}5\lg(x^2+4x+4)=\lg 7$; ბ) $\log_2(x^2+4x)^2=2\log_2(10-5x)$;
გ) $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$; დ) $3\log_2 x^2 - \log^2(-x)=5$;
ე) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}$; ვ) $\lg(x(x+9)) + \lg\frac{x+9}{x} = 0$.

6 აჩვენეთ, რომ თუ $y = 2^{x^2}$ და $z = 2^{y^2}$, მაშინ $x = \pm\sqrt{0,5\log_2\log_2 z}$

7 a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს $\log_5(25^x + a) = x$ განტოლებას: ა) ორი განსხვავებული ამონახსენი?
ბ) ერთადერთი (ორი ტოლი) ამონახსენი?

8 ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

ა) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \lg_2 y = 6 \end{cases}$;

გ) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \log_2 x - 2\log_2 x = 3^{y+1} \end{cases}$; დ) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$;

ე) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2,5 \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6 \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ \log_4 x + \lg_2 y = 5 \end{cases}$.

9 იპოვეთ y=f(x) ფუნქციის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები.
ა) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; ბ) $y = \log_3(x+1)$; გ) $y = \log_{0,2}(x+1) - 3$;
დ) $y = |\log_2(x+6)|$; ე) $y = |3 - \log_2(x-2)|$.

10 იპოვეთ ფუნქციათა გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.
ა) $y = \log_2(2^x+3)$ და $y = x+2$;
ბ) $y = \log_3(x+3)$ და $y = \log_3(2x+1)$;
გ) $y = \log_2\frac{x}{x+3}$ და $y = \log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x-4}$.

გ

11 იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია:
ა) $y=\log_2(x^2-8x+16)$; ბ) $y=\log_3(x^2-6x+9)$
ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან კვეთის წერტილები.

12 იპოვეთ p-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(p-3)x^2-2px+5p=0$ განტოლების ორივე ფესვი დადებითია.

13 n-კუთხედის გვერდებისა და დიაგონალების რაოდენობები ტოლია. იპოვეთ n.

14 დაშტრიხეთ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგ უტოლობათა სისტემის ამონახსნები:
ა) $\begin{cases} 3x + 2y + 1 \ge 0 \\ 3x + 2y - 3 \le 0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x + y \le 1 \\ -x - y \le 1 \end{cases}$.

8 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

1. მაჩვენებლიანი უტოლობა

1. სუსტი რენტგენის გამოსხივება ალუმინის 1 მმ-იან ფირფიტაში გავლისას 75%-ით იკლებს. რამდენი ასეთი ფირფიტაა საჭირო იმისათვის, რომ გაატაროს გამოსხივების არაუმეტეს 1%-ისა.

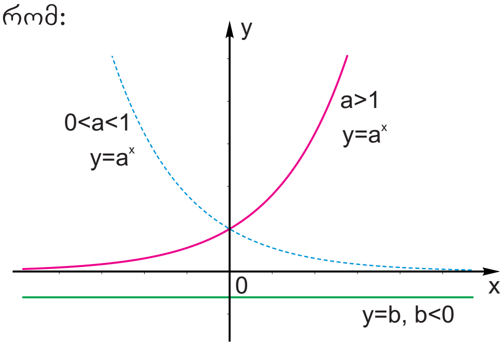
უტოლობას, რომელიც უცნობს ხარისხის მაჩვენებელში შეიცავს, **მაჩვენებლიანი უტოლობა** ეწოდება.

$a^x > b$, $a^x < b$, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$ უმარტივესი მაჩვენებლიანი უტოლობებია. მაჩვენებლიანი უტოლობის ამოხსნისას უნდა გავითვალისწინოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მონოტონურობა (ზრდადია იგი თუ კლებადი).

ნახაზიდან ადვილად დაასკვნით, რომ:

1. $\left.\begin{cases} a^x > b \\ b \leq 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow x \in R.$

2. $\begin{cases} a^x < b \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

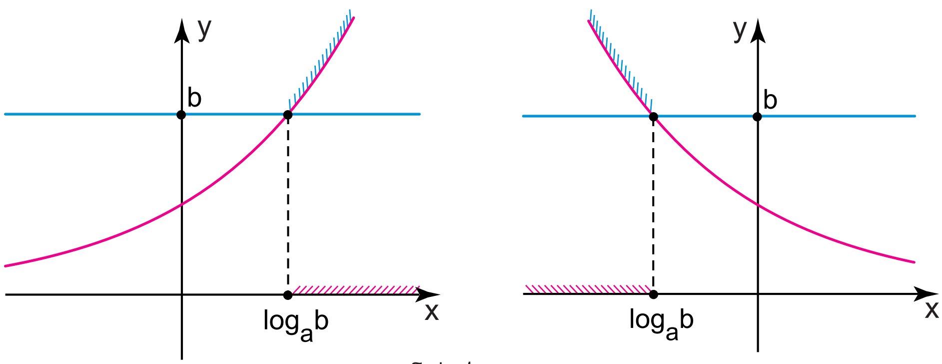


3. ა) $a > 1$;

$\left.\begin{cases} a^x > b \\ b > 0 \\ a > 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow x > \log_a b;$

ბ) $0 < a < 1$.

$\left.\begin{cases} a^x > b \\ b > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x < \log_a b).$



ნახ.1

4. 1-ლი ნახაზიდან ადვილად დაასკვნით:

ა) $\begin{cases} a^x < b \\ b > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < \log_a b;$

ბ) $\begin{cases} a^x < b \\ b > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_a b.$

გასახსენებლად!

თუ y=f(x) ზრდადი ფუნქციაა, მაშინ (f(a)<f(b)) ⇔ (a<b)

თუ y=f(x) ფუნქცია კლებადია, მაშინ (f(a)<f(b)) ⇔ (a>b)

5.

ა) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x).$ | $\begin{cases} y = a^x \\ a > 1 \end{cases}$ ფუნქცია ზრდადია.

ბ) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x).$ | $\begin{cases} y = a^x \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ ფუნქცია კლებადია.

მაგალითი 1.

ამოხსენით უტოლობა: ა) $2^{x^2-1} > 1$; ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; გ) $5^{2x+1} < 5^x + 4$.

ამოხსნა:

ა) $\left(2^{x^2-1} > 1\right) \Leftrightarrow \left(2^{x^2-1} > 2^0\right) \Leftrightarrow$ | რადგან ფუძე 2>1

$\Leftrightarrow (x^2 - 1 > 0) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

ბ) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{32-2x}\right)$ | რადგან $0<\frac{1}{3}<1$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x > 32 - 2x) \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 32 > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -8) \cup (4; \infty).$

გ) $5^x \equiv y$, მივიღებთ: $(5y^2 < y+4) \Leftrightarrow (5y^2 - y - 4) < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < y < 1$

რადგან $y=5^x$ და $y>0$, გვექნება: $(5^x<1) \Leftrightarrow x<0$

$x \in (-\infty; 0)$

სავარჯიშოები:

ამოხსენით უტოლობა:

1 ა) $2^x > \frac{2}{32}$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 1$; გ) $\frac{1}{5^x} \le 125$;

დ) $0,6^{x^2+2x} > 0,6^{7-\frac{x}{4}}$; ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; ვ) $0,125 \cdot 4^{2x-3} < \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

ზ) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+1}\left(\frac{81}{8}\right)^{2x+1} < \frac{4}{9}$; თ) $2^{x-2}5^{2x-4} > 125000$; ი) $(0,2)^{3x-1} > 25$.

2 ა) $3\cdot4^x - 2\cdot4^{x-1} > 160$; ბ) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$; გ) $3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2$;

დ) $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1$; ე) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; ვ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3x-1}{x-1}} > 25$;

ზ) $0,2^{\frac{x^2+2}{x-1}} > 25$; თ) $\frac{1}{2^x+3} > \frac{1}{2^{x+2}-1}$; ი) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$.

3. ა) $2^{x+1}>8$; ბ) $5^{x-3}\geq 7^{3-x}$; გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}>9$;

დ) $(0,2)^{x+1}\leq 5$; ე) $2^{3x-2}\geq 5^{x-\frac{2}{3}}$; ვ) $0,125\cdot 4^{2x-3}>\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

4 ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\geq 3^{2+x}$; ბ) $27^{\frac{1}{x-1}}\leq 3^{-\frac{x}{2}}$; გ) $\left(\frac{15}{14}\right)^{x+7}>\left(\frac{15}{14}\right)^{x^2-3x+2}$;

დ) $5^{x+2}+5^{x+1}\geq 6$; ე) $5^{\frac{x+2}{3-x}}>25$; ვ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}<\frac{1}{4}$.

5 ა) $16^x-2\cdot 12^x\leq 3^{2x+1}$; ბ) $4^x-2\cdot 5^{2x}-10^x>0$;
გ) $3^{x+2}\cdot 2^{1-2x}\leq 20$; დ) $12^{x-2}\leq 3^{3x}\cdot 2^{6x}$.

6 a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს უტოლობას ამონახსნი:

ა) $a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0$; ბ) $a^{x^2-2x}+a^{2x-x^2}\leq 4$.

7 იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც უტოლობის ამონახსნია $x\in R$.

ა) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-(5a-6)x+4a^2}\leq 1$; ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+2(a-3)x+2a^2-33}\geq 1$.

გ

8 საგამოცდო ბილეთები გადანომრილია 1-დან 100-ის ჩათვლით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ამოღებული ბილეთების ნომერი იქნება ლუწი;

ბ) ამოღებული ბილეთის ნომერი იქნება ორნიშნა და ერთნაირციფრებიანი;

გ) ამოღებული ბილეთის ნომრის ციფრთა ჯამი იქნება 7-ის ტოლი;

დ) ამოღებული ბილეთის ნომერი იქნება 9-ის ჯერადი.

9 ბაღში ვაშლის და მსხლის ხეებია, თითო ვაშლის ხე იძლევა წელიწადში საშუალოდ 50 კგ ნაყოფს, ხოლო მსხლის ხე - 90 კგ-ს. საშუალოდ თითო ხიდან მოიკრიფა 60 კგ ნაყოფი. რას უდრის ბაღში ვაშლის ხეების პროცენტული რაოდენობა?

2. ლოგარითმული უტოლობა

უტოლობას, რომელიც ცვლადს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, **ლოგარითმული უტოლობა** ეწოდება.

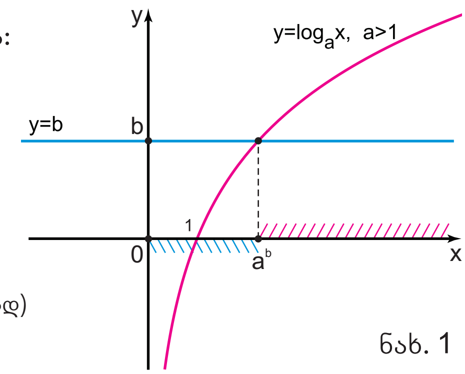
$\log_a x > b$, $\log_a x < b$, სადაც $a>0, a\neq 1$ უმარტივესი ლოგარითმული უტოლობებია.

ამოვხსნათ თითოეული ეს უტოლობა:

1\. ა) $\begin{cases} \log_a x > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > a^b$ (ნახ. 1, წითლად)

ბ) $\begin{cases} \log_a x < b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a^b \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

(ნახ. 1, ცისფრად)

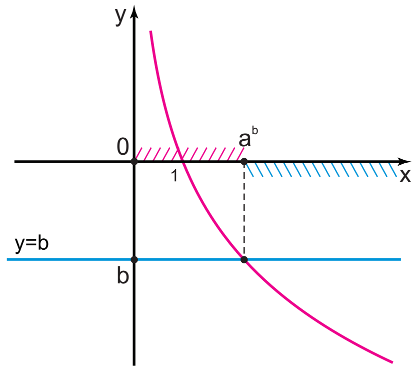


ნახ. 1

2\. ა) $\begin{cases} \log_a x > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a^b \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

(ნახ. 2, წითლად)

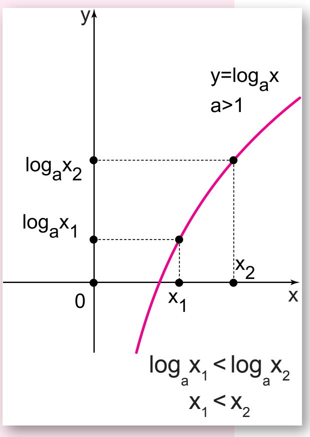
ბ) $\begin{cases} \log_a x < b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > a^b$ (ნახ. 2, ცისფრად)



ნახ. 2

ყურადღება: განხილულ უტოლობებში b შესაძლებელია შევცვალოთ $\log_a a^b$-თი, თან გავითვალისწინოთ, რომ ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა R^+.

მაგალითად, $\begin{cases} \log_a x < b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x < \log_a a^b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a^b \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a^b$



3\. ა) $\begin{cases} \log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ | $\begin{cases} y = \log_a x \\ a > 1 \end{cases}$ ზრდადია

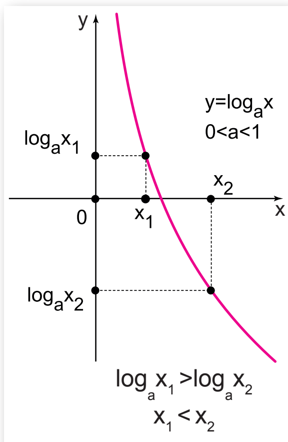
ეს შეგიძლიათ არც დაწეროთ!

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} \log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ | $\begin{cases} y = \log_a x \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ კლებადია

ეს შეგიძლიათ არც დაწეროთ!

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$



მაგალითი 1.

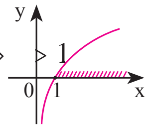
ამოხსენით უტოლობა:

ა) $\log_2 x > 0$; ბ) $\log_{0,2}(x^2 - x + 6) < \log_{0,2}(4x)$.

ამოხსნა:

ა) $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 1$

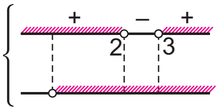


ან ასეც $(\log_2 x > 0) \Leftrightarrow (\log_2 x > \log_2 1) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = \log_2 x \uparrow \\ 2 > 1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

ბ) $\log_{0,2}(x^2 - x + 6) < \log_{0,2}(4x) \Leftrightarrow$ $|0,2 < 1$ და $y = \log_{0,2} x \downarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 6 > 4x \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x \in (0;2) \cup (3;\infty)$.

მაგალითი 2.

რომელია მეტი: $\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{7}} \frac{15-\sqrt{18}}{11}}$ თუ 1 ?

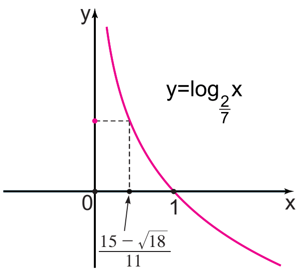
ამოხსნა:

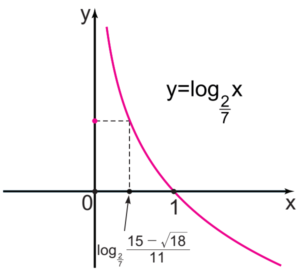
a^x რომ $1=a^0$-ს შევადაროთ, საჭიროა X შევადაროთ 0-ს. $\log_a x$ რომ 0-ს შევადაროთ, საჭიროა x შევადაროთ 1-ს. ე.ი. $\frac{15-\sqrt{18}}{11}$ უნდა შევადაროთ 1-ს.

I. $\sqrt{18} > 4 \Rightarrow 15 - \sqrt{18} < 11 \Rightarrow \frac{15-\sqrt{18}}{11} < 1$

ან ასეც $\frac{15-\sqrt{18}}{11} - 1 = \frac{4-\sqrt{18}}{11} < 0 \Rightarrow \frac{15-\sqrt{18}}{11} < 1$

II. $\log_{\frac{2}{7}} \frac{15-\sqrt{18}}{11} > 0$. III. $\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{7}} \frac{15-\sqrt{18}}{11}} > 1$.





სავარჯიშოები:

1 შეადარეთ 1-ს:

ა) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 \frac{\sqrt{28}-\sqrt{3}}{3}}$; ბ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}}{8}}$; გ) $\left(\frac{2}{9}\right)^{\log_3 \frac{\sqrt{7}-0,7}{2}}$.

ამოხსენით უტოლობა:

2 ა) $\log_2(x-1)>0$;
ბ) $\log_3(3x+1)<1$;
გ) $\log_{\frac{1}{3}}x>-1$;
დ) $\log_{0,4}(2-x)\le 2$;
ე) $\log_3(x-1)>\log_3(2x+1)$;
ვ) $\log_{0,1}(3-2x)<\log_{0,1}(x+5)$;
ზ) $\log_5(x^2+x-1)>1$;
თ) $\lg(x^2-6x+18)<1$;
ი) $\log_{0,7}(x^2+1)<\log_{0,7}(2x-5)$;
კ) $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$;
ლ) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0$;
მ) $\log_{\frac{1}{5}}\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x-4)\ge 0$.

3 ა) $\lg^2x-\lg x-2>0$;
ბ) $\log^2_{0,5}x-3\log_{0,5}x+2<0$;
გ) $\log^2_2x-16<0$;
დ) $\log^2_{\frac{1}{3}}x-9\log_{\frac{1}{3}}x>0$;
ე) $\log_{0,7}3\cdot\lg(2x-1)>0$;
ვ) $\log_3 4,5\log_3(x+1)<0$;
ზ) $(x+5)\lg(x^2+1)>0$;
თ) $(x^2-4)\log_{0,2}(2x^2+3)>0$.

4 მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში დაშტრიხეთ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე:
ა) $y<\lg x$;
ბ) $y>\lg(x+1)$;
გ) $y>\lg(x-3)$;
დ) $\begin{cases} y>\lg x \\ x>1 \end{cases}$;
ე) $\begin{cases} y<2^x \\ y>-x-1 \end{cases}$;
ვ) $\begin{cases} y<\lg x \\ y>-x-1 \end{cases}$.

5* ამოხსენით $\log_a(x^2-x-2)>\log_a(-x^2+2x+3)$ უტოლობა, თუ ცნობილია, რომ ის ჭეშმარიტია $x=\dfrac{9}{4}$-სთვის.

6 განსაზღვრეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც უტოლობას აქვს ამონახსენი:
ა) $\log_a(1+x)>\log_{a^2}(1+x)$;
ბ) $\log_a(x^2+2x+2)<0$.

7 განსაზღვრეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $x\in R$-ისთვის:
ა) $\log_a(x^2+2)>1$; ბ) $\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1$.

8 იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა:
ა) $y=\log_3(x^2+9)$;
ბ) $y=\lg(x^2+2)$.

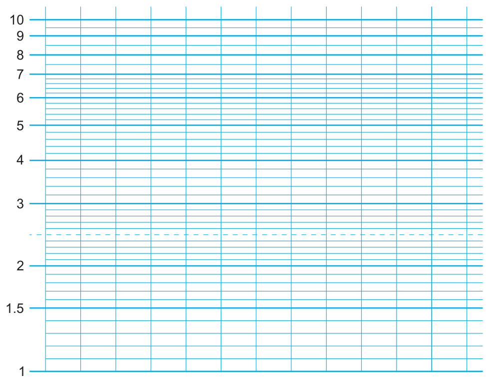
9 გაამარტივეთ და გამოიანგარიშეთ ლოგარითმული ცხრილების საშუალებით.
ა) $\sqrt{\log^2_2 15}$;
ბ) $\sqrt{\log^2_{\frac{1}{3}}8}$;
გ) $\sqrt{\log^2_7 5}$.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

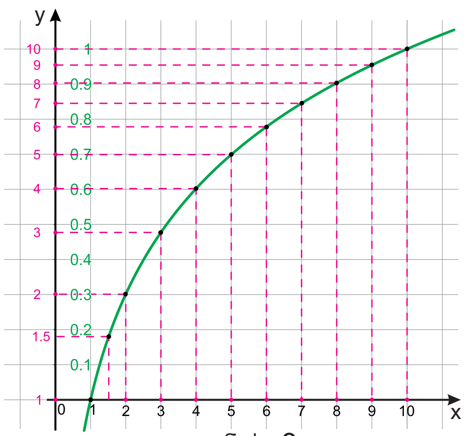
10 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს $2\log^2_3x-|\log_3x|+a=0$ განტოლებას ოთხი ამონახსენი?

9 ნახევრადლოგორითმული ბადე

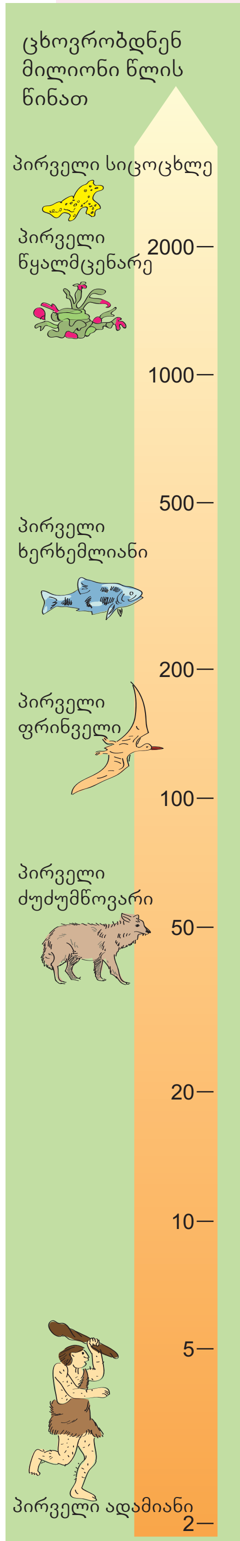
ა) შეადარეთ ერთმანეთს რიცხვით ღერძზე (ნახ.1) მანძილი 10-დან 100-მდე, 100-დან 1000-მდე ასევე 10-დან 20-მდე, 50-დან 100-მდე, 100-დან 200-მდე, 1000-დან 2000-მდე.
ბ) რა დასკვნის გამოტანა შეგიძლიათ?



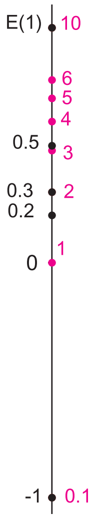
ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 1



ნახ. 4

ლოგარითმების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი გამოყენებაა ნახევრადლოგარითმული ქალალდი (ნახ. 2). თუ ქალალდზე დახაზავთ საკოორდინატო სისტემას, რომლის აბსცისათა ღერძზე გადაზომილია თანაბარი სკალა, y ღერძზე კი ლოგარითმული სკალა და დაყოფის წერტილებზე გავავლებთ ღერძების პარალელური წრფეებს, მივიღებთ ნახევრადლოგარითმულ ბადეს (ნახ. 3).

გავეცნოთ, თუ რა არის და როგორ ავაგოთ ლოგარითმული სკალა.

წრფეზე ავიღოთ საწყისი O წერტილი, დადებითი მიმართულება და ერთეულის ტოლი OE მონაკვეთი. ყოველ დადებით a რიცხვს (აღნიშნულია წითელი ციფრებით) შევუსაბამოთ წრფის ის M (x) წერტილი, რომლისთვისაც სრულდება:

x=lga აქედან	1→0, რადგან lg1=0	1=lg1=0
	10→1 (E წერტილი, რადგან lg10=1)	10=lg10=1
lg2≈0,3 ე.ი.	2→ ≈0,3	2=lg2≈0,3
lg3≈0,48	3→ ≈0,48	3=lg3≈0,45
და ა.შ.		
lg0,1=-1 ე.ი.	0,1→-1	0,1=lg0,1=-1
lg0,01=-2 ე.ი.	0,01→-2	0,01=lg0,01=-2

ასე აგებულ სკალას ლოგარითმულის სკალა ეწოდება (ნახ. 4). ე.ი. ლოგორითმული სკალით მოცემულია დადებით რიცხვთა სიმრავლის ასახვა წრფის წერტილთა სიმრავლეზე.

ალბათ მიხვდით, რომ პარაგრაფის დასაწყისში პირველ სურათზე მოცემულ ღერძზე გადაზომილია ლოგარითმული სკალა, თან

100-10=lg100-lg10=1	ამიტომ მანძილები10-დან 100-მდე და
1000-100=lg1000-lg100=1	100-დან 1000-მდე ტოლია.

ასევე

20 – 10 = lg20 – lg10 = lg2

200 – 100 = lg200 – lg100 = lg2

2000 – 1000 = lg2000 – lg1000 = lg2

ნახევრადლოგარითმული ბადე ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში (ამზადებენ ქარხნულადაც). იგი, რა თქმა უნდა, თქვენც შეგიძლიათ დაამზადოთ (როგორც ეს მე-3 ნახაზზეა).

* ავაგოთ ასეთ ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე $y=ba^x$, $b,a>0$ ფუნქციის გრაფიკი. გავალოგარითმოთ $y=ba^x$. მივიღებთ

$\lg y=x\lg a+\lg b$ (2)

$y=2^x$

$\lg y=x\lg 2;\ \ k=\lg 2=2$

x	y = lgy = xlg2
0	lg2° = lg1 = 1
1	lg2 = 2
2	2lg2 = 4
3	3lg2 = lg8 = 8

$y=2\cdot 2^x$

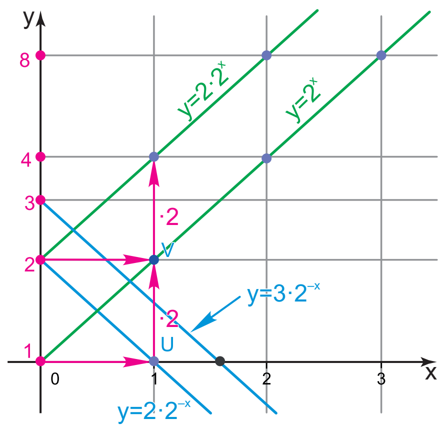
$\lg y=x\lg 2+\lg 2\ \ k=\lg 2=2$

x	y=lgy=xlg2+lg2
0	lg2°+lg2=lg2=2
1	lg2+lg2=lg4=4
2	2lg2+lg2=lg8=8
3	3lg2+lg2=lg16=16

როგორი დამოკიდებულებაა x-სა და lgy-ს შორის?

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი **თეორემა:**

$y=|b|a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე წრფით[1)] გამოისახება.



ნახაზზე მოცემულია $y=2^x$ და $y=2\cdot 2^x$ ფუნქციათა გრაფიკები. როგორც ხედავთ, წრფის დახრა (ტოლობა (2)) a პარამეტრზეა დამოკიდებული, ხოლო b-ზეა დამოკიდებული წრფისა და y ღერძის გადაკვეთის წერტილი.

ჩამოაყალიბეთ პირობა, თუ რა შემთხვევაში იქნება ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე მოცემული მაჩვენებლიან ფუნქციათა გრაფიკები პარალელური და რა შემთხვევაში კვეთენ ისინი ერთმანეთს.

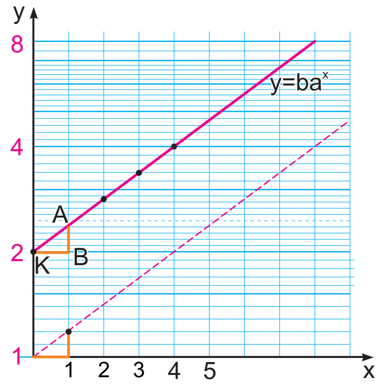
* შევნიშნოთ, რომ $y=ba^x+c$ ფუნქციის გრაფიკი ლოგარითმულ ფურცელზე წრფით არ გამოისახება.

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც:

> ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე მოცემული წრფე, რომლის დახრა a-ს, ხოლო y ღერძთან კვეთის წერტილი b-ს ტოლია, არის $y=ba^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი.

მაგალითი 1.

x	0	1	2	3	4
y	2	2,4	2,9	3,5	4,2



ცხრილში მოცემული მონაცემები მონიშნეთ ლოგარითმულ ბადეზე და გაატარეთ მათზე წრფე. დაწერეთ შესაბამისი $y=ba^x$ ფუნქცია.

ამოხსნა:

$\lg y=x\lg a+\lg b$ წრფე y ღერძს კვეთს წერტილში 2. ე.ი. $\lg b=\lg 2$, მივიღეთ $b=2$. წრფის დახრა ტოლი იქნება:

$\frac{AB}{KB}=\frac{AB}{1}=AB$ $AB=2{,}4-2=\lg 2{,}4-\lg 2=\lg 1{,}2$ ე.ი. წრფის დახრა $\lg a=\lg 1{,}2$ $a=1{,}2$.

ე.ი. საძიებელი ფუნქციაა $y=2\cdot 1{,}2^x$.

დაწერეთ $y=b\cdot a^x$ ფუნქცია, რომლის შესაბამისი გრაფიკი ნახაზზე წყვეტილი წრფითაა მოცემული.

მაგალითი 2.

ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე დახაზეთ $y=2\cdot 1{,}5^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

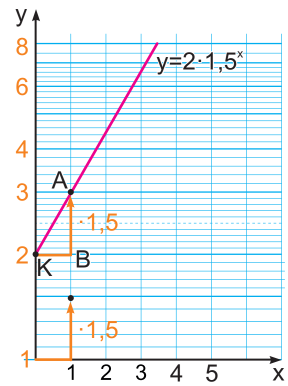
ავიღოთ ნახევრადლოგარითმული ბადე.

$\lg y = x\cdot\lg 1{,}5 + \lg 2$ (1) | $f(x) = kx + b$

$b = \lg 2 = 2$

შევადგინოთ ცხრილი:

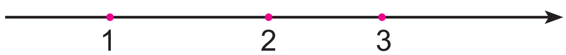
x	y = lgy = x g1,5 + lg2
0	lg2 = 2
1	lg1,5 + lg2 = lg3 = 3



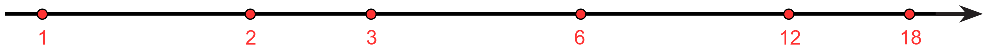
მიღებულ (0;2) და (1;3) წერტილებზე გავატაროთ წრფე (ნახ. 4). იგი იქნება $y = 2\cdot 1{,}5^x$ ფუნქციის გრაფიკი ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე.

მაგალითი 3.

ლოგარითმულ სკალაზე მონიშნულია რიცხვები: 1, 2, 3. მათი საშუალებით იპოვეთ ამ სკალაზე დანაყოფები 6, 12, 8.



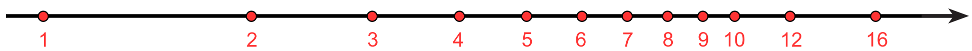
ამოხსნა:



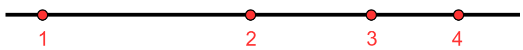
$\lg2 - \lg1 = \lg6 - \lg3 = \lg12 - \lg6 = \lg2$.
ე.ი. 2-სა და 1-ს, ასევე 6-სა და 3-ს, ასევე 12-სა და 6-ს შორის მანძილები ტოლია.
$\lg18 - \lg12 = \lg3 - \lg2 = \lg\frac{3}{2}$. ე.ი. 18-სა და 12-ს შორის მანძილი ტოლია 3-სა და 2-ს შორის მანძილისა.

სავარჯიშოები:

1 ლოგარითმულ სკალაზე აჩვენეთ მონაკვეთები, რომელთა სიგრძეა:
ა) $\lg2$; ბ) $\lg5$; გ) $\lg3$; დ) $\lg7$.

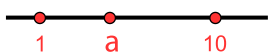


2 ლოგარითმულ სკალაზე მონიშნულია რიცხვები 1, 3, 4. მათი მეშვეობით (გადაიხაზეთ რვეულში) ამ სკალაზე იპოვეთ დანაყოფები:
ა) 9, 12, 16; ბ) 2, 6, 8.



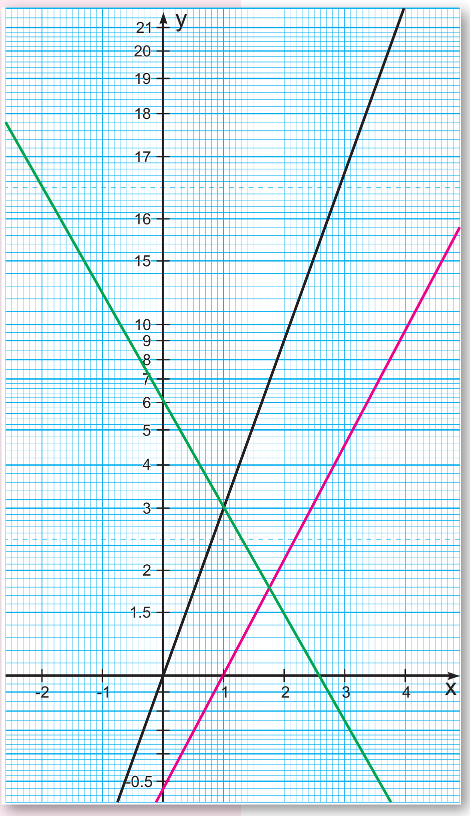
3 ლოგარითმული სკალის მიხედვით აჩვენეთ, რომ:
ა) $\lg2+\lg3>\lg5$; ბ) $\lg3+\lg4>\lg10$;
გ) $\lg2+\lg5=\lg10$; დ) $\lg2+\lg7=\lg14$.

4 ლოგარითმულ სკალაზე მოცემულია 1; 10; a წერტილები. გადაიხაზეთ მოცემული სკალა რვეულში და აჩვენეთ 10a; 0,1a წერტილები.



5 ააგეთ ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი:
ა) $y=2^x$; ბ) $y=0{,}5^x$;
გ) $y=0{,}5\cdot2^x$; დ) $y=2\cdot0{,}5^x$.

6 ნახაზზე მოცემულია $y=b\cdot a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე. იპოვეთ a და b.



7 ცხრილში მოცემული მნიშვნელობებით ნახევრადლოგარითმულ ქაღალდზე მონიშნეთ წერტილები და გაატარეთ მათზე წრფე. დაწერეთ შესაბამისი $y=b\cdot a^x$ ფუნქცია.

x	0	1	2	3	4
y	2,5	3	3,6	4,2	4,9

გ

6 ააგეთ გრაფიკი

ა) $y=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ 0,5x+0,5, & x\le 1\end{cases}$; ბ) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\ge -1\\ 2x+4, & x<-1\end{cases}$;

გ) $y=2^{\frac{|x|+x}{x}}$; დ) $y=|x^2-x|$.

7 რამდენი ხუთნიშნა სატელეფონო ნომერი არსებობს, რომელიც შეიცავს კომბინაციას „23“

8 ABC სამკუთხედში M წერტილი AB გვერდზეა, ისე, რომ AM:MB=2:1 N წერტილი AC გვერდზე. M, N, C და B წერტილებზე გავლებულია წრეწირი, რომლის რადიუსი $\sqrt{3}$-ის ტოლია. იპოვეთ AM, თუ BC=3 და <BAC=30°.

9 იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი, რომელიც 12-ით მეტია მის ციფრების კვადრატების ჯამზე და 16-ით მეტია ციფრების გაორკეცებულ ნამრავლზე.

10 ორი რიცხვის ჯამი 15-ის ტოლია, ხოლო მათი საშუალო არითმეტიკული 25%-ით მეტია საშუალო გეომეტრიულზე, იპოვეთ ეს რიცხვები.

11 თქვენ გააგზავნეთ შეკითხვა ინტელექტუალურ თამაშში „რა, სად, როდის“. შეკითხვა უნდა აირჩეს 100 შეკითხვიდან. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ თქვენი შეკითხვა მოხვდება მე-5 სექტორში (სულ 12 სექტორია).

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

12 ააგეთ ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე (ლოგარითმული სკალით x ღერძზე) ა) y=lgx; ბ) y=2 lgx + 0,5 ფუნქციის გრაფიკი (lgx=x). დააკვირდით მიღებულ შედეგს და შეეცადეთ გამოიტანოთ დასკვნა, რას წარმოადგენს ასეთ ნახევრადლოგარითმულ ბადეზე y = a logx + b ფუნქციის გრაფიკი?

13 გაითვალისწინეთ მიღებული შედეგები და შეეცადეთ უპასუხოთ: რას წარმოადგენს ლოგარითმულ ბადეზე (ორივე ღერძზე ლოგარითმული სკალით) ა) $y=x^2$, $x>0$; ბ) $y=x^3$, $x>0$ ფუნქციის გრაფიკი.

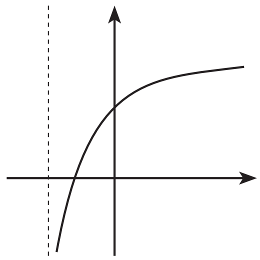
შეამოწმე შენი ცოდნა:

1. რადიაქტიული გაბნევის შემთხვევაში ნივთიერების რაოდენობა მცირდება ორჯერ. რამდენი გრამი ნივთიერება დარჩება 100 გრამიდან t დღის შემდეგ?

ა) $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$; ბ) $100 \cdot 2^t$; გ) $100^{\frac{1}{2}}$; დ) 100^{-t}.

2. სატყეო ნაკვეთზე წლის განმავლობაში შეიძლება დამზადდეს a ხის მასალა. ხეების მატება ყოველწლიურად 4%-ის ტოლია. რამდენი ხის მასალა დამზადდება t წლის შემდეგ?

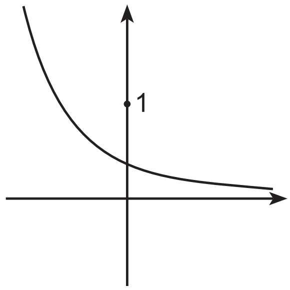
ა) $a \cdot 0{,}96^t$; ბ) $a(1.04)^t$; გ) $(0{,}04a)^t$; დ) $a \cdot 1{,}4^t$.



3. ნახაზზე მოცემულია $y=\lg_b(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ:

ა) $a>0$; $a<b<1$; ბ) $a>0$; $b>1$;

გ) $a<0$; $a<b<1$; დ) $a<0^t$; $b>1$.



4. ნახაზზე მოცემულია $y=a^{x+b}$ ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ:

ა) $a>1$ $B>0$; ბ) $0<a<1$ $b>0$;

გ) $a>1$ $b<0$; დ) $0<a<1$ $b<0$.

5. თუ $3^{2q}=1{,}5$ და $9^b=2$, მაშინ $a+b=$

ა) -1; ბ) -1; გ) $\frac{1}{2}$; დ) 0.

6. $3^{x-1} = 3^{(x-1)^2}$ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) $\{1\}$; ბ) $\{2\}$; გ) $\{1;2\}$; დ) $\{0;1\}$.

7. $2\log_3 6+\log_3 2{,}25=$

ა) 2; ბ) 3; გ) 4; დ) $\log_3 12{,}5$.

8. მოცემულ რიცხვებს შორის რომელია უდიდესი:

$a=\log_2 0{,}1$; $b=\log_2 0{,}2$; $c=\log_{1,7} 1{,}5$; $d=\log_{1,7} 2{,}7$; $e=\log_{1,6} 2{,}7$.

ა) a; ბ) b; გ) c; დ) d; ე) e.

9. $\log_{0,5}(x+2)\leq 1$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) $[-2;\infty)$; ბ) $[-1{,}5;\infty)$; გ) $[-\infty;-1{,}5)$; დ) $[-\infty;3)$.

10. $3^x \cdot \log_4(x-1)<0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა:

ა) $(1;\infty)$; ბ) $(1;2)$; გ) $(1;3)$; დ) $(3;4)$.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ:

ა) $(5^{\sqrt{2}}\cdot 5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; ბ) $4^{\sqrt[3]{5}}:2^{\sqrt[6]{5}}$; გ) $11^{2+\sqrt{5}}\cdot 11^{2-\sqrt{5}}$; დ) $(27^{\sqrt{3}}\cdot 3^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$;

2 გაამარტივეთ:

ა) $(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{2}})^2$; ბ) $\dfrac{x^{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}}{x^{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}}$;

გ) $\dfrac{(a+b)^{\sqrt{5}}\cdot(a-b)^{\sqrt{5}}}{a^2-b^2}$; დ) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}}{5}+\dfrac{5}{a^{2\sqrt{2}}}-\left(\dfrac{a^{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{a^{\sqrt{2}}}\right)^2$;

3 გაამარტივეთ:

ა) $\sqrt[p^3-9p]{z^{(p-3)^2+12p}}:\sqrt[p-3]{z^{\frac{3}{p}}}$; სადაც $p\neq 0$, $|p|\neq 3$, $z>0$; ბ) $\left(\dfrac{\sqrt[p]{4x^{2\sqrt{2}}}-1}{\sqrt[p]{2x^{\sqrt{2}}}-1}-1\right)^{2p}$.

4 მოცემულ რიცხვებს შორის რომელია უმცირესი?

$(2,2)^{0,1}$; $(1,3)^{0,3}$; $(0,2)^{0,1}$; $(0,2)^{0,4}$; $(0,7)^{-4,1}$.

5 დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით:

ა) $5^{\sqrt{5}}$; $3^{\sqrt{2}}$; $5^{1,7}$; 1. ბ) $\log_{0,2}0,1$; $\log_{0,2}1,3$; $\log_{1,3}\sqrt{2}$; 0.

6 გრაფიკის საშუალებით დაადგინეთ რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებას?

ა) $3^x=-x+2$; ბ) $(0,2)^x=x^2+1$; გ) $2^x=-x^2+4$;

7 იპოვეთ $x+y$, თუ

ა) $2^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-y}=32$; ბ) $3^x=15$; $3^y=\frac{1}{5}$.

8 გამოთვალეთ:

ა) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}3}$; ბ) $3\lg2+3\lg5$; გ) $2\log_3 6+\log_3 2,25$;

დ) $\log_3 6-2\log_3 2+\log_3 18$; ე) $\log_5 240-\log_5 80+\log_5\frac{5}{3}$.

9 გამოთვალეთ:

ა) $\frac{1}{2}\cdot 2^{\log_2 10}+2^{\log_2 3}-3^{\log_3 2}$; ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}2}-\log_{0,5}8$;

გ) $2\log_7(\sqrt{2}+1)+\log_7(3-2\sqrt{2})$; დ) $\log_3(\sqrt[3]{9}-2)+\log_3(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)$

10 გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ, რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებას:

ა) $\log_3 x=(\lg 0,1)x$; ბ) $\log_{0,2}x=x^2+1$; გ) $\log_3 x=\lg_{0,3}x$.

11 რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებას $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$.

12 იპოვეთ $y=(3,6^{1+\log_{3,6}(10+x)})^{\log_6(5-x)}$ ფუნქციის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

13 p პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს $(a+1)2^{2x}+2^x+3-a=0$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსენი?

14 ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2\cdot 0,5^{-\sqrt{x}}=(0,25)^{1-\sqrt{x}}$; ბ) $12^{2x+4}=3^{3x}\cdot 4^{x+8}$;

გ) $2^{x}+4^{\frac{x+1}{2}}=8\cdot 3^{\frac{x}{3}}$; დ) $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$;

ე) $3\cdot 2^{x}+2\cdot 3^{x}=2^{x+3}-2\cdot 3^{x-2}$; ვ) $9^{x}-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$;

ზ) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$; თ) $9^{x-1}+3^{x}=2\cdot 3^{1,5x}$.

15 ამოხსენით ლოგარითმული განტოლებები:

ა) $\dfrac{1}{\log_2(1+x)}+\dfrac{2\log_{0,25}(3,5-x)}{\log_2(1+x)}=1$; ბ) $\lg\sqrt{1-x}+3\lg\sqrt{1+x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2$;

გ) $\lg(x+1)^2+\log(x+9)^2=2\lg 9$; დ) $\log_{12}(4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12}27$.

16* ამოხსენით განტოლება:

ა) $10\cdot x^{\lg x}+10\cdot x^{-\lg x}=101$; ბ) $\log_3(3^{x}-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$;

გ) $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$; დ) $\log_{12}(4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12}27$.

17 იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\dfrac{1}{3-\log_3(x-3)}$; ბ) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}$; გ) $y=\dfrac{\sqrt{3\log_{64}x-1}}{\sqrt[3]{2x-11}}$;

დ) $y=\log_2\dfrac{x-2}{x+2}$; ე) $y=\sqrt{\dfrac{1-5^{x}}{7^{-x}-7}}$; ვ) $\lg(5x^2-8x-4)+(x+3)^{-0,5}$.

18 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\sqrt{3^{x}}\cdot\sqrt{5^{x}}=225$; ბ) $2^{3x}\cdot 5^{x}=1600$;

გ) $9^{3-5x}\cdot 7^{5x-3}=1$; დ) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-3}=6$.

19 ამოხსენით განტოლება:

ა) $\log_5(2+\log_3(3+x))=0$; ბ) $\lg^3x-\lg^2x-6\lg x=0$;

გ) $\lg((x-2)(x+3))+\lg\dfrac{x+3}{x-2}=1$; დ) $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$.

20 გრაფიკების საშუალებით დაადგინეთ რამდენი ამონახსენი აქვს განტოლებებს:

ა) $\log_3 x=\dfrac{1}{x}$; ბ) $2^{x}=\dfrac{1}{x}$; გ) $|\log_2 x|=\dfrac{1}{|x|}$;

დ) $3^{x}=-2$; ე) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=x$; ვ) $3^{x}=-2x+1$;

21 დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი ფუნქცია:

ა) $y=\dfrac{2^{x}+2^{-x}}{x}$; ბ) $y=\log(x^2+1)$; გ) $y=\dfrac{3^{x+1}}{x^2}$;

დ) $y=\log(2x+1)-\log(2x-1)$; ე) $y=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{x}}$;

22 იპოვეთ $5^{x}+5^{-x}$, თუ $25^{x}+25^{-x}=a$

23 ამოხსენით უტოლობა: ა) $\dfrac{3^{x+2}}{\sqrt{x^2-4}} \ge \dfrac{1}{3\sqrt{x^2-4}}$; ბ) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}+2)^{\frac{x-1}{x+2}}$.

24 ბაქტერიების რაოდენობა ყოველ სთ-ში მატულობს 40%-ით. იპოვეთ მათი რაოდენობა t სთ-ის შემდეგ, თუ საწყისი რაოდენობაა p:

ა) $p(1,4)^t$; ბ) $p(1,6)^t$; გ) $p(0,4)^t$; დ) $p(0,6)^t$.

25 კედელში ბგერის იზოლაციის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით $D = 20\lg\dfrac{p_0}{p}$, სადაც p_0 კედელში გასული ბგერის წნევაა. ბგერის იზოლაციის კოეფიციენტის რა მნიშვნელობისთვის შეამცირებს კედელი ბგერის წნევას 10-ჯერ?

26 ამოხსენით უტოლობა:

ა) $5^{1-x} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1} < 4,8$; ბ) $9^x - 2^{x+0,5} > 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$;

გ) $9\cdot 3^{2x+2} + 3\cdot 3^{2x+1} - 9^x \le 89$; დ) $4^x - 101\left(\dfrac{2}{5}\right)^x + 4\cdot 25^{1-x} > 0$;

ე) $4^{\frac{2}{x}} - 5\cdot 4^{\frac{1}{x}} < 0$; ვ) $8^{x+\frac{1}{3}} - 9\cdot 4^x + 2^{x+2} \geqslant 0$.

27 ამოხსენით ლოგარითმული უტოლობა:

ა) $\log_2(x+1) > \log_2 3$; ბ) $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) < \log_2\dfrac{1}{3}$;

გ) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{x+1} < -\log_3(3-x)$; დ) $\log_{\frac{1}{6}}\dfrac{x-1}{2} \ge \log_6(4-x)$;

ე) $\log_6(x-3\sqrt{x}+2) < 1$; ვ) $\log_3\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x+5} \ge 0$;

ზ) $\lg(x^2-2x-2) \le 0$; თ) $\log_{0,3}\dfrac{2+3x}{x} < 0$;

ი) $\log_3(3x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(5x-4) > 0$; კ) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_2(x^2-x+2) \ge 1$;

ლ) $\dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}\left(\log_3 5 - 1\right)\right)} \ge 0$; მ) $\dfrac{\sqrt{(x-15)(x+1)}}{\log_{0,1}\left(\dfrac{15}{4}\left(\log_3 10 - 1\right)\right)} \ge 0$;

28 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც უტოლობას აკმაყოფილებს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი:

ა) $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2) > 1$; ბ) $\log_{(a^2-1)}(a^2x^2+2ax+4) > 1$.

29 დავამტკიცოთ, რომ $\dfrac{1}{\log_3 2}$; $\dfrac{1}{\log_6 2}$; $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

30 იპოვეთ x, რომლისთვისაც $\log_2(5\cdot 2^x+1)$; $\log_4(2^{1-x}+1)$; 1 რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

III თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- $\forall p,q\in R$-თვის და $a,\ b\in R^+$-თვის.

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$
2. $a^p\cdot b^p=(ab)^p$
3. $a^p:a^q=a^{p-q}$
4. $a^p:b^p=(a:b)^p$
5. $(a^p)^q=a^{pq}$

ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები

$y=\log_a x$ ფუნქცია	$y=a^x$ ფუნქცია
1. $D(y)=R^+$, ე.ი. $x>0$.	1. $E(y)=R^+$, $y>0$
2. $E(y)=R$, ე.ი. $y\in R$	2. $D(y)=R$, $x\in R$.
3. $(1;\ 0)$ მდებარეობს $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკზე. ე.ი. $\log_a 1=0$.	3. $(0;1)$ მდებარეობს $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე.
4. თუ $a>1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია. თუ, $a\in(0,1)$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია კლებადი.	4. თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია. თუ, $a\in(0,1)$, მაშინ $y=a^x$ კლებადი ფუნქციაა.
5. $y=\log_a x$ და $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ.	5. $y=a^x$ და $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ.

- $f: x\to a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$, $a\neq 1$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

- **$y=\log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$, $a\neq 1$ ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება.**

- **$a^x=b$, $a>0$, $a\neq 1$ სახის განტოლებას მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება.**

- განტოლებას, რომელიც ცვლადს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, **ლოგარითმული განტოლება** ეწოდება.

  $\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq 1$ - უმარტივესი ლოგარითმული განტოლებაა.

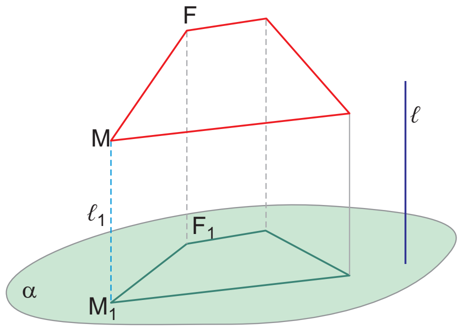
- უტოლობას, რომელიც უცნობს ხარისხის მაჩვენებელში შეიცავს, **მაჩვენებლიანი უტოლობა** ეწოდება.

- უტოლობას, რომელიც ცვლადს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, **ლოგარითმული უტოლობა** ეწოდება.

IV თავი

ამ თავში გაეცნობით სტერეომეტრიის თეორემებს, პარალელური და მართობული სიბრტყეების თვისებებს; შეძლებთ თქვენთვის ცნობილი გეომეტრიული სხეულების თვისებების დადგენას და მათი უცნობი ელემენტების პოვნას.

1 ფიგურათა პარალელური დაგეგმილება



გავეცნოთ ფიგურათა ასახვის სახეს – პარალელურ დაგეგმილებას. ვთქვათ მოცემულია α სიბრტყე და ℓ წრფე. განვიხილოთ რაიმე F ფიგურა, რომელიც α სიბრტყეში არ მდებარეობს. ამ ფიგურის ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ ℓ წრფის ℓ_1 პარალელური წრფე α სიბრტყესთან გადაკვეთამდე. M_1 წერტილს შევუსაბამოთ ℓ_1 წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის M_1 წერტილი. იგივე შეგვიძლია გავიმეოროთ F ფიგურის ნებისმიერი წერტილისათვის.

ამგვარად მიღებულ f ასახვას უწოდებენ F ფიგურის დაგეგმარებას α სიბრტყეზე ℓ წრფის პარალელურად.

M_1 წერტილს ეწოდება M წერტილის პარალელური გეგმილი. F_1-ს კი F ფიგურის პარალელური გეგმილი, ხოლო α სიბრტყეს კი დაგეგმილების სიბრტყე.

პარალელურ გეგმილზე წარმოდგენას გვაძლევს მზიან დღეს ბრტყელი ფიგურის ჩრდილი კედელზე (მზის სხივები შეგვიძლია პარალელურად ჩავთვალოთ დედამიწიდან მზის დიდი დაშორების გამო).

ჩამოვაყალიბოთ პარალელური დაგეგმილების რამოდენიმე თვისება (ვიგულისხმოთ, რომ დაგეგმილება ხდება ისეთი წრფის პარალელურად, რომელიც დასაგეგმილებელი წრფეების და მონაკვეთების პარალელური არ არის.

ყურადღება!
პარალელური დაგეგმილებისას კუთხის სიდიდე და არაპარალელური მონაკვეთების სიგრძეების შეფარდება არ არის შენარჩუნებული.

თვისება 1: წრფის გეგმილი არის წრფე;

თვისება 2: პარალელურ წრფეთა გეგმილები პარალელურია;

თვისება 3: პარალელური მონაკვეთების გეგმილთა სიგრძეები პროპორციულია მოცემული მონაკვეთების სიგრძეების.

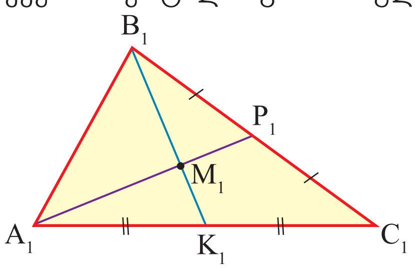
თუ ℓ წრფე მართობულია α სიბრტყის, მაშინ მოცემულ პარალელურ დაგეგმილებას ეწოდება **ორთოგონალური დაგეგმილება**.

ჩამოაყალიბეთ, რა ფიგურა შეიძლება მივიღოთ: ა) წერტილის, ბ) მონაკვეთის, გ) წრფის ორთოგონალური დაგეგმილებისას.

ამოცანა 1

ტოლგვერდა სამკუთხედის გამოსახულებაზე ააგეთ მისი სიმაღლეების კვეთის წერტილის გამოსახულება.

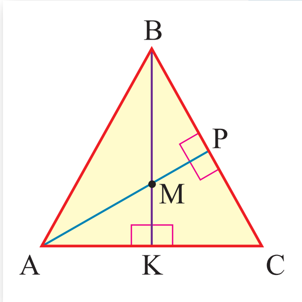
მოცემული სამკუთხედის გეგმილი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ფორმის სამკუთხედი.



ამოხსნა:

$A_1B_1C_1$ არის მოცემული ტოლგვერდა სამკუთხედის გეგმილი.

დასაგეგმილებელ ABC სამკუთხედში M წერტილი იყოს BK და AD სიმაღლეების კვეთის წერტილი. რადგან ΔABC ტოლგვერდაა, სიმაღლეები ამავე დროს მედიანებიცაა, ანუ AK=KC და BP=PC. საიდანაც თვისება 3-ის თანახმად $A_1K_1=K_1C_1$ და $B_1P_1=P_1C_1$. მაშასადამე, B_1K_1 და A_1P_1 წარმოადგენს $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის მედიანებს.



აგება:

$\Delta A_1B_1C_1$-ში გავავლოთ A_1P_1 და B_1K_1 მედიანები. მათი გადაკვეთის M_1 წერტილი საძიებელი წერტილია.

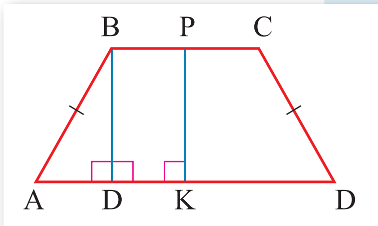
ვინაიდან პარალელური დაგეგმილებისას წრფეთა პარალელობა და პარალელურ მონაკვეთებს შორის პროპორცია შენარჩუნებულია, ამიტომ პარალელოგრამი შეიძლება იყოს პარალელოგრამის, კერძოდ, მართკუთხედის, რომბის, კვადრატის გამოსახულება. ხოლო ტრაპეციის გამოსახულება არის ისევ ტრაპეცია, რომლის ფუძეთა შეფარდება ტოლია თავდაპირველი ტრაპეციის ფუძეთა შეფარდებისა.

ამოცანა 2

ტოლფერდა ტრაპეციის გამოსახულებაზე ააგეთ მისი სიმაღლის გამოსახულება.

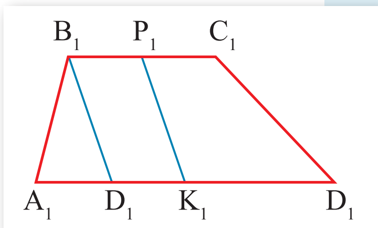
ამოხსნა:

$A_1B_1C_1D_1$ იყოს ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის გამოსახულება (BC||AD). BD სიმაღლე პარალელურია ფუძეების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის (PK სიმეტრიის ღერძია). რადგან პარალელური დაგეგმილებისას პარალელური მონაკვეთების შეფარდება შენარჩუნებულია, ამიტომ $B_1P_1=P_1C_1$ და $A_1K_1=K_1D_1$.



აგება:

ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის $A_1B_1C_1D_1$ გამოსახულებაზე ავიღოთ B_1C_1 და A_1D_1 ფუძეების P_1 და K_1 შუაწერტილები. B წერტილიდან გავავლოთ $A_1D_1||P_1K_1$ მონაკვეთი. ცხადია, B_1D_1 არის BD სიმაღლის სახე.



შეიძლება თუ არა, რომ:

1. ნებისმიერი სამკუთხედის გამოსახულება იყოს ნებისმიერი სამკუთხედი?
2. მოცემული ოთხკუთხედის გამოსახულება იყოს ნებისმიერი ოთხკუთხედი?
3. ტრაპეციის გამოსახულება იყოს პარალელოგრამი?
4. რომბის გამოსახულება იყოს კვადრატი?

სავარჯიშოები:

1 გეგმილთა სიბრტყეზე რამდენი წერტილის მიღება შეიძლება სამი განსხვავებული წერტილის დაგეგმილებით?

2 რა ფიგურა შეიძლება იყოს ა) სიბრტყის, ბ) ნახევარსიბრტყის, გ) არაგაშლილი კუთხის გეგმილი?

3 ცნობილია, რომ მონაკვეთს და მის გეგმილს ტოლი სიგრძეები აქვთ. რა მდებარეობა უკავია ამ მონაკვეთს გეგმილთა სიბრტყის მიმართ?

4 AB მონაკვეთი კვეთს გეგმილთა სიბრტყეს M წერტილში. იპოვეთ AM და MB, თუ ცნობილია, რომ $AB=m$, ხოლო $A_1M:MB_1=a:b$ (A_1B_1 AB მონაკვეთის გეგმილია).

5 A_1 და B_1 არის A და B წერტილების გეგმილები α სიბრტყეზე. ააგეთ AB წრფის α სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი (A, B, A_1 და B_1 წერტილები მოცემულია).

6 ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედის გამოსახულებაზე ა) წვეროსთან მდებარე კუთხის ბისექტრისის, ბ) ფერდის შუაწერტილიდან ფუძეზე დაშვებული მართობის გამოსახულება.

7 ΔABC-ში $AB:BC=2:3$. ააგეთ ამ სამკუთხედის გამოსახულებაზე B კუთხის ბისექტრისის გამოსახულება.

8 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდებაა $3:4$. ამ სამკუთხედის გამოსახულებაზე ააგეთ ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების ცენტრები.

9 მოცემულია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის გამოსახულება. ამავე სიბრტყეში ააგეთ კვადრატის გამოსახულება, თუ კვადრატის გვერდია ა) მოცემული სამკუთხედის კათეტი, ბ) მოცემული სამკუთხედის ჰიპოტენუზა.

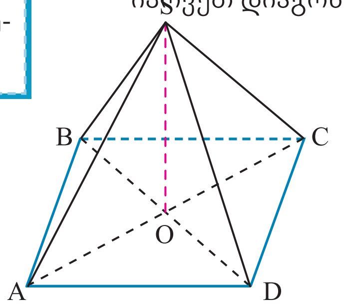
ბ

10 მართი პრიზმის ფუძეა $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია გვერდებით $AB=CD=13$ სმ, $BC=11$ სმ და $AD=21$ სმ. მისი დიაგონალური კვეთის ფართობია 180 სმ^2. იპოვეთ AB_1C_1D კვეთის ფართობი.

გასახსენებლად!

პირამიდა წესიერია, თუ მისი ფუძე წესიერი მრავალკუთხედია, ხოლო წვერო გეგმილდება ამ მრავალკუთხედის ცენტრში.

11 მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 17 სმ და 28 სმ. ფუძის ერთ–ერთი დიაგონალია 25 სმ. დიაგონალური კვეთების ფართობთა ჯამის შეფარდება ფუძის ფართობთან ტოლია $16:15$. იპოვეთ დიაგონალური კვეთების ფართობები.



12 იპოვეთ: ა) სამკუთხა, ბ) ოთხკუთხა, გ) ექვსკუთხა წესიერი პირამიდის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდია a და გვერდითი წიბო b.

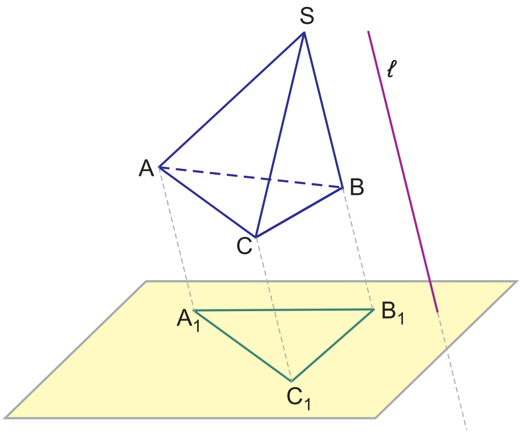
13 წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 7, ფუძის გვერდი კი 9. იპოვეთ გვერდითი წიბოს სიგრძე.

სივრცული ფიგურის გამოსახულება

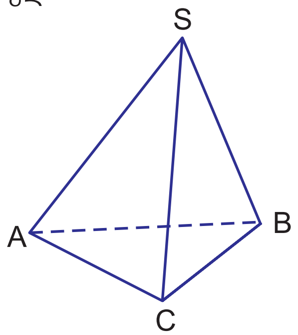
პლანიმეტრიაში მოცემული ფიგურის გამოსახულებას წარმოადგენს მოცემული ფიგურის მსგავსი ნებისმიერი ფიგურა - კვადრატის გამოსახულება კვადრატია, წესიერი სამკუთხედის - ნებისმიერი წესიერი სამკუთხედი, რომბის გამოსახულება ისევ რომბია, რომლის კუთხეები მოცემული რომბის კუთხეების ტოლია და ა.შ.
სტერეომეტრიაში საქმე უფრო რთულადაა. ქაღალდის სიბრტყეზე ჩვენ უნდა გამოვსახოთ სივრცული ფიგურა. ამ პრობლემის გადასაჭრელად გამოიყენება მეთოდი, რომელსაც **პარალელური დაგეგმილება** ეწოდება.
სტერეომეტრიაში ფიგურის გამოსახულებას წარმოადგენს ამ ფიგურის სიბრტყეზე პარალელური გეგმილის მსგავსი ნებისმიერი ფიგურა იმ პირობით, რომ ეს სიბრტყე არ არის პარალელური დაგეგმილების მიმართულების.
განვიხილოთ ზოგიერთი ფიგურის გამოსახულება.

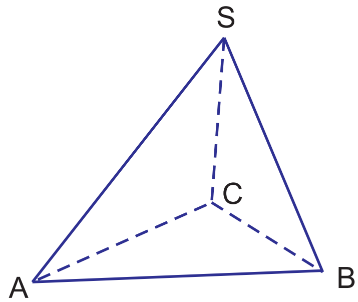
1. სამკუთხა პირამიდის გამოსახულება.

თუ დაგეგმილების მიმართულება (ℓ წრფე) პარალელურია რომელიმე გვერდითი წიბოსი, მაშინ ტეტრაედრის გამოსახულება სამკუთხედია.

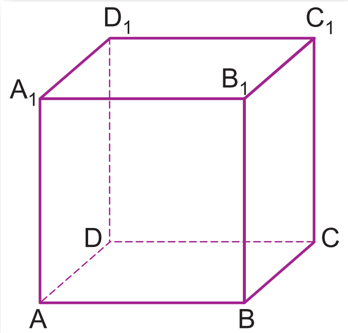


სხვა შემთხვევაში SABC ტეტრაედრის გამოსახულება წარმოადგენს SABC ოთხკუთხედს.

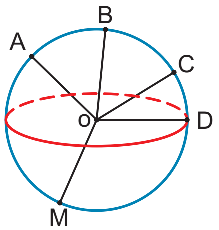




2. პრიზმის გამოსახულება.



თუ დაგეგმილების მიმართულება პარალელურია რომელიმე გვერდითი წიბოსი, მაშინ პრიზმის გამოსახულება არის მრავალკუთხედი, რომელიც ემთხვევა ამ პრიზმის ფუძეს. ყველა სხვა შემთხვევაში პრიზმის გეგმილია ბრტყელი ფიგურა, რომელიც შედგება ორი ტოლი მრავალკუთხედისაგან, რომელზეც პარალელურად არიან განლაგებულნი ($AB\|A_1B_1$; $BC\|B_1C_1$; $CD\|C_1D_1$ და $AD\|A_1D_1$) და ABB_1C_1, BCC_1B_1 და ა.შ. პარალელოგრამებისაგან.

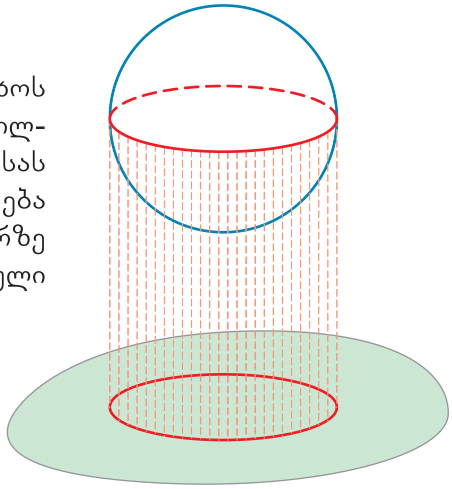


სფერო არის სივრცის მოცემულ წერტილიდან (O ცენტრიდან) თანაბრად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი.

OA=OB=OC=OD=OM=...

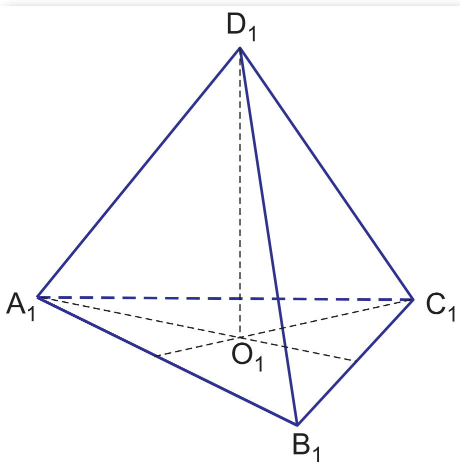
3. სფეროს გამოსახულება.

სფერო მიღებულია გამოისახოს მისი ორთოგონალური გეგმილით. ასევე დაგეგმილებისას სფეროს გამოსახულება იქნება წრეწირი (სფეროს ცენტრზე გამავალი კვეთისას მიღებული წრეწირის ტოლი).



ამოცანა 1

$A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი წარმოადგენს წესიერი სამკუთხა პირამიდის გამოსახულებას. ააგეთ D_1 წვეროდან დაშვებული სიმაღლის გამოსახულება.



ამოხსნა:

სიმაღლის O ფუძე არის პირამიდის ფუძის ცენტრი. ე.ი. ის წარმოადგენს მედიანების გადაკვეთის წერტილს. რადგან სამკუთხედის მედიანები გამოისახება მისი გამოსახულების მედიანებით, ე.ი. D_1 წერტილის გეგმილი არის $\Delta A_1B_1C_1$-ის მედიანების კვეთის წერტილი.

თუ ამ წერეტილს შევაერთებთ D_1 წერტილთან მივიღებთ პირამიდის სიმაღლის გამოსახულებას.

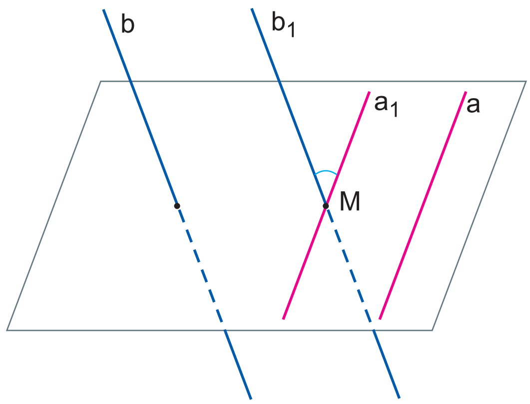
2 კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა

როგორც ვიცით, სივრცეში წრფეების ურთიერთმდებარეობის სამი შემთხვევა არსებობს (მკვეთი, პარალელური, აცდენილი). მკვეთ და პარალელურ წრფეებზე გაივლება სიბრტყე, ამიტომ ასეთ წრფეებს შორის კუთხე განიმარტება ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში:

> თუ ორი წრფე იკვეთება, მაშინ მიღებული ოთხი კუთხიდან იმ კუთხეს, რომელიც დანარჩენებს არ აღემატება, ეწოდება კუთხე ამ ორ წრფეს შორის, ხოლო თუ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე $0°$-ია.

როგორ განვმარტოთ კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის?
ამისათვის გავიხსენოთ პარალელურგვერდებიანი კუთხეების თვისება, რომელიც სივრცეშიც სამართლიანია: პარალელურგვერდებიანი კუთხეები ან ტოლია, ან მათი ჯამი $180°$-ია.

ვთქვათ, a და b აცდენილი წრფეებია. სივრცის ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ $a_1 \| a$ და $b_1 \| b$. a და b აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე ვუწოდოთ a_1 და b_1 ურთიერთგადამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს, სადაც $a_1 \| a$ და $b_1 \| b$. შევნიშნოთ, რომ ამოცანების ამოხსნის დროს, აცდენილ წრფეებს შორის კუთხის დასადგენად მოხერხებულია ერთ-ერთი წრფის რომელიმე წერტილზე გავავლოთ მეორე წრფის პარალელური წრფე.



იმის შემდეგ, რაც განიმარტა კუთხე ორ ნებისმიერ წრფეს შორის სივრცეში, შეგვიძლია შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტება:

> ორ წრფეს სივრცეში **პერპენდიკულარული (მართობული)** ეწოდება, თუ მათ შორის კუთხე $90°$-ია.

a წრფე პერპენდიკულარულია b წრფის, ჩაიწერება ასე: $a \perp b$.

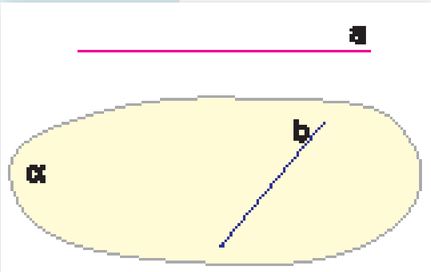
IV
თავი

გავიხსენოთ პლანიმეტრიის თეორემა, რომელიც სამართლიანია სივრცეში მდებარე წრფეებისთვისაც.

დაამტკიცეთ, რომ:
თუ წრფე პარალელურ წრფეთაგან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორის მართობულიცაა.

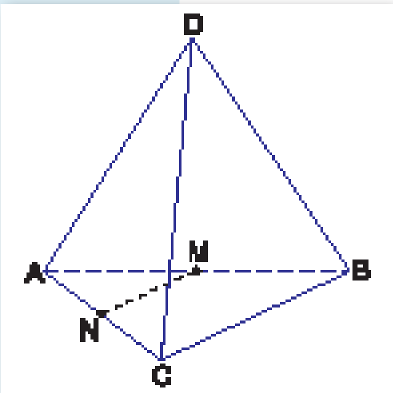
ამოცანა 1

დავამტკიცოთ, რომ თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ იგი აცდენილია ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფისა, რომელიც მოცემული წრფის პარალელური არ არის.



დამტკიცება:

როგორც ვიცით, სივრცეში ორი წრფე ან პარალელურია, ან იკვეთება, ან აცდენილია.
$a \parallel b$ (მოც. თანახმად). რადგან $a \parallel \alpha$, a წრფეს α სიბრტყესთან საერთო წერტილი არ გააჩნია, ე.ი. a და b წრფეები არ იკვეთება.
მაშასადამე, a და b წრფეები აცდენილია. რ.დ.გ.



ამოცანა 2

ABCD ტეტრაედრია. ცნობილია, რომ $BC \perp AD$. დაამტკიცეთ, რომ $AD \perp MN$, სადაც M და N წერტილები AB და AC წიბოების შუაწერტილებია.

დამტკიცება:

AD და BC აცდენილი წრფეებია, ხოლო $MN \parallel BC$, როგორც ABC სამკუთხედის შუახაზი. ე.ი. AD და BC წრფეებს შორის კუთხე AD და MN წრფეებს შორის კუთხის ტოლია. რადგან $AD \perp BC$, ე.ი. $AD \perp MN$. რ.დ.გ.

?

მართალია თუ არა, რომ:

1. პარალელურგვერდებიანი კუთხეები:
ა) აუცილებლად ტოლია; ბ) მათი ჯამი აუცილებლად 180°-ია;
გ) ან ტოლია, ან მათი ჯამი 180°-ია.

2. თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფე მოცემული წრფის:
ა) პარალელურია; გ) თანმკვეთია;
ბ) აცდენილია; დ) ან პარალელურია, ან აცდენილია.

3. თუ ორი წრფიდან თითოეული აცდენილია მესამის; მაშინ ეს ორი წრფე აცდენილია.

სავარჯიშოები:

1 OB და CD წრფეები პარალელურია, OA და CD კი – აცდენილი. იპოვეთ კუთხე OA და CD წრფეებს შორის, თუ:
ა) $\angle AOB=50°$; ბ) $\angle AOB=160°$; გ) $\angle AOB=90°$.

2 a წრფე პარალელურია ABCD პარალელოგრამის BC გვერდის და პარალელოგრამის სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ a და CD წრფეები აცდენილი წრფეებია და იპოვეთ კუთხე მათ შორის, თუ პარალელოგრამის ერთ-ერთი კუთხეა ა) 43°; ბ) 145°.

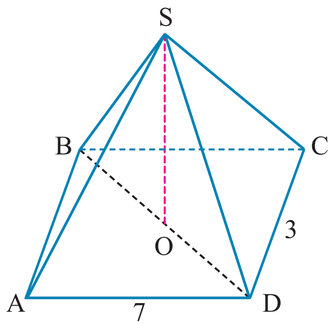
3 a წრფე პარალელურია ABCD რომბის BD დიაგონალის და რომბის სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ
ა) a და AC წრფეები აცდენილია და იპოვეთ კუთხე მათ შორის;
ბ) a და AD წრფეები აცდენილია და იპოვეთ კუთხე მათ შორის, თუ $\angle ABC=115°$.

4* ABCD სივრცულ ოთხკუთხედში AB და CD გვერდები ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD წრფეები BC და AD მონაკვეთების შუაწერტილებზე გამავალ წრფესთან ტოლ კუთხეებს ქმნის.

5 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი, დაამტკიცეთ, რომ:
ა) $DC\perp B_1C_1$ და $AB\perp A_1D_1$, თუ $\angle BAD=90°$;
ბ) $AB\perp CC_1$ და $DD_1\perp A_1B$, თუ $AB\perp DD_1$.

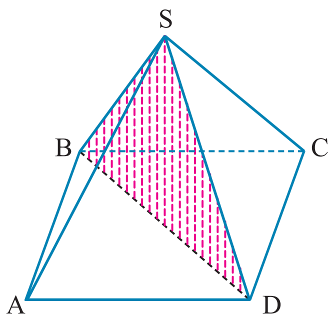
გ

6 SABCD პირამიდის ფუძეა პარალელოგრამი. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების კვეთის წერტილზე. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოები, თუ SO=4სმ, BC=3სმ და DC=7სმ და AC=6 სმ.



7 იპოვეთ წესიერი ა) სამკუთხა, ბ) ოთხკუთხა, გ) ექვსკუთხა პირამიდის აპოთემა, თუ პირამიდის ფუძის გვერდი a და სიმაღლე h.

8 წესიერი ოთკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 14 სმ, გვერდითი წიბო კი 10 სმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.



9 პირამიდაში სიმაღლის შუა წერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთა. ფუძის ფართობია Q. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

ჯგუფური მეცადინეობა

3 წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

წრფე სიბრტყის მართობულია, თუ ის მართობულია ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის.

დაამტკიცეთ მართობული წრფისა და სიბრტყის თვისებები და ამოხსენით ამოცანები.

თვისება 1: თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი მართობულია სიბრტყის, მაშინ მეორეც ამავე სიბრტყის მართობულია.

თვისება 2: თუ ორი წრფე მართობულია ერთი და იმავე სიბრტყისა, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

თვისება 3: თუ α და β სიბრტყეები **a** წრფის მართობულია, ისინი პარალელურია.

თვისება 4: თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან, ერთ-ერთი მოცემული წრფის მართობულია, მაშინ მეორეც მართობულია ამ წრფის.

თვისება 5: სივრცის ნებისმიერ წერტილზე მოცემული წრფის მართობული მხოლოდ ერთი სიბრტყე გადის.

მართალია თუ არა, რომ:

1. თუ a წრფე α სიბრტყის მართობულია, იგი მართობულია ამ სიბრტყეში მდებარე:
ა) ნებისმიერი წრფის; ბ) მხოლოდ იმ წრფეების, რომლებიც a წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გადის; გ) გადაკვეთის წერტილზე გამავალი მხოლოდ ერთი წრფის.

2. თუ ორი წრფე ერთდროულად რომელიღაც სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს წრფეები
ა) იკვეთება; ბ) პარალელურია; გ) აცდენილია.

3. თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორე ამ სიბრტყის
ა) პარალელურია; ბ) მართობულია; გ) პასუხს ვერ გავცემთ.

სავარჯიშოები:

1 a წრფე α სიბრტყის მართობულია. M, A და O წერტილები მდებარეობს a წრფეზე, ხოლო B, O, C და D წერტილები – α სიბრტყეზე. შემდეგი კუთხეებიდან: $\angle AOB$; $\angle MOC$; $\angle DAM$; $\angle DOA$; $\angle BMO$ – რომელია მართი?

2 OA წრფე OBC სიბრტყის მართობულია და O წერტილი AD მონაკვეთის შუაწერტილია. დაამტკიცეთ, რომ ა) AB=DB; ბ) AB=AC, თუ OB=OC; გ) OB=OC, თუ AB=AC.

3 კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია OK წრფე, რომელიც კვადრატის სიბრტყის მართობულია. იპოვეთ მანძილი K წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე, თუ OK=b და კვადრატის გვერდი a-ს ტოლია.

4 ABC სამკუთხედში $\angle C=90°$; AC=6სმ; BC=8სმ. C წვეროზე გავლებულია CK წრფე, რომელიც ABC სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია, ამასთან, CK=12სმ. ვიპოვოთ KM მონაკვეთის სიგრძე, სადაც M წერტილი ABC სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუაწერტილია.

5 CD წრფე ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. სამკუთხედის O ცენტრზე გავლებულია OK წრფე, რომელიც CD წრფის პარალელურია. $AB=16\sqrt{3}$ სმ, OK=12სმ, CD=16სმ. იპოვეთ მანძილი D და K წერტილებიდან სამკუთხედის A და B წვეროებამდე.

6 MN წრფის M და N წერტილებიდან გავლებულია α სიბრტყის მართობული წრფეები, რომლებიც კვეთს ამ სიბრტყეს M_1 და N_1 წერტილებში. იპოვეთ M_1N_1, თუ MN=30სმ, MM_1=43სმ და NN_1=67სმ.

7 გადაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შესაბამის უჯრაში ჩასვით „+“ და „-“ ნიშნები.

① იკვეთება (არა მართი კუთხით)

② პარალელურია

③ მართობულია

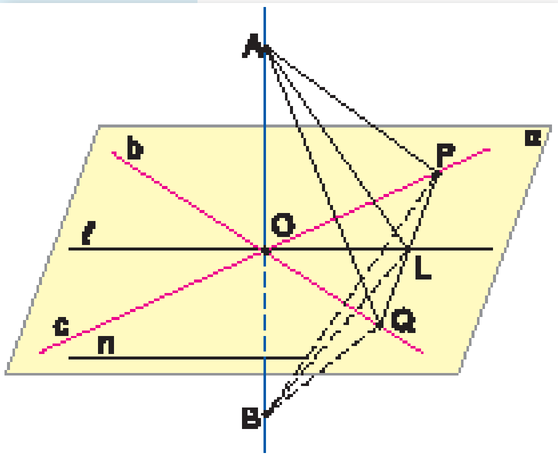
N		①	②	③
I	თუ ორი წრფე ერთდროულად რომელიღაც სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს წრფეები			
II	თუ ორი ოარალელური წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორე წრფე ამ სიბრტყის			
III	თუ ორი სიბრტყე რეალაც წრფის მართობულია, მაშინ ეს ორი სიბრტყე			
IV	თუ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია და $b\in\alpha$, მაშინ a და b წრფეები			
V	α და β სიბრტყეები პარალელურია c წრფე α სიბრტყის მართობულია, მაშინ c წრფე და β სიბრტყე			

4 წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ განიმარტება წრფისა და სიბრტყის მართობულობა, მაგრამ როგორ შევამოწმოთ, მოცემული წრფე არის თუ არა მოცემული სიბრტყის მართობული? ამის გაკეთება განმარტებაზე დაყრდნობით პრაქტიკულად შეუძლებელია. დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც წრფის და სიბრტყის მართობულობის ნიშანს წარმოადგენს.

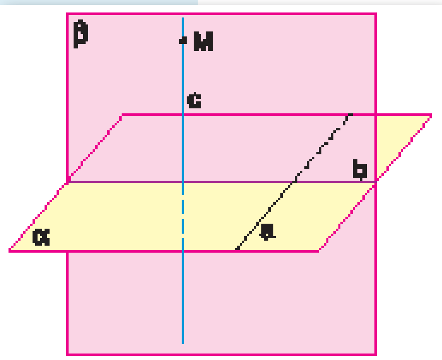
თეორემა:

თუ წრფე მართობულია სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფისა, მაშინ იგი ამ სიბრტყის მართობულია.



განვიხილოთ შემთხვევა, როცა a წრფე გადის α სიბრტყეში მდებარე b და c წრფეების გადაკვეთის 0 წერტილზე. იმის საჩვენებლად, რომ $a\perp\alpha$, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ a მართობულია α სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი n წრფის. გავავლოთ O წერტილზე n წრფის პარალელური ℓ წრფე. a წრფეზე, O წერტილის სხვადასხვა მხარეს, ავიღოთ A და B წერტილები ისე, რომ AO=OB. PO და QO მონაკვეთები AB მონაკვეთის შუამართობებს წარმოადგენს, ამიტომ AP=BP და AQ=BQ, ე.ი. $\Delta APQ=\Delta BPQ$ სამკუთხედების ტოლობის III ნიშნის თანახმად. სამკუთხედების ტოლობის გამო $\angle APL=\angle BPL$. ახლა განვიხილოთ APL და BPL სამკუთხედები. ისინი ტოლია სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნის თანახმად, ე.ი. AL=BL. ტოლფერდა ALB სამკუთხედში LO წარმოადგენს მედიანას, ამიტომ იგი სიმაღლეცაა და $LO\perp AB$. ე.ი. $\ell\perp a$, მაგრამ რადგან $n\parallel\ell$, მივიღეთ $a\perp n$, სადაც n წრფე α სიბრტყის ნებისმიერი წრფეა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა a წრფე არ გადის b და c წრფეების გადაკვეთის O წერტილზე. O წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური a_1 წრფე, რომელიც, ცხადია, მართობულია b და c წრფეების, ე.ი. $a_1\perp\alpha$ და რადგან $a\parallel a_1$, ამიტომ $a\perp\alpha$. თეორემა დამტკიცებულია.



დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა:

სივრცის ნებისმიერ წერტილზე გაივლება მოცემული სიბრტყის მართობული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

მოცემული გვაქვს α სიბრტყე და M წერტილი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ M წერტილზე გაივლება α სიბრტყის მართობული ერთადერთი წრფე.

ავიღოთ α სიბრტყეზე ნებისმიერი a წრფე და β სიბრტყე,

რომელიც M წერტილზე გადის და a წრფის მართობულია. α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე აღვნიშნოთ b ასოთი. M წერტილზე β სიბრტყეში გავავლოთ b წრფის მართობული c წრფე. c წრფე ამავე დროს a წრფის მართობულიცაა, რადგან $a \perp \beta$. ე.ი. c წრფე მართობულია α სიბრტყეში მდებარე a და b გადამკვეთი წრფეების, მაშასადამე, $c \perp \alpha$.
იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ასეთი წრფის ერთადერთობა, დავუშვათ, რომ M წერტილზე გავავლეთ მეორე – c_1 წრფე ისე, რომ $c_1 \perp \alpha$. მაშინ c და c_1 წრფეები პარალელური იქნება (ორივე α სიბრტყის მართობულია), რაც შეუძლებელია, იმიტომ, რომ ორივე M წერტილზე გადის. რ.დ.გ.

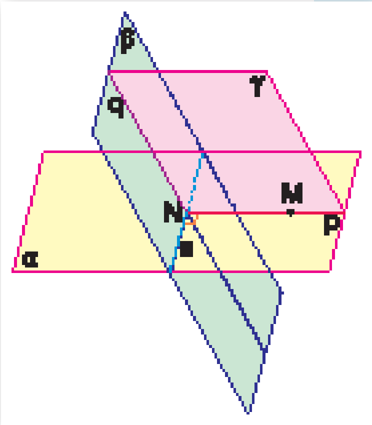
ამოცანა 1.

დავამტკიცოთ, რომ სივრცის ნებისმიერ წერტილზე გადის მოცემული წრფის მართობული სიბრტყე.

ს.ფ.

დამტკიცება:

ვთქვათ, მოცემულია a წრფე და M წერტილი.
a წრფეზე გავავლოთ α და β სიბრტყეები ისე, რომ M წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნოდეს. α სიბრტყეში M წერტილზე გავავლოთ a წრფის მართობული p წრფე, ხოლო β სიბრტყეში p და a წრფეების გადაკვეთის N წერტილზე – a წრფის მართობული q წრფე. განვიხილოთ p და q წრფეებზე გამავალი γ სიბრტყე. a წრფე მართობულია ამ სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი p და q წრფეების, ე.ი. a წრფე γ სიბრტყის მართობულია. γ საძიებელი სიბრტყეა.

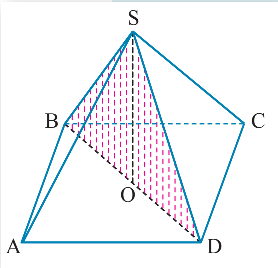


ამოცანა 2.

დაამტკიცეთ, რომ წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში დიაგონალური კვეთა ფუძის სიბრტყის მართობელა.

დამტკიცება:

დიაგონალური კვეთაა ΔSAC იგი გადის წრფეზე, რომელიც ფუძის სიბრტყის მართობულა. სიბრტყეთა მართობელობის ნიშნის თანახმად, ASC სიბრტყე მართობულია ABCD სიბრტყისა. რდ.გ.

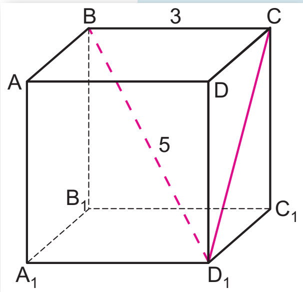


ამოცანა 3.

ნახაზის მიხედვით იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის DCC_1D_1 წახნაგს CD_1 დიაგონალი, თუ BC=3 და BD_1=5.

ამოხსნა:

$BC \perp CC_1$ და $BC \perp DC_1$ (რადგან ABCD და DCC_1D_1 მართკუთხედებია). ე.ი. BC მართობულია სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის. მაშასადამე, $BC \perp DCC_1D_1$ სიბრტყის, საიდანაც დავასკვნით, რომ $BC \perp CD_1$, რის შემდეგაც $\Delta BCD_1 \Rightarrow CD_1=4$.



■ მართალია თუ არა, რომ:

1. სივრცის ნებისმიერი წერტილიდან შესაძლებელია მოცემული სიბრტყის მართობული მხოლოდ ერთი წრფის გავლება.

წრფე სიბრტყის მართობულია, თუ იგი მართობულია ამ სიბრტყეში მდებარე:

2. ორი ნებისმიერი წრფის;

3. ორი გადამკვეთი წრფის;

4. ორი წრფის, რომელთაც საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.

სავარჯიშოები:

1. იმისათვის, რომ ხის ძელი გახერხოს წიბოს პერპენდიკულარულად, წიბოს A წერტილიდან ავლებენ წიბოს მართობულ AB და AC წრფეებს და გახერხვას აწარმოებენ ამ წრფეებზე. სწორად იქცევიან თუ არა? (პასუხი ახსენით).

2. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში AC=BC=10სმ. AB ფუძე 12 სმ-ის ტოლია. C წერტილზე გავლებულ წრფეზე, რომელიც CB და CA გვერდების მართობულია, აღებულია M წერტილი ისე, რომ MC=15სმ. იპოვეთ MD მონაკვეთის სიგრძე, სადაც D წერტილი AB ფუძის შუაწერტილია.

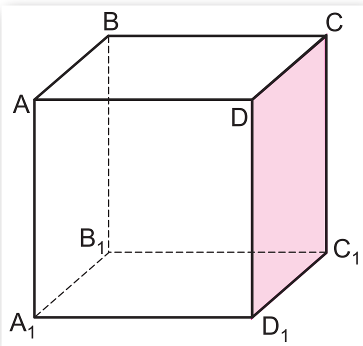
3. ABC სამკუთხედის A და B კუთხეების ჯამი 90°-ია. BD წრფე ABC სიბრტყის მართობულია. დაამტკიცეთ, რომ $CD \perp AC$.

4. ABCD პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია OM წრფე ისე, რომ MA=MC და MB=MD. დაამტკიცეთ, რომ OM წრფე პარალელოგრამის სიბრტყის მართობულია.

5. ABCD კვადრატის A წვეროდან გავლებულია AM წრფე ისე, რომ $\angle MAB = \angle MAD = 90°$. ცნობილია, რომ კვადრატის გვერდი $6\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო MA 5 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან:

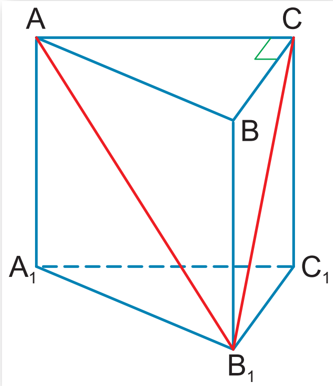
ა) კვადრატის წვეროებამდე;

ბ) კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე.



6 ნახაზზე მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართხკუთხა პარალელეპიპედი. დაასახელეთ DCC_1D_1 წახნაგის მართობული ყველა წრფე. პასუხი დაასაბუთეთ წრფისა და სიბრტყის მართობელობის ნიშნით.

7 მართი პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი. $\angle C=90°$. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ AB_1, თუ $AC=5$ სმ, $CB_1=12$ სმ.



გ

8 მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 და 4. მათ შორის კუთხე კი $\alpha=60°$ გვერდითი წიბო ფუძის გვერდების საშუალო პროპორციულია. გავიგოთ ამ პარალელეპიპედის დიაგონალების სიგრძეები.

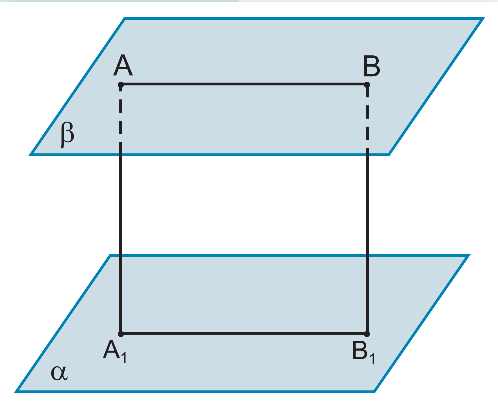
9 მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 1 დმ. ფუძის გვერდები კი 23 დმ და 11 დმ. ფუძის დიაგონალების შეფარდებაა 2:3. იპოვეთ დიაგონალური კვეთების ფართობები.

10 მართი პრიზმის ფუძე რომბია პრიზმის დიაგონალებია 8 სმ და 5 სმ. სიმაღლე კი 2 სმ. იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე.

11 რამდენი დიაგონალი გაივლება:

ა) ოთხკუთხა, ბ) ექვსკუთხა პრიზმაში?

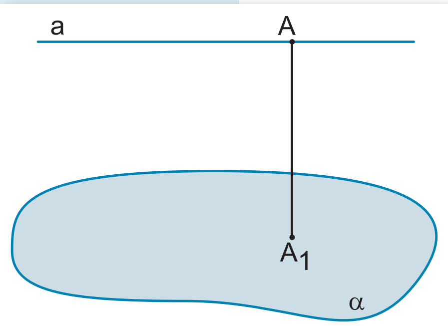
5 პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი



ჩვენ უკვე ვიცით, რას ეწოდება წერტილიდან წრფემდე მანძილი. ახლა განვმარტოთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის.

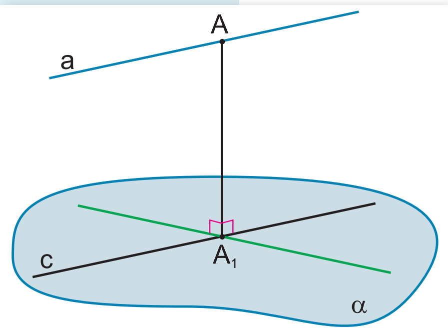
ცხადია, რომ თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთი სიბრტყის ყოველი წერტილი ერთი და იმავე მანძილით არის დაშორებული მეორე სიბრტყიდან. მართლაც, $AA_1 \perp \alpha$ და $BB_1 \perp \alpha$, ე.ი. $AA_1 \parallel BB_1$, ხოლო პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული პარალელურ წრფეთა მონაკვეთები ტოლია, $AA_1 = BB_1$.

ორი პარალელური სიბრტყიდან, ერთ-ერთის ნებისმიერი წერტილიდან მეორეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი ეწოდება.



თუ წრფე პარალელურია რაიმე სიბრტყის, მაშინ მისი წერტილები თანაბრად არის დაშორებული მოცემული სიბრტყიდან (დაამტკიცეთ თავად). ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ მანძილი წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის არის მანძილი ამ წრფის ნებისმიერი წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე. ნახაზზე $a \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$. AA_1 არის მანძილი a წრფიდან α სიბრტყემდე.

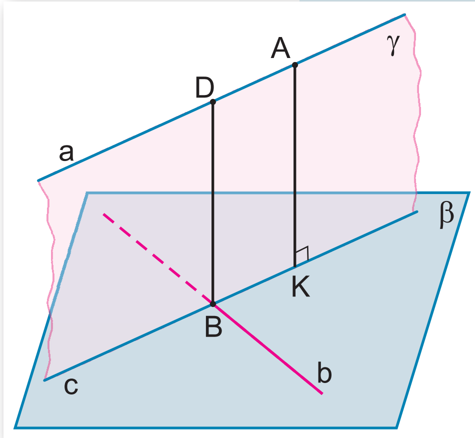
როცა ვამბობთ, რომ ქუჩის განათების ნათურა მიწიდან დაშორებულია 6 მ-ით, ვგულისხმობთ, რომ მანძილი ნათურიდან ქუჩის ზედაპირამდე წარმოადგენს ნათურიდან ზედაპირზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს.



ახლა განვმარტოთ მანძილი ორ აცდენილ წრფეს შორის.

როგორც ვიცით, ორი აცდენილი წრფიდან თითოეულზე შეიძლება გავავლოთ მეორე წრფის პარალელური სიბრტყე. მანძილს ამ სიბრტყესა და მეორე წრფეს შორის, ვუწოდოთ მანძილი მოცემულ აცდენილ წრფეებს შორის. მე-5 ნახ-ზე a და b აცდენილი წრფეებია, $\alpha \parallel a$, c მდებარეობს α-ზე და $c \parallel a$. AA_1 მონაკვეთის სიგრძე წარმოადგენს მანძილს a და b წრფეებს შორის.

ვაჩვენოთ, რომ ორი აცდენილი წრფისთვის ყოველთვის არსებობს მონაკვეთი, რომელიც ორივეს მართობულია და წარმოადგენს მანძილს ამ ორ აცდენილ წრფეს შორის.

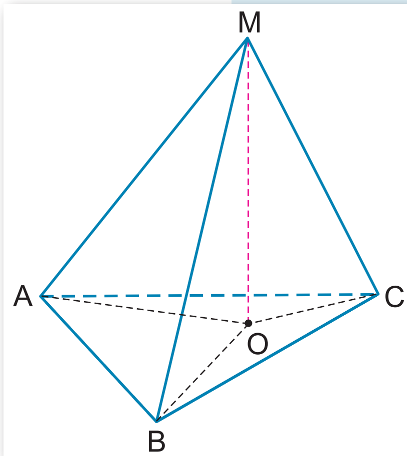


გავატაროთ b წრფეზე a წრფის პარალელური β სიბრტყე. a წრფის ნებისმიერი A წერტილიდან დავუშვათ მართობი β სიბრტყეზე (AK⊥β).
a და AK წრფეებზე გავატაროთ γ სიბრტყე. c წრფე β და γ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეა. ცხადია, c და b წრფეები იკვეთება. მათი გადაკვეთის B წერტილზე γ სიბრტყეში გავავლოთ BD||AK. რადგან AK⊥β, ამიტომ BD ⊥β, ე.ი. BD⊥b. ამავე დროს DB⊥c, ხოლო c||a. ე.ი. DB⊥a.

ამოცანა:

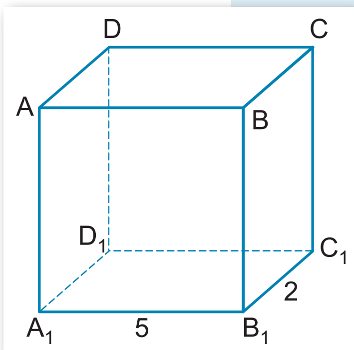
დავამტკიცოთ, რომ თუ წერტილი თანაბრად არის დაშორებული მრავალკუთხედის ყველა წვეროდან, მაშინ ამ წერტილის გეგმილი მრავალკუთხედის სიბრტყეზე არის მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი.

დამტკიცება:



განვიხილოთ ამოცანა M წერტილისა და ABC სამკუთხედისთვის. მოცემული გვაქვს, რომ MA=MB=MC, ხოლო MO⊥(ABC) უ.დ., რომ O წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.
როგორც ვიცით, ერთი წერტილიდან გავლებულ ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ, ე.ი. OA=OB=OC, რაც იმას ნიშნავს, რომ O წერტილი თანაბრად არის დაშორებული სამკუთხედის ყველა წვეროდან, ე.ი. ის შემოხაზული წრეწირის ცენტრია. შევნიშნოთ, რომ დამტკიცება ნებისმიერი მრავალკუთხედის შემთხვევაში ანალოგიურია.

სავარჯიშოები:



1 ნახაზზე მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი:
ა) დაასახელეთ აცდენილ წრფეთა წყვილები და იპოვეთ მათ შორის მანძილი;
ბ) დაასახელეთ პარალელური სიბრტყეები და იპოვეთ მათ შორის მანძილი.

2 პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფუძეა 6 სმ, სიმაღლე კი 9 სმ. პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია და უდრის 13 სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

3 პირამიდის ფუძე მართკუთხედია, რომლის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ. პირამიდის გვერდითი წიბო 13 სმ–ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

4 დაამტკიცეთ, რომ თუ პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე, მაშინ ამ პირამიდის წვერო ფუძეში მდებარე მრავალკუთხედის წვეროებიდან თანაბრადაა დაშორებული.

5 მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია 1 მ, 2 მ და 3 მ. იპოვეთ პარალელური წახნაგების აცდენილ დიაგონალებს შორის მანძილი.

გ

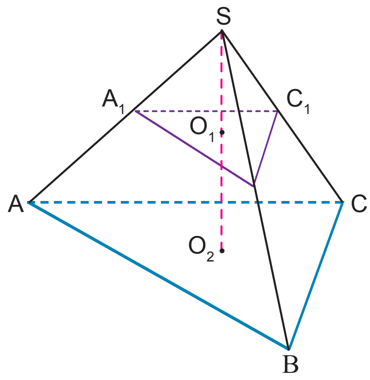
ს.ფ.

6* დაამტკიცეთ, რომ თუ პირამიდაში გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყე, მაშინ:

ა) კვეთაში მიღებული მრავალკუთხედი ფუძის მსგავსია;

ბ) $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC} = \dfrac{SO_1^2}{SO_2^2}$

(იხილეთ ნახაზი).



7 პირამიდის სიმაღლე გაყოფილია 4 ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყეები. იპოვეთ მიღებული კვეთების ფართობები, თუ ფუძის ფართობია 400 მ^2.

8 ფუძის პარალელური კვეთა ყოფს პირამიდის სიმაღლეს შეფარდებით 3:4 (წვეროს მხრიდან) კვეთის ფართობი ნაკლებია ფუძის ფართობზე 200 სმ^2–ით. იპოვეთ ფუძის ფართობი.

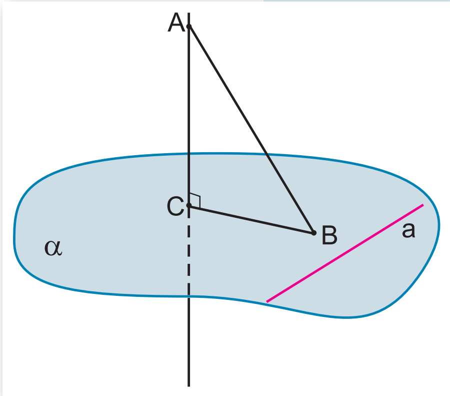
9 პირამიდის სიმაღლეა 16 მ, ფუძის ფართობი კი 512 მ^2. ფუძიდან რა მანძილზეა მისი პარალელური კვეთა, რომილის ფართობია 50 მ^2.

10 პირამიდის ფუძის ფართობია 150 სმ^2, პარალელური კვეთის ფართობი კი 54 სმ^2. მანძილი ამ კვეთისა და ფუძის სიბრტყეს შორის 14 სმ–ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

5 სამი მართობის თეორემა

სამი მართობის თეორემა:

თუ სიბრტყეში მდებარე წრფე მართობულია ამ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის გეგმილის, მაშინ იგი ამ დახრილის მართობულია.



ნახაზზე $AC\perp\alpha$, ე.ი. AC წრფე მართობულია a წრფის, ამავე დროს, თეორემის პირობის თანახმად, $CB\perp a$, ე.ი. a წრფე მართობულია ACB სიბრტყისა და ცხადია, მასში მდებარე ნებისმიერი წრფის, კერძოდ, AB-სი. რ.დ.გ.

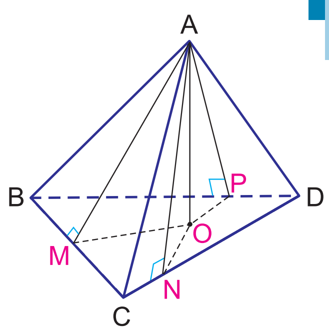
სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

თეორემა:

თუ სიბრტყეში მდებარე წრფე მართობულია ამ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის, მაშინ იგი ამავე სიბრტყეზე დახრილი გეგმილის მართობულიცაა.

დაამტკიცეთ დამოუკიდებლად.

ამოცანა 1



ს.ფ.

დავამტკიცოთ, რომ თუ სიბრტყეზე არამდებარე წერტილიდან ამ სიბრტყეში მდებარე მრავალკუთხედის გვერდებამდე მანძილები* ტოლია, მაშინ ამ წერტილის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია.

როგორც წინა პარაგრაფის ამოცანის ამოხსნის დროს შევნიშნეთ, დამტკიცება შეიძლება ჩავატაროთ სამკუთხედისთვის. სხვა მრავალკუთხედებისთვის დამტკიცება ანალოგიურია.

ამოცანის პირობის თანახმად, $AM\perp BC$; $AP\perp BD$; $AN\perp CD$, სამი მართობის თეორემის თანახმად, $OM\perp BC$; $OP\perp BD$ და $ON\perp CD$, მაგრამ რადგან $AM=AN=AP$, ვღებულობთ $OM=ON=OP$ (ტოლი სიგრძის დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვს), ე.ი. O ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. რ.დ.გ.

მართალია თუ არა, რომ:

1. თუ სიბრტყეში მდებარე წრფე მართობულია ამ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის, მაშინ იგი დახრილის გეგმილთან ადგენს:
ა) 60°-იან კუთხეს; ბ) 45°-იან კუთხეს; გ) 90°-იან კუთხეს.

* გვერდებამდე მანძილებში იგულისხმება, რომ გვერდების შემცველი წრფეებისადმი გავლებული მართობების ფუძეები გვერდების შესაბამისი მონაკვეთების შიგა წერტილებია.

- თუ სიბრტყეზე არამდებარე წერტილიდან ამ სიბრტყეში მდებარე სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილები ტოლია, მაშინ ამ წერტილის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე აუცილებლად:
  2. შემოხაზული წრეწირის ცენტრია;
  3. ჩახაზული წრეწირის ცენტრია;
  4. მედიანების გადაკვეთის წერტილია.

სავარჯიშოები:

1 სიბრტყეზე გავლებულია ორი პარალელური წრფე, რომელთა შორის მანძილი 12-ის ტოლია. A წერტილი ამ წრფეებიდან თანაბრადაა დაშორებული, ხოლო სიბრტყიდან კი $\sqrt{13}$-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან წრფეებამდე.

2 AB და CD პარალელური წრფეები ძევს α სიბრტყეზე ერთმანეთისაგან 28 სმ-ის დაშორებით. AB-ს პარალელური EF წრფე მისგან 17 სმ-ითაა დაშორებული, α სიბრტყიდან კი – 15 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი EF-სა და CD-ს შორის (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

3 A წერტილიდან კვადრატის ყველა გვერდამდე მანძილი a-ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე, თუ კვადრატის დიაგონალი d-ს ტოლია.

4 M წერტილი წესიერი სამკუთხედის ყველა წვეროდან დაშორებულია 5 სმ-ით, ხოლო გვერდებიდან $\sqrt{13}$ სმ-ით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

5 ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის A წვეროდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი. იპოვეთ მანძილი D წერტილიდან BC გვერდამდე, თუ AD=13 სმ, BC=6 სმ.

6 S წერტილი წესიერი ექვსკუთხედის ყველა წვეროდან დაშორებულია $\sqrt{10}$ სმ-ით, ხოლო ყველა გვერდიდან $\sqrt{8}$ სმ-ით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ექვსკუთხედის მცირე დიაგონალამდე.

7 რომბის გვერდია a, ხოლო მახვილი კუთხე 60°. M წერტილი 2a მანძილითაა დაშორებული ყველა იმ წრფიდან, რომლებზედაც რომბის გვერდები მდებარეობს. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან რომბის ბლაგვი კუთხის წვერომდე, თუ $a=\sqrt{65}$.

გ

8 წვეროდან რა მანძილზე უნდა გავავლოთ ფუძის პარალელური კვეთა, რომ კვეთის ფართობი იყო ფუძის ფართობის: ა) მესამედი, ბ) მეხუთედი, თუ პირამიდის სიმაღლეა h.

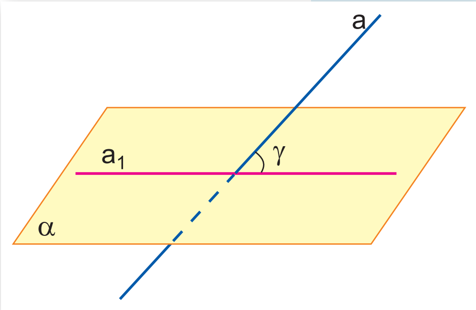
9 გამოთვალეთ წესიერი: ა) სამკუთხა, ბ) ოთხკუთხა, გ) ექვსკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ მოცემულია ფუძის გვერდი a და აპოთემა h-ით.

7 კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის

განვმარტოთ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევები, როცა წრფე პარალელურია სიბრტყის ან როცა წრფე მართობულია სიბრტყის.

შევთანხმდეთ, რომ კუთხე წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის ჩავთვალოთ 0°-ად, ხოლო თუ წრფე სიბრტყის მართობულია, მაშინ მათ შორის კუთხე 90°-ია.

კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, რომელსაც არამართობულად კვეთს მოცემული წრფე, ეწოდება კუთხეს ამ წრფესა და მის გეგმილს შორის.



ნახაზზე a_1 არის a წრფის გეგმილი, ხოლო γ – a და a_1 წრფეებს შორის კუთხეა. განმარტების თანახმად, γ იქნება კუთხე a წრფესა და α სიბრტყეს შორის.

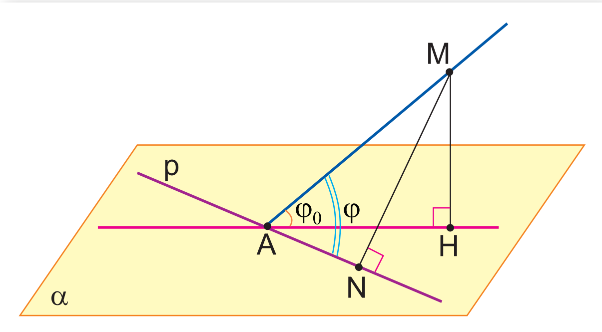
ამოცანა 1

ს.ფ.

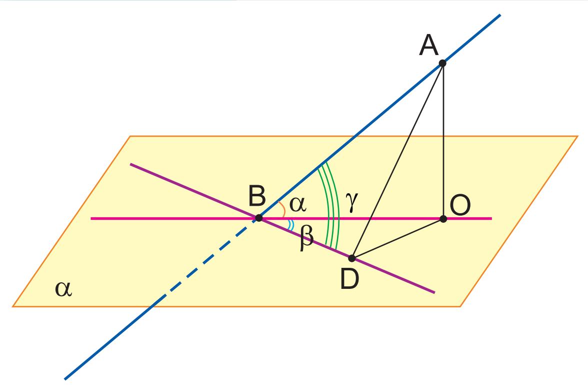
MA წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში და ადგენს α სიბრტყესთან $\varphi_0 \neq 90°$ კუთხეს. დავამტკიცოთ, რომ φ_0 უმცირესია იმ კუთხეთა შორის, რომელთაც MA წრფე ადგენს α სიბრტყის A წერტილზე გამავალ ნებისმიერ წრფესთან.

M წერტილიდან გავავლოთ $MH \perp \alpha$ და განვიხილოთ ნებისმიერი p წრფე α სიბრტყეში, რომელიც გადის A წერტილზე და განსხვავდება AH წრფისგან. AM და p წრფეებს შორის კუთხე აღვნიშნოთ φ ასოთი.

M წერტილიდან გავავლოთ $MN \perp p$, თუ N ემთხვევა A-ს, მაშინ $\varphi = 90°$, და, ცხადია, $\varphi > \varphi_0$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა N წერტილი A-სგან განსხვავებული წერტილია, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. მართკუთხა AMN და AMH სამკუთხედებისთვის AM ჰიპოტენუზაა და $\sin\varphi = \frac{MN}{AM}$, ხოლო $\sin\varphi_0 = \frac{MH}{AM}$ მაგრამ $MN > MH$ (MN დახრილია და MH მართობი), ე.ი. $\sin\varphi > \sin\varphi_0$, საიდანაც $\varphi > \varphi_0$. რ.დ.გ.



ამოცანა 2



AB წრფე φ სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს, ხოლო B წერტილზე გავლებულ BD წრფესთან – γ კუთხეს. კუთხე AB წრფის გეგმილსა და BD წრფეს შორის β-ს ტოლია. დავამტკიცოთ, რომ $\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

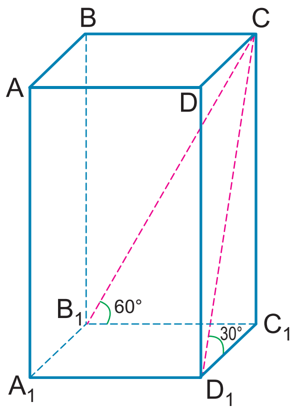
ამოხსნა:

ΔABO-დან $OB = OB\cos\alpha$, ხოლო ΔOBD-დან $BD = OB\cos\beta$. ვღებულობთ $BD = AB\cos\alpha\cos\beta$, მაგრამ ΔABD-ში $BD = AB\cos\gamma$, საიდანაც $AB\cos\alpha\cos\beta = AB\cos\gamma$, ე.ი. $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. რ.დ.გ.

ამოცანა 3

მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წახნაგების დიაგონალები ფუძის სიბრტყესთან ქმნიან 30° და 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედს დიაგონალის ფუძის სიბრტყესთან დახრის კუთხის ტანგენსი.

ამოხსნა:



განმარტების თანახმად წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ტოლია წრფესა და მის გეგმილს შორის კუთხის. რადგან $CC_1\perp(A_1B_1C_1D_1)$ სიბრტყის, ამიტომ C_1D_1 არის CD_1-ის გეგმილი, ხოლო B_1C_1 კი CB_1-ის გეგმილი. ე.ი. $\angle CD_1C_1=30°$ და $\angle CB_1C_1=60°$.

$CC_1\equiv x$. $\Delta CC_1D_1\Rightarrow C_1D_1=x\sqrt{3}\Rightarrow B_1C_1=\frac{x}{\sqrt{3}}$, ხოლო ΔCB_1C_1

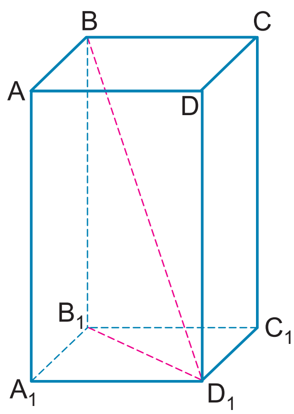
$A_1B_1C_1D_1$ მართკუთხედის დიაგონალი იქნება

$$B_1D_1=\sqrt{3x^2+\frac{x^2}{3}}=\sqrt{\frac{9x^2+x^2}{3}}=x\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$

რათა ნახაზი არ გადაიტვირთოს სასურველია ნახაზი თავიდან შევასრულოთ.

ΔBB_1D_1-ში BD_1 არის პარალელეპიპედის დიაგონალი. B_1D_1 ამ დიაგონალის გეგმილია. ე.ი. საძიებელი კუთხეა $\angle BD_1B_1\equiv\alpha$.

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{BB_1}{B_1D_1}=\frac{\cancel{x}\sqrt{3}}{\cancel{x}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}.$$



მართალია თუ არა, რომ:

1. თუ კუთხე AM=a დახრილსა და α სიბრტყეს შორის 60°-ია. მაშინ AM დახრილის გეგმილის სიგრძე α სიბრტყეზე ტოლია:

ა) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{a}{2}$; გ) a.

2. ცნობილია, რომ a წრფესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 30°-ის ტოლია, მაშინ კუთხე a წრფესა და α სიბრტყის ნებისმიერ მართობს შორის არის:

ა) 30°; ბ) 45°; გ) 60°.

სავარჯიშოები:

1 α სიბრტყისადმი A წერტილიდან გავლებული AM დახრილი a-ს ტოლია. რისი ტოლია ამ დახრილის გეგმილის სიგრძე, თუ დახრილს და სიბრტყეს შორის კუთხე ტოლია: ა) 45°; ბ) 60°; გ) 30°?

2 წესიერი სამკუთხედის გვერდი $7\sqrt{6}$-ის ტოლია. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ სამკუთხედის წვეროებთან მისი შემაერთებელი მონაკვეთები სამკუთხედის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე.

3 წესიერი სამკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ სამკუთხედის ყველა წვეროსა და M წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთები სამკუთხედის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ a=7, $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

4 სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ სამკუთხედის ყველა წვეროსა და M წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთები სამკუთხედის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე, თუ a=30, b=5, c=29, $\cos\alpha = \frac{4}{28}$.

5 ABC სამკუთხედში AB=13 სმ, BC=14 სმ, AC=15 სმ. დიდი გვერდის D შუაწერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია DM მართობი. M წერტილიდან საშუალო გვერდისადმი დაშვებულია MK მართობი, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ MDK სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი.

6 BA სხივი CBD კუთხის სიბრტყეში არ მდებარეობს. ცნობილია, რომ ∠ABC=∠ABD, ამასთან, ∠ABC<90°. დაამტკიცეთ, რომ BA სხივის გეგმილი CBD სიბრტყეზე CBD კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს.

7 როდის უფრო გრძელია ადამიანის ჩრდილი მზიან ამინდში – მაშინ, როცა მზის სხივი დედამიწის ზედაპირთან 35°-იან კუთხეს ადგენს, თუ 70°-იანი კუთხის შემთხვევაში?

8 მართკუთხა პარალელეპიპედის d დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს, ხოლო გვერდით წახნაგთან β სიდიდის კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სამივე განზომილება, თუ $d=2\sqrt[4]{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$.

9 მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი წახნაგების დიაგონალები ფუძის სიბრტყესთან ქმნიან α და β კუთხეებს იპოვეთ პარალელეპიპედია დიაგონალის მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე, თუ $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$ და $\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3სმ და 5 სმ, ხოლო ფუძის ერთ–ერთი დიაგონალია 4 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი, თუ ვიცით, რომ მისი მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს.

11 მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი, გვერდით $a=12$ და α ბლაგვი კუთხით. $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი (ყველა გვერდითი წახნაგის ფართობია ჯამი), თუ პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს $\mathrm{ctg}\beta=8$.

12 წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალის სიგრძეა $d=3\sqrt{3}$ და დახრილია გვერდითი წახნაგისადმი α კუთხით. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ იპოვეთ პრიზმის გვერდითი წიბოს სიგრძე.

13* წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძეა 7. ეს წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს, სადაც $\cos\alpha=\frac{6}{7}$ ფუძის დიაგონალზე გვერდითი წიბოს პარალელურად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ ამ სიბრტყით მიღებულ კვეთის ფართობი.

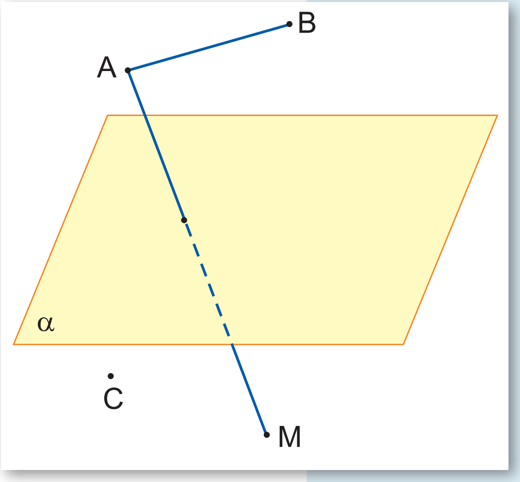
ბ

14 იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მოცემულია პირამიდის სიმაღლე h და გვერდითი ზედაპირის ფართობი P.

15 წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო კი სიმაღლესთან ადგენს 30°–იან კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე, თუ ფუძის გვერდია $2\sqrt{3}$.

16 იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა 4 სმ და აპოთემის სიგრძეა 8 სმ.

8 ორწახნაგა კუთხე

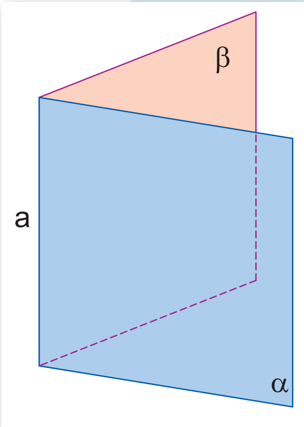


ნებისმიერი სიბრტყე სივრცეს ორ ნაწილად ყოფს. თითოეულ მათგანს ამ სიბრტყესთან ერთად, **ნახევარსივრცე** ვუწოდოთ, ამ სიბრტყეს კი **ნახევარსივრცის საზღვარი**.

ნახევარსივრცე აღვნიშნოთ ასე: (α;A), სადაც α ნახევარსივრცის საზღვარია, ხოლო A მასზე არამდებარე ნებისმიერი წერტილი. ნახაზზე (α;A) და (α;B) ერთსა და იმავე ნახევარსივრცეს ღნიშნავს, ხოლო (α;C) და (α;M) α საზღვრის მქონე მეორე ნახევარსივრცეს. ნახაზზე ჩანს, რომ AM მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს, ხოლო AB მონაკვეთი α სიბრტყეს არ კვეთს.

თუ მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს, მონაკვეთის ბოლოები ამ სიბრტყის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსივრცეებში მდებარეობს; ხოლო თუ მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს, მაშინ მისი ბოლოები ამ სიბრტყის მიმართ ერთ ნახევარსივრცეშია.

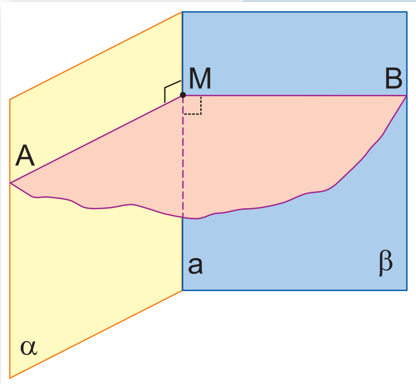
? პლანიმეტრიაში კუთხე სიბრტყის ნაწილია. გარდა ბრტყელი კუთხეებისა, როგორი კუთხეები გვხვდება სივრცეში?



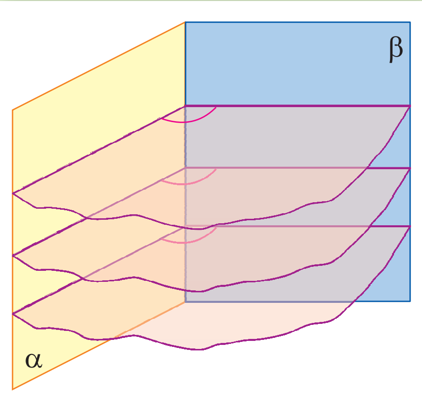
ავიღოთ ორი, ერთი და იმავე საზღვრის მქონე ნახევარსიბრტყე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, სივრცე გაიყო ორ ნაწილად. შევთანხმდეთ, სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც ნებისმიერი ამ ნახევარსიბრტყის შემცველი სიბრტყის მიმართ ერთ ნახევარსივრცეში მოთავსდება, ამ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად, ორწახნაგა კუთხე ვუწოდოთ. თვითონ ნახევარსიბრტყეებს – ორწახნაგა კუთხის წახნაგები, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბო. ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე არამდებარე ნებისმიერ წერტილს ორწახნაგა კუთხის შიგა წერტილი ვუწოდოთ.

ორწახნაგა კუთხეს ქმნის ოთახის ორი მოსაზღვრე კედელი, ნახევრადგაშლილი წიგნის ფურცლები ერთმანეთთან და ა.შ.

? ჩვენ ვიცით ბრტყელი კუთხეების გაზომვა, მათი შედარება ერთმანეთთან. როგორ გავზომოთ ორწახნაგა კუთხე?



მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ორწახნაგა კუთხის წიბოზე ნებისმიერი M წერტილი და კუთხის წახნაგებზე გავავლოთ წიბოს მართობული სხივები MA⊥a და MB⊥a, ცხადია, MA და MB სხივებზე გაივლება სიბრტყე, რომლის კვეთა ორწახნაგა კუთხესთან მოგვცემს AMB კუთხეს. AMB კუთხეს მოცემული ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე ვუწოდოთ.



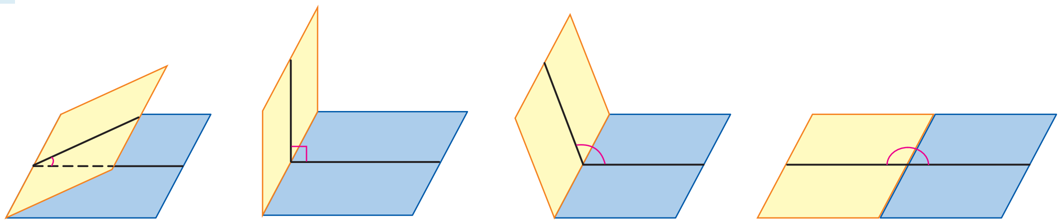
დაამტკიცეთ, რომ

წრფივი კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული M წერტილის შერჩევაზე, ე.ი. მოცემული ორწახნაგა კუთხის ყველა წრფივი კუთხე ტოლია.

შევთანხმდეთ, რომ ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა შესაბამისი წრფივი კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია.

- ორწახნაგა კუთხეები ითვლება ტოლად, თუ მათი შესაბამისი წრფივი კუთხეები ტოლია.

ცხადია, ორწახნაგა კუთხეც შეიძლება იყოს მახვილი, მართი, ბლაგვი და გაშლილი.



მართალია თუ არა, რომ:

თუ ტეტრაედრის გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყესთან ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს ქმნის, მაშინ ტეტრაედრის წვეროს გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე არის ტეტრაედრის ფუძის:

1. მედიანების გადაკვეთის წერტილი;

2. ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი;

3. გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი.

თუ ორწახნაგა კუთხის წიბოზე აღებულია სამი წერტილი და სამივეზე გავლებულია წიბოს მართობული სიბრტყეები, მაშინ მიღებული ბრტყელი კუთხეებიდან:

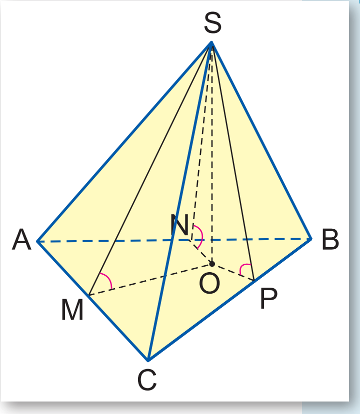
4. სამივე ტოლია;

5. არც ერთი არ არის ტოლი;

6. მხოლოდ ორი მათგანია ტოლი.

ამოცანა 1

დავამტკიცოთ, რომ თუ ტეტრაედრის გვერდით წახნაგებს და ფუძეს შორის ორწახნაგა კუთხეები ტოლია, მაშინ ტეტრაედრის წვეროს გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე ამ ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია.

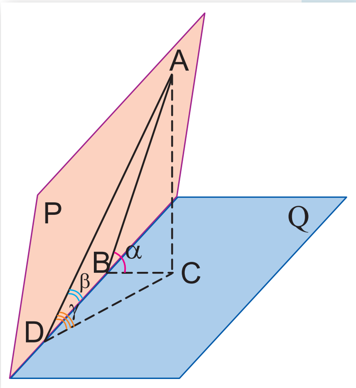


ამოხსნა:

ნახაზზე მოცემულია ტეტრაედრი, რომლის გვერდით წახნაგებსა და ფუძეს შორის ორწახნაგა კუთხეები ტოლია $\angle SMO=\angle SNO=\angle SPO$. მართკუთხა SMO, SNO და SPO სამკუთხედები ტოლია მახვილი კუთხით და კათეტით (SO კათეტი საერთოა), ე.ი. OM=ON=OP, რაც იმას ნიშნავს, რომ O წერტილი ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია.

ამოცანა 2

P და Q სიბრტყეებს შორის კუთხე α-ს ტოლია, ხოლო AD დახრილი ($A\in P$, $D\in a$, სადაც a ორწახნაგა კუთხის წიბოა) Q სიბრტყესთან γ კუთხეს ქმნის. კუთხე AD დახრილსა და ორწახნაგა კუთხის წიბოს შორის β-ს ტოლია. დავამტკიცოთ, რომ $\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\sin\beta$.



ამოხსნა:

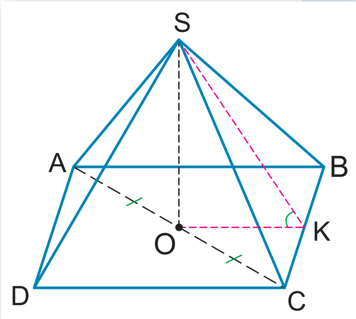
ΔABD-ში $AB=AD\sin\beta$, ხოლო ΔABC-ში $AC=AB\cdot\sin\alpha$. ე.ი. $AC=AD\cdot\sin\alpha\sin\beta$, მაგრამ ΔACD-დან $\sin\gamma=\dfrac{AC}{AD}$. ჩასმით ვღებულობთ, რომ $\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\sin\beta$. რ.დ.გ.

ამოცანა 3

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგები 45°–იანი კუთხითაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლის სიგრძე, თუ ფუძის გვერდია 50 სმ.

ამოხსნა:

რადგან პირამიდა წესიერია, ე.ი. წვერო გეგმილდება ფუძის ცენტრში. O წერტილი ABCD კვადრატისათვის წარმოადგენს დიაგონალების კვეთის წერტილს. გავავლოთ $OK\perp CB$. ცხადია $CK=KB \Rightarrow SC=SB$, რადგან ΔSCB ტოლფერდაა. მაშასადამე, $\angle SKO=45°$ როგორც ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე. $\Delta SOK \Rightarrow OK=SO$. $OK=\dfrac{DC}{2}$ $= 25$ სმ.



პასუხი: $h = 25$ სმ.

სავარჯიშოები:

1. ტოლფერდა სამკუთხედის სიბრტყე დახრილია მის ფუძეზე გამავალი P სიბრტყისადმი α კუთხით. სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის β-ს. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდის დახრის კუთხე P სიბრტყისადმი, თუ $\sin\alpha = 0{,}5\sqrt{3}$; $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. კვადრატის სიბრტყე ერთ-ერთ მის გვერდზე გავლებულ სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ იმ კუთხის სინუსი, რომელსაც ქმნის იმავე სიბრტყესთან კვადრატის დიაგონალი, თუ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

3. 30°-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოცემულია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია 17,2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

4. იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის სიდიდე, თუ მის ერთ წახნაგზე აღებული წერტილი ორჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული წიბოდან, ვიდრე მეორე წახნაგიდან.

5. 45°-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოცემულია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

6. 60°-იანი ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებული წერტილი ორივე წახნაგიდან დაშორებულია 13 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან წიბომდე.

7 A და B წერტილები 120°-იანი ორწახნაგა კუთხის წიბოზე მდებარე წერტილებია; AC და BD სხვადასხვა წახნაგზე გავლებული წიბოს პერპენდიკულარებია. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ
ა) AB=AC=BD=a; ბ) AB=3; AC=2; BD=1.

8 წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ გვერდზე გავლებულია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია 3 სმ და $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

9 წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდსა და მოპირდაპირე წიბოს შუა წერტილზე გავლებული სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°–იან ორწახნაგა კუთხეს იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდის სიგრძეა 3 სმ.

10 წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა a. გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხის სიდიდეა α. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წახნაგის ფართობი თუ a=6 და $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

11 წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია a, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე (გვერდით წახნაგის წვეროსთან მდებარე კუთხე) α-ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $a=\sqrt{21}$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

12 წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე კი α. იპოვეთ ამ პირამიდის აპოთემა, თუ $H=\sqrt{3}$ და $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

13 წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძეა 11 სმ და ფუძესთან ქმნის 30°–იან კუთხეს. იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე.

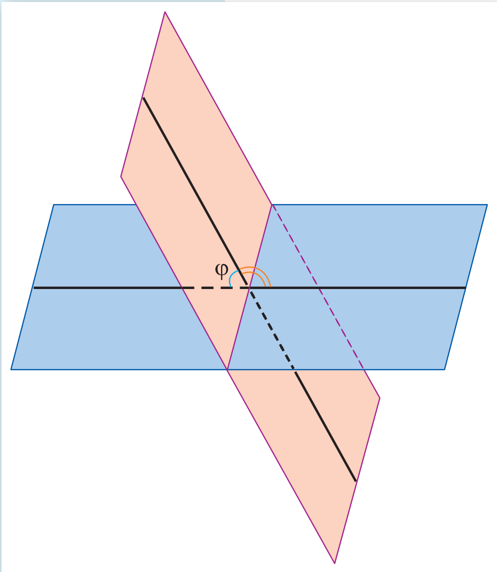
14 სამკუთხა პირამიდის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედია. გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყისადმი ტოლი კუთხეებითაა დახრილი. დაამტკიცეთ, რომ ეს პირამიდა წესიერია.

გ

15 იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძე, თუ გვერდითი წიბოა 5 სმ და სრული ზედაპირის ფართობი 16 სმ^2.

16 იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდია a და გვერდითი წახნაგი ფუძის დიდ დიაგონალზე გავლებული დიაგონალური კვეთის ტოლდიდია.

9 მართობული სიბრტყეები. სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი

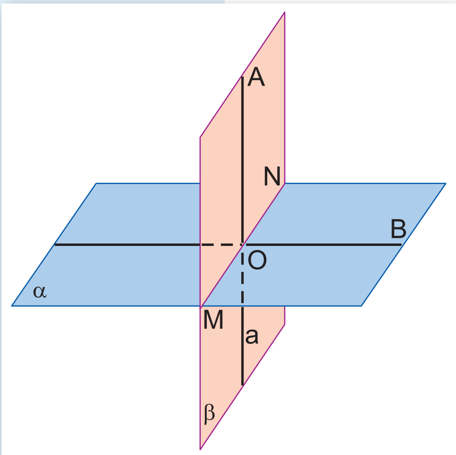


ისევე, როგორც ორი გადამკვეთი წრფე ქმნის სიბრტყეზე ოთხ კუთხეს – ორი გადამკვეთი სიბრტყე სივრცეში გვაძლევს ოთხ ორწახნაგა კუთხეს, რომლებიც წყვილ-წყვილად ტოლია, და თუ ორი მათგანი φ-ს ტოლია, დანარჩენი ორი (180°–φ)-ს უდრის.

ამ ოთხი კუთხიდან იმ კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა დანარჩენი სამის გრადუსულ ზომებს არ აღემატება, ვუწოდებთ **კუთხეს ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის.**

თუ ორი სიბრტყის მიერ შექმნილი ორწახნაგა კუთხეები ტოლია, ე.ი. თითოეული უდრის 90°, ვამბობთ, რომ **სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.**

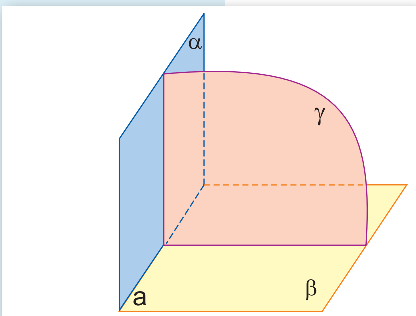
რაში მდგომარეობს სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი, ანუ როგორ დავადგინოთ კონკრეტულ ამოცანებში ორი სიბრტყის მართობულობა?



სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი:

თუ ორი სიბრტყიდან ერთ-ერთი გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

მართლაც, განვიხილოთ α და β სიბრტყეები, რომელთაგან β გადის α სიბრტყის მართობულ a წრფეზე (ნახ. 2). ცხადია, a წრფე მართობულია α და β სიბრტყეების კვეთის MN წრფის. MN-ისა და a წრფეების გადაკვეთის O წერტილზე გავავლოთ β სიბრტყეში OB⊥MN, მაგრამ OB წრფე a წრფის მართობულიცაა და AOB კუთხე (A∈a) წარმოადგენს α და β სიბრტყეებით შექმნილი ორწახნაგა კუთხის წრფივ კუთხეს. ∠AOB=90°, ე.ი. α⊥β. რ.დ.გ.



ჩამოვაყალიბოთ სიბრტყეთა მართობულობის ნიშნის შედეგი:

სიბრტყე, რომელიც მართობულია ორი სიბრტყის გადაკვეთის წრფისა, მართობულია თითოეული ამ სიბრტყისა.

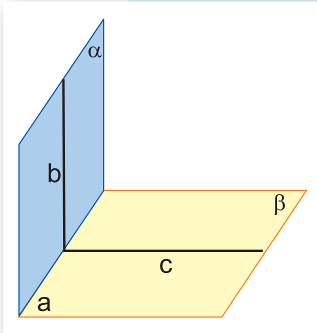
ნახაზზე γ⊥a. ე.ი. γ⊥α და γ⊥β.

მართობული სიბრტყეების ყველაზე ნათელ თვალსაჩინოებას მართკუთხა პარალელეპიპედი წარმოადგენს, რომლის მაგალითებიც სხვა გეომეტრიულ სხეულებთან შედარებით, ყველაზე ხშირად გვხვდება ცხოვრებაში. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა აქვს ყუთებს, კოლოფებს, ოთახებს და ა.შ. მართკუთხა პარალელეპიპედის ექვსივე წახნაგი მართკუთხედია, ხოლო ყველა ორწახნაგა კუთხე მართია.

ამოცანა 1.

თუ წრფე მდებარეობს ორი მართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში და მართობულია ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფის, მაშინ იგი მართობულია მეორე სიბრტყისაც.

ს.ფ.

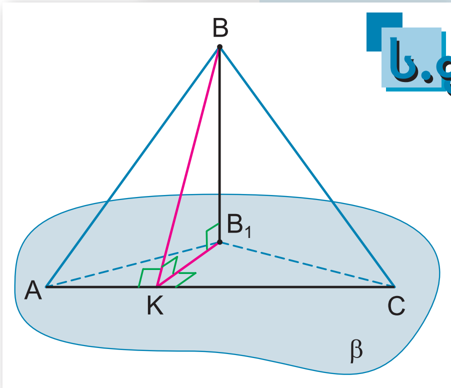


ამოხსნა:

b მდებარეობს α-ზე და $b\perp a$.
უ.დ. $b\perp\beta$. b და a წრფეების გადაკვეთის A წერტილზე გავავლოთ $c\perp a$. ვღებულობთ, რომ b წრფე მართობულია β სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი a და c წრფის, ე.ი. $b\perp\beta$. რ.დ.გ.

ამოცანა 2.

ს.ფ.



ΔABC-ის B წვეროდან β სიბრტყეზე დაშვებულია $BB_1\perp\beta$ მართობი, ხოლო AC გვერდი β სიბრტყეზე მდებარეობს.
დავამტკიცოთ, რომ $S_{\Delta AB_1C}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos\alpha$, სადაც α არის ΔABC-სა და β სიბრტყეებს შორისი კუთხე.

ამოხსნა:

გავავლოთ ΔABC-ის BK სიმაღლე. B_1K მონაკვეთი BK-ს გეგმილია. სამი მართობის თეორემის თანახმად, $B_1K\perp AC$. მაშასადამე, $\angle BKB_1\equiv\alpha$ – არის β და ABC სიბრტყეებს შორის კუთხე

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BK\cdot AC. \\ \Delta BB_1K\Rightarrow\frac{B_1K}{BK}=\cos\alpha\Rightarrow B_1K=BK\cos\alpha. \end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta AB_1K}=\frac{1}{2}B_1K\cdot AC=\frac{1}{2}BK\cdot AC\cos\alpha.$$

$S_{\Delta AB_1K}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos\alpha$. რ.დ.გ.

მართალია თუ არა, რომ:

- თუ წრფე α სიბრტყის მართობულია, მაშინ a წრფეზე გაივლება α სიბრტყის მართობული:
  1. უამრავი სიბრტყე;
  2. ერთადერთი სიბრტყე;
  3. ორი სიბრტყე, რომლებიც ურთიერთმართობულია.

სავარჯიშოები:

1. α და β სიბრტყეები ურთიერთმართობულია. α სიბრტყის A წერტილიდან სიბრტყეთა გადაკვეთის c წრფემდე მანძილი 0,5 მ-ის ტოლია. β სიბრტყეში გავლებულია c წრფის პარალელური b წრფე, რომელიც c წრფიდან დაშორებულია 1,2 მ-ით. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან b წრფემდე.

2. ურთიერთმართობული α და β სიბრტყეები ერთმანეთს c წრფეზე კვეთს.

α სიბრტყეში გავლებულია a წრფე (a||c), ხოლო β სიბრტყეში – b წრფე (b||c). იპოვეთ მანძილი a და b წრფეებს შორის, თუ მანძილი a და c წრფეებს შორის 1,5 მ-ია, ხოლო მანძილი b და c წრფეებს შორის – 0,8 მ.

3. წერტილი ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან a და b მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტყეთა ურთიერთ-გადაკვეთის წრფემდე.

4. ორ ურთიერთმართობულ სიბრტყეში მდებარე A და B წერტილებიდან ამ სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის წრფეზე დაშვებულია AC და BD მართობები. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე თუ:
ა) AC=6 მ, BD=7 მ, CD=6 მ;
ბ) AC=3 მ, BD=4 მ, CD=12 მ;
გ) AD=4 მ, BC=7 მ, CD=1 მ;
დ) AD=BC=5 მ, CD=1 მ;
ე) AC=a, BD=b, CD=c;
ვ) AD=m, BC=n, CD=p.

5. ორ მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედს საერთო ჰიპოტენუზა აქვთ და მათი სიბრტყეები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხეების წვეროებს შორის, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $5\sqrt{2}$.

6. ABC და ABD მართკუთხა სამკუთხედების სიბრტყეები ურთიერთ-პერპენდიკულარულია (AB – საერთო ჰიპოტენუზაა). იპოვეთ მანძილი C და D წვეროებს შორის, თუ AC=AD=3 სმ და BC=BD=4 სმ.

ს.ფ.

7 დაამტკიცეთ შემდეგი ოთხი დებულების ტოლფასობა:
ა) პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია,
ბ) პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი,
შ) პირამიდის გვერდითი წიბოები სიმაღლესთან ტოლ კუთხეებს ადგენენ,
დ) პირამიდის ფუძეზე წრეწირი შემოიხაზება და პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძეზე შემოხაზულ წრეწირის ცენტრზე.

ს.ფ.

8 დაამტკიცეთ შემდეგი სამი დებულების ტოლფასობა
ა) პირამიდის გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები ტოლია,
ბ) პირამიდის სიმაღლე გვერდით წახნაგებთან ქმნის ტოლ კუთხეებს,
გ) პირამიდის გვერდითი წახნაგები ტოლი კუთხეებითაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი.

9 დაამტკიცეთ, რომ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც პირამიდის ფუძეში წრეწირი ჩაიხაზება და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის ცენტრში.

გ

10 პირამიდის ფუძეა რომბი, რომლის დიაგონალებია 6 მ და 8 მ. პირამიდის სიმაღლეა 1 მ და გადის ფუძის დიაგონალების კვეთის წერტილზე. იპოვეთ ამ პირამიდის გვერდით ზედაპირის ფართობი.

11 პირამიდის ფუძეა პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 20 სმ და 36 სმ. ფართობი კი 360 სმ^2. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების კვეთის წერტილზე. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 შეიძლება თუ არა, რომ ორი აცდენილი წრფიდან თითოეული იყოს მესამე წრფის პარალელური? პასუხი დაასაბუთეთ.

2 MB წრფე ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდების პერპენდიკულარულია. დაადგინეთ რა სახის სამკუთხედია M, სადაც D წერტილი AC გვერდის ნებისმიერი წერტილია.

3 ABCD ტეტრაედში M წერტილი BC წიბოს შუაწერტილია. AB=AC, DB=DC. დაამტკიცეთ, რომ ADM სამკუთხედის სიბრტყე BC წრფის მართობულია.

4 ABCD მართკუთხედის A წვეროდან გავლებულია მართკუთხედის სიბრტყისადმი AK პერპენდიკულარული წრფე. K წერტილიდან მართკუთხედის სხვა წვეროებამდე მანძილები 6 მ, 7 მ და 9 მ-ის ტოლია. იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე.

5 M წერტილიდან, რომელიც α სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ამ სიბრტყისადმი გავლებულია MK პერპენდიკულარი და ორი ტოლი დახრილი – MA და MB. ცნობილია, რომ $\angle AMK=\angle AMB=60°$, MK=15 სმ. იპოვეთ მანძილი დახრილების გეგმილებს შორის.

6 მანძილი M წერტილიდან ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებამდე 6 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ AB=9 სმ.

7 ABCD მართკუთხედის B წვეროდან აღმართულია BM პერპენდიკულარი. დაამტკიცეთ, რომ AMD და MCD სამკუთხედები მართკუთხაა.

8 AD მონაკვეთი ABC ტოლფერდა სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. ცნობილია, რომ AB=AC=10 სმ, BC=12 სმ, AD=24 სმ. იპოვეთ მანძილები AD მონაკვეთის ბოლოებიდან BC წრფემდე.

9 ABCD მართკუთხედის A წვეროდან გავლებულია მართკუთხედის სიბრტყის მიმართ მართობული [illegible] წრფე. ცნობილია, რომ AD=3 სმ, AB=4 სმ, AK=12 სმ. იპოვეთ:
ა) მანძილი K წერტილიდან მართკუთხედის წვეროებამდე;
ბ) მანძილი AK და CD წრფეებს შორის.

10 სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეებს ადგენენ. ამასთან, მათი გეგმილები ერთმანეთთან 120°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.

11 მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი სიგრძით $7\sqrt{2}$. მათ შორის კუთხე 60°-ია, ხოლო მათ გეგმილებს შორის კუთხე არის 90°. იპოვეთ მანძილი მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე.

12 სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ 45°-იან კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან – 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ბოლოებს შორის.

13 AB მონაკვეთი სიბრტყის პარალელურია. მისი ბოლოებიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი: AC=6 და BD=4. AC დახრილი სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ BD-ს დახრის კუთხე ამ სიბრტყისადმი, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

14 AB მონაკვეთი α სიბრტყის პარალელურია, A_1B_1 კი ამ სიბრტყეზე მისი გეგმილია; AB მონაკვეთის ბოლოებიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია AC და BD დახრილები. AC დახრილი სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ DBB_1 სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება CAA_1 სამკუთხედში ჩახაზულ წრის ფართობთან, თუ $AC=\sqrt{6}$ და BD=3.

15 მოცემული მონაკვეთის სიგრძე 125 სმ-ია. მისი ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 100 და 56 სმ-ით. იპოვეთ მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე.

16 მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს; მისი ბოლოებიდან სიბრტყემდე მანძილები 6 სმ და 10 სმ-ია, ხოლო მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე სიბრტყეზე – 12 სმ. იპოვეთ მონაკვეთის სიგრძე.

17 20 სმ სიგრძის მონაკვეთი კვეთს α სიბრტყეს. AB მონაკვეთის ბოლოებიდან α სიბრტყემდე მანძილები AA_1=6სმ და BB_1=10 სმ-ია. იპოვეთ AA_1BB_1 ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

18 b სიგრძის AB მონაკვეთის A ბოლოზე გავლებულია ამ მონაკვეთის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყეში გავლებულია წრფე. იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან ამ წრფემდე, თუ მანძილი A წერტილიდან წრფემდე a-ს ტოლია.

19 AB მონაკვეთი α სიბრტყის პარალელურია, ხოლო AC და BD კი AB-ს პერპენდიკულარულად და მისგან სხვადასხვა მხარეს გავლებული დახრილებია. AB მონაკვეთის სიგრძე 16 სმ, BD-ს სიგრძე კი $4\sqrt{6}$ სმ-ია და ის დახრილია α სიბრტყისადმი β კუთხით. იპოვეთ CD-ს სიგრძე, თუ AC=8 სმ, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2,5}}{4}$.

20 მოცემულია ორი პარალელური სიბრტყე. ერთ-ერთ მათგანზე აღებულ A და B წერტილებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მეორე სიბრტყეს A_1 და B_1 წერტილებში კვეთენ. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ AB=a.

21 მოცემულია ABC სამკუთხედი. წრფის პარალელური სიბრტყე ამ სამკუთხედის AC გვერდს კვეთს A_1 წერტილში, ხოლო BC გვერდს – B_1 წერტილში. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ:
ა) AB=15 სმ, $AA_1:AC=2:3$; ბ) AB=8 სმ, $AA_1:A_1C=5:3$;
გ) B1C=10 სმ, AB:BC=4:5; დ) $AA_1=a$, AB=b, $A_1C=c$.

22 ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და სიმაღლე 4 მ-ის ტოლია. მოცემული წერტილი სამკუთხედის სიბრტყიდან დაშორებულია 6 მ-ით. იპოვეთ მანძილები ამ წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე. თუ ცნობილია, რომ ისინი ტოლია.

23 ABC სამკუთხედში AB=13 სმ, BC=14 სმ, AC=15 სმ. AC გვერდის D შუაწერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია DM მართობი, რომლის სიგრძეც 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის საშუალო სიგრძის გვერდამდე.

24 ABC სამკუთხედის A წვეროდან მისი სიბრტყის გარეთ გავლებულია AD წრფე, რომელიც AB და AC გვერდებთან ქმნის ტოლ მახვილ კუთხეებს. რა ნაწილებად ყოფს BC გვერდს AD წრფის გეგმილი სამკუთხედის სიბრტყეზე, თუ AB=51 მ, BC=30 მ, AC=34 მ?

25 მართი კუთხის სიბრტყის გარეთ მდებარე M წერტილი კუთხის წვეროდან დაშორებულია a მანძილით, ხოლო კუთხის გვერდებიდან – b მანძილით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან კუთხის სიბრტყემდე.

26 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 7 მ და 24 მ. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან იმ სიბრტყემდე, რომელიც ჰიპოტენუზაზე გადის და სამკუთხედის სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს.

27 ABC სამკუთხედის BC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან სიბრტყემდე, თუ AB=29, BC=36, AC=25, $\sin\varphi=\frac{2}{5}$.

28 ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე მდებარე A და B წერტილებიდან კუთხის წიბოზე დაშვებულია AA_1 და BB_1 მართობები. იპოვეთ მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ და ორწახნაგა კუთხე α-ს ტოლია.

29 ორ ტოლფერდა სამკუთხედს აქვს საერთო ფუძე და მათი სიბრტყეები დახრილია ერთმანეთისადმი 60°-იანი კუთხით. საერთო ფუძის სიგრძეა 16 სმ. ერთი სამკუთხედის ფერდის სიგრძეა 17 სმ, ხოლო მეორე სამკუთხედის ფართობია 160 სმ^2. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის წვეროებს შორის.

30 წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდსა და მის მოპირდაპირე გვერდითი წიბოს შუა წერტილზე გამავალი სიბრტყე ქმნის ფუძესთან 45°–იან კუთხეს. ფუძის გვერდი არის l. გავიგოთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

31 გავიგოთ მართი სამკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 50 სმ–ია და ფუძის გვერდებია: 40 სმ, 13სმ და 37 სმ.

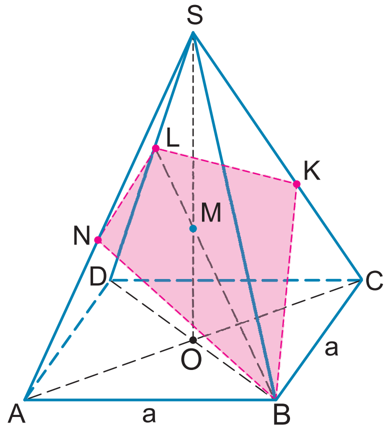
32 მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდიც შეეფარდება მის ფუძეს, როგორც 5:6. პრიზმის სიმაღლე უდრის ფუძის სიმაღლეს, დაშვებულს ფერდზე. სრული ზედაპირის ფართობი 2520 მ^2. გავიგოთ პრიზმის წიბოების სიგრძეები.

33 წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე არის h. ფუძის გვერდი კი a. გავიგოთ დიაგონალური კვეთების ფართობები.

34 წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი არის a და გვერდის წიბო b. გავიგოთ გვერდის წიბოსა და პირამიდის სიმაღლეზე გავლებული კვეთის ფართობი.

35 წესიერი პირამიდის სიმაღლე გაყოფილია n ტოლ ნაწილად და გაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთები. ფუძის ფართობი არის Q. ვიპოვოთ კვეთების ფართობები (Q=400, n=5).

36 წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a–ს. გვერდითი წიბო ქმნის სიმაღლესთან 30°–იან კუთხეს. ავაგოთ კვეთა, გამავალი ფუძის ერთ წვეროზე ამ წვეროს მოპირდაპირე წიბოს პერენდიკულარულად და გავიგოთ მისი ფართობი, თუ $a=\sqrt{2}$.



37 გავიგოთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდი უდრის a–ს და გვერდითი წიბო შეადგენს ფუძის სიბრტყესთან 45°–იან კუთხეს.

38 გავიგოთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდი არის a და დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდიდია.

39 გავიგოთ წესიერი ათკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის რადიუსი უდრის R–ს, სიმაღლე კი აღემატება ფუძის რადიუსს ფუძის გვერდის ნახევრით.

40 პირამიდის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 20 სმ და 36 სმ. ფართობი კი 360 სმ^2–ია. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდრის 12 სმ–ს. გავიგოთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

44 პირამიდას ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის გვერდები უდრის 5 მ–ს და 4 მ–ს, ერთ–ერთი დიაგონალი კი 3 მ–ია. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდრის 3 მ–ს. გავიგოთ ამ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

45 პირამიდას ფუძე აქვს სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. ფუძის საშუალო სიდიდის გვერდის მოპირდაპირე გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია და უდრის 16 სმ–ს. გავიგოთ ამ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

46 SABC პირამიდას ფუძედ აქვს ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა AB=26 სმ და კათეტი AC=24 სმ. SA წიბო ABC სიბრტყის პერპენდიკულარულია და უდრის 18 სმ–ს. გავიგოთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

47 პირამიდას ფუძედ აქვს კვადრატი. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის ერთ წვეროზე. გავიგოთ ამ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდი უდრის 20 დმ–ს და პირამიდის სიმაღლე 21 დმ–ს.

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1. თუ პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში, მაშინ ამ პირამიდისთვის სრულდება:
ა) გვერდითი წიბოები ტოლია;
ბ) პირამიდა აუცილებლად წესიერია;
გ) ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები აუცილებლად ტოლია;
დ) არც ერთი პასუხი სწორი არ არის.

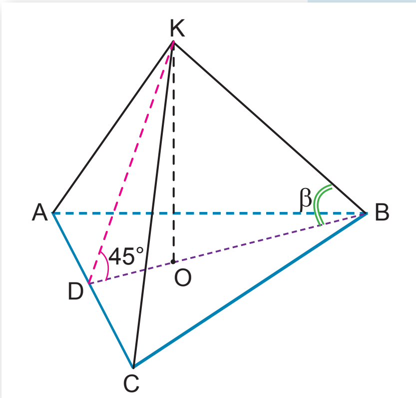
2. თუ პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრში, მაშინ ამ პირამიდისთვის სრულდება:
ა) გვერდითი წიბოები ტოლია;
ბ) პირამიდა აუცილებლად წესიერია; გ) ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები აუცილებლად ტოლია;
დ) არც ერთი პასუხი სწორი არ არის.

3. იმ უდიდესი მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც შეიძლება მოთავსდეს 5 სმ-ის ტოლი წიბოს მქონე კუბში, არის:
ა) $5\sqrt{2}$; ბ) $5\sqrt{3}$; გ) $2\sqrt{5}$; დ) $\sqrt{10}$.

4. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი გვერდით წიბოსთან ქმნის 45°-იან კუთხეს და პირამიდის სიმაღლეა 5 სმ, მაშინ დიაგონალური კვეთის ფართობია:
ა) 5 სმ^2; ბ) 10 სმ^2; გ) 25 სმ^2; დ) პასუხს ვერ გავცემთ.

5. n კუთხა პრიზმის დიაგონალების რიცხვია:
ა) $n(n-1)$; ბ) $n(n-2)$; გ) $n(n-3)$; დ) $(n-1)(n-2)$.

6. თუ n კუთხა პირამისია წიბოების რაოდენობა 5-ით მეტია წახნაგების რაოდენობაზე, მაშინ:
ა) $n=3$; ბ) $n=4$; გ) $n=5$; დ) $n=6$.



7. ნახაზზე მოცემულია წესიერი სამკუთხა პირამიდა.
თუ $BD \perp AC$ და $\angle KDB=45°$, მაშინ $tg\beta=$
ა) 2; ბ) 3; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{1}{3}$.

8. თუ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის პერიმეტრია 32, ხოლო აპოთემა 5, მაშინ პირამიდის სიმაღლეა:
ა) 3; ბ) 4; გ) 4,2; დ) 4,5.

9. თუ წესიერი პრიზმის ფუძის გვერდია 5, ხოლო წახნაგის დიაგონალი ფუძის გვერდთან ქმნის 45°-იან კუთხეს, მაშინ პრიზმის სიმაღლეა:
ა) 3; ბ) 4; გ) პასუხს ვერ გავცემთ; დ) 5.

IV თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- თუ ორი წრფე იკვეთება, მაშინ მიღებული ოთხი კუთხიდან იმ კუთხეს, რომელიც დანარჩენებს არ აღემატება, ეწოდება კუთხე ამ ორ წრფეს შორის, ხოლო თუ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე 0°-ია.

- სივრცის ნებისმიერ წერტილზე გაივლება მოცემული სიბრტყის მართობული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

- ორი პარალელური სიბრტყიდან, ერთ-ერთის ნებისმიერი წერტილიდან მეორეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს **პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილი** ეწოდება.

- თუ წრფე მართობულია სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფისა, მაშინ იგი ამ სიბრტყის მართობულია.

- **სამი მართობის თეორემა**
  თუ სიბრტყეში მდებარე წრფე მართობულია ამ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის გეგმილის, მაშინ იგი ამ დახრილის მართობულია.

  თუ სიბრტყეში მდებარე წრფე მართობულია ამ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის, მაშინ იგი ამავე სიბრტყეზე დახრილი გეგმილის მართობულიცაა.

- კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის, რომელსაც არამართობულად კვეთს მოცემული წრფე, ეწოდება კუთხეს ამ წრფესა და მის გეგმილს შორის.

- თუ ორი სიბრტყიდან ერთ-ერთი გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

  სიბრტყე, რომელიც მართობულია ორი სიბრტყის გადაკვეთის წრფისა, მართობულია თითოეული ამ სიბრტყისა.

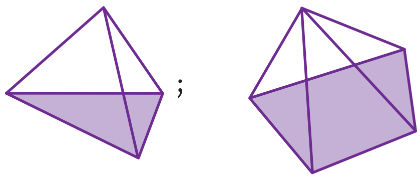
V თავი

ამ თავში გავეცნობით მიმდევრობებს, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს; უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას; მიმდევრობის ზღვართა შესახებ რამოდენიმე თეორემას.

შევძლებთ: გამოვთვალოთ ზოგიერთი მიმდევრობის ზღვარი; გამოვთვალოთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი; მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცოთ ზოგიერთი წინადადების ჭეშმარიტება.

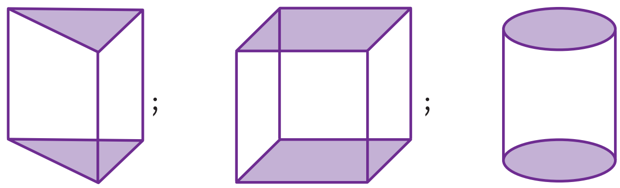
1 მიმდევრობა

1. მიმდევრობა გააგრძელეთ კიდევ სამი წევრით.

ა)  ; ... .

ბ) 1, 7, 17, 31, 49 ...

2. რომელი ფიგურა არღვევს კანონზომიერებას?

 ; ... .

გავიხსენოთ:
მიმდევრობა არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია.
თუ განსაზღვრის არე არის N, მაშინ მიმდევრობა უსასრულოა, ხოლო თუ განსაზღვრის არე პირველი n ნატურალური რიცხვისგან შედგება, მაშინ მიმდევრობა სასრული იქნება.

- მოიყვანეთ ა) უსასრულო, ბ) სასრული მიმდევრობის მაგალითები.
- ფუნქციის რა თვისებებს ინარჩუნებს მიმდევრობა?
- ა) იპოვეთ $a_n=3n^2-11n+10$ მიმდევრობის უმცირესი წევრი

  ბ) დაადგინეთ ზრდადია თუ კლებადი $a_n=\frac{2n-1}{n+3}$ მიმდევრობა?

  გ) იპოვეთ $a_n=\frac{2n-15}{n+2}$ მიმდევრობის უარყოფით წევრთა რაოდენობა.
- რას ეწოდება ა) არითმეტიკული, ბ) გეომეტრიული პროგრესია. ჩამოაყალიბეთ მათი თვისებები.
- დაწერეთ არითმეტიკული (გეომეტრიული) პროგრესიის: ა) ზოგადი წევრის ფორმულა; ბ) რეკურენტული ფორმულა.
- მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული ფორმულით $a_1=2$; $a_n=0{,}5a_{n-1}+7$. იპოვეთ a_6; a_8.
- რომელი ფორმულაა, ზოგადი წევრისა თუ რეკურენტული, უფრო მოსახერხებელია გამოსაყენებლად და რა შემთხვევაში?

მომდევნო პარაგრაფებში ჩვენ შევეცდებით უფრო ღრმად შევისწავლოთ მიმდევრობა.

სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ u_1; u_2 და u_{10} წევრი მიმდევრობისა, თუ:

ა) $u_n=3n+2$; ბ) $u_n=n^2+5$; გ) $u_n=(n-3)^2$;

დ) $u_n=(-2)^n$; ე) $u_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+2}$; ვ) $u_n=(n-2)^3$;

ზ) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$; თ) $u_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$; ი) $u_n=\log_{n+2}(n+1)$.

2. იპოვეთ n, თუ (a_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით:

ა) $a_n=n^2-9$ და $a_n=112$; ბ) $a_n=\dfrac{2n+1}{n-3}$ და $a_n=\dfrac{19}{6}$;

გ) $a_n=n^2+5n-6$ და $a_n=60$; დ) $a_n=n^2-4n+11$ და $a_n=50$;

ე) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+4}$ და $a_n=\dfrac{7}{9}$; ვ) $a_n=\dfrac{n^3}{5}+3$ და $a_n=28$.

3. $a_n=n^2-10n+27$ მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია. n-ის რომელი მნიშვნელობისთვის არის a_n უმცირესი.

4. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $b_n=pn^3+q$. ცნობილია, რომ $b_1=6$ და $b_3=19$. იპოვეთ p და q.

5. დაწერეთ პირველი ოთხი წევრი მიმდევრობისა, თუ:

ა) $a_{n+1}=2a_n$ და $a_1=3$; ბ) $a_{n+1}=(-1)^n a_n$ და $a_1=5$;

გ) $a_{n+1}=a_n^2-1$ და $a_1=2$; დ) $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ და $a_1=3$; $a_2=5$.

6. დაწერეთ შემდეგი მიმდევრობის შესაბამისი რეკურენტული ფორმულა:

ა) 1; –1; 1; –1; ...; ბ) 3; 7; 15; 31; ...;

გ) 0; 1; 2; 5; 26; ...; დ) 26; 14; 8; 5; 3,5; ...;

ე) 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...; ვ) 4; 10; 18; 38; 74; ....

7. დაწერეთ a_n ფორმულით მოცემული მიმდევრობის რამდენიმე წევრი და დაწერეთ შესაბამისი რეკურენტული ფორმულა:

ა) $a_n=n+2$; ბ) $a_n=\dfrac{n+1}{2}$; გ) $a_n=n^2$; დ) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

8. შემდეგი მიმდევრობებიდან რომელია არითმეტიკული, გეომეტრიული პროგრესია:

ა) 3; 5; 7; 9; 11; ...; ბ) 10; 7; 4; 1; ...; გ) y; 2y; 3y; 4y; ...;

დ) 1; 4; 9; 16; 25; ...; ე) 16; 8; 4; 2; 1; ...; ვ) 1; –1; 1; –1; ...;

ზ) y; y^2; y^3; y^4; ...; თ) $a_{n+1}=a_{n+2}$; $a_1=3$; ი) $a_{n+1}=3a_n-2$; $a_1=4$;

კ) $a_{n+1}=a_n^2$; $a_1=2$; ლ) $a_n=n(n+1)$; მ) $a_n=2n+3$.

9. იპოვეთ a_n მიმდევრობის დადებით წევრთა რაოდენობა:

ა) $a_n=15-3n$; ბ) $a_n = \dfrac{1-n}{n-5}$; გ) $a_n=-n^2+8n-15$; დ) $a_n=n^2+2n+8$.

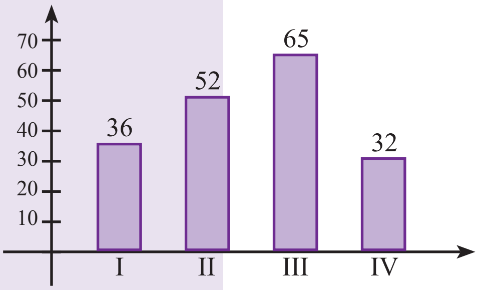
10. შემდეგ მიმდევრობებიდან რომელია მონოტონური

ა) $a_n = \dfrac{4n+1}{5n-1}$; ბ) $a_n = \dfrac{6n+4}{3n+2}$; გ) $a_n = \dfrac{4n}{4n+7}$.

გ

11. იპოვეთ a-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $2ax+3y=3$ და $4x+3y=7$ განტოლებებით მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილს უარყოფითი აბსცისა აქვს.

12. n-ის რა მნიშვნელობებისთვის ადგენს $\sqrt{n-5}$; $\sqrt[4]{10n+4}$; $\sqrt{n+2}$ რიცხვები გეომეტრიულ პროგრესიას?



სვეტოვან დიაგრამაზე ნაჩვენებია კომპიუტერების გაყიდვის მაჩვენებლები ერთ-ერთ მაღაზიაში ერთი წლის განმავლობაში კვარტლების მიხედვით.
მოცემული გრაფიკის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს:

13 რამდენი კომპიუტერი გაიყიდა სულ ამ წელს მოცემულ მაღაზიაში?

14 რამდენი პროცენტით მოიმატა გაყიდვამ III კვარტალში II კვარტალთან შედარებით?

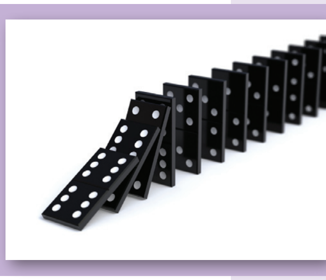
15 რა ნაწილს შეადგენს I კვარტალში გაყიდული კომპიუტერების რაოდენობა III და IV კვარტალში გაყიდული კომპიუტერების რაოდენობას?

16 საშუალოდ რამდენი კომპიუტერი გაიყიდა ერთ თვეში ამ წელიწადში?

2 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

ვთქვათ, ნებისმიერი რაოდენობის დომინოს ქვები მწკრივში ისეა განლაგებული, რომ დომინოს ყოველი ქვის დაცემა აუცილებლად იწვევს მომდევნო ქვის დაცემასაც.

- რა მოხდება, თუ პირველივე ქვას წავაქცევთ?



1. სრული და არასრული ინდუქცია

ნებისმიერ მათემატიკურ გამოკვლევას საფუძვლად უდევს დედუქციური და ინდუქციური მეთოდი. მსჯელობის დედუქციური მეთოდი ესაა მსჯელობა ზოგადიდან კერძოზე - როცა ამოსავალია ზოგადი შედეგი და დასკვნა კეთდება კერძო შემთხვევაზე.

მაგალითად,

1. „ჭეშმარიტია, რომ ყველა კავკასიელი შავგვრემანია. ნინო კავკასიელია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნინო შავგვრემანია."

2. ABCD პარალელოგრამია AB=5სმ. იპოვეთ CD. რადგან ყოველი პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, ამიტომ ABCD პარალელოგრამშიც AB=CD=5სმ.

მაგრამ, თუ ზოგადი დასკვნა გამოგვაქვს კერძო შემთხვევებზე დაყრდნობით ეს უკვე ინდუქციაა.

მაგალითად:

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 5 + 3$

$10 = 7 + 3$

$12 = 7 + 5$

$14 = 11 + 3$

და ა.შ.

? ჩამოწერეთ ყველა ლუწი რიცხვი (2-გან განსხვავებული) 101-მდე და წარმოადგინეთ ისინი ორი მარტივი რიცხვის ჯამის სახით.

იმედია, დავალება კარგად შეასრულეთ, ამიტომ აქედან გამოგვაქვს დასკვნა: ყოველი n ლუწი რიცხვი, სადაც $4 \le n \le 100$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ორი მარტივი რიცხვის ჯამის სახით. აქ ზოგადი დასკვნა გამოვიტანეთ ორმოცდაცხრა კერძო შემთხვევაზე დაყრდნობით. მსჯელობის ასეთი მეთოდი არის **სრული მათემატიკური ინდუქცია**.

ზოგჯერ ზოგადი დასკვნა გამოგვაქვს არა ყველა, არამედ რამდენიმე (შეიძლება ბევრი, მაგრამ არა ყველა) კერძო შემთხვევის განხილვის შედეგად - ეს კი **არასრული ინდუქციაა**. არასრული ინდუქციით მიღებული შედეგი, ვიდრე იგი არ იქნება დამტკიცებული მკაცრი მათემატიკური მსჯელობით, ჰიპოთეზაა (ვარაუდი).

მაგალითად: 1. იხილავდა რა $2^{2^n}+1$ სახის რიცხვებს, დიდმა ფრანგმა მათემატიკოსმა პ. ფერმამ შეამჩნია, რომ n=1, 2, 3, 4-თვის მიიღებოდა მარტივი რიცხვები. მან გამოთქვა ვარაუდი, რომ ყველა ასეთი სახის რიცხვი მარტივი იყო, მაგრამ ლ. ეილერმა აჩვენა, რომ n=5-თვის $2^{32}+1$ არ იყო მარტივი რიცხვი, $2^{32}+1$ იყოფა 641-ზე.

2. არსებობს თუ არა ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ $991n^2+1$ სახის რიცხვი იყოს სრული კვადრატი?

n=1, 2, 3, 4, 5, 6...-თვის $991n^2+1$ სახის რიცხვი (თუ გამოვთვლით!) არ არის სრული კვადრატი. ამიტომ ბუნებრივია, რომ გამოითქვას ვარაუდი, არც ერთი ნატურალური n-თვის $991n^2+1$ სახის რიცხვი არ არის სრული კვადრატი, მაგრამ გამომთვლელი მანქანის საშუალებით მოიძებნა ისეთი 29-ნიშნა m რიცხვი, $991n^2+1$ სახისა, რომ იგი აღმოჩნდა სრული კვადრატი.

3. ერთ ქვეყანაში მიმოქცევაში მხოლოდ სამლარიანი და ხუთლარიანი კუპიურებია. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი კუპიურებით შესაძლებელია შევიძინოთ ნებისმიერი ნივთი, რომლის ღირებულება 7 ლარზე მეტია.

ამოხსნა:

$8=3+5$; $9=3\cdot3$; $10=2\cdot5$; $11=5+2\cdot3$; $12=3\cdot4$; $13=2\cdot5+3$; $14=5+3\cdot3$.

? ■ გააგრძელეთ ეს მიმდევრობა n=30; 50; 60-მდე.

თქვენ შეგიძლიათ ასეთი ხერხით შეამოწმოთ კიდევ ბევრი რიცხვი და შესაძლებელია გამოვთქვათ ვარაუდი, რომ დებულება სამართლიანია.

განვიხილოთ $p=n^2+n+41$ (1) კვადრატული სამწევრი, რომელსაც ჯერ კიდევ ლ. ეილერმა მიაქცია ყურადღება.

თუ n=0, მაშინ p (0) მარტივი რიცხვია;

თუ n=1, მაშინ p(1) მარტივი რიცხვია;

თუ n=2, მაშინ p(2) მარტივი რიცხვია.

ასევე მარტივი რიცხვი მიიღება, როცა n=3, 4, 5,...39 აქედან გამომდინარე, შესაძლოა იფიქროთ, რომ (1) სამწევრის მნიშვნელობა n-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის მარტივი რიცხვის ტოლია. მაგრამ ეს რომ ასე არ არის, ამაში ადვილად დარწმუნდებით.

? ■ გამოთვალეთ n^2+n+41 სამწევრის მნიშვნელობა, როცა n=40; 41.

განხილულ მაგალითებში ჩვენ გამოგვქონდა ზოგადი დასკვნა (ნებისმიერი n-სთვის), იმის საფუძველზე, რომ ეს დებულება ჭეშმარიტი იყო n-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის. მაგრამ გარდა მე-3 მაგალითისა, ყველგან მოიძებნა კონტრმაგალითი, რამაც საშუალება მოგვცა მივმხვდარიყავით, რომ გამოთქმული ვარაუდი მცდარი იყო.

მე-3 მაგალითში კი ასეთი კონტრმაგალითი ვერ მოვძებნეთ. მაგრამ გვაძლევს თუ არა ეს იმის უფლებას, რომ ეს დებულება ჩავთვალოთ სამართლიანად ნებისმიერი $n>7$-თვის?

ამრიგად, ჩვენს წინაშეა პრობლემა: ვთქვათ, დებულება სამართლიანია რამდენიმე კერძო შემთხვევაში (ყველა კერძო შემთხვევის განხილვა შეუძლებელია), როგორ დავადგინოთ სამართლიანია თუ არა ეს დებულება საზოგადოდ?

ერთ-ერთი უნივერსალური მეთოდი, რომლის საშუალებითაც მტკიცდება ისეთი მათემატიკური წინადადებები, რომლებშიც ფიგურირებს ფრაზა "n-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისთვის", არის მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი.

ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელზეც დამყარებულია მტკიცებათა მეთოდი და რომელსაც **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი** ეწოდება.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, ნაწილობრივ ნაკუთვნილი: თვით ის მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი, როგორც ცალკე მნიშვნელოვანი მეთოდი, საფუძველს იღებს ბლეზ პასკალისა და ჰერსონიდან. თუმცა მისი გამოყენების ცალკეული შემთხვევები გვხვდება ჯერ კიდევ პროკლესა და ევკლიდესთან. ეს სახელი კი მეთოდმა 1838 წელს მიიღო დე-მორგანის მიერ.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი:

თუ $A(n)$ წინადადება, რომელიც დამოკიდებულია n ნატურალურ რიცხვზე ჭეშმარიტია $n=1$-თვის და იქიდან, რომ ის ჭეშმარიტია $n=k$-თვის, (k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) გამომდინარეობს, რომ იგი ჭეშმარიტი იქნება $n=k+1$-სთვის, მაშინ $A(n)$ წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის.

დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ხდება შემდეგნაირად:

1. შემოწმდება დებულების სამართლიანობა $n=1$-თვის, ე.ი. აჩვენებენ, რომ ჭეშმარიტია $A(1)$ წინადადება.
2. იმ დაშვებიდან, რომ დებულება სამართლიანია $n=k$-სთვის, მტკიცდება, რომ დებულება სამართლიანი იქნება $n=k+1$-თვისაც.

თუ მტკიცების ორივე ნაწილი შესრულდეს, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის საფუძველზე $A(n)$ ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n-თვის.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ნატურალური რიცხვთა არითმეტიკის ერთ-ერთი აქსიომაა.

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ: $S_n = 1\cdot1! + 2\cdot2! + 3\cdot3! + ... + n\cdot n!$ ჯამი.

ამოხსნა:

განვიხილოთ ჯამების მიმდევრობა და შევეცადოთ აღმოვაჩინოთ ის წესი, რომლითაც აღიწერება ეს მიმდევრობა.

$S_1 = 1\cdot1! = 1$	$1 \rightarrow 1 = 2! - 1$
$S_2 = 1 + 2\cdot2! = 5$	$2 \rightarrow 5 = 3! - 1$
$S_3 = 5 + 3\cdot3! = 23$	$3 \rightarrow 23 = 4! - 1$
$S_4 = 23 + 4\cdot4! = 119$	$4 \rightarrow 119 = 5! - 1$

$1! = 1$
$2! = 1\cdot2 = 2$
$3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$
$4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$
$5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

თუ წინადადება ჭეშმარიტია $n=1$-თვის, მე-2 პირობიდან გამომდინარე, წინადადება ჭეშმარიტი იქნება $n = 1+1=2$-თვისაც. რადგან წინადადება ჭეშმარიტია $n=2$-თვის, მაშინ იგი ჭეშმარიტი იქნება $n=2+1=3$-თვისაც და ა.შ. $A(n)$ წინადადება ჭეშმარიტი იქნება $\forall n\in N$.

გასახსენებლად!
$0!=1$
$n!=1\cdot2...(n-1)\cdot n$

შესაძლებელია გამოვთქვათ ჰიპოტეზა, რომ $S_n=(n+1)!-1$. ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ, რომ ჩვენს მიერ გამოთქმული ჰიპოტეზა სამართლიანია.

1. შევამოწმოთ $n=1$-თვის. $S_1 = 1 = 2! - 1$ — ჭეშმარიტია.

2. დავუშვათ, რომ წინადადება ჭეშმარიტია $n=k$-თვის

ე.ი. ვთქვათ, $S_k = (k + 1)! - 1$ — ჭეშმარიტია.

- დავამტკიცოთ, რომ წინადადება ჭეშმარიტი იქნება $n=k+1$-თვის, ე.ი. $S_{k+1} = (k + 2)! - 1$.

მართლაც, $S_{k+1} = S_k + (k + 1) (k + 1)! =$

$=(k+1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)! = (k+1)!(1+k+1) - 1 =$

$=(k+1)!(k+2) - 1=$ | $(k+1)!(k+2)=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k+1)(k+2)=(k+2)!$

$=(k+2)! - 1.$ რ.დ.გ.

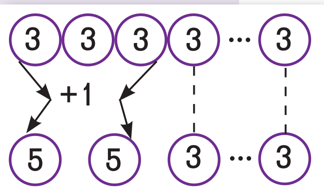
ზოგჯერ A(n) წინადადების ჭეშმარიტება დასამტკიცებელია მხოლოდ $n\geq n_0$ - თვის,სადაც n_0 რაიმე ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. მაშინ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ასე ჩამოყალიბდება: თუ A(n) წინადადება ჭეშმარიტია $n=n_0$ საწყისი მნიშვნელობისთვის და იქიდან, რომ ის ჭეშმარიტია $n=k$-თვის, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, $k=n_0$ გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება $n=k+1$-სთვის, მაშინ A(n) წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური $n\geq n_0$ რიცხვისთვის.

დავუბრუნდეთ პარაგრაფში დასმულ ამოცანას სამლარიანი და ხუთლარიანი კუპიურების შესახებ.

1. შევამოწმოთ დებულების ჭეშმარიტება $n=8$-თვის.

$8=3+5$ ჭ.

2. დავუშვათ, რომ დებულება ჭეშმარიტია $n=k$-თვის $(k>7)$ ე.ი. $k=3m+5p$, $m,\ p\in N_0$ და დავამტკიცოთ, რომ მაშინ იგი ჭეშმარიტი იქნება $n=k+1$-თვის.



შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) k ლარი წარმოდგენილია მხოლოდ 3-ლარიანი კუპიურებით;

ბ) k ლარის გადახდისას გვხვდება ერთი მაინც 5-ლარიანი.

ა) შემთხვევაში სულ მცირე სამი სამლარიანი კუპიურა მაინც იქნება $(9=3\cdot3)$, ამიტომ $k+1$ ლარის გადახდისას სამი სამლარიანი კუპიურა შეიცვლება ორი ხუთლარიანი კუპიურით.

ბ) შემთხვევაში ერთი ხუთლარიანი შეიცვლება ორი სამლარიანი კუპიურით.

ამით დებულება დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.

ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ $A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ იყოფა 133-ზე. $\forall n\in N_o$-თვის.

დამტკიცება:

1. შევამოწმოთ $n=0$-თვის. $A_1=11^2+12=133$ და $133\vdots133$ ე.ი. ჭეშმარიტია

2. ვთქვათ $A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$ იყოფა 133-ზე.

დავამტკიცოთ, რომ $A_{k+1}\vdots133$-ზე

$A_{k+1}=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}=11^{k+2}\cdot11+11\cdot12^{2k+1}-11\cdot12^{2k+1}+12^{2k+3}=$
$=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+12^{2k+1}(12^2-11)=11\cdot A_k+12^{2k+1}\cdot133.$

რადგან $\begin{cases}A_k\vdots133\\133\vdots133\end{cases}\Rightarrow A_{k+1}\vdots133$ ე.ი. $\forall n\in No$-თვის $(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots133$. რ.დ.გ.

? დაამტკიცეთ, რომ $(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots133$ შედარებათა თეორიის საშუალებით.

მაგალითი 3.

დაამტკიცეთ, რომ $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, სადაც $\alpha>-1$, $\alpha\neq0$, $n\in N\setminus\{1\}$
ამოხსნა:
1. როცა n=2, მაშინ $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$ სამართლიანია, რადგან $\alpha^2>0$.
2. ვთქვათ, უტოლობა სამართლიანია n=k-თვის k≥2.
ე.ი. $(1+\alpha)^k>1+k\alpha$. (1)
ვაჩვენოთ, რომ უტოლობა სამართლიანი იქნება n=k+1-თვისაც.
ე.ი. $(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha$.
მართლაც, პირობის თანახმად, $\alpha+1>0$, ამიტომ (1) უტოლობის გამრავლებით $(1+\alpha)$-ზე მივიღებთ: $(1+\alpha)^{k+1}>(1+k\alpha)(1+\alpha)$,
მაგრამ $(1+k\alpha)(1+\alpha)=1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2$
მივიღეთ: $(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha+k\alpha^2>1+(k+1)\alpha$ | $k\alpha^2>0$
რ.დ.გ.

$(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ უტოლობას ბერნულის უტოლობას უწოდებენ.

მაგალითი 4.

დაამტკიცეთ, რომ $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}$, $n\in N$ ჯამი გამოითვლება $S_n=\frac{n+2}{4n+2}$ (1) ფორმულით.
დამტკიცება:
1. თუ n=1, მაშინ $S_1=\frac{1+2}{4\cdot1+2}=\frac{1}{2}$, ასევე $S_1=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$ ე.ი. n=1-თვის ფორმულა ჭეშმარიტია.

2. ვთქვათ (1) ფორმულა სამართლიანია n=k-თვის, ე.ი. $S_k=\frac{k+2}{4k+2}$
დავამტკიცოთ, რომ იგი სამართლიანი იქნება $n=k+1$ -თვისაც, ე.ი.
$$S_{k+1}=\frac{k+1+2}{4(k+1)+2}=\frac{k+3}{4k+6}$$
$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+2}{4k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k^3+5k^2+12k+6}{(4k+2)(k+1)(k+2)}$$

მივიღეთ მცდარი შედეგი. ე.ი. იმ დაშვებიდან, რომ (1) ფორმულა ჭეშმარიტია, n=k-თვის, არ გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება n=k+1-თვის. მაშასადამე (1) ფორმულა მცდარია.
ე.ი. თუ ჩვენ დაკვირვებების საფუძველზე ვერ შევძლებთ სწორი ჰიპოტეზის ჩამოყალიბებას, მაშინ ინდუქციის მეთოდის მე-2 პუნქტი მაინც აუცილებლად გვიჩვენებს მის მცდარობას.

გამოთქვით სწორი ვარაუდი, რისი ტოლია $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ ჯამი და დაამტკიცეთ მისი სამართლიანობა ინდუქციის მეთოდით.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. მსჯელობას ზოგადიდან კერძოზე ___?___ მეთოდი, ხოლო კერძოდან ზოგადზე ___?___ ეწოდება.

2. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ P(n) წინადადება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით, საჭიროა: I შევამოწმოთ ___?___ ჭეშმარიტება და დავამტკიცოთ, რომ P(k) წინადადების ჭეშმარიტებიდან ___?___ წინადადების ჭეშმარიტება.

სავარჯიშოები:

1 გამოთქვით ჰიპოტეზა, რისი ტოლია მოცემული ჯამი და დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

ა) $S_n = 1+3+5+7+...+(2n-1)$; ბ) $S_n = -1+3-5+7-...+(-1)^n(2n-1)$;

გ) $S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; დ) $S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

2 მართებულია თუ არა, რომ n^2+n+19 მარტივი რიცხვია $\forall n\in N$-თვის? პასუხი დაასაბუთეთ.

3 დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$, $\forall n \in N$

ბ) $1^2+2^2+3^2+.......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

გ) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+.....+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

დ) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$

ე) $1+3+6+...+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

ვ) $1^2+3^2+10\ ...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

ზ) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

4* მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $(6^{2n}-1)\,\vdots\,35$; ბ) $(4^n+15n-1)\,\vdots\,9$; გ) $(7^{n+2}+8^{2n+1})\,\vdots\,57$;

დ) $(n^3+3n^2+5n+3)\,\vdots\,3$; ე) $(6n^{2n-1}+1)\,\vdots\,7$ ვ) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\,\vdots\,11$.

5* დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

ა) $2^n > 2n+1$, თუ $n \geq 3$;

ბ) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$ $n>1$

გ) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ n>1.

6 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილ n-კუთხედში გაივლება $\frac{n(n-3)}{2}$ დიაგონალი.

7 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ
ა) თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ $a_n = a_1 + d(n-1)$;
ბ) თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ $b_n = b_1q^{n-1}$.

8 დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის რომელიმე ერთ წერტილში გამავალი და ამ სიბრტყეზე მდებარე n განსხვავებული წრფე ამ სიბრტყეს 2n ნაწილად ყოფს.

გ

9. იპოვეთ ჯამი $2+22+222+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{n}$

10 გაამარტივეთ: $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}$

11 გვაქვს ნიკელისა და რკინის ორი შენადნობი. პირველი შეიცავს 10% რკინას, მეორე - 20% ნიკელს. რამდენი კილოგრამი უნდა ავიღოთ თითოეული შენადნობიდან, რომ მივიღოთ 3 კგ შენადნობი, რომელშიც რკინა 1,5-ჯერ მეტია, ვიდრე ნიკელი?

12 იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე h-ის ტოლია, ხოლო ფერდი შემოხაზული წრეწირის ცენტრიდან 60°-იანი კუთხით ჩანს.

იპოვეთ შეცდომა

თეორემა:

ყოველი ნატურალური რიცხვი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება: თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით. დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი n=k-თვის. ე.ი. ვთქვათ k=k+1 (1)
დავამტკიცოთ, რომ მაშინ თეორემა სამართლიანი იქნება n=k+1-თვის, ანუ k+1=k+2.
მართლაც, თუ (1) ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ 1-ს, მივიღებთ:

$$k = k + 1 \quad | +1 \qquad\qquad k + 1 = k + 2$$

ე.ი. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცეთ, რომ თეორემა სამართლიანია $\forall n \in N$-თვის. აქედან კი

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2 \\ 2 = 3 \\ 3 = 4 \\ n = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 2 = 3 = 4 = \ldots n = \ldots$$

V თავი

3 მიმდევრობის ზღვარი

დაწერეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

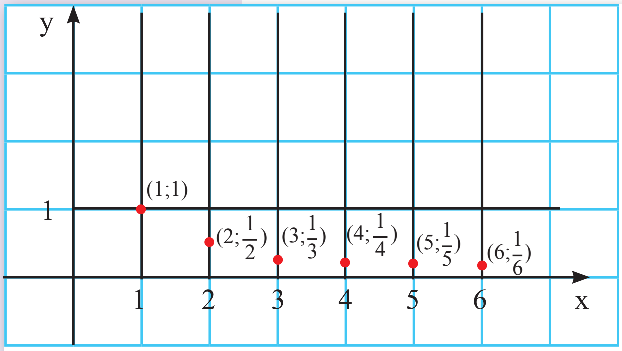
ა) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (1); ბ) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ (2);

გ) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ (3); დ) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ (4).

არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა მონოტონური? კიდევ როგორ დაახასიათებდით მოცემულ მიმდევრობას?

ალბათ, შეამჩნიეთ, რომ (1) და (3) მიმდევრობის წევრები ნომრის ზრდასთან ერთად სულ უფრო და უფრო უახლოვდებიან 0-ს, (მაგრამ 0-ის ტოლი არ ხდება), (2) მიმდევრობისა კი — 1-ს. რასაც ვერ ვიტყვით მე-4 მიმდევრობის წევრებზე.

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ მიმდევრობის უამრავი წევრი, დაწყებული რომელიღაც ნომრიდან, რომლებიდანაც მანძილი 0-მდე ნაკლებია $\frac{1}{10^{10}}$.



განვიხილოთ უტოლობა:

$$\left(\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{10^{10}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} < \frac{1}{10^{10}}\right) \Leftrightarrow n > 10^{10} \quad \text{ე.ი. (1)}$$

მიმდევრობის ყველა ის წევრი$\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$,

რომლის ნომერი მეტი იქნება 10^{10}-ზე, ნაკლებია $\frac{1}{10^{10}}$-ზე.

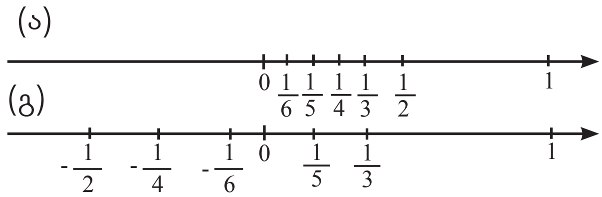
ნახაზზე მოცემულია (1) მიმდევრობის გრაფიკი.

იპოვეთ, მიმდევრობის იმ წევრის ნომერი, რომლის მომდევნო ყველა წევრსა და 0-ს შორის მანძილი ნაკლები გახდება:

ა) $\frac{1}{10^{1000}}$-ზე; ბ) $\frac{1}{10^{10000}}$-ზე.

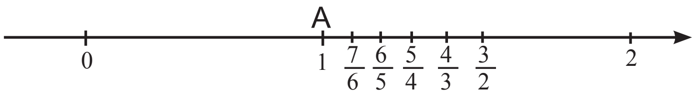
დაასახელეთ, რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი. როგორ ფიქრობთ, იქნება თუ არა (1) მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წევრი (დაწყებული რომელიღაც წევრიდან), დაშორებული 0-დან თქვენს მიერდასახელებულ რიცხვზე ნაკლები მანძილით ? შეეცადეთ პასუხი დაასაბუთოთ.

მე-2 ნახაზზე ვხედავთ რიცხვით ღერძზე გამოსახულ (ა) და (გ) მიმდევრობის წევრებს. n-ის ზრდასთან ერთად წევრები სულ უფრო უახლოვდება ნულს. $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right.$ მიმდევრობის წევრები ხან მარცხნიდან, ხან კი მარჯვნიდან), თუმცა 0-ის ტოლი არ ხდება, ანუ მანძილი მიმდევრობის წევრებსა და 0-ს შორის n-ის ზრდასთან ერთად უსაზღვროდ მცირდება - უახლოვდებიან ნულს, თუმცა 0-ის ტოლი არ ხდება.



ნახ. 2

გამოვსახოთ (2) მიმდევრობის წევრები რიცხვით ღერძზე.



როგორც ვხედავთ, n-ის ზრდასთან ერთად მიმდევრობის წევრები თანდათან უახლოვდებიან 1-ს.

ვაჩვენოთ, რომ როგორი მცირე ε რიცხვიც უნდა ავიღოთ, მოიძებნება მიმდევრობის ისეთი წევრი, რომ ამ წევრიდან დაწყებული მიმდევრობის ყველა წევრი A(1) წერტილიდან ε-ზე ნაკლები მანძილით იქნება დაშორებული, ან, რაც იგივეა, შესრულდება უტოლობა $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} < \varepsilon\right) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

ე.ი. მიმდევრობის ყველა ის წევრი, რომლის ნომერიც მეტი იქნება $\frac{1}{\varepsilon}$ რიცხვზე (დაწყებული $N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$-დან) დაშორებული იქნება A(1) წერტილიდან ε-ზე (ε>0) ნაკლები მანძილით.

გავიხსენოთ!
მანძილი A(a) და B(b) წერტილებს შორის უდრის |a–b|-ს.

ε — „ეფსილონი“ ბერძნული ანბანის მე-5 ასოა.

? იპოვეთ (2) მიმდევრობის იმ წევრის ნომერი, რომლიდანაც დაწყებულში მიმდევრობის წევრები დაშორებული იქნება A(1) წერტილიდან ε-ზე ნაკლები მანძილით, თუ $\varepsilon = 15^{-200}$; $\varepsilon = 10,3^{-100}$; 10^{-10000};

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ როგორი მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა დავასახელოთ, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი N ნომერი, რომ ყოველი n≥N-თვის შესრულდება უტოლობა:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ (2) მიმდევრობის ზღვარი არის 1.

a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური n>N-თვის შესრულდება უტოლობა

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

lim - არის პირველი სამი ასო ლათინური სიტყვისა limes, რაც ზღვარს, საზღვარს ნიშნავს.

და ვწერთ:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

იკითხება:
x_n მიმდევრობის ზღვარი, როცა n მიისწრაფის უსასრულობისკენ უდრის a-ს.

უტოლობა $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

∃-ით მათემატიკაში აღინიშნება სიტყვა „მოიძებნება“, „არსებობს“.

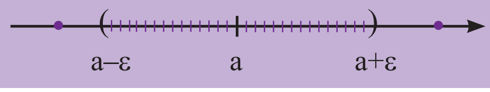
მიღებული ორმაგი უტოლობა ნიშნავს, რომ ∀ε>0-თვის არსებობს ისეთი N ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული მიმდევრობის ყველა წევრი მდებარეობს ინტერვალში.

$(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ინტერვალს **a რიცხვის ε მიდამოს** უწოდებენ.

ε მიდამოს გარეთ კი მოთავსებული იქნება მიმდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა.

$(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ ინტერვალის **a რიცხვის, ε მიდამოს** უწოდებენ

მიმდევრობის ზღვრის განმარტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: a რიცხვს ეწოდება **(x_n) მიმდევრობის ზღვარი**, თუ $\forall\varepsilon > 0$-თვის ∃N ნომერი რომ მიმდევრობის ყოველი x_n წევრი, $n>N$-ისთვის. მოთავსებული იქნება $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ მიდამოში.



მაგალითი 1.

დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+1} = 3$

N ნომერი დამოკიდებულია ε რიცხვის არჩევაზე. ε-ის შემცირებასთან ერთად, საზოგადოდ, იზრდება N რიცხვი.

ამოხსნა:
უნდა ვაჩვენოთ $\forall\varepsilon > 0$-თვის მოიძებნება N ნატურალური რიცხვი, რომ, როცა n>N შესრულდება:

$$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n - 3n - 3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$$

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \left(n + 1 > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow n > \frac{3}{2} + 1$$

აქედან თუ $N = \left[\frac{3}{2} + 1\right]$ (მთელი ნაწილი), მაშინ $\forall n > N$-თვის შესრულდება უტოლობა:

$$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \quad \text{ე.ი.} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1} = 3$$

მაგალითი 2.

დაამტკიცეთ, რომ თუ $|q|<1$, $q\neq 0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

დამტკიცება:

$\forall \varepsilon > 0$-თვის $\exists N_0$, რომ, როცა $n>N_0$ შესრულდება

$|q^n - 0| < \varepsilon$

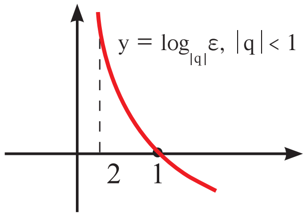
$(|q|^n < \varepsilon) \Leftrightarrow (|q|^n < |q|^{\log_{|q|}\varepsilon}) \Leftrightarrow \log_{|q|} \varepsilon,$

რადგან $|q| < 1 \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon$, რადგან

ე.ი. როცა n იქნება $\log_{|q|}\varepsilon > 0$

რიცხვზე მეტი ნატურალური რიცხვი,

მაშინ $|q^n - 0| < \varepsilon$, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, როცა $|q| < 1$.



$N_0=[\log_{|q|} \varepsilon] + 1$

$n \geq N_0$

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

1. _?_ ან _?_ მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება.

2. თუ a რიცხვი (x_n) მიმდევრობის ზღვარია, მაშინ a რიცხვის ნებისმიერ ε მიდამოში მოთავსდება მიმდევრობის წევრების _?_ რაოდენობა, ხოლო ამ მიდამოს გარეთ კი _?_ რაოდენობის წევრები.

3. თუ $|q|<1$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n =$ _?_ .

სავარჯიშოები:

1. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-2}{2n} = 2$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1} = 1$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n+1} = 0$;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n} = -2$; ე) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n} = \frac{1}{3}$; ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n} = \frac{1}{3}$.

2. იპოვეთ ზღვარი:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(0,5)^n$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0,25)^n$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{6})^n$; დ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n$.

3. ჩამოაყალიბეთ: რას ნიშნავს, რომ a რიცხვი არ არის (x_n) მიმდევრობის ზღვარი?

4. გამოთქვით ვარაუდი, რა იქნება მიმდევრობის ზღვარი და აჩვენეთ თქვენი ვარაუდის სისწორე:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$; დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$.

5. არსებობს თუ არა [a;b] შუალედი, რომელსაც ეკუთვნის (a_n) მიმდევრობის ყველა წევრი:

ა) $a_n = \frac{2n+1}{n}$; ბ) $a_n=(-2)^n$; გ) $a_n=2n-1$;

დ) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; ე) $a_n = \frac{2n+7}{n}$; ვ) $a_n=(-1)^n \cdot n$.

გ

6*. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს $x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-1})=0$ განტოლებას ნამდვილი ფესვები.

7. დაშტრიხეთ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგ უტოლობათა სისტემის ამონახსნები და იპოვეთ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი.

ა) $\begin{cases} x-y \le 1 \\ x+y \le 2; \\ y \le 2 \end{cases}$ ბ) ა) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x+y \ge 3 \end{cases}$;

8. ამოხსენით უტოლობა $0,11^{\log_3 \frac{4x-1}{3x+2}} > 1$.

9. 10 სმ რადიუსის მქონე წრეწირზე აღებულია A წერტილი. A წერტილიდან რა მანძილზე უნდა გავატაროთ A წერტილზე გავლებული მხების პარალელური BC ქორდა, რომ ABK სამკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი, სადაც AK წრეწირი არია დეამეტრია?

10. ტემპერატურა შენობის შიგნით +17°-ია, ხოლო შენობის გარეთ –2°. ფარინგეიტის შკალით ტემპერატურა შენობის შიგნით ტოლია –62,6°F, ხოლო შენობის გარეთ –28,4°F. იპოვეთ ფორმულა, რომლითაც ცელსიუსსა და ფარინგეიტს აკავშირებს, თუ ვიცით, რომ დამოკიდებულება წრფივია.

ეს საინტერესოა

განვიხილოთ უსასრულო მიმდევრობა

$$\left(1+\frac{1}{1}\right), \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, ...\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ... \qquad (1)$$

მტკიცდება, რომ არსებობს (1) მიმდევრობის ზღვარი და იგი e-ს (ნეპერის რიცხვის) ტოლია

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (2),$$

e = 2, 7182818284...   e ირაციონალური რიცხვია.

ფრანგმა მათემატიკოსმა ერმიტმა (1822-1901 წწ) აჩვენა, რომ e რიცხვი არ შეიძლება იყოს არც ერთი მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვი. ასეთ ირაციონალურ რიცხვებს **ტრანსცენდენტული რიცხვები** ეწოდება. ტრანსცენდენტული რიცხვია ასევე π რიცხვიც.
(2) ზღვარი არის ერთ-ერთი იმ შესანიშნავ ზღვართაგანი, რომლებიც საფუძვლად უდევს მრავალ მათემატიკურ გამოკვლევას.
უკვე ვიცით, რომ პრაქტიკულ გამოთვლებში უმეტეს შემთხვევებში ათობით ანუ ბრიგის (Briggs) ლოგარითმებს იყენებენ. მათემატიკური ანალიზის სხვადასხვა საკითხების შესწავლისას კი უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ ნატურალური ანუ ნეპერის ლოგარითმით - e ფუძიანი ლოგარითმით

$$\log_e x=\ln x$$

e რიცხვის არსებობა იაკობ ბერნულიმ რთული პროცენტის დარიცხვის წესის შესწავლისას დაადგინა. მაგალითად, თუ ანაბარი 1 ლარია და ბანკი ყოველწლიურად 100% რიცხავს, მაშინ წლის ბოლოს ანგარიშზე 2 ლარი იქნება. მაგრამ თუ ბანკი 1 წელიწადში 2-ჯერ 50%-ს დარიცხავს, მაშინ წლის ბოლოს ანგარიშზე იქნება $1\cdot(1+\frac{1}{2})^2=2.25$ ლარი: თუ წელიწადში 4-ჯერ მოხდება თანხის 25%-იანი ზრდა, მაშინ წლის ბოლოს გახდება $1\cdot(1+\frac{1}{4})^4=2.4414$ ლარი. თუ ზრდა მოხდება 12-ჯერ ანუ ყოველთვიურად გაიზრდება $8\frac{1}{3}$%-ით, მაშინ მივიღებთ $1\cdot(1+\frac{1}{12})^{12}=2.613035$ ლარს. (ყოველკვირეული დარიცხვის მივიღებთ 2.692597 ლარს, ყოველდღიურად 2.714567).
ბერნულიმ შეამჩნია, რომ დარიცხვის ინტერვალის შემცირებით ეს მიმდევრობა:
2;   2.25;   2. 4414;   2.613035; ...
უახლოვდება რაღაც ზღვარს .
თუ დარიცხვების რაოდენობას n-ით აღვნიშნავთ (დროის თითოეულ ინტერვალზე დაირიცხოს $\frac{100}{n}$%), მაშინ n-ის უსასრულო ზრდასთან ერთად მიმდევრობის ზღვარი e რიცხვი აღმოჩნდა. ამჟამად ცნობილია e რიცხვის $5\cdot 10^{11}$ ციფრი.

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\dots}}}}}$$

e რიცხვი შესაძლოა ჩავწეროთ უსასრულო წილადის სახითაც, ასევე უსასრულო ნამრავლის სახითაც. როგორ? გაინტერესებთ კიდევ მეტი შეიტყოთ e რიცხვის შესახებ, მაშინ მოამზადეთ თემა:

პროექტი: ....

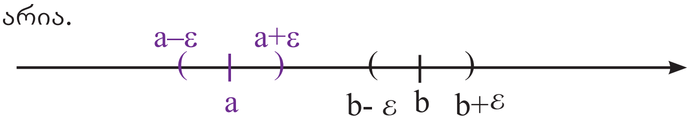
ტრანსცენდენტული რიცხვები e და π.

4 ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ

თეორემა:

რიცხვით მიმდევრობას შესაძლებელია ჰქონდეს არაუმეტეს ერთი ზღვარი.

* დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს რაიმე (x_n) მიმდევრობა, რომელსაც აქვს ერთზე მეტი ზღვარი, ხოლო a და b $(a<b)$ მისი ორი ასეთი ზღვარია.



ε-ად ავირჩიოთ ისეთი რიცხვი, რომ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap(b-\varepsilon; b+\varepsilon)=\varnothing$. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების თანახმად იარსებებს ისეთი N_0 ნომერი, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი რომლის ნომერიც მეტი იქნება N_0-ზე უნდა მოთავსდეს როგორც $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ასევე $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ ინტერვალში, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, ჩვენი დაშვება მცდარია და მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ზღვარი. თუმცა არსებობს მიმდევრობები, რომლებსაც ზღვარი არა აქვს.

- როგორ ფიქრობთ, აქვს თუ არა ზღვარი 1; -1; 1; -1; 1; -1; ..... (1) 2; 4; 8; 16; ... (2) მიმდევრობას? შეეცადეთ დაასაბუთოთ პასუხი.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი აქვს, კრებადი, ხოლო რომელსაც ზღვარი არა აქვს, განშლადი მიმდევრობა ეწოდება.

- მოიყვანეთ განშლადი მიმდევრობის მაგალითები.

დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემები:
თეორემა: თუ (x_n) მუდმივი მიმდევრობაა და $\forall n\in N$-თვის, $x_n=a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

თეორემა:

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ მაშინ სრულდება:

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}kx_n=ka$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n)=k\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

თუ $b\neq0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$

(x_n) მიმდევრობას ეწოდება **უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა**, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

■ მოიყვანეთ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის მაგალითები.
განვიხილოთ მიმდევრობა $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots 2^n, \ldots$.
მიმდევრობის წევრები n-ის ზრდასთან ერთად უსასრულოდ იზრდება. ხდება ნებისმიერ წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე დიდი.

ვიტყვით, რომ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი არის $+\infty$, თუ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ, როცა $n>N$ სრულდება $x_n>A$ და წერენ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, მაშინ x_n მიმდევრობას **უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა** ეწოდება.

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$,

მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$

მაგალითი 1.

იპოვეთ ზღვარი: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-5}{2n^2-n+1}$

ამოხსნა:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{2n^2-n+1} =$$

წილადის მრიცხველიცა და მნიშვნელიც გავყოთ n^2 – ზე.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

თეორემები ზღვარზე

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

$$= \frac{1-5\cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$$

მაგალითი 2.

დაამტკიცეთ, რომ (x_n) მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია $x_n=(-1)^n$, ზღვარი არა აქვს.

ამოხსნა:

ცხადია, თუ $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ (-1)^n \ldots$ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, მაშინ იგი ტოლი უნდა იყოს 1-ის ან -1-ის.

1) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ მაშინ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა სასრული რაოდენობა წევრებისა, უნდა მოთავსდეს 1-ის რაიმე ε მიდამოში - თუ $\varepsilon = 0{,}001$ მაშინ (0,999; 1,001) ინტერვალში. ადვილად მიხვდებით, რომ ეს არ შესრულდება, რადგან ყველა კენტნომრიანი წევრი -1-ია და $-1 \notin (0{,}999;\ 1{,}001)$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ არც (-1) შეიძლება იყოს (x_n) მიმდევრობის ზღვარი.

შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

4. ჩასვით სიტყვები „კრებადია“ ან „განშლადია“.

ა) მიმდევრობა $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$ ___?___

ბ) მიმდევრობა $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots$ ___?___

გ) მიმდევრობა $1; 2; 4; 8; \ldots$ ___?___

დ) მიმდევრობა $1; -2; 4; -8; \ldots$ ___?___

სავარჯიშოები:

1. მოცემული მიმდევრობებიდან რომელია კრებადი და რომელი განშლადი?

ა) 3, 6, 9, 12, ...;

ბ) 2, 5, -5, -2, 2, 5, -5...

გ) 2, -8, 14, -20, ...;

დ) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$.

2. ცნობილია, რომ (x_n) მიმდევრობა კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ ($-x_n$) მიმდევრობაც კრებადია და თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -a$

3. იპოვეთ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ:

ა) $x_n = \frac{3n+2}{2n+1}$;

ბ) $x_n = \frac{4n-1}{3n+4}$;

გ) $x_n = \frac{5n^2+4}{3n^2-2}$;

დ) $x_n = \frac{4n^3+3n+1}{3n^3+n^2+4}$;

ე) $x_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$;

ვ) $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{3n^2+4}$.

4. ორი კრებადი მიმდევრობის ჯამის ზღვრის შესახებ თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}+\frac{2-3n^2}{n^2+1}\right) = -2$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n-1}{n^2-1}\right) = 0$.

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{n+1}+\frac{3n^2-8}{2n^2+1}\right) = 3,5$;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n^2-1}+\frac{2n-7}{n^2+3}\right) = 0$.

5. ორი კრებადი მიმდევრობის ნამრავლის ზღვრის შესახებ თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+5n^2)(1-n+n^2)}{n^2(n^2+3)} = 5$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(15+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n-7}{n+6}\right) = 15$.

6. იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ:

ა) $x_n = \frac{\sqrt{2n^2+5n}}{n+1}$;

ბ) $x_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3+3n+1}}{\sqrt{2n^2+5}}$;

გ) $x_n = \sqrt{n^1+n+3}-\sqrt{n^2-n+5}$;

დ) $x_n = \sqrt{9n^2+n+6}-3n$.

7. იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ:

ა) $x_n = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)}$;

ბ) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

8*. ცნობილია, რომ $a_n (n\in N)$ კრებადია, ხოლო $b_n (n\in N)$ განშლადი. რა შეიძლება ითქვას შემდეგ მიმდევრობათა კრებადობაზე? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები: ა) $a_n + b_n$; ბ) $a_n b_n$

9*. თუ (a_n) და (b_n) მიმდევრობები განშლადია, შეიძლება თუ არა დავასაბუთოთ, რომ განშლადია ა) a_n+b_n და ბ) $a_n b_n$ მიმდევრობები? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

გ

10 დაწერეთ $y= f(x)$ კვადრატული ფუნქცია, თუ $f(0)=1$ და $f(1)=0$ და $f(3)=5$

11 დაშტრიხეთ სიბრტყის ის წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას

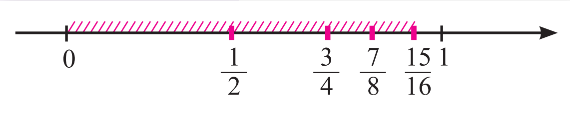
ა) $\begin{cases} y \le \log_2 x \\ 4x - 3y - 12 \le 0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x + y - 2 \le 0 \\ 5x - 2y - 10 \le 0 \end{cases}$; გ) $\begin{cases} y > 2^x \\ y - 2x < 1 \end{cases}$

12 მართკუთხა ABC სამკუთხედი ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლით იყოფა ორ სამკუთხედად, რომელთა ფართობები 384 სმ² და 216 სმ². იპოვეთ ABC სამკუთხედის ჰიპოტენუზა.

13 ABC ტოლფერდა სამკუთხედის (AB=BC) BD მედიანაზე აღებულია K წერტილი, ისე, რომ KD=2BK. AK წრფე კვეთს BC გვერდს M წერტილში. იპოვეთ CM:BM.

14 ოქტომბერში ნიკამ ტესტირებაზე 50% მიიღო, იანვარში 66%. თამუნამ იმავე ტესტში ჯერ 40%, ხოლო შემდეგ, 56%. რომელმა გააუმჯობესა თავისი შედეგი უფრო მეტად? რამდენი პროცენტით?

5 უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიულიპროგრესია



ავიღოთ მონააკვეთი [0;1]. დავყოთ იგი ორ ტოლ ნაწილად. მიღებული ორი მონაკვეთიდან მარჯვენა $[\frac{1}{2};1]$ მონაკვეთი ისევ გავყოთ ორ ტოლ ნაწილად. მიღებულიდან ისევ მარჯვენა $[\frac{3}{4};1]$ მონაკვეთი კიდევ გავყოთ ორ ტოლ ნაწილად და ა.შ. ეს პროცესი გავაგრძელოთ უსასრულოდ. ამრიგად, [0;1] მონაკვეთი დაიყო უსასრულო რაოდენობის მონაკვეთებად.

$$[0;\frac{1}{2}];\qquad [\frac{1}{2};\frac{3}{4}];\qquad [\frac{3}{4};\frac{7}{8}];\qquad [\frac{7}{8};\frac{15}{16}];\qquad [\frac{15}{16};\frac{31}{32}];\ \ldots \qquad (1)$$

? როგორ ფიქრობთ რას უდრის ყველა ამ მონაკვეთის სიგრძეთა ჯამი?

დიახ, ალბათ ლოგიკურია, რომ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \qquad (2)$$

ჯამის თითოეული შესაკრები [0;1] მონაკვეთის დაყოფით მიღებული შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

ჯამი 1-ის ტოლად მივიჩნიოთ

განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დაწვრილებით.
ვხედავთ, რომ (2) ჯამის წევრები გეომეტრიულ პროგრესიას ქმნიან.

$$S_1=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

. . . .

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

ადვილად მივხვდებით, რომ n-ის ზრდასთან ერთად S_n-იც უფრო და უფრო უახლოვდება [0,1] მონაკვეთის სიგრძეს 1-ს.
ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$ (3). დავრწუნდეთ (3) ტოლობის მართებულობაში.

ვიცით $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. ჩვენს შემთხვევაში $S_n=\frac{\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-1)}{-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n$.

$$\lim\limits_{n\to\infty} S_n+\lim(1-(\frac{1}{2})^n)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

საზოგადოდ, თუ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ისეთია, რომ $|q|<1$, მაშინ ასეთი პროგრესიისთვის არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ და მას პროგრესიის წევრთა ჯამს უწოდებენ, სადაც

$S_1 = b_1$
$S_2 = b_1 + b_2$
$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

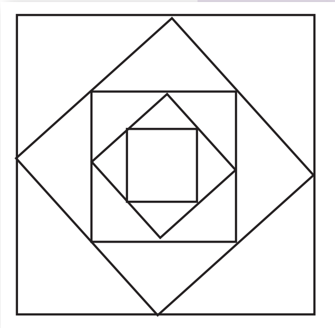
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) =$$
$$= \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{b_1}{1-q}$$

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$
როცა $|q| < 1$

გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელისთვის სრულდება $|q|<1$, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიულ პროგრესია ეწოდება.

ე.ი. $\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$

სავარჯიშოები:



1. კვადრატში, რომლის გვერდი a სმ-ია, მისი გვერდების შუა წერტილების შეერთებით ჩახაზულია ახალი კვადრატი. მიღებულ კვადრატში იმავე ხერხით ჩახაზულია ახალი კვადრატი და ა.შ. უსასრულოდ. იპოვეთ ყველა ამ კვადრატის ფართობთა ჯამი.

2. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $q, q^2, q^3, \dots q^4, \dots$

არსებობს თუ არა $\lim_{n\to\infty} q^n$, თუ:

ა) $|q| = 1$; ბ) $|q| > 1$; გ) $q = \frac{\pi}{2}$; დ) $q = -\frac{\pi}{3}$;

ე) $q = \frac{m-1}{m+1}$; ვ) $q = \frac{m+1}{m-1}$; ზ) $q=-3$.

პასუხი დაასაბუთეთ.

3. დადებითწევრებიანი უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის პირველი სამი წევრის ჯამი 10,5-ის ტოლია, ხოლო პროგრესიის წევრთა ჯამი - 12-ის. იპოვეთ პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი.

4. ამოხსენით განტოლება:

ა) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$, სადაც $|x|<1$;

ბ) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}$, სადაც $|x|<1$.

5*. იპოვეთ ისეთი უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, რომლის ყოველი წევრი 4-ჯერ მეტია ყველა მის მომდევნო წევრთა ჯამზე.

6. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი ტოლია 16. ხოლო ამავე პროგრესიის წევრთა კვადრატების ჯამია $153\frac{3}{5}$. იპოვეთ ამ პროგრესიის მეოთხე წევრი და მნიშვნელი.

7. 30°-იანი A კუთხის ერთ-ერთ გვერდზე აღებულია B წერტილი ისე, რომ AB=a. B წერტილიდან დაშვებულია მართობი კუთხის მეორე გვერდზე. მართობის ფუძიდან დაშვებულია მართობი AB გვერდზე და ა.შ. იპოვეთ მიღებული უსასრულო ტეხილის სიგრძე.

8 იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, თუ მისი სამი წევრის ჯამი $\frac{64}{7}$-ის, ხოლო კუბების ჯამი 64-ის ტოლია.

9 უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი 1,5-ის, ხოლო კვადრატების ჯამი $\frac{1}{8}$-ის ტოლია. იპოვეთ პირველი წევრი და მნიშვნელი.

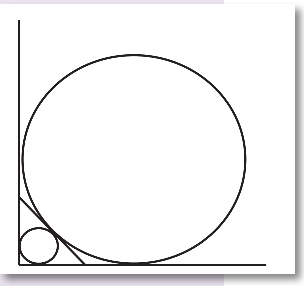
გ

10 ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი

ა) $y=(x+1)^3-(x-1)^3$; ბ) $y=\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}$; გ) $y=x|x|-4x-5$;

დ) $y=\frac{|x-1|}{x-1}(x^2+3)$; ე) $y=(\sqrt{x-2})^2$; ვ) $y=\sqrt{(x-2)^2}$.

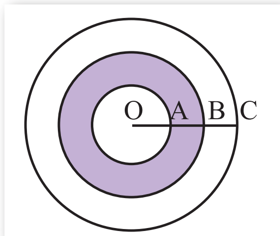
11 იპოვეთ $x_1^4+x_2^4-1$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ x_1 და x_2 არიან $3x^2-5x-1=0$ განტოლების ამონახსნებია.



12 არსებობს მხოლოდ სამი დადებითი ორნიშნა რიცხვი, შემდეგი თვისებით: თითოეული რიცხვი უდრის მისი ციფრების ჯამის არასრულ კვადრატს. იპოვეთ ორი მათგანი თუ მეორე 50-ით მეტია პირველზე.

13 იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r-ის ტოლია, ხოლო რადიუსი წრეწირისა, რომელიც ეხება ჰიპოტენუზას და კათეტების გაგრძელებებს (ცენტრი სამკუთხედის გარეთა) R-ის.

14 მოცემულია სამი კონცენტრული წრეწირი ისე, რომ OA=AB=BC. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდი წრეწირის შიგნით აღებული შემთხვევითი წერტილი მოხვდება დაშტრიხულ რგოლში.



15 იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1-9n^2}$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2+1}{0,1n^2+0,01n}$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n^2+3}{12n^4-7n^2+n}$;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{0,25n^2+n+3}$; ე) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+5^n}$; ზ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}+3^n-2^{2n}}{5^n+2^n+3^{n+3}}$.

16 დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)....\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ x_n მიმდევრობის 1-ლი, მე-7, k-ური, (k+1)-ე წევრი, თუ
ა) $x_n=3n+2$; ბ) $x_n=(-1)^{n+1}$; გ) $x_n=n^2-2n+3$;
დ) $x_n=2^{n+1}$; ე) $x_n=(-1)^n$; ვ) $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

2. იპოვეთ $x_n=n^2-n-5$ მიმდევრობის ყველა იმ წევრის ნომერი, რომელიც უდრის:
ა) 1-ს; ბ) 7-ს; გ) –11-ს.

3. იპოვეთ $x_n=n^2-3n-1$ მიმდევრობის ყველა იმ წევრის ნომერი, რომელიც:
ა) ნაკლებია 5-ზე; ბ) მეტია ან ტოლი 2-ზე; გ) ნაკლებია 0-ზე.

4. იპოვეთ (x_n) მიმდევრობის უდიდესი და უმცირესი წევრები (თუ ასეთები არსებობს):
ა) $x_n=-n^2+4n+5$; ბ) $x_n=-n^2-n+12$; გ) $x_n=n^2-1$; დ) $x_n=11n-2n^2-9$.

5. ზრდადია თუ კლებადი (x_n) მიმდევრობა?
ა) $x_n=2n+4$; ბ) $x_n=-3n+1$; გ) $x_n=n^2-3n+1$; დ) $x_n=\dfrac{4n+1}{5n-1}$.

6. (x_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით. იპოვეთ ის n ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი აკმაყოფილებს $x_{n+1}>x_n$ უტოლობას.

7. დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით, რომ $\forall n\in N$-თვის:

ა) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+m(m+1)(m+2)=\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$

ბ) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+m(m+1)^2=\dfrac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{12}$

გ) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

დ) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

8. დაამტკიცეთ, რომ $\forall n\in N$-თვის:
ა) $(4^n-1)\vdots 3$; ბ) $(5^{2n+1}+1)\vdots 6$.
გ) $(10^m+18m-28)\vdots 27$ დ) $(9^{n+1}-8n-9)\vdots 16$

9. მიმდევრობის n-ური წევრის ფორმულაა $b_n=95\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ $n\in N$.
ა) იპოვეთ b_1 და b_2; ბ) იპოვეთ ყველა წევრის ჯამი.

10. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულები.

11. მანქანის ფასი 20000\$-ია. ფასი ყოველწლიურად 15%-ით იკლებს. იპოვეთ:
ა) ფასის წლების რაოდენობაზე დამოკიდებულების ფორმულა;
ბ) რამდენი წლის შემდეგ გახდება ფასი 4000\$-ზე ნაკლები.

12. მიმდევრობის ზღვრის განმარტების საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ:
ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n}=1$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n}=\dfrac{3}{5}$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2}=1;$ დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n^2+5}=0.$

13. იპოვეთ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ:

ა) $x_n=\dfrac{3n+7}{4n};$ ბ) $x_n=\dfrac{5n^2-3n+8}{4n^2-8n+4};$

გ) $x_n=\dfrac{n^3+7n}{3n^3-2n^2+8};$ დ) $x_n=\dfrac{n^4+4}{5n^4-3n^3}.$

14. იპოვეთ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ:

ა) $x_n=\sqrt{n^2+1}-n;$ ბ) $x_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n};$ გ) $x_n=\sqrt{4n^4+12n^2}-2n^2;$

დ) $x_n=5n\sqrt{n^2+2}-5n^2;$ ე) $x_n=\dfrac{\sqrt{2n^3+4n^2+3}}{n};$ ვ) $x_n=\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+5}.$

15. იპოვეთ ჯამი:

ა) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+....+\dfrac{1}{3^n}+...;$ ბ) $\dfrac{4}{25}-\dfrac{8}{125}+\dfrac{16}{625}-...+\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}+...;$

გ) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+...;$ დ) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}+....$

16. იპოვეთ:

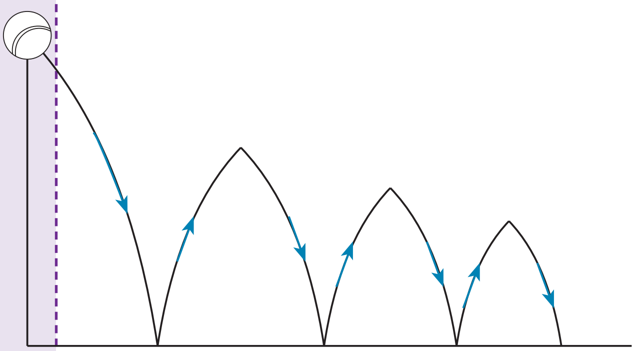
ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n+1)}{0,125n^2};$ ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+...+3n}{2n^2};$

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}};$ დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}+...+\dfrac{3}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}}.$

17. იპოვეთ:

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n+1)!0,5n};$ ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+3)!};$

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{0,125n!n};$ დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}.$



18. ბურთი ვარდება 10 მ-ის სიმაღლიდან და ხტებ უკან უკან 6 მ-ის სიმაღლეზე, შემდეგ 3,6 მ-ზე და ა.შ. სიმაღლეები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ბურთის მიერ გავლილი მანძილი.

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1. თუ მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $a_n=2n^2–1$, მაშინ $a_n=$
ა) 40; ბ) 47; გ) 49; დ) 51.

2. თუ მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $a_n=a_{n–1}+1$ და $a_1=2$, მაშინ $a_7=$
ა) 4; ბ) 5; გ) 6; დ) 8.

3. 3; 5; 7; 11... მიმდევრობის რეკურენტული ფორმულაა: $a_1=3$ და
ა) $a_{n+1}= a_n+1$; ბ) $a_n= a_{n–1}+2$; გ) $a_n= 2a_{n–1}$; დ) $a_{n+1}= 2n+1$.

4. $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}$...მიმდევრობის ზღვარია:
ა) 1; ბ) 0; გ) ; დ) $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-5}{3n^2+1} =$
ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) 1; დ) $\frac{3}{2}$.

6. მიმდევრობებიდან: I. 5, 10, 15, 20, ...; II. $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$...; III. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, ...
კრებადია:
ა) I; ბ) მხოლოდ II; გ) მხოლოდ III; დ) II და III.

7. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$ მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + 3y_n) =$
ა) 10; ბ) 7; გ) 19; დ) პასუხს ვერ გავცემთ.

8. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$ მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n =$
ა) 2; ბ) 5; გ) 7; დ) 10.

9. $5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\frac{5}{81}+...=$
ა) 7; ბ) 7,5; გ) 8; დ) 8,5.

10. თუ $|x|<1$, მაშინ $x+x^2+x^3+...=3$ განტოლების ამონახსნია:
ა) $x=\frac{1}{4}$; ბ) $x=$; გ) $x=\frac{3}{4}$; დ) $x=\frac{4}{5}$.

V თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

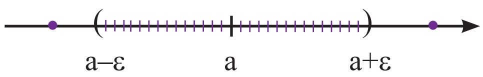
- თუ **A(n)** წინადადება, რომელიც დამოკიდებულია **n** ნატურალურ რიცხვზე ჭეშმარიტია **n=1**-თვის და იქიდან, რომ ის ჭეშმარიტია **n=k**-თვის, (**k** ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) გამომდინარეობს, რომ იგი ჭეშმარიტი იქნება **n=k+1**-სთვის, მაშინ **A(n)** წინადადება ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური **n** რიცხვისთვის.

- **a** რიცხვს ეწოდება **(x_n)** მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური **N** რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური **n>N**-თვის შესრულდება უტოლობა

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

- მიმდევრობის ზღვრის განმარტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

a რიცხვს ეწოდება **(x_n) მიმდევრობის ზღვარი**, თუ $\forall\varepsilon>0$-თვის $\exists N$ ნომერი რომ მიმდევრობის ყოველი x_n წევრი, $n>N$-ისთვის. მოთავსებული იქნება $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ მიდამოში.



- რიცხვით მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი აქვს, **კრებადი**, ხოლო რომელსაც ზღვარი არა აქვს, **განშლადი მიმდევრობა** ეწოდება.

თეორემა:

თუ $\lim x_n=a$ და $\lim y_n=b$ მაშინ სრულდება:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab \qquad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}kx_n=ka \qquad \lim_{n\to\infty}(kx_n)=k\lim_{n\to\infty}x_n$$

თუ b≠0, მაშინ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}x_n}{\lim_{n\to\infty}y_n}$, თუ $\lim_{n\to\infty}y_n\neq0$

- გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელისთვის სრულდება $|q|<1$, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიულ პროგრესია ეწოდება.

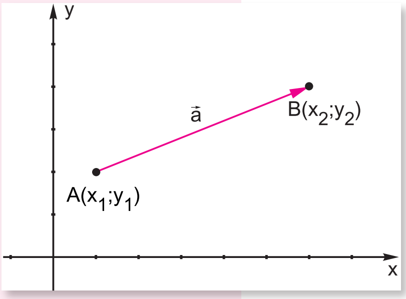
- უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{b_1}{1-q}$$

VI თავი

ამ თავში გავეცნობით ვექტორის კოორდინატებს, ვექტორების სკალარულ ნამრავლს. ბრუნვით სხეულებს: კონუსს, ცილინდრს და სფეროს. შევძლებთ ვექტორების შეკრება-გამოკლების შედეგად მიღებული ვექტორის კოორდინატების პოვნას; ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას; ორ ვექტორს შორის კუთხის პოვნას; მოცემული ვექტორის სიგრძის პოვნას. შევძლებთ ბრუნვითი სხეულების უცნობი ელემენტების პოვნას; სივრცული სხეულის ამა თუ იმ სიბრტყით მოცემული კვეთის ფართობის გამოთვლას.

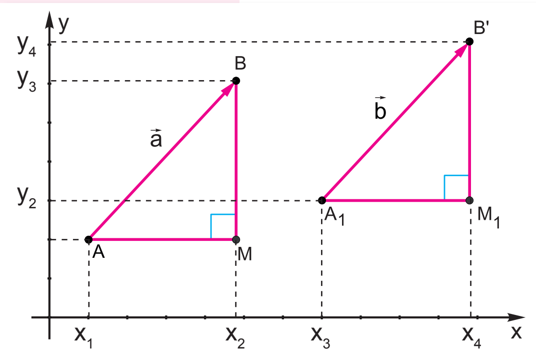
1 ვექტორის კოორდინატები



წინა კლასებში ჩვენ განვიხილეთ ვექტორი როგორც მიმართული მონაკვეთი. განვმარტეთ ვექტორებზე მოქმედებები – შეკრება, გამოკლება, ვექტორის რიცხვზე გამრავლება.
განვიხილოთ ვექტორები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში და ცხადია, უპირველეს ყოვლისა, შემოვიღოთ ვექტორის კოორდინატები სიბრტყეზე.
ვთქვათ $\vec{a}$ ვექტორის საწყისი წერტილია $A(x_1;y_1)$, ხოლო ბოლო $B(x_2;y_2)$ წერტილი. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები ვუწოდოთ $a_1 = x_2 - x_1$ და $a_2 = y_2 - y_1$ რიცხვებს და ჩავწეროთ $\vec{a}=(a_1;a_2)$ ან $\overline{a = (a_1;a_2)}$.

გასახსენებლად!
ორი ვექტორი ტოლია, თუ ისინი თანამიმართულია და ტოლი სიგრძეები აქვთ.

ვაჩვენოთ, რომ თუ ორ ვექტორს ტოლი კოორდინატები აქვთ, მაშინ ისინი ტოლია.
განვიხილოთ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და $\vec{b} = \overrightarrow{A_1B_1}$ ვექტორები, რომელთაც ტოლი კოორდინატები აქვთ.



ვთქვათ A_1BA_1 და B_1 წერტილების კოორდინატებია: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $A_1(x_3;y_3)$, $B_1(x_4;y_4)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ $(x_1-x_2; y_2-y_1)$ და $\overrightarrow{A_1B_1}$ $(x_4-x_3; y_4-y_3)$ ვექტორების კოორდინატების ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 = y_4 - y_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x_3 - x_1 = x_4 - x_2 \equiv a \\ y_3 - y_1 = y_4 - y_2 \equiv b \end{cases}\right) \text{ მივიღეთ:}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + a \\ y_3 = y_1 + b \end{cases} \text{ და } \begin{cases} x_4 = x_2 + a \\ y_4 = y_2 + b' \end{cases}$$

ე.ი. არსებობს პარალელური გადატანა $\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b' \end{cases}$

რომლითაც $A(x_1;y_1)$ წერტილი გადადის $A_1(x_3;y_3)$ წერტილში და გადატანით $B(x_2;y_2)$ წერტილი გადადის $B_1(x_4;y_4)$ წერტილში, მაშასადამე, ამ პარალელური გადატანით $\overrightarrow{AB}$ გადადის $\overrightarrow{A_1B_1}$ ვექტორში, ე.ი. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$. რ.დ.გ.

- აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{a}(a_1;a_2)=\vec{b}(b_1;b_2)$, მაშინ $a_1=b_1$ და $a_2=b_2$, ანუ ტოლ ვექტორებს შესაბამისი კოორდინატები ტოლი აქვთ.
- აჩვენეთ, რომ თუ $\overline{OA}(x_1;y_1)$, მაშინ $A(x_1;y_1)$, სადაც O კოორდინატთა სათავეა.

გასახსენებლად!
$A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით:
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

როგორც ვიცით, სივრცეში წერტილის მდებარეობა სამი კოორდინატით განისაზღვრება, ანუ სივრცეში ვექტორიც, შესაბამისად სამი კოორდინატით მოიცემა. მოცემულია $\overrightarrow{AB}(a_1;a_2;a_3)$ ვექტორი ნიშნავს, რომ მისი საწყისი წერტილია $\vec{A}(x_1;y_1;z_1)$ და ბოლო წერტილია $\vec{B}(x_2;y_2;z_2)$ და $a_1=x_2-x_1$; $a_2=y_2-y_1$; $a_3=z_2 - z_1$. თუ გავიხსენებთ სივრცის ორ წერტილს შორის

მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას, დავასკვნით, რომ $\vec{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

გასახსენებლად!

ნულოვანია ვექტორი, რომლის სიგრძე ნულის ტოლია, ერთეულოვანი კი, რომლის სიგრძეა 1.

- რისი ტოლია ნულოვანი $\vec{a}(a_1;a_2)$ ვექტორის კოორდინატები?
- შეიძლება თუ არა ვექტორი $\vec{b}(1;y)$:
ა) იყოს ნულოვანი? ბ) ერთეულოვანი?

მაგალითი 1.

მოცემულია A(1;0;3) და B(2;1;1) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები და გამოთვალეთ მისი სიგრძე.

ამოხსნა:

განმარტების საფუძველზე $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $a_1=2-1=1$, $a_2=1-0=1$ და $a_3= 1-3 = -2$, ე.ი. $\overline{AB}(1;1;-2)$, ხოლო სიგრძე გამოითვლება ფორმულით: $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

- მართალია თუ არა, რომ:

1. ტოლ ვექტორებს ტოლი სიგრძეები აქვთ;
2. თუ ვექტორებს ტოლი სიგრძეები აქვთ, ისინი ტოლია;
3. სხვადასხვა მიმართულების მქონე ვექტორები არ შეიძლება იყოს ტოლი;
4. არსებობს ისეთი ABC სამკუთხედი, რომ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

სავარჯიშოები:

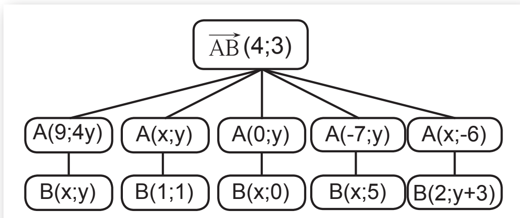
1 მოცემულია A(3;2), B(1;3) და C(2;1) წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების კოორდინატები.

2 მოცემულია A(0;1), B(1;0), C(1;2) და D(2;1) წერტილები. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ და $\overline{BD}$ ვექტორებს შორის იპოვეთ ტოლი ვექტორები.

3 აგების შეუსრულებლად დაადგინეთ, თუ რომელ საკოორდინატო მეოთხედში მდებარეობს შემდეგი ვექტორები (0 კოორდინატთა სათავეა) $\overrightarrow{OA}(2;3), \overrightarrow{OB}(-3;2), \overrightarrow{OC}(-3;-3), \overrightarrow{OD}(4;-2), \overrightarrow{OE}(-4;-2)$.

4 იპოვეთ $\overrightarrow{OM}$ და $\overrightarrow{OP}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ ვიცით, რომ M წერტილი აბსცისათა ღერძზე მდებარეობს და $|\overline{OM}| = 4,5$, ხოლო P წერტილი ორდინატთა ღერძზე მდებარეობს და $|\overline{OP}| = \sqrt{2}$. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას? (O კოორდინატთა სათავეა).

5 თითოეული შემთხვევისათვის იპოვეთ A და B წერტილების უცნობი კოორდინატები და $|\overline{AB}|$.



6 დაადგინეთ ABCD ოთხკუთხედის სახე, რომელშიც:

ა) $\overline{AB} = \overline{DC}$ და $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$;

ბ) $\overline{AB} = \overline{DC}$ და $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$;

გ) $\overline{AO} = \overline{OC}$ და $\overline{BO} = \overline{OD}$, სადაც 0 დიაგონალების კვეთის წერტილია.

7. MNPQ ოთხკუთხედის წვეროების კოორდინატებია: M(-1;2), N(3;3), P(1;0).

ა) იპოვეთ Q წერტილის კოორდინატები, თუ $\overrightarrow{NM} = \overline{PQ}$;

ბ) ტოლია თუ არა $\overrightarrow{MQ}$ და $\overrightarrow{NP}$ ვექტორები?

8. მოცემულია A(1;1), B(-1;0), C(0;1) წერტილები. იპოვეთ ისეთი D(x;y) წერტილი, რომ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები ტოლი იყოს.

9. მოცემულია $\overline{a}(2;3;2\sqrt{3})$ და $\overline{b}(-1;4;2\sqrt{2})$ ვექტორები. იპოვეთ $|\overline{a}|$ და $|\overline{b}|$.

გ

10 დადებითწევრებიანი უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის პირველი სამი წევრის ჯამი 10,5-ის ტოლია, ხოლო პროგრესიის წევრთა ჯამი - 12-ის. იპოვეთ პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი.

11 უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი 12-ის, ხოლო კვადრატების ჯამი 48-ის ტოლია. იპოვეთ Sio.

12 წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი და დახრილი, რომლებიც ერთმანეთთან 60°-იან კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ დახრილის სიგრძე, თუ პერპენდიკულარის სიგრძე 7-ის ტოლია.

13 მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 15 და 20. პირველის გეგმილი სიბრტყეზე 9-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის გეგმილი.

2 ვექტორების შეკრება–გამოკლება

ვთქვათ $\overline{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}$ ვექტორის კი $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$. $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ისეთ c ვექტორს, რომლის კოორდინატებია a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ე.ი.

$\overline{a}(a_1;a_2;a_3) + \overline{b}(b_1;b_2;b_3) = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

ანალოგიურად განიმარტება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა. $\vec{a}(a_1;a_2;a_3;) - \vec{b}(b_1;b_2;b_3 = = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3;)}$

ვაჩვენოთ, რომ ვექტორების შეკრების წესი არ ეწინააღმდეგება ჩვენთვის უკვე ცნობილ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ვექტორულ ტოლობას. ვთქვათ მოცემულია სამი $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ და $C(x_3;y_3;z_3)$ წერტილი.

მაშინ მივიღებთ:

$\overline{AB} = \overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}$,

$\overline{BC} = \overline{(x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2)}$,

$\overline{AC} = \overline{(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)}$,

საიდანაც

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{(\cancel{x_2} - x_1 + x_3 - \cancel{x_2}; \cancel{y_2} - y_1 + y_3 - \cancel{y_2}; \cancel{z_2} - z_1 + z_3 - \cancel{z_2})} =$
$= \overline{(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)} = \overline{AC}$

დამოუკიდებლად აჩვენეთ:

1. $(\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB})$;

2. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$,

3. $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + c$.

მართალია თუ არა, რომ:

1. ორი არანულოვანი ვექტორის ჯამი ან სხვაობა არ შეიძლება იყოს ამ ვექტორებიდან ერთ–ერთის ტოლი.

2. ორი არანულოვანი ვექტორის სხვაობა ნულოვანი ვექტორია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ვექტორები ტოლია.

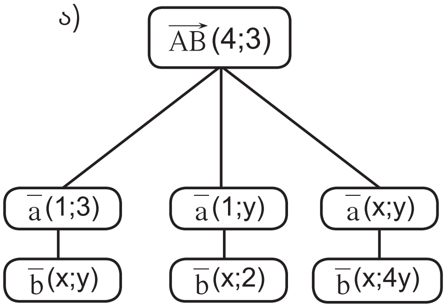
3. ორი ვექტორის ჯამი არ შეიძლება იყოს ნულოვანი ვექტორი.

სავარჯიშოები:

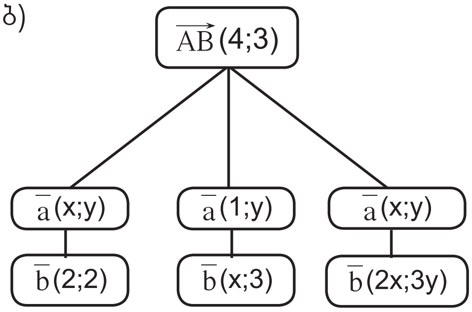
1 მოცემულია სამი A(1;0;1), B(-1;1;2) და C(0;2;-1) წერტილი. იპოვეთ ისეთი D(x;y;z) წერტილი, რომ: ა) $\overline{AB}+\overline{CD}$; ბ) $\overline{AB}-\overline{CD}$ ვექტორი იყოს ნულოვანი ვექტორი.

2 მოცემული ნახაზების მიხედვით იპოვეთ $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების უცნობი კოორდინატები.

ა)



ბ)

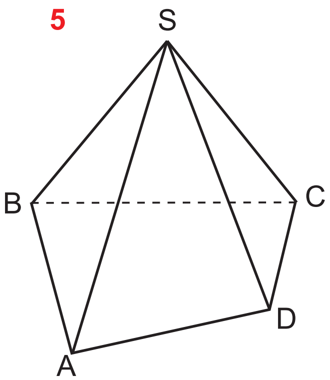


3 იპოვეთ $\overline{a}+\overline{b}$ და $\overline{a}-\overline{b}$ ვექტორების სიგრძეები, თუ მოცემულია $\overline{a}(1;3)$ და $\overline{b}(2;4)$ ვექტორები.

4 იპოვეთ $\sqrt{2}|\overline{a}|$, თუ $\overline{a}=\overline{AB}+\overline{CD}$ და A(0;0;1), B(3;2;1), C(4;6;5) და , D(1;6;3).

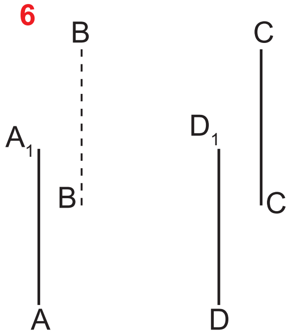
გადაიხაზეთ ნახაზები და ააგეთ ვექტორი:

5



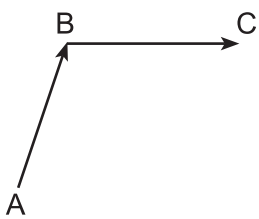
$\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}$.

6



$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}$.

7



$(\overline{AB}+\overline{BC})$.

8 იპოვე $\overline{a}-\overline{b}$ თუ $|\overline{a}|=1, |\overline{b}|=2$ საკმარისია თუ არა პირობა ცალსახა ამოხსნისთვის, თუ არა, დაამატეთ პირობა.

9 იპოვეთ წერტილი, რომლის მიმართაც A(6;–4) და B(1;–2) წერტილები სიმეტრიულია.

10 იპოვეთ $y=x^2$ ფუნქციის $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ პარალელური გადატანით მიღებული $y=f(x)$ ფუნქცია.

11. იპოვეთ ორი რიცხვის შეფარდება, თუ მათი საშუალო გეომეტრიული შეფარდება საშუალო არითმეტიკულთან $\frac{3}{5}$-ის ტოლია.

12. A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია AO მართობი და =ჩ დახრილები. მათი შესაბამისი გეგმილების სიგრძეებისთვის სამართლიანია:

ა) BO>CO; ბ) BO<CO; გ) BO=CO.

13. თუ ორი დახრილის გეგმილიდან ერთი მეორეზე მეტია, მაშინ:

ა) იგივე დამოკიდებულებაა დახრილებს შორის;

ბ) იმ დახრილის სიგრძეა მეტი, რომლის გეგმილიც ნაკლებია;

გ) დახრილების სიგრძეების შესახებ წარმოდგენას ვერ შევიქმნით.

ამოცანა დამოუკიდებელი კვლევისთვის:

1. 1). პროგრამა Geogebra-ში ააგეთ $y=x^2$ პარაბოლა.

2). მე-3 ლოგოში რეჟიმი „ვექტორი ორ წერტილს შორის“ საშუალებით ააგეთ $\vec{a}(3;-1)$.

3). მე-9 ლოგოში რეჟიმი „გადატანა ვექტორით“ — დააწკაპეთ ჯერ გრაფიკზე, შემდეგ ვექტორზე. დაწერეთ მიღებული პარაბოლის განტოლება წვეროს კოორდინატებში.

VI თავი

3 ვექტორის გამრავლება რიცხვზე, კოლინეარული ვექტორები

გავიხსენოთ, თუ როგორ გვაქვს განმარტებული ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი.

$\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი არის $\overline{b} = -1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი არის $\lambda\vec{a}$ ვექტორი, რომელიც $\vec{a}$ ვექტორის თანამიმართულია, თუ $\lambda>0$ და $\vec{a}$ ვექტორის საპირისპიროდაა მიმართული, თუ $\lambda<0$. ამასთან $\lambda\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$.

კოორდინატებში λ რიცხვის $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ ვექტორზე ნამრავლი ასე მოიცემა: $\lambda\overline{(a_1;a_2;a_3)} = \overline{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)}$ (1).

გასახსენებლად!

კოლინეარულია ვექტორები, რომლებიც პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ.

ყოველივე ზემოთთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ორი $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ და $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ ვექტორი კოლინეალურია, თუ სრულდება: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \equiv \lambda$. ამასთან, თუ $\lambda>0$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები თანამიმართულია, ხოლო თუ $\lambda<0$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები საპირისპიროდაა მიმართული.

(1)-ის გათვალისწინებით აჩვენეთ, რომ:

1. $\overline{a}\cdot\lambda = \lambda\cdot\overline{a}$; 2. $(\lambda+\mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$; 3. $\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$

ამოცანა 1.

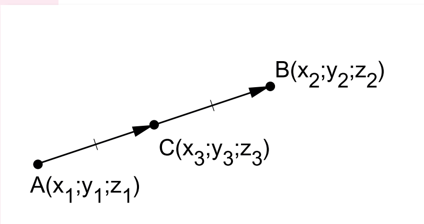
ს.ფ.

ვაჩვენოთ, რომ AB მონაკვეთის C შუაწერტილის კოორდინატები A და B წერტილების შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ნახევარია.

დამტკიცება:

ვთქვათ A წერტილის კოორდინატებია $x_1;y_1;z_1$. B წერტილის კი $x_2;y_2;z_2$. C წერტილის კი $x_3;y_3;z_3$. ვიპოვოთ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორების კოორდინატები.
$\overline{AB}$ $(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ $\overline{AC}$ $(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$.

ცხადია, $\overline{AB}=2\overline{AC}$ ეს ვექტორული ტოლობა ჩავწეროთ კოორდინატებში. $\overline{(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)} = \overline{(2x_3-2x_1;2y_3-2y_1;2z_3-2z_1)}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ:



$$\left.\begin{aligned} x_2-x_1 &= 2x_3-2x_1 \\ y_2-y_1 &= 2y_3-2y_1 \\ z_2-z_1 &= 2z_3-2z_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1+x_2}{2}; \\ y_3 &= \frac{y_1+y_2}{2}; \\ z_3 &= \frac{z_1+z_2}{2}; \end{aligned}\right. \quad \text{რ.დ.გ.}$$

■ მართალია თუ არა, რომ:

1. $\overline{a}$ და $\lambda\overline{a}$ თანამიმართული ვექტორებია
2. $\overline{a}$ და $\lambda\overline{a}$ კოლინეარული ვექტორებია
3. $\overline{a}(a_1;a_2)$ და $\overline{b}$ $(b_1;b_2)$ კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a_1b_2=a_2b_1$.
4. შესაძლებელია ავაგოთ $\overline{b}$ ვექტორი, თუ მოცემულია ისეთი $\overline{a}$ ვექტორი, რომ $\overline{a}$ და $\overline{b}$ საპირისპიროდაა მიმართული და $\overline{a} = 4\overline{b}$ (პასუხი დაასაბუთეთ).

$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორია $\vec{a}(-a_1;-a_2;-a_3)$.

სავარჯიშოები:

1 მოცემულია, რომ $\overline{b} = k\overline{a}$ იპოვეთ ყველა შესაძლო k, თუ $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები ა) საპირისპიროდაა მიმართული ბ) თანამიმართულია გ) არ არის ტოლი.

2 მოცემულია $\overline{a}(1;-2)$ და $\overline{b}(3;0)$ ვექტორები. შეავსეთ ცხრილი

ვექტორი	$0{,}5\overline{a}$	$-4\overline{b}$	$5\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$	$-\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})$
ვექტორის კოორდინატები				

$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ და $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ ვექტორების კოლენიარულობის პირობაა $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

3 მოცემულია $\overline{a}(-0{,}25;2)$ და $\overline{b}(10;-\frac{2}{3})$ ვექტორები. იპოვეთ $|4\overline{a}+0{,}3\overline{b}|$

4 მოცემული ვექტორებიდან $\overline{a}(10;5)$; $\overline{b}(-2;-1)$; $\overline{c}(0;-1)$; $\overline{d}(5;2{,}5)$; $\overline{m}(-1;-0{,}5)$ რომელია ვექტორი არღვევს კანონზომიერებას? (პასუხი დაასაბუთეთ).

5 დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს სამკუთხედი, წვეროებით $A(3;3)$, $B(-2;0)$ და $C\left(0;\frac{6}{5}\right)$ წერტილებში (გამოიყენეთ კოლინეარულობის ცნება).

6 m და n-ის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა ქვემოთ მოცემული ვექტორები კოლინეარული?

ა) $\overline{a}(2;n;3)$ და $\overline{b}(3;2;m)$ ბ) $\overline{a}(m;2;5)$ და $\overline{b}(1;-1;n)$

7 y=f(x) ფუნქციის ნულებია 2 და 5. იპოვეთ ნულები შემდეგი ფუნქციებისთვის:

ა) $y=f(x-2)$; ბ) $y=2f(x+1)$; გ) $y=f(2x)$.

8 იპოვეთ უსასრულოდ კრებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი:

ა) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots$; ბ) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\dots$.

VI თავი

4 ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

$\bar a(a_1;a_2;a_3)$ და $\bar b(b_1;b_2;b_3)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ რიცხვს და აღინიშნება $\bar a\cdot\bar b$-თი.

$$\bar a\cdot\bar b= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

$$\bar a^2 = |\bar a|^2$$

$\bar a\cdot\bar a$ სკალარული ნამრავლი $\bar a^2$–ით აღინიშნება და $\bar a$-ს ვექტორის სკალარული კვადრატი ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ $\bar a^2=|\bar a|^2$, ანუ $\bar a$ ვექტორის სკალარული კვადრატი მისი სიგრძის კვადრატის ტოლია.

დამტკიცება:

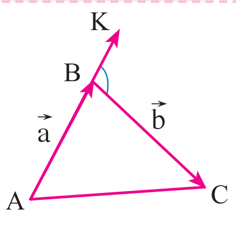
ვთქვათ $\bar a$ ვექტორის კოორდინატია $\bar a(a_1;a_2;a_3)$

$$\bar a^2=\bar a\cdot\bar a=a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2+a_3\cdot a_4=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}^{\,2}=|\bar a|^2$$

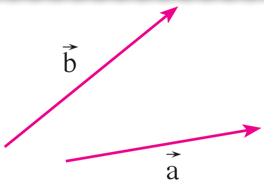
მივიღეთ: $\bar a^2=\bar a\cdot\bar a=|\bar a|^2$. რ.დ.გ.

აჩვენეთ, რომ:

1) $\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$; 2) $(\bar a+\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot\bar c+\bar b\cdot\bar c$; 3) $\bar a^2=|\bar a|^2$; 4) $(\lambda\bar a)=\lambda\cdot(\bar a\cdot\bar b)$.

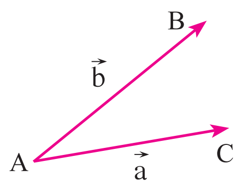


$(\widehat{\bar a;\bar b}) = \angle KBC$



$\vec a$ და $\vec b$ ვექტორები მოვდოთ A წერტილში ($\vec b=\overrightarrow{AB}$ და $\vec a=\overrightarrow{AC}$)

კუთხე $\vec a$ და $\vec b$ ვექტორებს შორის ეწოდება ერთ წერტილში მოდებულ მათ თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხეს.



თეორემა:

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია.

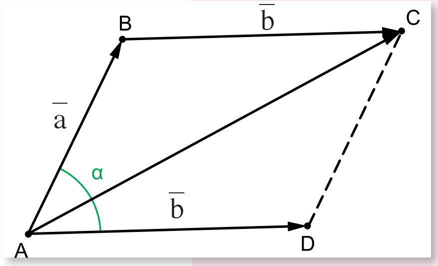
$\bar a$ და $\bar b$ ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება BAC კუთხეს.

ე.ი. $\bar a\cdot\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\cos\alpha$, სადაც α არის $\bar a$ და $\bar b$ ვექტორებს შორის კუთხე.

დამტკიცება:

$$|\bar a+\bar b|^2=(\bar a+\bar b)^2=|\bar a|^2+2|\bar a||\bar b|+|\bar b|^2\rightarrow$$
$$\rightarrow \bar a\cdot\bar b=\frac{1}{2}(|\bar a+\bar b|^2-|\bar a|^2-|\bar b|^2) \qquad (1)$$

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები მოვდოთ ერთ წერტილში და შევკრიბოთ პარალელოგრამის წესით.



ცხადია $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა $\angle A=\alpha$. $\angle B=180°-\alpha$.

$\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$.

ΔABC–დან კოსინუსების თეორემის თანახმად მივიღებთ:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180° - \alpha) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$, საიდანაც (1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\alpha$.

ამოცანა 1.

მოცემულია $|\bar{a}| = 5$ და $|\bar{b}| = 2$ იპოვეთ $\bar{a} + \bar{b}$ და $\bar{a} - \bar{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

ამოხსნა: $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2 = 64 - 4 = 60$

ამოცანა 2.

იპოვეთ $\bar{a}(2;-4;4)$ და $\bar{b}(-3;2;6)$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

ამოხსნა: $|\bar{a}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$; $|\bar{b}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 6 = -6 - 8 + 24) = 10$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow 6 \cdot 7 \cdot \cos\alpha = 10.$

$\cos\alpha = \frac{10}{6 \cdot 7} = \frac{5}{21}$

ამოცანა 3.

მოცემულია არანულოვანი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები. ცნობილია, რომ $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, $\bar{p} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{q} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$ და $\bar{p} \perp \bar{q}$. იპოვეთ $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = \alpha$.

ამოხსნა:

რადგან p და q (არანულოვანი) ვექტორები მართობულია, ამიტომ $\bar{p} \cdot \bar{q} = 0$ ე.ი. $\bar{p} \cdot \bar{q} = (\bar{a} + 2\bar{b})(5\bar{a} - 4\bar{b}) = 0$ სკალარული ნამრავლის თვისებების გამოყენების შედეგად მივიღებთ:

$(\bar{a} + 2\bar{b})(5\bar{a} - 4\bar{b}) = 5\bar{a}^2 - 4\bar{a} \cdot \bar{b} + 10\bar{a} \cdot \bar{b} - 8\bar{b}^2 =$

$= 5|\bar{a}|^2 + 6\bar{a} \cdot \bar{b} - 8|\bar{b}|^2 = 5|\bar{a}|^2 + 6|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|\cos\alpha - 8|\bar{b}|^2 = 0$

მაგრამ $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ ე.ი. $6|\bar{a}|^2\cos\alpha - 3|\bar{a}|^2 = 0$ საიდანაც $3|\bar{a}|^2(2\cos\alpha - 1) = 0$

მაშასადამე, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ და $\alpha=60°$.

პასუხი: $\alpha=60°$.

თუ $\bar{a}=0$, $\bar{b}\neq0$, მაშინ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობაა: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

სავარჯიშოები:

1 რა შეიძლება ითქვას ორ არანულოვან ვექტორს შორის კუთხეზე, თუ მათი სკალარული ნამრავლი ა) ნულის ტოლია; ბ) დადებითია; გ) უარყოფითია.

2 მოცემულია $\bar{a}(0;-4)$; $\bar{b}(-1;2)$ და $\bar{c}(-3;5)$ ვექტორები. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით $m = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $n = \bar{a} \cdot \bar{c}$ და $p = \bar{b} \cdot \bar{c}$ რიცხვები.

3 მოცემულია $\bar{a}(1;2;1)$ და $\bar{b}(2;3;-1)$ იპოვეთ $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

4 იპოვეთ $|\bar{a}|:|\bar{b}|$ თუ $\bar{a}+\bar{b}$ და $\bar{a}-\bar{b}$ ვექტორები მართობულია.

5* $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები ურთიერთმართობულია. იპოვეთ $|\bar{a}+\bar{b}| \cdot |\bar{a}-\bar{b}|$, თუ $|\bar{a}| = 5$ და $|\bar{b}| = 2$.

6 მოცემულია $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 60^\circ$. იპოვეთ კუთხე:
ა) $\bar{b}$ და $(\bar{a}-\bar{b})$ ბ) $\bar{a}$ და $(\bar{a}+\bar{b})$ ვექტორებს შორის.

7 სამკუთხედის წვეროებია A(-1;-2;4); B(-4;-2;0) და C(3;-2;1). იპოვე A წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი.

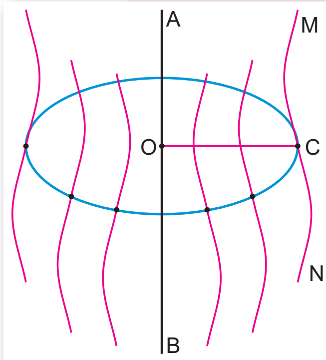
8 ცხრილის ყოველ სვეტში უნდა ჩაიწეროს ზუსტად ერთი ნიშანი „+“, რომელიც გვაჩვენებს, წარმოადგენენ თუ არა მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები თანამიმართულ, საპირისპიროდ მიმართულ თუ არაკოლინეარულ ვექტორებს.

1. თანამიმართული
2. საპირისპიროდ მიმართული
3. არაკოლინეარული

ნიმუში	თვისება	1	2	3
	$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები სხივზე მდებარეობენ, ამათან, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, სადაც C წერტილი AB მონაკვეთს ეკუთვნის	+		
1	$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ABCD პარალელოგრამის გვერდებს წარმოადგენს, ამასთან, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$			
2	$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ΔABC-ს გვერდებია: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$			
3	$a=k\vec{b}$, $k>0$			
4	$\vec{a} = \vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{b} = \vec{c} - \vec{d}$, სადაც $\vec{c}$ და $\vec{d}$ არანულოვამი საპირისპიროდ მიმართული ვექტორებია			
5	$\vec{a} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$, სადაც A, B, C და D წერტილები ABCD პარალელოგრამის წვეროებია			

5 ბრუნვითი სხეულები, ცილინდრი

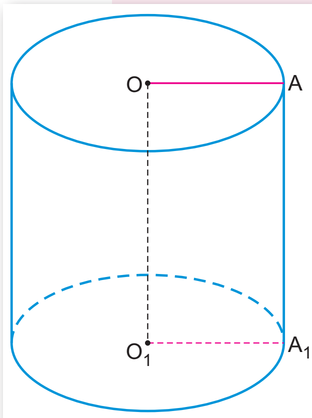
ზედაპირს, რომელსაც რომელიმე MN წირი შემოწერს უძრავი AB ღერძის გარშემო, ბრუნვის ზედაპირს უწოდებენ.



MN წირს ბრუნვის ზედაპირის მსახველი, AB წრფეს ღერძი ეწოდება. ამასთან იგულისხმება, რომ მსახველი ბრუნვის დროს უცვლელადაა დაკავშირებული ღერძთან.
ცხადია, რომ მსახველის ყოველი წერტილი ისეთ წრეწირს შემოწერს, რომლის სიბრტყეც ღერძის მართობულია და რომლის ცენტრიც ამ სიბრტყის და ღერძის კვეთის წერტილია.

თუ ϕ ფიგურა მიღებულია რაიმე ფიგურის ღერძის გარშემო ბრუნვით, მაშინ ϕ ფიგურას ბრუნვის ფიგურას უწოდებენ.

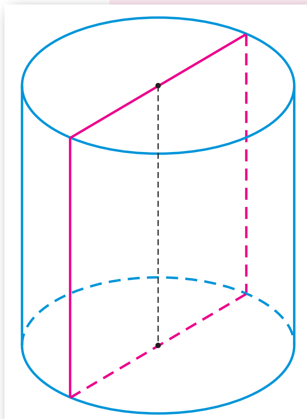
ფიგურას, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც მის გვერდს შეიცავს, ცილინდრი ეწოდება.



წარმოვიდგინოთ, რომ OAA_1O_1 მართკუთხედს ვაბრუნებთ OO_1 ღერძის გარშემო. ზედაპირს, რომელსაც AA_1 მონაკვეთი შემოწერს, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი ეწოდება. OA და O_1A_1 მონაკვეთები შემოწერს წრეებს, რომელთა სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია.

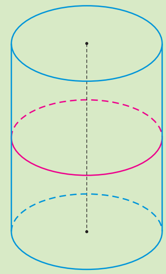
ფუძეების სიბრტყეებს შორის მანძილს ცილინდრის სიმაღლე, ხოლო OO_1 მონაკვეთს კი ცილინდრის ღერძი ეწოდება.

ცილინდრის ღერძზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყით კვეთას ცილინდრის ღერძული კვეთა ეწოდება.

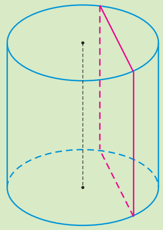


მართალია თუ არა, რომ:

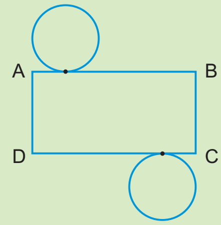
1. ცილინდრის ღერძი ფუძის სიბრტყის მართობულია;
2. ცილინდრის მსახველი ღერძის პარალელურია;
3. ცილინდრის მსახველი შეიძლება არ იყოს ღერძის პარალელური;
4. ყოველი ცილინდრისათვის ერთადერთი ღერძული კვეთა არსებობს;
5. ცილინდრის ღერძული კვეთა მართკუთხედია;
6. ცილინდრის ორი სხვადასხვა ღერძული კვეთა არატოლი მართკუთხედებია.



1. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის კვეთა ღერძის მართობული (ფუძის პარელელური) სიბრტყით არის წრეწირი, რომლის რადიუსიც ფუძის რადიუსის ტოლია.



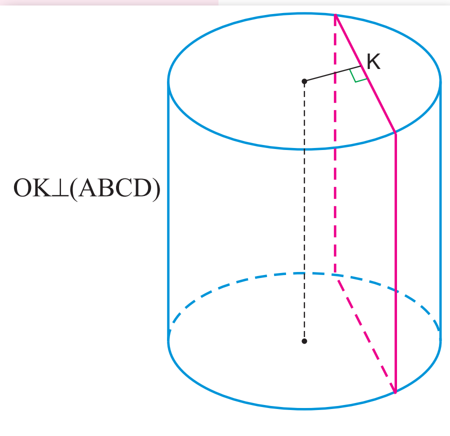
2. დაამტკიცეთ, რომ ცილინდრის კვეთა ღერძის პარალელური სიბრტყით არის მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი ცილინდრის მსახველის ტოლია, ხოლო მეორე გვერდი კი ფუძის წრეწირზე ამ სიბრტყით მიღებული ქორდის ტოლია.



ცილინდრის შლილი

3. თუ ცილინდრს გავჭრით მსახველზე, მივიღებთ ცილინდრის შლილს.
ნახაზის მიხედვით იპოვეთ:
ა) ცილინდრის ფუძის წრეწირის სიგრძე, თუ $AB=7$.
ბ) S_{ABCD} , თუ წრეწირის რადიუსია 3 სმ და ცილინდრის სიმაღლე 2 სმ.
გ) $AB:BC$, თუ ცილინდრის ფუძის დიამეტრის შეფარდება მსახველთან არის 5:4.

ამოცანა 1.

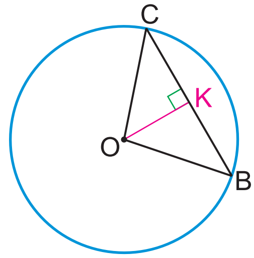


ცილინდრში გავლებულია ღერძის პარალელური კვეთა ისე, რომ კვეთაში მიიღება კვადრატი. ვიპოვოთ მანძილი ღერძიდან კვეთის სიბრტყემდე, თუ ცილინდრის სიმაღლეა 8 სმ და ფუძის რადიუსია 5 სმ.

ამოხსნა:

ამოცანის პირობის თანახმად, ABCD კვადრატია. მაშასადამე, $AB=BC=8$სმ. მანძილი ღერძიდან კვეთის სიბრტყემდე იქნება ღერძის ნებისმიერი წერტილიდან კვადრატის სიბრტყეზე დაშვებული მართობი. და რადგან ფუძის სიბრტყე ღერძის მართობულია, ამიტომ $OK\perp CD$, მაშასადამე $OK\perp CB$, ე.ი. $OK\perp(ABCD)$. ე.ი. OK-ს სიგრძე იქნება მანძილი ღერძიდან სიბრტყემდე.

> **ყურადღება!**
> მანძილი ცილინდრის ღერძიდან ღერძის პარალელურ კვეთამდე არის ფუძის ცენტრიდან ამ ფუძისა და მკვეთი სიბრტყის გადაკვეთის წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძე.

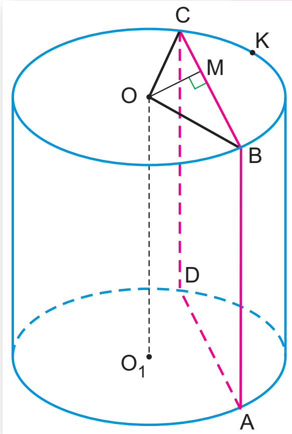


ამოვხაზოთ ფუძის წრეწირი. განვიხილოთ ΔOBC $OC=OB=5$სმ. $CB=8$სმ. $OK\perp CB \Rightarrow CK=4$სმ, საიდანაც ვასკვნით, რომ $OK=3$ სმ.

პასუხი: მანძილი ღერძიდან მკვეთ სიბრტყემდე 3 სმ–ია.

ამოცანა 2.

ცილინდრში გავლებულია ღერძის პარალელური სიბრტყე ისე, რომ იგი ფუძის წრეწირიდან კვეთს 120°–იან რკალს. ღერძის სიგრძე $h=10$სმ, ხოლო მანძილი ღერძიდან მკვეთ სიბრტყემდე $a=2$სმ. ვიპოვოთ კვეთის ფართობი და ფუძის რადიუსი.



ამოხსნა:

პირობის თანახმად, CKB=120° $\Rightarrow \angle COB=120°$.
გავავლოთ $OM \perp CB$. $OM=a=2$სმ, ხოლო $\angle COM=60°$.

$\Delta OCM \Rightarrow OM= \quad OC \Rightarrow 2= \quad R \Rightarrow R=4$.

$CM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3} \Rightarrow CB=4\sqrt{3}$.

$S_{ABCD}=AB\cdot CB=h\cdot CB=10\cdot 4\sqrt{3}=40\sqrt{3}$.

პასუხი: $R=4$ და $S_{ABCD}=40\sqrt{3}$.

სავარჯიშოები:

1 აქვს თუ არა ცილინდრს და რამდენი:
ა) სიმეტრიის ცენტრი; ბ) სიმეტრიის ღერძი.

ვიტყვით, რომ სივრცულ ფიგურას აქვს სიმეტრიის ცენტრი (ღერძი), თუ ამ ცენტრის (ღერძის) მიმართ სიმეტრიისას სხეული გადადის თავის თავში

2 ცილინდრის სიმაღლეა 5 სმ, ფუძის რადიუსი კი 4 სმ. დაადგინეთ რა ფიგურას წარმოადგენს ცილინდრის კვეთა სიბრტყით და იპოვეთ ამ ფიგურის ზომები, რომელიც
ა) ღერძზე გადის; ბ) ფუძის პარალელურია;
გ) ღერძის პარალელურია და დიამეტრს ყოფს შეფარდებით 3:1.

3 ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობია 8 სმ^2, ფუძის ფართობი კი 12π სმ^2, იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლის სიგრძე.

4 ცილინდრის ფუძის რადიუსია R, ღერძის იმ პარალელური კვეთის ფართობი კი რომელიც მის მართობულ დიამეტრს ყოფს შეფარდებით 3:1 არის S. იპოვეთ წილინდრის სიმაღლე.

5 ცილინდრის ფუძის რადიუსია 1მ, სიმაღლე 3მ. იპოვეთ ღერძული კვეთის დიაგონალის სიგრძე.

6 ცილინდრის ღერძული კვეთა კვადრატია, რომლის ფართობია 16 სმ^2, იპოვეთ ფუძის ფართობი.

7 ცილინდრის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი 5 სმ. იპოვეთ ღერძის პარალელურად მისგან 4 სმ მანძილზე გავლებული კვეთის ფართობი.

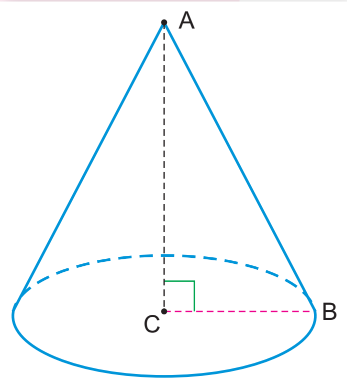
8 ცილინდრის ფუძის ფართობი ისე შეეფარდება მისი ღერძული კვეთის ფართობს, როგორც $\pi:4$. იპოვეთ კუთხე ღერძული კვეთის დიაგონალებს შორის.

გ

9 არსებობს თუ არა პარალელური გადატანა, რომლისთვისაც სრულდება:
ა) $A(3;1) \rightarrow A_1(1;4)$ და $B(2;0) \rightarrow B_1(0;2)$;
ბ) $A(2;7) \rightarrow A_1(1;4)$ და $B(0;3) \rightarrow B_1(4;8)$.

6 კონუსი

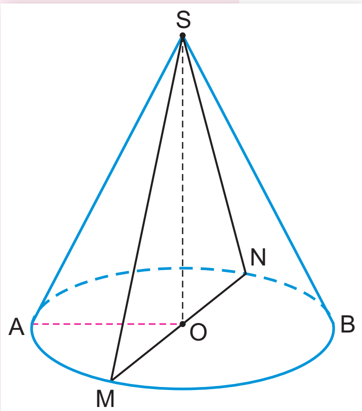
ფიგურას, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვის ერთ–ერთი კათეტის შემცველი ღერძის გარშემო, კონუსი ეწოდება.



წარმოვიდგინოთ, რომ ACB ($\angle C=90°$) მართკუთხა სამკუთხედს ვაბრუნებთ AC კათეტის (ღერძის) გარშემო.

AB ჰიპოტენუზა (მსახველი) შემოწერს ზედაპირს, რომელსაც კონუსის გვერდითი ზედაპირი ეწოდება CB კათეტი კი წრეს, რომელსაც კონუსის ფუძეს უწოდებენ.

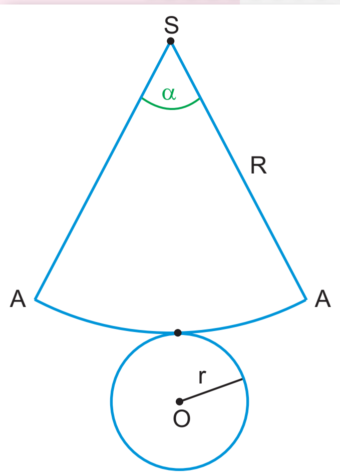
AC კათეტს, რომელიც კონუსის წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე დაშვებული მართობია, კონუსის სიმაღლე ეწოდება.



კონუსის ღერძზე (სიმაღლეზე) გამავალი ნებისმიერი სიბრტყით კონუსის კვეთას ღერძული კვეთა ეწოდება, რომელიც წარმოადგენს ტოლფერდა სამკუთხედს ფუძით – ფუძის წრეწირის დიამეტრი და ფერდით – კონუსის მსახველი.

ისარგებლეთ ნახაზით და დაასახელეთ:

1) კონუსის მსახველი;
2) ფუძე;
3) ღერძი;
4) სიმაღლე;
5) ღერძული კვეთა;
6) ფუძის რადიუსი.



კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი წრიულ სექტორს წარმოადგენს, ხოლო კონუსის შლილს აქვს ნახაზზე მოცემული სახე.

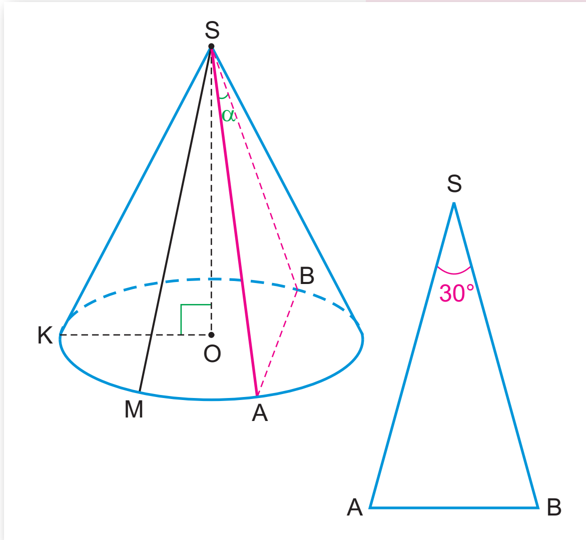
?

მართალია თუ არა, რომ კონუსის შლილზე:

1. სექტორის რკალის სიგრძე ფუძის წრეწირის სიგრძის ტოლია;
2. სექტორის რადიუსი კონუსის მსახველის ტოლია;
3. კონუსის გვერდითი ზედაპირი შეიძლება იყოს წრე;
4. შლილში სექტორის ცენტრალური კუთხე გამოითვლება ფორმულით: $\alpha=\frac{R}{r}\cdot 360°$.

ამოცანა 1.

კონუსის ორ მსახველზე, რომელთა შორის კუთხეა 30°, გავლებულია სიბრტყე. კვეთის ფართობია 25 სმ². იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ ფუძის რადიუსია 6 სმ.



ამოხსნა:

კვეთაში მიიღება ტოლფერდა სამკუთხედი $SA=SB=a$. $S_{\Delta ASB}= \quad a^2 \sin 30° = 25$სმ². $\Rightarrow a^2=100 \Rightarrow$ $\Rightarrow a=10$.

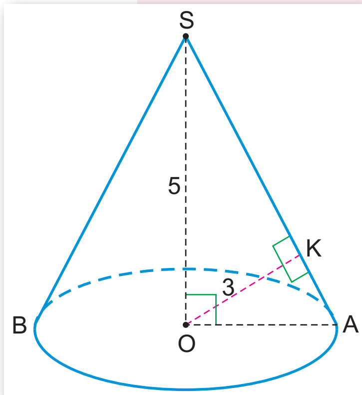
მივიღეთ, რომ მსახველის სიგრძეა $a=10$სმ.

განვიხილოთ ΔSOK. $SK=10$, $\angle O=90°$; $OK=6 \Rightarrow$ $\Rightarrow SO=8$.

პასუხი: $h=SO=8$სმ.

ამოცანა 2.

კონუსის სიმაღლეა 5 სმ. ფუძის წრეწირის ცენტრიდან მსახველზე დაშვებული მართობის სიგრძეა 3 სმ. იპოვეთ მსახველის სიგრძე.



ამოხსნა:

განვიხილოთ SOK მართკუთხა სამკუთხედი $SK=\sqrt{5^2-3^2}=4$. მართკუთხა SOK სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულია მართობი, ე.ი. $OK^2=AK\cdot SK \Rightarrow 9=4\cdot AK \Rightarrow$ $\Rightarrow AK = 2{,}25$. $SA = SK + AK = 4 + 2{,}25 = 6{,}25$.

პასუხი: მსახველის სიგრძეა 6,25 სმ.

სავარჯიშოები:

1 რა ფიგურაა: ა) კონუსის ღერძული კვეთა?
ბ) კონუსის ფუძის პარალელური კვეთა?

2 აქვს თუ არა კონუსს: ა) სიმეტრიის ღერძი? ბ) სიმეტრიის ცენტრი?

3 კონუსის ფუძის რადიუსია 3 სმ, სიმაღლე 4 სმ. იპოვეთ მსახველის სიგრძე.

4 კონუსის მსახველი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 30°–იან კუთხეს. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ ფუძის რადიუსია 2 სმ.

5 კონუსის ფუძის რადიუსია 3 სმ. ღერძული კვეთა:
ა) ტოლგვერდა; ბ) მართკუთხა სამკუთხედია.
იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი.

6 კონუსის ფუძის ფართობია 9πსმ², მსახველი კი 5 სმ. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

7 კონუსის მსახველია $\ell=\frac{11}{\sqrt{\pi}}$, ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხეა φ, სადაც $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{\sqrt{11}}$. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი.

8 კონუსის ღერძული კვეთა ტოლგვერდა სამკუთხედია, რომლის ფუძის რადიუსია R=7სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის კონუსის ორ მსახველზე და რომელთა შორის კუთხეა 30°.

9 კონუსის მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხეა α, ხოლო მსახველის სიგრძე m–ით მეტია სიმაღლის სიგრძეზე. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ $m=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ და $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

10 კონუსის ფუძისა და ღერძული კვეთის ფართობთა შეფარდებაა π. რა კუთხითაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი მსახველი?

გ

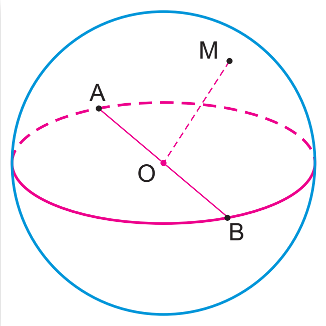
11 ცხრილის ყოველ სვეტში უნდა ჩაიწეროს მხოლოდ ერთი ნიშანი „+“, რომელიც გვაჩვენებს არანულოვან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის α კუთხე არის მახვილი, მართი თუ ბლაგვი.

1. მახვილი
2. მართი
3. ბლაგვი

ნიმუში	თვისება	1	2	3
	$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$	+		
1	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$			
2	$\cos\alpha<0$			
3	$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები წარმოადგენს ΔABC-ს გვერდებს. ამასთან, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ და $BC^2<AB^2+AC^2$			
4	$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ორივე კოორდინატი უარყოფითი რიცხვებია			
5	$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2>\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2$			

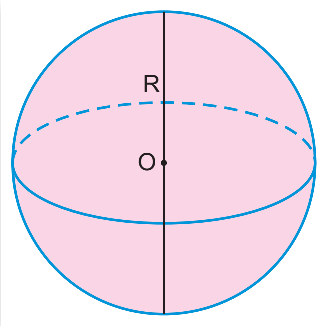
7 სფერო, ბირთვი

სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული O წერტილიდან R მანძილზე მდებარეობენ, სფერო ეწოდება.



მოცემული O წერტილი სფეროს ცენტრია, OM=R მონაკვეთს (იხ. ნახაზი), სადაც M სფეროს ნებისმიერი წერტილია, **სფეროს რადიუსი** ეწოდება.

სფეროს ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი სფეროს **ქორდაა**, ხოლო ცენტრზე გამავალი ქორდა **სფეროს დიამეტრია**. ცხადია, დიამეტრის სიგრძეა AB=2R.



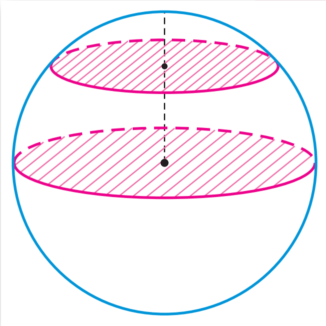
სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეულის მოცემული წერტილამდე მანძილი არ აღემატება მოცემულ R>0 რიცხვს, ბირთვი ეწოდება.

ბირთვი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით დიამეტრის გარშემო. ნახევარწრეწირის ბრუნვით კი მიიღება სფერო ან რაც იგივეა, ბირთვის ზედაპირი.

ბირთვის ყველა იმ წერტილს, რომელიც ზედაპირზე არ მდებარეობს, ბირთვის შიგა წერტილები ეწოდება.

1. დაამტკიცეთ, რომ სფეროს ცენტრი მისი სიმეტრიის ცენტრია;
2. სიმეტრიის რამდენი ღერძი აქვს სფეროს?
3. რა ფიგურა შეიძლება მივიღოთ სფეროს სიბრტყით კვეთისას?

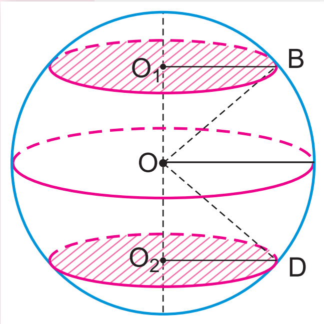
სფეროს (ბირთვის) სიბრტყის კვეთისას ვიღებთ წრეწირს, რომლის რადიუსი მით უფრო მცირდება, რაც უფრო დაშორებულია მკვეთი სიბრტყე სფეროს (ბირთვის) ცენტრიდან.



სფეროს ცენტრზე გამავალი სიბრტყით კვეთისას მიღებულ წრეწირს სფეროს დიდ წრეწირს უწოდებენ.

ცხადია, დიდი წრეწირის რადიუსი სფეროს რადიუსის ტოლია.

ამოცანა 1.



დავამტკიცოთ, რომ სფეროს ცენტრიდან თანაბრად დაშორებული კვეთების რადიუსები ტოლია.

დამტკიცება:

ამოცანის პირობის თანახმად, $OO_1=OO_2$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $O_1B=O_2D$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{განვ.}\Delta O_1OB \text{ და } \Delta O_2OD\\ OO_1=OO_2\\ OB=OD=R\\ \text{რ.დ.გ}\\ \angle O_1=\angle O_2=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta O_1OB=\Delta O_2OD \Rightarrow O_1B=O_2D$$

ამოცანა 2.

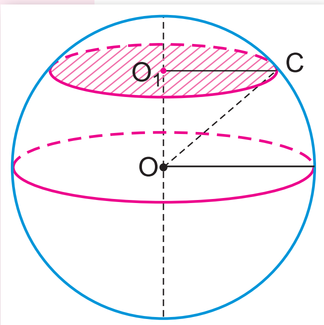
დავამტკიცოთ, რომ სფეროს კვეთებიდან უფრო დიდი რადიუსი აქვს იმ კვეთას, რომელიც სფეროს ცენტრთან უფრო ახლოსაა.

დამტკიცება:

დავუშვათ, რომ $OO_1>OO_2$. უ.დ., რომ $O_1B<O_2D$.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta O_1OB \Rightarrow O_1B^2=R^2-OO_1^2\\ \Delta O_2OD \Rightarrow O_2D^2=R^2-OO_2^2\\ OO_1>OO_2\end{array}\right\} \Rightarrow O_1B^2<O_2D^2 \Rightarrow O_1B<O_2D \text{ რ.დ.გ}$$

ამოცანა 3.



ბირთვი, რომლის რადიუსია 41 დმ, გადაკვეთილია სიბრტყით, ცენტრიდან 9 დმ–ის მანძილზე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

ამოხსნა:

განვიხილოთ ΔOO_1C პირობის თანახმად $OO_1=9$დმ, $OC=R=41$დმ. $\angle OO_1C=90^\circ \Rightarrow O_1C^2=41^2-9^2=32\cdot 50 \Rightarrow O_1C=40$. მივიღეთ, რომ კვეთის რადიუსია 40 დმ. $S_{კვ}=\pi\cdot 40^2=1600\pi$.

პასუხი: $S_{კვ}=1600\pi$დმ^2.

?

მართალია თუ არა, რომ

1. ბირთვის ნებისმიერი სიბრტყით კვეთა წრეწირია;
2. სფეროს ნებისმიერი წერტილის მის ცენტრთან შემაერთებელი მონაკვეთი სფეროს რადიუსია;
3. სფეროს უდიდესი წრეწირი სფეროს ცენტრზე გადის;
4. სფეროს აქვს ერთადერთი უდიდესი წრეწირი;
5. სფეროს დიამეტრი მისი უდიდესი წრეწირის დიამეტრის ტოლია.

სავარჯიშოები:

1 ბირთვის რადიუსის შუაწერტილზე გავლებულია ამ რადიუსის პერპენდიკულარული კვეთა. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ სფეროს რადიუსია $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

2 ბირთვის რადიუსია R=12სმ. რადიუსის ბოლოზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ამ რადიუსთან 60°–იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

3* ბირთვის ზედაპირზე მოცემულია 3 წერტილი. მათ შორის მანძილებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. ბირთვის რადიუსია 13 სმ. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ სამ წერტილზე გამავალ სიბრტყემდე.

4 ბირთვის რადიუსია 10 სმ. რადიუსის ბოლოზე გავლებულია სიბრტყე, რომლის ფართობია 9π. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ სიბრტყემდე.

5 ბირთვის დიდი წრის ფართობია 169πსმ^2. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც დიდი წრიდან დაშორებულია 12 სმ–ით.

6 ბირთვის რადიუსია 169πსმ^2. იპოვეთ მანძილი იმ პარალელურ კვეთებს შორის, რომელთა ფართობებია 2πსმ^2. და 144πსმ^2.

გ

7 იპოვეთ ა) $y=\frac{1}{x}$; ბ) $y=x^2-2x+3$ ფუნქციის $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ პარალელური გადატანის შედეგად მიღებული ფუნქცია.

8 იპოვეთ A(3;–7); B(5;2) და C(–1;0) წვეროების მქონე სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

9 იპოვეთ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები M(6;3) წერტილის მიმართ, თუ A(2;1), B(5;1) და C(2;5).

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1 თუ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია, მაშინ ვექტორი $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{C_1D_1}=$

ა) $\overrightarrow{C_1A_1}$; ბ) $\overrightarrow{BD}$; გ) $\overrightarrow{AC}$; დ) არც ერთი პასუხი არ არის სწორი.

2 თუ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია, $\overrightarrow{AD}=\bar{a}$; $\overrightarrow{AB}=\bar{b}$ და $\overrightarrow{AA_1}=\vec{C}$, ხოლო M წერტილი $\overrightarrow{A_1D_1}$ ვექტორის შუაწერტილია, K კი $\overrightarrow{CC_1}$–ის შუაწერტილია, მაშინ $\overrightarrow{MK}=$

ა) $\bar{a}+\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{c}$; ბ) $\bar{a}-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; გ) $\frac{1}{2}\bar{a}-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; დ) $\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{c}$.

3 თუ A, B, C და D წერტილის კოორდინატებია $A(-3;2;-1)$, $B(2;-1;-3)$, $C(1;-4;3)$ და $D(-1;2;-2)$ მაშინ $|2\overline{AB}+3\overline{CD}|=$

ა) $\sqrt{433}$; ბ) $\sqrt{521}$; გ) $\sqrt{487}$; დ) $\sqrt{395}$.

4 მოცემულია $C(3;-2;1)$, $D(-1;2;1)$, $M(2;-3;3)$ და $N(-1;1;-2)$ წერტილები, მაშინ $\overline{CD}$ და $\overline{MN}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსია:

ა) 0,75; ბ) 0,6; გ) 0,7; დ) $\frac{2}{3}$.

5 თუ $\bar{a}(6-k;\,k;\,2)$ და $\bar{b}(-3;5+5k;-9)$ ვექტორები პერპენდიკულარულია, მაშინ $k=$:

ა) 2; ბ) 3; გ) 2 ან –3,6; დ) –3 ან 2,4.

6 თუ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორები კოლინეარულია, ამასთან მოცემულია $A(-2;-1;2)$, $B(4;-3;6)$, $C(-1;a-1;1)$ და $D(-4;-1;a)$ წერტილები, მაშინ $a=$

ა) 1; ბ) -2; გ) 2; დ) -1.

7 თუ α არის $\bar{a}-\bar{b}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ამასთან, $|\bar{a}|=4$ და $|\bar{b}|=1$ და $\angle(\bar{a};\bar{b})=60^\circ$, მაშინ $\cos\alpha=$

ა) 0,07; ბ) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; გ) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; დ) 0,08.

8 თუ $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$, $\angle(\bar{a};\bar{b})=90^\circ$, $\angle(\bar{b};\bar{c})=60^\circ$, $\angle(\bar{a};\bar{c})=120^\circ$, მაშინ $|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|=$

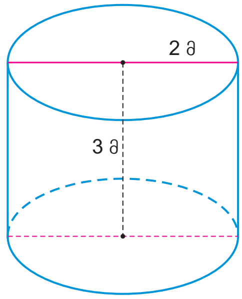
ა) $3\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{11}$; გ) $\sqrt{13}$; დ) $2\sqrt{3}$.

9 თუ ცილინდრის 5ფუძის რადიუსია 2 მ, ხოლო სიმაღლე 3 მ, მაშინ ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობია:

ა) 6მ^2; ბ) 12მ^2; გ) 3მ^2; დ) 2მ^2.

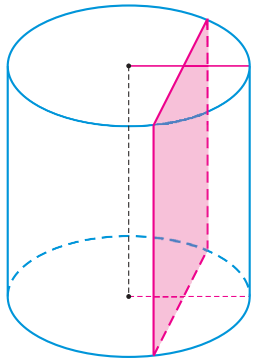
10 თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსია 2 მ, სიმაღლე კი 3 მ, მაშინ ღერძული კვეთის დიაგონალის სიგრძეა:

ა) 5მ; ბ) 6მ; გ) 8მ; დ) 10მ.



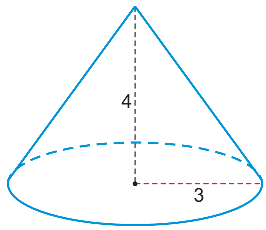
11 ცილინდრის სიმაღლეა 8 დმ, ფუძის რადიუსი კი 5 დმ. თუ ეს ცილინდრი გაკვეთილია ღერძის პარალელური სიბრტყით ისე, რომ კვეთაში მიღებულია კვადრატი, მაშინ ცილინდრის ღერძიდან ამ კვეთამდე მანძილია:

ა) 8დმ; ბ) 3დმ; გ) 4დმ; დ) 5დმ.



12 თუ კონუსის ფუძის რადიუსია 3მ, სიმაღლე 4მ, მაშინ კონუსის მსახველია:

ა) 3მ; ბ) 4მ; გ) 5მ; დ) 6მ.

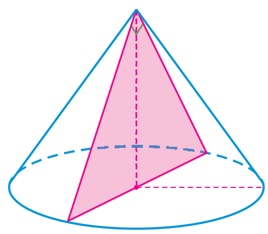


13 თუ კონუსის მსახველი $L=20$ დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი $20°$-იანი კუთხით, მაშინ კონუსის სიმაღლეა:

ა) 10; ბ) 15; გ) 20; დ) 30.

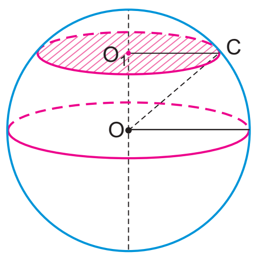
14 თუ კონუსის ღერძული კვეთა მართკუთხა სამკუთხედია, ხოლო ფუძის რადიუსია 3, მაშინ ღერძული კვეთის ფართობია:

ა) 6; ბ) 12; გ) 18; დ) 36.



15 ბირთვიგადაკვეთილიაორიპარალელურისიბრტყით (იხ. ნახაზი). თუ $\angle O_1BO=30°$ და $\angle O_2DO=60°$ მაშინ $OO_1:OO_2=$

ა) $1:\sqrt{3}$; ბ) $\sqrt{3}:1$; გ) 1:2; დ) 2:1.



VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ $2\bar{a}-3\bar{b}$ ვექტორის კოორდინატები და სიგრძე, თუ $\bar{a}=\overline{(0;3;2)}$ და $\bar{b}=\overline{(-2;3;2)}$.

2 იპოვეთ m და n, თუ $\bar{a}(1;m;-2)$ და $\bar{b}(-2;3;n)$კოლინეარულია.

3 m-ის რომელი მნიშვნელობისთვისაა $\bar{a}(1;3;-2)$ და $\bar{a}(-1;m;4)$ ვექტორები ურთიერთმართობული?

4 იპოვეთ ერთეულოვანი $\bar{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $\bar{b}$ და $\bar{a}(2;-3;6)$ ვექტორები თანამიმართულია.

5 იპოვეთ $\bar{c}=4\bar{a}+\bar{b}$ და $\bar{d}=-\frac{1}{4}\bar{a}+\frac{7}{4}\bar{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ $\bar{a}=\overline{(-1;1)}$ და $\bar{b}=\overline{(1;3)}$.

6 მოცემულია სამი $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ვექტორი, რომელთაგან არც ერთი წყვილი არ არის კოლინეარული. იპოვეთ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, თუ $\bar{a}+\bar{b}$ კოლინეარულია $\bar{c}$-ს და $\bar{b}+\bar{c}$ კოლინეარულია $\bar{a}$-ის.

7 $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ორი არანულოვანი ვექტორი ისეთია, რომ $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$ დაამტკიცეთ, რომ $\bar{a}\perp\bar{b}$

8 ერთეულოვანი $\bar{a},\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორებისთვის სრულდება $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ გამოთვალეთ $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

9 იპოვეთ ორდინატთა ღერძზე მდებარე წერტილის კოორდინატები, თუ ეს წერტილი თანაბრადაა დაშორებული A(2;-1;1) და B(0;1;3) წერტილებიდან.

10 შეიძლება თუ არა, რომ $\bar{a}-\bar{b}$ ვექტორის სიგრძე იყოს:
ა) ნაკლები; ბ) ტოლი; გ) მეტი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების სიგრძეების ჯამზე.

11 იპოვეთ x რიცხვი, თუ $(x-1)\bar{a}+2\bar{b}$ და $3\bar{a}+x\bar{b}$ კოლინეარულია.

12 მოცემულია A(-5;7;-8) და B(-7;9;-9) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AB}$ და $\bar{a}(1;-3;1)$ ვექტორებს შორის კუთხე.

13 მოცემულია A(3;-1;2) და B(-1;2;1) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AB}$ და $2\overline{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

14 მოცემულია A(-1;3;-7), B(2;-1;5) და C(0;1;-5) წერტილები. იპოვეთ $|\overline{AB}|$ და $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$.

15 მოცემულია A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1) და D(-5;-5;3) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AC}$ და $\overline{BD}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

16 დაადგინეთ MNPQ ოთხკუთხედის სახე, თუ $\overline{MN}\cdot\overline{MQ}=0$ და $\overline{PN}\cdot\overline{PQ}=0$.

17 დაამტკიცეთ, რომ ABCD პარალელოგრამი წარმოადგენს:
ა) მართკუთხედს, თუ $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0$; ბ) რომბს, თუ $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0$.

18 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია a-ს ტოლი წიბოთი. იპოვეთ ვექტორი $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{BC}$ სიგრძე.

19 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბია, $\overrightarrow{AA_1}=\bar{m}; \overrightarrow{AD}=\bar{n}, \overrightarrow{AB}=i,$ და k წერტილი CC_1 მონაკვეთის, P კი — AD მონაკვეთის შუაწერტილებია. იპოვეთ $\overrightarrow{KP}$.

20 მოცემულია C(-4;-3;-1), D(-1;-2;3), M(2;-1;-2) და N(0;1;-3) წერტილები. იპოვეთ $|3\overline{CD}-2\overline{MN}|=$

21 მოცემულია A(1;-1;-4), B(-3;-1;0), C(-1;2;5) და D(2;-3;2) წერტილები. იპოვეთ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

22 $\bar{a}$(4;m-1;m) და $\bar{b}$(-2;4;3-m) ვექტორები ურთიერთმართობულია. იპოვეთ m.

23 მოცემულია C(-3;2;4), D(1;-4;2), M(1;-2;1) და N(-1;a+3;-1) წერტილები, ამასთან $\overline{CD}$ და $\overline{MN}$ ვექტორები კოლინეარულია. იპოვეთ a.

24 α არის $\bar{m}$ და $\bar{m}+\bar{n}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ამასთან, $|\bar{m}|=2; |\bar{n}|=3$ და $(\widehat{\bar{m};\bar{n}})=120^\circ$. იპოვეთ cosα.

25 $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=3, |\bar{c}|=4, \angle(\bar{a};\bar{b})=60^\circ, \angle(\bar{b};\bar{c})=90^\circ, \angle(\bar{a};\bar{c})=120^\circ$. იპოვეთ $|\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}|$.

26 ცილინდრის სიმაღლე 12 სმ–ია, ფუძის რადიუსი 10 სმ. ვიპოვოთ ღერძის პარალელურად მისგან 8 სმ მანძილზე გავლებული კვეთის ფართობი.

27 ცილინდრში გავლებულია ღერძის პარალელური სიბრტყე ისე, რომ ის ჩამოკვეთს ფუძის წრეხაზიდან 120°–იან რკალს. ღერძის სიგრძე h=10 სმ. მისი მანძილი მკვეთი სიბრტყიდან ღერძამდე უდრის 2 სმ. გავიგოთ კვეთის ფართობი.

28 ცილინდრის ფუძის ფართობი შეეფარდება მის ღერძითი კვეთის ფართობს, როგორც $\pi:4$ გავიგოთ კუთხე ღერძითი კვეთის დიაგონალებს შორის.

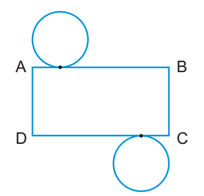
29* ცილინდრის სიმაღლე 2 მ–ია, ფუძის რადიუსი კი 7 მ. ამ ცილინდრში ჩახაზული კვადრატი ღერძისადმი დახრილად ისე, რომ მისი წვეროები ფუძეების წრეხაზებზეა. ვიპოვოთ კვადრატის გვერდი.

30 მართკუთხედის გვერდებია a და b ვიპოვოთ ამ მართკუთხედის a გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

31 ცილინდრის ფუძის დიამეტრი უდრის 1-ს, სიმაღლე კი ფუძის წრეხაზს. ვიპოვოთ S გვ.

32 ცილინდრის ფუძის რადიუსი უდრის R-ს, მისი ზედაპირის ფართობი კი უდრის ფუძეების ფართობთა ჯამს. ვიპოვოთ სიმაღლე.

33 ცილინდრის ღერძითი კვეთის ფართობია Q. ვიპოვოთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი მართკუთხედია, რომლის ერთი გვერდი მსხველის, მეორე კი ფუძის სიგრძის წრეწირის ტოლია, ე.ი. $S_{გვ}=2\pi Rh$.

34 ა) რას უდრის ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და ღერძული კვეთის ფართობთა შეფარდება?
ბ) როგორი სიმაღლე უნდა ჰქონდეს ცილინდრს, რომ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი იყოს 3-ჯერ მეტი ფუძის ფართობზე?

35 კონუსის მსახველი ℓ დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 30°–იანი კუთხით. ვიპოვოთ სიმაღლე.

36 კონუსის ფუძის ფართობისა და მისი ღერძითი კვეთის ფართობის შეფარდება არის π. ვიპოვოთ მსახველის ფუძისადმი დახრის კუთხე.

37 კონუსის სიმაღლეა H. წვეროდან რა მანძილზე უნდა გავავლოთ ფუძის პარალელური კვეთა, რომ მისი ფართობი უდრიდეს ფუძის ფართობის ნახევარს?

38 ა) კონუსის ფუძის რადიუსია R. გავიგოთ იმ პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს შუაზე ყოფს.
ბ) კონუსის ფუძის რადიუსი უდრის R-ს. გავიგოთ იმ პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს ყოფს შეფარდებით m:n (წვეროს მხრიდან).

39 კონუსის სიმაღლე უდრის 20-ს, ფუძის რადიუსი კი 25–ს. გავიგოთ წვეროზე გამავალი იმ კვეთის ფართობი, რომელიც დაშორებულია კონუსის ფუძის ცენტრიდან 12–ით.

40 ტოლგვერდა (რომლის ღერძულ კვეთა წესიერი სამკუთხედია) კონუსის ფუძის რადიუსი არის R. ვიპოვოთ იმ ორ მსახველზე გამავალი კვეთის ფართობი, რომელთა შორის კუთხე 30°–ია.

42 კონუსის სიმაღლე არის H. კუთხე სიმაღლესა და მსახველს შორის 60°–ია. ვიპოვოთ ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ მსახველზე გამავალი კვეთის ფართობი.

43 1) კონუსის სიმაღლე უდრის ფუძის რადიუს R–ს. მის წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის წრეხაზიდან კვეთს 90˚–იან რკალს. გავიგოთ მიღებული კვეთის ფართობი.
2) კონუსის წვეროზე ფუძისადმი 45˚–იანი კუთხით გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს ფუძის წრეხაზის მეოთხედს. კონუსის სიმაღლე უდრის 10, გავიგოთ კვეთის ფართობი.

VI თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- ვთქვათ $\vec{a}$ ვექტორის საწყისი წერტილია $A(x_1;y_1)$, ხოლო ბოლო $B(x_2;y_2)$ წერტილი. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები ვუწოდოთ $a_1=x_2-x_1$ და $a_2=y_2-y_1$ რიცხვებს და ჩავწეროთ $\vec{a}=(a_1;a_2)$ ან $\overline{a}=\overline{(a_1;a_2)}$.

- ვთქვათ $\overline{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}$ ვექტორის კი $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$. $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ისეთ c ვექტორს, რომლის კოორდინატებია a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, ე.ი.
$$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)+\overline{b}(b_1;b_2;b_3)=\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}.$$

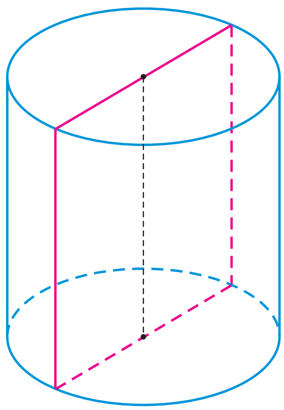
- $\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი არის $\lambda\vec{a}$ ვექტორი, რომელიც $\vec{a}$ ვექტორის თანამიმართულია, თუ $\lambda>0$ და $\vec{a}$ ვექტორის საპირისპიროდაა მიმართული, თუ $\lambda<0$. ამასთან $\lambda\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია
$$|\lambda|\cdot|\vec{a}|.$$

- **$\overline{a}\cdot\overline{a}$ სკალარული ნამრავლი $\overline{a}^2$–ით აღინიშნება და $\overline{a}$-ს ვექტორის სკალარული კვადრატი ეწოდება.**
$$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$$

- 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$; 2) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$; 3) $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$; 4) $(\lambda\overline{a})=\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$.

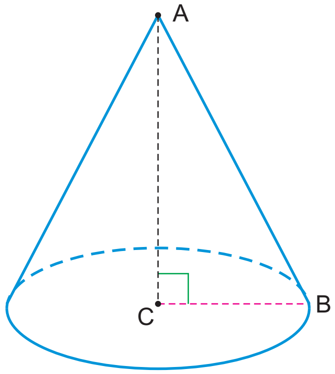
- **ფიგურას, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც მის გვერდს შეიცავს, ცილინდრი ეწოდება.**

- **ცილინდრის ღერძზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყით კვეთას ცილინდრის ღერძული კვეთა ეწოდება.**



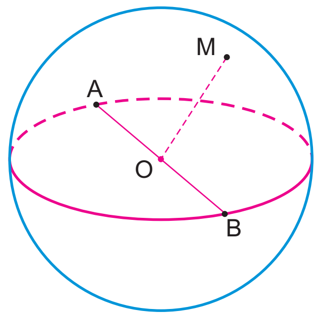
- **AB** ჰიპოტენუზა (მსახველი) შემოწერს ზედაპირს, რომელსაც კონუსის გვერდითი ზედაპირი ეწოდება **CB** კათეტი კი წრეს, რომელსაც **კონუსის ფუძეს** უწოდებენ.

- **AC** კათეტს, რომელიც კონუსის წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე დაშვებული მართობია, **კონუსის სიმაღლე** ეწოდება.

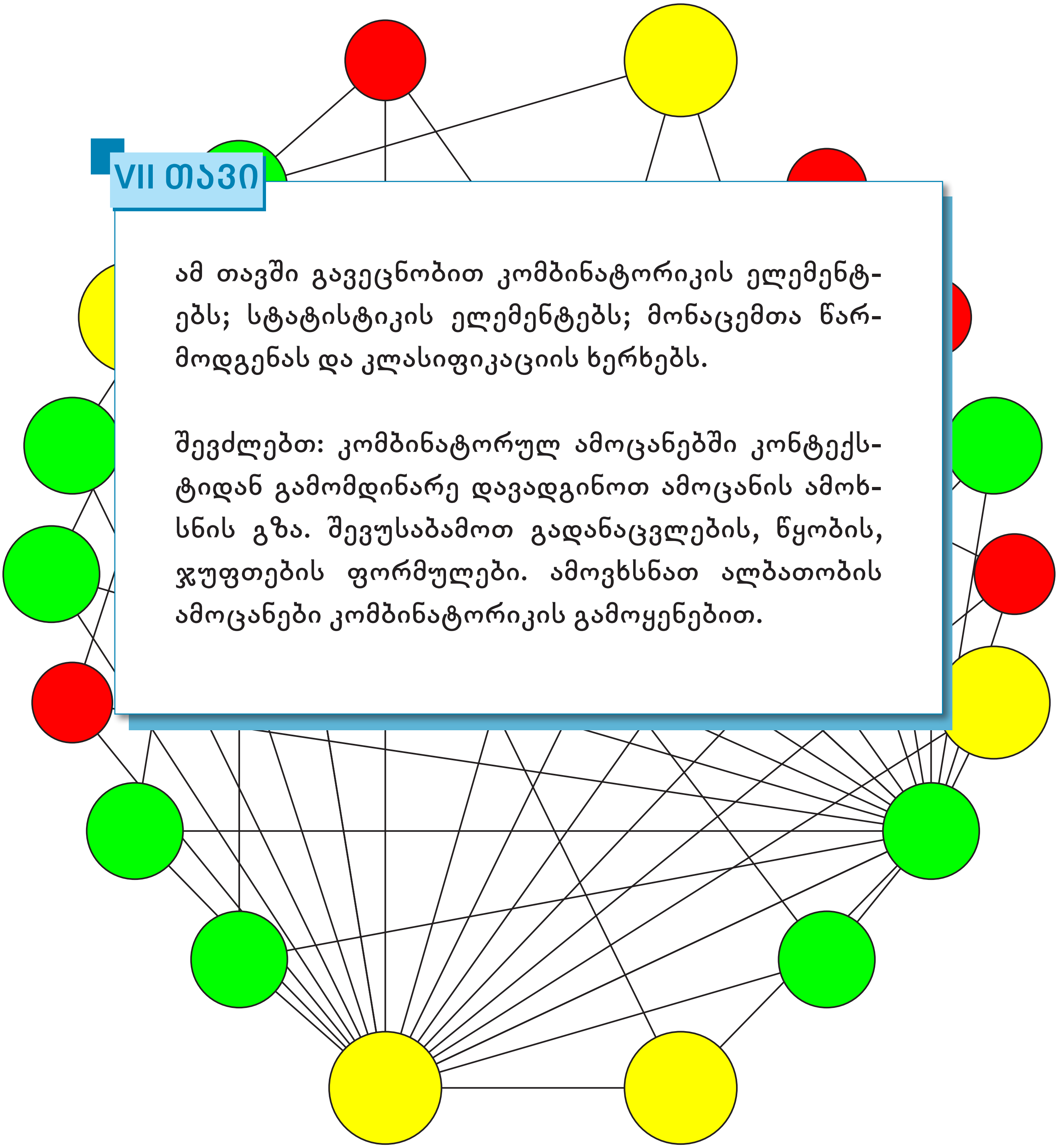


- სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული **O** წერტილიდან **R** მანძილზე მდებარეობენ, **სფერო** ეწოდება.

- მოცემული O წერტილი სფეროს ცენტრია, OM=R მონაკვეთს (იხ. ნახაზი), სადაც M სფეროს ნებისმიერი წერტილია, **სფეროს რადიუსი** ეწოდება.



VII თავი



ამ თავში გავეცნობით კომბინატორიკის ელემენტებს; სტატისტიკის ელემენტებს; მონაცემთა წარმოდგენას და კლასიფიკაციის ხერხებს.

შევძლებთ: კომბინატორულ ამოცანებში კონტექსტიდან გამომდინარე დავადგინოთ ამოცანის ამოხსნის გზა. შევუსაბამოთ გადანაცვლების, წყობის, ჯუფთების ფორმულები. ამოვხსნათ ალბათობის ამოცანები კომბინატორიკის გამოყენებით.

VII
თავი

კომბინატორიკის ელემენტები

1 კომბინატორული ამოცანები

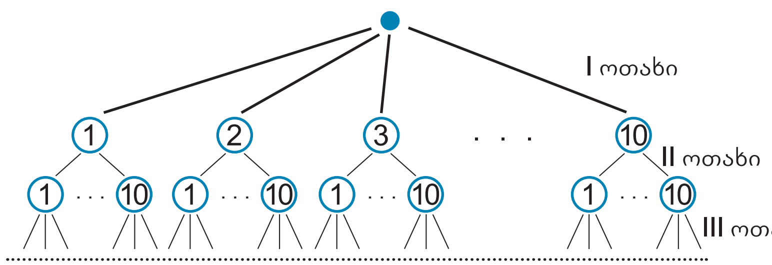
1. რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს, რათა შეიღებოს 10 საკლასო ოთახი, თუ გვაქვს 10 სხვადასხვა ფერის საღებავი (თითოეული ფერის საღებავით შესაძლებელია ნებისმიერი რაოდენობის ოთახის შეღებვა).

მათემატიკაში გვხვდება ისეთი ამოცანები, სადაც საჭიროა პასუხი გაეცეს შეკითხვას: რამდენი ხერხითაა შესაძლებელი განხორციელდეს ესა თუ ის მოვლენა (ფაქტი)? ასეთი სახის ამოცანებს კომბინატორულ ამოცანებს უწოდებენ. განვიხილოთ რამდენიმე ასეთი ამოცანა. კომბინატორულ ამოცანებს მიეკუთვნება ზემოთ მოცემული პირველი ამოცანაც.

ამოხსნა:

რადგან არის 10 სხვადასხვა ფერის საღებავი, ამიტომ პირველი ოთახი შესაძლებელია შეიღებოს ათ სხვადასხვა ფერად. ასევე მეორე ოთახიც და ა.შ. ე.ი. ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვია 10^{10}.

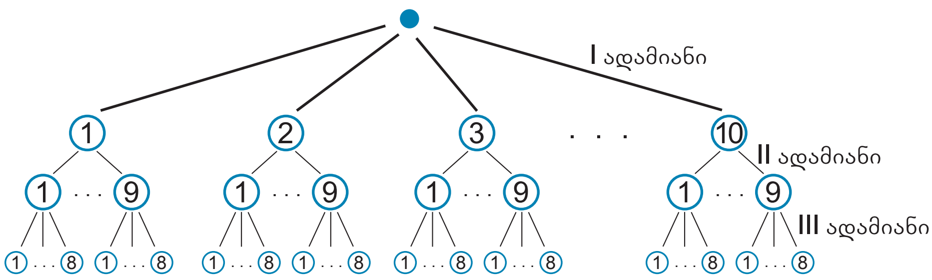
ოთახის №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	სულ
საღებავის რაოდენობა	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10^{10}



2. რამდენნაირადაა შესაძლებელი, რომ 10 ადამიანი დავსხათ 10 სხვადასხვა სკამზე?

ამოხსნა:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	სულ
სკამების რაოდენობა	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10!



პირველი ადამიანი შესაძლოა დაჯდეს ათი სკამიდან ნებისმიერზე – ათი ვარიანტი. მეორე – დარჩენილი ცხრა სკამიდან ნებისმიერზე – ცხრა ვარიანტი, მესამესთვის – იქნება რვა ვარიანტი და ა.შ. მე–10 ადამიანს რჩება ერთი ვარიანტი, ე.ი. სულ შესაძლებელია $1{\cdot}2{\cdot}3.....10=10!$ ვარიანტი.

3. პიანინოს კლავიატურა 88 კლავიშისგან შედგება. რამდენნაირი მუსიკალური ფრაზაა შესაძლებელი შევადგინოთ 6 ნოტისგან, თუ ფრაზაში ერთი და იგივე ნოტი არ მეორდება?

ამოხსნა:

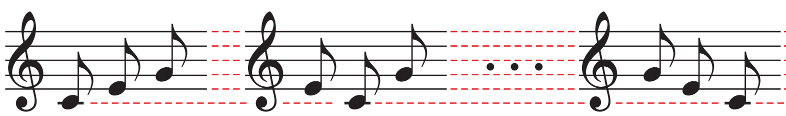
ნოტი	1	2	3	4	5	6	სულ
ვარიანტი	88	87	86	85	84	83	$88{\cdot}87{\cdot}86{\cdot}85{\cdot}84{\cdot}83$

პირველი ნოტისთვის გვაქვს 88 ვარიანტი. რადგან ერთი და იმავე ნოტის გამეორება არაა შესაძლებელი, ამიტომ მეორე ნოტისთვის დარჩენილია 87 ვარიანტი, მესამესთვის – 86 და ა.შ. მე–6 ნოტისთვის გვექნება 83 ვარიანტი. ე.ი. სულ იქნება მუსიკალური ფრაზების $88{\cdot}87{\cdot}86{\cdot}85{\cdot}84{\cdot}83$ ვარიანტი.

- რამდენნაირადაა შესაძლებელი 10 ფეხბურთელიდან შევარჩიოთ მეკარე, თავდამსხმელი და დამცველი?
- ამოხსენით მე–3 ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა ერთი და იგივე ნოტის გამეორება შესაძლებელია.

- ექვსი ნოტისგან შედგენილი რამდენი სხვადასხვა აკორდის აღებაა შესაძლებელი კლვიატურაზე?

ამოხსნა:



ნახ. 1

ნახ. 2

- რამდენი მუსიკალური ფრაზის შედგენაა შესაძლებელი მოცემული სამი ნოტისგან (ნახ. 1)?

1-ელ ნახაზზე მოცემულია სამი ნოტისგან შედგენილი მუსიკალური ფრაზები. ისინი სხვადასხვა ფრაზებია. მაგრამ ამ სამი ნოტისგან შესაძლებელია მხოლოდ ერთი აკორდის შედგენა (ნახ. 2).

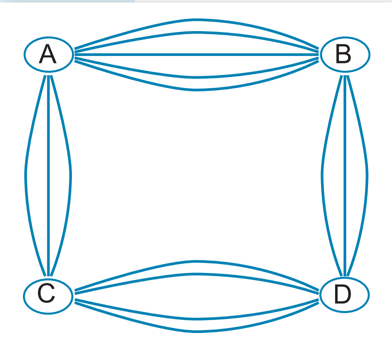
ამოვხსნათ მე–4 ამოცანა. ჩვენ უკვე დავთვალეთ წინა ამოცანა), თუ რამდენი მუსიკალური ფრაზის შედგენაა შესაძლებელი ექვსი ნოტისგან, როცა ფრაზაში ნოტები განსხვავებულია.

1	2	3	4	5	6	სულ
88	87	86	85	84	83	$83{\cdot}84....88$

ახლა კი დავთვალოთ ერთი აკორდის შემადგენელი ნოტებისგან (მოცემული ექვსი განსხვავებული ნოტისგან) რამდენი ექვსნოტიანი მუსიკალური ფრაზა მიიღება ისე, რომ ფრაზაში ნოტები ან განმეორდეს.

1	2	3	4	5	6	სულ
6	5	4	3	2	1	6!=720

მივიღეთ 720 ფრაზა.
ამრიგად, 720 მუსიკალური ფრაზა „შეწებდება" (გვაძლევს) ერთ აკორდად. აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ აკორდების რაოდენობა მუსიკალურ ფრაზებზე 6!=720–ჯერ ნაკლები იქნება. ამრიგად, 6 ნოტისგან აიღება $\frac{88 \cdot 87 \ldots 83}{6!}$=541931236 აკორდი.



4. A ქალაქიდან B–ში 5 გზა მიდის, ხოლო C–ში — 3 გზა. B ქალაქიდან D–ში ჩასასვლელი 3 გზაა, ხოლო C–დან D–ში კი – 4 გზა. B–დან პირდაპირ C ქალაქში მისასვლელი გზა კი არ არსებობს. რამდენი სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი A ქალაქიდან D–ში ჩასვლა?
ამოხსნა:
A–დან D-ში ჩასვლა B–ს გავლით შესაძლებელია 5·3=15 სხვადასხვა მარშრუტით. A–დან D–ში C–ს გავლით კი 3·4=12 სხვადასხვა მარშრუტით. ე.ი. არსებობს სულ 15+12=27 სხვადასხვა მარშრუტი.

სავარჯიშოები:

1 XI კლასში 10 საგანი ისწავლება. ორშაბათს უნდა ჩატარდეს ექვსი გაკვეთილი და ყველა სხვადასხვა. რამდენნაირად არის შესაძლებელი ორშაბათის ცხრილის შედგენა?

2 10 კანდიდატისგან უნდა აირჩეს თავმჯდომარე, პირველი და მეორე მოადგილეები. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება?

3* 10 კანდიდატისგან უნდა შეირჩეს სამკაციანი გუნდი. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

4 მანქანის ნომერია HAH797 ა) სულ რამდენ მანქანას შეიძლება ჰქონდეს ინდექსი HAH; ბ) რამდენ მანქანას შეიძლება ჰქონდეს ნომერი 797, რომელთა ინდექსი შედგება H, H და A ასოებისგან?

5 რამდენნაირად შეიძლება განვალაგოთ 14 წიგნი თაროზე ა) თუ მათ განლაგებას არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს? ბ) თუ მათგან რომელიღაც ორი აუცილებლად გვინდა, რომ ერთმანეთის გვერდით მოხვდეს?

6 სულ რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ისე, რომ ა) ციფრები არ გავიმეოროთ? ბ) ციფრების გამეორება შესაძლებელი იყოს?

7 თბილისის ყველა სატელეფონო ნომერი 2–ით იწყება და შვიდნიშნაა. რამდენი სატელეფონო ნომერი შეიძლება არსებობდეს?

8 რამდენი ექვსნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ, რომლის
ა) ყველა ციფრი კენტია? ბ) ყველა ციფრი ლუწია?

9 რამდენი განსხვავებული ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დავწეროთ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 და 8 ციფრებით ისე, რომ თითოეული რიცხვი შეიცავდეს მხოლოდ ერთ 1-იანს, ხოლო ნებისმიერი სხვა ციფრი შეიძლება შეგვხვდეს რამდენიმეჯერ.

10 რამდენი განსხვავებული ოთხასოიანი სიტყვა შეიძლება შევადგინოთ განსხვავებული ასოებით სიტყვისგან „ტენორი“.

11 სილამაზის კონკურსში მონაწილეობს 15 გოგონა. პირველი სამი პრიზის განაწილების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს.

12 5 სხვადასხვა ყვავილისგან საჭიროა 3 ყვავილიანი თაიგულის შედგენა. რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

13 რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი არსებობს, რომელთა ჩანაწერში არ გვხვდება ციფრები 0 და 5.

---

14 პარალელური გადატანით დაამტკიცეთ, რომ ABCD ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, თუ მოცემულია A(0;8); B(–6;0); C(2;–6): D(8;2).

15 მოცემულია ABCD პარალელოგრამის სამი წვერო A(1;3); B(2;5); C(5;–2). იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები (გამოიყენეთ პარალელური გადატანა A→O; B→C).

2 გადანაცვლება, წყობა

1 წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ რამდენიმე კომბინატორული ამოცანა. ამ ამოცანებს ბევრი საერთო ჰქონდათ და მათი ამოხსნის გზებიც დაახლოებით ერთი და იგივე იყო.

?

- კერძოდ, რა აქვთ საერთო და რით განსხვავდებიან პირველ პარაგრაფში განხილული ამოცანები ერთმანეთისგან?
- ახსენით არსებითად რით განსხვავდებოდა მესამე და მეოთხე ამოცანები? პირველი და მეორე ამოცანები?

შევეცადოთ ყველა ეს ამოცანა განვიხილოთ ზოგადი სახით.

n ელემენტიან სიმრავლეს, რომლის ელემენტები რაიმე წესით 1, 2, ..., n რიცხვებითაა გადანომრილი, **დალაგებული სიმრავლე** ეწოდება.

დალაგება მდგომარეობს იმაში, რომ რომელიმე ელემენტს მიენიჭება ნომერი 1 (იწერება პირველ ადგილზე). სხვა რომელიმეს – ნომერი 2 (იწერება მეორე ადგილზე) და ა.შ. დალაგებული სიმრავლის ჩაწერისას იხმარება მრგვალი ფრჩხილები, რომელთა შორისაც მოთავსებულია მოცემული რიგით დალაგებული ელემენტები. დალაგებული n–ეული აღინიშნება ასე: $(a_1, a_2, ...a_n)$.

ორი დალაგებული სიმრავლე ტოლია მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი შედგებიან ერთი და იმავე ელემენტებისგან და ერთი და იმავე წესით არიან დალაგებული (გადანომრილი).

(a; b) – დალაგებული ორეულია

(a; b; c) – დალაგებული სამეულია

(a; b; c; d) – დალაგებული ოთხეულია

და ა.შ.

ერთი და იგივე სიმრავლე შესაძლებელია რამდენიმენაირად დალაგდეს. მაგალითად, 1) {a; b} სიმრავლისგან მიიღება ორი სხვადასხვა (a;b) და (b;a) დალაგებული სიმრავლე. 2) საკლასო ჟურნალში მოსწავლეთა გვარები დალაგებულია ანბანის მიხედვით. ფიზკულტურის გაკვეთილზე – სიმაღლის მიხედვით.

- ჩამოწერეთ ყველა დალაგებული სიმრავლე, რომელიც შესაძლებელია მივიღოთ {a;b;c} სიმრავლის ელემენტებისგან.

{a;b} სიმრავლის ელემენტებისგან მიღებული გადანაცვლებებია (a;b) და (b;a).

სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების **გადანაცვლება** ეწოდება.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობა P_n–ით აღვნიშნოთ.
თქვენ უკვე ნახეთ, რომ სამელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებისგან მიიღება 6 გადანაცვლება, ე.ი. $P_3=6$

დათვალეთ P_4.
გამოვიყვანოთ ზოგადი ფორმულა P_n–თვის — დავთვალოთ P_n.

n–ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებიდან პირველი ნომერი შესაძლოა მიენიჭოს თითოეულს – ე.ი. პირველი ნომრის არჩევის n ვარიანტი გვაქვს. მეორე ნომერი – დარჩენილიდან თითოეულს – (n–1) ვარიანტი. მესამე ადგილის პრეტენდენტი იქნება დარჩენილი n-2 ელემენტიდან თითოეული, ე.ი. (n-2) ვარიანტი და ა.შ. ბოლო ელემენტის ასარჩევად დარჩენილია ერთი ელემენტი – ერთი ვარიანტი.

ნომერი	1	2	3	....	n–1	n	სულ
რაოდენობა	n	n–1	n–2	...	2	1	1·2 ... n = n!

ე.ი. $P_n=n!$(1)

P არის პირველი ასო ფრანგული სიტყვისა permutation – „გადანაცვლება“.

იპოვეთ P_3, P_4, P_5 (1) ფორმულის საშუალებით.

ცდა: რვა წიგნი უნდა დავალაგოთ ერთ თაროზე. რამდენი ელემენტისგან შედგება ხდომილობათა სრული სივრცე?

წინა პარაგრაფში დავთვალეთ, თუ რამდენი ექვსელემენტიანი დალაგებული სიმრავლე მიიღება 88 ელემენტისგან. განვაზოგადოთ ეს ამოცანა.

n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს (m≤n) ეწოდება **წყობა n ელემენტისგან m-ად.**

ელემენტიანი სირმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან წყობათა რაოდენობა აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი (იკითხება „ა ენიდან ემად“).

რა შემთხვევაშია ორი წყობა ერთმანეთისგან განსხვავებული? ერთმანეთის ტოლი?

A არის პირველი ასო ფრანგული სიტყვისა arrangement, რაც ნიშნავს დალაგებას (წყობას).

დავთვალოთ n ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან წყობათა რაოდენობა.

პირველ ადგილზე შესაძლოა ავირჩიოთ n ელემენტიდან თითოეული. ამის შემდეგ მეორეზე გვაქვს არჩევის n–1 შესაძლებლობა. მესამეზე – (n–2) შესაძლებლობა და ა.შ. მე-m-ზე იქნება (n–(m–1))=n–m+1 შესაძლებლობა.

ნომერი	1	2	3	....	m
ვარიანტთა რაოდენობა	n	n–1	n–2	...	n–m+1

ე.ი. m ელემენტიან წყობათა რიცხვი იქნება:

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-m+1) \qquad (1)$$

გასახსენებლად!

$0! = 1$

(1) ფორმულა შესაძლებელია ასეც ჩავწეროთ:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\dots 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\dots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

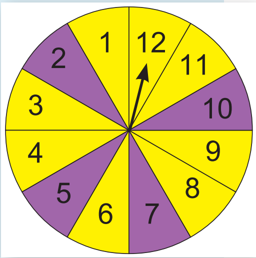
ე.ი. $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, აქედან $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$ $0 \le m \le n$, $m \in Z_0$.

მაგალითი 1.

აბონენტს დაავიწყდა მისი მეგობრის ტელეფონის ნომრის ბოლო სამი ციფრი. თუმცა ახსოვდა, რომ ეს ციფრები სხვადასხვა იყო. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ აბონენტი დარეკავს მეგობართან? (პირველსავე აკრებისას?)

ამოხსნა:

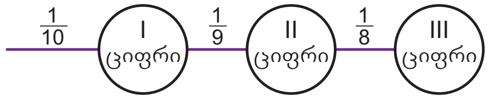
ციფრთა სიმრავლე ათელემენტიანია {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} უნდა დავთვალოთ სამელემენტიან წყობათა რაოდენობა A_{10}^3.



$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$

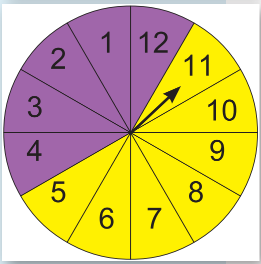
P (აბონენტი დარეკავს)$=\frac{1}{720}$

ან ასეც:



ე.ი. $p = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{720}$

მაგალითი 2.



იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ორივე დისკოზე ისარი გაჩერდება:
ა) ლუწ რიცხვზე; ბ) წითელ ფერზე

ამოხსნა:

თითოეულ დისკოზე ისრის გაჩერების 12 შესაძლებლობაა, თან ყოველ რიცხვს ერთ დისკოზე ეთანადება მეორე დისკოდან ნებისმიერი რიცხვი თორმეტიდან. ე.ი. იქნება $12\cdot 12=144$ შესაძლო შედეგი. რადგან თითოეულ დისკოზე ექვსი ლუწი რიცხვია, ამიტომ ხელშემწყობი ხდომილებათა რაოდენობა იქნება: $6\cdot 6=36$.

(2;4) (2;3) ... (2;12)
(5;4) (5;3) ... (5;12)
(7;4) ... (7;12)
(10;4) ... (10;12)

აქედან $P_{(\text{ორივე ლუწი})}=\frac{36}{144} = \frac{1}{4}$.

ბ) წითელი რიცხვები პირველ დისკოზე ოთხია, მეორეზე კი – ხუთი. სულ ხელშემწყობი იქნება $4\cdot 5=20$ ხდომილება

$$P_{(\text{ორივეზე წითელი})}=\frac{20}{144} = \frac{5}{36}.$$

სავარჯიშოები:

1 რამდენნაირად შეუძლია მწვრთნელს დააკომპლექტოს გუნდი (შეარჩიოს 11 მოთამაშე) 20 ფეხბურთელიდან?

2 რამდენი ექვსასოიანი სიტყვის შედგენაა შესაძლებელი ქართული ანბანისაგან, თუ სიტყვაში ასოები არ მეორდება?

3 რამდენნაირადაა შესაძლებელი 25 თანამშრომლიდან ავირჩიოთ დირექტორი, მოადგილე, მდივანი, ბუღალტერი და მოლარე?

4 რამდენნაირადაა შესაძლებელი კონკურსში მონაწილე 15 მოსწავლისთვის განაწილდეს 1-ელი, მე-2, მე-3 და მე-4 ადგილები?

5 რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის შედგენაა შესაძლებელი ლუწი ციფრებით (ნომერში ციფრები არ მეორდება).

6 რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის შედგენაა შესაძლებელი
ა) ლუწი ციფრებით; ბ) კენთი ციფრებით
(რიცხვში ციფრები არ მეორდება).

7 რამდენნაირადაა შესაძლებელი დავსვათ 5 გოგონა და 5 ვაჟი ერთმანეთის გვერდიგვერდ (ისე, რომ გოგონას გვერდით იჯდეს ვაჟი და პირიქით):
ა) გრძელ სკამზე მწკრივში; ბ) მრგვალ მაგიდასთან.

8 რამდენი ოთხნიშნა სხვადასხვანიშნა რიცხვის შედგენაა შესაძლებელი ციფრებით: 2; 0; 3; 4; 7; 9; 6?

9 საექსკურსიო მიკროავტობუსში უნდა მოთავსდეს 2 მძღოლი და 14 მგზავრი. რამდენნაირად შეიძლება ისინი განთავსდნენ, თუ მძღოლები აუცილებლად ორ წინა ადგილს იკავებენ?

10 „ჯეოსტარის“ კონკურსის ერთ-ერთ ტურში 5 გოგონა და 7 ვაჟია, ჟიურის სურვილით ტური უნდა დაიწყოს ვაჟმა და დაამთავროს ვაჟმა. რამდენნაირად შეიძლება შედგეს მონაწილეთა გამოსვლის თანმიმდევრობა?

11 კლასში 20 მოსწავლეა – 10 გოგონა და 10 ვაჟი. რამდენნაირად შეუძლია მასწავლებელს გაანაწილოს ისინი ათ მერხზე, ისე, რომ თითოეულ მერხზე ერთი ვაჟი და ერთი გოგონა იჯდეს?

12 რამდენნაირად შეიძლება მწკრივში დავაყენოთ 10 გოგონა და 8 ბიჭი ისე, რომ თავში და ბოლოში აუცილებლად იყოს ან ორი გოგონა ან ორივე ბიჭი?

13 რამდენნაირად შეიძლება დავალაგოთ მწკრივში გამოჭრილი 5 სამკუთხედი, 4 წრე და 5 ოთხკუთხედი ისე, რომ თავში და ბოლოში ერთი და იგივე გეომეტრიული ფიგურა იყოს?

---

14 ამოხსენით განტოლება:
ა) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; ბ) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 132$.

15 გამოთვალეთ:
ა) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$; ბ) $\frac{9! - 8!}{7!}$; გ) $\frac{4! + 5!}{3!}$.

3 ჯუფთება

1. 40 მოსწავლიდან 8 გოგონაა, დანარჩენი ვაჟი. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეული ოთხი მოსწავლიდან ერთი მაინც იქნება გოგონა?

ამოხსნა:

ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვის საპოვნელად საჭიროა დავადგინოთ, თუ რამდენი ოთხკაციანი ჯგუფის შედგენაა შესაძლებელი 40 ადამიანისგან? შევნიშნოთ ჯგუფში მოსწავლეთა თანამიმდევრობას (რიგს, დალაგებას) მნიშვნელობა არა აქვს, ანუ უნდა ვიპოვოთ ორმოცელემენტიანი სიმრავლის ოთხელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა.

n-ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან ქვესიმრავლეს n ელემენტიდან m-ელემენტიანი **ჯუფთება** ეწოდება.

n-ელემენტიდან m-ელემენტიან ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება C_n^m–ით (იკითხება „ცე ენიდან ემად“).

რა შემთხვევაშია ორი ჯუფთება განსხვავებული?

n ელემენტიანი სიმრავლის ერთი m ელემენტიანი ჯუფთებიდან შესაძლოა შევადგინოთ m! რაოდენობის დალაგებული სიმრავლე – m ელემენტიანი წყობა ე.ი. n ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან წყობათა რაოდენობა m!–ჯერ მეტია C_n^m–ზე. მივიღებთ: $m!C_n^m = A_n^m$.

აქედან $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$.

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

იპოვეთ C_5^2; C_4^3.

დავუბრუნდეთ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას. ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი იქნება 40 ელემენტიდან ოთხელემენტიან ჯუფთებათა რაოდენობა — C_{40}^4.

A იყოს ხდომილება „შემთხვევით არჩეული ოთხი მოსწავლიდან ერთი მაინც გოგონაა“, მაშინ $\overline{A}$ იქნება „შემთხვევით არჩეული ოთხი მოსწავლიდან არც ერთია გოგონა. დავთვალოთ $P(\overline{A})$. $\overline{A}$-ის ხელშემწყობ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება C_{32}^4 (მხოლოდ ოცდათორმეტი ბიჭიდან არჩეული ოთხეულები). ე.ი.

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{32}^4}{C_{40}^4} = \frac{32!\cdot 36!\cdot 4!}{4!\cdot 28!\cdot 40!} = \frac{32!\cdot 36!}{28!\cdot 40!} =$$

$$= \frac{28!\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 36!}{28!\cdot 36!\cdot 37\cdot 38\cdot 39\cdot 40} = \frac{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32}{37\cdot 38\cdot 39\cdot 40} \approx 0,39$$

აქედან $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0,61$

ჯუფთებათა რიცხვის თვისებები:

1. თუ $0 \le m \le n$, მაშინ სამართლიანია

$$\boxed{C_n^m = C_n^{n-m}}$$

დამტკიცება:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$ რ.დ.გ.

2. $\forall n,m$–თვის, სადაც $0 \le m \le n$ სამართლიანია

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

დამტკიცება:

$$\left.\begin{array}{l} C_{n-1}^{m-1} = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \dfrac{m(n-1)!}{m!(n-m)!} \\ C_{n-1}^{m} = \dfrac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} = \dfrac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = \frac{m(n-1)! + (n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$

რ.დ.გ.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თვისება:

3. n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობა ტოლია 2^n–ის.

ე.ი.

$$\boxed{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots C_n^n=2^n}$$

დამტკიცება:

მე-2 თვისება საშუალებას გვაძლევს თანდათანობით, ჯერ n=0–თვის, შემდეგ n=1–თვის და ა.შ. გამოვთვალოთ C_n^m.

მაგალითად,

თუ n=0, მაშინ $C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1$

თუ n=1, მაშინ $C_1^0 = \frac{1!}{1!0!} = 1; \quad C_1^1 = 1$

თუ n=2, მაშინ $C_2^0=1; \quad C_2^1=C_1^0+C_1^1=2; \quad C_2^2=1$

თუ n=3, მაშინ $C_3^0=1; \quad C_3^1=C_2^0+C_2^1=3; \quad C_3^2+C_3^1=3; \quad C_3^3=1$

$C_4^0=1; \quad C_4^1=C_3^0+C_3^1=4; \quad C_4^2=C_3^1+C_3^2=6; \quad C_4^3=C_3^2+C_3^3=4; \quad C_4^4=1$

და ა.შ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\cdots & & & & & & & & \cdots \\
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & & C_4^3 & & C_n^n
\end{array}$$

თუ ამ რიცხვებს სამკუთხედის სახით ჩამოვწერთ, მივიღებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილ პასკალის სამკუთხედს.

სტრიქონი		
0	1	$(a+b)^0$
1	1 1	$(a+b)^1$
2	1 2 1	$(a+b)^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$
6	1 5 15 20 15 6 1	$(a+b)^6$
	....	....
n	$C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_{n-1}^2 \quad \dots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$	$(a+b)^n$

ასეთი სამკუთხედი გვხვდება ფრანგი მათემატიკოსის ბლეზ პასკალის (1623–1662) შრომებში, თუმცა ცნობილია, რომ ასეთი ცხრილი უკვე იცოდა არაბმა მათემატიკოსმა ომარ ხაიამმა (XIIIს).

პასკალის სამკუთხედის n-ურ სტრიქონში $(a+b)^n$-ის მრავალწევრად გაშლის კოეფიციენტები (თან ყოველი კოეფიციენტი, გარდა პირველი და ბოლო წევრისა) პასკალის სამკუთხედის წინა სტრიქონის შესაბამისი კოეფიციენტების ჯამის ტოლია.

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$\dots\dots\dots\; C_{n-1}^{m-1} \qquad C_{n-1}^{m} \;\dots\dots\dots$$

$$+$$

$$\dots\dots\dots\; C_n^m \;\dots\dots\dots$$

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n \quad (1)$$

(1) ტოლობას **ნიუტონის ბინომს** უწოდებენ.

თუ a=b=1, მაშინ $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

მაგალითი 1.

რამდენნაირადაა შესაძლებელი ოთხმა მეგობარმა გაინაწილოს 28 წიგნი ისე, რომ თითოეულს შვიდი წიგნი შეხვდეს.

ამოხსნა:

პირველი აირჩევს 28–დან 7–ს C_{28}^7 ხერხით. დარჩენილი 21 წიგნიდან მეორე აირჩევს 7–ს C_{21}^7 ხერხით, შემდეგ მესამე – C_{14}^7–ით და მეოთხე კი – C_7^7 ხერხით, ე.ი. სულ გვექნება

$C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{7!21!} \cdot \frac{21!}{7!14!} \cdot \frac{14}{7!7!} \cdot \frac{28!}{7!^4}$ შესაძლებლობა.

მაგალითი 2.

ურნაში 3 წითელი და 7 თეთრი ბურთულა. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ამოღებული სამი ბურთულიდან:

ა) ორი წითელია და ერთი თეთრი; ბ) ორი თეთრია და ერთი წითელი.

ამოხსნა:

ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობაა C_{10}^3 (დალაგებას მნიშვნელობა არა აქვს).

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120\,.$$

ა) ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობა იქნება:

„2 წითელი 3–დან“ $\rightarrow C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

და „ერთი თეთრი 7–დან“ $\rightarrow C_7^1 = \frac{7!}{6!1!} = 7$

ყოველ წყვილს C_3^2–დან შეესაბამება თითოეული C_7^1–დან

სულ გვექნება $C_3^2 \cdot C_7^1 = 21$

ე.ი. $P(2წ;\ 1თ) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$.

ბ) ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობაა:

„1 წითელი 3–დან“ $\rightarrow C_3^1 = 3$ და „2 თეთრი 7–დან“ $\rightarrow C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

$P(1წ;\ 2თ) = \frac{3\cdot 21}{120} = \frac{21}{40}$.

სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ:

ა) C_{15}^4; ბ) C_{100}^{97}; გ) C_n^n; დ) C_{200}^1.

2 იპოვეთ:

ა) $\frac{C_{100}^{97}\cdot P_4}{66A_{50}^2}$; ბ) $\frac{C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{C_5^5}$; გ) $\frac{C_{16}^6}{C_{14}^5 + C_{14}^6 + C_{15}^5}$

3 ამოხსენით განტოლება:

ა) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x^2 - 1)$; ბ) $C_x^1 + A_x^2 = 256$;

გ) $\frac{A_x^4 + 2}{A_x^2 + 2} = 42$; დ) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^{x}$.

4 იპოვეთ $(x+x^2)^7$ დაშლის იმ წევრის კოეფიციენტი, რომელიც შეიცავს x^{10}.

5. იპოვეთ იმ წევრის კოეფიციენტი, რომელიც შეიცავს x^3-ს.

ა) $(3+x)^5$; ბ) $(2x+y)^5$; გ) $(1-x)^6$; დ) $(1+3x)^6$;

ე) $(2-x)^8$; ვ) $(3-x)^7$; ზ) $(1+x)^{10}$; დ) $(2x-3)^5$.

6 იპოვეთ a, თუ $(2+ax)^6$ დაშლის x^2–ის კოეფიციენტი არის 60.

7 ჩაცმულობის რამდენი კომბინაცია შეიძლება შედგეს 8 ბლუზის, 7 ქვედაკაბისა და 8 შარვლისაგან?

8 ბებოს უნდა, რომ ლუკას ორი სათამაშო უყიდოს. რამდენნაირად შეიძლება შეირჩეს სათამაშოები, თუ მაღაზიაში 20 სხვადასხვანაირი მანქანა, 5 სახის ბურთი და 10 სხვადასხვანაირი სათამაშო თოფია (შეიძლება ორივე ერთი სახის სათამაშო იყოს)?

9 ყუთში მოთავსებული 50 ბურთიდან მხოლოდ 3 ცალია წითელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ორივე წითელია.

10 ჯგუფში 24 მოსწავლეა, რომელთა შორის 14 ვაჟია. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ამ ჯგუფიდან შემთხვევით შერჩეულ 10 მოსწავლეში 5 ვაჟი იქნება.

11 რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორნებისას მოვა
ა) ერთნაირი ციფრები; ბ) განსხვავებული ციფრები;
გ) ორივეს ჯამი გაიყოფა 3–ზე; დ) ორივეს ჯამი მეტი იქნება 4–ზე.

12 რამდენი განსხვავებული წრფე გაივლება სიბრტყის 10 წერტილზე, რომელთაგან ერც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს?

13 რამდენი წრეწირი გაივლება სიბრტყის 10 წერტილზე, რომელთაგან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და არც ერთი ოთხი ერთ წრეწირზე არ მდებარეობს?

14 რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში, რომელშიც გათამაშდა 210 პარტია და თითოეულმა მონაწილემ ითამაშა დანარჩენთან თითო პარტია?

15 რამდენი ხერხით შეიძლება დავყოთ 15 მოსწავლე 2 ჯგუფად ისე, რომ ერთ ჯგუფში იყოს 4, ხოლო მეორეში 11 მოსწავლე?

გ

17 მოყვანილია თანაფარდობები რომელთაგან თითოეულს თავისი ქულა აქვს მოწერილი (1) $|2-\sqrt{5}| = 2-\sqrt{5}$; (2) $(1-\sqrt{3})^2 > \frac{3}{7}$; (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{7}} > 1$; (8) $\log_{0,5} 0,2 < 0$; (16) $\cos 8 < 0$. რა რიცხვს მივიღებთ, თუ შევკრებთ იმ თანაფარდობების შესაბამის ქულებს, რომლებიც სამართლიანია?

18 იპოვეთ $\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0,01x > 0 \\ \frac{1}{x} < 1000 \end{cases}$ სისტემის უმცირესი ნატურალური ამონახსენი.

4 წყობა განმეორებით

1. 5 ნოტისგან შედგენილი რამდენი მუსიკალური ფრაზის შედგენაა შესაძლებელი ა) კლავიატურის 88 კლავიშისგან? ბ) მხოლოდ 3 კლავიშისგან? (ერთი და იმავე ნოტის გამეორება დაშვებულია).

თუ კარგად გაიაზრეთ მოცემული ამოცანა, მიხვდებოდით, რომ უნდა დაგედგინათ ა) შემთხვევაში 88 ელემენტისგან, ხოლო ბ) შემთხვევაში 3 ელემენტისგან 5 ელემენტიან დალაგებულ სიმრავლეთა რაოდენობა, სადაც ელემენტების გამეორება შესაძლებელია.

n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებისგან შედგენილ m ელემენტიან დალაგებულ სიმრავლეს, რომელშიც შესაძლებელია მეორდებოდეს ერთი და იგივე ელემენტები, ეწოდება **n ელემენტიდან m ელემენტიანი წყობა განმეორებით**. ასეთ წყობათა რიცხვი $\overline{A_n^m}$ –ით აღინიშნება.

მაგალითად, {a;b;c} სიმრავლის ელემენტებისგან შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი 2 ელემენტიანი წყობები გამეორებით:

aa,	ba,	ca
ab,	bb,	cb
ac,	bc,	cc

დავთვალოთ, საზოგადოდ, $\overline{A_n^m}$.

ადგილის ნომერი	1	2	3	.....	m	სულ
ვარიანტების რაოდენობა	n	n	n		n	n^m

ე.ი. $\overline{A_n^m} = n^m$.

წყობა განმეორებით შესაძლოა განვიხილოთ მაშინაც, როცა n≤m მაგალითად, როცა n=2-ს, ე.ი. {a;b} სიმრავლის ელემენტებისგან შესაძლოა შევადგინოთ ასეთი სამელემენტიანი წყობები:

aaa	abb
aab	bab
aba	bba
baa	bbb

1	2	3	სულ
2	2	2	$2^3=8$

* ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის ასო, რომელშიც a ასო მეორდება α–ჯერ. დანარჩენი (n–α) ასო კი ერთმანეთისგან განსხვავებულია. დავთვალოთ შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი. გადავნომროთ ყველა a შემდეგნაირად: a_1, a_2, a_3, ... a_α, რომელთა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი იქნება α! მაგრამ ეს გადანაცვლებები ერთმანეთისგან არაფრით განსხვავდება, ერთი და იგივეა ($a_1= a_2= a_3=...= a_\alpha=a$).
მოცემული n–ეულის გადანაცვლებათა რიცხვი კი $P_n=n!$-ის ტოლია.

ამრიგად, მოცემულ $\left(\overbrace{a,a,\dots,a}^{\alpha},\ \overbrace{b,\dots,b}^{n-\alpha}\right)$ n–ეულისთვის შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნება:

$$K=\frac{n!}{\alpha!}$$

ვთქვათ გვაქვს $\overbrace{a,a,\dots,a}^{\alpha},\ b,c$ ელემენტი, სულ n რაოდენობის, მაშინ:

(1) $\to (a_1, a_2, \dots a_\alpha, b, c)$	$\xrightarrow{\text{გვაქვს}}$	სულ $\alpha!$ გადანაცვლება (ბოლო ორი ადგილი უჭირავს დანარჩენ ორ ასოს).	$\xrightarrow{\text{გვაძლევს}}$	$\overbrace{a,a,\dots,a}^{\alpha},\ b,c$
(2) $\to (a_1, a_2, \dots b, a_\alpha, c)$	$\xrightarrow{\text{გვაქვს}}$	სულ $\alpha!$ გადანაცვლებაა		$(a, a, \dots b, a, c)$ $a \to \alpha$-ჯერ
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
(K) $\to (c, b, a_1, a_2, \dots a_\alpha)$	$\xrightarrow{\text{გვაქვს}}$	სულ $\alpha!$ გადანაცვლებაა	$\xrightarrow{\text{გვაძლევს}}$	$c,b,\overbrace{a,a,\dots,a}^{\alpha}$

ე.ი. $n!=K\cdot\alpha!$ აქედან $K=\dfrac{n!}{\alpha!}$

საზოგადოდ, თუ a ასო მეორდება α–ჯერ, b–β–ჯერ...., l–λ-ჯერ, მაშინ n-ეულისათვის შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი k, ტოლია.

$$K=\frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\lambda!}$$

მაგალითი 1.

რამდენი სხვადასხვა სიტყვა მიიღება ასოების ყველა შესაძლო გადანაცვლებით სიტყვაში „მათემატიკა“.

ამოხსნა:

სიტყვაში „მათემატიკა“ ასო „ა“ გვხვდება 3–ჯერ, ასო „მ“ – ორჯერ, დანარჩენი ასოები: თ, ე, ტ, ი, კ – თითოჯერ. სულ ათი ასოა. ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა (სიტყვათა) რიცხვი იქნება: $K=\dfrac{10!}{3!2!}$.

მაგალითი 2.

გამოცდას აბარებს ა) სამი ბ) ოცი სტუდენტი.

რამდენნაირადაა შესაძლებელი, რომ მათ მიიღონ დადებითი შეფასება (დადებითია: 6, 7, 8, 9, 10 ქულა).

სტუდენტი	I	II	III	სულ
ვარინატი	5	5	5	5^3

ამოხსნა:

ა) რადგან თითოეულმა სტუდენტმა შესაძლოა მიიღოს ხუთი დადებითი ქულიდან თითოეული, ამიტომ ყველა შესაძლო ვარიანტთა რაოდენობა იქნება $\overline{A_5^3}=5^3$.

ბ) ხუთელემენტიანი {6, 7, 8, 9, 10} სიმრავლიდან უნდა დავთვალოთ 20 ელემენტიანი წყობები განმეორებით.

$\overline{A_5^3} = 5^{20}$

მაგალითად ერთ-ერთი წყობაა:

	(6,	6,	…,	7)
	↑	↑		↑
სტუდენტი	I	II	…	XX

სავარჯიშოები:

1 რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ისე, რომ ყველა კენტ ადგილზე იდგეს კენტი ციფრი და ლუწ ადგილზე – ლუწი?

2 რამდენი განსხვავებული რვანიშნა რიცხვი შეგვიძლია შევადგინოთ ბარათებით, რომლებზეც აწერია ციფრები: 2; 2; 5; 5; 5; 7; 8; 9?

3 რამდენნაირად შეგვიძლია დავაწყოთ მწკრივში 5 წითელი, 3 თეთრი და 4 ყვითელი ბურთულა?

4 რამდენი 6 ნიშნა კოდი შეიძლება შედგეს ასოებისგან 2; 2; 2; 2; 1; 1?

5 რამდენი განსხვავებული სიტყვა შეიძლება მივიღოთ სიტყვაში „ალბათობა“ ასოების გადანაცვლებით?

6 ლიფტი, რომელშიც 9 მგზავრია, შეიძლება გაჩერდეს 10 სართულზე. მგზავრები გამოდიან 2, 3 და 4 კაცისგან შემდგარ ჯგუფებად. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი?

7 რამდენნაირად შეიძლება გავანაწილოთ 9 სხვადასხვა წიგნი 3 ამანათში ისე, რომ შესაბამისად 2, 3 და 4 წიგნი იყოს ამანათში?

8 რამდენი ხერხით შეიძლება დაიყოს 16-კაციანი ჯგუფი ისე, რომ I ჯგუფში იყოს 5 კაცი, II-ში — 7, ხოლო III-ში 4 კაცი?

9 იპოვეთ a პარამეტრის ის მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ინტერვალი, რომელიც არის $(a-x)(x-\log_3 8)\geq 0$ უტოლობის ამონახსნი, უმცირესი სიგრძის იქნება.

5 ამოვხსნათ ამოცანები ალბათობათა თეორიიდან

1. ქალაქში 10000 ველოსიპედია, რომლებიც გადანომრილია ნომრებით 0000–დან 9999–მდე (ჩათვლით). იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ პირველივე შემხვედრი ველოსიპედის ნომერი შეიცავს ერთს მაინც ციფრ 5–იანს.

ამოხსნა:

ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ ნომერი არ შეიცავს არც ერთ 5–იანს. ასეთ რიცხვთა რაოდენობა იქნება 9^4.

1	2	3	4	სულ
9	9	9	9	9^4

მაგრამ ათი ციფრისგან შედგენილი ყველა შესაძლო ნომრის რაოდენობა არის 10^4.

1	2	3	4	სულ
10	10	10	10	10^4

ამიტომ იმის ალბათობა, რომ ნომრის ჩანაწერში არ შედის 5–იანი, იქნება $\frac{9^4}{10^4}=0{,}9^4$ აქედან გამომდინარე, ალბათობა იმისა, რომ ნომრის ჩანაწერში გვხვდება ერთი მაინც 5–იანი იქნება:

$$p = 1–0{,}9^4 = 0{,}3439$$

2. განყოფილებაში 15 ჯარისკაცია. საპატიო ყარაულისთვის შემთხვევით ირჩევენ სამ ჯარისკაცს. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მოცემული ჯარისკაცი მოხვდება საპატიო ყარაულში.

ამოხსნა:

ყველა შესაძლო სამეულების რაოდენობა იქნება C_{15}^3 ყველა იმ სამეულების რაოდენობა, რომელიც არ შეიცავს მოცემულ ჯარისკაცს, იქნება C_{14}^3 ალბათობა იმისა, რომ მოცემული ჯარისკაცი ვერ მოხვდებდა საპატიო ყარაულში იქნება $\frac{C_{14}^3}{C_{15}^3}=\frac{14!\cdot 3!\cdot 12!}{3!\cdot 11!\cdot 15!}=\frac{14!\cdot 11!\cdot 12!}{11!\cdot 14!\cdot 15!}=\frac{4}{5}$ ამიტომ იმის ალბათობა, რომ მოცემული ჯარისკაცი მოხვდება საპატიო ყარაულში იქნება $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

3. პარტიაში, რომელშიც 30 დეტალია, 6 დეტალი არასტანდარტულია. შემთხვევით იღებენ ორ დეტალს, რომელსაც უკან აღარ აბრუნებენ. ამის შემდეგ კიდევ იღებენ ორ დეტალს. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ პირველად სტანდარტული დეტალები ამოიღეს, მეორედ კი არასტანდარტული.

ამოხსნა:

A იყოს ხდომილობა: „პირველად ამოიღეს სტანდარტული დეტალები, ხოლო მეორედ არასტანდარტული.“

A_1: „პირველად ამოღებული დეტალები სტანდარტულია“.

A_2: „მეორედ ამოღებული დეტალები არასტანდარტულია“.

ადვილად მიხვდებით, რომ $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)$.

A_1: ხდომილობისთვის ყველა შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია C_{30}^2

A_1 ხდომილობას ხელს უწყობს C_{24}^2 შემთხვევა.

ე.ი. $P(A_1) = \dfrac{C_{24}^2}{C_{30}^2}$.

მას შემდეგ, რაც მოხდა A_1 ხდომილობა, A_2 ხდომილობის განხორციელებას ხელს უწყობს C_6^2 შემთხვევა, მაგრამ ყველა შესაძლო ხდომილობათა რიცხვია C_{28}^2. ამიტომ

$P(A_2/A_1)=\dfrac{C_6^2}{C_{28}^2}$, აქედან გამომდინარე:

$$P(A)=\frac{C_{24}^2}{C_{30}^2}\cdot\frac{C_6^2}{C_{28}^2}=\frac{24!\cdot 2!\cdot 28!}{2!\cdot 22!\cdot 30!}\cdot\frac{6!\cdot 26!\cdot 2!}{2!\cdot 4!\cdot 28!}=$$
$$=\frac{22!\cdot 23\cdot 24\cdot 28!}{22!\cdot 28!\cdot 29\cdot 30}\cdot\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 26!}{4!\cdot 26!\cdot 27\cdot 28}\approx 0,025$$

ამოხსენით განხილული ამოცანა (მე-3) ხისებრი დიაგრამის გამოყენებით.

P(A_2/A) — A_2 ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ A_1 უკვე განხორციელდა.

სავარჯიშოები:

1 იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით აღებული ოთხნიშნა რიცხვი შედგენილი იქნება კენტი ციფრებისგან.

2 ამოხსენით პირველი ამოცანა 12 ნიშნა, 18 ნიშნა რიცხვისთვის.

3 იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეული ორნიშნა რიცხვის ჩანაწერში არ შედის ორიანი.

4 ორი მოსწავლე ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ერთდროულად ფურცელზე წერს ნებისმიერ რიცხვს 1–დან 9–მდე (ჩათვლით). იგებს პირველი, თუ მათ მიერ დაწერილი რიცხვების ჯამი აღმოჩნდება ლუწი, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგებს მეორე. იპოვეთ პირველის მოგების ალბათობა.

5 დაჭრილი ანბანიდან შედგენილია სიტყვა „სამკუთხედი“. შემთხვევით თანამიმდევრობით იღებენ ხუთ ბარათს. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მიიღება სიტყვა „მედია“.

6 ურნაში რვა ბირთვია ასოებით: ა, ი, ე, ლ, მ, რ, ც, ხ. შემთხვევით იღებენ ოთხ ბირთვს და აწყობენ გვერდი–გვერდ. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მიიღება სიტყვა „ხალი“.

7 ურნაში შვიდი ბირთვია ა, ა, ა, ი, ვ, შ, ლ. შემთხვევით იღებენ ხუთ ბირთვს და აწყობენ გვერდი–გვერდ. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მიიღება სიტყვა „ვაშლი“.

8 მე–7 ამოცანა ამოხსენით იმ შემთხვევაში, როცა ურნაში ცხრა ბირთვია: ა, ა, ა, ა, ი, ვ, შ, შ, ლ.

9 AB მონაკვეთზე ნებისმიერადაა აღებული ოთხი წერტილი? იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მიღებულ მონაკვეთებიდან შემთხვევით არჩეული მონაკვეთის ერთი ბოლო A წერტილია.

10 დომინოს ქვებიდან შემთხვევით ირჩევენ 7 ქვას. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ შვიდივე წყვილია. თან ერთ წყვილს ნიშანი ადევს, ამიტომ ის აუცილებლად მოხვდება ამ შენარჩევში.

11 ბანქოს დასტიდან, რომელშიც 52 კარტია, თანმიმდევრობით იღებენ სამ კარტს, თან ამოღებულ კარტს მაშინვე აბრუნებენ დასტაში. რა არის ამის ალბათობა, რომ ამოღებული კარტებიდან ერთი მაინც იქნება გულის კარტი?

12 მოცემული რიცხვები 1, 3, 9, 27, 81, 243. როგორია იმის ალბათობა, რომ ამ რიცხვების ნებისმიერი დალაგების შემთხვევაში მიიღებ გეომეტრიულ პროგრესიას.

13 ყუთში არსებულ ბურთებს 80% წითელია, ხოლო 20% ლურჯი. რა არის იმის ალბათობა, რომ ყუთიდან ნებისმიერნად ამოღებული 8 ბურთულიდან 5 წითელია.

14 იმის ალბათობა, რომ გიორგი მიიღებს ათიანს, არის p, ხოლო იმის ალბათობა, რომ დათო მიიღებს ათიანს, არის q, რა არის იმის ალბათობა, რომ მხოლოდ ერთი მიიღებს ათიანს?

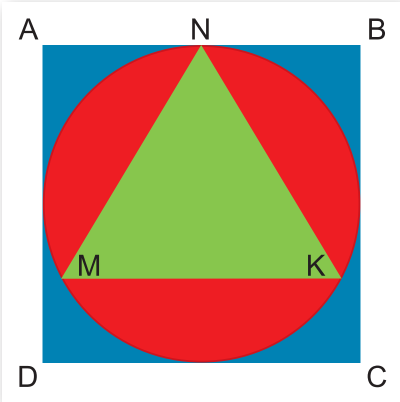
15. 5 კაციანი კომიტეტი უნდა შედგეს 15 კანდიდატისგან, რომელთა შორის 6 მამაკაცი და 9 ქალია. რა არის იმის ალბათობა, რომ კომიტეტში 3 მამაკაცი და 2 ქალი მოხვდება!

გ

16 თაროზე უნდა დავალაგოთ 15 ტომეულის ყველა ტომი. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერი დალაგების დროს მე–3 და მე-4 ტომები მოხვდება ერთმანეთის გვერდით?

6 გეომეტრიული ალბათობა

1. ცდა: კვადრატულ დაფაზე, რომელიც ნახაზზეა მოცემული. აგორებენ კამათელს. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით ნასროლი კამათელი მოხვდება სამკუთხა (მწვანე ფერში) სამიზნეში, თუ AB=3მ და MN=MK=KN (იგულისხმება, რომ კამათელი ABCD კვადრატს გარეთ არ ეცემა).



ამოხსნა:

გვაინტერესებს გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ ობიექტი (კამათელი) მოხვდება მოცემული სასრული ფართობის მქონე (ან სასრული მოცულობის მქონე, სიგრძის მქონე და ა.შ.) არის რაიმე A ქვესიმრავლეში, რისთვისაც გამოვიყენოთ ალბათობის გეომეტრიული განმარტება.

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

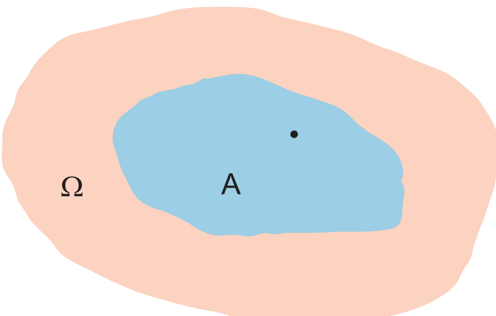
სადაც |A|, |Ω| არის შესაბამისად A–სა და Ω–ს ზომები. ჩვენს შემთხვევაში ფართობები, ამიტომ

$$P(\Delta) = \frac{S_{\Delta MNK}}{S_{ABCD}}.$$

$S_{ABCD} = 9$მ^2.

ვიპოვოთ $S_{\Delta MNK}$. R= . MN=2Rsin60°= $\sqrt{3}$.

$S_{\Delta MNK} = \frac{27}{16}\sqrt{3}$ და $P(\Delta)=\frac{27\sqrt{3}}{16\cdot 9} \approx 0,3.$

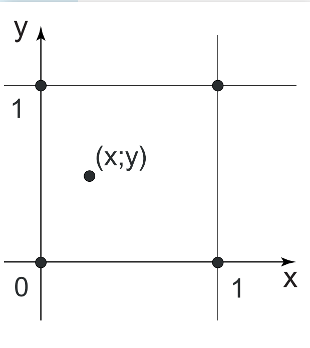


$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

ცხადია, ასე განმარტებული ალბათობისთვის P(∅)=0, P(Ω)=1 და 0≤P(A)≤1.

2. (შეხვედრის ამოცანა) ორი მეგობარი შეთანხმდა, რომ ერთმანეთს 20–დან 21 საათამდე შეხვედროდნენ. თითოეული შემთხვევით მიდის დანიშნულ ადგილზე და მეორეს მხოლოდ 15 წთ–ის განმავლობაში ელოდება. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მეგობრები ერთმანეთს შეხვდებიან.

ამოხსნა:



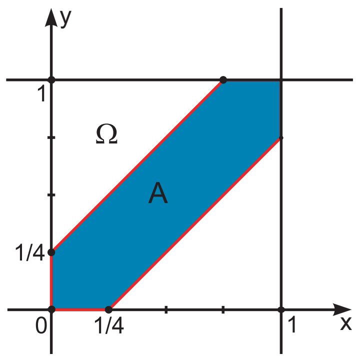
ვთქვათ, პირველი მოვიდა 20+x სთ–ზე, მეორე კი — (20+y) სთ–ზე. სადაც 0≤x≤1 და 0≤y≤1 მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეზე მონიშნული (x;y) წერტილი (ნახ. 1.) შეგვიძლია განვიხილოთ ელემენტარულ ხდომილობად.
მაგალითად, (0,1;0,8) წერტილი გვიჩვენებს: I მოვიდა 20,1 სთ–ზე, II კი – 20,8 სთ–ზე. ასეთ წერტილთა ერთობლიობა ავსებს კვადრატს, რომელიც შემოსაზღვრულია x=0, x=1, y=0 და y=1 წრფეებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ კვადრატის წერტილთა ერთობლიობა ხდომილობათა სრულ სივრცეს ქმნის. ხელშემწყობ A ხდომილობათა სიმრავლე იქნება:

$A=M\cap\Omega$, სადაც $M=\{(x;y)/|x-y|\le\ \}$ | სთ=15წთ.

ე.ი. A სიმრავლე იქნება ამონახსენი შემდეგ უტოლობათა სისტემისა

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\\ |g-x|\le\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\\ -\dfrac{1}{4}\le g-x\le\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\\ x-\dfrac{1}{4}\le y\le x+\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

იპოვეთ დაშტრიხული არის ფართობი.



ამრიგად, $P(A)=\dfrac{7}{16}$

სავარჯიშოები:

1 რას უდრის იმის ალბათობა, რომ 500 მ სიგრძის მავთული ძლიერი ქარის დროს დაზიანდება, საწყისი პუნქტიდან არანაკლებ 120 და არაუმეტეს 200 მ–ით დაშორებულ მონაკვეთზე.

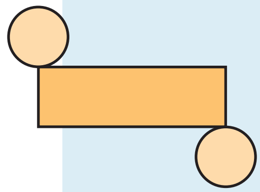
2 20 სმ სიგრძის AB მონაკვეთზე შემთხვევით ილებენ M წერტილს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ M წერტილი A–დან დაშორებულია არაუმეტეს 8 სმ–ით, ხოლო AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან კი 6 სმ–ზე მეტი მანძილით.

3 ABCD კვადრატის A წვეროდან ნებისმიერი რადიუსით (დიაგონალის სიგრძეზე ნაკლებით) შემოხაზულია წრეწირი. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ წრეწირი გადაკვეთს AB და AC გვერდებს?

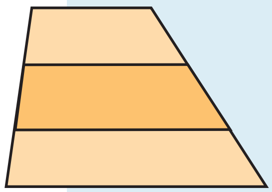
4 წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ექვსკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოთავსებული იქნება:
ა) წრეში ბ) წრის გარეთ.

5 x და y რიცხვები $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ 2 < y < 5 \end{cases}$ (1) სისტემის ამონახსნებია. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ (x;y) წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს (1) სისტემას, დააკმაყოფილებს $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3 < y < 4 \end{cases}$ სისტემასაც?

6 სიბრტყეზე აღებულია R რადიუსიანი წრე და A წერტილი, რომელიც წრეწირის ცენტრიდან 2R მანძილითაა დაშორებული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ A–ზე შემთხვევით გატარებული წრფე წრეწირს გადაკვეთს?



7 ნახაზზე მოცემულია ცილინდრის შლილი, რომლის სიმაღლე 10 სმ–ია, ხოლო ფუძის რადიუსი 5 სმ. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ზედაპირზე აღებული ნებისმიერი წერტილი იქნება
ა) რომელიმე ფუძის წერტილი; ბ) გვერდითი ზელაპირის წერტილი;
გ) ეკუთვნის მხოლოდ ერთ ფუძეს.



8 ტრაპეციის ფერდი სამ ტოლ ნაწილად არის გაყოფილი და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფეები. რა არის იმის ალბათობა, რომ ტრაპეციაზე შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება მოცემული ტრაპეციებიდან შუა ტრაპეციაზე?

9 ნებისმიერი ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილების მიმდევრობის შეერთებით მოცემული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (დაამტკიცეთ). რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამ ოთხკუთხედზე შემთხვევით აღებული წერტილი მოცემულ პარალელოგრამს ეკუთვნის.

10 მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია 3 და 4, ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ სამკუთხედის შემთხვევით აღებული წერტილი არ იქნება ჩახაზული წრის წერტილი.

---

11 იპოვეთ $y = \sqrt{2} - 3\sin x$ $y = \sin x - \sqrt{2}$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

12 რამდენი ამონახსნი აქვს $\sqrt{x}\,(x^4 - \sqrt{5} + \sqrt{3} + 0,5) = 0$ განტოლებას?

13 იპოვეთ $4^{2x}+4^{-2x}$, თუ $4^x+4^{-x}=8$.

7 დაგროვილი სიხშირე. რანგი

1. ცხრილში მოცემულია ოთხსულიანი ოჯახის დანახარჯი ერთი თვის განმავლობაში ზოგიერთ პროდუქტებზე:

	ხორცი	ყველი	თევზი	ხილი
თანხა (სიხშირე)	100 ლარი	60 ლარი	24 ლარი	70 ლარი

ააგეთ შესაბამისი წრიული დიაგრამა.

2. ქვემოთ მოცემულია XI$^{\text{ა}}$ კლასის მოსწავლეთა მიერ 20 სასწავლო დღის განმავლობაში მათემატიკაში მიღებული ნიშნების რაოდენობა 0, 1, 2, 3, 2, 3, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3.
ამ მონაცემებისთვის:
ა) დაწერეთ სიხშირეთა ფარდობით სიხშირეთა განაწილება.
ბ) ააგეთ სიხშირეთა ფარდობით სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა. ააგეთ სიხშირეთა, ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი.

რანგი გვიჩვენებს თუ $x_1, x_2, \dots x_n$ ამონარჩევში სიდიდით მერამდენეა x_i-ის რიცხვითი მნიშვნელობა (ზრდადობის მიხედვით)

ვთქვათ, დაკვირვების შედეგად მიღებული მონაცემები ასეა დალაგებული:

10 15 9 12 8 18 (1)

შესაბამისი ვარიაციული მწკრივი იქნება:
8 9 10 12 15 18

ვარიაციულ მწკრივში მონაცემის ნომერს ამ **მონაცემის რანგი** ეწოდება. მოცემულ მონაცემებს (1) რანგები ასე მიეწერება:

მონაცემები:	12	8	18	9	15	10
რანგები:	4	1	6	2	5	3

განვიხილოთ ისეთი შერჩევა, სადაც ზოგიერთი წევრი მეორდება:

12 8 18 18 9 9 18

მაშინ ზემოთ მოცემული წესით რანგები ასე უნდა მივაწეროთ:

	8	9	9	12	18	18	18
რანგი:	1	2	3	4	5	6	7

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მონაცემებიდან, მაგ.: „9, 9" უპირატესობას ერთ–ერთს ვანიჭებთ (მაგალითად: ორმა მონაწილემ მოაგროვა 9–9 ქულა). ამიტომ მიღებულია, რომ განმეორებად მონაცემებს მივუწეროთ ერთი და იგივე რანგი – მათზე მოსული რანგების საშუალო არითმეტიკული ე.ი. მონაცემებს 9, 9 თითოეულს მიეწერება რანგი: $\frac{2+3}{2} = 2,5$ ხოლო მონაცემებს 18, 18, 18 კი – $\frac{5+6+7}{3} = 6$

განვიხილოთ $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$ (1) ვარიაციული მწკრივი. ვთქვათ მოცემულ ვარიაციულ მწკრივში გვხვდება k რაოდენობის განსხვავებული რიცხვითი მნიშვნელობა – ვარიანტი.

$x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)} < \ldots < x^{(k)}$

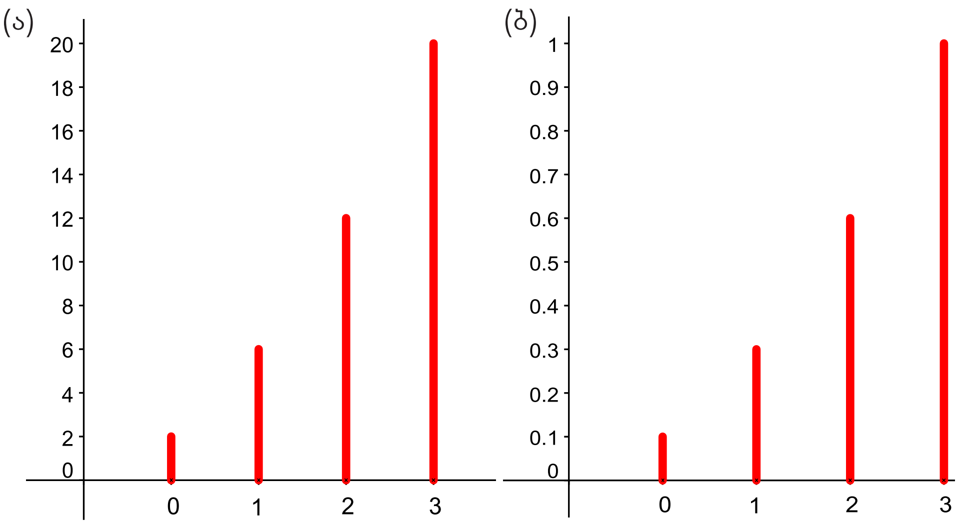
$x^{(i)}$ ვარიანტის დაგროვილი სიხშირე (დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე) ეწოდება ყველა იმ ვარიანტის სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) ჯამს, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობა არ აღემატება $x^{(i)}$–ს.

ვარიანტი	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	....	$x^{(k)}$
სიხშირე	n_1	n_2	n_3		n_k
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$		$\frac{n_k}{n}$
დაგროვილი სიხშირე	n_1	$n_1 + n_2$	$n_1 + n_2 + n_3$		$n_1 + n_2 + \ldots n_k$
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n}$	$\frac{n_1}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_3}{n}$		$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n}$

მაგალითად, პარაგრაფის დასაწყისში (წყვილებში გარჩეულ) მე–2 მაგალითში მოცემული მონაცემებისთვის დაგროვილ სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) ცხრილს ექნება სახე:

ვარიანტები	0	1	2	3
სიხშირე	2	4	6	8
დაგროვილი სიხშირე	2	2+4=6	2+4+6=12	2+4+6+8=20
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{10} + \frac{4}{20} =$	$\frac{2}{10} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20} =$	$\frac{2}{\ } + \frac{4}{\ } +$

ნახაზზე მოცემულია დაგროვილ სიხშირეთა (ა), დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა (ბ) გრაფიკები.



უფრო მოსახერხებელია ფარდობითი სიხშირის გრაფიკის აგება, ვიდრე სიხშირის გრაფიკისა, რადგან ყოველთვის (მაგალითად, სიხშირის დიდი მნიშვნელობისთვის) შესაძლოა ვერ შევძლოთ შესაბამისი მასშტაბის შემოტანა.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში მიღებულია ფარდობითი სიხშირე ნაცვლად წილადისა გამოსახონ პროცენტებში. მაგ. ვარიანტი 7-ის წილი მთელ მოცულობაში $\frac{2}{16}$-ის ნაცვლად ამბობენ, რომ 12,5%-ია.

სავარჯიშოები:

1 გადაიხაზეთ რვეულში და შეავსეთ ცხრილის ცარიელი უჯრები:

ვარიანტი	1	3	7	12	18
სიხშირე	5				
ფარდობითი სიხშირე			$\frac{2}{16}$		$\frac{4}{16}$
დაგროვილი სიხშირე				12	
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე		$\frac{7}{12}$			

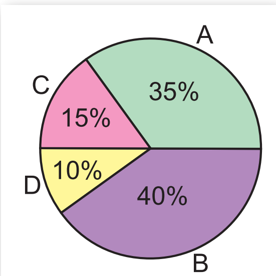
2 შემდეგი მონაცემები წარმოადგინეთ ვარიაციული მწკრივის სახით და იპოვეთ მათი რანგი. შეადგინეთ სიხშირეთა, ფარდობითი სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეთა ცხრილი.

ა) 1;1 0;0 1; 9; 8; 0; 1; 7; 4; 9; ბ) 5; 7; 9; 18; 18; 7; 4; 9; 5; 15; 21;

გ) 0;0; -5; 5; -5; 5; 10; 0; -5; 10; 5; დ) 0; 1; 2; 3; 3; 3; 0; 1; 1; 3; 2; 2; 3.

3 ცხრილში მოცემულია კლასის ერთ–ერთი საკონტროლო წერის ნიშნები. შეადგინეთ წერტილოვანი დიაგრამა, იპოვეთ მონაცემთა დაგროვილი სიხშირე და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე, რანგი.

ნიშანი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	0	0	0	0	3	7	4	3	6	5



4 წრიულ დიაგრამაზე მოცემულია ფირმის 100 თანამშრომლის სოციალური მდგომარეობა: (ქორწინებაში მყოფი (A), ახალდაქორწინებული (B), განქორწინებული (C) ქვრივი (D). შეადგინეთ ამ მონაცემებისთვის სვეტოვანი დიაგრამა, იპოვეთ თითოეული მონაცემის სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე, დაგროვილი სიხშირე.

5 აღრიცხულია 15 ოჯახში ბავშვთა რაოდენობები. 3; 2; 2; 1; 4; 1; 1; 3; 2; 2; 0; 2; 0; 3; 1.

ა) წარმოადგინეთ მონაცემები, წერტილოვანი, სვეტოვანი და წრიული დიაგრამის სახით;

ბ) იპოვეთ ამ მონაცემთა რანგი, მოდა, საშუალო, დისპერსია (ისარგებლეთ კომპიუტერით);

გ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა, დაგროვილ ფართობითი სიხშირეთა გრაფიკები.

6 მოცემულია ეროვნული გამოცდების ერთ–ერთ წელს გამოცდების საშუალო მონაცემები (მაქსიმალური შეფასება 100 ქულა):

ქართული ენა და ლიტერატურა – 58 ქულა
ზოგადი უნარები – 55 ქულა
უცხო ენა – 42 ქულა
მათემატიკა – 38 ქულა
ააგეთ შესაბამისი სვეტოვანი დიაგრამა.

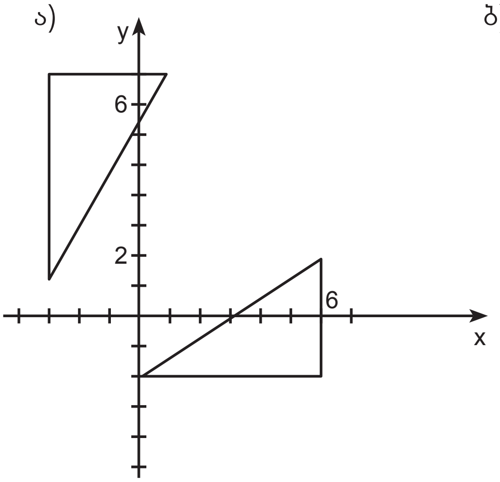
7 გადაიხაზეთ რვეულში და შეავსეთ ცხრილის ცარიელი უჯრები. იპოვეთ მონაცემთა მოდა.

ვარიანტი	3	5	7	15	21
სიხშირე			8		
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{18}$				$\frac{5}{18}$
დაგროვილი სიხშირე				13	
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე		$\frac{4}{15}$			

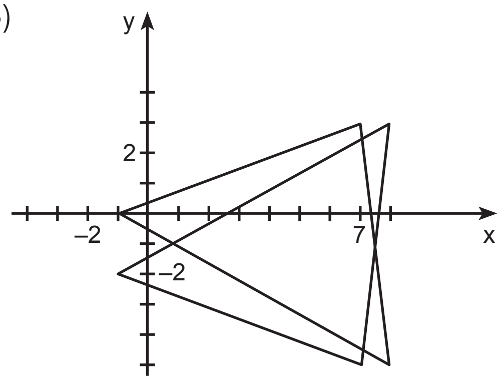
8 ცნობილია $\dfrac{f(x)}{2f(x)-x}=\dfrac{1}{1-x}$, იპოვეთ $f^{-1}(x)$.

9 ა) ნახაზზე მოცემული სამკუთხედები სიმეტრიულია l ღერძის მიმართ. დაწერეთ l წრფის განტოლება.

ა)



ბ)



8 ოგივა

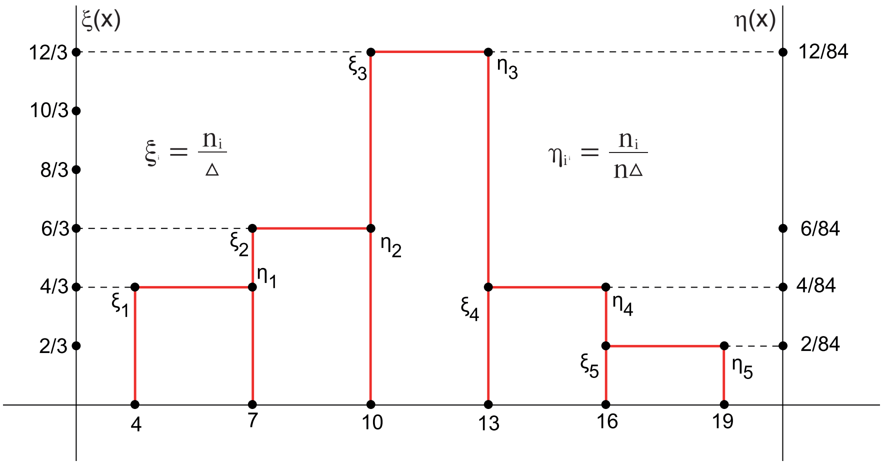
4,2	10,1	7,8	12,8
11,5	18,8	10,7	13,1
7	10,5	6,2	15,8
14,3	12,1	15,8	8,6
12,3	8,4	10,7	9,7
5,4	11,5	16,7	5,9
10,8	9,9	11,8	12,7

1. ცხრილში მოცემულია სააქციო საზოგადოების აქციათა მფლობელების მოგება პროცენტებში გადასახადების გადახდის შემდეგ. ააგეთ:

ა) სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

ბ) ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა ხუთი ტოლი ინტერვალით.

თუ სწორად შეასრულეთ დავალება. მაშინ მიიღებდით შემდეგი სახის სიხშირეთა ჰისტოგრამას $\xi(x)$ და ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამას $\eta(x)$–ს.



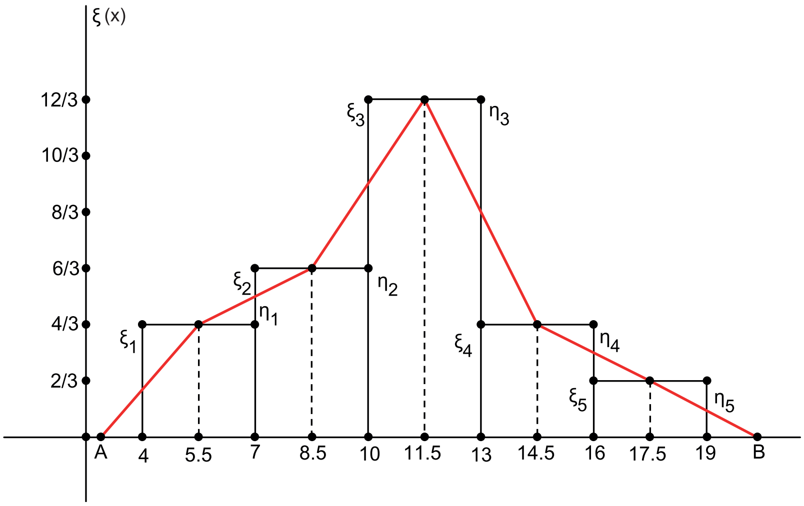
$\Delta=3$ – ინტერვალის სიგრძე

- რას უდრის: ა) თითოეული მართკუთხედის ფართობი, ბ) ყველა მართკუთხედის ფართობი?
- დაასახელეთ ინტერვალები მასში შემავალ მონაცემთა რაოდენობის კლების მიხედვით.

იმავე მონაცემთა წარმოსადგენად განიხილავენ განსხვავებულ დიაგრამას – სიხშირეთა პოლიგონს. ავაგოთ პირველ მაგალითში მოყვანილ მონაცემთა სიხშირეთა განაწილებისთვის სიხშირეთა პოლიგონი.

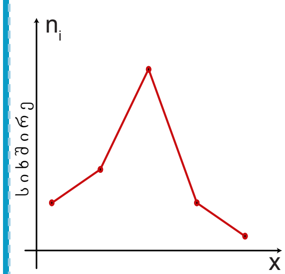
ox ღერძზე ავიღოთ პირველი, [4;7] ინტერვალის შუა წერტილიდან მარცხნივ 3 ერთეულით ($3=a_1-a_0=a_2-a_1=...=a_k-a_{k-1}$-ით) დაშორებული A წერტილი და ბოლო ინტერვალის შუა წერტილიდან მარჯვნივ 3 ერთეულით დაშორებული B წერტილი.

თუ ჰისტოგრამის ზედა ფუძეების შუა წერტილებს მიმდევრობით შევაერთებთ და მიღებული ტეხილის ბოლო წერტილებს მონაკვეთებით შევაერთებთ შესაბამისად A და B წერტილებთან, მივიღებთ პოლიგონს (წითელი ტეხილი). პოლიგონიცა და ჰისტოგრამაც გვაძლევს მონაცემთა სიხშირული განაწილების სურათს.



გასახსენებლად!

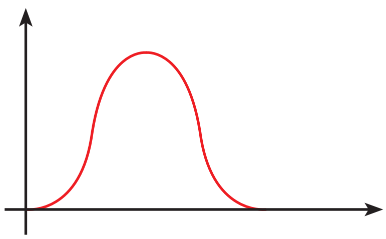
დისკრეტული მონაცემებისთვის პოლიგონი მიიღება წერტილოვანი დიაგრამის წერტილების შეერთებით.



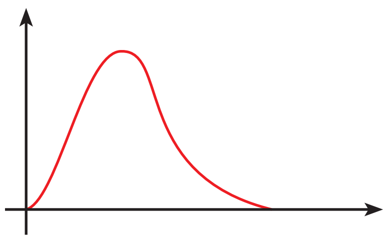
1. აჩვენეთ, რომ სიხშირეთა პოლიგონითა და OX ღერძით შემოსაზღვრული ნაკვეთის ფართობი n–ის ტოლია.

2. ააგეთ (მსგავსად სიხშირეთა პოლიგონისა) ზემოთ განხილული მაგალითისთვის ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი. რას უდრის ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონითა და OX ღერძით შემოსაზღვრული ნაკვეთის ფართობი?

ადვილად მისახვედრია, რომ რაც უფრო შემცირდება დაჯგუფების ინტერვალთა სიგრძე, მით უფრო გლუვი იქნება პოლიგონი. ამიტომ შესაძლებელია განაწილების სავარაუდო ფორმები წარმოვადგინოთ გლუვი წირებით.



ეს წირი იმაზე მიუთითებს, რომ კიდურა მნიშვნელობები იშვიათად გვხვდება, ვიდრე შუალედური.
თან წვეროს მნიშვნელობის ირგვლივ მრუდი სიმეტრიულია.



ასეთი განაწილება ასიმეტრიულია წვეროს შესაბამისი მნიშვნელობის გარშემო — არის მარჯვენა ასიმეტრია.
(მარჯვნივ უფრო დამრეცია, მარცხნივ ციცაბო).

ორივე მრუდს ერთი წვერო აქვს – ერთი მაქსიმალური სიხშირე.

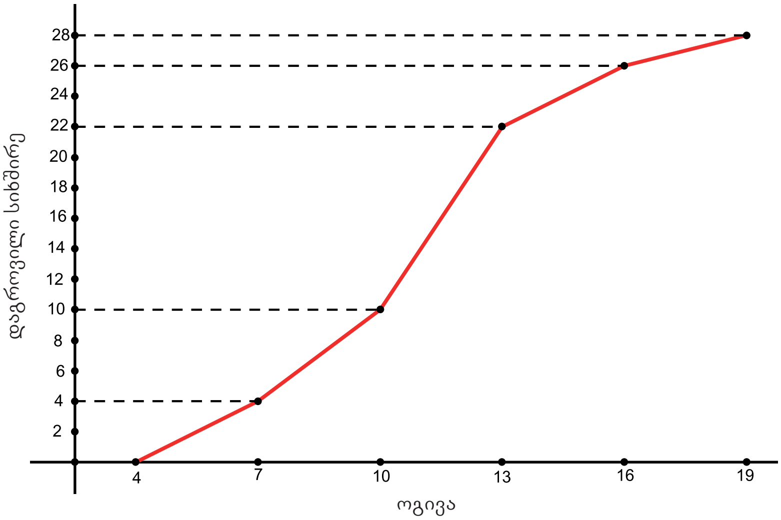
განვიხილოთ დიაგრამთა მესამე ტიპი ოგივა, ანუ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა. ოგივას იყენებენ მონაცემთა ინტერვალური განაწილებისას დაგროვილი სიხშირეების გრაფიკული ფორმით წარმოსადგენად.

ავაგოთ პირველ მაგალითში მოცემულ სიხშირეთა განაწილებისთვის ოგივა.

ინტერვალი	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
[4;7)	4	4
[7;10)	6	10
[10;13)	12	22
[13;16)	4	26
[16;19]	2	28

ავაგოთ წერტილები (4;0), (7;4), (10;10), (13;22), (16;26), (19;28). (ყველა ინტერვალის ზედა საზღვარს შევუსაბამოთ დაგროვილი სიხშირე. მაგ.: (4;7) ინტერ-ვალისთვის 7→4.

მიღებული წერტილების შეერთებით მივიღებთ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამას – ოგივას. ოგივას საშუალებით ვგებულობთ, თუ მონაცემთა რამდენი მნიშვნელობა არ აღემატება ამა თუ იმ ინტერვალის ზედა საზღვარს.



■ რამდენი აქციონერის მოგება არ აღემატება 10%–ს? 13%–ს?

■ ისარგებლეთ ცხრილით და ააგეთ:
ა) ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი;
ბ) დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამა.

ინტერვალი	შუა წერტილი	ფარდობითი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
[4;7)	5,5	$\frac{4}{28}$	$\frac{4}{28}$
[7;10)	8,5	$\frac{6}{28}$	$\frac{4}{28}+\frac{6}{28}=\frac{10}{28}$
[10;13)	11,5	$\frac{12}{28}$	$\frac{4}{28}+\frac{6}{28}+\frac{12}{28}=\frac{22}{28}$
[13;16)	14,5	$\frac{4}{28}$	$\frac{4}{28}+\frac{6}{28}+\frac{12}{28}+\frac{4}{28}=\frac{26}{28}$
[16;19)	17,5	$\frac{2}{28}$	$\frac{4}{28}+\frac{6}{28}+\frac{12}{28}+\frac{4}{28}+\frac{2}{28}=1$

სავარჯიშოები:

1 წარმოადგინეთ პარაგრაფში განხილულ პირველ მაგალითში მონაცემები ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამის სახით.

2. ისარგებლეთ სავარჯიშოების წინ მოცემული (წყვილებისათვის განკუთვნილი) ცხრილით. მოცემული ინტერვალებისთვის შეადგინეთ დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი და ააგეთ ოგივა.

3 დაასრულეთ ცხრილის შევსება და მიღებული მონაცემების მიხედვით ააგეთ ოგივა.

ინტერვალი	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
[2;5]	3	
[5;8]	7	
[8;11]	10	
[11;14]	6	
[14;17]	2	

4 მონაცემებისთვის 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 10, 10, 10, 11, 11, 13, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 17, 17, 18 შეადგინეთ ცხრილი ბიჯით 4. შეადგინეთ სიხშირეთა და დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილები. ააგეთ ოგივა და გაეცით პასუხი, თუ რამდენი მონაცემია, რომელთა მნიშვნელობა არ აღემატება:
ა) 6; ბ) 10; გ) 14.

5 გამოკითხული 20 ოჯახიდან აღმოჩნდა, რომ ერთი კვირის განმავლობაში 2 ოჯახი ყიდულობს 1-დან 3 ლიტრამდე რძეს, 7 ოჯახი ყიდულობს 3-დან 5 ლიტრამდე რძეს, 5 ოჯახსი მოიხმარს 5-დან 7 ლიტრამდე, 6 ოჯახი კი 7-დან 9 ლიტრამდე რძეს. ამ მონაცემების მიხედვით სეადგინეთ:
ა) სიხშირეთა ცხრილი;
ბ) ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი;
გ) დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი;
დ) დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. მიღებული ცხრილიდან ამოიხაზეთ მხოლოდ ის მონაცემები, რომელიც საჭიროა ოგივას ასაგებად და ააგეთ ოგივა.

9 ცენტრალური ტენდენციის საზომები

1. ცხრილში მოცემულია ფირმის ექვსი თანამშრომლის წლიური შემოსავალი (1000 ლარებში).

თანამშრომელთა №	1	2	3	4	5	6
შემოსავალი	12	8	18	9	15	10

იპოვეთ:
ა) ფირმის თანამშრომელთა საშუალო წლიური შემოსავალი.
ბ) მონაცემთა მედიანა, დიაპაზონი.
გ) როგორ შეიცვლებოდა საშუალო და მედიანა, თუ მე–3 თანამშრომლის წლიური შემოსავალი 88000 ლარი იქნებოდა.
დ) რომელი უკეთ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს გ) შემთხვევაში – მედიანა თუ საშუალო? რატომ?

ვიპოვოთ შერჩევითი საშუალო და დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა დაჯგუფებული მონაცემებისთვის (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

ინტერვალი	[4;7)	[7;10)	[10;13)	[13;16)	[16;19]
სიხშირე	4	6	12	4	2

იმ მონაცემთა მნიშვნელობები, რომლებიც მიეკუთვნება ამა თუ იმ ინტერვალს, შესაძლოა გაიგივდეს ამ ინტერვალის შუა წერტილთან, ანუ ინტერვალის შუა წერტილს მიეწერენ ინტერვალის შესაბამის სიხშირეს (ფარდობით სიხშირეს). მოცემული ცხრილი შევავსოთ შემდეგ ცხრილამდე:

ცხრილი 2

	ინტერვალი	სიხშირე	ინტერვალის შუა წერტილი (x_i)	$n_i\ x_i$
1.	[4;7)	4	5,5	22
2.	[7;10)	6	8,5	51
3.	[10;12)	12	11,5	138
4.	[13;16)	4	14,5	58
5.	[16;19]	2	17,5	35
ჯამი:		n=28		304

მონაცემთა საშუალო ტოლი იქნება ინტერვალთა შუაწერტილების შესაბამის სიხშირეზე ნამრავლთა ჯამი გაყოფილი მონაცემთა რაოდენობაზე. ე.ი. $\bar{x} = \frac{304}{28} \approx 10,9$.

ინტერვალს, რომელშიც მონაცემთა ყველაზე დიდი რაოდენობაა, **მოდალური ინტერვალი** ეწოდება.

დაასახელეთ სულ ცხრილში მოცემული მონაცემებისთვის მოდალური ინტერვალი.

მოდას კი უწოდებენ მოდალური ინტერვალის შუა წერტილს.

ადვილი მისახვედრია, რომ მოდალური ინტერვალის დადგენა იმაზეა დამოკიდებული, თუ რამდენ ინტერვალად დავაჯგუფებთ მონაცემებს.

გამოვთვალოთ დისპერსია მე–2 ცხრილით მოცემული მონაცემებისთვის.

გავიხსენოთ: დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულაა:

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

შერჩევითი დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა კი მოიცემა ფორმულით:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - n\left(\bar{x}\right)^2\right) \qquad (1)$$

ხოლო სტანდარტული გადახრა გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \sqrt{S^2}$$

შევადგინოთ ახალი ცხრილი.

ინტერვალი	შუა წერტილი (x_i)	x_i^2	სიხშირე n_i	$n_i\, x_i$	$n_i\, x_i^2$
[4;7)	5,5	30,25	4	22	121
[7;10)	8,5	72,25	6	51	433,50
[10;13)	11,5	132,25	12	138	1587
[13;16)	14,5	210,25	4	58	841
[16;19)	17,5	306,25	2	35	612,5
ჯამი:			28	304	3595

$$\bar{x} = \frac{1}{28}\sum_{i=1}^{28} n_i x_i = \frac{304}{28} \approx 10,9$$

გასახსენებლად!
მოდა, მედიანა და საშუალო, მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის საზომებია.

თუ ვისარგებლებთ (1) ფორმულით, მივიღებთ:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - n(\bar{x})^2\right) = \frac{1}{27}(3595 - 28\cdot 10{,}9^2) \approx 9{,}12.$$

სტანდარტული გადახრა იქნება: $S = \sqrt{S^2} \approx 3{,}02.$

სავარჯიშოები:

1 მოცემულია a, b, c და d მთელი რიცხვები. a<b<c=d. ამ რიცხვების მოდაა 11, დიაპაზონი — 8, ხოლო საშუალო — 8.

2 მოცემულია 3 დადებითი რიცხვი a<b<c. მედიანაა 11, საშუალო — 9, ხოლო დიაპაზონი — 10. იპოვეთ a.

3 გადაიხაზეთ ცხრილი და შეავსეთ.

ინტერვალი	შუაწერტილი (x_i)	სიხშირე (n_i)	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$

მოცემული ცხრილის მონაცემების მიხედვით შეასრულეთ 4-6 დავალებები.

4 იპოვეთ $\vec{x}$.

5 იპოვეთ შერჩეული დისპერსიის მოახლოებითი მნიშვნელობა.

6 იპოვეთ სტანდარტული გადახრა.

VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები:

1 გამოთვალეთ:

ა) A_{15}^{2}; ბ) P_8; გ) C_{25}^{7}; დ) $C_{15}^{2}+C_{15}^{3}$;

ე) $A_{25}^{17}\cdot P_{18}$; ვ) $\dfrac{A_{15}^{14}+A_{15}^{13}}{A_{15}^{12}}$; ზ) $\dfrac{P_{15}}{P_{12}}$; თ) $\dfrac{25!}{30\cdot P_{15}}$.

2. ამოხსენით განტოლება:

ა) $A_x^2\cdot C_x^{x-2}=48$; ბ) $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^{3}=7(x-1)$;

გ) $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$; დ) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}}=336$.

3. აჩვენეთ, რომ k და n-ს ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის ჯამი $C_{n+k}^{2}+C_{n+k+1}^{2}$ არის ზუსტი კვადრატი.

4. $(5+2x)^{16}$ ბინომის დაშლის მე–4 წევრი x–ის რა მნიშვნელობისთვის იქნებდა მის მეზობელ ორ წევრზე მეტი?

5. განსაზღვრეთ A_n^2, თუ $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ დაშლის მეხუთე წევრი არ არის დამოკიდებული x–ზე.

6. რამდენი სხვადასხვაგვარი აკორდის აღება შეიძლება როიალზე შერჩეულ ათ კლავიშზე, თუ თითოეული აკორდი შეიცავს სამიდან ათამდე ბგერას?

7. საჭადრაკო დაფაზე დარჩენილია ორი სხვადასხვა ფერის ეტლი, ისე, რომ თითოეულ მათგანს შეუძლია მეორეს აღება. რამდენი ასეთი განლაგება არსებობს (ერთ ეტლს შეუძლია მეორეს აღება, თუ ორივე საჭადრაკო დაფის ერთ ჰორიზონტალზე ან ერთ ვერტიკალზეა).

8. დომინოს ერთ ქვაზე ქულების უდიდესი რაოდენობა 12–ის ტოლია. რამდენი ქვა უნდა იყოს თამაშში, რომ ქულათა რაოდენობა 18–ს უდრიდეს?

0; 1; 3; 5; 7 ციფრებიდან რამდენი ისეთი ოთხნიშნა რიცხვის შედგენაა შესაძლებელი, რომელიც იყოფა 5–ზე (ციფრები არ მეორდება).

10 წიგნის თაროზე უნდა მოათავსოთ ოცდაათი ტომი. რამდენნაირად შეიძლება მათი ისე განლაგება, რომ პირველი და მეორე ტომი არ იყოს ერთმანეთის გვერდით?

11 ერთიმეორეს მიყოლებით განლაგებულ ათ აუდიტორიაში მეცადინეობს ათი ჯგუფი. სამეცადინო ცხრილის რამდენი ისეთი ვარიანტი შეიძლება არსებობდეს, რომლის მიხედვით პირველი და მეორე ჯგუფები აღმოჩნდებიან მეზობელ აუდიტორიებში?

12 8 ავტორმა უნდა დაწეროს 16 თავისგან შემდგარი წიგნი. რამდენნაირად შეიძლება მასალა განაწილდეს ავტორთა შორის, თუ ორი მათგანი დაწერს სამ–სამ თავს, ოთხი – ორ–ორ თავს, ხოლო ორი თითო თავს?

13 მორზეს ანბანის ასოები შედგება სიმბოლოებისგან (წერტილი და ტირე). რამდენი ასოს გამოსახვა შეიძლება, თუ შევთანხმდებით, რომ თითოეული ასო შეიცავს არაუმეტეს ხუთ სიმბოლოს?

14 რამდენნაირად შეიძლება შედგეს სამი ჯგუფი 18 ადამიანისგან ისე, რომ პირველ ჯგუფში 3 ადამიანი იყოს, მეორეში – 5 და მესამეში – 10?

15 ყუთში 10 ბურთულაა გადანომრილი 1–დან 10–მდე. თუ ყუთიდან შემთხვევით ამოვიღებთ ორ ბურთულას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ნომრების ჯამი იქნება ლუწი?

16 ყუთში ათი ქაღალდის ფირფიტაა, რომლებზეც შემდეგი ასოებია: „მ“, „ა“, „თ“, „ე“, „მ“, „ფ“, „ტ“, „ი“, „კ“, „ა“. ყუთიდან ვიღებთ ფირფიტებს უკან დაუბრუნებლად. რა არის ალბათობა იმისა, რომ პირველ ამოღებაზე ა) ამოვიღებთ ფირფიტას „მ“? ბ) არ ამოვიღებთ ფირფიტას „ტ“? რა არის ალბათობა იმისა, რომ ათივე ამოღების შემდეგ მივიღებთ სიტყვას „მათემატიკა“?

17 ბანქოს ორი დასტიდან (თითოეულში 52 ბანქოს ქაღალდია) შემთხვევით იღებენ თითო ბანქოს ქაღალდს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი მაინც იქნება „გულის ქალი“.

18 ურნაში 4 შავი და 5 თეთრი ბურთია. ურნიდან იღებენ ერთ ბურთს, ნახულობენ მის ფერს და აბრუნებენ უკან. ამის შემდეგ იღებენ მეორე ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:
ა) ორივე ბურთი თეთრია,
ბ) ორივე ბურთი შავია,
გ) ერთი შავია და მეორე თეთრი.

19 ლატარიის 200 ბილეთში 20 მომგებიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღებულ 50 ბილეთში ა) ერთი მაინც მომგებიანია, ბ) 5 მომგებიანია.

20 იპოვეთ $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{20}-1$ დაშლის იმ წევრის ნომერი, რომელიც შეიცავს x^7–ს.

21 იპოვეთ $8x$, თუ x–ის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც $(1+x)^{44}$–ის დაშლის მე–20 და 21–ე წევრები ერთმანეთის ტოლია.

22 $\left(2nx+\dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ ბინომის დაშლის ბინომური კოეფიციენტების ჯამია 64. განსაზღვრეთ წევრი, რომელიც არ შეიცავს x–ს.

23 რამდენი ოთხნიშნა ლუწი რიცხვი შეიძლება დავწეროთ ციფრებით: 2, 3, 5, 7, 8, თუ რიცხვში ციფრები:
ა) არ მეორდება; ბ) მეორდება.

24* რამდენი 4-ის ჯერადი ოთხნიშნა რიცხვის დაწერაა შესაძლებელი ციფრებით: 0, 2, 4, 3, 5, 9, თუ რიცხვში ციფრები:
ა) არ მეორდება; ბ) მეორდება.

შეამოწმე შენი ცოდნა:

1. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ოთხნიშნა რიცხვი შედგება კენტი ციფრებისაგან, არის:

ა) $\frac{5}{72}$; ბ) $\frac{6}{49}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{2}{3}$.

2. ურნაში ყრია ბურთები ციფრებით: 1, 2, 3, 4. ურნიდან შემთხვევით ვიღებთ ორ ბურთულას. ალბათობა იმისა, რომ ბურთულებზე დაწერილი ციფრების ჯამი იყოფა 5-ზე, არის:

ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{2}{5}$; დ) $\frac{1}{5}$.

3. ალბათობა იმისა, რომ 2 კამათლის გაგორებისას მოვა ორივე 5, არის:

ა) $\frac{5}{36}$; ბ) $\frac{1}{36}$; გ) $\frac{1}{5}$; დ) $\frac{1}{25}$.

4. კვადრატში ჩახაზულია წრეწირი. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული წერტილი ამ წრეში მოხვდება, არის:

ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{3}$; გ) $\frac{\pi}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$.

5. $P_5=$

ა) 25; ბ) 32; გ) 100; დ) 120.

6. $A_7^5=$

ა) 30; ბ) 35; გ) 42; დ) 45.

7. $C_{15}^{12}=$

ა) 100; ბ) 200; გ) 210; დ) 220.

8. ალბათობა იმისა, რომ ორი მონეტის აგდებისას ორივეზე მოვა გერბი, არის:

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{3}{8}$; დ) $\frac{2}{3}$.

9. ყუთში 15 ბურთულაა, მათგან 8 წითელია. ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული სამივე ბურთულა წითელია, არის:

ა) $\frac{C_8^3}{C_{15}^3}$; ბ) A_{15}^3; გ) C_{15}^8; დ) .

VII თავში შესწავლილი მასალის მოკლე მიმოხილვა

- სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების **გადანაცვლება** ეწოდება.

$$P_n=n!(1)$$

- n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ($m \le n$) ეწოდება **წყობა n ელემენტისგან m-ად.**

- n-ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან ქვესიმრავლეს n ელემენტიდან m-ელემენტიანი **ჯუფთება** ეწოდება.

  n-ელემენტიდან m-ელემენტიან ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება C_n^m–ით (იკითხება „ცე ენიდან ემად“).

$$C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

$C_n^m=C_n^{n-m}$

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots C_n^n=2^n$

- $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$ (1)

- n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებისგან შედგენილ m ელემენტიან დალაგებულ სიმრავლეს, რომელშიც შესაძლებელია მეორდებოდეს ერთი და იგივე ელემენტები, ეწოდება **n ელემენტიდან m ელემენტიანი წყობა განმეორებით**. ასეთ წყობათა რიცხვი $\overline{A_n^m}$ –ით აღინიშნება.

$$\overline{A_n^m}=n^m.$$

- ინტერვალს, რომელშიც მონაცემთა ყველაზე დიდი რაოდენობაა, **მოდალური ინტერვალი** ეწოდება.

- **მოდას** კი უწოდებენ მოდალური ინტერვალის შუა წერტილს.

პასუხები:

I თავი

1 (I). 1. ა) (–1;0); ბ) (0;–1); გ) (0;1); დ) (1;0); ე) (0;–1). **2.** ა) $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ბ) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; გ) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ დ) (–1;0); ე) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; ვ) (0;–1); ზ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; თ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; ი) $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; კ) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ლ) (–1;0); მ) (0;–1). **3.** ა) –30° და 30°; ბ) 240°; გ) 480°; დ) –150°. **4.** ა) $-\sqrt{2}$; ბ) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$; გ) $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$; დ) $\frac{-19+3\sqrt{3}}{6}$. **5.** ა) კენტი; ბ) ლუწი; გ) ლუწი; დ) კენტი. **6.** ა) 2π; ბ) π; გ) 2π; დ) π; ე) $\frac{2\pi}{3}$; ვ) π; ზ) $\frac{\pi}{2}$; თ) 4π. **7.** ა) 5 წთ; ბ) 25 წთ; გ) (2k–15) წთ. **8.** ა) 2 წთ; ბ) 10 წთ; გ) (8k–6) წთ. **10.** (1;2); (1;0); (2;1); (0;1). **11.** $\pm\sqrt{6}$. **12.** 8.

II. 1. ა) $\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{31}{12}$. **2.** ა) $\frac{21}{2(3\sqrt{3}+2)}$; ბ) 0. **4.** ა) [–5;5]; ბ) [–3;–1]; გ) R; დ) [0;∞); ე) R; ვ) [0;∞). **5.** ა) $-\frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; ბ) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; გ) $\pi n,\ n\in Z$; დ) $2\pi n,\ n\in Z$; ე) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; ვ) $\pi n,\ n\in Z$. **8.** –8.

2. 1. ა) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $tg\alpha=\frac{3}{4}$; $ctg\alpha=\frac{4}{3}$; ბ) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$; $tg\alpha=\frac{3}{\sqrt{7}}$; $ctg\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$; გ) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}$; $tg\alpha=-\sqrt{8}$; $ctg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{8}}$; დ) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha=\sqrt{15}$; $ctg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{15}}$; ე) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$; $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $ctg\alpha=\sqrt{3}$; ვ) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$; $ctg\alpha=-3$; ზ) $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $tg\alpha=2$; თ) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $tg\alpha=-\frac{1}{3}$. **2.** ა) არა; ბ) კი; გ) არა; დ) კი. **4.** ა) $\frac{1}{13}$; ბ) $\frac{4}{15}$; გ) 1; დ) –3. **5.** $-\frac{3}{\sqrt{13}}$. **6.** $-\sqrt{15}$. **7.** $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ $tg\alpha=\frac{1}{3}$. **8.** ა) $\frac{10}{9}$; ბ) $-\frac{11}{16}$; გ) $\frac{33}{32}$; დ) 7. **9.** ა) [1;2]; ბ) [–5;4]; გ) [–5;–3]; დ) [–3;2]. **10.** ა) ზრდადია; ბ) კლებადია; გ) ზრდადია, როცა n>2. **11.** 164850; **12.** $-\frac{5}{4}$.

3. 1. არა. **2.** არა. **3.** ა) $\frac{3}{8}$; ბ) $\frac{11}{16}$. **4.** ა) 1; ბ) 2; გ) $\sin^2\alpha$; დ) 1; ე) $\cos^2\alpha$; ვ) $-\sin^2\alpha$. **6.** ა) $-\frac{10}{3}$; ბ) $\frac{25}{8}$. **7.** ა) $\sqrt{2-a^2}$ ან $-\sqrt{2-m^2}$; ბ) $\frac{5-2m^2}{2}$; გ) $\frac{2}{m^2-1}$. **8.** ა) $2\sin\alpha\cos\alpha$; ბ) 1; გ) $2tg\alpha$; დ) $-\frac{2}{\sin\alpha}$. **10.** 156. **11.** ა) $a\in R\setminus\{0;2\}$; ბ) 2; გ) 0. **16.** (2;3).

4. 2. ა) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; გ) $\sqrt{3}+2$; დ) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; ე) $2-\sqrt{3}$; ვ) $-2-\sqrt{3}$. **3.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; ე) 1; ვ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** ა) $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$; ბ) $-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$; გ) $-\frac{1}{7}$; დ) $-\frac{49}{31}$. **5.** ა) 0; ბ) $\cos\alpha$. **6.** ა) 1; ბ) 0,5; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$. **7.** ა) 1; ბ) 0; გ) 1; დ) 0. **10.** ა) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; ბ) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; გ) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; დ) $2\pi+4\pi n,\ n\in Z$. **11.** ა) $\frac{77}{85}$; $-\frac{13}{85}$; ბ) $\frac{16}{65}$; გ) $-\frac{77}{36}$. **12.** ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **14.** 135°; **15.** ერთი.

5. 2. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $\frac{1}{4}$; დ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; ე) $\frac{1}{2}$; ვ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ზ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; თ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ი) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$. **3.** ა) –0,96; ბ) $\frac{161}{289}$; გ) $\frac{120}{169}$ დ) $-\frac{120}{119}$. **4.** ა) 1; ბ) 1; გ) 0; დ) 1. **5.** ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{8}$. **6.** ა) 1; ბ) cos2α; გ) tgα; დ) 2cosα. **7.** ა) 2; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $8+4\sqrt{3}$; დ) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **8.** ა) $-\sqrt{0,1}$; $-\sqrt{0,9}$; $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; $-\frac{2}{\sqrt{13}}$; $-\frac{3}{2}$; გ) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; $-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $-\frac{3}{2}$. **13.** ა) $\frac{24}{25}$; ბ) b^2-1; გ) $-\frac{7}{25}$. **14.** ა) 12 სმ. **15.** $\frac{15}{11}$ სმ. **16 .** $7\sqrt{7}$ სმ.

6. 5. ა) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; ბ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; გ) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; დ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **6.** ა) 1; ბ) 2; გ) -ctgα; დ) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **7.** ა) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; ბ) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; გ) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; დ) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, k∈Z. **12.** ა) 30°; ბ) 60°; გ) 90°. **13.** 12. **14.** 0; –2.

7. 5. ა) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, k∈Z; ბ) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $2\pi k$, k∈Z; გ) πk; $\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$; k∈Z; დ) $\frac{1}{2}\left((-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+1+\pi k\right)$; $\frac{1}{2}\left((-1)^{k}\arcsin\frac{1}{4}+1+\pi k\right)$, k∈Z; ე) ∅. **6.** ა) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, k∈Z; ბ) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; გ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; დ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; ე) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; ვ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z. **7.** ა) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ და $2\pi k$, k∈Z; ბ) $\pi+2\pi k$ და $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, k∈Z; გ) $\pi+4\pi k$, k∈Z; დ) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ და $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, k∈Z; ე) $\frac{\pi}{6}$, k∈Z; ვ) $\frac{\pi}{6}$, k∈Z. **8.** ა) πk და $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; ბ) $\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)+\frac{\pi k}{2}$, k∈Z; გ) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ და $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k∈Z; დ) πk; $\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈Z. **9.** ა) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ და arctg3+ πk, k∈Z; ბ) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ და $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$, k∈Z; გ) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, k∈Z და $\mathrm{arctg}\frac{7}{2}+\pi k$, k∈Z. **10.** ა) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ და $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, k∈Z; ბ) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈Z; გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈Z; დ) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$, k∈Z. **11.** ა) $-\frac{\pi}{12}$ და $\frac{\pi}{12}$; ბ) $-\frac{\pi}{3}$ და $\frac{\pi}{3}$; გ) $-\pi+\arccos\frac{1}{4}$ და $\pi-\arccos\frac{1}{4}$; დ) arctg(–1); arctg(–2). **12.** ა) $\frac{7\pi}{4}$; 2π–arctg2; ბ) 0; გ) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **14.** ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, k∈Z. **15.** $2\sqrt{34}$. **16.** 2 სმ. **17.** ა) 10; ბ) 12; გ) 2; დ) 2.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები: 2. ა) I; ბ) II; გ) III; დ) III; ე) II; ვ) IV; ზ) I. **3.** ა) დადებითი; ბ) დადებითი; გ) უარყოფითი; დ) უარყოფითი. **4.** $\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$. **5.** ა) $\sin\alpha=-\frac{40}{41}$; $tg\alpha=-\frac{40}{9}$; ბ) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$; $tg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{15}}$; გ) cosα=–0,8; $tg\alpha=-\frac{3}{4}$; დ) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; **7.** ა) b^2+2; ბ) b^3+3b; **9.** ა) ზრდადია; ბ) კლებადია; გ) კლებადია. **11.** ა) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$; $tg\alpha=-\frac{5}{12}$; $ctg\alpha=-\frac{12}{5}$; ბ) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$; $tg\alpha=\frac{12}{5}$; $ctg\alpha=\frac{5}{12}$; გ) $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$; $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$; $ctg\alpha=-\frac{24}{7}$; დ) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$; $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$; $tg\alpha=-\frac{5}{12}$. **12.** ა) 1; ბ) 4; გ) $\frac{1}{16}$; დ) $\frac{1}{64}$; ე) 2; ვ) 1; ზ) 2; თ) –1. **13.** ა) $-\frac{20}{\sqrt{5}}$; ბ) $-\frac{24}{7}$. **14.** ა) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, k∈Z; ბ) $\frac{\pi}{2}k$, k∈Z; გ) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, k∈Z. **15.** ა) $1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}$; ბ) $1-\frac{3\sin^2 2\alpha}{4}$. **17.** ა) $-\frac{1}{8}$. **18.** ა) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; ბ) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k∈Z; გ) πk, k∈Z; დ) ∅. **19.** ა) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) 1; დ) –1. **20.** ა) 2πk; π+4πk, k∈Z; ბ) π+2πk; 4πk, k∈Z; გ) 2π+4πk, 4π+8πk k∈Z; დ) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$; $\frac{\pi}{2}$, k∈Z; ე) $\frac{\pi}{2}+\pi k$;, k∈Z; ვ) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, k∈Z. **24.** ა) $\frac{7}{9}$; ბ) a^2-2. **26.** ოთხი.

II თავი

1. 4. არ შეიძლება. **12.** ა) 29 სმ; ბ) $5\sqrt{6}$ მ. **13.** 6 სმ; 14 სმ; 16 სმ. **14.** 124 დმ². **15.** 188სმ². **16.** 13სმ; 9 სმ.

2. 1. 1,5 სმ. **4.** 63 სმ. **6.** 26 სმ. **7.** 37,5 სმ. **9.** 7 სმ.; 5 სმ. **10.** $a\sqrt{2}$; 2a. **11.** $2\sqrt{3}$ მ; 4 მ. **12.** $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ სმ.

3. 1. 10 სმ. **2.** 18 სმ; $3\sqrt{15}$ სმ². **3.** 4,5 მ; 6,75 მ; 9 მ. **5.** 23 სმ². **11.** $\sqrt{689}$; 200. **12.** 40 სმ; 9 სმ. **13.** $120\sqrt{2}$ **14.** ა) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3ab$; ბ) 2a²+4ab; გ) $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}+6ab$.

4. 3. 66 სმ. **4.** ბ) 4:9. **5.** 6 სმ².

შეამოწმე შენი ცოდნა: **1.** გ; **2.** ა; **3.** დ; **4.** დ; **5.** გ; **6.** დ; **7.** ბ; **8.** დ.

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **5.** 48 სმ; **6.** $\frac{25}{3}$; **7.** 9 სმ; **13.** 50 სმ.

III თავი

1. 2. ა) $x^{\sqrt{2}-1}$; ბ) $x^{4\sqrt{5}}$; გ) $a^2b^{\sqrt{3}}$; დ) $a^{3\sqrt{3}}$; ე) x^3; ვ) $\left(\frac{ab}{c}\right)^{\sqrt{2}}$; ზ) x^8; თ) $(ab)^{3\sqrt{3}-3}$; ი) x. **6.** ა) 8; ბ) 1; გ) 0; დ) 0. **7.** ბ) a^{-2}; გ) $a^{\frac{2}{3}}$; დ) 1. **9.** ა) 256; ბ) 64; 729; გ) 5^5; დ) 64. **12.** (–8;–8); (6;6); (–8;8); (6;–6); **13.** 12,5.

2. 7. ა) m<n; ბ) m<n; გ) m>2; დ) m>n; ე) m<n; ვ) m<n. **9.** ა) x<0; ბ) x<0; გ) 0<x<1; დ) o<x<1; ე) x<0; ვ) o<x<1. **14.** $y=2^x+1$; $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+3$. **16.** ა) a>3; ბ) a>0; გ) a>5; დ) $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **17.** ა) (–1;0; ბ) (2;3); გ) $\left(0;\frac{2}{3}\right)$; დ) (0;∞). **18.** ა) (0;∞); ბ) (–7;∞); გ) (3;∞); დ) (0;∞). **19.** ა) ორი; ბ) ერთი; გ) არც ერთი. **20.** ა) $5\cdot5^{x-1}$; ბ) $18\cdot3^{x-1}$; გ) $8\cdot2^{x-1}$; დ) $3^6\cdot3^{x-1}$. **22.** ა) 0; ბ) –2; გ) –1; დ) x∈(0;∞). **23.** ა) $a=\frac{1}{4}$; b=6; ბ) a=1,2; b=1,5; გ) $a=\frac{1}{5}$; b=5; დ) $a=\frac{1}{2}$; b=768; ე) $a=\sqrt{\frac{3}{5}}$; $b=\frac{25}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$ ვ) a=2; $b=\frac{1}{2}$. **28.** ა) 4; ბ) $\frac{1}{4}$. **29.** 27. **30.** ა) ; გ) ; დ) .

3. 2. ა) 2; ბ) 4; გ) 3; დ) 5; ე) 3; ვ) 1; ზ) 0; თ) 3; ი) 7; კ) $-\frac{1}{2}$; ლ) 3; მ) $-\frac{3}{2}$; ნ) –2; ო) –2; პ) $\frac{1}{2}$. **3.** ა) 4; ბ) 3; გ) $\frac{1}{3}$; დ) $\sqrt{7}$; ე) $\sqrt{3}$; ვ) $\sqrt[3]{5}$; ზ) $\sqrt[4]{5}$; თ) $\sqrt[12]{7}$. **4.** ა) 32; ბ) 625; გ) 125; დ) $\frac{1}{100}$. **5.** ა) 9; ბ) 10; გ) 4. **7.** ა) $\log_2 3$; ბ) $\log_5 \frac{1}{2}$; გ) ∅; დ) ∅; ე) $\log_3 2$; ვ) 5; ზ) 3; თ) 3. **8.** ა) (5;∞); ბ) (–∞;1)∪(2;∞); გ) ∅; დ) R; ე) $\left(\frac{7}{5};\infty\right)$; ვ) (–∞;–4)∪(2;∞); ზ) (–∞;–2)∪(1;∞); თ) (–∞;0)∪(1;∞). **10.** ა) (–3;0); ბ) (–1;∞); გ) (1;2); დ) (7;8). **11.** 7. **12.** $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{25}$ **13.** ა) ±10; ბ) ±4.

4. 2. ა) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{6}$; ბ) 10; გ) $(a-b)\cdot b\sqrt[3]{a^2}$. **4.** ა) 9; ბ) ; დ) $\frac{5}{6}$; ე) –1; ვ) $\frac{1}{2}$; ზ) –4. **5.** ა) 2; ბ) 3; გ) 1; დ) 3; ე) 1; ვ) 2; ზ) $-\frac{2}{3}$; თ) –1; ი) –2. **6.** ა) 10; ბ) 1; გ) . **7.** ა) $\frac{5}{2(b-1)}$; ბ) $\frac{4}{a+2b}$; გ) $\frac{4-2a}{a}$; დ) $\frac{6}{a+2b)}$. **8.** 4. **12.** ა) 3; ბ) 2; დ) 2; ე) 0. **15.** a∈(–6;3) **16.** $\pm\sqrt{\frac{27}{8}}$. **17.** $\frac{b^2-8c}{16a^2}\cdot\pi$. **18.** 7500ლ; 2500ლ. **19.** 0; –10,5. **20.** (0;3).

5. 5. ა) $a=-3$; $b=3$; ბ) $a=-5$; $b=-6$. **6.** $(7;2)$. **7.** $(0;2)$. **8.** ა) 6; ბ) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; გ) $2\sqrt{3}$. **9.** ა) $(7;3)$; ბ) $\left(\frac{10}{3};6\right)$; გ) $\varnothing$; დ) $(-21;5)$. **11.** $\left(0;\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$ **12.** $a=2$; $b=1$.

6. 1. ა) $(1;\infty)$; ბ) $\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$; გ) $(-\infty;0)$; დ) $R\setminus\{0\}$; ე) $(-3;4)$; ვ) R. **2.** ა) 1; ბ) 1; გ) 0; დ) -2; ე) 2; ვ) 0. **10.** ა) $y=\log_{10}x$; ბ) $y=\log_2 x$; გ) $y=\log_8 x$; დ) $y=\log_{25}x$. **11.** ა) $(1;\infty)$; ბ) $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$; გ) $(-\infty;1)$; დ) $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$; ე) $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$; ვ) $(-4;7)$. **12.** $f(x)=-\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$; $x=-\frac{1}{27}$; 243. **13.** $m>n$. **14.** $\sqrt{5}$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{26}$. **15.** ა) $9x-3$; ბ) $3x^2+2$; გ) x^4+2x^2+2; დ) $9x^2-6x$. **16.** 19.

7. (I) 1. 18 წელი. **2.** 5 წელი. **3.** 7. **4.** ≈5,2სთ. **6.** ა) $\frac{5}{3}$; ბ) -5; გ) -1; დ) 8; ე) $-0{,}3$; ვ) 0; -4; 5; ზ) $-0{,}6$; თ) $\frac{1}{4}$; ი) 0; კ) 0; ლ) $-\frac{1}{4}$; მ) lg50. **7.** ა) ≈2,7; ბ) ≈0,6; გ) ≈0,3; დ) ≈–0,518; ე) ≈2,3; ვ) ≈4,16; ზ) ≈0,418; თ) ≈–1,6. **8.** ა) 1; $\frac{1}{2}$; ბ) 1; გ) $\varnothing$; დ) $-1{,}2$; ე) -3; -2; ვ) 1. **9.** ა) 0; ბ) 2; გ) 2; დ) 1; ე) 1; ვ) 2. **10.** ა) 2; ბ) -2; გ) 2; -2; დ) 2; 1; ე) -1; ვ) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **11.** $p=\frac{25}{4}$ ან $p\le 0$. **12.** 0; -10. **13.** $-\frac{22}{3}$; 2. **15.** სამი. **16.** 31.

(II) 1. ა) 2; ბ) 1; გ) 27; დ) $\frac{1}{4}$; ე) 3; ვ) 10^{10}; ზ) 4; თ) 3^{27}. **2.** ა) 1; ბ) 34; გ) -2; 5; დ) 4; ე) 1; 4; ვ) 2^{100}. **3.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; გ) $\frac{8}{249}$; დ) 9; ე) 1; 4; ვ) 0,4; ზ) 1; თ) 2; 6. **4.** ა) 5^3; 5^{-3}; ბ) $\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; გ) 10^3; 10^{-2}; დ) 1; $\frac{1}{8}$; ე) 2; 11; ვ) 20; 516. **5.** ა) 3; -1; ბ) -10; გ) 16; დ) -2; -32; ე) 10; $\sqrt{10^{-9}}$; ვ) -10. **7.** ა) $\left(0;\frac{25}{4}\right)$; ბ) $\frac{25}{4}$. **8.** ა) $\left(\frac{1}{3};3\right)$; $\left(3;\frac{1}{3}\right)$; ბ) $(2;32)$; $(32;2)$; გ) $(512;1)$; დ) $(4{,}5;0{,}5)$; ე) $(4;2)$; ვ) $(4;16)$. **9.** ა) $(1;0)$; ბ) $(0;0)$; გ) $(0;-3)$; $\left(-\frac{124}{125};0\right)$; დ) $(0;\log_2 6)$; $(-5;0)$; ე) $(10;0)$. **10.** ა) $(0;2)$; ბ) $(2;\log_3 5)$; გ) $(-4;2)$; $(3;-1)$. **11.** ა) 4; ბ) 2. **12.** $\left(3;\frac{15}{4}\right)$. **13.** 5.

8 (I). 1. ა) $(-4;\infty)$; ბ) $(-\infty;-1)$; გ) $[-3;\infty)$; დ) $\left(-4;\frac{7}{4}\right)$; ე) $(-\infty;-8)\cup(4;\infty)$; ვ) $(-12;\infty)$; ზ) $(-\infty;-1)$; თ) $(5;\infty)$; ი) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. **2.** ა) $(3;\infty)$; ბ) $(3;\infty)$; გ) $(-\infty;-2)$; დ) $(-\infty;0)$; ე) $(0;1)$; ვ) $\left(\frac{3}{5};1\right)$; ზ) $(-\infty;-2)\cup(0;1)$; თ) $(-\infty;-2)\cup\left(\log_2\frac{4}{3};\infty\right)$; ი) $(0;2-\log_2 3)\cup(1;\infty)$. **3.** ა) $(2;\infty)$; ბ) $[3;\infty)$; გ) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$; დ) $[-2;\infty)$; ე) $\left[\frac{2}{3};\infty\right)$; ვ) $(6;\infty)$. **4.** ა) $(-\infty;0)$; ბ) $(-\infty;1)$; გ) $(-1;5)$; დ) $[-1;\infty)$; ე) $\left(\frac{4}{3};3\right)$; ვ) $(3;7)$. **5.** ა) $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}3\right]$; ბ) $\left(-\infty;\log_{0,4}2\right]$; გ) $\left(\log_{\frac{4}{3}}0{,}9;\infty\right]$; დ) $[-1;\infty)$. **6.** ა) $a\neq 0$; ბ) $(0;\infty)$. **7.** ა) $\left[\frac{2}{3};6\right]$; ბ) $[-2;4]$. **15.** ა) $\frac{1}{50}$; ბ) $\frac{9}{100}$; გ) $\frac{2}{25}$; დ) $\frac{11}{100}$.

(II) 2. ა) $(2;\infty)$; ბ) $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; გ) $(0;3)$; დ) $(-\infty;1{,}84$; ე) $\varnothing$; ვ) $\left(-5;-\frac{2}{3}\right)$; ზ) $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$; თ) $(2;4)$; ი) $\left(\frac{5}{2};\infty\right)$; კ) $(2;3)$; ლ) $\left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$; მ) $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2};\frac{-3+3\sqrt{29}}{2}\right)$. **3.** ა) $(0;0{,}1)\cup(100;\infty)$; ბ) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; გ) $\left(\frac{1}{16};16\right)$; დ) $\left(1;\frac{1}{39}\right)$; ე) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; ვ) $(-1;0)$; ზ) $(-5;\infty)$; თ) $(-2;2)$. **5.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.
6. ა) $(0;1)\cup(1;\infty)$; ბ) $(0;1)$. **7.** ა) $(1;2)$; ბ) $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$. **8.** ა) 3; ბ) lg2.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები: 1. ა) 5; გ) $\frac{1}{11}$. **2.** ბ) $x^{4\sqrt{2}}$; გ) $(a^2-b^2)^{\sqrt{5}-1}$; დ) 2. **3.** ა) $z^{\frac{1}{p-3}}$; ბ) $4x^{2\sqrt{2}}$. **6.** ა) ერთი; ბ) ორი; გ) ორი. **7.** ა) 5; ბ) 1. **8.** ა) 9; ბ) 3; გ) 4; დ) 3; ე) 1. **9.** ა)

6; ბ) $\frac{13}{4}$; გ) 0; დ) 0. **10.** ა) ∅; ბ) ერთი; გ) ერთი. **11.** ოთხი. **12.** (0;25). **13.** (–∞;–1)∪(3;∞). **14.** ა) 9; ბ) 4; გ) 3; დ) 6; ე) 2; ვ) 1,5; ზ) 2; თ) 2. **15.** ა) –0,5; 3; ბ) ∅; გ) 0; –10. **16.** ა) 10; $\frac{1}{10}$; ბ) $\log_3 10$; გ) $\log_3 28-3$; გ) 5^4; დ) 3. **17.** ა) (3;4)∪(4;∞); ბ) (–5;8)∪(8;9); გ) (4;5,5)∪(5,5;∞); დ) (–∞;–3); ე) R\{0}. **18.** ა) 4; ბ) 2; გ) $\frac{3}{5}$; დ) 5. **19.** ა) $-2\frac{2}{3}$; ბ) 1; 1000; 0,01; გ) $-3\pm\sqrt{10}$; დ) –11; 1. **26.** ა) $[-1;1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$; 3); ბ) (2;9); გ) [–4;–3)∪(0;1]; დ) $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$; ე) (–∞;–2,5)∪(0;∞); ვ) $(-1-\sqrt{2};2)\cup(0;\sqrt{2}-1)$. **27.** ა) (–1;7); ბ) (–∞;–2,5)∪(4;∞); გ) (2;∞); დ) $(1-\sqrt{5};-1)\cup(3;1+\sqrt{5})$; ე) $\left(-\infty;1-\log_3 3\sqrt{5}\right]$; ზ) (–∞;–1)∪(2;∞).

IV თავი

1. **4.** BM=$\frac{mb}{a+b}$; AM=$\frac{am}{a+b}$. **10.** $27\sqrt{13}$. **11.** 273 სმ² და 175 სმ². **12.** ა) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; ბ) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; გ) $\sqrt{b^2-a^2}$. **13.** $\sqrt{89,5}$.

2. **1.** ა) 50°; ბ) 20°; გ) 90°. **3.** ბ) 90°30'. **6.** 5 სმ და 6 სმ. **7.** ა) $\sqrt{h^2-\frac{a^2}{6}}$; ბ) $\sqrt{h^2-\frac{a^2}{4}}$; გ) $\sqrt{h^2-\frac{3a^2}{4}}$. **8.** 14 სმ². **9.** $\frac{Q}{4}$.

3. **3.** $\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}$. **4.** 13 სმ. **5.** 32 სმ; 20 სმ. **6.** 18 სმ.

4. **2.** 17 სმ; **5.** a) $\sqrt{97}$; $\sqrt{97}$; 13 სმ; ბ) $\sqrt{61}$. **8.** 5 და 7. **9.** 30 დმ² და 20 დმ². **10.** 4,5 სმ. **11.** ა) 4; ბ) 18.

5. **2.** 12 სმ. **3.** 12 სმ. **5.** 1 მ; 2 მ და 3 მ. **7.** 25 მ²; 100 მ² და 225 მ². **8.** 245 სმ². **9.** 6 მ. **10.** 35 სმ.

6. **1.** 7. **2.** 25 სმ, ან 39 სმ. 3. . **4.** 3 სმ. **5.** 14 სმ. **6.** 2 სმ. **7.** 16,25. **8.** ა) $\frac{1}{3}h$; ბ) $\frac{1}{5}h$. **9.** ა) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$+3ah; ბ) a^2+2ah; გ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$+3ah.

7. **1.** ა) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; ბ) $\frac{a}{2}$; გ) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **2.** 14. **3.** $3,5\sqrt{5}$. **4.** 25. **5.** 36π. **8.** $\frac{3d}{4}$; $\frac{d}{2}$ და $\frac{\sqrt{3}}{4}d$. **9.** 45°. **10.** 10 სმ. **11.** 48. **12.** $\sqrt{3}$. **13.** 21. **14.** $\frac{p}{\sqrt{4h^2-a^2}}$. **15.** 4. **16.** 288 სმ².

8. **1.** 45°. **2.** 0,2. **3.** 34,4. **4.** 30°. **5.** $a\sqrt{2}$. **6.** 26 სმ. **7.** ა) 2a; ბ) 2a. **8.** $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ სმ². **9.** 81 სმ². **10.** 27. **11.** 84. **12.** $3\sqrt{6}$. **13.** 16,5 სმ. **15.** $\sqrt{2}$. **16.** 3 a^2.

9. **1.** 1,3 მ. **2.** 1,7 მ. **3.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **4.** ა) 11 მ; ბ) 13 მ; გ) 8 მ; დ) 7 მ; ე) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; ვ) $\sqrt{m^2+n^2-p^2}$. **5.** 5. **6.** $\frac{12\sqrt{2}}{5}$. **10.** 26 მ².

IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **1.** არ შეიძლება. **2.** მართკუთხა. **4.** 4 მ. **5.** 30 სმ. **6.** 3 სმ. **8.** . **9.** ა) ; ბ) 3 სმ. **10.** 3ა. **11.** 7. **12.** . **13.** 30°. **14.** . **15.** 117 სმ. **16.** 20 სმ. **17.** . **19.** . **20.** ა. **21.** ა) 9 სმ; ბ) 3 სმ; გ) 8 სმ; დ) . **22.** 6,5 სმ. **23.** . **24.** 12 მ; 18 მ. **25.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **26.** 3,36 მ. **27.** 8. **28.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha}$. **29.** $\sqrt{325}$. **30.** $3\sqrt{3}$ სმ². გ) 498 სმ². **32.** 30 მ, 25 მ და 24 მ. **33.** ah და $\frac{a}{2}\sqrt{12h^2+3a^2}$. **34.** $\frac{1}{4}a\sqrt{36^2-a^2}$. **36.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. **38.** 3a². **39.** $10^2\sin18°$ $\sqrt{2(1+\sin18°)}$.

შეამოწმე შენი ცოდნა: **1.** ა; **2.** გ; **3.** ბ; **4.** გ; **5.** გ; **6.** დ; **7.** გ; **8.** ა; **9.** დ.

V თავი

1. 1. ა) 5; 8 და 32; ბ) 6; 9 და 105; გ) 4; 1 და 49; დ) –2; 4 და 1024; ე) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; ვ) –1; 0 და 512; ზ) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{10}}{210}$; თ) 1; 0; 0; ი) $\log_3 2$; $\log_4 3$; $\log_{12} 11$. **2.** ა) 11; ბ) 9; გ) 6; დ) 9; ე) 14; ვ) 5. **3.** n=5. **4.** $p=\frac{1}{2}$; $q=5\frac{1}{2}$. **5.** ა) 3; 6; 12 და 24; ბ) –5; 5; –5 და 5; გ) 2; 3; 8 და 63; დ) 3; 5; 13 და 31. **6.** ა) $a_{n+1}=-a_n$ და $a_1=1$; ბ) $a_{n+1}=2a_n+1$ და $a_1=3$; გ) $a_{n+1}=a_n^2+1$ და $a_1=0$; დ) $a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2}$ და $a_1=26$; ე) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $a_1=1$; $a_2=1$; ვ) $a_{n+1}=2a_n+2(-1)^{n+1}$ და $a_1=4$. **7.** ა) $a_{n+1}=a_n+1$ და $a_1=3$; ბ) $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}$ და $a_1=1$; გ) $a_{n+1}=a_n+2n+1$ და $a_1=1$; დ) $a_{n+1}=a_n-(-1)^k(2n+1)$ და $a_1=-1$. **9.** ა) ოთხი; ბ) სამი; გ) ერთი; დ) ყველა. **11.** $(2;+\infty)$. **12.** 14.

2. 1. ა) $S_n=n^2$; ბ) $S_n=(-1)^n$; გ) $S_n=\frac{n}{2n+1}$; დ) $S_n=\frac{n}{3n+1}$. **9.** $\frac{2}{84}(10^{n+1}-9n-10)$. **10.** $\sqrt[512]{a^{511}}$. **11.** $\frac{6}{7}$ კგ. **12.** $h^2\sqrt{3}$. **13.** 185. **14.** 25%.

3. 3. ა) 0; ბ) 3; გ) 0; დ) 0. **4.** ა) 2; ბ) 3; გ) 0; დ) 0. **5.** ა) [0;1]; ბ) არ არსებობს; გ) არ არსებობს; დ) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$; ე) [2;9]; ვ) არ არსებობს. **6.** $a\in\left(-\infty;\log_2\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\log_2\frac{2+\sqrt{3}}{2}-1;\infty\right)$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** 10 სმ.

4. 1. ა) განშლადია; ბ) განშლადია; დ) კრებადია. **3.** ა) $\frac{3}{2}$; ბ) $\frac{4}{3}$; გ) $\frac{5}{3}$; დ) $\frac{4}{3}$; ე) 6; ვ) $\frac{1}{6}$. **6.** ა) $\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{2}$; გ) 1; დ) $\frac{1}{6}$. **7.** ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **10.** $y=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$. **12.** 50 სმ. **13.** 1:4. **14.** თამუნამ, 8%-ით.

5. 1. $4a(2+\sqrt{2})$; $2a^2$. **3.** $b_1=6$; $q=\frac{1}{2}$). **4.** ა) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$. ბ) $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{9}$. **5.** $\frac{1}{5}$. **6.** $\frac{3}{16}$; $\frac{1}{4}$. **7.** 2a. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{3}{19}$; $\frac{17}{19}$. **10.** 724. **12.** 13 და 63. **13.** Rz. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** ა) $-\frac{1}{3}$; ბ) 100; გ) $\frac{1}{4}$; დ) 1; ე) $\frac{1}{2}$; ვ) 1; ზ) $\frac{1}{5}$.

V თავის დამატებითი სავარჯიშოები: 1. ა) 5; 20; 3k+2; 3k+5; ბ) –1; –1; $(-1)^{k+1}$; $(-1)^{k+2}$; გ) 2; 14; k^2-2k+3; k^2+2. **2.** ა) 6; ბ) არ არსებობს; გ) 2; 3. **3.** ა) 2; 3; 4; 5; ბ) 4; 5; 6; ...; გ) 1; 2; 3. **4.** ა) უდიდესი $x^2=9$; ბ) უდიდესი $x_1=10$; გ) უმცირესი $x_1=0$; დ) უდიდესი $x_3=6$. **5.** ა) ზრდადია; ბ) კლებადია; გ) არც ზრდადია, არც კლებადი; დ) კლებადია. **6.** 3. **9.** ა) 76; ბ) 380. **11.** ა) $120000\cdot0{,}85^n$; ბ) 887411; გ) 9,9. **13.** ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{5}{4}$; გ) $\frac{1}{3}$; დ) $\frac{1}{5}$. **14.** ა) 0; ბ) 1; გ) 3; დ) 5; ე) $\sqrt[3]{2}$; ვ) 2. **15.** ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$. **16.** ა) 8; ბ) $\frac{3}{4}$; გ) 10; დ) 4. **17.** ა) 2; ბ) 0; გ) 8; დ) 1. **18.** 40 მ.

VI თავი

1. **1.** $\overrightarrow{AB}(-2;1)$; $\overrightarrow{BC}(1;-2)$; $\overrightarrow{AC}(-1;-1)$. **2.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$. **4.** $\overrightarrow{OM}(4,5;0)$. **6.** ა) მართკუთხედი; ბ) რომბი; გ) პარალელოგრამი. **7.** ა) $Q(-3;\ -1)$; ბ) $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$. **8.** $D(-2;0)$. **9.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

2. **1.** $D(2;\ 1;\ -2)$. **3.** $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{(3;7)}$; $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{(-1;-1)}$; **4.** 4. **8.** არ არის საკმარისი. **9.** $(3,5;\ -3)$. **10.** $f(x)=x^2-4x+3$.

3. **3.** $\sqrt{64,84}$. **4.** $\vec{d}$. **6.** ა) $n=\frac{4}{3}$; $m=\frac{9}{2}$; ბ) $m=-2$; $n=-2,5$. **7.** ა) 4; 7; ბ) 1; 4; გ) 1; 2,5. **8.** $\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup(1;8]$.

4. **1.** ა) მართია; ბ) მახვილია; გ) ბლაგვია. **2.** m; n; p. **3.** 7. **4.** 1. **5.** 29. **6.** ა) 90°; ბ) $\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}$. **7.** 90°.

5. **2.** ა) მართკუთხედი; 5 სმ და 8 სმ გვერდებით; ბ) წრე, რადიუსით — 4 სმ; გ) მართკუთხედი, $4\sqrt{3}$ სმ და 8 სმ გვერდებით. **3.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ სმ. **4.** $\frac{2S}{R\sqrt{3}}$. **5.** $\sqrt{13}$ მ. **6.** 4π სმ². **7.** 36 სმ². **8.** 90°. **9.** ა) კი; ბ) არა.

6. **1.** ა) ტოლფერდა სამკუთხედი; ბ) წრე. **3.** 5 სმ. **4.** $2\sqrt{3}$ სმ **5.** ა) $9\sqrt{3}$ სმ²; ბ) 9 სმ². **6.** 12 სმ². **7.** 99. **8.** 49 სმ². **9.** 50. **10.** 45°.

7. **1.** 27. **2.** $144\pi^2$ სმ². **3.** 12 სმ. **4.** **5.** 25π სმ². **6.** 17 სმ ან 7 სმ. **7.** ა) $y=\frac{1}{x-2}-3$; ბ) $y=x^2-6x+8$. **8.** $\frac{\sqrt{85}+\sqrt{65}+2\sqrt{10}}{2}$ **9.** $A_1(10;5)$; $B_1(7;5)$; $C_1(10;1)$.

VI თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **1.** 7. **2.** $m=-\frac{3}{2}$. $n=4$. **3.** 3. **4.** $\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$. **5.** 45°. **8.** $-\frac{3}{2}$. **9.** (0; 1; 0). **11.** 3; –2. **12.** $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{11}}$. **14.** 13; 36. **16.** შემოიხაზება წრეწირი. **18.** $a\sqrt{2}$. **19.** $-\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n+i\right)$. **20.** $\sqrt{366}$. **21.** –0,7. **22.** 3 ან 4. **23.** –2. **24.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}$. **25.** 31. **26.** 120 სმ². **27.** $40\sqrt{3}$ სმ². **28.** 45°. **29.** 10 მ. **30.** $2\pi ab$. **31.** π^2. **32.** R. **33.** πQ. **34.** ა) π; გ) $\frac{3}{2}R$. **35.** $\frac{\ell}{2}$. **36.** 45°. **37.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **38.** ა) $\frac{\pi R^2}{2}$; ბ) $\pi R^2\frac{m^2}{(m+n)^2}$. **39.** 500. **40.** $2R^2$. **41.** $2H^2$. **42.** ა) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$; ბ) $100\sqrt{2}$.

VII თავი

1. **1.** 151200. **2.** 70. **3.** 120. **4.** ა) 1000; ბ) 3. **5.** ა) 14!; ბ) 2·13!. **6.** ა) 27216; ბ) $9\cdot10^4$. **7.** 10^6. **8.** ა) 5^6; ბ) $4\cdot5^6$. **9.** 1372. **10.** 360. **11.** 2730. **12.** 8^4. **15.** (6;0).

2. **1.** $\frac{20!}{9!}$. **2.** $\frac{33!}{27!}$. **3.** $\frac{25!}{20!}$. **4.** $\frac{15!}{11!}$. **5.** 120. **6.** ა) $4\cdot5^4$; ბ) 5^5. **7.** $(5!)^2$. **8.** 360. **9.** 2·14!. **10.** 42·10!. **11.** $(10!)^2$. **12.** 128·16!. **13.** 52·12!. **14.** ა) 7; ბ) 9.

3. **2.** ა) 25; ბ) 0; გ) 1. **3.** ა) 90; ბ) 76; გ) 7; დ) 5. **4.** 35. **5.** 720. **6.** $\pm\frac{1}{2}$. **7.** 120. **8.** 595. **9.** $\frac{3}{1225}$. **10.** $\frac{C_{14}^5\cdot C_{10}^5}{C_{24}^{10}}$ **11.** ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{5}{6}$; გ) $\frac{1}{3}$; დ) $\frac{8}{9}$. **12.** 4. **13.** 120. **14.** 21. **15.** 1365. **17.** 22. **18.** 11.

4. 1. 5^5. **2.** 3360. **3.** 27720. **4.** 15. **5.** $\frac{8!}{3!}$. **6.** $\frac{10!}{4!}$. **7.** 1260. **8.** $\frac{16!}{5!7!4!}$. **9.** 2.

5. 1. $\frac{5}{72}$. **2.** $\frac{5}{9\cdot 2^{17}}$. **3.** $\frac{4}{5}$. **4.** $\frac{4!}{8!}$. **5.** $\frac{5!}{10!}$. **6.** $\frac{4!}{8!}$. **7.** $\frac{1}{840}$. **8.** $\frac{1}{1890}$. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** $\frac{1}{27}$. **11.** $\frac{1}{64}$.
12. $\frac{2}{6!}$. **13.** $\frac{224}{1615}$. **14.** p+q–2pq. **15.** ≈0,24. **16.** $\frac{2}{15}$.

6. 1. $\frac{4}{25}$. **2.** $\frac{1}{5}$. **3.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **5.** $\frac{1}{12}$. **6.** $\frac{1}{6}$. **7.** ა) $\frac{\pi}{\pi+2}$; ბ) $\frac{2}{\pi+2}$; გ) $\frac{\pi}{2\pi+4}$. **8.** $\frac{1}{3}$.
9. $\frac{3}{5}$. **10.** $\frac{\pi}{6}$ **11.** $(-1)^1\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **12.** 2.

7. 8. $\frac{x}{1-x}$. **9.** ა) y=x+1; ბ) y=–1.

VII თავის დამატებითი სავარჯიშოები: 2. ა) 4; ბ) 5; გ) 5; დ) 3. **4.** $x\in\left(\frac{15}{28};\frac{30}{13}\right)$. **5.** 230.
6. 2^{10}–56. **8.** 36. **9.** 108. **10.** 28·29!. **11.** 2·9!. **13.** 14. **14.** $\frac{18!}{3!5!10!}$. **15.** $\frac{4}{9}$. **16.** $\frac{72}{(10!)^2}$. **17.** $\frac{103}{52^2}$
. **18.** $\frac{40}{81}$. **19.** $1-\frac{C_{180}^{50}}{C_{200}^{50}}$. **20.** 13. **21.** $\left(\frac{4}{5}\right)^4$. **22.** 6. **23.** $2\cdot 5^3$.

დამხმარე ლიტერატურა:

1. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო "ნაკადული". თბილისი. 1988 წ.
2. ა. ბენდუქიძე - მათემატიკური ნარკვევები. "ლეგია". 1995 წ.
4. ჯ. კიკნაძე - აზრის ჯაჭვი. "ინტელექტი". თბილისში, 2001 წ.
5. მ. კოპალეიშვილი - მოგზაურობა რიცხვთა სამყაროში. განათლება. 1989 წ.
6. თ. ებანოიძე - წერილები. ქართველ მათემატიკოსებზე. "მეცნიერება". 1981 წ.
7. Энциклопедический словарь юного математика, Издательство "Педагогика", 1985 г.
8. М. Гарднер. Математические досуги.
9. С.В. Фомин. Системы счисления.
10. http:/google.com - golden section; www. solarviews.com; www.project.ex.ac.uk; http:/primes.utm.edu. http:/olympiads.win.tue.nl; www.problems. ru; www.olimpiada.ru; www.zaba.ru; www.mathematics.ru

ბერძნული ანბანი

Α	α	ალფა
Β	β	ბეტა
Γ	γ	გამა
Δ	δ	დელტა
Ε	ε	ეფსილონი
Ζ	ζ	ძეტა
Η	η	ეტა
Θ	θ	თეტა
Ι	ι	იოტა
Κ	κ	კაპა
Λ	λ	ლამბდა
Μ	μ	მიუ
Ν	ν	ნიუ
	ξ	ქსი
Ο	ο	ომიკრონ
Π	π	პი
Ρ	ρ	რო
Σ	σ	სიგმა
Τ	τ	ტაუ
Υ	υ	იფსილონი
Φ	φ	ფი
Χ	χ	ხი
Ψ	ψ	ფსი
Ω	ϖ	ომეგა

ლათინური ანბანი

A	a	ა
B	b	ბე
C	c	ცე
D	d	დე
E	e	ე
F	f	ეფ
G	g	ჰე
H	h	ჰამ
I	i	ი
J	j	იოტ, ჟი
K	k	კა
L	l	ელ
M	m	ემ
N	n	ენ
O	o	ო
P	p	პე
Q	q	ქუ
R	r	ერ
S	s	ეს
T	t	ტე
U	u	უ
V	v	ვე
W	w	დუბლ-ვე
X	x	იქს
Y	y	იგრეკ
Z	z	ზეტ

წიგნში გამოყენებული მათემატიკური ნიშნების ცხრილი

$|a|$ – a რიცხვის მოდული
$\vdots$ – იყოფა უნაშთოდ
$\not\vdots$ – არ იყოფა უნაშთოდ
N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე
Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე
Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე
R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე
{a;b} – სიმრავლე, რომლის ელემენტებია a და b
$\in$ — ეკუთვნის (სიმრავლეს)
$\notin$ — არ ეკუთვნის (სიმრავლეს)
$\varnothing$ — ცარიელი სიმრავლე
$\subset$ — ქვესიმრავლე (სიმრავლის)
$\cap$ — თანაკვეთა (სიმრავლეთა)
$\cup$ — გაერთიანება (სიმრავლეთა)
$A \setminus B$ — სხვაობა (სიმრავლეთა)
$C_M K$ – K სიმრავლის დამატება M სიმრავლემდე
$>, <$ — მკაცრი უტოლობის ნიშნები
$\geqslant, \leqslant$ — არამკაცრი უტოლობის ნიშნები
a^n – a რიცხვის n ხარისხი
$\overline{ab}$ — ორნიშნა რიცხვი (a ათეულით, b ერთეულით)
$\parallel$ — პარალელურია
$\nparallel$ — არ არის პარალელური
$\perp$ — მართობული
$\equiv$ — აღვნიშნოთ
$\Rightarrow$ — გამომდინარე
$^\circ$ — გრადუსი
( ) — ღია შუალედი
[ ); ( ] — ნახევრად ღია შუალედი
[ ] — ჩაკეტილი შუალედი
$-\infty$ — მინუს უსასრულობა
∞ — პლუს უსასრულობა
$\sqrt[n]{a}$ — არითმეტიკული კვადრატული ფესვი, რადიკალი
y=f(x) — ფუნქცია
$\breve{AB}$ – AB რკალის გრადუსული ზომა
$\sim$ — მსგავსება
$a \equiv b \pmod m$ – a რიცხვი სადარია b-სი m მოდულით
$\vec{a}$ — ვექტორი
D — დისკრიმინანტი
P(A) — A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა
$\longrightarrow$ — იმპლიკაცია
$\longleftrightarrow$ — ეკვივალენცია

ზომის ერთეულები

სიგრძის ერთეულები
1 კილომეტრი (კმ)=1000 მეტრი (მ)
1 მეტრი (მ)=10 დეციმეტრი (დმ)=100 სანტიმეტრი (სმ)
1 დეციმეტრი (დმ)=10 სანტიმეტრი (სმ)
1 სანტიმეტრი (სმ)=10 მილიმეტრი (მმ)

ფართობის ერთეულები
1 კვ. კილომეტრი (კმ^2)=1000000 კვ. მეტრი (მ^2)
1 ჰექტარი (ჰა)=100 არი (ა)=10000 კვ. მეტრი (მ^2)
1 არი=100 კვ. მეტრი (მ^2)

მასის ერთეულები
1 ტონა (ტ)=1000 კილოგრამი (კგ).
1 კილოგრამი (კგ)=1000 გრამი (გ)
1 ცენტნერი (ც)=100 კილოგრამი (კგ).
1 გრამი (გ)=1000 მილიგრამი (მგ)

დროის ერთეულები
1 წელი – 365 დღე-ღამე
1 დღე-ღამე=24 საათი (სთ)
1 საათი (სთ)=60 წუთი (წთ)
1 წუთი (წთ)=60 წამი (წმ)

მოცულობის ერთეულები
1 კუბ. მეტრი (მ^3)=1000 კუბ. დეციმეტრი (დმ^3)=1000000 კუბ. სანტიმეტრი (სმ^3)
1 კუბ. დეციმეტრი (დმ^3)=1000 კუბ. სანტიმეტრი (სმ^3)
1 ლიტრი (ლ)=1 კუბ. დეციმეტრი (დმ^3)
1 ჰექტოლიტრი (ჰლ)=100 ლიტრი (ლ)

ძველებური საზომი ერთეულების გამოსახვა მეტრული საზომი ერთეულებით

ხაზი $\approx$2,54 მმ	არშინი $\approx$71,12 სმ	საზღვაო მილი $\approx$1,85 კმ	გირვანქა $\approx$409,5 გ
დუიმი $\approx$2,54 სმ	საჟენი $\approx$2,13 მ	დესეტინა $\approx$1,09 ჰა	მისხალი $\approx$4,27 გ
გოჯი $\approx$4,45 სმ	ვერსი $\approx$ 1.067 კმ	ფუთი $\approx$ 16,38 კგ	კარატი (მეტრული) $\approx$0,2 გ
ფუტი $\approx$30,48 სმ	იარდი $\approx$91,44 სმ		

ათობითი ლოგარითმების ცხრილი

x	lg x!	x	lg x!	x	lg x!	x	lg x!
1	0,0000	26	26,6056	51	66,1906	76	111,2754
2	0,3010	27	28,0370	52	67,9066	77	113,1619
3	0,7782	28	29,4841	53	69,6309	78	115,0540
4	1,3802	29	30,9465	54	71,36,,	79	116,9516
5	2,0792	30	32,4237	55	73,1037	80	118,8547
6	2,8573	31	33,9150	56	74,8519	81	120,7632
7	3,7024	32	35,4202	57	76,6077	82	122,6770
8	4,6055	33	36,9387	58	78,3712	83	124,5961
9	5,5598	34	38,4702	59	80,1420	84	126,4204
10	6,5598	35	40,0142	60	81,9202	85	128,4498
11	7,6012	36	41,5705	61	83,7055	86	130,3843
12	8,6803	37	43,1387	62	85,4979	87	132,3238
13	9,7943	38	44,7185	63	87,2972	88	134,2683
14	10,9404	39	46,3096	64	89,1034	89	136,2177
15	12,1165	40	47,9116	65	90,9163	90	138,1719
16	13,3206	41	49,5244	66	92,7359	91	140,1310
17	14,5511	42	51,1477	67	94,5619	92	142,0948
18	15,8063	43	52,7811	68	96,3945	93	144,0632
19	17,0851	44	54,4246	69	98,2333	94	146,0364
20	18,3861	45	56,0778	70	100,0784	95	148,0141
21	19,7083	46	57,7406	71	101,9297	96	149,9964
22	21,0508	47	59,4127	72	103,7870	97	151,9831
23	22,4125	48	61,0939	73	105,6503	98	153,9744
24	23,7927	49	62,7841	74	107,5196	99	155,9700
25	25,1906	50	64,4831	75	109,3946	100	157,9700

ტრიგონომეტრიული ფუნქციათა მნიშვნელობების ცხრილი

ფუნქცია	მნიშვნელობები									
	0	0°	$\pi/6$	30°	$\pi/4$	45°	$\pi/3$	60°	$\pi/2$	90°
cos x	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
sin x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
tg x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-	
ctg x	-		$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	