Esercitazioni di Microeconomia

Risoluzione Esercizio 32

Ronny Mazzocchi *

*Dipartimento di Economia e Management, Università degli Studi di Trento. Via Inama 1 - 38122 Trento (Italy). Tel: +39 0461 282387. Mail: *ronny.mazzocchi@unitn.it*

Esercizio 32 Due individui hanno funzioni di utilià $U_A = xy$ e $U_B = xy + x + y$ e dotazioni iniziali $w_1 = w_2 = (5; 1)$:

a) Disegnate la scatola di Edgeworth, identificando il punto corrispondente all'allocazione iniziale e le curve di indifferenza che passano per detto punto

b) L'allocazione è Pareto-efficiente? Verificate graficamente e con un esempio numerico se esistono possibilità di scambio che migliorino la situazione di almeno uno degli agenti senza peggiorare quella degli altri, indicando nella scatola di Edgeworth le allocazioni che:
   - migliorano la situazione di A ma peggiorano quella di B
   - migliorano la situazione di B ma peggiorano quella di A
   - peggiorano la situazione di entrambi gli agenti
   - migliorano la situazione di entrambi gli agenti

c) Scrivete l'equazione della curva dei contratti e identificate il nucleo dell'economia

d) In un'allocazione appartenente al nucleo, l'agente A detiene $x_A = 4,3$. Trovate il prezzo relativo che sostiene tale allocazione. Si tratta di un equilibrio concorrenziale?

d) Verificate la legge di Walras

e) Determinate l'equilibrio concorrenziale di puro scambio

Risoluzione Procediamo per punti:

a) Per disegnare una curva di indifferenza - oltre a individuarne l'equazione - è meglio individuarne la concavità/convessità e i punti di intersezione con gli assi della scatola. Per calcolare l'equazione della curva di indifferenza il procedimento è il solito di sempre. Calcolo il livello di utilità U_A in corrispondenza delle dotazioni iniziali sarà dato da $U_A(5; 1) = 5 \cdot 1 = 5$ e da qui ricavo l'equazione della curva di indifferenza, che sarà data da $y_A = \frac{y_A}{x_A}$. Calcolando il $SMS_A = \frac{y_A}{x_A}$ notiamo che la curva di indifferenza è convessa. Infine per calcolare l'intersezione con gli assi della scatola è sufficiente impostare e risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x_A y_A = 5 \\ x_A = 10 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_A y_A = 5 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

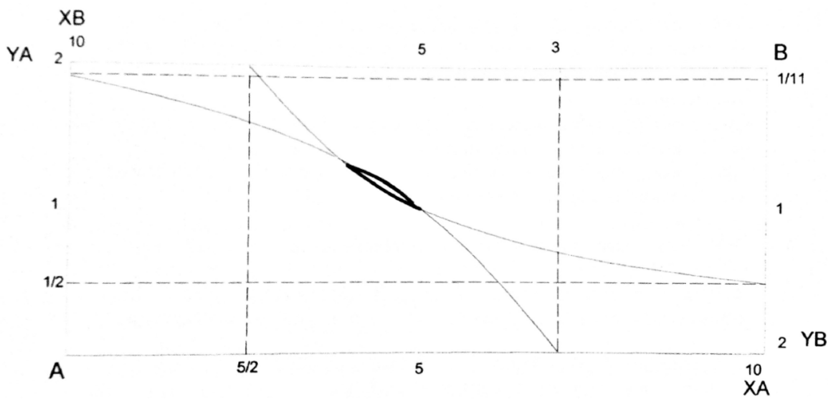
in questo modo otteniamo due punti $P = (10, \frac{1}{2}$ e $Q = (\frac{5}{2}; 2)$.
Lo stesso procedimento va usato per disegnare la curva di indifferenza dell'individuo B. Il suo livello di utilità in corrispondenza del paniere iniziale è dato da $U_B = 5 \cdot 1 + 5 + 1 = 11$, l'equazione della sua curva di indifferenza sarà $y_B = \frac{11-x_B}{1+x_B}$, il $SMS_B = \frac{1+y_B}{1+x_B}$ e quindi anche in questo caso la curva di indifferenza è convessa. Infine per trovare le intersezioni con gli assi della scatola devo risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x_B y_B + x_B + y_B = 11 \\ x_B = 10 \end{cases}$$

e

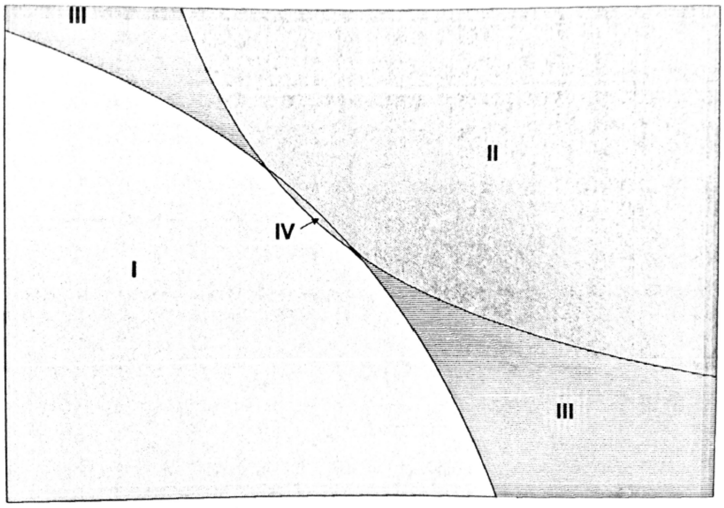
$$\begin{cases} x_B y_B + x_B + y_B = 11 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

in questo modo otteniamo due punti $S = (10, \frac{1}{11}$ e $R = (3; 2)$.



b) Affinchè una allocazione sia Pareto-efficiente è necessario che in quel punto (in questo caso l'allocazione iniziale) $SMS_A = SMS_B$. Nel nostro caso $SMS_A = \frac{1}{5} \neq SMS_B = \frac{1}{3}$, quindi l'allocazione iniziale non è Pareto-efficiente. Per definizione è possibile migliorare il benessere di un agente senza peggiorare quello di un altro. Nel nostro caso, essendo $SMS_A < SMS_B$ ed essendo $SMS_A = \frac{y_A}{x_A}$, per tentare di eguagliare i due SMS bisognerà diminuire x_A e/o aumentare y_A. L'alternativa è far diminuire SMS_B. Dato che $SMS_B = \frac{1+y_B}{1+x_B}$, bisognerà aumentare x_B e/o diminuire y_B.

Classifichiamo ora nel grafico le varie aree. Nell'area I migliora il benessere dell'agente B ma peggiora quella di A. Infatti ci troviamo sopra la curva di indifferenza di B, ma sotto quella di A. Nell'area II siamo nella situazione simmetrica: migliora il benessere dell'individuo A ma peggiora quella dell'individuo B. L'area III è quella in cui peggiora il benessere di entrambi gli individui: infatti ci troviamo sotto le curve di indifferenza di entrambi. Infine, l'area IV è quella in cui migliora il benessere di entrambi. Detto in altri termini, l'area IV individua l'area in cui gli scambi realizzano un miglioramento paretiano (sono allocazioni Pareto-superiori rispetto a quella iniziale).



Sulla base del ragionamento fatto sopra, provo ad individuare una nuova combinazione di beni che si trovi nell'area IV. Ad esempio, tolgo all'individuo A un po' di bene x e aumento il bene y e - per simmetria - faccio l'opposto per l'individuo B. Supponiamo di togliere $\frac{4}{5}$ di bene x ad A e aggiungere $\frac{1}{5}$ di bene y ad A (facendo il simmetrico per B). I nuovi panieri saranno rispettivamente:

$$\omega'_A = (5 - \frac{4}{5}; 1 + \frac{1}{5}) = \left(\frac{21}{5}; \frac{6}{5}\right)$$
$$\omega'_B = (5 + \frac{4}{5}; 1 - \frac{1}{5}) = \left(\frac{29}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Calcolando l'utilià dei due individui con il nuovo paniere posso andare a verificare se il miglioramento paretiano c'è effettivamente stato. $U_A\left(\frac{21}{5}; \frac{6}{5}\right) = 5.04$ e $U_B = \left(\frac{29}{5}; \frac{4}{5}\right) = 11.24$. Notiamo che effettivamente $U_A\left(\frac{21}{5}; \frac{6}{5}\right) > U_A(5; 1)$ e $U_B = \left(\frac{29}{5}; \frac{4}{5}\right) > U_B(5; 1)$, quindi il miglioramento paretiano c'è stato. Tuttavia anche questa nuova allocazione non è Pareto-efficiente. Infatti i due SMS sono ancora diversi. Sostituendo il nuovo paniere otteniamo infatti che

$SMS_A = \frac{6}{21} \neq SMS_B = \frac{9}{34}$, quindi esistono ancora possibilità di scambio che migliorano il benessere di entrambi.

c) La curva dei contratti è l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti che rispettano il vincolo delle risorse. Quindi dovrò mettere a sistema l'eguaglianza fra i saggi marginali di sostituzione e i vincoli delle risorse. Avremo:

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = \frac{1+y_B}{1+x_B} \\ x_A + x_B = 10 \\ y_A + y_B = 10 \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla terza ricavo rispettivamente $x_B = 10 - x_A$ e $y_B = 2 - y_A$ e sostituisco nella prima ottenendo l'equazione della curva dei contratti, ovvero[1]:

$$y_A = \frac{3}{11} x_A$$

La curva di contratti è in questo caso una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare $\frac{3}{11}$. Essa intersecherà il lato superiore della scatola in corrispondenza del punto $\frac{22}{3}$. Nota: in questo caso la curva dei contratti non passa per il punto di dotazione iniziali. Questo accade ovviamente perchè la curva dei contratti è il luogo dei punti del piano in cui si hanno le allocazioni Pareto-efficienti mentre abbiamo visto che la nostra dotazione iniziale non lo è.

Il **nucleo** è quella parte di curva dei contratti che è compresa fra le due curve di indifferenza che si intersecano nel punto di dotazioni iniziali. Per identificare il nucleo bisogna trovare quindi quella parte della curva dei contratti compresa fra le due curve di indifferenza. Per farlo è sufficiente impostare e risolvere il sistema fra la curva di indifferenza di ciascun individuo passante per il punto di dotazione iniziale e la curva dei contratti. Dal punto a) abbiamo che:

$$\begin{cases} y_A = \frac{3}{11} x_A \\ y_A = \frac{5}{x_A} \end{cases}$$

[1] Se avessi ricavato dalla seconda e dalla terza equazione $x_A = 10 - x_B$ e $y_A = 2 - y_B$ avrei ottenuto una curva dei contratti di equazione

$$y_B = \frac{3x_B - 8}{11}$$

questa equazione è analoga a quella riportata nel testo, solo che è disegnata in un piano x_B, y_B, cioè con gli assi cartesiani capovolti.

risolvendo avremo che $x_A^2 = \frac{55}{3}$ e quindi avremo due soluzioni: $x_{1;A} = -4.28$ che è negativa e quindi va scartata, e $x_{2;A} = 4.28$. Quest'ultima è la coordinata x del punto di intersezione fra curva dei contratti e curva di indifferenza dell'individuo A passante per il punto di dotazioni iniziali. Per analogia possiamo fare la stessa cosa per l'individuo B. Per rendere però più semplice la trattazione grafica e algebrica sfruttiamo i vincoli delle risorse per esprimere tutto in termini di x_A e y_A. Detto in altri termini, sappiamo che $y_B = 2 - y_A$ e $x_B = 10 - x_B$. Sostituendo nella curva di indifferenza dell'individuo B avremo:

$$y_B = \frac{11 - x_B}{1 + x_B} \rightarrow 2 - y_A = \frac{11 - 10 + x_A}{1 + 10 - x_A}$$

quindi l'equazione della curva di indifferenza dell'individuo B espressa in termini di x_A e y_A sarà data da:

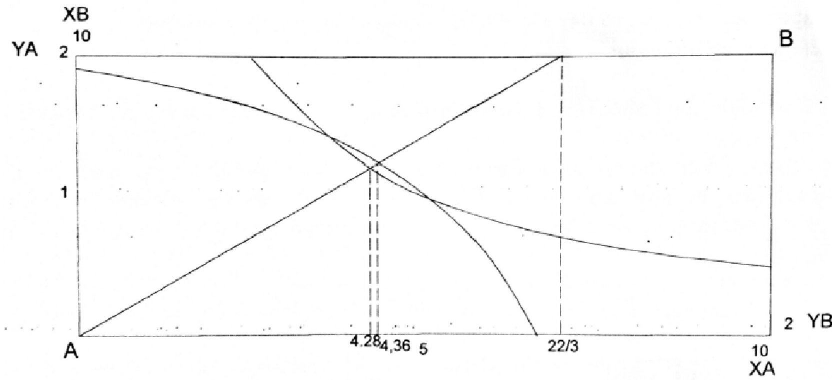
$$y_A = \frac{21 - 3x_A}{11 - x_A}$$

Analogamente a quanto visto sopra, troviamo il punto di intersezione fra curva di indifferenza e curva dei contratti, ovvero:

$$\begin{cases} y_A = \frac{3}{11}x_A \\ y_A = \frac{21-3x_A}{11-x_A} \end{cases}$$

risolvendo avremo che $-\frac{1}{11}x_A^2 + 2x_A - 7 = 0$ da cui otteniamo due soluzioni: $x_{1;A} = 17.64$ che non rispetta il vincolo delle risorse (infatti sappiamo che $x^0 = 10$) e quindi va scartata, e $x_{2;A} = 4.36$. Quest'ultima è la coordinata x del punto di intersezione fra curva dei contratti e curva di indifferenza dell'individuo B passante per il punto di dotazione iniziali. La definizione del nucleo è quindi data dalla seguente equazione:

$$y_A = \frac{3}{11}x_A \qquad \text{se} \qquad 4.28 \leq x_A \leq 4.36$$



d) Sappiamo dal testo che $x_A = 4.3$ appartiene al nucleo. Per trovare i prezzi relativi è innanzitutto necessario trovare i panieri scelti da A e B dato $x_A = 4.3$. Avremo:

- se $x_A = 4.3$, attraverso la curva dei contratti otteniamo che $y_A = 1.1727$
- se $x_A = 4.3$, attraverso il vincolo delle risorse avremo che $x_B = 10 - 4.3 = 5.7$
- se $y_A = 1.1727$, attraverso il vincolo delle risorse avremo che $y_B = 2 - 1.1727 = 0.827$

Il prezzo relativo che sostiene l'allocazione è dato dal vincolo di bilancio di ciascun individuo, ovvero:

$$\begin{cases} 4.3p_x + 1.1727p_y = I_A \\ 5.7p_x + 0.827p_y = I_B \end{cases}$$

Non conosciamo I_A e I_B ma sappiamo che gli individui A e B sono in grado di acquistare il paniere iniziale $(5; 1)$. Quindi $I_A = 5p_x + p_y$ e $I_B = 5p_x + p_y$. Sostituendo avremo:

$$\begin{cases} 4.3p_x + 1.1727p_y = 5p_x + p_y \\ 5.7p_x + 0.827p_y = 5p_x + p_y \end{cases}$$

da cui otteniamo che:

$$\frac{p_x}{p_y} = 0.247$$

Per verificare se si tratta di un equilibrio concorrenziale possiamo seguire diverse strade:

- verificare che le quantità date sopra siano effettivamente ottenibili con i prezzi relativi $\frac{p_x}{p_y} = 0.247$.

- verificare che i prezzi relativi $\frac{p_x}{p_y} = 0.247$ consentano di ottenere esattamente quelle quantità ricavate sopra.
- verificare contemporaneamente prezzi e quantità per vedere se otteniamo delle identità

Io seguirò la seconda strada. Imposto il problema di ottimo per ciascun individuo e sostituisco $\frac{p_x}{p_y} = 0.247$. Quindi per l'individuo A avrò:

$$\begin{cases} SMS_A = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = I_A = p_x x_A^0 + p_y y_A^0 \end{cases}$$

Quindi, sostituendo $\frac{p_x}{p_y} = 0.247$ e le dotazioni iniziali $x_A^0 = 5$ e $y_A^0 = 1$ e dividendo la seconda equazione per p_y otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = 0.247 \\ 0.247 x_A + y_A = 0.247 \cdot 5 + 1 \end{cases}$$

e otterrò $x_A = 4.52$ e $y_A = 1.12$. Si nota immediatamente che tale allocazione non coincide con quella precedente $x_A = 4.3$ e $x_B = 1.1727$. Analogamente per l'individuo B avremo:

$$\begin{cases} \frac{1+y_B}{1+x_B} = 0.247 \\ 0.247 x_B + y_B = 0.247 \cdot 5 + 1 \end{cases}$$

da cui otterrò $x_B = 6.05$ e $y_B = 0.741$. Quindi l'allocazione $(4.3; 1.1727)$ e $(5.7; 0.827)$ non rappresenta un equilibrio concorrenziale. Al prezzo relativo 0.247 cè un eccesso di domanda di x e un eccesso di offerta di y. Infatti $x_A + x_B = 10.57 > 10$ e $y_A + y_B = 1.86 < 2$.

e) La legge di Walras afferma che se $n - 1$ mercati sono in equilibrio, lo è anche l'ennesimo, dati i prezzi. Analogamente possiamo affermare che il valore degli eccessi di domanda aggregata è identicamente eguale a 0, questo per tutti i prezzi possibili. Matematicamente la legge di Walras si presenta come segue:

$$p_x(x^D - x^0) + p_y(y^D - y^0) = 0$$

Devo verificare che data la domanda aggregata dei due beni x^D e date l'offerta aggregata x^0 e y^0, l'equazione vista sopra è soddisfatta per tutti i prezzi possibili. Per farlo devo ricavare la domanda aggregata, che è data dalla somma delle domande individuali. Sappiamo che le domande individuali sono ricavabili dal problema di ottimo del consumatore, lasciando i prezzi incogniti. Per l'individuo A avremo quindi:

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = 5p_x + p_y \end{cases}$$

da cui otteniamo che $x_A = \frac{5p_x+p_y}{2p_x}$ e $y_A = \frac{5p_x+p_y}{2p_y}$. Analogamente per l'individuo B avremo:

$$\begin{cases} \frac{1+y_B}{1+x_B} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_B + p_y y_B = 5p_x + p_y \end{cases}$$

da cui otteniamo che $x_B = \frac{4p_x+2p_y}{2p_x}$ e $y_A = \frac{3p_x}{p_y}$. La domanda aggregata di x è data da $x^D = x_A + x_B = \frac{9p_x+3p_y}{2p_x}$, mentre la domanda aggregata di y è data da $y^D = y_A + y_B = \frac{11p_x+p_y}{2p_x}$. So che le dotazioni iniziali di x e 10 mentre quelle di y è 2. Quindi:

$$p_x(\frac{9p_x + 3p_y}{2p_x} - 10) + p_y(\frac{11p_x + p_y}{2p_x} - y^0) = 0$$

da cui si ottiene esattamente $0 = 0$. La legge di Walras è quindi verificata.

f) Per calcolare l'equilibrio concorrenziale bisogna che a) ciascun individuo massimizzi la propria utilità, dato il vincolo di bilancio e b) venga rispettato il vincolo delle risorse. Nel nostro caso queste due condizioni sono soddisfatte quando vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{1+y_B}{1+x_B} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x_A + p_y y_A = 5p_x + p_y \\ p_x x_B + p_y y_B = 5p_x + p_y \\ x_A + x_B = 10 \\ y_A + y_B = 2 \end{cases}$$

che è un sistema di 6 equazioni in 6 incognite p_x, p_y, x_A, x_B, y_A, y_B. In realtà noi siamo interessati solo ai prezzi relativi $\frac{p_x}{p_y}$. Dividendo la terza equazione per p_y otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{1+y_B}{1+x_B} = \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{p_x}{p_y} x_A + y_A = 5\frac{p_x}{p_y} + 1 \\ p_x x_B + p_y y_B = 5p_x + p_y \\ x_A + x_B = 10 \\ y_A + y_B = 2 \end{cases}$$

a questo punto abbiamo 6 equazioni e 5 incognite x_A, x_B, y_A, y_B e $\frac{p_x}{p_y}$. Possiamo quindi tralasciare una equazione (ad esempio la quarta). Risolvendo otteniamo $\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{11}$, $x_A = \frac{13}{3}$, $x_B = \frac{17}{3}$, $y_A = \frac{13}{11}$ e $y_B = \frac{9}{11}$.

Lo stesso risultato si poteva raggiungere in un altro modo. Infatti l'equilibrio concorrenziale è un equilibrio tale per cui, dato un certo prezzo relativo, non ci sono eccessi di domanda. Per la legge di Walras, possiamo analizzare solo il mercato del bene x, e avremo che $x^D - x^0 = 0$. Quindi:

$$\frac{9p_x + 3p_y}{2p_x} - 10 = 0$$

da cui otteniamo $\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{11}$
Sostituendo i prezzi relativi trovati nelle funzioni di domanda individuale otteniamo lo stesso risultato visto sopra.