Decisioni in condizioni di incertezza

Da leggere: libro di testo capitolo 5.

1. Rischio e incertezza

Nella teoria delle decisioni che coinvolgono il caso si distingue tra le decisioni in condizione di **rischio** e quelle in condizioni di **incertezza**.

- Nelle decisioni in condizioni di **rischio**, le probabilità con cui si verificano gli eventi sono note. In basso abbiamo tre possibili lotterie (A, B e C) in cui l'esito dipende dal seme di una carta estratta casualmente da un mazzo. Ad esempio, se viene estratta una carta di cuori, la lotteria A paga 150 euro mentre la lotteria B non paga niente. Siccome ci sono tredici carte di ciascun seme, tutti i semi hanno la stessa probabilità di essere estratti e quindi la probabilità di ciascun evento è $\frac{1}{4}$.
- Nelle decisioni in condizioni di **incertezza**, al contrario, le probabilità non sono note. Nell'esempio in basso abbiamo quatto lotterie il cui esito dipende dalla squadra che vincerà il prossimo mondiale di calcio. (Il pagamento nel caso in cui non vinca nessuna di queste squadre è pari a zero.) Ad esempio, se l'Italia vince il mondiale la lotteria E paga 50 euro. In questo caso non è possibile individuare un'unica probabilità con cui, ad esempio, la Spagna vincerà il mondiale e quindi si dice che le probabilità sono *soggettive*. Individui diversi possono attribuire probabilità diverse agli stessi eventi.

Rischio

	♣	♢	♠	♡	μ	σ
A	50	20	0	150	**55**	57.6628
B	0	100	20	0	**30**	41.2311
C	50	50	50	50	**50**	0.
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		

Incertezza

	Francia	**Italia**	**Germania**	**Spagna**
D	100	0	0	0
E	0	50	50	0
F	0	0	0	20
	?	**?**	**?**	**?**

Per le lotterie in cui le probabilità sono note, è possibile calcolare il valore monetario atteso. Il valore monetario atteso è semplicemente la somma delle vincite, ponderate con la probabilità di ottenerle.

Nell'esempio precedente, i valori monetari attesi sono riportati nella colonna μ. Ad esempio, il valore monetario della lotteria A è dato da

$$\mu_A = \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{4}.20 + \frac{1}{4}.50 + \frac{1}{4}.150 = 55$$

Si potrebbe pensare che tra due lotterie la migliore sia quella che offre un valore monetario atteso più alto. Ma questo non è necessariamente vero. Ad esempio, la lotteria C offre un pagamento modesto (50 euro) ma sicuro, mentre la lotteria A offre un pagamento (atteso) maggiore, ma con maggior rischio. Questo è rappresento dal fatto che la deviazione standard σ (riportata nell'ultima colonna) per la lotteria C è zero, mentre è maggiore di zero per la lotteria A.

2. Il paradosso di San Pietroburgo

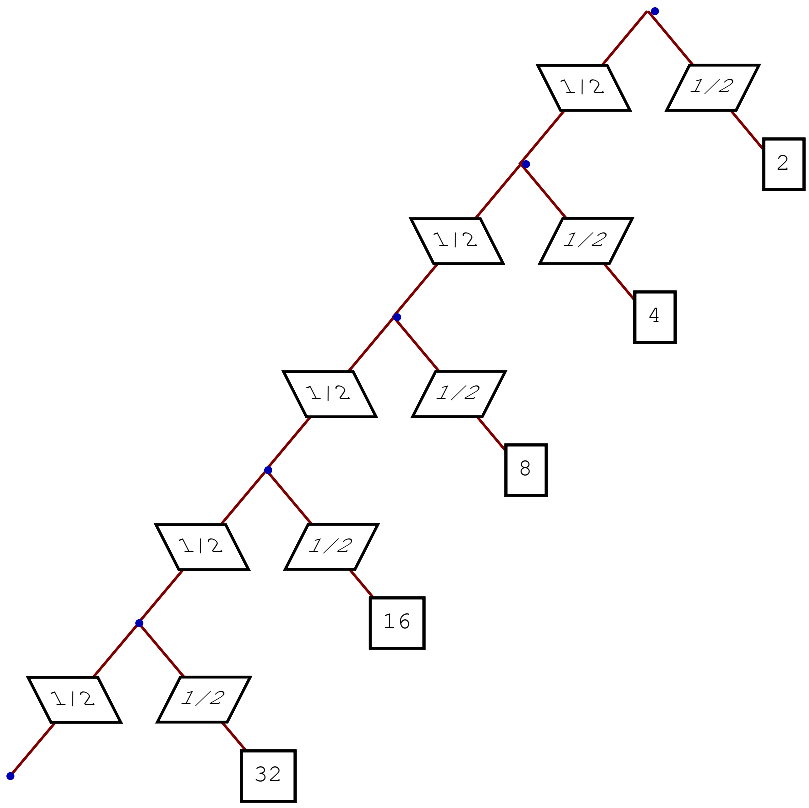
L'esempio che segue illustra il motivo per il quale non sempre scegliamo la lotteria con valore atteso maggiore.

Considerate la seguente lotteria. Lanciamo in aria una moneta ripetutamente, fino a che esce Testa. Se Testa esce per la prima volta all' n.esimo lancio, riceverete una somma di denaro pari a 2^n.

Ad esempio, se Testa esce per la prima volta al quarto lancio, otterrete $2^4 = 16$ euro. Se siete fortunati e Testa esce per la prima volta all'ottavo lancio otterrete $2^8 = 256$ euro.

Quanto siete disposti a pagare per questa lotteria?

L'albero seguente rappresenta la vostra decisione. Ogni nodo rappresenta un lancio della moneta. Il ramo di destra corrisponde a quando esce Testa, il gioco finisce e voi ottenete 2 euro elevati al numero del lancio a cui siete arrivati. Il ramo di sinistra rappresenta l'esito del lancio Croce e quindi il gioco continua.



Il pagamento monetario atteso di questa lotteria è pari a

$$\pi = \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 2^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 2^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 2^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 2^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 2^5 \ldots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Ne segue che dovreste essere disposti a pagare una cifra infinita per prendere parte a questa lotteria. In realtà, se ci pensate siete sicuramente disposti a dare qualcosa per partecipare alla lotteria (dite perchè) ma sicuramente non tutta la ricchezza che avete.

3. Utilità attesa

Supponiamo di avere delle lotterie che possono avere diversi esiti. Per semplicità possiamo immaginare che si tratti di somme di denaro, ma in realtà il nostro approccio è molto più generale.

La nostra lotteria paga la somma x_1 con probabilità p_1, la somma x_2 con probabilità p_2 e così via.

Le preferenze di un consumatore rispetto a lotterie di questo tipo possone essere rappresentate mediante una funzione $U(x)$, dove x è la quantità di denaro posseduta dal consumatore.

L'utilità *attesa* della lotteria è la somma delle utilità di ciascuna vincita, ponderate con la probabilità che quella vincita abbia luogo. L'utilità di una lotteria che offre un pagamento x_1 con probabilità p_1, un pagamento x_2 con probabilità p_2 (in generale un pagamento x_i con probabilità p_i) sarà dato da

$$U(p) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, U(x_i)$$

Nelle decisioni in condizioni di rischio, le probabilià p_i sono "oggettive", ossia sono dati del problema. Nel caso delle decisioni in condizioni di incertezza, le proababilità sono *soggettive*, esattamente come sono soggettivi i gusti dei consumatori.

4. Esempi

	♣	♢	♠	♡	μ	σ
A	50	20	0	150	**55**	57.6628
B	0	100	20	0	**30**	41.2311
C	50	50	50	50	**50**	0.
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		

Torniamo ai nostri esempi. La tabella seguente rappresenta l'utilità attesa delle lotterie A, B e C, assumendo che la funzione di utilità del consumatore sia quella riportata sulla sinistra.

$$U(x) = \sqrt{x}$$

$$U(\mathrm{A}) = \frac{\sqrt{0}}{4} + \frac{\sqrt{20}}{4} + \frac{\sqrt{50}}{4} + \frac{\sqrt{150}}{4} = 5.94766$$

$$U(\mathrm{B}) = \frac{\sqrt{0}}{2} + \frac{\sqrt{20}}{4} + \frac{\sqrt{100}}{4} = 3.61803$$

$$U(\mathrm{C}) = \sqrt{50} = 7.07107$$

Se questa è la funzione di utilità del nostro consumatore, allora la lotteria migliore è la C.

Questo risultato dipende dalla funzione di utilità che abbiamo scelto. La tabella in basso a destra rappresenta l'utilità delle quattro lotterie, assumendo che la funzione di utilità sia quella riportata a sinistra.

$$V(x) = x$$

$$V(\mathrm{A}) = \frac{0}{4} + \frac{20}{4} + \frac{50}{4} + \frac{150}{4} = 55.$$

$$V(\mathrm{B}) = \frac{0}{2} + \frac{20}{4} + \frac{100}{4} = 30.$$

$$V(\mathrm{C}) = 50 = 50.$$

Per questo consumatore la lotteria migliore sarà la A.

5. Avversione al rischio

A cosa è dovuta la differenza nelle preferenze di questi due consumatori? Osservate il due grafici in basso. Rappresentano le funzioni di utilità dei due consumatori che abbiamo visto prima. Il consumatore di sinistra ha una funzione di utilità *concava*. Ad essa corrisponde una utilità marginale decrescente per il denaro. Il consumatore di destra ha una funzione di utilità lineare, e quindi per lui l'utilità marginale del denaro è costante.

I due consumatori sono messi di fronte alla stessa scelta. Possono avere 25$ per certo oppure un biglietto per una lotteria, che chiameremo L, che permette di vincere 50$ con probabilità $\frac{1}{2}$. Il valore atteso di questa lotteria è ovviamente uguale per i due consumatori ossia $\mu = \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \times 0 = 25$.

L'utilità attesa è tuttavia diversa. Questa può facilmente essere calcolata per entrambi i consumatori. Avremo infatti che

$$U(L) = \frac{\sqrt{0}}{2} + \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad V(L) = \frac{0}{2} + \frac{50}{2} = 25$$

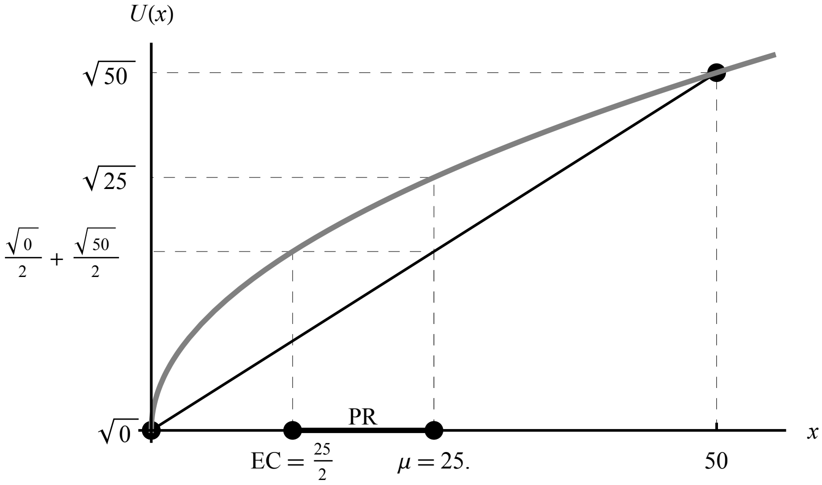
$$U(25) = 5 \qquad V(25) = 25$$

Per il primo consumatore l'utilità corrispondente a 25 euro per certi (che è pari a $\sqrt{25} = 5$) è maggiore dell'utilità della lotteria, che è pari a $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Graficamente, questo si vede dal fatto che, dal momento che la funzione di utilità è concava, si trova interamente al di sopra della corda che congiunge i punti corrispondenti alle utilità derivanti dai due possibili esiti della lotteria, ossia $\sqrt{50}$ e $\sqrt{0}$. L'utilità della lotteria si trova invece esattamente a metà tra le utilità dei possibili esiti.

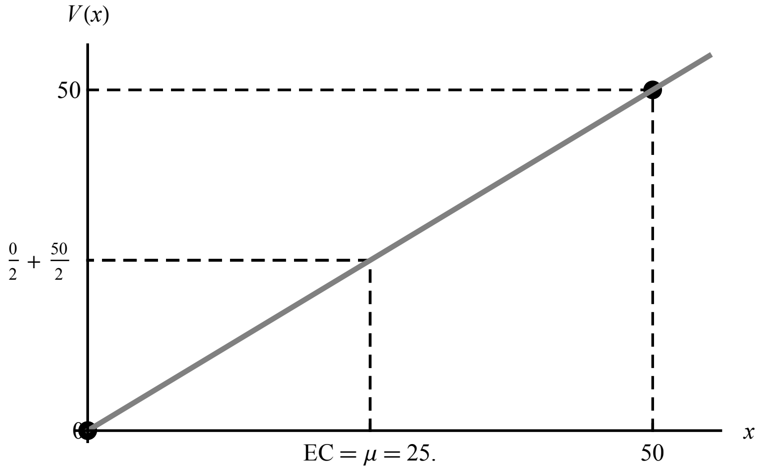
Notate che questo è vero per *qualsiasi* funzione concava (convincetevene tracciando alcuni grafici).

Al contrario, per il consumatore di destra la funzione di utilità, che è lineare, coincide con la retta che congiunge le utilità corrispondenti alle possibili vincite della lotteria. Ne segue che l'utilità della lotteria è sempre uguale a quella del suo valore atteso μ. (Anche di questo dovreste convincervi con un esempio.)

Avverso al rischio
$U(x) = \sqrt{x}$



Neutrale rispetto al rischio
$V(x) = x$



Considerate ora il punto EC. Si tratta del denaro per certo che il consumatore ritiene indifferente alla lotteria L. Infatti, come si vede dal grafico, l'utilità di EC è uguale all'utilità della lotteria $U(L)$.

La differenza tra il valore monetario atteso della lotteria μ e l'equivalente certo EC è il **premio per il rischio**. Disegnando alcuni grafici dovreste convincervi che più concava è la funzione di utilità, maggiore è il premio per il rischio. Ad esempio, per il consumatore neutrale rispetto al rischio la cui utilità è rappresentata nel grafico inferiore EC = μ e quindi PR = 0.

6. Calcolare l' equivalente certo di una lotteria

Calcolare l'equivalente certo di una lotteria non è difficile. E' sufficiente imporre che l'utilità dell'ammontare di denaro EC sia uguale a quella della lotteria. Ad esempio, se l'utilità del denaro è rappresentata da $U(x) = \sqrt{x}$, l'equivalente certo di una lotteria che offre 0 e 50 con probabilità $\frac{1}{2}$ sarà dato da

$$U(L) = \frac{\sqrt{0}}{2} + \frac{\sqrt{50}}{2} = \sqrt{\text{EC}}$$

Risolvendo questa equazione si ottiene EC = $\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

Se invece l'utilità è $V(x) = x$ allora avremo che

$$V(L) = \frac{0}{2} + \frac{50}{2} = V(\mathrm{EC}) = \mathrm{EC}$$

Da cui segue che EC = μ = 25.

7. Ancora sul Paradosso di San Pietroburgo

Il paradosso di San Pietroburgo nasce dal fatto che non si tiene conto del fatto che gli individui possono essere avversi al rischio. Supponiamo infatti che l'utilità del nostro consumatore sia $W(x) = \log(x)$ e quindi, dal momento che la funzione logaritmo è concava, che il nostro consumatore sia avverso al rischio. Allora avremo che l'utilità attesa di partecipare alla lotteria sarà

$$S = \frac{\log(2)}{2} + \frac{\log(2^2)}{2^2} + \frac{\log(2^3)}{2^3} + \frac{\log(2^4)}{2^4} + \dots$$

Ricordando che $\log\left(a^b\right) = b\log(a)$ otteniamo

$$S = \frac{\log(2)}{2} + \frac{2\log(2)}{2^2} + \frac{3\log(2)}{2^3} + \frac{4\log(2)}{2^4} + \dots$$

Mettendo in evidenza log(2)

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots\right)\log(2) \qquad \star$$

Moltiplicando primo e secondo membro per $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots\right)\log(2) \\ &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \dots\right)\log(2) \end{aligned}$$

Sottraendo $\frac{S}{2}$ da S (equazione $\star$)

$$\begin{aligned} S - \frac{S}{2} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots\right)\log(2) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \dots\right)\log(2) \\ \frac{S}{2} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\right)\log(2) \\ \frac{S}{2} &= \log(2) \end{aligned}$$

Quindi

$$S = 2\log(2) = \log\left(2^2\right) = \log(4)$$

Per trovare l' equivalente certo dobbiamo risolvere

$$\log(\mathrm{EC}) = \log(4)$$
$$\mathrm{EC} = 4$$

Quindi un individuo con una funzione di utilità logaritmica sarà disposto al massimo a pagare 4 euro per partecipare alla lotteria di San Pietroburgo.

8. Definizioni

- Un consumatore si dice **avverso al rischio** se tra una lotteria L e il valore monetario atteso μ di quella lotteria preferisce sempre μ.
- Un consumatore si dice **amante del rischio** se preferisce sempre la lotteria L al suo valore monetario atteso μ per certo.
- Un consumatore si dice **neutrale rispetto al rischio** se è indifferente tra una lotteria L e il suo valore monetario atteso μ.

Matematicamente:

- Le preferenze di un consumatore *neutrale* rispetto al rischio sono rappresentate da una funzione *lineare* del denaro, ad esempio $V(x) = x$.
- Le preferenze di un consumatore *avverso al rischio* sono rappresentate da una funzione *concava* nel denaro. Ad esempio $U(x) = \sqrt{x}$ oppure $W(x) = \text{Log}(x)$.
- Le preferenze di un consumatore *amante* del rischio sono rappresentate da funzioni *convesse*. Ad esempio, $U(x) = x^2$.

9. Applicazioni

■ Lotta al crimine

Tre persone devono prendere lo stesso treno e devono decidere se pagare il biglietto. Due di loro decidono di non pagare il biglietto, il terzo di pagarlo. Perchè?

Supponiamo che gli individui possiedano inizialmente la stessa somma di denaro, ad esempio 1000$.

Il biglietto costa 20$. La probabilità di essere trovati senza biglietto è pari a $\frac{1}{10}$ (immaginiamo che le tre persone siano d'accordo su questo). La multa per non aver pagato il biglietto è di 190$.

Immaginiamo che le funzioni di utilità dei tre consumatori siano

$$U(x) = \sqrt{x} \qquad V(x) = x \qquad W(x) = \log(x)$$

Calcoliamo l'utilità attesa di comprare o non comprare il biglietto per i tre consumatori.

$$U(\text{Comprare}) = U(\text{Reddito} - \text{Biglietto}) = \sqrt{\text{Reddito} - \text{Biglietto}} = \sqrt{-20 + 1000} = 31.305$$

$$U(\text{Non Comprare}) = \frac{1}{10}\, U(\text{Reddito} - \text{Multa}) + \frac{9\, U(\text{Reddito})}{10} =$$
$$\sqrt{1000 - 190}\, \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \sqrt{1000} = 31.3065$$

$$V(\text{Comprare}) = V(\text{Reddito} - \text{Biglietto}) = \text{Reddito} - \text{Biglietto} = -20 + 1000 = 980.$$

$$V(\text{Non Comprare}) = \frac{1}{10}\, V(\text{Reddito} - \text{Multa}) + \frac{9\, V(\text{Reddito})}{10} =$$
$$(1000 - 190)\, \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) 1000 = 981.$$

$$W(\text{Comprare}) = W(\text{Reddito} - \text{Biglietto}) =$$
$$\log(\text{Reddito} - \text{Biglietto}) = \log(-20 + 1000) = 6.88755$$
$$W(\text{Non Comprare}) = \frac{1}{10} W(\text{Reddito} - \text{Multa}) + \frac{9\,W(\text{Reddito})}{10} =$$
$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)\log(1000) + \frac{1}{10}\log(1000 - 190) = 6.88668$$

Ne segue che i primi due consumatori non compreranno il biglietto, mentre il terzo lo comprerà.

La differenza è spiegata dalla loro diversa propensione al rischio. Notate che il valore monetario atteso di non pagare il biglietto è dato da

$$1000\left(1 - \frac{1}{10}\right) + (1000 - 190)\,\frac{1}{10} = 981.$$

Che è maggiore al valore atteso di pagare il biglietto ossia

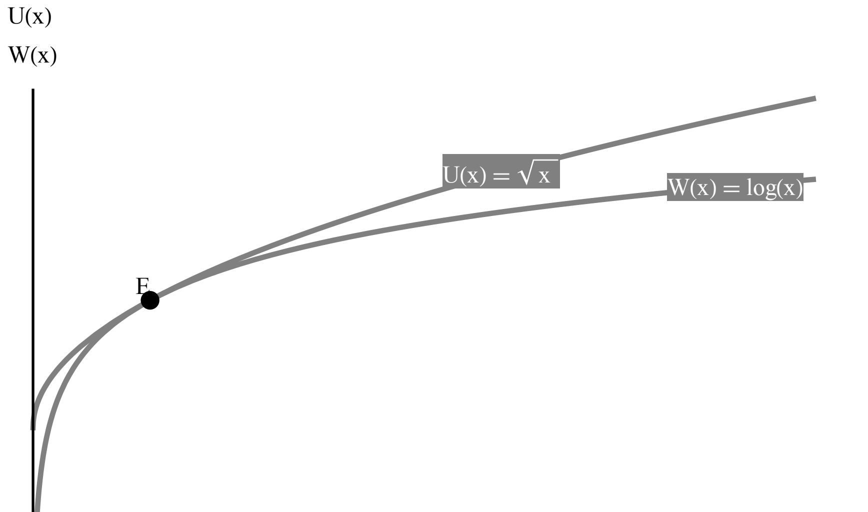
$$1000 - 190 = 810$$

(Notate che se pagate il biglietto non c'è incertezza, perchè la vostra vincita finale è pari al vostro reddito iniziale meno il costo del biglietto, indipendentemente dal fatto che il controllore passi oppure no.)

Ne segue che il decisore neutrale rispetto al rischio (la cui funzione di utilità è $V(x) = x$) deciderà di *non* pagare il biglietto, perchè per lui conta solo il valore monetario atteso. Un decisore avverso al rischio potrebbe invece sia pagare che non pagare la multa. Dipende da *quanto* è avverso al rischio.

Infatti sia il primo che il terzo consumatore hanno una funzione di utilità concava nel denaro, e quindi sono entrambi avversi al rischio. Tuttavia, mentre il primo consumatore non compra il biglietto, il terzo consumatore lo compra. La ragione è che il primo consumatore è *meno avverso al rischio* del terzo. E quindi, in questo caso, la sua scelta coincide con quella di un decisore neutrale rispetto al rischio.

Il grafico in basso illustra questo punto. Nel punto E la curva che rappresenta l'utilità del denaro per il primo consumatore è meno concava della curva dell'utilità per il terzo consumatore.



Possiamo anche calcolare a quanto deve ammontare la multa perchè anche il primo consumatore paghi il biglietto. E' sufficiente trovare il valore della multa che rende il consumatore indifferente tra pagarla o no. Indicando con M la multa, dobbiamo imporre

$$\begin{aligned} \sqrt{-20+1000} &= \tfrac{1}{10}\sqrt{-M+1000} + \left(1-\tfrac{1}{10}\right)\sqrt{1000} && M = 190.909 \\ -20+1000 &= \tfrac{1}{10}(-M+1000) + \left(1-\tfrac{1}{10}\right)1000 && M = 200 \\ \log(-20+1000) &= \tfrac{1}{10}\log(-M+1000) + \left(1-\tfrac{1}{10}\right)\log(1000) && M = 182.927 \end{aligned}$$

Questo risultato ha senso: dal momento che il terzo consumatore è il più avverso al rischio, è sufficiente una multa minore per indurlo a pagare il biglietto.

Possiamo anche farci una domanda diversa. Supponiamo che la multa sia pari a 190 come nel caso precedente, e immaginiamo di poter cambiare la probabilità con cui passa il controllore. In questo caso, indicando con p la probabilità che passi il controllore dovremmo risolvere

$$\begin{aligned} \sqrt{-20+1000} &\geq \sqrt{1000}\,(1-p) + \sqrt{-190+1000}\;p && p \geq 0.100505 \\ -20+1000 &\geq 1000\,(1-p) + (-190+1000)\,p && p \geq 0.105263 \\ \log(-20+1000) &\geq (1-p)\log(1000) + p\log(-190+1000) && p \geq 0.0958742 \end{aligned}$$

Anche questo risultato é ragionevole: per indurre un individuo avverso al rischio a rispettare la legge è sufficiente una probabilità di ispezione minore (a parità di multa) di quella necessaria per ottenere lo stesso risultato con un decisore neutrale rispetto al rischio.

Quale delle due politiche è la migliore: aumentare la multa o aumentare la probabilità? Notate che se la multa è pari a 190, per indurre tutti i consumatori a pagare il biglietto dobbiamo far aumentare la probabilità da $\frac{1}{10} = 0.1$ a 0.105. Altrimenti è necessario portare la multa da 190 a 200. Supponiamo che per aumentare la probabilità di essere scoperti dal controllore sia necessario assumere 2 nuovi controllori. In questo caso la nostra analisi suggerisce che conviene aumentare l'ammontare della multa: si ottiene lo stesso risultato e si risparmia il costo di avere più controllori sui treni.

Si potrebbe sospettare che ragionando in questo modo, convenga risolvere il problema del crimine semplicemente imponendo multe astronomicamente alte (ad esempio tagliare le mani ai ladri) e probabilità di ispezione molto basse. Si risparmierebbe in questo modo sui costi di controllo, ottenendo comunque il rispetto della legge. Questa intuizione è corretta: il premio Nobel per l'economia Gary Becker dimostrò che un legislatore razionale imporrà sempre la multa più alta compatibile con la morale del paese in cui vive (ad esempio i suoi concittadini potrebbero trovare inaccettabile frustare i giovani che imbrattano i muri con lo spray) e una corrispondente bassa probabilità di ispezione.

■ Assicurazione

Un individuo ha un reddito pari a 1000\$. Ha anche una probabilità su 10 di subire un danno (ad esempio un incidente con la macchina) pari a 100\$. Una compagnia di assicurazione gli offre il seguente contratto: pagerai una somma Π *prima* di sapere se subirai il danno. In caso di incidente, noi rimborseremo per intero il danno. Se ad esempio $\Pi = 12$ \$ il nostro individuo paga 12\$ all'assi curazione e in caso di incidente ottiene 100\$, che lo rimborsano completamente del danno subito.

Vediamo qual è il pagamento monetario atteso di questa lotteria dal punto di vista dell'assicurazione:

$$\mathrm{VA} = \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\Pi + \tfrac{1}{10}\,(\Pi - 100) = 12\left(1 - \tfrac{1}{10}\right) + (12 - 100)\,\tfrac{1}{10} = 2$$

L'assicurazione ottiene $\Pi = 12$ per certo e con probabilità $\frac{1}{10}$ dovrà rimborsare 100 euro. Il pagamento atteso dell'assicurazione è positivo. Quindi, se l'assicurazione avesse molti clienti come il nostro, otterrebbe a lungo andare un profitto pari a 2$ per ogni assicurato.

Il contratto si dice **attuarialmente equo** se il profitto atteso dell'assicurazione è nullo, ossia se VA = 0.

Nel nostro caso abbiamo che il contratto è attuarialmente equo se

$$\mathrm{VA} = \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\Pi + \tfrac{1}{10}\,(\Pi - 100) = 0$$

Ossia se $\Pi = 100\,\frac{1}{10} = 10$

Supponiamo ora che al consumatore venga data la possibilità di acquistare una assicurazione parziale. Ad esempio, può pagare solo la metà di Π, ma in caso di incidente gli verrà rimborsata la metà del danno. In generale, α è un numero compreso tra 0 e 1: se il consumatore acquista una frazione α di assicurazione (pagando $\alpha\Pi$) otterrà un rimborso pari a $\alpha \times 100$. Se $\alpha = 0$ il consumatore decide di non assicurarsi, se $\alpha = 1$ il consumatore si assicura completamente. Se $\alpha = \frac{1}{2}$ il consumatore assicura solo metà del suo possibile danno e così via.

Supponiamo ora che l'utilità del consumatore sia $U(x) = \sqrt{x}$ e che il contratto sia attuarialmente equo, ossia Π = 10. Il valore atteso di aquistare una quantità di assicurazione α è

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\sqrt{-10\,\alpha + 1000} + \tfrac{1}{10}\sqrt{-10\,\alpha - 100 + \alpha\,100 + 1000} \\ &= \tfrac{1}{10}\sqrt{90\,\alpha + 900} + \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\sqrt{-10\,\alpha + 1000} \end{aligned}$$

Quesa formula dice quanto segue: con probabilità $\frac{1}{10}$ il consumatore otterrà il suo reddito (1.000) meno il danno (-100) meno la quota del premio dell'assicurazione che ha deciso di acquistare ($-\alpha \times 10$) più la parte del danno che gli viene rimborsata ($\alpha \times 100$).

Con probabilità $\left(1 - \frac{1}{10}\right)$ il consumatore non subirà alcun danno e il suo reddito sarà pari al reddito iniziale (1.000) meno la spesa per l'acquisto dell'assicurazione ($-10\,\alpha$)

Calcoliamo il valore di questa funzione per tre valori di α: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$. Nel primo caso il consumatore non si assicura per niente, nel secondo assicura solo metà del danno, nel terzo assicura il danno per intero. Avremo che:

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{9\sqrt{1000}}{10} + \frac{\sqrt{1000-100}}{10} = 31.4605 \\ U\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \frac{9\sqrt{1000-5}}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{-\frac{100}{2} + 1000 - 5} = 31.4633 \\ U(1) &= \sqrt{1000 - 10} = 31.4643 \end{aligned}$$

Quindi, l'utilità del consumatore cresce al crescere della frazione del danno che viene assicurata e il valore massimo è raggiunto per $\alpha = 1$. Questo non è un caso. Si può infatti dimostrare che l'utilità del consumatore è massimizzata per $\alpha = 1$. La dimostrazione non è difficile, se si ricorda come si fanno le derivate di funzioni composte. Se la nostra funzione è nella forma

$$y = f(g(x))$$

Allora la sua derivata sarà

$$\frac{dy}{dx} = g'(x)\, f'(g(x))$$

Esempi

$f(g) = \log(g)$	$\frac{df(g)}{dg} = \frac{1}{g}$	$g = x^2$	$\frac{dg}{dx} = 2\,x$	$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} = \frac{2}{x}$
$f(g) = \sqrt{g}$	$\frac{df(g)}{dg} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$	$g = x^3$	$\frac{dg}{dx} = 3\,x^2$	$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} = \frac{3\,x^2}{2\sqrt{x^3}}$
$f(g) = g^2$	$\frac{df(g)}{dg} = 2\,g$	$g = \log(x)$	$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx} = \frac{2\log(x)}{x}$

Torniamo alla nostra funzione di utilità per un consumatore che compra un livello α di assicurazione.

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\sqrt{-10\,\alpha + 1000} + \tfrac{1}{10}\sqrt{-10\,\alpha - 100 + \alpha\,100 + 1000} \\ &= \tfrac{1}{10}\sqrt{90\,\alpha + 900} + \left(1 - \tfrac{1}{10}\right)\sqrt{-10\,\alpha + 1000} \end{aligned}$$

La condizione del primo ordine per massimizzare questa funzione è

$$\frac{dU(\alpha)}{d\alpha} = \frac{45\,\frac{1}{10}}{\sqrt{90\,\alpha+1000-100}} - \frac{5\left(1-\frac{1}{10}\right)}{\sqrt{1000-10\,\alpha}} = 0$$

$$-\frac{5\left(1-\frac{1}{10}\right)}{\sqrt{1000-10\,\alpha}} = \frac{45\,\frac{1}{10}}{\sqrt{90\,\alpha+1000-100}}$$

Elevando al quadrato primo e secondo membro otteniamo

$$\frac{25\left(\frac{1}{10}-1\right)^2}{10\,\alpha-1000} = -\frac{2025\left(\frac{1}{10}\right)^2}{90\,\alpha+1000-100}$$

$$\frac{81}{4\,(10\,\alpha-1000)} = -\frac{81}{4\,(90\,\alpha+900)}$$

da cui si ottiene $\alpha = 1$

La conclusione alla quale siamo arrivati è che se il nostro consumatore può acquistare un contratto attuarialmente equo si assicurerà per intero, ossia sceglierà un livello di assicurazione che gli garantisce lo stesso livello di reddito in caso di incidente come nel caso in cui non abbia alcun incidente.

Questo è un risultato generale che non dipende dalla funzione di utilità che abbiamo utilizzato. In generale, se un consumatore è avverso al rischio e ha la possibilità di assicurarsi con un contratto attuarialmente equo, si assicurerà per intero.

Questa proposizione vale anche al contrario: in assenza di un contratto attuarialmente equo, un consumatore avverso al rischio *non* si assicurerà per intero. Ossia accetterà di avere un reddito più basso in caso di incidente.

Un consumatore avrà la possibilità di sottoscrivere un contratto attuarialmente equo se c'è qualcuno che è disposto ad offriglielo. Questo richiede che ci sia almeno un soggetto economico neutrale rispetto al rischio. Infatti, per definizione, in un contratto attuarialmente equo i profitti attesi sono nulli.

Anche se non ci sono individui neutrali rispetto al rischio, è possibile che ci siano delle *società* che lo sono. Le compagnie di assicurazione possono assicurare simultaneamente molti individui e il loro comportamento approssimerà quello di un decisore neutrale rispetto al rischio.

■ Selezione avversa nei mercati assicurativi

Sul mercato delle assicurazioni contro gli incidenti d'auto ci sono due tipi di soggetti che potrebbero voler sottoscrivere una assicurazione: i fanatici della vita spericolata e i guidatori tranquilli. Ci riferiremo a questi individui come VR (come le iniziali di un celebre rocker italiano) e T (come tranquillo).

I due tipi di individuo hanno lo stesso reddito, pari a 1000 euro, e le stesse preferenze rispetto al rischio, rappresentate da $U(x) = \sqrt{x}$. Differiscono però per la probabilità con la quale causano incidenti. Un guidatore tranquillo provoca un incidente con una probabilita $p_T = \frac{1}{10}$, mentre un guidatore spericolato provoca un incidente con una probabilità $p_{\mathrm{VR}} = \frac{4}{5}$. Il danno provocato da un incidente è pari a 100 euro, indipendentemente da chi lo ha causato.

Nella popolazione i guidatori tranquilli sono $\frac{8}{10}$ del totale, mentre quelli spericolati sono i $\frac{2}{10}$.

Sul mercato ci sono molte imprese che offrono polizze assicurative e sono neutrali rispetto al rischio. Ne segue che tutti gli automobilisti possono acquistare una assicurazione ad un premio attuarialmente equo.

Considereremo tre scenari.

Primo: le assicurazioni sono in grado di distinguere i guidatori tranquilli da quelli spericolati. Possono dunque offrire a ciascuno di essi un contratto attuarialmente equo. Dal momento che la probabilità di causare incidenti per i due tipi di guidatori è diversa, sarà diverso anche il contratto attuarialmente equo. Indicando con Π_T e Π_{VR} i premi assicurativi equi per i tipi tranquilli e i guidatori spericolati rispettivamente otteniamo

$$\Pi_T = 0\left(1 - \tfrac{1}{10}\right) + 100\,\tfrac{1}{10} = 10$$
$$\Pi_{\mathrm{VR}} = 0\left(1 - \tfrac{4}{5}\right) + 100\,\tfrac{4}{5} = 80$$

Questo risultato ha senso: i guidatori spericolati pagano un contratto assicurativo più caro di quelli tranquilli.

Dal momento che tutti i consumatori sono avversi al rischio, sappiamo che sottoscriveranno un contratto attuarialmente equo e quindi sappiamo che entrambe le categorie di consumatori si assicureranno, ciascuna con il suo contratto.

(Nota bene: i guidatori spericolati vorrebbero sottoscrivere il contratto dei guidatori tranquilli ed è qui che entra in gioco l'ipotesi che le compagnie assicurative siano in grado di dire con chi hanno a che fare.)

Secondo: le società di assicurazione non hanno modo di distinguere i tipi tranquilli da quelli spericolati. Se entrambi i tipi sottoscrivono il contratto di assicurazione, la probabilità con la quale un cliente dell'assicurazione farà un incidente è data da

$$p = \frac{4}{5}\frac{2}{10} + \frac{1}{10}\frac{8}{10} = \frac{6}{25}$$

Il secondo membro è dato da: la probabilità che un guidatore tranquillo faccia un incidente ($\frac{1}{10}$) moltiplicata per la probabilità che il cliente dell'assicurazione sia tranquillo ($\frac{8}{10}$) più la probabilità che un cliente spericolato faccia un incidente ($\frac{4}{5}$) per la probabilità che il cliente sia spericolato ($\frac{2}{10}$).

Il contratto attuarialmente equo, ossia quello che ha un pagamento atteso nullo per la compagnia di assicurazione sarà dunque

$$\Pi_{\mathrm{IA}} = 0\left(-\frac{4}{5}\frac{2}{10} - \frac{1}{10}\frac{8}{10} + 1\right) + 100\left(\frac{4}{5}\frac{2}{10} + \frac{1}{10}\frac{8}{10}\right) = 24$$

Ora tutti i consumatori dovranno pagare 24 euro di premio assicurativo, indipendentemente dal fatto di essere tranquilli o spericolati. Badate che questo contratto non è attuarialmente equo per ciascun consumatore singolarmente preso, perchè i consumatori hanno una probabilità di incorrere in un incidente che è diversa da p.

L'utilità attesa per entrambi i tipi di consumatori nel sottoscrivere il contratto assicurativo è ora data da

$$U_T(\Pi_{\mathrm{IA}}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\sqrt{976} + \frac{1}{10}\sqrt{976} = 31.241$$
$$U_{\mathrm{VR}}(\Pi_{\mathrm{IA}}) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\sqrt{976} + \frac{4}{5}\sqrt{976} = 31.241$$

I due tipi di consumatori ottengono la stessa utilità perchè il contratto assicurativo prevede una copertra completa in caso di incidente. Quindi, il loro reddito è costante e pari al loro reddito meno il premio assicurativo.

La loro utilità attesa è invece diversa se decidono di *non* sottoscrivere il contratto assicurativo. In questo caso avremo infatti che

$$U_T(\text{No assicurazione}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\sqrt{1000} + \frac{1}{10}\sqrt{1000 - 100} = 31.4605$$
$$U_{\mathrm{VR}}(\text{No assicurazione}) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\sqrt{1000} + \frac{4}{5}\sqrt{1000 - 100} = 30.3246$$

Abbiamo quindi che

$$U_T(\text{No assicurazione}) == 31.4605 > U_T(\Pi_{\mathrm{IA}}) ==$$
$$U_{\mathrm{VR}}(\Pi_{\mathrm{IA}}) == 31.241 > U_{\mathrm{VR}}(\text{No assicurazione}) == 30.3246$$

Pertanto, i tipi tranquilli *non* si assicureranno perchè per loro è preferibile correre il rischio (basso) di avere un incidente piuttosto che pagare il premio (alto) dell'assicurazione.

Ma questo dimostra che la situazione in cui tutti gli automobilisti si assicurano e le compagnie di assicurazione ottengono profitti nulli non può costituire un equilibrio. Perchè i contratti che tengono in equilibrio i profitti delle compagnie di assicurazione sono troppo onerosi per i guidatori tranquilli.

Se i guidatori tranquilli *non* sottoscrivono l'assicurazione, allora le compagnie di assicurazione saranno sicure che ciascun cliente è spericolato e quindi la probabilità che faccia un incidente è pari a $\frac{4}{5}$. Offriranno quindi contratti assicurativi equi per questa categoria di guidatori, i quali si troveranno a pagare 80 euro per l'assicurazione. I guidatori tranquilli resteranno non assicurati.

Terzo: lo stato *impone* a tutti i consumatori di sottoscrivere una assicurazione. In questo caso, la probabilità che un consumatore commetta un incidente torna ad essere pari a p calcolata in precedenza, perchè quella è la probabilità che un individuo scelto a caso dalla nostra popolazione commetta un incidente. Il contratto attuarialmente equo è ancora quello che prevede un pagamento pari a 24, che ora verrà offerto dalle compagnie di assicurazione perchè tutti gli automobilisti sottoscrivono l'assicurazione, indipendentemente dal loro tipo.

■ Mutua Assicurazione

	Piove su Bruno		Piove su Anna	
	Bruno	Anna	Bruno	Anna
Non condividere	$10 + 100$	0	0	$10 + 100$
Condividere	$-3 + 10 + 100$	3	3	$-3 + 10 + 100$
	$p_B = \frac{1}{3}$		$p_A = \frac{2}{3}$	

Anna e Bruno vivono su un' isola e coltivano un campo di grano ciascuno. Nel corso della primavera pioverà sul campo di Bruno con probabilità $\frac{1}{3}$ e su quello di Anna con probabilità $\frac{2}{3}$, ma non su tutti e due i campi. Il campo sul quale pioverà produrrà 10 unità di denaro, quello sul quale non piove non produrrà nulla.

Inizialmente Anna e Bruno possiedono 100 unità di denaro, e possono decidere di non condividere il raccolto oppure di condividerlo. Se decidono di *non* condividere, ciascuno consumerà solo quello che ha prodotto. Se decidono di condividere, chi dei due avrà il pagamento maggiore darà all'altro due unità di denaro. Le scelte sono riassunte nella tabella in alto.

Supponiamo che le loro funzioni di utilità siano $U(x) = \sqrt{x}$ per Bruno e $W(x) = \log(x)$ per Anna.

Calcoliamo l'utilità attesa di condividere o non condividere il raccolto con l'altra persona.

Bruno

$$U(\text{Non Condividere}) = \frac{2\sqrt{0+100}}{3} + \frac{\sqrt{10+100}}{3} = 10.1627$$

$$U(\text{Condividere}) = \frac{2}{3}\sqrt{0+3+100} + \frac{1}{3}\sqrt{-3+10+100} = 10.279$$

Anna

$$W(\text{Non Condividere}) = \frac{2}{3}\log(0+100) + \frac{1}{3}\log(10+100) = 4.63694$$

$$W(\text{Condividere}) = \frac{2}{3}\log(0+3+100) + \frac{1}{3}\log(-3+10+100) = 4.66013$$

Ne segue che l'utilità attesa di condividere è maggiore sia per Bruno che per Anna. La ragione per cui è meglio per entrambi condividere è che sia Anna che Bruno sono avversi al rischio. Condividere e non condividere hanno lo stesso valore monetario atteso, ma Condividere ha un rischio minore.

■ Il valore delle informazioni

Dovete prendere la seguente decisione: acquistare 50 o 100 abiti per il vostro negozio. Il mercato può essere buono o cattivo. Se è buono venderete 100 abiti, se è cattivo venderete 50 abiti. Ci sono esattamente il 50 per cento delle probabilità che il mercato sia buono o cattivo. I vostri profitti sono riassunti dalla tabella in basso.

	Mercato cattivo 50 abiti	**Mercato buono 100 abiti**
acquisto 50 abiti	5000	5000
acquisto 100 abiti	1500	12 000
Probabilità	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Se siete neutrali rispetto al rischio, ossia $V(x) = x$, la vostra utilità derivante da ciascuna scelta è semplicemente il suo valore monetario atteso. Avremo quindi che

$$V(\text{acquisto 50 abiti}) = \frac{5000}{2} + \frac{5000}{2} = 5000$$
$$V(\text{acquisto 100 abiti}) = \frac{1500}{2} + \frac{12\,000}{2} = 6750$$

Quindi acquistare 100 abiti è preferibile ad acuistarne solo 50, anche se più rischioso.

Supponiamo ora che vi permettano di scegliere quanti abiti comprare, avendo prima osservato lo stato del mercato. Ad esempio il vostro fornitore vi permette di comprare gli abiti a stagione iniziata, in modo che si sappia se il mercato è buono o cattivo.

In questo caso voi sarete in grado di fare la vostra scelta avendo una informazione in più, ossia lo stato del mercato. Quanto siete disposti a pagare per questa informazione?

Se poteste scegliere la vostra strategia *dopo* aver osservato lo stato del mercato, ovviamente scegliereste di acquistare 50 abiti con il mercato cattivo (profitto 5000 invece di 1500) e 100 abiti con il mercato buono (profitto 12000 invece di 5000). Ciascuna di queste eventualità si verificherà con la stessa probabilità. Quindi (prima di sapere quale delle due si verificherà) il vostro profitto atteso è pari a

$$V(\text{Informazione}) = \frac{5000}{2} + \frac{12\,000}{2} = 8500$$

Notate che questa equazione è diversa dalla precedente V(acquisto 100 abiti). La ragione è che ora la decisione di acquistare o no l'informazione la prendete prima di sapere se il mercato sarà buono o cattivo, ma la decisione se scquistare 50 o 100 abiti la prenderete *dopo* e quindi, quale che sia lo stato del mercato, sceglierete la strategia che massimizza il vostro profitto dato lo stato del mercato.

La cifra massima che siete disposti a pagare è dunque 8500 – 6750 = 1750. Infatti, dovendo pagare questa cifra *prima* di sapere se il mercato sarà buono o cattivo il vostro profitto atteso è identico a quello che avreste se decideste ora di acquistare 100 abiti subito. Per qualsiasi cifra minore di 1750 otterreste un profitto strettamente positivo.

10. Utilità ordinale e cardinale

Le funzioni di utilità che utilizziamo nelle decisioni che non coinvolgono il caso sono in larga misura arbitrarie. In effetti, l'unica cosa che richiediamo è che ai panieri preferiti da un consumatore siano associati valori dell'utilità maggiori. Nel caso di decisioni che coinvolgono soltanto il denaro, questo è particolarmente facile da vedere perchè siccome è lecito assumere che un consumatore preferisca avere più denaro piuttosto che meno, la sua funzione di utilità deve essere crescente nel denaro.

Denaro	U_1	U_2	U_3
1000 $	3	100	1000
100 $	2	2	900
0	1	1	0

Queste sono tre possibili assegnazioni di utilità (U_1, U_2, U_3) a tre diversi ammontari di denaro. Siccome 1.000 euro sono meglio di 100 che sono meglio di niente, tutte e tre le funzioni rappresentano altrettanto bene queste preferenze. Infatti $3 > 2 > 1$, $100 > 2 > 1$,

$1000 > 900 > 0$.

Nelle decisioni in condizioni di incertezza, al contrario, queste funzioni di utilità rappresentano preferenze diverse. Prendiamo ad esempio una lotteria che offre con probabilità $\frac{1}{2}$ il pagamento migliore (1000$) e con probabilità $\frac{1}{2}$ il pagamento peggiore (zero) e confrontiamola con la lotteria che offre il pagamento intermedio (100$) con certezza. Indichiamo con $U_1\left(\frac{1}{2},\ 1.000;\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ l'utilità della lotteria che assegna 1.000 con probabilità $\frac{1}{2}$ e zero con probabilità $\frac{1}{2}$. Avremo che

$$U_1\left(\tfrac{1}{2},\ \mathbf{1000\,\$},\ \tfrac{1}{2},\ \mathbf{0}\right) = 2 \quad U_2\left(\tfrac{1}{2},\ \mathbf{1000\,\$},\ \tfrac{1}{2},\ \mathbf{0}\right) = \tfrac{101}{2} \quad U_3\left(\tfrac{1}{2},\ \mathbf{1000\,\$},\ \tfrac{1}{2},\ \mathbf{0}\right) = 500$$
$$U_1(\mathbf{100\,\$}) = 2 \quad U_2(\mathbf{100\,\$}) = 2 \quad U_3(\mathbf{100\,\$}) = 900$$

Un consumatore con la funzione di utilità U_1 è indifferente tra la lotteria che offre 1000$ o 0$ con le stesse probabilità e 100$ per certi, mentre il consumatore con utilità U_2 preferisce la lotteria e il consumatore con utilità U_3 preferisce 100$ per certi.

Nelle decisioni in condizioni di incertezza, quindi, non abbiamo quindi la stessa libertà nello scegliere la funzione con la quale rappresentare le preferenze del nostro consumatore. Anche se l'*ordine* dei numeri è lo stesso, le preferenze rappresentate sono diverse.

Tuttavia, non è vero che esiste una sola rappresentazione delle preferenze. Ossia che una volta fissate le preferenze di un consumatore ci sia un solo modo di rappresentarle numericamente.

Prendiamo ad esempio l'utilità U_1. Se la moltiplichiamo per una costante $b = 2$ e le sommiamo un'altra costante $a = 4$ otteniamo un'altra funzione di utilità U_4. Ad esempio, l'utilità corrispondente a 1000$ è $U_4(1000\,\$) = a + b \times U_3(1000\,\$) = 4 + 2 \times 3 = 10$.

In questo caso l'utilità della lotteria che offre 1000$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e niente con probabilità $\frac{1}{2}$ è ancora uguale all'utilità della lotteria che offre 100 euro per certo. Infatti abbiamo

$$U_4\left(\tfrac{1}{2},\ 1000,\ \tfrac{1}{2},\ 0\right) = \tfrac{1}{2}\,(2\,U_1(\mathbf{1000\,\$}) + 4) + \tfrac{1}{2}\,(2\,U_3(\mathbf{0}) + 4) =$$
$$\tfrac{1}{2}\,(2\,U_1(\mathbf{1000\,\$}) + 4) + \tfrac{1}{2}\,(2\,U_1(\mathbf{0}) + 4) = \tfrac{1}{2}\,(4 + 2 \times 3) + \tfrac{1}{2}\,(4 + 2 \times 1) =$$
$$8 = U_4(100\,\$) = 4 + 2\,U_3(100\,\$) = 4 + 2 \times 2$$

Questa è una proprietà generale delle funzioni di utilità che rappresentano le preferenze rispetto alle lotterie. Se $U(x)$ rappresenta le preferenze di un consumatore e $V(x) = a + b \times U(x)$ per due costanti a e $b > 0$, allora $U(x)$ e $V(x)$ rappresentano le stesse preferenze rispetto alle lotterie. Questo vale anche al contrario. Due funzioni di utilità $U(x)$ e $V(x)$ rappresentano le stesse preferenze rispetto alle lotterie solo se è possibile trovare due numeri tali che $U(x) = a + b \times V(x)$

Possiamo quindi fare la seguente distinzione.

La teoria delle decisioni in assenza di rischio è fondata su una **teoria ordinale** dell'utilità. Ossia, solo l'*ordine* di preferenza tra gli oggetti della decisione conta. Al contrario, le decisioni in condizione di rischio o di incertezza sono basate su una concezione **cardinale** dell'utlità. In questo caso anche l'intensità (e non solo l'ordine) delle preferenze conta. Ad esempio, supponiamo che A sia meglio di B e B sia meglio di C. Fissiamo una rappresentazione dell'utilità U e supponiamo che la differenza in termini di utilità tra A e B sia uguale a quella tra B e C. Ossia

$$U(A) - U(B) = U(B) - U(C)$$

Per qualsiasi altra funzione V che rappresenta le stesse preferenze rispetto alle lotterie devono esistere un a e un $b > 0$ tali che

$$V(x) = a + b\,U(x)$$

Ma allora avremo che

$$\begin{gathered} V(A) - V(B) = V(B) - V(C) \\ a + b\,U(A) - (a + b\,U(B)) = a + b\,U(B) - (a + b\,U(C)) \\ b\,U(A) - b\,U(B) = b\,U(B) - b\,U(C) \\ U(A) - U(B) = U(B) - U(C) \end{gathered}$$

Ne segue che anche se il *livello* dell'utilità è arbitrario (possiamo cambiarlo scegliendo diversamente a) le *differenze* in termini di utilità tra due diverse opzioni non è arbitraria. Una volta fissata una rappresentazione numerica delle preferenze, tutte le rappresentazioni ad essa equivalenti manterranno inalterata la differenza in termini di utilità tra ciascuna coppia di opzioni.

11. Incertezza

	Francia	**Italia**	**Germania**	**Spagna**
D	100	0	0	0
E	0	50	50	0
F	0	0	0	20
	?	**?**	**?**	**?**

La teoria delle decisioni in condizioni di *incertezza* è più complessa. La ragione è che le preferenze di un consumatore dipendono dalla sua utilità per il denaro *e* dalle sue probabilità soggettive. Consideriamo ad esempio un consumatore che dice di preferire la lotteria E alla lotteria D e che entrambe queste lotterie sono meglio di F. Ci sono molte possibili giustificazioni per questa preferenza. Vediamone due:

- Il consumatore non sa nulla di calcio e crede che ciascuna squadra abbia le stesse probabilità di vincere il campionato del mondo. La sua funzione di utilità potrebbe essere

$$U(x) = \sqrt{x}$$

In questo caso avremmo

$$U(\mathrm{D}) = \frac{3\sqrt{0}}{4} + \frac{\sqrt{100}}{4} = 2.5$$
$$U(\mathrm{E}) = \frac{\sqrt{0}}{2} + \frac{\sqrt{50}}{2} = 3.53553$$
$$U(\mathrm{F}) = \frac{3\sqrt{0}}{4} + \frac{\sqrt{20}}{4} = 1.11803$$

Questa preferenza è una conseguenza dell'avversione al rischio del consumatore. Se tutte le squadre hanno la stessa probabilità di vincere, allora la lotteria E sarà migliore della lotteria D perchè offre lo stesso pagamento monetario atteso ($\frac{1}{4} \times 100 = 25 = \frac{1}{4} \times 50 + \frac{1}{4} \times 50$), ma con minore rischio perchè offre pagamenti positivi in due possibili eventi e non in un evento solo.

E' però possibile che il consumatore abbia una funzione di utilità $V(x) = x$ e sia quindi neutrale rispetto al rischio. In questo caso, se assumesse che tutte le squadre hanno la stessa probabilità di vincere dovrebbe essere indifferente tra la lotteria D e la lotteria E.

La ragione per cui preferisce la lotteria E è che ritiene che l'Italia e la Germania abbiano, insieme, una probabilità di vincere maggiore della Francia. Supponiamo ad esempio che le sue probabilità soggettive siano $p_F = .1$, $p_I = .4$, $p_G = .2$, $p_S = .1$ (p_F è la probabilità che vinca la Francia, p_I è la probabilità che vinca l'Italia e così via). Avremo dunque che

$$U(\mathrm{D}) = 0.2\sqrt{0} + 0.3\sqrt{0} + 0.4\sqrt{0} + 0.1\sqrt{100} = 1.$$
$$U(\mathrm{E}) = 0.1\sqrt{0} + 0.3\sqrt{0} + 0.2\sqrt{50} + 0.4\sqrt{50} = 4.24264$$
$$U(\mathrm{F}) = 0.1\sqrt{0} + 0.2\sqrt{0} + 0.4\sqrt{0} + 0.3\sqrt{20} = 1.34164$$

Ne segue che la lotteria migliore è ora la E.

Come è facile vedere, ricavare le preferenze dei consumatori nelle decisioni in condizioni di incertezza presenta dei problemi particolari, perchè è difficile distinguere il loro atteggiamento verso il rischio (ossia se sono avversi al rischio o neutrali) e le loro probabilità soggettive.

Considerate però la preferenza tra la lotteria D e la F. E' facile mostrare che per ogni funzione di utilità $\phi(x)$, F è preferito ad D solo se la probabilità con cui il consumatore ritiene che la Spagna vinca il mondiale è superiore alla probabilità che la Francia vinca il mondiale. L'utilità delle due lotterie è infatti data da

$$\phi(D) = \phi(100)\, p_F + \phi(0)\, p_G + \phi(0)\, p_{\mathrm{I}} + \phi(0)\, p_S$$
$$\phi(F) = \phi(0)\, p_F + \phi(0)\, p_G + \phi(0)\, p_{\mathrm{I}} + \phi(20)\, p_S$$
$$\phi(D) < \phi(F)$$
$$\phi(100)\, p_F + \phi(0)\, p_G + \phi(0)\, p_{\mathrm{I}} + \phi(0)\, p_S < \phi(0)\, p_F + \phi(0)\, p_G + \phi(0)\, p_{\mathrm{I}} + \phi(20)\, p_S$$
$$\phi(20)\, p_S > \phi(100)\, p_F$$

Siccome $\phi(100) > \phi(20)$, questo può essere vero solo se $p_S > p_F$, ossia se il consumatore ritiene che la Spagna vincerà il mondiale con maggiori probabilità.

La ragione di questo risultato è che le lotterie D ed F offrono gli stessi pagamenti monetari in corrispondenza della vittoria di Italia e Germania e differiscono soltanto nel pagamento che offrono in caso di vittoria della Spagna e della Francia. Inoltre, il pagamento in caso di una vittoria della Francia è maggiore di quello ottenuto in caso di vittoria della Spagna. Ne segue che se il consumatore ritenesse ugualmente probabile la vittoria delle due nazionali, sceglierebbe la lotteria *D* (che offre un pagamento migliore in caso di vittoria). L'unico motivo per cui un consumatore può preferire la lotteria *F* è che ritiene più probabile la vittoria della Spagna.

Con questo tipo di procedura è possibile ricavare le probabilità soggettive che gli individui si attribuiscono ai diversi eventi.