Analisi 1

Giacomo Fantoni

18 settembre 2020

Indice

Capitolo 1

Elementi di logica

Si dice proposizione ogni frase che dà informazioni ed è possibile dichiarare univocamente se è vera o falsa, se contiene un'informazione sola viene detta proposizione atomica. Le proposizioni vengono indicate attraverso lettere corsive maiuscole. Quando si utilizzano più proposizioni è utile tracciarne le tabelle di verità:

A	B
V	V
V	F
F	V
F	F

Due proposizioni sono equivalenti (o equipollenti) quando hanno lo stesso valore di verità, cioè la stessa tabella di verità. Le proposizioni composte sono proposizioni formate da più proposizioni atomiche collegate dai connettori logici. Il valore di verità di queste proposizioni è determinato dalle proposizioni di partenza. I connettori logici sono 5: non (negazione $\neg$), e (congiunzione $\wedge$), o (disgiunzione $\vee$), se...allora (implicazione materiale $\Rightarrow$), se e solo se (doppia implicazione $\Leftrightarrow$). Le tabelle di verità delle congiunzioni logiche sono:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

L'implicazione è una relazione di causa-effetto tra la prima e la seconda proposizione: se si verifica la prima deve verificarsi la seconda e se la seconda è vera è vera anche la prima. La prima è condizione sufficiente per la seconda, mentre la seconda è condizione necessaria per la prima. Nel caso della doppia implicazione entrambe sono condizioni necessarie e sufficienti per entrambe. Proprietà dei connettori logici: per $\wedge$ e $\vee$ valgono le proprietà commutativa, distributiva ed associativa.

$$\neg(\neg A) \text{ è equivalente ad } A$$
$$\neg(A \wedge B) \text{ è equivalente a } (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \text{ è equivalente a } (\neg A) \wedge (\neg B)$$
$$A \Rightarrow B \text{ è equivalente a } (\neg A) \vee B$$
$$\neg(A \Rightarrow B) \text{ è equivalente a } A \wedge (\neg B)$$
$$A \Leftrightarrow B \text{ è equivalente a } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$A \Rightarrow B \text{ è equivalente a } (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$

Una tautologia è una proposizione composta sempre vera indipendentemente dai valori di verità delle proposizioni che la costituiscono: $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$. Se P è vera e si vuole dimostrare che Q è vera, basta dimostrare che $P \Rightarrow Q$ sia vera.
Un predicato è una frase contenente una o più variabili che diventa una proposizione una volta che le variabili sono fissate. Un predicato può essere trasformato in una proposizione anche attraverso i quantificatori per ogni ($\forall$), esiste almeno uno($\exists$), esiste solo uno ($\exists!$). Se in un predicato vengono usati entrambi i quantificatori, cambiandone l'ordine cambia il significato della proposizione.

Capitolo 2

Insiemistica

Un insieme è una collezione di oggetti i quali sono detti elementi dell'insieme. Un insieme è definito se è possibile determinare univocamente se un elemento appartiene o no all'insieme. Un insieme viene genericamente indicato con una lettera un stampato maiuscolo, mentre i suoi elementi con lettere minuscole. Se x è un elemento di E, x appartiene ad E, $x \in E$, se x non appartiene ad E $x \notin E$.Gli insiemi si possono definire per enumerazione, elencando cioè ogni elemento in essi presente o determinando una caratteristica che accomuna tutti gli elementi di tale insieme. L'insieme privo di elementi è l'insieme vuoto $(\{\}, \emptyset)$. Un sottoinsieme è un insieme in cui ogni elemento è contenuto nell'insieme di cui è sottoinsieme.

2.1 Convenzioni di scrittura degli insiemi

$$E = \{x : P(x)\} \wedge P(x) = Q(x) \wedge S(x) \wedge T(x) \Rightarrow E = \{x : Q(x), S(x), T(x)\}$$
$$E = \{x : x \in P(x) \wedge F(x)\} \Rightarrow E = \{x \in P(x) : F(x)\}$$

2.2 Operazioni tra insiemi

2.2.1 Unione di insiemi

$$F(E \cup U) = \{x : x \in E \vee x \in U\} \tag{2.1}$$

2.2.2 Intersezione di insiemi

$$F(E \cap U) = \{x : x \in E \wedge x \in U\} \tag{2.2}$$

2.2.3 Differenza di insiemi

$$E \backslash F = \{x : x \in E, x \notin F\} \tag{2.3}$$

2.2.4 Complementare di un insieme E rispetto all'insieme universale X

$$X \backslash E = E^c = \{x \in X : x \notin E\} \tag{2.4}$$

2.2.5 Alcune proprietà di unione e intersezione

Le due operazioni sono commutative, associative e distributrive.

2.3 Caratterizzazione di insiemi

Se $E \cap U = \emptyset$ E ed F si dicono disgiunti. L'insieme delle parti di un insieme, P(E), è l'insieme che contiene tutti i sottoinsiemi dell'insieme di partenza, ha cardinalità 2^n, dove n è la cardinalità dell'insieme di partenza.
Prodotto cartesiano di E e F: $ExF = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$, $ExE = E^2$, $RxR = R^2$ viene rappresentato graficamente con il piano cartesiano.

2.4 Leggi di de Morger

$$\begin{gathered} E, F \subset X : \\ (E \cup F)^c = E^c \cap F^c \\ (E \cap F)^c = E^c \cup F^c \end{gathered}$$

Capitolo 3

Insiemi numerici

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
$\mathbf{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$
$\mathbf{R} = \{\mathbf{Q}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \}$
$\mathbf{C}$

3.1 Assiomi algebrici

All'interno di $\mathbf{Q}$ valgono i seguenti assiomi per le operazioni di somma(+) e moltiplicazione($\cdot$).

3.1.1 La somma

$\mathbf{Q}x\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$

- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x + y = y + x$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, (x + y) + z = x + (y + z)$
- $\forall x \in \mathbf{Q}\exists!$ elemento neutro [zero, 0]: $x + 0 = x$
- $\forall x \in \mathbf{Q}\exists!$ opposto di $x = -x : x + (-x) = 0$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x + y + z = (x + y) + z$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x - y = x + (-y)$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$
- La differenza $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x - y = x + (-y)$

3.1.2 Il prodotto

$\mathbf{Q}x\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$

- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \cdot y = y \cdot x$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
- $\forall x \in \mathbf{Q}\exists!$ elemento neutro [unità, 1] $: x \cdot = x$
- $\forall x \neq 0 \in \mathbf{Q}\exists!$ reciproco di $x = \frac{1}{x} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$
- La divisione $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

3.1.3 Ulteriori proprietà di somma e prodotto

- La proprietà di collegamento tra somma e prodotto è la proprietà distributiva: $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \cdot y = z \Leftrightarrow x = \frac{z}{y}$
- $\forall x \in \mathbf{Q}, -(-x) = x$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, (-x) \cdot (-y) = (x \cdot y)$
- $\forall x \in \mathbf{Q}, \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
- $\forall x \in \mathbf{Q}, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$
- Legge di annullamento del prodotto: $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

3.2 Ordinamento

$\mathbf{Q}$ è ordinato secondo la relazione $\leq$

- $\forall x \in \mathbf{Q}, x \leq x$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, [(x \leq y) \wedge (x \geq y)] \Rightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
- $\forall x, \in \mathbf{Q}, x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \geq y \Rightarrow -x \leq -y$
- $\forall x, y, z \in \mathbf{Q}, x \geq y, z \leq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \geq y \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- $\forall x \neq 0 \in \mathbf{Q}, x^2 \geq 0$
- $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$

3.2.1 Teorema dell'incompletezza di Q

L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, [x > o \Rightarrow x^2 \neq 2] \tag{3.1}$$

Dimostrazione

Si consideri vera la negazione: $\exists x \in \mathbb{Q} : [x > 0 \wedge x^2 = 2]$.

$$x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}\, primi\, tra\, loro:$$
$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2\, pari \Rightarrow p\, pari$$
$$\exists m \in \mathbb{N} : p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow 2m^2 = q^2 \Rightarrow q^2\, pari \rightarrow q\, pari$$

Dovendo essere per ipotesi p e q primi tra loro giungo ad un assurdo e pertanto il teorema è dimostrato

3.3 I numeri reali

I numeri reali sono un insieme numerico per cui valgono gli stessi assiomi algebrici e di ordinamento rispetto a $\mathbb{Q}$, ma inoltre possiede l'assioma di continuità. Definendo $A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$, si dice che A sta a sinistra di B se $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. L'assioma di continuità dice che se A sta a sinistra di B, $\exists c : c \leq a \forall a \in A \wedge c \geq b \forall b \in B$. Si può considerare anche come $\mathbb{Q}$ a cui siano stati aggiunti i numeri illimitati non periodici, o numeri irrazionali ($\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$).

3.4 Proprietà Q e R

3.4.1 Densità

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Q}; x < y\ \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{Q} \mid x < z < y$$

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}; x < y\ \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{R} \mid x < z < y$$

Dimostrazione per Q

Per dimostrare la proprietà di densità in $\mathbb{Q}$, si considera la media tra i due numeri z; successivamente si fa la media tra il numero z e uno dei due estremi e ancora la media tra questo nuovo numero e il numero trovato all'infinito:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x+y}{2}, \\ z_2 &= \frac{x+z_1}{2}, \\ &., \\ &., \\ &., \\ z_n &= \frac{x+z_{n-1}}{2} \to z_n \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

3.4.2 Archimedea

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Q};\ \ x, y > 0; x < y\ \exists\ n \in \mathbb{N} \mid nx > y$$

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R};\ \ x, y > 0; x < y\ \exists\ n \in \mathbb{N} \mid nx > y$$

In particolare:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N} \mid x > \frac{1}{n}$$

Dimostrazione per Q

- Se $y \leq x \Rightarrow n = 1$
- Se $y > x, x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}, p, q, r, s \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \Rightarrow \frac{r}{s} \leq r \leq rp, rp = \frac{p}{q}qr$

3.4.3 Completezza dei reali

Vedi sezione nel capitolo degli estremi di insiemi.

Capitolo 4

Il valore assoluto

$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = max\{-x, x\} \vee \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
Rappresenta la distanza di x da 0.

- $\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geq 0 \wedge |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall a > 0, |x| \geq a \Leftrightarrow [-a; a]$
- $\forall x \in \mathbf{R}, -|x| \leq x \leq |x|$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$
- $\forall x, y \neq 0 \in \mathbf{R}, \frac{|x|}{|y|} = |\frac{x}{y}|$

Capitolo 5

Estremi di insiemi

5.1 Intervalli

Si definiscono come **intervalli** alcuni particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&[\text{a, b}] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\ \} \text{ intervallo } \textbf{chiuso} \\
&(\text{a, b}) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ intervallo } \textbf{aperto} \\
&(\text{-}\infty,\ \text{b}] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \text{ intervallo } \textbf{illimitato} \\
&[\text{a, } +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \text{ intervallo } \textbf{illimitato}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2 Maggiorante

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $\mathbb{A}$ è **superiormente limitato** se:

$$\exists\ M \in \mathbb{R} \mid x \leq M\ \forall\ x \in \mathbb{A} \tag{5.2}$$

M viene chiamato **maggiorante**.

5.3 Minorante

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $\mathbb{A}$ è **inferiormente limitato** se:

$$\exists\ m \in \mathbb{R} \mid x \geq m\ \forall\ x \in \mathbb{A} \tag{5.3}$$

m viene chiamato **minorante**.

5.4 Massimo

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. $max\mathbb{A} = \bar{x} \in \mathbb{R}$ è **massimo** di $\mathbb{A}$ se:

$$\begin{cases} x \leq \bar{x}\ \forall\ x \in \mathbb{A} \\ \bar{x} \in \mathbb{A} \end{cases} \tag{5.4}$$

5.5 Minimo

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. $min\mathbb{A} = \hat{x} \in \mathbb{R}$ è **minimo** di $\mathbb{A}$ se:

$$\begin{cases} x \geq \hat{x} \ \forall \ x \in \mathbb{A} \\ \hat{x} \in \mathbb{A} \end{cases} \tag{5.5}$$

5.5.1 Osservazioni circa massimo/minimo

i. Se $\exists \ max\mathbb{A}$ o $\exists \ min\mathbb{A}$, essi sono **unici**.

ii. $\exists \ max\mathbb{A} \iff \exists \ M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \ \forall \ x \in \mathbb{A}$
$\exists \ min\mathbb{A} \iff \exists \ m \in \mathbb{R} \mid x \geq m \ \forall \ x \in \mathbb{A}$

5.5.1.1 Unicità su massimo e minimo

Un insieme può avere al più un massimo o un minimo: supponendo che ce ne siano due: $m_1 \leq m_2$, per la definizione di massimo si avrebbe $m_2 \leq m_1$, pertanto $m_1 = m_2$.

5.6 Estremo superiore

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. Viene definito **estremo superiore** di A:

$$sup\mathbb{A} = min\{M \in \mathbb{R} | x \leq M \ \forall \ x \in \mathbb{A}\} \tag{5.6}$$

5.6.0.1 Caratterizzazione

Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato, $s \in \mathbb{R}$:

$$s = sup\mathbb{A} \iff \begin{cases} s \geq x \ \forall \ x \in \mathbb{A} \\ \forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ x \in \mathbb{A} \mid x > s - \epsilon \end{cases} \tag{5.7}$$

5.7 Estremo inferiore

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$. Viene definito **estremo inferiore** di A:

$$inf\mathbb{A} = max\{m \in \mathbb{R} | x \geq m \ \forall \ x \in \mathbb{A}\} \tag{5.8}$$

5.7.0.1 Caratterizzazione inf

Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ inferiormente limitato, $t \in \mathbb{R}$:

$$t = inf\mathbb{A} \iff \begin{cases} t \leq x \ \forall \ x \in \mathbb{A} \\ \forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ x \in \mathbb{A} \mid x < t + \epsilon \end{cases} \tag{5.9}$$

5.8 Osservazioni estremo superiore/inferiore

1. Se $\exists\ max\mathbb{A} \implies \exists\ supA = max\mathbb{A}$
   Se $\exists\ minA \implies \exists\ infA = min\mathbb{A}$
2. Se $\exists\ sup\mathbb{A}, sup\mathbb{A} \in \mathbb{A} \implies \exists max\mathbb{A} = sup\mathbb{A}$
   Se $\exists\ inf\mathbb{A}, inf\mathbb{A} \in \mathbb{A} \implies \exists min\mathbb{A} = inf\mathbb{A}$

5.9 Insiemi finiti

Un insieme $\mathbb{A}$ si dice **finito** se ha un numero finito di elementi.
Se $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{A}$ finito, $\mathbb{A} \neq \emptyset \implies \exists\ max\mathbb{A}, min\mathbb{A}$

5.10 Completezza dell'insieme dei Reali

Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$:

Se $\mathbb{A}$ è limitato superiormente (o inferiormente) $\implies \exists\ sup\mathbb{A} \in \mathbb{R}$ (o $\exists\ inf\mathbb{A} \in \mathbb{R}$)

$A \subseteq \mathbf{R}$, se A è limitato superiormente allora $\exists supA \in \mathbf{R}$, se è limitato inferiormente allora $\exists infA \in \mathbf{R}$. Considerando l'insieme dei maggioranti di A, chiamato B, essendo A limitato superiormente, $B \neq \emptyset$. Pertanto l'insieme A sta a sinistra di B, per l'assioma di continuità, $\exists c \in \mathbf{R} : a \leq c \forall a \in A, c \leq b \forall b \in B$, pertanto esiste il minimo dei maggioranti, o supA.

Capitolo 6

Potenze, esponenziali, logaritmi

6.1 Potenze

6.1.1 Proprietà

- $x^n \cdot x^m = x^{m+n}$
- $(x^n)^m = x^{m \cdot n}$
- $(xy)^n = x^n \cdot y^n$

6.1.2 Potenze ad esponente intero positivo x^n

$\forall x \in \mathbf{R}$

- $x^2 = x \cdot x$
- $x^3 = x \cdot x \cdot x$
- $x^n = x^{n-1} \cdot x$
- $x^n \geq 0 \forall x \in \mathbf{R}$, n pari.
- $x^n \leq 0 \forall x \in \mathbf{R}^-$, n dispari.

Se n è 2, $\forall x_1, x_2, \in \mathbf{R}, 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2$. Si dimostra moltiplicando prima per x_1 e poi per x_2 e confrontando le due equazioni: $\cdot x_1 = x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_1$, $\cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2$,
essendo $x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_1$,
ottengo che $x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2 \Rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2$.
Se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow {x_1}^2 > {x_2}^2$.
Se nè 3 $x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^3 < {x_2}^3$

6.1.3 Potenze ad esponente intero negativo x^-n

$\forall x \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

6.1.4 Potenze ad esponente frazionario $x^{\frac{1}{n}}$

6.1.4.1 Esistenza della radice n-esima

Sia $y \in \mathbf{R}, y \geq 0, n \in \mathbf{N} nn \geq 1 \Rightarrow \exists! x \in \mathbf{R}, x \geq 0 : x^n = y.$
x è indicato come $y^{\frac{1}{n}}$ no $\sqrt[n]{y}$
$\sqrt[n]{y} = sup\{a \in [0, +\infty[: a^n \leq y\}$

6.1.5 Potenze ad esponente razionale y^q

$\forall x \in \mathbf{R}, x \geq 0, x^q \doteq (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}, \forall q = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}, n \neq 0$
Si consideri $x \in \mathbf{R}^+, x = a$, mentre gli esponenti $q, r, s \in \mathbf{Q}$. È ben definito $a^r, r \in \mathbf{Q}$. Dalle proprietà delle potenze segue che $\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \forall r, s \in \mathbf{Q}$ esse si conservano, inoltre $a^r > 0$,$a^0 = 1$
Se $(a > 1 \wedge r > 0) \vee (0 < a < 1 \wedge r < 0), r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$
Se $(0 < a < 1 \wedge r > 0) \vee (a > 1 \wedge r > 0), r < s \Leftrightarrow a^r > a^s$
$\forall a \neq 1 a^r = a^s \Rightarrow r = s$

6.2 Esponenziali a^x

$a^x, a > 1, x \in \mathbf{R}, x < 0, x = p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, a^x \dot{=} sup\{a^{p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\}$
Se $0 < a < 1, x \in \mathbf{R}^+, a^x \dot{=} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$
Se $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R}^-, a^x \dot{=} \frac{1}{a^{-x}}$
Rimangono soddisfatte tutte le proprietà elencate per a^x con $x \in \mathbf{Q}$

6.3 Logaritmi $\log_a x$

Si intende per logaritmo la soluzione dell'equazione: $a^x = y, y \in \mathbf{R}^+$. La soluzione x si chiama algoritmo in base a di y ($x = \log_a y$).

6.3.1 Esistenza del logaritmo

$a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1, y \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \exists! x \in \mathbf{R} : a^x = y.$
La dimostrazione si basa sull'esistenza dell'estremo superiore e procede in maniera analoga all'esistenza della radice n-esima,

6.3.2 Proprietà

- $a^{\log_a y} = y, \forall y > 0$

- $\log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$
- $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$
- $\log_a a^\alpha = \alpha \log_a a, \forall x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$
- $\log_a a^x = x \forall x \in \mathbf{R}$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$
- Cambio di base: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
- $0 < x_1 < x_2$
  - $\Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, a > 1$
  - $\Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, 0 < a < 1$

Capitolo 7

Numeri Complessi

7.1 Definizione

Viene definito unità immaginaria i quel numero per cui $i^2 = -1$. L'insieme dei numeri complessi si definisce quindi come:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{7.1}$$

La forma algebrica di un numero complesso z viene definita come:

$$z = \overbrace{\underbrace{x}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{y}_{\text{parte immaginaria}}}^{\text{numero complesso}}$$

7.1.0.1 Osservazione

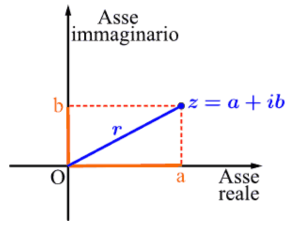
$z \in \mathbb{C}$ è reale $(z \in \mathbb{R}) \iff Imz = 0$

7.2 Piano di Gauss

Il piano di Gauss è un piano $\mathbb{R}^2$ ove l'asse delle ascisse è Rez e l'asse delle ordinate Imz. Ogni numero complesso z è quindi rappresentabile come un punto sul piano di Gauss.

7.3 Alcune operazioni coi numeri complessi

Avendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:



7.3.1 Somma

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \tag{7.2}$$

In particolare:
$Re(z_1 + z_2) = x_1 + x_2$
$Im(z_1 + z_2) = y_1 + y_2$

7.3.2 Prodotto

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{7.3}$$

In particolare:
$Re(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$
$Im(z_1 z_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

7.3.3 Modulo

Avendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z come:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

Nel piano di Gauss, $|z|$ viene rappresentato come la distanza dal punto z all'origine.

7.4 Coniugato di z

Con $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si definisce il coniugato di z come:

$$\bar{z} = x - iy \tag{7.5}$$

7.5 Numeri complessi notevoli

7.5.0.1 Elemento neutro somma

$0 \ + \ i0$

7.5.0.2 Elemento opposto somma

$-x \; - \; iy$

7.5.0.3 Elemento neutro prodotto

$1 \; + \; i0$

7.5.0.4 Elemento reciproco prodotto

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

7.5.0.5 Osservazioni

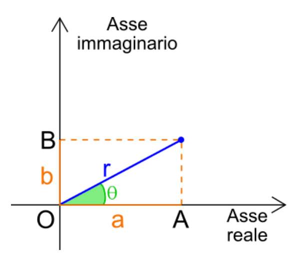
Avendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si può dimostrare:

$$\begin{gathered} \overline{1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2} \\ |\bar{z}| = |z| \\ z\bar{z} = |z|^2 \\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{gathered} \tag{7.6}$$

7.6 Rappresentazione trigonometrica

Un numero complesso z può inoltre essere definito come un vettore che ha per origine l'origine del piano di Gauss, come modulo il modulo di z e come direzione un angolo θ:

$$\begin{gathered} z = r(cos(\theta) + isen(\theta)) = \\ r(cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi))\forall k \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{7.7}$$



In particolare:

i. $r = |z| \geq 0$, in quanto il modulo di un numero complesso è per definizione positivo

ii. θ è detto **argomento** di z

7.7 Operazioni con rappresentazione trigonometrica

7.7.1 Prodotto

Con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; definiamo $\theta_1 = argz_1,\ \theta_2 = argz_2$:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)) \tag{7.8}$$

7.7.1.1 Dimostrazione

$$z_1 z_2 = |z_1|(cos(\theta_1) + isen(\theta_1)) * |z_2|(cos(\theta_2) + isen(\theta_2)) =$$
$$|z_1||z_2|(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + i^2 sen(\theta_1)sen(\theta_2) + icos(\theta_1)sen(\theta_2) + isen(\theta_1)cos(\theta_2)) =$$
$$|z_1||z_2|((cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)) + i(cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2))) =$$
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$$

7.7.2 Potenza (formula di De Moivre)

Avendo $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n = |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \tag{7.9}$$

7.7.3 Radici n-esime

$w, z \in \mathbb{C}\ \ n \in \mathbb{N}$
Se $n > 1$, un numero z è radice n-esima di $w \iff z^n = w$
Sia $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n > 1, w = |w|(cos(\theta) + isen(\theta)$:

i. Se $w = 0$ la sola radice di w è $z = 0$

ii. Se $w \neq 0$ allora w ha **n** radici **distinte** che sono:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}(cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})),\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < n \tag{7.10}$$

7.7.3.1 Dimostrazione

i. $w = 0 \iff |z^n| = 0 \iff |z| = 0 \iff z = 0$

ii. $z = |z|(cos(t) + isen(t));\ z^n = w \iff$

$$|z|^n(cos(nt) + isen(nt)) = |w|(cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi) \iff \begin{cases} |z|^n = |w| \\ nt = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

7.7.4 Teorema fondamentale dell'algebra

L'equazione polinomiale della forma: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ ha esattamente **n** radici in $\mathbb{C}$

7.7.5 Notazione Esponenziale

Per la formula di Eulero:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta) \tag{7.11}$$

Un numero complesso $z = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$ si può esprimere in notazione esponenziale come:

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{7.12}$$

Capitolo 8

Il principio di induzione

8.1 Definizione di Pn

P_n è una proposizione (o affermazione) che dipende da n.

8.2 Principio di induzione debole

Sia P_n una proposizione definita $\forall\ n > n_0;\ n, n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} i.\ P_{n_0} \text{ è vero} \\ ii.\ \forall\ n > n_0, \text{ supposta vera } P_n \text{ è vera anche } P_{n+1} \end{cases} \iff P_n \text{ è vera} \tag{8.1}$$

L'affermazione *ii.* è chiamata **scatto induttivo**.

8.3 Principio di induzione forte

Sia P_n una proposizione definita $\forall\ n > n_0;\ n, n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} i.\ P_{n_0} \text{ è vero} \\ ii.\ \forall\ n > n_0, \text{ supposte vere } P_{n_0}, P_{n_0+1}, ..., P_n \text{ è vera anche } P_{n+1} \end{cases} \iff P_n \text{ è vera} \tag{8.2}$$

8.4 Osservazione

Varianti del problema possono porre come incognita anche n_0. In questo caso, conviene dimostrare inizialmente *ii.* e poi cercare, fra i risultati ottenuti, il più piccolo numero $n_0 \in \mathbb{N}$ che soddisfi anche *i.* .

Capitolo 9

Funzioni

9.1 Definizione

Dati due insiemi $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ qualsiasi, una funzione di dominio $\mathbb{X}$ e valori in $\mathbb{Y}$ (=codominio) è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di $\mathbb{X}$ associa un (e **uno solo**) elemento di $\mathbb{Y}$.

$$\begin{gathered} f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \\ x \to y = f(x) \end{gathered} \tag{9.1}$$

9.2 Funzioni particolari

9.2.1 Funzione costante

$$\begin{gathered} \bar{y} \in \mathbb{Y}, f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \\ f(x) = \bar{y} \ \forall \ x \in \mathbb{X} \end{gathered}$$

9.2.2 Funzione identità

$$\begin{gathered} I_x : \mathbb{X} \to \mathbb{X} \\ I_x(x) = x \ \forall \ x \in \mathbb{X} \end{gathered}$$

9.2.3 Funzione restrizione

$$\begin{gathered} f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}; \mathbb{A} \subseteq \mathbb{Y} \\ f \restriction_{\mathbb{A}} = f(x) \ \forall \ x \in \mathbb{A} \\ f \restriction_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{Y}; \ x \to f(x) \end{gathered}$$

9.3 Insieme Immagine

Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ e $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Y}$, diremo $\mathbb{A}$ tramite f l'insieme $f(\mathbb{A}) = \{f(x)|x \in \mathbb{A}\}$. Se $\mathbb{A} = \mathbb{X}$, $f(\mathbb{X})$ è semplicemente detta Immagine di f; $f(\mathbb{X}) = Imf$

9.4 Iniettività, Suriettività e Biettività

9.4.1 Iniettività

Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si dice **iniettiva** se:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}, x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$$

Analogamente, il concetto di iniettività può essere definito come:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$$

Se la funzione è strettamente crescente o decrescente è iniettiva. $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è iniettiva se ogni retta orizzontale interseca il suo grafico al più in un punto.

9.4.2 Suriettività

Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si dice **suriettiva** se:

$$\forall y \in \mathbb{Y} \ \exists \ x \in \mathbb{X} \mid f(x) = y$$

Analogamente, il concetto di suriettività può essere definito come:

$$Imf = \mathbb{Y}$$

9.4.3 Biettività

Una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si dice **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

$$f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \ \textit{biettiva} \iff \forall \ y \in \mathbb{Y} \ \exists! \ x \in \mathbb{X} \mid f(x) = y$$

9.5 Grafico

Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$; si dice grafico di f (indicato con $G(f)$ o $graph(f)$) il sottoinsieme di $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ definito come:

$$graph(f) = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{X}\} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$$

Spesso si usa impropriamente la parola *funzione* per indicare il *grafico di funzione*, ma è generalmente accettato a scopo di semplificazione del discorso.

9.6 Altre funzioni particolari

9.6.1 Funzione parte intera

$$\begin{gathered} [\cdot] \colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow [x] = max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} \end{gathered} \tag{9.2}$$

9.6.2 Funzione di Heaviside

$$\begin{gathered} H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow H(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{9.3}$$

9.6.3 Funzione segno

$$\begin{gathered} sgn : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow sgn(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{9.4}$$

9.6.4 Funzione mantissa

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = x - [x] \end{gathered} \tag{9.5}$$

9.6.5 Funzione parte positiva

$$\begin{gathered} f_+ : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ f_+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{9.6}$$

9.6.6 Funzione parte negativa

$$\begin{gathered} f_- : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ f_-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x \geq 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{9.7}$$

9.7 Operazioni tra funzioni

- Somma di due funzioni: $(f \pm g)(x) \doteq f(x) \pm g(x) \forall x \in A$.
- Prodotto di due funzioni: $(f \cdot g)(x) \doteq f(x) \cdot g(x) \forall x \in A$.
- Rapporto di due funzioni: $\frac{f}{g}(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in A : g(x) \neq 0$.

9.8 Trasformazioni di funzioni

Una funzione può essere:

- Traslata verticalmente: $f(x) + a$, verso l'alto se a positivo, verso il basso se a negativo.
- Traslata orizzontalmente: $f(x+a)$ verso sinistra se a positivo, verso destra se a negativo.
- Dilatata verticalmente: $af(x)$: cambio di scala su asse Y, dilatazione se $a < 1$, compressione se $0 < a < 1$, se $a < 0$ il grafico viene riflesso rispetto all'asse X.
- Dilatata orizzontalmente: $f(ax)$: cambio di scala su asse X, compressione se $a < 1$, dilatazione se $0 < a < 1$, se $a < 0$ il grafico viene riflesso rispetto all'asse Y.
- Valore assoluto:
  - $|f(x)|$ la parte negativa del grafico viene riflessa rispetto all'asse X.
  - $f(|x|)$ il grafico della parte negativa si trova riflesso rispetto all'asse Y nella parte negativa.

9.9 Proprietà

9.9.1 Monotonia

Sia $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ funzione detta (nell'insieme $\mathbb{A}$):

1. **crescente**: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, $x_1 < x_2$; $f(x_1) \leq f(x_2)$
2. **strettamente crescente**: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, $x_1 < x_2$; $f(x_1) < f(x_2)$
3. **decrescente**: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, $x_1 < x_2$; $f(x_1) \geq f(x_2)$
4. **strettamente decrescente**: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, $x_1 < x_2$; $f(x_1) > f(x_2)$
5. **monotona**: f crescente oppure decrescente
6. **strettamente monotona**: f strettamente crescente oppure strettamente decrescente

9.9.1.1 Osservazioni

1. La somma di due funzioni crescenti è crescente;
   La somma di due funzioni decrescenti è decrescente

2. Il prodotto di due funzioni crescenti non negative è crescente

9.9.2 Parità

Sia $\mathbb{X}$ **simmetrico** rispetto l'origine (cioè: $\forall\ x \in \mathbb{X};\ -x \in \mathbb{X}$); se $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ allora:

i. f si dice **pari** in $\mathbb{X}$ se $f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{X}$

ii. f si dice **dispari** in $\mathbb{X}$ se $f(x) = -f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{X}$

9.9.3 Periodicità

Sia $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$; $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ si dice **periodica** di periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale tale che $x + T \in \mathbb{X}$, $f(x) = f(x + T)$
Ogni intervallo di lunghezza T è detto intervallo di periodicità

9.10 Estremi di funzione

Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

9.10.1 Positività

1. f si dice **positiva** in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \iff f(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{A}$

2. f si dice **non negativa** in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \iff f(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{A}$

3. f si dice **negativa** in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \iff f(x) < 0\ \forall\ x \in \mathbb{A}$

4. f si dice **non positiva** in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \iff f(x) \leq 0\ \forall\ x \in \mathbb{A}$

9.10.2 Limitazione, massimo assoluto, minimo assoluto, estremo superiore e inferiore e caratterizzazione

Gli estremi assoluti di f sono gli stessi dell'insieme $f(\mathbb{X}) = Immf$; per le definizioni fare quindi riferimento agli estremi di insiemi.

9.11 Successioni

La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \to f(n) = a_n$ è chiamata successione e scritta anche come: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

9.12 Composizione di funzioni

Siano: $f : domf \to \mathbb{Y}$; $g : domg \to \mathbb{W}$ due funzioni e $\mathbb{A} = \{x \in domf \mid f(x) \in domg\}$. Si può allora definire:

$$\begin{gathered}(g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ g \circ f : \mathbb{A} \in \mathbb{W}\end{gathered} \tag{9.8}$$

In particolare $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Y}$ ed è sempre definita $g \circ f \restriction_{\mathbb{A}}$

9.12.0.1 Osservazione

$f \circ g \neq g \circ f$

9.12.1 Proprietà

Sia $\mathbb{A} \subseteq dom(g \circ f)$.

i. $\begin{cases} f \text{ crescente in } \mathbb{A} \\ g \text{ crescente in } f(\mathbb{A}) \end{cases} \implies g \circ f$ crescente

ii. $\begin{cases} f \text{ crescente in } \mathbb{A} \\ g \text{ decrescente in } f(\mathbb{A}) \end{cases} \implies g \circ f$ decrescente

iii. $\begin{cases} f \text{ decrescente in } \mathbb{A} \\ g \text{ crescente in } f(\mathbb{A}) \end{cases} \implies g \circ f$ decrescente

iv. $\begin{cases} f \text{ decrescente in } \mathbb{A} \\ g \text{ decrescente in } f(\mathbb{A}) \end{cases} \implies g \circ f$ crescente

9.13 Funzione inversa

Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione biettiva. La **funzione inversa** di f si definisce come:

$$\exists\ f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X};\ y \to x = f^{-1}(y) \mid f(x) = y \tag{9.9}$$

Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva. La funzione inversa conserva la monotonia.

9.13.1 Osservazioni

1. $f^{-1}(f(x)) = x$
   $f(f^{-1}(y)) = y$

2. Se $(y, x) \in graph(f^{-1}) \implies f^{-1}(y) = x \implies f(x) = y \implies (x, y) \in graph(f)$
   (Il grafico di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto la bisettrice del primo e del terzo quadrante).

9.13.2 Funzioni goniometriche inverse

Siano le funzioni goniometriche:

$$\begin{aligned} sen &: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1] \\ cos &: [0; \pi] \to [-1; 1] \\ tan &: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{9.10}$$

Le funzioni inverse sono:

$$\begin{aligned} arcsen &: [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ arccos &: [-1; 1] \to [0; \pi] \\ arctan &: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{aligned} \tag{9.11}$$

9.13.2.1 Osservazioni sulle funzioni goniometriche inverse

- $\sin(\arcsin x) = x \forall x \in [-1, 1]$.
- $\arcsin(sinx) = x \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall x \in \mathbf{R}, \arcsin(\sin x) = x'$ dove x' è l'unico punto in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{.}2]$ tale che $\sin x = \sin x'$.
- $\cos(\arccos x) = x \forall x \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x \forall x \in \mathbf{R}, \arccos(\cos x) = x'$ dove x' è l'unico punto in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\cos x = \cos x'$.
- $\tan(\arctan x) = x \forall x \in \mathbf{R}$.
- $\arctan(\tan x) = x \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall x \in \mathbf{R}, \arctan(\tan x) = x'$ dove x' è l'unico punto in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{.}2]$ tale che $\tan x = \tan x'$.

9.13.3 Risoluzione di equazioni o disequazioni con metodo grafico

Disegno la funzione sulla destra e quella sulla sinistra e successivamente ne considero la posizione reciproca.

Capitolo 10

Proprietà locali di una funzione

10.1 La vicinanza a un punto

10.1.1 La distanza

La distanza in $\mathbb{R}$ è definita da $d(x,y) \doteq |x-y|, \forall x,y \in]\mathbb{R}, d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x,y) = d(y,x), d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$

10.2 L'intorno

Fissati $x_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, chiameremo intorno (sferico) di centro x_0 e raggio ϵ, l'intervallo $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \epsilon\}$ I_{x_0} è l'insieme degli intorni sferici di x_0 indicati come U, V, W.

10.3 Estremi locali di una funzione

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in X$, x_0 si dice punto di minimo locale di f e $f(x_0)$ minimo locale se $\exists U \in I_{x_0} : f(x_0) \leq f(x) \forall x \in U \cap X$, se manca l'uguale si dice punto di minimo locale stretto o forte per f, analogamente per il massimo.

10.3.1 I numeri reali estesi

Non è un insieme numerico $\bar{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \mp\infty, x < 0$
- Non è definita $+\infty - \infty$
- Non è definita $0 \cdot \pm\infty$
- Non è definita $\frac{0}{0}$
- Non è definita $\frac{\infty}{\infty}$

10.3.2 Intorni sferici di $\pm\infty$

Si dice intorno sferico di $+\infty$ qualunque semiretta $]M;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > M\}$
Si dice intorno sferico di $-\infty$ qualunque semiretta $]M;-\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x < M\}$
In $\bar{\mathbb{R}}$, l'insieme degli intorni I_{x_0}è dato da $I_{x_0} = \begin{cases} -\infty \\ x_0 \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

10.3.3 Punto di accumulazione

Sia $A \subset \mathbb{R}$; si dice che $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene un punto di A diverso da x_0.
$\forall U \in I_{x_0}$ si ha $(U \backslash \{x_0\} \cap A \neq \emptyset$. In ogni intorno U di un punto di accumulazione cadono infiniti punti di A.
Unico punto di accumulazione in $\mathbb{N}$ è $+\infty$.
In ogni intorno U di un punto di accumulazione cadono infiniti punti di A.

10.3.4 Punto isolato

Un punto $x_0 \in A$ che non è un punto di accumulazione per A si dice punto isolato, ossia $x_0 \in A$ è isolato se $\exists U \in I_{x_0} : U \cup A = \{x_0\}$.

Capitolo 11

Continuità

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in X$ Se x_0 è un punto isolato di X f è continua nel punto isolato ed esso è un punto di accumulazione. Se x_0 è un punto di accumulazione per X f si dice continua in x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \wedge \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

11.1 Note

f si dice continua in $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
Non ha senso parlare di continuità per un punto che non appartiene al dominio della funzione.
Dalle proposizioni dei limiti se f e g sono continue in $x_0 \in domf \cap domg$ anche somma, prodotto e rapporto sono continue in x_0.
Applicando il teorema dell'esistenza del limite sinistro e destro per una funzione monotona, si ottiene la continuità nel loro dominio di tutte le funzioni elementari.
$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$

Capitolo 12

I limiti

Esempi di definizione di limiti:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta < 0 : \forall x \in domf, 0 < |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - n| < \delta$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists k < 0 : \forall x \in domf, x < k \Rightarrow f(x) > M$

- $\lim\limits_{x \to n} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta < 0 : \forall x \in domf, 0 < |x - n| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

12.1 Definizione unificata di limite

$X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$, funzione, sia $x_0 \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. Allora $l \in \bar{\mathbb{R}}$ si dice limite per $f(x)$, per x tendente a x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} = l$ se $\forall V$, intorno di l, $\exists$ un intorno U di x_0 tale che $\forall x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V$. Non viene espresso il comportamento di f in x_0 quando $x \to x_0$, f può anche non essere definita in x_0

12.1.1 Casi particolari

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, intorni di $l = +\infty$ sono $]M, +\infty[$ con $M > 0$.
Intorni di $x_0 = -\infty$ sono $]-\infty, k[$ con $k < 0$
Quindi $\forall M > 0, \exists k < 0 : \forall x \in]-\infty, k[\cap X$,
si ha $f(x) \in]M, +\infty[$
$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists k < 0 : \forall x \in X, x < k \Rightarrow f(x) > M$
$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ intorni di 1 sono $]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[(\epsilon > 0)$, gli intorni di 2 sono $]2 - \delta; 2 + \delta[(\delta > 0)$. Quindi $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - 2| < \delta$ si ha

$|f(x) - 1| < \epsilon$.

12.1.2 Note

- U dipende da V
- x_0 non deve appartenere al dominio della funzione, se appartiene non è detto che il limite sia uguale a $f(x_0)$
- Se $l \in \mathbb{R}$ si dice che f ammette limite finito per $x \to x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$
- $l \neq 0$, può essere che $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ma $\exists \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = l$

12.2 Limitatezza

Se una funzione ha limite finito, nell'intorno di x_0 la funzione è limitata.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora f è limitata in un intorno di x_0.

12.3 Teoremi generali

12.3.1 Unicità del limite

Se esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ allora esso è unico.

12.3.1.1 Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Esistono due intorni V_1 di l_1 e V_2 di l_2 tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'altra parte per definizione di limite, esistono due intorni U_1 di x_0 e U_2 di x_0 tali che

$$f(x) \in V_1 \forall x \in (U_1 \cap X) \backslash \{x_0\}$$
$$f(x) \in V_2 \forall x \in (U_2 \cap X) \backslash \{x_0\}$$

Allora per $x \in (U_1 \cap U_2) \cap X \backslash \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2$ che contraddice il fatto che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

12.3.1.2 Dimostrazione

Si fissi $\epsilon = 1$. Allora $\exists U$ intorno di x_0: $\forall x \in U \cap domf \backslash \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$ pertanto localmente è limitata in quanto si trova ad una distanza finita ϵ.

12.3.2 Permanenza del segno

Se una funzione ha limite positivo. Sia $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione, $l \in \bar{\mathbb{R}}$ allora esiste un intorno U tale che $f(x) > 0$. $\forall x \in U \cap X \backslash \{x_0\}$.

12.3.2.1 Dimostrazione

Supponiamo $l \in \mathbb{R}, > 0$. Nella definizione di limite consideriamo $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ allora esiste U intorno di x_0 tale che $|f(x)-l| < \frac{l}{2} \forall x \in U \cap x \backslash \{x_0\}$. $0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$. Analogamente per infinito e l negativo.

12.3.2.2 Note

Non vale il viceversa: $f(x) = x^2 > 0 \forall$ intorno U di x_0 ma $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

12.4 Esistenza del limite

Il limite non esiste sempre, per esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = 0$

12.5 Punto di accumulzione sinistro e destro

$x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione sinistro (destro) per X se x_0 è un punto di accumulazione per $X \cap]-\infty; x_0[$ $(X \cap]-\infty; x_0[)$

12.5.1 Intorno sinistro e destro

Insiemi fatti da intervallo $]x_0 - \epsilon; x_0[$, $(]x_0; x_0 - \epsilon[)$. Intorno sferico unione di intorno destro, sinistro e x_0.

12.6 Teorema del confronto (dei due carabinieri)

Siano $f, g, : X \to \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X.
$f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in U \cap X \backslash \{x_0\}$ e se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$
Se $l = +\infty$ allora basta che $f(x) \le g(x)$
Se $l = -\infty$ allora basta che $f(x) \ge g(x)$

Il teorema del confronto si usa per studiare limiti di prodotti tra una funzione generale e una limitata ma il cui limite in tale punto non esiste.
$\lim\limits_{x\to 0} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non esiste. Esiste con la x in modulo in quanto garantisce la costanza del segno nell'intorno.

12.7 Forme indeterminate

Una forma per cui non si può conoscere a priori il valore del limite.

- $+\infty - \infty$
- $o \cdot \pm\infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- 0^0
- 1^∞
- ∞^0

12.7.1 $\infty - \infty$

È una forma indeterminata perchè consideriamo $x \to +\infty$

$f(x)$	$g(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x))$
x	$-\frac{x}{2}$	$+\infty$
x	$-2x$	$-\infty$
x	$-x + k$	k
x	$-x + \sin x$	$!\exists$

12.7.2 $\frac{\infty}{\infty}$

Se sono entrambi polinomi, se il grado del numeratore è maggiore fa infinito, se sono uguali fa il rapporto tra le incognite di grado massimo, se è minore fa zero. Se aggiungo ai polinomi funzioni limitate non sono significative.

12.7.3 $\frac{0}{0}$

Può essere necessario scomporre per riuscire a semplificare la funzione.

12.7.4 Trattare forme indeterminate

Mettere in evidenza grado maggiore, razionalizzare, scomporre e altro.

12.7.5 Funzione monotona e esistenza del limite sinistro e destro

12.7.5.1 Enunciato

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione monotona, e f crescente in X, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per X allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = sup f(x), x \in X \cap] - \infty, x_0[$
$\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = inf f(x) X \cap]x_0, +\infty[$.
Analogamente il caso di f decrescente.

12.7.5.2 Dimostrazione

Del limite sinistro. $l = \sup\limits_{X \cap] f - \infty, x_0[}$ Per definizione di l: $f(x) \leq l \forall x \in X \cap] - \infty, x_0[$ e che $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in X \cap] - \infty, x_0[: l - \epsilon \leq f(x_\epsilon) \leq f(x) \forall x \in X \cap]x_\epsilon, x_0[$ quindi $\forall \epsilon > 0 \exists]x_\epsilon, x_0[l - \epsilon \leq f(x) \leq l < l + \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - l| < \epsilon \forall x \in X \cap]x_\epsilon, x_0[$ ho perciò dimostrato che il limite di l sia il sup. Se $l = +\infty$ allora f non è limitata superiormente in $X \cap] - \infty; x_0[$, quindi $\forall M > 0, \exists x_M \in X \cap] - \infty; x_0[$: $f(x_M) > M$, siccome f è crescente allora $M \leq f(x_M) \leq f(x) \forall x \in X \cap]x_M; x_0[$, ossia $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.
Nel caso in cui la funzione sia decrescente viene dimostrato analogamente.

12.7.5.3 Corollari

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per X e si supponga f monotona, allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-}, \exists \lim\limits_{x \to x_0^=}$ ma non è detto che $\exists \lim\limits_{x \to x_0}$, esiste solo se i due limiti sono uguali.

12.7.5.4 Applicazioni

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = sup e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = inf e^x = +0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = sup \arctan x = \frac{\pi}{2}$
Ho i limiti se conosco sup e inf, o viceversa.

12.8 Limite di funzioni composte

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0$ punto di accumulazione per X.
$g : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_0$ punto di accumulazione per Y.
Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = k$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = k$
$f(x) \neq y_0$ in un intorno U di x_0

12.8.1 Osservazioni

L'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di di x_0 non è necessaria se $y_0 \in Y \wedge g(y_0) = k$
Questo risultato si denota come cambiamento di variabili: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y), f(x) = y \to y_0$
Dal teorema del limite per funzioni composte, segue che se f è continua in $x_0 \in X$ e se g è continua in $y_0 = f(x_0) \in Y$ allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x)$: la composta di funzioni continue è a sua volta continua.

12.9 Esistenza del limite

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

12.10 Algebra dei limiti

Siano f, g due funzioni e $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per entrambe. Supponiamo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_f \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$. Allora:

- $f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_f \pm l_g$
- $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_f \cdot l_g$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{l_f}{l_g}$ Se $l_g \neq 0$

12.11 Parziale estensione dell'algebra dei limiti a $\bar{\mathbb{R}}$

Sia x_0 un punto di accumulazione per $dom f \cap dom g$, allora per $x \to x_0$ si ha:

- $f(x) \to +\infty$ e $g(x)$ limitata inferiormente nell'intorno di x_0, $\to f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$
- $f(x) \to -\infty$ e $g(x)$ limitata superiormente nell'intorno di x_0, $\to f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$
- $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to l_g \neq 0$, $\to f(x) \cdot g(x) \to 0$
  - $\lim_{x \to x_0} +\infty$ se $l_g > 0$
  - $\lim_{x \to x_0} -\infty$ se $l_g < 0$
- $f(x) \to 0$ e $g(x)$ limitata nell'intorno di x_0, $\to f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

- $f(x) \to 0$
  - $f(x) > 0$ in un intorno di $x_0 \to \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$
  - $f(x) < 0$ in un intorno di $x_0 \to \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$
- $f(x) \to \pm\infty \to \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

12.11.1 Dimostrazione del teorema sull'algebra dei limiti

Si ha $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_f$ e $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_g$ con $l_f, l_g \in \mathbb{R}$. Allora $f(x) \cdot g(x) \to l_f \cdot l_g$ per $x \to x_0$. Fissiamo $\epsilon > 0$ arbitrario, dobbiamo verificare che esiste un intorno U di x_0 tale che:

$$|f(x) \cdot g(x) - l_f \cdot l_g| < \epsilon, \forall x \in U \cap domf \cap domg \backslash \{x_0\}$$

Per ipotesi: $|f(x) - l_f| < \epsilon \forall x \in U_f \cap domf \backslash \{x_0\}$ e $|g(x) - l_g| < \epsilon \forall x \in U_g \cap domg \backslash \{x_0\}$.
Si osservi che: $|f(x)g(x) - l_f l_g| = |f(x)g(x) - l_f g(x) + l_f g(x) l_f l_g| \leq$
$\leq |f(x)g(x) - l_f g(x)| + |l_f g(x) l_f l_g| \leq$
$\leq |g(x)||f(x) - l_f| + |l_f||g(x) - l_g| \leq$
$\leq M|f(x) - l_f| + |l_f||g(x) - l_g|$ in quanto g ha limite finito, ovvero limitata in un intorno $\tilde{U}$ di x_0, ossia $\exists M > 0 : |g(x) < M \forall x \in \tilde{U} \cap domg \backslash \{x_0\}$
$\leq (M + |l_f|)\epsilon$, abbiamo pertanto dimostrato che $|f(x) \cdot g(x) - l_f \cdot l_g| < \epsilon, \forall x \in U \cap domf \cap domg \backslash \{x_0\}$, dove ϵ è un numero arbitrario e $U = U_f \cap U_g \cap \tilde{U}$. Pertanto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

12.12 Limiti notevoli per le funzioni trigonometriche

12.12.1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dimostrazione: $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, si disegni nella circonferenza goniometrica la tangente e il seno di x. L'area del triangolo formato tra origine e tangente è $\frac{\tan x}{2}$, l'area del triangolo formato da origine e il seno di x è $\frac{\sin x}{2}$, l'area del settore circolare individuato dall'asse delle x e il seno di x è $\frac{x}{2}$. Confrontando le aree $\forall x \in \mathbb{R} \backslash 0, \frac{\pi}{2}$: $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow$, dividendo per il seno $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, reciproci $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, essendo il coseno e il rapporto pari si ottiene la stessa disuguaglianza $\forall x \in]\frac{\pi}{2};]\frac{\pi}{2} \backslash \{0\}$, per il teorema del confronto ottengo $1 < \frac{\sin x}{x} < 1$, perciò $\sin x = 1$

12.12.2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$
$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

12.12.3 Corollari dei due limiti notevoli dimostrati sopra

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Capitolo 13

Gerarchia degli infiniti

Per $x \to +\infty$:

$$|\log_b x|^\alpha << x^\beta << a^x$$

13.1 Osservazioni

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x |x|^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\log_b x|^\alpha = 0$

Gli ultimi due si dimostrano con cambio di variabile in modo che il limite tenda a $+\infty$.

13.2 Dimostrazione

Si provi che $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.
Dal grafico si nota che $2^x \geq x \forall x \geq 0$
$2^x \geq 2^{[x]} = (1+1)^{[x]} \geq 1 + [x]$(per la disuguaglianza di Bernoulli).
$1 + [x] \geq 1 + x - 1$
Ovvero $2^x \geq x$
$0 < \frac{x}{4^x} = \frac{x}{2^x 2^x \leq \frac{1}{2^x}}$
Essendo che per $x \to +\infty$ o e $\frac{1}{2^x}$ tendono a 0,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4^x} = 0$.

Per dimostrare che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$
Si osservi che $a^x = 4^{\log_4 a^x}$.
Perciò: $\frac{x^\beta}{a^x} = (\frac{x}{4^{x\frac{\log_4 a}{\beta}}})^\beta$
Ponendo $y = x4^{\frac{\log_4 a}{\beta}}$
$(\frac{y\beta}{\log_4 a}\frac{1}{4^y})^\beta$
$(\frac{\beta}{\log_4 a}\frac{y}{4^y})^\beta$
Si osserva che la prima frazione è una costante, mentre la seconda è il limite dimostrato all'inizio della sezione, pertanto:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0.$
Partendo da questa dimostrazione si dimostra che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0$, sostituendo x con $y = \log_b x$

13.3 Altre forme indeterminate

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}, f(x) > 0,\ f(x)^{g(X)} = e^{\log f(x)\cdot g(x)}$

- 0^0
- ∞^0
- 1^∞

Per calcolare i primi due gerarchie degli infiniti, mentre il terzo ci saranno dei limiti notevoli:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$

13.3.1 Limiti di successioni-esercizi

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\log n} = 1$ Osservazione: $1 \le \log n \le n \Leftrightarrow n \le n\log n \le n^2 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n\log n} \le \sqrt[n]{n^2}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \forall\alpha \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|\log_b n|^\alpha}{n^\beta} = 0 \forall b > 0, \neq 1, \forall\beta > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \forall a > 0$

13.3.2 Gerarchia di infiniti per le successioni

$\log_b n << n^\alpha << a^n << n! << n^n$

13.3.2.1 Formula di Stirling

$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

13.3.2.2 Il numero di Nepero e

la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è strettamente crescente e limitata.
Per dimostrare che sia crescente considero $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$
$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} =$
$(\frac{n+1}{n})^n(\frac{n-1}{n})^{n-1} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n(\frac{n+1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} =$
$= \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{(1-\frac{1}{n})} =$
$= \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{(1-\frac{1}{n})}$
Che per la disuguaglianza di Bernoulli con $c = \frac{1}{n^2}$
$> \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1.$
Ossia $a_n > a_{n-1}$, la funzione è crescente.
Per dimostrare che è limitata considero:
$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leq 4$
Si dimostra, sempre utilizzando Bernoulli che il terzo termine è decrescente, pertanto:
$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq 4$
Dal teorema dell'esistenza del limite per funzioni monotone determiniamo che esiste il limite finito:
$e \doteq \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ che è l'estremo superiore.

13.3.2.3 Corollario

- $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
- $\lim_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$

Per dimostrare basta osservare che $\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x \leq [x]+1 : (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^x \leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$. Gli estremi tendono a e, pertanto per il teorema del confronto anche il secondo. Il secondo e terzo corollario si dimostrano in maniera analoga sostituendo la variabile rispettivamente con $y = -x$ e con $y = \frac{1}{x}$.

13.3.2.4 Corollario 2

- $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Per dimostrarli bisogna considerare la continuità del logaritmo e che $\frac{\log(1+x)}{x}) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

13.3.2.5 Corollario 3

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}) = \log a$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha$
- $\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha$

Si utilizzano gli altri limiti notevoli considerando la x come una funzione continua.

Capitolo 14

Infinito

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ si dice divergente positivamente o negativamente.

14.1 Confronto di infiniti

Dette $f, g, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione. Se f e g sono entrambe infinite e $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g. Se invece $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l, l \in \bar{\mathbb{R}} \backslash 0$, f e g sono infiniti dello stesso ordine, in particolare, se $l = 1$ allora si usa la notazione $f \sim g$ e si dice che f è asintotico a g per x che tende a x_0. Se invece $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ allora si dice che f è un infinito di un ordine superiore rispetto a g. Se il limite non esiste allora si dicono non confrontabili.

14.2 Infinitesimi

$f(x) \to l$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) - l = o(1)$. Quando indico con o(1) l'infinitesimo, ovvero un valore più piccolo vicino a 0.

14.2.1 Regole di calcolo per o(1)

- $ko(1) = o(1), \forall k \in \mathbb{R}$
- $o(1)o(1) = o(1)$
- $o(1) + o(1) = o(1)$
- $o(1) - o(1) = o(1)$

14.3 Confronto di infinitesimi

Dette $f, g, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione. Se f e g sono entrambe infinitesime e $g(x) \neq$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore g, se vale ∞ è di ordine inferiore. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ sono dello stesso ordine e se $l = 1$ f e g sono asintotiche. Se non esistono i limiti i due non sono confrontabili.

14.4 Definizione

Date due funzioni f e g, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $domf \cap domg$ e $g(x) \neq 0$, $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

14.4.1 Osservazioni

- Se f e g sono entrambe infinite per $x \to x_0$ allora $f(x) = o(g(x))$ f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g.
- Se f e g sono entrambe infinitesime per $x \to x_0$ allora $f(x) = o(g(x))$ f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g.

14.5 regole di calcolo degli $o(x^\alpha)$

Siano $\alpha, \beta > 0 \in \mathbb{R}$.

- $ko(x^\alpha) = o(x^\alpha)$ $(\frac{kf(x)}{x^\alpha} = k\frac{f(x)}{x^\alpha})$
- $x^\beta o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$ $(f(x) = o(x^\alpha)$ $\frac{x^\beta f(x)}{x^{\alpha+\beta}}$ $x^\beta f(x) = o(x^{\alpha+\beta}))$
- $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$ $(f(x) = o(x^\alpha), g(x) = o(x^\beta)$ $\frac{f(x)g(x)}{x^{\alpha+\beta}})$
- $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$
- $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\alpha)$ se $\alpha < \beta$ $(\frac{f(x)+g(x)}{x^\beta} = \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{g(x)}{x^\alpha}\frac{x^\beta}{x^\beta})$
- $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\beta)$ se $\beta < \alpha$
- $o(x^\alpha \pm x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$

14.6 Linguaggio degli "o-piccoli" nel calcolo dei limiti

Per $x \to 0$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

14.7 Ordine di infinitesimo e di infinito

f, g funzioni infinitesime per $x \to x_0$, $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 se $\exists \alpha > 0, l \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|g(x)|^\alpha} = l$ allora f è di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$, per $x \to x_0$.

f infinitesimo		f infinito	
$x_0 = 0$	$g(x) = x$	$x_0 = 0$	$g(x) = \frac{1}{x}$
$x_0 \neq 0$	$g(x) = x - x_0$	$x_0 \neq 0$	$g(x) = \frac{1}{x - x_0}$
$x_0 = \pm\infty$	$g(x) = \frac{1}{x}$	$x_0 = \pm\infty$	$g(x) = x$

14.7.1 Definizione

Se f è un infinitesimo di ordine d rispetto all'infinitesimo campione x per $x \to 0^+$ si scrive che

$$f(x) = lx^\alpha + o(x^\alpha) \; x \to 0^+ \tag{14.1}$$

Dove $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, e α si dice ordine di infinitesimo e lx^α si dice parte principale di infinitesimo. Più in generale:

$$f(x) = l(x - x_0)^\alpha + o((x - x_0)^\alpha) \; x \to x_0^+ \in \mathbb{R} \tag{14.2}$$

Capitolo 15

Asintoti

Studio più dettagliato della crescita di funzioni all'infinito del dominio, ai punti di accumulazione non appartenenti al dominio o ai punti di discontinuità.

15.1 Asintoto orizzontale

Sia f una funzione definita in un intorno di $\pm\infty$, se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ allora la retta $y = b$ si dice asintoto orizzontale per f per $x \to \pm\infty$

15.2 Asintoto obliquo

Sia f una funzione definita in un intorno di $\pm\infty$, se esistono $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ allora la retta $y = ax + b$ si dice asintoto obliquo per f, per $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases} \tag{15.1}$$

15.3 Asintoto verticale

Sia $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 punto di accumulazione per $dom f$. Se $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ allora la retta verticale $x = x_0$ si dice asintoto verticale per f.

15.3.1 Asintoto verticale da destra

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \tag{15.2}$$

15.3.2 Asintoto verticale da sinistra

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \tag{15.3}$$

Capitolo 16

Teorema ponte

Lega il limite di funzioni con il limite di successioni. Sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}, x_0$ punto di accumulazione per $\mathbb{X}$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall$ successione $\{x_n\}_n$ a valori in $\mathbb{X} \backslash \{x_0\}$, $x_n \to x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x_n) = l \tag{16.1}$$

16.1 Dimostrare che un limite non esiste

16.1.0.1 Esempio

$\lim_{x \to \infty} \sin x \nexists$. Basta prendere:
$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$,
$\tilde{x_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$. Da questi ottengo:
$f(x_n) = \sin x_n = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$
$f(\tilde{x_n}) = \sin \tilde{x_n} = -1 \xrightarrow[n \to \infty]{} -1$
Perciò essendo $f(x_n) \neq f(\tilde{x_n})$ il limite non esiste.

16.2 Trovare il valore del limite quando esiste

16.2.1 Esempio

$\lim_{x \to +\infty} \log x$, il logaritmo è crescente, pertanto il limite esiste. Prendo come $x_n = e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,
$\log x_n = \log e^n = n \log e = n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \log x_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, pertanto per il teorema ponte segue che $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

Capitolo 17

Continuità e teoremi fondamentali

17.1 Punti di discontinuità

- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$
- $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0), \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

17.2 Teorema della permanenza del segno

Si deduce dal teorema della permanenza del segno per il limite: sia $f : dom f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in dom f$ e $f(x_0) > 0$, analogo se negativo. Allora $\exists$ un intorno U di x_0: $f(x) > 0 \forall x \in U \cap dom f$.

17.3 Teorema di esistenza degli zeri

Un punto $x_0 \in dom f$ si dice uno zero di f se $f(x_0) = 0$. Il seguente teorema dà condizioni sufficienti affinchè f abbia uno zero. La dimostrazione si basa sul metodo di bisezione.
Sia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, f continua e $f(a)f(b) < 0$, allora $\exists x_0 \in]a, b[$: $f(x_0) = 0$.
Se f è strettamente monotona, allora x_0 è unico.

17.3.1 Osservazioni

- Togliendo una delle ipotesi l'esistenza non è garantita: se non è continua e con segni opposti lo zero potrebbe non esistere (funzione a tratti).
- Può esistere uno zero per f anche se manca una delle ipotesi, ma non è certo: x^2 tra $[-1;1]$.

17.3.2 Dimostrazione

Non è restrittivo considerare $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Utilizzo il metodo di bisezione: ponendo $a_0 = a$ e $b_0 = b$, considero il loro punto medio $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

- Se $f(c_0) = 0$ ho trovato lo zero della funzione.
- Se $f(c_0) < 0$ si pone $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$.
- Se $f(c_0) > 0$ si pone $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$.

In ogni caso $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.
Ripetendo il ragionamento si consideri il punto medio di $[a_1; b_1]$, cioè $c_1 = \frac{b_1+a_1}{2}$.

- Se $f(c_1) = 0$ ho trovato lo zero della funzione.
- Se $f(c_1) < 0$ si pone $a_2 = c_0$ e $b_2 = b_1$.
- Se $f(c_1) > 0$ si pone $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$.

In ogni caso $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$ e $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$.
In questo modo $\forall n \geq 0$:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b \tag{17.1}$$

Si trovano perciò due successioni$\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ decrescente.$\Rightarrow$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$$
$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1$$

Poichè $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e siccome per $n \to +\infty$, $\frac{b-a}{2^n} = 0$ e $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$, allora $x_1 - x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_0$
Basta provare che $f(x_0) = 0$: $f(a_n) < 0$ per il teorema ponte $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ $f(x_0) \leq 0$,
$f(b_n) > 0$, per il teorema ponte $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_1) \geq 0$. Ovvero $0 \leq f(x_0) \leq 0$, da cui $f(x_0) = 0$.

17.3.3 Corollario 1

Siano $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, f, g, se $f(a) > g(x)$ e $f(b) < g(b)$ o viceversa, allora $\exists x_0 \in]a; b[$: $f(x_0) = g(x_0)$.

17.3.3.1 Dimostrazione

Si ponga $h(x) \doteq f(x) - g(x)$ su $[a; b]$

- h è continua su [a;b]
- $h(a) = f(a) - g(a) > 0$.
- $h(b) = f(b) - g(b) < 0$.

Il teorema di esistenza degli zeri ci garantisce che $\exists x_0 \in]a; b[$: $h(x_0) = 0$, ossia $f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

17.3.4 Corollario 2, teorema dei valori intermedi

Sia I intervallo $\subset \mathbb{R}$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $\inf\limits_I f$, $\sup\limits_I f$ e la funzione assume tutti i valori tra il limite inferiore e il limite superiore.

17.3.4.1 Dimostrazione

Se $\inf\limits_I f = \sup\limits_I f$ la funzione è costante e la tesi è ovvia. Altrimenti sia $\inf\limits_I f < y < \sup\limits_I f$ e proviamo che esiste $x \in I : y = f(x)$.
Per la definizione di $\inf\limits_I f, \exists a \in I : f(a) < y$ e per definizione di $\sup\limits_I f, \exists b \in I : y < f(b)$.
Perciò $f(a) < y < f(b)$. Si definisca la funzione $g(x) = y \ \forall x \in I$. Pertanto $f(a) < g(a) < y < g(b) < f(b)$.
Per il corollario precedente $\exists x \in I : f(x) = g(x) = y$.

17.3.5 Corollario 3

Considero I intervallo $\subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ continua, allora $f(I)$ è un intervallo tra $\inf\limits_I f$ e $\sup\limits_I f$.

17.4 Legame tra monotonia, iniettività, continuità di f su un intervallo

- $f : dom f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se la funzione è strettamente monotona la funzione è iniettiva.
- L'iniettività non implica necessariamente la stretta monotonia.
- La funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ di una funzione iniettiva, suriettiva e continua $f : A \subset \mathbb{R} \to f(A)$ risulta continua se il suo insieme immagine è un intervallo.

17.4.1 Iniettività implica la monotonia

L'iniettività di una funzione ne implica la monotonia se f è continua: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con I intervallo e f continua e iniettiva,
allora f è strettamente monotona in I.

17.4.1.1 Dimostrazione

Si procede per assurdo: si supponga che la funzione non sia strettamente monotona, pertanto $\exists x < y < z \in I : f(y) > f(x) > f(z)$. Per il teorema dei valori intermedi applicato su $[y; z] \Rightarrow \exists \bar{x} \in [y; z] : f(x) = f(\bar{x})$, che contraddice il fatto che f sia iniettiva. Ho raggiunto un assurdo, pertanto il teorema è dimostrato.

17.5 Teorema di Weierstrass

Esiste sempre $\inf\limits_{A} f$ e $\sup\limits_{A} f$, ma non esistono sempre il minimo e il massimo. Questo teorema stabilisce le condizioni sufficienti per l'esistenza del minimo e del massimo.

17.5.1 Enunciato

$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua allora esistono $m = \min\limits_{[a;b]} f$ e $M = \max\limits_{[a;b]} f$ e $f([a; b]) = [m; M]$. Se una delle ipotesi non è vera tale esistenza non è garantita.

17.5.2 Conclusioni

Il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di minimo e massimo su un intervallo chiuso e limitato. I punti di massimo e minimo si troveranno:

- Negli estremi dell'intervallo.
- Nei punti interni all'intervallo con derivata prima uguale a zero.
- Nei punti interni all'intervallo dove non si ha la derivabilità di f.

Capitolo 18

La derivata

Sapendo la continuità di una funzione in un punto x_0 non basta per capire completamente il suo comportamento vicino a x_0. Per descrivere come varia $f(x)$ in un intorno di x_0 non basta la continuità.

18.1 Rapporto incrementale

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Per determinare come varia la f in $f(x_0)$ si utilizza il rapporto incrementale:

$$Rx_0(x) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ \forall x \in I \setminus \{x_0\} \tag{18.1}$$

Descritto anche come

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, h \neq 0 \tag{18.2}$$

Se $x \to x_0$ e f continua allora $R_{x_0} \to \frac{0}{0}$ e si indaga come si comporta la variazione di f, rispetto alla variazione di x.

18.2 Definizione di derivata

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ punto interno.
La derivata di f in x_0 è definita se esiste finito o infinito come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{18.3}$$

Notazione: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \doteq f'(x_0)$ o $\dot{f}(x_0)$ o $\frac{d}{dx} f(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

18.2.1 Derivata destra

Derivata destra di f in x_0: se esiste finito o infinito $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \doteq f'_+(x_0)$

18.2.2 Derivata sinistra

Derivata sinistra di f in x_0: se esiste finito o infinito $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \doteq f'_-(x_0)$

18.3 Condizioni di derivabilità

Si dice che f è derivabile in x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $A \subset I$, ovvero se è derivabile in ogni punto di A allora si definisce la funzione derivata $f' : A \to \mathbb{R}\ x \to f'(x_0)$
Si usa la notazione di derivata anche per indicare anche il caso in cui il limite sia infinito, ma la f non è derivabile.

18.4 Proprietà della derivata

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0: se f è derivabile esiste ed è finito $\lim\limits_{x \to x_0} R_{x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow R_{x_0}(x) = f'(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$, $\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + o(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$, $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Il fatto che una funzione sia continua in x_0 non implica che sia derivabile in tal punto.
Se f è derivabile in x_0, $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.
Definito $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ la funzione affine il cui grafico è la retta con quella equazione, ovvero la retta passante per $(x_0; f(x_0))$ con pendenza $f'(x_0)$.

18.5 Interpretazione geometrica della derivata

Considerando una qualunque funzione $f(x)$, con un suo punto generico $P = (x_0; f(x_0))$ e un suo punto fissato $P_0 = (x_0; f(x_0))$, l'equazione della retta secante passante per P e P_0: $y : f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0)$. Per $x \to x_0$, P si avvicina al punto P_0 lungo il grafico di f e la retta secante va verso una retta "limite" se $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ammette limite finito. Tale retta limite ha pendenza $f'(x_0)(= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$ e tocca il grafico nel punto P_0. Tale retta "limite" viene definita retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; f(x_0))$ e la sua equazione sarà: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se f è derivabile in x_0. Se $f'(x_0) = \pm\infty$, pertanto f non è derivabile $x = x_0$ è la retta tangente al grafico di f in $(x_0; f(x_0))$.

18.6 Derivate di alcune funzioni elementari

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = \log\|x\|$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a \|x\|$	$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

18.6.1 Dimostrazioni

18.6.1.1 $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \neq 0$:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

18.6.1.2 $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \neq 0$:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h}.$$
$$h \to 0, \frac{(e^h-1)}{h} \to 1 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{(e^h-1)}{h} = e^x.$$

Capitolo 19

Punti di non derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione con I intervallo e $x_0 \in I$, f sia continua in x_0.
Si supponga che $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \wedge f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

- $(x_0; f(x_0))$ è un punto angoloso se almeno una delle due derivate è finita:
  - $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}, f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \wedge f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$
  - $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}, f'_-(x_0) = \pm\infty$
  - $f'_+(x_0) = \pm\infty, f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$
- $(x_0; f(x_0))$ si dice cuspide se: $f'_+(x_0) = \pm\infty, f'_-(x_0) = \mp\infty$
- $(x_0; f(x_0))$ si dice punto a tangente verticale se $f'_+(x_0) = \pm\infty = f'_-(x_0) = \pm\infty$

Capitolo 20

Algebra delle derivate

Teorema: siano $f, g : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R},\ x_0 \in I$ due funzioni derivabili in x_0, allora la somma, il prodotto e il rapporto tra le due funzioni è una funzione derivabile.

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
  - Caso particolare: $(kf)'(x_0) = kf'(x_0),\ k \in \mathbb{R}$
- $(\frac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

20.1 Dimostrazione derivata del prodotto

Sia $x_0 \in I; \forall h \neq 0$ si scriva il rapporto incrementale: $\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} =$
$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} =$
$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} =$
$g(x_0+h)\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h} + f(x_0)\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$.

- $g(x_0+h) \xrightarrow[h \to 0]{} g(x_0)$
- $\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0)$
- $\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} g'(x_0)$

$\exists \lim\limits_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}$ finito, perciò fg è derivabile in x_0, inoltre:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{20.1}$$

20.2 Derivata della funzione composta

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(I) \subset J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in I$ e f derivabile in x_0 e g derivabile in $y_0 = f(x_0) \Rightarrow (g \circ f) : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0.

$$(g \circ f)'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \tag{20.2}$$

20.2.0.1 Casi particolari

- $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $(\log |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
- $((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$

20.3 Derivata della funzione inversa

I intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona, se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora $f^{-1} : f(I) \to I$ allora l'inversa è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

20.3.0.1 Dimostrazione

Si ponga $y = f(x)$, ovvero $x = f^{-1}(y)$. Essendo f e f^{-1} continue, si ha $y \to y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$).

20.3.0.2 Osservazioni

- Il teorema è ancora valido se $f'(x_0) = 0$ e si ha $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ se f è strettamente crescente, se è strettamente decrescente è uguale a $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$.
- Se $f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = 0$.

20.4 Derivate delle funzioni goniometriche inverse

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \forall x \in]-1; 1[$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \forall x \in]-1; 1[$

20.4.1 $(\arctan x)'$

$\tan x :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, continua, crescente e derivabile, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x (\neq 0)(= \frac{1}{\cos^2 x})$.
$(\arctan)'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$.

20.4.2 $(\arcsin x)'$

$\sin x : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$, continua, crescente e $(\sin x)' = \cos x \neq 0 x \neq -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2}$.
$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$. Considerando: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \forall t$, allora $\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$, e se $t \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}[$ il coseno è positivo. Perciò: $\frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Capitolo 21

Teoremi fondamentali per la classe delle funzioni derivabili

Le funzioni derivabili sono funzioni morbide.

21.1 Primo lemma

Sia $f :]a;b[$ funzione derivabile in $x_0 \in]a;b[$. Si supponga $f'(x_0) \neq 0$, allora $f(x) - f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0, ossia se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x) < f(x_0)$ per x vicino a x_0 a sinistra, $f(x) > f(x_0)$ per x vicino a x_0 a destra. Analogamente se $f'(x_0) < 0$.

21.1.0.1 Dimostrazione

Si supponga $f'(x_0) > 0$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Per il teorema della permanenza del segno si ha che esiste un intorno U di x_0 tale che $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \forall x \in U \backslash \{x_0\} \Leftrightarrow f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $x - x_0$, $x \in U \backslash \{x_0\}$, $\Leftrightarrow$

- $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in U,\ x > x_0$
- $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in U,\ x < x_0$

21.2 Teorema di Fermat

Usando il lemma dimostrato precedentemente si dimostra questo teorema che garantisce una condizione necessaria affinchè un punto interno a $]a;b[$ in cui f è derivabile risulti essere un punto di minimo o massimo locale per f. Un punto

$x_0 \in]a;b[$ in cui f è derivabile e $f'(x_0) = 0$ si chiama punto stazionario o punto critico di f

21.2.0.1 Enunciato

$f :]a;b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a;b[$, se f è derivabile in x_0 e x_0 è un punto di minimo o massimo locale per f allora la $f'(x_0) = 0$, ovvero x_0 deve essere un punto stazionario, condizione non sufficiente, non tutti i punti critici di f sono punti di minimo o massimo locali.

21.2.0.2 Dimostrazione

Si supponga che x_0 sia un punto di massimo locale. Esiste per definizione un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in U \cap]a;b[\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x \in U \cap]a;b[$, ovvero $f(x) - f(x_0)$ ha segno costante in U. Per il lemma precedente non si può avere $f'(x_0) < 0$ o $f'(x_0) > 0$, perciò $f'(x_0) = 0$.

21.2.0.3 Conclusioni

Per il teorema di Weierstrass una funzione f pertanto ha massimo e minimo su $[a;b]$ e tali valori vengono assunti agli estremi dell'intervallo, nei punti di non derivabilità o nei punti critici.

21.3 Teorema di Rolle

Sia $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in $]a;b[$ e $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in]a;b[: f'(c) = 0$. Come per Lagrange possono esserci più punti che soddisfano queste caratteristiche. Ovvero esiste almeno un punto con tangente orizzontale.

21.3.0.1 Dimostrazione

f è continua su un intervallo chiuso e limitato, perciò il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di massimo e minimo nell'intervallo. Se il minimo di f su $[a;b]$ è uguale al massimo e coincide con $f(a) = f(b)$ segue che f è costante. Perciò $f'(c) = 0 \forall c \in]a;b[$. Supponendo che $\max\limits_{[a;b]} f > f(a) = f(b)$ e analogalmente $\min\limits_{[a;b]} f < f(a) = f(b)$ allora $\exists x_0 \in]a;b[: f(x_0) = \max\limits_{[a;b]} f$. Per il teorema di Fermat si ottiene che $f'(x_0) = 0$.

21.3.0.2 Osservazioni

Venendo a mancare le condizioni per il teorema di Rolle non è possibile garantirne il risultato.

21.4 Teorema del valor medio o di Lagrange

Sia $f[a;b] \to \mathbb{R}$ funzione continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$ Allora esiste almeno un punto $c \in]a;b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, ovvero esiste un punto in $]a;b[$ la cui retta tangente è parallela alla retta passante per a e b. Dal teorema di Lagrange segue il teorema di Rolle.

21.4.0.1 Dimostrazione

Si introduce la funzione $h(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$, ovvero alla funzione sottraggo la retta passante per i punti a, b. h continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$ $h(a) = h(b) = 0$. A questa funzione posso pertanto applicare il teorema di Rolle: $\exists c \in]a;b[: h'(c) = 0$. $0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

21.5 Teorema di Cauchy

Siano $f, g[a;b] \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in $]a;b[$ allora $\exists c \in]a;b[$: $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

21.5.0.1 Osservazioni

Se $g(b) \neq g(a) \wedge g'(c) \neq 0$ allora posso riscrivere l'equazione come: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Non si ottiene Cauchy direttamente da Lagrange.

21.5.0.2 Dimostrazione

Si definisca la funzione $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b)g(a)]f(x)$. Si ottiene la funzione h continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$ e $h(a) = h(b)$, pertanto per il teorema di Rolle si ha che $\exists c \in]a;b[: h'(c) = 0$, ovvero $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

21.5.0.3 Da Cauchy a Lagrange

Per dimostrarlo si usi come $g(x)$ la funzione x, identità su $[a;b]$

21.6 Conseguenze del teorema di Lagrange

$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in [a;b]$, per dimostrare l'implicazione inversa:
Teorema: se f è una funzione derivabile su un intervallo $I : f'(x) = 0 \forall x \in I \Rightarrow f$ costante ni I. Per dimostrarlo considero $x_1 < x_2 \in I$. Applicando Lagrange nell'intervallo $[x_1; x_2 \Rightarrow \exists c \in]x_1; x_2[$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$,

per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 segue che f è costante. È essenziale che I sia un intervallo.

21.7 Monotonia e segno della derivata

Usando il teorema di Lagrange si prova un legame cruciale tra il segno della derivata e la monotonia in f.

21.7.1 Test di monotonia

Sia $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

- $f'(x) \geq 0$ su $]a;b[$ $\Leftrightarrow$ la funzione è crescente su $]a;b[$.
- $f'(x) > 0$ su $]a;b[$ $\Leftrightarrow$ la funzione è strettamente crescente su $]a;b[$.
- $f'(x) \leq 0$ su $]a;b[$ $\Leftrightarrow$ la funzione è decrescente su $]a;b[$.
- $f'(x) < 0$ su $]a;b[$ $\Leftrightarrow$ la funzione è strettamente decrescente su $]a;b[$.

21.7.1.1 Dimostrazione

Si supponga $f'(x) \geq 0$ su $]a;b[$. Considerando $x_1 < x_2 \in]a;b[$ basta considerare dal teorema di Lagrange che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0 \;\; f'(c) \geq 0$. Essendo $x_2 - x_1 \geq 0$, allora $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, ovvero la funzione è crescente. La dimostrazione è analoga negli altri casi.

21.7.2 Conseguenze

Nello studio di funzioni, ovvero nella ricerca di punti di massimo e minimo locali, si è visto che la derivabilità di f è condizione necessaria affinchè $x_0 \in I$, punto critico ($f'(x_0) = 0$) sia un punto di massimo o minimo locale.

- Se la derivata è prima negativa e poi positiva, il punto in cui si annulla è un punto di minimo locale.
- Se la derivata è prima positiva e poi negativa, il punto in cui si annulla è un punto di massimo locale.
- Se la derivata conserva il segno a destra e a sinistra del punto in cui si annulla non è nè minimo nè massimo.

Capitolo 22

Forme indeterminate e teorema di de l'Hopital

Si possono studiare limiti della forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ $(0 \cdot \infty = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty})$.

22.1 Teorema di de l'Hopital

Siano $f, g :]a; b[\to \mathbb{R}$ derivabili e si supponga che: $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \vee \infty$, $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \vee \infty$, $g'(x) \neq 0$ su $]a; b[$ e che esista $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora se $g(x) \neq 0$ su $]a; b[$ $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Il teorema rimane valido anche a sinistra di b, all'interno e se gli estremi sono infiniti.

22.1.0.1 Dimostrazione

Si provi a dimostrare $\frac{0}{0}$, si supponga che $g'(x) > 0$ su $]a; b[$, analogamente se negativa. Poichè $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ e $g(x)$ strettamente crescente, allora $g(x)$ sarà positiva su $]a; b[$. Si ridefiniscano $f, g : [a; b[\to \mathbb{R}$ ponendo $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$. f e g risultano continue su $[a, b[$. $\forall x \in [a; b[$ si può applicare il teorema di Cauchy a f, g su $[a; x] : \exists c_x \in]a; x[: \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, essendo $f(a) = g(a) = 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, osservando che per $x \to a^+$, $c_x \to a^+$. Ovviamente $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

22.1.0.2 Nota

Se $\nexists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non posso dire nulla sul limite delle loro primitive.

22.1.1 Corollario

Questo corollario si usa per indagare la derivabilità di una funzione in un punto, Se non esistono i limiti non si possono determinare la derivata destra e sinistra e si deve controllare con il limite del rapporto incrementale.
$f :]a; b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a; b[, \delta > 0$

- f continua in $[x_0; x_0 + \delta[$, derivabile in $]x_0; x_0 + \delta[$. Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $\exists f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$, se è finito, f è derivabile da destra in x_0.
- f continua in $]x_0 - \delta; x_0]$, derivabile in $]x_0 - \delta; x_0[$. Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $\exists f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$, se è finito, f è derivabile da sinistra in x_0.
- f continua in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$, derivabile in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$. Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$, in particolare se il limite è finito, f risulta derivabile in x_0.

22.1.1.1 Dimostrazione

Per ipotesi $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Capitolo 23

Convessità e concavità

23.1 Derivate successive

Sia $f : domf \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $domf' \subseteq domf$ si ha $f' : domf' \to \mathbb{R}$. Se f' è derivabile, in $domf'' \subseteq domf$, si può definire la funzione derivata seconda di f, indicata con $f''(x) \doteq (f')'(x)$, $f'' : domf'' \to \mathbb{R}$. È possibile continuare per derivata terza, quarta, ecc...Si può usare anche la notazione $f^{(2)}$.

23.2 Funzione convessa o concava

23.2.1 Funzione convessa

- Una funzione strettamente convessa è una funzione f tale che $\forall (x_1; f(x_1)), (x_2; f(x_2))$, il grafico congiungente $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sta sopra al grafico della funzione.
- Una funzione convessa è una funzione f tale che $\forall (x_1; f(x_1)), (x_2; f(x_2))$, il grafico congiungente $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sta sopra o coincide al grafico della funzione.

23.2.2 Funzione concava

Una funzione è

- strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.
- è concava se $-f$ è convessa.

23.2.3 Definizione

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa (strettamente) in I se $f(x) \leq (<) f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) \forall x_1, x_2 \in I \; x_1 < x < x_2$.

23.2.4 Teorema 1

Se f è derivabile su $]a;b[$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa in $]a;b[$.
- f' è strettamente crescente in $]a;b[$.
- $\forall x_0 \in]a;b[,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in]a;b[$

23.2.5 Teorema 2

Sia f derivabile due volte in $]a;b[$

- fè convessa su $]a;b[\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ su $]a;b[$.
- $f''(x) > 0$ su $]a;b[\Rightarrow f$ è strettamente convessa su $]a;b[$. Non vale l'implicazione inversa.

23.2.6 Definizione

$f :]a;b[\to \mathbb{R},\ x_0 \in]a;b[$ punto di derivabilità di f oppure $f'(x_0) = \pm\infty$. Il punto x_0 si dice punto di flesso per f se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (o concava) e esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava (o convessa).

23.2.7 Teorema 3

$f :]a;b[\to \mathbb{R},\ x_0 \in]a;b[$ un punto di flesso per f. Se f è derivabile due volte in x_0, allora $f''(x_0) = 0$, non è vera l'implicazione inversa.

Capitolo 24

Studio di funzione

1. Identificare il dominio ($domf$).
2. Identificare eventuali simmetrie e periodicità.
3. Studio del segno di f (se possibile).
4. Comportamento agli estremi del dominio (limiti, punti di discontinuità, asintoti).
5. Continuità.
6. Identificare il dominio della derivata e la derivata stessa (escludendo punti angolosi, cuspidi e punti a tangenza verticale).
7. Studio del segno di f': punti critici (massimi, minimi locali, monotonia di f).
8. Identificare il dominio della derivata seconda e la derivata seconda stessa.
9. Segno della derivata seconda: (punti di flesso, convessità, concavità di f).
10. Disegnare il grafico qualitativo di f.

Capitolo 25

Polinomi di Taylor

I polinomi di Taylor servono per approssimare una funzione in un intorno di un punto x_0 tramite funzioni semplicemente calcolabili: i polinomi.

25.0.0.1 Formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0 \tag{25.1}$$

25.0.0.2 Formula di Taylor con il resto di Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \text{una valutazione quantitativa dell'errore} \quad x \to x_0 \tag{25.2}$$

25.0.1 Osservazioni

Se $f :]a; b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a; b[$.

- Se f è continua in x_0, allora $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$,
  $= f^{(0)}(x_0) + o((x - x_0)^0)$ per $x \to x_0$, ovvero la miglior approssimazione costante di $f(x)$ per $x \to x_0$ è
  $P_0(x) \doteq f^{(0)}(x_0)\ \forall x$, ovvero $f(x) = P_0(x) + o((x - x_0)^0)$ per $x \to x_0$.

- Se f è derivabile in x_0 allora $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)$ per $x \to x_0$, $= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$, miglior approssimazione affine di $f(x)$ per $x \to x_0$ è
  $P_1(x) \doteq f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$. $P_1(x)$ è un polinomio di grado ≤ 1 se $f^{(1)}(x_0) \neq 0$ è centrato in x_0.

25.1 Formula di Taylor con resto di Peano

Sia $f :]a; b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a; b[$. Supponendo che f sia derivabile n volte in x_0 e derivabile $(n - 1)$ volte in $]a; b[$. Allora $\forall x \in]a; b[$,
$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0$

Dove $P_n(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}}{2!}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x-x_0)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{25.3}$$

$P_n(x) =$ polinomio di Taylor di ordine n (corrispondente al numero di derivate calcolate) associato ad f e centrato in x_0. $P_n(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$, e ha grado $n \Leftrightarrow f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Se $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor prende anche il nome di polinomio di Mac Laurin.
Se esiste il polinomio di Taylor di ordine n associato ad f e centrato in x_0, è unico, si dimostra supponendo:

- $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$
- $f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n)$
- $\Rightarrow P_n(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n)$
- $P_n(x) = Q_n(x)$

25.1.0.1 Dimostrazione

Se f è derivabile in $x_0 \in]a;b[$, allora
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0)) \quad x \to x_0$, dove
$P_1(x) = f(x_0 + f'(x_0)(x-x_0)$. Si vuole indagare $o((x-x_0))$. Si consideri $h(x) = f(x) - P_1(x)$, perciò $\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}{(x-x_0)^2}$, ovvero se l'infinitesimo sopra è di ordine superiore a $(x-x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}[\frac{0}{0}]$, si provi a calcolarlo attraverso de l'Hopital. $\frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f''(x_0)}{2}$ se f è derivabile due volte. Da questo segue, usando de l'Hopital che $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{2} \Leftrightarrow$
$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \Leftrightarrow$
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}((x-x_0)^2) \Rightarrow$
$f(x) = P_2(x) + o((x-x_0)^2) \quad x \to x_0$. Si procede con $\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^3}$ e si dimostra attraverso il principio di induzione.

25.2 Polinomi di Taylor delle funzioni elementari centrati in $x_0 = 0$

25.2.1 $f(x) = e^x$

- $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \geq 0$

- $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \geq 0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \tag{25.4}$$

$= 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

25.2.2 $f(x) = \log(1 + x)$

$$\begin{array}{cc}
f(x) = \log(1+x) & f^{(0)}(0) = 0 \\
f'(x) = \frac{1}{1+x} & f^{(1)}(0) = 1 \\
f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & f^{(2)}(0) = -1 \\
f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) = 2 \\
f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) = -3! \\
. & . \\
. & . \\
\ldots & . \\
f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} & f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!
\end{array}$$

$P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k(k-1)!} x^k$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \tag{25.5}$$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

25.2.3 $f(x) = \sin x$

$$\begin{array}{cc}
f(x) = \sin x & f^{(0)}(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f^{(2)}(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0
\end{array}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{25.6}$$

$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$P_{2n+2} = P_{2n+1} \quad \forall n \geq 0$

25.2.4 $f(x) = \cos x$

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{25.7}$$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$P_{2n+1} = P_{2n} \quad \forall n \geq 0$

25.2.5 $f(x) = \tan x$

$$P_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \tag{25.8}$$

25.2.6 $f(x) = \arctan x$

$$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \tag{25.9}$$

$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$

25.2.7 $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \tag{25.10}$$

$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$

25.3 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f:]a;b[\to \mathbb{R},\ x_0 \in]a;b[$. Si supponga che f sia derivabile $n+1$ volte nell'intervallo $]a;b[$. Allora sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor associato ad f di ordine n e centrato in x_0, allora $\forall x \in]a;b[$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}) \tag{25.11}$$

Dove c_x ùn punto opportuno tra x e x_0.

25.3.0.1 Osservazione

Il teorema di Lagrange o del valor medio dimostrato precedentemente dimostra che $\exists c_x \in [x; x_0[: \quad f'(c_x) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \Rightarrow f(x_0) - f(x) = f'(c_x)(x_0 - x) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(c_x)(x - x_0)$ che il caso 0 della formula di Taylor sopra scritta sull'intervallo $[x; x_0] \vee [x_0; x]$.

25.3.1 Applicazioni

Si usi il teorema sopra per ottenere stime, approssimazioni in quanto si può scrivere $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1})$.

25.3.1.1 Esempi

- Si provi che $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \neq 0$. Basta dimostrare per x positivi in quanto le due funzioni sono pari. Per $x > 2$ è ovvia in quanto $1 - \frac{x^2}{2}, -1 \leq \cos x \forall x > 2$. Si usi la formula di Taylor con resto di Lagrange per $n = 2$, $x_0 = 0$, $f(x) = \cos x$: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\sin(c_x)}{3!}(x^3)$, dove c_x è un punto tra $]0; x[$, $\Rightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}\ \forall x \in]0; 2]$, perciò $\sin(c_x) > 0$.

- Si provi che $e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Si consideri lo sviluppo di Taylor di e^x centrato in $x_0 = 0$ con resto di Lagrange: $e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k1} + \frac{e^{c_x}]}{(n+1)!} x^{n+1}$, dove c_x è un punto opportuno tra o e c ($\forall x \in \mathbb{R}$). Si consideri $x = 1$, $e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{c_x 1}]}{(n+1)!} x^{n+1}$, $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \qquad (n+1)! \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

25.3.1.2 Stima di e

Applicando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si trova che $|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{e^{c_x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{\max\{1; e^x\}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$, dove $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, perciò:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{25.12}$$

Capitolo 26

Serie numeriche

Una serie numerica è la somma formale degli elementi di una successione. $\{a_n\}_n \in \mathbb{R}$ $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$ e si indica come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{26.1}$$

26.1 Successione delle somme parziali

È definita da: $S_0 = a_0$
$S_1 = a_0 + a_1$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_2$
.
.
.
$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n$

26.2 Convergenza, divergenza, indeterminazione

Definita $\{a_n\}$ successione di numeri reali,

- La serie $\sum_n a_n$ è convergente se la successione delle somme parziali $\{S_n\}_n$ è convergente (ossia ammette limite finito), ovvero se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ e si dirà che $\sum a_n < +\infty$ $(a_n > 0)$.
- La serie $\sum_n a_n$ è divergente se la successione delle somme parziali $\{S_n\}_n$ è convergente (ossia ha limite infinito), ovvero se $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ e si dirà che $\sum a_n = \pm\infty$.

- La serie $\sum\limits_n a_n$ è indeterminata o irregolare se la successione delle somme parziali $\{S_n\}_n$ è indeterminata (ossia non ammette limite infinito), ovvero se $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

26.2.0.1 Note

- È raro trovare la somma di una serie, ma si riuscirà sempre a determinarne il carattere.
- Il fatto che il termine infinito di una serie sia finito è condizione necessaria ma non sufficiente affinchè questa sia convergente.
- Il carattere di due serie con lo stesso carattere non è influenzato da un numero finito di elementi.

26.3 Somma e prodotto di serie

26.3.1 Somma

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono $\Rightarrow$ $\sum(a_n + b_n)$ è convergente e $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, valido anche se una diverge o se entrambe divergono con stesso segno, non si può dire nulla se una diverge positivamente e una negativamente.

26.3.2 Prodotto

$\sum(a_n \cdot b_n) = \sum a_n \cdot \sum b_n$, ma il carattere della serie non è determinato univocamente dai caratteri dei fattori.

26.4 Criteri di convergenza per serie

26.4.1 Teorema 1

Se $\sum s_n$ serie è convergente allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, condizione necessaria affinchè la serie sia convergente, ma non è sufficiente, per esempio $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$, ma $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

26.4.1.1 Dimostrazione

Se $\sum a_n$ è convergente allora per definizione $\exists$ finito $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, allora basta osservare che $a_n = S_n - S_{n-1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = S - S = 0$.

26.4.2 Teorema 2

Si supponga che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \xrightarrow[n_0 \to +\infty]{} 0$, ovvero se la coda di una serie è infinitesima, allora la serie è convergente.

26.5 Criteri di convergenza per serie a termini ≥ 0, analoghi per ≤ 0

Sia $\sum_n a_n$ con $a_n \geq 0 \quad \forall n$, allora la serie o converge o diverge positivamente. Infatti la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ verifica: $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \quad \forall n, \Rightarrow \{S_n\}_n$ è crescente. Allora per il teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n$. Tale limite è finito o $+\infty$. Sarà finito se $\{S_n\}$ è limitata superiormente, in ogni caso $\lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_n$.

26.5.1 Teorema (criterio del confronto)

Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

1. $\sum_n b_n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

2. $\sum_n a_n = +\infty \Rightarrow \sum_n b_n = +\infty$

26.5.1.1 Dimostrazione

- Sia $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum a_n$

- Sia $\{W_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum b_n$

Dal confronto tra le successioni si ha ovviamente che $S_n \leq W_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Se $\sum_n b_n < +\infty, \Rightarrow \{W_n\}$ ammette limite finito, $\Rightarrow \{W_n\}$ è limitata superiormente, $\Rightarrow \{S_n\}$ è limitata superiormente e ammette limite finito, ovvero $\sum_n a_n < +\infty$

2. Se $\sum_n a_n = +\infty, \Rightarrow \{S_n\}$ non è limitata superiormente, $\Rightarrow \{W_n\}$ non è limitata superiormente, ovvero $\sum_n b_n = +\infty$

26.5.2 Teorema (criterio del confronto asintotico)

Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni a valori reali > 0 tali che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \tag{26.2}$$

Dove $l \in]0; +\infty[$, $(\Leftrightarrow a_n \sim lb_n)$ per $n \to +\infty$, $\Rightarrow \sum\limits_n a_n$, $\sum\limits_n b_n$ hanno lo stesso carattere.

26.5.2.1 Dimostrazione del criterio del confronto asintotico

Per ipotesi si ha che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0; +\infty[$. Usando la definizione di limite con $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$, perciò $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}l \Leftrightarrow \frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n \quad \forall n \geq N$. Da queste disuguaglianze grazie al criterio del confronto si ottiene:

- $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$.
- $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$.
- $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$.
- $\sum a_n < +\infty \Rightarrow \sum b_n < +\infty$.

26.5.3 Criterio della radice ennesima

Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali ≥ 0. Se esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0; +\infty[$:

- $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n < +\infty$
- $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n = +\infty$
- $l = 1$ non si può conoscere il carattere della serie a priori.

Si ricordi che:

- $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- $\sqrt[n]{n^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- $\sqrt[n]{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- $\sqrt[n]{a^n + b^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$ se $b \geq a$.

26.5.3.1 Dimostrazione

l < 1 Si ha $l < \frac{l+1}{2} < 1$: da $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \doteq q$, ovvero $0 \leq a_n \leq q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Poichè $\sum q^n < +\infty$, per il criterio del confronto anche $\sum a_n < +\infty$.
l > 1 Dalla definizione di limite si ha che $\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie non è convergente. Essendo a termini positivi è divergente positivamente.
l = 1

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$

26.5.4 Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali ≥ 0. Se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0; +\infty[$. Se

- $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n < +\infty$

- $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_n a_n = +\infty$

- $l = 1$ non si può conoscere il carattere della serie a priori.

26.5.4.1 Dimostrazione

La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del criterio della radice ennesima.

26.6 Serie numeriche di segno qualsiasi

Una serie $\sum a_n (a_n \in \mathbb{R})$ si dice assolutamente convergente se la serie a termini non negativi $\sum |a_n|$ è convergente.

26.6.1 Criterio della convergenza assoluta

Se la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente ($\sum |a_n| < +\infty$) allora anche la serie $\sum a_n$ lo è e si ha $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$. Si dice che $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$.

26.7 Serie numeriche a segno alterno

26.7.1 Criterio di Leibniz

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini ≥ 0, decrescente e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Capitolo 27

Alcune serie

27.1 La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \tag{27.1}$$

Si ricordi che per $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \nexists & q \leq 1 \end{cases}$$

27.2 Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{27.2}$$

Il termine ennesimo tende a zero, la serie converge ad 1 ed è una serie telescopica.

27.2.1 Serie telescopica

Si definisce una serie telescopica una serie i cui elementi $a_n = b_n - b_{n+1}$, con $\{b_n\}_n$ un'altra successione. Nel caso di Mengoli $b_n = \frac{1}{n}$, pertanto $S_n = b_1 - b_{n+1}$.

27.3 Serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} \tag{27.3}$$

Risulta convergente se $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$ o se $\alpha = 1, \beta > 1$

27.4 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tag{27.4}$$

Soddisfa $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, si provi che la coda della serie non è infinitesima. Basta osservare che $\forall n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \geq 1$:
$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n} > \sum\limits_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{2n_0} n_0 \geq \frac{1}{2}$,
Pertanto $\Rightarrow \lim\limits_{n_0\to+\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n} \neq 0$. Pertanto dal teorema segue che la serie non è convergente, ed essendo che la serie è a termini positivi si può concludere che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

27.4.1 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{27.5}$$

27.4.1.1 Se $\alpha \leq 1$

In questo caso la serie è divergente:

1. Se $\alpha = 1$ si è già dimostrato che la serie armonica è divergente,
2. Se $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < (\frac{1}{n})^\alpha \quad \forall n > 1$. Da $\sum\limits_{n} \frac{1}{n} = +\infty$, per il teorema del confronto $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$
3. Se $\alpha \leq 0$, allora $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} = +\infty$ in quanto $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = 1$ se $\alpha = 0$ o $= +\infty$ se $\alpha < 0$

27.4.1.2 Se $1 < \alpha < 2$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} : [1; +\infty[\to]0; +\infty[$, $\alpha > 0$, $f(x)$ decrescente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$.

27.4.1.3 Se $\alpha = 2$

Basta osservare che $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ $\forall n \geq 1$ ($\Leftrightarrow n(n+1) \leq 2n^2 \Leftrightarrow n \leq n^2$). Si conosca che $\sum\limits_{n} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$ (serie di Mengoli), dal criterio del confronto segue che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

27.4.1.4 Se $\alpha \geq 2$

In questo caso la serie è convergente: basta osservare che: $0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$, poichè $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, per il criterio del confronto si ha $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ se $\alpha \geq 2$.

27.4.2 Scrittura della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \alpha > 1 \end{cases} \tag{27.6}$$

27.5 Serie di potenze

Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali con $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. $\forall x \in \mathbb{R}$, la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{27.7}$$

Si dice serie di potenze. Si dice insieme di congruenza $E = \{x \in \mathbb{R}$: la serie di potenze risulta convergente$\}$.

27.5.1 Note

- $E \neq \emptyset$: $x_0 \in E$ sempre.
- Esistono serie per cui $E = \{x_0\}$.

27.5.2 Raggio di convergenza

Si dice raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ il valore $r = \sup\limits_{x \in E} |x-x_0|$, $r \in [0; +\infty[$, $r = +\infty$ dove E è l'insieme di convergenza della serie.

27.5.3 Teorema

Sia r il raggio della serie $\sum_n a_n(x-x_0)^n$, allora:

- la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < r$.
- la serie non converge $\forall x \in \mathbb{R} : |x-x_0| > r$.
- Nei punti $x = x_0 + r$ e $x = x_0 - r$ il suo carattere non è determinato.

27.5.4 Determinazione del raggio di convergenza

Sia $\{a_n\}_n$ la successione di numeri reali e $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ la serie di potenze. Se esiste

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \quad 0 \le l \le +\infty$ oppure
- $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l \quad 0 \le l \le +\infty$

La serie di potenze ha raggio di convergenza:

$$r = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ 0 & l = +\infty \\ \frac{1}{l} & l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

27.6 Serie di Taylor

Se $f \in C^\infty(]a;b[)$ (derivabile all'infinito con continuità), $x_0 \in]a;b[$. Si può scrivere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{27.8}$$

27.6.1 Definizione

$f \in C^\infty(]a;b[)$ si dice sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in I se $\exists$ un intorno I di x_0 tale che:

i la serie di Taylor di f centrato in x_0 è convergente $\forall x \in I$.

ii la sua somma è $f(x)$.

27.6.2 Condizioni di sviluppabilità

f è sviluppabile in serie di Taylor $\Rightarrow$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) \to 0 \tag{27.9}$$

Ovvero si deve stimare il resto di Lagrange $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ e determinare se vale 0. Stimando il resto di Lagrange si dimostrano facilmente che per $x_0 = 0$ valgono gli sviluppi notevoli dimostrati precedentemente.

Capitolo 28

Integrali di Riemann

Gli obbiettivi dell'integrazione sono di dare una definizione generale di un'area di una figura piana e trovare un algoritmo per il suo calcolo effettivo.

28.1 Metodo di esaustione di Archimede

Si tenti di trovare l'area E di un intervallo $[0; b]$, $b > 0$, ovvero $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{\not{\vDash}} : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Si divida l'intervallo $[0; b]$ in n intervalli di ampiezza $\frac{b}{n}$ $n \in \mathbb{N}$. Si ottengono $x_j = j\frac{b}{n}$ nell'ordine: $0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n = b$.
Si considerino i rettangoli con base questi intervalli e con altezza pari al massimo valore assunto da $f(x) = x^2$ (in questo caso) in questo intervallo. L'area complessiva di questi rettangoli risulta
$S_n = \frac{b}{n}[(\frac{b}{n})^2 + (\frac{2b}{n})^2 + (\frac{3b}{n})^2 + \cdots + (\frac{nb}{n})^2] =$
$= \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] =$
$= \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Si considerino i rettangoli con base questi intervalli e con altezza pari al minimo valore assunto da $f(x) = x^2$ (in questo caso) in questo intervallo. L'area complessiva di questi rettangoli risulta
$s_n = \frac{b}{n}[0^2 + (\frac{b}{n})^2 + (\frac{2b}{n})^2 + (\frac{3b}{n})^2 + \cdots + ((n-1)\frac{b}{n})^2] =$
$= \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] =$
$= \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.
Si osservi che $s_n \leq areaE \leq S_n$ e che $n \to +\infty$ $s_n = S_n = \frac{b^3}{3}$, sarà naturale perciò definire $areaE = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{b^3}{3}$.

28.2 Definizione di integrale di Riemann

Sia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo limitato. Si scelgano $(n+1)$ punti nell'intervallo $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ detti suddivisione di $[a; b]$ che si indica con D. I rispettivi intervalli: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \cdots, [x_{n-1}; x_n]$ formano una partizione di $[a; b]$. Si consideri $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$ e $M_i = \inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$ e si costruisca $s(D, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ o somma inferiore di f relativa a D e $S(D, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ o somma superiore di f relativa a D. Si osservi che

- Per ogni suddivisione D di $[a; b]$ si ha $\inf\limits_{[a,b]} f(b - a) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq \sup\limits_{[a,b]} f(b - a)$.
- Per ogni suddivisione D_1, D_2 di $[a, b]$, $D_1 \subset D_2$, $s(D_1, f) \leq s(D_2, f) \leq S(D_2, f) \leq S(D_1, f)$.
- Per ogni suddivisione D', D'' di $[a; b]$ si ha $s(D', f) \leq S(D'', f)$, infatti: $s(D', f) \leq s(D \cap D'', f) \leq S(D' \cap D'', f) \leq S(D'', f)$

Da questo si ottiene che $\sup\limits_{D} s(D, f) \leq \inf\limits_{D} S(D, f)$. Una funzione si dirà integrabile se i due valori sono uguali.

28.2.1 Definizione

Sia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata si dice integrabile secondo Riemann se $\sup\limits_{D} s(D, f) = \inf\limits_{D} S(D, f)$ e il valore comune è detto integrale di Riemann di f:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f) \tag{28.1}$$

$R([a, b])$ indica l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann.

28.2.2 Interpretazione geometrica dell'integrale

$f \in R([a; b])$, $f(x) \geq 0$ su $[a; b]$, sia $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{\not\models} : q \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$. È ragionevole definire area $E \doteq \int_a^b f(x)dx$, infatti $s(D, f) \leq areaE \leq S(D, f)$ $\forall D \subset [a; b]$. Se $f(x) \leq 0$ su $[a; b]$ $\int_a^b \doteq - areaE$.

28.2.2.1 Osservazioni

Nel metodo di esaustione di Archimede $D = \{j\frac{b}{n} : j = 0, \cdots, n\} \forall n$, s_n $e \sum\limits_{d} s(d, f) \leq \inf\limits_{D} S(D, f) \leq S_n$ che converge a $\frac{b^3}{3}$ L'area $E = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$.

28.2.2.2 Teorema

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f \in R([a; b])$
2. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ monotona $\Rightarrow f \in R([a; b])$
3. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ limitata e con un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow f \in R([a; b])$

28.2.3 Teorema (proprietà dell'integrale)

Siano $f, g \in R([a; b])$ allora

- $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.
- $f \leq g$ su $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- $\forall c \in]a; b[$ allora $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- $| \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

28.2.4 Teorema della media integrale

Sia $f \in R([a; b])$ una funzione integrabile, $m = \inf_{[a;b]} f$, $M = \sup_{[a;b]} f$. Allora:

i $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$ è la media integrale.

ii Se f è continua su $[a; b] \exists c \in]a; b[$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$

28.2.4.1 Dimostrazione i

$m \leq f(x) \leq M$ su $[a; b]$, allora $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$ monotonia dell'integrale, $\int_a^b mdx = m(b-a)$ e $\int_a^b Mdx = M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$.

28.2.4.2 Dimostrazione ii

Se f è continua su $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass e dei valori intermedi f assume tutti i valori intermedi tra $m = \min_{[a;b]} f$ e $M = \max_{[a;b]} f$, ovvero $\exists c \in]a; b[$:
$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

28.3 Funzione primitiva

Una funzione $F : I \to \mathbb{R}, I$ intervallo si dice primitiva di f se F è derivabile e $F' = f \ \ \forall x \in I$. Per introdurre il concetto di funzione integrale si deve estendere l'integrale ad un intervallo orientato, ovvero definire $\int_a^b f(x)dx$ anche se $a > b$. In questo caso $\int_a^b f(x)dx \doteq - \int_b^a f(x)dx$. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

28.3.0.1 Osservazione

Rimangono validi tutte le proprietà dell'integrale tranne la monotonia: in questo caso si deve modificare: $f(x) \leq g(x) \ \forall x \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$

28.4 La funzione integrale

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo e $f \in R([a;b])$ sia $c \in I$ fissato, si definisce la funzione integrale $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \ \ \forall x \in I$ relativa al punto c.

28.5 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sie $f \in C([a;b])$ continua su qualunque intervallo limitato, allora la funzione integrale $F_c : [a;b] \to \mathbb{R}$ definita da $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ con $c \in [a;b]$ fissato è derivabile e $F_c'(x) = f(x) \forall x \in [a;b]$, ovvero $F(x)_c$ è una primitiva di $f(x)$ su $[a;b]$.

28.5.0.1 Dimostrazione

Si prenda $x \in]a;b[$ (nel caso di $x = a \vee x = b$ esiste rispettivamente solo la derivata destra o sinistra). Sia $h > 0 (: x+h \in]a;b[)$, $F_c(x+h) - F_c(x) = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$, $\frac{F_c(x+h)-F_c(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$, $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$ media integrale. Pertanto $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)$, e $x < c_h < x+h$. Per la continuità di f, $\lim\limits_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F_c(x+h)-F_c(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x)$. Analogamente si dimostra per $h < 0 : \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F_c(x+h)-F_c(x)}{h} = F'(x) = f(x)$.

28.5.0.2 Nota

$f \in C([a;b]), \alpha(x) : I \subset \mathbb{R} \to [a;b], \beta(x) : I \subset \mathbb{R} \to [a;b]$ derivabili $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{\alpha(x)}^a f(t)dt + \int_a^{\beta(x)} f(t)dt = \int_a^{\beta(x)} f(t)dt - \int_a^{\alpha(x)} f(t)dt$, perciò derivando $(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt)' = (F_a(\beta(x)))' - (F_a(\alpha(x)))' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$

28.5.0.3 Osservazioni sulle primitive

Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $F(x) + k$ è ancora una primitiva
- Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$, esse differiscono di una costante.

Da questi fatti e dal teorema fondamentale del calcolo si ha che tutte le primitive di $f \in C([a;b])$ sono nella forma $F(x) = \int_a^x f(t)dt + k \ \ k \in \mathbb{R}$.

28.6 Teorema del calcolo dell'integrale per variazione di una primitiva o teorema di Torricelli-Barrow

Sia $f \in C([a;b])$. Se F è una primitiva di f in $[a;b]$, allora $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$.

28.6.0.1 Dimostrazione

Sia F una primitiva di f. Allora $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = \int_a^x f(t)dt + c \ \ \forall x \in [a;b]$, per $x = a$ si ha $F(a) = \int_a^a f(t)dt + c$, ovvero $F(a) = c$, Quindi $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$, per $x = b$ si ha $F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

28.7 Notazione

- $\int_a^b f(x)dx$, integrale definito di f, numero $\in \mathbb{R}$.
- $\int_a^x f(t)dt$, funzione integrale di f relativa al punto a.
- $\int f(x)dx$, integrale indefinito di f, l'insieme di tutte le primitive di f rispetto a x.

28.8 Tabella delle primitive immediate

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha{}_{\alpha \neq 1}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

$f(x)$	$F(x)$
$(\phi(x))^\alpha \phi'(x)_{\alpha \neq 1}$	$\frac{\phi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$	$\log\lvert\phi(x)\rvert$
$e^{\phi(x)}\phi'(x)$	$e^{\phi}(x)$
$a^{\phi(x)}\phi'(x)$	$\frac{a^{\phi}(x)}{\log a}$
$\phi'(x)\sin\phi(x)$	$-\cos\phi(x)$
$\phi'(x)\cos\phi(x)$	$\sin\phi(x)$
$\frac{\phi'(x)}{\sqrt{1-\phi(x)^2}}$	$\arcsin\phi(x)$
$-\frac{\phi'(x)}{\sqrt{1-\phi(x)^2}}$	$\arccos\phi(x)$
$\frac{\phi'(x)}{1+\phi(x)^2}$	$\arctan\phi(x)$
$\frac{\phi'(x)}{\cos^2\phi(x)}$	$\tan\phi(x)$

28.8.1 Osservazioni

- L'integrale indefinito mantiene la linearità dell'integrale definito: $\int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall f(x), g(x) \in C([a;b])$.

- Non tutte le funzioni hanno una primitiva esprimibile attraverso una funzione elementare.

- Dal teorema del calcolo integrale si ha $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$, mentre dal teorema di Torricelli-Barrow si ha $\int_a^x f'(x) = f(x) - f(a)$, ovvero l'integrazione è l'operazione inversa alla derivazione a meno di una costante.

28.9 Integrazione per parti

Siano $f, g \in c^1([a;b])$, si ricordi che: $(fg)' = f'g + fg'$, da cui $f'g = (fg)' - fg'$, considerando la funzione primitiva per ciascun addendo si ha:

$$\int f'g = fg - \int fg' \tag{28.2}$$

28.10 Integrazione per sostituzione

Sia $f \in C([a;b])$ una funzione e $\phi : [c;d] \to [a;b]$ $t \to x = \phi(t)$ una funzione invertibile e F la funzione primitiva di f su $[a;b]$. $(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$ $\forall t \in [c;d] = f(\phi(t))\phi'(t)$, ossia $F \circ \phi$ è una primitiva di $f(\phi(t))\phi'(t)$ in $[c;d]$. Ovvero $(F \circ \phi) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Ovvero

$$(\int f(x)dx)_{x=\phi(t)} = (\int f(\phi(t))\phi'(t)dt) \tag{28.3}$$

$$(\int f(x)dx) = (\int f(\phi(t))\phi'(t)dt)_{t=\phi^{-1}(x)} \tag{28.4}$$

28.10.0.1 Note

- $f(x) \to f(\phi(t))$

- $dx \to \phi'(t)dt$

28.10.1 Sostituzioni per funzioni razionali in seno e coseno

Ponentdo $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ ottengo che:

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

28.10.2 Altra sostituzione utile: le funzioni iperboliche

- Coseno iperbolico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Seno iperbolico: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Valgono le seguenti proprietà:

- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

28.11 Integrazione delle funzioni razionali

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{28.5}$$

Dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n e $Q_m(x)$ un polinomio di grado m. Se $n > m$ è necessario compiere la divisione tra polinomi, a cui va aggiunto, se esiste il resto. Verranno considerati i casi in cui $m \leq 2$

28.11.1 m = 1

$\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a} \int \frac{a}{ax+b} = \log |ax + b| + c, c \in \mathbb{R}$

28.11.2 m = 2

28.11.2.1 Il denominatore ha due radici distinte

Dato $\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+f} dx$ siano X_1 e x_2 le radici del denominatore, si dovrà risolvere l'integrale associato $\int (\frac{y}{x-x_1} + \frac{z}{x-x_2} dx$.

28.11.2.2 Il denominatore è un quadrato perfetto

Si procede per sostituzione: $\int \frac{ax+b}{(cx+d)^2} dx$ si sostituisca $cx + d$ con t e lo si riconduca alla forma di somma di potenze.

28.11.2.3 Il denominatore non si annulla mai

- Se il numeratore ha grado 0 lo si riconduce mediante raccoglimenti alla forma $a \int \frac{1}{f(x)^2+1} dx = a \arctan(f(x)) + c$.
- Se il numeratore ha grado 1 lo si riconduce mediante raccoglimenti alla forma $a \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + a \int \frac{1}{g(x)^2+1} dx = a \log f(x) + a \arctan g(x)$

Capitolo 29

Integrali generalizzati

Si utilizzano per estedere il concetto di integrale a funzioni illimitate su un intorno di un punto o a funzioni limitate su un intervallo illimitato.

29.1 Integrazione per funzioni illimitate

Sia $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\lim\limits_{x\to b^-} = \pm\infty$. Si consideri $\forall\epsilon > 0$ piccolo $\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$, che ha senso come funzione Riemann-integrabile su $[a;b-\epsilon]$ e si ponga:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \tag{29.1}$$

- Se tale limite esiste finito allora f si dice integrabile in senso generalizzato (o improprio) su $[a;b[$, oppure che $\int_a^b f(x)dx$ è convergente
- Se tale limite esiste infinito allora l'integrale improprio diverge positivamente o negativamente.
- Se tale limite si dice che l'integrale non ha senso o $\nexists$.

Allo stesso modo si definisce per $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ con $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \tag{29.2}$$

29.2 Integrazioni per intervalli illimitati

Sia $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Perciò $\forall M > a$ è ben definito $\int_a^M f(x)dx$. Si ponga:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \doteq \lim_{M\to +\infty} \int_a^{M} f(x)dx \tag{29.3}$$

- Se tale limite esiste finito allora f si dice integrabile in senso generalizzato (o improprio) su $[a; +infty[$, oppure che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.
- Se tale limite esiste infinito allora l'integrale improprio diverge positivamente o negativamente.
- Se tale limite si dice che l'integrale non ha senso o $\nexists$.

Allo stesso modo si definisce per $f :]-\infty; b] \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \tag{29.4}$$

29.3 Integrali impropri notevoli

- $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

29.4 Integrale di sottointervalli di una funzione

Sia $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ continua con $a \in \mathbb{R} \cap \{-\infty\}$ o $b \in \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$. Scelto un qualunque punto $c \in]a; b[$ sarà f integrabile in senso generalizzato su $]a; b[$ se f è integrabile su $]a; c]$ e $[c; b[$ in senso generalizzato:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{29.5}$$

Se entrambi divergono con stesso segno o diverge solo uno la somma è divergente,se divergono con segno opposto la somma non ha senso.

29.5 Criteri di convergenza

29.5.1 Criterio del confronto

Si suppongano $f, g : [a; b[\to \mathbb{R}$ continue e $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in un intorno sinistro di b, analogamente per $f :]a; b] \to \mathbb{R}$ per il limite a destra di a o su intervallo illimitato allora:

- $\int_a^b g(x)dx < +\infty \to \int_a^b f(x)dx < +\infty$.
- $\int_a^b f(x)dx = +\infty \to \int_a^b g(x)dx = +\infty$.

29.5.2 Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : [a;b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$. Siano $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ in un intorno sinistro di b tali che $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0; +\infty$ allora f è integrabile in senso improprio su $[a;b[\Leftrightarrow$ lo è g. Analogamente per $f :]a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ per il limite a destra di a o su intervallo illimitato.

29.6 Funzioni assolutamente integrabili

Sia $f : [a;b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Diremo che f è assolutamente integrabile in senso improprio su $[a;b[$ se $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, analogamente per gli altri casi, se f è assolutamente integrabile allora è integrabile.

29.7 Serie e integrali generalizzati

29.7.1 Criterio dell'integrale

Sia $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ una funzione decrescente. Si ponga $a_n = f(n)$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty \tag{29.6}$$

Inoltre $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Questo criterio vale anche su $[M; = \infty], M > 0 \in \mathbb{N}$ sostituendo $n = 0$ e $n = 1$ con $n = M$ e $n = M + 1$ rispettivamente.

29.7.1.1 Dimostrazione

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ somma delle aree minori del grafico di f divise per n, mentre $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ somma delle aree maggiori0 del grafico di f divise per n perciò $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

29.7.2 Convergenza della funzione gaussiana: $\mathbf{f(x) = e^{-x^2}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx < +\infty$. Si può osservare che $0 < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$. Si osservi che $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$

Capitolo 30

Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale di ordine n in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ è un espressione del tipo:

- $f^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \cdots; y^{(n-1)})$.
- $F(x; y; y'; y''; \cdots; y^{(n)})$

Una funzione $y = y(x)$ definita e derivabile n volte in I si dice soluzione dell'equazione, in I se $y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \cdots; y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$, oppure $F(x; y(x); y'(x); y''(x); \cdots; y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$. Verranno considerati alcuni casi per $n = 1$ e $n = 2$. Si vogliono studiare equazioni del tipo:

- $y' = f(x; y)$ o $F(x; y; y') = 0$
- $y'' = f(x; y; y')$ o $F(x; y; y'; y'') = 0$

Si vogliono trovare tutte le funzioni $y(x)$, trovare ovvero l'integrale generale, definite in $I \subseteq \mathbb{R}$ che verificano a o b.

30.1 Esempi

- $y'(x) = g(x)$, con $g(x) : I \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata continua, $y(x) = \int g(x)dx$ insieme delle soluzioni.
- $y'(x) = ay(x)$, $a \in \mathbb{R}$ fissato $I = \mathbb{R}$ $y(x) = ce^{ax}$. $y(x) = 0$ è soluzione, Se $(x) \neq 0$ l'equazione sopra è equivalente a $\frac{y'(x}{y(x)} = a$, $\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int adx \Leftrightarrow$ $\log |y(x)| = ax + c \quad c \int \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow |y(x)| = e^{ax+c} \Leftrightarrow |y(x)| = e^c e^a x$m essendo e^c una costante positiva lo pongo $k = e^c$, $y(x) = \pm ke^{ax} \quad k > 0$, $y(x) = ke^{ax} \quad \forall k \neq 0$. Considerando anche $k = 0$, si include la soluzione banale. In definitiva tutte le soluzioni possibili si $y' = ay$ sono $y(x) = ke^{ax} \quad k \in \mathbb{R}$

- $y' = 2y + x$ $f(x; y) = 2y + x$, l'equazione ammette infinite soluzioni $y(x) = ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
- $y'' = x$ equazione differenziale del secondo ordine: $y(x) = \iint x dx$, $y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$.
- $y'' = -y$ è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

30.2 Problema di Cauchy

$n = 1$ $y' = f(x; y)$ su I e poi si impone alla soluzione che $y(x_0) = y_0$ assegnato. $n = 2$ $y'' = f(x; y; y')$ su I e poi si impone alla soluzione che $y(x_0) = y_0$ assegnato e $y'(x_0) = y_1$ assegnato.

30.2.1 Esistenza locale di un problema di Cauchy

$y' = y^2$ e impongo $y(0) = 1$ $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione ma non è soluzione del problema di Cauchy: non soddisfa $y(0) = 1$, si supponga $y \neq 0$, considerando $\frac{y'}{y^2} = 1$, $\int \frac{y'}{y^2} dx = \int 1 dx$, ovvero $-y(x)^{-1} = x + c$, $y(x) = \frac{1}{-x+c}$, imponendo $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$. La soluzione del problema di Cauchy risulta $y(x) = \frac{1}{1-x}$ che vale sull'intervallo $I =]-\infty; 1[$.

30.3 Metodi risolutivi

Per:

- $y' = h(x)g(y)$ sono equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.
- $y' = a(x)y + b(x)$ sono equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti variabili.
- $y'' + ay' + by = f(x)$ sono equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti.

30.3.1 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

$y' = h(x)g(y)$ Se g si annulla in un punto allora la funzione costante $y(x) = \bar{y}$ $\forall x$ è soluzione costante, infatti $y'(x) = (\bar{y})' = 0$ Sia ora $g(y) \neq 0$ allora posso riscrivere la funzione come $\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int h(x) dx$. Se G è una primitiva di $\frac{1}{g}$ e H è una primitiva di h allora $G(y(x)) = H(x) + c$ e se G è invertibile

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c) \tag{30.1}$$

30.3.2 Equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti

$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni continue assegnate.

30.3.2.1 Osservazioni

- Se $b(x) \equiv 0$, l'equazione si trasforma in $y' = a(x)y$ a variabili separabili e si dice incompleta, altrimenti si dice completa e l'equazione a variabili associata si dice l'equazione omogenea associata.
- L'integrale generale dell'equazione si ottiene aggiungendo all'integrale dell'equazione omogenea associata una soluzione particolare dell'equazione completa.

$$y(x) = a^{A(x)}(c + \int b(x)e^{-A(x)}dx) \tag{30.2}$$

30.3.3 Equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti

$y'' + ay' + by = f(x)$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) \tag{30.3}$$