



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza
dell'Informazione

Corso di Laurea in
Informatica

DISPENSA DI FISICA

Dalle lezioni del professor Roberto Iuppa

AUTORI

Francesco Girlanda
Federico Cucino
Marco Giacopuzzi
Giacomo Fantoni

Anno accademico 2020-2021

Indice

Prefazione	1
1 Cinematica del punto	3
1.1 Introduzione	3
1.1.1 Punto materiale	3
1.1.2 Cinematica	3
1.2 Quiete	4
1.3 Moto rettilineo	4
1.3.1 Velocità	4
1.3.2 Accelerazione	5
1.3.3 Operazioni sul moto rettilineo	5
1.4 Moto rettilineo uniforme	7
1.4.1 Legge oraria del moto rettilineo uniforme	7
1.5 Moto rettilineo uniformemente accelerato	7
1.5.1 Dipendenza della velocità dal tempo	8
1.5.2 Dipendenza della posizione dal tempo	8
1.6 Moto verticale di un corpo	8
1.6.1 Sistema di riferimento	8
1.6.2 Caduta da un'altezza con velocità iniziale nulla	8
1.6.3 Caduta da un'altezza con velocità iniziale non nulla	9
1.6.4 Lancio del punto verso l'alto partendo dal suolo	10
1.7 Moto armonico semplice	11
1.7.1 Caratteristiche	11
1.7.2 Periodicità	11

1.7.3	Determinare il periodo	12
1.7.4	Velocità	12
1.7.5	Accelerazione	13
1.7.6	Condizioni iniziali	13
1.7.7	Dipendenza della velocità dalla posizione	13
1.7.8	Condizione sufficiente per un moto armonico semplice	14
1.7.9	Oscillazione	14
1.8	Moto rettilineo smorzato esponenzialmente	14
1.8.1	Cambio della velocità con la posizione	15
1.8.2	Legge oraria	15
1.8.3	Costante di tempo	15
1.9	Moto nel piano	16
1.9.1	Posizione	16
1.9.2	Velocità vettoriale	17
1.9.3	Accelerazione nel moto piano	18
1.10	Moto circolare	21
1.10.1	Velocità angolare	21
1.10.2	Moto circolare uniforme	21
1.10.3	Moto circolare non uniforme	22
1.10.4	Accelerazione del moto circolare	23
1.11	Moto parabolico dei corpi	24
1.11.1	Caratterizzazione	24
1.11.2	Velocità	24
1.11.3	Leggi orarie dei moti proiettati	25
1.11.4	Traiettoria	25
1.11.5	Direzione del moto	25
1.11.6	Altezza massima	25
1.11.7	Angolo di lancio per la gittata massima	26
1.11.8	Tempo totale di volo	26
2	Dinamica del punto	27

2.1	Legge d'inerzia	27
2.1.1	Principio di inerzia	27
2.1.2	Prima legge della dinamica	27
2.1.3	Forza	27
2.2	Legge di Newton	28
2.2.1	Massa inerziale	28
2.2.2	Sistemi di riferimento	28
2.2.3	Variazione di massa	28
2.3	Quantità di moto	29
2.3.1	Teorema dell'impulso	29
2.4	Risultante delle forze	30
2.4.1	Reazioni vincolari	30
2.5	Classificazione delle forze	31
2.6	Azione dinamica delle forze	31
2.7	Forza peso	31
2.8	Forza di attrito radente	32
2.9	Forza elastica	33
2.10	Piano inclinato	34
2.11	Forze centripete	34
2.12	Pendolo semplice	35
2.13	Tensione dei fili	36
2.14	Lavoro, Potenza, Energia Cinetica	37
2.14.1	Lavoro	37
2.14.2	Potenza	38
2.14.3	Energia cinetica	38
2.15	Lavoro della forza peso	39
2.16	Lavoro di una forza elastica	39
2.17	Lavoro di una forza di attrito radente	40
2.18	Forze conservative, energia potenziale	40
2.18.1	Forze conservative	40

2.18.2 Energia potenziale	41
2.19 Conservazione dell'energia	41
3 Moti relativi	43
3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e Accelerazione relative	43
3.1.1 Posizione	44
3.1.2 Velocità	44
3.1.3 Accelerazione	45
3.2 Sistemi di riferimento inerziali, Relatività Galileiana	46
3.2.1 Sistema di riferimento inerziale	46
3.2.2 Relatività galileiana	47
3.2.3 Forze apparenti o forze di inerzia	47
3.2.4 Sistema non inerziale	48
3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme	48
3.4 Moto di trascinamento uniformemente accelerato	49
3.4.1 Esempio carrello	50
3.4.2 Esempio ascensore	50
4 Gravitazione	52
4.1 La forza gravitazionale	52
4.1.1 Introduzione	52
4.1.2 Leggi di Keplero	52
4.1.3 Il ragionamento di Newton	53
4.1.4 Legge di gravitazione universale	54
4.2 Massa inerziale e massa gravitazionale	54
5 Dinamica dei sistemi di punti materiali	56
5.1 Sistemi di punti materiali, principio di azione e reazione	56
5.2 Centro di massa di un sistema di punti, Teorema del moto del centro di massa	57
5.2.1 Centro di massa	57
5.2.2 Teorema del moto del centro di massa	58

5.3	Conservazione della quantità di moto	58
5.3.1	Esempio di due punti isolati	58
5.4	Teorema di König per l'energia cinetica	59
5.5	Osservazioni sulle proprietà del centro di massa	59
5.6	Urti tra due punti materiali	60
5.6.1	Forze esterne	61
5.7	Urto completamente anelastico	61
5.8	Urto elastico	62
5.8.1	Esempi	63
6	Primo principio della termodinamica	65
6.1	Sistemi e stati termodinamici	65
6.1.1	Introduzione	65
6.1.2	Sistema termodinamico	65
6.1.3	Ambiente e Universo	65
6.1.4	Sistema aperto	66
6.1.5	Sistema chiuso	66
6.1.6	Sistema isolato	66
6.1.7	Variabili termodinamiche	66
6.2	Equilibrio termodinamico, principio dell'equilibrio termico	67
6.2.1	Equilibrio termodinamico	67
6.2.2	Trasformazione termodinamica	67
6.2.3	Equilibrio termico	68
6.2.4	Contatto termico	68
6.2.5	Sistema adiabatico	68
6.3	Definizione temperatura, termometri	68
6.3.1	Punto fisso	69
6.3.2	Misura della temperatura	69
6.3.3	Scale termometriche	69
6.4	Sistemi adiabatici, esperimenti di Joule, Calore	70
6.4.1	Esperimenti di Joule	70

6.4.2	Equivalenza calore e lavoro	71
6.5	Primo principio della termodinamica, energia interna	71
6.5.1	Primo principio della termodinamica	71
6.5.2	Implicazioni del primo principio	72
6.5.3	Convenzione segni lavoro e calore	73
6.6	Trasformazioni termodinamiche, lavoro e calore	74
6.6.1	Trasformazioni adiabatiche	74
6.6.2	Trasformazioni reversibili e irreversibili	75
6.7	Calorimetria	75
6.8	Processi isotermi, cambi di fase	77
6.8.1	Processi isotermi	77
6.8.2	Cambi di fase	77
6.9	Trasmissione del calore	78
6.9.1	Conduzione di calore	79
6.9.2	Convezione di calore	79
6.9.3	Irraggiamento	80
6.9.4	Parete adiabatica, Vaso di Dewar	80
6.9.5	Passaggio di calore dal solido a liquido	80
7	Gas ideali e reali	81
7.1	Leggi di gas, equazioni di stato dei gas ideali	81
7.1.1	Legge isoterma di Boyle	81
7.1.2	Legge isobara di Volta-Gay Lussac	82
7.1.3	Legge isocora di Volta-Gay Lussac	82
7.1.4	Legge di Avogadro	83
7.1.5	Equazione di stato del gas ideale	83
7.2	Trasformazioni di un gas, lavoro	84
7.3	Energia interna del gas ideale	85
7.3.1	Relazione di Mayer	87
7.4	Studio di alcune trasformazioni	88
7.4.1	Trasformazioni adiabatiche	88

7.4.2	Trasformazione isoterma	89
7.4.3	Trasformazioni isocore	90
7.4.4	Trasformazioni isobare	90
7.4.5	Trasformazioni generiche	91
7.5	Trasformazioni cicliche	91
7.5.1	Ciclo termico	92
7.5.2	Ciclo di Carnot	92
7.5.3	Ciclo di Otto	94
7.5.4	Ciclo frigorifero	96
7.5.5	Ciclo di Carnot Inverso	96
7.6	Teoria cinetica dei gas	96
7.6.1	Modello cinetico del gas ideale	96
7.6.2	Calcolo della pressione	97
7.6.3	Equipartizione dell'energia	98
8	Secondo principio della Termodinamica	100
8.1	Enunciati del secondo principio della termodinamica	100
8.1.1	Esempio: macchina termica	100
8.1.2	Enunciati	101
8.1.3	Equivalenza degli enunciati	101
8.2	Reversibilità e irreversibilità	103
8.3	Teorema di Carnot	104
8.4	Teorema di Clausius	105
8.4.1	Enunciato	105
8.4.2	Dimostrazione	106
8.4.3	Teorema di Clausius per macchine reversibili	107
8.4.4	Teorema di Clausius per macchine irreversibili	107
8.5	La funzione di stato Entropia	108
8.5.1	Diagrammi TS	109
8.6	Il principio di aumento dell'entropia, Calcoli di variazione dell'entropia	111
8.6.1	Trasformazioni adiabatiche	112

8.6.2 Cambiamenti di fase	112
8.7 Entropia del gas ideale	113
9 Forza elettrostatica. Campo elettrostatico	114
9.1 Cariche elettriche, isolanti e conduttori	114
9.2 Struttura elettrica della materia	115
9.2.1 Costituenti fondamentali	115
9.2.2 Carica e	115
9.2.3 Atomo	115
9.2.4 Carica di un isolante per strofinio	116
9.2.5 Principio di conservazione della carica elettrica	116
9.2.6 Ionizzazione	116
9.3 La legge di Coulomb	116
9.3.1 Enunciato	116
9.3.2 Forza vettoriale della legge di Coulomb	117
9.4 Campo elettrostatico	117
9.5 Campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di cariche	118
9.6 Linee di forza del campo elettrostatico	120
9.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico	121
10 Lavoro elettrico, Potenziale elettrostatico	123
10.1 Lavoro della forza elettrica, tensione, potenziale	123
10.1.1 Campo elettromotore	123
10.1.2 Lavoro	123
10.1.3 Tensione elettrica	124
10.1.4 Lavoro in un percorso chiuso	124
10.1.5 Forza elettromotrice	125
10.1.6 Forze conservative	125
10.2 Calcolo del potenziale elettrostatico	126
10.3 Numero arbitrario di cariche puntiformi	127
10.3.1 Cariche distribuite in modo continuo	128

11 Legge di Gauss	129
11.1 Angolo solido	129
11.2 Flusso del campo elettrostatico, Legge di Gauss	130
11.2.1 Definizione di flusso attraverso una superficie	130
11.2.2 Legge di Gauss	131
11.3 Dimostrazione della legge di Gauss	132
11.3.1 Carica Interna	133
11.3.2 Carica Esterna	133
11.3.3 Cariche puntiformi e cariche uniformemente distribuite	134
11.4 Applicazioni teorema di Gauss	134
11.4.1 Campo elettrostatico di una distribuzione sferica superficiale di carica	135
11.4.2 Campo elettrostatico prodotto da una sfera uniformemente carica	136
11.4.3 Campo elettrostatico di un cilindro uniformemente carico	136
11.4.4 Campo elettrostatico di un piano indefinito uniformemente carico	138
12 Conduttori, dielettrici, energia elettrostatica	139
12.1 Conduttori in equilibrio	139
12.1.1 Condizione di equilibrio per un conduttore	139
12.1.2 Teorema di Coulomb	140
12.1.3 Induzione elettrostatica	141
12.2 Conduttore cavo, schermo elettrostatico	142
12.2.1 Conduttore cavo	142
12.2.2 Induzione completa	143
12.2.3 Schermo elettrostatico	144
12.3 Condensatori	144
12.3.1 Capacità condensatore sferico	145
12.3.2 Capacità di un condensatore cilindrico	145
12.3.3 Capacità di un condensatore piano	147
12.4 Collegamento di condensatori	147
12.4.1 Condensatori in parallelo	147

12.4.2 Condensatori in serie	148
12.5 Energia del campo elettrico	148
12.5.1 Carica di un condensatore	148
12.5.2 Pressione elettrostatica	150
13 Corrente elettrica	153
13.1 Conduzione elettrica	153
13.2 Corrente elettrica	154
13.2.1 Corrente elettrica stazionaria	155
13.3 Legge di Ohm della conduzione elettrica	156
13.3.1 Potenza, effetto Joule	157
13.4 Resistori in serie e in parallelo	158
13.4.1 Resistori in serie	158
13.4.2 Resistori in parallelo	159
13.5 Forza elettromotrice	159
14 Campo magnetico, forza magnetica	162
14.1 Interazione magnetica, campo magnetico	162
14.2 Elettricità e magnetismo	164
14.3 Legge di Gauss per il campo magnetico	165

Prefazione

Il progetto

Quella che segue è una dispensa di appunti scritta da studenti; lo scopo è quello di raccogliere i contenuti del corso di Fisica tenuto dal professor Iuppa e condensarli in un elaborato di più facile fruizione per lo studente che si appresta a questa avventura a dir poco epica.

La dispensa fa riferimento al programma svolto durante l'anno accademico 2020/2021 e pertanto non comprende gran parte degli elementi di elettromagnetismo altrimenti affrontati durante il naturale svolgimento del corso.

I contenuti provengono principalmente dalle lezioni del professore, mentre invece ordine ed esposizione sono derivati in gran parte dal Mazzoldi¹.

Istruzioni per l'uso

Preme sottolineare che non ci assumiamo alcuna responsabilità circa l'esito dell'esame di chi sceglie di utilizzare questo testo come principale risorsa di studio. Nonostante il sangue versato non possiamo ignorare di essere dei poveri studenti, proni a commettere errori o malinterpretare dei passaggi.

Pertanto ci teniamo a consigliare ai lettori di fare sempre riferimento a quanto detto in classe dal professore e al materiale da lui indicato.

Segnalazione errori

Come accennato in precedenza, la dispensa è stata scritta durante il secondo semestre dell'anno accademico 2020/2021 e quindi, come molti di voi sapranno, in tempo di pandemia: non vuole essere una scusa, ma solo un modo carino per dirvi che molto probabilmente troverete *innumerevoli* errori dovuti principalmente ai principi di burnout²

¹ "Fisica vol.1 Meccanica, termodinamica" e "Fisica vol.2 Elettromagnetismo, onde" di P.Mazzoldi, M.Nigro e C.Voci

²Ora stiamo tutti bene. Grazie per l'interessamento.

che abbiamo affrontato durante la stesura del testo. Sono state svolte alcune revisioni, ma siamo comunque certi di aver trascurato qualcosa.

A questo proposito, se durante la lettura dovreste incorrere in errori di qualsiasi tipo, tra gli altri errori di battitura, errori concettuali o di impaginazione, vi chiediamo di fare una segnalazione; ve ne saremo riconoscenti e provvederemo a correggere quanto prima.

Per fare ciò potete scegliere uno delle seguenti modalità:

- visitando la repository del progetto (la trovate qui: <https://github.com/mgiacopu/appunti-fisica>) e aprendo una Github issue in cui segnalate l'errore o, se avete le mani in pasta con L^AT_EX, anche "forkando" la stessa repository e proponendo un vostro fix con una pull request sulla branch *errata-corrigere* con codice versione più alto;
- se ci conoscete personalmente, contattateci tramite canali informali come Telegram o WhatsApp;
- se siete a Trento potete trovare alcuni di noi, con cadenza giornaliera, in biblioteca, da *Panetti Povo™* o al bar dalla Emma.

Ringraziamenti

Di seguito vogliamo ringraziare chi ha contribuito in maniera più o meno diretta alla realizzazione di questo progetto:

La squadra degli Appunti di LFC per aver fornito la base di questo progetto che ci ha permesso di partire subito all'attacco. Potete trovarli qua: <https://github.com/filippodaniotti/Appunti-LFC>³

³Il prossimo semestre la loro dispensa vi sarà estremamente utile. Tenetela d'occhio!

Capitolo 1

Cinematica del punto

1.1 Introduzione

La *meccanica* riguarda lo studio del moto di un corpo: spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le sue caratteristiche esprimendole con leggi quantitative.

1.1.1 Punto materiale

Si definisce punto materiale un *corpo puntiforme privo di dimensioni*. È assimilabile a un corpo di dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui si muove o degli altri corpi con cui interagisce. L'utilizzo di un punto materiale rende l'analisi moto più semplice in quanto *rende trascurabili le proprietà fisiche del corpo*, come la sua forma o dimensione, ininfluenti sul moto stesso. Inoltre, a differenza di un corpo esteso, non può compiere rotazioni o vibrazioni.

1.1.2 Cinematica

Un analisi completa del moto comprende:

- il collegamento del moto alle interazioni del corpo in esame con i corpi circostanti;
- la descrizione geometrica dell'evoluzione temporale del fenomeno di movimento.

Si dice *cinematica* lo studio descrittivo del moto di un corpo indipendente dalle cause che lo determinano.

Concetti fondamentali

Moto Il moto di un punto materiale è determinato se nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato sistema di riferimento, sia questo cartesiano ($x(t), y(t), z(t)$) o polare.

Traiettoria La traiettoria è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. Costituisce pertanto una curva continua nello spazio.

Grandezze fondamentali

- Spazio: la posizione del corpo.
- Velocità: la variazione di posizione lungo la traiettoria.
- Accelerazione: variazioni della velocità nel tempo.

1.2 Quiete

La *quiete* è un particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi *velocità e accelerazione sono nulle*. Si noti come questo stato non è assoluto ma relativo al sistema di riferimento da cui si osserva il moto. Lo stesso *punto materiale* può apparire diverso in sistemi di riferimento differenti.

1.3 Moto rettilineo

Il *moto rettilineo* si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso ed è pertanto descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$. Le misure ottenute possono essere rappresentate in un sistema con due assi cartesiani detto *diagramma orario*: sull'asse delle ordinate riportiamo i valori di x (metri) e su quello delle ascisse i corrispondenti valori del tempo (secondi).

1.3.1 Velocità

Velocità media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1.1)$$

Velocità istantanea

Per soppiare alla mancanza di informazioni della velocità media, in modo da individuare $x(t)$ e le sue variazioni si suddivide Δt in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_i$ percorsi in altrettanti piccoli intervalli $(\Delta t)_i$.

Si noti come le corrispondenti velocità medie $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$ sono diverse tra di loro e da v_m in quanto in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo. Suddividendo

Δx in un numero elevatissimo di intervalli dx infinitamente piccoli si può definire la velocità istantanea in un istante t del punto in movimento come:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.2)$$

La velocità istantanea rappresenta pertanto la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato: può pertanto essere espressa in funzione del tempo $v(t)$. Il segno fa riferimento al verso del moto su x .

1.3.2 Accelerazione

La velocità $v(t)$ può variare in un determinato Δt di una quantità δv . Questa variazione si definisce accelerazione. Analogamente alla velocità media si definisce l'accelerazione media come:

$$a_m = \frac{dv}{dt} \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (1.3)$$

Allo stesso modo si definisce accelerazione istantanea:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.4)$$

Significato fisico

Si noti come:

- $a = 0$ implica velocità costante e pertanto moto rettilineo uniforme.
- $a > 0$ implica che la velocità cresce nel tempo.
- $a < 0$ implica che la velocità decresce nel tempo.

1.3.3 Operazioni sul moto rettilineo

Ottenere la velocità nota la legge oraria

Nota la legge oraria $x(t)$ si può ottenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione.

Ottenere la legge oraria nota la velocità

Nota la dipendenza del tempo della velocità istantanea $v(t)$ si può ottenere la legge oraria $x(t)$ tramite l'operazione inversa rispetto alla derivazione: l'integrazione.

Supponendo che il punto si trovi in x al tempo t e nella posizione $x + dx$ in $t + dt$ da $v = \frac{dx}{dt}$ si nota come lo spostamento infinitesimo dx è uguale al prodotto del tempo dt

impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo t : $dx = v(t)dt$, qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto in un intervallo finito $\Delta t = t - t_0$ è dato dunque dalla somma di tutti i successivi valori dx .

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt \\ x - x_0 &= \int_{t_0}^t v(t)dt \\ x &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt\end{aligned}$$

Si ottiene pertanto la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt \quad (1.5)$$

Relazione tra velocità media e istantanea

Ricordando (1.1), la relazione tra velocità media e istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t)dt$$

Ottenere la velocità nota l'accelerazione

Data una $a(t)$ si ricava $v(t)$:

$$\begin{aligned}dv &= a(t)dt \\ \Delta v &= \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt\end{aligned}$$

Pertanto:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt \quad (1.6)$$

Dipendenza dell'accelerazione dalla posizione

Nota la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, ovvero $a(x)$ si può ricavare il valore della velocità in ogni posizione x o $v(x)$. Questo avviene considerando le funzioni di funzione. Se ad un istante t il punto occupa una posizione x con velocità v e accelerazione a si possono pensare come funzioni della posizione e

$$v(t) = v[x(t)]$$

$$a(t) = a[x(t)]$$

Derivando la prima rispetto al tempo e sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni:

$$\begin{aligned} a[x(t)] &= \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dx} \\ adx &= v dv \end{aligned}$$

Ovvero se dalla posizione x dove un punto possiede una velocità v e un'accelerazione a si ha uno spostamento dx , allora il punto subisce una variazione di velocità dv . Integrando:

$$\int_{t_0}^t a(x) dx = \int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Dove v_0 è la velocità in x_0 . Questo permette il calcolo della variazione di velocità nel passaggio dalla posizione x_0 a x .

Moto uniformemente accelerato Nel moto uniformemente accelerato:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

1.4 Moto rettilineo uniforme

Si intende per moto rettilineo uniforme un tipo di moto rettilineo in cui la velocità è costante.

1.4.1 Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Considerando il moto rettilineo uniforme in cui v è costante si ha:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0) = x_0 + vt \quad \text{se } t_0 = 0$$

Si nota pertanto come nel moto rettilineo uniforme lo spazio è una funzione lineare del tempo e la velocità istantanea coincide con la velocità media.

1.5 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Si intende per moto rettilineo uniformemente accelerato un moto in cui l'accelerazione è costante durante il moto.

1.5.1 Dipendenza della velocità dal tempo

La dipendenza della velocità dal tempo è lineare:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \\ v(t) &= v_0 + at \quad \text{se } t_0 = 0 \end{aligned}$$

1.5.2 Dipendenza della posizione dal tempo

Lo spazio è una funzione quadratica del tempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt \\ x(t) &= x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{se } t_0 = 0 \end{aligned}$$

1.6 Moto verticale di un corpo

Trascurando l'attrito con l'aria un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$. Il moto è pertanto rettilineo uniformemente accelerato.

1.6.1 Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento ha origine al suolo e l'asse delle x rivolto verso l'alto. In questo sistema pertanto $a = -g = -9.8 \frac{m}{s^2}$.

1.6.2 Caduta da un'altezza con velocità iniziale nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h$.
- $v_0 = 0$.
- $t = t_0 = 0$.

Velocità

Dalla dipendenza della velocità dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v(t) = -gt$$

E si nota come la velocità aumenta in modulo durante la caduta.

Posizione

Osservando la dipendenza della posizione dal tempo nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Tempo di arrivo al suolo

Il tempo di arrivo al suolo, dove $x = 0$ è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Velocità in funzione della posizione

Notando la velocità in funzione della posizione nel moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$v^2 = 2g(h - x)$$

Velocità di arrivo al suolo

Il corpo arriva al suolo con una velocità:

$$v = \sqrt{2gh}$$

1.6.3 Caduta da un'altezza con velocità iniziale non nulla

Nel caso della caduta da un'altezza h con velocità iniziale non nulla si nota come inizialmente:

- $x_0 = h.$
- $v_0 = v_i.$
- $t = t_0 = 0.$

Dipendenza della velocità dal tempo

$$v(t) = -v_i - gt$$

Legge oraria

$$x = h - v_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dipendenza della velocità dalla posizione

$$t(x) = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2g(h-x)}}{g}$$

Tempo di caduta

$$t_c = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g}$$

Velocità di caduta

$$v_c^2 = v_i^2 + 2gh$$

1.6.4 LANCIO DEL PUNTO VERSO L'ALTO PARTENDO DAL SUOLO

Nel caso di un lancio del punto verso l'alto si nota come inizialmente:

- $x_0 = 0.$
- $v_0 = v_2 > 0.$
- $t = t_0 = 0.$

Velocità

$$v = v_2 - gt$$

Legge oraria

$$x = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Punto più alto

Il punto raggiunge la posizione più alta al tempo:

$$t_M = \frac{v_2}{g}$$

E nella posizione:

$$x_M = x(t_M) = \frac{v_2^2}{2g}$$

Discesa

Per $t \geq t_M$ si è nella situazione del primo esempio: punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla. Pertanto:

$$t_s = \frac{\sqrt{2x_M}}{g} = t_M$$

E la durata complessiva del moto è pertanto:

$$2t_M = \frac{2v_2}{g}$$

Ricavando $t(x)$ dalla legge oraria e da $v(x)$ si ha:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx}}{g} \\ &= t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}} \\ v(x) &= \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx} \end{aligned}$$

1.7 Moto armonico semplice

Il moto armonico semplice lungo un asse rettilineo è un moto vario la cui legge oraria è data dalla relazione:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Dove:

- A ampiezza del moto.
- $\omega t + \phi$ fase del moto.
- ω pulsazione.
- ϕ fase iniziale.

1.7.1 Caratteristiche

Essendo i valori estremi della funzione seno $+1$ e -1 il punto percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine, con uno spostamento massimo da essa A . Al tempo $t = 0$ occupa $x(0) = A \sin \phi$. Date le costanti A e ϕ si determina la posizione iniziale del punto, che si trova a $t = 0$ nell'origine solo se $\phi = \{0, \pi\}$.

1.7.2 Periodicità

Essendo la funzione seno periodica con periodo 2π il moto risulta periodico e descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O uguali tra loro e caratterizzate da una durata T periodo del moto armonico. Si dice pertanto periodico un moto in cui in intervalli di tempo uguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

1.7.3 Determinare il periodo

Per determinare il periodo T si considerino due tempi t e t' tali che $t' - t = T$. Per definizione $x(t') = x(t)$, pertanto dalla legge oraria le fasi nei due istanti devono differire 2π . Si ha pertanto $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$, ne segue che:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Significato di ω

Si nota pertanto come il moto si ripeta velocemente quando la pulsazione è grande mentre come il moto sia lento per bassi valori della pulsazione.

Frequenza del moto

Si definisce frequenza v del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$v = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi v$$

Si noti come il periodo e la frequenza di un moto armonico sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

Classi di moti armonici

Fissato il valore della pulsazione si ottiene una classe di moti armonici caratterizzata dallo stesso periodo che differiscono tra loro per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale, ovvero per le condizioni iniziali.

1.7.4 Velocità

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$.

$$\dot{x} = v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione dove vale ωA e si annulla agli estremi dove si inverte il senso del moto.

1.7.5 Accelerazione

L'accelerazione del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $v(t)$.

$$\ddot{x} = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore in modulo massimo $\omega^2 A$ agli estremi, dove si inverte la velocità. Si nota inoltre come sia proposizionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione. A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni mostrano lo stesso andamento temporale; si nota unicamente uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi.

Si nota pertanto come la velocità sia sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto allo spostamento o si trova in quadratura di fase, mentre l'accelerazione è sfasata di π rispetto allo spostamento o si trova in opposizione di fase.

1.7.6 Condizioni iniziali

Le costanti A e ϕ identificano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin \phi$$

$$v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi$$

Note le condizioni iniziali x_0 e v_0 si calcolano A e ϕ come:

$$\tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

1.7.7 Dipendenza della velocità dalla posizione

$$v(x) = \int_{x_0}^x a(x) dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx = \frac{1}{2} \omega^2 (x_x^2 - x^2) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

Pertanto

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 (x_0^2 - x^2))$$

Con riferimento al centro dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Il segno di v dipende dal verso di passaggio. Si nota pertanto come l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo $a = -\omega^2 x$.

1.7.8 Condizione sufficiente per un moto armonico semplice

Se si trova che in un moto l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto sia armonico è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

O equazione differenziale del moto armonico. Le funzioni seno e coseno e le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le funzioni che soddisfano la condizione nel campo reale.

Moto con funzione coseno

Queste considerazioni portano a considerare una legge del moto che utilizzi la funzione coseno. Si noti come le due funzioni differiscono per un termine di sfasamento $\frac{\pi}{2}$. Ovvero $x = A \sin(\omega t + \phi)$ e $x = A \cos(\omega t + \phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che il primo è visto a partire dall'istante t_0 , mentre il secondo dall'istante $t_0 + \frac{T}{4}$.

1.7.9 Oscillazione

Se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a

$$\frac{d^2f}{dz^2} + k^2 f = 0$$

La soluzione è sempre:

$$f(z) = A \sin(kz + \phi)$$

Ovvero f descrive un'oscillazione rispetto a z il cui periodo dipende da k .

1.8 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Si consideri ora un altro moto vario in cui l'accelerazione soddisfa la condizione $a = -kv$, con k costante positiva. L'accelerazione è sempre contraria alla velocità che deve necessariamente diminuire e varia con la stessa legge con cui varia la velocità, ovvero:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

Integrando con il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -kdt \\ \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -k \int_0^t dt \\ \Rightarrow \log \frac{v}{v_0} &= -kt \end{aligned}$$

Dove v_0 è la velocità in $t = 0$ e $v_0 \neq 0$. Passando alle esponenziali:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

La velocità decresce esponenzialmente nel tempo e il punto alla fine si ferma.

1.8.1 Cambio della velocità con la posizione

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -kv \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \Rightarrow \\ &\Rightarrow dv = -kdx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{v_0}^v dv = -k \int_0^x dx \end{aligned}$$

Risulta pertanto un andamento lineare decrescente

$$v(x) = v_0 - kx$$

La velocità si annulla in

$$x = \frac{v_0}{k}$$

dove il punto si ferma.

1.8.2 Legge oraria

La legge oraria si ricava per integrazione da $v(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = \frac{v_0}{k} (1 - e^{kt})$$

1.8.3 Costante di tempo

La rapidità di variazione della funzione e^{-kt} è determinata dal valore di k . Posto

$$\tau = \frac{1}{k}$$

detto anche *costante di tempo*, so che in un intervallo di tempo pari a τ la funzione si riduce di un fattore di e

$$\frac{e^{-k(t+\tau)}}{e^{-k\tau}} = e^{-1}$$

Minore il valore di τ più rapida la decrescita.

1.9 Moto nel piano

1.9.1 Posizione

Nel caso che il moto sia vincolato a svolgersi su di un piano la traiettoria del punto P è in generale una linea curva. Si devono quindi analizzare la direzione e verso del moto oltre al valore numerico dello spostamento. Grandezze con queste caratteristiche si chiamano *vettori*.

Si definisce vettore un segmento orientato caratterizzato da un *modulo*, una *direzione* ed un *verso*.

Determinare un punto nel piano

Un punto nel piano è individuato da due coordinate distinte che possono fare riferimento a un sistema di coordinate cartesiane o polari. Questi due sistemi sono messi in relazione secondo:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (1.8)$$

Raggio vettore

La posizione del punto P può anche essere individuata per mezzo del *raggio vettore* (segmento che va dall'origine O fino al punto P):

$$\vec{r}(t) = OP = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y \quad (1.9)$$

Dove \vec{u}_x e \vec{u}_y rappresentano i versori degli assi cartesiani che si considerano fissi nel tempo. Se è nota la dipendenza dal tempo di \vec{r} , cioè la funzione $\vec{r}(t)$, è individuato il moto del punto P .

Coordinata curvilinea

La posizione del punto lungo la traiettoria può anche essere data da una coordinata curvilinea s (direzione tangente punto per punto), misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di s esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo durante il moto: $\frac{ds}{dt}$ indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria cioè la velocità istantanea del punto, come definita nel modo rettilineo. Se diamo la forma della traiettoria e la velocità con cui viene percorsa abbiamo fornito una descrizione completa del moto.

1.9.2 Velocità vettoriale

Considerando due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}$. Si costruisce il rapporto incrementale $\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ e si definisce velocità vettoriale il limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt}$$

La velocità vettoriale è pertanto la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. Al limite l'incremento del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria nel punto P e in modulo e uguale allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria, per cui possiamo scrivere $d \vec{r} = ds \vec{u}_T$ dove \vec{u}_T è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria. Questo non vale se non si è all'infinitesimo, lo si vede chiaramente con spostamenti Δs più grandi. In sostanza si considera il moto come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile: la direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato.

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T$$

Pertanto la velocità vettoriale \vec{v} individua in ogni istante con la sua direzione e verso il suo moto e con il suo modulo $v = \frac{ds}{dt}$ la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

Bisogna fare attenzione a non confondere i concetti di raggio vettore e i suoi incrementi finiti da una parte e il percorso effettivo dall'altra: un punto potrebbe percorrere un'orbita chiusa ritornando al punto di partenza e in tal caso il raggio vettore non cambia, ma il punto ha percorso una traiettoria finita ($\Delta \vec{r} = 0, \Delta s \neq 0$) con velocità vettoriale istantanea diversa da zero (similmente a quello che accadeva nel MRU, risulta nulla la velocità vettoriale media).

La traiettoria del moto e la definizione di velocità $v = \vec{u}_T$ non dipendono dal sistema di riferimento (invarianza delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento). Tuttavia un vettore che si esprime esplicitamente tramite le sue componenti cambia perciò queste dipendono dal sistema di riferimento.

Calcolo delle componenti della velocità

Componenti cartesiane Essendo $\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$,

$$v = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

La velocità del punto P ha componenti cartesiane v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani. Pertanto

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Inoltre detto ϕ l'angolo tra il vettore v e l'asse x ,

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}$$

Componenti polari Introducendo \vec{u}_r e \vec{u}_θ , il versore della direzione di \vec{r} e il versore ortogonale alla stessa, si nota come questi cambiano direzione durante il moto. Il raggio vettore \vec{r} può essere espresso come $r u_r$, pertanto:

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \Rightarrow \\ v &= \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = v_r + v_\theta \end{aligned}$$

La velocità, sempre tangente alla traiettoria si scomponete in due componenti: la velocità radiale v_r diretta lungo \vec{r} e di modulo $\frac{dr}{dt}$ e la velocità trasversa v_θ ortogonale a \vec{r} e di modulo $r \frac{d\theta}{dt}$. v_r dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore v_θ , collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il modulo della velocità è pertanto, per queste componenti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \vec{r}^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

Determinare la posizione nota la velocità

Essendo $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$, per ricavare la posizione da essa si integra:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

L'integrazione esplicita può essere fatta ricorrendo alle componenti, applicando

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

ai moti rettilinei componenti.

1.9.3 Accelerazione nel moto piano

L'accelerazione nel moto piano deve esprimere le variazioni della velocità sia come *modulo* che *direzione* e quindi ci aspettiamo che abbia due componenti, una legata alla variazione del modulo della velocità e la seconda al cambiamento di direzione del moto. Nel moto rettilineo, dove la velocità mantiene sempre la stessa direzione, l'accelerazione è espressa da un solo termine.

Anche nel moto piano l'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo (ed è una grandezza vettoriale):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Derivando le componenti del vettore:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} (v \vec{u}_T) = \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_N\end{aligned}$$

La prima componente, parallela alla velocità, esprime la variazione del modulo della velocità; il secondo termine, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa: \vec{u}_N è un vettore ortogonale a \vec{u}_T diretto verso la concavità della traiettoria, e $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente cambia la direzione di \vec{u}_T e quindi di \vec{u}_N .

Le due componenti dell'accelerazione si chiamano accelerazione tangenziale e accelerazione normale o centripeta. In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono diverse da zero; se però il moto curvilineo è uniforme è nulla \vec{a}_T ; se invece il moto è rettilineo vario è nulla \vec{a}_N e solo nel moto rettilineo uniforme $\vec{a}_N = \vec{a}_T = \vec{0}$. In altre parole con $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario, con $a_N \neq 0$ è sempre curvilineo.

Componente normale

Per esprimere la componente normale, si nota come al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini si incontrano in C che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria in P , o circonferenza osculatrice. Questo punto si chiama centro di curvatura della traiettoria nel punto P . L'arco di traiettoria ds è pari a $Rd\phi$ con $R = CP$ raggio di curvatura. Al variare di P lungo la traiettoria sia R che X variano. Si nota:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Il modulo pertanto vale:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Le due componenti si chiamano accelerazione tangenziale e accelerazione normale o centripeta.

Moto curvilineo uniforme

In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono diverse da zero; il moto è curvilineo uniforme se \vec{a}_T è nulla, rettilineo vario se è nulla \vec{a}_N o altrimenti rettilineo uniforme se sono entrambe nulle. Ovvero:

- $\vec{a}_T \neq 0$ moto vario.
- $\vec{a}_N \neq 0$ moto curvilineo.

Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\vec{v}_y}{dt}\vec{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$$

Detto ϕ l'angolo che \vec{u}_T forma con \vec{u}_x , si deduce che:

$$\begin{aligned}\vec{a}_x &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cos \phi - \frac{\vec{v}^2}{R} \sin \phi \\ \vec{a}_y &= \frac{d\vec{v}}{dt} \sin \phi - \frac{\vec{v}^2}{R} \cos \phi\end{aligned}$$

Dalle componenti tangenziale e centripeta si ricavano le cartesiane risolvendo il sistema lineare nelle incognite $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{v^2}{R}$.

Componenti polari

Considerando che \vec{u}_r e \vec{u}_θ non sono fissi e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + \vec{r} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Considerando che $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ e che $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$ si nota che per una variazione positiva di θ $d\vec{u}_\theta$ è opposto a \vec{u}_r e si ha:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[2 \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \vec{r} \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta$$

Da cui:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione radiale e il secondo l'accelerazione trasversa. Anche \vec{a}_r e \vec{a}_θ si possono mettere in relazione con \vec{a}_x e \vec{a}_y o \vec{a}_T e \vec{a}_N

Valore della velocità

Nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante t_0 la velocità in un istante t è data da:

$$\vec{v}(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

1.10 Moto circolare

Si chiama moto circolare un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente direzione l'accelerazione centripeta è sempre diversa da zero. Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla per cui $\vec{a} = \vec{a}_N$; se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e \vec{a}_T è diversa da zero (quindi c'è anche una forza tangenziale).

Il moto circolare può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$, con $\theta(t) = s(t)/R$. Se assumiamo come variabile l'angolo ci inseriamo in un sistema di coordinate polari con centro 0 in cui il moto avviene $r(t) = R = \text{costante}$ e $\theta(t)$ variabile. La rappresentazione in coordinate cartesiane è legata a $\theta(t)$:

$$x(t) = R \cos \theta(t) \quad y(t) = R \sin \theta(t)$$

1.10.1 Velocità angolare

Siamo naturalmente interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo e pertanto definiamo la *velocità angolare* come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (1.10)$$

Si nota come la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza. Nel moto circolare la velocità radiale è identicamente nulla in quanto il raggio vettore è costante in modulo e la velocità trasversale coincide con la velocità: da $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ si trova che $v = R\omega$.

1.10.2 Moto circolare uniforme

Il moto circolare più semplice è quello uniforme (costanza modulo della velocità): v e ω sono costanti e le leggi orarie sono:

$$s(t) = s_0 + vt \quad (1.11)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad (1.12)$$

Si noti come il termine uniforme si riferisca al modulo della velocità: il moto circolare uniforme ha accelerazione costante ortogonale alla traiettoria

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.13)$$

Periodicità

È un moto periodico con periodo $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, corrispondente al tempo necessario per compiere un giro completo.

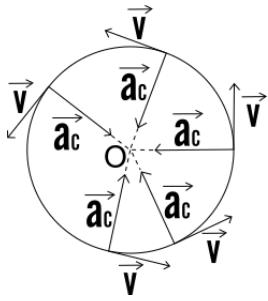


Figura 1.1

Proiezione dei moti sugli assi cartesiani

I moti proiettati sugli assi cartesiani sono:

$$x = R \cos \theta = R \cos(\omega t + \omega_0) \quad (1.14)$$

$$y = R \sin \theta = R \sin(\omega t + \omega_0) \quad (1.15)$$

1.10.3 Moto circolare non uniforme

Nel caso del moto circolare non uniforme si deve considerare l'accelerazione tangenziale $a_T = \frac{dv}{dt}$.

Accelerazione angolare

Essendo anche ω variabile si definisce l'accelerazione angolare:

$$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

Determinare la velocità angolare dall'accelerazione

Nota $a(t)$ si può integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

Determinare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza dell'incremento angolare

Nota $a(\theta)$ si può calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare $\theta - \theta_0$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \\ &= \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow ad\theta &= \omega d\omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta) d\theta &= \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 \end{aligned}$$

Moto circolare uniformemente accelerato

Il moto circolare uniformemente accelerato è un moto in cui a è costante, o a_T costante. Ponendo $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + at \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + at)^2 R$$

Notazione vettoriale

Si amplia il concetto di velocità angolare del moto circolare mostrando come si possano associare ad esso caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore ω con modulo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, direzione perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e verso tale che all'estremo del vettore ω il moto appaia antiorario. Risulta evidente che:

$$v = \omega \times r$$

Nel caso ω sia applicata al centro della circonferenza $r = R$, ma questa equazione risulta valida se ω è applicata in un qualsiasi altro punto dell'asse di rotazione, ovvero la retta ortogonale al piano del moto e passante per il centro della circonferenza. Dato ω si individua l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, il verso di percorrenza della circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da ω per derivazione rispetto al tempo si ottiene il vettore accelerazione angolare a , parallelo a ω e verso determinato dalla variazione del modulo di ω e modulo $a = \frac{d\omega}{dt}$.

1.10.4 Accelerazione del moto circolare

Tramite A e ω si esprime l'accelerazione del moto circolare:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times r) = \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow a = a \times r + \omega \times v$$

Si nota come il primo termine $a \times r$ è l'accelerazione tangenziale a_T di modulo aR , mentre il secondo $\omega \times v$ è l'accelerazione centripeta a_N di modulo $\omega^2 R$. Nel moto circolare uniforme ω è un vettore costante anche in modulo, a è nulla e $a = a_N = \omega \times v$.

Proprietà di r

Il vettore r applicato in O ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di ω formando un angolo ϕ costante con l'asse stesso. La sua derivata $\frac{dr}{dt}$ si può scrivere $\omega \times r$. Anche il vettore v descrive una rotazione intorno a ω con cui forma l'angolo $\phi = \frac{\pi}{2}$ e la sua derivata $\frac{dv}{dt}$ si può scrivere $\omega \times v$. Al moto di rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune si dà il nome di moto di precessione. Dato un vettore di modulo costante A che descrive un moto di precessione con velocità angolare ω , la sua derivata temporale può essere sempre scritta:

$$\frac{dA}{dt} = \omega \times A$$

Che risulta ortogonale a A . Inoltre in modulo

$$dA = A \sin \phi d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = A \sin \phi \frac{d\theta}{dt} = \omega A \sin \phi = |\omega \times A|$$

1.11 Moto parabolico dei corpi

Si analizza il moto nel vuoto di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale v_0 formante un angolo α con l'asse delle ascisse. Si vuole calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade su x o la gittata OG .

1.11.1 Caratterizzazione

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $a = g = -gu_x$ e le condizioni iniziali sono $r = 0$ e $v = v_0$ al tempo $t = 0$. Si nota come

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt = v_0 - gtu_x$$

1.11.2 Velocità

La velocità si trova nel piano individuato dai vettori costanti v_θ e g , il piano x, y . Essendo $v_\theta = v_0 \cos \alpha u_x + v_0 \sin \alpha u_y$:

$$v(t) = v_0 \cos \alpha u_y + (v_0 \sin \alpha - gt) u_x$$

1.11.3 Leggi orarie dei moti proiettati

La velocità dei moti proiettati sugli assi sono $v_y = v_0 \cos \alpha$ e $v_x = v_0 \sin \alpha - gt$. Pertanto le leggi orarie dei moti proiettati sugli assi sono:

$$x = v_0 \cos \alpha t \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

| Se sull'asse x il moto è uniforme, sull'asse y è uniformemente accelerato.

1.11.4 Traiettoria

La traiettoria viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo la funzione:

$$y(t) : t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Ovvero l'equazione di una parabola.

1.11.5 Direzione del moto

La direzione del moto in funzione del tempo o della coordinata x può essere caratterizzata dall'angolo ϕ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x} = \tan \alpha - \frac{g}{v_0 \cos \alpha} t = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x$$

Per calcolare la gittata OG si impone $y(x) = 0$ e si ottengono due soluzioni $x = 0$ e:

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = 2X_M$$

Dove $X_M = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$ è la coordinata dal punto di mezzo del segmento OG e ascissa del punto di massima altezza.

1.11.6 Altezza massima

L'altezza massima raggiunta è pertanto:

$$y(X_M) = Y_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

L'altezza massima si può ottenere annullando $\frac{dy}{dx}$, ovvero imponendo

$$\tan \alpha - \left(\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x = 0$$

Si ricava da questo l'ascissa del massimo X_M e si calcola $y(X_M)$. Un altro modo è sfruttare il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale, pertanto $u_y = 0$ ovvero $t = t_M = v_0 \sin \frac{\alpha}{g}$, sostituendo $x(t)$ e $y(t)$ si trovano X_M e Y_M .

1.11.7 Angolo di lancio per la gittata massima

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione $\frac{dx_G}{d\alpha} = 0$
ovvero $\frac{2v_0^2}{g}(-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$ e risulta $\alpha = 45^\circ$

1.11.8 Tempo totale di volo

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 \cos \alpha$:

$$t_G = 2 \frac{X_M}{v_0 \cos \alpha} = 2v_0 \sin \frac{\alpha}{g} = 2t_M$$

Si nota come t_G coincide con il tempo necessario per salire a Y_M e tornare al suolo.
Si nota come nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza ma simmetricamente rispetto a x .

$$u_x(t_G) = v_0 \cos \alpha \quad u_y(t_G) = -v_0 \sin \alpha \quad \tan \phi = -\tan \alpha$$

Capitolo 2

Dinamica del punto

2.1 Legge d'inerzia

Il concetto di forza esprime l'interazione del punto con l'ambiente circostante, determinando la variazione dello stato di moto.

2.1.1 Principio di inerzia

Il principio di inerzia viene formulato da Galileo a seguito di prove sperimentali e stabilisce:

Un corpo non soggetto a forze rimane nel suo stato di moto.

2.1.2 Prima legge della dinamica

Il principio di inerzia viene riformulato da Newton come prima legge della dinamica:

Un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che non intervenga una forza esterna a modificare tale stato.

Da questo si nota come un corpo può essere in stato di quiete $v = 0$ oppure in moto (Moto Rettilineo Uniforme) con $v = \text{costante}$.

2.1.3 Forza

Dal principio di inerzia si deduce che l'interazione tra corpi, ossia l'azione di una forza, porta a una variazione della velocità in modulo, in direzione o in entrambi. Si nota pertanto come la forza sia la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici. La forza possiede un'intensità e una direzionalità che determinano il cambio di moto.

Equilibrio

Un corpo soggetto a più forze la cui risultante è nulla si dice in uno stato di equilibrio.

2.2 Legge di Newton

La legge di Newton determina quantitativamente il legame tra forza e stato di moto:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad [N] \quad (2.1)$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza F , determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del punto (Seconda legge della dinamica).

2.2.1 Massa inerziale

La massa viene detta inerziale in quanto esprime l'inerzia del punto, ovvero la sua resistenza a variare il proprio stato di moto o modifica della sua velocità in modulo, direzione e verso. Se nello studio del corpo approssimato a un punto materiale si possono trascurare le dimensioni, la massa diventa una sua grandezza fondamentale. La legge può essere espansa come:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad [N] \quad (2.2)$$

Da questa possiamo ricavare tutte le proprietà al moto di un punto materiale. È inoltre possibile dall'accelerazione determinare la forza agente e la massa.

2.2.2 Sistemi di riferimento

Le leggi di Newton sono valide solo se il moto è studiato nella classe dei sistemi di riferimento inerziali, altrimenti si necessita di termini correttivi. Si intende per sistema di riferimento inerziale un sistema che si muove con velocità costante rispetto al sistema, ovvero è in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

2.2.3 Variazione di massa

La legge di Newton può essere anche riscritta in maniera più estesa come:

$$\vec{F} = \left(\frac{dm}{dt} \right) \vec{v} + m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \left(\frac{dm}{dt} \right) \vec{v} + m \vec{a} \quad [N] \quad (2.3)$$

per valutare anche la variazione di massa che si ha lungo il moto.

2.3 Quantità di moto

Si definisce *quantità di moto* di un punto materiale il vettore:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \left[kg \cdot \frac{m}{s} \right] \quad (2.4)$$

Questo determina la quantità di massa in movimento e la natura di esso. Considerando massa costante si può riscrivere la seconda legge di Newton come:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [N] \quad (2.5)$$

Questa relazione rimane valida anche in caso di massa non costante. La massa infatti può cambiare nel caso:

- Avvenga una modifica della massa di un sistema macroscopico (approssimabile a punto materiale), come avviene per esempio in un veicolo a motore che brucia carburante o in una scala mobile;
- Dipendenza della massa dalla velocità: secondo la teoria della relatività ristretta la massa varia al variare della sua velocità (la variazione di massa è rilevante solo a velocità prossime a c)

2.3.1 Teorema dell'impulso

È utile, quando si parla di quantità di moto, fare riferimento anche alla sua relazione rispetto alla forza. Dall'equazione precedente possiamo ottenere $\vec{F} dt = d\vec{p}$: vediamo che l'azione di una forza durante un tempo dt (nel quale la forza agisce) provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha:

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_{p_0}^p d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p} \quad [N \cdot s] \quad (2.6)$$

Il termine vettoriale I , integrale della forza nel tempo, è chiamato impulso della forza. La formula precedente esprime che l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto: con m costante si ha ovviamente:

$$\vec{I} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\Delta v \quad [N \cdot s] \quad (2.7)$$

La variazione della quantità di moto è tanto maggiore quanto più elevato è il valore dell'impulso ovvero, per una determinata forza costante, quanto maggiore è il tempo in cui agisce la forza. Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare effettivamente $\Delta \vec{p}$ solo se si conosce la funzione $F(t)$, in questo caso basta calcolare l'integrale. Se $F = \text{costante}$, si ottiene subito

$$\vec{F} t = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \quad [N]$$

che è come misurare l'area di un rettangolo. Invece se misuriamo $\Delta \vec{p}$ con il teorema della media integrale possiamo calcolare \vec{F}_m della forza agente nell'intervallo di tempo t .

Quando \vec{F} è nulla, $\Delta \vec{p} = 0$ e pertanto $\vec{p} = \text{costante}$: in assenza di forza applicata la quantità di moto di un punto materiale rimane costante o la quantità di moto si conserva (principio di inerzia).

2.4 Risultante delle forze

Su un punto materiale possono agire contemporaneamente più forze: si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, la risultante vettoriale delle forze applicate al punto

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i \quad [N]$$

Questa è una conferma della natura vettoriale dell'equazione di Newton.

Nello studio del moto otteniamo informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso \vec{R} e non sulle singole forze che concorrono a formare la risultante. Se $R = 0$ ed il punto ha velocità nulla, esso rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di equilibrio statico del punto. Devono quindi essere nulle le componenti stesse della risultante, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani.

2.4.1 Reazioni vincolari

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze, rimane fermo, dobbiamo dedurre che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante (reazione vincolare) che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete.

Si introduce quindi la terza legge di Newton, detta anche legge dell'azione e reazione: *se un corpo A esercita una forza sul corpo B, allora il corpo B esercita una forza uguale e contraria*.

Nel caso di un corpo appoggiato su di un tavolo, il corpo è soggetto all'azione di attrazione della terra, perpendicolarmente al piano. Il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza uguale e contraria alla forza di attrazione terrestre che chiamiamo reazione vincolare \vec{N} .

In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

2.5 Classificazione delle forze

Tra tutti i fenomeni fisici che osserviamo, possiamo classificare quattro interazioni fondamentali (in ordine crescente di intensità relativa):

- Interazione gravitazionale: descrive l'attrazione reciproca che avviene tra i corpi dotati di massa.
- Interazione debole: responsabile delle forze che intervengono nei decadimenti radioattivi.
- Interazione elettromagnetica: descrive le relazioni tra corpi che possiedono carica, il conseguente campo elettromagnetico che va a formarsi e come quest'ultimo si propaga (onde elettromagnetiche). La conciliazione di queste forze ha permesso di descrivere il fenomeno della luce.
- Interazione forte o nucleare: tiene uniti gli elementi costituenti dei protoni e neutroni all'interno del nucleo di un atomo.

2.6 Azione dinamica delle forze

Nel capitolo 1 abbiamo descritto vari moti, ora andiamo a vedere quali forze questi moti vanno a creare.

Nel moto rettilineo uniforme ho $\vec{v} = \text{costante}$, $\vec{a} = 0$, quindi la $\vec{F} = 0$. Posso ottenere questa condizione anche se agiscono più forze, l'importante è che la risultante sia nulla.

Nel moto uniformemente accelerato ho $\vec{a} = \text{costante}$, quindi la forza agente è costante, questo vale anche al contrario: se mi trovo una forza risultante costante nella direzione parallela al moto ho accelerazione costante.

Se \vec{F} è variabile ho un moto vario, posso quindi spezzare l'accelerazione nelle sue componenti:

- \vec{a}_T detta tangenziale è parallela al moto e descrive una variazione in modulo della velocità
- \vec{a}_N detta ortogonale o centripeta, descrive una variazione di direzione della velocità

Nel moto circolare uniforme ho $\vec{a}_T = 0$ e $\vec{a}_N = \text{costante}$.

2.7 Forza peso

La forza peso è l'attrazione che la Terra (nel nostro caso) esercita verso tutti i corpi dotati di massa a lei vicini e che si manifesta trascinando a terra ogni corpo. Più in generale è una manifestazione dell'interazione gravitazionale tra due corpi dotati di massa, in

questo caso tra la Terra e un corpo lasciato cadere. La forza che si crea ha modulo verso il suolo che vale

$$g = 9.8 \text{ ms}^{-2} \quad (2.8)$$

Se agisce solo la forza peso ottengo che $\vec{g} = \vec{a}$, nel caso in cui è presente l'attrito dell'aria ho un'accelerazione negativa rispetto a quella di gravità quindi ho che $\vec{g} \neq \vec{a}$

È importante notare che un corpo presenta due tipi di massa:

- la massa inerziale, che descrive la capacità di un corpo a opporsi al moto
- la massa gravitazionale che descrive la capacità di un corpo di esercitare un'attrazione reciproca ai corpi adiacenti

Per tanto tempo questa doppia definizione ha generato quesiti, infatti sperimentalmente sembravano essere proporzionali tra loro ma non si sapeva bene il perché. Fu Einstein che, nel principio di equivalenza, enunciò in definitiva che questi due tipi di massa coincidono.

2.8 Forza di attrito radente

Fino ad ora abbiamo trascurato la presenza dell'attrito dell'aria e delle superfici, ma sappiamo bene che in natura questo non avviene. Tra i vari tipi di attrito iniziamo con l'attrito radente che è dovuto allo strisciamento di superfici piane che scorrono l'una sopra l'altra.

Quando il corpo non è in movimento e gli si applica una forza, questo rimane fermo fino a che la forza non supera il valore $\mu_s N$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed N è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La forza che si oppone gradualmente al moto è chiamata forza di *attrito radente statico*. La condizione è quindi:

$$F > \mu_s N \quad [N]$$

Quando il corpo entra in movimento la forza di attrito che si oppone al moto è la forza di *attrito radente dinamico* $F_d = \mu_d N$ [N] dove μ_d rappresenta il coefficiente di attrito dinamico. Ho sempre che $\mu_d < \mu_s$ quindi l'attrito dinamico è sempre minore dell'attrito statico. Questo coefficiente di attrito radente dipende dalle caratteristiche chimiche e dallo stato della superficie dei due materiali che vanno a sfregarsi tra loro (è adimensionale).

La forza di attrito radente, che è una reazione vincolare, non dipende solo dalle due superfici a contatto ma anche da quanto è premuto il corpo contro il piano (qui entra in gioco la componente N). Poi è importante notare che le forze di attrito sono sempre presenti per quanto si provi a ridurle.

2.9 Forza elastica

Si definisce *forza elastica* (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso sempre rivolto verso il punto O chiamato centro.

La legge di Hooke dice che:

$$\vec{F}_{\text{el}} = -kx \vec{u}_x \quad [N] \quad (2.9)$$

dove k è una costante positiva, detta *costante elastica* e \vec{u}_x il versore della differenza di lunghezza rispetto O .

L'accelerazione vale:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x \quad [m/s^{-2}] \quad (2.10)$$

identifico quindi un moto armonico semplice con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s] e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s].

La forza elastica viene applicata tramite una molla, che ha una lunghezza a riposo l_0 che varia se sottoposta a compressione o estensione. In questi casi la molla produce una forza (elastica) che cerca di riportarla a riposo, il verso della forza è sempre di verso opposto all'elongazione. Il modulo di questa forza *di richiamo* è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla. Se voglio mantenere la molla nella posizione desiderata devo applicare una forza uguale e opposta a quella della molla.

Se attacco una massa alla molla e la lascio andare avrò che la massa si muove con moto armonico per effetto della forza elastica su di esso. Dalla definizione di forza e dalla legge di Hooke ottengo:

$$F = -kx = ma = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Quindi vale:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2.11)$$

che viene detta equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice.

Risolvendo l'equazione differenziale ottengo la legge oraria che è:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.12)$$

Per verificare la soluzione posso sostituire $\frac{d^2x}{dt^2}$ a x e ottengo che l'equazione è valida se $\omega^2 = \frac{k}{m}$ [rad/s]. Quindi la pulsazione di questo moto armonico è:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad (2.13)$$

Derivando ottengo le funzioni di velocità ed accelerazione:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

equazioni medesime a quelle del moto armonico affrontato precedentemente.

Dall'equazione differenziale posso ricavarmi anche il periodo che risulta essere:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [s]$$

2.10 Piano inclinato

Un piano inclinato ha due caratteristiche fondamentali, un angolo α che mi indica l'ampiezza del piano e μ_s, μ_d coefficienti di attrito (se questo non viene trascurato). Quando analizziamo un piano inclinato il nostro sistema di riferimento è cartesiano con l'asse x parallelo al piano inclinato e l'asse y ortogonale a quest'ultimo. Se metto un punto materiale di massa m su un piano inclinato grazie a questo sistema di riferimento posso scomporre la sua forza peso F_p nelle componenti F_{px} e F_{py} .

Nel caso in cui venga trascurato l'attrito ho che nell'asse perpendicolare $\vec{F}_{py} = \vec{N}$, mentre nell'asse parallelo $\vec{F}_{px} = m\vec{a}$. Infatti il corpo si muove lungo il piano a meno di forze esterne che ne bilancino il moto.

Nel caso in cui ci sia attrito nell'asse y la situazione rimane analoga, nell'asse x invece l'attrito radente potrebbe bilanciare \vec{F}_{px} . Il corpo non inizia il moto fino a che:

$$F_{px} = mg \sin \alpha \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha = \mu_s N$$

quindi la condizione per l'equilibrio statico è:

$$\tan \alpha \leq \mu_s. \quad (2.14)$$

Quando il corpo è in movimento, bisogna fare riferimento alla formula che utilizza l'attrito radente dinamico $F_{px} = mg \sin \alpha < \mu_d mg \cos \alpha = \mu_d N$.

Se il corpo è in movimento con velocità iniziale v_0 :

- si ferma se $\tan \alpha < \mu_d$.
- prosegue con velocità v_0 se $\tan \alpha = \mu_d$.
- prosegue in moto uniformemente accelerato se $\tan \alpha > \mu_d$.

2.11 Forze centripete

Supponiamo che la risultante \vec{R} delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea. F_N determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione $F = ma_N = m\frac{v^2}{r}$ essendo r il raggio di curvatura della traiettoria.

In generale \vec{R} ha anche una componente tangente alla traiettoria, F_T , responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $F_T = 0$ il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N

Una caratteristica comune è l'indipendenza dalla massa del punto delle varie condizioni trovate (velocità in una curva, pendolo conico ecc.).

Questo perché in tutti gli esempi è presente soltanto la forza peso, che è proporzionale alla massa, e le reazioni vincolari, determinate dall'azione del peso e quindi anch'esse proporzionali alla massa del punto; egualando la risultante di tutte le forze $m\vec{a}$ la massa viene semplificata e quindi il risultato cinematico è indipendente dalla massa.

Introduciamo anche l'equilibrio dinamico; a differenza dell'equilibrio statico (risultante delle forze applicate al punto eguale a zero, velocità nulla), ci riferiamo a quei particolari casi in cui in presenza di forze il moto avviene con velocità costante in modulo.

Se si tratta di moto rettilineo ciò è possibile solo se la risultante delle forze è nulla. Se invece il moto è curvilineo basta che sia nulla \vec{F}_T come deve essere se vogliamo che la velocità sia costante in modulo, ovvero che la risultante delle forze agenti sia puramente centripeta. Qualora \vec{F}_N sia anche costante in modulo il moto è circolare uniforme.

2.12 Pendolo semplice

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_F = mg$.

Se spostiamo il punto dalla verticale esso inizia ad oscillare attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L . Le forze agenti sul punto P sono il peso mg e la tensione del filo T_F per cui il moto è regolato da $m\vec{g} + \vec{T}_F = m\vec{a}$. Considerando le componenti lungo la traiettoria e ortogonali a quest'ultima:

$$R_T = -mg \sin \theta = ma_T, \quad R_N = T_F - mg \cos \theta = ma_N.$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata. R_T è una forza di richiamo che tende a riportare il punto sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

Ho quindi che $a_T = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$ e $a_N = \frac{v^2}{L}$, otteniamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta, \quad m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos \theta$$

La prima è l'equazione differenziale del moto del pendolo, la sua soluzione è analiticamente complessa. So però che per piccoli valori di θ :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quindi per piccole oscillazioni l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

che posto $\omega^2 = g/L$.

La legge oraria del moto è:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi); \quad (2.15)$$

l'ampiezza θ_0 dell'oscillazione e la fase iniziale ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del moto.

Il periodo T è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad [s] \quad (2.16)$$

ed è indipendente dall'ampiezza.

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad [m]$$

La velocità angolare e lineare diventano:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (2.17)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi). \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (2.18)$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\theta = \theta_0$) dove il verso del moto si inverte.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola il moto è ancora periodico, ma non armonico, e il periodo T' dipende dall'ampiezza.

La tensione del filo che sostiene il punto è:

$$T_F = m[g \cos(\theta(t)) + \frac{v^2(t)}{L}] \quad [N] \quad (2.19)$$

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia $\cos(\theta(t))$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione (indipendentemente dall'ampiezza).

È importante fare la differenza tra il pendolo semplice che abbiamo analizzato ora e il pendolo conico. Il moto del pendolo conico si svolge in un piano orizzontale ed è circolare uniforme; le forze sono ortogonali alla traiettoria e costanti ed è necessario comunicare al punto una velocità iniziale appropriata, che poi resta costante in modulo. Il moto del pendolo semplice si svolge in un piano verticale e la risultante delle forze ha sia componente tangente che normale alla traiettoria, entrambe non costanti; il moto può avvenire anche con velocità iniziale nulla, purché sia $\theta \neq 0$, ed è armonico semplice lungo un arco di circonferenza.

2.13 Tensione dei fili

Nel pendolo, il filo di sostegno serve per applicare una certa forza al punto in movimento: il filo risulta teso e la forza, con direzione lungo il filo, che questo esercita sul punto viene chiamata *tensione del filo*. Il filo può essere fissato in un estremo ad un punto fisso e nell'altro ad un punto materiale oppure può collegare due punti materiali.

Per chiarire il concetto di tensione consideriamo un filo teso in quiete e prendiamo in esame un elemento infinitesimo di esso. Tale elemento è tirato dalle due parti restanti di filo e l'equilibrio statico richiede che le due forze, agenti sull'elemento di filo, siano eguali in modulo e direzione e di verso opposto.

Ciò vale per qualunque elemento di filo e il valore della tensione è lo stesso ovunque. In particolare ad un estremo $T = -F$.

Se il filo teso è in movimento il prodotto $m_F a$ è nullo dato che consideriamo trascurabile la massa del filo; pertanto il valore della tensione è ancora lo stesso in qualunque punto del filo.

Riassumendo, il filo teso esercita agli estremi la tensione T , il cui valore dipende dalle forze applicate, ma la reazione sul filo non può superare, per un filo reale, un valore massimo T_{MAX} , oltre il quale il filo si spezza.

Non è necessario che il filo sia completamente rettilineo, esso può essere parzialmente avvolto attorno ad un disco (carrucola), con lo scopo di cambiare la direzione della forza.

Nel risolvere gli esercizi sulla tensione dei fili è bene considerare un corpo alla volta, considerare le eventuali forze a cui è soggetto e metterle in uguaglianza con la tensione T . Per trovare l'accelerazione del sistema di punti materiali legati dai fili tesi bisogna usare la legge di Newton e mettere a sistema nel caso ci siano più corpi (e quindi più vincoli).

2.14 Lavoro, Potenza, Energia Cinetica

2.14.1 Lavoro

Dato un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curvilinea sotto l'azione di una forza \vec{F} , si definisce lavoro della forza F , compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A a B , la quantità scalare

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta ds = \int_A^B F_T ds \quad [J] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right] \quad (2.20)$$

Il lavoro è l'integrale di linea della forza, cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi $dW = F \cdot ds = F_T ds$. Si osservi che in generale lungo la traiettoria sia \vec{F} che θ sono variabili.

Una forza ortogonale alla traiettoria non compie lavoro perché $\theta = \pi/2$. Il lavoro è positivo se $0 \leq \theta < \pi/2$ e in tale caso si parla di *lavoro motore*. Il lavoro risulta negativo, *lavoro resistente*, se $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Lavoro resistente è compiuto ad esempio dalle forze di attrito, il cui verso è opposto allo spostamento, $\theta = \pi$.

Se sul punto P agiscono più forze per ciascuna posso calcolare il corrispondente lavoro

e quindi il valore complessivo risulta essere:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_A^B (\vec{\mathbf{F}}_1 + \dots + \vec{\mathbf{F}}_n) \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \dots + \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_n \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= W_1 + \dots + W_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

quindi il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Il lavoro totale è nullo, $W = 0$ quando non agisce nessuna forza oppure agiscono forze la cui risultante è nulla o è sempre ortogonale alla traiettoria (equilibrio dinamico).

2.14.2 Potenza

La potenza corrisponde al *lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = F_T v \quad [W] = \left[\frac{J}{s} \right] = \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^3} \right] \quad (2.22)$$

Questa è la potenza istantanea, in generale variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro. La potenza media è il rapporto $\frac{W}{t}$, cioè il lavoro totale diviso per il tempo svolto per eseguirlo.

Questa grandezza è utile a quantificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. Infatti se confronto due macchine posso sapere quale mi eroga la stessa quantità di lavoro nel minor tempo tramite la potenza.

2.14.3 Energia cinetica

Ricordando la definizione di lavoro infinitesimo ad uno spostamento infinitesimo.

$$dW = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv \quad [J]$$

Se considero un percorso dalla posizione A a B abbiamo:

$$W = \int_A^f mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad [J] \quad (2.23)$$

Il lavoro è eguale alla variazione della quantità $\frac{1}{2}mv^2$ che si chiama *energia cinetica del punto materiale*.

Tutte le leggi con cui vengono definite le varie forme di energia contengono sempre la variazione di energia e pertanto tali quantità possono essere definite a meno di una costante. Per esempio l'energia cinetica di un punto potrebbe essere scritta come $\frac{1}{2}mv^2 + \text{costante}$, senza modificare l'equazione di definizione in quanto nella differenza la costante scompare.

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di lavoro *scambiato* e non si dice mai che un sistema possiede lavoro. Si parla invece di energia posseduta dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno.

Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

2.15 Lavoro della forza peso

Il lavoro della forza peso per uno spostamento da una posizione A a B è dato da:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} \quad (2.24)$$

dove \vec{r}_{AB} è la distanza tra A e B .

Svolgendo il prodotto scalare ottengo:

$$W = -(mgz_b - mgz_a) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p \quad (2.25)$$

Con $E_p = mgz$ indichiamo una funzione della coordinata del punto z (misurata lungo un asse parallelo e di verso opposto alla forza peso) che ha questa proprietà: il lavoro è eguale all'opposto della variazione di questa funzione durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega i due punti (conservazione della forza).

In base alla posizione di A e B posso trovarmi in due casi:

- Se B si trova più in basso di A , ho $W > 0$ quindi E_p diminuisce.
- Se B si trova più in alto di A , ho $W < 0$ quindi E_p aumenta (il punto quindi deve avere sufficiente velocità iniziale così che la diminuzione di energia cinetica egualgi il lavoro oppure bisogna applicare al punto un'altra forza il cui lavoro motore superi in modulo il lavoro resistente della forza peso).

La trattazione fatta per la forza peso è applicabile a qualsiasi altra forza costante \vec{F} : si prende un asse parallelo e discorde a \vec{F} utilizzano le stesse formule precedenti con F al posto di mg .

2.16 Lavoro di una forza elastica

Il lavoro della forza elastica $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$, per uno spostamento lungo l'asse x vale:

$$W = \int_A^B -kx\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = -k \int_A^B xdx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p \quad (2.26)$$

con $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ in funzione della posizione.

Come nel caso della forza peso si tratta di una forza conservativa, quindi non conta la traiettoria. A seconda del punto di inizio e fine posso avere due casi:

- Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale, cioè se il punto si muove verso il centro della forza, $W > 0$, quindi E_p diminuisce (spostamento naturale).
- Nel caso contrario di allontanamento dal centro $W < 0$, E_p aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

2.17 Lavoro di una forza di attrito radente

Il lavoro di una forza di attrito radente è dato dall'equazione:

$$W = \int_A^B \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N \vec{u}_x \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \int_A^B ds. \quad (2.27)$$

dove \vec{u}_x è il versore in direzione dello spostamento e \int_A^B è la lunghezza del percorso tra A e B , misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*.

Dato che il lavoro dipende dal percorso non si tratta di una forza conservativa.
Il lavoro è sempre negativo, cioè è lavoro resistente.

Perché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale, ovvero una certa energia cinetica $E_{k,A}$.

Quindi l'energia cinetica iniziale diminuisce lungo il percorso quindi arriverò alla posizione B con una velocità minore.

In particolare, data $E_{k,A}$, il punto si ferma dopo un percorso:

$$s_{AB} = \frac{E_{k,A}}{\mu_d N}$$

2.18 Forze conservative, energia potenziale

2.18.1 Forze conservative

Le forze in cui il lavoro non dipende dal percorso si chiamano *forze conservative*. Quando eseguiamo il calcolo del lavoro possiamo usare qualsiasi percorso che collega A e B , quindi possiamo sfruttare il più semplice.

Il lavoro è pertanto esprimibile come differenza dei valori che una funzione delle coordinate assume in A e in B . Ho che in ogni percorso chiuso il lavoro è nullo:

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) + \int_B^A (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = 0 \quad (2.28)$$

oppure analogamente in modo più formale:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.29)$$

2.18.2 Energia potenziale

La funzione delle coordinate di cui abbiamo parlato finora si chiama energia potenziale e per tutte le forze conservative vale la relazione:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \quad (2.30)$$

Non esiste una formula generale per l'energia potenziale, ma l'espressione esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce. Ad esempio per la forza peso ho $E_p = mgz$ e per la forza elastica $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

Dall'ultima equazione ho che:

- se durante il moto l'energia potenziale diminuisce, $\Delta E_p < 0$, il lavoro è positivo,
- se l'energia potenziale aumenta, $\Delta E_p > 0$, il lavoro è negativo

Sappiamo che ci sono forze per le quali non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso e non è quindi possibile esprimere il lavoro tramite le differenze dei valori di una funzione delle coordinate. Queste forze si chiamano non conservative o dissipative e per esse non si può introdurre l'energia potenziale. Il lavoro di una forza non conservativa si calcola con la definizione iniziale ed è sempre eguale, come per qualsiasi forza, alla variazione di energia cinetica.

Le tipiche forze non conservative sono le forze di attrito.

2.19 Conservazione dell'energia

Se agiscono solo forze conservative ho l'uguaglianza tra la differenza di energia cinetica e la differenza di energia potenziale. Vale quindi l'equazione:

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \quad (2.31)$$

Questa somma di valori risulta essere una costante che prende il nome di energia meccanica.

$$E_m = E_p + E_k = \text{costante} \quad (2.32)$$

Quando agiscono sia le forze conservative che dissipative il valore è dato dalla somma dei due lavori delle forze.

$$W = W_{cons} + W_{diss} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Grazie alla proprietà delle forze conservative posso riscrivere W_{cons} come differenza di energia potenziale

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{diss} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

potendo finalmente ottenere facilmente il lavoro delle forze dissipative:

$$\implies W_{diss} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} \quad (2.33)$$

In presenza di forze dissipative l'energia meccanica **non** si conserva e la sua variazione è eguale al lavoro delle forze dissipative. Questo di solito avviene sempre perché in qualunque processo meccanico è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto con $W_{diss} < 0$. Quindi l'energia meccanica diminuisce sempre.

Capitolo 3

Moti relativi

3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e Accelerazione relative

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento. Fissato un sistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata. Non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: lo spazio appare omogeneo e isotropo.

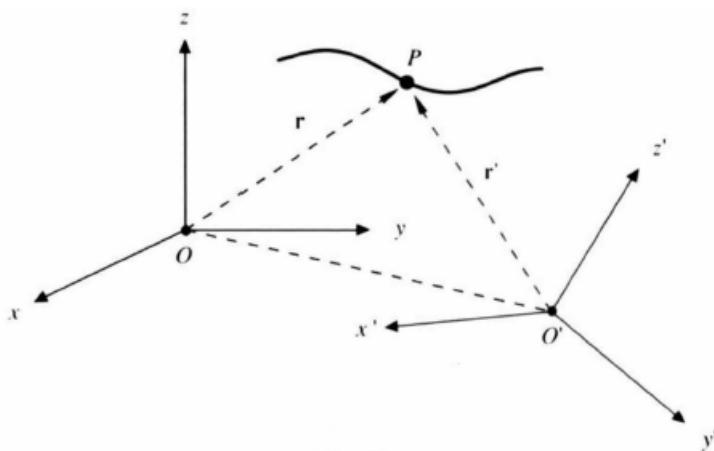


Figura 3.1

Abbiamo già rilevato come il concetto stesso di moto sia relativo, abbia cioè bisogno della precisazione del sistema di riferimento. Consideriamo il problema riferendoci alla figura 3.1. Il punto P è in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che, per convenzione, chiamiamo sistema fisso e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo sistema mobile.

Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile.

3.1.1 Posizione

La relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathbf{OO}'} + \vec{r}' \quad (3.1)$$

con

$$\vec{r} = x\vec{\mathbf{u}_x} + y\vec{\mathbf{u}_y} + z\vec{\mathbf{u}_z}, \quad \vec{r}' = x'\vec{\mathbf{u}'_x} + y'\vec{\mathbf{u}'_y} + z'\vec{\mathbf{u}'_z}$$

Assumiamo, dato che il primo sistema è fisso, che i versori $\vec{\mathbf{u}_x}, \vec{\mathbf{u}_y}, \vec{\mathbf{u}_z}$ sono indipendenti dal tempo.

3.1.2 Velocità

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo velocità assoluta, è data da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\mathbf{u}_x} + \frac{dy}{dt}\vec{\mathbf{u}_y} + \frac{dz}{dt}\vec{\mathbf{u}_z} \quad (3.2)$$

mentre quella misurata da un osservatore nel sistema mobile, che indichiamo come velocità relativa è

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_z} \quad (3.3)$$

Infine la velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un osservatore del sistema fisso è data da:

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OO}'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_x} + \frac{dy_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_y} + \frac{dz_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_z} \quad (3.4)$$

Derivando (3.1) rispetto al tempo ottengo

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{OO}'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \\ &= \frac{dx_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_x} + \frac{dy_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_y} + \frac{dz_{O'}}{dt}\vec{\mathbf{u}_z} \\ &\quad + \frac{dx'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{\mathbf{u}'_z} + x'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_x}}{dt} + y'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_y}}{dt} + z'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_z}}{dt} \end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + x'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_x}}{dt} + y'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_y}}{dt} + z'\frac{d\vec{\mathbf{u}'_z}}{dt} \quad (3.5)$$

La derivata di un versore \vec{u} , in quanto vettore con modulo costante, si può scrivere $\omega \times \vec{u}$; pertanto per le derivate dei tre versori $\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}$, si hanno le seguenti formule, dette di Poisson:

$$\frac{d\vec{u_x}}{dt} = \omega \times \vec{u_x}, \quad \frac{d\vec{u_y}}{dt} = \omega \times \vec{u_y}, \quad \frac{d\vec{u_z}}{dt} = \omega \times \vec{u_z} \quad (3.6)$$

Posso riscrivere gli ultimi termini dell'equazione della velocità come:

$$x'(\omega \vec{u_x}) + y'(\omega \vec{u_y}) + z'(\omega \vec{u_z}) = \omega \times (x' \vec{u_x} + y' \vec{u_y} + z' \vec{u_z}) = \omega \times \vec{r}' \quad (3.7)$$

Teorema delle velocità relative

Effettuando l'ultima sostituzione ottengo infine:

$$\vec{v} = \vec{v_{O'}} + \vec{v}' + \omega \times \vec{r}' \quad (3.8)$$

La differenza delle due velocità misurate nei sistemi di riferimento è chiamata *velocità di trascinamento*

$$\vec{v_t} = \vec{v} - \vec{v}' = \vec{v_{O'}} + \omega \times \vec{r}'$$

La velocità di trascinamento è la velocità che il punto mobile P avrebbe se, nell'istante considerato, fosse solidale con il sistema relativo.

Il moto di trascinamento, legato in pratica al moto del sistema mobile, può essere considerato in ogni istante come la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea $\vec{v_{O'}}$ e di un termine rotatorio con velocità angolare ω , variabile in generale sia in modulo che in direzione.

3.1.3 Accelerazione

L'accelerazione rispetto al sistema fisso viene detta *accelerazione assoluta* ed è pari ad:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u_z} \quad (3.9)$$

mentre rispetto al sistema mobile l'*accelerazione relativa* è

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{u_x} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{u_y} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{u_z}. \quad (3.10)$$

L'accelerazione del sistema mobile O' rispetto a O è dato da $\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v_{O'}}}{dt}$. Derivando rispetto al tempo ottengo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v_{O'}}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \omega \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (3.11)$$

Calcolando $\frac{d\vec{v}'}{dt}$ ricaviamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{\mathbf{u}}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \vec{\mathbf{u}}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \vec{\mathbf{u}}_{z'} \right) = \left(\frac{d^2x'}{dt^2} \vec{\mathbf{u}}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{\mathbf{u}}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{\mathbf{u}}_{z'} \right) \\ &\quad + \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{z'}}{dt} \right) \\ &= \vec{\mathbf{a}}' + \omega \times \vec{\mathbf{v}}'\end{aligned}\tag{3.12}$$

Ho inoltre:

$$\omega \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt} = \omega \times \vec{\mathbf{v}}' + \omega \times (\omega \times \vec{\mathbf{r}}')$$

Teorema delle velocità relative

Ottengo quindi infine:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}_{O'}} + \omega \times (\omega \times \vec{\mathbf{r}}') + \frac{d\omega}{dt} \times \vec{\mathbf{r}}' + 2\omega \times \vec{\mathbf{v}}'\tag{3.13}$$

Le accelerazioni del punto P misurate nei due sistemi non coincidono ma sono messe in relazione tramite la (3.13), detta *teorema delle accelerazioni relative*. Per valutare l'accelerazione di trascinamento $\vec{\mathbf{a}}'$, riprendiamo la discussione fatta per la velocità di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è quella del punto P^* , solidale col sistema mobile, che coincide nell'istante considerato col punto P . Per P^* , $\vec{\mathbf{a}}'$, $\vec{\mathbf{v}}'$ sono nulle e da (3.13)

$$\vec{\mathbf{a}}_t = \vec{\mathbf{a}_{O'}} + \omega \times (\omega \times \vec{\mathbf{r}}') + \frac{d\omega}{dt} \times \vec{\mathbf{r}}'\tag{3.14}$$

Possiamo riscrivere (3.13) come:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_c\tag{3.15}$$

L'ultimo termine

$$\vec{\mathbf{a}}_c = 2\omega \times \vec{\mathbf{v}}'\tag{3.16}$$

è chiamato accelerazione complementare o di Coriolis; esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa di $\vec{\mathbf{v}}'$

3.2 Sistemi di riferimento inerziali, Relatività Galileiana

3.2.1 Sistema di riferimento inerziale

Definiamo come sistema di riferimento inerziale un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto non soggetto a forze lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in

quieta.

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla.

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le forze vere, cioè quelle che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

3.2.2 Relatività galileiana

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\vec{v}_{O'} = \text{costante}, \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \omega = 0 \quad (3.17)$$

Da (3.13) ricaviamo $\vec{a} = \vec{a}'$: le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\vec{a} = 0$ anche $\vec{a}' = 0$ e quindi il secondo sistema è pure inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: *definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali*; per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di \vec{F} e di \vec{a} ; in particolare se $\vec{a} = 0$ in uno, essa è nulla in tutti gli altri.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, ($a_{O'} \neq 0$ oppure $\omega \neq 0$ o entrambe) si osserva che la legge di Newton non è più valida, la forza vera che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

Infatti, se $\vec{F} = m\vec{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema mobile in moto accelerato non può valere $\vec{F} = m\vec{a}'$ poiché $\vec{a}' \neq \vec{a}$. Ho anche che, se moltiplichiamo i termini di (3.15) per la massa del punto e teniamo conto che $\vec{F} = m\vec{a}$, abbiamo:

$$\vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}' \quad (3.18)$$

3.2.3 Forze apparenti o forze di inerzia

Questa equazione rappresenta una forma modificata dalla legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione

misurata in quel sistema è eguale alla forza vera agente sul punto più le forze apparenti. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche forze di inerzia, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale, dove costituiscono il termine correttivo che permette di ritornare ad una espressione $\vec{F}' = m \vec{a}'$. Le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale.

3.2.4 Sistema non inerziale

Se osserviamo in un sistema inerziale un punto materiale che descrive una traiettoria curva possiamo affermare che su di esso agisce una forza (vera); se $\vec{F} = 0$ sappiamo che il moto è rettilineo uniforme e viceversa.

In un sistema accelerato vediamo da (3.15) che $\vec{F} = 0$ non comporta $\vec{a}' = 0$ e quindi l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema non inerziale per un sistema accelerato. Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto apparente, conseguenza del moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore, e così via.

In entrambi i sistemi, note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti, facciamo previsioni corrette per il moto di un punto tramite l'equazione di Newton e il teorema delle accelerazioni relative.

Però nel sistema non inerziale la descrizione è più complicata, dovendosi introdurre termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali.

In un sistema non inerziale può quindi essere difficoltoso capire comprendere come agiscono le forze.

3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme

In questo esempio ho due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme uno rispetto l'altro. Gli assi sono paralleli tra loro, e coincidono in $t = 0$ poi O' si sposta con velocità costante $\vec{v}_{O'}$ parallela all'asse x . Partendo da $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO'}$, la posizione del punto P diventa:

$$x' = x - v_{O'} \cdot t, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$v'_x = v_x - v_{O'}, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

Le accelerazioni sono identiche perché abbiamo assunto che i due sistemi fossero inerziali. Queste relazioni costituiscono una trasformazione galileiana tra i due sistemi.

Per O l'equazione del moto è

$$x_P = x_A + v_P t$$

mentre per O' diventa:

$$x'_P = x_P - v_{O'} t = x_A + (v_P - v_{O'}) t = x_A + v'_P t$$

Il moto visto da O' è quindi uniforme, con velocità diversa secondo le relazioni precedentemente viste. Nel caso in cui \vec{v}_P non sia parallela all'asse x , ma giaccia nel piano x, y , i due osservatori misurano un moto rettilineo uniforme, però con angolo diverso rispetto all'asse x .

In conclusione, se il moto è rettilineo uniforme in un sistema, lo è anche nell'altro, però sono diverse le velocità e le pendenze delle corrispondenti traiettorie rettilinee.

Se invece si fa lo stesso ma con un moto rettilineo uniformemente accelerato nel sistema con origine in O .

Se

$$x_P = x_A + v_{P,A}t + \frac{1}{2}at^2 (y_P = z_P = 0)$$

L'osservatore in O' vede un moto uniformemente accelerato con la stessa accelerazione e diversa velocità iniziale, sempre rettilineo lungo l'asse $x = x'$:

$$x'_P = x_A + (v_{P,A} - v_{O'})t + \frac{1}{2}at^2$$

$v_{P,A}$ è la velocità iniziale del punto nel sistema con origine O . Nel piano x, y ho le equazioni:

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y_P = \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v_x &= a_x t, \quad v_y = a_y t \end{aligned}$$

O vede una traiettoria rettilinea con pendenza $v_y/v_x = a_y/a_x$. Invece O' misura

$$\begin{aligned} x'_P &= \frac{1}{2}a_x t^2 - v_{O'} t, \quad y'_P = \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v'_x &= a_x t - v_{O'}, \quad v'_y = a_y t \end{aligned}$$

La pendenza della traiettoria è $v'_y/v'_x = a_y/(a_x t - v_{O'})$ e dato che risulta funzione del tempo la traiettoria vista da O' è curva.

Se per esempio l'osservatore in O lancia un punto verso l'alto, ho che il primo osservatore vede una traiettoria verticale, con il punto che ritorna nella posizione da cui è partito, mentre il secondo (in O') vede la traiettoria è parabolica nel piano.

3.4 Moto di trascinamento uniformemente accelerato

Assumendo la stessa condizione (geometrica) del sistema O' rispetto al sistema O dell'esempio precedente, supponiamo ora che O' abbia un accelerazione costante $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_t$ e una velocità iniziale \vec{v}_{in} entrambe parallele all'asse x .

La posizione e la velocità di O' sono espresse da

$$x_{O'} = v_{in} + \frac{1}{2}a_t t^2, \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t$$

Le formule di trasformazione tra i due sistemi di riferimento diventano:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \overrightarrow{OO'}, \quad x' = x - v_{int}t - \frac{1}{2}a_t t^2 \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \overrightarrow{v_{O'}}, \quad v'_x = v_x - v_{in} - a_t t \\ \vec{a}' &= \vec{a} - \overrightarrow{a_{O'}}, \quad a'_x = a_x - a_t\end{aligned}$$

3.4.1 Esempio carrello

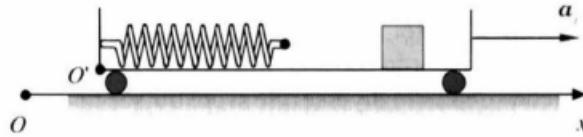


Figura 3.2

Consideriamo di avere un punto materiale di massa m , posto sul pavimento del carrello che continua a muoversi con accelerazione \vec{a} . Si assuma l'attrito nullo e che ad un estremo del carrello ci sia una molla di costante elastica k (figura 3.2). Nel sistema inerziale si osservano i seguenti eventi: il punto resta fermo (non c'è attrito tra punto e pavimento) mentre il carrello gli scorre sotto, fino a quando l'estremo della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto a muoversi; a regime il punto è fermo rispetto al carrello mentre è in moto, con la stessa accelerazione a , del carrello, rispetto ad O . In tale condizione la molla è compressa dalla quantità $x_C = ma_t/k$: infatti è la forza elastica della molla, kx , che applicata al punto gli comunica l'accelerazione a_t .

Per l'osservatore O' , posto sul carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione $-\vec{a}_t$. Infatti $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t = -\vec{a}_t$, dato che $\vec{a} = 0$. Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che si comprime e, di conseguenza, il punto si ferma; la molla resta compressa della quantità x_c . O' conclude che sul punto, che sembrerebbe libero, agisce la forza $-m\vec{a}$, tanto è vero che quando il punto tocca la molla la comprime. Poiché il punto appare da quell'istante fermo, si deduce che in modulo $kx_c = ma_t$. Posso quindi, partendo da x_c ricavare a_t (la molla diventa una sorta di accelerometro).

3.4.2 Esempio ascensore

Nell'ultimo esempio ho un asse z verticale con origine in O e un secondo asse z' verticale, con origine in O' , solidale con un ascensore; entrambi gli assi sono orientati verso l'alto. L'ascensore inizia a salire con accelerazione \vec{a}_t , descrive successivamente un moto uniforme ed infine decelera con accelerazione $-\vec{a}_t$, fino a fermarsi; a_t è costante in modulo. L'osservatore nel sistema O' compie nell'ascensore esperimenti di caduta libera di corpi, misurandone l'accelerazione \vec{a}' . Per l'osservatore in O l'accelerazione dei corpi lasciati cadere da O' è sempre pari a g . In base a (3.18) ho che $\vec{g} = \vec{a}' + \vec{a}_t$, e proiettando tale relazione sull'asse z si ha:

- nella fase di accelerazione $-g = a' + a_t \implies a' = -(g + a_t)$

- nella fase di moto uniforme $-g = a' \implies a' = -g$
- nella fase di decelerazione $-g = a' - a_t \implies a' = -(g - a_t)$

Nella fase di accelerazione O' constata che i corpi cadono con una accelerazione maggiore di quella di gravità, nella fase uniforme si torna all'accelerazione normale, mentre nella fase di decelerazione i corpi cadono con una accelerazione minore di g (diminuzione apparente del peso).

Se fosse $\vec{a}_t = \vec{g}$, come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe $\vec{a}' = 0$: un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad O' .

È la cosiddetta assenza di peso, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben noto, si manifesta nei satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra.

La spiegazione dell'assenza di accelerazione di gravità è quella data da O che misura in ogni caso g e ragiona in base a (3.18), attribuendo le variazioni all'accelerazione di trascinamento di O' . Ma O' , se non ha a priori questo tipo di informazioni, ragiona in modo diverso. Egli vede che in certe situazioni l'accelerazione di un corpo che cade è g , in accordo con quanto gli può essere comunicato dall'esterno, ma sperimenta anche situazioni diverse. O' postula pertanto che in certe situazioni, che è capace di mettere in evidenza, ha origine un'accelerazione supplementare che si compone con g per dare i risultati osservati ovvero che alla forza peso va aggiunto il termine $-m\vec{a}_{suppl}$; sulle cause del fenomeno non è però in grado di fare alcuna ipotesi.

Notiamo che dall'esame delle misure di a' e a_{suppl} egli sarebbe in grado di accorgersi da solo che c'è un valore speciale, appunto g , che si ottiene sempre sommando o sottraendo i valori di a' e a_{suppl} ; solo in seguito a un'informazione esterna potrebbe però accorgersi che a_{suppl} non è altro che a_t e che quindi egli ha un modo per mettere in evidenza cosa sta succedendo al suo sistema.

Capitolo 4

Gravitazione

4.1 La forza gravitazionale

4.1.1 Introduzione

Per parlare della forza gravitazionale è necessario richiamare alcune basi riguardanti il moto dei pianeti dell'era pre-Newtoniana.

Verso il 1500 era stata avanzata da Copernico l'ipotesi eliocentrica: il Sole, e non la Terra, era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti.

Dopo questa affermazione furono eseguite misure precise che Keplero utilizzò nel formulare le sue tre leggi. Queste leggi ci danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti.

4.1.2 Leggi di Keplero

Prima legge

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al Sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

Seconda legge

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il Sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

Terza legge

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = kr^3$

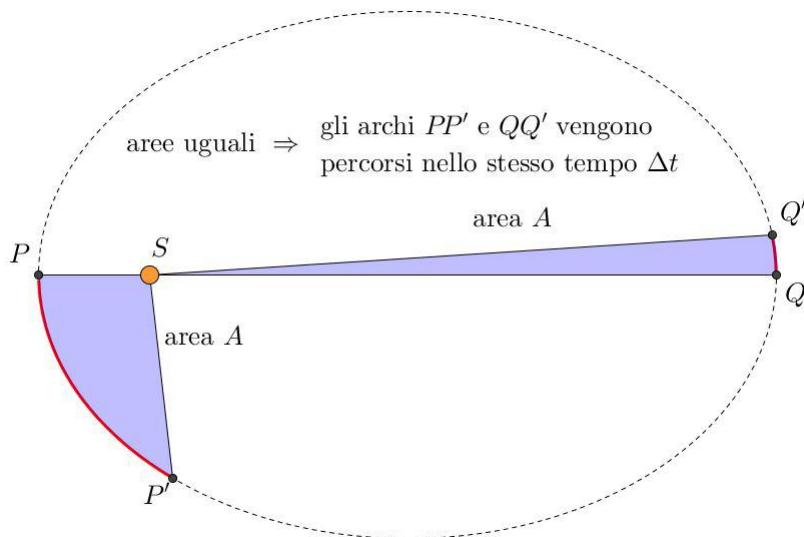


Figura 4.1

4.1.3 Il ragionamento di Newton

Le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze; assumiamo che siano circolari.

Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme. La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta:

$$F = M\omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \quad (4.1)$$

con T il periodo di rivoluzione, m la massa e r il raggio dell'orbita del pianeta.

Utilizziamo ora la terza legge di Keplero $T^2 = kr^3$, confondendo il raggio della circonferenza con il semiasse maggiore dell'ellisse (vista l'assunzione iniziale), così che la forza diviene

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

Ottengo che la forza esercitata dal Sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole.

Considerando il sottosistema Sole-Terra, la forza esercitata sulla Terra può quindi essere scritta:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$

la forza esercitata dalla Terra sul Sole ha l'espressione:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2}$$

esse sono uguali in modulo per il terzo principio della dinamica. Ottengo che $m_t k_s = m_s k_t$. Definendo la costante di gravitazione

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_t k_s} = \frac{4\pi^2}{m_s k_t} \quad (4.2)$$

abbiamo il modulo della forza Sole-Terra

$$F = \gamma \frac{m_s m_t}{r^2} \quad (4.3)$$

4.1.4 Legge di gravitazione universale

La formula ottenuta è molto semplice ed è simmetrica nei due corpi; Newton ipotizzò che si trattasse di una formula universale ed enunciò la seguente legge di gravitazione universale:

date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.

La costante di proporzionalità γ è una costante universale, che non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione gravitazionale.

In termini vettoriali ottengo che l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2} \quad (4.4)$$

Questa formula è valida se si ammette che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro. So anche poi che $F = mg$ per cui:

$$g = \gamma \frac{m_T}{R^2} \quad (4.5)$$

però Newton non sapeva né m_T né γ quindi fece riferimento al sistema Terra-Luna.

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L \Leftrightarrow \gamma m_T = \omega_L^2 r_L^3 \Leftrightarrow \gamma m_T = g r_L^2 \quad (4.6)$$

e dunque dal periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra e dalla distanza Terra-Luna è possibile determinare g .

I valori più attuali delle costanti sono:

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kgs^2} \right], \quad m_T = 5.98 \cdot 10^{24} [kg].$$

A differenza delle forze che abbiamo visto precedentemente le interazioni fondamentali conosciute sono forze a distanza, che differiscono però nel raggio di azione (oltre che per altre proprietà): la forza gravitazionale e la forza tra cariche elettriche hanno la stessa dipendenza dalla distanza $\frac{1}{r^2}$ e si dice che il loro *raggio di azione è infinito*.

4.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

La legge di gravitazione universale esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende da γ , che è tipica dell'interazione, dalla geometria

del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione, che abbiamo indicato con m e chiamiamo massa gravitazionale. A priori non c'è nessuna ragione logica per cui la massa gravitazionale, legata a una particolare interazione, debba essere eguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton, la massa inerziale.

Sperimentalmente, in uno stesso luogo g è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto $\frac{m_G}{m_I}$ è pari a una costante, indipendente dal corpo: le due masse m_I e m_G sono per lo meno proporzionali. Poiché non c'è un modo diretto per misurare il rapporto $\frac{m_G}{m_I}$ l'ipotesi più semplice è supporre $\frac{m_G}{m_I}$, anche se il fatto che questi due valori siano uguali non ha spiegazione teorica.

Capitolo 5

Dinamica dei sistemi di punti materiali

5.1 Sistemi di punti materiali, principio di azione e reazione

Consideriamo un insieme n di punti materiali che interagiscono tra loro.

La forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ agente sull' i -esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n - 1$ punti, forze interne al sistema $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$:

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} \quad (5.1)$$

questa distinzione è utile ma, in ogni caso, non fa in modo che il moto sia diviso nelle due forze perché il moto di P_i dipende da $\vec{\mathbf{F}}_i$.

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti, che è arbitrario.

Alle forze interne si applica il principio di azione e reazione, indicato anche come terza legge di Newton. Se il punto i -esimo esercita sul punto j -esimo la forza $\vec{\mathbf{F}}_{i,j}$, il punto j -esimo reagisce esercitando sul punto i -esimo la forza $\vec{\mathbf{F}}_{j,i}$. Si osserva che queste forze hanno la stessa direzione, verso opposto, stesso modulo e stessa retta di azione; esse possono essere attrattive o repulsive.

In generale la risultante $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$ delle forze interne agenti sull' i -esimo punto è diversa da zero, però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla perché, in base al principio di azione e reazione, esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(I)} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{\mathbf{F}}_{i,j} = 0 \quad (5.2)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

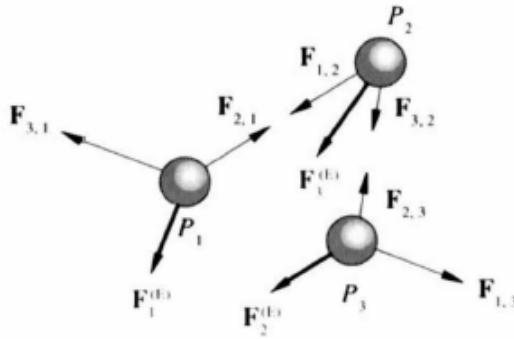


Figura 5.1

5.2 Centro di massa di un sistema di punti, Teorema del moto del centro di massa

5.2.1 Centro di massa

Si definisce come centro di massa di un sistema di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (5.3)$$

Si noti che la posizione del centro di massa rispetto agli n punti materiali non dipende dal sistema di riferimento, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto.

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d \vec{r}_{CM}}{dt} \quad (5.4)$$

Data $M = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema, vediamo che quindi che P coincide con la quantità di moto $M \vec{v}_{CM}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione \vec{r}_{CM} , la velocità v_{CM} e massa pari alla massa totale M del sistema.

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa, derivando:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d \vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d \vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M} \quad (5.5)$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

secondo (5.1) e sostituendo

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \vec{R}^{(E)} + \vec{R}^{(I)} = \vec{R}^{(E)} \quad (5.6)$$

dato che la risultante delle forze è nulla.

5.2.2 Teorema del moto del centro di massa

La relazione

$$\vec{R}^{(E)} = M \vec{a}_{CM} \quad (5.7)$$

esprime il teorema del moto del centro di massa. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Ho inoltre

$$\vec{R}^{(E)} = M \vec{a}_{CM} = M \frac{d \vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \vec{v}_{CM}) = \frac{d \vec{P}}{dt} \quad (5.8)$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso.

5.3 Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\vec{R}^{(E)}$ sia nulla, si ha:

$$\vec{a}_{CM} = 0, \vec{v}_{CM} = \text{costante}, \vec{P} = \text{costante} \quad (5.9)$$

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete. Tale risultato esprime il *principio della conservazione della quantità di moto* per un sistema di punti materiali.

La conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se $R_x^{(E)}$, allora $P_x = \text{costante}$. Osserviamo poi che, pur verificandosi $\vec{R}^{(E)}$, le quantità di moto dei vari punti $m_i \vec{v}_i$ in generale variano nel tempo; resta costante solo la loro somma $\sum_i m_i \vec{v}_i$.

5.3.1 Esempio di due punti isolati

Consideriamo ora due punti isolati, che possono quindi interagire solo tra loro:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{costante} \quad (5.10)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

$$\implies \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto.

Il risultato, però, non è completamente equivalente al principio di azione e reazione in quanto non implica che le due forze abbiano la stessa retta di azione.

5.4 Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Utilizzando $\vec{v}_i = v'_i + \vec{v}_{CM}$ otteniamo

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v'_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa, E'_k . Il secondo termine è pari a $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$, energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa, detta brevemente energia del centro di massa. L'ultimo termine è nullo da $\sum_i \frac{1}{2} m_i v'_i = 0$ (la quantità di moto totale del sistema, $\sum_i \frac{1}{2} m_i v'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa) e perché uguale a $(\sum_i m_i \vec{v}'_i) \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{P}' \cdot \vec{v}_{CM} = 0$. Pertanto

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E'_k + E_{k,CM} \quad (5.11)$$

relazione nota come secondo teorema di König. *L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.*

Anche se il centro di massa è fermo, $\vec{v}_{CM} = 0$, l'energia cinetica non è necessariamente nulla: il movimento dei singoli punti rispetto al centro di massa rende $E'_k \neq 0$ e quindi $E_k \neq 0$.

Se però $E_k = 0$, necessariamente devono essere nulle E'_k e $E_{k,CM}$, dato che l'energia cinetica non può essere negativa.

5.5 Osservazioni sulle proprietà del centro di massa

La definizione introdotta di centro di massa è matematica, nel senso che non esiste il punto materiale centro di massa, ma la massa è distribuita nei singoli punti che si

muovono sotto l'azione delle forze interne ed esterne. Tuttavia questo punto matematico gode di notevoli proprietà.

Per ora è stato dimostrato che, se si assume di concentrare in esso la massa del sistema,

- la sua quantità di moto è eguale a quella totale del sistema
- la sua accelerazione è determinata dalla risultante delle forze esterne agenti sul sistema

Il fatto che ad un certo istante \vec{v}_{CM} abbia un determinato valore significa solamente che il sistema in media si sta spostando in quella data direzione, anche se nessuna delle singole \vec{v}_i coincide con v_{CM} . Questo avviene analogamente anche per \vec{a}_{CM} .

In effetti \vec{r}_{CM} , \vec{v}_{CM} e \vec{a}_{CM} sono le medie pesate sulle masse dei raggi vettori, velocità, accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono informazioni di proprietà medie e non sul moto dei singoli punti.

5.6 Urto tra due punti materiali

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di urto tra i due punti. Data la brevità del fenomeno si assume che durante l'interazione i punti non si muovano in modo apprezzabile.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate forze impulsive.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.

Se indichiamo con $\vec{v}_{1,in}$, $\vec{v}_{2,in}$, le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , e con $\vec{v}_{1,fin}$, $\vec{v}_{2,fin}$, le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \vec{P} si scrive:

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{v}_{1,in} + m_2 \vec{v}_{2,in} = m_1 \vec{v}_{1,fin} + m_2 \vec{v}_{2,fin} = \vec{P}_{fin} \quad (5.12)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1,fin} - m_1 \vec{v}_{1,in} &= \vec{I}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt \\ m_2 \vec{v}_{2,fin} - m_2 \vec{v}_{2,in} &= \vec{I}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt \end{aligned}$$

Ho naturalmente

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \implies \vec{I}_{1,2} = -\vec{I}_{2,1}$$

5.6.1 Forze esterne

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne se la durata dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto totale del sistema dovuta alle forze esterne è

$$\Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)} dt = \vec{F}_m^{(E)} \tau$$

e se τ è molto breve ΔP risulta trascurabile. Il ragionamento non sarebbe corretto se $F^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo τ quanto in tal caso il valore medio $F_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori notevoli.

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto.

5.7 Urto completamente anelastico

L'urto si chiama completamente anelastico quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$. Se \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sono le velocità dei due punti, nell'istante prima dell'urto e \vec{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto. Ottengo che:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}' = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

\vec{v}_{CM} rimane invariata nell'urto. Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1 \vec{v}_{CM} - m_1 \vec{v}_1$ e $m_2 \vec{v}_{CM} - m_2 \vec{v}_2$ e sono uguali ed opposte.

L'energia cinetica prima dell'urto è:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2$$

quella finale per il Teorema di König (5.11) diventa:

$$E_{k,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k,in}$$

Nell'urto completamente anelastico viene assorbita l'energia E'_k , cioè l'energia cinetica rispetto al centro di massa prima dell'urto. È infatti dopo l'urto che non c'è più moto rispetto al centro di massa, in cui i due punti vengono a coincidere. Nella realtà l'energia cinetica E'_k viene in parte utilizzata per la deformazione permanente dei due corpi.

5.8 Urto elastico

Si definisce come urto elastico un urto durante il quale si conserva anche l'energia cinetica esterna. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto. L'energia potenziale del sistema prima e dopo l'urto è la stessa e pertanto, se si conserva l'energia meccanica, deve conservarsi anche l'energia cinetica.

Valgono quindi le equazioni:

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}, E_{k,in} = E_{k,out}$$

Il caso più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite, le componenti delle velocità dei due punti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni. Anche nel caso di urto nel piano, abbiamo quattro incognite e tre equazioni. Quindi per risolvere un problema di urto elastico nel piano o nello spazio, oltre a conoscere le velocità prima dell'urto bisogna avere qualche altra informazione sulle velocità dopo l'urto. Invece nel caso unidimensionale (due punti che si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione) abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto) e possiamo risolvere il problema.

Scriviamo dunque in quest'ultimo caso:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} &= m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{aligned}$$

Per determinare i valori di $v_{1,fin}$ e $v_{2,fin}$ in funzione di $v_{1,in}$ e $v_{2,in}$ è più comodo considerare l'urto anche nel sistema di riferimento del centro di massa, dove $P' = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} m_1 v'_{1,in} &= -m_2 v'_{2,in}, \quad m_1 v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} \end{aligned}$$

Da queste ottengo:

$$v'_{1,fin} = -v'_{1,in}, \quad v'_{2,fin} = -v'_{2,in}$$

nel sistema del centro di massa la quantità di moto di ciascun punto resta la stessa in modulo, cambiando solo di verso.

Tornando nel sistema inerziale da:

$$\begin{aligned} v_{1,in} &= v'_{1,in} + v_{CM}, \quad v_{2,in} = v'_{2,in} + v_{CM} \\ v_{1,fin} &= v'_{1,fin} + v_{CM}, \quad v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{CM} \end{aligned}$$

e da

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

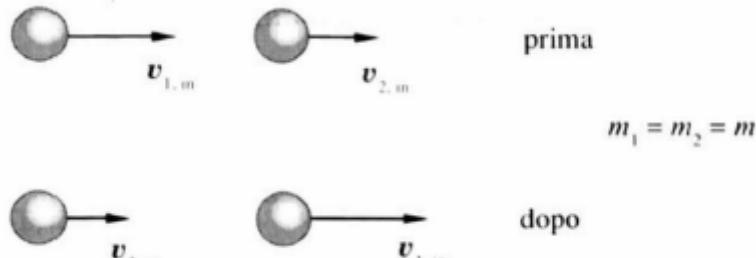
Ottengo:

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad (5.13)$$

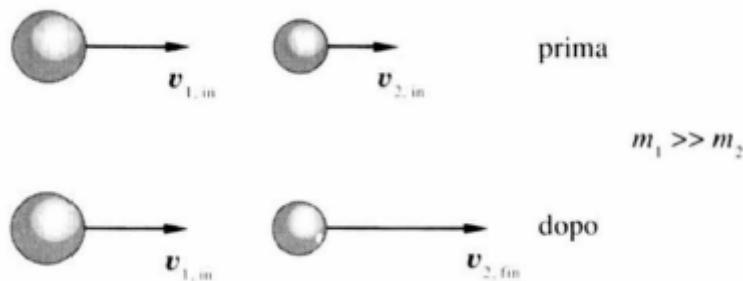
$$v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1) v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad (5.14)$$

5.8.1 Esempi

- $m_1 = m_2 = m : v_{1,fin} = v_{2,in}, v_{2,fin} = v_{1,in}$
Si ottiene a seguito dell'urto uno scambio delle velocità.

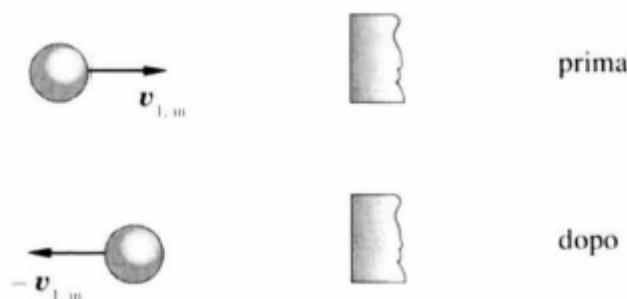


- $m_1 \gg m_2 = m : v_{1,fin} \cong v_{1,in}, v_{2,fin} = 2v_{1,in} - v_{2,in}$
Nell'urto la velocità di m_1 rimane praticamente la stessa



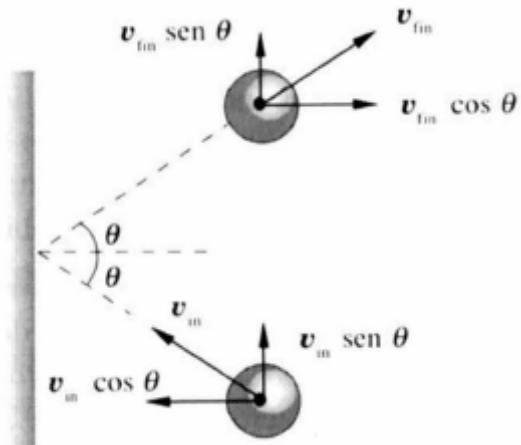
- $m_1 \ll m_2 = m$ e $v_{2,in} = 0 : v_{1,fin} = -v_{1,in}, v_{2,fin} \cong 0$

In tale situazione m_1 rimbalza all'indietro e m_2 resta fermo. Questo è un caso molto particolare, in cui possiamo verificare che si conserva l'energia cinetica, ma non la quantità di moto. Per esempio si tratta dell'urto di un punto contro un corpo massiccio, come una parete. Durante l'urto si sviluppano forze vincolari esterne di tipo impulsivo e quindi paragonabili a quelle interne. Ciò non permette la conservazione della quantità di moto.



- Urto obliquo contro una parete piana immobile liscia.
Anche questo è un caso particolare; è un urto bidimensionale, ma siccome uno dei due corpi è immobile è possibile risolvere il problema conoscendo la velocità

prima dell'urto. Supponiamo che \vec{v}_{in} formi l'angolo θ con la normale alla parete e abbia quindi le componenti $v_{in} \sin \theta$ e $v_{in} \cos \theta$. Nella direzione parallela alla parete non c'è urto, si conserva la relativa quantità di moto e la componente della velocità vale ancora $v_{in} \sin \theta$ dopo l'urto; in direzione ortogonale abbiamo la situazione vista nel precedente caso e $v_{in} \cos \theta$ diventa $-v_{in} \cos \theta$. Quindi v_{fin} è eguale in modulo a v_{in} e forma ancora l'angolo θ con la normale alla parete.



Capitolo 6

Primo principio della termodinamica

6.1 Sistemi e stati termodinamici

6.1.1 Introduzione

Un sistema termodinamico è spesso assimilabile, da un punto di vista meccanico, ad un sistema continuo, considerato che microscopicamente è costituito da un numero di elementi dell'ordine del *numero di Avogadro*

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$$

Cercheremo invece di descrivere le trasformazioni che il sistema può subire e gli scambi energetici che ne risultano con l'ambiente circostante, individuando le grandezze più appropriate a tale descrizione.

6.1.2 Sistema termodinamico

Chiamiamo sistema termodinamico una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti, per esempio un volume di gas, un liquido in equilibrio con il suo vapore, un insieme di blocchi di solidi diversi; tale sistema è oggetto delle nostre osservazioni per quanto riguarda le proprietà fisiche macroscopiche che lo caratterizzano e le loro eventuali variazioni.

6.1.3 Ambiente e Universo

Per ambiente circostante, o semplicemente ambiente, intendiamo quell'insieme che può essere costituito da una sola parte (per esempio l'aria o un altro fluido in cui è immerso il sistema) o da più parti (per esempio diversi corpi solidi a contatto con il sistema), con cui il sistema può interagire: l'ambiente pertanto contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.

L'insieme sistema più ambiente si chiama *universo termodinamico*, in senso locale.

6.1.4 Sistema aperto

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia il sistema è detto aperto. Ad esempio, se il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore, nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente; inoltre vi è certamente passaggio di energia dall'ambiente al sistema tramite la sorgente di calore.

6.1.5 Sistema chiuso

Il sistema si dice chiuso se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente scambi di energia. Ritornando all'esempio precedente, il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore; il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

6.1.6 Sistema isolato

Infine il sistema è detto isolato se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'universo termodinamico formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi come un sistema isolato.

6.1.7 Variabili termodinamiche

Un sistema termodinamico viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche direttamente misurabili, dette coordinate o variabili termodinamiche, come volume, pressione, temperatura, massa, concentrazione, densità, ecc.

Alcune variabili termodinamiche, chiamate variabili extensive, sono additive, come massa e volume; altre invece chiamate variabili intensive, dipendono in generale dalla posizione del punto nel sistema, e non sono additive.

Il numero minimo di coordinate termodinamiche necessario per descrivere completamente un sistema termodinamico non è fissato a priori, ma dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche dei vari sistemi che vengono studiati. Le proprietà di un sistema vengono sempre espresse in funzione dei valori delle sue coordinate termodinamiche.

Osserviamo che la definizione di stato termodinamico è concettualmente diversa da quella di stato meccanico, per il quale in linea di principio si presuppone la conoscenza di posizione e velocità di ciascuno degli n punti che costituiscono il sistema. In questi termini un sistema termodinamico non è definibile, visto il grande valore di n . In effetti, se è noto lo stato termodinamico, non è noto in generale quello meccanico, anzi a un dato stato termodinamico possono corrispondere moltissimi stati meccanici diversi.

6.2 Equilibrio termodinamico, principio dell'equilibrio termico

Lo stato termodinamico di un sistema è detto di equilibrio quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo. In un sistema termodinamico all'equilibrio le variabili termodinamiche sono dette variabili di stato.

6.2.1 Equilibrio termodinamico

L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi tipi di equilibrio, che devono essere realizzati contemporaneamente:

- *equilibrio meccanico*, inteso come equilibrio di forze e momenti, secondo quanto studiato in meccanica;
- *equilibrio chimico*: non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso;
- *equilibrio termico*: la temperatura è la stessa ovunque.

Se uno stato è di equilibrio, le condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte all'interno del sistema o di ciascuna delle sue parti, nell'interazione tra le parti del sistema e in quella tra sistema e ambiente. Quando c'è equilibrio con l'ambiente, vuol dire che esiste equilibrio tra le forze macroscopiche, qualunque sia la loro natura, agenti dall'esterno sul sistema e quelle sviluppate dal sistema; inoltre la temperatura del sistema, se questo non è isolato termicamente, è eguale alla temperatura dell'ambiente.

In uno stato di equilibrio esiste, in generale, una precisa relazione tra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di equazione di stato.

6.2.2 Trasformazione termodinamica

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema dal primo al secondo stato, spontanea o per effetto dell'interazione con l'ambiente, si chiama trasformazione termodinamica del sistema. Considereremo sempre come stati iniziali e finali di una certa trasformazione stati di equilibrio.

Invece gli stati intermedi attraverso cui passa il sistema durante l'evoluzione possono essere di equilibrio o di non equilibrio; in questo secondo caso non è detto che si possano determinare tutte le coordinate termodinamiche del sistema. Ai fini del calcolo si considerano anche trasformazioni infinitesime, tra stati molto prossimi, le cui coordinate differiscono di quantità infinitesime.

6.2.3 Equilibrio termico

Si considerino due sistemi A e B , ciascuno in equilibrio termodinamico, con il sistema A alla temperatura T_A e quello B alla temperatura T_B . I sistemi si dicono in equilibrio termico tra loro quando hanno la stessa temperatura, $T_A = T_B$: la temperatura è pertanto l'indice dell'equilibrio termico tra due sistemi.

È verificato sperimentalmente il seguente principio dell'equilibrio termico: due sistemi che siano ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro. Se il sistema A è in equilibrio termico con il sistema C ($T_A = T_C$) e se anche il sistema B è in equilibrio termico con C ($T_B = T_C$), allora A è in equilibrio termico con B ($T_A = T_B$).

Un metodo possibile per portare due sistemi all'equilibrio termico è quello di tenerli a contatto, tramite una parete. Se viene raggiunto l'equilibrio termico si parla di *parete diatermica*, mentre se non si raggiunge mai l'equilibrio termico, e pertanto le due temperature sono indipendenti, la parete è detta *adiabatica*. Nella realtà la situazione adiabatica è un caso limite, che può essere realizzato per tempi brevi, ma non in assoluto.

6.2.4 Contatto termico

Due sistemi separati da una parete diatermica si dicono anche in contatto termico tra loro e inevitabilmente raggiungono l'equilibrio termico. Il contatto termico si può realizzare anche direttamente, senza alcuna parete, come avviene per due corpi solidi a contatto, per un corpo solido immerso in un fluido o per due fluidi non miscibili a contatto; la parete diatermica si rende necessaria quando bisogna contenere il sistema, come avviene nel caso di un gas.

6.2.5 Sistema adiabatico

Un sistema è detto adiabatico se è circondato da pareti adiabatiche e quindi non può essere messo in contatto termico con un altro sistema o con l'ambiente. Una parete è sempre necessaria per impedire o ritardare l'equilibrio termico.

Notiamo infine che l'esistenza di equilibrio termico tra due sistemi non presuppone affatto che essi siano anche in altri tipi di equilibrio, ne viceversa.

6.3 Definizione temperatura, termometri

Per fare una definizione operativa di temperatura devono essere realizzate due condizioni. Deve esistere una grandezza X che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura. X si chiama *caratteristica termometrica* e la temperatura è una funzione di X , $\theta(X)$, detta *funzione termometrica*. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come *termometro*.

6.3.1 Punto fisso

In secondo luogo deve esistere un sistema, in uno stato di equilibrio, definibile con precisione e riproducibile con facilità, cui viene attribuito un valore arbitrario di temperatura, detto *punto fisso*.

Il punto fisso campione è il *punto triplo* dell’acqua, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapor d’acqua saturo sono in equilibrio. Al punto triplo dell’acqua è stata assegnata arbitrariamente la temperatura di 273.16K , dove il simbolo K indica l’unità di misura prescelta, il kelvin.

6.3.2 Misura della temperatura

Per arrivare a esprimere numericamente la temperatura stabiliamo in via preliminare che la forma della funzione $\theta(X)$ sia $\theta(X) = aX$, con a costante. È la scelta più semplice, giustificata però dal fatto che è valida per il termometro assoluto.

Il sistema, di cui vogliamo misurare la temperatura, viene messo a contatto termico con un termometro che, all’equilibrio termico, fornisce il valore X .

Tale termometro al punto triplo dell’acqua dà il valore X_{pt} e per definizione abbiamo

$$\theta(X_{pt}) = aX_{pt} = 273.16$$

da cui $a = 273.16/X_{pt}$, valore valido per quel termometro. Ne segue che la temperatura T del sistema, espressa dal valore della funzione $\theta(X) = aX$, si scrive

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}} K \quad (6.1)$$

L’ultima formula è la formula fondamentale per ogni termometro e fornisce la temperatura empirica di quel termometro.

Si usa il termine temperatura empirica in quanto, sperimentalmente, si constata che termometri di tipo diverso, o anche due diversi termometri dello stesso tipo, danno sempre letture diverse quando sono in equilibrio termico con lo stesso stato di un certo sistema, pur dando per costruzione tutti la stessa temperatura al punto triplo dell’acqua. Se si vuole verificare se due sistemi sono alla stessa temperatura si deve metterli uno alla volta in contatto termico con lo stesso termometro.

6.3.3 Scale termometriche

La scala che viene più comunemente usata nelle normali misure di temperatura è quella Celsius, in cui la temperatura del punto triplo dell’acqua vale 0.01 gradi Celsius (simbolo $^{\circ}\text{C}$). Pertanto lo zero della scala Celsius è a 273.15K e corrisponde alla temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica.

Il valore di una differenza di temperatura è assunto lo stesso in gradi Celsius o in kelvin e pertanto la formula di conversione dal valore in kelvin $T(\text{K})$ al valore in gradi Celsius

$t(^{\circ}C)$ è semplicemente

$$t(^{\circ}C) = T(K) - 273.15$$

Nei paesi anglosassoni vengono utilizzate altre due scale di temperatura, la scala Rankine $t(^{\circ}R)$ e la scala Fahrenheit $t(^{\circ}F)$, che sono così definite rispetto alla temperatura espressa in kelvin:

$$t(^{\circ}R) = \frac{9}{5}T(K)$$

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5}T(K) - 459.67$$

Il legame tra scala Fahrenheit e scala Celsius è pertanto:

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5}t(^{\circ}C) + 32, \quad t(^{\circ}C) = \frac{5}{9}[t(^{\circ}F) - 32]$$

Nella scala Fahrenheit il punto di fusione del ghiaccio ($0^{\circ}C$) corrisponde a $32^{\circ}F$ e il punto di ebollizione dell'acqua ($100^{\circ}C$) a $212^{\circ}F$; la temperatura ambiente di $20^{\circ}C$ vale $68^{\circ}F$.

6.4 Sistemi adiabatici, esperimenti di Joule, Calore

6.4.1 Esperimenti di Joule

Joule condusse una serie di esperimenti fondamentali sugli effetti termici del lavoro meccanico. Schematicamente, le varie esperienze eseguite da Joule su un sistema termodinamico costituito da una certa quantità d'acqua avevano lo scopo di realizzare un aumento della temperatura del sistema con procedimenti diversi.

- Viene messo in rotazione un mulinello nell'acqua spendendo il lavoro W_1 , fornito dalla variazione di energia potenziale di due masse che scendono sotto l'azione della forza di gravità. Con varie palette fisse immerse nell'acqua si impedisce che essa entri in rotazione. L'acqua, agitata dal mulinello, viene riscaldata per effetto dell'attrito.
- Viene immerso nell'acqua un conduttore di resistenza R , percorso da corrente. W_2 è il lavoro speso per fare circolare la corrente.
- Viene compressa una certa quantità di gas, contenuta in un recipiente con pareti diatermiche, immerso nell'acqua. Il processo di compressione del gas richiede un lavoro.
- Vengono strofinati tra loro due blocchi di metallo immersi nell'acqua. Il lavoro speso contro le forze di attrito è W_4 .

Nelle varie esperienze l'insieme costituito dall'acqua e dal dispositivo meccanico o elettrico è racchiuso entro pareti adiabatiche.

Il risultato fondamentale osservato da Joule è che il lavoro speso a parità di massa d'acqua, W_1 o W_2 o W_3 o W_4 , è sempre proporzionale alla variazione di temperatura dell'acqua con la stessa costante di proporzionalità.

Il sistema termodinamico *massa d'acqua* passa da uno stato iniziale di equilibrio, caratterizzato dal valore T_{in} della temperatura, ad uno stato finale di equilibrio con temperatura T_{fin} tramite quattro diversi processi, ma il lavoro meccanico è sempre lo stesso.

Sulla base delle considerazioni per l'energia potenziale nel caso di forze conservative, scriviamo la seguente relazione:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin} \quad [J] \quad (6.2)$$

dove U è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema cioè dalle sue coordinate termodinamiche.

Se il sistema fornisce lavoro all'esterno, W è assunto positivo e pertanto l'energia U diminuisce; se invece si compie lavoro dall'esterno sul sistema W è assunto negativo e l'energia U aumenta.

Se possiamo ottenere lo stesso cambiamento di stato termodinamico dell'acqua, segnalato dalla stessa variazione di temperatura, tramite scambio di calore o di lavoro meccanico, possiamo postulare l'equivalenza degli effetti delle due procedure e scrivere anche nel caso di scambio di calore con lavoro nullo, una relazione analoga a:

$$Q = \Delta U \quad (6.3)$$

assumendo positivo il calore ceduto al sistema dall'esterno.

6.4.2 Equivalenza calore e lavoro

Pertanto

$$Q = -W \quad (6.4)$$

dove rappresenta il calore scambiato, senza lavoro esterno per far variare di ΔT la temperatura della massa d'acqua e W il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura.

L'ultima equazione è detta *equivalenza tra calore e lavoro*; essa indica anche come si possa eseguire una misura del calore scambiato. Il calore viene in questo modo espresso in joule $[J]$.

6.5 Primo principio della termodinamica, energia interna

6.5.1 Primo principio della termodinamica

Si abbia un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere anche scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici macroscopici. Il sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato

B , scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre invece la differenza $Q - W$ risulta indipendente dalla trasformazione.

Si può scrivere posto $\Delta U = U_B - U_A$:

$$Q - W = \Delta U, Q = \Delta U + W \quad (6.5)$$

che esprime il *primo principio della termodinamica*

6.5.2 Implicazioni del primo principio

Le implicazioni del primo principio della termodinamica possono essere sviluppate su più punti:

1. Esiste una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema o, come si dice, una funzione di stato, chiamata energia interna, le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente che lo circonda durante una trasformazione. Dati due stati A e B è fissata ΔU : in una particolare trasformazione dallo stato A a quello B può essere preponderante lo scambio di calore, mentre in un'altra trasformazione, sempre tra tali stati, quello di lavoro, però in ambedue le diverse trasformazioni lo scambio totale $Q - W$ è lo stesso.
2. Quando, durante una trasformazione, si fornisce energia a un sistema, sia tramite un lavoro meccanico che con uno scambio di calore, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere successivamente riutilizzata. Possiamo dire che la (6.5) costituisce l'espressione del bilancio energetico di una trasformazione termodinamica; si tratta di un bilancio più completo di quello che è possibile fare in meccanica, in quanto si tiene conto anche degli scambi di calore.
3. Il termine energia interna indica che non si tratta dell'energia cinetica o potenziale bensì di energia legata a proprietà interne del sistema, come moto molecolare o forze intermolecolari, che non dipendono dallo stato complessivo di moto, ma piuttosto dalla temperatura del sistema, dalla pressione a cui è sottoposto o dal volume che occupa. È importante osservare che l'espressione esplicita dell'energia interna in funzione delle coordinate termodinamiche che individuano lo stato di un sistema dipende dal sistema stesso.
4. Il primo principio mette in evidenza l'esistenza di un meccanismo di scambio di energia, che non è esprimibile come lavoro meccanico macroscopico: a questo diamo il nome di calore. Esso è ancora riconducibile a fenomeni meccanici, ma a livello microscopico. Bisogna prestare attenzione al fatto che il calore e il lavoro sono forme di scambio di energia e quindi si deve sempre parlare di calore o lavoro scambiati tra sistemi e mai di calore o lavoro posseduti da un sistema. Ciò che un sistema possiede è una certa quantità di energia che può variare in una trasformazione, appunto a seguito di scambi di calore e lavoro.
5. Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, ovvero una trasformazione ciclica o chiusa, si ha per definizione

$$\Delta U = 0 \implies Q = W \quad (6.6)$$

Il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato. Se nella trasformazione ciclica il sistema complessivamente assorbe calore, $Q > 0$, esso fornisce lavoro, $W > 0$, costituisce una macchina termica.

6. Per eseguire calcoli specifici è assai utile considerare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili di stato cambiano di quantità infinitesime. Il primo principio ha la forma:

$$\delta Q = dU + \delta W$$

Integrando per una trasformazione finita si ha:

$$\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

indipendente dalla trasformazione, mentre invece, come sappiamo:

$$Q_{AB} = \int_A^B \delta Q$$

la variazione infinitesima di energia interna è un differenziale esatto, mentre δQ e δW , cioè le quantità infinitesime di calore e lavoro scambiati, non sono differenziali esatti perché sono grandezze che dipendono dal percorso (essendo funzioni di percorso).

7. L'unità di misura di energia interna, calore e lavoro è la stessa, il Joule.

6.5.3 Convenzione segni lavoro e calore

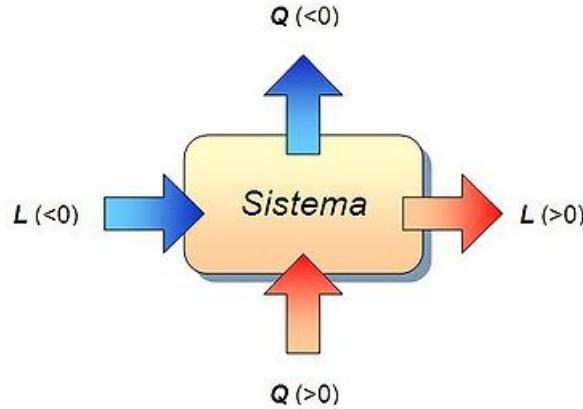
Naturalmente quello che importa in una trasformazione è capire qual è il flusso energetico, cioè se il calore è assorbito o ceduto dal sistema, se il lavoro è prodotto o subito, in modo da poter correttamente pervenire al bilancio energetico. I segni sono solo convenzionali, però scelta una certa convenzione questa va mantenuta in tutti i ragionamenti.

Attenzione che qui si considerano *flussi di energia dal sistema*. Se il sistema assorbe calore, e diciamo che Q è positivo, questo calore è ceduto al sistema dall'ambiente e pertanto per l'ambiente è negativo e come tale dobbiamo trattarlo se ragioniamo sull'ambiente: se Q è il calore scambiato dal sistema, $-Q$ è quello scambiato dall'ambiente. Un discorso analogo va fatto per il lavoro.

Ricapitolando:

Flusso di energia	Segno
Calore che entra in un sistema dall'esterno	Positivo
Lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno	Positivo
Calore che esce da un sistema verso l'esterno	Negativo
Lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema	Negativo

Tabella 6.1: Convenzione sui segni di Q e W



6.6 Trasformazioni termodinamiche, lavoro e calore

Abbiamo definito una trasformazione come un passaggio del sistema attraverso diversi stati, ovvero come un processo in cui cambiano le coordinate termodinamiche, qualcuna o tutte, del sistema. Il primo principio della dinamica fissa il bilancio energetico di tale processo e infatti, oltre a definire una trasformazione, siamo interessati a calcolare quanto valgono ΔU , W e Q .

La quantità ΔU può essere calcolata direttamente se è nota l'espressione esplicita di U , altrimenti l'unico modo possibile è servirsi del primo principio, conoscendo quindi il calore e il lavoro scambiati. Però ΔU non deve necessariamente essere calcolata lungo la data trasformazione, bensì lungo una qualsiasi altra che abbia gli stessi stati iniziale e finale e per la quale risulti più facile determinare Q e W :

L'espressione del primo principio viene dunque usata in definitiva come equazione ad una incognita e deve essere collegata a relazioni che permettono il calcolo delle altre due quantità.

6.6.1 Trasformazioni adiabatiche

Si chiama trasformazione adiabatica una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, cioè dove il sistema non scambia calore con l'esterno, ossia è isolato termicamente dall'esterno. Sistema adiabatico è un sistema che compie solo trasformazioni adiabatiche e per il quale quindi il primo principio si scrive $W = -\Delta U$. Gli scambi energetici con l'ambiente possono avvenire solo sotto forma di lavoro meccanico.

Sperimentalmente questa situazione si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche. Infatti, richiamando quello visto precedentemente:

1. una trasformazione che porta all'equilibrio termico avviene con scambio di calore;
2. una parete diatermica permette il passaggio di calore da un sistema all'altro: è quindi una parete conduttrice di calore;

3. una parete adiabatica non permette il passaggio calore: è quindi isolante rispetto allo scambio di calore;

Nella pratica l'adiabaticità perfetta non esiste; tutte le sostanze con cui si realizzano pareti adiabatiche permettono un certo scambio di calore. Si ammette che possa essere adiabatica una trasformazione che avviene rapidamente, così che non ci sia tempo per scambi di calore apprezzabili.

6.6.2 Trasformazioni reversibili e irreversibili

Per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste siano in pratica definite in ogni istante. Ciò si può realizzare distaccandosi molto poco da uno stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Ne consegue che la trasformazione deve svolgersi lentamente.

La lentezza della trasformazione come condizione necessaria non è certamente sufficiente. Oltre all'esame delle condizioni di equilibrio o non equilibrio si deve verificare durante la trasformazione l'eventuale presenza di *forze dissipative*, come attriti che si oppongono allo spostamento di parti meccaniche durante lo scambio di lavoro, attriti viscosi, ecc.

In alternativa possiamo classificare le trasformazioni secondo il seguente schema:

1. una trasformazione è detta *reversibile* se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa;
2. una trasformazione è detta *irreversibile* qualora non si svolga secondo le modalità precedenti. Ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni.

Le trasformazioni reversibili sono casi limite, utilissime concettualmente per i calcoli, ma difficilmente realizzabili.

Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualunque stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già traversati. In tal caso cambia il segno degli scambi di energia e della variazione di energia interna.

6.7 Calorimetria

Il primo principio della termodinamica introduce e definisce la grandezza fisica calore, mettendo in evidenza che, in generale, lo scambio di calore comporta per un sistema

una variazione di energia interna e uno scambio di lavoro secondo, offrendo anche un modo esplicito per effettuare il calcolo.

Esistono però processi particolari, e molto comuni, in cui è possibile ricavare un'espressione analitica del calore scambiato direttamente in funzione della variazione delle coordinate termodinamiche nella trasformazione.

Un esempio possono essere due corpi a diversa temperatura che vengono messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico. Nel processo viene raggiunto la temperatura di equilibrio T_e .

Nel processo non viene scambiato lavoro né con l'ambiente né tra i due corpi, se ammettiamo che le variazioni di volume dei due corpi siano trascurabili; inoltre i due corpi non scambiano calore con l'ambiente. Pertanto Q e W sono nulli e l'energia interna totale del sistema, costituito dai due corpi, resta costante.

Le rispettive energie interne dei due corpi ΔU_1 e ΔU_2 però cambiano. Dovendo essere $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ abbiamo $\Delta U_1 = -\Delta U_2$ le variazioni di energia interna dei due corpi sono eguali in modulo ed opposte. Inoltre applicando il primo principio della termodinamica si ha che $\Delta U_1 = Q_1$ e $\Delta U_2 = Q_2$: il calore scambiato dal primo corpo è uguale ed opposto a quello scambiato dal secondo $Q_1 = Q_2$.

D'altra parte gli esperimenti di Joule fanno ritenere che l'energia interna cresca con la temperatura, per cui $\Delta U_1 < 0$ e $\Delta U_2 > 0$: in conclusione possiamo affermare che il calore ceduto dal primo corpo, il corpo più caldo, è eguale in modulo a quello assorbito dal secondo corpo, più freddo.

Per effettuare la misura del calore scambiato viene effettuata la seguente metodologia:

1. si cede Q_1 ad una massa d'acqua, ponendo il corpo a contatto termico con l'acqua per il tempo necessario alla variazione $T_e - T_1$, di temperatura del corpo; in corrispondenza anche l'acqua subisce una variazione di temperatura ΔT , con ΔT non necessariamente eguale a $T_e - T_1$ (in modulo);
2. si misura, per esempio con uno dei dispositivi di Joule, il lavoro W_2 necessario per produrre la stessa variazione ΔT nella stessa massa d'acqua;
3. si pone $|Q_1| = W_2$

Nel realizzare queste misure si trova che esiste proporzionalità tra il calore Q , la massa del corpo stesso e la variazione della sua temperatura:

$$Q = mc(T_{fin} - T_{in}) \quad (6.7)$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, in generale funzione a sua volta della temperatura, chiamata *calore specifico*. Osserviamo che il calore è una grandezza estensiva, mentre il calore specifico è una grandezza intensiva.

Il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T , per farne variare la temperatura di $1K$ (ovvero di $1^\circ C$)

Il prodotto $C = mc$, detto *capacità termica del corpo*, rappresenta a sua volta il calore necessario per far variare di $1K$ la temperatura del corpo.

Posso riscrivere (6.7) in termini infinitesimi:

$$dQ = mcdT \quad (6.8)$$

essendo dQ il calore infinitesimo scambiato dalla massa m alla temperatura T e dT la corrispondente variazione infinitesima di temperatura.

Da quest'ultima equazione segue per il calore specifico:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (6.9)$$

Ritornando ai due corpi in contatto termico, l'eguaglianza $Q_1 = -Q_2$ diviene in base a

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

da cui, noti i calori specifici e misurate le masse e le temperature iniziali, si può calcolare la temperatura finale di equilibrio T_e .

Il risultato trovato si può generalizzare: quando un corpo solido o liquido presenta una variazione di temperatura da T_1 a T_2 a seguito del contatto termico con un altro corpo, ammettiamo che abbia scambiato il calore

$$Q = mc (T_2 - T_1) \quad (6.10)$$

essendo m la sua massa e c il suo calore specifico. Il calore risulta assorbito se $T_2 > T_1$, ceduto se $T_2 < T_1$. Qualora nell'intervallo di temperatura da T_1 a T_2 si possa assumere che il calore specifico sia praticamente costante bisogna invece scrivere

$$Q = \int dQ = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT \quad (6.11)$$

6.8 Processi isotermi, cambi di fase

6.8.1 Processi isotermi

Una trasformazione isoterma è una trasformazione termodinamica a temperatura costante, ossia una variazione dello stato di un sistema fisico durante la quale la temperatura del sistema non varia nel tempo. Una classe importante di processi isotermi è costituita dai cambiamenti di fase, ovvero dai passaggi di una sostanza da una fase all'altra, per esempio dalla fase solida alla fase liquida o dalla fase liquida a quella di vapore.

6.8.2 Cambi di fase

- solido \Rightarrow liquido : fusione

- liquido \Rightarrow solido : solidificazione
- liquido \Rightarrow vapore : evaporazione
- vapore \Rightarrow liquido : condensazione
- solido \Leftrightarrow vapore : sublimazione

Alcuni cambiamenti di fase, come fusione e solidificazione, che avvengono a una determinata temperatura, costante durante il processo, costituiscono un punto di riferimento (punto fisso) per le scale termometriche, purché siano ben precise le condizioni esterne, soprattutto la pressione.

L'evaporazione di un liquido ha luogo invece a qualsiasi temperatura; essa assume un carattere particolare solo quando la pressione massima del vapore egualia la pressione esterna: si ha in tal caso l'ebollizione che avviene a una ben determinata temperatura, dipendente dalla pressione esterna.

Nella definizione della scala Celsius si era utilizzato il punto fisso fornito dal ghiaccio fondente a pressione atmosferica, posto eguale a $0^\circ C$, e quello corrispondente all'ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica, posto eguale a $100^\circ C$

I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che per unità di massa, si tratta di quantità definite, dette calori latenti λ . Pertanto il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa m di una sostanza pura è dato da

$$Q = m\lambda \quad (6.12)$$

Il calore Q deve essere ceduto alla sostanza per fare avvenire, ad esempio, la fusione o sottratto alla sostanza per produrre la solidificazione.

Nel caso dell'evaporazione il calore latente non ha un valore fisso, ma è una funzione decrescente della temperatura e si annulla alla temperatura critica.

Una caratteristica molto importante dei cambiamenti di fase è di essere, in opportune condizioni, trasformazioni praticamente reversibili.

6.9 Trasmissione del calore

Il primo principio della termodinamica riguarda gli scambi energetici che avvengono durante una trasformazione termodinamica. Lo scambio di lavoro concerne il lavoro meccanico macroscopico legato allo spostamento di qualche oggetto, ad esempio la parete mobile di un recipiente pieno di gas. Lo scambio di calore presuppone invece un meccanismo microscopico, cui accenneremo in seguito, e avviene quando due corpi sono a contatto direttamente o attraverso altri corpi. Lo scambio e anche il trasporto di calore entro un sistema possono avvenire tramite tre meccanismi distinti, che nel loro complesso sono indicati come trasmissione calore: conduzione, convezione e irraggiamento termici.

I tre meccanismi operano sempre in presenza di una differenza di temperatura tra sistema e ambiente o all'interno dello stesso sistema.

6.9.1 Conduzione di calore

Consideriamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le superfici isoterme cioè il luogo dei punti in cui la funzione $T(x, y, z)$ assume un valore costante.

Se dS è una superficie isoterma, dT/dn il modulo del gradiente temperatura, ortogonale a dS e diretto nel verso delle temperature, il calore che passa attraverso dS nel tempo dt è dato da

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt \quad (6.13)$$

la grandezza k , detta *conducibilità* o *conduttività termica*, è tipica del materiale ed è in generale funzione della temperatura. Il segno negativo indica che il flusso di calore avviene nel senso in cui la temperatura diminuisce, cioè nel verso opposto al gradiente di temperatura, dalla regione a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.

La conducibilità termica varia da sostanza a sostanza anche di diversi ordini di grandezza. La conducibilità termica ha una diversa dipendenza dalla temperatura per le varie sostanze. Nei gas semplici k cresce debolmente con la temperatura, in proporzione alla radice quadrata della stessa. Anche nei liquidi e nei dielettrici non vi è una notevole variazione con la temperatura. Nei metalli puri la conducibilità presenta sempre un massimo a bassa temperatura, che è due o tre ordini di grandezza maggiore del valore a temperatura ambiente.

Attraverso una superficie finita S nel tempo t passa dall'ambiente posto a sinistra della parete a quello a destra il calore

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{s} St$$

6.9.2 Convezione di calore

La conduzione nei fluidi è difficile da osservare perché in essi si manifesta un altro fenomeno di trasmissione del calore, la convezione.

Se si riscalda una massa fluida, quella parte più vicina alla sorgente di calore assume una temperatura maggiore e diminuisce di densità, dilatandosi. Viene alterato l'equilibrio statico nel fluido, poiché gli elementi di fluido più caldi risentono, dalle parti di fluido circostante più fredde, una spinta di Archimede maggiore del loro peso. Si originano correnti ascensionali (dette di convezione), che permettono ad elementi con temperatura minore di avvicinarsi a loro volta alla sorgente di calore. La trasmissione di calore avviene con spostamenti di materia, tramite correnti convettive.

La convezione è responsabile del movimento delle masse d'aria nell'atmosfera o delle correnti marine, con effetti sulle condizioni climatiche e meteorologiche.

6.9.3 Irraggiamento

Un corpo a temperatura T emette energia sotto forma di onde elettromagnetiche, che si propagano nello spazio circostante, anche se vuoto. Il potere emissivo del corpo P , che ha il significato di energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma e T^4 \quad (6.14)$$

dove σ è una costante universale, pari a $5.67 \cdot 10^{-8} \frac{J}{m^2 s K^4}$, ed e una grandezza, detta potere emissivo specifico, che può variare tra 0 e 1, dipendendo dalle proprietà della superficie. Se $e = 1$, la superficie è detta superficie nera e presenta, a parità di temperatura, il massimo potere emissivo.

Tramite questi fenomeni la temperatura di un corpo aumenta o diminuisce a seconda del bilancio tra energia irradiata ed assorbita; se il bilancio è in parità la temperatura resta costante, il corpo è in equilibrio con l'ambiente circostante. Naturalmente l'equilibrio può essere mantenuto anche fornendo o sottraendo energia con altri mezzi, per compensare l'irraggiamento. È attraverso il meccanismo dell'irraggiamento che il sole trasmette energia alla superficie terrestre, nella misura di $1.53 \cdot 10^3 \frac{J}{m^2 s}$.

6.9.4 Parete adiabatica, Vaso di Dewar

Vediamo in base ai vari effetti studiati come è possibile realizzare una parete adiabatica. Se lo scopo è quello di limitare lo scambio di calore in presenza di piccole differenze di temperatura è sufficiente una opportuna combinazione di materiali isolanti, cioè materiali a bassa conducibilità termica; bisogna quindi impedire conduzione e convezione.

Si utilizza allo scopo un contenitore detto vaso Dewar dal nome del suo inventore, costituito da due pareti isolanti, internamente argenate, tra le quali è fatto il vuoto: in questo modo si minimizza la trasmissione di calore per conduzione e convezione nell'intercapedine. Resta la possibilità di trasmissione di energia per irraggiamento, anche se piccola a basse temperature: per questa ragione l'interno dell'intercapedine è argentato, cioè per ridurre il *potere emissivo specifico* (che è nullo per un parete perfettamente riflettente).

6.9.5 Passaggio di calore dal solido a liquido

Consideriamo un solido alla temperatura T , con una superficie pari a S , mentre il fluido si trova, nei punti non prossimi al solido, alla temperatura $T_0 < T$. Il fenomeno è complesso perché avvengono sia convezione che conduzione e irraggiamento. Tuttavia, in prima approssimazione, se $\Delta T = T - T_0$ non è molto grande, il fenomeno può essere descritto con una legge molto semplice, scoperta da Newton: il modulo del calore scambiato nel tempo t , ceduto dal solido e assorbito dal fluido, è dato da

$$Q = h(T - T_0)St \quad (6.15)$$

La costante h è detta conducibilità termica esterna; per un filo caldo (perché percorso da corrente elettrica) immerso in aria $h = 10 \frac{J}{m^2 s K}$.

Capitolo 7

Gas ideali e reali

7.1 Leggi di gas, equazioni di stato dei gas ideali

Un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

1. non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio quello del recipiente che lo contiene;
2. è comprimibile facilmente, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione.

Considerata una certa quantità di gas, le variabili termodinamiche più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono la pressione p , il volume V e la temperatura T .

Consideriamo il gas racchiuso dentro un contenitore di volume V , con un valore della pressione eguale in tutti i punti, se V non è molto grande. Quando il volume del contenitore cambia, come può avvenire se una parte dello stesso è mobile, si realizza uno scambio di lavoro con l'ambiente esterno; inoltre, a seconda del tipo di pareti del contenitore, diatermiche o adiabatiche, è possibile o viene impedito lo scambio di calore con l'ambiente. Il gas può dunque compiere trasformazioni in cui scambia soltanto lavoro o calore con l'ambiente, oppure entrambi; in ogni caso il bilancio energetico è regolato dal primo principio della termodinamica.

7.1.1 Legge isoterma di Boyle

Si abbia un gas in equilibrio termodinamico ad una certa pressione entro un dato volume e a temperatura T : se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati di equilibrio isotermi vale la relazione:

$$pV = \text{costante} \quad (7.1)$$

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Una trasformazione isoterma tra due stati di equilibrio di un gas si può realizzare, ad esempio, se il contenitore, a pareti diatermiche, è mantenuto in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T e la parete mobile si muove a seguito di una differenza infinitesima di pressione tra gas e ambiente esterno. Si hanno condizioni di equilibrio meccanico e termico e possiamo assumere che durante la trasformazione la temperatura sia costante e la pressione del gas sempre eguale a quella esterna.

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano, con il volume sull'asse delle ascisse e la pressione sull'asse delle ordinate, il luogo dei punti che rappresentano gli stati di equilibrio di un gas a una data temperatura è costituito da un ramo di iperbole. Per ogni temperatura si ha una diversa iperbole e le curve così ottenute si chiamano "le isoterme del gas ideale".

7.1.2 Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di trasformazione isobara; si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (7.2)$$

la temperatura è espressa in gradi Celsius, V_0 è il volume occupato dal gas per $t = 0$ e α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta *coefficiente di dilatazione termica*.

Per provare la validità della legge isobara di Volta-Gay Lussac si può mettere il gas in equilibrio termico con diverse sorgenti di calore, mantenendo sempre l'equilibrio meccanico con l'ambiente (pressione interna eguale alla pressione esterna costante) e ogni volta misurare il volume del contenitore, che ha una parete mobile. La trasformazione isobara, nel piano (p, V) già considerato, è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse dei volumi.

7.1.3 Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta t) \quad (7.3)$$

Anche ora la temperatura è espressa in gradi Celsius; p_0 è la pressione del gas per $t = 0$ e β una costante, praticamente indipendente dal tipo di gas.

Una trasformazione a volume costante si dice isocora; nel piano (p, V) essa è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse delle pressioni.

La verifica della legge isocora di Volta-Gay Lussac si può eseguire utilizzando il solito contenitore, mantenendo bloccata la parete mobile e misurando la pressione in diversi stati di equilibrio, con il gas in contatto termico con diverse sorgenti di calore.

Ricordiamo quanto detto all'inizio e cioè che il comportamento dei diversi gas è in accordo con le leggi precedenti quanto più ci si avvicina alle condizioni di gas ideale

(bassa pressione e alta temperatura). Così facendo si osserva anche che le costanti α e β assumono lo stesso valore per tutti i gas:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} {}^{\circ}\text{C}^{-1}$$

Posso quindi riscrivere le leggi

$$V = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0\alpha T \quad (7.4)$$

$$p = p_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0\alpha T \quad (7.5)$$

dove con $T = \frac{1}{\alpha} + t = 272.15 + t$ è indicata la temperatura misurata in Kelvin.

7.1.4 Legge di Avogadro

La legge di Avogadro stabilisce che *volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole*. Essa si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale e quindi obbediscano alle leggi precedentemente enunciate.

Se si considera una massa M eguale ad A grammi di gas, quantità che si chiama mole, il numero di Avogadro vale:

$$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mole}$$

Dalla legge di Avogadro discende la definizione della settima unità fondamentale, quella della quantità di materia. Si chiama mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012kg dell'isotopo ${}^{12}\text{C}$ del carbonio.

Come conseguenza della legge di Avogadro *una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume*.

Si trova che se la pressione è quella atmosferica ($p_0 = 101325\text{Pa}$) e la temperatura è $T_0 = 273.15\text{K} = 0^{\circ}\text{C}$, tale volume vale V_m viene indicato col nome di *volume molare*. Pertanto n moli occupano un volume pari a nV_m e in particolare una chilomole occupa 22.414m^3 , nelle dette condizioni di pressione e temperatura.

7.1.5 Equazione di stato del gas ideale

Se consideriamo n moli di un gas alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura $T_0 = 273.15\text{K}$, esse occupano, come abbiamo appena detto, il volume $V_0 = nV$.

Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore T

$$p_T = p_0\alpha T$$

Moltiplicando per V_0 si ha

$$p_TV_0 = p_0V_0\alpha T = p_0V_T$$

V_0 e p_T sono le coordinate termodinamiche in un particolare stato di equilibrio alla temperatura T , come lo sono p_0 e V_T per un altro stato, sempre alla temperatura T .

Otteniamo dunque:

$$pV = p_0 V_0 \alpha T = n p_0 V_m \alpha T$$

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante universale, che ha lo stesso valore per tutti i gas, e quindi:

Legge di stato del gas ideale

$$pV = nRT \quad (7.6)$$

con

$$R = p_0 V_m \alpha = 1.01325 \cdot 10^5 \cdot 0.022414 \cdot \frac{1}{273.15} = 8.314 \frac{J}{moleK}$$

Definiamo, sulla base delle tre leggi elementari e della legge di Avogadro, come *gas ideale* un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono alla (7.6), detta *equazione di stato di un gas ideale*.

L'equazione di stato contiene le leggi precedenti: infatti basta mantenere costante T , p o V in (7.6) e si ottengono le tre leggi isoterma, isobara o isocora. Anche la legge di Avogadro è contenuta in (7.6), se R è una costante universale.

Ricordando che $n = \frac{N}{N_A}$, con N numero di molecole del gas, abbiamo

$$pV = \frac{N}{N_A} RT = N k_b T \quad (7.7)$$

la costante universale

$$k_b = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314}{6.0221 \cdot 10^{23}} = 1.3807 \cdot 10^{-23} [J/K] \quad (7.8)$$

è detta costante di Boltzmann.

L'equazione di stato dei gas ideali esprime un comportamento limite, al quale si avvicinano i gas reali quanto più lontana è la loro temperatura da $T = 0$ e quanto più bassa è la loro pressione ovvero la loro densità, cioè quanto più sono caldi e rarefatti. In queste condizioni le differenze di comportamento dei diversi gas praticamente scompaiono e tutti seguono approssimativamente (7.6).

7.2 Trasformazioni di un gas, lavoro

Consideriamo due stati di equilibrio A e B di un sistema formato da n moli di gas ideale. Noti i valori della pressione e del volume, dall'equazione di stato (7.6) si ricavano i valori della temperatura:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$$

Una trasformazione che porti il gas dallo stato A allo stato B può svolgersi attraverso stati di equilibrio termodinamico ed è rappresentabile nel piano (p, V) da una curva continua. Se invece la trasformazione ha luogo attraverso stati di non equilibrio si usa una rappresentazione simbolica a tratti per indicare che si ignorano i valori delle coordinate durante il processo.

La trasformazione attraverso stati di non equilibrio può realizzarsi in conseguenza di un processo di espansione o compressione rapida, per cui non sussiste né equilibrio meccanico né termico, o per effetto di una espansione o compressione lenta con una differenza di pressione finita così che, pur potendoci essere equilibrio termico, non c'è equilibrio meccanico, oppure a seguito di contatto termico con differenza finita di temperatura.

Quando un gas si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale $dW = pdV$. In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si avrebbe

$$W = \int_A^B p(V)dV \quad (7.9)$$

però bisogna fare attenzione perché questa espressione esplicita del lavoro è valida sostanzialmente in due sole situazioni:

1. se la trasformazione è reversibile e pertanto si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata in ogni stato intermedio $p = p_{\text{gas}} = p_{\text{amb}}$;
2. se è nota la pressione esterna che, per esempio, è costante, caso tipico di quando il processo avviene sotto la pressione atmosferica; in questa situazione, anche se la trasformazione non è reversibile, il lavoro è calcolabile ed è dato da

$$W = p_{\text{amb}}(V_B - V_A)$$

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota non si può applicare la (7.9).

Ad ogni modo, se la trasformazione è isocora ($V = \text{costante}, \Delta V = 0$), il lavoro è sempre nullo; se il gas si espande il volume finale V_B è maggiore del volume iniziale e il gas compie un lavoro sull'ambiente che secondo la convenzione adottata è positivo; se il gas viene compresso, $V_B < V_A$ e il gas subisce un lavoro (negativo), compiuto dall'ambiente.

Il lavoro, se si può utilizzare (7.9), ha un semplice significato geometrico nel piano (p, V) . Nel caso di una trasformazione che passa attraverso stati di equilibrio ed è quindi rappresentabile con una curva continua, la curva $p = p(V)$ nel piano (p, V) , il lavoro, in accordo con il significato geometrico dell'operazione di integrazione, è pari all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi.

7.3 Energia interna del gas ideale

La dipendenza dell'energia interna di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata analizzando il risultato dell'*esperienza sull'espansione libera, eseguita da Joule*.

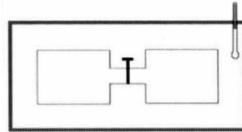


Figura 7.1

In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti eguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte sinistra, mentre nella parte destra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un calorimetro e la temperatura di equilibrio è T . Si apre il rubinetto e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione. L'espansione è chiamata libera perché non ci sono forze esterne che agiscono sul gas. Sperimentalmente si osserva che, comunque si operi, aprendo lentamente o rapidamente il rubinetto, con gas inizialmente ad alta o bassa pressione, la temperatura del liquido calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T , temperatura iniziale di equilibrio.

Il gas quindi non scambia calore con il calorimetro, $Q = 0$. Esso inoltre non scambia lavoro con l'esterno (le pareti del contenitore sono rigide) e pertanto $W = 0$. Dal primo principio segue $\Delta V = Q - W = 0$: *nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia*. Possiamo allora giungere alla seguente conclusione: poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, mentre variano pressione e volume (in accordo con 7.1 perché la trasformazione è isoterma, cioè $p_{in}V_{in} = p_{fin}V_{fin}$), l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.

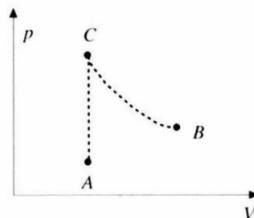


Figura 7.2

Per determinare l'espressione esplicita della funzione $U(T)$ consideriamo due generici stati di equilibrio A e B : $\Delta U = U_B - U_A$ deve essere la stessa, qualsiasi trasformazione si scelga, essendo U una funzione di stato. Se sceglieremo, in particolare, una trasformazione AC isocora e una CB isoterma, si ha:

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

in quanto $U_B = U_C$ essendo gli stati B e C alla stessa temperatura ed U funzione sole della temperatura.

Applichiamo ora il primo principio alla trasformazione isocora: dato che $W = 0$, $\Delta U = Q$, dove Q è il calore scambiato in condizioni isocore. Pertanto

$$\Delta U = U_B - U_A = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \Delta T \quad (7.10)$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT \quad (7.11)$$

a seconda che il calore specifico a volume costante sia indipendente dalla temperatura oppure no. Per trasformazioni infinitesime

$$dU = nc_v dT \quad (7.12)$$

da cui si ricava

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (7.13)$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura, anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, potendo essere, in particolare, costante. Si può quindi scrivere in maniera esplicita il primo principio, per quel che riguarda le trasformazioni ideali:

$$dQ = nc_v dT + dW \implies Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + W \quad (7.14)$$

$$Q = nc_v \Delta T + dW \text{ se } c_v = \text{cost} \quad (7.15)$$

Se la trasformazione è reversibile, le equazioni precedenti diventano:

$$dQ = nc_v dT + dpV \implies Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + \int_{V_A}^{V_B} pdV \quad (7.16)$$

$$Q = nc_v \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} pdV \text{ se } c_v = \text{cost} \quad (7.17)$$

7.3.1 Relazione di Mayer

In una trasformazione isobara infinitesima $dQ = nc_p dT$ e $dW = pdV$

$$nc_p dT = nc_v dT + pdV$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali $pV = nRT$ si ha

$$pdV + Vdp = nRdT$$

in una trasformazione isobara $dp = 0$ e quindi $pdV = nRdT$. Pertanto

$$nc_p dT = nc_v dT + nRdT$$

semplificando si ottiene la relazione di Mayer

$$c_p - c_v = R \quad (7.18)$$

Di conseguenza in un gas ideale anche c_p è funzione soltanto della temperatura potendo in particolare essere costante.

Il rapporto tra calori specifici

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (7.19)$$

risulta in un gas ideale sempre maggiore di 1 ed è funzione soltanto della temperatura o, in particolare, costante.

Sperimentalmente si trovano per i calori specifici dei gas ideali questi risultati:

1. i gas ideali monoatomici hanno c_V costante e pari a $\frac{3}{2}R$
2. alcuni gas ideali biatomici hanno c_V costante e pari a $\frac{5}{2}R$

7.4 Studio di alcune trasformazioni

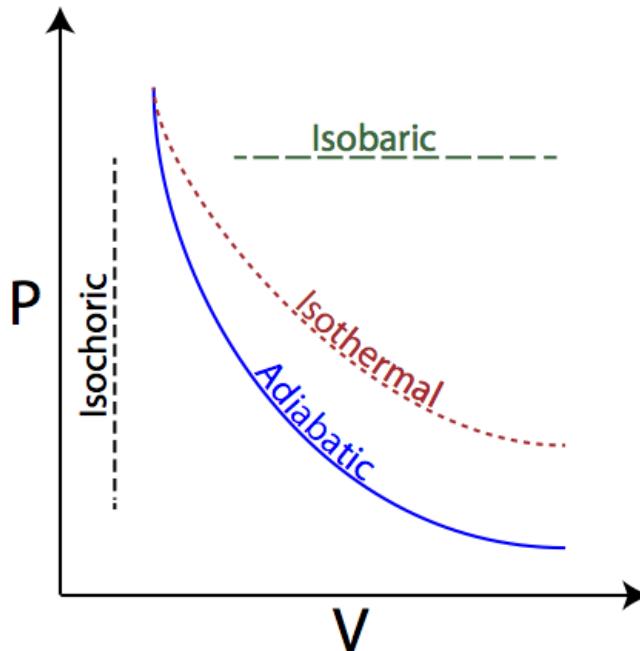


Figura 7.3

7.4.1 Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso dentro un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro, per esempio in conseguenza del fatto che una parete è mobile. Dal primo principio si ha

$$W_{AB} = -\Delta U = -nc_v(T_B - T_A)$$

se la trasformazione avviene tra i due stati di equilibrio *A* iniziale e *B* finale.

Se si ha un'espansione adiabatica il lavoro W_{AB} è positivo e quindi ΔU è negativa e T_B è minore di T_A : il gas si raffredda; se invece si ha una compressione adiabatica, $W_{AB} < 0$, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$, il gas si riscalda. Queste variazioni di temperatura sono comunemente sperimentate nelle variazioni rapide di volume di un gas.

Se invece la trasformazione è *adiabatica reversibile*, l'espressione infinitesima del primo principio diviene

$$dU + dW = nc_v dT + pdV = 0$$

in quanto possiamo esprimere il lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche, appunto perché la trasformazione è reversibile.

Per questa stessa ragione si può utilizzare l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere la pressione come $p = \frac{nRT}{V}$ e si ottiene

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

Se pariamo le variabili e utilizziamo la relazione di Mayer

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \implies (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Questa equazione differenziale rappresenta la condizione a cui obbediscono le coordinate degli stati di un gas ideale collegati da una trasformazione adiabatica reversibile.

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \implies \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

L'egualanza tra i logaritmi comporta l'egualanza tra gli argomenti, per cui

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

espressione che dà la relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformazione adiabatica reversibile.

Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T e in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}, \quad pV^{\gamma} = \text{costante}, \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (7.20)$$

Le (7.14) sono un esempio di quando si possono esprimere i termini del primo principio della dinamica in funzione delle coordinate termodinamiche, ottenendo una relazione tra queste che rappresenta l'equazione della trasformazione. Esse si chiamano infatti le *equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale*.

In particolare utilizziamo l'equazione $pV^{\gamma} = \text{costante}$ per rappresentare a trasformazione nel piano di Clapeyron. Rispetto alla curva isoterma $pV = \text{costante}$, passante per esempio per il punto rappresentativo dello stato A , la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché γ è sempre maggiore di 1: si conferma che $T_B < T_A$.

Una trasformazione adiabatica reversibile costituisce un caso limite, in quanto per essere reversibile dovrebbe svolgersi molto lentamente, ma ciò introduce difficoltà per mantenere l'adiabaticità. Le trasformazioni reali sono irreversibili, in particolare possiamo considerare adiabatica irreversibile una trasformazione che comporta una variazione rapida di volume, così che non ci sia tempo per scambi di calore.

L'espansione libera di Joule è un altro caso di *trasformazione adiabatica irreversibile*.

7.4.2 Trasformazione isoterma

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T . Durante la

trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore T e abbiamo

$$\Delta U = 0, \quad Q = W, \quad p_A V_A = p_B V_B$$

Se la trasformazione è un'espansione isoterma $W_{AB} > 0$ e quindi $Q_{AB} > 0$: il gas compie lavoro e assorbe calore. Se invece la trasformazione è una compressione isoterma $W_{AB} < 0$ e $Q_{AB} < 0$: il gas subisce lavoro e cede calore.

Qualora la trasformazione sia isoterma reversibile dalla legge dei gas ideali e dal lavoro in una trasformazione finita si ha

$$W_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (7.21)$$

e questa è anche l'espressione esplicita del calore scambiato.

Si noti che è sempre $Q \neq 0$: una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore, a meno che non sia $T = 0$, condizione che non è mai raggiungibile.

Una particolare trasformazione isoterma irreversibile è l'espansione libera di Joule. Tale trasformazione è insieme adiabatica e isoterma: ciò è possibile solo perché la trasformazione è irreversibile; per una reversibile i due fatti sono ben distinti ed è impossibile che una trasformazione isoterma sia anche adiabatica.

7.4.3 Trasformazioni isocore

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso: $V = \text{costante}$ e $W = 0$; il gas può scambiare solo calore e questo è eguale, per il primo principio, alla variazione dell'energia interna:

$$Q = \Delta U = mc_v(T_B - T_A) \quad c_v = \text{costante}$$

Essendo il volume costante dell'equazione di stato:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \implies \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono.

7.4.4 Trasformazioni isobare

Il gas è contenuto ora in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante p . Dall'equazione di stato o dalle leggi di Gay-Lussac abbiamo che in una trasformazione isobara:

$$\frac{v_A}{T_A} = \frac{v_B}{T_B} \implies \frac{v_A}{v_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro, dati da

$$Q = nc_p(T_B - T_A)$$

$$W = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$$

e deve essere sempre $Q - W = \Delta U = nc_v(T_B - T_A)$.

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

Una trasformazione isobara si compie mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B ; non essendoci equilibrio termico la trasformazione è irreversibile. Invece, per avere una trasformazione reversibile bisogna disporre di una serie infinita di sorgenti, come descritto per le trasformazioni isocore.

7.4.5 Trasformazioni generiche

Per una trasformazione diversa da quelle precedenti possiamo utilizzare il primo principio nella forma:

$$dQ = dU + dW = nc_vdT + dW \quad (7.22)$$

È necessario poi esaminare attentamente le condizioni termodinamiche che regolano la trasformazione, per stabilire se essa sia reversibile o irreversibile.

Se è reversibile possiamo utilizzare l'equazione di stato $pV = nRT$ per il lavoro l'espressione $dW = pdV$. Si tenga presente che per il lavoro conviene verificare se può essere calcolato direttamente per via geometrica, cioè tramite l'area sotto la curva che rappresenta la trasformazione nel piano (p, V).

7.5 Trasformazioni cicliche

Una trasformazione ciclica o ciclo è una trasformazione in cui lo stato finale coincide con lo stato iniziale. Il primo principio ci dice che il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato.

Se durante il ciclo viene *prodotto lavoro* ($W > 0$), *assorbendo calore* da un opportuno numero di sorgenti, tale *ciclo* è detto *termico*. Il dispositivo che opera è indicato come *macchina termica*. Se invece il ciclo è tale che venga *richiesto lavoro esterno* ($W < 0$), *estraendo calore* da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di *ciclo frigorifero*. Il dispositivo corrispondente è detto *macchina frigorifera*.

Se consideriamo le varie trasformazioni che compongono il ciclo e il calore e il lavoro complessivamente scambiati, possiamo scrivere

$$Q = Q_A + Q_C$$

dove $Q_A > 0$ rappresenta la somma dei calori assorbiti e $Q_C < 0$ la somma dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S$$

in cui $W_F > 0$ è la somma dei lavori compiuti e $W_S < 0$ è la somma dei lavori subiti. I calori e i lavori sono visti dal sistema che compie il ciclo e a cui sono riferiti gli aggettivi assorbito, ceduto, compito. Per l'ambiente è esattamente il contrario.

7.5.1 Ciclo termico

Per un ciclo termico si definisce *rendimento* la quantità adimensionale

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \quad (7.23)$$

Il rendimento è quindi la *percentuale di calore assorbito che viene trasformata in lavoro*. Sperimentalmente si osserva sempre che

$$0 \leq \eta < 1$$

in un ciclo termico solo una frazione minore di 1 del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

7.5.2 Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è costituito da quattro trasformazioni reversibili, dove sono indicati anche i versi degli scambi di calore:

1. trasformazione A B, espansione isoterma reversibile;
2. trasformazione B C, espansione adiabatica reversibile,
3. trasformazione CD, compressione isoterma reversibile.
4. trasformazione DA, compressione adiabatica reversibile.

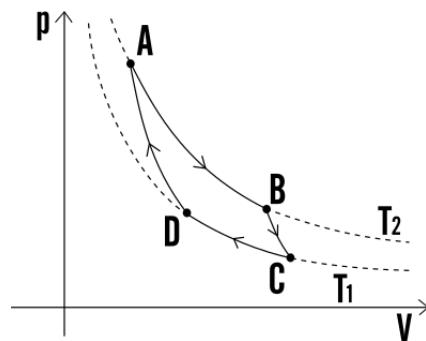


Figura 7.4: Ciclo di Carnot

Nello stato A il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_2 . L'espansione isoterma reversibile AB può essere considerata come una successione di trasformazioni infinitesime: in ciascuna a seguito di una diminuzione dp della pressione esterna (equilibrio meccanico) il gas si espande di una quantità dV raffreddandosi di dT ; si ha quindi cessione di calore dQ dalla sorgente a temperatura T_2 (equilibrio termico) al gas che ritorna alla temperatura T_2 . Come risultato, il gas passa in maniera reversibile dallo stato A , di coordinate termodinamiche p_A, V_A, T_A , allo stato B di coordinate p_B, V_B, T_B , assorbendo il calore

$$Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$$

W_{AB} è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterma.

Nella trasformazione BC il gas è isolato da qualsiasi sorgente di calore. Seguendo lo schema adottato per la trasformazione AB , durante ciascuna trasformazione infinitesima si ha una diminuzione dp della pressione esterna, un'espansione dV e un raffreddamento dT . Il gas passa quindi dallo stato B (p_B, V_B, T_B) allo stato C (p_C, V_C, T_1), con T_1 minore di T_2 e, secondo $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$:

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

Il lavoro fatto dal gas è $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_V (T_1 - T_2)$.

Nella trasformazione CD il gas è a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_1 . Il processo è analogo ad AB , però ora si aumenta la pressione esterna di dp , il gas si comprime di una quantità dV ed aumenta la sua temperatura di dT , cede dQ alla sorgente a temperatura T_1 e ritorna alla temperatura T_1 . Il calore ceduto complessivamente è

$$Q_C = nRT \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD}$$

ed è negativo, come il lavoro, poiché $V_D < V_C$.

Infine nella trasformazione DA il gas è di nuovo isolato termicamente, si aumenta la pressione esterna di dp , il volume del gas diminuisce di dV e la temperatura aumenta di dT . Il gas ritorna nello stato iniziale e vale, avendo assunto γ costante, la relazione

$$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

Il lavoro subito è $W_{DA} = -\Delta U_{DA} = nc_V (T_1 - T_2) = -W_{BC}$

Sommando tutti i contributi otteniamo

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD}$$

questa quantità coincide con l'area racchiusa dal ciclo.

Il rendimento del ciclo è:

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_B} = 1 + \frac{nRT_1 \ln (V_D/V_C)}{nRT_2 \ln (V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln (V_D/V_C)}{T_2 \ln (V_B/V_A)}$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}, \quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

ottenendo $\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ ovvero $\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)$.

Quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (7.24)$$

Si noti il fatto molto importante che non compare alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas scambia calore: *il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.*

Poiché $T_1 < T_2$ verifichiamo che $\eta < 1$; inoltre da V_B/V_A e $Q_A > |Q_C|$. Il gas complessivamente assorbe calore perché $Q_A + Q_C > 0$ e produce il lavoro $W = Q_A + Q_C$, pari alla somma algebrica di quello fatto durante l'espansione isoterna e subito durante la compressione isoterna (i lavori svolti durante le adiabatiche sono eguali ed opposti).

7.5.3 Ciclo di Otto

Il ciclo termico di Otto schematizza il funzionamento di un motore a scoppio a quattro tempi, come quello del motore automobilistico a benzina. Nel ciclo di Otto si suppone che la miscela aria-benzina sia assimilabile a un gas ideale biatomico e che il ciclo sia reversibile.

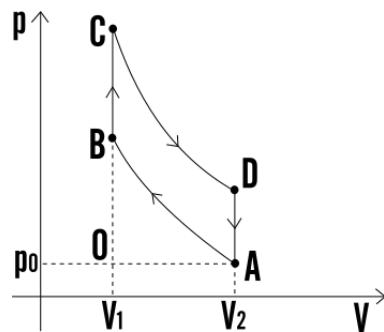


Figura 7.5: Ciclo di Otto

- Nella trasformazione OA la miscela benzina-aria viene aspirata nel cilindro, a pressione costante (*fase di aspirazione*).
- Nella trasformazione adiabatica reversibile AB la miscela nel cilindro viene compressa rapidamente dal pistone dal volume V_2 al volume V_1 (*fase di compressione*).
- La trasformazione BC schematizza l'incendio della miscela dovuto alla scintilla prodotta dalla candela con conseguente esplosione, che provoca una rapida crescita della temperatura e della pressione del gas; si assume che il riscaldamento sia isocoro con assorbimento di calore da una successione di sorgenti a temperatura crescente

$$Q_A = nc_V(T_C - T_B)$$

Questa è la fase di *accensione e combustione*.

4. Il gas caldo si espande rapidamente spingendo il pistone e ritornando al volume V_2 con una trasformazione adiabatica reversibile CD , durante la quale viene compiuto lavoro (*fase di espansione*).
5. La trasformazione DA , isocora reversibile con la cessione del calore

$$Q_C = nc_V(T_A - T_D)$$

schematizza l'apertura della valvola verso il tubo di scappamento con conseguente riduzione della pressione al valore iniziale, mentre il gas cede calore all'ambiente (*fase di decompressione*).

6. Infine nella trasformazione AO a pressione costante il gas viene espulso dal cilindro e il pistone ritorna nella posizione iniziale (*fase di scarico*). I *quattro tempi* sono le trasformazioni OA, AB, CD, AO .

Il *rendimento* del ciclo di Otto è dato da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{nc_V(T_A - T_D)}{nc_V(T_C - T_B)} = 1 + \frac{nc_V(T_D - T_A)}{nc_V(T_C - T_B)}$$

che idealmente corrisponde a circa 0.6 .

Sperimentalmente è molto più facile misurare i volumi $V_1 = V_B = V_C$ e $V_2 = V_A = V_D$ e il loro rapporto $r = V_2/V_1$ (*rapporto di compressione*). Dalle relazioni

$$T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1}, \quad T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1}$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$(T_D - T_A) V_2^{\gamma-1} = (T_C - T_B) V_1^{\gamma-1}$$

Pertanto

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{r^{0.4}}$$

avendo utilizzato $\gamma = 1.4$, valore valido per un gas biatomico.

Il rendimento aumenta all'aumentare del rapporto di compressione, che però non deve assumere valori troppo grandi se si vuole evitare il fenomeno dell'auto-combustione, cioè l'esplosione anticipata dovuta al riscaldamento della miscela durante la fase di compressione.

Il rendimento del ciclo di Otto calcolato con la formula appena ricavata va inteso come valore massimo teorico: nei motori reali si ottengono rendimenti 0.2 – 0.3, contro 0.6 ideale. La differenza è dovuta a varie cause: innanzitutto il ciclo è solo un'approssimazione dei processi reali, che non possono essere così semplificati; per esempio le fasi di combustione ed espansione non sono nettamente separate, le fasi di compressione ed espansione sono state assunte adiabatiche perché molto rapide, cosicché sia trascurabile lo scambio di calore con l'esterno, ma non sono certamente reversibili (non c'è equilibrio meccanico). Inoltre sono stati trascurati gli attriti e le perdite di calore attraverso le pareti del cilindro. D'altra parte è importante avere un modello che indichi le massime prestazioni possibili.

7.5.4 Ciclo frigorifero

In un ciclo frigorifero il sistema complessivamente assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$). Nella situazione più semplice il sistema assorbe il calore Q_0 dalla sorgente fredda, assorbe lavoro e cede il calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_0$.

Si definisce *efficienza* o *coefficiente di prestazione* di un ciclo frigorifero il rapporto

$$\xi = \frac{Q_0}{W} \quad (7.25)$$

tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_0 assorbito.

7.5.5 Ciclo di Carnot Inverso

Un ciclo di Carnot percorso in senso inverso costituisce un esempio di ciclo frigorifero reversibile. Il gas assorbe il calore $Q_0 = nRT_1 \ln(V_C/V_D)$ dalla sorgente alla temperatura T_1 (sorgente fredda) e cede il calore $Q_C = nRT_2 \ln(V_A/V_B)$ alla sorgente alla temperatura T_2 (sorgente calda), assorbendo il lavoro $W = Q_0 + Q_C$. L'efficienza è

$$\xi = \frac{Q_0}{Q_C + Q_0} = \frac{nRT_1 \ln(V_C/V_D)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A) - nRT_1 \ln(V_C/V_D)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

ricordando che $V_B/V_A = V_C/V_D$.

Anche per i cicli frigoriferi sono verificati alcuni fatti di carattere generale: il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore, in modulo, di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda e quindi il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema ($Q_0 + |W| = |Q_C|$).

7.6 Teoria cinetica dei gas

7.6.1 Modello cinetico del gas ideale

1. *un gas è costituito da molecole uguali, in modo continuo e disordinato*
2. *gli urti tra molecole e tra molecole e parenti del contenitore sono elastici*
3. *non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti:* gli urti sono dovuti cioè a forze repulsive a corto raggio di azione, mentre si assumono trascurabili le forze attrattive tra le molecole
4. *le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse*

Sulla base della prima ipotesi (caos molecolare), in ogni istante, considerata una qualsiasi direzione orientata \vec{u} , ci sono tante molecole che hanno velocità concorde a

\vec{u} quante hanno velocità discorde a \vec{u} ; la velocità media \vec{v}_m è quindi nulla. Infatti macroscopicamente un gas chiuso in un recipiente è in quiete, $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$. Inoltre il numero di molecole per unità di volume deve essere lo stesso in ogni parte del recipiente occupato dal gas (densità costante).

La seconda ipotesi implica che negli urti tra molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia (forze esterne impulsive)

Dalla terza ipotesi deriva che l'energia potenziale interna è nulla e quindi la sola forma di energia è quella cinetica.

Infine la quarta ipotesi indica che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

Sulla base di questo modello cinetico è stata sviluppata la teoria cinetica dei gas, che permette di arrivare a previsioni sul comportamento dei gas, che si possono verificare sperimentalmente.

7.6.2 Calcolo della pressione

Si considera un contenitore cubico di lato a riempito con un gas che si comporta come prescritto dal modello cinetico. La velocità di una molecola è data da $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$ con le componenti alle pareti opposte.

Nell'urto elastico contro la parete yz cambia solo la componente $v_x \vec{u}_x$ che diventa $-v_x \vec{u}_x$ mentre le altre rimangono invariate, data l'assenza di forze di attrito. La variazione di quantità di moto nell'urto della molecola con la parete yz è pari a $-2mv_x \vec{u}_x$, se m è la massa della molecola, e quindi l'impulso comunicato alla parete è $2mv_x \vec{u}_x$.

L'urto successivo contro la parete y : considerata avviene dopo un tempo $t = 2a/v$, necessario per attraversare nei due sensi il cubo lungo la direzione x . In realtà non è la stessa molecola che compie l'urto successivo perché nel tragitto $2a$ essa può subire un urto contro un'altra molecola e venire deviata. Tuttavia, a causa del moto completamente disordinato (prima ipotesi), per una molecola che perde la componente v_x , ce n'è un'altra che, a seguito di un urto, acquista tale componente v_x .

Pertanto il numero di urti al secondo sulla parete yz è dato da $\frac{1}{t} = \frac{v_c}{2a}$ e l'impulso comunicato in un secondo, pari alla componente x della forza media esercitata sulla parete da una molecola, vale in modulo:

$$F_x = 2mv_x \frac{v_x^2}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

La forza risultante sulla parete è

$$R_x = \frac{m}{a} \sum_i v_{x,i}^2$$

dove la somma è estesa a tutte le molecole; la pressione sulla parete yz di area $S = a^2$, dovuta agli urti molecolari, risulta essere quindi

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{Nm}{V} \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2$$

dove N è il numero totale di molecole nel cubo di volume $V = a^3$.

Si chiama velocità media quadratica la quantità \bar{v} , definita come radice quadrata di

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = \frac{1}{N} \sum_i (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$

Se il moto è completamente disordinato non c'è alcuna direzione preferita per le molecole e pertanto i valori medi quadratici $\bar{v}_x^2, \bar{v}_y^2, \bar{v}_z^2$ sono eguali tra loro:

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$$

In conclusione

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{\bar{v}^2}{3} \implies pV = \frac{1}{3} Nm\bar{v}^2$$

Il ragionamento è identico per quanto riguarda gli urti sulle altre pareti e si estende a contenitori di forma qualunque. Il risultato è generale, nel senso che non dipende da come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T , finché tutte le direzioni del moto sono equivalenti.

Definendo come energia cinetica media di traslazione delle molecole $\bar{E}_k = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$, si ha

$$pV = \frac{2}{3} N \bar{E}_k$$

il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole $N\bar{E}_k$, che nel gas ideale coincide con l'energia totale.

Per un gas ideale ho che $pV = nRT$; eguagliando si trova:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

dato che $nN_A = N$.

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} k_B T \tag{7.26}$$

l'energia cinetica media di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas. Abbiamo trovato il significato microscopico della grandezza temperatura: essa è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole.

7.6.3 Equipartizione dell'energia

Lo sviluppo successivo della teoria cinetica dei gas porta alla previsione che la relazione precedente è di carattere generale, in questo senso: ad ogni termine quadratico dell'energia classica di una molecola di un corpo corrisponde, all'equilibrio termodinamico,

un'energia media pari a $\frac{1}{2}k_B T$, essendo T la temperatura del sistema. Questo risultato può essere anche espresso affermando che ad ogni componente indipendente del moto compete la stessa energia media ossia per ogni grado di libertà c'è il contributo $\frac{1}{2}k_B T$; esso è noto come *principio dell'equipartizione dell'energia*.

Pertanto per un sistema con l gradi di libertà

$$\bar{E} = \frac{l}{2}k_B T \quad (7.27)$$

Le molecole di un gas ideale monoatomico presentano *tre gradi di libertà* e la loro energia, esclusivamente cinetica, ha tre termini quadratici:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

Per esse il principio dell'equipartizione dell'energia prevede

$$\bar{E}_k = \bar{E}_x + \bar{E}_y + \bar{E}_z = \frac{3}{2}k_B T$$

Le energie cinematiche medie calcolate per le molecole monoatomiche e biatomiche sono l'unica forma di energia interna di un gas e allora, per una mole di gas, deve sussistere l'egualanza:

$$\Delta U = c_V \Delta T = \Delta E_k = \frac{l}{2}N_A k_B \Delta T = \frac{l}{2}R \Delta T$$

da cui ricavo il calore specifico molare a volume costante

$$c_V = \frac{l}{2}R$$

Pertanto per le molecole monoatomiche che hanno $l = 3$

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

per le molecole biatomiche con $l = 5$

$$c_V = \frac{5}{2}R$$

Capitolo 8

Secondo principio della Termodinamica

8.1 Enunciati del secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non pone limiti alle trasformazioni di energia da una forma all'altra, però la situazione sperimentale non appare simmetrica: mentre è sempre possibile trasformare integralmente lavoro in calore, per esempio sfruttando l'attrito, la trasformazione contraria di calore in lavoro sembra essere limitata, indipendentemente dal primo principio.

8.1.1 Esempio: macchina termica

Prendiamo in esame il caso di una macchina che compie un ciclo termico scambiando calore con due sorgenti. Si verifica che il calore scambiato complessivamente dal sistema, che viene utilizzato per far funzionare la macchina M , con le due sorgenti di calore alle temperature T_1 e T_2 ($T_2 > T_1$) è dato dalla somma di una quantità Q_A , assorbita dalla sorgente a temperatura maggiore, e di una quantità Q_C , ceduta alla sorgente a temperatura minore. Si osserva che è sempre $Q_C < 0$, cioè non succede mai $Q_C \geq 0$. Questo risultato comporta che Q_A non viene trasformato integralmente in lavoro, ma una parte Q_C viene sempre ceduta alla sorgente a temperatura inferiore. Il lavoro è $W = Q_A + Q_C$ e in accordo con il primo principio ($\Delta U = 0$ in un processo ciclico), però non si ha mai $W = Q_A$, bensì $W < Q_A$.

Nel caso ci siano più sorgenti con cui la macchina M scambia calore la situazione è analoga: la somma dei calori assorbiti non si trasforma mai totalmente in lavoro, una parte viene sempre ceduta restando cioè sotto forma di calore scambiato. Non esistono esempi contrari: in un processo ciclico vi è una impossibilità di trasformazione integrale di calore in lavoro ovvero la trasformazione di calore in lavoro è sempre accompagnata da cessione di calore.

Accanto all'impossibilità finora discussa esiste un'altra impossibilità sperimentale. Se consideriamo due corpi a temperatura diversa e li mettiamo a contatto termico, c'è sempre una cessione di calore dal corpo caldo al corpo freddo fino a che si raggiunge l'equilibrio termico.

Il calore non passa mai spontaneamente dal corpo freddo al corpo caldo. È possibile fare avvenire questo passaggio, come si realizza in una macchina frigorifera, ma deve essere eseguito un lavoro sulla sostanza che compie il ciclo.

8.1.2 Enunciati

Il secondo principio della termodinamica consiste nel prendere atto di queste impossibilità sperimentali, che non presentano eccezioni conosciute, e nel trasformarle in postulati, secondo i seguenti enunciati.

Enunciato di *Kelvin-Planck*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato di *Clausius*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

L'aggettivo unico utilizzato nei due enunciati è essenziale: abbiamo infatti già visto negli esempi dell'espansione isoterma di un gas ideale e del ciclo frigorifero che i processi proibiti dal secondo principio sono possibili, se non costituiscono l'unico risultato. Conseguenza immediata del secondo principio, nell'enunciato di Kelvin-Planck, sono i fatti già evidenziati: in un processo ciclico per produrre effettivamente lavoro sono necessarie sempre almeno due sorgenti, cioè non può sussistere il risultato $Q_C = 0$, ma deve essere $Q_A > |Q_C|$ e quindi, $\eta < 1$.

8.1.3 Equivalenza degli enunciati

Gli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius, pur se riferiti a fatti sperimentali che appaiono molto diversi, sono strettamente connessi in quanto se fosse possibile realizzare uno dei processi proibiti sarebbe possibile realizzare anche l'altro.

Kelvin-Planck \implies Clausius

Supponiamo infatti che sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro, in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck. Questo fatto è rappresentato nella figura (8.1), dove la macchina termica 1 produce il lavoro W trasformando il calore Q_A assorbito dalla sorgente a temperatura T_2 : $W = Q_A$ ed è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda. Utilizziamo il lavoro W per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva il calore Q_1 dalla sorgente a temperatura T_1 e cede il calore Q_2 alla sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Questa seconda macchina non contraddice l'enunciato di Clausius dato che nel processo interviene il lavoro $W' = -W$ fatto sul sistema (il lavoro W è fatto dalla macchina 1 ed è positivo, mentre W' è subito dalla macchina 2 ed è negativo: le due quantità sono eguali in modulo, ma opposte in segno). Il bilancio della macchina 2, sulla base del primo principio, è

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W.$$

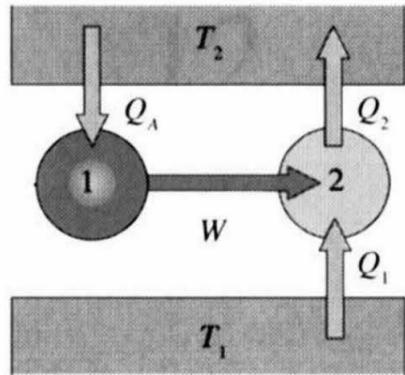


Figura 8.1

La macchina complessiva, costituita dall'insieme delle due macchine, assorbe Q_1 a temperatura T_1 e scambia a temperatura T_2 . Se Q_1 è assorbito, $-Q_1$ è ceduto. Il lavoro complessivo della macchina è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente esterno e l'unico risultato pertanto è il passaggio spontaneo di calore dalla sorgente a temperatura inferiore a quella a temperatura superiore, violando l'enunciato di Clausius.

Clausius \implies Kelvin-Planck

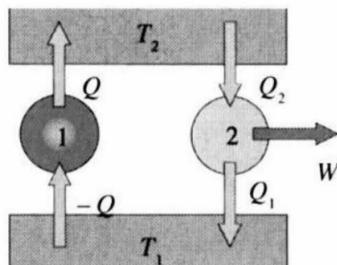


Figura 8.2

Supponiamo ora di poter realizzare una macchina che come unico risultato faccia passare il calore Q da una sorgente a temperatura T_1 ad un'altra a temperatura $T_2 > T_1$ e consideriamo una seconda macchina che lavori normalmente tra le due sorgenti, in accordo col secondo principio (figura 8.2). Dimensioniamo questa seconda macchina in modo che $Q_1 = Q$, cioè in modo da cedere alla sorgente a T_1 lo stesso calore che viene assorbito dalla prima macchina. Pertanto alla fine di un ciclo della macchina complessiva la sorgente a T_1 non scambia calore e il lavoro prodotto è dato da

$$W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$$

ed è positivo, perché $Q_2 > |Q_1| = |Q|$; tale lavoro è eguale al calore complessivamente scambiato con la sorgente a T_2 e in conclusione l'unico risultato è la trasformazione integrale in lavoro del calore assorbito da una sola sorgente (a temperatura T_2), violando l'enunciato di Kelvin-Planck.

L'unione dei risultati ottenuti costituisce la cosiddetta equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica nel senso che abbiamo visto: la negazione di uno ha come conseguenza la negazione dell'altro.

8.2 Reversibilità e irreversibilità

Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato A ad uno stato B , con scambio della quantità Q_{AB} e W_{AB} tra il sistema e l'ambiente, è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso, scambiando le quantità $-Q_{AB}$ e $-W_{AB}$: alla fine sistema e ambiente sono ritornati ai rispettivi stati iniziali, dato che lo scambio totale di calore e lavoro è nullo per entrambi. L'argomento si estende ai cicli reversibili: alla fine di un ciclo il sistema torna sempre nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica perché ha, per esempio, ceduto calore e assorbito lavoro. Percorrendo il ciclo in senso inverso gli scambi energetici dell'ambiente sono eguali ed opposti ed esso ritorna nello stato iniziale.

In generale: *una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce*

La situazione è completamente diversa per le trasformazioni irreversibili:

1. Presenza durante il processo di effetti dissipativi dovuti alle forze di attrito, come avviene nello spostamento del pistone di un cilindro contenente un gas: contro le forze di attrito viene speso un certo lavoro W che alla fine ritroviamo trasformato integralmente in calore Q ceduto all'ambiente. Questo calore Q non può essere ritrasformato integralmente in lavoro: si è verificata una modifica permanente.
2. Espansione libera di un gas: in essa $Q = W = 0$. Alla fine della trasformazione, se vogliamo riportare il gas nello stato iniziale possiamo utilizzare una compressione isoterma reversibile, che richiede un lavoro esterno. Il gas viene riportato nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica che non si può più recuperare.
3. Passaggio di calore tra due corpi a contatto termico e che presentano una differenza finita di temperatura: alla fine si raggiunge l'equilibrio termico, senza produzione di lavoro, ma per ripristinare la situazione iniziale si dovrebbe fornire lavoro dall'esterno, per esempio utilizzando una macchina frigorifera reversibile.

Da questi, e da qualsiasi altro esempio, si conclude che quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo. Il sistema può essere riportato allo stato iniziale attraverso altre trasformazioni, ma l'ambiente subisce una modifica irreversibile.

Le considerazioni esposte sono importanti perché nella pratica tutte le trasformazioni che avvengono in natura contengono fattori di irreversibilità. La rappresentazione di un fenomeno reale con una trasformazione reversibile costituisce quindi una idealizzazione del processo che permette di eseguire calcoli altrimenti impossibili e avere stime sulle grandezze in gioco, spesso sotto forma di limiti superiori.

8.3 Teorema di Carnot

Il teorema di Carnot rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck in quanto fissa la massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro.

Consideriamo due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$, dimensionate in modo tale da produrre lo stesso lavoro. Indichiamo le due macchine con i simboli X e R : per la prima macchina non facciamo per ora alcuna ipotesi di reversibilità o irreversibilità, mentre assumiamo che la seconda sia reversibile. I rendimenti delle due macchine sono, data l'ipotesi sul lavoro,

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2}, \quad \eta_R = \frac{W}{Q'_2}$$

Dal primo principio abbiamo inoltre:

$$Q_2 + Q_1 = W = Q'_1 + Q'_2 \quad (8.1)$$

Supponiamo che sia $\eta_X > \eta_R$ e costruiamo una macchina composta da X e R , in cui quest'ultima viene fatta funzionare come macchina frigorifera, assorbendo il lavoro $-W$ e il calore $-Q'_1$ e cedendo il calore $-Q'_2$: sfruttiamo così una proprietà caratteristica di un processo reversibile come è stato ipotizzato.

Dall'ipotesi segue:

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q'_2} \Leftrightarrow Q_2 < Q'_2 \Leftrightarrow Q_2 - Q'_2 < 0$$

e quindi da (8.1)

$$Q_1 - Q'_1 = Q'_2 - Q_2 > 0$$

Abbiamo complessivamente i seguenti risultati:

1. la macchina assorbe il calore $Q = Q_1 - Q'_1 > 0$ dalla sorgente a temperatura T_1 ;
2. non viene scambiato calore con l'esterno
3. la macchina cede il calore $-Q = Q_2 - Q'_2 < 0$ alla sorgente a temperatura T_2 .

L'unico risultato alla fine di un ciclo è il passaggio di calore dalla sorgente fredda alla sorgente calda, in contrasto con l'enunciato di Clausius. Allora è sbagliata l'ipotesi di partenza e deve essere

$$\eta_X \leq \eta_R \quad (8.2)$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, potremmo supporre $\eta_R > \eta_X$, far funzionare la macchina X come macchina frigorifera (calore e lavoro cambierebbero solo di segno dato X reversibile) e troveremmo $\eta_X \geq \eta_R$. Le diseguaglianze sono compatibili solo se

$$\eta_X = \eta_R \quad (8.3)$$

In conclusione il *Teorema di Carnot* afferma che tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo, come si deduce dal fatto che le proprietà del sistema non compaiono nella dimostrazione.

Da (8.3) deduciamo allora che il rendimento del *ciclo di Carnot a gas ideale* rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti alle temperature T_1 e T_2 . Il teorema di Carnot risulta valido anche per macchine che lavorano con più sorgenti, non esiste però una formula generale come quella vista prima.

Ritornando al caso di due sorgenti si ha che, per qualsiasi macchina reversibile, la relazione tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio è

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (8.4)$$

Ricordiamo che T è la temperatura misurata col termometro a gas ideale. Fissate dunque le temperature delle sorgenti, T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$, per il teorema di Carnot

$$\eta_R = \eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (8.5)$$

la macchina reversibile è quella che sfrutta meglio l'energia fornita sotto forma di calore. Infatti a parità di calore assorbito Q_A , la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo,

$$W_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = T_1 \left(\frac{Q_A}{T_1} - \frac{Q_A}{T_2} \right) \quad (8.6)$$

ovvero, *a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe meno calore*.

$$Q_{min} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad (8.7)$$

8.4 Teorema di Clausius

La relazione (8.4), conseguenza del teorema di Carnot per le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti, può essere estesa e generalizzata a macchine termiche operanti con più sorgenti di calore.

8.4.1 Enunciato

Data una macchina M qualsiasi la quale scambia calore con n sorgenti, sussiste la relazione

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (8.8)$$

dove Q_1, Q_2, \dots, Q_n sono i calori scambiati con le sorgenti a temperatura T_1, T_2, \dots, T_n .

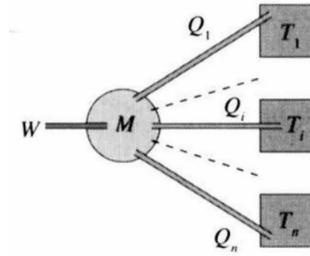


Figura 8.3

8.4.2 Dimostrazione

Per dimostrare il teorema di Clausius, immaginiamo di aggiungere n macchine reversibili funzionanti tra le sorgenti già considerate alle temperature T_1, T_2, \dots, T_n e una sorgente a temperatura T_0 : ciascuna di queste macchine R_i ; scambia con la sorgente a T_i ; il calore $-Q_i$, opposto a quello scambiato con la stessa sorgente dalla macchina M , e con la sorgente a T_0 il calore Q_{0i} . Applichiamo (8.4) a ciascuna macchina reversibile:

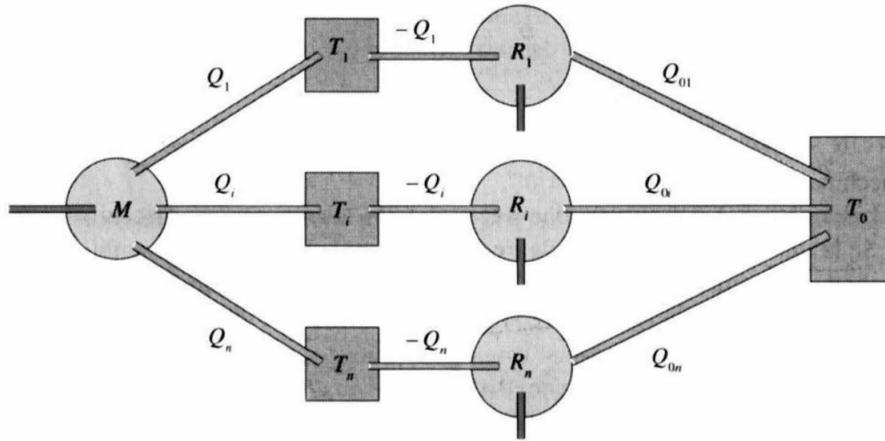


Figura 8.4

$$\begin{aligned} \text{per } R_1 & -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \implies \frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1} \\ \text{per } R_i & -\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \implies \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i} \\ \text{per } R_n & -\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0 \implies \frac{Q_{0n}}{T_0} = \frac{Q_n}{T_n} \end{aligned}$$

e sommando a tutte le macchine

$$\frac{1}{T_0} \sum_i Q_{0i} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

Alla fine di un ciclo della macchina M e delle macchine reversibili R_1, \dots, R_n le sorgenti a T_0, \dots, T_n sono rimaste invariate in quanto ciascuna ha scambiato calori eguali ed opposti con le macchine. Pertanto la macchina complessiva costituita da M e dalle n macchine ausiliarie compie una trasformazione ciclica monoterma perché scambia calore solo con la sorgente a temperatura T_0 . Dato che il calore totale scambiato durante un ciclo monoterma non può essere positivo ottengo:

$$\sum_i Q_{0i} \leq 0 \implies \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

poiché $T_0 > 0$.

Se lo scambio di calore di M avviene con una serie infinita di sorgenti, detto dQ il calore scambiato con la sorgente a temperatura T , la (8.8) diventa

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (8.9)$$

dove \oint indica che l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina M .

8.4.3 Teorema di Clausius per macchine reversibili

Le equazioni (8.8) e (8.9) esprimono il teorema di Clausius per una macchina generica. Se la macchina M è reversibile invertiamo tutti i cicli: tutti gli scambi di calore cambiano di segno e deve essere $\sum (-Q_{0i}) \leq 0$. Ne segue che le diseguaglianze del teorema vanno invertite e si ha compatibilità tra i due casi solo se

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (8.10)$$

8.4.4 Teorema di Clausius per macchine irreversibili

Quando il processo ciclico è irreversibile, a rigore di logica vale il segno di minore o eguale; però, sulla base delle considerazioni sui processi irreversibili, possiamo assumere che in generale si verifica la diseguaglianza e si può scrivere il teorema di Clausius per le macchine irreversibili come

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} < 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad (8.11)$$

Si tenga presente che la temperatura T nelle (8.10) e (8.11) è quella della sorgente con cui avviene lo scambio di calore: essa coincide con la temperatura del sistema che compie il ciclo solo se il processo è reversibile. Inoltre i calori sono quelli visti dal sistema, positivi se il sistema li assorbe, negativi se li cede.

Osserviamo infine che mentre la somma dei calori cambiati, dQ , è sempre diversa da zero per un ciclo che scambia lavoro, in accordo con il primo principio, quando il calore scambiato viene diviso per il valore della temperatura della sorgente con cui avviene lo scambio e si somma su tutto il ciclo, il risultato è nullo se il ciclo è reversibile e negativo negli altri casi.

8.5 La funzione di stato Entropia

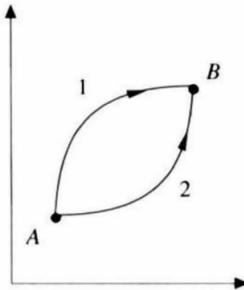


Figura 8.5

Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili. Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2 (chiamandola -2), abbiamo composto un ciclo reversibile, che si svolge da A a B lungo la prima trasformazione e da B ad A lungo la seconda invertita

Dal teorema di Clausius per macchine reversibili:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2$$

L'ultimo passaggio discende dalla proprietà delle trasformazioni reversibili secondo cui il cambio di verso nella trasformazione comporta soltanto il cambio di segno degli scambi energetici. Ottengo quindi

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \dots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_i$$

lungo qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi gli stati termodinamici A e B .

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ esteso ad una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo.

Si può quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema nei due stati di equilibrio A e B :

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev(A,B)} = S_B - S_A = \Delta S_{A \rightarrow B} \quad \left[\frac{J}{K} \right] \quad (8.12)$$

La funzione di stato così introdotta è detta *entropia*.

La definizione (8.12) dà l'entropia a meno di una costante additiva arbitraria.

La definizione (8.12) può essere scritta anche in forma infinitesima, cioè con riferimento ad una trasformazione reversibile infinitesima, che implica una variazione infinitesima delle coordinate termodinamiche:

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right) \quad (8.13)$$

dQ non è un differenziale esatto, però se tale quantità è divisa per T ed è considerata in una trasformazione reversibile, essa dà luogo al differenziale esatto dS .

L'entropia è una quantità additiva. Dati due sistemi di entropia S_1 e S_2 , l'entropia complessiva è espressa da $S = S_1 + S_2$. Questa proprietà è conseguenza del fatto che l'energia interna complessiva dei due sistemi è la somma delle energie interne come pure il lavoro complessivo è la somma dei lavori, per lo meno se i sistemi sono indipendenti, pertanto anche il calore scambiato dal sistema complessivo è la somma dei calori scambiati e il risultato si estende all'entropia. In particolare risulta che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia quindi ha le caratteristiche di una *grandezza estensiva*.

Data una trasformazione irreversibile che collega lo stato A allo stato B di cui si vuole calcolare l'entropia, abbiamo le seguenti indicazioni:

1. l'entropia dello stato iniziale e finale è certamente definibile, a partire ad esempio da un certo stato di riferimento;
2. conseguentemente è definibile la variazione $S_B - S_A$
3. la variazione $S_B - S_A$ non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B , ma solo dalle coordinate termodinamiche di A e B , in quanto l'entropia è una funzione di stato.

Pertanto per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione irreversibile da A a B basta scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi A a B ed applicare a questa (8.12): il risultato è valido in ogni caso.

8.5.1 Diagrammi TS

L'entropia, essendo funzione di stato, può essere scelta come variabile indipendente (coordinata termodinamica) per descrivere, insieme ad una seconda variabile indipendente opportunamente scelta (spesso T), lo stato termodinamico di un sistema. Nel piano (T, S) una trasformazione reversibile è rappresentata da un tratto di curva continua che fornisce il grafico della funzione $T(S)$. Il calore scambiato dal sistema che descrive la trasformazione è, secondo (8.13),

$$dQ_{rev} = Tds \implies Q_{rev} = \int_A^B TdS \quad (8.14)$$

Ne deriva che il calore scambiato nella trasformazione, assorbito se si passa da A a B ($S_B > S_A$), ceduto se invece si va da B ad A , è dato dall'area sotto la curva AB . Nel piano (T, S) il calore ha una semplice interpretazione grafica, come il lavoro nel piano (p, V) , se le trasformazioni sono reversibili.

Trasformazioni e cicli

Un ciclo reversibile nel piano (T, S) delimita un'area che è pari alla somma algebrica dei calori scambiati in totale del sistema, $Q_A + Q_C$, positiva se il ciclo è percorso in senso

orario negativa in caso contrario. Tale area rappresenta anche il lavoro compiuto (primo principio). Il rendimento di una macchina che compie un ciclo termico ha una semplice rappresentazione: esso è dato dal rapporto tra l'area racchiusa dal ciclo (W) e l'area totale sottesa dalla curva superiore Q_A .

Nel piano (T, S) una trasformazione isoterma reversibile è rappresentata da segmento orizzontale ($T = \text{costante}$), una trasformazione adiabatica reversibile da un segmento verticale ($S = \text{costante}$): infatti in tal caso $dQ_{rev} = 0$ e, da (8.13), $dS = 0$. Una trasformazione adiabatica reversibile è dunque isoentropica, lungo essa l'entropia del sistema non varia.

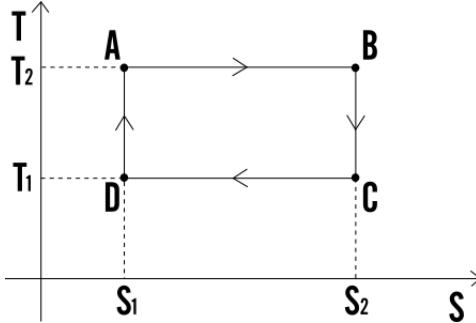


Figura 8.6: Ciclo di Carnot nel piano (T, S)

Un ciclo di Carnot ha la forma di un rettangolo, le formule sono:

$$Q_A = T_2 (S_2 - S_1), \quad Q_C = T_1 (S_1 - S_2)$$

$$Q = Q_A + Q_C = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1)$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Poi so che $S_2 - S_1 = \frac{Q_A}{T_2} = \frac{-Q_C}{T_1}$:

$$W = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = (T_2 - T_1) \frac{Q_A}{T_2}$$

Quindi ho trovato che in una isoterma reversibile l'entropia vale

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \tag{8.15}$$

In una adiabatica reversibile

$$\Delta S = 0 \tag{8.16}$$

e che, per definizione, in una trasformazione ciclica

$$\Delta S = 0 \tag{8.17}$$

8.6 Il principio di aumento dell'entropia, Calcoli di variazione dell'entropia

Come prima (figura 8.5) torno alle due trasformazioni 1 e 2 assumendo però che la trasformazione 1 sia irreversibile, mentre la 2 resta reversibile.

Il ciclo delle trasformazioni 1 e -2 (-2 è l'inversa della 2 come prima) rimane quindi rimane irreversibile: il teorema di Clausius ci dice:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} < 0$$

L'ultimo integrale rappresenta la differenza di entropia quindi:

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr} \quad (8.18)$$

Se per una generica trasformazione AB effettivamente eseguita da un sistema siamo in grado di calcolare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$, in generale il risultato non è eguale alla variazione di entropia $S_B - S_A$, ma minore; se vogliamo calcolare $S_B - S_A$ per quella data trasformazione, dobbiamo servirci di un'altra trasformazione AB reversibile. In termini infinitesimi si scrive

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr} \quad (8.19)$$

Se il sistema che descrive la trasformazione AB è isolato termicamente, cioè non scambia calore, si $dQ = 0$ e quindi da

$$S_B - S_A \geq 0 \implies S_B \geq S_A \quad (8.20)$$

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

La (8.20) esprime il *principio di aumento dell'entropia*; la sua forma infinitesima

$$dS \geq 0 \text{ (sistema isolato)} \quad (8.21)$$

viene chiamata *formulazione matematica del secondo principio della termodinamica*.

Un sistema isolato si ottiene sempre quando si considera un sistema termodinamico ed il suo ambiente esterno, cioè un universo termodinamico.

Per l'universo termodinamico

$$\Delta S_u \geq 0 \text{ con } \Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$$

Se l'universo compie una trasformazione reversibile

$$\Delta S_u = 0 \implies \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb}$$

se invece l'universo compie una trasformazione irreversibile

$$\Delta S_u > 0 \implies \Delta S_{sist} \neq -\Delta S_{amb}$$

In particolare, quando la trasformazione è ciclica, sappiamo da (8.17) che $\Delta S_{sist} = 0$; allora,

se il ciclo è reversibile: $\Delta S_u = \Delta S_{amb} = 0$

se il ciclo è irreversibile: $\Delta S_u = \Delta S_{amb} > 0$

Una conclusione importante che si trae dai risultati appena esposti è che l'irreversibilità è sempre accompagnata da un aumento di entropia dell'universo. D'altra parte abbiamo già rilevato più volte che i processi naturali sono tutti sostanzialmente irreversibili. Possiamo quindi affermare che ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente. L'evoluzione termina quando viene raggiunto il massimo valore dell'entropia compatibile con le condizioni fisiche di sistema e ambiente: tale stato corrisponde allo stato di equilibrio stabile. Questo non significa che l'entropia debba aumentare in tutte le varie parti del sistema e dell'ambiente che costituiscono l'universo termodinamico. In una o più parti l'entropia può diminuire, ma ce n'è almeno un'altra in cui aumenta, in modo da soddisfare la (8.20).

8.6.1 Trasformazioni adiabatiche

Un sistema che compie una trasformazione adiabatica costituisce un caso particolare di universo termodinamico, in cui il sistema è assunto essere isolato termicamente dall'ambiente: l'ambiente non scambia calore col sistema, ma soltanto lavoro; pertanto $\Delta S_{amb} = 0$ e

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_u \geq 0$$

Se la trasformazione è reversibile $\Delta S_{sist} = 0$, la trasformazione cioè è isoentropica.

Per una trasformazione adiabatica irreversibile invece $\Delta S_{sist} > 0$, l'entropia aumenta. In effetti questa volta $dQ = 0$ non implica $dS = 0$: il calore scambiato lungo la trasformazione è nullo, però ΔS_{sist} non è calcolabile lungo questa trasformazione, bensì lungo un'altra con gli stessi estremi, ma reversibile, che non può essere adiabatica a sua volta. Questo perché due stati collegati con una adiabatica irreversibile hanno necessariamente entropia diversa e non possono quindi essere collegati anche con una adiabatica reversibile, che è isoentropica (vale anche il vice versa).

8.6.2 Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi, mettendo insieme la formula della calorimetria e la formula della variazione di entropia per processi isotermi so che la variazione di entropia di m chilogrammi di una sostanza che cambia fase alla temperatura T è:

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T} \tag{8.22}$$

8.7 Entropia del gas ideale

Consideriamo n moli di gas ideale che passano dallo stato $A(p_A, V_A, T_A)$ allo stato $B(p_B, V_B, T_B)$. Il calore scambiato nella trasformazione si esprime attraverso il primo principio

$$dQ = nc_V dT + dW$$

Per il calcolo della variazione di entropia dobbiamo utilizzare una trasformazione AB reversibile e questo ci permette di servirci delle relazioni

$$dW = pdV \quad pV = nRT \implies dW = nRT \frac{dV}{V}$$

Pertanto

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} = \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V} \quad (8.23)$$

Integrando e utilizzando la relazione di Mayer ottengo:

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} \\ S_B - S_A &= nc_V \ln \frac{p_B}{p_A} + nc_P \ln \frac{V_B}{V_A} \\ S_B - S_A &= nc_P \ln \frac{T_B}{T_A} - nR \ln \frac{p_B}{p_A} \end{aligned}$$

Dati lo stato iniziale e finale, la variazione di entropia di un gas ideale si può dunque scrivere utilizzando una qualsiasi delle espressioni viste, indipendentemente dalla trasformazione AB realmente avvenuta; si vede che in generale la variazione di entropia dipende da due coordinate termodinamiche.

$$\text{trasformazione isoterma } S_B - S_A = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -nR \ln \frac{p_B}{p_A}$$

$$\text{trasformazione isocora } S_B - S_A = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_V \ln \frac{p_B}{p_A}$$

$$\text{trasformazione isobara } S_B - S_A = nc_P \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_p \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Capitolo 9

Forza elettrostatica. Campo elettrostatico

9.1 Cariche elettriche, isolanti e conduttori

Tra le interazioni fondamentali esistenti in natura, la prima ad essere scoperta e studiata quantitativamente è stata l'interazione gravitazionale, responsabile di gran parte dei fenomeni che si osservano su scala macroscopica nell'universo. Essa è dettata dalla legge:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (9.1)$$

Un'altra interazione fondamentale, che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia, è quella elettromagnetica. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la forza elettrica.

Oggi noi attribuiamo le forze in parola a cariche elettriche, che sono preesistenti nei corpi e che passano da un corpo all'altro durante lo strofinio, per cui i corpi elettrizzati si chiamano anche elettricamente carichi. Questi corpi che si caricano per strofinio sono detti *isolanti*, in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri, come ad esempio i metalli e il corpo umano stesso, non trattengono la carica e sono detti *conduttori*.

Sperimentalmente si deduce che esistono due diversi tipi di cariche elettriche; per convenzione è stata chiamata positiva la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo vetro quando vengono elettrizzate, mentre è stata chiamata negativa la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo bachelite. Da questo ottengo i seguenti risultati:

- due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o entrambi negativamente si respingono;
- un corpo isolante carico positivamente e uno carico negativamente si attraggono;
- nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante e il panno, acquistano sempre una carica di segno opposto.

La carica che si accumula per strofinio sugli isolanti si mantiene per tempi considerevoli, specialmente se l'aria nell'ambiente in cui si opera è secca. Invece, come abbiamo già rilevato, non è possibile caricare per strofinio una bacchetta di metallo tenendola in mano, come si fa con le bacchette di isolante, a meno che non sia tenuta da una barretta di isolante, in tal caso si comporta in modo analogo.

L'assenza di elettrizzazione dei conduttori si spiega col fatto che i metalli e il corpo umano sono conduttori, cioè permettono il movimento della carica elettrica accumulatasi durante lo strofinio, a differenza di quanto avviene negli isolanti. In questi esperimenti hanno caratteristiche di conduttori anche il suolo, svariati liquidi tra cui l'acqua e anche l'aria umida.

9.2 Struttura elettrica della materia

9.2.1 Costituenti fondamentali

La materia stabile che ci circonda (corpi terrestri, pianeti, la nostra galassia) è formata da tre costituenti elementari: il protone p , il neutrone n , l'elettrone e .

La massa del protone è circa eguale alla massa del neutrone e vale $m_p \cong m_n \cong 1.67 \cdot 10^{-27} kg$; la massa dell'elettrone è $m_e \cong 9.11 \cdot 10^{-31} kg$, circa 1840 volte più piccola della massa del protone e del neutrone. Sulla base dei dati sperimentali esistenti il protone e il neutrone hanno dimensioni dell'ordine di $10^{-15} m$. Le dimensioni dell'elettrone sono inferiori a $10^{-17} m$: esso ci appare puntiforme, cioè privo di struttura interna.

9.2.2 Carica e

La carica elettrica dell'elettrone è la più piccola osservata sperimentalmente: essa è chiamata carica elementare ed è indicata con $-e$; il segno evidenzia l'assunzione che la carica dell'elettrone sia negativa. Il protone ha una carica positiva $+e$, eguale in valore assoluto a quella dell'elettrone, il neutrone invece ha carica elettrica nulla (è neutro).

La carica elettrica è una grandezza fisica *quantizzata*, ossia la carica elettrica non varia con continuità ma ogni carica elettrica esistente in natura deve essere uguale o un multiplo intero della carica di un elettrone.

9.2.3 Atomo

I tre costituenti si aggregano in strutture che si chiamano atomi. In particolare un certo numero di protoni e neutroni, legati dall'interazione forte, costituiscono il nucleo dell'atomo, che risulta quindi carico positivamente; attorno al nucleo si muove un numero di elettroni, eguale al numero di protoni, sotto l'azione elettrica attrattiva esercitata dal nucleo. Poiché il numero di protoni in ogni atomo è eguale al numero di elettroni, la carica elettrica totale, somma delle singole cariche, è nulla e l'atomo è neutro.

9.2.4 Carica di un isolante per strofinio

Gli elettroni di un atomo, specialmente quelli periferici, sono più o meno legati al nucleo: da ciò deriva la differenza tra materiali isolanti e conduttori.

Negli isolanti gli elettroni sono ben vincolati al nucleo e non possono spostarsi attraverso il corpo: gli isolanti non trasportano facilmente la carica.

Mediante una specifica azione locale, quale lo strofinio con un panno, si può far passare, nei punti di contatto, un certo numero n di elettroni e quindi una carica $-q = -ne$ da un corpo C_1 , ad esempio una bacchetta di vetro, ad un corpo C_2 , il panno; C_2 risulta carico negativamente nei punti di contatto con C_1 e tale carica non si muove verso altre zone di C_2 . Invece in C_1 nei punti di contatto è presente un eccesso di carica positiva $q = ne$. Nel caso di isolanti tipo bachelite il processo avviene in senso contrario.

In conclusione un processo di carica per strofinio è un processo in cui vengono separate, attraverso un agente meccanico, delle cariche (elettroni) e trasferite da un corpo ad un altro. Lo spostamento riguarda un numero intero di elettroni, cioè la carica trasferita può assumere solo valori multipli interi della carica elementare, in accordo al fatto che la *carica elettrica è quantizzata*.

9.2.5 Principio di conservazione della carica elettrica

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo, ovvero si conserva.

9.2.6 Ionizzazione

Quando ad un atomo vengono aggiunti o tolti elettroni si forma rispettivamente uno ione negativo o uno ione positivo; in particolare il fenomeno di sottrazione di elettroni di chiama ionizzazione.

9.3 La legge di Coulomb

9.3.1 Enunciato

Coulomb stabilì che due cariche puntiformi q_1 e q_2 , poste a distanza r , interagiscono con una forza F , diretta secondo la loro congiungente, di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9.2)$$

quindi *la forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza*.

La costante k che compare in (9.2) dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse, mezzo di norma isolante che per le sue proprietà elettriche viene chiamato *dieletrico*.

Come unità di carica si è definito il coulomb, simbolo C , che è pari alla carica trasportata da una corrente di $1A$ in 1 secondo.

Fissata l'unità di misura della carica, ed essendo già definite le unità di forza e di distanza, in linea di principio basta misurare la forza tra due cariche note a distanza nota per determinare nel sistema internazionale il valore di k nel vuoto; risulta

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (9.3)$$

La costante k può essere espressa anche come

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove la costante ϵ_0 è nota come costante dielettrica (o permittività) del vuoto e ha il valore

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (9.4)$$

La legge di Coulomb si può esprimere quindi con

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9.5)$$

Il valore della carica elementare espresso in coulomb risulta

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} C \quad (9.6)$$

9.3.2 Forza vettoriale della legge di Coulomb

La legge (9.5) deve essere scritta in termini vettoriali, trattandosi dell'espressione di una forza. La direzione della forza è quella della retta congiungente le due cariche puntiformi.

La forza che la carica q esercita sulla carica q_0 assume la forma

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \vec{u} \quad (9.7)$$

Se q e q_0 hanno lo stesso segno ($q, q_0 > 0$), la forza ha lo stesso verso di \vec{u} , è cioè *repulsiva*; se invece q e q_0 hanno segno opposto ($q, q_0 < 0$) \vec{F} ha verso opposto ad \vec{u} , è *attrattiva*.

9.4 Campo elettrostatico

Le forze elettriche agenti su una carica q_0 dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori: vige cioè il principio di sovrapposizione, detto anche *principio di indipendenza delle forze simultanee*.

La forza elettrostatica su una carica puntiforme q_0 , risultante delle forze esercitate da un sistema discreto di cariche puntiformi q_i è uguale a:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r^2} \vec{u}_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} \vec{u}_i \quad (9.8)$$

La grandezza vettoriale

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (9.9)$$

viene chiamata *campo elettrostatico* prodotto in un punto P da un sistema di cariche ferme che agiscono su q_0 .

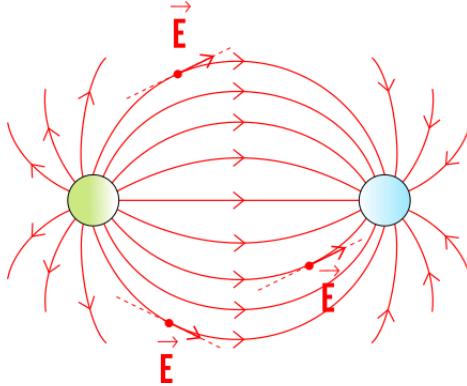


Figura 9.1: Campo elettrostatico

Il campo elettrostatico generato da un sistema discreto di cariche puntiformi in un punto P è

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (9.10)$$

Il campo elettrostatico in un punto P prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alle somma dei campi elettrostatici prodotti singolarmente dalla cariche.

$$F(x, y, z) = q_0 E(x, y, z) \quad (9.11)$$

La (9.11) può essere interpretata dicendo che il sistema di cariche è la sorgente del campo elettrostatico E : la carica q_0 interagisce con questo subendo la forza F ; l'azione elettrica tra cariche, che è una azione a distanza, avviene attraverso il campo.

9.5 Campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di cariche

Se la distribuzione di carica è continua il campo elettrostatico che essa crea in un punto P si può ottenere dividendo la carica in elementi infinitesimi dq . Il campo elettrostatico prodotto da dq in un punto P distante r' è approssimabile ad una carica puntiforme:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{u}'$$

Il campo elettrostatico risultante in P si calcola ricorrendo al principio di sovrapposizione; poiché la somma è estesa ad un numero infinito di contributi infinitesimi, essa si riduce ad un integrale vettoriale esteso a tutta la distribuzione continua:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r'^2} \vec{u}' \quad (9.12)$$

Per chiarire il significato di questa formula (generale) si distinguono diversi casi caratterizzati da un elevato grado di simmetria.

Anello carico

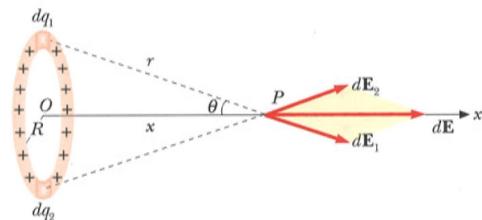


Figura 9.2

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R . Il campo elettrico è dato dalla formula:

$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

con R raggio dell'anello, x la distanza dal punto P . Il campo eletrostatico è parallelo e concorde all'asse dell'anello per $x > 0$, è parallelo e discorde per $x < 0$ ed è nullo nel centro dell'anello, dove tutti i contributi elementari si elidono.

Nei punti a grande distanza dal centro ($x \gg R$)

$$\vec{E}(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_x$$

concorde all'asse a destra e discorde a sinistra, come se la carica fosse concentrata nel centro dell'anello; non si distingue più, in questa situazione, la struttura della distribuzione.

Disco carico

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Il campo elettrico è dato da:

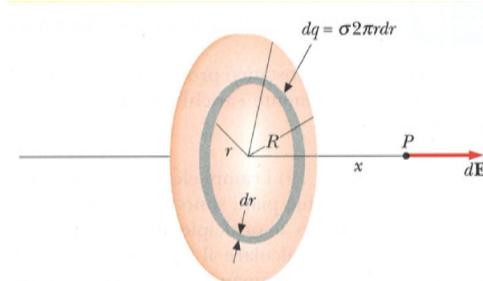


Figura 9.3

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \vec{u}_x$$

Il segno positivo vale per $x > 0$, quello negativo per $x < 0$. Anche in questo caso, ad una lunga distanza, il disco è visto come carica puntiforme.

Quando x tende a zero i limiti destro e sinistro del campo sono diversi e valgono rispettivamente

$$\vec{E}_+(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x, \quad \vec{E}_-(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

Se ora facciamo tendere R all'infinito, mantenendo σ costante, otteniamo un piano indefinito uniformemente carico

$$E = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

ed è ortogonale al piano, uscente da esso e costante in ogni punto dello spazio, anche detto *uniforme*.

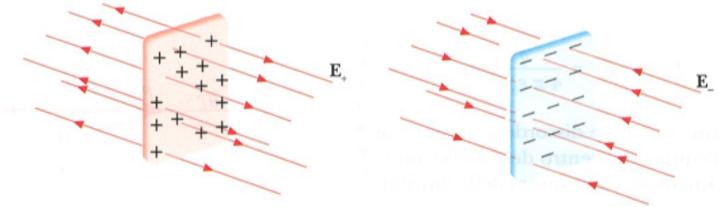


Figura 9.4

Due piani indefiniti carichi

Dati due piani indefiniti carichi con densità superficiale l'uno $+\sigma$ e l'altro $-\sigma$. i campi elettrostatici \vec{E}_+ e \vec{E}_- generati separatamente dai due piani sono in modulo entrambi eguali a $\sigma/2\epsilon_0$. Utilizzando il principio di sovrapposizione, per calcolare il campo risultante $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ si vede che i campi si sommano nella regione compresa tra i due piani e si annullano all'esterno. All'interno il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

nullo all'esterno dei due piani. Una caratteristica comune degli esempi mostrati è che le distribuzioni di carica sono *uniformi*.

9.6 Linee di forza del campo elettrostatico

L'introduzione del concetto di campo elettrostatico mette in evidenza che la presenza di un sistema di cariche, dal caso più semplice della singola carica puntiforme al caso più generale di una distribuzione spaziale, modifica lo spazio circostante nel senso

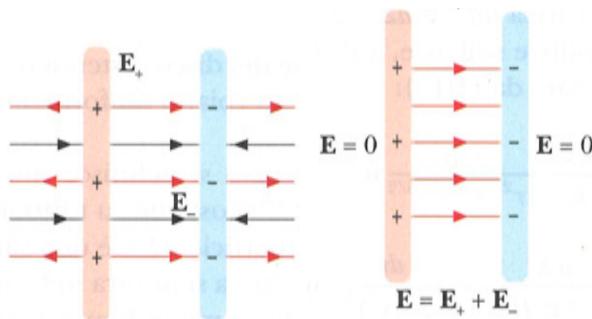


Figura 9.5

che una carica di prova posta in un qualsiasi punto risente della forza (9.11), attribuita all’interazione con il campo elettrostatico.

Partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascuno parallelo e concorde al campo elettrostatico in quel dato punto, si ottiene una linea che è detta *linea di forza* o *linea del campo elettrostatico*: pertanto in ogni suo punto tale linea per definizione è tangente al campo e il suo verso di percorrenza indica il verso del campo.

Nel caso di una carica puntiforme, le linee di forza hanno direzione radiale con origine sulla carica e sono uscenti da questa se è positiva, entranti se è negativa. Le linee si infittiscono man mano che ci si avvicina alla sorgente del campo e ciò indica che l’intensità del campo è crescente.

Le proprietà delle linee di forza sono quindi:

- una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;
- le linee di forza si addensano dove l’intensità del campo elettrostatico è maggiore;
- le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all’infinito.

Nel caso di cariche di segno opposto, ma eguali in modulo, tutte le linee che partono dalle cariche positive si chiudono su quelle negative, alcune passando eventualmente per l’infinito; se le cariche sono dello stesso segno, come in, tutte le linee che provengono dalle cariche si chiudono all’infinito; se invece le cariche non sono eguali in modulo, alcune linee terminano o provengono dall’infinito.

9.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico

Supponiamo di immettere una carica q di piccole dimensioni, puntiforme, in una zona di spazio in cui esiste un campo elettrostatico generato da un sistema di cariche ferme,

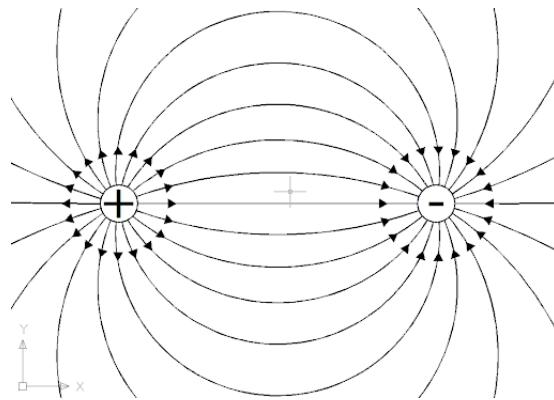


Figura 9.6: Linee di forza

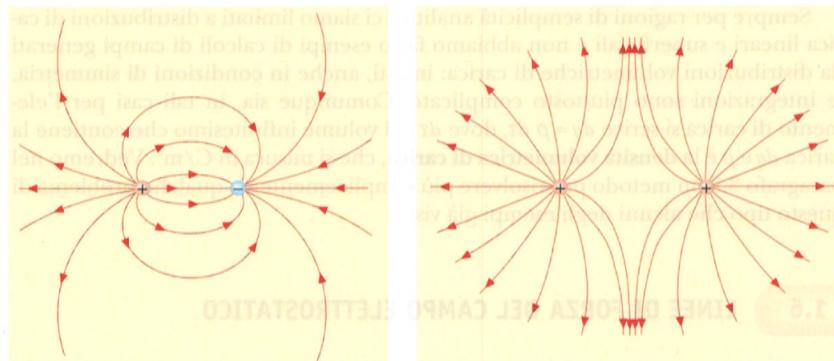


Figura 9.7: Linee di forza

che non vengono perturbate in alcun modo dalla presenza della carica. Questa, di massa m , è sottoposta alla forza (9.11) e la legge della dinamica di Newton, in condizioni non relativistiche, si scrive

$$q \vec{E} = m \vec{a} \implies \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (9.13)$$

Integrando si determinano posizione e velocità della carica, note posizione e velocità iniziali.

Se \vec{E} è uniforme (costante in modulo e in direzione), l'accelerazione \vec{a} è una costante del moto. Se la carica q è positiva, l'accelerazione sarà nel verso di \vec{E} , se la carica q è negativa sarà nel verso opposto.

Capitolo 10

Lavoro elettrico, Potenziale elettrostatico

10.1 Lavoro della forza elettrica, tensione, potenziale

La formula che esprime la forza subita da una carica q_0 in un campo elettrostatico, è valida quando le cariche che generano il campo sono fisse e costanti e la carica q_0 è a sua volta fissa oppure si muove senza però perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti (da qui il termine *elettrostatico*).

10.1.1 Campo elettromotore

Però possiamo dire più in generale che quando su una carica q_0 agisce una forza \mathbf{F} di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma ad esempio dovuta a processi chimici o ad azioni meccaniche, o altre cause, possiamo definire sempre un campo elettrico E , che si indica anche col nome di campo elettromotore:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \implies \vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (10.1)$$

Formalmente: *la forza che agisce su una carica elettrica, che come tale prende il nome di forza elettrica, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico.*

10.1.2 Lavoro

Il lavoro della forza \vec{F} per uno spostamento $d\vec{s}$ della carica q_0 è dato da:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E \cos \theta ds = q_0 E_s ds \quad (10.2)$$

dove θ è l'angolo tra il campo elettrico \vec{E} e lo spostamento $d\vec{s}$ e E_s la componente di \vec{E} lungo $d\vec{s}$.

Per uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B lungo un percorso C_1 il lavoro si ottiene suddividendo il percorso in una serie infinita di segmenti infinitesimi

$d\vec{s}_i$, calcolando per ognuno di essi il lavoro dW_i . La somma diventa:

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (10.3)$$

dove $d\vec{s}$ è un vettore elementare tangente alla curva, e l'ultimo integrale è l'integrale di linea del campo \vec{E} lungo C_1 .

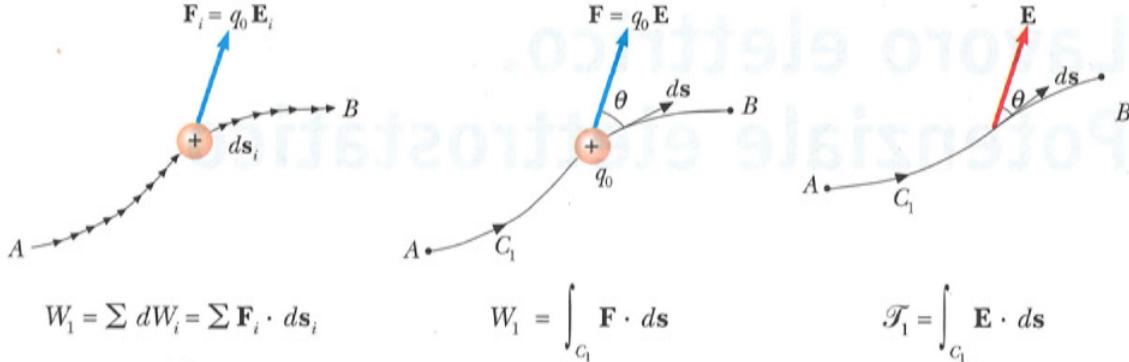


Figura 10.1

10.1.3 Tensione elettrica

Il rapporto W_1/q_0 tra il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} nello spostamento della carica q_0 da A a B lungo il percorso C_1 , e il valore della carica, definisce la *tensione elettrica tra i due punti A e B relativa al percorso C_1* :

$$\mathcal{F}(A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (10.4)$$

Se considero un altro percorso C_2 trovo un lavoro diverso e quindi un *diverso valore della tensione elettrica*.

$$\mathcal{F}(A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) \neq \mathcal{F}(A \rightarrow B \text{ lungo } C_2)$$

10.1.4 Lavoro in un percorso chiuso

Per un percorso chiuso C formato dal percorso C_1 da A a B e dal percorso $-C_2$ da B ad A , il lavoro risulta:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_1 - W_2$$

Ottengo quindi che *in generale il lavoro per un percorso chiuso è diverso da zero*. Inserendo (10.1)

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \mathcal{E} \quad (10.5)$$

Il lavoro per spostare una carica lungo il percorso chiuso C è dato dal prodotto della carica per la circuitazione del campo elettrico lungo C .

10.1.5 Forza elettromotrice

L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (10.6)$$

che esprime il rapporto tra lavoro compiuto sulla carica e la carica stessa per lo spostamento C si definisce *forza elettromotrice (f.e.m. del campo elettrico)* relativa al percorso C . Essa è in generale diversa da zero e dipende dalle caratteristiche del campo

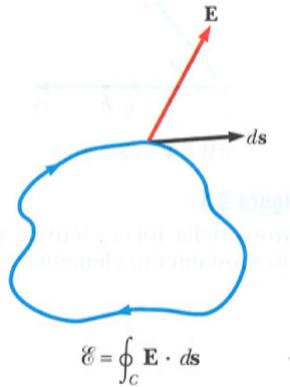


Figura 10.2

e dal percorso C scelto; malgrado il nome, *non è una forza*.

10.1.6 Forze conservative

Per le forze dette *conservative* il lavoro compiuto nello spostamento di un punto da A a B è funzione soltanto della posizione di partenza e di quella di arrivo e non del cammino seguito.

Ne deriva che il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo, ovvero (nel nostro caso della forza elettrica) che la circuitazione di una forza conservativa è nulla.

Non si verifica in natura che qualsiasi *forza elettrica* sia conservativa; questo è però il caso delle forze *elettrostatiche*, ottengo quindi che *il campo elettrico è conservativo* (dimostrazione in seguito).

Differenza di potenziale

Non dipendendo dal percorso effettivamente seguito l'integrale che compare in (10.3) può sempre essere espresso come differenza dei valori di una funzione delle coordinate, chiamata *potenziale elettrico*:

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (10.7)$$

In realtà è la differenza di potenziale (d.d.p.) eletrostatico tra il punto B e il punto A ad essere definita da (10.7) e ciò vuol dire che il potenziale eletrostatico in un punto è determinato a meno di una costante additiva.

Inserendo la differenza di potenziale nella definizione di lavoro:

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = -q_0\Delta V \quad (10.8)$$

Energia potenziale

Ricordiamo che ad ogni forza conservativa è associata una determinata *energia potenziale* e che il lavoro della forza conservativa è pari all'opposto della variazione della corrispondente *energia potenziale*.

$$W_{AB} = -\Delta U_e = -[U_e(B) - U_e(A)]$$

segue l'uguaglianza:

$$\Delta U_e = q_0\Delta V \quad (10.9)$$

La U_e prende il nome di energia potenziale eletrostatica, risulta proporzionale al potenziale eletrostatico e anch'essa definita a meno di una costante additiva.

Segue che per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo eletrostatico E , essendo la differenza di potenziale nulla in quanto $A \equiv B$, valgono le relazioni:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad W = q_0\mathcal{E} = 0 \quad (10.10)$$

In un campo eletrostatico la forza elettromotrice è uguale a zero, ovvero è nullo il lavoro compiuto dalla forza eletrostatica per qualsiasi percorso ciclico.

10.2 Calcolo del potenziale eletrostatico

Campo generato da una carica puntiforme

Lavoro

Il lavoro della forza \vec{F} per uno spostamento elementare $d\vec{s}$ della carica q_0 nel campo della carica puntiforme q , fissa in 0, è dato da:

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

per cui

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

dove $dr = \vec{u} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$, proiezione di $d\vec{s}$ lungo la direzione \vec{u} del campo, rappresenta di quanto è variata la distanza r tra q_0 e q a seguito dello spostamento $d\vec{s}$. La funzione integranda risulta così dipendere soltanto dalla variabile r per cui si ottiene

subito, per uno spostamento dal punto A al punto B caratterizzati rispettivamente dalle distanze r_A e r_B dal punto O .

$$\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = - \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a} \right) \quad (10.11)$$

Il lavoro corrispondente è

$$W = q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = - - \left(\frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r_b} - \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r_a} \right) \quad (10.12)$$

Abbiamo così verificato che il lavoro *non dipende dal percorso seguito*.

Differenza di potenziale ed energia potenziale

Dall'espressione del lavoro possiamo ricavare le espressioni per la differenza di potenziale elettrostatico e di energia potenziale elettrostatica

$$V_B - V_A = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right) \quad (10.13)$$

$$U_e(B) - U_e(A) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (10.14)$$

Il potenziale e l'energia potenziale sono definiti a meno di una costante additiva, ottengo quindi:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A, \quad U_e(r) = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + B$$

che danno rispettivamente il *potenziale elettrostatico* in un punto a distanza r dalla carica q e l'*energia potenziale elettrostatica* della carica q_0 distante r da q .

Posso determinare completamente $V(r)$ e $U_e(r)$ imponendo la condizione ulteriore $r \rightarrow \infty$. Infatti per cariche molto lontane l'interazione è trascurabile.

In conclusione abbiamo:

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10.15)$$

$$U_e(r) = q_0 V(r) = -q_0 \int_{\infty}^r \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10.16)$$

Osserviamo che il potenziale è costante in tutti i punti della superficie sferica di raggio r con centro nella carica q .

10.3 Numero arbitrario di cariche puntiformi

I risultati trovati si estendono senza difficoltà, in base al principio di sovrapposizione, al caso di un campo elettrostatico generato da un numero qualsiasi di cariche puntiformi fisse q_1, q_2, \dots, q_n . Il lavoro per uno spostamento finito da A a B della carica q_0 è

$$W = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

inserendo anche l'estensione per tutti i campi

$$\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\sum_i \vec{\mathbf{E}}_i \right) \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \vec{\mathbf{E}}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{\mathbf{u}}_i \cdot d\vec{s}$$

Quindi il lavoro diventa

$$W = q_0 \int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{\mathbf{u}}_i \cdot d\vec{s} \quad (10.17)$$

Ottengo in modo simile anche la differenza di potenziale elettrostatico e la differenza di energia potenziale

$$V_B - V_A = \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}^2} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}^2} \right) \quad (10.18)$$

$$W = -q_0 (V_B - V_A) = - \left(\sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}^2} - \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}^2} \right) = -\Delta U_e \quad (10.19)$$

Il potenziale generato dal sistema di cariche nel punto $P(x, y, z)$, distante r_i dalla carica q_i , è

$$V(x, y, z) = - \int_{\infty}^P \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (10.20)$$

il potenziale elettrostatico prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alla somma dei potenziali elettrostatici prodotti singolarmente dalle cariche.

10.3.1 Cariche distribuite in modo continuo

Nel caso in cui le cariche siano distribuite in modo continuo, per il calcolo del potenziale elettrostatico basta sostituire la sommatoria con l'integrale:

$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (10.21)$$

dove dq , è un elemento infinitesimo di carica, r la sua distanza dal punto P in cui si calcola il potenziale e dV il potenziale elettrostatico che essa produce in P .

In ogni caso, fissata la distribuzione di cariche, si può calcolare in qualsiasi punto $P(x, y, z)$ il potenziale $V(x, y, z)$ indipendentemente dalla presenza della carica di prova q_0 . L'energia potenziale elettrostatica di tale carica q_0 posta nel punto P è data da:

$$U_e(x, y, z) = q_0 V(x, y, z) \quad (10.22)$$

Capitolo 11

Legge di Gauss

11.1 Angolo solido

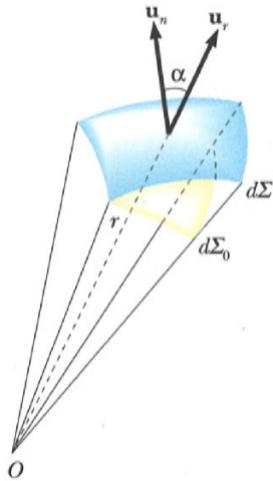


Figura 11.1

Sia $d\Sigma$ un elemento di superficie, \vec{u}_n la sua normale e $d\Sigma_0$ la sua funzione ortogonale a \vec{u}_r , il versore del raggio uscente da un punto di osservazione 0. Si definisce angolo solido infinitesimo, la quantità

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2} \quad (11.1)$$

L'angolo solido è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo piano infinitesimo:

$$d\theta = \frac{ds' \cos \alpha}{r} = \frac{ds}{r} \quad (11.2)$$

La superficie $d\Sigma_0$ è un elemento di calotta sferica e la sua area vale (nel sistema a coordinate polari)

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.3)$$

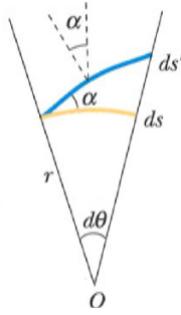


Figura 11.2

La (11.3) esprime l'angolo solido sotto cui dal punto 0 si vede il contorno $ABCD$ della superficie $d\Sigma_0$: risulta che $d\Omega$ non dipende dal raggio r . Geometricamente, possiamo dire che l'angolo solido dà una misura della parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti da 0, così come l'angolo piano dà una misura della parte di piano compresa tra due semirette uscenti da 0.

Per una superficie finita l'angolo solido è dato dall'integrale

$$\Omega = \int \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.4)$$

che è un integrale doppio sulle variabili θ e ϕ .

Se, a θ costante, si fa variare ϕ da zero a 2π , abbiamo l'angolo solido sotto cui da 0 è vista la corona sferica infinitesima

$$d\Omega = \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (11.5)$$

Integrando da θ_1 a θ_2

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = 2\pi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

In particolare se $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$

$$\Omega(\theta) = 2\pi(1 - \cos \theta) \quad (11.6)$$

e infine, se $\theta_2 = \pi$, abbiamo l'angolo solido sotto cui dal centro è vista tutta la superficie sferica,

$$\Omega = 4\pi \quad (11.7)$$

11.2 Flusso del campo eletrostatico, Legge di Gauss

11.2.1 Definizione di flusso attraverso una superficie

Consideriamo, una superficie $d\Sigma$ in una regione in cui è definito un campo \vec{E} e orientiamola fissando il verso del versore della normale \vec{u}_n .

Si definisce *flusso del campo \vec{E} attraverso la superficie $d\Sigma$* la quantità scalare

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E \cos \theta d\Sigma = E_n d\Sigma \quad (11.8)$$

Il flusso attraverso una superficie finita Σ , si ottiene suddividendo la superficie Σ in elementi infinitesimi di superficie $d\Sigma_i$, calcolando per ciascuno di essi il flusso infinitesimo $d\Phi(\vec{E}_i) = \vec{E}_i \cdot \vec{u}_{i,n} d\Sigma_i$, e sommando gli infiniti contributi, procedura che porta ad un *integrale di superficie*:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad (11.9)$$

Se la superficie è chiusa, il flusso si scrive, con l'integrale di ciclo chiuso:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad (11.10)$$

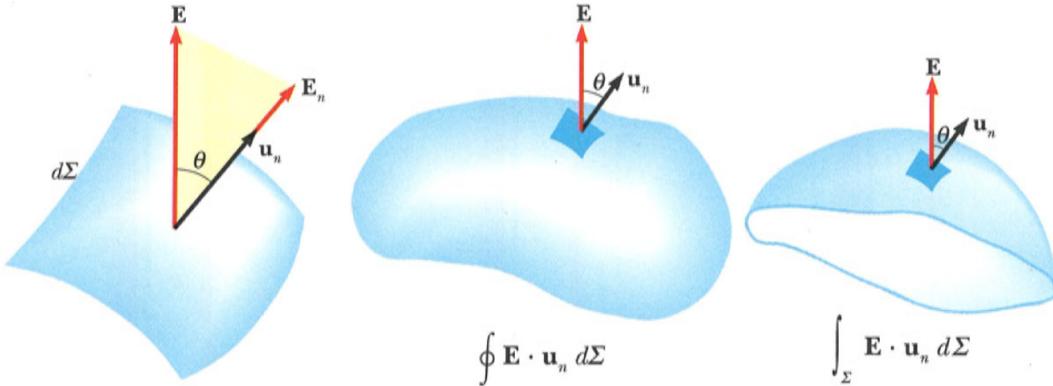


Figura 11.3

In questo caso è convenzione orientare la normale verso l'esterno. I contributi positivi all'integrale (11.10) sono quelli per cui $\vec{E} \cdot \vec{u}_n > 0$, dovuti a quelle zone dove anche \vec{E} punta verso l'esterno: essi rappresentano un flusso di \vec{E} uscente dalla superficie. I contributi negativi provengono dalle zone in cui $\vec{E} \cdot \vec{u}_n < 0$, in cui cioè \vec{E} punta verso l'interno, e rappresentano un flusso di \vec{E} entrante.

Pertanto (11.10) dà *il flusso netto attraverso la superficie chiusa*; se esso è nullo vuol dire che il flusso entrante eguaglia in modulo il flusso uscente.

11.2.2 Legge di Gauss

La legge di Gauss stabilisce che: *il flusso del campo elettrostatico \vec{E} prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa (detta anche gaussiana) è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per ϵ_0 .*

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} (\Sigma_i q_i)_{int} \quad (11.11)$$

La legge vale indipendentemente da come sono distribuite le cariche all'interno della superficie. Si noti che il campo \vec{E} che compare nell'integrale del flusso è il *campo risultante* delle tre cariche

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq \quad (11.12)$$

essendo l'integrale al terzo membro esteso a tutto il volume τ racchiuso da Σ . In pratica, poi, l'integrale è esteso ai soli punti in cui c'è carica $dp \neq 0$.

Unificando la struttura dell'ultimo membro la legge di Gauss si presenta in maniera generale come:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (11.13)$$

11.3 Dimostrazione della legge di Gauss

Prendiamo in esame il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme q , e calcoliamo il flusso attraverso l'elemento di superficie orientata utilizzando (11.8):

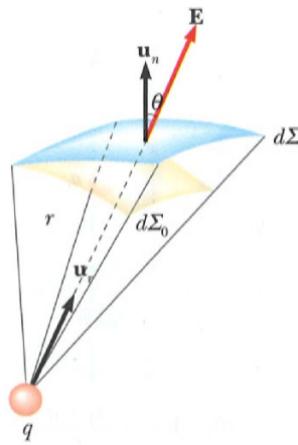


Figura 11.4

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{d\Sigma \cos \theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

dove $d\Sigma_0$ è la proiezione di $d\Sigma$ sul piano perpendicolare a \vec{u}_r . Per definizione $d\Sigma_0/r^2$ è l'angolo solido $d\Omega$ sotto cui è visto dalla carica q il contorno di $d\Sigma$, per cui

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (11.14)$$

Il flusso del campo elettrostatico \vec{E} di una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla carica; ottengo quindi

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1 \cos \theta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_{1,0}}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos \theta_2}{r_2^2} = \frac{d\Sigma_{2,0}}{r_2^2}$$

Il flusso attraverso una superficie finita è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (11.15)$$

con Ω , angolo solido sotto cui è visto il contorno della superficie Σ , dalla carica q .

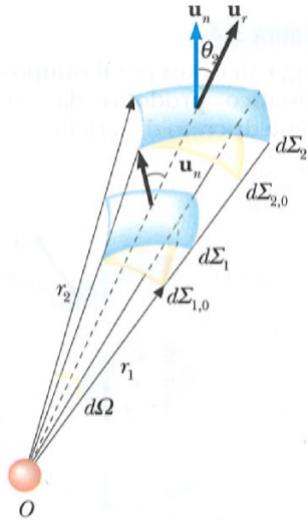


Figura 11.5

11.3.1 Carica Interna

Se la carica è interna, tutti i contributi $\vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ si sommano in quanto hanno sempre lo stesso segno in qualsiasi punto di Σ , e applicando (11.10) abbiamo

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (11.16)$$

infatti l'angolo solido totale sotto cui è vista una superficie chiusa qualunque da un punto all'interno è 4π .

11.3.2 Carica Esterna

Se invece la carica è esterna alla superficie chiusa, consideriamo, un cono elementare che sottende l'angolo solido $d\Omega$ e che stacca sulla superficie chiusa due elementi $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$; l'orientazione della normale è tale che su $d\Sigma_1 \vec{E} \cdot \vec{u}_n < 0$ e su $d\Sigma_2 \vec{E} \cdot \vec{u}_n < 0$.

I flussi attraverso i due elementi sono:

$$\begin{aligned} d\Phi_1(\vec{E}) &= \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ d\Phi_2(\vec{E}) &= \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1(E) \\ \implies d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

Integrando su tutta la superficie ottengo:

$$d\Phi_1(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad (11.17)$$

Posso riassumere (11.16) e (11.17): *il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo elettrostatico di una carica puntiforme q vale q/ϵ_0 se la carica è interna alla superficie, vale zero se la carica è esterna.*

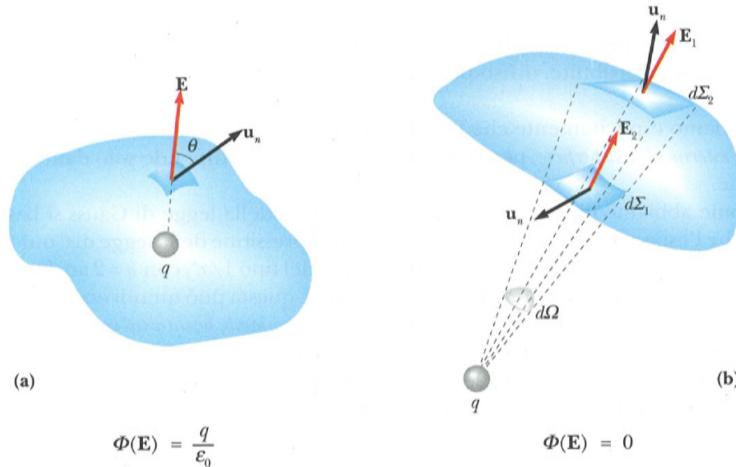


Figura 11.6

11.3.3 Cariche puntiformi e cariche uniformemente distribuite

Il risultato enunciato si estende al caso di più cariche puntiformi, attraverso il principio di sovrapposizione e la proprietà additiva degli integrali: il flusso attraverso una superficie chiusa del campo elettrostatico \vec{E} generato da un sistema discreto di cariche è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint (\Sigma_i \vec{E}_i) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

Ciascun integrale vale q_i/ϵ_0 se la carica è contenuta all'interno della superficie e vale zero se la carica è esterna.

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum_i q_i)_{int} \quad (11.18)$$

essendo la somma estesa a tutte e sole le cariche poste all'interno della superficie Σ .

Nel caso più generale in cui il campo sia generato da una distribuzione continua di cariche, la (11.18) diviene

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq \quad (11.19)$$

dove l'integrale, esteso al volume τ racchiuso dalla superficie Σ , rappresenta sempre la carica totale contenuta all'interno di Σ .

11.4 Applicazioni teorema di Gauss

La legge di Gauss diventa uno strumento molto efficace per determinare il campo elettrostatico E nei casi in cui la distribuzione di carica che genera il campo elettrostatico presenti un elevato grado di simmetria (sferica, cilindrica, piana). In queste condizioni di norma è facile individuare a priori l'andamento delle linee di forza e trovare di conseguenza delle superficie chiuse \vec{E} nei cui punti il campo elettrostatico è parallelo o ortogonale alla superficie stessa, per cui i contributi $\vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ o sono nulli, o si scrivono semplicemente $E d\Sigma$. Se inoltre si può dedurre che il modulo del campo elettrostatico è

costante in una zona di area Σ' in cui \vec{E} è parallelo a \vec{u}_n , la legge di Gauss assume la forma:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

da cui si trova subito il modulo del campo elettrostatico:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma'}$$

dove q è la carica posta all'interno della superficie chiusa Σ .

11.4.1 Campo elettrostatico di una distribuzione sferica superficiale di carica

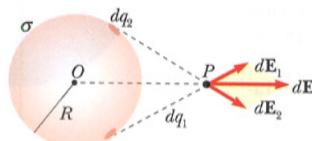


Figura 11.7

Una carica q è distribuita con densità superficiale costante σ su una superficie sferica di raggio R . Nel punto P distante $r > R$ dal centro \vec{E} è certamente radiale, in quanto è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, eguali in modulo, la cui risultante è radiale; se così non fosse vorrebbe dire che σ non è uniforme. In qualsiasi altro punto che ha la stessa distanza di P dal centro la situazione è la stessa. Ciò significa che il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio r , è ortogonale a questa e ha verso uscente o entrante a seconda del segno della carica.

Applicando ad una superficie sferica Σ di raggio $r > R$:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \vec{E}(r) \oint d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

con $q = 4\pi R^2 \Sigma$. Ottengo quindi:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \\ \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{aligned}$$

Il campo all'esterno di una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica è eguale a quello di una carica puntiforme di egual valore posta nel centro della superficie sferica; a parità di carica esso non dipende dal raggio della distribuzione.

All'interno della superficie sferica valgono le stesse ragioni di simmetria per cui il campo dovrebbe essere radiale e il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica Σ' di raggio $r < R$ dovrebbe valere $E\Sigma'$. D'altra parte all'interno non c'è carica, il flusso attraverso Σ' è nullo e quindi deve essere $E = 0$ per $r < R$: all'interno di una distribuzione superficiale sferica uniforme il campo elettrostatico è nullo.

11.4.2 Campo elettrostatico prodotto da una sfera uniformemente carica

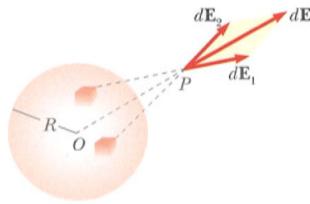


Figura 11.8

Una carica q è distribuita con densità spaziale ρ uniforme nel volume di una sfera di raggio R . Il ragionamento basato sulla simmetria sferica utilizzato precedentemente, è valido anche adesso per $r > R$ e possiamo subito dire che il campo all'esterno di una sfera uniformemente carica vale

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

con

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

è come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera.

Ne segue che il modulo del campo elettrostatico a distanza $r < R$ dal centro vale

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

In conclusione, il campo cresce linearmente dal valore zero assunto nel centro della sfera al valore $\rho R / 3\epsilon_0 = q / 4\pi\epsilon_0 R^2$ assunto sulla superficie della sfera; all'esterno esso decresce con il quadrato della distanza dal centro.

Il potenziale della sfera è dato da $V = q / 4\pi\epsilon_0 r$ e in particolare vale

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

sulla superficie della sfera. All'interno

$$\begin{aligned} V(R) - V(r) &= - \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) \\ \implies V(r) &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R} \right) \end{aligned}$$

11.4.3 Campo elettrostatico di un cilindro uniformemente carico

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica ha forma cilindrica di raggio R ; la lunghezza del cilindro è molto grande (al limite infinito) rispetto a R

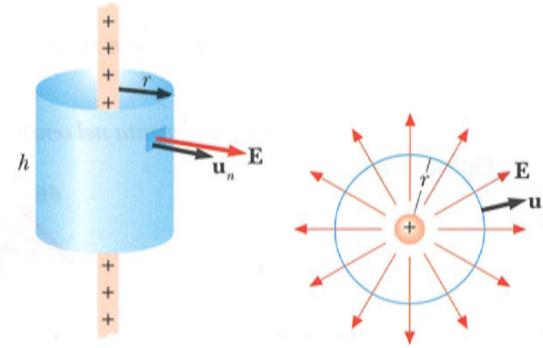


Figura 11.9

La simmetria cilindrica del problema suggerisce che il campo elettrostatico sia diretto in ogni punto ortogonalmente all'asse del cilindro formato dalla carica e sia costante su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio r . Per applicare la legge di Gauss consideriamo una scatola cilindrica Σ di raggio $r > R$ e altezza h .

Il flusso di \vec{E} attraverso le basi di Σ è nullo in quanto il campo è parallelo alle basi e quindi ortogonale a \vec{u}_n . Il flusso attraverso la superficie laterale, che per quanto detto coincide con il flusso totale attraverso Σ , vale

$$\Phi(E) = E\Sigma = 2\pi rhE = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carica contenuta entro Σ è

$$q = \int \rho d\tau = \rho\pi R^2 h = \lambda h$$

definendo

$$\lambda = \rho\pi R^2 = \frac{q}{h}$$

la carica contenuta in un cilindro di raggio R e altezza unitaria.

Quindi

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

La d.d.p. tra due qualsiasi superficie equipotenziali, che sono superfici cilindriche coassiali di raggi r_1 e r_2 , con $r_2 > r_1$ è:

$$V(r_2) - V(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} Edr = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

rispetto al bordo $r \gg R$

$$V(r_2) - V(r_1) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}$$

I risultati trovati valgono anche per un sottile filo rettilineo molto lungo, su cui è depositata una carica distribuita con densità uniforme λ .

11.4.4 Campo elettrostatico di un piano indefinito uniformemente carico

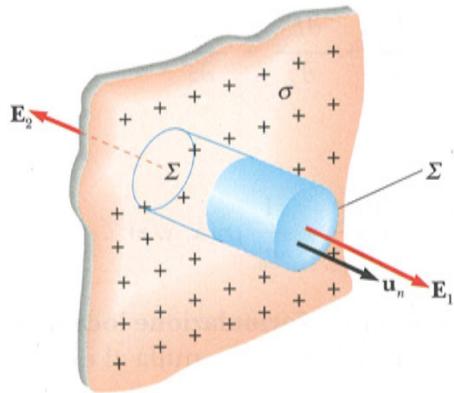


Figura 11.10

Una carica è distribuita con densità superficiale σ su un piano indefinito. Sempre in base a ragionamenti di simmetria si deduce che il campo elettrostatico è ortogonale al piano su cui è distribuita la carica e ha versi opposti dalle due parti (cioè è sempre uscente o sempre entrante). Come superficie a cui applicare la legge di Gauss sceglieremo una scatola cilindrica con le basi, di area Σ , parallele al piano, così che il flusso attraverso le basi è $2E\Sigma$ mentre quello attraverso la superficie laterale è nullo.

All'interno della scatola c'è la carica $q = \sigma\Sigma$: e quindi

$$\Phi(\vec{E}) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Vettorialmente, dato x un asse ortogonale al piano,

$$E_1 = E(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$E_2 = E(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

nel passaggio attraverso la superficie carica il campo elettrostatico è discontinuo e ottengo che nel passaggio

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x - \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

La differenza di potenziale elettrostatico tra due punti distanti x_1 e dal piano, con $x_2 > x_1$ è

$$V(x_2) - V(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} E dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

Capitolo 12

Conduttori, dielettrici, energia elettrostatica

12.1 Conduttori in equilibrio

12.1.1 Condizione di equilibrio per un conduttore

I materiali conduttori sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. La nostra trattazione si concentra sui conduttori solidi, il cui esempio più tipico sono i metalli: in essi per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel conduttore. Con l'applicazione di un opportuno campo \vec{E} si può provocare un moto ordinato di elettroni ovvero dar luogo a una corrente elettrica.

Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo, altrimenti ci sarebbe un moto di cariche, contrariamente all'ipotesi. Pertanto lo stato di conduttore in *equilibrio elettrostatico* è definito dalla condizione:

$$\vec{E} = 0 \text{ all'interno}$$

Si deve intendere che questa è una condizione media macroscopica. Nelle immediate vicinanze dei nuclei ci sono campi molto intensi che tengono legati gli elettroni non liberi; inoltre gli elettroni liberi non sono in quiete ma hanno un moto completamente disordinato di agitazione termica. Però in nessun istante c'è un moto ordinato in una certa direzione degli elettroni liberi rispetto agli ioni metallici fissi; si usa per questo parlare di gas di elettroni liberi all'interno di un conduttore.

La condizione $\vec{E} = 0$ ha le seguenti conseguenze che caratterizzano un conduttore in equilibrio elettrostatico:

- l'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore;

- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore;
- il campo elettrostatico in un punto delle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e ha intensità σ/ϵ_0 , con σ densità di carica superficiale in quel punto.

Per la prima proprietà, se il campo elettrostatico è nullo, è nullo il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa Σ' tracciata all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss all'interno del conduttore non ci sono cariche ($q_{int} = 0$). Pertanto l'eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore con densità superficiale $\sigma = dq/d\Sigma$; se si cedono al conduttore elettroni questi si portano sulla superficie, se si sottraggono, ne risulta carente lo strato superficiale.

Il potenziale elettrostatico risulta costante in ogni punto del conduttore perché presi due punti qualsiasi

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies V(P_2) = V(P_1) = V_0$$

Il risultato è vero anche se uno dei due punti sta sulla superficie del conduttore, che risulta quindi essere una *superficie equipotenziale*.

12.1.2 Teorema di Coulomb

Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo elettrostatico \vec{E} in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore, indipendentemente dalla forma di questo.

Il valore di \vec{E} si ricava applicando la legge di Gauss ad un cilindro retto di basi $d\Sigma$ e superficie laterale di area trascurabile rispetto a $d\Sigma$, con una base contenuta all'interno del conduttore, in cui $E = 0$, e l'altra in prossimità immediata del conduttore all'esterno, dove il campo elettrostatico \vec{E} è normale alla superficie. Detta dq la carica contenuta all'interno, sulla superficie del conduttore, si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Ed\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d\Sigma$$

e quindi

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n \quad (12.1)$$

detto anche *Teorema di Coulomb*. Il verso è *uscente* se la densità è *positiva*, *entrante* se è *negativa*. Si vede che il modulo del campo elettrostatico è maggiore dove σ è maggiore (questo avviene dove il raggio di curvatura è minore).

Un conduttore carico *lontano da altri conduttori* ha dunque una distribuzione superficiale di carica tale che il campo elettrostatico all'interno sia nullo, qualunque sia la forma del conduttore. In particolare se il conduttore è sferico la carica è distribuita uniformemente. Notiamo inoltre che la carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie: un accumulo di elettroni soltanto in una certa zona sarebbe dovuto esclusivamente a un campo elettrico esterno.

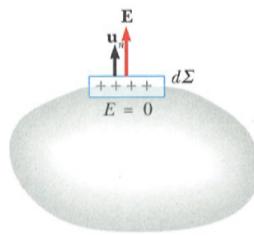


Figura 12.1

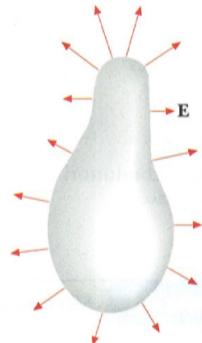


Figura 12.2

12.1.3 Induzione elettrostatica

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendolo in un campo elettrico esterno \vec{E} , il campo elettrostatico all'interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da \vec{E} ; senonché questo fatto provoca un movimento di elettroni che si spostano per l'azione del campo elettrico esterno e si accumulano in una zona della superficie, lasciando sul resto della superficie un eccesso di carica positiva: tra queste zone si crea un campo elettrostatico indotto \vec{E}_i che contrasta il movimento degli elettroni e si raggiunge l'equilibrio quando $E + E_i = 0$ in tutto l'interno del conduttore. Abbiamo così una distribuzione di carica elettrica indotta dei due segni sulla superficie del conduttore che si sovrappone all'eventuale carica elettrica preesistente; in totale però la carica elettrica del conduttore rimane la stessa poiché la carica elettrica indotta è la somma algebrica dei due contributi eguali ed opposti. È il caso dell'induzione elettrostatica.

Se poniamo a contatto due o più conduttori, ad esempio collegandoli con un filo conduttore, si costituisce un unico corpo conduttore e in equilibrio vale ovunque la condizione $E = 0, V = \text{costante}$: i conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale.

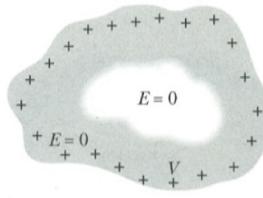


Figura 12.3

12.2 Conduttore cavo, schermo elettrostatico

12.2.1 Conduttore cavo

Consideriamo un conduttore carico che abbia nel suo interno una cavità all'interno della quale non ci siano cariche elettriche. Nella massa del conduttore il campo elettrostatico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ che racchiuda la cavità: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di Σ non ci sono cariche e quindi sulle pareti della cavità la carica è nulla.

Dimostrazione

Se sulle pareti della cavità fossero presenti due distribuzioni di carica di segno opposto, ci sarebbero nella cavità linee di forza, uscenti dalle cariche positive e entranti in quelle negative. La circuitazione di \vec{E} lungo una linea chiusa, costituita da un tratto C_1 interno alla cavità su cui $\vec{E} \neq 0$ e da un tratto C_2 interno al conduttore dove $\vec{E} = 0$, darebbe

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

in contrasto col fatto che \vec{E} è conservativo. Pertanto il campo nella cavità deve essere nullo se l'integrale di linea esteso a qualsiasi percorso C_1 interno alla cavità deve essere nullo: sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche. Inoltre è chiaro che il potenziale elettrostatico in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore: se ci fosse una differenza di potenziale dovrebbe infatti esserci un campo elettrostatico diverso da zero.

In conclusione:

- la carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità all'interno del conduttore;
- il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità.

In particolare un conduttore sferico isolato carico di raggio R , che sia pieno o con una cavità sferica concentrica o con cavità di qualsiasi forma, ha sempre campo elettrostatico

nullo all'interno e campo elettrostatico in vicinanza della superficie esterna:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

uguale a quella di una carica puntiforme q posta nel centro O della superficie sferica.

12.2.2 Induzione completa

Consideriamo adesso un conduttore C_2 cavo, isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore C_1 carico nella cavità, mantenendolo isolato da C_2 . In condizioni di equilibrio, se C_1 ha sulla sua superficie esterna una carica q , una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna e una carica q sulla superficie esterna di C_2 .

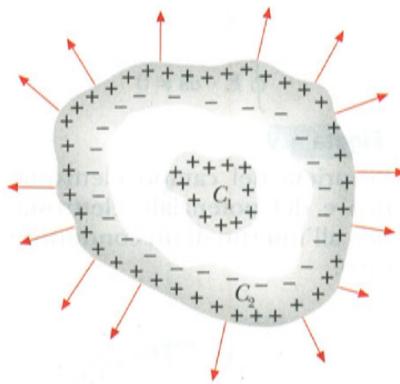


Figura 12.4

Dimostrazione

Tale fatto si spiega subito con la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa Σ interna a C_2 e contenente la cavità il flusso di \vec{E} è nullo in quanto è nullo il campo stesso; di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e se C_1 porta la carica q , sulla superficie interna di C_2 deve necessariamente comparire una carica $-q$. Inoltre essendo C_2 neutro, lo spostamento di una carica $-q$ sulla superficie interna provoca la comparsa di una carica $+q$ sulla superficie esterna.

Siamo di fronte a un fenomeno di induzione che in questo caso, essendo la carica q completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa, si chiama induzione completa: *tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2* .

Dalla superficie esterna di C_2 partono altre linee di forza, il cui andamento in prossimità del conduttore riflette la distribuzione delle cariche sulla superficie stessa. Le due zone in cui esiste un campo sono separate da una zona in cui, in equilibrio, non può esistere campo elettrostatico.

Il campo elettrostatico all'interno della cavità è determinato dal valore di q , dalla posizione di C_1 e dalla forma geometrica delle due superficie affacciate. Però, fissato q , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque siano forma e posizione. Infatti

possiamo dire che l'informazione sulla situazione interna potrebbe passare all'esterno solo attraverso un campo elettrostatico che penetrasse nel conduttore C_2 : ma questo non è possibile per la proprietà dei conduttori in equilibrio di avere campo elettrostatico nullo all'interno. Al limite si può portare C_1 a contatto con C_2 , con il che le cariche $+q$ e $-q$ si elidono, ma all'esterno non cambia nulla: questo fatto ci fa anche capire che la distribuzione della carica $-q$ sulla faccia interna di C_2 è sempre tale che, sommando l'effetto della carica q di C_1 , il campo elettrostatico dovuto alle cariche nella cavità è nullo all'esterno della cavità.

Analogamente, se variamo la carica sulla superficie esterna oppure variamo la sua distribuzione, ad esempio avvicinando al conduttore un altro corpo carico, cambia il campo elettrostatico all'esterno, ma la distribuzione di carica sulla superficie esterna di C_2 è sempre tale da dare campo elettrostatico nullo all'interno di C_2 e quindi non può alterare il campo locale esistente nella cavità.

12.2.3 Schermo elettrostatico

Pertanto finché lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicanti: il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno

12.3 Condensatori

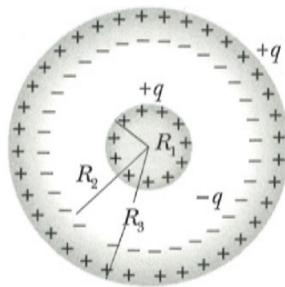


Figura 12.5

Consideriamo il sistema costituito da un conduttore sferico di raggio R_1 al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 . Se $+q$ è la carica depositata sul conduttore interno, $-q$ è quella che deve esistere, in equilibrio, sulla superficie interna della cavità, affinché all'interno del conduttore cavo il campo elettrostatico risulti nullo; una carica $+q$ è naturalmente presente sulla superficie esterna del conduttore cavo. Il campo elettrostatico all'interno della cavità $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ è determinato dalle cariche presenti sulle superficie che la delimitano; la differenza di potenziale tra i conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

che riscritta completa

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (12.2)$$

mostra che il rapporto tra carica e differenza di potenziale dei due conduttori sferici concentrici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i raggi R_1 e R_2 , in questo caso il vuoto caratterizzato da ϵ_0 .

Un sistema come quello descritto, costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa, si chiama condensatore; i due conduttori prendono il nome di armature del condensatore. Si definisce capacità del condensatore:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \left[F = \frac{C}{V} \right] \quad (12.3)$$

dove $\pm q$ è la carica presente sulle due armature e ΔV la differenza di potenziale tra le stesse.

12.3.1 Capacità condensatore sferico

La capacità di un condensatore sferico è:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (12.4)$$

Se si fa tendere $R_2 \rightarrow \infty$ si ottiene

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1 \quad (12.5)$$

che può essere definita come *capacità di un conduttore sferico isolato*. Si può in generale definire *un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura posta all'infinito*. Se il conduttore ha una carica $+q$, la carica $-q$ si forma per induzione all'infinito, distribuita su una superficie infinita e perciò con densità nulla.

In tal senso la presenza della seconda armatura ha come risultato l'aumento della capacità del sistema, che va attribuito all'aumento dell'influenza tra le due armature.

Possiamo vedere quantitativamente tale effetto così: se la distanza tra le due armature sferiche diventa piccola rispetto ai raggi, cioè se

$$h = R_2 - R_1 \ll R_1 \simeq R_2 = R$$

la capacità del condensatore si scrive

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (12.6)$$

con $\Sigma = 4\pi R^2$ area delle armature. La capacità cresce all'aumentare di Σ e al diminuire di h .

12.3.2 Capacità di un condensatore cilindrico

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio R_1 e l'altra di raggio $R_2 > R_1$ di eguale lunghezza d grande

rispetto ai raggi. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione approssimativamente completa. Se si escludono i tratti estremi, nell'intercapedine cilindrica tra R_1 e R_2 il campo elettrostatico è radiale:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

e la differenza di potenziale tra le armature è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

La carica per unità di lunghezza λ , è pari a q/d e quindi:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (12.7)$$

Se $h = R_2 - R_1$ è molto minore dei raggi, sviluppiamo in serie il denominatore arrestandoci al primo termine,

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R}$$

per cui la capacità

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (12.8)$$

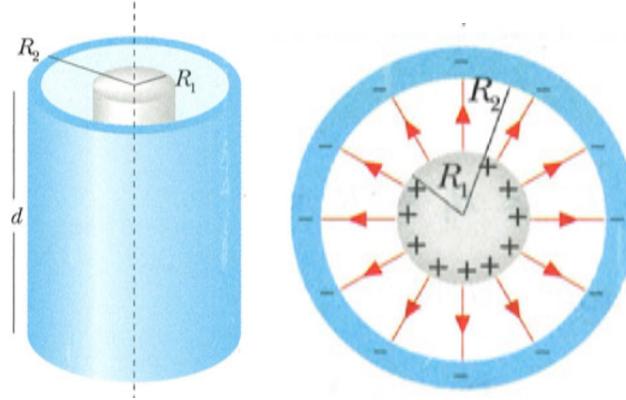


Figura 12.6

con $\Sigma = 2\pi R d$ area delle armature distanti h : ritrovo (12.6)

Da 12.7 definisco la *capacità per unità di lunghezza*

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (12.9)$$

12.3.3 Capacità di un condensatore piano

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h . La carica positiva q è distribuita con densità uniforme a sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità uniforme $-\sigma$ sull'armatura negativa.

La capacità di un condensatore piano è data da

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (12.10)$$

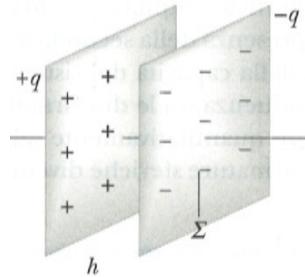


Figura 12.7

Questa volta non ci sono approssimazioni geometriche, però quest'ultima è approssimata per un'altra ragione: il campo si può supporre uniforme solo nella regione centrale del condensatore, lontano dai bordi.

12.4 Collegamento di condensatori

Un condensatore viene utilizzato essenzialmente come deposito di carica; pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità $+q$ e $-q$, proporzionali per un conduttore di data capacità alla differenza di potenziale tra le armature. Tramite opportuni collegamenti conduttori esterni è possibile far fluire la carica negativa (elettroni) da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore.

Possiamo però subito descrivere come si collegano con fili conduttori più condensatori tra loro e calcolare la capacità equivalente. Noi supponiamo costanti nel tempo le cariche e le differenze di potenziale, però i risultati sono validi anche in regime variabile.

12.4.1 Condensatori in parallelo

La connessione in parallelo delle armature consiste nel realizzare due soli conduttori. In tal modo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la *d.d.p.* applicata al condensatore C_1 è eguale a quella applicata al condensatore C_2 .

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V$$

La carica globale sul conduttore superiore, costituito dalle due armature superiori è

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V$$

sul conduttore inferiore la carica è $-q = -(q_1 + q_2)$. Definiamo capacità equivalente del sistema

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 \quad (12.11)$$

Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti. Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$C_{eq} = C_1 + \dots + C_n$$

in un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa differenza di potenziale e la capacità equivalente è somma delle singole capacità.

12.4.2 Condensatori in serie

Nella connessione in serie c'è un solo collegamento tra i due condensatori e viene costituito un sistema composto da n conduttori: ai due estremi si applica la differenza di potenziale $V = V_C - V_A$ e il conduttore intermedio assume un potenziale V_B . Se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale V_C , per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura affacciata e $+q$ sull'armatura di C_2 a questa collegata, dovendo essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura di C_2 a potenziale V_A . Vediamo che il valore della carica è lo stesso nei due condensatori.

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= \frac{q}{C_1}, \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2} \\ V = V_C - V_A &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \end{aligned}$$

Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (12.12)$$

in un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

12.5 Energia del campo elettrico

12.5.1 Carica di un condensatore

Il processo di carica di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero sulle armature alla situazione ($+q, -q$) con una differenza di potenziale $V = q/C$ tra le

armature, consiste in definitiva in una separazione di cariche e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo elettrostatico conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare quindi che la carica di un condensatore avvenga sottraendo, tramite un agente esterno, una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine una carica $+q$ è stata trasferita da un'armatura all'altra, lasciando la prima con una carica $-q$, e si è stabilita tra le armature la differenza di potenziale V ; la carica totale è in ogni istante nulla.

Se in una fase intermedia del processo la differenza di potenziale tra le armature è V' , in quanto è già stata trasferita la carica $q' = CV'$ il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la differenza di potenziale V' è

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

e quindi il valore complessivo per effettuare la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Esso dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di energia (potenziale) elettrostatica. Assumendo che l'energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$, servendoci delle (12.6), scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C , carico con carica q e differenza di potenziale V :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad (12.13)$$

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di carica dall'infinito, dove $V = 0$, alla superficie del conduttore. Ciò torna formalmente con l'idea di considerare un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura all'infinito.

Il ragionamento svolto per il calcolo dell'energia del condensatore lega l'energia alle cariche, che la possiedono in quanto si trovano ad un certo potenziale: l'energia totale è la somma delle energie potenziali delle singole cariche. È però possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso. Riprendo (12.13) con la relazione $V = Eh$

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico.

Se facciamo l'ipotesi che l'energia elettrostatica sia distribuita nei punti in cui c'è campo elettrostatico e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che

la densità di energia elettrostatica, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (12.14)$$

che risulta pertanto *proporzionale al quadrato del campo elettrostatico*. La generalità di questa formula, in cui non compare alcun elemento caratteristico del sistema per cui il calcolo è stato eseguito, ma soltanto il valore del campo e una proprietà del mezzo (in questo caso il vuoto), suggerisce che (12.14) si possa applicare a qualsiasi situazione.

In effetti si può dimostrare che in una regione in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo $d\tau$, al cui interno il campo elettrostatico vale E è

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau$$

l'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando su tutto il volume in cui il campo elettrostatico è diverso da zero:

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau \quad (12.15)$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo elettrostatico. Le (12.14) e (12.15) valgono per qualsiasi campo elettrico, indipendentemente dalla sua natura.

12.5.2 Pressione elettrostatica

Calcolo la forza tra due armature di un condensatore piano, di area Σ distanti h , carico con una carica q , e il rapporto F/Σ , detto pressione elettrostatica. L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area Σ distanti h è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h$$

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza F attrattiva che per ragioni di simmetria è parallela a \vec{E} . Per uno spostamento dh dell'armatura positiva ($dh < 0$) l'energia elettrostatica diminuisce di

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh$$

e viene fornito dalla forza \vec{F} il lavoro

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{h} = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh > 0$$

positivo, per cui la forza \vec{F} è concorde a dh e vale:

$$F = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Sigma \quad (12.16)$$

Esprimendo σ in funzione del campo elettristico E abbiamo in modulo:

$$F = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \Sigma$$

e la forza per unità di superficie risulta

$$p_{el} = \frac{F}{\Sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (12.17)$$

detto *pressione elettristica*.

La (12.17), che non contiene elementi caratteristici del sistema (anche forma del condensatore), ha validità generale, qualsiasi sia la distribuzione di carica superficiale e mostra che la pressione elettristica ha la stessa espressione della densità di energia.

Pressione elettristica in condensatore isolato

In un condensatore isolato vale:

$$Q = \text{costante} \implies \sigma = \frac{Q}{\Sigma} = \text{costante} \implies E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \text{costante}$$

Ottengo quindi

$$F = -\frac{d}{dh} \left[\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Sh \right] = -\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 S$$

pertanto la pressione elettristica sarà:

$$p_{el} = -\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Pressione elettristica in condensatore attaccato ad un generatore

In un condensatore isolato vale:

$$\Delta V = \text{costante}$$

dato che $C = \frac{Q}{\Delta V}$ ottengo che:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \text{costante}$$

Per trovare la forza devo misurare la variazione dell'energia del generatore e del condensatore stesso:

$$\Delta U_{TOT} = \Delta U_{GEN} + \Delta U_{el}$$

dove ΔU_{GEN} carica energia nel condensatore.

Varia la capacità e quindi varia anche la carica, quindi vale:

$$q' - q = (C' - C) \Delta V = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{h - dh} + \frac{1}{h} \right) \Delta V$$

$$q' - q = \frac{\epsilon_0 S}{h} \Delta V dh$$

Il lavoro del generatore è quindi

$$W_{GEN} = (q' - q) \Delta V = \epsilon_0 S dh \left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2$$

La differenza di energia elettrostatica del condensatore sarà quindi:

$$d(\Delta U_{el}) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2 S dh$$

La differenza di energia elettrostatica del generatore sarà quindi:

$$d(\Delta U_{gen}) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2 S dh$$

La variazione totale è:

$$d(\Delta U) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2 S dh$$

La forza diventa:

$$F = -\frac{d\Delta U}{dh} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2 S$$

dato $\left(\frac{\Delta V}{h} \right)^2 = E^2$ la pressione elettrostatica è come stabilito precedentemente:

$$p_{el} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Capitolo 13

Corrente elettrica

13.1 Conduzione elettrica

I materiali conduttori solidi sono costituiti da un reticolo spaziale ai cui vertici si trovano gli ioni positivi (atomi che hanno perso uno o più elettroni) e al cui interno si muovono gli elettroni liberi. In un metallo questi sono gli unici portatori mobili di carica. Nel rame e nell'argento, in cui c'è un elettrone libero per atomo, il numero di elettroni per unità di volume coincide con il numero di atomi per unità di volume e abbiamo rispettivamente

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 8.96 \cdot 10^3}{63.55} = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / } m^3$$
$$n = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 10.5 \cdot 10^3}{107.87} = 5.86 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / } m^3$$

In qualsiasi volume τ , piccolo su scala macroscopica, ma contenente un numero N di elettroni abbastanza elevato, la velocità media è nulla:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_m = \frac{1}{N} \sum_i \overrightarrow{\mathbf{v}}_i = 0$$

indicando con $\overrightarrow{\mathbf{v}}_i$ le velocità dei singoli elettroni. Ciò vuol dire che non esiste una direzione di moto preferenziale per gli elettroni.

Se si mettono a contatto due conduttori C_1 e C_2 isolati, a potenziali V_1 e V_2 diversi, si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale V . Nel processo un certo numero di elettroni passa dal conduttore a potenziale minore a quello a potenziale maggiore, sotto l'azione del campo elettrico \vec{E} dovuto alla differenza di potenziale, ΔV . Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una *corrente elettrica* e il fenomeno è un esempio di *conduzione elettrica*.

La corrente elettrica in questo caso specifico dura soltanto un tempo molto breve che impedisce l'esecuzione di studi sistematici del fenomeno.

A tale scopo è necessario un dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale, e quindi un campo elettrico, tra due conduttori a contatto ovvero tra due punti di uno

stesso conduttore. Così facendo il flusso di elettroni può durare per molto tempo e quindi nel conduttore si instaura una corrente elettrica stabile, in un regime di equilibrio dinamico e non più di equilibrio elettrostatico.

Un qualsiasi dispositivo con le caratteristiche appena descritte è definito come *generatore di forza elettromotrice (f.e.m.)*.

13.2 Corrente elettrica

Supponiamo che in una certa regione di un conduttore ci siano n portatori di carica $+e$ per unità di volume e che in essa agisca un campo elettrico \vec{E} prodotto da un generatore di forza elettromotrice; i portatori si muovono sotto l'azione della forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$, acquistando, la velocità v_d lungo la direzione del campo elettrico \vec{E} , detta velocità di deriva. Tale moto dà origine ad una corrente elettrica.

Consideriamo una superficie Σ tracciata all'interno del conduttore: detta Δq la carica che passa nel tempo Δt attraverso la superficie si definisce intensità di corrente media la grandezza:

$$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La intensità di corrente istantanea è definita come il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ della intensità media:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

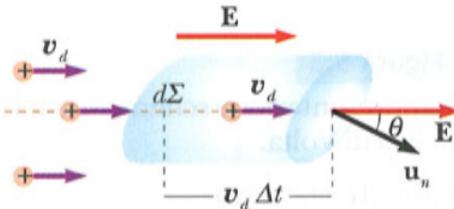


Figura 13.1

Per mettere in relazione la corrente elettrica con il moto delle cariche ci riferiamo a una superficie infinitesima $d\Sigma$: la cui normale \vec{u}_n formi un angolo θ con il campo elettrico \vec{E} e quindi con la velocità \vec{v}_d delle cariche positive. Nel tempo Δt le cariche percorrono la distanza $v_d \Delta t$ per cui la carica complessiva che passa attraverso $d\Sigma$: nel tempo Δt è quella contenuta nel volume infinitesimo $d\tau$ definito da $d\Sigma$: e $v_d \Delta t$:

$$\Delta\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta, \quad \Delta q = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta \Delta t$$

La carica che passa nell'unità di tempo attraverso $d\Sigma$, cioè l'intensità di corrente attraverso $d\Sigma$:

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta$$

Definiamo la densità di corrente j come

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d \quad (13.1)$$

e riscriviamo

$$di = \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad (13.2)$$

L'intensità di corrente attraverso la superficie finita Σ : si ottiene integrando (13.2)

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad (13.3)$$

essa *risulta eguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie Σ .*

In particolare se la superficie Σ : è ortogonale a \vec{j} , cioè a \vec{v}_d e \vec{j} ha lo stesso valore in tutti i punti di Σ ,

$$i = j\Sigma, \quad j = \frac{i}{\Sigma} \quad (13.4)$$

la densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche (e resta così giustificato il nome densità di corrente).

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica sono negativi, fissata la direzione e il verso di \vec{E} la velocità di deriva \vec{v}_- è diretta in verso opposto rispetto al campo elettrico. Il vettore $-ev_-$ ha invece lo stesso verso di \vec{E} e la densità di corrente, detto v_- il numero di portatori per unità di volume, è

$$\vec{j} = -n_- e \vec{v}_- \quad (13.5)$$

parallela e concorde al campo elettrico.

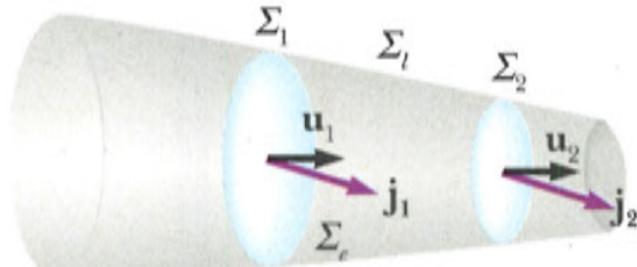
Che la densità di corrente sia sempre concorde a \vec{E} , discende dalla definizione di \vec{j} come prodotto della carica per unità di volume (con il suo segno) per la velocità di deriva e riflette la circostanza sperimentale che su scala macroscopica non è possibile correlare il verso della corrente al segno dei portatori di carica: fissata una data differenza di potenziale gli stessi effetti si hanno se la conduzione è dovuta a cariche positive con moto concorde a \vec{E} oppure a cariche negative con moto discorda a \vec{E} .

In base a queste considerazioni si assume convenzionalmente come verso della corrente quello del moto delle cariche positive, ovvero quello che va dai punti a potenziale maggiore ai punti a potenziale minore.

13.2.1 Corrente elettrica stazionaria

Consideriamo un conduttore percorso da una corrente di densità \vec{j} . Se Σ_1 e Σ_2 sono due diverse sezioni del conduttore, le intensità di corrente attraverso le due sezioni sono, in base alla (13.3),

$$i_1 = \int_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{u}_1 d\Sigma_1, \quad i_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{u}_2 d\Sigma_2$$



$$i_1 = i_2$$

Figura 13.2

e rappresentano rispettivamente la carica che *entra* e la carica che *esce* nell'unità di tempo nel volume delimitato da Σ_1 , Σ_2 e dalla superficie laterale Σ_l attraverso la quale non c'è flusso di carica. Se si fa l'ipotesi che nell'interno del tronco di cono di basi Σ_1 , Σ_2 non vari nel tempo la carica, allora:

$$i_1 = i_2 \quad (13.6)$$

Questa condizione è detta di stazionarietà: *in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è costante attraverso ogni sezione del conduttore.*

13.3 Legge di Ohm della conduzione elettrica

In un conduttore sottoposto ad una differenza di potenziale si stabilisce, in regime stazionario, che la densità di corrente \vec{j} legata al campo elettrico \vec{E} dalla relazione:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (13.7)$$

con σ una grandezza caratteristica del conduttore, detta *conduttività elettrica*.

La legge (13.7), nota come legge di Ohm della condutività elettrica, venne stabilita sperimentalmente e fu verificata anche nella conduzione nei gas e nei liquidi, in cui siano presenti portatori di carica liberi. Essa definisce, all'interno di un conduttore percorso da corrente, il campo vettoriale \vec{j} , le cui linee sono parallele e concordi alle linee del campo vettoriale \vec{E} che dà origine alla corrente.

La legge di Ohm molto spesso è scritta nella forma:

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (13.8)$$

dove la grandezza

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (13.9)$$

È chiamata resistività del conduttore. Minore è la resistività del conduttore, maggiore è la densità di corrente che può circolare in un conduttore a parità di campo elettrico E .

Applichiamo la legge di Ohm ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza h e sezione Σ . Ai capi del conduttore è applicata, tramite un generatore di forza

elettromotrice, una differenza di potenziale $V = V_A - V_B$. Il regime è stazionario, l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore ed è legata al campo elettrico, in base a (5.5), dalla

$$E = \rho j = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

Tra campo elettrico e differenza di potenziale sussiste la relazione

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh$$

e in definitiva

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i \quad (13.10)$$

Chiamando *resistenza del conduttore* in esame la grandezza

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} \quad (13.11)$$

la (13.3) diviene

$$V = Ri \quad (13.12)$$

nota come *legge di Ohm per i conduttori metallici*.

Se la sezione del conduttore è variabile, per un tratto lungo dh e di sezione Σ scriviamo

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

e integrando lungo tutto il conduttore otteniamo di nuovo:

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ri$$

se indichiamo come *resistenza del conduttore* la grandezza

$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} \quad (13.13)$$

e ricordiamo che l'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione.

Pertanto in regime stazionario il rapporto tra la differenza di potenziale applicata ai capi di un conduttore metallico e l'intensità di corrente che a seguito di ciò l'attraversa è pari a una grandezza, detta resistenza del conduttore, che dipende solamente dalla natura del conduttore (resistività ρ) e dalle sue dimensioni.

13.3.1 Potenza, effetto Joule

Consideriamo una carica dq che si muova attraversando la differenza di potenziale $V = V_A - V_B$, per questo spostamento viene compiuto dal campo elettrico agente il lavoro:

$$dW = V dq = Vidt$$

e spera pertanto la *potenza elettrica*

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = Vi \quad (13.14)$$

Se vale la legge di Ohm (13.12)

$$\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad (13.15)$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un tempo t comporta dunque il *lavoro*

$$W = \int_0^t \mathcal{P} dt = \int_0^t Ri^2 dt \quad (13.16)$$

che, se la corrente è costante nel tempo, si riduce a

$$W = Ri^2 t \quad (13.17)$$

Questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e, da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta. Di conseguenza aumenta la temperatura del conduttore: se esso è isolato termicamente dall'ambiente il processo porta alla fusione del metallo; se invece il conduttore è in contatto termico con l'ambiente la sua temperatura cresce fino a che si raggiunge uno stato di equilibrio in cui l'energia interna non varia più e il lavoro elettrico viene ceduto all'ambiente sotto forma di calore (purché naturalmente la temperatura di equilibrio sia inferiore alla temperatura di fusione del conduttore).

L'effetto di riscaldamento di un conduttore percorso da corrente si chiama *effetto Joule*.

13.4 Resistori in serie e in parallelo

Conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza (alla temperatura ambiente) sono elementi molto usati nei circuiti elettrici. Essi vengono chiamati resistori e oltre al valore della resistenza viene sempre precisato il valore massimo della potenza che può essere in essi dissipata senza causare alterazioni irreversibili.

13.4.1 Resistori in serie

Due resistori sono collegati in serie, quando hanno un estremo in comune: in regime stazionario l'*intensità di corrente che li attraversa è la stessa*. Applichiamo a ciascun resistore la legge di Ohm e sommiamo:

$$V_A - V_B = R_1 i, \quad V_B - V_C = R_2 i$$

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i$$

I due resistori in serie presentano la *resistenza equivalente*:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Tale relazione si generalizza subito a un qualsiasi numero di resistori in serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (13.18)$$

in un collegamento in serie ciascun resistore è attraversato dalla stessa corrente; la resistenza equivalente è somma della resistenza dei singoli componenti.

13.4.2 Resistori in parallelo

Due resistori si dicono in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi. In questo caso l'elemento comune ai due resistori è la differenza di potenziale $V = V_A - V_B$ e quindi, in base alla legge di Ohm, essi sono attraversati da due correnti i_1, i_2 , diverse se sono diversi i valori delle resistenze R_1 e R_2 .

I due resistori in parallelo presentano la resistenza equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Anche questa relazione si estende ad un numero qualsiasi di resistori collegati in parallelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (13.19)$$

in un collegamento in parallelo la differenza di potenziale è la stessa ai capi di ciascun resistore; l'inverso della resistenza equivalente è uguale alla somma degli inversi di ciascun componente.

In un collegamento in parallelo la resistenza equivalente è minore del valore di ciascun componente. Attraverso combinazioni di serie e parallelo si può in pratica realizzare qualsiasi valore di resistenza.

13.5 Forza elettromotrice

Tale relazione applicata a un circuito chiuso diventa

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i \quad (13.20)$$

essendo R_T resistenza totale del circuito stesso.

Il primo membro di (13.20) coincide con la definizione di forza elettromotrice (*f.e.m.*) e pertanto la (13.20) afferma che per ottenere nel circuito una corrente di intensità i è necessaria la presenza nel circuito di una sorgente di f.e.m. ovvero di un campo \vec{E} la cui circuitazione non sia nulla. Ne segue che non può essere un campo elettrostatico E_{el} a fare circolare le cariche nel circuito in quanto esso è conservativo e la corrispondente

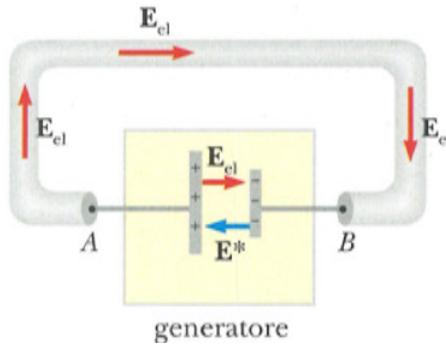


Figura 13.3

forza elettromotrice è sempre nulla. La sorgente di forza elettromotrice deve invece avere al suo interno forze di natura non elettrostatica, *non conservative*, che possono determinare il moto continuo delle cariche.

Il campo elettrostatico \vec{E}_{el} prodotto da tali cariche è sempre diretto da A verso B , sia nel conduttore che all'interno del generatore e pertanto la sua forza elettromotrice è nulla. Per fare circolare corrente ci deve essere all'interno del generatore un campo E^* di natura non elettrostatica, che chiamiamo campo elettromotore, capace di far muovere le cariche all'interno del generatore contro il campo elettrostatico E_{el} . L'integrale di E^* lungo il circuito è:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad (13.21)$$

pari alla tensione dello stesso tra A e B , calcolata lungo una linea interna al generatore.

Il dispositivo che genera il campo elettromotore, e quindi la forza elettromotrice, può sfruttare azioni meccaniche, reazioni chimiche (pile e accumulatori), il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

In ogni caso il generatore è caratterizzato oltre che dalla forza elettromotrice dalla sua resistenza interna r , per la quale vale la legge di Ohm quando è percorsa dalla corrente i .

$$V_B + \mathcal{E} - ri - Ri = V_B$$

e quindi

$$\mathcal{E} = (r + R)i = R_T i, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (13.22)$$

La corrente i che circola è data dal rapporto tra la forza elettromotrice \mathcal{E} fornita dal generatore e la resistenza totale $R_T = R + r$ del circuito. La differenza di potenziale ai capi della resistenza esterna risulta

$$V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - ri \quad (13.23)$$

La (13.23) fornisce anche una definizione operativa della f.e.m. di un generatore: essa è uguale alla differenza di potenziale misurata ai capi del generatore a circuito aperto ($i = 0$).

Poiché l'energia potenziale di una carica positiva q che percorre il circuito è qV : passando da B ad A all'interno del generatore la carica acquista ad opera del campo elettromotore

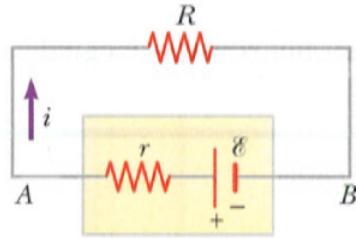


Figura 13.4

l'energia potenziale $q\mathcal{E}$ che perde parzialmente dentro il generatore stesso (effetto della resistenza interna) e poi nel resistore (effetto della resistenza esterna) così che in B la sua energia è nulla. Possiamo quindi affermare che la *forza elettromotrice* è numericamente *pari al lavoro fornito dal generatore alla carica unitaria che lo attraversa*.

Questo bilancio energetico è evidente se moltiplichiamo la (13.22) per $dq = idt$:

$$\mathcal{E}idt = Ri^2dt + ri^2dt$$

Il lavoro fornito dal generatore viene dissipato nelle resistenze del circuito; in termini di *potenza elettrica*

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2 = R_T i^2 \quad (13.24)$$

Capitolo 14

Campo magnetico, forza magnetica

14.1 Interazione magnetica, campo magnetico

La proprietà di attirare la limatura di ferro, mostrata da alcuni minerali di ferro e in particolare dalla *magnetite*, era già nota nel passato, il fenomeno prese il nome di magnetismo. Tale proprietà di attrazione non è uniformemente presente nel materiale, ma si manifesta principalmente in determinate parti, ed è in particolare possibile costruire campioni cilindrici in cui essa è localizzata nella zona delle basi. Sia questi oggetti che altri con diversa geometria si indicano col nome di *magneti* e le parti in cui si localizza la proprietà di attrazione si chiamano i poli del magnete.

Gilbert compì una serie di esperienze con magneti, aventi lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche del magnetismo e le differenze con i fenomeni di elettrostatica, da lui stesso studiati. I risultati sullo studio delle interazioni tra poli magnetici, anche tenendo conto di successive osservazioni, sono riassunti nei punti seguenti.

1. Se ad un magnete sospeso nel centro tramite un filo, e quindi libero di ruotare, si avvicina un secondo magnete, tenuto ad esempio in mano, si osserva che questo esercita sul primo una certa forza. Come per le forze di natura elettrostatica, possiamo interpretare il fatto dicendo che un magnete genera un campo, chiamato *campo magnetico*, e che l'altro magnete risente dell'azione che il campo magnetico esercita nella posizione da esso occupata. Un'analisi sistematica porta a stabilire che la forza di interazione tra i due magneti è attrattiva o repulsiva a seconda dei poli dei magneti che vengono affacciati e che esistono soltanto due specie di *poli*, detti *poli positivi* e *poli negativi*; inoltre si trova che *i poli di uno stesso magnete sono sempre di segno opposto*.
2. Se si avvicina a un pezzo di magnetite una bacchetta sottile di ferro, questa acquista la proprietà di attirare la limatura di ferro, principalmente in vicinanza delle estremità: la bacchetta di ferro immersa nel campo magnetico generato dalla magnetite è diventata pertanto un magnete, ovvero si è magnetizzata. Essa viene chiamata magnete artificiale o calamita e presenta due poli magnetici di segno opposto. Soprattutto se è di piccole dimensioni la bacchetta viene anche detta ago magnetico.



Figura 14.1

3. Se suspendiamo ad un filo l'ago magnetico sopra definito e lo lasciamo libero di ruotare, osserviamo che esso tende a disporsi approssimativamente parallelo al meridiano terrestre; spostato da questa posizione di equilibrio l'ago compie intorno ad essa oscillazioni, smorzate inevitabilmente dagli attriti. L'esperienza mostra l'esistenza di un campo magnetico naturale, *il campo magnetico terrestre*, e mette in evidenza un comportamento dell'ago magnetico del tutto analogo a quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico \vec{E} . L'ago magnetico, in altre parole, si comporta come un *dipolo magnetico* che lasciato libero si orienta nella direzione e verso del campo magnetico esistente nel punto dove è posto. Il polo dell'ago che si orienta approssimativamente verso il nord geografico, viene chiamato *polo nord* (N) e gli si attribuisce segno *positivo*, l'altro è chiamato *polo sud* (S) e gli si dà segno *negativo*. Definiti nel modo detto i poli di un magnete ed eseguendo esperienze come quelle del punto A, si trova sempre che l'interazione tra *poli magnetici dello stesso segno* è *repulsiva*, quella tra *poli magnetici di segno opposto* *attrattiva*.
4. Lo studio quantitativo della forza magnetica tra i poli di due magneti, svolto da Coulomb, dimostrò anche in tale caso un andamento inversamente proporzionale al quadrato della distanza, almeno per poli puntiformi, come sono con buona approssimazione quelli agli estremi di sbarre lunghe e sottili. Sebbene la forza che si esercita tra due poli magnetici sia simile a quella che si esercita tra due cariche elettriche, esiste tra di esse una differenza fondamentale. Una carica elettrica, positiva o negativa, può sempre essere isolata e ciò è una conseguenza dell'esistenza della carica elementare positiva portata dal protone e della carica elementare negativa portata dall'elettrone: la possibilità di separazione esiste cioè già a livello elementare. Invece non è mai stato possibile ottenere un polo magnetico isolato: i poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto, cioè si manifestano solamente sotto forma di dipoli magnetici. L'indicazione classica è costituita dall'esperimento della calamita spezzata. Se si taglia a metà una calamita compaiono sempre due poli di segno opposto nella zona del taglio, che precedentemente a questo non mostrava la proprietà di attirare limatura di ferro. Ripetendo il taglio su pezzi sempre più piccoli si ottiene ogni volta lo stesso risultato, senza riuscire ad ottenere un polo magnetico isolato (monopolo magnetico).
5. Accanto a tale esperienza sono significative quelle condotte con limatura di ferro

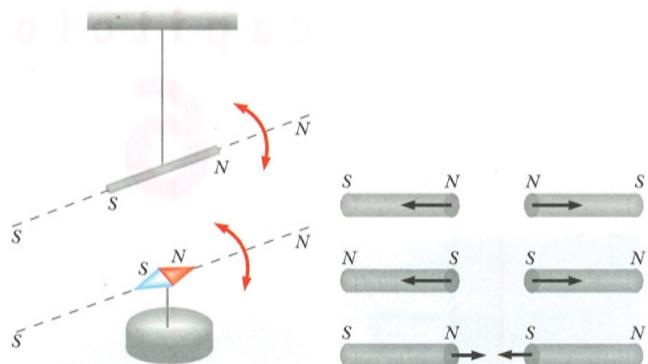


Figura 14.2

posta in vicinanza di un magnete. I granelli di limatura si dispongono in modo ordinato lungo linee regolari, fatto che interpretiamo supponendo che ciascun granello venga magnetizzato dal campo magnetico del magnete e diventato un dipolo magnetico si orienti parallelamente al campo magnetico stesso.

In analogia a quanto fatto per il campo elettrico \vec{E} , possiamo definire le linee di campo magnetico, cioè quelle linee che in ogni punto sono tangenti al campo magnetico esistente in quel punto. Tale vettore viene indicato con il simbolo \vec{B} . Il verso delle linee di \vec{B} può essere individuato ponendo un piccolo ago magnetico in ciascun punto in cui esiste il campo \vec{B} . Esso infatti si orenterà parallelamente a \vec{B} e il verso sarà quello che va dal polo Sud al polo Nord dell'ago magnetico. Valgono per il campo magnetico \vec{B} le proprietà a, b, e, per le linee di forza del campo elettrostatico \vec{E} e inoltre pure la proprietà che un campo magnetico \vec{B} uniforme sia rappresentato da linee parallele ed equidistanti.

14.2 Elettricità e magnetismo

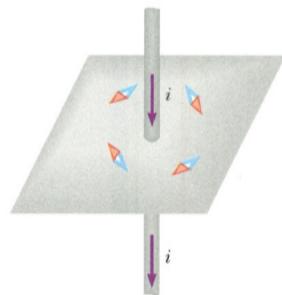


Figura 14.3

La prima relazione tra fenomeni magnetici ed elettrici fu scoperta da Oersted. Oersted mostrò che un ago magnetico, posto in prossimità di un filo percorso da corrente, tende ad assumere una ben definita posizione di equilibrio. Se poniamo in un piano perpendicolare al filo percorso da corrente della limatura di ferro, osserviamo che i

grani si addensano lungo circonferenze con centro il filo. Alla luce di quanto visto finora il risultato si interpreta dicendo che il filo percorso da corrente produce un campo magnetico \vec{B} e che l'ago e i grani di limatura di ferro si orientano parallelamente al campo magnetico esistente nel punto in cui sono posti. In seguito Ampère dimostrò che

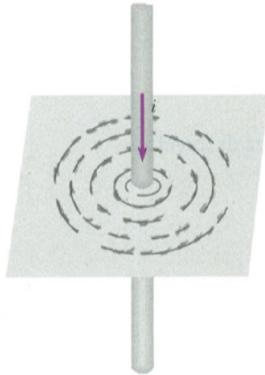


Figura 14.4

anche due fili percorsi da corrente interagiscono e intuì che le azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra cariche elettriche in movimento, ponendo le basi della teoria attuale del magnetismo. In particolare due fili in cui è percorsa una corrente nella stessa direzione si attraggono, se la corrente è percorsa in direzione opposta si respingono.

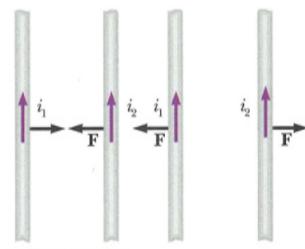


Figura 14.5

14.3 Legge di Gauss per il campo magnetico

Dato che ogni carica magnetica positiva è accompagnata da una carica magnetica negativa, non posso avere una superficie con mezza carica di prova. Quindi la somma delle cariche magnetiche è sempre 0.

Il teorema di Gauss per il campo magnetico mi dice quindi

$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_x d\Sigma = 0 \quad (14.1)$$

Per questo dico che il campo magnetico è *solenoidale*. Infatti, a differenza delle linee di campo di una carica elettrica che vanno a infinito, le linee di campo di un campo magnetico sono sempre chiuse.