Capitolo 1

Sistemi lineari

1.1 Le ennuple

Si indica con $\mathbf{R^n}$ l'insieme delle n-uple dei numeri reali $\{a_1, a_2, \cdots, a_n | a_i \in \mathbf{R}\}$.

1.1.1 Operazioni tra ennuple

- Somma tra n-uple: si sommano i numeri termine a termine: $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \cdots, b_n + a_n)$
  - Commutativa, associativa, esiste elemento neutro, esiste elemento opposto.
- Prodotto per uno scalare: $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$

1.2 Le equazioni lineari

Un'equazione lineare è un'equazione della forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

1.3 I sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un sistema di equazioni della forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_nx_n = b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Un sistema può essere:

- compatibile: con soluzione

- incompatibile: senza soluzione
- omogeneo: tutti i termini noti valgono 0, se un sistema è omogeneo è compatibile($\exists(0_1, 0_2, \cdots, 0_n)$).

La soluzione di un sistema è la n-upla di n elementi che verifica tutte le equazioni del sistema: $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

1.4 Operazioni elemenxtari di un sistema lineare

- Scambiare di posto due equazioni: $(S_{i,j})$
- Moltiplicazione di un'equazione per uno scalare$\neq 0$ $(D_i(\lambda))$
- Sostituire un'equazione con l'equazione stessa sommata al multiplo di un'altra appartenente al sistema $(E_{ij}(\mu))$.

1.5 Matrici nei sistemi lineari

Ad un sistema lineare possono essere associate tre matrici: quella dei coefficienti delle variabili (A) con m righe e n colonne, quella dei termini noti ($\underline{b}$) con m righe e 1 colonna e quella che le unisce:(A|$\underline{b}$) o matrice completa del sistema lineare, con m righe e n+1 colonne.

1.5.1 Operazioni elementari sulle matrici

- Scambiare di posto due righe: $(S_{i,j})$
- Moltiplicazione di una riga per uno scalare$\neq 0$ $(D_i(\lambda))$
- Sostituire una riga con la riga stessa sommata al multiplo di un'altra appartenente alla matrice $(E_{ij}(\mu))$.

1.5.2 Matrici a scalini

Una matrice si dice a scalini se comunque prese due righe consecutive R_i e R_{i+1} si verifica:

- Sono entrambe non nulle e il numero di zeri che precedono il primo elemento non nullo di R_{i+1} è maggiore del numero di zeri che precedono il primo elemento non nullo di R_i
- R_{i+1} è nulla.

1.5.3 Metodo di risoluzione di un sistema lineare da una matrice (algoritmo di Gauss-Jordan)

Dato un sistema lineare ne scrivo la matrice completa. Eseguo una serie di operazioni elementari in modo da ottenere una matrice a scalini. Per portare la matrice a scalini individuo la prima colonna che contiene un termine non nullo(*pivot*) e scambio le righe in modo che si trovi sulla prima riga, uso tale numero per elmininare tutti gli elementi della colonna di tale numero e ripeto tale procedimento sulla matrice eliminando la prima riga. Il numero di pivot di una matrice si dice rango della matrice (rk(A)).

Teorema di Rouchè-Capelli

Dato un sustema lineare in n incognite, di matrice dei coefficienti A e matrice completa A|$\underline{b}$ il sistema è compatibile se e solo se rk(A)=rk(A| $\underline{b}$). Il sistema ha un'unica soluzione se rk(A)=n, se rk(A)¡n il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da n-rk(A) incognite. Le variabili libere si identificano nelle colonne senza pivot.

1.5.4 Forma a scalini ridotta per righe

Una forma a scalini si dice ridotta per righe (rref(A)) se tutti i pivot valgono 1 e sono l'unico elemento non nullo della colonna. Dalla matrice a scalini ridotta per righe ottengo le soluzioni del sistema. Per portare la matrice in tale forma parto dall'ultimo pivot ed elimino i numeri sopra di esso.