Capitolo 1

Piani e rette nello spazio

1.1 Il piano

1.1.1 Determinare l'equazione di un piano partendo dal vettore normale e da un punto

Considero il vettore normale $\underline{N} = (a, b, c)$ e il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$ e il punto generico $Q = (x; y; z)$. Considero il vettore $PQ = \underline{v} = (x - x_p; y - y_p; z - z_p)$ e lo pongo perpendicolare a $\underline{N}$, perciò: $\underline{Nv} = 0$.
$\underline{Nv} = ax - ax_p + by - by_p + cz - cz_p = 0$
$ax + by + cz + (-ax_p - by_p - cz_p) = 0$
Ponendo il numero $(-ax_p - by_p - cz_p) = d$ ottengo l'equazione cartesiana del piano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

1.1.2 Determinare l'equazione di un piano partendo da tre punti non allineati

Dai tre punti posso generare due vettori con l'origine nello stesso punto perciò posso considerare il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, i vettori $\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ e $\underline{w} = (w_1; w_2; w_3)$ e il punto generico $S = (x; y; z)$. Pertanto si troverà il vettore$PS = \underline{u} = (x - x_p; y - y_p; z - z_p)$
$S \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \underline{u} = \overline{\lambda v + \mu \underline{w}}$.
Perciò: $(x - x_p; y - y_p; z - \overline{z_p) = \lambda}(v_1; v_2; v_3) + \mu(w_1; w_2; w_3) = (\lambda v_1 + \mu w_1; \lambda v_2 + \mu w_2; \lambda v_3 + \mu w_3)$
In questo modo si trovano le equazioni parametriche del piano:

$$\begin{cases} x = \lambda v_1 + \mu w_1 + x_p y = \lambda v_2 + \mu w_2 + y_p z = \lambda v_3 + \mu w_3 + z_p \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1.3 Conversione tra equazione parametrica e cartesiana

Per convertire da equazione parametrica e cartesiana devo scegliere due varabili e porle uguali ai parametri e successivamente ricavare la terza. Nel processo inverso devo isolare i due parametri in modo da trovare l'equazione cartesiana.

1.2 La retta

1.2.1 Determinare l'equazione di una retta da un punto e da un vettore

Si consideri il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, il vettore $\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ con la stessa direzione della retta. Considerando il punto generico $Q = (x; y; z)$ questo appartiene alla retta se il vettore che forma con P è un proporzionale a $\underline{\mathrm{v}}$: $(x - x_p; y - y_p; z - z_p) = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3)$. Attraverso questo metodo ottengo le equazioni parametriche della retta:

$$\left\{ x = x_p + \lambda v_1 y = y_p + \lambda v_2 z = z_p + \lambda v_3 \right. \tag{1.2}$$

Per trovarne le equazioni cartesiane isolo per il parametro.

1.2.2 Fascio dei parametri di sostegno a una retta

Scritta la retta in forma cartesiana, questa apparirà come intersezione di due piani. Gli infiniti piani che intersecano la retta si indicano come combinazione lineare dei primi due, detti generatori del fascio:$F : \lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d') = 0$.

1.3 Posizione reciproca

1.3.1 Due rette

Due rette possono essere parallele (con i vettori proporzionali), incidenti(intersezione non vuota, complanari) o sghembe (intersezione vuota, non complanari). Se il prodotto scalare di due rette incidenti o sghembe fa 0 sono perpendicolari. Date due rette complanari per trovare il piano che le contiene creo il fascio di sostegno ad una retta e ci sostituisco un punto dell'altra.

1.4 Due piani

Due piani possono essere paralleli (vettori normali proporzionali) o incidenti (prodotto scalare 0 dei vettori normali 0 se perpendicolari.

1.5 Retta e piano

Possono essere paralleli, o la retta essere contenuta nel piano quando il prodotto scalare tra il vettore normale al piano e quello che individua la retta fa 0, sono incidenti se è diverso da 0, ortogonali se i due vettori sono proporzionali.

1.6 Le distanze

1.6.1 Distanza tra due punti

$\bar{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

1.6.2 Distanza punto-piano

Considerando il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e il punto $Q(x_a; y_{;a}; z_a) \in \pi$ e H il piede della perpendicolare a P considero il vettore HP come la proiezione ortogonale di QP sulla direzione normale al pieno, il cui versore $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (a; b; c)$, perciò il vettore $HP = (QP\underline{n})\underline{n}$,
$d(P, \pi) = |qp\underline{n}| = |(x_p - x_q; y_p - y_q; z_p - z_q)\frac{(a;b;c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| =$
$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|a(x_p - x_q) + b(y_p - y_q) + c(z_p - z_q)| =$
$= \frac{|ax_p+by_p+cz_p+(-ax_q-by_q-cz_q)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, considerando che $d = -ax_q - by_q - cz_q$
$= \frac{|ax_p+by_p+cz_p+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

1.6.3 Distanza punto retta

- Ricavo $\pi \perp r$, $P \in \pi$, trovo $H : HP \perp r$, distanza tra P e H.
- r individuata da $\underline{v}$, $Q(t) \in r = (x(t); y(t); z(t))$; $QP \cdot \underline{v} = 0$, ricavo $t = t_0$ in modo che $QP \perp r$, distanza tra P e $Q(t_0)$.

1.6.4 Distanza tra due piani

- 0 se incidenti.
- Considero un punto su un piano e ricavo la distanza con l'altro piano

1.6.5 Distanza tra due rette

- 0 se incidenti.
- se parallele scelgo un punto sulla prima e faccio la sua distanza con la seconda.
- Se sghembe:
  - Scelgo un punto su ogni retta in modo che il segmento individuato sia perpendicolare a entrambe e faccio la distanza tra due punti

– Trovo un piano che contiene una retta e parallelo all'altra e faccio la distanza di un punto della retta parallela dal piano.