Capitolo 1

Spazi vettoriali

1.1 Gruppo

Un gruppo G è un insieme dotato di un'operazione $*$, cioè di una funzione $* : GxG \to G$ che deve essere associativa, deve esistere un elemento neutro e, ogni elemento ammette un elemento simmetrico. Se l'operazione è commutativa il gruppo si chiama commutativo o abeliano. Un esempio di gruppo: $(\mathbb{Z}, +)$.

1.2 Campo

Un campo K è un insieme dotato di due operazioni, $+$ e $*$ tali che rispetto alla somma K sia un gruppo abeliano e dentotato con zero l'elemento neutro della somma, $(K \backslash \{0\}, *)$ è un gruppo abeliano. Le due operazioni devono essere distributive.

1.3 Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale sul campo K è un insieme V, nel quale è definita un'operazione $+ : VxV \to V$, e $(V, +)$ è un gruppo commutativo e un'operazione $KxV \to V$, detta prodotto per uno scalare tale che (Vedi proprietà prodotto per uno scalare tra due vettori). Gli elementi di V, denotati con lettere sottolineate o in grassetto sono detti Vettori. L'elemento neutro rispetto alla somma si dice vettore nullo: $\underline{0}$. Verranno considerati $K = R$, spazi vettoriali reali.

1.4 $\mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}[x]$, i polinomi a coefficienti reali nella variabile x. La somma è l'usuale somma di polinomi, così come il prodotto per uno scalare. $\mathbb{R}_d[x]$ polinomi a coefficienti reali di grado $\leq d$.

1.5 Sottospazio

Un sottospazio di V è un sottoinsieme non vuoto U tale che $u_1 + u_2 \in U \forall u_1, u_2 \in U$ e $\lambda u \in U \forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R}$, cioè chiuso rispetto alle operazioni di V, equivalentemente con le combinazioni lineari. Se U è un sottospazio allora contiene il vettore nullo. Se U è un sottospazio non ridotto al vettore nullo allora ha infiniti elementi.

Una combinazione lineare di vettori è un vettore formato da $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. Il sottospazio generato da un insieme di vettori, denotato come sopra è un insieme delle combinazioni lineari dei vettori che lo generano.
V si dice finitamente generato se esistono dei vettori in V tali che lo spazio generato dai vettori sia V e i vettori si chiamano sistema di generatori per V.
Lo spazio dei polinomi non è finitamente generato.
V spazio vettoriale è dipendenete se esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che faccia il vettore nullo, altrimenti si dice indipendente.
Dove c'è il vettore nullo il sistema è dipendente, e se è dipendente c'è un elemenento che si scrive come combinazione lineare dei rimanenti.
Una base è un sistema di generatori linearmente indipendente.