Capitolo 1

Coordinate

Ponendo Oxyz come un sistema di assi cartesiani ortogonali, ad ogni vettore vengono associati tre numeri, la differenza di ogni coordinata del punto finale e del punto iniziale. Le componenti del vettore sono queste tre coordinate moltiplicate per il versore di ogni asse cartesiano. $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ sono i versori dei tre assi cartesiani.

1.1 Operazioni considerando le coordinate

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\underline{v} = (w_1, w_2, w_3)$

1.1.1 Somma di due vettori

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

1.1.2 Prodotto per uno scalare

$\lambda\underline{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$

1.1.3 Modulo di un vettore

Si utilizza Pitagora sulle tre componenti:
$|\underline{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

1.1.4 Prodotto scalare

$\underline{vw} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_iw_i$

Dimostrazione

Considero i due vettori e il vettore $\underline{u} = \underline{v} - \underline{w}$. Il vettore differenza geometricamente congiunge le punte degli altri vettori formando un triangolo. Pertanto posso calcolarne il modulo come differenza tra i due vettori:
$|\underline{u}|^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 = = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) = = |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)$.
Considerando il vettore differenza invece come lato del triangolo e utilizzando le equazioni trigonometriche per trovarne il valore ottengo che: $|\underline{u}|^2 = |\underline{w}|^2 \sin^2\theta + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 \cos^2\theta - 2|\underline{v}||\underline{w}| \cos^2\theta =$
$= |\underline{w}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + |\underline{v}|^2 - 2\underline{vw} =$
$= |\underline{v}| + |\underline{v}| - 2\underline{vw}$.
Eguagliando i due valori:
$|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) = |\underline{v}| + |\underline{v}| - 2\underline{vw}$
$-2(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) = -2\underline{vw}$
$\underline{vw} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.