Geometria e algebra lineare

Giacomo Fantoni
Telegram: @GiacomoFantoni
Github: https://github.com/giacThePhantom/GeometriaAlgebraLineare

18 settembre 2020

Indice

Capitolo 1

Vettori geometrici nello spazio

Un segmento orientato nello spazio è un segmento ove si è scelto un punto iniziale e un punto finale. Due segmenti orientati sono equivalenti se giacciono su rette parallele con la stessa lunghezza e la stessa orientazione. Un vettore geometrico è una classe di equivalenza di segmenti orientati. La classe di equivalenza di segmenti orientati AA si dice vettore nullo ($\underline{0}$). Un vettore geometrico si nota come: $\underline{v}$. Un vettore geometrico non nullo è individuato da:

- direzione
- modulo
- verso

Vettori particolari

- L'opposto di un vettore è un vettore con stesso modulo e stessa direzione ma verso opposto.
- Un versore è un vettore con modulo 1.

1.1 Operazioni tra vettori

1.1.1 Somma di vettori

La somma di vettori geometrici($\underline{v} + \underline{w}$) associa a due vettori un terzo vettore risultante: applico il primo vettore nel punto A, il secondo nella punta del primo e la somma è il vettore che parte dalla coda del primo e arriva alla punta del secondo. Il vettore nullo è l'elemento neutro della somma vettoriale. La somma di vettori geometrici è commutativa e associativa.

1.1.2 Prodotto per uno scalare

Il prodotto per uno scalare ($\lambda\underline{v}$) è un'operazione che associa un vettore geometrico ad uno scalare (un numero). Il vettore risultante è un vettore con verso dipendente dal segno dello scalare (stesso se positivo e opposto se negativo) e stessa direzione del vettore di partenza, ma il cui modulo è il prodotto tra il modulo del vettore iniziale e dello scalare. Se lo scalare è 0 si ottiene il vettore nullo.

1.1.3 Normalizzazione di un vettore

La normalizzazione di un vettore ($\frac{1}{|\underline{v}|}\underline{v}$) è il procedimento per cui si ottiene il versore con stessa direzione e verso di un qualsiasi vettore, attraverso un prodotto per uno scalare con l'inverso del modulo del vettore stesso.

1.1.4 Prodotto scalare tra vettori

Prodotto scalare di vettori geometrici ($\underline{vw} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos\theta$): da due vettori restituisce un numero: il prodotto scalare è il prodotto dei moduli dei vettori applicati nello stesso punto per il coseno dell'angolo compreso tra essi. È nullo quando uno dei due moduli è nullo, o quando l'angolo che formano tra di loro vale 90 gradi. È commutativo e distributivo rispetto alla somma.

1.1.5 Proiezione di un vettore su un altro

Proiezione di un vettore su un altro: nel caso in cui voglia ottenere la proiezione di $\underline{\mathrm{v}}$ sul versore $\underline{\mathrm{w}}$ considero un vettore di direzione $\underline{w}$ e modulo $\underline{vw}$ e con lo stesso verso se l'angolo θ è acuto, verso opposto se è ottuso. Se $\underline{\mathrm{w}}$ non è versore lo devo normalizzare.

Capitolo 2

Coordinate

Ponendo Oxyz come un sistema di assi cartesiani ortogonali, ad ogni vettore vengono associati tre numeri, la differenza di ogni coordinata del punto finale e del punto iniziale. Le componenti del vettore sono queste tre coordinate moltiplicate per il versore di ogni asse cartesiano. $\underline{\mathrm{i}}$, $\underline{\mathrm{j}}$, $\underline{\mathrm{k}}$ sono i versori dei tre assi cartesiani.

2.1 Operazioni considerando le coordinate

$\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ e $\underline{w} = (w_1; w_2; w_3)$

2.1.1 Somma di due vettori

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1; v_2 + w_2; v_3 + w_3)$

2.1.2 Prodotto per uno scalare

$\lambda\underline{v} = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3)$

2.1.3 Modulo di un vettore

Si utilizza Pitagora sulle tre componenti:
$|\underline{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

2.1.4 Prodotto scalare

$\underline{vw} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_iw_i$

Dimostrazione

Considero i due vettori e il vettore $\underline{u} = \underline{v} - \underline{w}$. Il vettore differenza geometricamente congiunge le punte degli altri vettori formando un triangolo. Pertanto posso calcolarne il modulo come differenza tra i due vettori:
$|\underline{u}|^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 =$
$= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) =$
$= |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)$.
Considerando il vettore differenza invece come lato del triangolo e utilizzando le equazioni trigonometriche per trovarne il valore ottengo che:
$|\underline{u}|^2 = |\underline{w}|^2 \sin^2\theta + |\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 \cos^2\theta - 2|\underline{v}||\underline{w}| \cos^2\theta =$
$= |\underline{w}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + |\underline{v}|^2 - 2\underline{vw} =$
$= |\underline{v}| + |\underline{v}| - 2\underline{vw}$.
Eguagliando i due valori:
$|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2 - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) = |\underline{v}| + |\underline{v}| - 2\underline{vw}$
$-2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) = -2\underline{vw}$
$\underline{vw} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

Capitolo 3

Piani e rette nello spazio

3.1 Il piano

3.1.1 Determinare l'equazione di un piano partendo dal vettore normale e da un punto

Considero il vettore normale $\underline{N} = (a, b, c)$ e il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$ e il punto generico $Q = (x; y; z)$. Considero il vettore $PQ = \underline{v} = (x - x_p; y - y_p; z - z_p)$ e lo pongo perpendicolare a $\underline{N}$, perciò: $\underline{Nv} = 0$.
$\underline{Nv} = ax - ax_p + by - by_p + cz - cz_p = 0$
$ax + by + cz + (-ax_p - by_p - cz_p) = 0$
Ponendo il numero $(-ax_p - by_p - cz_p) = d$ ottengo l'equazione cartesiana del piano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

3.1.2 Determinare l'equazione di un piano partendo da tre punti non allineati

Dai tre punti posso generare due vettori con l'origine nello stesso punto perciò posso considerare il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, i vettori $\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ e $\underline{w} = (w_1; w_2; w_3)$ e il punto generico $S = (x; y; z)$. Pertanto si troverà il vettore $PS = \underline{u} = (x - x_p; y - y_p; z - z_p)$
$S \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \underline{u} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$.
Perciò: $(x - x_p; y - y_p; z - z_p) = \lambda(v_1; v_2; v_3) + \mu(w_1; w_2; w_3) = (\lambda v_1 + \mu w_1; \lambda v_2 + \mu w_2; \lambda v_3 + \mu w_3)$
In questo modo si trovano le equazioni parametriche del piano:

$$\begin{cases} x = \lambda v_1 + \mu w_1 + x_p \\ y = \lambda v_2 + \mu w_2 + y_p \\ z = \lambda v_3 + \mu w_3 + z_p \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.3 Conversione tra equazione parametrica e cartesiana

Per convertire da equazione parametrica e cartesiana devo scegliere due variabili e porle uguali ai parametri e successivamente ricavare la terza. Nel processo inverso devo isolare i due parametri in modo da trovare l'equazione cartesiana.

3.2 La retta

3.2.1 Determinare l'equazione di una retta da un punto e da un vettore

Si consideri il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, il vettore $\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ con la stessa direzione della retta. Considerando il punto generico $Q = (x; y; z)$ questo appartiene alla retta se il vettore che forma con P è un proporzionale a $\underline{v}$: $(x - x_p; y - y_p; z - z_p) = (\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3)$. Attraverso questo metodo ottengo le equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda v_1 \\ y = y_p + \lambda v_2 \\ z = z_p + \lambda v_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

Per trovarne le equazioni cartesiane isolo per il parametro.

3.2.2 Fascio dei parametri di sostegno a una retta

Scritta la retta in forma cartesiana, questa apparirà come intersezione di due piani. Gli infiniti piani che intersecano la retta si indicano come combinazione lineare dei primi due, detti generatori del fascio:

$$F : \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{3.3}$$

3.3 Posizione reciproca

3.3.1 Due rette

Due rette possono essere parallele (con i vettori proporzionali), incidenti(intersezione non vuota, complanari) o sghembe (intersezione vuota, non complanari). Se il prodotto scalare di due rette incidenti o sghembe fa 0 sono perpendicolari. Date due rette complanari per trovare il piano che le contiene creo il fascio di sostegno ad una retta e ci sostituisco un punto dell'altra.

3.4 Due piani

Due piani possono essere paralleli (vettori normali proporzionali) o incidenti (prodotto scalare dei vettori normali 0 se perpendicolari).

3.5 Retta e piano

Possono essere paralleli, o la retta essere contenuta nel piano quando il prodotto scalare tra il vettore normale al piano e quello che individua la retta fa 0, sono incidenti se è diverso da 0, ortogonali se i due vettori sono proporzionali.

3.6 Le distanze

3.6.1 Distanza tra due punti

$\bar{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

3.6.2 Distanza punto-piano

Considerando il punto $P = (x_p; y_p; z_p)$, il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e il punto $Q(x_a; y;_a; z_a) \in \pi$ e H il piede della perpendicolare a P considero il vettore HP come la proiezione ortogonale di QP sulla direzione normale al piano, il cui versore $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (a; b; c)$, perciò il vettore $HP = (QP\underline{n})\underline{n}$,
$d(P, \pi) = |qp\underline{n}| = |(x_p - x_q; y_p - y_q; z_p - z_q)\frac{(a;b;c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| =$
$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|a(x_p - x_q) + b(y_p - y_q) + c(z_p - z_q)| =$
$= \frac{|ax_p+by_p+cz_p+(-ax_q-by_q-cz_q)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, considerando che $d = -ax_q - by_q - cz_q$

$$= \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.4}$$

3.6.3 Distanza punto retta

- Ricavo $\pi \perp r$, $P \in \pi$, trovo $H : HP \perp r$, distanza tra P e H.
- r individuata da $\underline{v}$, $Q(t) \in r = (x(t); y(t); z(t))$; $QP \cdot \underline{v} = 0$, ricavo $t = t_0$ in modo che $QP \perp r$, distanza tra P e $Q(t_0)$.

3.6.4 Distanza tra due piani

- 0 se incidenti.
- Considero un punto su un piano e ricavo la distanza con l'altro piano

3.6.5 Distanza tra due rette

- 0 se incidenti.
- se parallele scelgo un punto sulla prima e faccio la sua distanza con la seconda.
- Se sghembe:
  - Scelgo un punto su ogni retta in modo che il segmento individuato sia perpendicolare a entrambe e faccio la distanza tra due punti
  - Trovo un piano che contiene una retta e parallelo all'altra e faccio la distanza di un punto della retta parallela dal piano.

Capitolo 4

Sistemi lineari

4.1 Le ennuple

Si indica con $\mathbb{R}^{\ltimes}$ l'insieme delle n-uple dei numeri reali $\{a_1, a_2, \cdots, a_n | a_i \in \mathbb{R}\}$.

4.1.1 Operazioni tra ennuple

- Somma tra n-uple: si sommano i numeri termine a termine: $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \cdots, b_n + a_n)$
  - Commutativa, associativa, esiste elemento neutro, esiste elemento opposto.
- Prodotto per uno scalare: $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$

4.2 Le equazioni lineari

Un'equazione lineare è un'equazione della forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

4.3 I sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è un sistema di equazioni della forma: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_nx_n = b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Un sistema può essere:

- compatibile: con soluzione

- incompatibile: senza soluzione
- omogeneo: tutti i termini noti valgono 0, se un sistema è omogeneo è compatibile($\exists(0_1, 0_2, \cdots, 0_n)$).

La soluzione di un sistema è la n-upla di n elementi che verifica tutte le equazioni del sistema: $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

4.4 Operazioni elementari di un sistema lineare

- Scambiare di posto due equazioni: $(S_{i,j})$
- Moltiplicazione di un'equazione per uno scalare$\neq 0$ $(D_i(\lambda))$
- Sostituire un'equazione con l'equazione stessa sommata al multiplo di un'altra appartenente al sistema $(E_{ij}(\mu))$.

4.5 Matrici nei sistemi lineari

Ad un sistema lineare possono essere associate tre matrici: quella dei coefficienti delle variabili (A) con m righe e n colonne, quella dei termini noti ($\underline{b}$) con m righe e 1 colonna e quella che le unisce:(A|$\underline{b}$) o matrice completa del sistema lineare, con m righe e n+1 colonne.

4.5.1 Operazioni elementari sulle matrici

- Scambiare di posto due righe: $(S_{i,j})$
- Moltiplicazione di una riga per uno scalare$\neq 0$ $(D_i(\lambda))$
- Sostituire una riga con la riga stessa sommata al multiplo di un'altra appartenente alla matrice $(E_{ij}(\mu))$.

4.5.2 Matrici a scalini

Una matrice si dice a scalini se comunque prese due righe consecutive R_i e R_{i+1} si verifica:

- Sono entrambe non nulle e il numero di zeri che precedono il primo elemento non nullo di R_{i+1} è maggiore del numero di zeri che precedono il primo elemento non nullo di R_i
- R_{i+1} è nulla.

4.5.3 Metodo di risoluzione di un sistema lineare da una matrice (algoritmo di Gauss-Jordan)

Dato un sistema lineare ne scrivo la matrice completa $(A|b)$.
A tale matrice applico delle operazioni elementari per ricondurla alla forma a scalini.
Per eseguire ciò individuo la riga avente il minor numero di elementi nulli prima di un pivot (primo elemento non nullo della riga) e lo porto alla prima riga tramite un operazione elementare di scambio. Fatto ciò utilizzo i coefficienti di tale riga per annullare il maggior numero di coefficienti nelle righe che seguono, in modo tale da avere una matrice tale che prese due righe consecutive R_i e R_{i+1} si ha:

- Il primo elemento non nullo di R_{i+1} è preceduto da un numero di elementi nulli maggiore rispetto a R_i;
- R_{i+1} è una riga formata solo da elementi nulli.

Il numero di pivot di una matrice viene definito come rango della matrice $(rg(A))$.

Teorema di Rouchè-Capelli

Dato un sistema lineare in n incognite, di matrice dei coefficienti A e matrice completa A|$\underline{b}$ il sistema è compatibile se e solo se rk(A)=rk(A| $\underline{b}$). Il sistema ha un'unica soluzione se rk(A)=n, se $rk(A) < n$ il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da n-rk(A) incognite. Le variabili libere si identificano nelle colonne senza pivot.

4.5.4 Forma a scalini ridotta per righe

Una forma a scalini si dice ridotta per righe (rref(A)) se tutti i pivot valgono 1 e sono l'unico elemento non nullo della colonna. Dalla matrice a scalini ridotta per righe ottengo le soluzioni del sistema. Per portare la matrice in tale forma parto dall'ultimo pivot ed elimino i numeri sopra di esso.

Capitolo 5

Matrici

Una matrice di ordine mxn è una tabella con m righe e n colonne, nel nostro caso contenente numeri reali e si nota come: $M_{mxn}(\mathbf{R})$ e i suoi elementi $A = [a_{ij}]$, con i indice riga e j indice colonna.

Matrice quadrata

Una matrice si dice quadrata se il numero di colonne è uguale a quello delle righe.

Matrice identica

Una matrice quadrata di ordine m si dice identica se i suoi elementi: $I_m = [\delta_{[ij]}]$ se $\delta_i = 1$ se i=j, $\delta_i = 0$, se $i \neq j$.

Trasposta della matrice

Si chiama trasposta della matrice $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ la matrice A^t in cui le colonne sono le righe di A e le righe sono le colonne di A.

Matrice simmetrica

Se la matrice è quadrata e uguale alla sua trasposta allora si dice simmetrica.

5.1 Operazioni tra matrici

5.1.1 Somma tra matrici

La somma di matrici dello stesso ordine si ottiene sommando i termini delle due matrici nella stessa posizione. È commutativa e associativa, la matrice nulla è l'elemento neutro e la matrice opposta è la matrice i cui elementi sono opposti all'altra matrice.

5.1.2 Prodotto di una matrice per uno scalare

Gli elementi della matrice vengono tutti moltiplicati per il numero.

5.1.3 Prodotto tra matrici

$A \in M_{mxn}(\mathbb{R}), B \in M_{nxp}(\mathbb{R})$, è possibile definire il prodotto solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B e A si dice conformabile a sinistra a B o B conformabile a destra a A. $AB \in M_{mxp}(\mathbb{R})$, l'elemento di indice ij di AB si ottiene moltiplicando termine a termine la riga i di A e la colonna j di B e sommando i vari prodotti: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Tra le matrici quadrate il prodotto è sempre definito e genera una matrice dello stesso ordine. Non vale la proprietà commutativa, l'elemento neutro è la matrice identica.

5.1.4 Altra forma di operazioni sulle righe delle matrici

Data una matrice $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ ogni operazione elementare sulle righe può essere realizzata moltiplicando a sinistra per la matrice che si ottiene dalla matrice identica effettuando la stessa operazione elementare.

5.2 La matrice inversa

Data $A \in M_m(\mathbb{R}), \exists B \in M_m(\mathbb{R}) : AB = BA = I_m$. Se B esiste allora si dice matrice inversa di A, $B = A^{-1}$. A è detta matrice invertibile e vale solo per matrici quadrate. La matrice nulla non è invertibile e, più in generale, una matrice non è invertibile se possiede una riga o una colonna di zeri. L'inversa dell'identità è l'identità stessa: $I_m^{-1} = I_m$

5.2.1 Unicità della matrice inversa

Supponiamo che $A \in M_m(\mathbb{R})$ sia invertibile e che possieda due matrici inverse B, B':
$AB = BA = I \wedge AB' = B'A = I$
$B = BI = B(AB')$
$B = (BA)B' = IB' = B'$
$B = B'$, che è un assurdo.

5.2.2 Prodotto di matrici invertibili

Se A e B sono invertibili allora è invertibile anche AB e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

5.2.3 Trovare la matrice inversa

Dato $A \in M_m(\mathbb{R})$, rref(A) si ottiene moltiplicando a sinistra A per un'opportuna matrice invertibile quadrata di ordine m. Pertanto $\exists P$ invertibile: $PA = rref(A)$. Per stabilire se A è invertibile devo ottenere $rref(A)$: se $rk(rref(A))$ è massimo $rref(A) = I_m$, allora rref(A) è invertibile. $rk(rref(A)) = n \Rightarrow \exists n$ pivot, unico elemento diverso da zero nella loro colonna, in ogni riga è presente un pivot. Una matrice è invertibile solo se ha rango n massimo.
$\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile: $PA = rref(A)$. Se A è invertibile allora PA è invertibile, ovvero rref(A) ha rango n e A ha rango n, ovvero rref(A)=I, $P = A^{-1}$. Per trovare la matrice inversa scrivo la matrice $(A|I_n)$, riduco a scalini la parte di A, verifico sia invertibile e la riduco all'identità, in questo modo avrò ottenuto la matrice $(I_n|A^{-1})$

5.3 Matrici e sistemi lineari

Un sistema lineare può essere scritto nella forma A$\underline{\text{x}}$=$\underline{\text{b}}$, dove A è la matrice rappresentante i coefficienti, $\underline{\text{x}}$ quella rappresentante le incognite e $\underline{\text{b}}$ quella rappresentante i termini noti.

- Se $\underline{\text{b}}$=0 il sistema è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare;
- Se $\underline{\text{b}}\neq 0$ e x_0 è soluzione del sistema, tutte le soluzioni del sistema sono nella forma $x_0 + v$, dove v è soluzione del sistema omogeneo associato.
- Se la matrice quadrata A è invertibile il sistema ha un'unica soluzione nella forma $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

Capitolo 6

Lo spazio $\mathbb{R}^{\ltimes}$

L'insieme delle n-uple di numeri reali $\mathbb{R}^{\ltimes} = \{(a_1, a_2 \cdots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ Un punto nello spazio $\mathbb{R}^{\ltimes}$ è indicato dalla n-upla di n elementi.

6.1 Operazioni tra n-uple

- Somma: $a+b = (a_1+b_1; a_2+b_2; \cdots; a_n+b_n)$, è commutativa, associativa, esiste l'elemento neutro, l'ennupla nulla e l'elemento opposto.
- Prodotto per uno scalare: $\lambda a = (\lambda a_1; \lambda a_2; \cdots; \lambda a_n)$, è associativa, distributiva rispetto alla somma ha l'elemento neutro.

6.2 Sottospazi di $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

Un sottoinsieme non vuoto $U \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ si dice sottospazio se è chiuso rispetto alle operazioni di $\mathbb{R}^{\ltimes}$, ovvero se: $\forall u_1, u_2 \in U$

- $u_1 + u_2 \in U$
- $\lambda u_2 \in U$
- La combinazione lineare $\lambda u_1 + \mu u_2 \in U$

Se $U \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ è un sottospazio allora contiene l'n-upla nulla, infatti $u - u = 0$
Se $U \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ è un sottospazio che contiene un'n-upla non nulla, allora ne contiene infinite, tra cui l'ennupla nulla.

6.2.1 Sottospazio generato da vettori

Dati $v_1 \cdots v_k \in \mathbb{R}^{\ltimes}$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari è un sottospazio generato da $v_1 \cdots v_k$ che si indica come $< v_1, \cdots, v_k >$ o come $\mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_k)$ $(= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i | \lambda_i \in \mathbb{R})$.

6.2.2 Spazio delle righe di A

Data $A \in M_{mxn}(\mathbb{R}$, lo spazio delle righe di A, R(A) è il sottospazio di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ generato dalle righe di A pensate come elementi di $\mathbb{R}^{\ltimes}$.

6.2.3 Spazio delle colonne di A

Data $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$, lo spazio delle colonne di A, C(A) è il sottospazio di $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ generato dalle colonne di A pensate come elementi di $\mathbb{R}^{\gtrdot}$.

6.2.4 Insiemi di generatori di un sottospazio

Se $U \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$ sottospazio e $U =< v_1, \cdots, v_k >, \{v_1, \cdots, v_k\}$ insieme di generatori di U. $\{v_1, \cdots, v_k\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ se e solo se $k \geq n$ e rg(A)=n A è la matrice che ha sulle colonne le componenti dei vettori generatori. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = A\lambda_i$, λ vettore contenente i valori reali delle combinazioni lineari.

6.2.5 Descrizioni di sottospazio $U \subset \mathbb{R}, U =< v_1, \cdots, v_n >$

A matrice con le colonne composte dai vettori e lambda la matrice composta dai numeri,Data una n-upla, quando appartiene a U $x = A\lambda$, ovvero il sistema lineare $A\lambda = x$ ha almeno una soluzione. Ovvero se il $rg(A) = rg(A|x)$. Riduco a scalini $(A|x)$ nella parte di A e si impone che $rg(A) = rg(A|x)$ in modo da trovare le equazioni che definiscono un sottospazio.

6.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Un insieme di n-uple$\{v_1, \cdots, k_k\}$ si dice linearmente dipendente se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \cdots, +\lambda_k v_k = 0$, si dice indipendente se ciò non accade, ovvero se l'unico modo di scrivere l'ennupla nulla come combinazione lineare è prendere tutti i coefficienti uguale a 0, ovvero se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \cdots, +\lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i = 1, \cdots, k$. Ovvero è dipendente se il sistema che rappresenta il sottospazio vettoriale ha una soluzione non nulla ovvero se il rango di A è minore del numero di colonne, indipendente se ha solo la soluzione nulla, ovvero se il rango di A è uguale al numero di colonne. In $\mathbb{R}^{\ltimes}$ rg(A) numero di colonne implica che il numero di righe sia maggiore uguale del numero di colonne. In particolare se $\{v_1, \cdots, v_k\}$ sono indipendenti, allora $k \leq n$.

Osservazioni

Se l'insieme di ennuple che genera lo spazio vettoriale è dipendente si può ridurre eliminando gli elementi descrivibili come combinazione lineare di altre due ennuple. Gli elementi che si possono scrivere come combinazione lineare degli altri sono quelli sulle colonne senza pivot. Nella forma $rref(A)$ i coefficienti

delle colonne prive di pivot, corrispondono ai coefficienti da utilizzare per scrivere la combinazione lineare del vettore posto in quella colonna in funzione dei vettori indipendenti, ovvero quelli posti nelle colonne aventi pivot.
Un insieme di ennuple è un insieme di generatori e linearmente indipendente, allora $n = k = rg(A)$. Gli insiemi con queste proprietà si chiamano basi.

6.4 Le basi

Una base di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ è un insieme di ennuple che sia un insieme di generatori linearmente indipendenti. È costituita da n elementi. La base canonica di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ è costituita dalle ennuple $(1, 0, 0 \cdots, 0)(0, 1, 0 \cdots, 0) \cdots (0, 0, 0 \cdots, 1)$, ovvero la matrice che costituisce è la matrice identica. Se B è base allora ogni elemento di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi della base. Il sistema $A\lambda = v$ ha un'unica soluzione, il rango di A è uguale a n.

Capitolo 7

Spazi vettoriali

7.1 Gruppo

Un gruppo G è un insieme dotato di un'operazione $*$, cioè di una funzione $* : GxG \to G$ che deve essere associativa, deve esistere un elemento neutro e, ogni elemento ammette un elemento simmetrico. Se l'operazione è commutativa il gruppo si chiama commutativo o abeliano. Un esempio di gruppo: $(\mathbb{Z}, +)$.

7.2 Campo

Un campo K è un insieme dotato di due operazioni, $+$ e $*$ tali che rispetto alla somma K sia un gruppo abeliano e denotato con zero l'elemento neutro della somma, $(K \backslash \{0\}, *)$ è un gruppo abeliano. Le due operazioni devono essere distributive.

7.3 Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale sul campo K è un insieme V, nel quale è definita un'operazione $+ : VxV \to V$, e $(V, +)$ è un gruppo commutativo e un'operazione $KxV \to V$, detta prodotto per uno scalare tale che (Vedi proprietà prodotto per uno scalare tra due vettori). Gli elementi di V, denotati con lettere sottolineate o in grassetto sono detti Vettori. L'elemento neutro rispetto alla somma si dice vettore nullo: $\underline{0}$. Verranno considerati $K = R$, spazi vettoriali reali.

7.4 $\mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}[x]$, i polinomi a coefficienti reali nella variabile x. La somma è l'usuale somma di polinomi, così come il prodotto per uno scalare. $\mathbb{R}_d[x]$ polinomi a coefficienti reali di grado $\leq d$.

7.5 Sottospazio

Un sottospazio di V è un sottoinsieme non vuoto U tale che $u_1 + u_2 \in U \forall u_1, u_2 \in U$ e $\lambda u \in U \forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R}$, cioè chiuso rispetto alle operazioni di V, equivalentemente con le combinazioni lineari. Se U è un sottospazio allora contiene il vettore nullo. Se U è un sottospazio non ridotto al vettore nullo allora ha infiniti elementi.

Una combinazione lineare di vettori è un vettore formato da $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. Il sottospazio generato da un insieme di vettori, denotato come sopra è un insieme delle combinazioni lineari dei vettori che lo generano.
V si dice finitamente generato se esistono dei vettori in V tali che lo spazio generato dai vettori sia V e i vettori si chiamano sistema di generatori per V.
Lo spazio dei polinomi non è finitamente generato.
V spazio vettoriale è dipendente se esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che faccia il vettore nullo, altrimenti si dice indipendente.
Dove c'è il vettore nullo il sistema è dipendente, e se è dipendente c'è un elemento che si scrive come combinazione lineare dei rimanenti.
Una base è un sistema di generatori linearmente indipendente.

Capitolo 8

Determinante

Il determinante è una funzione che a una matrice quadrata assegna uno scalare.

8.1 Sottomatrici

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, A_{IJ} la sottomatrice ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j, $A_{IJ} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

8.2 Definizione di determinante

$A \in M_n(\mathbb{R}), A = [a_{ij}]$, il determinante di $A, det(A)$ è definito:

- Se $n = 1$, $det(A) = a_{11}$.
- Se $n \neq 1$, $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{I1})$

O, nel caso delle matrici due per due come il prodotto degli elementi della diagonale discendente meno la diagonale ascendente.

8.3 Matrice triangolare alta

Matrice A triangolare alta: tutti gli argomenti sotto la diagonale principale sono zero ($a_{ij} = 0$ se $i > j$). Il determinante di una matrice triangolare alta è il prodotto degli elementi della diagonale principale. Una matrice quadrata a scalini è triangolare alta. Se la matrice ha rango massimo contiene n pivot che stanno sulla diagonale principale, pertanto il determinante è il prodotto dei pivot ed è diverso da 0. Se il rango non è massimo sulla diagonale principale c'è almeno uno zero e quindi il determinante è zero. Perciò una matrice quadrata a scalini ha rango massimo se e solo se il $det(A) \neq 0$.

8.4 Teorema di Laplace

$A \in M_n(\mathbb{R}), det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{IJ}), \forall j < n.$
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{IJ}), \forall i < n.$

8.4.1 Conseguenze

- Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri il determinante è zero.
- $det(A) = det(A^T)$

8.5 Teorema di Binet

Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $det(AB) = det(A)det(B)$.

8.5.1 Corollario

Se A è invertibile, con inversa A^{-1}, allora $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

8.6 Determinante matrici associate ad operazioni

- $det(S_{ij}) = -1$.
- $det(D_i(\lambda)) = \lambda$.
- $det(E_{ij}(\mu)) = 1$.

8.6.1 Cambio del determinante dopo un'operazione elementare

- Se faccio uno scambio $det(A') = -det(A)$
- Se moltiplico per uno scalare $det(A') = \lambda det(A)$
- Se aggiungo alla riga i la riga j moltiplicata per μ il determinante non cambia.

8.7 Determinante di una matrice ridotta a scalini

Per ridurre una matrice a scalini utilizzo solo S_{ij} e $E_{ij}(\mu)$, pertanto il determinante della matrice ridotta a scalini $det(A') = (-1)^s det(A)$, dove s è il numero

di scambi.
Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

- A ha rango n.
- A è invertibile.
- $det(A) \neq 0$.

A ha rango $n \Leftrightarrow$ una sua forma a scalini A' ha rango $n \Leftrightarrow det(A') \neq 0 \Leftrightarrow det(A) \neq 0$. Come conseguenza di questa proposizione si può determinare se un insieme di ennuple $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}\}$ sia una base: lo è solo se il determinante della matrice le cui colonne sono le ennuple abbia determinante diverso da zero.

8.8 Il prodotto vettoriale

$\underline{v}, \underline{w} \in V^3$, vettori geometrici nello spazio, il prodotto vettoriale $\underline{v} \times \underline{w}$ si definisce come:

- $\underline{0}$ se $\underline{v} = 0 \vee \underline{w} = 0 \vee \underline{v} \,//\, \underline{w}$
- Il vettore di modulo $|\underline{v}||\underline{w}| \sin \phi$, direzione ortogonale al piano in cui giacciono $\underline{v}$ e $\underline{w}$ e verso dato dalla regola della mano destra.

Il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma individuato dai due vettori.
Utilizzando le componenti: $\underline{v} \times \underline{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (w_1 v_3 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - w_1 v_2)\underline{k}$.

8.8.1 Proprietà

$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$

- $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
- $(\lambda \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{v} \times (\lambda \underline{w}) = \lambda \underline{v} \times \underline{w}$
- $(\underline{v} + \underline{w}) \times \underline{w} = \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{w}$
- $\underline{w} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{w} \times \underline{v} + \underline{w} \times \underline{w}$

8.8.2 Dimostrazione della formula

Utilizzando la definizione è possibile calcolare direttamente il valore del prodotto vettoriale tra i versori degli assi:$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0} \quad \underline{j} \times \underline{j} = \underline{0} \quad \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0} \quad \underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j} \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$. Utilizzando queste formule si dimostra facilmente che il prodotto vettoriale sia dato dalla formula:

$$\underline{v} \times \underline{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2; w_1 v_3 - v_1 w_3; v_1 w_2 - w_1 v_2) \tag{8.1}$$

Un modo per calcolare il prodotto vettoriale senza ricorrere alla formula è calcolare il determinante della matrice con sulla prima riga i versori del piano, sulla seconda $\underline{v}$ e sulla terza $\underline{w}$:$A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$ Ora $det(A) = (v_2w_3 - v_3w_2)\underline{i} + (w_1v_3 - v_1w_3)\underline{j} + (v_1w_2 - w_1v_2)\underline{k}$

8.8.3 Prodotto misto

Dati $\underline{v}, \underline{w}, \underline{z}$ il prodotto $\underline{v}(\underline{w} \times \underline{z}) = det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$, il prodotto è nullo se e solo se i tre vettori sono linearmente dipendenti. È l'area del parallelepipedo individuato dai tre vettori.

8.8.4 Applicazioni nella geometria

Determinare se due rette sono complanari

Il determinante può essere utilizzato per determinare se due rette nello spazio sono complanari: date due rette qualsiasi r e s individuate rispettivamente dai vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$, comunque presi due punti $P \in r$ e $Q \in s$, le rette sono complanari se e solo se i vettori $\underline{v}, \underline{w}$ e PQ sono linearmente dipendenti.

Trovare l'equazione cartesiana di un piano

Determinando l'equazione di un piano da tre punti non allineati P, R e S e i vettori $\underline{v} = PR$ e $\underline{w} = PS$, un punto $Q = (x; y; z)$ sta sul piano se e solo se esistono due numeri reali t e s tali che $PQ = t\underline{v} + s\underline{w}$, ovvero se i tre vettori sono linearmente dipendenti, ovvero se il determinante della matrice: $A = \begin{bmatrix} x - x_p & v_1 & w_1 \\ y - y_p & v_2 & w_2 \\ z - z_p & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$ Sia uguale a 0.

Determinare la direzione ortogonale a due rette non parallele

Date due rette r e s i cui vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non siano proporzionali, il prodotto vettoriale $\underline{v} \times \underline{w}$ è un vettore ortogonale a $\underline{v}$ e a $\underline{w}$.

8.9 Determinanti e sistemi lineari

Si considerino i sistemi lineari quadrati, ovvero di n equazioni in n incognite.

8.9.1 Teorema di Cramer

Dato un sistema quadrato di ordine n, con incognite $x_1, x_2, \cdots, x_n$, matrice dei coefficienti A e colonna dei termini noti $\underline{b}$, tale che $detA \neq 0$ allora il sistema ammette un'unica soluzione. Indicando con $A_j(\underline{b})$ la matrice che si ottiene sostituendo alla colonna j della matrice A la colonna dei termini noti, tale soluzione è data da: $x_1 = \frac{detA_1(\underline{b})}{detA}, \cdots, x_j = \frac{detA_j(\underline{b})}{detA}, x_n = \frac{detA_n(\underline{b}))}{detA}$

Dimostrazione

Sia $I_j(\underline{x})$ la matrice ottenuta dalla matrice identica sostituendo alla colonna j la colonna delle incognite, si ha $AI_j(\underline{x}) = A_j(\underline{b})$ se e solo se $A\underline{x} = \underline{b}$. Applicando il teorema di Binet si ha che:

$$det(A_j(\underline{b})) = det(AI_j(\underline{x})) = det(A)det(I_j(\underline{x})) = x_j det(A)$$

Cofattore o complemento algebrico

Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice quadrata. È definito cofattore o complemento algebrico dell'elemento a_{ij} lo scalare $a'_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

8.9.2 Corollario del teorema di Cramer

Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice quadrata invertibile, e sia A' la matrice dei cofattori di A. Allora la matrice inversa è la trasposta della matrice dei cofattori divisa per il determinante di A:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(A')^T \tag{8.2}$$

Dimostrazione

Siano $\underline{e_1} = (1; 0; \cdots; 0), \underline{e_2} = (0; 1; 0; \cdots; 0); \underline{e_n} = (0; 0; \cdots; 1)$. Considerando il sistema lineare: $A\underline{x} = \underline{e_j}$, l'unica soluzione è $A^{-1}e_j$, che è la j-esima colonna della matrice A^{-1}. Per il teorema di Cramer la soluzione di tale sistema è $\bar{a}_{ij} = x_i = \frac{det(A_i(\underline{e_j}))}{det(A)} = \frac{a'_{ji}}{det(A)}$

Osservazione

Se A è una matrice di ordine 2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ allora la sua matrice inversa è:$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Capitolo 9

Le basi

Una base di un sottospazio vettoriale finitamente generato è un insieme ordinato di vettori che sia un sistema di generatori linearmente indipendente. La scelta di una base permette di associare ad ogni elemento dello spazio vettoriale una ennupla di $\mathbb{R}^{\ltimes}$, dove n è il numero di vettori che formano la base. In tal modo si conservano le operazioni dello spazio vettoriale e permette di ricondurre un problema in uno spazio vettoriale qualsiasi al problema corrispondente in $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Il ruolo di una base in uno spazio vettoriale è analogo a quello di un sistema di riferimento per l'insieme dei vettori geometrici nello spazio. Inoltre basi diverse dello stesso spazio vettoriale possiedono lo stesso numero di elementi (dimensione dello spazio).

9.1 Definizione di base

Sia V uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Un insieme ordinato di vettori $\beta = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \cdots, \underline{b_n}\}$ è detto base di v se è un sistema di generatori linearmente indipendente.

9.1.1 Esistenza della base

Se $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato, allora:

- V ha una base
- Un sistema di vettori $\beta = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \cdots, \underline{b_n}\}$ è una base se e solo se ogni $\underline{v} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di elementi di β.

Dimostrazione

Si prenda un sistema di generatori $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_m}\}$ per V, esso esiste in quanto V è finitamente generato. Se tale sistema è linearmente indipendente allora costituisce una base di V, altrimenti esiste un indice $i \in \{1, \cdots, m\}$ tale che

$Span(\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_{i-1}}, \underline{v_{i+1}}, \cdots, \underline{v_m}) = Span(\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_{m-1}}) = V$. Se il nuovo insieme è linearmente indipendente si è trovata una base, altrimenti si ripeta il procedimento.
Se $\beta = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \cdots, \underline{b_n}\}$ è una base allora ogni vettore si può scrivere come combinazione lineare di elementi di β in quanto è un sistema di generatori, mentre l'unicità segue dall'indipendenza lineare.
Se ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare di elementi di β quest'ultimo è un insieme di generatori, l'indipendenza lineare segue dall'‘unicità di scrittura del vettore nullo.

Osservazione

Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato si può mostrare che ogni suo sottospazio è finitamente generato. Dato quindi $\{\underline{0}\} \neq U \subset V$ sottospazio, questo ha una base.

9.1.2 Estrazione di una base da un sistema di generatori per il caso $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\ltimes}$

La dimostrazione precedente permette di capire che dato un sistema di generatori per uno spazio vettoriale V, un sottoinsieme di tali generatori costiutisce una base. Per trovare tale sottoinsieme quanto $V = \mathbb{R}^{\ltimes}$ o un suo sottoinsieme:

1. Sia $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_m}\}$ un sistema di generatori per $\mathbb{R}^{\ltimes}$.

2. Costruita la matrice A con sulle colonne le ennuple $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_m}$, questa ha rango n.

3. Ridotta A nella forma a scalini l'insieme di n vettori linearmente indipendenti corrispondono alle ennuple delle colonne in cui è presente un pivot.

9.2 Complemento a una base

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale finitamente generato con una base $\beta = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \cdots, \underline{b_n}\}$. Dato un insieme di vettori indipendenti$\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$, con $p \leq n$ allora esiste una base formata da $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ e da altri $n - p$ vettori di β. In particolare se V ha una base formata da n vettori, allora n vettori linearmente indipendenti formano una base di V.

9.2.1 Corollario 1

Se V ha una base formata da n vettori ogni insieme di m vettori con $m > n$ è linearmente dipendente.

Dimostrazione

Si prendano n vettori nell'insieme: se tali vettori sono dipendenti allora anche l'insieme di partenza lo è. Se non lo è formano una base e i rimanenti $m-n$ vettori sono esprimibili come combinazione lineare di tale base, pertanto l'insieme di partenza è dipendente.

9.2.2 Corollario 2

Via V uno spazio vettoriale finitamente generato e $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_m}\}$ due basi di V. Allora $m = n$

Dimostrazione

Dal corollario precedente se $n > m$ A sarebbe linearmente dipendente. Se invece $m > n$ β sarebbe dipendente.

9.3 Dimensione di uno spazio vettoriale

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale vettoriale finitamente generato. Si dice dimensione di V ($dim(V)$) il numero di vettori che compongono una sua qualsiasi base, se $V = \{\underline{0}\}$, $dim(V) = 0$. Analogamente per i sottospazi vettoriali.

Osservazione

Se il sottospazio U è dato come insieme di soluzioni di un sistema omogeneo allora la sua dimensione è il numero di variabili libere.

9.4 Completare a una base un sistema lineare in $\mathbb{R}^{\ltimes}$

Sia $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ un sistema linearmente indipendente in $\mathbb{R}^{\ltimes}$ e β una base fissata. Per stabilire quali vettori della base canonica vadano aggiunti ai p vettori considerati per ottenere una base considero la matrice $(A|B)$ le cui prime p colonne contengono le ennuple $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}$ e le ultime n colonne gli elementi della base β. La matrice $(A|B)$ ridotta a scalini avrà p pivot sulle prime p colonne e la posizione dei restanti $n-p$ pivot indicherà le colonne corrispondenti agli elementi della base che vanno aggiunti a $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}$ per ottenere una base.

9.5 Coordinate

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio generale finitamente generato e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ una sua base fissata. Abbiamo visto come un qualsiasi vettore $\underline{v} \in V$ si possa scrivere come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b_i} \tag{9.1}$$

I numeri reali $v_1, \cdots, v_n$ sono detti coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base β. Si può definire una funzione $T_\beta : V \to \mathbb{R}^\ltimes$ che ad ogni vettore fa corrispondere le sue coordinate rispetto a β.

9.5.1 Linearità e biunivocità della funzione delle $\mathbb{T}_\beta$

La funzione T_β è biunivoca e lineare, ovvero $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha: $T_\beta(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda T_\beta(\underline{v}) + \mu T_\beta(\underline{w})$.

Dimostrazione

La funzione che associa ad una ennupla $(v_1, \cdots, v_n)$ il vettore $\underline{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \underline{b_i}$ è chiaramente l'inversa di T_β, che in quanto invertibile risulta biunivoca.
La linearità segue dal fatto che $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w} =$
$= \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \underline{b_i} + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \underline{b_i} = \sum\limits_{i=i}^{n} (\lambda v_i + \mu w_i) \underline{b_i}$. Perciò:
$T_\beta(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = (\lambda v_1 + \mu w_1, \cdots, \lambda v_n + \mu w_n) = \lambda(v_1, \cdots, v_n) + \mu(w_1, \cdots, w_n) = \lambda T_\beta(\underline{v}) + \mu T_\beta(\underline{w})$.

9.5.2 La funzione T_β e la consevazione delle proprietà degli insiemi di vettori

Sia $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ un insieme di vettori di V, allora tale insieme è linearmente indipendente (rispettivamente sistema di generatori, rispettivamente base) se e solo se l'insieme di vettori $\{T_\beta(\underline{v_1}), \cdots, T_\beta(\underline{v_p})\}$ è linearmente indipendente (rispettivamente sistema di generatori, rispettivamente base)

Dimostrazione

La dimostrazione seguirà da risultati più generali sulle funzioni lineari presentati nel capitolo successivo.

9.5.3 Determinare la base di un qualsiasi spazio vettoriale

Le coordinate permettono di riportare a $\mathbb{R}^\ltimes$ problemi relativi a qualsiasi spazio vettoriale. Per determinare se n vettori di $\mathbb{R}^\ltimes$ formano una base, basta calcolare il determinante della matrice associata. Utilizzando le coordinate si può procedere in maniera analoga con qualsiasi spazio vettoriale: sia V lo spazio vettoriale di dimensione n e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ una sua base. Dato un insieme $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ di n vettori appartenenti a V, per stabilire se è linearmente indipendente, e pertanto una base è sufficiente considerare la matrice quadrata $n \times n$

le cui colonne sono le coordinate di $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}$ sulla base β. Se il determinante non è nullo allora tale insieme di vettori è una base.

9.6 Spazio delle righe e delle colonne di una matrice

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $R(A) \subset \mathbb{R}^{\ltimes}$, lo spazio delle righe di A è lo spazio di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ generato dalle m righe r di A: $R(A) =< r_1, \cdots, r_m >$.

9.6.1 Dimensione dello spazio delle righe di una matrice in forma a scalini

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice in forma a scalini. La dimensione del spazio delle righe di tale matrice è uguale al numero di pivot.

Dimostrazione

Siano $\underline{r_1}, \underline{r_2}, \cdots, \underline{r_p}$ le righe non nulle della matrice. Per ogni $i = 1, \cdots, p-1$ il vettore $\underline{r_i}$ non è contenuto in $< \underline{r_{i+1}}, \cdots, \underline{r_p} >$ in quanto la sua prima componente non nulla (il pivot) non può essere espressa come combinazione lineare degli zeri che i vettori $\underline{r_{i+1}}, \cdots, \underline{r_p}$ hanno nella posizione corrispondente. Quindi i vettori $\underline{r_1}, \underline{r_2}, \cdots, \underline{r_p}$ sono indipendenti e la dimensione di $R(A) = p$.

9.6.2 Dimensione dello spazio delle righe di una matrice

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice e A' una sua forma a scalini, allora lo spazio delle righe di A è uguale a quello di A', in particolare la dimensione di A è uguale al numero di pivot di A'.

Dimostrazione

Le righe di A' essendo ottenute attraverso una serie di operazioni elementari, sono combinazioni lineari delle righe di A, perciò $R(A') \subseteq< r_1, \cdots, r_m >= R(A)$. Analogamente, essendo le operazioni elementari tutte reversibili, le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di A', ovvero $R(A) \subseteq R(A')$. Considerando le due inclusioni $R(A') = R(A)$, ovvero $dim(R(A)) = dim(R(A'))$ = numero di pivot di A'.

9.6.3 Corollario

Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice, il numero di pivot di ogni forma a scalini di A è lo stesso.

Dimostrazione

Il numero di pivot di una qualsiasi forma a scalini di A è la dimensione di $R(A)$ e pertanto non dipende dalla forma a scalini scelta.

9.7 Interpolazione polinomiale

Siano fissati n punti nel piano $P_1 = (x_1, y_1), \cdots, P_n = (x_n, y_n)$ con ascisse distinte, si vuole trovare un polinomio il cui grafico passi per tutti i punti dati. Il passaggio per un punto si traduce in un'equazione lineare sui coefficienti del polinomio pertanto affinchè il problema abbia soluzione comunque siano presi i punti, il numero di coefficienti deve essere uguale o maggiore a n, ovvero il polinomio avrà grado $\geq n-1$. Tale polinomio è unico, in quanto scritta la generica condizione di passaggio per i punti si traduce nel sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti, o matrice di Vandermonde, ha determinante $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)$ (ovvero il prodotto tra le differenze di tutte le ascisse con segno opportuno).

9.7.1 Basi di Lagrange

Per trovare la soluzione a questo problema è conveniente considerare una base diversa da quella canonica, chiamata base di Lagrange, costituita dai polinomi $p_1, \cdots, p_n$ d definiti come:

$$p_i(x) := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \tag{9.2}$$

Dalla definizione segue che $p_i(x_j) = \delta_{ij}$, ovvero si annulla in x_j e vale uno in x_i. Da questa proprietà segue che i polinomi sono linearmente indipendenti: se $\lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_n p_n(x) = 0$, valutando in x_i, si ottiene $\lambda_1 p_1(x_i) + \cdots + \lambda_n p_n(x_i) = \lambda_i = 0$. Poichè lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ ha dimensione n l'insieme $p_1, \cdots, p_n$ ne costituisce una base. Il polinomio richiesto può essere scritto utilizzando la base di Lagrange come:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x) \tag{9.3}$$

Capitolo 10

Funzioni lineari

Siano V, V' spazi vettoriali reali finitamente generati. Una funzione $f : V \to V'$ si dice lineare se:

- $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
- $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$
- Ovvero se: $f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \lambda f(\underline{u}) + \mu f(\underline{v})$

V è detto dominio e V' codominio di f, se f è lineare e biunivoca si dice isomorfismo di spazi vettoriali.

10.0.1 Composte di funzioni lineari

Dati tre spazi vettoriali V, V' e V'' e due funzioni lineari $f : V \to V'$ e $g : V' \to V''$. La loro composizione $h = g \circ f$ è una funzione lineare. Inoltre se $f : V \to V'$ è biunivoca, allora anche l'inversa $f^{-1} : V' \to V$ è lineare.

Linearità della funzione composta

Sia $h(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = g(f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w})) = g(\lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w})) = \lambda g(f(\underline{v})) + \mu g(f(\underline{w})) = \lambda h(\underline{v}) + \mu h(\underline{w})$.

10.1 Nucleo

Sia $f : V \to V'$ una funzione lineare, il nucleo di f, denotato con $Ker(f)$ è ìnsieme dei vettori la cui immagine è il vettore nullo:

$$Ker(f) = \{\underline{v} \in V | f(\underline{v}) = \underline{0}\} \tag{10.1}$$

Osservazione

Il nucleo di f è un sottospazio di V, infatti: $f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

10.1.1 Nucleo e proprietà di f

Sia $f : V \to V'$ una funzione lineare, allora sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. $Ker(f) = \{\underline{0}\}$.
2. f è iniettiva.
3. Le immagini di sistemi indipendenti sono sistemi indipendenti.

Dimostrazione

1 ⇒ 2: Siano $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$ tali che $f(\underline{v_1}) = f(\underline{v_2})$, per la linearità di f si ha che $f(\underline{v_1} - \underline{v_2}) = \underline{0}_{V'}$, pertanto $v_1 - v_2 \in Ker(f)$, pertanto $\underline{v_1} = \underline{v_2}$.
2 ⇒ 3: si consideri l'insieme indipendente $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$, si scriva la combinazione lineare delle immagini dei vettori e la si ponga uguale al vettore nullo: $\lambda_1 f(\underline{v_1}) + \cdots + \lambda_p f(\underline{v_p}) = \underline{0}_{v'}$. Per la linearità di f si ottiene $f(\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_p \underline{v_p}) = \underline{0}_{V'}$, da cui per l'iniettività di f si ottiene: $\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_p \underline{v_p} = \underline{0}_V$. Essendo indipendenti, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
3 ⇒ 1: Sia $\underline{v} \neq \underline{0}_V$, l'insieme $\{\underline{v}\}$ è linearmente indipendente, perciò anche $\{f(\underline{v})\}$ è indipendente, quindi $f(\underline{v}) \neq \underline{0}_{V'}$.

10.2 Immagine

L'immagine di f, denotata con $Im(f)$ è l'insieme dei vettori di V' che sono immagini dei vettori di V via f: $Im(f) = \{\underline{v'} \in V' | \exists \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{v'}\}$.

Osservazioni

- L'immagine di f è un sottospazio di V', infatti se $\underline{v'}$ e $\underline{w'}$ appartengono all'immagine, esistono $\underline{v}$ e $\underline{w}$ tali che $f(\underline{v}) = \underline{v'}$ e $f(\underline{w}) = \underline{w'}$, pertanto $\lambda \underline{v'} + \mu \underline{w'} = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) = f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w})$, pertanto anche $\lambda \underline{v'} + \mu \underline{w'}$ appartiene all'insieme immagine.

- Sia $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ un insieme di generatori di V, allora $\{f(\underline{v_1}), \cdots, f(\underline{v_n})\}$ è un insieme di generatori per $Im(f)$. Si consideri $\underline{w'} \in Im(f)$, ovvero $\exists \underline{w} : f(\underline{w}) = \underline{w'}$. Si esprima $\underline{w}$ come combinazione lineare: $\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v_i}$. Si applichi la funzione: $f(\underline{w}) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v_i})$. per la linearità di f: $\underline{w'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\underline{v_i})$.

10.2.1 Immagine e proprietà di f

Sia $f : V \to V'$ una funzione lineare, allora sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. f è suriettiva.

2. $Im(f) = V'$

3. L'immagine di un sistema di generatori per V è un sistema di generatori per V'

Dimostrazione

1 ⇒ 2: è immiediata dalla definizione di $Im(f)$.
2 ⇒ 3: si è già osservato che se $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ è un sistema di generatori per V allora $\{f(\underline{v_1}), \cdots, f(\underline{v_n})\}$ è un sistema di generatori per $Im(f)$, essendo $Im(f) = V'$, $\{f(\underline{v_1}), \cdots, f(\underline{v_n})\}$ è un sistema di genaratori per V'.
3 ⇒ 1: sia $\underline{v'} \in V'$ e sia $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ un sistema di generatori per V e, pertanto $Im(f) = V'$, $\{f(\underline{v_1}), \cdots, f(\underline{v_n})\}$ è un sistema di generatori di V', pertanto esistono $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ scalari tali che $\underline{v'} = \lambda_1 f(\underline{v_1}) + \cdots + \lambda_n f(\underline{v_n}) = f(\lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_n \underline{v_n})$, ovvero $\underline{v'}$ ammette una controimmagine.

10.3 Funzioni lineari definite da matrici

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $V' = \mathbb{R}^m$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si analizzi la funzione $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita come

$$T_A(x) = A\underline{x} \tag{10.2}$$

Dove $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

Linearità

Questa funzione è una funzione lineare: infatti $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $T_A(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = A(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = \lambda A\underline{x} + \mu A\underline{y} = \lambda T_A(\underline{x}) + \mu T_A(\underline{y})$.

10.3.1 Composizione

Data un'altra matrice $B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ è immediato verificare che la composizione $T_B \circ T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ delle funzioni lineari $T_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ e $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è la funzione lineare associata alla matrice BA, infatti: $(T_B \circ T_A)(\underline{x}) = T_B(T_A(\underline{x})) = T_B(A\underline{x}) = B(A\underline{x}) = (BA)\underline{x} = T_{BA}(\underline{x})$.

10.3.2 Invertibilità

Dalla composizione segue che se A è invertibile anche T_A è invertibile: si consideri $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_{I_m} = I_{\mathbb{R}^m} = T_{I_m} = T_{A^{-1}A} = T_{A^{-1}} \circ T_A$.

10.3.3 Nucleo e immagine

Nucleo

Il nucleo della funzione lineare T_A è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare associato $A\underline{x} = \underline{0}$, ovvero il nucleo della matrice A.

$$Ker(T_A) = N(A) \tag{10.3}$$

Immagine

L'immagine della funzione lineare T_A, avendo come sistema di generatori le immagini dei vettori della base canonica, che sono le colonne di A è lo spazio delle colonne di A.

$$Im(T_A) = C(A) \tag{10.4}$$

10.4 Teorema della nullità più rango

Sia V uno spazio reale finitamente generato e $f : V \to V'$ una funzione lineare, allora:

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \tag{10.5}$$

Dimostrazione

Siano n e k rispettivamente le dimensioni di V e di $Ker(f)$, e sia $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_k}\}$ una base di $Ker(f)$. Si completi tale base ad una base β dello spazio V: $\beta = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_k}, \underline{b_{k+1}}, \cdots, \underline{b_n}\}$. Si vuole mostrare che $\{f(\underline{b_{k+1}}), \cdots, f(\underline{b_n})\}$ è una base di $Im(f)$. Essendo stato precedentemente dimostrato che $\{f(\underline{a_1}), \cdots, f(\underline{a_k}), f(\underline{b_{k+1}}), \cdots, f(\underline{b_n})\}$ è una base di $Im(f)$ ed essendo $\{f(\underline{a_1}), \cdots, f(\underline{a_k})\}$ vettori nulli, allora anche $\{f(\underline{b_{k+1}}), \cdots, f(\underline{b_n})\}$. Esplicitando l'indipendenza lineare: se $\underline{0} = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(\underline{b_i}) = f(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \underline{b_i})$, allora $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \underline{b_i} \in Ker(f)$, perciò esistono $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ tali che $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \underline{b_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{a}$. Riscrivendo l'equazione si ottiene: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{a} - \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \underline{b_i} = \underline{0}$. Essendo β una base, segue che $\lambda_i = 0$ $\forall i = 1, \cdots, n$.

10.4.1 Corollario

Sia $f : V \to V'$ una funzione lineare:

1. Se f è un isomorfismo allora $dim(V) = dim(V')$
2. Se $dim(V) = dim(V')$ allora è equivalente dire che:
   (a) f è un isomorfismo.

(b) f è iniettiva.

(c) f è suriettiva.

Dimostrazione

Si provi il punto **1**: Per il teorema della nullità più rango si ha: $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$. Poichè f è iniettiva allora $dim(Ker(f)) = 0$ ed essendo suriettiva si ha $V' = Im(f)$, pertanto $dim(V) = 0 + dim(V')$, da cui la tesi.
Si provi il punto **2**: segue immediatamente dal punto **1** e dal legame tra dimensioni di nucleo e immagine e proprietà della funzione.

10.4.2 Osservazione

Applicando il teorema della nullità più rango alla funzione lineare $T_A : \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\gtrdot}$, si osserva che la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ è uguale al numero di colonne di A che non contengono pivot, ovvero la nullità di A ($N(A)$).

10.5 Matrici rappresentative

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ una sua base e V' uno spazio vettoriale reale e $\underline{c_1}, \cdots, \underline{c_n}$ suoi elementi. Allora esiste un'unica funzione lineare $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{b_i}) = \underline{c_i}$ $\forall i = 1, \cdots, n$

Dimostrazione

Dato $\underline{v} \in V$ lo si scriva come $\sum_{i=1}^{n} v_i\underline{b_i}$ e sia posto $f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\underline{c_i}$. È immediato verificare che f è lineare e che $f(\underline{b_i}) = \underline{c_i}$. Sia ora $g : V \to V'$ un'altra funzione lineare tale che $g(\underline{b_i}) = \underline{c_i}$, allora: $g(\underline{v}) = g(\sum_{i=1}^{n} v_i\underline{b_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_i g(\underline{b_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\underline{c_i} = f(\underline{v})$, che prova l'unicità di f.

10.5.1 Definizione di matrice rappresentativa

Sia $f : V \to V'$ una funzione lineare e $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ la base di V e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ la base di V'. La funzione f è determinata dalle immagini dei vettori della base di A, ovvero da $\{f(\underline{a_1}), \cdots, f(\underline{a_n})\}$ che possono essere scritti come combinazioni lineari dei vettori della base β:

$$\begin{array}{c}
f(\underline{a_1}) = \alpha_{11}\underline{b_1} + \alpha_{21}\underline{b_2} + \cdots + \alpha_{m1}\underline{b_m} \\
f(\underline{a_2}) = \alpha_{12}\underline{b_1} + \alpha_{22}\underline{b_2} + \cdots + \alpha_{m2}\underline{b_m} \\
\cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \\
f(\underline{a_n}) = \alpha_{1n}\underline{b_1} + \alpha_{2n}\underline{b_2} + \cdots + \alpha_{mn}\underline{b_m}
\end{array}$$

Sia $M_{\beta}^{A}(f) = [a_{ij}]$ la matrice dei coefficienti così ottenuti. Tale matrice è detta matrice rappresentativa di f rispetto alle basi A e β. Se $V = V'$ e $A = \beta$ la matrice viene denotata come $M_A(f)$.

10.5.2 Utilizzo delle matrici rappresentative

L'importanza delle matrici rappresentative è che permettono di ridurre lo studio di una qualsiasi funzione lineare tra due spazi vettoriali V e V' di dimensioni n ed m a quello di una funzione lineare tra $\mathbb{R}^{\ltimes}$ e $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ definita dal prodotto per una matrice. Si fissi la notazione: sia $f : V \to V'$ una funzione e $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ base di V e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ base di V'. Siano $T_A : V \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ e $T_\beta : V' \to \mathbb{R}^{\gtrdot}$ gli isomorfismi che ad ogni vettore associano le sue componenti sulla base. Siano poi $C := M_A^{\beta}(f)$ la matrice rappresentativa di f rispetto a A e β e $T_C : \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\gtrdot}$ la funzione lineare definita dalla moltiplicazione per A. Secondo la seguente notazione $T_C = T_\beta \circ f \circ T_{A^{-1}}$, ovvero se $(v_1, \cdots, v_n)$ sono le componenti di $\underline{v}$ sulla base A, allora le componenti $(w_1, \cdots, w_m)$ di $\underline{w} = f(\underline{v})$ si ottengono moltiplicando la matrice C per $(v_1, \cdots, v_n)$

Dimostrazione

Dato un vettore $\underline{v} \in V$ si può scrivere sulla base A come $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{a_i}$, per cui la sua immagine è data da: $f(\underline{v}) = f(\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{a_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(\underline{a_i}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \underline{b_j} = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} v_i) \underline{b_j}$. Ovvero, se $f(\underline{v}) = \underline{w}$ e $\underline{w} = \sum_{j=1}^{m} w_j \underline{b_j}$ si ottiene che $w_j = \sum_{i=i}^{n} \alpha_{ji} v_i$, ovvero:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{1mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

In altre parole: $(w_1, \cdots, w_m) = T_C(v_1, \cdots, v_n)$

10.5.3 Osservazione

Per trovare il nucleo o l'immagine di una funzione lineare tra due spazi vettoriali V e V' di dimensioni n e m si possono considerare il nucleo o l'immagine della funzione lineare tra $\mathbb{R}^{\ltimes}$ e $\mathbb{R}^{\gtrdot}$ definita dalla matrice rappresentativa:

$$Ker(T_C) = T_A(Ker(f)) \qquad Im(T_C) = T_\beta(Im(f)) \tag{10.6}$$

10.5.4 Cambiamenti di base

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ basi di V. Si dice matrice di transizione da A a β la matrice $M_A^\beta(Id_V)$ (indicata con M_A^β), dove Id_V è la funzione identità da V a V.

Osservazioni

- La matrice M_A^β è quindi la matrice quadrata di ordine n che ha sulle colonne le componenti di A rispetto alla base β e permette di trovare le coordinate dei vettori di V sulla base β se sono note le componenti della base A: se $(x_1, \cdots, x_n) = T_A(\underline{v})$ e $(y_1, \cdots, y_n) = T_\beta(\underline{v})$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nelle due basi, allora:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = M_A^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

- Dalla formula sopra descritta è facile capire come per trovare le coordinate dei vettori di V sulla base A se sono note le componenti sulla base β è necessario moltiplicare per l'inversa della matrice M_A^β. Pertanto la matrice M_β^A di transizione da β ad A è l'inversa della matrice di transizione da A a β:

$$(M_A^\beta)^{-1} = M_\beta^A \tag{10.8}$$

Gli endomorfismi

Gli endomorfismi sono delle funzioni lineari da uno spazio V in sè stesso. Sia V uno spazio vettoriale di dimesione n e siano $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ e $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ basi di V, allora

$$M_\beta(f) = M_A^\beta M_A(f) M_\beta^A \tag{10.9}$$

Dimostrazione:
Si ponga $A = M_A(f)$, $B = M_\beta(f)$ e $P = M_A^\beta$. Se il vettore $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ rispetto alla base A e coordinate $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ rispetto alla base β, il vettore $f(\underline{v})$ ha coordinate $A\underline{x}$ rispetto ad A e coordinate $\beta\underline{y}$ rispetto alla base β. Poichè la matrice P realizza il cambio di coordinate tra A e β si ha $P\underline{x} = \underline{y}$ e $PA\underline{x} = B\underline{y}$, da cui segue: $PA\underline{x} = BP\underline{x}$, ovvero $PA = BP \Rightarrow PAP^{-1} = B$, come volevasi dimostrare.

Capitolo 11

Spazi vettoriali euclidei

11.1 Prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale. Il prodotto scalare su V è un operazione che associa a due vettori di V, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ un numero reale ed è indicato con $\underline{v} \cdot \underline{w}$. Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v} \ \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.
- $(\lambda \underline{v}) \cdot \underline{w} = \lambda(\underline{v} \cdot \underline{w}) \ \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\underline{v} \cdot (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{u} \ \ \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$.
- $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \ \ \forall \underline{v} \in V$ e $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0$.

Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è detto spazio vettoriale euclideo.

11.1.1 Esempi di spazi vettoriali euclidei

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\ltimes}$

È il cosiddetto prodotto scalare canonico, se $\underline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, \cdots, w_n)$ sono vettori, allora

$$\underline{v}\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \tag{11.1}$$

$\mathbf{V} = \mathbb{R}_{\mathbf{2}}[\mathbf{x}]$

Se $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ allora:

$$p(x)q(x) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) \tag{11.2}$$

$\mathbf{V} = \mathbf{M_2}(\mathbb{R})$

Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, allora

$$AB = Tr(B^T A) \tag{11.3}$$

Dove $Tr()$ indica la traccia della matrice, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale principale.

11.2 Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $\underline{v}, \underline{w} \in V$, allora:

$$(\underline{uv})^2 \leq (\underline{uu})(\underline{vv}) \tag{11.4}$$

Dimostrazione

Si suppongano $\underline{v}, \underline{u} \neq 0$, altrimenti sarebbe banalmente verificato. Per la proprietà del prodotto scalare si ha che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v})(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) \geq 0$. Sempre usando le proprietà del prodotto scalare: $0 \leq (\lambda \underline{u} + \mu \underline{v})(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \lambda^2(\underline{uu}) + 2\lambda\mu(\underline{uv}) + \mu^2(\underline{vv})$. Considerando $\lambda = \underline{vv}$ e $\mu = -\underline{uv}$ si ottiene: $0 \leq (\underline{vv})^2 - 2(\underline{vv})(\underline{uv})^2 + (\underline{uv})^2(\underline{vv})$.
$0 \leq (\underline{vv})[(\underline{uu})(\underline{vv}) - (\underline{uv})^2]$. Essendo $\underline{vv} \geq 0$ è dimostrata la disuguaglianza.

11.3 La norma

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, la norma di un vettore è il numero reale non negativo definito come:

$$||\underline{v}|| = \sqrt{\underline{vv}} \tag{11.5}$$

Dato un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ la sua normalizzazione è il vettore $\frac{\underline{v}}{||\underline{v}||}$. La normalizzazione di un vettore è un vettore di norma 1.

11.3.1 Osservazione

Nel caso di $\mathbb{R}^\ltimes$ si può dimostrare che dati $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^\ltimes$ se θ è l'angolo compreso tra essi:

$$\cos\theta = \frac{\underline{vw}}{||\underline{v}||||\underline{w}||} \tag{11.6}$$

11.3.2 Proprietà della norma

Sia V uno spazio vettoriale euclideo. La norma è una funzione da V a $\mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà: $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- $||\underline{v}|| \geq 0$ e $||\underline{v}|| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0$.
- $||\lambda \underline{v}|| = |\lambda|||\underline{v}||$.
- $||\underline{v} + \underline{w}|| \leq ||\underline{v}|| + ||\underline{w}||$.

Dimostrazione

La dimostrazione delle prime due è immediata, la terza segue dalla disuguaglianza di Caucht-Schwartz: $||\underline{v}+\underline{w}||^2 = \underline{vv}+2\underline{vw}+\underline{ww} \leq \underline{vv}+2\sqrt{(\underline{vv})(\underline{ww})}+\underline{ww} \leq (||\underline{v}||+||\underline{w}||)^2$.

11.4 Distanza tra due vettori

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, la distanza tra due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ è definita come la norma della loro differenza:

$$d(\underline{v}, \underline{w}) = ||\underline{v} - \underline{w}|| \tag{11.7}$$

11.4.1 Proprietà della distanza

$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$

- $d(\underline{v}, \underline{w}) \geq 0$ e $d(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{w}$.
- $d(\underline{v}, \underline{w}) = d(\underline{w}, \underline{v})$.
- $d(\underline{u}, \underline{w}) \leq d(\underline{u}, \underline{v}) + d(\underline{v}, \underline{w})$.

Dimostrazione

Le prime due proprietà sono conseguenze immediate della definizione, la terza dipende dalla proprietà della norma: $d(\underline{u}, \underline{w}) = ||\underline{u} - \underline{w}|| = ||\underline{u} - \underline{v} + \underline{v} - \underline{w}|| \leq ||\underline{u} - \underline{v}|| + ||\underline{v} - \underline{w}|| = d(\underline{u}, \underline{v}) + d(\underline{v}, \underline{w})$.

11.5 Ortogonalità

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

11.5.1 Ortogonalità e indipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}$ vettori non nulli e ortogonali a coppie (ovvero $\underline{v_i}\underline{v_j} = 0 \ \ \forall i \neq j$, allora $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ è un sistema indipendente.

Dimostrazione

Si eguagli la combinazione lineare al vettore nullo: $\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_p \underline{v_p} = \underline{0}$. Moltiplicando scalarmente per $\underline{v_i}$ tutti gli elementi della somma si annullano tranne $\lambda_i \underline{v_i v_i}$, essendo $\underline{v_i} \neq \underline{0}$, pertanto segue che $\lambda_i = 0$.

11.5.2 Corollario

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n, siano $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}$ vettori non nulli e ortogonali a coppie, allora $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ è una base di V.

11.5.3 Proiezioni

In uno spazio vettoriale euclideo, dato $\underline{u} \neq \underline{0}$ è possibile scrivere ogni altro vettore come somma di un vettore parallelo a $\underline{u}$ e di uno ortogonale a $\underline{u}$. Dato $\underline{v}$ lo si vuole scrivere come:

$$\underline{v} = \lambda \underline{u} + (\underline{v} - \lambda \underline{u}) \tag{11.8}$$

Scegliendo λ in modo che $\underline{u}(\underline{v} - \lambda \underline{u}) = 0$. È immediato verificare che è necessario scegliere $\lambda = \frac{\underline{v}\underline{u}}{||\underline{u}||^2}$.

Funzione proiezione ortogonale

In uno spazio vettoriale euclideo V, fissato un vettore $\underline{u} \neq \underline{0}$, la proiezione ortogonale lungo $\underline{u}$ è la funzione $pr_{\underline{u}} : V \to V$ definita ponendo $pr_{\underline{u}} = \frac{\underline{v}\underline{u}}{||\underline{u}||^2}\underline{u}$.

11.5.4 Basi ortonormali

Si definisca la funzione δ di Kronecker sulle coppie di interi i, j in modo che:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{11.9}$$

Ortonormalità

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, un insieme di vettori $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ è detto ortonormale se $\underline{v_i}\underline{v_j} = \delta_{ij}$. Un insieme di vettori è perciò ortonormale se tutti i vettori hanno norma uguale a 1 e sono ortogonali a coppie. In particolare se $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ è una base sarà detta base ortonormale.

Metodo di Gram-Schmidt

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}\}$ un sistema di vettori linearmente indipendente. Allora esiste un insieme ortonormale di vettori $\{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_p}\}$ tale che $<\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_p}> = <\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}>$.
Dimostrazione:
Si costruisca un insieme di vettori $\{\underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'}\}$ che siano ortogonali a coppie e tali che $<\underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'}> = <\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p}>$. L'insieme desiderato sarà determinato normalizzando $\{\underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'}\}$. Si ponga $\underline{a_1'} = \underline{v_1}$,
$\underline{a_2'} = \underline{v_2} - pr_{\underline{a_1'}}(\underline{v_2}) = \underline{v_2} - \frac{\underline{v_2}\underline{a_1'}}{||\underline{a_1'}||^2}\underline{a_1'}$ e $\underline{a_s'} = \underline{v_s} - \sum_{i=i}^{s-1} pr_{\underline{a_i'}}(\underline{v_s}) = \underline{v_s} - \sum_{i=i}^{s-1} \frac{\underline{v_s}\underline{a_i'}}{||\underline{a_i'}||^2}\underline{a_i'}$.
Poichè i vettori $\underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'}$ sono costruiti ortogonali a coppie, il sistema $\{\underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'}\}$

è linearmente indipendente. Inoltre per costruzione $\underline{a_i'} \in < \underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p} >$, perciò $< \underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'} > \subseteq < \underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p} >$. Poichè $dim(< \underline{v_1}, \cdots, \underline{v_p} >) = dim(< \underline{a_1'}, \cdots, \underline{a_p'} >) = p$, l'inclusione è in realtà un'uguaglianza.

Coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ una sua base ortonormale, allora la coordinata i-esima di un vettore $\underline{v}$ su tale base è data da $\underline{v}\underline{a_i}$.
Dimostrazione:
Si scriva $\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \underline{a_j}$, effettuando il prodotto scalare con $\underline{a_i}$ si trova: $\underline{v}\underline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} v_j (\underline{a_j}\underline{a_i}) = v_i$.

11.5.5 Complemento ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, dato $S \subset V$, l'insieme dei vettori ortogonali a tutti gli elementi di S è un sottospazio di V, chiamato complemento ortogonale di S e indicato con $S^{\perp}$.

Dimensione del complemento ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e S un suo sottoinsieme, allora

$$dim(S) + dim(S^{\perp}) = dim(V) \tag{11.10}$$

Dimostrazione:
Sia $\{\underline{u_1}, \cdots, \underline{u_p}\}$ una base ortonormale di S e sia $f : V \to \mathbb{R}^{\text{I}}$ la funzione definita ponendo: $f(\underline{v}) = (\underline{v}\underline{u_1}, \cdots, \underline{v}\underline{u_p})$. Tale funzione è lineare (proprietà del prodotto scalare) e suriettiva $(f(\underline{u_1}), \cdots, f(\underline{u_p})$ base canonica di $\mathbb{R}^{\text{I}})$. Inoltre $Ker(f) = S^{\perp}$. La tesi segue applicando ad f il teorema della nullità più rango.

11.6 Isomerie e matrici ortogonali

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, una funzione $f : V \to V$ è detta isomeria se $\forall \underline{v}, \underline{u} \in V$ si ha che:

$$f(\underline{v})f(\underline{u}) = \underline{vu} \tag{11.11}$$

Conservazione della norma

Poichè un'isomeria conserva il prodotto scalare allora conserva anche la norma: $||f(\underline{u})|| = ||\underline{u}||\ \forall \underline{u} \in V$: infatti $||f(\underline{u})|| = \sqrt{f(\underline{u})f(\underline{u})} = \sqrt{\underline{uu}} = ||\underline{u}||$.

Conservazione della distanza

Un'isomeria conserva la distanza, infatti: $d(f(\underline{v}), f(\underline{u})) = d(\underline{v}, \underline{u})\ \forall \underline{v}, \underline{u} \in V$: infatti $d(f(\underline{v}), f(\underline{u})) = ||f(\underline{v} - f(\underline{u})|| = ||f(\underline{v} - \underline{u})|| = \sqrt{f(\underline{v} - \underline{u}) f(\underline{v} - \underline{u})} = \sqrt{(\underline{v} - \underline{u})(\underline{v} - \underline{u})} = ||\underline{v} - \underline{u}|| = d(\underline{v}, \underline{u})$.

11.6.1 Matrici ortogonale

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è detta ortogonale se è invertibile e ha come inversa la sua trasposta. L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n si denota con $O_n(\mathbb{R})$. Si può dimostrare che $O_n(\mathbb{R})$ è un gruppo rispetto al prodotto di matrici:

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | AA^T = I_n = A^T A\} \tag{11.12}$$

11.6.2 Condizione affinchè una funzione sia un'isomeria

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, $f : V \to V$ una funzione lineare e $A = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ una base ortonormale di V. Allora f è un'isomeria se e solo se la matrice rappresentativa $B = M_A(f)$ è una matrice ortogonale.

Dimostrazione

Sia $B = [\alpha_{ij}]$. Per definizione di matrice rappresentativa si ha $f(\underline{a_i}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \underline{a_k}$ e $f(\underline{a_j}) = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{hj} \underline{a_h}$. Perciò $\delta_{ij} = \underline{a_i}\underline{a_j} = f(\underline{a_i}) f(\underline{a_j}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{hj} \underline{a_h}\underline{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{kj}$, Utilizzando la definizione del prodotto righe per colonne si vede che l'elemento di posto (i, j) nel prodotto di A con A^T è esattamente $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{kj}$, pertanto la tesi è dimostrata.

11.6.3 Osservazioni

- Una matrice ortogonale ha determinante uguale a ± 1, infatti per il teorema di Binet, si ha $det(AA^T) = det(A) det(A^T) = det(I) = 1$, dal fatto che $det(A) = det(A^T)$ segue la tesi.
- Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ con il prodotto scalare canonico: infatti considerando $\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}$ le colonne di A, essendo questa invertibile $C = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ è una base di $\mathbb{R}^{\ltimes}$. L'elemento di posto (i, j) della matrice prodotto AA^T è il prodotto scalare tra $\underline{a_i}$ e $\underline{a_j}$, quindi la matrice è identica se e solo se la base C è ortonormale.

Capitolo 12

Diagonalizzabilità

12.1 Matrici simili

Due matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono simili se $\exists C \in M_n(\mathbb{R}) : A = C^{-1}BC$.

12.1.1 Matrici rappresentative simili

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e sia $A = M_C(f)$ la sua matrice rappresentativa rispetto alla base C di V, allora:

- Se β è una base di V e $B = M_\beta(f)$ allora A e B sono simili.
- Se B è una matrice simile ad A allora esiste una base β tale che $M_\beta(f) = B$.

12.1.2 Diagonalizzabilità di una funzione

Una funzione lineare $f : V \to V$ si dice diagonalizzabile se esiste una base β di V tale che la matrice rappresentativa $M_\beta(f)$ sia diagonale. Equivalentemente f è diagonalizzabile se la sua matrice rappresentativa rispetto ad una qualsiasi base è simile ad una matrice diagonale.

Osservazione

Si osservi che se esiste una base $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ rispetto alla quale la matrice rappresentativa di f è diagonale e chiamando $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ gli elementi della diagonale si ha che $f(\underline{b_i}) = \lambda_i \underline{b_i} \ \ \forall i = 1, \cdots, n$, ovvero l'immagine di ogni vettore della base è un suo multiplo.

12.2 Autovalori e autovettori

12.2.1 Definizione

Sia $f : V \to V$ una funzione, un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice autovettore di f se esiste uno scalare λ tale che $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$. Uno scalare λ si dice autovalore di f se esiste un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$.

12.2.2 Autospazio

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e λ un autovalore di f, si dice autospazio relativo all'autovalore λ il sottospazio di dimensione positiva:

$$E(\lambda) = \{\underline{v} \in V | f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\} \tag{12.1}$$

Dimostrazione

Per verificare che $E(\lambda)$ sia un sottospazio è sufficiente considerare la funzione lineare $f_\lambda : V \to V$ definita ponendo $f_\lambda(\underline{v}) = f(\underline{v}) - \lambda\underline{v}$ e verificare che $E(\lambda) = Ker(f_\lambda)$.

Osservazioni

- L'autospazio $E(\lambda)$ è costituito dagli autovettori relativi a λ e dal vettore nullo.
- Se 0 è un autovalore di f, l'autospazio di f $E(0)$ coincide con il nucleo di f, In particolare 0 è un autovalore di f solo se la funzione non è iniettiva.

12.2.3 Autovettori e diagonalizzabilità

Una funzione lineare $f : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di f.

12.2.4 Autovalori e insiemi indipendenti

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ (con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$) autovalori di f. Siano $\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_k}$ tali che $f(\underline{v_i}) = \lambda_i\underline{v_i}$. Allora l'insieme $\{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_k}\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione

La dimostrazione segue il principio di induzione: si prova che per $k = 1$ $\underline{v_1} \neq \underline{0}$ per la definizione di autovettore, quindi $\{\underline{v_1}\}$ è indipendente. Si supponga ora che la tesi sia vera per $k-1$ vettori e la si provi per k. Si scriva pertanto la combinazione lineare dei vettori e la si ponga uguale al vettore nullo: $\mu_1\underline{v_1} + \cdots + \mu_k\underline{v_K} = \underline{0}$. Si vuole mostrare che tutti i coefficienti sono nulli. Applicando f si ottiene: $\mu_1\lambda_1\underline{v_1} + \cdots + \mu_k\lambda_k\underline{v_k} = \underline{0}$. Se invece la si moltiplica per λ_1 si ottiene:

$\mu_1\lambda_1\underline{v_1} + \cdots + \mu_k\lambda_1\underline{v_k} = \underline{0}$. Facendo la differenza tra queste due equazioni si ottiene: $\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)\underline{v_2} + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)\underline{v_k} = \underline{0}$. Per l'ipotesi induttiva $\{\underline{v_2}, \cdots, \underline{v_k}\}$ è un insieme indipendente. Segue quindi che $\mu_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$ per $i = 2, \cdots, l$. Poichè $\lambda_i \neq \lambda_1$ se $i \neq 1$ si deve avere necessariamente $\mu_i = 0 \;\; i = 2, \cdots, k$. Pertanto la differenza si riduce a $\mu_1\underline{v_1} = \underline{0}$ che implica $\mu_1 = 0$.

12.2.5 Polinomio caratteristico

Per trovare gli autovalori della funzione lineare $f : V \to V$ si scelga una base $\Gamma = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ di V e sia $A = M_\Gamma(f)$ la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base. Uno scalare λ è un autovalore di f se e solo se esiste $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$, ovvero se esiste una ennupla $\underline{x}$ tale che $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Poichè $\lambda\underline{x} = \lambda I\underline{x}$, dove I è la matrice identica di ordine n si può riscrivere la condizione come $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$. Ovvero λ è un autovalore di f se e solo se il sistema lineare omogeneo $(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ ha una soluzione non banale, ovvero se $det((A-\lambda I)) = 0$.

Definizione

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e A la matrice rappresentativa rispetto alla base $\Gamma = \{\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}\}$ di V. Il polinomio caratteristico è il polinomio:

$$\chi_f(\lambda) = det((A - \lambda I)) \tag{12.2}$$

Di grado pari alla dimensione di V. Gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico, ovvero le soluzioni dell'equazione $\chi_f(\lambda) = 0$.

12.2.6 Polinomi caratteristici e basi

Il polinomio caratteristico è ben definito, ovvero non dipende dalla base utilizzata per calcolarlo.

Dimostrazione

Sia $\beta = \{\underline{b_1}, \cdots, \underline{b_n}\}$ un'altra base di V e B la matrice rappresentativa di f per tale base. Posto $C = M_\Gamma^\beta$, si ha: $B = C^{-1}AC$, da ciò segue: $B - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC = C^{-1}(A - \lambda I)C$, perciò per il teorema di Binet: $det(B - \lambda I) = \frac{1}{det(C)}det(A - \lambda I)det(C) = det(A - \lambda I)$.

12.2.7 Molteplicità algebrica e geometrica

Molteplicità algebrica

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e λ_0 un autovalore di f. La molteplicità algebrica di λ_0. denotata con $a(\lambda_0)$ è la molteplicità di λ_0 come soluzione di $\chi_f(\lambda)$,

Molteplicità geometrica

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e λ_0 un autovalore di f. La molteplicità geometrica di λ_0. denotata con $g(\lambda_0)$ è la dimensione dell' autospazio $E(\lambda_0)$. È un valore sempre maggiore uguale a 1.

Legame tra molteplicità algebrica e geometrica

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e λ_0 un autovalore di f. Allora:

$$1 \leq g(\lambda_0) \leq a(\lambda_0) \tag{12.3}$$

Dimostrazione: Sia $g = g(\lambda_0)$ e $\Gamma = \{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_g}\}$ una base dell'autospazio $E(\lambda_0)$. Si completi Γ rispetto ad una base B di V, $B = \{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_g}, \underline{v_{g+1}}, \cdots, \underline{v_n}\}$. Si trovi la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base e si trova che: $\chi_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^g det(B - \lambda I)$, da cui si può verificare che $a(\lambda_0) \leq g(\lambda_0)$.

Corollario

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare e λ_0 un autovalore di f tale che $a(\lambda_0) = 1$, allora $a(\lambda_0) = g(\lambda_0)$.

12.3 Criteri di diagonalizzabilità

Una funzione lineare $f : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico $\chi_f(\lambda)$ è totalmente riducibile (si può fattorizzare come prodotto di polinomi di primo grado) e per ogni autovalore λ_i si ha $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$.

Dimostrazione

Supponendo che f sia diagonalizzabile si ha una base $B = \{\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}\}$ costituita da autovettori di f. La matrice rappresentativa $M_B(f)$ è una matrice diagonale, con sulla diagonale autovettori di f. Il polinomio caratteristico è pertanto totalmente riducibile e si scrive come $\prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)^{a(\lambda_i)}$. La matrice di $f_{\lambda_i} = f - \lambda_i I$ ha chiaramente un numero di zeri pari al numero di volte in cui compare l'autovalore $\lambda - i$, ovvero pari alla sua molteplicità algebrica, ovvero $g(\lambda_i) = dim(Ker(f_{\lambda_i})) = a(\lambda_i)$. Viceversa, se χ_f è totalmente riducibile, allora $\sum_{i=1}^{r} a(\lambda_i) = dim(V)$, inoltre, essendo $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ si ha $\sum_{i=1}^{r} g(\lambda_i) = dim(V)$. Si ponga $g_i = g(\lambda_i)$ e si considerino $\Gamma_1 = \{\underline{a_{11}}, \cdots, \underline{a_{1g_1}}\}, \cdots, \Gamma_r = \{\underline{a_{r1}}, \cdots, \underline{a_{rg_r}}\}$ basi dei sottospazi $E(\lambda_1), \cdots, E(\lambda_r)$. Per concludere basta dimostrare che l'unione delle basi $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r$ è una base di V. Poichè si tratta di $dim(V)$ vettori, è sufficiente dimostrare la loro indipendenza lineare, $\mu_{11}\underline{a_{11}} + \cdots + \mu_{1g_1}\underline{a_{1g_1}} + \cdots + \mu_{r1}\underline{a_{r1}} + \cdots + \mu_{rg_1}\underline{a_{rg_1}} = \underline{0}$, raggruppando i vettori che appartengono allo stesso autospazio e ponendo $\underline{w_i} = (\mu_{i1}\underline{a_{i1}} + \cdots + \mu_{ig_1}\underline{a_{ig_1}})$. Poichè i vettori $\underline{w_i}$ appartengono ad autospazi diversi è stato precedentemente dimostrato che essi siano indipendenti, si deve necessariamente avere $\underline{w_i} = \underline{0}$ $i = 1, \cdots, r$. Essendo ogni vettore $\underline{w}$ composto da una base anche questi elementi sono indipendenti, pertanto i vettori di A sono indipendenti.

12.3.1 Corollario

Sia $f : V \to V$ una funzione lineare tale che il polinomio caratteristico χ_f sia totalmente riducibile, e per ogni autovalore λ_i si abbia $a(\lambda_i) = 1$, allora f è diagonalizzabile.

12.3.2 Matrici diagonalizzanti

Sia $f : V \to V$ una funzione diagonalizzabile e sia A la sua matrice rappresentativa rispetto alla base Γ, si è dimostrato come sia possibile trovare le componenti degli autovettori di f sulla base Γ come soluzioni di sistemi omogenei determinati dagli autovalori di f. Sia B una base di formata da autovettori di f, la matrice di cambio di base M_B^Γ non è altro che la matrice che ha sulle colonne le componenti sulla base Γ degli autovettori stessi.

12.3.3 Applicazioni

Dato un endomorfismo $f : V \to V$, la sua potenza f^k è definita come la composizione $f \circ f \circ f \cdots$ per k volte. Se Γ è una base di V e $A = M_\Gamma(f)$ è la matrice rappresentativa di f rispetto alla base Γ allora la matrice rappresentativa di f^k rispetto alla stessa base sarà A^k. Se la matrice A è diagonale, allora basta elevare a k gli elementi della diagonale. Anche se la matrice è simile ad una matrice diagonale, si è visto come essendo β una base di V costituita da autovettori di f, allora se $B = M_\beta(f)$ la matrice B è diagonale e ha sulla diagonale gli autovalori, ordinati come gli elementi di β. Si è visto come $B = C^{-1}AC$, dove C è la matrice le cui colonne sono le componenti degli elementi di β. Segue che $A = CBC^{-1}$, perciò: $A^k = (CBC^{-1})(CBC^{-1}) \cdots (CBC^{-1}) = CB^kC^{-1}$.

12.4 Endomorfismi simmetrici

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, la funzione $f : V \to V$ è detta simmetrica o autoaggiunta se $f(\underline{u}\underline{v}) = \underline{u}f(\underline{v})$ $\forall \underline{v}\underline{u} \in V$.

12.4.1 Simmetria e matrice rappresentativa

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $f : V \to V$ una funzione lineare e sia A la sua matrice rappresentativa rispetto ad una base ortonormale di V, allora f è simmetrica se e solo se A è una matrice simmetrica.

Dimostrazione

Il termina a_{ij} della matrice rappresentativa di f è dato dalla componente i-esima dell'immagine del j-esimo vettore della base. Come si è precedentemente dimostrato, $a_{ij} = f(\underline{a_j})\underline{a_i}$ e $a_{ji} = f(\underline{a_i})\underline{a_j}$. Se f è simmetrica $a_{ij} = a_{ji}$ e quindi A è simmetrica. Se A è simmetrica la simmetria di f segue dalle due eguaglianze prima esplicitate e dalla linearità di f, infatti se $\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\underline{a_i}$ e $\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j\underline{a_j}$, si ha $f(\underline{u})\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i f(\underline{a_i}) \sum_{j=1}^{n} v_j f(\underline{a_j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j f(\underline{a_i})\underline{a_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j \underline{a_i} f(\underline{a_j}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\underline{a_i} \sum_{j=1}^{n} v_j f(\underline{a_j}) = \underline{u} f(\underline{v})$.

12.4.2 Corollario

Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^{\ltimes}$ con il prodotto scalare canonico, e $f : \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ una funzione lineare, allora f è simmetrica se e solo se la sua matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ è simmetrica.

12.4.3 Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, $f : V \to V$ una funzione lineare simmetrica e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori di f. Siano $\underline{v_1} \in E(\lambda_1)$ e $\underline{v_2} \in E(\lambda_2)$, allora $\underline{v_1 v_2} = 0$.

Dimostrazione

Da $f(\underline{v_1 v_2}) = \underline{v_1} f(\underline{v_2})$ si ottiene $\lambda_1 \underline{v_1 v_2} = \underline{v_1}\lambda_2\underline{v_2}$, perciò $(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v_1 v_2} = 0$, da cui la tesi.

12.4.4 Il teorema spettrale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $f : V \to V$ una funzione lineare simmetrica, allora il polinomio caratteristico $\chi_f(\lambda)$ è totalmente riducibile.

Dimostrazione

Per il teorema fondamentale dell'algebra $\chi_f(\lambda)$ è totalmente riducibile in $\mathbb{C}$, basta perciò mostrare che ogni sua radice complessa è reale. Siano A una matrice rappresentativa di f rispetto a una base ortonormale Γ e $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di f, $\underline{v}$ un un autovettore in $E(\lambda)$ e $\underline{x}$ il vettore delle sue coordinate su Γ. Da $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, trasponendo e prendendo il suo coniugato si ottiene: $\bar{\underline{x}}^T A = \bar{\lambda}\bar{\underline{x}}^T$, perciò moltiplicando a destra per il vettore colonna $\underline{x}$ si ottiene $\bar{\underline{x}}^T A\underline{x} = \bar{\lambda}\bar{\underline{x}}^T\underline{x} = \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$. Moltiplicando invece a sinistra l'uguaglianza per $\bar{\underline{x}}^T$ si ottiene $\bar{\underline{x}}^T A\underline{x} = \lambda\bar{\underline{x}}^T\underline{x} = \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$. Si eguaglino le due espressioni e si ottiene $\lambda = \bar{\lambda}$, ovvero λ è un numero reale.

Enunciato

Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $f : V \to V$ una funzione lineare simmetrica, allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di f, in particolare f è diagonalizzabile.

Dimostrazione

La dimostrazione avviene per induzione su $dim(V)$. Se $dim(V) = 1$, dato un qualsiasi vettore $\underline{v_1} \neq \underline{0}$, la sua normalizzazione è un autovettore e costituisce una base ortonormale di V. Si supponga ora vera la tesi per $dim(V) = n - 1$ e attraverso quella si provi $dim(V) = n$. Per il lemma precedentemente dimostrato esiste λ autovalore reale di f, sia $\underline{a_1}$ un autovettore relativo a λ di norma unitaria, sia U il sottospazio ortogonale ad $\underline{a_1}$, tale sottospazio ha dimensione $n-1$ per i teoremi precedentemente dimostrati, si osservi che $\forall \underline{u} \in U$ si ha $f(\underline{u}) \subset U$, infatti: $f(\underline{u})\underline{a_1} - \underline{u}f(\underline{a_1}) = \lambda \underline{u}\underline{a_1} = 0$. Si può considerare la funzione $f : U \to U$ data dalla restrizione di f. Per l'ipotesi induttiva esiste tuttavia una base ortonormale $\{\underline{a_2} \cdots , \underline{a_n}\}$ di U costituita da autovettori di f. La base cercata è quindi $\Gamma = \{\underline{a_1}, \underline{a_2}, \cdots , \underline{a_n}\}$.

Corollario

Si consideri come spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^{\ltimes}$ con il prodotto scalare canonico, sia $\Gamma = \{\underline{a_1} \cdots , \underline{a_n}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ e sia β la base canonica di $\mathbb{R}^{\ltimes}$ e $C = M_{\Gamma}^{\beta}$ la matrice di cambiamento di base. L'ortonormalità della base Γ è equivalente alle condizioni $C^T C = Id = CC^T$, ovvero l'inversa della matrice di transizione è la sua trasposta. Perciò una matrice reale simmetria A è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale, ovvero esiste una matrice diagonale C tale che $C^{-1}AC$ è una matrice diagonale .